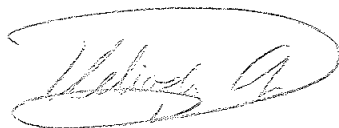


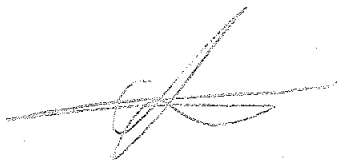
T.S./91

ESTABILIDAD DE PUENTES LIQUIDOS CILINDRICOS SOMETIDOS A CAMPOS ELECTRICOS E ISORROTACIONALES EN AMBIENTES DE MICROGRAVEDAD

Memoria presentada por
Heliodoro González García
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas



El Director



LBS 411012

Antonio Castellanos Mata
Catedrático de Electromagnetismo

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
FACULTAD DE FISICA
Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio de 1.991

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Indice

1	Introducción	3
1.1	Motivación del trabajo	3
1.2	Antecedentes	5
1.3	Mecanismos de actuación de un campo eléctrico sobre una interfase	7
1.4	Objetivos y organización de la Tesis	9
2	Formulación general	13
2.1	El modelo físico	14
2.2	Descripción matemática del sistema	16
2.2.1	Ecuaciones fundamentales	16
2.2.2	Condiciones de contorno y ligaduras	18
2.3	Adimensionalización. Parámetros adimensionales	22
2.4	Simetrías	26
3	El puente cilíndrico. Puntos de bifurcación y estabilidad.	29
3.1	Puntos de bifurcación y familias bifurcadas	30
3.1.1	El problema lineal	30
3.1.2	Resolución	31
3.1.3	Cálculo y descripción de las superficies de bifurcación.	36
3.1.4	Resultados y discusión	39
3.2	Dinámica de pequeñas oscilaciones	45
3.2.1	Ecuaciones dinámicas lineales	46
3.2.2	Eliminación del campo de velocidades	47

3.2.3	Resolución del problema dinámico	49
3.2.4	Resultados para puentes sin rotación	54
4	Gravedad residual	57
4.1	Equilibrio con gravedad residual	58
4.1.1	El problema lineal	58
4.2	El Método de Lyapunov-Schmidt	61
4.2.1	Descripción del método	61
4.2.2	Formulación operacional del problema de bifurcación.	65
4.2.3	El operador lineal y su adjunto.	67
4.2.4	Desarrollo perturbativo del problema ampliado.	69
4.2.5	Algunas propiedades de simetría.	72
4.2.6	Obtención de $\psi_{i,j,k}$ mediante la condición de compatibilidad.	73
4.2.7	Interpretación de la ecuación de bifurcación.	75
4.3	Resolución del problema de orden arbitrario	77
4.3.1	El Método de las Líneas	78
4.3.2	El esquema en diferencias finitas	83
4.4	Resultados y discusión	85
4.5	El modo en comba	90
5	Estudio experimental de la estabilidad de zonas no rotantes	93
5.1	Descripción del montaje y el método operativo	94
5.2	Relación entre el modelo teórico y el montaje experimental	98
5.3	Medida de la tensión superficial	102
5.4	Resultados experimentales y discusión. Errores	104
A	Series de Fourier	111
A.1	Desarrollo de funciones en series de cosenos	111
A.2	Suma analítica de series funcionales	111
B	Matrices de discretización	117
C	Funciones $h_{i,j,k}^{(l)}$	119

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación del trabajo

El trabajo que presentamos pertenece al dominio de la Electrohidrodinámica (EHD), o rama de la Electrodinámica de los Medios Continuos que estudia fenómenos de origen eléctrico en fluidos de baja conductividad. En tal situación los posibles campos magnéticos generados por la presencia de cargas en movimiento son despreciables. Por otra parte los campos eléctricos, aun cuando sean variables con el tiempo, son descritos por las ecuaciones de la Electroestática suplementadas por la ley de conservación de la carga (Cuasielectrostática). Aún cuando el nacimiento de la EHD como área científica reconocida es relativamente nuevo, su estudio ha preocupado a muchos investigadores desde antiguo. Ver [Pickard, 1965], donde se hace una revisión histórica sobre el tema.

Los efectos del campo eléctrico sobre los fluidos se manifiestan a través de la aparición de fuerzas que se clasifican en tres tipos. En primer lugar tenemos las fuerzas coulombianas, proporcionales a la densidad de carga y al campo eléctrico. En segundo lugar están las fuerzas dieléctricas, que aparecen siempre que existen gradientes o saltos en la permitividad de los medios y cuyo efecto general es el de tratar de situar el medio o la región de fluido de mayor permitividad allí donde el campo es más intenso. Finalmente se tienen las fuerzas de electrostricción, que no producen ningún efecto dinámico sobre fluidos incompresibles al

poderse englobar en el término de presión en las ecuaciones de Navier-Stokes. Las tres fuerzas descritas pueden actuar tanto en volumen como sobre interfases. La riqueza de la fenomenología que engloba la EMD queda recogida en [Melcher, 1981] y [Pohl, 1978]. Para el caso de la actuación de campos eléctricos sobre interfases puede consultarse [Melcher, 1963] y [Melcher, 1969a].

En el problema que nos hemos planteado tan sólo son relevantes las fuerzas dieléctricas. La importancia y aplicación de los fenómenos que éstas originan no necesitan ningún énfasis, puesto que forman la base de numerosos procesos industriales, tales como procedimientos de separación de minerales, de proteínas o macromoléculas. La aplicación de campos eléctricos no uniformes a medios no homogéneos permiten en términos generales una redistribución de materia. Las expectativas de aplicación en el control de la polución, en el tratamiento de aguas, o en el confinamiento de líquidos propelentes en condiciones de microgravedad han generado una motivación importante en su estudio. Especial interés para la Física y Química de superficies tienen los efectos estabilizantes de las fuerzas dieléctricas sobre interfases sometidas a campos tangenciales, dado que permiten la formación de extensas superficies que pueden ser objeto de distintos tipos de investigación.

El tema concreto que se pretende estudiar es el comportamiento de una masa de líquido aislante entre dos electrodos planoparalelos confinada por sus propias fuerzas de cohesión a una configuración cilíndrica, cuando se aplica una diferencia de potencial entre los electrodos. El problema capital es bajo qué condiciones tal configuración, que siguiendo la literatura denominaremos *punte líquido*, es estable.

La idea que motivó el trabajo fue la posible utilidad de las fuerzas electrostáticas para la estabilización de puentes líquidos. En la actualidad este tipo de configuraciones es objeto de gran atención por parte de la comunidad científica debido a su interés tecnológico. En particular destacan por un lado su aplicación a los procesos de purificación y crecimiento de monocristales mediante la *técnica de la zona flotante* [Keller, 1981] y por otro la sensibilidad de su comportamiento estático y dinámico ante aceleraciones cuando nos acercamos a los límites de estabilidad, lo cual ha hecho pensar en el diseño de acelerómetros basados en esta propiedad.

En ambas aplicaciones es deseable contar con un mecanismo de

estabilización rápido y enérgico que evite la ruptura del puente. Es aquí donde un campo electrostático puede jugar un papel relevante. De hecho lo que se pretende establecer en este trabajo es el modo en que un campo eléctrico predominantemente axial estabiliza y permite la existencia de zonas estables de mayor longitud mediante la acción de las fuerzas de polarización. La aplicabilidad de configuraciones mantenidas mediante campos cuasielectrostáticos en la técnica de la zona flotante se restringen a materiales que pasado el punto de fusión tengan una conductividad moderada. Si esto es así, las esbelteces susceptibles de ser alcanzadas no tienen límite teórico. Este es quizás el resultado más llamativo del trabajo que presentamos¹.

Finalmente, cabe mencionar el interés que tiene desde el punto de vista académico la posibilidad de trabajar con puentes de estabilidad controlable y gran esbeltez para el estudio de su dinámica y ruptura.

1.2 Antecedentes

El estudio de formas cilíndricas mantenidas por fuerzas capilares ya fue abordado por Rayleigh en 1894, quien, con un tratamiento energético del problema de estabilidad de chorros, llegó a la conclusión de que son inestables las perturbaciones axilsimétricas que se propagan con longitud de onda mayor que el perímetro de la sección circular del chorro, y que éste se desintegra en porciones definidas por la longitud de onda más inestable, $\lambda_c \simeq 9R$, siendo R el radio del chorro. El argumento intuitivo que podemos usar para entender la pérdida de estabilidad es que la energía debida a la tensión superficial es proporcional a la superficie de la interfase, y ésta aumenta precisamente con deformaciones cuya longitud de onda es mayor que el perímetro del chorro.

Sin embargo paulatinamente se perdió interés en este tipo de estudios, quizás debido a la dificultad matemática para expresar la solu-

¹ Desgraciadamente en el caso de los semiconductores de interés tecnológico, tales como el Silicio o el Arseniuro de Galio, su conductividad aumenta enormemente con la temperatura, de forma que fundidos son muy buenos conductores. Justamente esta es la razón por la que el propio campo de radiofrecuencia utilizado para fundir localizadamente la barra del material estabiliza la zona flotante. Este efecto se ha observado desde el desarrollo inicial de la técnica [Keller, 1981] y últimamente se ha intentado justificar teóricamente [Riahi, 1989].

ción de estos problemas en términos de funciones analíticas simples, a la ausencia de computadores, al desconocimiento de la físico-química de la interfase y a la carencia de potenciales aplicaciones industriales. Esta situación ha cambiado por completo en los últimos años, puesto que por una parte se cuenta con los medios adecuados para atacar el problema matemático y por otra numerosos procesos industriales, tales como los descritos en la sección anterior, en los que los conocimientos sobre los fenómenos capilares son fundamentales, sirven de aliciente. A ello se debe la extraordinaria atención que se ha despertado recientemente sobre estos temas. En particular, cabe citar los trabajos de [Padday, 1973], [Pitts, 1973], [Pitts, 1974] y [Michael, 1976] sobre formas de equilibrio de las interfases y estabilidad de las mismas. [Brown, 1980] y [Busse, 1984] han abordado el estudio de la estabilidad y dinámica de pequeñas oscilaciones de gotas líquidas cautivas sometidas a rotación. En ambientes de gravedad reducida destacan los trabajos sobre la dinámica de puentes líquidos y gotas cautivas, [Strani, 1984], [Meseguer, 1985], y [Sanz, 1985]. De este último trabajo se ha tomado el tratamiento matemático de los problemas lineales que se abordan en esta Tesis. En el caso de gravedad arbitraria ha aparecido más recientemente [Gañán, 1989]. En [Perales, 1990b] se incluye una revisión bibliográfica de los trabajos aparecidos sobre estática, dinámica y estabilidad de puentes líquidos y gotas cautivas. Otra serie de trabajos con los que estamos en deuda son [Vega, 1983], [Perales, 1987] y [Perales, 1990a], en los que se estudia mediante la técnica de Lyapunov-Schmidt el comportamiento local de bifurcación de puentes cilíndricos en rotación bajo los efectos de ciertas imperfecciones tales como gravedad residual, excentricidad de los discos de anclaje y diferencia en los radios de los mismos.

En otra vertiente tenemos los trabajos sobre chorros electrificados o sometidos a campos externos. En particular, la estabilidad de chorros dieléctricos bajo un campo eléctrico externo, problema muy relacionado con el que nos ocupa, se trata en [Nayyar, 1960] usando un método energético, llegando a la conclusión de que un campo eléctrico tangencial a la interfase tiende a estabilizarla, aumentando la longitud de onda mínima de desestabilización. Este efecto, así como el de desestabilización de campos eléctricos perpendiculares a la interfase, se estudia de forma general en [Melcher, 1963]. Cabe mencionar

también [Mykxis, 1981], [Cheng, 1984], [Luyten, 1983], [Luyten, 1985], [Basaran, 1989a] y [Basaran, 1989b] sobre gotas cargadas y dieléctricos, así como [Taylor, 1969], [Schneider, 1967], [Melcher, 1969b], [Reynolds, 1965], [Saville, 1970] y [Saville, 1971] sobre chorros electrificados.

1.3 Mecanismos de actuación de un campo eléctrico sobre una interfase

El efecto de un campo eléctrico sobre una interfase entre dos líquidos aislantes puede entenderse mediante un argumento simple en términos de energía. Supongamos que el campo aplicado es tangencial a una interfase plana (figura 1.1(a)). Una perturbación elemental (sinusoidal) de dicha interfase induce cargas de polarización sobre ella, cuya magnitud y signo dependen de la orientación del vector normal a la superficie respecto del campo aplicado. La carga inducida alterna zonas con signo positivo y negativo, de forma que al campo inicial E_0 debe sumarse una perturbación que tiene en cada medio fundamentalmente igual magnitud y dirección pero sentidos opuestos, de tal forma que en el medio de mayor permitividad disminuye el campo y viceversa. Esto hace que la energía almacenada, cuya densidad es $\epsilon E^2/2$, sea menor que en la situación no perturbada, lo cual no es favorecido espontáneamente. El sistema tiende a la situación no perturbada: es estable. Si en vez de una interfase plana tenemos una con geometría cilíndrica el argumento se mantiene, puesto que el mecanismo fundamental de formación de cargas de polarización es el mismo. Se espera por ello que tanto si el líquido de mayor permitividad forma el puente como si se utiliza como baño, se produzca un efecto eléctrico estabilizante.

Para entender el efecto de un campo perpendicular a la interfase acudiremos mejor a un argumento dinámico. Si consideramos un condensador cuyas placas se encuentran a una diferencia de potencial Φ_0 y entre las cuales se disponen dos líquidos de distinta permitividad con la interfase paralela a ellas (figura 1.1(b)) tendremos un campo perpendicular. Denotamos por x la distancia de la interfase al electrodo a mayor potencial. El campo eléctrico parte de este electrodo en dirección

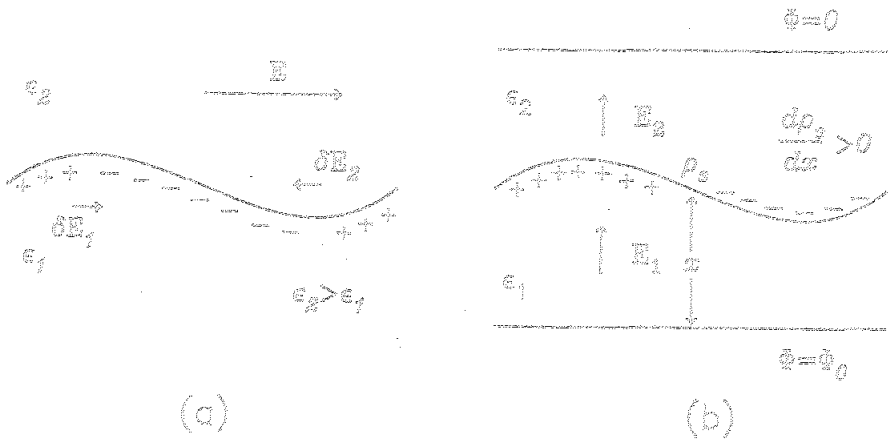


Figura 1.1: Esquema de actuación de campos eléctricos (a) paralelos y (b) perpendiculares a una interfase entre medios aislantes.

al otro (sentido de los potenciales decrecientes) y sufre un salto en su valor en la interfase, debido a la distinta polarizabilidad de los medios. El salto del campo es igual en magnitud a la carga de polarización que se crea en la interfase. Puede comprobarse mediante cálculos sencillos que cuanto mayor es α más positiva es la densidad de carga de polarización. Esto quiere decir que una perturbación sinusoidal de la interfase, que acerca unas zonas de ésta al electrodo a mayor potencial y aleja otras, disminuye la carga de las primeras y aumenta la de las últimas, todo ello a causa de un aumento o disminución local de los campos antes y después de la interfase. Puesto que el campo eléctrico actúa en sentido hacia la placa a menor potencial, tirará de la zona con exceso de carga en esa dirección y de la zona con defecto de carga en dirección contraria, amplificando la deformación de la interfase.

Si existe carga libre en la interfase, debida a una cierta conductividad, distinta en cada medio, el efecto es también desestabilizante, lo cual se ve inmediatamente teniendo en cuenta que la carga libre se reparte de la misma forma que la de polarización del caso anterior, pero ahora por efecto de influencia de las densidades de carga de los electrodos. Dado el efecto desestabilizante que inducen, es deseable

suprimirlas de algún modo. Esto es posible si el campo eléctrico aplicado es alterno y tiene una frecuencia ω lo suficientemente grande como para que cambie su polaridad varias veces en el tiempo necesario para la acumulación de carga libre. Este último viene determinado aproximadamente por el cociente entre la permitividad media, $\bar{\epsilon}$ y la conductividad eléctrica media $\bar{\sigma}$ entre ambos medios, es decir, la condición es $1/\omega \ll \bar{\epsilon}/\bar{\sigma}$. Cuanto más aislantes sean los medios y mayor sea la frecuencia del campo aplicado, tanto menor será el efecto desestabilizante de las cargas libres.

1.4 Objetivos y organización de la Tesis

El trabajo presentado pretende establecer teórica y experimentalmente el carácter estabilizante de un campo eléctrico axial sobre un puente líquido. Se ha eliminado casi completamente el efecto del campo gravitatorio terrestre mediante la técnica del Tanque de Plateau, y nos hemos centrado en zonas líquidas de volumen cilíndrico con la intención de comparar los resultados experimentales con resultados analíticos posibles de obtener para puentes perfectamente cilíndricos. Posteriormente refinamos el modelo físico incluyendo el efecto de la gravedad residual sobre la estabilidad del puente.

Paralelamente a este desarrollo matemático con miras a una comparación cuantitativa con el experimento, se obtendrán resultados teóricos para puentes rotando alrededor del eje de simetría. La experimentación en este caso se ve impedida en tierra por la necesidad de un baño isodenso para contrarrestar los efectos del campo gravitatorio.

Aunque los fenómenos que nos interesan pertenecen a la estática del puente, nos ocuparemos además de la dinámica de pequeñas oscilaciones en el límite no viscoso como un medio de establecer la estabilidad lineal del puente cilíndrico. Este estudio debe pues entenderse como secundario dentro de los objetivos propuestos, y no se pretende de ningún modo ser exhaustivos en la obtención de resultados. En particular no se describe la dinámica de puentes en rotación en presencia de campos eléctricos dado que por continuación del caso sin rotación se puede determinar la estabilidad de las regiones delimitadas por los puntos de bifurcación.

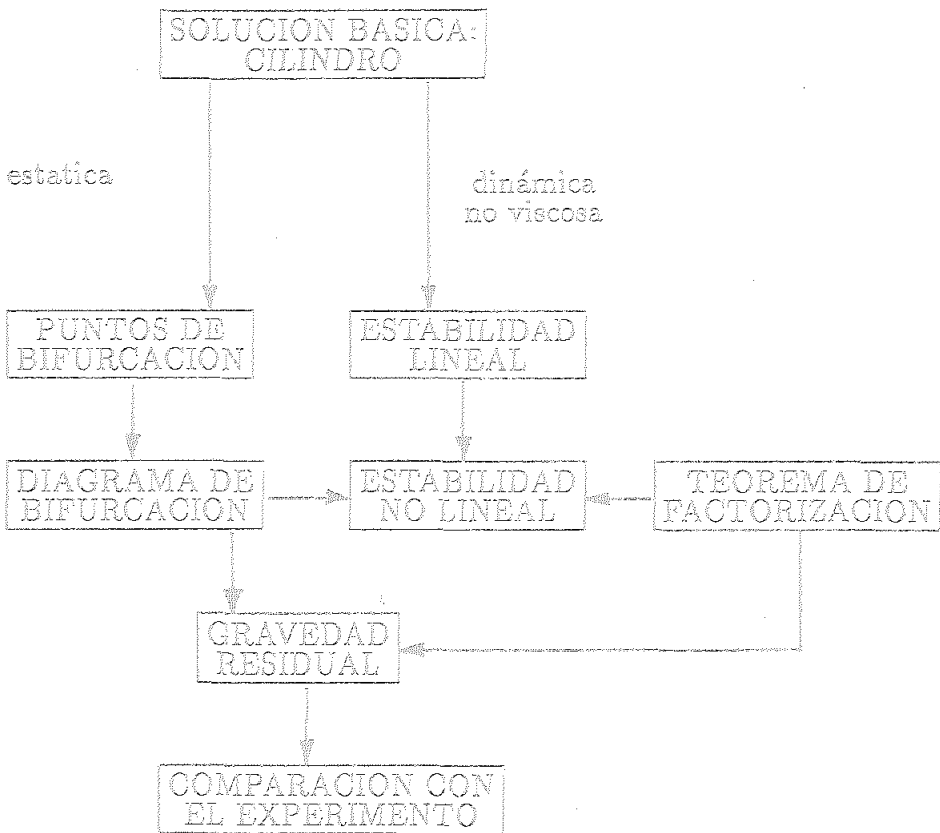


Figura 1.2: Interrelación entre los distintos objetivos del trabajo.

En el diagrama de la figura 1.2 se establece la secuencia de resultados que dan lugar a un modelo matemático comparable con la experiencia, así como la conexión que existe entre ellos.

En el capítulo 2 presentamos el sistema físico que se pretende estudiar, las aproximaciones efectuadas y su formulación matemática.

Un estudio estático lineal de las formas de equilibrio admisibles cercanas a la cilíndrica determina todos los puntos en el espacio de parámetros que gobiernan el sistema para los cuales la solución básica bifurca a otras familias de soluciones (puntos de bifurcación). Por otro lado, el estudio dinámico no viscoso que más arriba hemos mencionado,

permite conocer el carácter estable o inestable de las regiones en que queda dividido el espacio de parámetros por las superficies de bifurcación. Todo ello es materia del capítulo 3.

En el capítulo 4 se ataca el problema de la naturaleza de la primera bifurcación a otra familia de soluciones que sufre el puente cilíndrico. Ello se hace mediante un método de proyección bien conocido en la literatura, denominado Método de Lyapunov-Schmidt. El diagrama de bifurcación resultante da información sobre las familias bifurcadas y su estabilidad, esto último con ayuda del Teorema de Factorización. Con las mismas herramientas podemos estudiar la ruptura de la bifurcación en soluciones aisladas que tiene lugar cuando introducimos en el modelo físico la gravedad residual. Esta situación es la que se tiene en el experimento llevado a cabo, y a su descripción y comparación con la teoría elaborada se dedica el quinto y último capítulo.

Capítulo 2

Formulación general

En este capítulo presentamos una caracterización del sistema físico estudiado, así como su modelización matemática. Se pretende hacer una formulación con cierta generalidad, de forma que aparezcan todos los elementos que van a ser objeto de estudio a lo largo de este trabajo. No obstante, fenómenos de tanta relevancia en la práctica como aquellos que tienen su origen en un gradiente térmico en el sistema no serán considerados, puesto que se salen de los objetivos marcados. Para tener una visión más exacta de los líquidos con los que se ha trabajado en el laboratorio, incluimos en la formulación su viscosidad, aun cuando posteriormente resolvemos exclusivamente casos no viscosos. Ello es debido a que los resultados obtenidos en este límite dan la información deseada sobre la estabilidad del sistema.

En primer lugar se definirá el concepto de puente líquido sometido a una diferencia de potencial eléctrico, a un campo isorrotacional y a un campo gravitatorio. A continuación se detallarán las idealizaciones hechas sobre dicho sistema y se escribirán las ecuaciones que lo rigen. Posteriormente se reformulará el problema general en forma adimensional, analizando el significado de los números adimensionales que aparecen. Finalmente se hará un estudio de las simetrías que dejan invariante el conjunto de ecuaciones, y que serán de utilidad posteriormente.

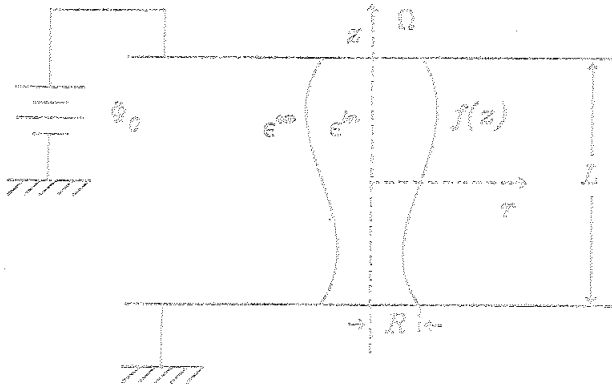


Figura 2.1: Esquemmatización de un puente líquido en rotación y sometido a una diferencia de potencial eléctrico. Se indica la notación utilizada y el sistema de referencia.

2.1 El modelo físico

El sistema más general que se pretende estudiar en este trabajo consiste en una masa líquida confinada por fuerzas capilares, anclada entre dos electrodos planoparalelos separados una distancia L y a distinto potencial eléctrico, como muestra la figura 2.1. Esta masa líquida moja a ambos electrodos en dos círculos enfrentados de radio R , y sólo allí, gracias a dos anillos de anclaje de pequeña altura ($h \ll L$) que evitan que el líquido se extienda. En la literatura se suele denominar *puentes líquidos* a configuraciones de una masa líquida que, como la descrita, conectan dos soportes sólidos.

Consideraremos puentes con volúmenes cercanos a $V = \pi R^2 L$, cantidad que se mantiene constante por conservarse la masa y tratarse de fluidos incompresibles. El puente puede o no estar rodeado de un medio exterior o *baño*, que en todo caso se supone inmisible con él.

Todo el sistema puede girar con velocidad angular Ω alrededor del eje que pasa por los centros de los discos de anclaje.

Por tanto, el puente líquido está sometido fundamentalmente a las fuerzas capilares, a las eléctricas y a las debidas a la rotación. En cuanto a las fuerzas gravitatorias, se tendrán en cuenta de un modo restringido: supondremos que bien por estar el sistema en caída libre, bien por tener el baño una densidad muy parecida a la del puente, los efectos de las fuerzas gravitatorias son mucho menores que los de las capilares. Esta situación se conoce como de *microgravedad*, y las fuerzas gravitatorias se tratan como una imperfección del sistema analizable mediante técnicas perturbativas.

En cuanto a la naturaleza de los líquidos considerados, son relevantes las siguientes características:

- Son aislantes eléctricos, es decir, su conductividad eléctrica es despreciable. No existen corrientes ni cargas en volumen, ni debidas a impurezas ionizables ni a la autodisociación de los propios líquidos.
- Son homogéneos, con lo cual no existen gradientes de concentración. Esto, unido a la ausencia de gradientes térmicos, implica que todas las propiedades físicas, tales como la densidad, la permitividad eléctrica, la viscosidad y la tensión superficial, son uniformes.

Otras idealizaciones son:

- Los electrodos son muy extensos, de forma que existe una región central amplia en la que el campo eléctrico sería uniforme en ausencia de líquidos.
- La diferencia de potencial entre electrodos se considera constante. No obstante en la sección 5.2 se pondrá de manifiesto que el modelo también es válido para potenciales alternos en un cierto rango de frecuencias que está determinado por los tiempos de relajación de las cargas en los líquidos y de evolución fluidodinámica.
- El recipiente contenedor del sistema (en caso de baño externo) tiene las paredes lo suficientemente alejadas para que ejerzan una influencia despreciable en la dinámica del puente.

- Los anillos de anclaje no tienen otro efecto que el de fijar las líneas de contacto entre electrodos, puente y baño y dejar arbitrario el ángulo de contacto.

2.2 Descripción matemática del sistema

Para describir nuestro sistema físico elegimos un triedro de referencia con origen en el punto medio del eje de rotación, que tomaremos como eje OZ, y que gira con igual velocidad angular. Utilizaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para determinar la posición. En cada punto está definido una terna de vectores unitarios ortogonales según las direcciones coordenadas, que denotamos por $\{e_r, e_\theta, e_z\}$.

La ausencia de corrientes en el sistema implica que el problema eléctrico se reduce a la determinación del potencial escalar $\phi(r, t)$ del cual deriva el campo cuasielectrostático $E = -\nabla\phi$. Son incógnitas del problema hidrodinámico el campo de velocidades $v(r, t)$ y de presión $p(r, t)$. Además, la superficie de separación entre puente y baño es libre, y puede ser descrita por la ecuación

$$F(r, \theta, z, t) \equiv r - f(\theta, z, t) = 0 \quad (2.1)$$

siendo $f(\theta, z, t)$ otra incógnita. A toda magnitud le asignaremos el superíndice "in" si corresponde al puente y "ex" si corresponde al baño, o bien no se especifica si nos referimos a cualquiera de las zonas.

2.2.1 Ecuaciones fundamentales

Puesto que no existe carga en volumen ni tampoco gradientes de permitividad, el potencial electrostático verifica la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.2)$$

El campo de velocidades satisface la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (2.3)$$

y, junto con el campo de presiones, la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot T_v + F_v. \quad (2.4)$$

Aquí ρ es la densidad del fluido considerado, la derivada sustancial se define como $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, \mathcal{T}_v es el tensor de esfuerzos viscosos, y por último \mathbf{F}_V las fuerzas volumétricas. El tensor de esfuerzos viscosos para fluidos newtonianos incompresibles está dado por la expresión

$$\mathcal{T}_v = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] \quad (2.5)$$

donde μ es la viscosidad dinámica y el superíndice "t" denota trasposición del tensor. Las fuerzas volumétricas son en principio de origen eléctrico, gravitatorio e inercial:

$$\mathbf{F}_V = \nabla \cdot \mathcal{T}_e + \rho [\mathbf{g} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2\Omega \times \mathbf{v}] \quad (2.6)$$

donde hemos representado las fuerzas eléctricas como divergencia del tensor de Maxwell [Panofsky, 1977],

$$\mathcal{T}_e \equiv \epsilon \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \epsilon (1 - b) E^2 \mathcal{I} \quad (2.7)$$

siendo $\mathbf{E} \mathbf{E}$ el producto diádico del campo eléctrico por sí mismo, \mathcal{I} el tensor unidad, ϵ la permitividad eléctrica y $b \equiv (\rho/\epsilon)(d\epsilon/d\rho)_T$ el parámetro de electrostricción (T , temperatura). Los dos últimos términos de (2.6) corresponden a las fuerzas centrífuga y de Coriolis respectivamente, que aparecen por haber elegido como sistema de referencia uno no inercial.

Una forma más conveniente de representar las fuerzas volumétricas es

$$\mathbf{F}_V = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon - 2\rho \Omega \times \mathbf{v} + \nabla \left[\frac{1}{2} \epsilon b E^2 - \rho g z + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right] \quad (2.8)$$

donde ρ_e es la densidad de carga eléctrica. Los dos primeros términos, que representan las fuerzas de Coulomb y dielectrónica respectivamente, son nulos en el volumen en virtud de las aproximaciones discutidas en el apartado anterior, esto es, ausencia de carga libre y de gradientes de concentración y temperatura. Además se pone de manifiesto cuáles son las fuerzas que derivan de un potencial escalar, que podemos incluir en el término de presión definiendo una "presión efectiva"

$$\Pi \equiv p - \frac{1}{2} \epsilon b E^2 + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2. \quad (2.9)$$

De esta forma, la ecuación (2.4) puede escribirse

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \Pi + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (2.10)$$

donde también hemos expresado en forma explícita la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos.

2.2.2 Condiciones de contorno y ligaduras

Las regiones de interés, para las cuales son válidas las ecuaciones anteriores, están delimitadas por los electrodos y la interfase entre ambos fluidos. Clasificaremos las condiciones de contorno en tres tipos: condiciones sobre los electrodos, sobre los límites de la coordenada radial y sobre la interfase.

Electrodos

De la condición de no deslizamiento se sigue que la velocidad de los fluidos en los electrodos es nula:

$$\mathbf{v}(r, \theta, \pm L/2, t) = 0. \quad (2.11)$$

Si el líquido es no viscoso tan sólo se anula la componente axial v_z . Si exigiéramos el cumplimiento de las tres condiciones habiendo eliminado el término de viscosidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, que es de segundo orden, el problema quedaría sobrecondicionado. Existe una delgada capa en la vecindad de cada electrodo (capa límite) en la cual los efectos viscosos sí son importantes, a través de la cual las componentes tangenciales de la velocidad disminuyen hasta hacerse nulas en los electrodos. Las capas límite no son necesarias desde el punto de vista matemático para la resolución del problema no viscoso.

Se mantiene constante la diferencia de potencial eléctrico:

$$\phi(r, \theta, L/2, t) = \Phi_0, \quad \phi(r, \theta, -L/2, t) = 0. \quad (2.12)$$

El puente está anclado, es decir, la línea de contacto es fija:

$$f(\theta, \pm L/2, t) = R. \quad (2.13)$$

Límites de r

En $r = 0$, la conservación de la masa, la indefinición de la velocidad azimutal y la imposibilidad de esfuerzos infinitos sobre cualquier región obligan a que se cumpla respectivamente:

$$v_r = v_\theta = \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0. \quad (2.14)$$

Con respecto al potencial eléctrico, no puede existir un gradiente en la dirección radial en el eje, puesto que daría un flujo de campo neto en una región donde no hay carga:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(0, \theta, z, t) = 0. \quad (2.15)$$

En zonas alejadas del puente impondremos un régimen estático para el campo de velocidades y uniforme para el campo eléctrico:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = 0 \quad (2.16)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \frac{\Phi_0}{L}(z + L/2) \quad (2.17)$$

Interfase

Si definimos el salto de cualquier magnitud A en la interfase como $\Delta A \equiv A^{ex} - A^{in}$ evaluado en $r = f(\theta, z, t)$, tenemos:

El potencial eléctrico es continuo puesto que el campo tangencial lo es

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.18)$$

La componente normal del vector desplazamiento eléctrico es nula por no haber carga libre en la interfase

$$\mathbf{n} \cdot \Delta(\epsilon \mathbf{E}) = 0, \quad (2.19)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal a la interfase en la dirección hacia el exterior del puente, que se calcula mediante la expresión

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (2.20)$$

evaluada en $r = f(r, \theta, z, t)$.

