

R. 5332

$\frac{T}{57}$

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRICIDAD Y ELECTRONICA



**APORTACION AL ANALISIS DE LINEAS DE
TRANSMISION DE CONFIGURACION PLANAR EN
MEDIOS LINEALES ESTRATIFICADOS**

Memoria presentada por

Ricardo Marqués Sillero

Para optar al grado de

Doctor en Ciencias Físicas

Sevilla, 1987.

APORTACION AL ANALISIS DE LINEAS DE TRANSMISION DE CONFIGURACION
PLANAR EN MEDIOS LINEALES ESTRATIFICADOS

Memoria presentada por **Ricardo Marqués Sillero** para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

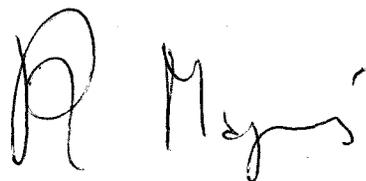
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en

de la
de esta Universidad desde el día
hasta el día

Sevilla de de 19

EL DIRECTOR DE



El director:



Manuel Horno Montijano

Catedrático de Física Aplicada



Departamento de Electricidad y Electrónica

Facultad de Física

Universidad de Sevilla.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 134 número 25 del libro
correspondiente.

Sevilla, 25 MAYO 1927

El Jefe del Negociado de Tesis,

H. Yolanda Díaz Rolanda

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento a Manuel Horno por la dirección de este trabajo, así como por su paciencia y apoyo. A los miembros del Departamento de Electricidad y Electrónica por su colaboración, y en especial a D. Antón Civit y a mis compañeros Paco Rafael y Gonzalo, muchas de cuyas ideas están en esta memoria. A los miembros del Centro de Calculo por su ayuda y paciencia, A Pablo y Juan Manuel por su contribución a la edición de esta memoria.

A mi familia que siempre me apoyó

A Asún.

Este trabajo a sido realizado en parte con cargo al proyecto nº 3028/83 de la Comisión asesora de Investigación Científica y Técnica (CAICYT).

INDICE

INTRODUCCION.....	I
1.- La teoría de campos de microondas.....	I
2.- Los sistemas de transmisión de configuración planar.....	V
3.- Objetivos del presente trabajo.....	X
4.- Referencias.....	XIII

PRIMERA PARTE: ANALISIS CUASIESTATICO

CAP.I.- METODOS DE ANALISIS EN APROXIMACION CUASIESTATICA.....	I-1
I.1.- Significado y limites de la aproximación...	I-2
I.2.- Analisis de estructuras sencillas de configuración planar.....	I-11
I.2.a.- Método de la transformación conforme (metodo de Wheeler).....	I-13
I.2.b.- Método de las diferencias finitas.	I-18
I.2.c.- Método de la ecuación integral....	I-19
I.2.d.- Métodos variacionales.....	I-24
I.2.e.- Técnicas de Wiener-Hopf (método de los residuos).....	I-31
I.3.- Análisis de estructuras en medios anisótropos.....	I-32
I.4.- Líneas en medios estratificados.....	I-35
I.5.- Conclusiones.....	I-41
CAP.II.- TEORIA DE LA APROXIMACION CUASIESTATICA.....	II-1
II.1.- Aproximación cuasi-estática en líneas	

	multiconductoras en medios anisótipos..	II-2
II.2.-	Líneas de transmisión en medios no magnéticos.....	II-12
II.3.-	Ejemplos.....	II-13
II.3.a.-	Acoplamiento de dos microtiras.....	II-13
II.3.b.-	Acoplamiento de cuatro tiras (caso particular).....	II-24
II.4.-	Conclusiones.....	II-33
CAP. III.-	MATRIZ DE GREEN ELECTROSTATICA PARA LINEAS MULTICAPA DE CONFIGURACION PLANAR.....	III-1
III.1.-	Obtención de la función de Green.....	III-2
III.1.a.-	Matriz de Green para estructuras estratificadas entre planos conductores a tierra.....	III-6
III.1.b.-	Plano inferior magnético..	III-14
III.2.-	Línea isotropa equivalente.....	III-16
III.3.-	Conclusiones.....	III-17
CAP. IV.-	ANALISIS VARIACIONAL DE LINEAS DE TRANSMISION EN APROXIMACION CUASIESTATICA.....	IV-1
IV.1.-	Estructuras monoconductoras y acoplamientos que pueden reducirse a aquellas.....	IV-1
IV.1.a.-	Línea microtira.....	IV-2
IV.1.b.-	Microtiras acopladas por superposición.....	IV-8
IV.1.c.-	Acoplamiento coplanar de microtiras.....	IV-12
IV.2.-	Acoplamiento simétrico de dos microtiras.....	IV-19

IV.3.- Línea multiconductora y multicapa.....	IV-26
IV.3.a.- Método de análisis.....	IV-27
IV.3.b.- Ejemplos.....	IV-29
IV.4.- Conclusiones.....	IV-35

SEGUNDA PARTE: ANALISIS EN FRECUENCIA

CAP.V.- METODOS DE ANALISIS EN FRECUENCIA DE SISTEMAS DE TRANSMISION DE CONFIGURACION PLANAR.....V-1

V.1.- Métodos semiempíricos. Modelo de Getsinger.	V-4
V.2.- Métodos numéricos.....	V-10
V.3.- Métodos de analisis modal.....	V-18
V.3.a.- Análisis de Fourier.....	V-20
V.3.b.- Desarrollo en modos TE y TM según la dirección de propagación.....	V-24
V.3.c.- Método de la resonancia transversal.....	V-27
V.3.d.- Técnicas de Wiener-Hopf.....	V-32
V.4.- Métodos de momentos y variacionales.....	V-36
V.5.- Líneas en medios anisótropos.....	V-50
V.6.- El problema de la definición de impedancia.....	V-52
V.7.- Conclusiones.....	V-58

CAP.VI.- ANALISIS EN FRECUENCIA DE LINEAS DE CONFIGURACION PLANAR SOBRE UNA CAPA.....VI-1

VI.1.- Obtención de la función de Green para medios de anisotropía dieléctrica.....	VI-2
VI.1.a.- Pared inferior conductora.....	VI-7
VI.1.b.- Expresiones compactas para la	

	funcion de Green.....	VI-11
	VI.1.c.- Pared inferior magnética.....	VI-13
	VI.1.d.- Medios de anisotropía magnética.....	VI-14
	VI-2.- Algunos comentarios.....	VI-19
	VI-3.- Ejemplos.....	VI-23
	VI-4.- Conclusiones.....	VI-31
CAP.VII.- ANALISIS DE LA DISPERSION EN LINEAS MULTICONDUCTORAS Y MULTICAPAS.....		
	VII.1.- El método de Galerkin como método variacional.....	VII-2
	VII.2.- Matriz de Green para medios lineales multicapas.....	VII-9
	VII.2.a.- El problema de dos capas..	VII-10
	VII.2.b.- Algoritmo para la obtencion de la matriz de Green.....	VII-17
	VII.2.c.- Propiedades de las \bar{g}_{ij} , $\bar{\alpha}_{ij}$ para medios sin pérdidas..	VII-22
	VII.2.d.- Otras simetrias de \bar{g}_{ij} , $\bar{\alpha}_{ij}$	VII-25
	VII.2.e.- Reducción a problemas de una capa.....	VII-27
	VII.3.- Obtencion de las \bar{Y}_i^\pm , \bar{g}_{ij} en medios anisótropos.....	VII-30
	VII.2.a.- Medios con simetría de reflexión en el plano x-z.	VII-31
	VII.2.b.- Medios de anisotropía dieléctrica general.....	VII-34
	VII.4.- Ejemplos numéricos.....	VII-41
	VII.5.- Conclusiones.....	VII-54
CAP.VIII.- CONCLUSIONES.....		
		VIII-1

APENDICE A.....	A-1
APENDICE B.....	B-1
1.- Dieléctrico uniáxico.....	B-1
2.- Plasmas y semiconductores.....	B-8
3.- Medios de anisotropía magnética.....	B-9
APENDICE C: PERSPECTIVAS.....	C-1
APENDICE D: REFERENCIAS.....	D-1
I.- Libros y artículos de intererés general.....	D-1
II.- Aproximación cuasiestática.....	D-4
III.- Análisis en frecuencia.....	D-15

INTRODUCCION

1.-La Teoría de campos de microondas.

La teoría de campos de microondas, dentro de cuyo marco se inscribe la presente memoria, es una parte de la teoría general del campo electromagnético surgida de los primeros trabajos de Faraday y Maxwell principalmente. Es importante, por tanto, fijar con claridad desde un principio cuales son los aspectos diferenciadores de la teoría de microondas dentro del electromagnetismo.

Según A.A.Oliner [I], dichos aspectos son fundamentalmente dos:

a) La teoría de campos de microondas se aplica a estructuras cuyas dimensiones son del orden de la longitud de onda.

b) El interés de la teoría se centra básicamente en problemas de guiado y resonancias del campo electromagnético, más que en los problemas generales de la dispersión (scattering) en el espacio abierto.

Como una consecuencia de la primera de ambas características, en la teoría de microondas no es posible, a diferencia de otras áreas del electromagnetismo, hacer desde el principio aproximaciones simplificadoras, como en

la óptica ordinaria, en la que la longitud de onda es mucho menor que las dimensiones características de las estructuras bajo estudio, o como en la teoría del scattering por pequeñas partículas o en la teoría electromagnética de los circuitos de baja frecuencia, donde la longitud de onda es mucho mayor que las dimensiones características de los sistemas bajo estudio. Desde este punto de vista, la teoría de campos de microondas es la rama del electromagnetismo que presenta a la vez las mayores dificultades teóricas de formulación y los fenómenos más complejos, como resonancias, acoplamientos, etc, dado que debemos trabajar desde un principio con todas las ecuaciones a un tiempo, sin despreciar ningún efecto.

Afortunadamente, la segunda de las características mencionadas permite por lo general introducir algunas simplificaciones en el análisis. Así en la teoría de guías de onda podemos tener en cuenta la simetría y el carácter "cerrado" de la guía, así como el hecho de que, consecuentemente, podamos descomponer el campo en una serie discreta de modos, la mayoría de los cuales serán evanescentes en la región de frecuencias de interés. De esta manera podemos establecer un circuito equivalente para cada modo e incluso, teniendo en cuenta que la mayoría de los modos están al corte, caracterizar las discontinuidades en las guías como elementos localizados de circuito.

Podemos así construir, a partir del análisis electromagnético de los campos, una descripción en términos de la teoría de circuitos de una amplia gama de problemas de los tratados en la teoría de microondas.

Este afán por reducir los problemas electromagnéticos en términos de la teoría de circuitos, es una consecuencia del carácter fundamentalmente aplicado de la investigación en microondas, y constituye una de sus características formales más significativas.

Como en muchos otros campos de la ciencia, la aparición del ordenador ha revolucionado los métodos de trabajo también en la teoría de microondas. Hasta aproximadamente 1970, casi todo el esfuerzo teórico se dirigió a la obtención de soluciones exactas o aproximaciones analíticas precisas de los problemas considerados [I]. Ello restringía enormemente el abanico de estructuras a analizar e implicaba la necesidad del "ajuste" posterior en todo circuito medianamente complicado. En compensación, el análisis exacto o mediante aproximaciones analíticas, proporcionaba una gran comprensión física de los fenómenos bajo análisis.

Tras la llegada del ordenador, la potencia de los métodos de análisis creció vertiginosamente, haciendo posible emprender el análisis de un amplísimo abanico de

estructuras y, lo que es aún mas importante, eliminando la necesidad del "ajuste", abriendo así la posibilidad de la circuitería integrada de microondas (MIC). No obstante los enormes beneficios derivados del uso del ordenador, ciertos perjuicios pueden derivarse de su utilización abusiva, principalmente una pérdida de la visión del contenido físico del problema. Además, en un tratamiento puramente numérico de un problema, ciertas soluciones particulares pueden corresponder a artificios del propio método, y es preciso saber distinguir dichas soluciones, carentes de sentido físico, de las soluciones con sentido físico; también es importante la comprensión de la física del problema para saber "buscar" de modo adecuado las soluciones en el ordenador (por ejemplo, seleccionando adecuadamente las funciones base en los métodos de momentos y variacionales, como tendremos ocasión de ver en la presente memoria, etc.). De este modo, la física del problema sigue siendo importante.

A lo largo de la presente memoria desarrollaremos algoritmos para el cálculo mediante ordenador de las características electromagnéticas de un amplio conjunto de estructuras útiles en la tecnología MIC: Las líneas de transmisión de configuración planar. Nuestra filosofía será, no obstante, ir en el tratamiento analítico tan lejos como nos sea posible, para a continuación hacer uso del

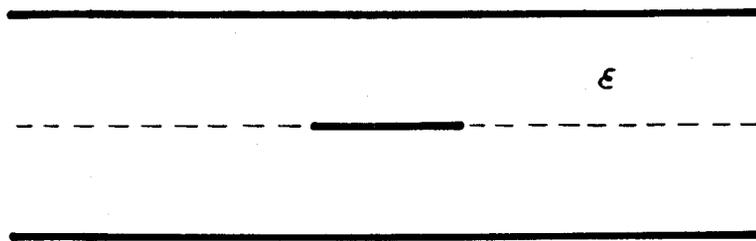
ordenador como medio de cálculo cuando ya no quede otra alternativa. De ese modo alcanzamos un compromiso entre la generalidad derivada de los métodos numéricos y la compacidad y comprensión física derivadas del desarrollo analítico.

2.-Los sistemas de transmisión de configuración planar.

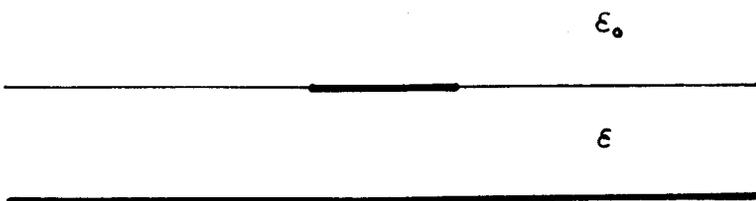
Los sistemas de transmisión de configuración planar empiezan a sustituir con éxito a las guías de onda a partir de la década de los cincuenta. Su aparición responde a la necesidad de ampliar el ancho de banda de los sistemas de transmisión [II] y, al mismo tiempo, a medida que del diseño de sistemas de transmisión se pasó al diseño de elementos de circuito, a su fácil fabricación [III]. En efecto, en la primitiva técnica de fabricación de circuitos impresos (planares) de microondas, era posible diseñar un circuito, fabricarlo pintándolo sobre el sustrato con pintura de plata o recortándolo de una lámina de aluminio y pegándolo, y medir el circuito en el plazo de unas horas [III]. Posteriormente, con la aparición de los circuitos integrados y monolíticos de microondas [IIII], la reducción de tamaño se hizo la ventaja más importante de los circuitos planares.

En la década de los cincuenta se presentaron dos tipos fundamentales de líneas planares de transmisión, que competían entre sí. El primero es la línea triplaca [III], constituida por una tira conductora emparedada entre dos placas dieléctricas idénticas y blindado todo el conjunto mediante dos planos conductores infinitos. La estructura es una deformación del cable coaxial, mediante la transformación del conductor central en una tira de espesor despreciable, y la transformación del conductor externo en dos placas paralelas infinitas. La otra estructura es la línea microtira [II], [I], formada por una tira conductora sobre un sustrato dieléctrico plano, a su vez soportado por un plano metálico a tierra. (ver fig.I.a y b)

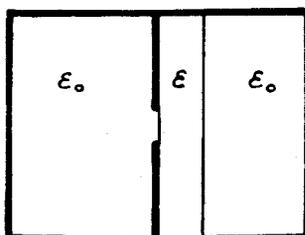
Durante la década de los cincuenta, la estructura preferida fue la línea triplaca, por dos razones fundamentalmente [I]. En primer lugar porque la homogeneidad del medio hacía que por la estructura se propagase un modo TEM puro, sin dispersión. En segundo lugar, porque, debido a la simetría de la estructura, cualquier discontinuidad en el plano de la tira es puramente reactiva y no radia. En cambio, la línea microtira propaga modos solo aproximadamente TEM, y las discontinuidades en el plano de la tira generan siempre pérdidas por radiación.



a)



b)



c)

Fig. I

(a).- Línea triplaca. (b).- Línea microtira. (b).- Línea de aletas o fin-line.

No obstante, una década más tarde, la línea microtira

se convirtió en la más popular, situación que permanece hasta hoy. En dicho cambio jugó un papel importantísimo el desarrollo de nuevos sustratos, como la alúmina, que permitieron miniaturizar la línea, disminuyendo así las pérdidas por radiación. La línea microtira devino así la más usada, principalmente debido a su sencillez de fabricación mediante las técnicas de fotograbado, propias de la circuitería integrada de microondas [IIII].

Finalmente, en la década de los setenta, a medida que el rango de frecuencias de interés se extendía a las ondas milimétricas, y como consecuencia de la necesidad de blindar los elementos de transmisión para evitar pérdidas por radiación, apareció la línea de aletas o fin-line [IIII] (fig.I.c) (*).

A medida que se avanza en la integración y miniaturización de los circuitos de microondas, se va haciendo más y más necesario un análisis preciso de las características de los distintos elementos del circuito y de su interacción, por cuanto el posterior ajuste se va haciendo más y más imposible. En ese sentido es preciso

(*).- En la presente memoria no analizaremos líneas fin-line como la de la fig.I.c, excepto en el caso particular en que las paredes laterales de la guía pueden considerarse tan alejadas que no afectan al campo (línea ranurada o slot-line), pues los algoritmos aquí desarrollados lo han sido para líneas abiertas lateralmente. No obstante, la mayoría de los conceptos vertidos en el presente trabajo pueden extenderse también a líneas cerradas lateralmente.

señalar que muchos de los sustratos dieléctricos usados en la fabricación de tales circuitos, o bien adquieren anisotropía durante el proceso de fabricación, o bien son ya de partida anisótropos, como los cristales de zafiro y nitruro de boro, cada vez más usados por sus bajas pérdidas y buena reproducibilidad [IV]. Por otro lado, materiales giromagnéticos (ferritas), son profusamente utilizados como sustratos en la fabricación de elementos no recíprocos [IV]. Todo ello refuerza el interés del análisis de líneas de transmisión en medios anisótropos.

Por otro lado, a medida que avanza el proceso de integración, y como consecuencia de los grandes avances en la tecnología de arseniuro de galio, va creciendo el interés por las estructuras multicapa dieléctrico-semiconductor-dieléctrico, capaces de soportar elementos activos, aparte del interés de las estructuras multicapa puramente dieléctricas como medio de manipular determinadas características de interés en los elementos pasivos de circuito. Las estructuras multicapa son también de interés en el diseño de antenas integradas.

Podemos decir, como conclusión del presente apartado, que las líneas de configuración planar se han convertido, en las últimas décadas, en los elementos básicos de la circuitería integrada de microondas. Por otra parte, el estudio de tales líneas sobre sustratos anisótropos y/o

multicapas, constituye, hoy día, un activo campo de investigación dentro de la teoría de campos de microondas.

3.-Objetivos del presente trabajo

A lo largo del presente trabajo desarrollaremos sistemáticamente métodos de análisis para el estudio de las características cuasiestáticas y de dispersión en líneas de transmisión multiconductoras de configuración planar en medios anisótropos estratificados, con el fin de obtener algoritmos de cálculo de las características circuitales de estas líneas, muy generales y con un error dentro de los límites necesarios en el diseño de circuitos integrados y monolíticos de microondas.

La memoria se divide en dos partes, una dedicada al análisis cuasiestático (no dispersivo), y otra dedicada al análisis en frecuencia (dispersivo).

En el capítulo I presentamos una panorámica general de los métodos de análisis cuasiestáticos de líneas de transmisión de configuración planar, con especial atención a los métodos variacionales, a nuestro juicio los más versátiles y precisos para el análisis del problema general planteado.

En el capítulo II presentamos la teoría de modos cuasiestáticos en líneas de transmisión en medios anisótropos, y se particulariza el análisis a medios no magnéticos. Como un ejemplos se analizan el acoplamiento arbitrario de líneas microtira en un medio dieléctrico sin pérdidas y el doble acoplamiento coplanar y por superposición de cuatro líneas microtira idénticas en un medio anisótropo.

En el capítulo III se presenta un algoritmo recurrente para la obtención de la matriz estática de Green en medios dieléctricos estratificados sin pérdidas. Dicho algoritmo será la base de los métodos de análisis variacional desarrollados en el cap.IV.

En el capítulo IV, en efecto, se desarrollan métodos de análisis variacional de líneas multiconductoras y multicapa en medios anisótropos de configuración completamente general. Se analiza numerosos ejemplos, presentándose los resultados en forma de gráficas. Con este capítulo finaliza la primera parte de la memoria.

En el capítulo V se presenta una panorámica general de los diferentes métodos de análisis en frecuencia de líneas de transmisión de configuración planar. Con ello comenzamos la segunda parte de la memoria.

En el capítulo VI se desarrolla un algoritmo compacto para la obtención de la función diádica de Green en líneas sobre una capa de sustrato anisótropo. Dicho algoritmo es aplicado al análisis de las líneas fundamentales -microtira y fin-line bilateral- mediante la utilización del método de galerkin en el dominio espectral.

Finalmente, en el capítulo VII, se desarrolla un método completamente general para la obtención de la matriz diádica de Green en el dominio espectral, para líneas multiconductoras y multicapa en un medio estratificado de comportamiento lineal con el campo electromagnético. Dicho método opera transformando el problema de "n" capas en una cadena de problemas, más simples, de una capa, y es aplicable a medios de propiedades electromagnéticas arbitrarias, con la sola condición de la linealidad. Dichos problemas de una capa son a continuación resueltos para el caso de anisotropía dieléctrica. Se analizan algunos ejemplos, presentándose los resultados en forma de gráficas. Con esto termina la memoria.

Se incluyen cuatro Apéndices, dos de los cuales hacen referencia a desarrollos puntuales que hemos apartado del desarrollo general de la memoria para no entorpecer la visión del razonamiento general. El tercero es un resumen de las principales vías de investigación que se abren tras la realización de los trabajos contenidos en esta memoria.

Por último, el cuarto contiene las referencias bibliográficas utilizadas, divididas en tres apartados -Libros y artículos de interés general, análisis cuasiestático y análisis en frecuencia- y ordenadas cronológicamente.