Si existe baño, la velocidad de ambos fluidos es continua a través de la interfase:

$$\Delta v = 0 \quad (2.21)$$

Igual que en el caso de los electrodos, si el sistema admite un tratamiento no viscoso, sólo debemos exigir que sea continua la componente normal a la interfase, $n \cdot \Delta v = 0$.

Una condición cinemática surge de la evolución temporal de las partículas fluidas asociadas a la interfase. Desde el punto de vista microscópico una molécula puede abandonar la interfase, es decir, pasar de estar en "contacto" con otras no semejantes a estar rodeadas de moléculas de su misma especie, pero desde el punto de vista fluidodinámico la partícula fluida, formada por un número enorme de moléculas, y no siempre las mismas, es solidaria a la interfase, puesto que justamente la define. Por tanto, la ecuación de la interfase sigue la evolución temporal del fluido o, matemáticamente,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [v]_{r=f} \cdot \nabla F = 0 \quad (2.22)$$

Finalmente, exigimos que el balance de esfuerzos sobre ambos fluidos junto con las fuerzas capilares sean cero, dado que la interfase no tiene inercia:

$$n \cdot \Delta[-pI + \mathcal{T}_v + \mathcal{T}_\sigma] - \sigma(k_1 + k_2)n = 0 \quad (2.23)$$

donde σ es la tensión superficial entre ambos medios y k_1, k_2 son las curvaturas principales de la interfase en cada punto, cuya suma se expresa en coordenadas cilíndricas en la forma [Struik, 1957]:

$$k_1 + k_2 = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) = \frac{F(1 + F_z^2)(F_{\theta\theta} - F) + FF_{zz}(F^2 + F_{\theta\theta}^2) - 2F_\theta(F_\theta + FF_z F_{z\theta})}{[F^2(1 + F_z^2) + F_\theta^2]^{3/2}} \quad (2.24)$$

donde hemos expresado las derivadas mediante subíndices. Como es bien sabido [Melcher, 1981], la condición (2.23) se obtiene al aplicar el teorema de Gauss en forma tensorial a la ecuación (2.4) integrada

sobre un volumen elemental que englobe a la interfase, tomando el límite cuando el espesor tiende a cero. Tan sólo términos que, como el gradiente de presiones hidrostáticas, son singulares en la interfase dan un aporte no nulo en dicho límite. De esta forma se pone de manifiesto cuáles son las fuerzas que realmente actúan como fuerzas de superficie. En el término de presión hidrostática se engloban de una forma implícita los desequilibrios producidos en la interfase por las fuerzas que actúan en volumen. Algunas de estas últimas quedan de manifiesto si sustituimos en (2.23) las presiones hidrostáticas en función de las efectivas según (2.9). Si hacemos esta sustitución y escribimos explícitamente los tensores de esfuerzos viscosos y eléctricos obtenemos

$$\begin{aligned} & [\Delta\Pi - \Delta\rho gz + \frac{1}{2} \Delta \rho\Omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \Delta (\epsilon E^2) + \sigma(k_1 + k_2)]n \\ & - n \cdot \Delta(\epsilon EE) - n \cdot \Delta \{ \mu[\nabla v + (\nabla v)^*] \} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Las fuerzas gravitatoria y centrífuga producen desequilibrio si los medios no son isodensos. Las fuerzas dieléctricas son puramente superficiales puesto que sólo existen gradientes de permitividad en la interfase. Notar que las fuerzas de electrostricción producen desequilibrio como fuerzas de volumen y además dan lugar a un término de superficie, de tal forma que ambas contribuciones se cancelan. Esto es siempre así en medios incompresibles [Melcher, 1981]. Las fuerzas viscosas aparecen tanto en volumen como en la interfase, mientras que las de Coriolis sólo actúan en volumen. Ambas tienen incidencia en la dinámica de la interfase por determinar el campo de presiones efectivas (ecuación (2.4)).

Es ilustrativo y útil analizar la proyección de la ecuación (2.25) sobre la dirección normal a la interfase y sobre el plano tangente a la misma. Si τ representa un vector arbitrario perteneciente a dicho plano, ambas proyecciones son

$$\begin{aligned} & \Delta\Pi - \Delta\rho gz + \frac{1}{2} \Delta \rho\Omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \Delta [\epsilon(E_t^2 - E_n^2)] \\ & + \sigma(k_1 + k_2) - 2 \Delta \left[\mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\Delta \left[\mu \left(\frac{\partial v_\tau}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial \tau} \right) \right] = 0 \quad (2.27)$$

donde E_t es la proyección del campo eléctrico sobre el plano tangente, los subíndices n y τ representan la componente de cualquier vector en esas direcciones y $\partial/\partial n = n \cdot \nabla$, $\partial/\partial \tau = \tau \cdot \nabla$. Puede verse que no existen esfuerzos eléctricos tangenciales. En el caso de fluidos no viscosos obviamente basta con la componente normal de la ecuación de esfuerzos (tomando $\mu = 0$) para determinar el problema, o bien cualquier otra proyección de la condición vectorial sobre una dirección que no pertenezca al plano tangente. Justamente el modelo es consistente en este límite debido a la ausencia de esfuerzos eléctricos tangenciales. Esto no ocurre si existen cargas libres en la interfase (caso de líquidos conductores), por lo que los efectos de la viscosidad deben ser tenidos en cuenta como mecanismo que contrarresta el efecto de las fuerzas de Coulomb sobre las cargas libres [Saville, 1970],[Saville, 1971].

Condición de volumen constante

Como hemos dicho anteriormente, la incompresibilidad del líquido interior fija el volumen de la zona, V . Por tanto, una última condición que debe cumplir la interfase es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-L/2}^{L/2} dz f^2 \quad (2.28)$$

En la mayor parte de este trabajo consideraremos que el volumen es el de un cilindro de radio R y altura L .

2.3 Adimensionalización.

Parámetros adimensionales

El conjunto de ecuaciones y condiciones de contorno que determinan el problema lo forman las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.10), (2.11)-(2.19), (2.21), (2.22), (2.25) y (2.28). Se trata de un problema en derivadas parciales altamente no lineal, cuya resolución completa sólo es atacable numéricamente.

Un procedimiento común antes de abordar su resolución es realizar una transformación de todas las magnitudes que aparecen de tal forma

que queden adimensionalizadas. En este proceso aparecen como norma general ciertos parámetros independientes de la solución, es decir, determinados por la geometría y las constantes físicas de los fluidos que configuran el sistema. Ello permite a veces llevar a cabo simplificaciones en las ecuaciones, evaluando la importancia relativa de sus términos, así como construir soluciones universales a través del concepto de semejanza [Landau, 1986]. En nuestro caso, una transformación adecuada toma como valores de referencia el radio de los anclajes, el salto capilar de presiones, la diferencia de potencial entre electrodos y las constantes físicas en el medio interior:

$$\begin{aligned} r &= r' R; & t &= t' (\rho^{in} R^3 / \sigma)^{1/2}; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' (\sigma / \rho^{in} R)^{1/2}; & p &= p' (\sigma / R); & \phi &= \phi' \Phi_0; \\ \rho &= \rho' \rho^{in}; & \mu &= \mu' \mu^{in}; & \epsilon &= \epsilon' \epsilon^{in} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sustituyendo la adimensionalización propuesta en las ecuaciones anteriores queda el siguiente conjunto, válido para las zonas interior y exterior

$$\nabla'^2 \phi' = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \mathbf{v}' = -\nabla' \left(\frac{\Pi'}{\rho'} \right) + \frac{1}{\rho' Re} \nabla'^2 \mathbf{v}' - 2 \left(\frac{-W}{\Delta \rho'} \right)^{1/2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}' \quad (2.32)$$

junto con las condiciones de contorno y ligaduras

$$\mathbf{v}'(r', \theta, \pm \Lambda, t') = 0, \quad f'(\theta, \pm \Lambda, t') = 1, \quad (2.33)$$

$$\phi'(r', \theta, \Lambda, t') = 1, \quad \phi'(r', \theta, -\Lambda, t') = 0, \quad (2.34)$$

$$v'_r = v'_\theta = \frac{\partial v'_z}{\partial r'} = \frac{\partial \phi'}{\partial r'} = 0 \quad \text{en } r' = 0 \quad (2.35)$$

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} \mathbf{v}' = 0, \quad \lim_{r' \rightarrow \infty} \phi' = \frac{1}{2\Lambda} (z' + \Lambda) \quad (2.36)$$

$$\Delta \phi' = 0 \quad (2.37)$$

$$\mathbf{n} \cdot \Delta (\epsilon' \mathbf{E}') = 0 \quad (2.38)$$

$$\Delta \mathbf{v}' = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial t'} + [\mathbf{v}']_{r'=f'} \cdot \nabla' F' = 0 \quad (2.40)$$

$$[\Delta \Pi' + B z' - \frac{1}{2} W r'^2 + \frac{\Xi^2}{2} \Delta (\epsilon' E'^2) + (k'_1 + k'_2)] n - \Xi^2 n \cdot \Delta (\epsilon' E' E') - \frac{1}{Re} n \cdot \Delta \{ \mu' [\nabla' v' + (\nabla' v')^t] \} = 0. \quad (2.41)$$

$$V' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz' f'^2 \quad (2.42)$$

La definición de las presiones efectivas queda en forma adimensional

$$\bar{\Pi}' = p' - \frac{\Xi^2}{2} \epsilon' b E'^2 - \frac{\rho'}{\Delta \rho'} B z' + \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\Delta \rho'} W r'^2 \quad (2.43)$$

En el conjunto anterior aparecen como parámetros adimensionales los siguientes números:

- Esbeltez, $\Lambda \equiv L/2R$. Razón de la separación al diámetro de los anclajes. Constituye la principal caracterización geométrica del puente líquido.
- Número de Reynolds, $Re \equiv (\rho^{in} \sigma R)^{1/2} / \mu^{in}$. Razón entre las fuerzas de inercia y las viscosas. Notar que la adimensionalización propuesta lleva implícita una estimación de la velocidad característica de los fluidos, basada en la suposición de que el término de presión (capilar) y el de inercia son comparables.
- Número de Weber, $W \equiv (\rho^{in} - \rho^{ex}) \Omega^2 R^3 / \sigma$, Razón entre las fuerzas de inercia debidas a la rotación (Coriolis y centrífuga) y las capilares. En este caso, la velocidad característica es la de rotación del sistema de referencia ($v_c = \Omega R$).
- Número de Bond, $B \equiv (\rho^{in} - \rho^{ex}) g R^2 / \sigma$, Razón entre las fuerzas gravitatorias y las capilares. Tanto este número como el de Weber se han definido de forma que sean positivos cuando tenemos el vacío como medio exterior.
- Número de Bond eléctrico, $\Xi \equiv (\epsilon^{in} / R \sigma)^{1/2} \Phi_0$. Razón entre las fuerzas dieléctricas y las capilares.
- Volumen adimensional, $V' \equiv V/R^3$.

Junto a todos estos parámetros tenemos las constantes físicas relativas:

$$\rho^{'ex} = \rho^{ex} / \rho^{in}; \quad \mu^{'ex} = \mu^{ex} / \mu^{in}; \quad \epsilon^{'ex} = \epsilon^{ex} / \epsilon^{in}. \quad (2.44)$$

Obviamente debemos asignar $\rho^{in} = \mu^{in} = \epsilon^{in} = 1$.

En lo sucesivo eliminaremos las primas en todas las expresiones para facilitar la escritura, puesto que trabajaremos siempre con magnitudes adimensionales.

Sobre los números adimensionales que aparecen cabe hacer una clasificación atendiendo a un criterio de *controlabilidad* desde el punto de vista experimental, es decir, si son fácilmente regulables durante un experimento concreto. Según esto, la esbeltez, el número de Weber, el número eléctrico y el volumen adimensional son parámetros controlables. Los restantes quedan fijados una vez elegidos los líquidos y las dimensiones del montaje experimental. Por otra parte en el presente trabajo nos restringimos al estudio de formas cilíndricas y cuasicilíndricas, y por tanto establecemos como condición que el volumen no difiera mucho del valor $V = 2\pi\Lambda$. En definitiva, para caracterizar el comportamiento dinámico y de estabilidad de puentes líquidos, nos plantearemos primordialmente un estudio en el espacio tridimensional $\{\Lambda, E, W\}$ de las frecuencias naturales de oscilación y puntos de bifurcación. De forma secundaria se verá cómo afectan el resto de parámetros.

En la sección 3.2 se justifica el interés de hacer un estudio dinámico restringido al caso de líquidos no viscosos. Por ello en dicho estudio, y sólo en él, admitiremos que $1/Re = 0$. En el contexto de un estudio de bifurcación de formas de equilibrio no es necesaria esta condición puesto que el campo de velocidades, al cual están ligados los efectos viscosos, se toma como nulo. Por tanto, por cualquiera de los dos motivos, de nuestro estudio paramétrico podemos eliminar el número de Reynolds y la viscosidad relativa.

El papel del número de Bond, al igual que el del volumen del puente, quedará restringido al de una imperfección respecto del sistema ideal de un puente perfectamente cilíndrico en condiciones de ingravidez.

En cuanto a la densidad relativa del medio exterior, nos fijaremos concretamente en dos casos de interés, que son el de un gas, para el cual

podemos tomarla como cero, y el de un baño isodenso ($\rho^{\text{ext}} = 1$). Ambas situaciones corresponden respectivamente a la experimentación en laboratorios espaciales y en laboratorios terrestres mediante la técnica del Tanque de Plateau.

Finalmente, la permitividad relativa, ϵ^{ext} , será considerada en todo su rango de variación.

2.4 Simetrías

Es de gran interés físico y matemático buscar transformaciones de variables que dejen invariante el conjunto de ecuaciones que debemos resolver. Ello permite encontrar a priori características generales de las soluciones y facilita el posterior tratamiento matemático. En particular se hará un amplio uso de las conclusiones de esta sección en el estudio de bifurcación que presentaremos en el capítulo 4.

Consideremos el efecto que sobre una configuración de equilibrio del puente líquido en ausencia del campo gravitatorio supondría invertir el signo de los potenciales eléctricos en ambos electrodos. Esto invertiría el sentido del campo en la dirección axial. Obviamente una imagen especular respecto del plano medio entre electrodos ($z \rightarrow -z$) de la nueva forma de equilibrio debería coincidir con la descripción inicial, puesto que simplemente estaríamos invirtiendo el sistema y viéndolo al revés. Si ahora contamos con las fuerzas gravitatorias, podríamos mantener esta equivalencia si invertimos su sentido. Generalizando un poco este argumento cuando el campo de velocidades no es nulo podemos entender el significado físico de la simetría representada por la siguiente transformación:

$$\begin{array}{ll}
 z & \rightarrow -z, & v_r & \rightarrow v_r \\
 \theta & \rightarrow \theta, & v_\theta & \rightarrow v_\theta \\
 \phi & \rightarrow -\phi, & v_z & \rightarrow -v_z \\
 f & \rightarrow f, & B & \rightarrow -B \\
 P & \rightarrow P
 \end{array} \quad (2.45)$$

que deja invariante el conjunto de ecuaciones obtenido en la sección anterior (el resto de variables y parámetros están definidos positivos).

Otra simetría menos trivial se obtiene si invertimos los potenciales exclusivamente. En tal caso se encuentra que, debido a que las fuerzas eléctricas actúan siempre a través del cuadrado de las componentes (ver la expresión del tensor de Maxwell), el conjunto de ecuaciones queda invariante. Sin embargo, al no involucrar transformaciones de coordenadas, esta propiedad no tiene implicaciones sobre la paridad de las funciones incógnitas.

Capítulo 3

El puente cilíndrico. Puntos de bifurcación y estabilidad.

En este capítulo presentamos la solución más simple del problema planteado anteriormente, el puente cilíndrico, que es posible sólo en ausencia de gravedad y con un volumen de la zona interior igual a $2\pi\Lambda$. Si estas condiciones no se cumplen, la búsqueda de soluciones de equilibrio estático debe ser abordada mediante técnicas numéricas [Ramos, 1991]. Dado el carácter no lineal del problema matemático, es necesario plantearse si existen otras soluciones y, en su caso, discernir cuál de ellas es estable. A ambas cuestiones es posible dar una respuesta mediante un estudio lineal. Se encuentra que nuevas familias de equilibrio cercanas al cilindro son posibles para ciertos valores de los parámetros adimensionales $\{\Lambda, W, \epsilon^{zz}, \Xi\}$, que denominamos *puntos de bifurcación* en el espacio de dichos parámetros. Estos puntos están agrupados formando superficies que dividen el espacio en distintas regiones. Sin embargo, no conocemos la estabilidad del puente cilíndrico en cada una de las regiones delimitadas. Es necesario entonces realizar un estudio dinámico de pequeñas oscilaciones en torno al cilindro para establecer el carácter estable o inestable de cada una de ellas. Afortunadamente basta un tratamiento no viscoso de la dinámica del puente para hacer este estudio de estabilidad.

La solución fundamental, en torno a la cual se construye el estudio analítico que presentamos en este trabajo, es la de cilindro perfecto. Si $V = 2\pi\Lambda$ y $B = 0$, las ecuaciones son satisfechas para todo valor de

los parámetros por la solución estática

$$\phi_c = \frac{z + \Lambda}{2\Lambda}, \quad f_c = 1, \quad \Delta\Pi_c = -1 - \frac{W}{2} - \frac{\Delta\epsilon E^2}{8\Lambda} \quad (3.1)$$

3.1 Puntos de bifurcación y familias bifurcadas

Nos planteamos ahora la búsqueda de otras posibles soluciones próximas al cilindro. Estas soluciones coexistirán con la cilíndrica, que, como hemos visto, satisface siempre las ecuaciones generales. En este sentido hablamos de una *bifurcación* de las formas de equilibrio. Corresponde a un análisis de estabilidad discriminar cuál de las familias es la que se observa en la realidad.

3.1.1 El problema lineal

Buscamos soluciones de equilibrio estático al conjunto de ecuaciones (2.30)-(2.42) tomando $v = 0$ y eliminando toda dependencia temporal. Para obtener las soluciones bifurcadas partimos de que la interfase debe ser próxima al cilindro, por lo que si llamamos ϵ a la amplitud de deformación de la interfase, un desarrollo perturbativo adecuado resulta ser

$$\begin{aligned} f &= f_c + \epsilon f_\epsilon \\ \phi &= \phi_c + \epsilon \phi_\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \Pi &= \Pi_c + \epsilon \Pi_\epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sustituyendo en las ecuaciones generales y eliminando términos de orden cuadrático o superior queda el siguiente conjunto linealizado:

$$\nabla^2 \phi_\epsilon = 0 \quad (3.3)$$

$$\phi_\epsilon(r, \theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (3.4)$$

$$\phi_\epsilon(0, \theta, z) = O(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_\epsilon(r, \theta, z) = 0 \quad (3.5)$$

$$\Delta \phi_\epsilon = 0 \quad (3.6)$$

$$\Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial r} \right) = \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \frac{\partial f_\epsilon}{\partial z} \quad (3.7)$$

$$f_\epsilon(1+W) + \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial z^2} = \Delta \Pi_\epsilon + \frac{\Xi^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial z} \right) \quad (3.8)$$

$$f_\epsilon(\theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz f_\epsilon = 0 \quad (3.10)$$

donde los dominios de ambos medios están delimitados por la superficie $r = 1$, y por tanto los saltos de cualquier magnitud se evalúan en ese valor de la coordenada radial en lugar de en $r = f$. La ecuación (3.8) deriva de la componente radial de (2.41).

Los problemas eléctrico y el mecánico están acoplados, de forma que no es posible la resolución independiente del potencial eléctrico y de la forma de la interfase. Esta última da lugar a una "carga libre efectiva", proporcional a su pendiente, mientras que la ecuación fundamental que determina la propia interfase, (3.8), incluye un término de presión eléctrica.

3.1.2 Resolución

Aplicando la técnica de separación de variables a la ecuación de Laplace para el potencial obtenemos la expresión

$$\phi_\epsilon(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(r, z) e^{im\theta} \quad (3.11)$$

siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_m^{in}(r, z) \\ \phi_m^{ex}(r, z) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left\{ \begin{array}{l} I_m(x_n r) / I_m(x_n) \\ K_m(x_n r) / K_m(x_n) \end{array} \right\} \sin[x_n(z + \Lambda)] \quad (3.12)$$

donde I_m y K_m son las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, $x_n \equiv n\pi/2\Lambda$ y los A_{mn} son coeficientes por determinar. En las ecuaciones anteriores y en lo sucesivo tomamos la parte real de la expresión como única con significado físico. Para la determinación de las funciones del desarrollo en serie

de Fourier-Bessel se han usado las condiciones sobre los electrodos y sobre los valores extremos de la coordenada radial. Además se han relacionado los coeficientes de los desarrollos correspondientes a las regiones interior y exterior de forma que el potencial sea continuo en la interfase linealizada $r = 1$. En la condición restante, (3.7), interviene la forma de la interfase, por lo que previamente resolvemos la ecuación (3.8) que rige a esta última.

Admitimos una solución desarrollable en modos azimutales para f_e :

$$f_e(\theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(z) e^{im\theta} \quad (3.13)$$

Entonces (3.8) se descompone en

$$f_m(1 + W - m^2) + \frac{d^2 f_m}{dz^2} = \frac{\Xi^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \right) + \delta_{m0} \Delta \Pi_e \quad (3.14)$$

para cada modo m , siendo δ_{m0} la Delta de Kroneker, que toma valor nulo para todo m excepto para $m = 0$, que toma valor unidad. La solución de la parte homogénea de esta ecuación es

$$f_{m,h} = c_m \sin(l_m^{1/2} z) + d_m \cos(l_m^{1/2} z) \quad (3.15)$$

donde se define

$$l_m \equiv 1 + W - m^2. \quad (3.16)$$

Para encontrar una solución particular observamos que en el término inhomogéneo aparece una función expresada en serie de cosenos, que por otra parte es una base completa para las funciones definidas en el intervalo $[-\Lambda, \Lambda]$. Es natural por tanto expresar en dicha base la solución particular:

$$f_{m,p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos[x_n(z + \Lambda)] \quad (3.17)$$

Si sustituimos (3.17) en (3.14) junto con (3.12) obtenemos una relación que define los coeficientes a_{mn} en función de los A_{mn} :

$$a_{mn}(l_m - x_n^2) = \frac{\Xi^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda} x_n A_{mn} + \delta_{m0} \Delta \Pi_e \quad (3.18)$$

Para $n = 0$ esta ecuación implica que $a_{m0} = 0$, salvo $a_{00} = \Delta \Pi_\epsilon / l_0$. La solución completa de (3.8) se escribe como suma de la homogénea más la particular

$$f_m = \sum_{n=0}^{\infty} (r_{mn} + a_{mn}) \cos[x_n(z + \Lambda)] \quad (3.19)$$

donde los r_{mn} son los coeficientes del desarrollo en serie de cosenos de $f_{m,h}$, que dependerán de las constantes de integración c_m y d_m . Puede consultarse en el Apéndice A este y otros desarrollos que serán necesarios a lo largo de esta memoria. Como observación de carácter general es útil tener en mente que las funciones impares en el intervalo $[-\Lambda, \Lambda]$ tienen nulos los coeficientes con n par, e inversamente, las funciones pares tienen nulos los coeficientes con n impar. Ocurre justamente lo contrario si el desarrollo se hace en la base $\{\sin[x_n(z + \Lambda)]\}$.

Sustituyendo (3.13) y (3.19) en (3.10) se obtiene que $r_{00} + a_{00} = 0$. Esto determina el salto de presiones $\Delta \Pi_\epsilon$ en función de una de las constantes de integración, usando (A.2):

$$\Delta \Pi_\epsilon = \frac{l_0^{1/2} \sin(l_0^{1/2} \Lambda) d_0}{\Lambda} \quad (3.20)$$

El siguiente paso es la utilización de (3.7). Sustituyendo las expresiones de f_ϵ y ϕ_ϵ obtenemos la relación, válida para $n \neq 0$,

$$A_{mn} H_m(\epsilon^{ex}, x_n) = -\frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} (r_{mn} + a_{mn}) \quad (3.21)$$

donde

$$H_m(\epsilon^{ex}, x_n) \equiv \epsilon^{ex} \frac{K'_m(x_n)}{K_m(x_n)} - \frac{I'_m(x_n)}{I_m(x_n)} \quad (3.22)$$

y las primas denotan derivación respecto del argumento. De (3.18) y (3.21) se obtiene

$$k_{mn} (r_{mn} + a_{mn}) = r_{mn} (l_m - x_n^2) \quad (3.23)$$

con

$$k_{mn} \equiv l_m - x_n^2 + \Gamma_{mn}, \quad \Gamma_{mn} = \frac{(\Xi \Delta \epsilon)^2 x_n}{4\Lambda^2 H_m(\epsilon^{ex}, x_n)} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.23) es válida incluso para $n = 0$ dado que podemos tomar $\Gamma_{m0} = 0$.

En este punto el problema se reduce a la búsqueda de las constantes de integración c_m y d_m , presentes en r_{mn} . Para ello usamos las dos condiciones de anclaje recogidas en (3.9). Sustituyendo (3.19) y sumando y restando ambas se obtiene

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} (r_{mn} + a_{mn}) = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{\infty} (r_{mn} + a_{mn}) = 0 \quad (3.25)$$

que con (3.23), (A.1) y (A.2) da, en función de las constantes de integración,

$$c_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} k_{mn}^{-1} = 0 \quad (3.26)$$

$$d_m \left[\frac{1 - \delta_{m0}}{2} k_{m0}^{-1} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} k_{mn}^{-1} \right] = 0 \quad (3.27)$$

En general, la única solución posible de este sistema algebraico es la trivial, $c_m = d_m = 0$, que conduce a que $f_e = 0$ y $\phi_e = 0$, es decir, no existen soluciones de equilibrio próximas al cilindro. Sin embargo, si alguna de las expresiones que multiplican a las constantes de integración se anula para cierta combinación de los parámetros de los que dependen, la constante de integración asociada queda indeterminada. Existe en este caso toda una familia de equilibrios próximos al cilindro con forma definida y que tan sólo difieren en su amplitud. Estas formas son fácilmente calculables, sin más que tomar como nulas todas las constantes de integración excepto una:

Familias antisimétricas:

$$f_{m,d}^- = \bar{c}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)] c^{im\theta}}{k_{mnl}^-} \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ml}^{-in} \\ \phi_{ml}^{-ex} \end{array} \right\} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\Lambda} \bar{c}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m(x_n r)/I_m(x_n) \\ K_m(x_n r)/K_m(x_n) \end{array} \right\} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{H_m(\epsilon^{ex}, x_n) \bar{k}_{mnl}^-} \quad (3.29)$$

$$\Delta \Pi_{ml}^- = 0 \quad (3.30)$$

con

$$\bar{c}_m \equiv c_m \frac{2(1 + W - m^2)^{1/2} \cos[(1 + W - m^2)\Lambda]}{\Lambda} \quad (3.31)$$

y donde $k_{mnl}^- \equiv k_{mn}(\Xi_{m,l}^-, \Lambda, W, \epsilon^{ex})$ y $\Xi_{m,l}^-$ representa uno de los múltiples valores del potencial adimensional que satisface la relación implícita dada por (3.26), fijado el resto de parámetros. El subíndice "l" sirve para numerar todos los posibles valores que satisfacen dicha relación, ordenados de menor a mayor, y el superíndice "-" indica que nos referimos a la familia antisimétrica.

Familias simétricas:

$$f_{ml}^+ = \bar{d}_m \left[\frac{1 - \delta_{m0}}{2} (1 + W - m^2)^{-1} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{k_{mnl}^+} \right] \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ml}^{+in} \\ \phi_{ml}^{+ex} \end{array} \right\} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\Lambda} \bar{d}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m(x_n r)/I_m(x_n) \\ K_m(x_n r)/K_m(x_n) \end{array} \right\} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{H_m(\epsilon^{ex}, x_n) k_{mnl}^+} \quad (3.33)$$

$$\Delta \Pi_{ml}^+ = \delta_{m0} \frac{\bar{d}_0}{2} \quad (3.34)$$

con

$$\bar{d}_m \equiv d_m \frac{2(1 + W - m^2)^{1/2} \sin[(1 + W - m^2)\Lambda]}{\Lambda} \quad (3.35)$$

y donde hemos introducido una notación análoga a la usada para las familias antisimétricas, salvo que ahora k_{mnl}^+ se construye con Ξ_{ml}^+ , que es solución de (3.27).

3.1.3 Cálculo y descripción de las superficies de bifurcación.

Determinamos a continuación los lugares geométricos en el espacio de parámetros representados por las relaciones implícitas (3.26) y (3.27). En el apartado anterior hemos introducido ciertas funciones $\Xi_{m,l}^-$ y $\Xi_{m,l}^+$, dependientes del resto de parámetros, Λ , W y ϵ^{oz} , que no son más que una posible representación de las soluciones de cada una de las anteriores ecuaciones. Otras dos representaciones de interés son $W_{m,l}(\Xi, \Lambda, \epsilon^{oz})$ y $\Lambda_{m,l}(\Xi, W, \epsilon^{oz})$. Notar que atendiendo al criterio de operatividad experimental, la permitividad relativa siempre queda fijada experimentalmente.

Antes de describir el comportamiento de las soluciones cuando variamos los parámetros haremos algunas observaciones que pueden clarificar su estructura. En primer lugar, si tomamos $\Xi = 0$ en (3.26) y (3.27), las series resultantes son proporcionales a los desarrollos en fracciones simples de $\sin[(1+W-m^2)^{1/2}\Lambda]$, para la ecuación (3.26), y $1-(1+W)^{1/2}\Lambda \cot[(1+W)^{1/2}\Lambda]$ en el caso $m = 0$ y $\cos[(1+W-m^2)^{1/2}\Lambda]$ si $m \neq 0$, para la ecuación (3.27) (ver Apéndice A). Las raíces de estas ecuaciones son

$$W = x_n^2 + m^2 - 1 \quad m \neq 0 \quad (3.36)$$

$$W = 4x_n^2 - 1, \quad W = (\lambda_k/\Lambda)^2 - 1 \quad m = 0 \quad (3.37)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y λ_k representa las raíces de $\lambda = \tan \lambda$. Los subíndices n y k , convenientemente ordenados, se ponen en correspondencia con el subíndice l usado para enumerar las soluciones de (3.26) y (3.27). Estos resultados son bien conocidos en la literatura [Brown, 1980] como los criterios de estabilidad de puentes cilíndricos en rotación. Tan sólo las bifurcaciones a las familias correspondientes a la menor raíz de los modos $m = 0$ (axilsimétrico) y $m = 1$ (comba) han sido observadas experimentalmente [Carruthers, 1975], [Carruthers, 1977]; el resto de puntos de bifurcación están situados en una región del espacio de parámetros que ha resultado ser siempre inestable.

Del caso límite arriba expuesto cabe suponer que al considerar el efecto del campo eléctrico sobre el mapa de bifurcación se mantenga la estructura de un conjunto infinito numerable de superficies de bifurcación. En efecto podemos afirmar que esto es así por lo siguiente: los

polos de las series que aparecen, que denominaremos por comodidad $S(W, \Lambda, \Xi^2, \epsilon^{ex}, m)$, vienen dados por

$$1 + W - m^2 - x_n^2 + \frac{\Xi^2(\Delta\epsilon)^2 x_n}{4\Lambda^2 H_m(\epsilon^{ex}, x_n)} = 0 \quad (3.38)$$

En esta expresión el término eléctrico es siempre negativo debido a que $H_m(\epsilon^{ex}, x_n)$ lo es para cualquier valor de sus argumentos; además crece en valor absoluto cuando aumenta n . Despejando W obtenemos una sucesión creciente infinita de valores W_{polo} que corresponden a polos de la serie, fijado el resto de parámetros. Obviamente si W es ligeramente mayor o menor que W_{polo} , la serie toma valores muy grandes positivos y negativos, respectivamente, y esto para todos los polos. Con ello se deduce que la serie posee entre dos polos consecutivos un número impar de ceros. Se demuestra que de hecho sólo existe un cero entre polo y polo calculando la derivada de la serie respecto de W ; esto da

$$\frac{\partial S}{\partial W} = - \sum_n k_{mn}^{-2} \neq 0 \quad (3.39)$$

es decir, que la función es monótona creciente respecto de W y va de $-\infty$ a ∞ entre polo y polo. Concluimos que se mantiene la estructura de un conjunto infinito numerable de raíces de las ecuaciones (3.26) y (3.27) con campo eléctrico aplicado. Un argumento en todo análogo puede construirse para demostrar que respecto del parámetro Ξ ocurre exactamente lo mismo. En la figura 3.1 se presenta el aspecto general de cualquiera de las series que dan los puntos de bifurcación, tomando Ξ como parámetro variable. Puede observarse la estructura de polos y ceros alternados indefinidamente.