Finalmente es conveniente señalar de una vez por todas algunas hipótesis de partida que permanecen implícitas a lo largo de la presente memoria. En lo que respecta a las tiras conductoras que configuran las líneas de transmisión, se las supone siempre ideales y de espesor despreciable. En lo que respecta al medio, se le supone siempre un comportamiento lineal con el campo electromagnético, expresado mediante los tensores de anisotropía correspondientes. Luego, según los capítulos, se hacen hipótesis adicionales más restrictivas, que se explicitan en el texto; no obstante, en los ejemplos, se suponen siempre medios dieléctricos sin pérdidas.

4.-Referencias

[II].- A.A.Oliner "Historical perspectives on microwave field theory". IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol MTT-32, pp. 1022-1045 Sept. 1984.

[III].- R.M.Barret "Microwave printed circuits- The early years". IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol

MIT-32, pp. 983-990, Sept. 1984.

[IIII].- H.Howe Jr. "Microwave integrated circuits- An historical perspective". IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol MIT-32, pp. 991-996, Sept. 1984.

[IV].- N.G.Alexopoulos "Integrated circuit structures on anisotropic substrates". IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol MIT-33, pp. 847-881, Oct. 1985.

PRIMERA PARTE:

APROXIMACION CUASI-ESTATICA

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

I-METODOS DE ANALISIS EN
APROXIMACION CUASIESTATICA

En el presente capítulo daremos una visión general del "estado del arte" en lo que concierne al análisis cuasiestático de microlíneas de transmisión de configuración planar, en forma de bibliografía comentada, haciendo hincapié en aquellos aspectos de la cuestión que serán de utilidad mas adelante en nuestro análisis.

No pretendemos ser exhaustivos ni mucho menos, aunque hemos intentado que no se nos escape ningún aspecto fundamental de la cuestión. El capítulo comienza con una breve exposición de la teoría de la aproximación cuasiestática para líneas de dos conductores, basada en el trabajo de A.F.dos Santos y J.P.Figanier [35]. Posteriormente se exponen brevemente los, a nuestro juicio, principales métodos de análisis cuasiestático de líneas microtira y similares, centrandonos siempre mas en la exposición del método en sí que en el tipo de estructura analizado. Algunos tópicos de especial interés para nosotros cómo propagación en líneas con sustratos anisótropos y/o estratificados nos han parecido merecedores de una exposición independiente.

Aproximación cuasiestática I-Métodos de análisis...

Se han intentado ofrecer al mismo tiempo suficientes referencias bibliográficas como para que el lector interesado pueda ampliar convenientemente las exposiciones forzosamente esquemáticas que integran el presente capítulo.

I.1- Significado y límites de la aproximación

En palabras de un conocido libro de texto [3] el campo cuasiestático no es otra cosa que "una solución de las ecuaciones de Maxwell en serie de potencias de la frecuencia, válida en primer orden". Dicho concepto ha sido aplicado al estudio de líneas de transmisión por A.F. dos Santos et al. [35] con el fin de obtener la justificación teórica del empleo de la aproximación quasi-estática en dichas líneas en un medio inhomogeneo. Posteriormente I.V.Lindell [61] y el autor [74] extendieron dicho análisis a líneas multiconductoras en medios inhomogeneos el primero y a medios inhomogéneos y anisótropos el segundo. En el ámbito de la presente introducción nos limitaremos a delinear brevemente las principales características de la aproximación en el caso mas sencillo: Una línea de dos conductores en un medio inhomogéneo, compuesto por varios dieléctricos isótropos sin pérdidas (fig.I.1).

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

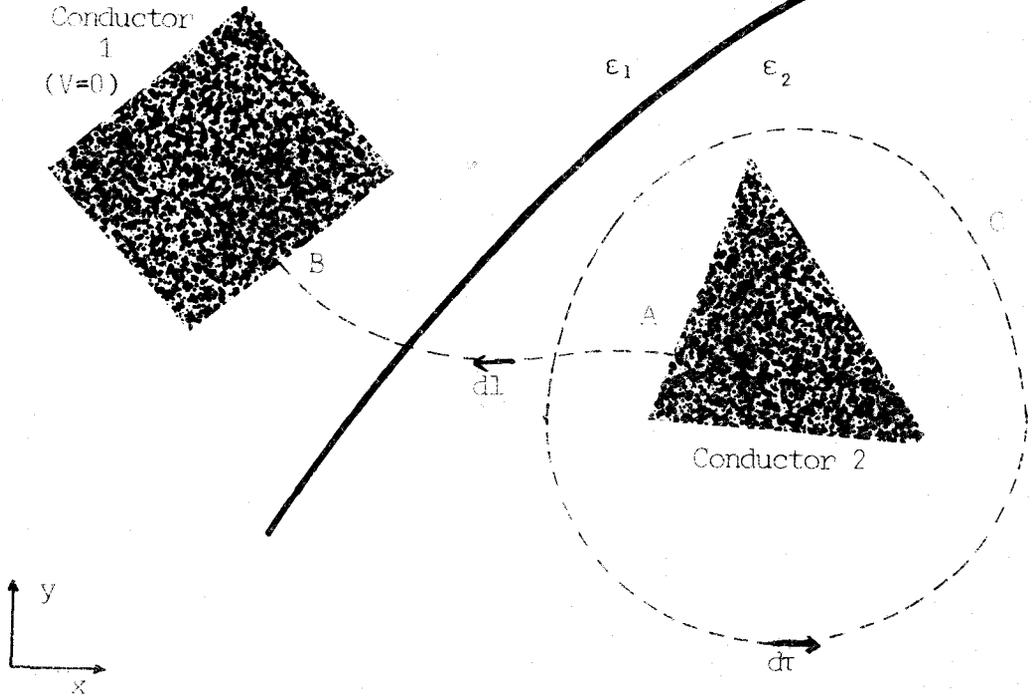


Fig. I.1

Línea de transmisión de dos conductores en un medio dieléctrico isótropo e inhomogéneo.
-o0o-

Consideremos la línea esquematizada en la fig. I.1. Para ondas propagándose por la línea a frecuencia ω con una constante de propagación β a lo largo del eje z , las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial son:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E} = j\beta \vec{u}_z \times \vec{E} - j\omega \vec{B} \quad (\text{I-1.a})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H} = j\beta \vec{u}_z \times \vec{H} + j\omega \vec{D} \quad (\text{I-1.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{D} = j\beta \vec{u}_z \cdot \vec{D} \quad (\text{I-1.c})$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B} = j\beta \vec{u}_z \cdot \vec{H} \quad (\text{I-1.d})$$

donde $\vec{\nabla}_t$ es el operador gradiente transversal:
 $\partial/\partial x \vec{u}_x + \partial/\partial y \vec{u}_y$.

Hay que hacer notar, sin embargo, que las ecuaciones así escritas no son independientes, ya que las dos últimas están contenidas en las dos primeras, como se comprueba fácilmente tomando la divergencia transversal de éstas. así pues, podemos trabajar sólo con (I-1.a,b) que pueden separarse en una parte transversal y otra longitudinal del siguiente modo (ver, por ejemplo, [6] cap. 8):

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu_0 H_z \vec{u}_z \quad (\text{I-2.a})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_z = -j\beta \vec{E}_t - j\omega\mu_0 \vec{u}_z \times \vec{H}_t \quad (\text{I-2.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t = j\omega\epsilon(\vec{r}) \vec{E}_z \vec{u}_z \quad (\text{I-2.c})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_z = -j\beta \vec{H}_t + j\omega\epsilon(\vec{r}) \vec{u}_z \times \vec{E}_t \quad (\text{I-2.d})$$

donde el subíndice "t" indica la componente transversal.

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Los campos complejos $\vec{X}(\omega)$ - \vec{X} vale por \vec{E} o \vec{H} -, se derivan de los reales $\vec{x}(t)$, por medio de:

$$\vec{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (I-3)$$

de modo que deben cumplir la relación:

$$\vec{X}(\omega) = \vec{X}^*(-\omega) \quad (I.4)$$

Si además suponemos propagación del tipo $\vec{X} = \vec{X} e^{j\beta z}$, entonces, de (I-4):

$$\beta(\omega) = -\beta^*(-\omega) \quad (I-5)$$

Estamos ya en condiciones de aplicar la aproximación, mediante un desarrollo en serie de potencias de la frecuencia de los campos y de β , acorde con las propiedades (I-4) y (I-5). Si podemos despreciar las pérdidas β será real; por otro lado separamos \vec{X} en parte real y parte imaginaria ($\vec{X} = Y + jZ$), para obtener:

$$\vec{Y} = Y_0 + Y_2 \omega^2 + \dots \quad (I-6.a)$$

$$\vec{Z} = Z_1 \omega + Z_3 \omega^3 + \dots \quad (I-6.b)$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\beta = \beta_1 \omega + \beta_3 \omega^3 + \dots \quad (\text{I-6.c})$$

es decir, la parte real de los campos es una función par de ω (sólo contiene potencias pares en su desarrollo), mientras que la parte imaginaria de los mismos es una función impar de ω (sólo contiene potencias impares en su desarrollo). Por su parte β es una función impar de ω que sólo contiene potencias impares en su desarrollo.

Aplicando (I-6) a (I-2), llegamos al siguiente desarrollo:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{t,n} = -j \mu_0 H_{z,n-1} \vec{u}_z \quad (\text{I-7.a})$$

$$\vec{\nabla}_t E_{z,n} = -j \sum_{k+l=n} \beta_k \vec{E}_{t,l} - j \mu_0 \vec{u}_z \times \vec{H}_{t,n-1} \quad (\text{I-7.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_{t,n} = j \epsilon(\vec{r}) E_{z,n-1} \vec{u}_z \quad (\text{I-7.c})$$

$$\vec{\nabla}_t H_{z,n} = -j \sum_{k+l=n} \beta_k \vec{H}_{t,l} + j \epsilon(\vec{r}) \vec{u}_z \times \vec{E}_{t,n-1} \quad (\text{I-7.d})$$

donde los subíndices n, k, l indican términos del desarrollo en serie de potencias de ω (I-6).

Las soluciones de orden cero corresponden a los campos estáticos usuales, cuando por ambos conductores circulan corrientes de intensidad total I y de sentidos opuestos,

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

habiendo una diferencia de potencial V entre ellos:

$$\vec{E}_{z,0} = \vec{H}_{z,0} = 0 \quad (\text{I-8.a})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{t,0} = 0 \quad (\text{I-8.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_{t,0} = 0 \quad (\text{I-8.c})$$

con las condiciones de contorno usuales en la superficie de los conductores y en la interfase entre los dielectricos, mas las siguientes relaciones que permiten obtener \vec{E}_0 y \vec{H}_0 a partir de I y V :

$$\int_A^B \vec{E}_{t,0} \cdot d\vec{l} = V \quad (\text{I-9.a})$$

$$\oint_C \vec{H}_{t,0} \cdot d\vec{z} = I \quad (\text{I-9.b})$$

Las ecuaciones de primer orden pueden escribirse:

$$\vec{E}_{t,1} = \vec{H}_{t,1} = 0 \quad (\text{I-10.a})$$

$$\vec{\nabla}_t E_{z,1} = -j\beta_1 \vec{E}_{t,0} - j\mu_0 \vec{u}_z \times \vec{H}_{t,0} \quad (\text{I-10.b})$$

$$\vec{\nabla}_t H_{z,1} = -j\beta_1 \vec{H}_{t,0} + j\epsilon_0(\vec{r}) \vec{u}_z \times \vec{E}_{t,0} \quad (\text{I-10.c})$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Donde hemos tomado iguales a cero los campos transversales, debido a que sus fuentes se anulan en todas partes. Aunque sólo hemos escrito las ecuaciones de orden cero y uno, se puede comprobar fácilmente que, en general, las componentes transversales de los campos son funciones pares (reales) de ω , mientras que las componentes según la dirección de propagación son funciones impares (imaginarias) de la frecuencia.

Para determinar β_1 , la ec. (I-10.a) se integra entre A y B, y (I-10.b) a lo largo de la curva cerrada C que encierra uno de los conductores (fig.I.1), obteniéndose:

$$\beta_1 V = \mu_0 \int_A^B \vec{H}_{t,0} \cdot (\vec{u}_z \times d\vec{l}) = LI \quad (\text{I-11.a})$$

$$\beta_1 I = \oint_C \epsilon(\vec{r}) \vec{E}_{t,0} \cdot (d\vec{z} \times \vec{u}_z) = CV \quad (\text{I-11.b})$$

donde L y C son los coeficientes estáticos de autoinducción y de capacidad por unidad de longitud de la línea respectivamente.

Tomando ahora, en primer orden de aproximación $\beta = \beta_1 \omega$, las expresiones (I-11) conducen a:

$$(\beta^2 - \omega^2 LC)V = 0 \quad (\text{I-12.a})$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$(\beta^2 - \omega^2 LC)V = 0 \quad (\text{I-12.b})$$

que no son otra cosa que la ecuación de los telegrafistas en el dominio de Fourier; así como a las expresiones habituales para la velocidad de fase y la impedancia de la línea:

$$\beta = \omega(LC)^{1/2} \quad (\text{I-13.a})$$

$$Z = (V/I) = (L/C)^{1/2} \quad (\text{I-13.b})$$

Vemos pues como las expresiones válidas para ondas TEM en líneas de transmisión homogéneas, resultan también válidas, en primera aproximación, para líneas en medios inhomogéneos.

Los límites de validez de la aproximación vendrán dados por la condición de que los campos en segunda y sucesivas aproximaciones difieran despreciablemente de los campos en primera aproximación, para ello basta que $\omega^2 |\vec{E}_{t,2}| \ll |\vec{E}_{t,0}|$ y $\omega^2 |\vec{H}_{t,2}| \ll |\vec{H}_{t,0}|$. En efecto, si tales desigualdades se cumplen, integrando las ecuaciones en tercera aproximación en forma análoga a como lo fueron las ecuaciones en primera aproximación (I-10), se puede demostrar que la corrección de tercer orden a β es

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

despreciable ($\omega^3 \beta_3 \ll \omega \beta_1$), y de aquí que las sucesivas correcciones a los campos y a β también lo son.

Las ecuaciones en segunda aproximación son:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{t,2} = -j\mu_0 H_{z,1} \vec{u}_z \quad (\text{I-14.a})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_{t,2} = j\epsilon(\vec{r}) E_{z,1} \vec{u}_z \quad (\text{I-14.b})$$

combinandolas con (I-10) obtenemos:

$$\nabla_t^2 \vec{E}_{t,2} = (\beta_1^2 - \mu_0 \epsilon(\vec{r})) \vec{E}_{t,0} \quad (\text{I-15.a})$$

$$\nabla_t^2 \vec{H}_{t,2} = (\beta_1^2 - \mu_0 \epsilon(\vec{r})) \vec{H}_{t,0} \quad (\text{I-15.b})$$

Sea "d" la dimensión transversal típica de la línea, es decir, aquella distancia a la cual los campos prácticamente se anulan. El operador $\vec{\nabla}_t$ será, en orden de magnitud igual a $1/d$, así pues, de las ecuaciones (I-15) deducimos que, en orden de magnitud:

$$\omega^2 |E_{t,2}| / |E_{t,0}| \sim \omega^2 d^2 (\beta_1^2 - \mu_0 \epsilon(\vec{r})) \quad (\text{I-16})$$

con una ecuación análoga para el campo magnético. Ahora bien, $\mu_0 \epsilon(\vec{r})$ es del orden del inverso de la velocidad de

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...



fase ($\rho_0 \epsilon(\vec{r}) \sim 1/v_f = \beta/\omega = \beta_1$); así pues, la condición buscada es:

$$\omega^2 d^2 \beta_1 \ll 1 \quad (\text{I-17})$$

o bien

$$d^2 \ll \lambda^2 \quad (\text{I-18})$$

donde λ es la longitud de onda aproximada en la línea
 $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi/(\omega\beta_1)$.

I.2.-Análisis de estructuras sencillas de configuración planar

Una vez demostrada la validez de las expresiones anteriores para líneas en medios inhomogéneos en primera aproximación, el problema de calcular los parámetros cuasiestáticos de cualquier línea de transmisión sin pérdidas queda reducido al problema de calcular L y C.

En el caso en que el substrato carece de propiedades magnéticas ($\mu = \mu_0$) el coeficiente L será el mismo que en ausencia del medio material, pero en tal caso sabemos que la línea transporta campos TEM [4] con una velocidad de fase "c", dada por (I-13.a): $c = (LC^v)^{1/2}$; de donde,

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

finalmente:

$$L = c/C^V \quad (I-19)$$

donde C^V es la capacidad de la línea en vacío. Así pues, cuando el medio carece de propiedades magnéticas, el problema se reduce al cálculo de C y C^V .

Debe hacerse constar también que, dado que un cambio de escala no modifica los valores de C y C^V , tampoco modificará el valor de los parámetros cuasiestáticos de la línea; de este modo es siempre posible normalizar a la unidad una de las dimensiones de la línea, y medir el resto en términos de esa unidad arbitraria. No obstante, el cambio de escala sí afectará sustancialmente a los límites en frecuencia de aplicación de las expresiones (I-11)-(I-13), en virtud de (I-18).

En lo que respecta a líneas MIC, aparte de la microtira simple, abierta o encapsulada, muchas estructuras acopladas pueden describirse en la práctica como estructuras simples, en virtud de sus propiedades de simetría. Así ocurre con las líneas microtira acopladas de manera simétrica (fig. I.2), tanto si el acoplamiento es coplanar -edge coupled microstrips"-, como por superposición -"broadside coupled microstrips"-. En estos

Aproximación cuasiestática I-Métodos de análisis...

casos pueden distinguirse dos modos ortogonales de propagación, modos par e impar, que corresponden, respectivamente, a la presencia de un plano magnético y de un plano conductor en el plano de simetría de la estructura (ver fig.I.2).

Cifñendonos de momento a la línea microtira sobre substrato dieléctrico, han sido muchos y muy variados los métodos de análisis propuestos, métodos que luego se han extendido a otras líneas MIC de configuración planar mas complicada: Transformación conforme [21],[22],[33],[46], [56], [66], diferencias finitas [23], [37], [40], ecuacion integral en el dominio real [24], [28], [38], [42], [48], [51], [59], y en el dominio de Fourier [52], métodos variacionales en el dominio real [57], [62], [65], [74], y en el dominio de Fourier [25], [27], [45], [50], [58], [60], [63], [64], [69], [70], [73], [75], etc.

I.2.a.-Método de la transformación conforme (Método de Wheeler)

Los métodos de transformación conforme, aplican dicha técnica de resolución de problemas de potencial bidimensionales (ver p.ej. [5], [8]) a la obtención del coeficiente de capacidad de estructuras sencillas tipo microtira.

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

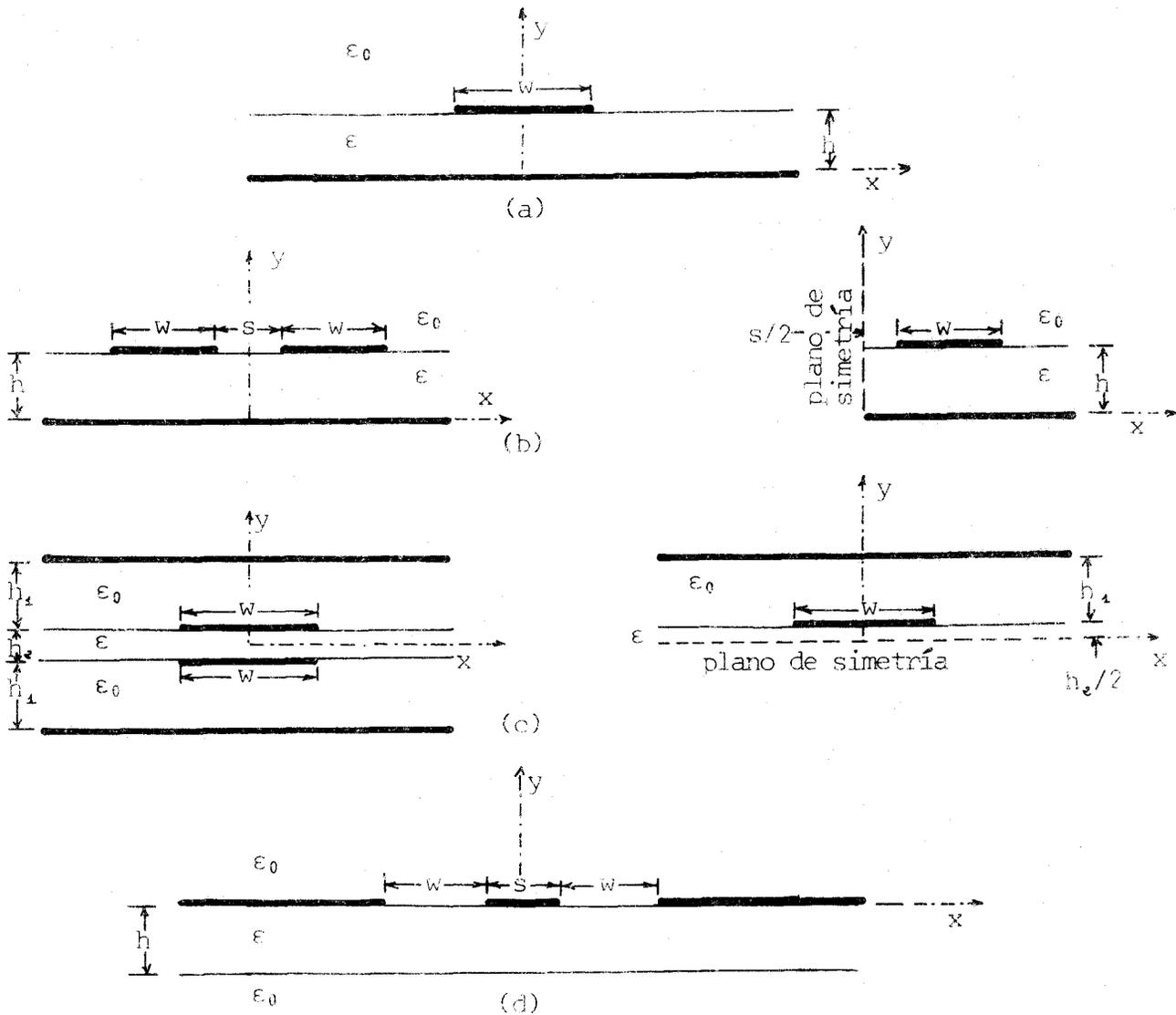


Fig.I.2

(a).- Línea microtira. (b).- Acoplamiento coplanar de líneas microtira y estructura equivalente. (c).- Acoplamiento por superposición de líneas microtira y estructura equivalente. (d).- Ranuras acopladas.