Nos hemos detenido en los detalles de la demostración anterior porque con ello se ponen de manifiesto algunas propiedades usadas en la computación de los puntos de bifurcación. La búsqueda de los ceros de las relaciones implícitas se hace mediante el método de Newton-Raphson (ver por ejemplo [Stoer, 1980]). Es bien sabido que este método iterativo puede dar una sucesión de valores divergentes si el valor inicial no está cerca del cero buscado. Pero precisamente podemos acotar cada cero con dos polos calculables analíticamente mediante (3.38), con lo que se evitan problemas de divergencia. Por ello resulta conveniente tomar como variables Ξ ó W . Otra ventaja de estas

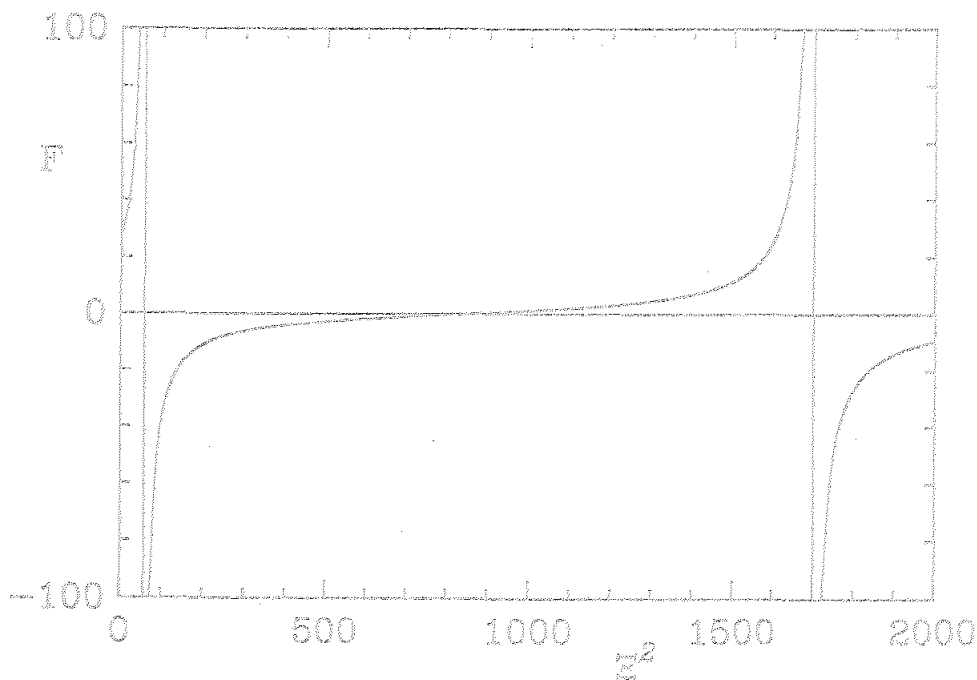


Figura 3.1: Representación de la función $S(W, \Lambda, E^2, \epsilon^{zz}, m)$ para $W = 0$, $\Lambda = 8$, $\epsilon^{zz} = 0.55$ y $m = 0$ en función de E^2 .

elecciones es que las derivadas que necesita dicho método son fáciles de calcular en ambos casos.

Un último detalle técnico al que hay que hacer referencia con respecto al cálculo de los puntos de bifurcación es la forma en que se truncan las series infinitas. Para n grandes, los términos de las series disminuyen como $1/n^2$, según se deduce de los comportamientos asintóticos de las distintas funciones que aparecen. Aunque las series son convergentes, es posible acelerar su convergencia considerando los comportamientos asintóticos mencionados. En general, si $S = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$ y, como en nuestro caso, s_n admite un desarrollo del tipo $a_2/n^2 + a_3/n^3 + \dots$, descomponemos la serie completa en una suma inicial de N términos y una cola, con N suficientemente grande para que podamos sustituir en ella cada término por su expresión asintótica hasta una cierta potencia k de $1/n$. Sumando y restando los N primeros términos que le faltan a la cola obtendremos series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ con n pares o impares, que están relacionadas con la función zeta de Riemann y pueden con-

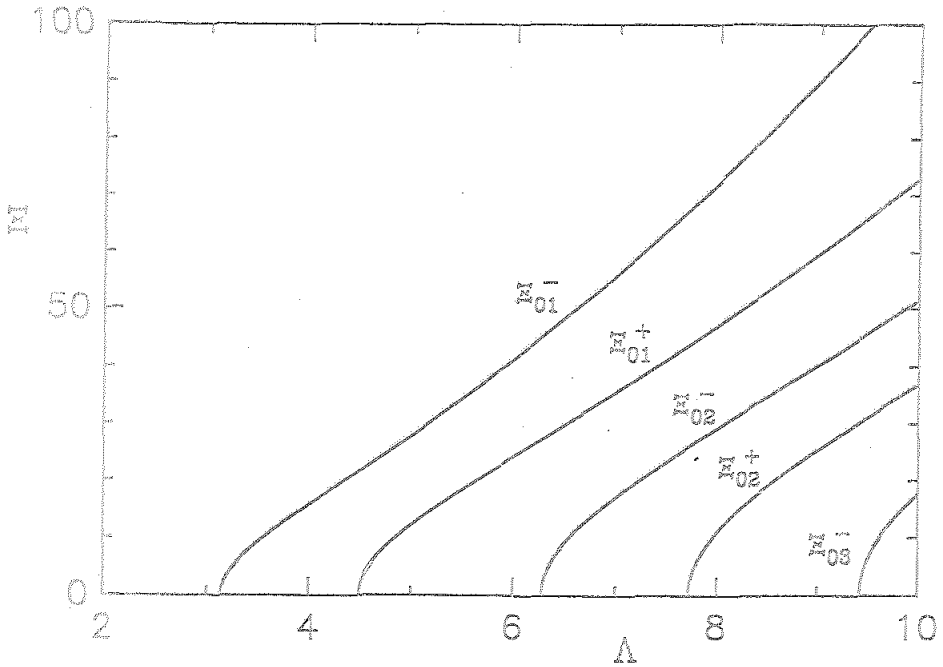


Figura 3.2: Proyección de las cinco primeras superficies de bifurcación en el plano $\Xi - \Lambda$ para $W = 0$, $\epsilon^{es} = 0.55$ y $m = 0$.

sultarse en tablas [Abramowitz, 1972]. La expresión obtenida tendrá un error proporcional a $1/N^k$.

3.1.4 Resultados y discusión

Para entender la estructura de las superficies de bifurcación comenzaremos analizando el puente sin rotación ($W = 0$). Este caso es además importante de cara al estudio experimental que se presenta en el capítulo 5. Si fijamos la permitividad relativa como $\epsilon^{es} = 0.55$ (valor experimental estudiado), y representamos los distintos valores de Ξ para los cuales se produce una bifurcación al modo $m = 0$ en función de Λ obtenemos las curvas de la figura 3.2. Según la notación introducida en los apartados precedentes las distintas curvas que aparecen son Ξ_{01}^{-} , Ξ_{01}^{+} , Ξ_{02}^{-} , Ξ_{02}^{+} , Ξ_{03}^{-} y así sucesivamente según un orden de valores crecientes de la esbeltez. Estas curvas no intersectan y existen en número infinito. Los valores de esbeltez mínima dados por los puntos

de corte con la abcisa están en acuerdo con los valores conocidos de la bifurcación de puentes en ausencia de campo eléctrico [Sanz, 1985]. De todo el conjunto anidado de curvas de bifurcación nos interesa principalmente la más exterior, Ξ_{01}^- , puesto que corresponde al criterio de estabilidad que realmente se observa, como se demuestra mediante un análisis dinámico en la siguiente sección. La región superior resultará ser la estable. El resto de curvas de bifurcación están situadas en la región inestable y por tanto sus familias asociadas nunca se observan en la práctica. Distinguiremos en lo sucesivo el lugar geométrico definido por los puntos de bifurcación que separan regiones estables de las inestables como *superficie de estabilidad marginal* o simplemente *superficie de estabilidad*. Las curvas de estabilidad serán sus distintas proyecciones sobre los planos coordenados del espacio de parámetros.

No existe límite teórico para la estabilización de puentes líquidos mediante campos eléctricos. La curva de estabilidad representada en la figura 3.2 como la más exterior de las cinco tiene como comportamiento asintótico para grandes esbelteces

$$\Xi_{01}^- \sim C \frac{2\sqrt{2}\epsilon^{3\alpha}}{\sqrt{\pi} |\Delta \epsilon|} \left(\frac{\Lambda^3}{\ln \Lambda} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

siendo C un coeficiente acotado por $1/\sqrt{2} < C < 1^2$. Por tanto el comportamiento es casi lineal.

Las familias axilsimétricas asociadas a los puntos de bifurcación con $m = 0$ son similares a las conocidas con campo nulo, es decir, $f = \sin(n\pi z/\Lambda)$ para las familias antisimétricas y $f = 1 - \cos(n\pi z/\Lambda)$ para las simétricas. En la figura 3.3(a) y 3.3(b) se representan los modos, antisimétricos y simétricos respectivamente, asociados a las curvas de la figura anterior para $\Lambda = 10$. Se mantiene el mismo número de nodos que en el caso sin campo aplicado. La amplitud máxima disminuye en los modos superiores. La deformación respecto de la senoide es particularmente patente en el primer modo, f_{01}^- , con los máximos desplazados hacia los electrodos.

El resto de modos, $m > 0$, resultan ser estables para puentes no rotantes, puesto que las expresiones que determinan los puntos de bi-

²Esta expresión se obtiene a partir de (3.38), que da una cota superior e inferior independiente de la esbeltez.

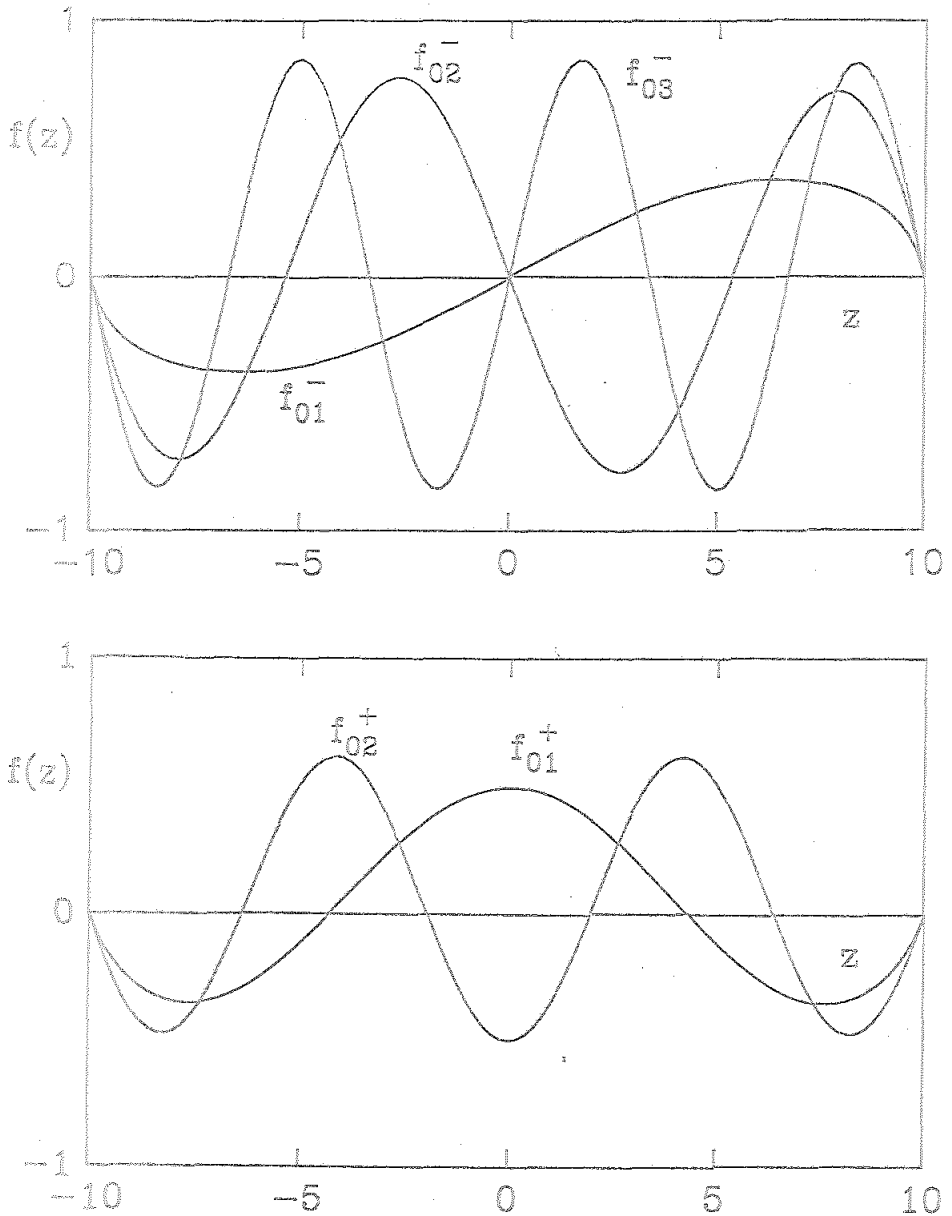


Figura 3.3: Primeros modos axilsimétricos de deformación de un puente cilíndrico sin rotación para $e^{\omega} = 0.55$ y $\Lambda = 10$ en los correspondientes puntos de bifurcación (ver figura 3.2). (a) Familias antisimétricas respecto del plano medio entre electrodos; (b) familias simétricas.

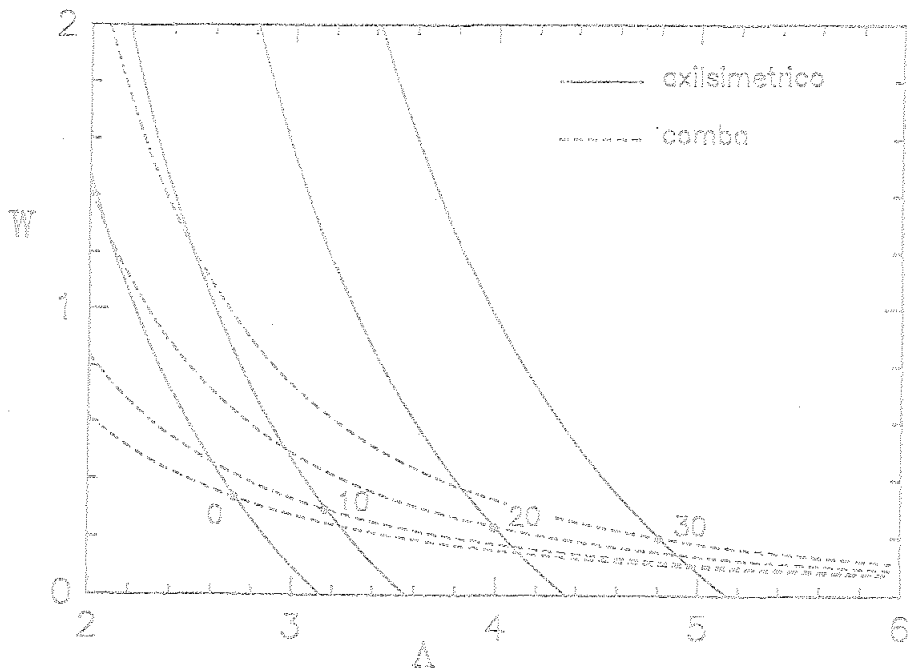


Figura 3.4: Curvas de estabilidad en el plano $W - \Lambda$ para distintos valores del parámetro Ξ con $\epsilon^{\omega} = 0.55$. Se representan tanto el modo axilsimétrico (línea continua) como el modo en comba (línea discontinua). Se indican los puntos de corte de las curvas correspondientes a un mismo valor de Ξ , para los cuales se produce la transición entre un tipo de bifurcación y otro. La región estable en cada caso es la que queda bajo los tramos inferiores de ambas curvas.

furcación a estas familias no tienen solución con $W = 0$ y $m > 0$ (recuérdese que $\Gamma_{mn} < 0$ y la serie que hay que igualar a cero es estrictamente negativa para cualquier valor del número eléctrico Ξ). Sin embargo, cuando se permite la rotación del puente es posible la bifurcación a modos con $m = 1$ o *modos en comba*, y con $m > 1$, como es bien sabido del caso sin campo aplicado [Brown, 1980]. El modo en comba llega a ser más inestable que el axilsimétrico para determinados valores de W , mientras que los modos con $m > 1$ nunca se observan en la práctica. Todas estas características se mantienen con campo aplicado, y el efecto de éste es siempre el de aumentar la región del espacio de parámetros para la que el puente cilíndrico es estable. Esto

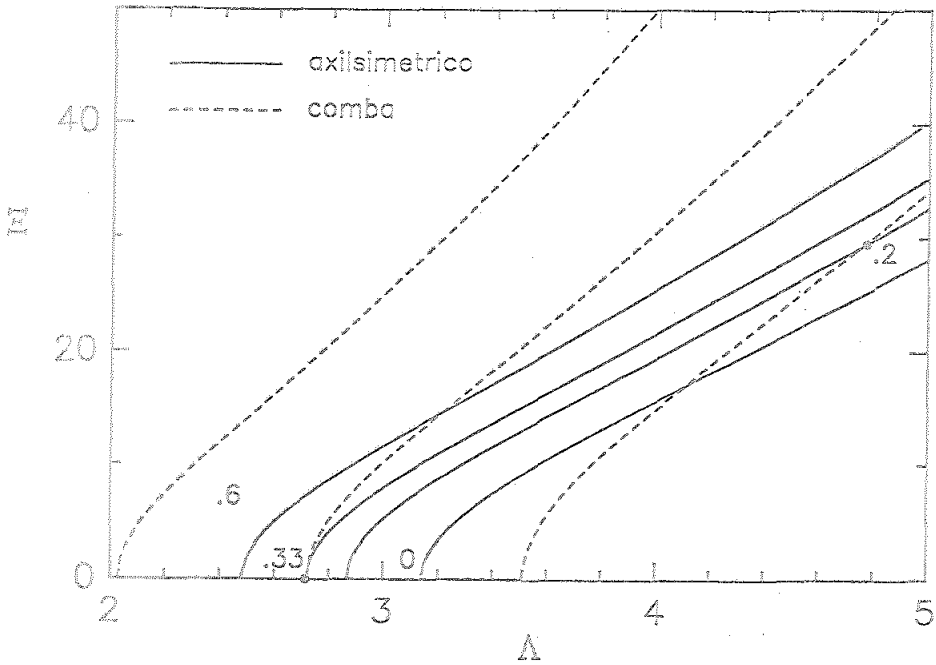


Figura 3.5: Curvas de estabilidad en el plano $\Xi - \Lambda$ para distintos valores de W . También se indican los puntos de transición entre las dos posibles familias de bifurcación. La región estable se extiende por encima de los tramos superiores de las curvas correspondientes a cada valor de W . Notar que para $W = 0$ el modo en comba no aparece, y que para $W > 1/3$ dicho modo es el único observable.

se observa claramente en las figuras 3.4 y 3.5. En la primera de ellas representamos cuatro cortes de las primeras superficies de bifurcación a modos con $m = 0$ (trazo continuo) y $m = 1$ (trazo discontinuo) para $\epsilon^{ex} = 0.55$ y $\Xi = 0, 10, 20, 30, 40$, que dan sendas curvas en el plano $W - \Lambda$. El resto de superficies de bifurcación han sido omitidas. Formarán las curvas de estabilidad para cada valor de Ξ aquellos tramos que fijado el número de Weber den la menor esbeltez crítica. Los puntos de corte de los dos modos, señalados en la figura, determinan los valores de los parámetros W y Λ para los que se produce la transición de un tipo de bifurcación a otro. La región estable (por debajo de las curvas de estabilidad) se amplía conforme aumentamos Ξ .

La otra visión de la superficie de estabilidad la da la figura 3.5,

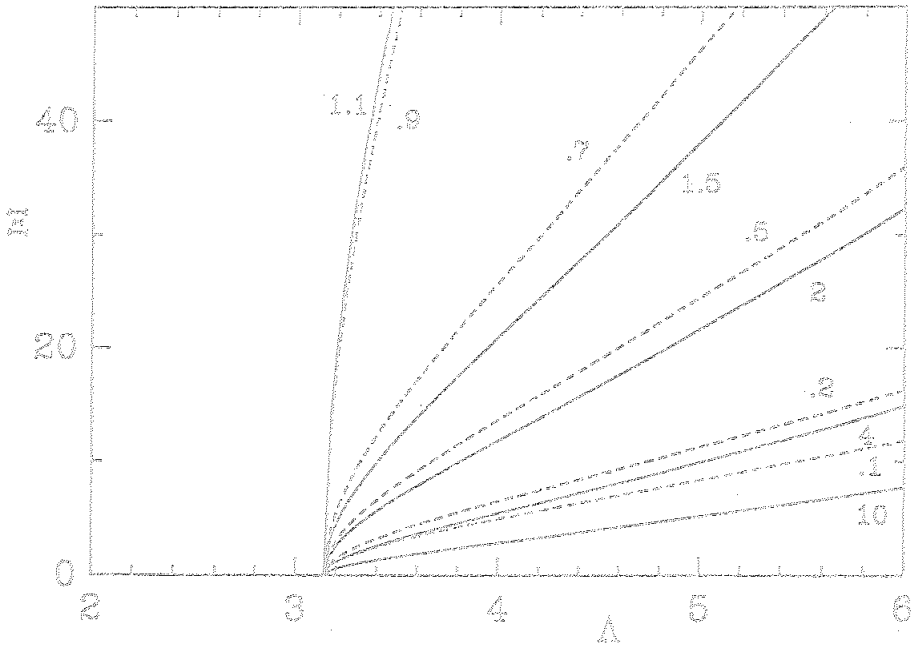


Figura 3.6: Curvas de estabilidad en el plano $E-\Lambda$ para $W = 0$ y distintos valores del parámetro ϵ^{∞} .

en la que ahora se representan cortes en el plano $E-\Lambda$ de las dos superficies para varios valores de W . El plano $W = 0$ no corta a la superficie con $m = 1$ (también aquí con trazo discontinuo), puesto que como ya dijimos los puentes no rotantes no presentan bifurcación a modos asimétricos. También aquí la región estable viene determinada por el mínimo valor de Λ que sufre una bifurcación y por tanto es la que se extiende por encima de las curvas de estabilidad. Los puntos de transición de la bifurcación axilsimétrica a la del modo en comba está igualmente señalado en esta figura. Notar que $W = 1/3$ establece el máximo valor del número de Weber para que puede haber bifurcación axilsimétrica.

El papel de la razón de permitividades, que hasta ahora hemos fijado en el valor experimental $\epsilon^{\infty} = 0.55$, viene ilustrado por la figura 3.6, donde aparecen distintas curvas de estabilidad en el plano $E-\Lambda$ para algunos valores de ϵ^{∞} en el caso de puentes no rotantes. Se han representado curvas con ϵ^{∞} mayor y menor que cero, que corresponden

a puentes con el medio más polarizable en la región exterior e interior, respectivamente. Obviamente cuando $\epsilon^{ex} = 1$, es decir, cuando los medios son eléctricamente indistinguibles por tener igual permitividad, la acción del campo eléctrico aplicado es nula y reobtenemos el criterio de estabilidad de Rayleigh para cualquier valor de Ξ . Conforme nos alejamos de $\epsilon^{ex} = 1$, el campo eléctrico necesario para estabilizar un puente de esbeltez dada disminuye, puesto que las cargas de polarización acumuladas en la interfase aumentan. Este efecto es independiente de si el medio de mayor permitividad es el que forma el puente o el baño. No obstante no existe una equivalencia completa entre las curvas de estabilidad que se obtienen al intercambiar los medios interior y exterior, como ocurre en interfases planas [Melcher, 1963] debido a que también cuentan los factores geométricos. De hecho puede comprobarse a partir de (3.40) que las curvas $\Xi(\epsilon^{ex}, \Lambda)$ y $\sqrt{\epsilon^{ex}}\Xi(1/\epsilon^{ex}, \Lambda)$, que son las que hay que comparar al intercambiar las permitividades, tienen distinto comportamiento asintótico para grandes esbelteces. Esta disimetría de comportamiento debe achacarse más al efecto de la geometría cilíndrica sobre la determinación del campo eléctrico perturbado que a cualquier fenómeno relacionado con la variación del volumen ocupado por los distintos medios, que es de segundo orden.

3.2 Dinámica de pequeñas oscilaciones

La estabilidad del puente cilíndrico para los distintos valores de los parámetros puede investigarse mediante un estudio dinámico. Dada la estructura de las ecuaciones generales, lineales respecto de las derivadas temporales, podemos esperar una evolución de la interfase en forma oscilatoria, de caída o crecimiento exponencial, o una mezcla de ambos comportamientos, al menos para situaciones no demasiado alejadas del equilibrio cilíndrico. Con esta restricción podemos sustituir las ecuaciones generales por un conjunto de ecuaciones lineales, que surgen al considerar perturbaciones pequeñas respecto de la forma cilíndrica. En este sentido el criterio de estabilidad encontrado se denomina *lineal*.

En la sección anterior hemos encontrado los valores de los parámetros para los cuales la forma cilíndrica coexiste con nuevas familias de soluciones de equilibrio estático. Otras situaciones estacionarias, pero con

un campo de velocidades no nulo, no son posibles puesto que ello conlleva una disipación de energía debida a la viscosidad, mientras que el sistema no recibe energía por ningún otro mecanismo². Dado que se pasa de un equilibrio estático a otro, la viscosidad no juega ningún papel como mecanismo estabilizante o desestabilizante, aunque sí en la propia dinámica. Por tanto, para obtener los criterios de estabilidad basta con un análisis dinámico no viscoso, lo cual simplifica considerablemente el problema matemático.

3.2.1 Ecuaciones dinámicas lineales

Expresamos interfase, velocidades, presión y potencial eléctrico como una pequeña perturbación respecto de la solución estática cilíndrica. Por comodidad usamos la misma notación para las perturbaciones que para las magnitudes totales:

$$f \rightarrow f_c + f \quad (3.41)$$

$$v \rightarrow v_c + v \quad (3.42)$$

$$\Pi \rightarrow \Pi_c + \Pi \quad (3.43)$$

$$\phi \rightarrow \phi_c + \phi \quad (3.44)$$

Sustituyendo en las ecuaciones generales restringidas al caso no viscoso, sin gravedad y con volumen cilíndrico, obtendremos, eliminando todo producto de dos o más perturbaciones, el siguiente conjunto de ecuaciones lineales para las perturbaciones:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla(\Pi/\rho) - 2\bar{W}^{1/2}k \times v \quad (3.46)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.47)$$

junto con las condiciones y ligaduras

$$v_z(r, \theta, \pm \Lambda) = 0 \quad (3.48)$$

²Si los líquidos considerados tuvieran una cierta conductividad eléctrica la situación cambiaría radicalmente, puesto que entonces el campo eléctrico sí sería responsable de un aporte de energía. Estos fenómenos han sido estudiados en [Saville, 1970],[Saville, 1971] y [Reynolds, 1965].

$$\phi(r, \theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}(0, \theta, z) = o(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v}(r, \theta, z) = 0 \quad (3.50)$$

$$\phi(0, \theta, z) = o(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta, z) = 0 \quad (3.51)$$

$$\Delta v_r = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - [v_r]_{r=1} = 0 \quad (3.53)$$

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.54)$$

$$\Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.55)$$

$$f(1+W) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta \Pi + \frac{\Xi^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3.56)$$

$$f(\theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (3.57)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz f = 0 \quad (3.58)$$

Hemos introducido por comodidad el nuevo parámetro $\bar{W} = -W/\Delta\rho$.

3.2.2 Eliminación del campo de velocidades

Es bien sabido [Greenspan, 1980] que en el caso lineal no viscoso, las ecuaciones fluidodinámicas admiten la eliminación formal del campo de velocidades, que pasa a ser conocido a partir de la resolución de un problema de contorno para el campo de presiones exclusivamente. Si admitimos una dependencia exponencial respecto del tiempo, $e^{i\omega t}$, para todas las magnitudes que dependan de él, siendo ω complejo en general, y denotamos con el mismo símbolo al factor que depende de las coordenadas espaciales, la ecuación (3.46) pasa a escribirse

$$i\omega \mathbf{v} = -\nabla(\Pi/\rho) - 2\bar{W}^{1/2} \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (3.59)$$

Tomando la divergencia de la expresión anterior y aplicando (3.45) se obtiene

$$\nabla^2(\Pi/\rho) = 2\bar{W}^{1/2} \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.60)$$

donde hemos usado la relación vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$. Tomando el rotacional de la misma expresión

$$i\omega \nabla \times \mathbf{v} = 2\bar{W}^{1/2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (3.61)$$

donde hemos usado $\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) = \mathbf{k}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{k}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. Si por último consideramos la componente axial de (3.46), $i\omega v_z = -(1/\rho)\partial\Pi/\partial z$, obtenemos, combinando las tres expresiones,

$$\left(\nabla^2 - \frac{4\bar{W}}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi = 0. \quad (3.62)$$

Notar que en la cantidad \bar{W}/ω^2 se cancela $\rho^{1/2}$, lo cual era de esperar tratándose de una ecuación que es válida para ambos fluidos.

Para eliminar completamente el campo de velocidades debemos ser capaces de expresar las condiciones de contorno en términos de la presión. Para ello resolvemos la relación algebraica dada por (3.59) entre las tres componentes de la velocidad y las derivadas de la presión. Esto da

$$v_r = -\frac{i\omega \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{2\bar{W}^{1/2}}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}}{\rho(4\bar{W} - \omega^2)} \quad (3.63)$$

$$v_\theta = -\frac{\frac{i\omega}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} - 2\bar{W}^{1/2} \frac{\partial \Pi}{\partial r}}{\rho(4\bar{W} - \omega^2)} \quad (3.64)$$

$$v_z = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (3.65)$$

La condición (3.48) equivale a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}(r, \theta, \pm \Lambda) = 0, \quad (3.66)$$

mientras que las condiciones (3.52) y (3.53) se transforman en

$$\Delta \left[\left(i\omega \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{2\bar{W}^{1/2}}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) \rho^{-1} \right] = 0 \quad (3.67)$$

$$i\omega f + \left[\frac{i\omega \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{2\bar{W}^{1/2}}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}}{\rho(4\bar{W} - \omega^2)} \right]_{r=1} = 0 \quad (3.68)$$

En esta última ecuación podemos sustituir los valores interiores o exteriores de la presión y la densidad indistintamente. Las condiciones en los valores extremos de r para el campo de velocidades se traduce para la presión en el buen comportamiento en el eje y tendencia a un valor constante para r grandes.

3.2.3 Resolución del problema dinámico

La principal diferencia matemática entre el problema estático y el dinámico reside en que el campo de presiones pasa de ser un autovalor, constante en cada medio, a ser una magnitud no uniforme que actúa como potencial para el campo de velocidades. La ecuación (3.62) admite, al igual que el potencial eléctrico, un tratamiento mediante separación de variables. Sin embargo la naturaleza de la ecuación es elíptica o hiperbólica dependiendo del signo de la cantidad $1 - 4\bar{W}/\omega^2$. En el dominio hiperbólico es posible la aparición de ondas internas, por lo que a la hora de proponer una solución que satisfaga las condiciones de contorno debemos tener cuidado de eliminar de la base completa de soluciones aquellas que signifiquen una propagación desde el infinito, puesto que estamos interesados sólo en las perturbaciones de la presión que tienen su origen en la deformación de la interfase.

Si descomponemos en modos azimutales, $\Pi = \sum_m \Pi_m e^{im\theta}$, cada modo tiene la forma siguiente:

Régimen elíptico: $1 - 4\bar{W}/\omega^2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_m^{in}(r, z) \\ \Pi_m^{ex}(r, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} B_{m0}^{in} r^m \\ B_{m0}^{ex} r^{-m} \end{array} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} B_{mn}^{in} I_m(\alpha_n r) \\ B_{mn}^{ex} K_m(\alpha_n r) \end{array} \right\} \cos[x_n(z + \Lambda)] \quad (3.69)$$

donde $\alpha_n = (1 - 4\bar{W}/\omega^2)^{1/2} x_n$. Hemos eliminado de entrada los comportamientos divergentes en el eje y en el infinito.

Régimen hiperbólico: $1 - 4/\omega^2 < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_m^{in}(r, z) \\ \Pi_m^{ex}(r, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} B_{m0}^{in} r^m \\ B_{m0}^{ex} r^{-m} \end{array} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} B_{mn}^{in} J_m(\beta_n r) \\ B_{mn}^{ex} H_m^{(1)}(\beta_n r) \end{array} \right\} \cos[\alpha_n(z + \Lambda)] \quad (3.70)$$

donde ahora $\beta_n = (4\bar{W}/\omega^2 - 1)^{1/2} \alpha_n$, y J_m y $H_m^{(1)}$ son las funciones de Bessel y de Hankel de primera especie respectivamente. La estructura que presenta esta solución es la de una onda estacionaria en la zona interior y una onda que se propaga en el sentido creciente de la coordenada radial en la zona exterior; se han eliminado las funciones de segunda especie, Y_m por diverger en el eje y $H_m^{(2)}$ por representar una onda en el sentido de r decreciente cuando se considera la expresión completa incluyendo el factor temporal. Todo esto se ve claro utilizando el comportamiento de las funciones de Hankel para valores grandes del argumento.

Puesto que el tratamiento matemático posterior es válido para los casos elíptico e hiperbólico, denominaremos por $R_m^{in}(y_n r)$ y $R_m^{ex}(y_n r)$ a las funciones radiales que aparecen tanto en (3.69) como en (3.70). En cada caso y_n debe entenderse como α_n ó β_n . Esta notación no se extiende al término independiente de z , correspondiente a $n = 0$, que es común a ambos regímenes.

Para relacionar los coeficientes B_{mn}^{in} y B_{mn}^{ex} utilizamos (3.67) sustituyendo las soluciones propuestas para la presión. Ello da

$$[\omega y_n R_m^{in}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m^{in}(y_n)] B_{mn}^{in} = \quad (3.71)$$

$$[\omega y_n R_m^{ex}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m^{ex}(y_n)] B_{mn}^{ex} / \rho^{ex} \equiv B_{mn} \quad (3.72)$$

para $n \neq 0$, donde hemos definido un nuevo coeficiente, B_{mn} , que viene a sustituir a los dos correspondientes a cada zona fluida. Para $n = 0$ tenemos

$$m(2\bar{W}^{1/2} + \omega) B_{m0}^{in} = m(2\bar{W}^{1/2} - \omega) B_{m0}^{ex} / \rho^{ex} \equiv B_{m0} \quad (3.73)$$

En el caso $m = n = 0$ la ecuación (3.67) se verifica trivialmente, con lo que dejamos sin relación dos constantes, B_{00}^{in} y B_{00}^{ex} , que, como en el estudio estático anteriormente visto, están estrechamente ligadas a la condición de conservación de volumen.

El método de resolución del nuevo problema acoplado es el mismo que hemos descrito en la sección 3.1.2. El potencial eléctrico admite el mismo desarrollo funcional que el allí propuesto, y tan sólo se modifican los coeficientes A_{mn} . La ecuación de la interfase para un modo m genérico es ahora

$$f_m(1 + W - m^2) + \frac{d^2 f_m}{dz^2} = \Delta \Pi_m + \frac{\Xi^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \right) \quad (3.74)$$

Por tanto sigue siendo válida la ecuación (3.15), que determina la solución homogénea de (3.74). La solución particular se busca nuevamente en forma de serie de cosenos, y los coeficientes verifican

$$a_{mn}(l_m - x_n^2) = B_{mn} \Delta \frac{\rho R_m(y_n)}{\omega y_n R'_m(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m(y_n)} + A_{mn} \frac{\Xi^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda} x_n \quad (3.75)$$

para $n \neq 0$. Si $n = 0$, lo que se tiene es

$$a_{m0} l_m = \frac{B_{m0}}{m} \left[\frac{\rho^{ex}}{2\bar{W}^{1/2} - \omega} - \frac{1}{2\bar{W}^{1/2} + \omega} \right] \quad (3.76)$$

salvo cuando también $m = 0$, en cuyo caso

$$a_{00} l_0 = B_{00}^{ex} - B_{00}^{in}. \quad (3.77)$$

La solución general, suma de la homogénea más la particular, se expresa en serie de cosenos, introduciéndose de nuevo los coeficientes r_{mn} (ver Apéndice A). Como entonces, la condición de volumen cilíndrico implica que $r_{00} + a_{00} = 0$, y se encuentra usando (3.77) que $B_{00}^{ex} - B_{00}^{in} = d_0 l_0^{1/2} \sin(l_0^{1/2} \Lambda) / \Lambda$, tal y como se obtuvo en el estudio estático.

La ecuación (3.21) que a partir de la condición de salto del vector desplazamiento eléctrico relaciona a_{mn} con los coeficientes del potencial, A_{mn} , se mantiene, mientras que para los coeficientes de la presión, B_{mn} , necesitan una relación análoga. Esto se consigue a partir de la condición cinemática (3.68) y da como resultado

$$\omega(r_{mn} + a_{mn}) + \frac{B_{mn}}{4\bar{W} - \omega^2} = 0 \quad (3.78)$$

Con esta última relación ya tenemos todos los elementos necesarios para proseguir el método visto anteriormente. Omitiremos por ello el resto

de los pasos: obtención de una ecuación para los a_{mn} en función de los r_{mn} y aplicación de las condiciones de anclaje. Las relaciones finales que se obtienen son

$$c_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} a_{mn}^{-1} = 0 \quad (3.79)$$

$$d_m \left[\frac{1 - \delta_{m0}}{2} a_{m0}^{-1} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} a_{mn}^{-1} \right] = 0 \quad (3.80)$$

donde $a_{mn} = l_m - \alpha_n^2 + \Upsilon_{mn} + \Gamma_{mn}$, estando Υ_{mn} definida por las funciones radiales que aparecen en el desarrollo de la presión:

$$\Upsilon_{mn} = (4\bar{W} - \omega^2)\omega \Delta \left[\frac{\rho R_m(y_n)}{\omega y_n R_m'(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m(y_n)} \right] \quad (3.81)$$

$$\Upsilon_{m0} = \frac{\omega}{m} [(2\bar{W}^{1/2} + \omega)\rho^{cs} - (2\bar{W}^{1/2} - \omega)]. \quad (3.82)$$

Cuando $\omega = 0$ no existe dependencia temporal y recuperamos el caso estático, siendo en tal caso $a_{mn} = k_{mn}$. Esto se cumplirá para los puntos de bifurcación. Para valores arbitrarios de los parámetros existe un conjunto de frecuencias, solución de las ecuaciones (3.79) y (3.80), que constituyen las *frecuencias naturales* de vibración del puente cilíndrico, y a las cuales están asociados unos *modos naturales* de vibración. Denotaremos a unas y otros mediante ω_{mi}^{\pm} y f_{mi}^{\pm} , siguiendo la notación introducida en la sección anterior, que pone de manifiesto la paridad de los modos y el orden creciente de las frecuencias.

A continuación presentamos los modos naturales, incluyendo forma de la interfase, potencial eléctrico y presión. Respecto de la última hay que hacer notar que existe una constante B_{00}^{sz} que viene impuesta por la presión lejos del puente; por comodidad la tomaremos como cero.

Familia antisimétrica

$$f_{mi}^{-} = \bar{c}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[\alpha_n(z + \Lambda)] e^{im\theta}}{a_{mni}^{-}} \quad (3.83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ml}^{-in} \\ \phi_{ml}^{-ex} \end{array} \right\} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\Lambda} \bar{c}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m(x_{nr})/I_m(x_n) \\ K_m(x_{nr})/K_m(x_n) \end{array} \right\} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{H_m(\epsilon^{ex}, x_n)q_{mnl}^-} \quad (3.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{ml}^{-in} \\ \Pi_{ml}^{-ex} \end{array} \right\} = -\bar{c}_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_m^{in}(y_{nr})}{\omega_{ml}^- y_n R_m^{in'}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m^{in}(y_n)} \\ \frac{\rho^{ex} R_m^{ex}(y_{nr})}{\omega_{ml}^- y_n R_m^{ex'}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_m^{ex}(y_n)} \end{array} \right\} \\ \times \frac{\omega_{ml}^- (4\bar{W} - \omega_{ml}^{-2}) \cos[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{q_{mnl}^-} \quad (3.85)$$

Familia simétrica

$$f_{m,l}^+ = \bar{a}_m \left[\frac{1 - \delta_{m0}}{2} q_{m0l}^{-1} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{q_{mnl}^+} \right] e^{im\theta} \quad (3.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ml}^+ in \\ \phi_{ml}^+ ex \end{array} \right\} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\Lambda} \bar{a}_m \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_m(x_{nr})/I_m(x_n) \\ K_m(x_{nr})/K_m(x_n) \end{array} \right\} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]e^{im\theta}}{H_m(\epsilon^{ex}, x_n)q_{mnl}^+} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \Pi_{m1}^+ \\ \Pi_{m1}^+ \end{array} \right\} &= \delta_{m0} \left\{ \begin{array}{c} -\bar{d}_{01} \omega_{01}^{1/2} \\ 0 \end{array} \right\} - \frac{1 - \delta_{m0}}{2} \frac{\bar{d}_{m0} \omega_{m1}^+}{m \bar{a}_{m01}^+} e^{im\theta} \left\{ \begin{array}{c} r^m (2\bar{W}^{1/2} - \omega_{m1}^+) \\ r^{-m} (2\bar{W}^{1/2} + \omega_{m1}^+) \end{array} \right\} \\
 &- \bar{d}_{m0} \sum_{\substack{n=2 \\ p \neq r}}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \frac{R_{m1}^{in}(y_n r)}{\omega_{m1}^+ y_n R_{m1}^{in'}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_{m1}^{in}(y_n)} \\ \frac{\rho^{az} R_{m1}^{az}(y_n r)}{\omega_{m1}^+ y_n R_{m1}^{az'}(y_n) + 2\bar{W}^{1/2} m R_{m1}^{az}(y_n)} \end{array} \right\} \\
 &\times \frac{\omega_{m1}^+ (4\bar{W} - \omega_{m1}^+{}^2) \cos[x_n(z + \Lambda)] e^{im\theta}}{\bar{a}_{m1}^+} \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

3.2.4 Resultados para puentes sin rotación

A continuación presentamos un análisis del comportamiento dinámico de puentes no rotantes. Nos restringimos a este caso puramente elíptico en primer lugar porque la información que se obtiene sobre la estabilidad de puentes es naturalmente extensible a casos con $W \neq 0$, sin más que acudir a argumentos de continuación en dicho parámetro: las regiones separadas por las superficies de bifurcación no pueden cambiar su estabilidad ante un cambio infinitesimal en W . En segundo lugar, un estudio exhaustivo del régimen hiperbólico requiere un esfuerzo y extensión que se salen de los objetivos de este trabajo. Aun cuando el problema matemático está formalmente resuelto, no es trivial la interpretación de los resultados.

Para puentes no rotantes el régimen es elíptico y las soluciones radiales para la presión son las funciones modificadas de Bessel de argumento $x_n r$, es decir, independientes de la frecuencia ω . Puede demostrarse [Sanz, 1985] que las frecuencias que verifiquen las ecuaciones (3.79) y (3.80) deben ser o bien reales o bien imaginarias puras, tal y como se espera de un sistema no disipativo. En el primer caso el comportamiento de la interfase en el tiempo es estrictamente oscilatorio, mientras que el segundo implica necesariamente un crecimiento exponencial y por tanto inestabilidad. El estudio del espectro discreto de frecuencias del puente cilíndrico con la esbeltez en ausencia de campo eléctrico puede encontrarse en la referencia anterior y en [Sanz, 1989], para modos axil-simétricos y asimétricos respectivamente. En el caso axil-simétrico las infinitas frecuencias se hacen cero (estabilidad marginal) para valores de la esbeltez que coinciden con los puntos de bifurcación, es decir,

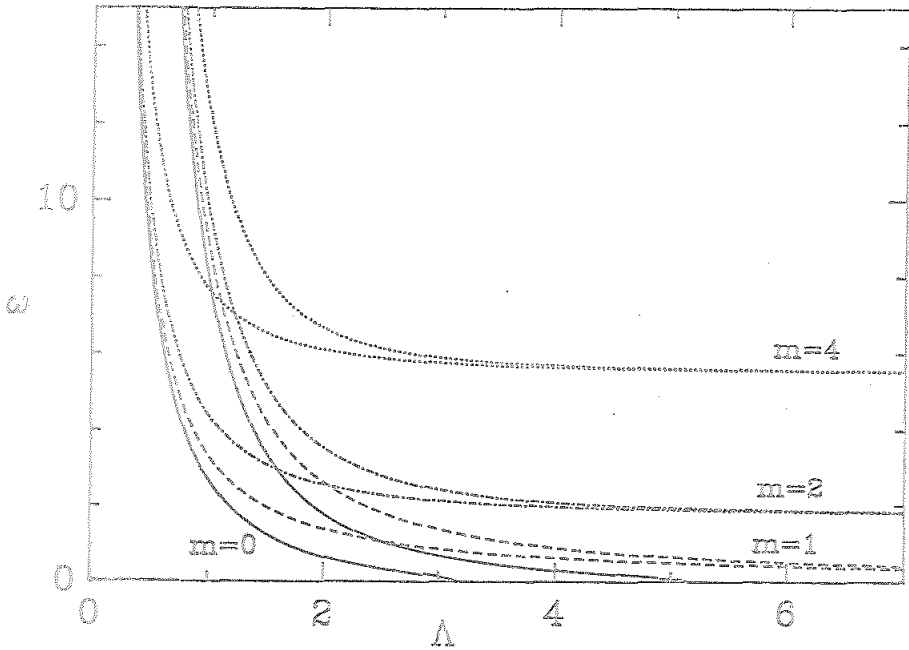


Figura 3.7: Primera frecuencia propia en función de la esbeltez para distintos modos azimutales ($m = 0, 1, 2$ y 4 , y dos valores del parámetro Ξ^2 (0 para las curvas inferiores y 30 para las superiores). Se toma $\epsilon^{\text{ex}} = 0.55$.

para Λ igual a un múltiplo de π o raíz de $\Lambda = \tan \Lambda$. En el caso asimétrico existe una asíntota horizontal para cada modo m , con valor $\omega = \sqrt{m(m^2 - 1)}/2$, a la cual tiende todo el espectro al crecer la esbeltez. Esto puede comprobarse nuevamente utilizando el límite $x_n \rightarrow 0$ en la expresión que da los polos de la serie cuyos ceros determinan las frecuencias propias del puente. Como consecuencia se tiene que los modos asimétricos son siempre estables.

En el límite opuesto, las frecuencias tienden a infinito cuando la esbeltez se acerca a cero, cualquiera que sea el valor de m .

El comportamiento descrito se mantiene cuando se aplica un campo eléctrico, tal y como se describe en la figura 3.7. En ella se ha representado la primera frecuencia. Los distintos modos axilsimétricos se hacen marginalmente estables justo en los puntos de bifurcación correspondientes al potencial aplicado. Para esbelteces mayores que el primer corte producido el puente es inestable.

Capítulo 4

Gravedad residual

La teoría lineal presentada en el capítulo anterior nos proporciona un criterio de estabilidad para el puente perfectamente cilíndrico. Sin embargo, las condiciones normales de experimentación nunca están libres de ciertas imperfecciones del modelo teórico, tales como gravedad residual y volumen no exactamente cilíndrico. Es conocido por los trabajos existentes sin campo eléctrico [Vega, 1983] que en particular la gravedad residual en la dirección axial tiene un efecto notablemente desestabilizante sobre el puente. Los niveles de flotabilidad que pueden obtenerse en tierra mediante la técnica del Tanque de Plateau pueden estimarse en unos tres órdenes de magnitud menores que los correspondientes a una configuración sin baño externo. Incluso estos bajos niveles exigen un refinamiento del modelo de estabilidad. Otros pequeños efectos susceptibles de ser tratados mediante técnicas perturbativas son un exceso o defecto de volumen respecto del volumen cilíndrico, excentricidad y diferencia de radio entre los discos de anclaje y gravedad residual en dirección transversal al eje de revolución.

En este capítulo presentamos un método general de tratamiento de las imperfecciones del modelo para construir un nuevo criterio de estabilidad que se aproxime mejor a las condiciones experimentales. La técnica, conocida como *Método de Lyapunov-Schmidt*, ha sido ampliamente utilizada para el estudio de imperfecciones en puentes líquidos sin campo eléctrico [Vega, 1983]. La novedad reside en la inclusión del potencial eléctrico, que no actúa como mera función implícita de la forma de la interfase, sino que obliga a una extensión del espacio de

funciones sobre el que se define el problema no lineal.

En primer lugar comprobaremos que un desarrollo perturbativo en potencias enteras del número de Bond deja de ser válido cerca de los valores críticos de los parámetros. El resto del capítulo se dedica a presentar y aplicar el Método de Lyapunov-Schmidt.

4.1 Equilibrio con gravedad residual

En ausencia de campos eléctricos aplicados se han observado y establecido teóricamente formas de equilibrio anfóricas, con y sin rotación, para puentes de volumen cilíndrico y gravedad residual en la dirección axial [Martínez, 1978]. En esta sección vamos a extender estos estudios lineales al caso de puentes sometidos a una diferencia de potencial.

4.1.1 El problema lineal

Buscamos una solución de equilibrio estático al conjunto de ecuaciones generales, con $V = 2\pi\Lambda$. Puesto que admitimos que B es muy pequeño parece justificado tomar como solución de referencia la de cilindro perfecto y hacer un desarrollo perturbativo regular de todas las incógnitas en dicho parámetro.

$$\begin{aligned} f &= f_0 + Bf_B + O(B^2) \\ \phi &= \phi_0 + B\phi_B + O(B^2) \\ \Pi &= \Pi_0 + B\Pi_B + O(B^2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sustituyendo en las ecuaciones generales y eliminando términos de orden cuadrático o superior queda el siguiente conjunto linealizado:

$$\nabla^2 \phi_B = 0 \quad (4.2)$$

$$\phi_B(r, \theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (4.3)$$

$$\phi_B(0, \theta, z) = O(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_B(r, \theta, z) = 0 \quad (4.4)$$

$$\Delta \phi_B = 0 \quad (4.5)$$

$$\Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_B}{\partial r} \right) = \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \frac{\partial f_B}{\partial z} \quad (4.6)$$

$$f_B(1+W) + \frac{\partial^2 f_B}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f_B}{\partial z^2} = \Delta \Pi_B - z + \frac{\Xi^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_B}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

$$f_B(0, \pm \Lambda) = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz f_B = 0 \quad (4.9)$$

Notar que si consideramos la transformación $B \rightarrow -B$, $z \rightarrow -z$ vista al final del capítulo anterior, la propiedad de simetría $f \rightarrow f$, $\phi \rightarrow -\phi$, $\Pi \rightarrow \Pi$ obliga a que f_B sea impar en z , ϕ_B sea par y $\Delta \Pi_B = 0$.

El sistema de ecuaciones anterior admite el mismo tratamiento que el dado al sistema que obtuvimos al hacer un estudio estático de bifurcación (ecuaciones (3.3)-(3.10)). El nuevo término, z , que aparece a la derecha de la ecuación (4.7) es desarrollado en serie de cosenos, $z = \sum_n \alpha_n \cos[x_n(z + \Lambda)]$ (ver las expresiones concretas en el Apéndice 1). Como entonces, es posible reducir la solución del problema a un sistema algebraico lineal que determina las constantes de integración, c_m y d_m , de la parte homogénea de la solución para la interfase, f_B . Conocidas estas constantes el problema queda completamente resuelto. El sistema algebraico al que nos referimos resulta ser

$$c_m \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} k_{mn}^{-1} = \delta_{m0} \frac{2}{\Lambda} l_m^{1/2} \cos(l_m^{1/2} \Lambda) \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \alpha_n k_{mn}^{-1} \quad (4.10)$$

$$d_m \left[\frac{1 - \delta_{m0}}{2} k_{m0}^{-1} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} k_{mn}^{-1} \right] = 0 \quad (4.11)$$

Salvo la relación correspondiente a c_0 , las restantes son justamente aquellas que dan los puntos de bifurcación del puente en ausencia de gravedad. El estudio dinámico posterior asignó a la región del espacio de parámetros en la que se encuentran todos estos puntos un carácter inestable, por lo que es presumible que los parámetros nunca alcancen valores tales que alguna de las relaciones (3.26) o (3.27) se verifique. Con ello podemos asegurar que c_0 es la única constante de integración no nula. La solución final será entonces

$$f_B = \frac{2}{\Lambda} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} (1/x_n^2 - p) k_{0n}^{-1} \cos[x_n(z + \Lambda)] \quad (4.12)$$

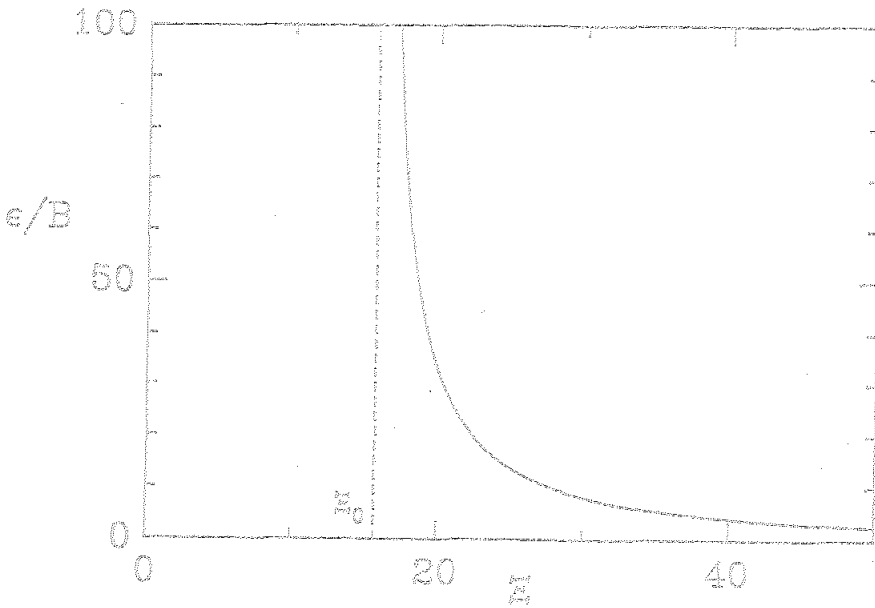


Figura 4.1: Deformación del puente respecto de la forma cilíndrica en función del número eléctrico Ξ según el análisis mediante perturbaciones regulares en el parámetro B . Se ha tomado $\epsilon^{\text{sz}} = 0.55$, $W = 0$ y $\Lambda = 4$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_B^{in} \\ \phi_B^{sz} \end{array} \right\} = -\frac{\Delta \epsilon}{\Lambda^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{1/x_n^2 - p}{H_0(\epsilon^{\text{sz}}, x_n) k_{0n}} \left\{ \begin{array}{l} I_0(x_n r) / I_0(x_n) \\ K_0(x_n r) / K_0(x_n) \end{array} \right\} \sin[x_n(z + \Lambda)] \quad (4.13)$$

donde

$$p \equiv \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} x_n^{-2} k_{0n}^{-1} \right) / \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} k_{0n}^{-1} \right) \quad (4.14)$$

Notar que conforme nos acercamos a los valores críticos de los parámetros para los que el puente cilíndrico se rompe, la constante p se va haciendo mayor, y con ella la función f_B . Ello queda reflejado en la figura 4.1, donde se ha representado una medida de la deformación del puente asociada a f_B en función del número eléctrico Ξ . La definición

del parámetro de deformación ε usada aquí es

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{2\Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz (F - 1)^2 \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

Se indica con una asíntota vertical el valor de Ξ correspondiente al punto de bifurcación del puente en ausencia de gravedad. Existirá una región más o menos extensa cercana a la superficie paramétrica de estabilidad marginal para la cual el tratamiento perturbativo presentado deje de tener validez. En este sentido, la solución encontrada puede ser denominada como *externa*, puesto que describe el comportamiento del puente lejos de los puntos críticos. Se hace patente la necesidad de un desarrollo perturbativo distinto del ensayado cuando nos acercamos a un punto de bifurcación, y que a veces se denomina solución *interna*. Esta nos la da el método de Lyapunov-Schmidt.

4.2 El Método de Lyapunov-Schmidt

4.2.1 Descripción del método

Hemos visto en la sección 2.2 que, desde el punto de vista lineal, para los valores críticos de los parámetros existe, además de la solución trivial, una familia bifurcada f_ε de amplitud arbitraria, ε . Esta amplitud resulta ser una medida adecuada de la deformación de una interfase dada. En otras palabras, para discernir cómo de próxima está una interfase de la ruptura basta averiguar la amplitud de su "componente" en f_ε , si previamente hemos definido un producto interior en el espacio de funciones en el que trabajamos que nos permita hallar dicha componente.

El Método de Lyapunov-Schmidt permite encontrar la ecuación de bifurcación de un problema no lineal en derivadas parciales mediante técnicas perturbativas regulares. La ecuación de bifurcación se entiende como una relación entre los parámetros del problema y las amplitudes de las familias bifurcadas para la cual es posible encontrar solución al problema no lineal. En la mayoría de los casos las bifurcaciones son unidimensionales o bidimensionales, y rara vez aparecen sistemas físicos cuyas soluciones de equilibrio bifurquen a familias descritas por tres o

más amplitudes independientes. En nuestro caso, la única amplitud es ε , tal y como se discutió en el capítulo anterior. Puesto que se pasa de un problema multidimensional, y de hecho de dimensión infinita, a una descripción de la bifurcación con los mínimos grados de libertad necesarios, el método se denomina *de proyección*. Existe una extensa bibliografía sobre el método de Lyapunov-Schmidt [Golubitsky, 1985], pero nosotros seguiremos la exposición de Myshkis y otros [Myshkis, 1987], muy orientada a problemas afines al nuestro.

Consideremos la ecuación $\mathcal{F}(\lambda, x) = 0$, siendo \mathcal{F} un operador no lineal, λ un parámetro y x un elemento de un espacio de Banach sobre el cual está definido nuestro operador. El par solución (λ_0, x_0) constituye un punto de bifurcación si se cumple que $Ax_0 = 0$, siendo A la parte lineal de \mathcal{F} para $(\lambda, x) = (\lambda_0, x_0)$. Nos proponemos buscar soluciones (λ, x) que sean una extensión local del punto de bifurcación. Obviamente, el operador \mathcal{F} no es invertible para λ_0 . Ello impide aplicar directamente el Teorema de la Función Implícita [Icoos, 1980] para obtener la extensión local buscada. Podemos salvar esta dificultad si A es un *operador de Fredholm*.

Básicamente un operador de Fredholm es un operador lineal definido en un espacio de Banach y con imagen en otro espacio de Banach, que tiene tres propiedades:

- i) su núcleo es de dimensión finita n ,
- ii) su operador adjunto tiene un núcleo de igual dimensión,
- iii) el espacio inicial puede descomponerse en suma directa del núcleo y el subespacio ortogonal a él, y el espacio final en suma directa de la imagen del operador y el subespacio ortogonal a ella.

El resultado importante acerca de los operadores de Fredholm es que la ecuación

$$Ax = y \quad (4.16)$$

es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$Au = (I - \mathcal{P})y, \quad \mathcal{P}y = 0 \quad (4.17)$$

siendo I el operador identidad y \mathcal{P} el operador proyección sobre el espacio ortogonal a la imagen de A . Hemos hecho uso de que es posible la descomposición $x = u + v$, donde v pertenece al núcleo de A y u a su complementario. Si el núcleo del operador adjunto tiene como base

el conjunto $\{v_k^*, k = 1, \dots, n\}$ podemos expresar la segunda ecuación de (4.17) como n productos interiores $\langle v_k^*, y \rangle = 0$, puesto que dicha base lo es también del subespacio ortogonal a la imagen de A . Estas relaciones pueden ser entendidas como *condiciones de compatibilidad*, puesto que son necesarias para que (4.16) tenga solución, que por otra parte tendrá la forma

$$x = u(y) + \sum_k \varepsilon_k v_k \quad (4.18)$$

donde se pone de manifiesto la dependencia de u respecto del término independiente, los v_k constituyen una base del núcleo de A y los coeficientes ε_k son arbitrarios.

La descomposición llevada a cabo en (4.17), aplicada al problema de bifurcación, permite invertir nuestro operador; expresamos \mathcal{F} como suma de una parte lineal y un término no lineal remanente:

$$\mathcal{F}(\lambda, x) = Ax + \mathcal{R}(\lambda, x) \quad (4.19)$$

La ecuación $\mathcal{F} = 0$ se escribe entonces

$$Ax = -\mathcal{R}(\lambda, x) \quad (4.20)$$

o bien

$$Au = -(\mathcal{I} - \mathcal{P})\mathcal{R}(\lambda, u + \sum_k \varepsilon_k v_k), \quad \mathcal{P}\mathcal{R}(u + \sum_k \varepsilon_k v_k) = 0 \quad (4.21)$$

El operador A es ya invertible puesto que u pertenece al espacio ortogonal a su núcleo. El Teorema de la Función Implícita nos asegura la existencia de una solución u que depende del parámetro y de las n amplitudes desconocidas ε_k . Estas amplitudes se encuentran a partir de las condiciones de compatibilidad

$$\langle v_i^*, \mathcal{R}(u + \sum_k \varepsilon_k v_k) \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

conocida la dependencia de u con ellas. Las relaciones $\varepsilon_i(\lambda)$ son las que denominamos ecuaciones de bifurcación. La solución completa queda así determinada como $x = u(\lambda) + \sum_k \varepsilon_k(\lambda)v_k$.

Desde el punto de vista operativo, el problema equivalente encontrado se resuelve localmente mediante técnicas perturbativas. Si nos

centramos en el caso $n = 1$, que es el que aparece en nuestro problema, las ecuaciones que hay que resolver son

$$Au(\lambda) = -(I - \mathcal{P})\mathcal{R}(\lambda, u(\lambda) + \varepsilon(\lambda)v), \quad (4.23)$$

$$\langle v^*, \mathcal{R}(\lambda, u + \varepsilon(\lambda)v) \rangle = 0 \quad (4.24)$$

Denominamos $\bar{\lambda}$ a la desviación del parámetro respecto de su valor crítico, $\bar{\lambda} \equiv \lambda - \lambda_0$. Por ser pequeño podemos desarrollar todas las magnitudes en este nuevo parámetro y en la amplitud de la familia bifurcada, ε :

$$u = \sum_{i+j>0} \bar{\lambda}^i \varepsilon^j u_{ij}, \quad \mathcal{R}(\lambda, u + \varepsilon v) \equiv \mathcal{R}(\bar{\lambda}, \varepsilon) = \sum_{i+j>0} \bar{\lambda}^i \varepsilon^j \mathcal{R}_{ij} \quad (4.25)$$

y al sustituir en (4.23) obtenemos una serie de problemas lineales recurrentes:

$$Au_{ij} = -(I - \mathcal{P})\mathcal{R}_{ij} \quad (4.26)$$

Las cantidades \mathcal{R}_{ij} son conocidas una vez resueltos los problemas de orden inferior, es decir, conocidas $\mathcal{R}_{i-1,j}$, $\mathcal{R}_{i,j-1}$ y anteriores. La ecuación de bifurcación se encuentra a partir de (4.24):

$$\sum_{i+j>0} \bar{\lambda}^i \varepsilon^j \langle v^*, \mathcal{R}_{ij} \rangle = 0 \quad (4.27)$$

Para un estudio local del diagrama de bifurcación basta retener los primeros términos no nulos en cada parámetro de la serie infinita que aparece en la expresión anterior.

Una variante cómoda del método expuesto se obtiene usando el hecho de que $-\mathcal{P}\mathcal{R}(\lambda, u + \varepsilon v) = \psi(\bar{\lambda}, \varepsilon)v^*$, donde ψ es un escalar. En tal caso el sistema que debemos resolver se escribe

$$\mathcal{F}(\lambda, x) + \psi v^* = 0 \quad (4.28)$$

siendo ψ tal que al ser desarrollada respecto de $\bar{\lambda}$ y ε hace compatible el problema lineal en todos los órdenes. La condición $\psi = 0$, necesaria para que este problema sea equivalente al originario, nos da entonces la ecuación de bifurcación. Esta versión del método de Lyapunov-Schmidt

se presenta en [Vega, 1983]. Si el desarrollo es $\psi = \sum \bar{\lambda}^i e^j \psi_{ij}$, a partir de su definición se tiene que cada coeficiente cumple

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^* \rangle \psi_{ij} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{R}_{ij} \rangle. \quad (4.29)$$

Como \mathbf{R}_{ij} no depende de la solución del problema de orden (i, j) , ψ_{ij} puede obtenerse sin resolver dicho orden.