-o0o-

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Por este método son posibles de obtener soluciones exactas para el potencial en las estructuras simples arriba citadas [8]. Wheeler fue el primero en aplicar dicha técnica al análisis de la microtira simple en vacío [21]. Posteriormente, el propio Wheeler [22] aplicó dicha técnica a la obtención de expresiones cerradas para la constante dieléctrica efectiva ($\epsilon_{ef} = C/C^v$) y la impedancia en líneas microtira sobre substrato dieléctrico.

La función de transformación usada por Wheeler [21], [16], es:

$$z = j^n + d \cdot \tanh(z'/2) - z' \quad (I-20)$$

con $d \approx g'$ para $g'/2 \gg 1$, donde g' es el ancho del capacitor de placas paralelas de la fig. I.3.b-d.

Dicha función transforma la estructura microtira de la fig. I.3.a en el capacitor de placas paralelas con paredes magnéticas laterales de la fig. I.3.b. Para estructuras en vacío, el cálculo de C^v es entonces inmediato. Para microtiras sobre substrato dieléctrico el cálculo de C no es inmediato, debido a la presencia de la interfase curva ⑦ - ③, transformada de la interfase aire-dieléctrico de la estructura original. Para calcular C de modo aproximado Wheeler comienza por aproximar el área ① - ⑦ - ③ - ③' en

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

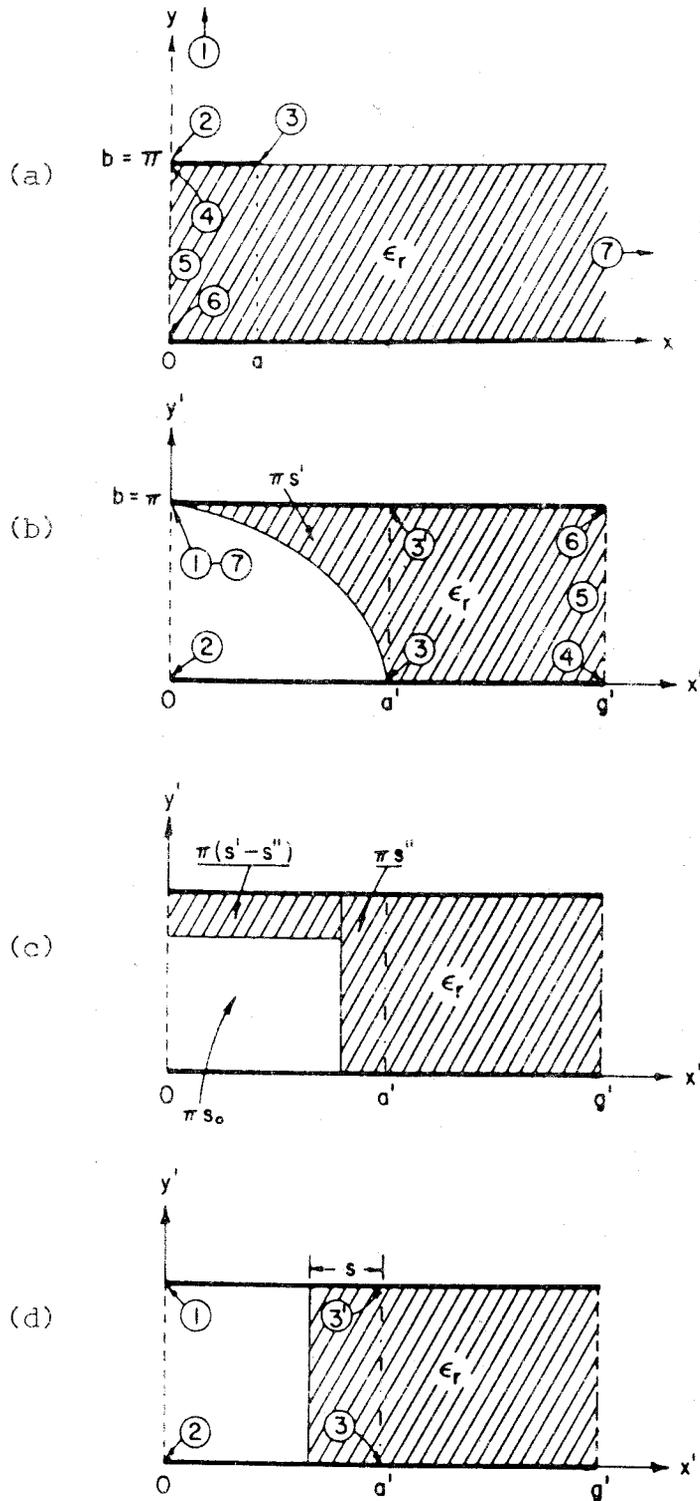


Fig.I.3

Ilustración del método de Wheeler.

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

la fig.I.3.b en dos rectángulos de áreas $\pi s''$ y $\pi(s'-s'')$ respectivamente (fig.I.3.c), con s'' expresado en función de los demás parámetros significativos [16]. Finalmente, ambos rectángulos son aproximados a uno sólo de área πs (fig.I.3.c), obteniéndose:

$$s = s'' + (s' - s'')/\epsilon^* \quad ; \quad \epsilon^* = \epsilon/\epsilon_0 \quad (\text{I-21})$$

Wheeler define entonces el factor de llenado efectivo "q":

$$q = (g' - a' + s)/g' \quad (\text{I-22})$$

a partir del cual, el cálculo de la constante dieléctrica efectiva ϵ_{ef} es inmediato:

$$\epsilon_{ef} = (1-q) + q\epsilon^* \quad (\text{I-23})$$

Wheeler proporciona [16] expresiones para ϵ_{ef} y Z (13.b) en microtiras anchos y estrechos, de gran precisión y que pueden programarse fácilmente en una calculadora de bolsillo. Existen otras formas más sofisticadas de aproximar a partir de la estructura en fig.I.3.b y similares [56], pero las ideas esenciales del método

Aproximación cuasiestática I-Métodos de análisis...

permanecen inalteradas.

El método de la transformación conforme es elegante, preciso y rápido, por lo que las expresiones de Wheeler son muy usadas en el diseño práctico de estructuras. El principal problema del método estriba en la dificultad para extenderlo a estructuras mas complejas, aunque se han hecho esfuerzos en esa dirección [33], resultando prácticamente imposible de aplicar a estructuras multiconductoras no coplanares y/o en medios multidieléctricos estratificados.

I.2.b.-Método de las diferencias finitas

El método de las diferencias finitas [23], [37], [40], se basa en el hecho de que, para toda función que satisfaga la ecuación de Laplace -cómo el potencial eléctrico en una línea de transmisión- el valor de tal función en un punto es justamente el valor medio de dicha función en la frontera de un entorno circular de dicho punto. El método es suficientemente conocido y aplicado en numerosas áreas de la física, así que no nos extenderemos mas en su descripción. El lector interesado encontrará una descripción concisa y clara de lo esencial del método y su aplicación a los problemas de líneas MIC en [16], y tratamientos mas detallados en la bibliografía arriba citada. El método puede también extenderse, con ligeras

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

modificaciones, a líneas sobre substratos anisótropos [40].

Con el método de las diferencias finitas ocurre justo lo contrario que con el método de la transformación conforme: Se trata de un método de gran potencia -prácticamente todos los problemas que pueden presentarse en el análisis cuasuestático de líneas MIC pueden atacarse con dicho método-, pero su uso puede resultar con demasiada frecuencia "excesivo" para el tipo de problemas que ordinariamente es necesario resolver. Se trata además de un método puramente numérico y de gran lentitud comparado con otros métodos semi-analíticos. En la práctica es muy poco usado hoy día.

I.2.c.-Método de la ecuación integral

El método de la ecuación integral en el dominio real [24], [28], [38], [42], [48], [51], [59], exige el conocimiento previo de la función de Green $G(x-x')$, que relaciona el potencial en la interfase con la densidad de carga superficial depositada sobre ésta (fig.I.2.a):

$$V(x) = \int_{-w/2}^{w/2} dx' G(x-x') \rho(x') ; y=h \quad (I-24)$$

para a continuación resolver dicha ecuación integral (I-24), para un valor dado del potencial en la tira.

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

La solución puede hallarse por discretización de la integral [24], [48], [59], o por el método de momentos [9] con funciones base y peso apropiadas. Como el método de la discretización puede considerarse un caso particular del método de momentos con funciones pulso como funciones base y peso, describiremos éste brevemente en su aplicación al problema que nos interesa.

Empezamos por expandir $\rho(x')$ en serie de funciones base $f_i(x')$:

$$\rho(x') = \sum_i a_i f_i(x') \quad (\text{I-25})$$

de donde:

$$V(x) = \sum_i a_i \int_{-w/2}^{w/2} dx' G(x-x') f_i(x') \quad (\text{I-26})$$

A continuación hacemos el producto escalar de (26) por unas funciones peso $w_j(x)$, para obtener:

$$b_j = \sum_i a_i c_{ij} \quad (\text{I-27.a})$$

$$c_{ij} = \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-w/2}^{w/2} dx' w_j(x) G(x-x') f_i(x') \quad (\text{I-27.b})$$

$$b_j = \int_{-w/2}^{w/2} dx w_j(x) V(x) \quad (\text{I-27.b})$$

Aproximación cuasiestática I-Métodos de análisis...

Este sistema de ecuaciones es resuelto para un número finito de funciones base y peso, lo que permite obtener los coeficientes a de (I-25) y, de aquí, la expresión aproximada de $\rho(x')$. Integrando (I-25) se obtiene entonces la carga total sobre la tira, y la capacidad $C=Q/V$.

Cuando se usan funciones sencillas, tales como rectángulos o triángulos, definidas en pequeños subintervalos de la tira como funciones base y peso, estamos resolviendo el problema por el método de la discretización de la integral. Dicho método presenta la desventaja de que es imposible tener en cuenta la singularidad del tipo $1/\sqrt{d}$ ("d" es la distancia al borde de la tira) que tiene $\rho(x')$ (ver p.ej. [6]), aunque es posible tener en cuenta de alguna manera la acumulación de carga en los bordes de la tira mediante una discretización no uniforme [48].

Otro método muy usado consiste en elegir como funciones base y peso el mismo conjunto de funciones -método de Galerkin-. Las funciones base se eligen entonces de modo que aproximen lo mejor posible la distribución de carga esperada en la tira y, al mismo tiempo, permitan calcular las integrales (I-27.b,c) en forma rápida. En este sentido cabe citar el excelente

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

trabajo de Gladwell et al. [38] que usa, para microtiras de semiancho normalizado a la unidad ($w/2=1$), las funciones base y peso:

$$f_i(x') = w_i(x') = T_i(x')/\sqrt{(1-x')} ; -1 < x < 1 \quad (I-28)$$

donde $T_i(x')$ son polinomios de Chebyshev de primer orden. Tales funciones base permiten, a un tiempo, aproximar convenientemente la discontinuidad de la densidad de carga en los bordes de la tira y calcular mediante expresiones analíticas la parte mas importante de las integrales (I-27), como veremos en el párrafo siguiente.

La obtención de la función de Green $G(x-x')$ es un paso previo a la aplicación del método de la ecuación integral. Puede hacerse por el método elemental de separación de variables (ver p.ej. [6]) lo que lleva expresar de G como una integral de Fourier (para líneas abiertas). También puede obtenerse por el método de las imágenes múltiples [48], que tiene la ventaja de separar desde el comienzo la discontinuidad logarítmica en $x=x'$, que corresponde al potencial de una línea de carga infinita en x' , del resto de las contribuciones, continuas en $x=x'$, provenientes de las otras imágenes. Dicha separación permite luego, mediante el uso de las funciones base (I-28), obtener analíticamente la parte de las integrales (I-27) que

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

corresponde al término logarítmico en el desarrollo de G.

El método de la ecuación integral en el dominio de Fourier [52] parte de la integral de convolución (I-24), transformada al dominio de Fourier:

$$V(\alpha) = G(\alpha) \rho(\alpha) \quad (\text{I-29})$$

La transformación de (I-24) en (I-29) aparentemente ahorra una integración en el cálculo de c_{ij} (I-27.b), pero, de hecho, es preciso realizar otra para transformar al dominio de Fourier las funciones base y peso. La verdadera ventaja de trabajar en el dominio de Fourier es que la función de Green transformada $G(\alpha)$ es mucho más fácil de obtener y expresar que su homóloga en el dominio real, por lo que dicha técnica resulta indicada en estructuras estratificadas y/o con conductores a distinto nivel, en cuyo caso la expresión de G en el espacio real puede resultar excesivamente complicada. También es indicada para estructuras encapsuladas, en cuyo caso $G(\alpha)$ en (I-29) debe sustituirse por el término correspondiente del desarrollo del potencial en serie de Fourier, compatible con las condiciones de contorno periódicas que establece la caja:

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$V = \sum_n G_n \tilde{f}_n \begin{cases} \text{sen}(k_n x) \\ \text{cos}(k_n x) \end{cases} \quad (\text{I-30})$$

El método de la ecuación integral, tanto en el espacio real como en el dominio de Fourier, es un método semi-analítico aproximado de gran versatilidad y aplicable a la casi totalidad de líneas MIC para su análisis cuasi-estático. Es un método usado con frecuencia, aunque en los últimos tiempos su uso ha venido remitiendo en favor de los métodos variacionales.

I.2.d.-Métodos variacionales

Los métodos variacionales en el dominio real [57], [62], [65], [71], y en el dominio de Fourier [25], [27], [45], [50], [58], [60], [63], [64], [69], [70], [73], [75], parten del teorema de Thompson (ver p.ej [6] prob. 1.15), para un sistema de conductores en interacción eléctrica. Dicho teorema establece que en un sistema de conductores aislados, las distribuciones de carga superficial en cada conductor evolucionan de modo que la energía electrostática del estado final sea la menor compatible con las condiciones impuestas. De esta manera (ver [6] prob. 1.18), para una carga total Q sobre la tira, y

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

conocida la distribución de carga en la tira $\rho(x)$, la capacidad por unidad de longitud de la microtira C viene dada por la expresión variacional:

$$1/C = 2U/Q^2 = \frac{\int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-w/2}^{w/2} dx' G(x-x') \rho(x) \rho(x')}{\left[\int_{-w/2}^{w/2} dx \rho(x) \right]^2} \quad (I-31)$$

Dado que la energía es mínima, dicha expresión proporciona valores aproximados para C siempre inferiores a su valor real cuando se emplean para $\rho(x)$ expresiones aproximadas. No obstante, el carácter variacional de la expresión (I-31) hace que, aun para aproximaciones burdas de $\rho(x)$, se obtengan buenos valores de C .

La ecuación (I-31) puede expresarse en el dominio de Fourier usando el teorema de Parseval y (I-29):

$$1/C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{G}(\alpha) |\tilde{\rho}(\alpha)|^2}{2\pi Q^2} \quad (I-32)$$

lo que proporciona una expresión variacional para la cota inferior de C .

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Invirtiendo (I-29) puede obtenerse una expresión para la cota superior de C, supuesto conocido el potencial en la tira y a lo largo de toda la interfase aire-dieléctrico:

$$C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{G}^{-1}(\alpha) |\tilde{V}(\alpha)|^2}{2\pi V^e} \quad (\text{I-33})$$

El uso simultáneo de (I-32) y (I-33) permite entonces, no sólo obtener expresiones aproximadas de C, sino también acotar el error cometido [60], [64].

Finalmente cabe añadir que expresiones para la cota superior de C pueden obtenerse también en el dominio real mediante una ligera modificación de la teoría, a partir del campo eléctrico tangencial a la interfase aire-dieléctrico [62]. También es posible extender (I-32) y (I-33) a estructuras encapsuladas, usando (I-30) en lugar de (I-29).

La validez de los resultados obtenidos por este método depende en gran medida de las funciones de prueba elegidas para $\rho(x)$ ó $V(x)$ en las expresiones variacionales (I-31)-(I-33). En los primeros trabajos de Yamashita y Mittra [25], [27], [16], hay una discusión en torno a varias funciones de prueba para $\rho(x)$:

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\rho(x) = |x| \quad ; \quad -1 < x < 1 \quad (\text{I-34.a})$$

$$\rho(x) = 1 - |x|^3 \quad ; \quad -1 < x < 1 \quad (\text{I-34.b})$$

$$\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad -1 < x < 1 \quad (\text{I-34.c})$$

(en unidades arbitrarias y para tiras de semiancho normalizado a la unidad).

La la función de prueba (I-34.a) representa una aproximación realmente burda de $\rho(x)$, que da no obstante buenos resultados para C en virtud del caracter variacional de C -en torno a un 1-5 por ciento de error- lo que da buena idea de la potencia del método. (I-34.c) es la solución exacta para $\rho(x)$ en una tira conductora aislada en el vacío, y da muy buenos resultados en el análisis, aunque el cálculo de su transformada, que implica funciones de Bessel, puede aumentar el tiempo de computación mas allá de lo deseable. (I-34.b) es un compromiso entre la precisión y la rapidez de cálculo, propuesto en [27].

Otra aproximación al problema pasa por un desarrollo en serie de $\rho(x)$ en función de ciertas funciones base $f_i(x)$:

$$\rho(x) = a_0 + \sum_i a_i f_i(x) \quad (\text{I-35})$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

para luego minimizar (I-32) mediante el método de Rayleigh-Ritz, con los coeficientes a_i como parámetros, estando a_0 fijado en función de la carga total Q^0 . Aparte del desarrollo en serie de Taylor [64], una buena elección para las funciones base, que tiene en cuenta la singularidad de $\rho(x)$ en los bordes de la tira, es usar para $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x) ; -1 < x < 1 \quad (\text{I-36.a})$$

o bien:

$$f_1(x) = 1/\sqrt{1+x} + 1/\sqrt{1-x} ; -1 < x < 1 \quad (\text{I-36.b})$$

[67], [68], [70], [73], funciones estas cuyas transformadas pueden ponerse en términos de las funciones seno integral, $Si(\alpha)$ y coseno integral, $Ci(\alpha)$, o en términos de las integrales de Fresnel respectivamente, en lugar de las funciones de Bessel que implica el uso de (I-34.c), lo que acorta significativamente el tiempo de computación. El lector puede encontrar amplias descripciones del empleo del método de Rayleigh-Ritz con las funciones citadas en [67], [68].

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Como función de prueba para el potencial en (33), se ha usado [50], [60], [64], el desarrollo:

$$V(x) = 1 \quad ; \quad -1 < x < 1 \quad (I-37.a)$$

$$V(x) = \sum_{n=1}^N a_n / x^n ; \quad |x| > 1 \quad (I-37-b)$$

(en unidades arbitrarias y para tiras de semiancho normalizado a la unidad)

No obstante, el empleo de la cota superior da siempre peores resultados a la hora de calcular la capacidad en la microtira simple, debido a la dificultad para aproximar correctamente el potencial a lo largo de toda la interfase aire-dieléctrico. La técnica de la cota superior resulta, sin embargo, apropiada para estructuras como las ranuras acopladas (fig.I.2.d), que presentan una interfase aire-dieléctrico mucho menos extensa [32]. En tal tipo de estructuras una buena elección de la función de prueba para el potencial en la ranura es:

$$V(x) = a_0 + a_1 \sqrt{1+x} + a_2 \sqrt{1-x} \quad (I-38)$$

donde se toma el origen de coordenadas en el centro de la ranura y se supone ésta de semiancho normalizado a la unidad. Dicha función de prueba simula el comportamiento

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

del potencial en los bordes de la ranura de acuerdo con su desarrollo asintótico.

Otras funciones prueba usadas en las técnicas variacionales [65], son las ya mencionadas (I-28). También es muy usada (I-34.c), que equivale a usar (I-28) sólo hasta orden cero [71]. Las técnicas variacionales en el dominio real se han usado también para obtener expresiones cerradas aproximadas de la capacidad en líneas tipo microtira [57].

Los métodos variacionales son, hoy por hoy, los más populares en la literatura, debido a su sencillez, versatilidad, escaso tiempo de computación y alta precisión. Las tres primeras cualidades las comparte con el método de la ecuación integral, pero, a igual tiempo de computación, el carácter variacional del método, hace que quepa siempre esperar una mayor precisión. Una ventaja adicional es que permite, mediante el uso simultáneo de las cotas superior e inferior, conocer exactamente el máximo error cometido.

Al igual que en el método de la ecuación integral, el método variacional en el dominio de Fourier presenta la ventaja adicional de la relativamente fácil computación de $\tilde{G}(\alpha)$ -por comparación con su homónima en el dominio real $G(x-x')$ - siendo dicho método especialmente indicado en

Aproximación cuasiestática I-Métodos de análisis...

estructuras estratificadas y/o con tiras conductoras a distinto nivel.

I.2.e.-Técnicas de Wiener-Hopf (Método de los residuos)

No sería justo terminar esta paqueña panorámica de los principales métodos de análisis de líneas de transmisión planares tipo microtira, sin hacer mención de las técnicas derivadas del método de Wiener-Hopf para la resolución de ecuaciones integrales, [30], [16]. Se trata de un método exacto de resolución de la ecuación (I-24) o (I-29), que exige el conocimiento de los polos y ceros de $\tilde{G}(\alpha)$ en el plano complejo. Es una técnica elegante y precisa que presenta como principal ventaja una considerable reducción del tiempo de computación, y que permite obtener al mismo tiempo soluciones para la densidad de carga en la tira y para el potencial en la interfase aire-dieléctrico. Su principal inconveniente, al igual que ocurre con las técnicas de transformación conforme, es la dificultad para extenderlo a estructuras más complejas que la microtira simple. En consecuencia es un método poco usado en el análisis cuasiestático, estando el verdadero campo de aplicación de dichas técnicas en el análisis de los modos superiores en las líneas tipo microtira, cuando el desconocimiento previo, siquiera aproximado, de las corrientes en la microtira, hace muy difícil el uso de

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

métodos aproximativos como el de momentos.

I.3.-Análisis de estructuras en medios anisótropos

Los métodos para el análisis de estructuras simples sobre sustratos anisótropos siguen las mismas líneas generales ya esquematizadas en el párrafo anterior.

El método de las diferencias finitas [40] puede aplicarse con ligeras modificaciones que tienen en cuenta que la ecuación a resolver (ec. de Laplace para el potencial), es ahora:

$$\vec{\nabla}_t \cdot (\bar{\bar{\epsilon}}_t \cdot \vec{\nabla}_t V) = 0 \quad (\text{I-39})$$

donde $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ es la proyección del tensor de anisotropía dieléctrica en el plano transversal.

Los métodos variacionales y de momentos son también de aplicación, previo conocimiento de la función de Green, lo que constituye la única dificultad para su aplicación.

Una forma interesante de atacar el problema de la determinación de la matriz de capacidades en una línea de transmisión planar sobre sustrato anisótropo, es mediante la transformación de dicho problema en otro isotropo equivalente [44], [54], [55], [60]. A este respecto puede

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

demostrarse [54] que para todo problema electrostático bidimensional, existe una correspondencia punto a punto entre una región anisótropa cualquiera cuyo tensor de anisotropía sea:

$$\overline{\epsilon}_t = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^* & \epsilon_{xy}^* \\ \epsilon_{xy}^* & \epsilon_{yy}^* \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_\xi^* \cos^2 \theta + \epsilon_\eta^* \sin^2 \theta & (\epsilon_\xi^* - \epsilon_\eta^*) \sin \theta \cos \theta \\ (\epsilon_\xi^* - \epsilon_\eta^*) \sin \theta \cos \theta & \epsilon_\eta^* \cos^2 \theta + \epsilon_\xi^* \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{I-40})$$

(donde ϵ_η^* y ϵ_ξ^* son los valores principales de $\overline{\epsilon}_t$, y θ el ángulo formado por la dirección principal correspondiente a ϵ_η^* y el eje "y"), y otra isotrópica de constante dieléctrica equivalente

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_{xx}^* \epsilon_{yy}^* - (\epsilon_{xy}^*)^2} = \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_\eta^* \epsilon_\xi^*} \quad (\text{I-41})$$

que al punto $P(x, y)$ hace corresponder el punto $P'(x', y')$ dado por (fig. I.4.a):

$$y' = \left[\sqrt{(\epsilon_{xx}^* / \epsilon_{yy}^*) - (\epsilon_{xy}^* / \epsilon_{yy}^*)^2} \right] y = (\epsilon_{eq} / \epsilon_{yy}^*) y \quad (\text{I-42.a})$$

$$x' = x - (\epsilon_{xy}^* / \epsilon_{yy}^*) y \quad (\text{I-42.b})$$

de modo que:

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

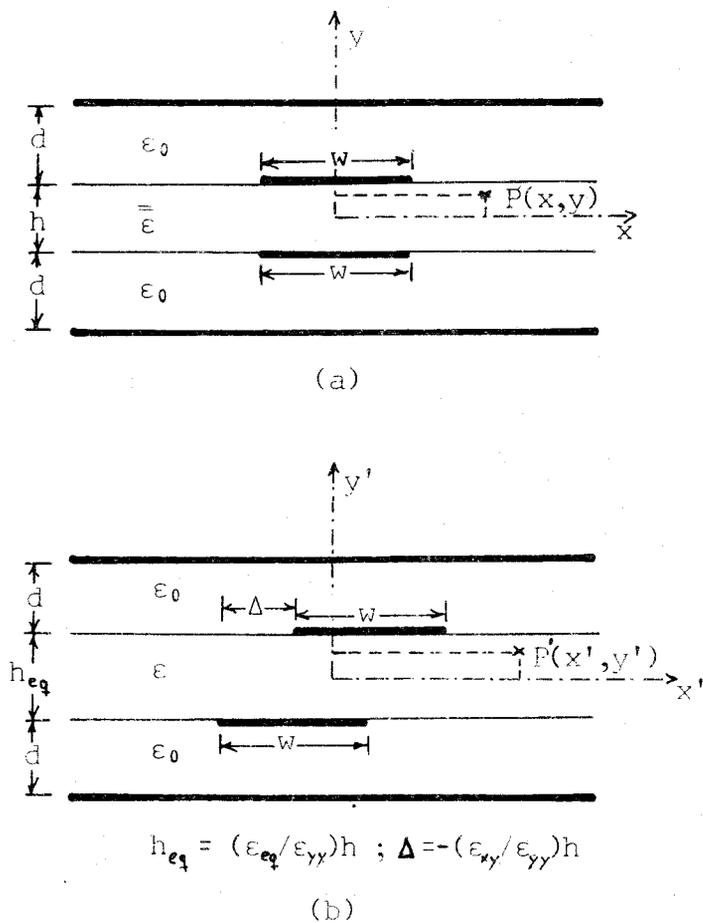


Fig.I.4

(a).- Acoplamiento por superposición de dos microtiras con lámina dieléctrica anisótropa de separación.
(b).- Estructura isotrópica equivalente para el cálculo de las capacidades.

-o0o-

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\text{si } \rho(x,y) = \rho'(x',y') \text{ entonces } V(x,y) = V'(x',y') \quad (\text{I-43})$$

Así, p.ej., para el caso de una línea formada por dos microtiras acopladas por superposición -"broadside coupled microstrip"-, la matriz de capacidades C de la estructura coincide con la de la estructura equivalente mostrada en la fig.I.4.b.

Una vez efectuada la transformación, la matriz de capacidades de la estructura equivalente se calcula por cualquiera de los métodos citados en el párrafo anterior: Transformación conforme [66], ecuación integral [59], variacionales [60], etc.

I.4.-Líneas en medios estratificados

El análisis de líneas en medios estratificados implica la elaboración de algoritmos para el cálculo de la función de Green que relaciona los potenciales con las densidades de carga en las diferentes interfases susceptibles de soportar tiras conductoras (fig.I.5.a). Dicha función de Green puede expresarse en el dominio de Fourier por medio de:

$$\tilde{V}(\alpha, y) = \tilde{G}(y, \alpha; y') \tilde{\rho}(\alpha, y') \quad (\text{I-44})$$

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

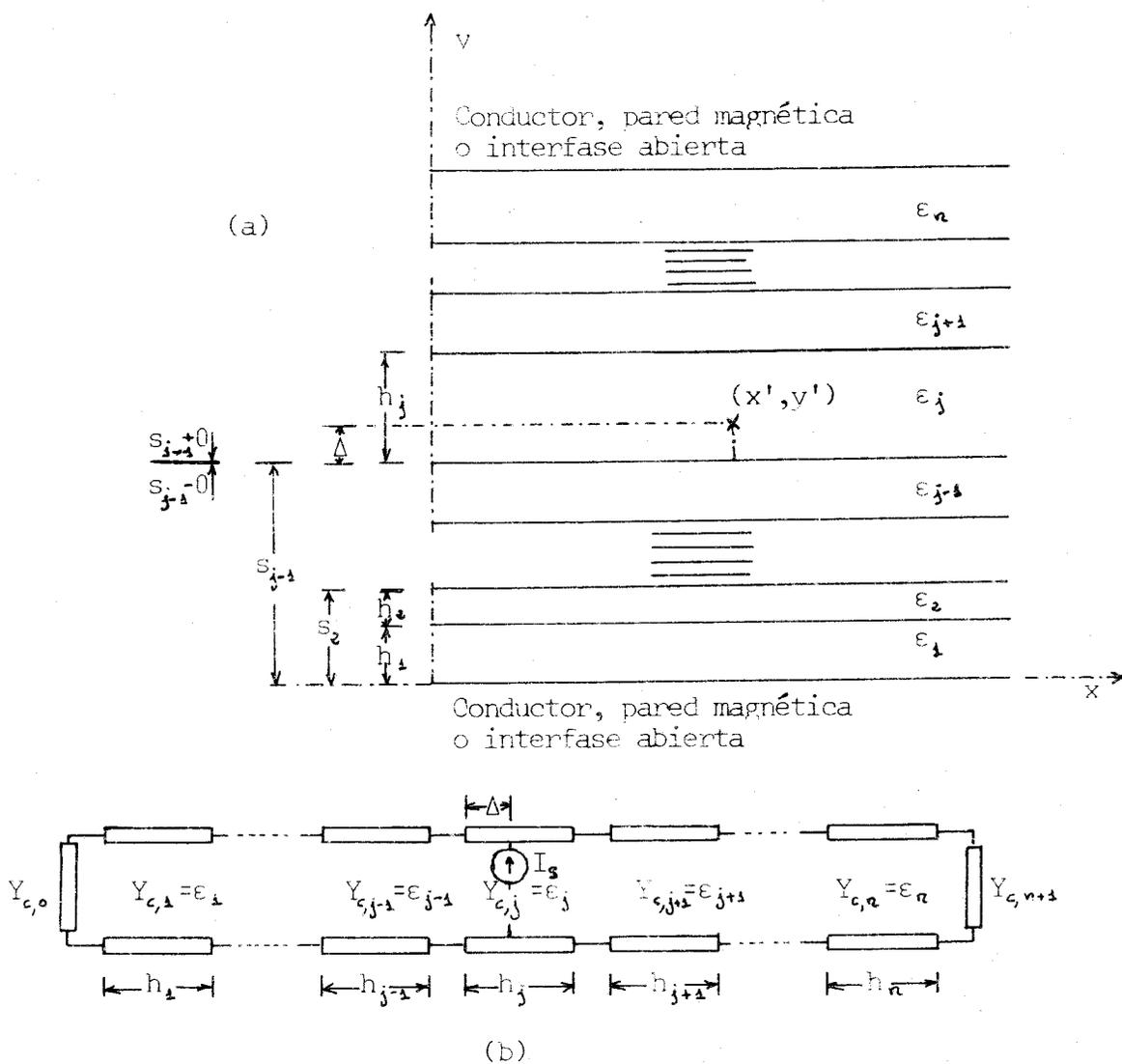


Fig. I.5

Ilustración de método TTL para la obtención de la función de Green en estructuras estratificadas. (a).- Estructura dieléctrica estratificada. (b).- Línea de transmisión equivalente.

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

Para la obtención de \tilde{G} en medios isotrópicos, el método más comúnmente usado es el de la "línea de transmisión transversal", o método TTL [29], [31], [47] que transforma el problema electrostático de la fig.I.5 en un problema de traslación de admitancias en la línea de transmisión equivalente de la fig.I.5.b:

Sea $V(x,y;x',y')$ el potencial creado en (x,y) por una densidad de carga $\rho(x')$ en $y=y'$.

$$\nabla_{\epsilon}^2 V(x,y;x',y') = (1/\epsilon) \rho(x') \delta(x-x') \quad (\text{I-45})$$

Las condiciones de contorno en las interfases de la fig.I.5.a son:

$$V(x, s_i - 0) = V(x, s_i + 0) \quad (\text{I-46.a})$$

$$\epsilon_i \frac{\partial}{\partial y} [V(x, s_i - 0)] = \epsilon_{i+1} \frac{\partial}{\partial y} [V(x, s_i + 0)] \quad (\text{I-46.b})$$

La ecuación (I-45) puede expresarse en el dominio de Fourier según:

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right] V(\alpha, y) = -(1/\varepsilon) \tilde{\rho}(\alpha) \delta(y-y') \quad (\text{I-47})$$

La función de Green $\tilde{G}(\alpha, y)$ debe relacionar $\tilde{V}(\alpha, y)$ con $\tilde{\rho}(\alpha)$ según $\tilde{V}(\alpha, y) = \tilde{G}(\alpha, y) \tilde{\rho}(\alpha)$, por tanto $\tilde{G}(\alpha, y)$ viene definida por la ecuación diferencial

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right] G(\alpha, y) = -(1/\varepsilon) \delta(y-y') \quad (\text{I-48})$$

y las condiciones de contorno

$$\tilde{G}(\alpha, s_i - 0) = \tilde{G}(\alpha, s_i + 0) \quad (\text{I-49.a})$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial y} [\tilde{G}(\alpha, s_i - 0)] = \varepsilon_{i+1} \frac{\partial}{\partial y} [\tilde{G}(\alpha, s_i + 0)] \quad (\text{I-49.b})$$

Consideremos ahora el problema de la línea de transmisión de la fig. I.5.b, con una fuente de intensidad I_s en $y=y'$. La ecuación diferencial para el potencial en la línea es [47]:

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma^2 \right] V = -(\gamma/Y_c) I_s \delta(y-y') \quad (\text{I-50})$$

donde γ es la constante de propagación a lo largo de toda la línea de la figura I.1.b, e Y_c la admitancia característica de cada sección de la línea. Por otro lado, en las interfases en que Y_c cambia de valor, las condiciones de contorno son:

$$V_i = V_{i+1} \quad (\text{I-51.a})$$

e $I_i = I_{i+1}$, que puede también expresarse como:

$$Y_{c,i} \frac{\partial}{\partial y} V = Y_{c,i+1} \frac{\partial}{\partial y} V \quad (\text{I-51.b})$$

Comparando (I-48)-(I-49) con (I-51)-(I-52), vemos que $\tilde{G}(\alpha, y)$ se corresponde con V para $Y_{c,i} = \epsilon_i$, $\gamma = \alpha$ e $I_s = 1/\alpha$.

De este modo el problema de encontrar $\tilde{G}(\alpha, y)$ se transforma en el problema de encontrar $V(y)$ en la línea para una excitación $I_s = 1/\alpha$ en $y=y'$, problema que puede resolverse mediante las fórmulas elementales de traslación

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

de admitancias en líneas de transmisión. En cuanto a las condiciones de contorno al principio y al final de la línea de la fig.I.5.b se corresponden con las condiciones de contorno en las interfases $i=0$ e $i=N$ de la fig.I.5.a mediante [47]:

conductor ---- cortocircuito
pared magnética ---- circuito abierto
interfase abierta ---- línea infinita de admitancia $Y_c = \epsilon_0$

El método TTL es inaplicable a estructuras estratificadas con capas anisótropas arbitrarias, por cuanto la correspondencia entre las ecuaciones queda rota al introducirse una constante dieléctrica tensorial. No obstante siempre es posible transformar la estructura anisótropa en su estructura isotrópica equivalente y aplicar entonces el método TTL.

Una vez obtenida la función \tilde{G} (I-44), los métodos de la ecuación integral y variacionales son directamente aplicables al cálculo de C para, en principio, cualquier línea planar en un medio estratificado de no importa cuantas capas. Tal generalización se realiza mediante la introducción de la subrutina para el cálculo de G en los programas ya existentes para estructuras sencillas con igual disposición de los conductores. No ocurre lo mismo

Aproximación cuasiestática
I-Métodos de análisis...

con los métodos de la transformación conforme y diferencias finitas, que resultan mucho mas difíciles de generalizar.

I.5.-Conclusiones

El estudio de líneas de transmisión inhomogéneas en aproximación cuasiestática representa un método potente y ampliamente utilizado en el diseño de circuitos integrados de microondas. Su uso sólo está limitado en frecuencia por el tamaño relativo -necesariamente mucho menor que uno- de las dimensiones transversales de la línea frente a la longitud de onda típica.

Entre los diferentes métodos usados para el análisis cuasiestático de líneas de transmisión planares, hemos optado por el método variacional en el dominio espectral, debido a su gran versatilidad, precisión y sencillez conceptual. Dicho método será extendido a lo largo de la primera parte de la presente memoria al análisis de estructuras multiconductoras de configuración planar en medios dieléctricos estratificados de anisotropía arbitraria.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

II-TEORIA DE LA APROXIMACION CUASI-ESTATICA

A lo largo del presente capítulo presentaremos los fundamentos teóricos del análisis cuasiestático de líneas multiconductoras en medios inhomogéneos de anisotropía arbitraria. Se pretende con ello generalizar, convenientemente a los objetivos generales de nuestro estudio, las expresiones clásicas que dan los parámetros cuasiestáticos de una línea en función de sus características estáticas de capacidad y autoinducción por unidad de longitud. Se hace también un estudio especial del caso en que el medio es no-magnético ($\bar{\mu} = \mu_0$ a lo largo de toda la línea), de especial interés para nuestro estudio.

Finalmente se hace un análisis cualitativo del comportamiento cuasiestático de las principales estructuras objeto de nuestro análisis, incluyendo el análisis cualitativo de los modos de propagación cuasiestáticos, en un acoplamiento arbitrario de dos tiras conductoras arbitrariamente intercaladas en las interfases de un medio dieléctrico multicapa de anisotropía general.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

II.1.-Aproximación cuasi-estática en líneas multiconductoras en medios anisótropos

Consideremos la estructura esquematizada en la fig.II.1. Se trata de un línea de transmisión compuesta por $N+1$ conductores perfectos de sección transversal constante en un medio inhomogeneo y anisótropo, cuyos tensores permitividad dielectrica y permeabilidad megnética $\bar{\mu}(r,\omega)$ y $\bar{\epsilon}(r,\omega)$, son funciones arbitrarias de la frecuencia, la posición en el plano transversal (plano x-y) y, eventualmente, de ciertos parámetros externos, como un campo magnetostático, etc. Además suponemos que la conductividad estática del medio es cero, por lo que las pérdidas pueden incluirse en la parte imaginaria de $\bar{\epsilon}$ o $\bar{\mu}$ [4].

Suponemos a continuación que todas las magnitudes físicas significativas pueden desarrollarse en serie de potencias de la frecuencia:

$$A = A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2 + \dots \quad (\text{II-1})$$

Si imponemos una propagación del tipo $A=A(x,y)\exp(-j\beta z+j\omega t)$, y tenemos en cuenta las relaciones (I-3), (I-4) y (I-5) para los fasores complejos y para β , deducimos que los coeficientes pares en el desarrollo de

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

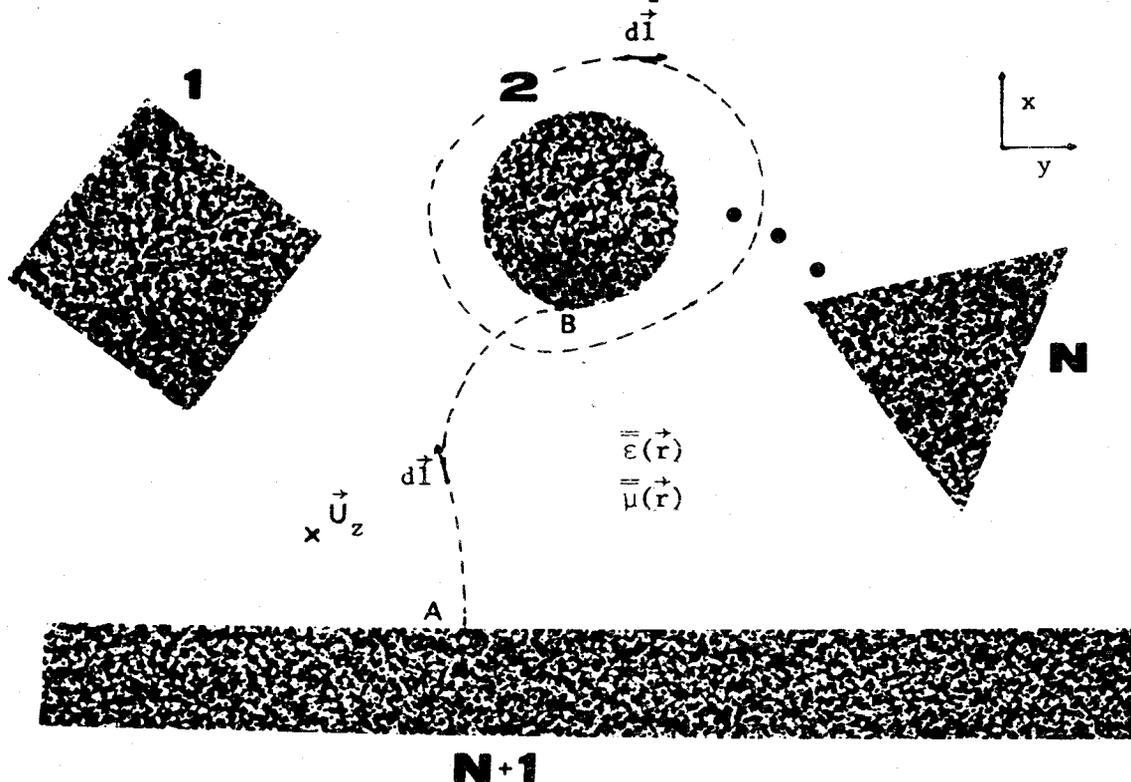


Fig.II.1

Línea multiconductora en un medio anisótropo inhomogéneo.

-o0o-

los campos deben ser todos reales y los impares imaginarios. Por el contrario, en el desarrollo de β , los coeficientes pares deben ser imaginarios, y los impares reales.

Introduciendo la expansión (II-1) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos las siguientes ecuaciones para los coeficientes de orden ν :

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\nu = j\vec{U}_z \times \left(\sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{E}_m \right) - j\vec{B}_{\nu-1} \quad (\text{II-2.a})$$

Aproximacion cuasi-estática
Teoria de la aproximación

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_\nu = j\vec{u}_z \times \left(\sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{H}_m \right) + j\vec{D}_{\nu-1} \quad (\text{II-2.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{D}_\nu = j\vec{u}_z \cdot \left(\sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{D}_m \right) \quad (\text{II-2.c})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_\nu = j\vec{u}_z \cdot \left(\sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{B}_m \right) \quad (\text{II-2.d})$$

donde

$$\vec{D}_\nu = \sum_{k+m=\nu} \bar{\epsilon}_k \cdot \vec{E}_m \quad (\text{II-3.a})$$

$$\vec{B}_\nu = \sum_{k+m=\nu} \bar{\mu}_k \cdot \vec{H}_m \quad (\text{II-3.b})$$

(los subindices " ν " " k " y " m " indican el orden de los coeficientes en el desarrollo (II-1) de \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} , β , $\bar{\epsilon}$, y $\bar{\mu}$).

De (55) se deduce que las propiedades indicadas mas arriba para los términos del desarrollo de los campos, valen también para el desarrollo de los tensores $\bar{\epsilon}$ y $\bar{\mu}$.