4.2.2 Formulación operacional del problema de bifurcación.

En nuestro caso la ecuación $\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) = 0$ corresponde al problema estático que se obtiene al eliminar toda dependencia temporal y el campo de velocidades de las ecuaciones generales presentadas en el segundo capítulo. Escribimos explícitamente el problema y establecemos una distinción entre ecuaciones y condiciones de contorno¹

Ecuaciones:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.30)$$

$$\Delta \Pi - Bz + \frac{W}{2} f^2 + \frac{\Xi^2}{2} \Delta [\epsilon (\nabla \phi)^2] - \frac{\Xi^2}{|\nabla F|^2} \Delta [\epsilon (\nabla F \cdot \nabla \phi)^2] - (k_1 + k_2) = 0 \quad (4.31)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz f^2 \quad (4.32)$$

Condiciones de contorno:

$$f(\theta, \pm \Lambda) = 1, \quad (4.33)$$

$$\phi(r, \theta, \Lambda) = 1, \quad \phi(r, \theta, -\Lambda) = 0, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (4.35)$$

¹Es bien sabido [Brown, 1980] que la ligadura sobre el volumen de la zona interior está íntimamente relacionada con el valor del salto de presiones. Con (4.32) tenemos tantas ecuaciones como incógnitas en el problema.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \frac{1}{2\Lambda}(z + \Lambda) \quad (4.36)$$

$$\Delta \phi = 0 \quad (4.37)$$

$$\nabla F \cdot \Delta(\varepsilon \nabla \phi) = 0 \quad (4.38)$$

Los parámetros principales son la esbeltez Λ , el número de Bond eléctrico E , el número de Weber W y el número de Bond B . El diagrama de bifurcación se debe representar por tanto en un espacio de cinco dimensiones, siendo la quinta dimensión la amplitud ε , o proyección de la interfase sobre la familia bifurcada, f_ε , obtenida en la sección 3.2.2. En la aplicación del método podemos elegir un parámetro en el cual estemos interesados como parámetro de desarrollo y dejar fijos el resto. Esto nos lleva a obtener una proyección del espacio pentadimensional sobre uno de los planos coordenados con ε y el parámetro elegido como ejes.

El espacio de Banach sobre el que se aplica el operador es aquel cuyos elementos son vectores con cuatro componentes, siendo las dos primeras funciones de r , θ y z , la tercera función de θ y z y la cuarta un escalar. Estas componentes recogen las magnitudes que describen la solución del problema planteado, es decir, los potenciales eléctricos interior y exterior, la forma de la interfase y el salto de presiones:

$$\mathbf{x} = (\phi^{in}(r, \theta, z), \phi^{ex}(r, \theta, z), f(\theta, z), \Delta\Pi) \quad (4.39)$$

Debemos imponer más restricciones a las funciones admisibles como componentes de \mathbf{x} . Obviamente la primera componente debe tener como dominio la región del espacio entre electrodos correspondiente al puente y la segunda la correspondiente al exterior del puente. Por otro lado, exigimos que las cuatro componentes verifiquen las condiciones de contorno arriba escritas.

Definimos el producto interior de dos elementos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 como

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv E_0^2 \int_{V_{in}} dV \phi_1^{in} \phi_2^{in} + \varepsilon^2 E_0^2 \int_{V_{ex}} dV \phi_1^{ex} \phi_2^{ex} + \int_{S_1} dS f_1 f_2 + \Delta\Pi_1 \Delta\Pi_2 \quad (4.40)$$

donde la primera integral se extiende al volumen interior V_{in} , la segunda al exterior, V_{ex} , y la tercera a la superficie lateral definida por la interfase. E_0 es el valor crítico del número de Bond eléctrico para W

y Λ dados, es decir, o bien Ξ_{01}^- , o bien Ξ_{11}^+ , dependiendo del valor de Λ y W , tal y como se estudió en el capítulo anterior.

4.2.3 El operador lineal y su adjunto.

El punto de bifurcación en torno al cual buscamos soluciones al problema no lineal viene dado por los valores de los parámetros $B = 0$ y $\Xi = \Xi_0(\Lambda, W)$. La parte lineal, A , del operador \mathcal{F} descrito en el apartado anterior puede escribirse en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} -\nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \\ -(\Xi_0^2 \Delta \epsilon / 2\Lambda) \partial / \partial z & 0 & 1 + W + \partial^2 / \partial z^2 + \partial^2 / \partial \theta^2 & -1 \\ 0 & 0 & -\int_{S_1} dS & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

que actúa sobre el vector definido en (4.39). Tanto para los saltos como para la superficie lateral se toma la interfase en $r = 1$. Las condiciones de contorno deben ser también linealizadas, por lo que ahora exigimos a los elementos del espacio sobre el cual se aplica A que verifiquen

$$f(\theta, \pm\Lambda) = 0, \quad (4.42)$$

$$\phi(r, \theta, \pm\Lambda) = 0, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (4.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad (4.45)$$

$$\Delta \phi = 0 \quad (4.46)$$

$$\Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.47)$$

La solución no trivial a la ecuación homogénea $Ax = 0$ es la familia bifurcada para el valor Ξ_0 encontrada en la sección 3.2.2 y que denominaremos:

$$v = (\phi_0^{in}, \phi_0^{ex}, f_0, 0) \quad (4.48)$$

Buscamos el operador adjunto, A^* , a partir de su definición, $(Ax_1, x_2) = (x_1, A^*x_2)$ para cualquier par de elementos x_1, x_2 del es-

pacio original:

$$\begin{aligned}
 (A_{\kappa_1, \kappa_2}) = & -\Xi_0^2 \int_{V_{in}} dV \phi_2^{in} \nabla^2 \phi_1^{in} - \epsilon^{ex} \Xi_0^2 \int_{V_{ex}} dV \phi_2^{ex} \nabla^2 \phi_1^{ex} \\
 & + \int_{S_1} dS f_2 \left[\left(1 + W + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f_1 - \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon \partial \phi_1^{in}}{2\Lambda \partial z} - \Delta \Pi_1 \right] \\
 & - \Delta \Pi_2 \int_{S_1} dS f_1
 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Aplicamos la identidad de Green extendida a cada uno de los dos volúmenes

$$\int_V \phi_2 \nabla^2 \phi_1 = \int_V \phi_1 \nabla^2 \phi_2 + \int_S dS \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) \quad (4.50)$$

donde como siempre $\partial/\partial n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$ y \mathbf{n} es el vector normal dirigido hacia el exterior del volumen considerado. La integral de superficie está extendida a la interfase y a las áreas de los electrodos correspondientes a cada volumen. Estas últimas contribuciones son nulas puesto que los potenciales son cero. En el caso del volumen exterior existe además una contribución de la superficie situada en $r \rightarrow \infty$, pero podemos tomarla también como nula si el potencial decae adecuadamente con la coordenada radial. Según todo esto, los dos primeros términos de la ecuación (4.49) quedan entonces

$$\begin{aligned}
 & -\Xi_0^2 \int_{V_{in}} dV \phi_2^{in} \nabla^2 \phi_1^{in} - \epsilon^{ex} \Xi_0^2 \int_{V_{ex}} dV \phi_2^{ex} \nabla^2 \phi_1^{ex} = \\
 & \quad -\Xi_0^2 \int_{V_{in}} dV \phi_1^{in} \nabla^2 \phi_2^{in} - \epsilon^{ex} \Xi_0^2 \int_{V_{ex}} dV \phi_1^{ex} \nabla^2 \phi_2^{ex} \\
 & \quad -\Xi_0^2 \int_{S_1} dS \left(\phi_2^{in} \frac{\partial \phi_1^{in}}{\partial r} - \phi_1^{in} \frac{\partial \phi_2^{in}}{\partial r} + \epsilon^{ex} \phi_1^{ex} \frac{\partial \phi_2^{ex}}{\partial r} - \epsilon^{ex} \phi_2^{ex} \frac{\partial \phi_1^{ex}}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Teniendo en cuenta que estamos restringidos al espacio de funciones para el cual $\Delta \phi = 0$, la última integral se puede escribir

$$-\Xi_0^2 \int_{S_1} dS \left[\phi_1^{in} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) - \phi_2^{in} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right] \quad (4.52)$$

o bien, usando (4.47),

$$-\Xi_0^2 \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \int_{S_i} dS \left(\phi_1^{in} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \phi_2^{in} \frac{\partial f_1}{\partial z} \right). \quad (4.53)$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que f se anula en los electrodos se encuentra finalmente que la integral de superficie que aparece en (4.51) es

$$-\int_{S_i} dS \left(f_1 \frac{\partial \phi_2^{in}}{\partial z} - f_2 \frac{\partial \phi_1^{in}}{\partial z} \right) \quad (4.54)$$

Por otra parte, dentro de la integral de superficie que aparece en (4.49) podemos transformar mediante integraciones por partes algunos términos:

$$\int_{S_i} dS f_2 \left(1 + W + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f_1 = \int_{S_i} dS f_1 \left(1 + W + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f_2 \quad (4.55)$$

Agrupando todos los términos, cancelando los opuestos y reordenando llegamos a que $\langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle$. Por tanto, el operador A es autoadjunto. Notar que esto es así gracias al producto interior elegido.

Finalmente, es trivial la descomposición del espacio original en suma directa de dos subespacios, uno de dimensión uno, generado por x_0 y otro, ortogonal a él, de dimensión infinita. Por ser el problema lineal autoadjunto, x_0 es precisamente un vector ortogonal a la imagen de A , y la misma descomposición es válida para el espacio final, que es isomorfo con el original.

Como conclusión, A es un operador de Fredholm con núcleo de dimensión uno y podemos aplicar el Método de Lyapunov-Schmidt para obtener la ecuación de bifurcación de nuestro problema.

4.2.4 Desarrollo perturbativo del problema ampliado.

Existen dos posibles familias bifurcadas, dependiendo del valor de la esbeltez y el número de Weber; una la familia axilsimétrica ($m = 0$) y la otra el llamado modo en comba ($m = 1$). El punto de bifurcación a la familia axilsimétrica está determinado por la expresión $\Xi = \Xi_{01}^-(\Lambda, W)$,

según vimos en la sección 3.2.2. La familia bifurcada se denominó $f_{01}^-(z)$, y el potencial correspondiente, $\phi_{01}^-(r, z)$. El salto de presiones es cero. Por otro lado para el modo en comaba se utilizaron las expresiones $\Xi_{11}^+(\Lambda, W)$, $f_{11}^+(z) \cos \theta$ y $\phi_{11}^+(r, z) \cos \theta$. En la aplicación del método expuesto debemos distinguir entre estos dos casos. Nos centramos en el primero y con respecto al segundo tan solo se hará hincapié en las diferencias existentes. No obstante para simplificar la notación escribiremos siempre Ξ_0 , f_0 y ϕ_0 al referirnos al número de Bond eléctrico crítico y sus correspondientes interfase y potencial. Estas funciones son las que integran el vector v , tal y como hemos definido en la ecuación (4.48) y que genera el núcleo del operador lineal. Por ser este operador autoadjunto podemos tomar $v^* = v$. Descomponemos todo vector en su componente perteneciente al núcleo y otro vector perteneciente al espacio ortogonal:

$$x = \epsilon v + x_{\perp} \quad (4.56)$$

$$x_{\perp} \equiv (\varphi^{in}, \varphi^{ex}, u, \pi) \quad (4.57)$$

Desarrollamos las nuevas funciones respecto de la amplitud ϵ , la desviación del cuadrado del número de Bond eléctrico respecto del cuadrado del valor crítico, $\bar{\Xi} \equiv \Xi^2 - \Xi_0^2$ y el número de Bond, B :

$$u(\theta, z) = \sum_{i+j+k>0} \bar{\Xi}^i \epsilon^j B^k u_{ijk}(\theta, z) \quad (4.58)$$

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum_{i+j+k>0} \bar{\Xi}^i \epsilon^j B^k \varphi_{ijk}(r, \theta, z) \quad (4.59)$$

$$\pi = \sum_{i+j+k>0} \bar{\Xi}^i \epsilon^j B^k \pi_{ijk} \quad (4.60)$$

Siguiendo el método propuesto, ampliamos el problema inicial en la forma $\mathcal{F}(\Xi, B, x_{\perp}) + \psi v = 0$, donde el escalar ψ también se desarrolla:

$$\psi = \sum_{i+j+k>0} \bar{\Xi}^i \epsilon^j B^k \psi_{ijk} \quad (4.61)$$

Introduciendo estos desarrollos en el problema no lineal ampliado obtenemos una secuencia infinita de problemas lineales recurrentes cuya

estructura es la siguiente:

$$\nabla^2 \varphi_{ijk} - \psi_{ijk} \phi_0 = 0 \quad (4.62)$$

$$\varphi_{ijk}(r, \theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (4.63)$$

$$\varphi_{ijk}(0, \theta, z) = O(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_{ijk}(r, \theta, z) = 0 \quad (4.64)$$

$$\Delta \varphi_{ijk} = h_{ijk}^{(1)}(\theta, z) \quad (4.65)$$

$$\Delta \left(\epsilon \frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial r} \right) - \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \frac{\partial u_{ijk}}{\partial z} = h_{ijk}^{(2)}(\theta, z) \quad (4.66)$$

$$\left(1 + W + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_{ijk} - \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} \Delta \left(\epsilon \frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial z} \right) - \pi_{ijk} - \psi_{ijk} f_0(z) = h_{ijk}^{(3)}(\theta, z) \quad (4.67)$$

$$u_{ijk}(\theta, \pm\Lambda) = 0 \quad (4.68)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz u_{ijk} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz h_{ijk}^{(4)} \quad (4.69)$$

Las funciones $h_{ijk}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 4$ representan la parte no lineal de las ecuaciones que hemos desarrollado, y dependen de las soluciones de orden inferior, entendidas éstas como las u_{rst} , φ_{rst} , π_{rst} con r, s, t tales que $r \leq i$, $s \leq j$, $t \leq k$ y $r+s+t < i+j+k$. La forma explícita de estas funciones para los órdenes necesarios para completar un estudio local, tanto para la bifurcación axilsimétrica como en comba, están recogidos en el Apéndice C.

Para la bifurcación a la familia axilsimétrica puede demostrarse por inducción que la solución de la ecuación no lineal es también axilsimétrica, es decir, que u_{ijk} , φ_{ijk} no dependen de la coordenada azimutal para ningún orden. En efecto, si se cumple para todos los órdenes inferiores, las funciones $h_{ijk}^{(l)}$ tampoco dependerán de dicha coordenada. Haciendo una descomposición en modos m , obtendremos un problema no homogéneo para $m = 0$ y homogéneo para el resto, que además coincide con el formulado y resuelto en la sección 3.2.2. Para los valores de los parámetros fijados, correspondientes al primer punto de bifurcación, la solución es la trivial para estos modos. Por tanto, no existe dependencia azimutal en el orden (i, j, k) si no existe en los órdenes inferiores. Como para el primer problema la solución es axilsimétrica,

se completa la demostración. Esto nos permite eliminar de entrada toda dependencia con θ de nuestras ecuaciones.

4.2.5 Algunas propiedades de simetría.

En el primer capítulo se señaló la existencia de ciertas transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones generales. En particular nos es útil la primera de ellas, que con la inclusión del nuevo parámetro de desarrollo ε se puede reescribir

$$z \rightarrow -z; \quad \varepsilon \rightarrow -\varepsilon; \quad u \rightarrow u; \quad \varphi \rightarrow -\varphi; \quad B \rightarrow -B; \quad \psi \rightarrow -\psi \quad (4.70)$$

quedando igual el resto de parámetros, coordenadas y magnitudes. Esta transformación implica:

- i) $u_{ijk}(-z) = (-1)^{j+k+1} u_{ijk}(z)$,
- ii) $\varphi_{ijk}(-z) = (-1)^{j+k+1} \varphi_{ijk}(z)$,
- iii) $p_{ijk} = 0$ si $j + k$ es impar,
- iv) $\psi_{ijk} = 0$ si $j + k$ es par,

todo ello independiente del subíndice i . La última propiedad nos permite adelantar el aspecto que tiene la ecuación de bifurcación:

$$\varepsilon(\psi_{110}\bar{\varepsilon} + \psi_{030}\varepsilon^2) + \psi_{001}B + \dots = 0 \quad (4.71)$$

en base a propiedades de simetría exclusivamente. Para $B = 0$ se trata de un diagrama de bifurcación tipo *pitchfork*, y es precisamente el número de Bond el que la rompe en dos ramas de soluciones aisladas, tal y como se muestra en la figura 4.2. Respecto de Λ y W podemos construir los correspondientes diagramas $\varepsilon - \Lambda$ y $\varepsilon - W$, con el resto de parámetros fijos. Todos ellos son del mismo tipo, puesto que los argumentos de simetría se aplican igualmente con desarrollos en cualquier parámetro.

En este punto de nuestro análisis ya conocemos cuáles son los coeficientes que debemos calcular, a saber, ψ_{110} , ψ_{030} y ψ_{001} . Para ello debemos resolver los problemas de orden $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, 0)$. Notar que el problema de orden $(1, 0, 0)$ no aparece, puesto que para $\varepsilon = 0$ es $\bar{\varepsilon} = 0$, y que el caso $(0, 1, 0)$ corresponde al problema cuya solución

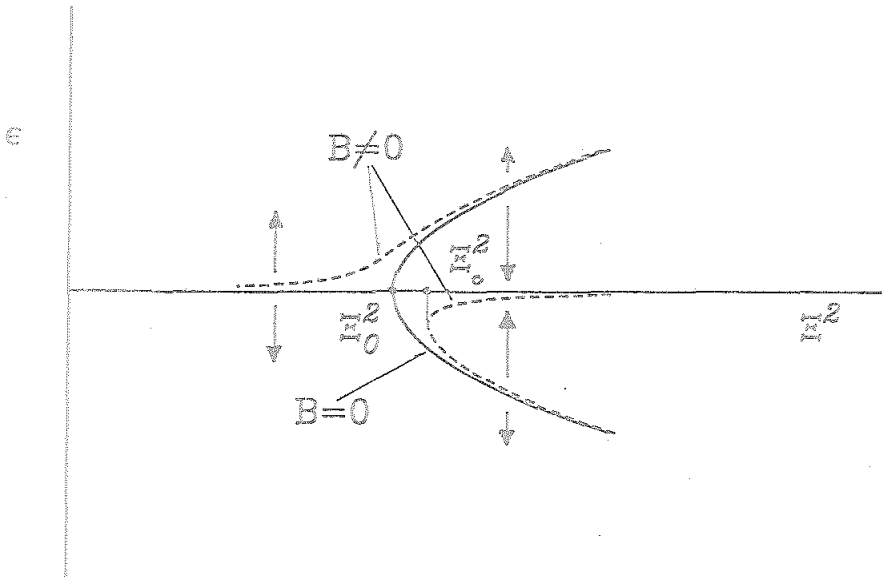


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación tipo 'pitchfork' y su ruptura en ramas de soluciones aisladas al incluir el parámetro B .

nos da el núcleo de A y por tanto no se tiene en el desarrollo del vector x_1 . El coeficiente ψ_{030} podrá ser expresado en función de los problemas de orden inferior, y a ello dedicamos el siguiente apartado.

4.2.6 Obtención de ψ_{ijk} mediante la condición de compatibilidad.

En la expresión (4.29) se tiene ψ_{ijk} en función de los R_{ijk} , cuya forma no es conocida directamente a partir del conjunto de ecuaciones (4.62)-(4.69), puesto que parte de la no linealidad del problema está en las condiciones de contorno. Es posible obtener R_{ijk} a partir de las funciones $h_{ijk}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 4$ mediante una transformación tal que las nuevas magnitudes verifiquen las condiciones de contorno lineales. Una transformación adecuada es:

$$\varphi_{ijk}^{in} = \hat{\varphi}_{ijk}^{in} - g_{ijk}(\tau, z), \quad \varphi_{ijk}^{ex} = \hat{\varphi}_{ijk}^{ex},$$

$$u_{ijk} = \hat{u}_{ijk}, \quad \pi_{ijk} = \hat{\pi}_{ijk} \quad (4.72)$$

con

$$g_{ijk}(r, z) = \bar{g}_{ijk}(r, z)\Theta(z), \quad (4.73)$$

$$\bar{g}_{ijk}(r, z) = (1-r)h_{ijk}^{(2)}(z) + h_{ijk}^{(1)}(z), \quad (4.74)$$

$$\Theta(z) = \frac{1}{2}[\vartheta(z+\Lambda) - \vartheta(z-\Lambda)] \quad (4.75)$$

donde utilizamos la "función salto", $\vartheta(z-z_0)$, definida como aquella que vale la unidad para $z > z_0$ y cero para el resto. El factor $\Theta(z)$ permite que las magnitudes transformadas sigan cumpliendo las condiciones de contorno en los electrodos, mientras que el factor $\bar{g}_{ijk}(r, z)$ hace que se verifique que $\Delta\hat{\phi}_{ijk} = 0$ y $\Delta(\epsilon\partial\hat{\phi}_{ijk}/\partial r) - (\Delta\epsilon/2\Lambda)d\hat{u}_{ijk}/dz = 0$.

El sistema transformado de esta forma nos permite identificar la parte no lineal como

$$R_{ijk} = (\nabla^2 g_{ijk}, 0, h_{ijk}^{(2)} - \frac{\epsilon_0^2}{2\Lambda} dh_{ijk}^{(1)}/dz, -\int_{S_1} dS h_{ijk}^{(4)}) \quad (4.76)$$

El siguiente paso para determinar el coeficiente ψ_{ijk} es introducir este vector en la condición de compatibilidad (4.29). El único punto delicado en la evaluación de las integrales que aparecen está relacionado con la discontinuidad de la función $g_{ijk}(r, z)$ en los electrodos. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{V_{in}} dV \phi_0^{in} \nabla^2 g_{ijk} &= \int_{V_{in}} dV g_{ijk} \nabla^2 \phi_0^{in} + \oint_S dS \left(\phi_0^{in} \frac{\partial g_{ijk}}{\partial n} - g_{ijk} \frac{\partial \phi_0^{in}}{\partial n} \right) = \\ &= \int_{S_1} dS \left(\phi_0^{in} \frac{\partial \bar{g}_{ijk}}{\partial r} - \bar{g}_{ijk} \frac{\partial \phi_0^{in}}{\partial r} \right) + \int_{S_{ei}} dS \left(\phi_0^{in} \frac{\partial g_{ijk}}{\partial z} - g_{ijk} \frac{\partial \phi_0^{in}}{\partial z} \right) \quad (4.77) \end{aligned}$$

donde en la primera integral se eliminan las funciones salto y en la segunda integral, extendida a los electrodos, se evalúa la expresión entre corchetes en $z = \Lambda$ y se resta la misma expresión evaluada en $z = -\Lambda$. Debido a que g_{ijk} es obligado a valer cero en los electrodos, el último término se anula, mientras que el anterior, $\phi_0^{in} \partial g_{ijk} / \partial z$, se cancela por razones de simetría. En efecto, la derivada en z de las funciones salto se hacen infinitas y, aunque el potencial sea cero en los electrodos, no se puede garantizar la anulación de cada término; sin embargo, dicho

potencial es una función par, mientras que $\bar{g}_{ijk}(r, z)$ es impar para los órdenes con j impar, que son aquellos para los que hay que calcular los ψ_{ijk} . En resumen, se trata de una función par en z , y al tomar valores iguales en $z = \pm\Lambda$ se cancelan.

La condición de compatibilidad, tras sustituir $g_{ijk}(r, z)$ es:

$$\psi_{ijk} = \frac{\int_{S_i} dS \left[f_0 \left(h_{ijk}^{(3)} - \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} \frac{dh_{ijk}^{(1)}}{dz} \right) - \Xi_0^2 \left(\phi_0^{in} h_{ijk}^{(2)} - \frac{\partial \phi_0^{in}}{\partial r} h_{ijk}^{(1)} \right) \right]}{\epsilon^{ex} \Xi_0^2 \int_{V_{ex}} dV (\phi_0^{ex})^2 + \Xi_0^2 \int_{V_{in}} dV (\phi_0^{in})^2 + \int_{S_i} dS f_0^2} \quad (4.78)$$

Pero dado que el denominador es común a todos los coeficientes ψ_{ijk} podemos eliminarlo, sin que por ello se modifique la ecuación de bifurcación ni el escalado de la amplitud ϵ . Efectuando una integración por partes obtenemos la expresión final:

$$\psi_{ijk} = \int_{S_i} dS \left\{ f_0 h_{ijk}^{(3)} - \Xi_0^2 \left[\phi_0^{in} h_{ijk}^{(2)} + \left(\frac{1}{2\Lambda} \frac{df_0}{dz} - \frac{\partial \phi_0^{in}}{\partial r} \right) h_{ijk}^{(1)} \right] \right\} \quad (4.79)$$

Es posible llegar a la misma expresión para estos coeficientes mediante otro procedimiento [Nayfeh, 1981]. Sin entrar en detalles diremos que el método alternativo parte del sistema lineal no homogéneo (4.62)-(4.69). Multiplicando la ecuación de la interfase por f_0 , integrando en toda la superficie lateral $r = 1$, transfiriendo las derivadas a dicha función (en un proceso análogo al usado anteriormente para encontrar el operador adjunto A^*) y haciendo uso de las otras ecuaciones del sistema no homogéneo, se obtiene una expresión para ψ_{ijk} que coincide con la ecuación (4.78).

4.2.7 Interpretación de la ecuación de bifurcación.

Hemos introducido anteriormente el significado de la amplitud ϵ de la familia bifurcada. El diagrama presentado en la figura 4.2 nos muestra cuáles son las amplitudes para las cuales existe una solución de equilibrio. Un puente con valores dados de los parámetros y amplitud ϵ distinta de la prescrita por la ecuación de bifurcación para esos valores

de los parámetros evoluciona necesariamente hacia una forma de equilibrio. De hecho, la ecuación de bifurcación delimita los dominios de atracción de los equilibrios estables. Aunque el método de Lyapunov-Schmidt no se plantea la estabilidad de las soluciones de equilibrio encontradas, el Teorema de Factorización [Hoos, 1980] nos da esta información. En efecto, a partir de dicho teorema se demuestra que en todo punto doble (caso de la bifurcación sin gravedad residual) y en todo punto de retorno (caso con gravedad residual), y sólo allí, se produce necesariamente un cambio en el carácter estable o inestable de la rama de bifurcación. Cuando un punto de retorno surge de una ruptura de simetría debida a una imperfección, podemos relacionar la estabilidad de las ramas del diagrama sin perturbar ($B = 0$) con la estabilidad de las nuevas ramas ($B \neq 0$): por continuidad respecto del parámetro que representa la imperfección las ramas inicialmente estables siguen siendo estables en el caso perturbado. Todo ello se ilustra en la figura 4.2 para una bifurcación tipo pitchfork. También se esquematiza mediante flechas la evolución de cualquier perturbación inicial hacia un equilibrio estable, dependiendo del dominio de atracción en que se encuentre.

Los comentarios anteriores nos hacen ver que no es necesario un análisis dinámico para establecer la estabilidad de las soluciones de equilibrio encontradas por métodos estáticos. Nos basta con conocer la estabilidad de la solución cilíndrica, lo cual se obtuvo en el capítulo anterior, para asignar un carácter estable o inestable al resto de las ramas, con y sin gravedad residual.

A partir del diagrama de bifurcación podemos finalmente obtener el criterio de estabilidad cuando se tiene en cuenta el efecto de la gravedad residual. El nuevo valor del potencial adimensional se obtiene del valor crítico en ausencia de gravedad, Ξ_0 , añadiendo la desviación $\bar{\Xi}_r$ correspondiente al punto de retorno que aparece en el diagrama de bifurcación. Las coordenadas de este punto son

$$\bar{\Xi}_r = \frac{3}{2^{2/3}} \frac{(\psi_{030}\psi_{001}^2)^{1/3}}{\psi_{110}} B^{2/3} \quad (4.80)$$

$$\epsilon_r = \left(\frac{\psi_{001}B}{2\psi_{030}} \right)^{1/3} \quad (4.81)$$

Se nos plantea la cuestión de si es posible obtener los diagramas de

bifurcación en el plano $\varepsilon - \Lambda$ y $\varepsilon - W$ a partir del diagrama correspondiente al plano $\varepsilon - \Xi$. Es claro que la respuesta es afirmativa puesto que en la relación

$$\varepsilon(\psi_{110}(\Lambda, W)\bar{\Xi} + \psi_{030}(\Lambda, W)\varepsilon^2) + \psi_{001}B = 0 \quad (4.82)$$

y en el criterio de estabilidad $\Xi_0(\Lambda, W)$ está contenida toda la información paramétrica necesaria para construir dichos diagramas. En la ecuación (4.82) la rama parabólica es descrita por los valores $\Xi = \Xi_0(\Lambda) + \bar{\Xi}$. Este potencial determina un valor crítico de la esbeltez dado por $\Lambda_0(\Xi, W)$, siendo esta función la inversa de $\Xi_0(\Lambda, W)$. Este será el nuevo punto de bifurcación considerado. Desarrollamos las funciones de la esbeltez que aparecen en la ecuación de bifurcación en torno a $\Lambda_0(\Xi, W)$, tomando tan solo los dos primeros términos

$$\psi_{ijk}(\Lambda, W) \simeq \psi_{ijk}(\Lambda_0, W) + \left. \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda_0} (\Lambda - \Lambda_0) \quad (4.83)$$

$$\bar{\Xi} \simeq \Xi - \Xi_0(\Lambda_0, W) - \left. \frac{\partial \Xi_0}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda_0} (\Lambda - \Lambda_0) = - \left. \frac{\partial \Xi_0}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda_0} (\Lambda - \Lambda_0) \quad (4.84)$$

En la última expresión hemos hecho uso de que Ξ_0 es la función inversa de Λ_0 . Si ahora definimos $\lambda \equiv \Lambda_0 - \Lambda$, la nueva ecuación de bifurcación es

$$\varepsilon(\bar{\psi}_{110}(\Xi, W) \left. \frac{\partial \Xi_0}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda_0} \lambda + \bar{\psi}_{030}(\Xi, W)\varepsilon^2) + \bar{\psi}_{001}B = 0 \quad (4.85)$$

donde hemos reescrito $\bar{\psi}_{ijk}(\Xi, W) \equiv \psi_{ijk}(\Lambda_0(\Xi, W), W)$.

De forma análoga tenemos una ecuación de bifurcación en el plano $\varepsilon - W$:

$$\varepsilon(\hat{\psi}_{110}(\Xi, \Lambda) \left. \frac{\partial \Xi_0}{\partial W} \right|_{W_0} w + \hat{\psi}_{030}(\Xi, \Lambda)\varepsilon^2) + \bar{\psi}_{001}B = 0 \quad (4.86)$$

donde ahora $\hat{\psi}_{ijk}(\Xi, \Lambda) \equiv \psi_{ijk}(\Lambda, W_0(\Xi, \Lambda))$ y $w \equiv W_0(\Lambda, \Xi) - W$.

4.3 Resolución del problema de orden arbitrario

Una vez caracterizado el problema lineal que en cada orden del desarrollo en ε , Ξ y B debemos resolver, vamos a describir el método uti-

lizado. En primer lugar se nos planteó la posibilidad de un tratamiento analítico como el llevado a cabo en el capítulo anterior. El éxito de este método depende de si somos capaces de encontrar un desarrollo en serie de Fourier de los términos inhomogéneos que aparecen en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, es decir, de los $h_{i\sigma k}^{(l)}(z)$, con $l = 1, \dots, 4$. En función de sus coeficientes de Fourier la solución formal es fácil de obtener. Sin embargo, dos motivos nos han hecho deshechar esta vía de resolución:

- i) Las funciones $h_{i\sigma k}^{(l)}(z)$ son a su vez productos de funciones conocidas como series de Fourier, como puede verse en el Apéndice 3. Ello implica que cada coeficiente de Fourier del producto es una serie infinita a la cual hay que calcular su comportamiento asintótico para obtener valores precisos.
- ii) Aparecen derivadas de orden alto, con lo cual las series involucradas convergen más lentamente e incluso divergen en los electrodos en algunos casos.

Todo ello hace este método inapropiado. Por otro lado, la utilización de un método puramente numérico, como pueden ser los elementos finitos o diferencias finitas para la resolución de la ecuación de Laplace para el potencial, parecen demasiado costosos desde el punto de vista computacional. Frente a todas estas posibilidades hemos optado por una aproximación semianalítica conocida en la literatura como *Método de las Líneas* [Keener, 1988], [Gransy, 1981], [Mikhail, 1987], que al discretizar tan sólo en la variable axial resulta muy económico, incluso con esquemas de cuarto orden. Los resultados tienen suficiente precisión para que el error cometido al resolver un orden perturbativo no sea importante al sustituir esta solución en el término inhomogéneo de los siguientes órdenes.

4.3.1 El Método de las Líneas

Como ya hemos adelantado, se trata de un método semianalítico, en el sentido de que se discretiza en una variable (la axial), representando mediante un esquema en diferencias finitas los operadores diferenciales que aparecen en las ecuaciones que hay que resolver, mientras que la variable radial permanece continua y se resuelve la dependencia en ella de forma analítica. La simplicidad de geometría que supone una configu-

ración cilíndrica entre electrodos planoparalelos infinitamente extensos permite este último paso.

El único orden que necesitamos resolver mediante este método es el (020), por lo que nos centraremos en él para exponer el procedimiento que debe seguirse en general. En este orden se tiene por argumentos de simetría que $\psi_{020} = 0$, u_{020} es una función par en z y φ_{020} es impar en la misma coordenada. Todo ello simplifica el problema en varios aspectos: para el potencial eléctrico debemos resolver la ecuación de Laplace, en lugar de la de Poisson, y el intervalo en z sobre el que debemos calcular las funciones se reduce a la mitad $[0, \Lambda]$. Las condiciones de contorno en $z = -\Lambda$ se sustituyen por

$$\varphi_{020}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_{020}}{\partial z}(0) = 0. \quad (4.87)$$

Para simplificar la notación eliminaremos el subíndice (020) en lo que sigue.