Respecto a las ecuaciones (II-2), no forman en realidad un conjunto de ecuaciones independientes, pues es fácil ver que las dos últimas se deducen de las dos primeras en orden $\nu+1$.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

El sistema (II-2) puede a su vez separarse en parte transversal y longitudinal de análoga manera que en la sec.I.1, ec.(I-2) [74]:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{t,\nu} = -jB_{z,\nu-1} \vec{u}_z \quad (\text{II-4.a})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_{z,\nu} = -j \sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{E}_{t,m} - j\vec{u}_z \times \vec{B}_{t,\nu-1} \quad (\text{II-4.b})$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_{t,\nu} = -jD_{z,\nu-1} \vec{u}_z \quad (\text{II-4.c})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_{z,\nu} = -j \sum_{k+m=\nu} \beta_k \vec{H}_{t,m} + j\vec{u}_z \times \vec{D}_{t,\nu-1} \quad (\text{II-4.d})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{D}_{t,\nu} = j \sum_{k+m=\nu} \beta_k D_{z,m} \quad (\text{II-4.e})$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_{t,\nu} = j \sum_{k+m=\nu} \beta_k B_{z,m} \quad (\text{II-4.f})$$

(el subíndice "t" indica, como es usual, la proyección en el plano transversal x-y, y el subíndice "z" la componente z). Nuevamente las dos últimas ecuaciones de (II-4) son combinaciones lineales de las primeras.

Si consideramos $\nu=0$ en (II-4), obtenemos las ecuaciones "estáticas":

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{t,0} = 0 \quad (\text{II-5.a})$$

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_{t,0} = 0 \quad (\text{II-5.b})$$

$$E_{z,0} = H_{z,0} = 0 \quad (\text{II-5.c})$$

Los campos estáticos transversales pueden derivarse, en virtud de (II-5), de los potenciales eléctricos y magnéticos transversales $V(x,y)$ y $\Psi(x,y)$ mediante:

$$\vec{E}_{t,0} = -\vec{\nabla}_t V(x,y) ; \quad \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\bar{\epsilon}}_t \cdot \vec{\nabla}_t V = 0 \quad (\text{II-6.a})$$

$$\vec{H}_{t,0} = -\vec{\nabla}_t \Psi(x,y) ; \quad \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\bar{\mu}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \Psi = 0 \quad (\text{II-6.b})$$

Si \vec{u}_z coincide con un eje principal de $\vec{\bar{\epsilon}}_0$ y de $\vec{\bar{\mu}}_0$ es también cierto que $D_{z,0} = B_{z,0} = 0$. Si $\vec{\bar{\epsilon}}$ y $\vec{\bar{\mu}}$ son reales y u_z coincide con un eje principal de ambos, todas las componentes transversales de los campos complejos deben ser funciones pares (y reales) de la frecuencia, mientras que todas las componentes longitudinales deben ser impares (e imaginarias), pues en tal caso son válidos los mismos razonamientos que en la sec.I.1. En el caso más general, las componentes longitudinales y transversales de los campos están acopladas a través de (II-3).

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Integrando ahora la eq. (II.5.a) entre A y B (ver fig.II.1) y (II-5.b) a lo largo de una curva cerrada que encierre al conductor "i", obtenemos de forma similar a (I-11):

$$\beta_1 V_i = \sum_j L_{ij} I_j \quad \text{o} \quad \beta_1 \vec{V} = \vec{L} \cdot \vec{I} \quad (\text{II-7.a})$$

$$\beta_2 I_i = \sum_j C_{ij} V_j \quad \text{o} \quad \beta_2 \vec{I} = \vec{C} \cdot \vec{V} \quad (\text{II-7.b})$$

donde β_1 es el primer coeficiente en el desarrollo de β en función de ω (II-1), V_i el potencial electrostático en el conductor "i", referido al N+1, I_i la intensidad de corriente magnetostática que circula por el conductor "j", y C_{ij} y L_{ij} los elementos de las matrices de capacidad e inducción magnética respectivamente.

La ecuación (II-7) puede también expresarse de forma análoga a (I-12):

$$\beta_{1,n}^2 \vec{V}_n = \vec{L} \cdot \vec{C} \cdot \vec{V}_n \quad (\text{II-8.a})$$

$$\beta_{2,n}^2 \vec{I}_n = \vec{C} \cdot \vec{L} \cdot \vec{I}_n \quad (\text{II-8.b})$$

donde el subíndice "n" se refiere a cada una de las N soluciones del problema de autovalores (II.8), cada una de las cuales corresponde a un modo quasi-estático de

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

propagación.

Una vez llegados aquí, queda por demostrar que las soluciones para $\beta_{s,n}^e$ en (II-8.a) y (II-8.b) son las mismas, sin lo cual todo lo dicho carecería de sentido. Además las soluciones para $\beta_{s,n}^e$ deben ser reales y positivas para que exista propagación.

Para demostrarlo comencemos por notar que, si la conductividad estática del medio se anula, como supusimos al comienzo de esta sección, entonces los términos independientes del desarrollo de $\bar{\epsilon}$ y $\bar{\mu}$ en potencias de ω - $\bar{\epsilon}_0$ y $\bar{\mu}_0$ -, deben ser tensores reales y simétricos, ya que todos los términos que implican pérdidas han de ser función de la frecuencia [4]. A partir de aquí puede demostrarse que las matrices estáticas \bar{C} y \bar{L} son a su vez simétricas -ver Apéndice A-. Por otro lado \bar{C} y \bar{L} deben ser también definidas positivas, como se deduce sin más de las expresiones de la energía electrostática y magnetostática, que son cantidades intrínsecamente positivas, en función de las mencionadas \bar{L} y \bar{C} . Finalmente, del carácter definido positivo de \bar{C} y \bar{L} se deduce [26] que $\bar{C}\cdot\bar{L}$ y $\bar{L}\cdot\bar{C}$ son diagonalizables con el mismo conjunto de autovalores, siendo éstos reales y positivos.

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Evidentemente los autovectores de $\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{L}}$ y de $\overline{\overline{L}} \cdot \overline{\overline{C}}$ no tienen por que ser los mismos -excepcionalmente lo serán si $\overline{\overline{C}}$ y $\overline{\overline{L}}$ conmutan-. Dichos vectores forman dos conjuntos de N vectores linealmente independientes que corresponden, según (II-8), a las intensidades y potenciales de cada conductor en cada uno de los N modos cuasiestáticos que se propagan a lo largo de la estructura.

Cuando los autovalores $\beta_{s,n}^2$ son todos distintos -lo que constituye el caso mas corriente-, ambos conjuntos son mutuamente ortogonales:

$$\vec{V}_n \cdot \vec{I}_m = 0 \text{ si } n \neq m \quad (\text{II-9})$$

En efecto, dado que $\overline{\overline{C}}$ y $\overline{\overline{L}}$ son simétricas, $\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{L}}$ es la traspuesta de $\overline{\overline{L}} \cdot \overline{\overline{C}}$. Multiplicando escalarmente (II-8.a) por \vec{I}_m y (II-8.b) por \vec{V}_n obtenemos:

$$\beta_{s,n}^2 \vec{I}_m \cdot \vec{V}_n = \vec{I}_m \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \vec{V}_n \quad (\text{II-10.a})$$

$$\beta_{s,m}^2 \vec{V}_n \cdot \vec{I}_m = \vec{V}_n \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{I}_m = \vec{I}_m \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \vec{V}_n \quad (\text{II-10.b})$$

y restando:

$$(\beta_{s,n}^2 - \beta_{s,m}^2) \vec{V}_n \cdot \vec{I}_m = 0 \quad (\text{II-11})$$

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

lo que para $\beta_{3,n}^2 \neq \beta_{3,m}^2$ demuestra que $\vec{V}_n \cdot \vec{I}_m = 0$ si $n \neq m$.

Por otro lado, cuando los autovalores no son todos distintos, los autovectores no están unívocamente determinados y siempre pueden elegirse de modo que se cumpla la relación de ortogonalidad (II-9).

El acoplamiento entre los autovectores \vec{V}_n e \vec{I}_n puede expresarse del modo más general mediante una matriz de impedancia definida por:

$$\vec{V}_n = \bar{\bar{Z}} \cdot \vec{I}_n \quad (\text{II-12})$$

Para obtener $\bar{\bar{Z}}$ sustituimos (II-12) en (II-8):

$$\beta_{3,n} \bar{\bar{Z}} \cdot \vec{I}_n = \bar{\bar{L}} \cdot \vec{I}_n \quad (\text{II-13.a})$$

$$\beta_{3,n} \vec{I}_n = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{Z}} \cdot \vec{I}_n \quad (\text{II-13.b})$$

(II-13.a) puede escribirse en la forma $\beta_{3,n} \vec{I}_n = \bar{\bar{Z}}^{-1} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{I}_n$, lo que comparando con (II-13.b) demuestra que $\bar{\bar{Z}}^{-1} \cdot \bar{\bar{L}} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{Z}}$, o bien [32], [61]:

$$\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{Z}} \quad (\text{II-14})$$

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Nótese que $\bar{\bar{Z}}$ no depende para nada del modo "n" considerado, de modo que (II-12) expresa la relación entre \vec{V} e \vec{I} par una excitación arbitraria de la guía. Por otro lado, tomando la traspuesta de (II-14) y teniendo en cuenta la simetría de \bar{L} y \bar{C} , se deduce que $\bar{\bar{Z}}$ debe ser también simétrica.

Sólo en el caso particular en el que \bar{C} y \bar{L} conmutan, los autovectores de $\bar{C}\cdot\bar{L}$ y $\bar{L}\cdot\bar{C}$, \vec{I}_n y \vec{V}_n , son iguales salvo un factor constante que depende sólo de "n". En tal caso los autovectores de la matriz $\bar{\bar{Z}}$ coinciden con \vec{V}_n e \vec{I}_n , y sus autovalores correspondientes, Z_n , constituyen las impedancias de cada modo. Dichos modos los llamaremos "escalares", por cuanto basta un sólo número Z_n para definir la relación entre los potenciales e intensidades de cada conductor, dados por los autovectores \vec{V}_n e \vec{I}_n .

$$\vec{V}_n = Z_n \vec{I}_n \quad (\text{II-15})$$

basta pues que \bar{L} y \bar{C} conmuten para que todos los modos de la línea sean escalares. En general tendremos un modo escalar cada vez que los autovectores de $\bar{L}\cdot\bar{C}$ y $\bar{C}\cdot\bar{L}$ correspondientes a un mismo autovalor β_{3n}^2 , coincidan.

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Las ecuaciones (II-12) y (II-14) generalizan las ecuaciones elementales (I-12) y (I-13.b).

II.2.-Líneas de transmisión en medios no magnéticos

Quando el medio carece de propiedades magnéticas, la matriz de inducción magnética coincide con la de la estructura en vacío $\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{L}}^v$. Además, dado que la línea en vacío propaga modos T.E.M. puros a la velocidad de la luz c [4], de las ecuaciones (II-8) para el caso particular de una línea en vacío se deduce que:

$$\bar{\bar{L}}^v \cdot \bar{\bar{C}}^v = 1/c^2 \quad (\text{II-16})$$

donde $\bar{\bar{C}}$ es la matriz de capacidad para la estructura en vacío. Teniendo esto en cuenta (II-8) y (II-14) se transforman en

$$c^2 \beta_{3,n}^2 \vec{V}_n = (\bar{\bar{C}}^v)^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{V}_n \quad (\text{II-17.a})$$

$$c^2 \beta_{3,n}^2 \vec{I}_n = \bar{\bar{C}} \cdot (\bar{\bar{C}}^v)^{-1} \cdot \vec{I}_n \quad (\text{II-17.b})$$

y

$$(\bar{\bar{C}}^v)^{-1} = c^2 \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{Z}} \quad (\text{II-18})$$

Aproximación cuasi-estática Teoría de la aproximación

análogamente a como vimos en la sección anterior, cuando \bar{C} y \bar{C}^v conmutan, puede definirse una impedancia escalar para cada modo.

II.3.-Ejemplos

En la presente sección aplicaremos la teoría arriba descrita al análisis cualitativo de la propagación en líneas de configuración planar, supuesto que se pueda aplicar la aproximación cuasi-estática.

II.3.a.-Acoplamiento de dos microtiras

Consideremos en primer lugar el acoplamiento de dos líneas de transmisión, es decir el caso $N=2$. Para fijar ideas consideraremos el caso, muy frecuente en la tecnología M.I.C., de dos líneas tipo microtira acopladas en un medio dieléctrico estratificado (fig.II.2).

Evidentemente, para el caso general de la fig.II.2, las matrices \bar{C} y \bar{C}^v no conmutan, no obstante empezaremos por considerar el importante caso particular en que \bar{C} y \bar{C}^v conmutan. Para que \bar{C} y \bar{C}^v conmuten es preciso que:

$$C_{3,2}^v (C_{2,2} - C_{3,3}) = C_{3,2} (C_{2,2}^v - C_{3,3}^v) \quad (\text{II-19})$$

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

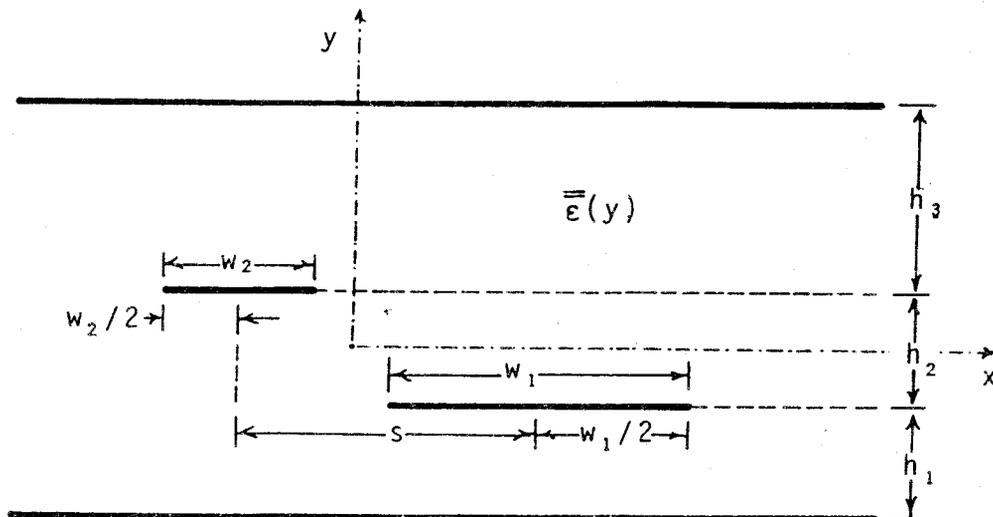


Fig.II.2

Microtiras acopladas en un medio estratificado de anisotropía dieléctrica.

-o0o-

como se demuestra por cálculo directo.

El modo usual de conseguir que se cumpla (II-19) es mediante estructuras simétricas tales que $C_{3,3} = C_{2,2}$ y $C_{3,3}^v = C_{2,2}^v$. Los dos tipos de estructuras simétricas tales que $C_{3,3} = C_{2,2}$ y $C_{3,3}^v = C_{2,2}^v$ se muestran en la fig.II.3, en la que $\epsilon_2(y)$, $\epsilon_3(y)$ y $\theta(y)$ son los valores principales de $\bar{\epsilon}_t$ y el ángulo θ definidos en (I-40), y el medio está estratificado según la perpendicular al plano de tierra.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

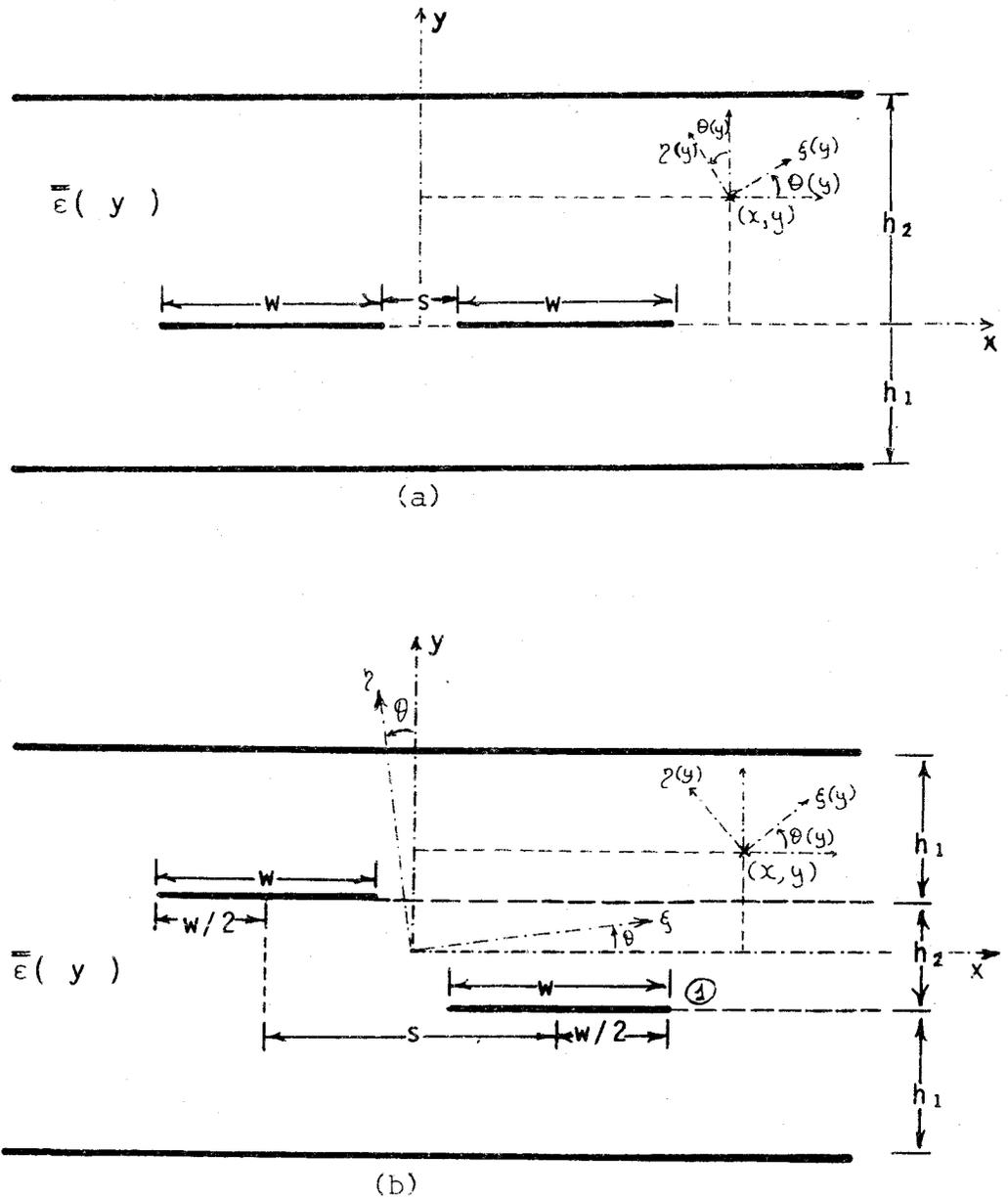


Fig.II.3

Acoplamiento simétrico de dos microtiras idénticas.
 (a).- Acoplamiento coplanar. (b).- Acoplamiento arbitrario. En este caso debe ser $\epsilon_2(y) = \epsilon_2(-y)$, $\epsilon_3(y) = \epsilon_3(-y)$ y $\theta(y) = \theta(-y)$ ó $-\theta(-y)$ indistintamente para cada capa.

-o0o-

Aproximación cuasi-estática Teoría de la aproximación

La fig.II.3.a muestra el acoplamiento coplanar de un par de microtiras idénticas -"edge coupled microstrips"-, sobre substrato anisótropo estratificado. Tras efectuar la transformación isótropo-anisótropo mencionada en la sec.I.4, la estructura equivalente resulta ser simétrica frente a la reflexión con respecto al plano y-z.

La fig.II.3.b, representa un acoplamiento arbitrario de dos microtiras idénticas simétricas frente a la inversión con centro en el origen de coordenadas una vez se ha realizado la transformación (I-41)-(I-42). Para que la estructura resulte simétrica tras la mencionada transformación, es preciso que se cumpla que $\epsilon_2(y) = \epsilon_2(-y)$, $\epsilon_3(y) = \epsilon_3(-y)$ y $\theta(y) = \pm \theta(-y)$, cómo se deduce de las definiciones (I-40) aplicadas a (I-41)-(I-42).

Ahora, de las simetrías de las estructuras isótropas equivalentes, y dado que las matrices de capacidad que se obtienen para éstas son idénticas a las que se obtienen para las estructuras de la fig.II.3, es evidente que debe cumplirse la relación (II-19). (Una demostración completa de la validez de (I-40)-(I-41) para estructuras estratificadas como las aquí consideradas, puede verse en la sec.III.2).

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Dado que \bar{C} y \bar{C}^v conmutan, todas las estructuras de la fig.II.3 propagan modos escalares:

$$\vec{V}_\alpha = Z_\alpha \vec{I}_\alpha \quad (\text{II-20})$$

De aquí, junto con las relaciones de ortogonalidad (II-8) se deduce que los autovectores de potencial y de intensidad son también ortogonales entre sí:

$$\vec{V}_\alpha \cdot \vec{V}_\beta = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad (\text{II-21.a})$$

$$\vec{I}_\alpha \cdot \vec{I}_\beta = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad (\text{II-21.b})$$

De modo que las estructuras de la fig.II.3 propagan modos par e impar, cuya forma general es:

$$\text{modo par: } \vec{V}_\rho \propto (1,1) \quad ; \quad \vec{I}_\rho = Z_\rho \vec{V}_\rho \quad (\text{II-22.a})$$

$$\text{modo impar: } \vec{V}_i \propto (1,-1) \quad ; \quad \vec{I}_i = Z_i \vec{V}_i \quad (\text{II-22.b})$$

ya que ésta es la única forma de que se cumplan simultáneamente (II-7) junto con (II-20) y las consideraciones de simetría $C_{3,3} = C_{2,2}$, $C_{3,3}^v = C_{2,2}^v$.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Para el cálculo de las constantes de propagación - $\omega_{\beta,p}$ y $\omega_{\beta,i}$ -, e impedancias modales - Z_p , Z_i -, conviene expresar tanto \bar{C} como \bar{C}^v en la base formada por los dos autovectores comunes (II-22.a) y (II-22.b). En dicha base tanto \bar{C} como \bar{C}^v son diagonales:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \quad (\text{II-23.a})$$

$$C^v = \begin{bmatrix} C_p^v & 0 \\ 0 & C_i^v \end{bmatrix} \quad (\text{II-23.b})$$

C_p y C_i son los correspondientes autovalores de \bar{C} , dados por:

$$U_{p,i} = Q^2 / C_{p,i} \quad (\text{II-24})$$

donde U_p (U_i) es la energía electrostática por unidad de longitud correspondiente a la configuración par (impar) y Q la carga por unidad de longitud colocada sobre cada tira en la configuración par, es decir, $+Q$ en la primera tira y $+Q$ ($-Q$) en la segunda. Para determinar C_p^v y C_i^v se usa una relación similar a (II-24):

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

$$U_{p,i}^v = Q^2 / C_{p,i}^v \quad (\text{II-25})$$

Una vez conocidas las capacidades modales $C_{p,i}$ y $C_{p,i}^v$, las constantes de propagación y las impedancias modales se obtienen trivialmente de (II-17) y (II-18), teniendo en cuenta (II-23):

$$\beta_{p,i} = (\omega/c) \sqrt{C_{p,i} / C_{p,i}^v} \quad (\text{II-26.a})$$

$$Z_{p,i} = (c \sqrt{C_{p,i} C_{p,i}^v})^{-1} \quad (\text{II-26.b})$$

Pasemos ahora a considerar la estructura general de la fig.II.2. En este caso, \bar{C} y \bar{C}^v en general no conmutan, por lo que habrán dos modos distintos de propagación definidos por las relaciones (II-17), cuyos potenciales e intensidades se relacionarán mediante la matriz \bar{Z} dada por (II-18).

Llamemos a dichos modos "c" y "π". En virtud de las relaciones de ortogonalidad (II-9), debe cumplirse que [34]:

$$V_{,e} / V_{\sigma_1} = -I_{\pi_1} / I_{\pi_2} = R_c \quad (\text{II-27.a})$$

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

$$V_{\pi,e} / V_{\pi,s} = -I_{c,s} / I_{c,e} = R_{\pi} \quad (\text{II-27.b})$$

donde $V_{c,s}$, $V_{c,e}$, son las componentes del vector de potenciales para el modo "c", etc...

De (II-27) y (II-7) también se sigue la relación de proporcionalidad:

$$\begin{bmatrix} V_{\pi,e} \\ -V_{\pi,s} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} I_{c,s} \\ I_{c,e} \end{bmatrix} = (1/\beta_{s,c}) \begin{bmatrix} C_{s,s} & C_{s,e} \\ C_{s,e} & C_{e,e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{c,s} \\ V_{c,e} \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

lo que puede escribirse cómo:

$$\begin{bmatrix} V_{\pi,e} \\ -V_{\pi,s} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} C_{s,s} V_{c,s} + C_{s,e} V_{c,e} \\ C_{s,e} V_{c,s} + C_{e,e} V_{c,e} \end{bmatrix} \quad (\text{II-29})$$

Ahora, teniendo en cuenta que $C_{s,s} > 0$, $C_{e,e} > 0$ y $C_{s,e} < 0$, de (II-29) deducimos que si ambas componentes de \vec{V}_c son de signos opuestos, entonces ambas componentes de \vec{V}_π han de ser del mismo signo. En consecuencia, al menos uno de los autovectores \vec{V}_c o \vec{V}_π ha de ser tal que sus componentes sean ambas del mismo signo. Supondremos que dicho modo es el modo "c".

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Puesto que $V_{c,1}$ y $V_{c,2}$ son ambas del mismo signo por definición (en adelante supondremos que son ambas positivas sin pérdida de generalidad), y puesto que, excepto para acoplamientos muy intensos, es $C_{12} \ll |C_{1,2}|$, y además cabe esperar que, excepto para estructuras fuertemente asimétricas sea $V_{c,1} \sim V_{c,2}$, de (II-29) se deduce que, excepto para líneas intensamente acopladas y fuertemente asimétricas, ambas componentes del modo "c" son de diferente signo (supondremos de aquí en adelante y sin pérdida de generalidad que, salvo las excepciones mencionadas, $V_{c,1} > 0$ y $V_{c,2} < 0$). De este modo, los modos "c" y "n" aparecen como degeneraciones de los modos par e impar respectivamente, debidas a la asimetría de la estructura.

Un ejemplo de estructura fuertemente asimétrica e intensamente ecoplada, que propaga modos "n" tales que ambas componentes de \vec{V}_n son del mismo signo, se muestra en la fig.II.4, donde $h_2/h_1=0.5$, $h_3/h_1=1$, $w_1/h_1=1$, $w_2/h_1=1$, $\epsilon_3^*=1$, $\epsilon_2^*=5$ y $\epsilon_1^*=10$. Para dicha estructura se han computado los valores de R_c y de R_n , lo que da unos valores para \vec{V}_c y \vec{V}_n de:

$$\text{modo "c": } V_{c,1}/V_{c,2} = 0.31 > 0 \quad (\text{II-30.a})$$

$$\text{modo "n": } V_{n,1}/V_{n,2} = 4.03 > 0 \quad (\text{II-30.b})$$

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

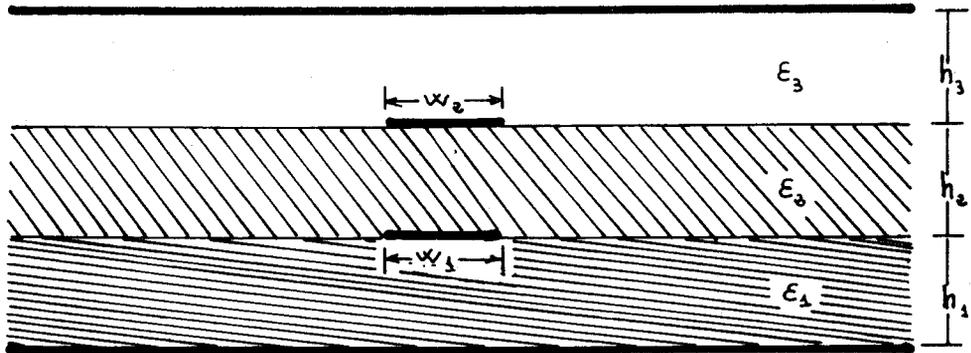


Fig. II.4
-oOo-

Como es natural, la denominación "c" o "n" otorgada a cada modo es, en este caso, totalmente arbitraria.

El acoplo entre los autovectores de potencial e intensidad puede realizarse mediante la matriz $\bar{\bar{Z}}$ (II-12) dada por (II-14) o (II-18). No obstante puede resultar mas cómodo obtener $\bar{\bar{Z}}$ resolviendo primero el problema de autovectores completo (II-8) o (II-17), junto con (II-7), y planteando el consiguiente sistema de ecuaciones:

$$I_{c,k} = \sum_{l=1}^2 Z_{kl} V_{c,l} \quad ; \quad k=1,2 \quad \text{(II-31.a)}$$

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

$$I_{\eta,k} = \sum_{l=1}^2 Z_{k,l} V_{\eta,l} \quad ; \quad k=1,2 \quad (\text{II-31.b})$$

Sin embargo, en la práctica, la matriz \overline{Z} completa raramente se obtiene, prefiriéndose obtener las impedancias modales Z_1^c , Z_2^c , Z_1^π y Z_2^π definidas por [34], [39]:

$$Z_1^\alpha = V_{\alpha,1} / I_{\alpha,1} \quad ; \quad \alpha = c, \pi \quad (\text{II-32.a})$$

$$Z_2^\alpha = V_{\alpha,2} / I_{\alpha,2} \quad ; \quad \alpha = c, \pi \quad (\text{II-32.b})$$

y que vienen dadas por [39]:

$$1/Z_1^\alpha = (1/\beta_{3,\alpha})(C_{3,1} + C_{3,2} R_\alpha) \quad ; \quad \alpha = c, \pi \quad (\text{II-33.a})$$

$$1/Z_2^\alpha = (1/\beta_{3,\alpha})(C_{3,2}/R_\alpha + C_{2,2}) \quad ; \quad \alpha = c, \pi \quad (\text{II-33.b})$$

cómo se deduce de (II.7.b) junto con (II.27). Siendo conocido el hecho de que, a partir de estas impedancias modales y de R_c , R_π , pueden obtenerse fácilmente los parámetros característicos del circuito de 4 puertas configurado por el par de líneas acopladas [34], [39].

Los parámetros R_c y R_π resultan muy convenientes para el cálculo de (II-32), y se obtienen directamente tras la resolución del problema de autovalores (II-8.a) o

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

(II-17.a), haciendo entonces innecesario resolver (II-8.b) o (II-17.b). No obstante los R_c y R_π resultan inadecuados para describir la desviación de los modos "c" y " π " de los modos escalares par e impar, debido a que su valor absoluto varía entre cero e infinito, tomando el valor uno cuando los modos "c" y " π " coinciden con los modos par e impar. Unos parámetros más apropiados para tal menester, que varían entre menos infinito y más infinito y que toman el valor cero cuando los modos "c" y " π " tienden a los modos par e impar son los parámetros P_c y P_π definidos por:

$$P_\alpha = 10 \log_{10} (1/|R_\alpha|) = 10 \log_{10} (|V_{\alpha,3}|/|V_{\alpha,2}|) ; \alpha = c, \pi$$

(II-34)

En los siguientes capítulos se hacen estudios detallados de acoplamientos entre dos microtiras en un medio dieléctrico estratificado.

II.3.b.-Acoplamiento de cuatro tiras (caso particular)

El ejemplo que analizamos a continuación puede ser interesante para observar cómo la desviación de los modos en una estructura asimétrica respecto de los modos pares e impares propios de estructuras simétricas, puede ser provocada mediante la introducción de un substrato

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

anisótropo.

Considérese la estructura de la fig.II.5, se trata de cuatro microtiras idénticas acopladas dos a dos por superposición y en forma coplanar -"broadside edge-coupled microstrips"- , en un medio anisótropo. Para fijar ideas se ha supuesto que sólo hay una capa anisótropa entre las microtiras, pero los resultados obtenidos pueden generalizarse fácilmente a estructuras en medios estratificados de las mismas características que los mencionados en la fig.II.3.b.

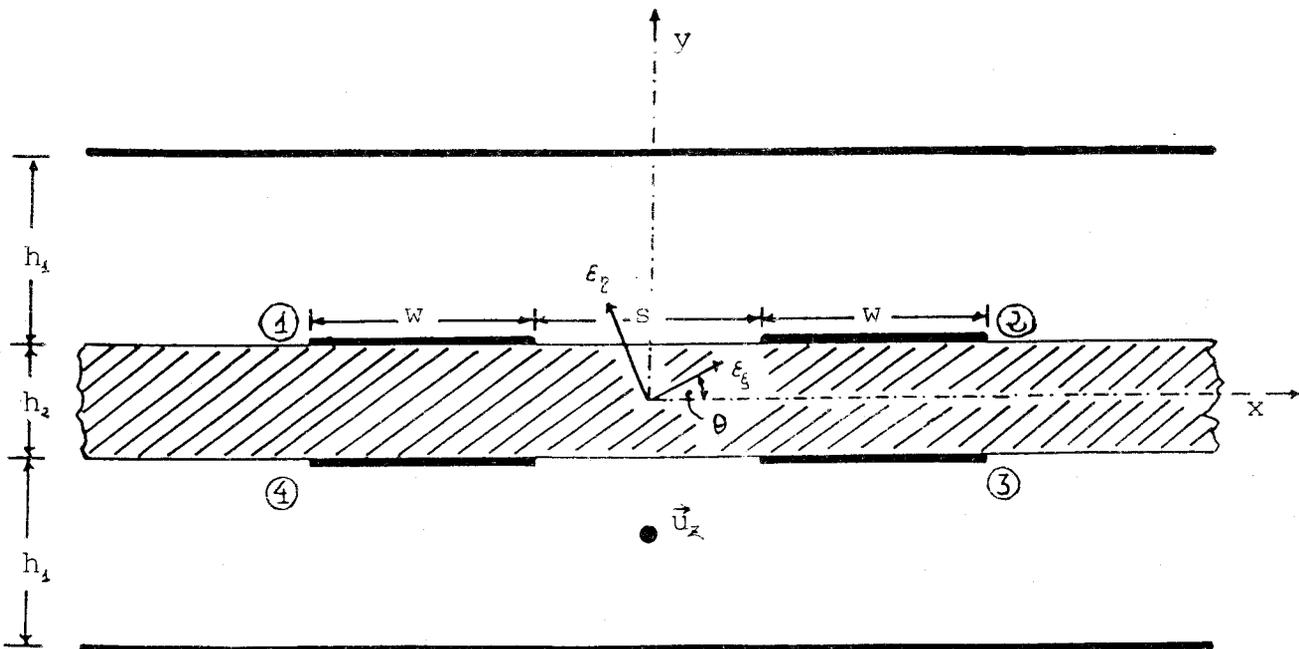


Fig.II.5

Acoplamiento por superposición y coplanar de 4 microtiras idénticas.

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Dada la disposición simétrica de las microtiras en la fig.II.5, cuando la capa dieléctrica entre las microtiras es isótropa, la configuración completa es simétrica por reflexión respecto a los planos x-z e y-z, lo que permite el estudio de sus parámetros característicos como si se tratase de una única microtira, con sendas paredes conductoras o magnéticas en los planos x-z e y-z. De esta manera, los modos de propagación habrán de ser escalares, y pares o impares respecto de los mencionados planos. La nomenclatura usual coloca en primer lugar al plano y-z, clasificándose entonces los modos de la manera siguiente:

$$\text{modo par par: } \vec{V}_{p,p} \propto (1,1,1,1) \quad (\text{II-35.a})$$

$$\text{modo par impar: } \vec{V}_{p,i} \propto (1,1,-1,-1) \quad (\text{II-35.b})$$

$$\text{modo impar par: } \vec{V}_{i,p} \propto (1,-1,-1,1) \quad (\text{II-35.c})$$

$$\text{modo impar impar: } \vec{V}_{i,i} \propto (1,-1,1,-1) \quad (\text{II-35.d})$$

donde las distintas componentes son proporcionales a los potenciales en cada tira, numerados como en la fig.II.5.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación



Cuando introducimos un substrato anisótropo entre las microtiras, de tal modo que los ejes del tensor de anisotropía transversal $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ no coincidan con los ejes "x" e "y" de la figura ($\theta \neq 0$), las simetrías de reflexión quedan rotas, de modo que $\bar{\bar{C}}$ y $\bar{\bar{C}}^\vee$ ya no conmutan. La estructura sigue poseyendo, sin embargo, cierta simetría, en concreto simetría de inversión respecto al origen de coordenadas, de modo que su matriz de capacidades, y con mayor razón aún la matriz $\bar{\bar{C}}^\vee$, pueden escribirse en la forma:

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{A}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-36.a}) \quad ; \quad \bar{\bar{C}}^\vee = \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}^\vee & \bar{\bar{B}}^\vee \\ \bar{\bar{B}}^\vee & \bar{\bar{A}}^\vee \end{bmatrix} \quad (\text{II-36.b})$$

donde las matrices $\bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{A}}^\vee$, $\bar{\bar{B}}$ y $\bar{\bar{B}}^\vee$ son matrices simétricas, lo que se deduce tras escribir $\bar{\bar{C}}$ y $\bar{\bar{C}}^\vee$ explícitamente, teniendo en cuenta la simetría de la estructura.

De (II-36) se deduce ahora que $\bar{\bar{C}} \cdot (\bar{\bar{C}}^\vee)^{-1}$ puede escribirse como:

$$\bar{\bar{C}} \cdot (\bar{\bar{C}}^\vee)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{D}} & \bar{\bar{F}} \\ \bar{\bar{F}} & \bar{\bar{D}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-37})$$

donde $\bar{\bar{D}}$ y $\bar{\bar{F}}$ son matrices en general no simétricas, por lo

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

que la matriz (II-37) es sólo simétrica por bloques.

La resolución del problema de autovectores (II-17.b) puede hacerse ahora también por bloques. En efecto es fácil demostrar por cálculo directo que el problema de autovectores (II-17.b) con $\bar{C} \cdot (C^v)^{-A}$ dada por (II-37) admite dos tipos de soluciones a las que llamaremos "+" y "-", dadas por:

$$\vec{I}^+ = (\vec{i}^+, \vec{i}^+) \quad (II-38.a)$$

$$\vec{I}^- = (\vec{i}^-, -\vec{i}^-) \quad (II-38.b)$$

donde \vec{i}^+ e \vec{i}^- son las soluciones de los dos problemas de autovalores:

$$\vec{i}^+ = 1/(c^2 \beta_3^2) (\bar{D} + \bar{F}) \cdot \vec{i}^+ \quad (II-39.a)$$

$$\vec{i}^- = 1/(c^2 \beta_3^2) (\bar{D} - \bar{F}) \cdot \vec{i}^- \quad (II-39.b)$$

siendo las diferentes soluciones para β_1 los primeros términos en el desarrollo en frecuencia de la constante de propagación de los modos correspondientes ($\beta = \omega \beta_3$ en primera aproximación).

Aproximacion cuasi-estática
Teoría de la aproximación

Análogamente, los autovectores de potencial pueden construirse a partir de (II-17.a) y teniendo en cuenta (II-37), en la forma:

$$\vec{V}^+ = (\vec{v}^+, \vec{v}^+) \quad (\text{II-40.a})$$

$$\vec{V}^- = (\vec{v}^-, -\vec{v}^-) \quad (\text{II-40.b})$$

donde \vec{v}^+ y \vec{v}^- son las soluciones al problema de autovalores:

$$\vec{v}^+ = 1/(c^2 \beta_1^2) (\bar{D}^+ \bar{F})^t \cdot \vec{v}^+ \quad (\text{II-41.a})$$

$$\vec{v}^- = 1/(c^2 \beta_1^2) (\bar{D}^- \bar{F})^t \cdot \vec{v}^- \quad (\text{II-41.b})$$

donde el superíndice "t" indica la traspuesta.

Dado que los problemas de autovectores (II-39.a) y (II-41.a), así como los problemas (II-39.b) y (II-41.b), son traspuestos el uno del otro, sus soluciones deben ser ortogonales entre sí. Llamaremos a ambas soluciones de (II-41.a) \vec{v}^{++} y \vec{v}^{+-} , y a las de (II-41.b) \vec{v}^{-+} y \vec{v}^{--} -con análoga nomenclatura para las soluciones de (II-39.a) \vec{i}^{++} e \vec{i}^{+-} - y de (II-39.b) \vec{i}^{-+} e \vec{i}^{--} -. De acuerdo con ello:

$$\vec{i}^{++} \vec{v}^{+-} = 0 \quad (\text{II-42.a})$$

Aproximacion cuasi-estática
Teoria de la aproximación

$$\vec{i}^{+-} \cdot \vec{v}^{++} = 0 \quad (\text{II-42.b})$$

$$\vec{i}^{+-} \cdot \vec{v}^{--} = 0 \quad (\text{II-42.c})$$

$$\vec{i}^{-+} \cdot \vec{v}^{-+} = 0 \quad (\text{II-42.d})$$

de donde:

$$v_2^{++} / v_1^{++} = -i_1^{+-} / i_2^{+-} = R^{++} \quad (\text{II-43.a})$$

$$v_2^{+-} / v_1^{+-} = -i_1^{++} / i_3^{++} = R^{+-} \quad (\text{II-43.b})$$

$$v_2^{-+} / v_1^{-+} = -i_1^{-+} / i_2^{-+} = R^{-+} \quad (\text{II-43.c})$$

$$v_2^{--} / v_1^{--} = -i_1^{-+} / i_2^{-+} = R^{--} \quad (\text{II-43.d})$$

Supondremos ahora que la anisotropia del medio es lo suficientemente débil como para que los nuevos modos "++", "+-", "-+" y "--" puedan considerarse pequeñas perturbaciones de los modos "par-par", "impar-impar", "par-impar" e "impar-par" descritos al comienzo de este apartado (II-35) respectivamente. Este es el caso con los materiales y dimensiones usuales, como veremos en el próximo capítulo.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

La descripción de los autovectores en terminos de $\vec{v}^{\pm\pm}$, $\vec{i}^{\pm\pm}$, es entonces adecuada para la obtención de las ecuaciones (II-38)-(II-39), pero, en la práctica, se prefiere una descripción que pone mas de manifiesto la ligazón de los modos descritos hasta aquí con los modos par-par, etc., de (II-35). Dicha descripción se realiza de forma que $\vec{v}^{++} = \vec{v}^{c,c}$, $\vec{v}^{+-} = \vec{v}^{\eta,\eta}$, $\vec{v}^{-+} = \vec{v}^{c,\eta}$ y $\vec{v}^{--} = \vec{v}^{\eta,c}$, y:

$$\text{modo } c-c: \vec{V}^{c,c} = \vec{V}^{++} = (\vec{v}^{++}, \vec{v}^{++}) \quad (1, |R^{c,c}|, 1, |R^{c,c}|) \quad (\text{II-44.a})$$

$$\text{modo } c-\eta: \vec{V}^{c,\eta} = \vec{V}^{-+} = (\vec{v}^{-+}, -\vec{v}^{-+}) \quad (1, |R^{c,\eta}|, -1, -|R^{c,\eta}|) \quad (\text{II-44.b})$$

$$\text{modo } \eta-c: \vec{V}^{\eta,c} = \vec{V}^{--} = (\vec{v}^{--}, -\vec{v}^{--}) \quad (1, -|R^{\eta,c}|, -1, |R^{\eta,c}|) \quad (\text{II-44.c})$$

$$\text{modo } \eta-\eta: \vec{V}^{\eta,\eta} = \vec{V}^{+-} = (\vec{v}^{+-}, \vec{v}^{+-}) \quad (1, -|R^{\eta,\eta}|, 1, -|R^{\eta,\eta}|) \quad (\text{II-44.d})$$

donde, de acuerdo con la equivalencia establecida, $R^{c,c} = R^{++}$, $R^{c,\eta} = R^{-+}$, $R^{\eta,c} = R^{--}$, y $R^{\eta,\eta} = R^{+-}$.