Existen tres pasos bien definidos en la aplicación del método: i) discretización en z , ii) resolución de la ecuación de Laplace y iii) aplicación de las condiciones de contorno en la interfase. Las condiciones en los electrodos se tienen en cuenta en el esquema de discretización en diferencias finitas. Las condiciones en el eje y para r tendiendo a infinito son utilizadas al construir la parte radial de la solución del potencial. El resultado final es la transformación de las ecuaciones diferenciales en todo el volumen en un sistema algebraico con incógnitas definidas sobre la interfase.

i) Discretizamos la variable z considerando $n + 2$ puntos equidistantes $\{z_i = hi, i = 0, \dots, n + 1\}$, con $h \equiv \Lambda/(n + 1)$. Consideramos exclusivamente los $n + 2$ valores de cualquier magnitud correspondientes a los z_i , denominados $u_i \equiv u(z_i)$ y $\varphi_i(r) \equiv \varphi(r, z_i)$. Las derivadas respecto de z se sustituyen mediante un esquema en diferencias finitas cuya elección se comentará más adelante; aquí nos basta con establecer formalmente que existen cuatro matrices D^{1u} , D^{2u} , $D^{1\varphi}$, $D^{2\varphi}$ tales que

$$\frac{du}{dz}(z_i) = D_{ij}^{1u} u_j, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(z_i) = D_{ij}^{2u} u_j, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, z_i) = D_{ij}^{1\varphi} \varphi_j(r), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(r, z_i) = D_{ij}^{2\varphi} \varphi_j(r) \quad (4.89)$$

DERIVADA	VECTOR DE APLICACION	VECTOR RESULTANTE	MATRIZ
du/dz	$\{u(z_i)\}$	$\{du/dz(z_i)\}$	$D^{1u} \quad (n+1) \times n$
d^2u/dz^2		$\{d^2u/dz^2(z_i)\}$	$D^{2u} \quad (n+1) \times (n+1)$
$\partial\varphi/\partial z$	$\{\varphi(r, z_i)\}$	$\{\partial\varphi/\partial z(r, z_i)\}$	$D^{1\varphi} \quad n \times (n+1)$
$\partial^2\varphi/\partial z^2$		$\{\partial^2\varphi/\partial z^2(r, z_i)\}$	$D^{2\varphi} \quad n \times n$

Tabla 4.1: Discretización de las derivadas en la dirección axial. Se incluye información sobre la dimensión de las matrices resultantes

donde la repetición de un índice implica sumación respecto de él. Las dimensiones de los vectores que se construyen con los valores discretizados de todas estas magnitudes dependen de las condiciones de contorno. Dado que $u(z_{n+1}) = \varphi(r, z_{n+1}) = \varphi(r, z_0) = \partial^2\varphi/\partial z^2(r, z_0) = du/dz(z_0) = 0$, podemos eliminar de la formulación vectorial la componente $(n+1)$ -ésima de todos los vectores, y las componentes correspondientes a z_0 indicadas. En la tabla 4.1 se da información sobre la definición de los vectores y matrices necesarios para llevar a cabo la discretización.

ii) Resolvemos la ecuación de Laplace, que en coordenadas cilíndricas y con simetría azimutal se escribe

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi = 0. \quad (4.90)$$

Llevada a cabo la discretización en z se transforma en

$$[L(r) + D^{2\varphi}]\varphi(r) = 0, \quad L(r) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) I, \quad (4.91)$$

siendo I la matriz unidad de dimensión $n \times n$. Puesto que $L(r)$ y $D^{2\varphi}$ conmutan, podemos diagonalizar ambas matrices simultáneamente (siempre que $D^{2\varphi}$ sea diagonalizable, como es siempre el caso). A la matriz de diagonalización se le denominará Γ , es decir, $D^{2\varphi}\Gamma = \Gamma A$, siendo A una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los autovalores de $D^{2\varphi}$. Las columnas de Γ son los autovectores correspondientes. Si definimos un nuevo vector $\varphi'(r) \equiv \Gamma^{-1}\varphi(r)$ tenemos para él un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$[L(r) + A]\varphi'(r) = 0. \quad (4.92)$$

Definiendo ciertos μ_i tales que $A_{ii} = -\mu_i^2$, la solución general a estas ecuaciones son una combinación de funciones modificadas de Bessel, $I_0(\mu_i r)$ y $K_0(\mu_i r)$. Teniendo en cuenta las condiciones de buen comportamiento de las soluciones en $r = 0$ y $r \rightarrow \infty$, podemos establecer la dependencia radial en las zonas interior y exterior al puente como

$$\varphi_i^{in} = b_i^{in} \frac{I_0(\mu_i r)}{I_0(\mu_i)}, \quad \varphi_i^{ex} = b_i^{ex} \frac{K_0(\mu_i r)}{K_0(\mu_i)} \quad (4.93)$$

donde se han introducido ciertos denominadores que serán de utilidad para la formulación final del problema. Las constantes b_i^{in} y b_i^{ex} , $i = 1, \dots, n$, se obtendrán al imponer las condiciones sobre la interfase, $r = 1$. Es conveniente definir en notación matricial los vectores b^{in} y b^{ex} a partir de los coeficientes anteriores, así como las matrices $M_I(r)$ y $M_K(r)$ como aquellas matrices diagonales cuyos elementos no nulos son justamente $I_0(\mu_i r)/I_0(\mu_i)$ y $K_0(\mu_i r)/K_0(\mu_i)$. Con ello podemos escribir finalmente la solución de la ecuación de Laplace discretizada como

$$\varphi^{in}(r) = \Gamma M_I(r) b^{in}, \quad \varphi^{ex}(r) = \Gamma M_K(r) b^{ex}. \quad (4.94)$$

El potencial en cada "línea" depende de todo el conjunto de funciones radiales.

Es interesante hacer notar que con este procedimiento hemos resuelto explícitamente la dependencia radial a través de un problema de autovalores totalmente independiente de las condiciones en la interfase y de cualquier parámetro del problema (excepto del número de puntos internos de discretización, n). Por ello los μ_i y la matriz de diagonalización Γ se calculan al principio de la computación y una sola vez.

iii) Imponemos las condiciones de contorno en la interfase. Para ello es necesario discretizar en z las funciones restantes. En particular, faltan por discretizar² las $h^{(l)}(z)$, $l = 1, \dots, 4$, lo cual nos lleva a construir los vectores $h^{(l)}$ con los valores en los puntos z_i . Las ecuaciones (4.65)

²Es en este paso donde se manifiesta la superioridad del Método de las Líneas respecto de la resolución analítica: las funciones con las que se construyen los términos inhomogéneos son posibles de calcular, incluso si se trata de una derivada alta, siendo $z = \Lambda$, que no entra dentro de los valores necesarios, el único punto conflictivo.

y (4.66) se expresan en la forma

$$\Gamma(b^{e\omega} - b^{i\omega}) = h^{(1)} \quad (4.95)$$

$$\Gamma \left(\epsilon^{e\omega} \frac{dM_K}{dr} \Big|_{r=1} b^{e\omega} - \frac{dM_I}{dr} \Big|_{r=1} b^{i\omega} \right) - \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} D^{1u} u = h^{(2)} \quad (4.96)$$

Ambas ecuaciones permiten expresar los vectores $b^{i\omega}$ y $b^{e\omega}$ en función de cantidades conocidas y de u :

$$b^{i\omega} = M^{-1} H_0(\epsilon^{e\omega}, M)^{-1} \left\{ \Gamma^{-1} \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} D^{1u} u + h^{(2)} - [H_0(\epsilon^{e\omega}, M) - H_0(0, M)] M \Gamma^{-1} h^{(1)} \right\} \quad (4.97)$$

$$b^{e\omega} = b^{i\omega} + \Gamma^{-1} h^{(1)} \quad (4.98)$$

donde la matriz diagonal M tiene como elementos no nulos los μ_i y la función $H_0(x, y)$ fue definida en el capítulo anterior, ecuación (3.22).

Falta obtener una expresión matricial para la ecuación de la interfase. Discretizando (3.22) se tiene

$$[(1 + W)I + D^{2u}]u - p\mathbf{1} - \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda} D^{1\omega} b^{i\omega} = h^{(3)} + \frac{\Xi_0^2 \epsilon^{e\omega}}{2\Lambda} h^{(1)} \quad (4.99)$$

siendo $h^{(1)}$ la discretización de la función $dh^{(1)}/dx$ y donde el vector $\mathbf{1}$ es de dimensión $n + 1$ y todos sus elementos son la unidad. Sustituyendo la expresión encontrada para $b^{i\omega}$ y agrupando en el primer miembro todos los términos dependientes de u se llega a un sistema que matricialmente se escribe $Cu - p\mathbf{1} = h$, siendo

$$C = (1 + W)I + D^{2u} - \frac{\Xi_0^2 (\Delta \epsilon)^2}{4\Lambda^2} D^{1\omega} \Gamma M^{-1} H_0(\epsilon^{e\omega}, M)^{-1} \Gamma^{-1} D^{1u}$$

$$h = h^{(3)} + \frac{\Xi_0^2 \epsilon^{e\omega}}{2\Lambda} h^{(1)} + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda} D^{1\omega} \Gamma M^{-1} H_0(\epsilon^{e\omega}, M)^{-1} \times \{ \Gamma^{-1} h^{(2)} - [H_0(\epsilon^{e\omega}, M) - H_0(0, M)] M \Gamma^{-1} h^{(1)} \}. \quad (4.100)$$

Falta una ecuación más para cerrar el problema algebraico, y se obtiene a partir de (4.69), que surgió de la condición de volumen cilíndrico. Conocidos los valores de $h^{(4)}$ en puntos equidistantes es tarea fácil encontrar una regla clásica de integración por interpolación a trozos que

sea de igual orden que el esquema en diferencias finitas usado para resolver las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, si el esquema elegido es de orden dos, la regla de integración sería la de los trapecios, mientras que si se ha usado un esquema de orden cuatro, la correspondiente regla de integración sería la de Simpson. Todas ellas se pueden escribir en general como un producto escalar en la forma

$$\int_0^A dz g(z) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g} \quad (4.101)$$

donde \mathbf{g} es la discretización de cualquier función $g(z)$ y \mathbf{s} es un vector de igual dimensión que recoge los coeficientes propios de la regla de integración. Por ejemplo, para la regla de Simpson se tiene $\mathbf{s} = \frac{1}{3}(1, 4, 2, 4, 2, \dots, 4, 2, 4, 1)$. Notar que en este caso el número de puntos debe ser impar, y que el último elemento puede eliminarse porque corresponde al punto situado en el electrodo superior, donde las funciones que se quieren integrar son nulas.

En definitiva, la condición (4.69) se escribe en forma discretizada $\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{h}^{(4)}$, y el sistema algebraico completo es

$$\left(\begin{array}{c|c} C & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{s} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{h} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{h}^{(4)} \end{array} \right) \quad (4.102)$$

Es interesante notar que la matriz dependiente del campo eléctrico en C no es de tipo banda como las propias de un esquema en diferencias finitas, sino que todos sus elementos son en general no nulos; esto sugiere que los efectos eléctricos tienen un carácter global, en contraste con los efectos capilares y centrífugos, que son locales.

4.3.2 El esquema en diferencias finitas

Una de las ventajas del Método de las Líneas frente a los Métodos en Diferencias Finitas consiste en la posibilidad de utilizar esquemas de mayor orden sin un coste computacional elevado, dado que los puntos de discretización se extienden en una sola dimensión. En nuestro caso debemos utilizar un esquema de orden tal que se obtengan con suficiente precisión no sólo las funciones incógnitas, sino incluso sus terceras derivadas. Ello obliga a adoptar un esquema en diferencias

finitas de cuarto orden. Por otra parte se elige un esquema centrado por razones de estabilidad numérica. A este respecto debemos exigir que la matriz diagonal A , formada por los autovalores de $D^{2\varphi}$, tenga todos sus elementos negativos, de forma que la base de funciones radiales sean las modificadas de Bessel. Esto se consigue precisamente con los esquemas centrados, independientemente del orden del esquema y del tratamiento que se dé a las condiciones de contorno para el potencial.

El esquema de discretización centrado de cuarto orden sustituye las derivadas en la variable z en un punto z_i por una expresión que depende del valor de la función en dicho punto y en sus cuatro vecinos más cercanos. Se obtiene mediante el desarrollo de la función evaluada en estos puntos en serie de Taylor centrada en z_i y truncada en el término de cuarto orden:

$$f(z_{i+k}) = f(z_i) + f'(z_i)(kh) + \frac{1}{2}f''(z_i)(kh)^2 + \frac{1}{6}f'''(z_i)(kh)^3 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(z_i)(kh)^4 + O(h^5) \quad (4.103)$$

con $k = \pm 1, \pm 2$. Las cuatro ecuaciones recogidas en (4.103) pueden considerarse como un sistema lineal con las cuatro primeras derivadas como incógnitas. Su resolución nos da para f' y f'' :

$$f'(z_i) = \frac{8f(z_{i+1}) - 8f(z_{i-1}) + f(z_{i+2}) - f(z_{i-2})}{12h} \quad (4.104)$$

$$f''(z_i) = \frac{-30f(z_i) + 16f(z_{i+1}) + 16f(z_{i-1}) - f(z_{i+2}) - f(z_{i-2})}{12h^2} \quad (4.105)$$

Esto determina los coeficientes de $D^{1\varphi}$, $D^{2\varphi}$, $D^{1\psi}$, $D^{2\psi}$ que no se vean afectados por las condiciones de contorno. En este sentido distinguimos los puntos interiores, para los cuales las expresiones anteriores son aplicables, y puntos extremos, para los que algún valor de la función necesario para evaluar dichas expresiones se sale fuera del dominio $[0, A]$. Estos puntos extremos son obviamente z_0 , z_1 y z_n . El punto z_{n+1} no se incluye entre las incógnitas puesto que la interfase y el potencial eléctrico son conocidos allí.

Los puntos z_0 y z_1 requieren un tratamiento distinto que el punto z_n . En efecto, para los dos primeros es posible adaptar el esquema centrado dado en las ecuaciones (4.104) y (4.105) considerando puntos ficticios pertenecientes al intervalo con $z < 0$. Basta tener en cuenta

que las funciones incógnitas, $u(z)$ y $\varphi(r, z)$ son par e impar respecto de z , respectivamente, y por tanto se cumple que $u(z_{-i}) = u(z_i)$ y $\varphi(r, z_{-i}) = -\varphi(r, z_i)$. En cambio, más allá del electrodo superior la utilización de puntos ficticios no es tan natural como en el caso anterior. Las alternativas que existen para cerrar el problema son:

i) Usar puntos ficticios y relacionarlos mediante las condiciones de contorno. Para obtener las derivadas en el punto z_n debemos añadir el punto z_{n+2} . Además de usar que las funciones se anulan en z_{n+1} hay que buscar un condición de cierre adicional. Por ejemplo, para el potencial se puede usar que $\partial^2\varphi/\partial z^2$ se anula en $z = \Lambda$ (lo cual se deduce de la ecuación de Laplace). La forma en que esta condición se incorpora al esquema no es trivial, y menos aún buscar una condición adicional para expresar las derivadas de u . Por estos inconvenientes se ha deshechado esta alternativa.

ii) Reducir el orden del esquema cerca del contorno. Si para determinar las derivadas en z_n utilizamos sólo dos puntos vecinos evitamos la utilización de puntos ficticios y las correspondientes condiciones adicionales. La contrapartida es que se pierde precisión y el resultado final no llega a ser de orden cuarto.

iii) Utilizar un esquema no centrado cerca del contorno. Se establece el esquema para el punto z_n a partir del desarrollo genérico dado en (4.103) pero ahora para $k = \pm 1, -2, -3$. En principio debe mantenerse el orden del esquema.

Para elegir entre las dos últimas opciones se han aplicado ambos esquemas a un problema de potencial definido en el mismo dominio, consistente en electrodos a potencial cero e interfase sobre la que se ha depositado una densidad superficial de carga conocida y tal que la solución para el potencial es analítica y cerrada. Se mostró ligeramente superior en cuanto a convergencia el esquema no centrado en $z = \Lambda$.

4.4 Resultados y discusión

El modelo matemático desarrollado ofrece como resultado fundamental los primeros coeficientes del desarrollo de la ecuación de bifurcación en los parámetros ϵ , $\bar{\Xi}$ y B . Mediante argumentos de simetría hemos sido capaces de adelantar que la bifurcación es de tipo 'pitchfork' en

ausencia de gravedad, y que al introducirla en el modelo el diagrama de bifurcación se rompe en dos ramas aisladas de soluciones.

Una vez computados los coeficientes no nulos de la ecuación de bifurcación estamos en condiciones de establecer si la naturaleza de la bifurcación es subcrítica, esto es, si las familias bifurcadas poseen valores críticos del parámetro de estabilidad Ξ dentro de la región estable, o bien si por el contrario es supercrítica. Vimos en el capítulo 3 que la región estable es aquella para la cual $\Xi > \Xi_0$, por lo que estaremos en presencia de una bifurcación subcrítica si la curvatura de la rama parabólica del diagrama es positiva. Esto es lo que de hecho ocurre para todo valor de los parámetros e^{ω} , W y Λ . La curvatura de la rama es $c = -2\psi_{030}/\psi_{110}$. En la figura 4.3 se representa la curvatura frente a la esbeltez para $e^{\omega} = 0.55$ y cuatro valores seleccionados del número de Weber, $W = 0, 0.1, 0.2$ y 0.3 . Se ha escalado el parámetro de deformación ε de forma que represente la norma L^2 introducida en la sección 4.1, ecuación (4.15). Este nuevo parámetro, que denominaremos ε_{L^2} está relacionado con el antiguo ε mediante la expresión

$$\varepsilon_{L^2} = \varepsilon \left[\frac{1}{2\Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz f_0^2 \right]^{1/2} \quad (4.106)$$

La ventaja de este cambio reside en que el nuevo parámetro puede ser medido directamente y da una idea más real de la magnitud de la deformación.

Volviendo a la figura 4.3, pueden destacarse tres aspectos: por un lado los grandes valores que toma la curvatura, nunca inferiores a 40; por otro su crecimiento monótono con la esbeltez; y, finalmente, la virtual independencia con el número de Weber. Todo ello indica que pequeñas perturbaciones son capaces de desestabilizar el puente (recordemos que la rama parabólica es inestable por ser subcrítica la bifurcación), y que esta sensibilidad ante deformaciones se acentúa cuando aumenta la esbeltez pero no cuando aumenta el número de Weber. De hecho las cuatro curvas correspondientes a los distintos valores de W elegidos están prácticamente superpuestas. Aunque en la figura se representan sólo los tramos para los cuales el modo axilimétrico es más inestable que el modo en comba, dichas curvas se solapan para el rango de esbelteces estudiado ($\Lambda < 7$). En definitiva, el efecto de la rotación sobre el

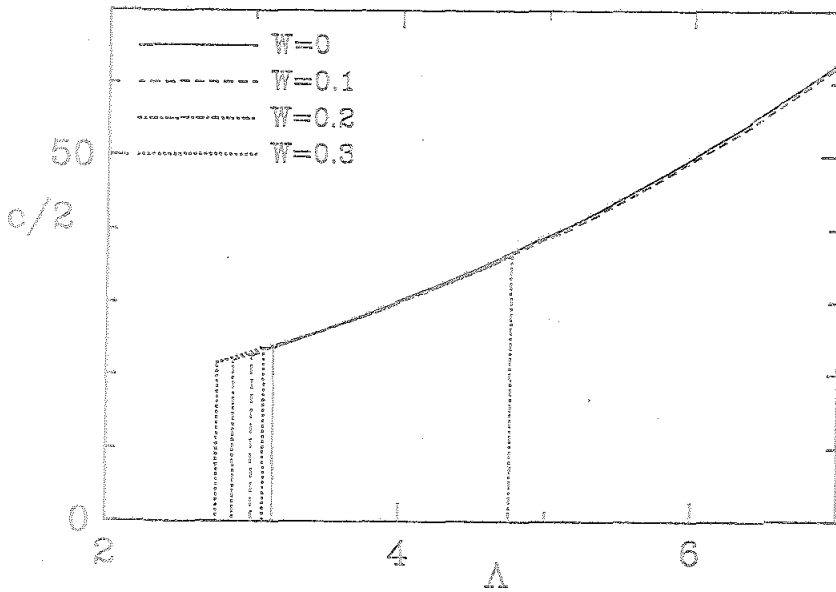


Figura 4.3: Curvatura de la rama parabólica del diagrama de bifurcación a la familia axilsimétrica para $e^{\text{ax}} = 0.55$ y distintos valores de W . Se indica mediante rectas verticales de igual trazado los valores iniciales y finales (en caso de existir) de la esbeltez dentro de los cuales la bifurcación observable es la axilsimétrica.

puente aumenta el valor crítico del número de Bond eléctrico E_0 y disminuye el rango de esbelteces para las cuales la bifurcación que tiene lugar es axilsimétrica, en favor de la bifurcación al modo en comba; pero no tiene un efecto apreciable sobre la sensibilidad del puente ante deformaciones.

Otra interpretación del efecto de las pequeñas deformaciones del puente sobre la estabilidad es que el campo eléctrico necesario para estabilizar puentes ligeramente deformados aumenta apreciablemente respecto del necesario para mantener estable el puente perfectamente cilíndrico, dado por E_0 . En particular, la gravedad residual en la dirección axial potencia las deformaciones axilsimétricas, de forma que pequeños valores del número de Bond producen grandes deformaciones y el criterio de estabilidad para estas formas, relativamente alejadas

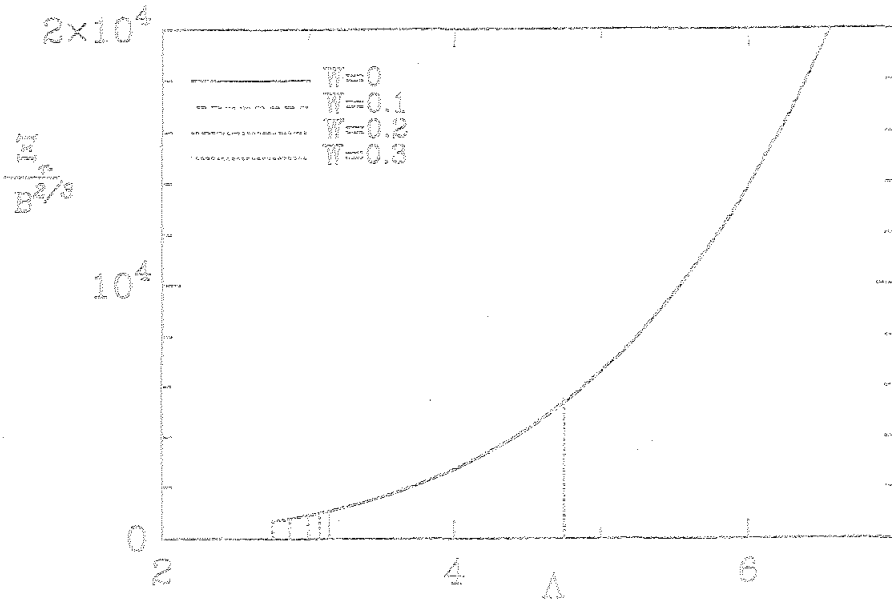


Figura 4.4: Representación del factor de proporcionalidad entre E_r y $B^{2/3}$ en función de la esbeltez para $\epsilon^{es} = 0.55$ y distintos valores de W .

del cilindro, también difieren apreciablemente del criterio en ausencia de gravedad, E_0 . Tal y como se definió en la sección 4.2, la cantidad $E_0^2 + E_r$ corresponde al mínimo valor del número adimensional al cuadrado para el cual podemos mantener un puente de esbeltez dada en presencia de una gravedad residual medida por B . La ecuación (4.80) establece que E_r es proporcional a $B^{2/3}$. En la figura 4.4 se representa el factor de proporcionalidad en función de Λ . El efecto de la gravedad residual es muy importante por dos motivos: por una parte por la propia ley de exponente dos tercios en la dependencia con el número de Bond; y por otra, y más importante, por el valor del coeficiente de proporcionalidad, tal y como se observa en la figura. El aumento con la esbeltez de este coeficiente implica que el nuevo criterio de estabilidad con gravedad residual es una curva que diverge del criterio sin ella, y tanto más cuanto mayor es el número de Bond. Esto se observa en la figura 4.5. En ella aparecen las nuevas curvas de estabilidad con $\epsilon^{es} = 0.55$ y $W = 0$, para tres órdenes de magnitud en el

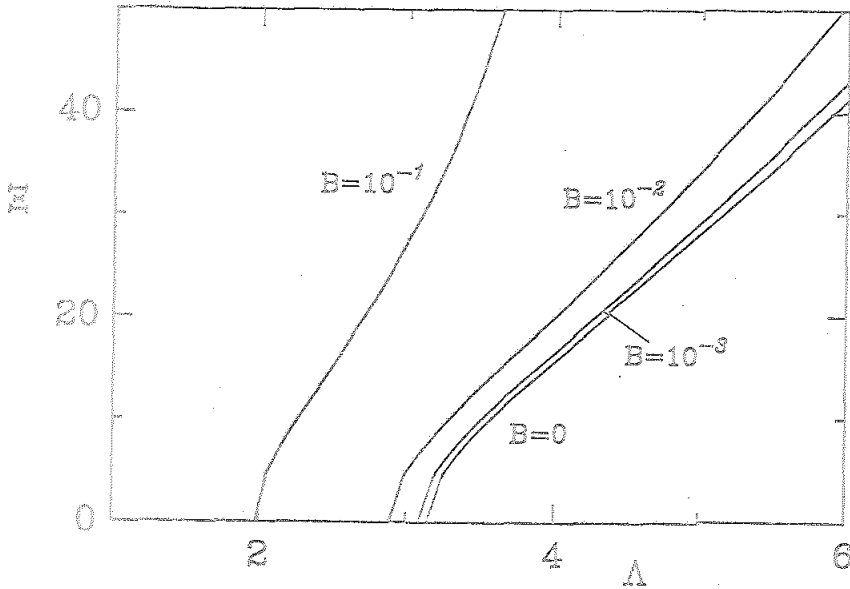


Figura 4.5: Representación del número de Bond eléctrico crítico en función de la esbeltez para $\epsilon^{e\omega}$, $W = 0$ y distintos valores de B .

número de Bond: $B = 10^{-1}$, 10^{-2} y 10^{-3} , comparadas con el criterio de estabilidad en ausencia de gravedad. Esta figura se construye desde valores menores que $\Lambda = \pi$ a partir de la ecuación (4.85) que nos da la bifurcación en el plano $\epsilon - \Lambda$ para Ξ prefijado. Si $\Xi = 0$ vemos que se reobtiene el valor conocido en la literatura [Vega, 1983]

$$\Lambda_c = \pi \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} B^2 \right)^{1/3} \right]. \quad (4.107)$$

En el caso de $W \neq 0$ el límite $\Xi = 0$ coincide con la expresión dada en el mismo trabajo:

$$\Lambda_c = \frac{\pi}{\sqrt{1+W}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[\frac{3B^2}{2(1+W)^4} \right]^{1/3} \right\}. \quad (4.108)$$

4.5 El modo en comba

En esta sección nos restringiremos a una comparación entre los diagramas de bifurcación de los modos axilsimétrico y en comba, sin dar resultados numéricos. En este caso la familia bifurcada con la cual se construye v , es decir, la base del núcleo del operador lineal asociado al problema estático, depende de la coordenada azimutal:

$$v = (\phi_{11}^{+is}(r, z) \cos \theta, \phi_{11}^{+es}(r, z) \cos \theta, f_{11}^{+}(z) \cos \theta, \Delta \pi_{11}^{+}) \quad (4.109)$$

y el punto de bifurcación en torno al cual se construye el diagrama es $\Xi_0 = \Xi_{11}^{+}$. Esto trae como consecuencia un acoplo entre los distintos modos azimutales en el problema no lineal ampliado. Su desarrollo en los tres parámetros ε , $\bar{\Xi}$ y B da lugar nuevamente a una serie de problemas lineales recurrentes, pero ahora con términos inhomogéneos con dependencia en θ que deben ser descompuestos en los distintos modos azimutales para su resolución independiente por el método de las líneas. En el apéndice C quedan recogidos los términos inhomogéneos necesarios para construir el diagrama de bifurcación.

Las simetrías del problema no lineal ampliado se ven modificadas, puesto que ahora la parte axial de $f_0(\theta, z) = f_{11}^{+}(z) \cos \theta$ es una función par, y además aparece una transformación para θ que deja invariante las ecuaciones. Una primera transformación es

$$\begin{aligned} z &\rightarrow -z, & \varepsilon &\rightarrow \varepsilon \\ f &\rightarrow f, & B &\rightarrow -B \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad \psi \rightarrow \psi \quad (4.111)$$

que implica que $\psi(\varepsilon, -B) = \psi(\varepsilon, B)$. La otra transformación posible es

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta + \pi, & \varepsilon &\rightarrow -\varepsilon \\ f &\rightarrow f, & B &\rightarrow B \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad \psi \rightarrow -\psi \quad (4.113)$$

que por su parte da $\psi(-\varepsilon, B) = -\psi(\varepsilon, B)$. Por tanto ψ es una función impar en ε y par en B , es decir: $\psi = \varepsilon g(\varepsilon^2, B^2)$. La ecuación de bifurcación queda desarrollada entonces del siguiente modo:

$$\varepsilon(\psi_{110}\bar{\Xi} + \psi_{030}\varepsilon^2 + \psi_{012}B^2 + \dots) = 0 \quad (4.114)$$

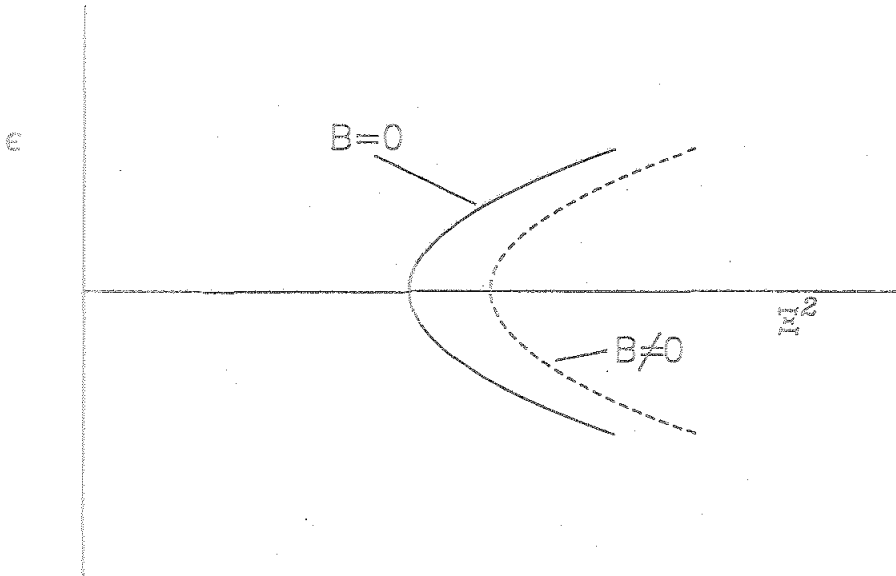


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación correspondiente al modo en comba.

El diagrama correspondiente se ilustra en la figura 4.6. Vemos que la bifurcación no es rota por la gravedad residual, como ocurre con el caso axilsimétrico, sino que simplemente traslada el punto de bifurcación la cantidad $\psi_{012}B^2/\psi_{110}$. Como consecuencia la bifurcación al modo en comba no se ve muy afectada por la gravedad residual.

Capítulo 5

Estudio experimental de la estabilidad de zonas no rotantes

Con vistas a estudiar el comportamiento de puentes líquidos cuando son sometidos a una diferencia de potencial se ha efectuado una serie de experimentos en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la E.T.S.I. Industriales. El responsable principal del diseño del montaje experimental y de las medidas efectuadas ha sido el Dr. Francis M.J. McCluskey, del cual ha sido colaborador el que presenta esta memoria.

Dentro del amplísimo programa de trabajo experimental que supone el estudio del efecto de un campo eléctrico sobre la estabilidad de zonas líquidas, nos hemos restringido a la determinación del límite de estabilidad para zonas líquidas sin rotación en función del potencial aplicado entre ambos electrodos por ser el estudio que requiere un aparataje más simple. Por otra parte, la técnica del Tanque de Plateau, usada para conseguir condiciones de flotabilidad neutra en experimentación en tierra, no permite investigar el efecto de las fuerzas centrífugas sobre la estabilidad, siendo necesarios dos medios de distinta densidad. Experimentos con zonas rotantes sin baño y en ausencia de campo eléctrico han sido realizados en el laboratorio espacial Space-lab ([Carruthers, 1975], [Carruthers, 1977]) y se proyectan actualmente otros.