En términos de tales modos, las propiedades (II-42)) y (II-43)) adquieren la forma simple:

$$\vec{i}^{\alpha\beta} \cdot \vec{v}^{\beta\alpha} = 0 ; \vec{i}^{\alpha\alpha} \cdot \vec{v}^{\alpha\beta} = 0 ; \alpha \neq \beta \quad (\text{II-45.a})$$

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

$$v_2^{\alpha,\beta} / v_3^{\alpha,\beta} = -i_1^{\beta,\alpha} / i_1^{\alpha,\beta} = R^{\beta,\alpha} ; v_2^{\alpha,\alpha} / v_3^{\beta,\beta} = -i_1^{\beta,\beta} / i_2^{\beta,\beta} = R^{\alpha,\alpha} \quad (\text{II-45.b})$$

($\alpha \neq \beta$)

donde los superíndices α y β indican cualquiera de las letras "c" o "π".

Análogamente a (II-34), los parámetros $P^{\alpha,\beta}$ se definen por:

$$P^{\alpha,\beta} = 10 \log_{10} (1 / |R^{\alpha,\beta}|) \quad (\text{II-46})$$

siendo útiles a la hora de describir la desviación de las tensiones modales (II-44) respecto de las correspondientes a los modos par-par, par-impar, impar-par e impar-impar definidos en (II-35) para una estructura isótropa.

El acoplo entre los autovectores de intensidad y potencial se puede realizar a partir de (II.7.b), lo que puede escribirse también, teniendo en cuenta (II-36.a), como:

$$\vec{i}_{\alpha,\beta} = 1 / (\beta_3^{\alpha,\beta}) (\bar{A} \pm \bar{B}) \cdot \vec{v}^{\alpha,\beta} \begin{cases} + & \text{si } \alpha = \beta \\ - & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{II-47})$$

donde $\alpha = c, \pi$; $\beta = c, \pi$.

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

La matriz $\bar{\bar{Z}}$ de (II-12), puede también escribirse en la forma:

$$\bar{\bar{Z}} = \begin{matrix} \bar{\bar{Z}}_{3,1} & \bar{\bar{Z}}_{3,2} \\ \bar{\bar{Z}}_{3,2} & \bar{\bar{Z}} \end{matrix} \quad (\text{II-48})$$

siendo $\bar{\bar{Z}}_{3,1}$ y $\bar{\bar{Z}}_{3,2}$ matrices simétricas dadas por:

$$\vec{v}^{\alpha,\beta} = (\bar{\bar{Z}}_{3,1} \pm \bar{\bar{Z}}_{3,2}) \cdot \vec{i}^{\alpha,\beta} \begin{cases} + \text{ si } \alpha = \beta \\ - \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

(II-49) puede usarse tanto para, conocidas $\bar{\bar{Z}}_{3,1}$ y $\bar{\bar{Z}}_{3,2}$, hallar $\vec{v}^{\alpha,\beta}$ a partir de $\vec{i}^{\alpha,\beta}$, como para determinar las $\bar{\bar{Z}}_{3,1}$, $\bar{\bar{Z}}_{3,2}$ a partir del sistema de ecuaciones (II-49), conocidas $\vec{v}^{\alpha,\beta}$ e $\vec{i}^{\alpha,\beta}$ a partir de (II-41), (II-44) y (II-47).

II.4.-Conclusiones

En este capítulo se ha extendido la teoría cuasi-estática de líneas de transmisión a estructuras de N+1 conductores en un medio inhomogéneo y anisótropo sin pérdidas a frecuencia cero. Del análisis efectuado se deducen las siguientes conclusiones importantes:

Aproximación cuasi-estática
Teoría de la aproximación

1).- Al igual que en las líneas en medios isotrópicos, en las líneas analizadas se propagan N modos de tensión e intensidad con una velocidad de fase definida para cada modo.

2).- Al igual que en sus homólogas isotrópicas, en las líneas de transmisión multiconductoras en medios anisótropos inhomogéneos sin pérdidas, los parámetros característicos, velocidad de fase e impedancia, se deducen de las matrices estáticas de capacidad por unidad de longitud \bar{C} y autoinducción por unidad de longitud \bar{L} .

3).- En medios no magnéticos, los parámetros característicos se pueden obtener de la matriz de capacidades \bar{C} y de la matriz de capacidades de la estructura en vacío \bar{C}^v .

4).- La anisotropía del medio puede introducir asimetrías en líneas de otro modo simétricas, perturbando los modos escalares de éstas.

Sí, como un caso particular de reconocida importancia, consideramos el acoplamiento de dos microtiras en un medio estratificado de configuración planar, se nos presentan dos casos cualitativamente bien diferenciados desde el punto de vista de la propagación de modos cuasiestáticos:

Aproximación cuasi-estática Teoría de la aproximación

Por un lado el acoplamiento simétrico, que exige al menos simetría de inversión en la estructura isótropa equivalente y que a consecuencia de tal simetría propaga modos escalares par e impar, en cuyo caso los parámetros característicos son las velocidades de fase y las impedancias escalares de cada modo.

Por otro lado el acoplamiento asimétrico que no propagará en general modos escalares, clasificándose los modos en modos c y π , por su proximidad a los modos par e impar respectivamente, siendo entonces imposible definir impedancias escalares para cada modo.

Asimismo se ha puesto de manifiesto, con un ejemplo concreto, cómo la anisotropía del medio puede introducir asimetrías que provoquen la desaparición de modos escalares, ilustrando así la conclusión 4) expuesta más arriba.

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

III-MATRIZ DE GREEN ELECTROSTATICA
PARA LINEAS MULTICAPA DE CONFIGURACION PLANAR

En el presente capítulo se desarrolla un algoritmo completo para el cálculo de la matriz de Green estática en el dominio de Fourier de una estructura planar compuesta por un número arbitrario de capas dieléctricas anisótropas, útil para el análisis variacional de líneas multiconductoras compuestas por un número arbitrario de tiras conductoras, intercaladas en las interfases del medio dieléctrico descrito mas arriba.

Supondremos que el tensor permitividad de las capas, $\bar{\epsilon}_i$, puede considerarse con suficiente grado de aproximación real y simétrico, y que no depende de la frecuencia. De modo que podemos aplicar la teoría de la aproximación cuasiestática tal y como fué formulada en el capítulo anterior. Supondremos además que las capas carecen de propiedades magnéticas, por lo que estamos en el caso analizado en la sec.II.2.

Para efectuar el cálculo de la matriz de Green partimos de la ecuación de Laplace en cada capa, con condiciones de contorno arbitrarias, que es resuelta

Aproximación cuasi-estática Matriz de Green

mediante su transformación al dominio de Fourier. A partir de dicho cálculo obtenemos una relación entre los potenciales y la componente normal del vector desplazamiento eléctrico en los límites inferior y superior de la capa, relación que nos permite hallar, por recurrencia, dichas cantidades en función una de otra en cualquier interfase. Ahora resta solo imponer las condiciones de contorno apropiadas, para finalmente obtener la matriz de Green.

Finalmente, y como una consecuencia del análisis efectuado, obtenemos las expresiones de equivalencia entre capas isótropas y anisótropas mencionadas en la sec.I.3.

III.1.- Obtención de la función de Green

Consideremos en primer lugar una capa infinita de dieléctrico anisótropo sin pérdidas (fig.III.1). El tensor de permitividades en el plano transversal (plano x-y) es:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

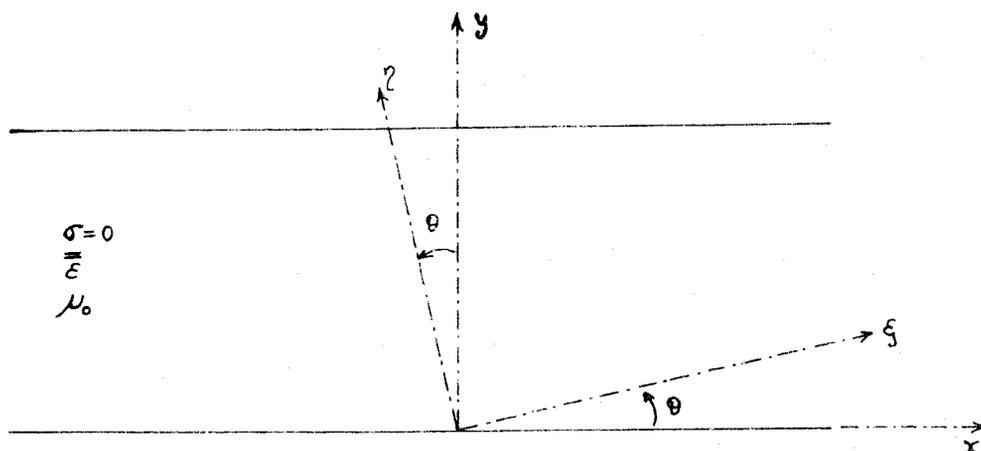


Fig.III.1

Capa infinita de dieléctrico ideal anisótropo de constantes $\sigma=0$, $\bar{\epsilon}$ y μ_0 .

-o0o-

Consiguientemente, la ecuación para el potencial electrostático $V(x,y)$ en el plano transversal es:

$$\vec{\nabla}_t \cdot (\bar{\epsilon}_t \cdot \vec{\nabla}_t) V(x,y) = 0 \quad (\text{III-2})$$

Si introducimos la transformada de Fourier en la forma usual:

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (\text{III-3})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

entonces, teniendo en cuenta que $\widetilde{\partial f / \partial x} = -j\alpha \widetilde{f}(\alpha)$ la ecuación (III-2) se escribe en función de las transformadas (III-3) en la forma:

$$-\alpha^2 \varepsilon_{xx} \widetilde{V} - 2j\alpha \varepsilon_{xy} (\partial \widetilde{V} / \partial y) + \varepsilon_{yy} (\partial^2 \widetilde{V} / \partial y^2) = 0 \quad (\text{III-4})$$

siendo las soluciones a esta ecuación:

$$\widetilde{V}(\alpha, y) = e^{j\alpha R y} [A \sinh(\alpha S y) + B \cosh(\alpha S y)] \quad (\text{III-5})$$

donde

$$R = \varepsilon_{xy} / \varepsilon_{yy} \quad (\text{III-6.a})$$

$$S = \sqrt{(\varepsilon_{xx} / \varepsilon_{yy}) - (\varepsilon_{xy} / \varepsilon_{yy})^2} = (1 / \varepsilon_{yy}) \sqrt{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3} \quad (\text{III-6.b})$$

siendo ε_2 y ε_3 los valores principales de $\overline{\overline{\varepsilon}}_t$ y A y B coeficientes a determinar en función de las condiciones de contorno para el potencial $\widetilde{V}(\alpha, y)$.

De (III-5) la componente \widetilde{D}_y del vector desplazamiento eléctrico puede obtenerse por diferenciación y posterior multiplicación por el tensor $\overline{\overline{\varepsilon}}_t$, obteniéndose tras algunos cálculos la expresión:

$$\widetilde{D}_y = -\alpha \varepsilon_{xy} e^{j\alpha R y} [A \cosh(\alpha S y) + B \sinh(\alpha S y)] \quad (\text{III-7})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

donde:

$$\epsilon^{eq} = S \epsilon_{yy} = \sqrt{\epsilon_y \epsilon_z} \quad (\text{III-8})$$

Obsérvese que si definimos la variable $y^{eq} = Sy$, las expresiones (III-5), (III-7) expresan -excepto por el factor $\exp(j\alpha Ry)$, cuyo sentido quedará claro mas adelante- el potencial y la densidad de flujo eléctrico según la componente "y" en una lámina de dieléctrico isótropo de constante dieléctrica ϵ^{eq} , y de altura h^{eq} dada por $h^{eq} = Sh$.

El paso siguiente es determinar una relación entre $\tilde{V}(\alpha, y)$ y $\tilde{D}_y(\alpha, y)$ para diferentes valores de la coordenada "y" de la capa anisótropa de la fig.III.1. Tras algún cálculo se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\alpha, y+\Delta y) = e^{j\alpha R \Delta y} [& \cosh(\alpha \Delta y^{eq}) \tilde{V}(\alpha, y) - \\ & (1/\alpha \epsilon^{eq}) \sinh(\alpha \Delta y^{eq}) \tilde{D}_y(\alpha, y)] \end{aligned} \quad (\text{III-9.a})$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_y(\alpha, y+\Delta y) = e^{j\alpha R \Delta y} [& \cosh(\alpha \Delta y^{eq}) \tilde{D}_y(\alpha, y) - \\ & \alpha \epsilon^{eq} \sinh(\alpha \Delta y^{eq}) \tilde{V}(\alpha, y)] \end{aligned} \quad (\text{III-9.b})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

III.1.a.-Matriz de Green para estructuras estratificadas entre planos conductores a tierra.

Trasladando ahora las expresiones (III-9) a una configuración como la de la fig.III.2, es decir un medio estratificado con capas dieléctricas de anisotropía arbitraria entre dos planos conductores, y teniendo en cuenta las condiciones de contorno en las interfases -continuidad de $\tilde{V}(\alpha, y)$ y de $\tilde{D}_y(\alpha, y)$ -, puede elaborarse un algoritmo de recurrencia que traslade los potenciales y las densidades de carga a lo largo de una sucesión de interfases sin carga libre, partiendo de la interfase inferior, o interfase "cero":

$$\tilde{V}_0(\alpha) = 0 \quad \text{(III-10.a)}$$

$$\tilde{V}_\ell(\alpha) = \exp(j\alpha \sum_{n=1}^{\ell} R_n h_n) F_1^\ell(\alpha) \tilde{D}_{y,0}(\alpha) \quad \text{(III-10.b)}$$

$$\tilde{D}_{y,\ell}(\alpha) = \exp(j\alpha \sum_{n=1}^{\ell} R_n h_n) F_3^\ell(\alpha) \tilde{D}_{y,0}(\alpha) \quad \text{(III-10.c)}$$

donde $\tilde{V}_\ell(\alpha)$ y $\tilde{D}_{y,\ell}(\alpha)$ representan el potencial y la densidad de flujo eléctrico a través de la interfase " ℓ ".

Análogo proceso puede realizarse a partir de la interfase superior ($\ell=N$):

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

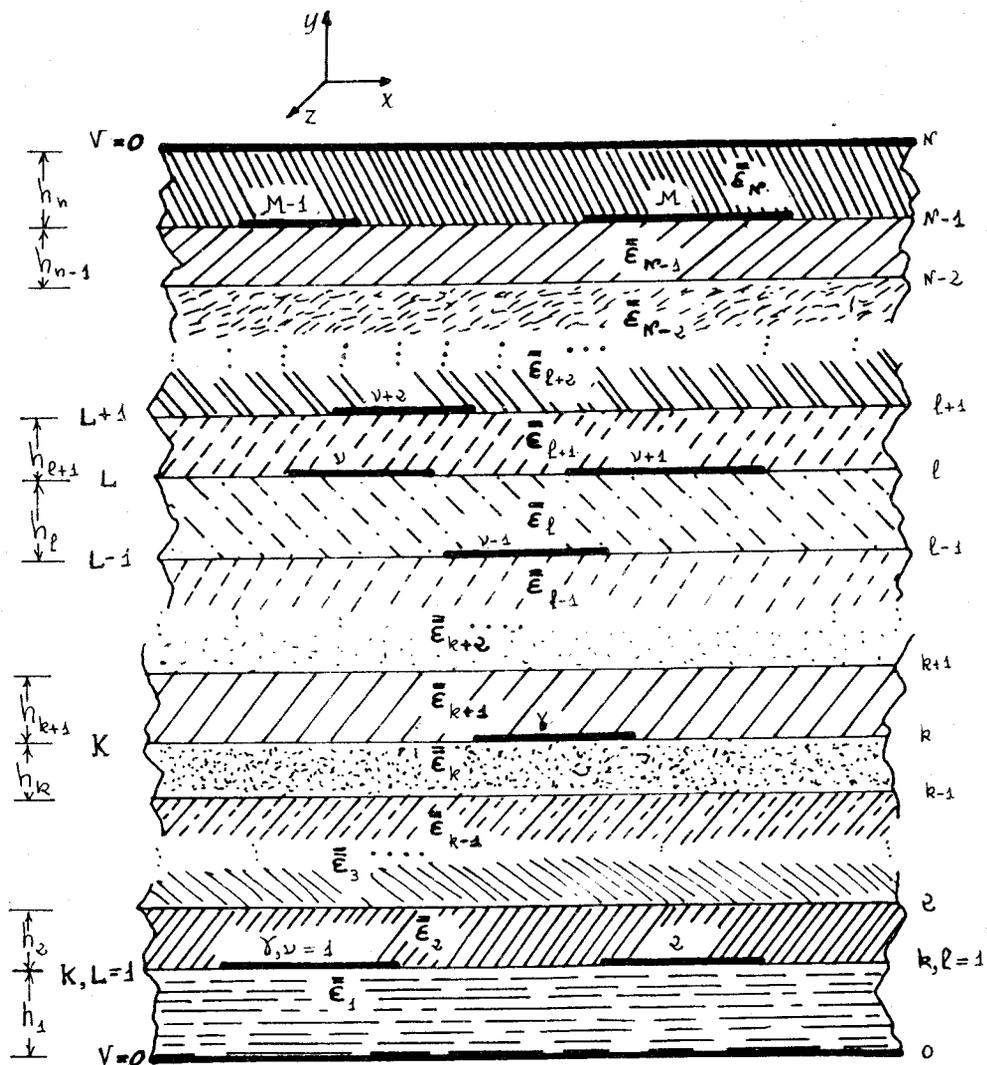


Fig. III.2

Línea de transmisión multiconductora en un medio dieléctrico estratificado de anisotropía arbitraria.

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$\tilde{V}_N(\alpha) = 0 \quad (\text{III-11.a})$$

$$\tilde{V}_{N-k}(\alpha) = \exp(-j\alpha \sum_{n=0}^{k-1} R_{N-n} h_{N-n}) F_3^k(\alpha) \tilde{D}_{y,N}(\alpha) \quad (\text{III-11.b})$$

$$\tilde{D}_{y,N-k}(\alpha) = \exp(-j\alpha \sum_{n=0}^{k-1} R_{N-n} h_{N-n}) F_4^k(\alpha) \tilde{D}_{y,N}(\alpha) \quad (\text{III-11.c})$$

donde las funciones F_n^m en (III-10), (III-11), se obtienen a partir del algoritmo de recurrencia:

$$F_1^i = -\text{senh}(\alpha h_1^{eq}) / (\alpha \varepsilon_1^{eq}) \quad (\text{III-12.a})$$

$$F_2^i = \text{senh}(\alpha h_N^{eq}) / (\alpha \varepsilon_N^{eq}) \quad (\text{III-12.b})$$

$$F_3^i = \cosh(\alpha h_1^{eq}) \quad (\text{III-12.c})$$

$$F_4^i = \cosh(\alpha h_N^{eq}) \quad (\text{III-12.d})$$

$$F_1^{i+1} = \cosh(\alpha h_{i+1}^{eq}) F_1^i - (1/\alpha \varepsilon_{i+1}^{eq}) \text{senh}(\alpha h_{i+1}^{eq}) F_3^i \quad (\text{III-12.e})$$

$$F_2^{i+1} = \cosh(\alpha h_{N-i}^{eq}) F_2^i + (1/\alpha \varepsilon_{N-i}^{eq}) \text{senh}(\alpha h_{N-i}^{eq}) F_4^i \quad (\text{III-12.f})$$

$$F_3^{i+1} = \cosh(\alpha h_{i+1}^{eq}) F_3^i - \alpha \varepsilon_{i+1}^{eq} \text{senh}(\alpha h_{i+1}^{eq}) F_1^i \quad (\text{III-12.g})$$

$$F_4^{i+1} = \cosh(\alpha h_{N-i}^{eq}) F_4^i + \alpha \varepsilon_{N-i}^{eq} \text{senh}(\alpha h_{N-i}^{eq}) F_2^i \quad (\text{III-12.h})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

siendo

$$h_n^{eq} = S_n h_n \quad (\text{III-13.a})$$

$$\epsilon_n^{eq} = S_n \epsilon_{yy,n} \quad (\text{III-13.b})$$

$$R_n = \epsilon_{xy,n} / \epsilon_{yy,n} \quad (\text{III-13.c})$$

$$S_n = \sqrt{(\epsilon_{xx,n} / \epsilon_{yy,n}) - R_n^2} \quad (\text{III-13.d})$$

(el algoritmo (III-10)-(III-13) puede obtenerse mediante un cálculo directo, aunque farragoso).

Consideremos ahora una densidad superficial de carga libre en la interfase "l", $\beta_l(x)$. Las condiciones de contorno en la interfase son:

$$\tilde{V}(\alpha, \sum_{n=1}^l h_n - 0) = \tilde{V}(\alpha, \sum_{n=1}^l h_n + 0) \quad (\text{III-14.a})$$

$$\tilde{D}_y(\alpha, \sum_{n=1}^l h_n - 0) + \tilde{\beta}_l(\alpha) = \tilde{D}_y(\alpha, \sum_{n=1}^l h_n + 0) \quad (\text{III-14.b})$$

donde $\tilde{\beta}_l(\alpha)$ es la transformada de Fourier de $\beta_l(x)$. Usando ahora las relaciones (III-10)-(III-14) pueden despejarse $\tilde{D}_{y_0}(\alpha)$ y $\tilde{D}_{y,x}(\alpha)$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$\tilde{D}_{y,o} = \tilde{\rho}_\ell(\alpha) \exp(-j\alpha \sum_{n=1}^{\ell} R_n h_n) \left[\frac{F_1^\ell F_4^{N-\ell}}{F_2^{N-\ell}} - F_3^\ell \right]^{-1} \quad (\text{III-15.a})$$

$$\tilde{D}_{y,N} = \tilde{\rho}_\ell(\alpha) \exp(j\alpha \sum_{n=\ell+1}^N R_n h_n) \left[F_4^{N-\ell} - \frac{F_3^\ell F_2^{N-\ell}}{F_1^\ell} \right]^{-1} \quad (\text{III-15.b})$$

Finalmente, tras obtener $\tilde{D}_{y,o}$ y $\tilde{D}_{y,N}$, el elemento de matriz que relaciona una densidad superficial de carga arbitraria en la capa "l" con el potencial creado por ella en la capa "k" puede obtenerse en la forma:

$$\tilde{V}_k(\alpha) = \tilde{G}_{k\ell}(\alpha) \tilde{\rho}_\ell(\alpha) \quad (\text{III-16})$$

$$\tilde{G}_{k,\ell} = \exp(-j\alpha \sum_{n=k+1}^{\ell} R_n h_n) \left[\frac{F_1^\ell F_4^{N-\ell}}{F_1^k F_2^{N-\ell}} - \frac{F_3^\ell}{F_1^k} \right]^{-1} \quad (\text{III-17})$$

para $k < \ell$, y para $k = \ell$:

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$\tilde{G}_{kk} = \left[\frac{F_4^{K-k}}{F_2^{K-k}} - \frac{F_3^k}{F_1^k} \right]^{-1} \quad (\text{III-18})$$

Por otro lado la matriz $\tilde{G}_{k\ell}$ debe ser hermitica. Para convencerse de ello basta con colocar una densidad de carga arbitraria en las capas "k" y "l", y calcular la energia electrostatica por unidad de longitud de la configuraci3n completa, que puede expresarse tras pasar al dominio espectral y usando la identidad de Parseval como:

$$U_{k,\ell} = (1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{ij} \tilde{\rho}_i^* \tilde{G}_{ij} \tilde{\rho}_j \right] d\alpha \quad ; \quad i, j = \ell, k \quad (\text{III-19})$$

donde el superindice "*" indica complejo conjugado.