El presente capítulo se desglosa en una descripción del montaje ex-

perimental y del método operativo, en la discusión de la relación entre dicho montaje y el modelo físico estudiado en los capítulos anteriores y por último en la presentación y discusión de los resultados experimentales.

5.1 Descripción del montaje y el método operativo

El montaje experimental está esquematizado en la figura 5.1. Consta de un tanque hecho de plexiglás ($10 \times 10 \times 10$ cm³) que se llena de aceite de silicona y dentro del cual se disponen dos electrodos de cobre en forma de disco (espesor 5 mm y diámetro 8 cm) enfrentados a una distancia variable. Con el fin de anclar puentes líquidos en la zona central de estos electrodos están pegados sendos anillos de cobre muy delgados, también enfrentados, de 5 mm de diámetro y 1 mm de altura. En la zona interior a los anillos, y conectando los electrodos se utiliza aceite de ricino como puente. Puente y baño son inmiscibles y de muy aproximadamente igual densidad. Esta técnica para conseguir interfases líquidas en ambientes de microgravedad se conoce con el nombre de 'método del Tanque de Plateau'.

El electrodo superior está conectado a una fuente de corriente alterna que proporciona un potencial eficaz regulable desde 0 hasta 20 kV gracias a un montaje eléctrico que más adelante se describe. Este electrodo puede moverse en la dirección vertical mediante un pequeño motor lineal cuyo movimiento es transmitido al vástago-soporte del electrodo a través de un juego de engranajes de material aislante. La máxima velocidad que alcanza es de 2 mm por minuto y la mayor distancia entre electrodos es de 5 cm.

El electrodo inferior, conectado a tierra, es fijo y tiene en su centro un pequeño orificio para permitir la inyección o extracción del líquido interior mediante una jeringuilla graduada unida a un tubo de nylon transparente. De esta forma, conociendo la altura y el diámetro del puente podemos inyectar el volumen de líquido correspondiente a un cilindro de esas dimensiones.

El montaje eléctrico está esquematizado en la figura 5.2. Un auto-

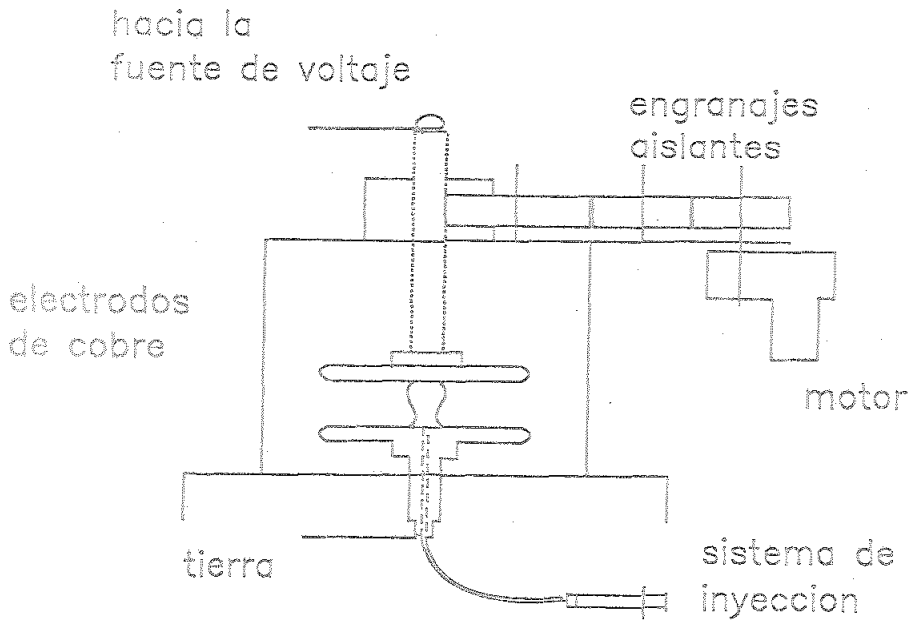


Figura 5.1: Esquema del montaje experimental.

transformador (salida: 0-245 V, 160 VA) alimenta a un transformador (220-20000 V) cuyos bornes de salida van uno a tierra y otro al electrodo superior. La frecuencia de trabajo del circuito es la industrial (50 Hz). El tanque de Plateau está aislado eléctricamente mediante una jaula de Faraday, que consiste en una caja de madera forrada de una fina lámina metálica, con ventanas para la observación del puente y de la indicación de su altura. La conexión del transformador con el electrodo superior se hace con un grueso cable coaxial, cuyo conductor exterior se deriva a tierra también para asegurar el aislamiento eléctrico del hilo interior. Otras medidas de seguridad han sido la suavización de aristas de las conexiones a alto voltaje con piezas metálicas esféricas y la utilización de un interruptor doble con salto automático en caso de cortocircuito.

Los líquidos utilizados, cuyas características físicas se presentan en la tabla 5.1, han sido elegidos para este experimento por su baja conductividad eléctrica, sus densidades prácticamente iguales (a temperaturas normales de trabajo) y la transparencia de uno de ellos, el aceite de

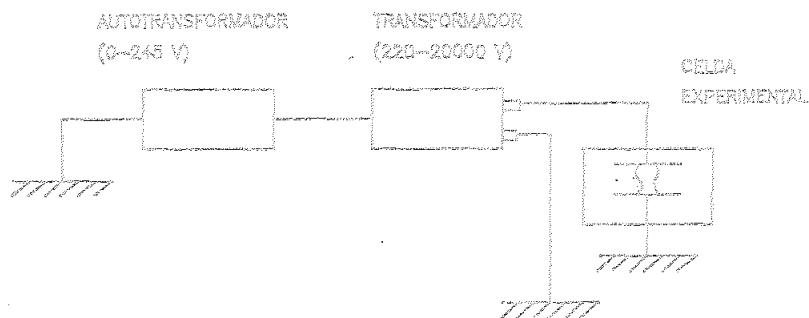


Figura 5.2: Esquema del montaje eléctrico.

silicona, que precisamente se ha elegido como baño para que el puente sea observable.

El método operativo ha sido el siguiente:

- Formación del puente:

En la parte central del electrodo superior, desmontado y totalmente limpio, se coloca una gota de aceite de ricino, de forma que rellene sin rebosar la zona interior al anillo de anclaje. El resto de la superficie se moja con el aceite de silicona para evitar la formación de gotas de aire en ella. En el electrodo inferior (fijo en el tanque) se inyecta aceite de ricino también hasta rellenar todo el interior del anclaje y a continuación se llena el tanque con el aceite de silicona. Se sumerge el electrodo superior y se conectan las gotas del líquido interior inyectando y/o acercando los electrodos. Se consigue el volumen adecuado gracias a la previa calibración de la jeringuilla de inyección y las marcas de altura del puente efectuadas en un engranaje.

Sustancia	Silicona	Ricino
Permitividad relativa	2.6	4.76
Densidad (kg/m^3)	957	957
Conductividad eléctrica (S/m)	10^{-13}	2×10^{-10}
Viscosidad cinemática (m^2/s)	5×10^{-5}	7×10^{-4}
Tensión superficial (kg/s^2)	8.4×10^{-3}	

Tabla 5.1: Constantes físicas de los líquidos usados.

Una vez formado el puente es necesario comprobar visualmente que no existen gotas de aire en toda la zona entre electrodos, ni gotas de un líquido en la región ocupada por el otro. En tales casos la aplicación del campo eléctrico producirá distorsiones pronunciadas en la forma del puente.

• Medidas de estabilidad:

En ausencia de campo eléctrico aplicado en la región entre electrodos conocemos el límite de estabilidad en función de la gravedad residual existente (figura 4.5). Inicialmente se construye un puente líquido de esbeltez por debajo de este límite de estabilidad. Se halla el valor crítico del potencial eléctrico que estabiliza un puente de esbeltez dada (curva experimental de estabilidad) aplicando inicialmente un potencial, que se supone sensiblemente mayor que el necesario para estabilizarlo; seguidamente se aumenta la esbeltez paulatinamente y se inyecta líquido interior hasta que se alcanza el valor deseado y con el volumen correspondiente a un cilindro perfecto de esas dimensiones; finalmente se baja el potencial escalonadamente hasta que el puente se rompe, dejando un tiempo entre cada disminución para estar razonablemente seguros de que el puente es realmente estable, puesto que se comprueba que la ruptura puede tardar varios minutos (ver una estimación de este tiempo de espera en la siguiente sección). El valor crítico buscado está entre el último para el cual el puente era estable y el primero que lo desestabiliza.

Podemos afinar más repitiendo el proceso con saltos de potencial menores que empiezan en la cota superior hallada. De esta forma

se consigue una precisión en el valor crítico del potencial del orden de 50 V, que es el menor valor distinguible en los aparatos de lectura (escala del autotransformador multiplicada por el factor de amplificación del transformador).

5.2 Relación entre el modelo teórico y el montaje experimental

El montaje descrito en el apartado anterior tiene como fin principal el estudio de la estabilidad de puentes líquidos perfectamente cilíndricos sometidos a una diferencia de potencial constante. Su diseño se ha elaborado obviamente con vistas a que el modelo teórico expuesto en capítulos anteriores sea aplicable a la interpretación de los datos experimentales, es decir, que se pueda comparar teoría y experiencia. Es necesario pues dar algunas justificaciones relativas a la validez de las aproximaciones e idealizaciones del modelo, teniendo en cuenta las características del montaje y de los líquidos elegidos.

En primer lugar hay que justificar la utilización en el experimento de campos eléctricos alternos en lugar de constantes, tal y como se supone en el modelo teórico. Por un lado, si las variaciones del campo son rápidas en comparación con los movimientos típicos de los fluidos podemos considerar una fuerza eléctrica promediada, que no se anula al ser cuadrática la dependencia con E , y el modelo propuesto sería válido. Pero por otra parte, y esto aconseja el empleo de potenciales alternos, es imposible tener en la práctica líquidos sin carga eléctrica sometidos a campos eléctricos constantes de intensidades tan grandes como las que se usan en este experimento (~ 10 kV/cm), a causa de dos fenómenos: conductividad residual debida a la disociación de impurezas e inyección de carga desde los electrodos. Veamos en detalle cada uno de estos fenómenos.

1) La disociación en iones de las moléculas de impurezas, siempre presentes en el volumen de los líquidos, produce una corriente al verse dichos iones arrastrados a uno u otro electrodo según su carga, de lo cual da cuenta lo que llamamos conductividad eléctrica, c . La aparición de una corriente eléctrica no nula no implica la existencia de carga neta.

en el volumen de los líquidos, pero sí puede dar lugar a la formación de una cierta densidad de carga en la interfase entre dos medios de distinta conductividad. El mecanismo físico es el siguiente: cualquier carga en los líquidos sufre una evolución dada por la ecuación

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{c}{\epsilon} \rho_e = 0 \quad (5.1)$$

con ρ_e la densidad de carga, que proviene de la ecuación de continuidad de la carga, de la definición de densidad de corriente en función de la conductividad, $\mathbf{j} = c\mathbf{E}$, y de la ecuación de Poisson. Esto da un tiempo característico de difusión de la densidad de carga igual a $t_d \sim \frac{\epsilon}{c}$. Pero por la conservación local de la carga, en el volumen de los líquidos debe haber una densidad nula, y por tanto ésta emigra a la interfase, en la cual sí es posible su acumulación por la discontinuidad en el valor de la conductividad. Las ecuaciones que determinan la densidad superficial de carga ρ_s son:

$$\mathbf{n} \cdot \Delta(\epsilon \mathbf{E}) = \rho_s \quad (5.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \Delta(c \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (5.3)$$

En primer orden de aproximación el campo eléctrico en todo punto es $\mathbf{E} = (\phi_0(t)/L)\mathbf{e}_z$. Esto da como estimación del tiempo característico de evolución de la densidad superficial de carga, que denominaremos t_q , la cantidad $t_q \equiv \epsilon_{max}/c_{max}$, siendo ϵ_{max} y c_{max} las máximas permitividad y conductividad de entre los dos líquidos usados. Este sería el tiempo de formación de una densidad superficial de carga ante una deformación de la interfase en un campo eléctrico constante. Si existe una variación sinusoidal del campo aplicado con frecuencia f_E , el proceso de formación de carga se verá afectado por el cambio de polaridad. Si $t_E \equiv 1/f_E \ll t_q$, la interfase no llega a cargarse apreciablemente. Por el contrario, si $t_E \gg t_q$, el modelo no sería aplicable. Estas consideraciones no toman en cuenta que la interfase oscila, lo cual hace que \mathbf{n} tenga una variación sinusoidal con un periodo del orden del tiempo típico de evolución mecánica, que llamaremos t_m . Este tiempo se estima a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes igualando los términos dominantes. Si el régimen es viscoso se tiene que

$$\nabla p \sim \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (5.4)$$

El gradiente de presiones se estima por el producido en la interfase ante una deformación, que hace modificarse la curvatura en una cantidad del orden de $1/L$. Por otra parte la velocidad será aproximadamente $v_m = R/t_m$, y su laplaciano dará como término dominante v_m/R^2 . Sustituyendo todo ello en la expresión anterior obtenemos como tiempo característico del movimiento del fluido

$$t_m = \frac{\mu L}{\sigma} \quad (5.5)$$

En el caso de líquidos poco viscosos los términos que debemos comparar son

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \nabla p, \quad (5.6)$$

lo cual, mediante un razonamiento análogo al anterior, da como tiempo característico

$$t_m = \left(\frac{\rho L R^2}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

Debemos tomar como tiempo típico de evolución de la interfase el mayor de los tres que pueden ser construidos (dos con las viscosidades de los líquidos interior y exterior y el del régimen no viscoso).

Si t_m es mucho mayor que t_E y t_g , la interfase se puede considerar inmóvil, y los argumentos dados en base a las ecuaciones (5.2) y (5.3) sobre la formación de cargas superficiales son válidos. Si esta condición no se cumple entra en juego la oscilación de la propia interfase como mecanismo modulador en la formación de carga. En la tabla ** están recogidas las definiciones de las tres escalas de tiempo que hemos considerado, así como el valor concreto para el montaje y líquidos usados en el experimento. Vemos que se cumplen las desigualdades $t_m > t_g > t_E$ con casi un orden de magnitud de diferencia entre cada uno de ellos, por lo que queda justificada la aproximación de ausencia de carga libre en la interfase.

2) La inyección de carga desde los electrodos hace que la carga en el volumen de los líquidos no sea nula (régimen no óhmico) cuando apliquemos potenciales estáticos. Nuestro modelo no sirve en tal caso porque hemos despreciado las fuerzas de electroforesis ($\rho_e E$) en las ecuaciones

Tiempo característico	Definición	Valor experimental
Difusión de carga en volumen	$t_d = \epsilon/c$	Ricino: 2×10^{-1} Silicona: 10^2
Formación de carga en la interfase	$t_q = \epsilon_{max}/c_{max}$	2×10^{-1}
Movimiento del líquido:		
• caso viscoso	$t_m = \mu L/\sigma$	Ricino: 7×10^{-1} Silicona: 5×10^2
• caso no viscoso	$t_m = (\rho L R^2/\sigma)^{1/2}$	10^{-1}
Variación del campo alterno aplicado	$t_E = 1/f_E$	2×10^{-2}

Tabla 5.2: Tiempos característicos asociados al comportamiento de puentes viscosos y no viscosos sometidos a un campo eléctrico alterno. Valores concretos para el experimento llevado a cabo.

de Navier-Stokes. Cuando el campo aplicado es alterno, si su período de oscilación, t_E , es mucho menor que los tiempos característicos de difusión, t_d , de ambos líquidos, las cargas procedentes de los electrodos no penetran apreciablemente en el interior de éstos. Esto es lo que realmente ocurre, según se ve de la tabla 5.2.

Otra idealización hecha en el modelo ha sido considerar los electrodos como dos placas perfectamente planas e infinitas, mientras que en la práctica son finitos y el anclaje metálico supone una perturbación en esa configuración. El modelo no obstante es válido, puesto que por un lado la distorsión del campo producida por efectos de borde penetran en la región central muy poco. Más precisamente, puede demostrarse que el valor del campo eléctrico en la superficie de los electrodos difiere en un 1% del valor del campo creado por placas infinitas a una distancia L de los bordes, siendo esta distancia la que separa los electrodos [Durand, 1966]. Por otro lado el anclaje tiene un grosor y altura menor que el milímetro, lo cual es también una medida del alcance de las perturbaciones producidas en el campo eléctrico.

En la formulación expuesta en el primer capítulo no hemos aludido al ángulo de contacto de los líquidos con los electrodos, que es constante a unas condiciones termodinámicas fijas, y sin embargo esta propiedad

de las fases en contacto es fundamental a la hora de determinar las formas de equilibrio que adquieren. En nuestro caso la utilización de anclajes con ángulo muy agudo hace que la línea de contacto no tenga una normal bien definida, con lo que la interfase forma un ángulo arbitrario respecto de los electrodos. Por tanto los anclajes tienen la doble misión de definir una línea de contacto y dejar arbitrario el ángulo de contacto.

5.3 Medida de la tensión superficial

Con objeto de comparar los datos experimentales con la curva teórica hay que hacer adimensional el voltaje aplicado, y por tanto es preciso medir la tensión superficial entre los aceites usados. De entre todos los métodos de medida usuales, el más apropiado parece ser el de la gota pendiente, según expone Sanz [Sanz, 1985]. El método se basa en que en condiciones de flotabilidad nula un líquido inmerso en otro inmisible con él adquiere una forma esférica, al igual que un menisco que surge de la boca de un tubo circular, siendo el radio de la superficie esférica aquel que equilibra la diferencia de presión entre el medio interior y el exterior mediante las fuerzas de tensión superficial:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (5.8)$$

donde Δp es el salto de presiones (exterior menos interior) y R es el radio de la gota apoyada. La línea de apoyo debe ser aguda para que haya libertad en el ángulo de contacto.

Si disponemos un recipiente transparente lleno de aceite de silicona, por cuya base se hace pasar un tubo conectado a una pieza cónica con un pequeño orificio en su vértice, y llenamos dicho tubo de aceite de ricino hasta que su nivel supere al del baño se formará una gota anclada en los bordes del orificio. Midiendo la diferencia de alturas entre ambos líquidos y el radio de la gota formada puede obtenerse la tensión superficial entre ellos, sin más que tomar en la fórmula (5.8)

$$\Delta p = \rho g \Delta h + 2\sigma^*/R^*, \quad (5.9)$$

siendo Δh la diferencia de alturas y σ^* y R^* la tensión superficial ricino-aire y el radio del menisco formado en el tubo, respectivamente.

El radio de la gota no es una medida directa, sino que se obtiene de la distancia de su punto más alto al orificio, que denominaremos l y del diámetro de éste, D , a partir de la expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{2l}{l^2 + (D/2)^2}. \quad (5.10)$$

Puesto que en (5.9) el último sumando no es conocido pero constante, basta hacer varias medidas para distintas alturas del líquido interior y del correspondiente radio de la gota, representar Δh frente a $1/R$ y determinar la pendiente, m , de la recta de mejor ajuste. La tensión superficial se deduce de $m = 2\sigma/\rho g$.

Tanto la altura entre líquidos como la de la gota se toman con un catetómetro capaz de distinguir la centésima de milímetro. Esta precisión se muestra suficiente para llevar a cabo una evaluación cuantitativa de la tensión superficial.

Son necesarias algunas consideraciones prácticas antes de tomar las medidas antes indicadas:

- Es conveniente estimar la altura entre líquidos que enrasa la gota en el orificio (es decir, aquella que hace $l = 0$), puesto que es la altura mínima necesaria para crear una gota. Viene dada por la expresión

$$\Delta h(l = 0) = \frac{2\sigma^*}{\rho g R^*}. \quad (5.11)$$

Tomando para la tensión superficial ricino-aire un valor de 40mN/m , para el radio del menisco 10^{-3}m (igual al del capilar usado) y para la densidad de este aceite 10^3kg/m^3 , en el sistema internacional, tenemos que la altura de la columna es aproximadamente de 8 mm.

- El tiempo de estabilización de una gota puede estimarse igualando los términos dominantes en la ecuación de Navier-Stokes, que rige el movimiento de nuestro fluido viscoso a través de un conducto delgado empujado por un gradiente de presiones:

$$\nabla p \sim \mu \nabla^2 v. \quad (5.12)$$

La presión proviene de un cambio en la altura del líquido interior, Δh , al cual responde la gota deformándose en un tiempo característico t_c . El gradiente de presiones provocado resulta ser $\rho g \delta h / L$, siendo L la longitud del tubo. La velocidad del líquido es L/t_c y su laplaciano tiene como términos dominantes las derivadas en la dirección transversal al tubo, cuyo valor característico es R (radio del tubo), por todo lo cual podemos escribir

$$\frac{\rho g \delta h}{L} \sim \frac{\mu}{R^2} \frac{L}{t_c}, \quad t_c \sim \frac{\mu L^2}{R^2 \rho g \delta h} \quad (5.13)$$

Sustituyendo los valores reales de trabajo, $L \sim 0.1$, $R \sim 10^{-3}$, $\delta h \sim 10^{-3}$, $\mu \sim 1$, $\rho \sim 10^3$, todo en el sistema internacional, se obtiene un valor para el tiempo característico de 1000 s, que por tanto es el orden de magnitud del tiempo que es preciso dejar antes de hacer una medida.

Como resultado se ha obtenido un valor de 8.4mN/m para la tensión superficial entre los dos aceites utilizados, a una temperatura de 23°, con un error del 10%, estimado a partir de la precisión de los aparatos y de la dispersión de puntos respecto de la recta de mejor ajuste.

5.4 Resultados experimentales y discusión. Errores

Se han efectuado una serie de experimentos encaminados a determinar los potenciales críticos de ruptura de puentes cilíndricos en función de su esbeltez, según el método operativo descrito en la sección 5.1. Los experimentos se llevaron a cabo con un transformador de 20 kV de voltaje máximo y frecuencia constante e igual a la de la red (50Hz). Se hicieron varias medidas de potencial crítico de ruptura para cada esbeltez, en un rango de esbelteces que iba desde 2.8 (primera esbeltez inestable en ausencia de campo eléctrico) hasta 5. En la figura 5.3 se muestran los resultados obtenidos frente a las curvas teóricas construídas para una razón de permitividades igual a 0.55 y números de Bond 0, 10^{-1} , 10^{-2} y 10^{-3} . Se representa el número eléctrico E frente a la esbeltez Λ . Cada punto es media de varios valores obtenidos.

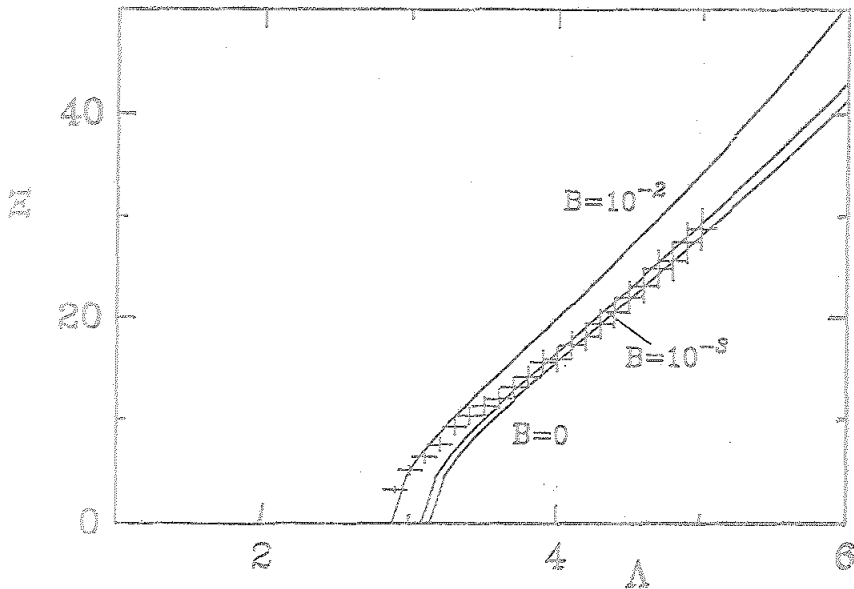


Figura 5.3: Comparación entre los potenciales críticos medidos experimentalmente y varias curvas teóricas con distintos niveles de gravedad residual.

Se representan además las barras de error horizontal y vertical. Las fuentes de error consideradas han sido:

- Error en la esbeltez (barra horizontal): la precisión en la medida de la altura del puente con el calibrado del engranaje que mueve el electrodo superior, y la precisión en la medida del diámetro, que tiene como fuente de error a su vez la propia medida con pie de rey y la medida del volumen de líquido con la jeringuilla de insulina (que puede admitirse que afecta a la 'esbeltez efectiva' aumentándola si hay exceso de volumen o disminuyéndola si hay defecto).
- Error en el número eléctrico (barra vertical): el error en la medida (no hecha en nuestro laboratorio) de la permitividad interior y del factor de amplificación del transformador, estimados en un 1%, nuevamente la precisión en la medida del diámetro del puente, el error en la obtención del valor de la tensión superficial y el

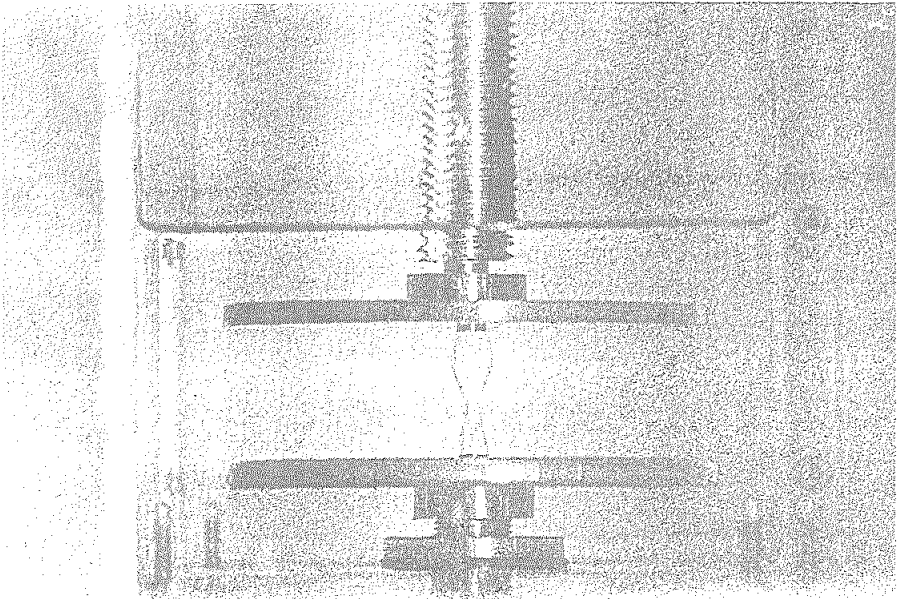
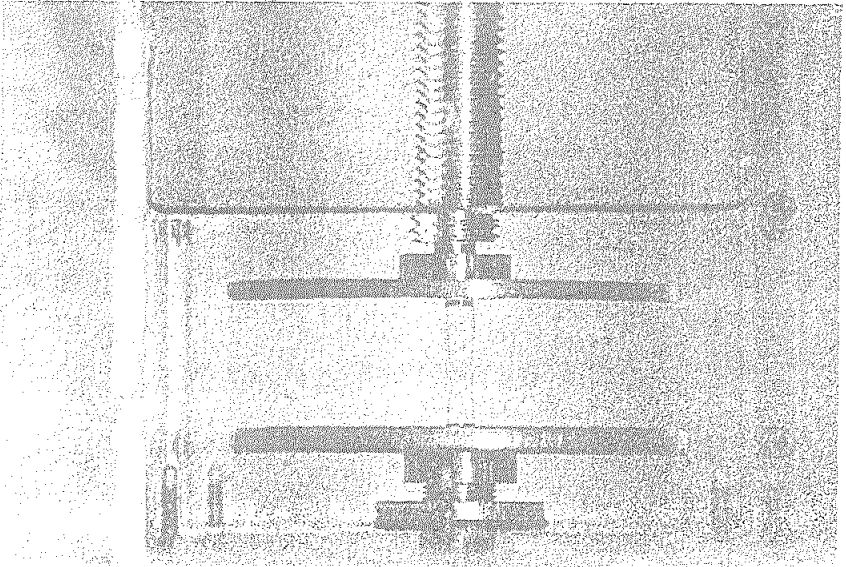
error en la acotación del valor crítico del potencial leído en el autotransformador.

En la comparación de los datos experimentales con las curvas teóricas queda patente que el modelo empleado es capaz de describir la estabilidad del puente. Los puntos experimentales quedan comprendidos entre la curva de gravedad nula y la curva correspondiente a $B = 10^{-2}$, que es el valor promedio estimado para este parámetro de las condiciones experimentales de trabajo. En particular el acuerdo es mejor para esbeltos pequeños.

Una particularidad importante de estos resultados es que los puntos experimentales caen por debajo de las curvas teóricas de estabilidad, lo cual indica que existe algún fenómeno estabilizante aún desconocido. Una posibilidad que en el futuro se pretende analizar es que el efecto de las arandelas metálicas de anclaje sea importante en sus alrededores.

En las fotografías (a) a (c) de la figura 5.4 se muestra un proceso típico de ruptura para un puente de esbeltez 4. En la fotografía de la figura 5.5 se muestra un puente de esbeltez 5, la mayor alcanzada en nuestro experimento. En este caso el puente se mantiene estable bajo la aplicación de un potencial de 21 kV. Puede observarse el efecto del campo gravitatorio en la forma anférica que adopta, en comparación con la forma prácticamente simétrica respecto del plano medio que se tiene en el puente de la figura 5.4(a). Ello es debido a que en el caso del puente de esbeltez $\Lambda = 5$ se tomó la fotografía para un valor más cercano al crítico.

La ruptura de los puentes ha sido siempre de forma asimétrica respecto del plano medio entre electrodos. Esto concuerda con el tipo de ruptura predicho por la teoría. Puede comprobarse además que la forma estable alejada del punto crítico está ligeramente deformada respecto del cilindro perfecto justamente por la forma de arranque de las arandelas de anclaje, lo cual hace sospechar de su influencia real sobre la estabilidad del puente.



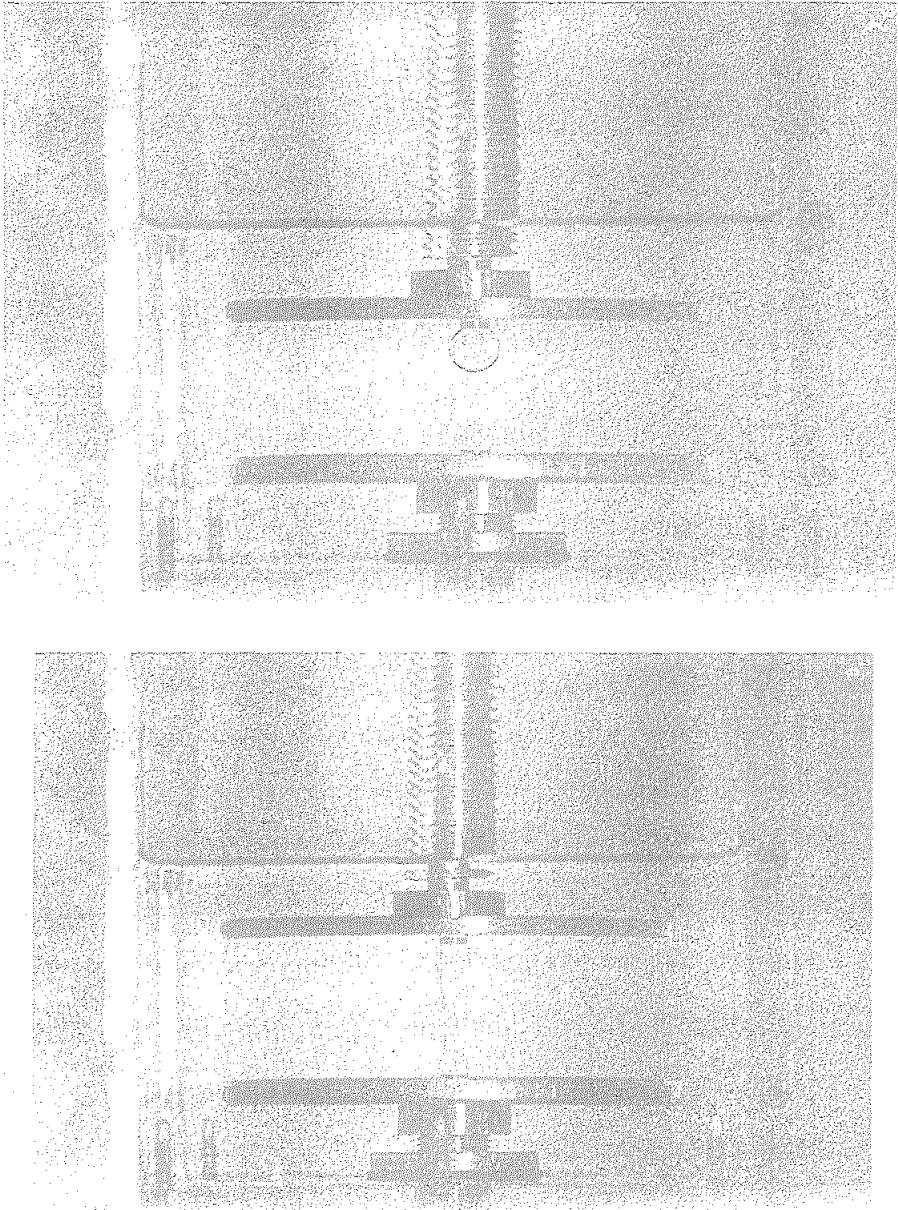


Figura 5.4: Proceso de ruptura de un puente líquido de esbeltez $\Lambda = 4$: (a) Puente estable bajo un potencial de 16.5 kV; (b) situación segundos después de haber suprimido el campo eléctrico; (c) el puente se ha roto en dos gotas asimétricas y un pequeño satélite.

Figura 5.5: Puente de esbeltez $\Lambda = 5$ sometido a 21 kV.

Conclusiones

1. Se ha planteado de forma general el problema de puentes líquidos isotermos y aislantes eléctricos entre electrodos planoparalelos sometidos a una diferencia de potencial constante. El modelo incluye el efecto de un campo isorrotacional producido por el giro de todo el sistema alrededor del eje de simetría.
2. El puente cilíndrico es solución de las ecuaciones generales cuando los radios de anclaje son iguales y el volumen es el adecuado. Se ha abordado el estudio de su estabilidad en ausencia de gravedad al variar los parámetros relevantes, que son la esbeltez, el potencial adimensional, la razón de permitividades y el número de Weber. Un análisis estático lineal determina los puntos de bifurcación a otras familias de soluciones y uno dinámico la estabilidad del puente en cada región en que queda dividido el espacio de parámetros.
3. El campo eléctrico axial tiene siempre un efecto estabilizante sobre el puente. La esbeltez crítica a la cual el puente deja de ser estable es tanto mayor cuanto mayor es el potencial aplicado y cuanto más distintas son las permitividades del puente y el baño. No existe límite teórico para la esbeltez susceptible de ser alcanzada mediante la aplicación de campos eléctricos.
4. Al igual que en ausencia de campo aplicado, el puente no rotante se desestabiliza de forma axilsimétrica, mientras que con rotación es posible además la bifurcación al modo en comba. Esta se produce a partir de ciertos valores de la esbeltez y del número de Weber, que dependen del campo aplicado.
5. Se ha aplicado el Método de Lyapunov-Schmidt al problema de puentes sometidos a campos eléctricos para estudiar de forma cuantitativa la naturaleza de la bifurcación al modo axilsimétrico. Respecto del caso sin campo aplicado el método requiere una extensión del espacio de funciones sobre el que se define el problema operacional para incluir el potencial eléctrico.

6. Se ha puesto a punto un algoritmo semianalítico conocido como Método de las Líneas para resolver la serie de problemas lineales recurrentes que genera el Método de Lyapunov-Schmidt.

7. La bifurcación respecto del número eléctrico es de tipo pitchfork y subcrítica para todos los valores de los parámetros estudiados. El puente presenta gran sensibilidad ante deformaciones. El aumento de la esbeltez acentúa esta sensibilidad, mientras que no ocurre así con el número de Weber.

8. El Método de Lyapunov-Schmidt permite encontrar el criterio de estabilidad cuando existe gravedad residual en la dirección axial. Su efecto es desestabilizante, y tanto más cuanto mayor es la esbeltez de la zona líquida.

9. Se han efectuado medidas experimentales en condiciones de microgravedad del potencial eléctrico necesario para mantener estables puentes no rotantes de distintas esbelteces. El modelo teórico se muestra capaz de reproducir los datos obtenidos de forma cuantitativa. No obstante se han observado discrepancias para grandes esbelteces que requieren un mejor conocimiento de la relación entre el modelo y la experiencia.

Apéndice A

Series de Fourier

A.1 Desarrollo de funciones en series de cosenos

Relación de desarrollos en series de cosenos de Fourier de algunas funciones que aparecen en la resolución de los problemas lineales. En lo que sigue definiremos $l_m \equiv 1 + \bar{W} - m^2$ y $x_n \equiv n\pi/2\Lambda$, con m, n enteros.

$$\sin(l_m^{1/2} z) = \frac{2l_m^{1/2} \cos(l_m^{1/2} \Lambda)}{\Lambda} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{l_m - x_n^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\cos(l_m^{1/2} z) = \frac{2l_m^{1/2} \sin(l_m^{1/2} \Lambda)}{\Lambda} \left[l_m^{-1} + 2 \sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{l_m - x_n^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$z = -\frac{2}{\Lambda} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^2} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Suma analítica de series funcionales

Relación de las sumas de series funcionales infinitas que aparecen en el cálculo de los desarrollos asintóticos de las soluciones a los problemas lineales. Estas series tienen suma o bien analítica o bien calculable con gran aproximación mediante la técnica del cálculo de residuos.

Suma de series impares:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos[x_n(z + \Lambda)] = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n} = -\frac{\Lambda}{\pi} \ln \left\{ \tan \left[\frac{\pi}{4\Lambda}(z + \Lambda) \right] \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^2} = -\frac{\Lambda}{2} z \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^3} = \left(\frac{2\Lambda}{\pi} \right)^3 \left\{ \text{cn}3 \left[\frac{\pi}{2\Lambda}(z + \Lambda) \right] - \frac{1}{8} \text{cn}3 \left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda) \right] \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^4} = \frac{\Lambda}{12} z^3 - \frac{\Lambda^3}{4} z \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \sin[x_n(z + \Lambda)] = \left\{ 2 \sin \left[\frac{\pi}{2\Lambda}(z + \Lambda) \right] \right\}^{-1} \quad (\text{A.9})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n} = \frac{\Lambda}{2} \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^2} = \left(\frac{2\Lambda}{\pi} \right)^2 \left\{ \text{sn}2 \left[\frac{\pi}{2\Lambda}(z + \Lambda) \right] - \frac{1}{4} \text{sn}2 \left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda) \right] \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^3} = -\frac{\Lambda}{4} z^2 + \frac{\Lambda^3}{4} \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^4} = \left(\frac{2\Lambda}{\pi}\right)^4 \left\{ \operatorname{sn}4\left[\frac{\pi}{2\Lambda}(z + \Lambda)\right] - \frac{1}{16} \operatorname{sn}4\left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda)\right] \right\} \quad (\text{A.13})$$

Suma de series pares:

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \cos[x_n(z + \Lambda)] = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n} = -\frac{\Lambda}{\pi} \ln \left\{ 2 \sin \left[\frac{\pi}{8\Lambda}(z + \Lambda) \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^2} = \frac{z^2}{4} - \frac{\Lambda^2}{12} \quad (\text{A.16})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^3} = \frac{1}{8} \operatorname{cn}3 \left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda) \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^4} = -\frac{z^4}{48} + \frac{\Lambda^2}{24} z^2 - \frac{7\Lambda^4}{720} \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \sin[x_n(z + \Lambda)] = -\frac{1}{8} \cot \left[\frac{\pi}{8\Lambda}(z + \Lambda) \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n} = -\frac{z}{2} \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^2} = \frac{1}{4} \operatorname{sn}2 \left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^3} = \frac{z^3}{12} - \frac{\Lambda^2}{12} z \quad (\text{A.22})$$

$$\sum_{\substack{n=2 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\sin[x_n(z + \Lambda)]}{x_n^4} = \frac{1}{16} \text{sn}4\left[\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda)\right] \quad (\text{A.23})$$

Hemos introducido las funciones no calculables en forma cerrada $\text{cn}3(x)$, $\text{sn}2(x)$ y $\text{sn}4(x)$, que se definen por

$$\text{cn}3(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3} \quad (\text{A.24})$$

$$\text{sn}2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\text{sn}4(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4} \quad (\text{A.26})$$

y pueden ser aproximadas mediante técnicas basadas en el cálculo de residuos [Collin, 1991], [Medina, 1990]. Como ejemplo de aplicación de la técnica veamos los pasos seguidos en el caso de $\text{sn}4(x)$:

Descomponemos la serie en otras dos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4} [1 - \tanh(np)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) \tanh(np)}{n^4} \quad (\text{A.27})$$

donde p es un número positivo comprendido entre cero y uno. La primera de las dos nuevas series converge exponencialmente, con lo que bastan unos pocos sumandos para alcanzar la precisión deseada. Nos centramos en la segunda serie. Partimos de la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{e^{izx} \tanh(zp)}{z^4} \frac{1}{e^{2\pi zi} - 1} \quad (\text{A.28})$$

Puede comprobarse que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{A.29})$$

cuando el contorno de integración Γ es una circunferencia centrada en el origen del plano complejo y de radio que tiende a infinito. Por otro

lado el teorema del residuo nos dice que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\alpha} \operatorname{Res} f(z) \quad (\text{A.30})$$

donde z_{α} son los polos de la función $f(z)$. Existen polos simples en $z = n$ para todo n entero distinto de cero y en $z = (2m + 1)\pi i/2p$ para todo m entero. En $z = 0$ existe un polo de orden cuatro. Los residuos de los polos sobre el eje real generan la serie que queremos sumar multiplicada por dos, dado que los sumandos son una función par en n . Por último los residuos en los polos sobre el eje imaginario son expresiones en cuyo numerador aparece una exponencial de argumento negativo y proporcional a $2m+1$, con lo que también bastan los primeros sumandos.

Si el argumento de $\operatorname{sn}4(x)$ es pequeño la convergencia de las exponenciales y funciones hiperbólicas es lenta. En tal caso es ventajoso emplear una expresión alternativa, válida en ese rango de valores del argumento, basada en el desarrollo en serie de Laurent en torno a cero de la función $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)/n = -\ln[2\sin(x/2)]$. Integrando término a término ambos miembros obtenemos un desarrollo válido para x pequeño de la función $\operatorname{sn}2(x)$, después de determinar una constante de integración sustituyendo un valor particular de suma conocida. Repitiendo el proceso encontramos desarrollos de $\operatorname{cn}3(x)$ y por fin de $\operatorname{sn}4(x)$.

Apéndice B

Matrices de discretización

En la exposición del Método de las Líneas se han definido las matrices de discretización de las derivadas de primer y segundo orden en la dirección z de las funciones incógnita u_{ijk} y φ_{ijk} , que generan dichas derivadas a partir de los vectores u y φ . A continuación presentamos las matrices que se obtienen utilizando un esquema no centrado de cuarto orden en el electrodo superior y condiciones de simetría en $z = 0$:

$$12hD^{1u} =$$

$$\begin{matrix}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\
 1 & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 -8 & 1 & 8 & -1 & & & & & & & & \\
 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & \ddots & & & & & & \\
 n-1 & & & & & & & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\
 n & & & & & & & -1 & 6 & -18 & 10 &
 \end{array} \right) \\
 & & & & & & & & & & &
 \end{matrix} \quad (B.1)$$

$$12hD^{1\psi} =$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 n-1 \\
 n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\
 16 & -2 & & & & & & & & & \\
 -1 & 8 & -1 & & & & & & & & \\
 -8 & 0 & 8 & -1 & & & & & & & \\
 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & & & & & & \\
 \dots & & & & & & & & & & \\
 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & & & & & & \\
 -1 & 6 & -18 & 10 & & & & & & &
 \end{pmatrix}
 \quad (B.2)$$

$$12h^2D^{2\psi} =$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 n-2 \\
 n-1 \\
 n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\
 -30 & 32 & -2 & & & & & & & & \\
 16 & -31 & 16 & -1 & & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & & & & & \\
 \dots & & & & & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & & & & & & & \\
 12 & 8 & -2 & -20 & & & & & & &
 \end{pmatrix}
 \quad (B.3)$$

$$12h^2D^{2\psi} =$$

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 n-2 \\
 n-1 \\
 n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\
 -29 & 16 & -1 & & & & & & & & \\
 16 & -30 & 16 & -1 & & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & & & & & \\
 \dots & & & & & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & & & & & \\
 -1 & 16 & -30 & 16 & & & & & & & \\
 12 & 8 & -2 & -20 & & & & & & &
 \end{pmatrix}
 \quad (B.4)$$

Apéndice C

Funciones $h_{ijk}^{(l)}$

En el proceso de obtención de la ecuación de bifurcación mediante el Método de Lyapunov-Schmidt el problema estático no lineal ampliado es desarrollado perturbativamente en tres parámetros, Ξ , ϵ y B , dando lugar a una sucesión de problemas lineales recurrentes, cuyos términos inhomogéneos fueron denotados por $h_{ijk}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 4$. Los subíndices corresponden a los órdenes del desarrollo de las funciones u y φ en los tres parámetros indicados anteriormente. Este laborioso proceso puede ser llevado a cabo mediante paquetes de manipulación simbólica, tales como REDUCE o MACSYMA. En nuestro caso hemos utilizado el primero de ellos. A continuación presentamos las funciones necesarias. Denotamos las derivadas por subíndices separados por una coma de cualquier otro subíndice.

Familia axilsimétrica

En este caso debemos entender $\Xi_0 = \Xi_{01}^-$, $f_0 = f_{01}^-(z)$ y $\phi_0 = \phi_{01}^-(r, z)$.

$$h_{020}^{(1)} = -f_0 \Delta \phi_{0,r} \quad (C.1)$$

$$h_{020}^{(2)} = -f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) + f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \quad (C.2)$$

$$h_{020}^{(3)} = \left(1 - \frac{W}{2}\right) f_0^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{4\Lambda^2}\right) f_{0,z}^2 + \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}^2) - \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}^2) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) \quad (C.3)$$

$$h_{030}^{(4)} = -\frac{1}{2}f_0^2 \quad (\text{C.4})$$

$$h_{030}^{(1)} = -u_{020} \Delta \phi_{0,r} - \frac{1}{2}f_0^2 \Delta \phi_{0,rr} - f_0 \Delta \varphi_{020,r} \quad (\text{C.5})$$

$$h_{030}^{(2)} = -u_{020} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) - \frac{1}{2}f_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,rrr}) - f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{020,rr}) \\ + f_{0,z} f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + f_{0z} \Delta (\epsilon \varphi_{020,z}) + u_{020,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \quad (\text{C.6})$$

$$h_{030}^{(3)} = -f_0^3 + (2 - W)f_0 u_{020} - \left(1 + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda^2}\right) f_{0,z} u_{020,z} \\ + \frac{3}{2}f_{0,zz} f_0^2 + \frac{1}{2}f_0 f_{0,z}^2 - \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \phi_{0,rr}) \\ - \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{020,r}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{020,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) \\ + 2\Xi_0^2 f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \phi_{0,z}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_0 f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) \\ + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{020,r}) + \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \phi_{0,zr}) \\ + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{020} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + \frac{\Xi_0^2}{4\Lambda} f_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,zrr}) \\ + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{020,zr}) + \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{020,z}) \\ - \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z}^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \quad (\text{C.7})$$

$$h_{030}^{(4)} = -f_0^2 u_{020} \quad (\text{C.8})$$

$$h_{110}^{(1)} = h_{110}^{(2)} = h_{110}^{(4)}, \quad h_{110}^{(3)} = \frac{\Delta \epsilon}{2\Lambda} \phi_{0,z} \quad (\text{C.9})$$

$$h_{001}^{(1)} = h_{001}^{(2)} = h_{001}^{(4)}, \quad h_{001}^{(3)} = z \quad (\text{C.10})$$

Modo en comba

Ahora es $\Xi_0 = \Xi_{11}^+$, $f_0 = f_{11}^+(z) \cos \theta$ y $\phi_0 = \phi_{11}^+(r, z) \cos \theta$. Las expresiones correspondientes a los órdenes (110) y (001) son las mismas que para la bifurcación axilsimétrica.

$$h_{020}^{(1)} = -f_0 \Delta \phi_{0,r} \quad (\text{C.11})$$

$$h_{020}^{(2)} = -f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) + f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} h_{020}^{(3)} = & f_0^2 \left(1 - \frac{W}{2} \right) + 2f_0 f_{0,\theta\theta} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{4\Lambda^2} \right) f_{0,z}^2 + \frac{1}{2} f_{0,\theta}^2 \\ & + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) + \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}^2) - \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}^2) \\ & + \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta}^2) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$h_{020}^{(4)} = -\frac{1}{2} f_0^2 \quad (\text{C.14})$$

$$h_{030}^{(1)} = -u_{020} \Delta \phi_{0,r} - \frac{1}{2} f_0^2 \Delta \phi_{0,rr} - f_0 \Delta \varphi_{020,r} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} h_{030}^{(2)} = & -u_{020} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) + \frac{1}{2} f_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,rrr}) - f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{020,rr}) \\ & + f_{0,z} f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + f_{0z} \Delta (\epsilon \varphi_{020,z}) + u_{020,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \\ & - 2f_0 f_{0,\theta} \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta}) + f_0 f_{0,\theta} \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta r}) + f_{0,\theta} \Delta (\epsilon \varphi_{020,\theta}) \\ & + u_{020,\theta} \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta}) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} h_{030}^{(3)} = & (2 - W) f_0 u_{020} - f_0^3 - 3f_0^2 f_{0,\theta\theta} - \left(1 + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda^2} \right) f_{0,z} u_{020,z} \\ & + \frac{1}{2} f_0 f_{0,z}^2 - \frac{3}{2} f_0 f_{0,\theta}^2 + 2f_0 u_{020,\theta\theta} + 2u_{020} f_{0,\theta\theta} + \frac{1}{2} f_{0,z}^2 f_{0,\theta\theta} \\ & + 2f_{0,z} f_{0,\theta} f_{0,z\theta} + \frac{1}{2} f_{0,zz} f_{0,\theta}^2 + \frac{3}{2} f_{0,\theta}^2 f_{0,\theta\theta} + f_{0,\theta} u_{020,\theta} \\ & + \frac{3}{2} f_{0,zz} f_{0,z}^2 - \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \phi_{0,rr}) - \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{020,r}) \\ & + 2\Xi_0^2 f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \phi_{0,z}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_0 f_{0,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{020,r}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{020,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) \\
& + \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \phi_{0,zr}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{020} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{4\Lambda} f_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,zrr}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{020,zr}) \\
& - \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z}^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) - \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} f_{0,\theta} \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta}) \\
& + \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{020,z}) - \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta}^2) \\
& + \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta} \phi_{0,r\theta}) + \Xi_0^2 f_{0,\theta} \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \phi_{0,\theta}) \\
& + \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,\theta} \varphi_{020,\theta})
\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$h_{050}^{(4)} = -f_0^2 u_{020} \tag{C.18}$$

$$h_{011}^{(1)} = -f_0 \Delta \varphi_{001,r} - u_{001} \Delta \phi_{0,r} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
h_{011}^{(2)} &= -f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) + f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,z}) - u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) \\
&+ u_{001,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z})
\end{aligned} \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}
h_{011}^{(5)} &= (2 - W) f_0 u_{001} - \left(1 + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda^2} \right) f_{0,z} u_{001,z} + 2 f_{0,\theta} u_{001} \\
&+ \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,r}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) \\
&+ \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{001,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) - \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{001,r}) \\
&+ \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{001,z})
\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$h_{011}^{(4)} = -f_0 u_{001} \tag{C.22}$$

$$h_{002}^{(1)} = -u_{001} \Delta \varphi_{001,r} \tag{C.23}$$

$$h_{002}^{(2)} = -u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) + u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,z}) \tag{C.24}$$

$$h_{002}^{(5)} = u_{001}^2 \left(1 - \frac{W}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{4\Lambda^2} \right) u_{001,z}^2 + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,r})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \varphi_{001,z}^2) - \frac{\Xi_0^2}{2} \Delta (\epsilon \varphi_{001,r}^2) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,zr}) \tag{C.25}
\end{aligned}$$

$$h_{002}^{(4)} = -\frac{1}{2} u_{001}^2 \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
h_{012}^{(1)} & = -f_0 u_{001} \Delta \varphi_{001,rr} - f_0 \Delta \varphi_{002,r} - \frac{1}{2} u_{001}^2 \Delta \phi_{0,rr} \\
& - u_{001} \Delta \varphi_{011,r} - u_{011} \Delta \varphi_{001,r} - u_{002} \Delta \phi_{0,r} \tag{C.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{012}^{(2)} & = -f_0 u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rrr}) + f_0 u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,zr}) - f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{002,rr}) \\
& - \frac{1}{2} u_{001}^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,rrr}) - f_{0,z} u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,zr}) \\
& + u_{001} u_{001,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) - u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{011,rr}) - u_{011} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) \\
& - u_{002} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) + f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{002,z}) + u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{011,z}) \\
& + u_{011,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,z}) + u_{002,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \tag{C.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{012}^{(3)} & = (2 - W) f_0 u_{002} + W u_{001} u_{011} - 3 f_0 u_{001}^2 + \frac{1}{2} f_0 u_{001,z}^2 \\
& - 3 u_{001}^2 f_{0,\theta\theta} + 2 u_{001} u_{011} + f_{0,z} u_{001} u_{001,z} + 2 u_{001} u_{011,\theta\theta} \\
& + 2 f_{0,\theta\theta} u_{002} + 3 f_{0,z} u_{001,z} u_{001,zz} \\
& - \left(1 + \frac{\Xi_0^2 \Delta \epsilon}{2\Lambda^2} \right) (f_{0,z} u_{002,z} + u_{001,z} u_{011,z}) \\
& + \frac{3}{2} f_{0,zz} u_{001,z}^2 + \frac{1}{2} f_{0,\theta\theta} u_{001,z}^2 + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,zrr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_0 u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{002,zr}) \\
& - \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{001,r} \varphi_{001,rr}) + \Xi_0^2 f_0 \Delta (\epsilon \varphi_{001,z} \varphi_{001,zr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{4\Lambda} u_{001}^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,zrr}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{001} u_{001,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{011,zr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{001} \Delta (\epsilon \varphi_{011,zr}) - \Xi_0^2 u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{001,rr})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Xi_0^2 u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,rr} \varphi_{001,r}) + \Xi_0^2 u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{001,zr}) \\
& + \Xi_0^2 u_{001} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr} \varphi_{001,z}) + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{011} \Delta (\epsilon \varphi_{001,rr}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{002} \Delta (\epsilon \phi_{0,zr}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{002,r}) \\
& + 2\Xi_0^2 f_{0,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,r} \varphi_{001,z}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{011,r}) \\
& - \frac{2\Xi_0^2}{\Lambda} f_{0,z} u_{001,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,z}) - \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{001,z}^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z}) \\
& + 2\Xi_0^2 u_{001,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{001,z}) + 2\Xi_0^2 u_{011,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{001,r}) \\
& + \frac{\Xi_0^2}{2\Lambda} u_{011,z} \Delta (\epsilon \varphi_{001,r}) + \frac{\Xi_0^2}{\Lambda} u_{002,z} \Delta (\epsilon \phi_{0,r}) \\
& - \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,r} \varphi_{002,r}) - \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \varphi_{001,r} \varphi_{011,r}) \\
& + \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \phi_{0,z} \varphi_{002,z}) + \Xi_0^2 \Delta (\epsilon \varphi_{001,z} \varphi_{011,z}) \tag{C.29}
\end{aligned}$$

$$h_{\delta 12}^{(4)} = -f_0 u_{002} - u_{001} u_{011} \tag{C.30}$$

Bibliografía

- [Abramowitz, 1972] Abramowitz, M. & Stegun, I., *Handbook of mathematical functions*, Dover Pub. Inc., New York.
- [Basaran, 1989a] Basaran, O.A. & Scriven, L.E. *Axisymmetric shapes and stability of isolated charged drops*. Phys. Fluids A 1(5), 795-798.
- [Basaran, 1989b] Basaran, O.A. & Scriven, L.E. *Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field*. Phys. Fluids A 1(5), 799-809.
- [Brown, 1980] Brown, R.A & Scriven, L.E. *The shapes and stability of rotating captive drops*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 297, 1980, 51-79.
- [Busse, 1984] Busse, F.H. *Oscillations of a rotating liquid drop*, J. Fluid Mech., 142, 1-8.
- [Carruthers, 1975] Carruthers, J.R., Gibson, E.G., Klett, M.G. & Facemire, B.R., *Studies of rotating liquid floating zones on Skylab IV*, AIAA Paper No.75-692.
- [Carruthers, 1977] Carruthers, J.R., Gibson, E.G., Klett, M.G. & Facemire, B.R., *Studies of rotating liquid floating zones on Skylab IV*, Progress in Astronautics and Aeronautics, 52, 207-221.
- [Cheng, 1984] Cheng, K.J. & Chaddock, J.B., *Deformation and stability of drops and bubbles in an electric field*, Phys. Letters, A 106, 51-53.
- [Collin, 1991] Collin, R.E., *Field theory of guided waves*, IEEE Press, New York.

- [Durand, 1966] Durand, E., *Electrostatique. II. Problèmes généraux. Conducteurs*. Masson et Cie., Paris.
- [Gañán, 1989] Gañán, A., *Análisis modal de zonas líquidas axil-simétricas confinadas por tensión superficial*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [Golubitsky, 1985] Golubitsky, M. & Schaeffer, D.G., *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. 1, Springer-Verlag.
- [Graney, 1981] Graney, L. & Richardson, A.A., *The numerical solution of non-linear partial differential equations by the method of lines*. J. Comp. and Appl. Math., 7(4), 229-235.
- [Greenspan, 1980] Greenspan, H.P., *The theory of rotating fluids*, Cambridge University Press.
- [Ioos, 1980] Ioos, G. & Joseph, D.D., *Elementary stability and bifurcation theory*, Springer-Verlag.
- [Keener, 1988] Keener, J.P., *Principles of applied mathematics*. Addison-Wesley, Redwood City, CA.
- [Keller, 1981] Keller, W. & Mühlbauer, A., *Floating-zone silicon*, Marcel Dekker Inc.
- [Landau, 1986] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. *Mecánica de fluidos*, Reverté, Barcelona.
- [Levich, 1962] Levich, V.G. *Physicochemical hydrodynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..
- [Luyten, 1983] Luyten, P. & Callebaut, D.K., *Stability of rotating liquid drops. I. Uncharged drops*. Phys. Fluids, 26(9), 2359-2367.
- [Luyten, 1985] Luyten, P. & Callebaut, D.K., *Stability of rotating liquid drops. II. Homogeneously charged or self-gravitating drops*. Phys. Fluids, 28(8), 2344-2351.
- [Martínez, 1978] Martínez, I., *Hidroestática de la zona flotante*, Tesis doctoral, Madrid.

- [Medina, 1990] Medina, F. & Horno, M., *Spectral and variational analysis of generalized cylindrical and elliptical strip and microstrip lines*. IEEE Microwave Theory Tech., 38, 9, 1287-1293.
- [Melcher, 1963] Melcher, J.R., *Field-coupled surface waves*. M.I.T. Press, Cambridge.
- [Melcher, 1969a] Melcher, J.R. & Taylor, G.I., *Electrohydrodynamics*, in Annual Rev. of Fluid Mech., 1, 111-146.
- [Melcher, 1969b] Melcher, J.R. & Warren, E.P., *Electrohydrodynamics of a current-carrying semi-insulating jet*. J. Fluid Mech., 47, 127-143.
- [Melcher, 1981] Melcher, J.R., *Continuum electromechanics* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [Meseguer, 1985] Meseguer, J. & Sanz, A. *Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges*. J. Fluid Mech., 153, 83-101.
- [Michael, 1976] Michael, D.H. & Williams, R.G., *The equilibrium and stability of axisymmetric pendent drops*. Proc. R. Soc. Lond., A 351, 117.
- [Mikhail, 1987] Mikhail, N.M., *On the validity and stability of the method of lines for the solution of partial differential equations*. Appl. Math. and Comp., 22, 89-98.
- [Miller, 1985] Miller, C.A. & Neogi, P., *Interfacial phenomena*, Marcel Dekker Inc..
- [Mykysis, 1981] Mykysis, M.J., *Shapes of a drop in an electric field*. Phys. Fluids, 24, 1967-1972.
- [Myshkis, 1987] Myshkis, A.D., Babskii, V.G., Kopachevskii, N.D., Slobozhanin, L.A. & Tyupsov, A.D., *Low-gravity fluid mechanics*, Springer-Verlag.
- [Nayfeh, 1981] Nayfeh, A.H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley & Sons.

- [Nayyar, 1960] Nayyar, N.K. & Murty, G.S., *The stability of a dielectric liquid jet in the presence of a longitudinal electric field*. Proc. R. Soc. Lond., 75, 369-373.
- [Padday, 1973] Padday, & Pitt, *The stability of axisymmetric menisci*. Phyl. Trans. R. Soc. Lond., A 275, 489.
- [Panofsky, 1977] Panofsky, W.K.H. & Phillips, M., *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley.
- [Perales, 1987] Perales, J.M., *Non-axisymmetric effects on long liquid bridges*, Acta Astronautica, Vol. 15, No.8, 561-565.
- [Perales, 1990a] Perales, J.M., Sanz, A. & Rivas, D., *Eccentric rotation of a liquid bridge*, Appl. microgravity tech. II, 4, 193-197.
- [Perales, 1990b] Perales, J.M., *Dinámica de columnas líquidas*. Tesis doctoral, Madrid.
- [Pickard, 1965] Pickard, W.F., *Progress in dielectrics*, 6, 1.
- [Pitts, 1973] Pitts, E. *The stability of pendent liquid drops. Part I. Two dimensional drops*. J. Fluid Mech., 59, 1973, 753- .
- [Pitts, 1974] Pitts, E. *The stability of pendent liquid drops. Part II. Axial symmetry*. J. Fluid Mech., 63, 1974, 487-508.
- [Pohl, 1978] Pohl, H.A., *Dielectrophoresis*. Cambridge University Press, 1978.
- [Ramos, 1991] Ramos, A., & Castellanos, A., *Shapes and stability of liquid bridges subjected to a.c. electric fields*. J. Electrostat. (en prensa).
- [Rayleigh, 1895] Rayleigh, (Lord) *The theory of sound, II* Reproducido de la segunda edición, Dover Publications Inc., 1945.
- [Reynolds, 1965] Reynolds, J.M., *Stability of an electrostatically supported fluid column*. Phys. Fluids, 8(1), 161-170.

- [Riahi, 1989] Riahi, D.N. & Walker, J.S. *Float zone shape and stability with the electromagnetic body force due to a radio-frequency induction coil* J. Crystal Growth 94, 635-642.
- [Sanz, 1985] Sanz, A., *The influence of the outer bath on the dynamics of axisymmetric liquid bridges*, J. Fluid Mech., 156, 101-140.
- [Sanz, 1989] Sanz, A. & Lopez Díez, J., *Non-axisymmetric oscillations of liquid bridges*, J. Fluid Mech., 205, 503-521.
- [Saville, 1970] Saville, D.A., *Electrohydrodynamic stability: fluid cylinders in longitudinal electric fields*. Phys. Fluids, 13, 2987-2994.
- [Saville, 1971] Saville, D.A., *Electrohydrodynamic stability: effects of charge relaxation at the interface of a liquid jet*. J. Fluid Mech., 48, 815-827.
- [Schneider, 1967] Schneider et al. *Stability of an electrified liquid jet*. J. of Appl. Phys., 38, 2599-2605.
- [Stoer, 1980] Stoer, J. & Bulirsch, R. *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [Strani, 1984] Strani, M. & Sabetta, F. *Free vibration of a drop in partial contact with a solid support*. J. Fluid Mech., 141, 233-247.
- [Struik, 1957] Struik, D.J. *Classical differential geometry*, Addison-Wesley.
- [Taylor, 1969] Taylor, G.I., *Electrically driven jets*. Proc. R. Soc. Lond., A 313, 453-475.
- [Walter, 1987] Walter, H.U. (Editor) *Fluid sciences and material science in space*, Springer-Verlag.
- [Vega, 1983] Vega, J.M. & Perales, J.M., *Almost cylindrical isorotating liquid bridges for small Bond numbers*, en Material Sciences under Microgravity, ESA SP-191, 247-252.

Publicaciones relacionadas con la Tesis

González, H., Castellanos, A., McCluskey, F.M.J. & Gañán, A. 1988, *Small oscillations of liquid bridges subjected to a.c. fields*. En *Synergetics, order and chaos*. World Scientific, Singapore.

González, H., McCluskey, F.M.J., Castellanos, A. & Barrero, A. 1989 *Stabilization of dielectric liquid bridges by electric fields in the absence of gravity*. *J. Fluid Mech.*, 206, 545-561.

González, H. & Castellanos, A. 1990 *The effect of an axial electric field on the stability of a rotating dielectric cylindrical liquid bridge*. *Phys. Fluids A*, 2(11), 2069-2071.

CONFERENCIA DE TESIS DE GRADUACIÓN

COMITÉ DE TESIS DE GRADUACIÓN

HELIODORO GONZALEZ GARCIA

"ESTABILIDAD DE FUENTES LÍQUIDAS CILÍNDRICAS

SOMETIDAS A CAMPOS ELÉCTRICOS E ISORROTACIONALES EN AMBIENTES DE MICROGRAVEDAD"

Apto, Cum. Laude

J. Alarcón

J. M. L.

M. S.

[Signature]

R. Sanjaume

[Signature]