C3mo la energia (III-19) es una cantidad real y positiva para toda $\tilde{\rho}_\ell(x)$, $\tilde{\rho}_k(x)$, deducimos que la matriz \tilde{G} debe ser hermitica:

$$\tilde{G}_{k\ell} = \tilde{G}_{\ell k}^* \quad (\text{III-20})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

Las expresiones (III-17), (III-18) y (III-20) determinan completamente la matriz de Green \tilde{G}_{kl} . No obstante, a medida que α crece, las expresiones de recurrencia (III-12) se van haciendo menos apropiadas para la computación, debido a los términos divergentes $\sinh(\alpha h_n^{eq})$ y $\cosh(\alpha h_n^{eq})$. Resulta útil entonces definir las nuevas funciones $W_n^m(\alpha)$ mediante:

$$W_1^m = \alpha F_1^m / \left(\prod_{n=1}^m \sinh(\alpha h_n^{eq}) \right) \quad (\text{III-21.a})$$

$$W_2^m = \alpha F_2^m / \left(\prod_{n=0}^{m-1} \sinh(\alpha h_{N-n}^{eq}) \right) \quad (\text{III-21.b})$$

$$W_3^m = \alpha F_3^m / \left(\prod_{n=1}^m \sinh(\alpha h_n^{eq}) \right) \quad (\text{III-21.c})$$

$$W_4^m = \alpha F_4^m / \left(\prod_{n=0}^{m-1} \sinh(\alpha h_{N-n}^{eq}) \right) \quad (\text{III-21.d})$$

que pueden ser obtenidas mediante el algoritmo, análogo a (III-12):

$$W_1^1 = 1 / \varepsilon_3^{eq} \quad (\text{III-22.a})$$

$$W_2^1 = 1 / \varepsilon_N^{eq} \quad (\text{III-22.b})$$

$$W_3^1 = \coth(\alpha h_1^{eq}) \quad (\text{III-22.c})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$W_4^1 = \coth(\alpha h_N^{eq}) \quad (\text{III-22.d})$$

$$W_1^{i+1} = \coth(\alpha h_{i+1}^{eq}) W_1^i - (1/\varepsilon_{i+1}^{eq}) W_3^i \quad (\text{III-22.e})$$

$$W_2^{i+1} = \coth(\alpha h_{K-i}^{eq}) W_2^i + (1/\varepsilon_{K-i}^{eq}) W_4^i \quad (\text{III-22.f})$$

$$W_3^{i+1} = \coth(\alpha h_{i+1}^{eq}) W_3^i - \varepsilon_{i+1}^{eq} W_1^i \quad (\text{III-22.g})$$

$$W_4^{i+1} = \coth(\alpha h_{K-i}^{eq}) W_4^i + \varepsilon_{K-i}^{eq} W_2^i \quad (\text{III-22.h})$$

En función de las W_n^m , los elementos de la matriz de Green se expresan mediante:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{kl} = (1/\alpha) & \left[\prod_{n=k+1}^l (\text{csech}(\alpha h_n^{eq}) \exp(-j\alpha R_n h_n)) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\frac{W_3^l W_4^{K-l}}{W_1^k W_2^{K-l}} - \frac{W_3^l}{W_1^k} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III-23.a})$$

$$\tilde{G}_{kk} = (1/\alpha) \left[\frac{W_4^{K-k}}{W_2^{K-k}} - \frac{W_3^k}{W_1^k} \right]^{-1} \quad (\text{III-23.b})$$

Aproximación cuasi-estática Matriz de Green

Las expresiones (III-16)-(III-20) o (III-23) permiten calcular, mediante el principio de superposición, los potenciales debidos a una configuración arbitraria de densidades de carga superficial en cualquiera de las interfases de la fig.III.2. Generalmente sólo estamos interesados en obtener la relación entre las densidades de carga y los potenciales en aquellas interfases que soportan tiras conductoras. Dicha relación puede escribirse, usando letras mayúsculas para referirnos a las interfases con tiras conductoras (fig.III.2), en la forma:

$$\tilde{V}_K(\alpha) = \sum_L \tilde{G}_{K,L} \tilde{\rho}_L(\alpha) \quad (\text{III-24})$$

donde las $\tilde{G}_{K,L}$ no son sino los elementos de la restricción de la matriz \tilde{G}_{kl} a aquellas capas que soportan tiras conductoras.

III.1.b.-Plano inferior magnético

Consideremos finalmente el caso en que el plano inferior de la fig.III.2 es una pared magnética, caso que tiene su importancia práctica cuando dicho plano es el plano especular de una estructura con simetría de reflexión. Si el plano inferior es una pared magnética, entonces (III-11.a) debe ser sustituida por

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$\tilde{D}_{\gamma,0}(\alpha) = 0 \quad (\text{III-25})$$

y la ecuación (III-25), desde el punto de vista puramente formal, lo que introduce de novedad respecto a (III-11.a) es un intercambio de papeles entre $\tilde{V}_0(\alpha)$ y $\tilde{D}_{\gamma,0}(\alpha)$. Por otro lado las ecuaciones (III-9) resultan invariantes frente al intercambio mencionado a condición de intercambiar también los factores $(1/\alpha \varepsilon^{\text{eq}})$ y $\alpha \varepsilon^{\text{eq}}$ que aparecen en ellas. Dado que las ecuaciones (III-9) son el punto de partida para elaborar el algoritmo (III-10)-(III-12), dicho algoritmo será también válido ahora tras intercambiar $\tilde{V}_0(\alpha)$ por $\tilde{D}_{\gamma,0}(\alpha)$, junto con $(1/\alpha \varepsilon^{\text{eq}})$ y $\alpha \varepsilon^{\text{eq}}$. Pero ello es lo mismo que dejar (III-10.b,c) en la forma:

$$\tilde{V}_\ell(\alpha) = \exp(j\alpha \sum_{n=1}^{\ell} R_n h_n) F_1^\ell(\alpha) \tilde{V}_0(\alpha) \quad (\text{III-26.a})$$

$$\tilde{D}_{\gamma,\ell}(\alpha) = \exp(j\alpha \sum_{n=1}^{\ell} R_n h_n) F_3^\ell(\alpha) \tilde{V}_0(\alpha)$$

e intercambiar en (III-12) $F_1^\ell(\alpha)$ y $F_3^\ell(\alpha)$, junto con $(1/\alpha \varepsilon^{\text{eq}})$ y $\alpha \varepsilon^{\text{eq}}$, de modo que las relaciones de recurrencia para $F_1^\ell(\alpha)$ y $F_3^\ell(\alpha)$ quedan invariantes, excepto por:

$$F_1^1(\alpha) = \cosh(\alpha h_1^{\text{eq}}) \quad (\text{III-27.a})$$

Aproximación cuasi-estática
Matriz de Green

$$F_3^1(\alpha) = -\alpha \varepsilon_1^{eq} \sinh(\alpha h_1^{eq}) \quad (\text{III-27.b})$$

III.2. - Línea isótropa equivalente

Usaremos ahora las expresiones (III-5) y (III-7) para demostrar las relaciones de equivalencia mencionadas en la sec. I.3. Obsérvese que dichas relaciones pueden escribirse, como ya mencionamos, en la forma:

$$\tilde{V}(\alpha, y) = e^{j\alpha R y} \tilde{V}^{eq}(\alpha, y^{eq}) \quad (\text{III-28.a})$$

$$\tilde{D}_y(\alpha, y) = e^{j\alpha R y} \tilde{D}_y^{eq}(\alpha, y^{eq}) \quad (\text{III-28.b})$$

donde $\tilde{V}^{eq}(\alpha, y^{eq})$ y $\tilde{D}_y^{eq}(\alpha, y^{eq})$ son las transformadas de Fourier del potencial y de la componente normal del vector desplazamiento eléctrico en una capa isótropa de constante dieléctrica ε^{eq} y de altura h^{eq} , para un valor y^{eq} de la coordenada "y", con y^{eq} dada por:

$$y^{eq} = S \cdot y \quad (\text{III-29})$$

Volviendo atrás la transformada (III-3) se obtiene:

$$V(x, y) = V^{eq}(x - Ry, y^{eq}) \quad (\text{III-30.a})$$

Aproximación cuasi-estática Matriz de Green

$$D_y(x,y) = D_y^{eq}(x-Ry, y^{eq}) \quad (\text{III-30.b})$$

Donde $V^{eq}(x,y)$ y $D_y^{eq}(x,y)$ representan el potencial y la componente "y" del vector \vec{D} en la capa isotropa equivalente mencionada mas arriba. Teniendo ahora en cuenta que las densidades de carga superficiales que pueda haber en las interfases de la fig.III-2 expresan discontinuidades de $D_y(x,y)$, y usando (III-30) es fácil demostrar que la línea de transmisión isotropa, equivalente en el sentido de la sec.I.3 a la línea de transmisión anisótropa de la fig.III.2, se construye sustituyendo en cada capa $\bar{\epsilon}$ por ϵ^{eq} , h por h^{eq} y desplazando las tiras conductoras en la interfase "k" hacia la izquierda una distancia (Δx) dada por:

$$(\Delta x) = \sum_{n=1}^k R_n h_n \quad (\text{III-31})$$

III.3.-Conclusiones

La matriz estática de Green en el dominio espectral para líneas de transmisión multiconductoras de configuración planar en un medio dieléctrico ideal estratificado de anisotropía arbitraria, puede obtenerse mediante un algoritmo de recurrencia, cuya expresión

Aproximación cuasi-estática Matriz de Green

general se da en el presente capítulo.

Dicho algoritmo es útil para el cálculo de los parámetros característicos de líneas de transmisión en medios dieléctricos anisótropos, en aproximación cuasiestática.

Asimismo y como un subproducto del análisis, se ha demostrado, para el caso aquí considerado, la validez de la relación de equivalencia entre estructuras anisótropas e isotropas mencionada en la sec.I.3.

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

IV-ANALISIS VARIACIONAL DE LINEAS DE TRANSMISION
EN APROXIMACION CUASIESTATICA

A lo largo del presente capítulo y apoyándonos en los elementos básicos desarrollados en los dos anteriores, efectuamos el análisis variacional de una amplia gama de líneas tipo microtira en medios anisótropos multicapa. Partiendo de las estructuras más simples, el análisis va progresando en complejidad hasta desembocar en un algoritmo completamente general para el análisis cuasiestático de líneas multiconductoras de configuración planar en medios dieléctricos estratificados de anisotropía arbitraria.

IV.1.- Estructuras monoconductoras y acoplamientos que pueden reducirse a aquellas

En la presente sección desarrollaremos la aplicación de los métodos de análisis variacional mencionados en la sec.I.2 a líneas de transmisión sencillas. Al decir sencillas nos referimos a que el problema de encontrar los modos de propagación y sus características puede reducirse al problema del cálculo de la capacidad por unidad de longitud en una línea monoconductoras, aunque el medio en el

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

que tal línea se halle inmersa pueda ser de una gran complejidad estructural.

IV.1.a.-Línea microtira

En la figura IV.1 hemos representado la mas simples de dichas estructuras, se trata de una microtira sobre substrato anisótropo estratificado - $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(y)$ -. La capacidad por unidad de longitud de tal línea vendrá dada por la expresión (I-32) donde $\tilde{G}(\alpha)$ no es sino el elemento de matriz $\tilde{G}_{\ell\ell} - \ell$ es la interfase que soporta la microtira- obtenido en la sec.III.1.

La densidad de carga en la tira ha de ser simétrica respecto del origen de coordenadas. Para convencernos de ello basta con observar como la estructura isótropa equivalente (ver sec.III.2), es simétrica por reflexión en el plano vertical que pasa por el centro de la microtira.

Teniendo en cuenta esa propiedad resulta que la expresión:

$$\rho(x) = a_0 + a_1 \left[(1-2x/w)^{-1/2} + (1+2x/w)^{-1/2} \right] \quad (\text{IV-1})$$

análoga a (I-36.b) es una razonable aproximación a la densidad de carga superficial en la tira. Sustituyendo (IV-1) en (I-32) y minimizando por el método de

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

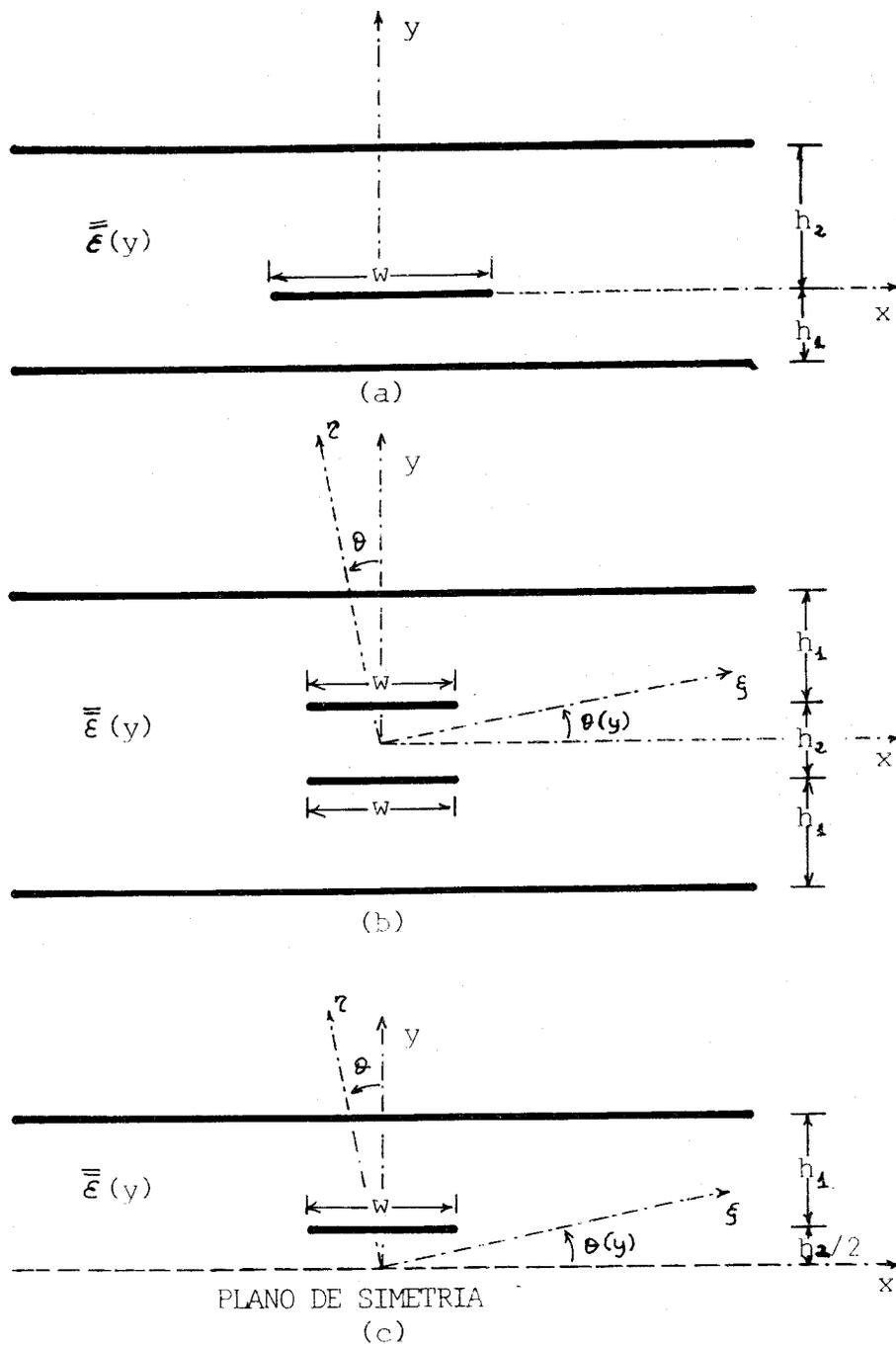


Fig. IV.1

(a).- Línea microtira en un medio dieléctrico estratificado de anisotropía arbitraria. (b).- Acoplamiento por superposición de microtiras con simetría de reflexión: $\epsilon_r^*(y) = \epsilon_r^*(-y)$, $\epsilon_s^*(y) = \epsilon_s^*(-y)$ $\theta(y) = -\theta(-y)$. (c).- Estructura monoconductor equivalente

-o0o-

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

Rayleigh-Ritz [67] queda resuelto el problema del cálculo de C . Para obtener la capacidad por unidad de longitud de la estructura en vacío, C^v , se sigue un método similar, y de C y C^v los restantes parámetros de la línea se obtienen por mediación de (I-13) con L dada por (I-19).

Para probar la eficacia del método, los resultados para la estructura de la figura IV.1.a con $h_2 \rightarrow \infty$ y suponiendo que el medio es vacío en su totalidad -para este caso, como señalamos en la sec.I.2, existe solución analítica-, han sido comparados con los resultados obtenidos por medios analíticos [48] concordando dentro de un uno por mil de error.

En las figuras IV.2-4 se representa -junto con otras curvas referentes a otras estructuras- la variación de la velocidad de fase normalizada $-v_f/c = \omega/(\beta c) = 1/(\beta_1 c)$ - para una microtira sobre un sustrato dieléctrico con un gradiente lineal de anisotropía en la dirección perpendicular al plano de tierra. Para computar los resultados el sustrato se ha supuesto dividido en N capas de dieléctrico cuya anisotropía iba variando uniformemente con la coordenada "y", encontrándose en todos los casos analizados una buena convergencia para $N=20$.

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

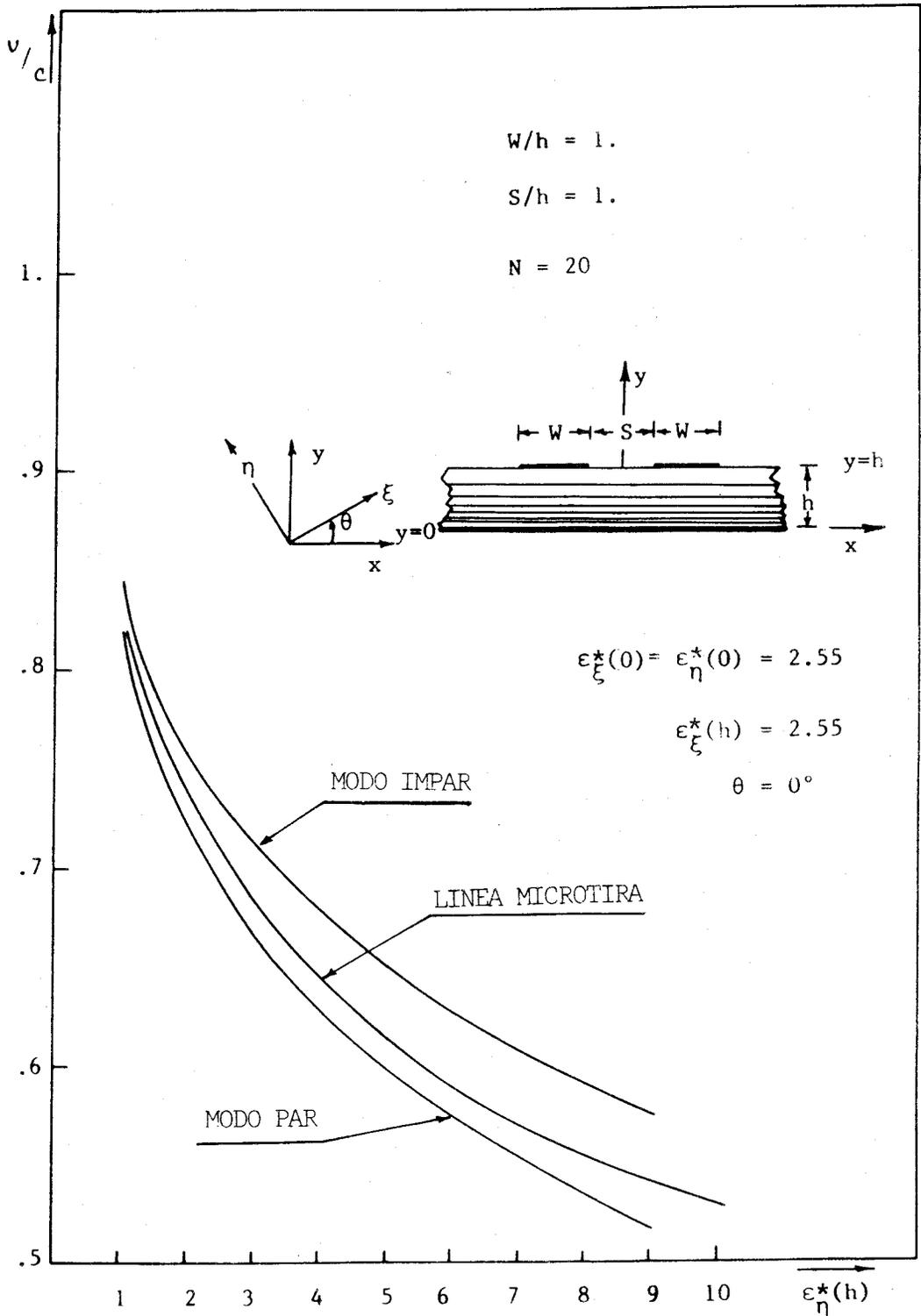


Fig. IV.2

Variación de las velocidades de fase modales para microtiras simples y acopladas sobre sustrato anisótropo con un gradiente lineal de $\epsilon_2^* \triangleq \epsilon_y^*$.

-000-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

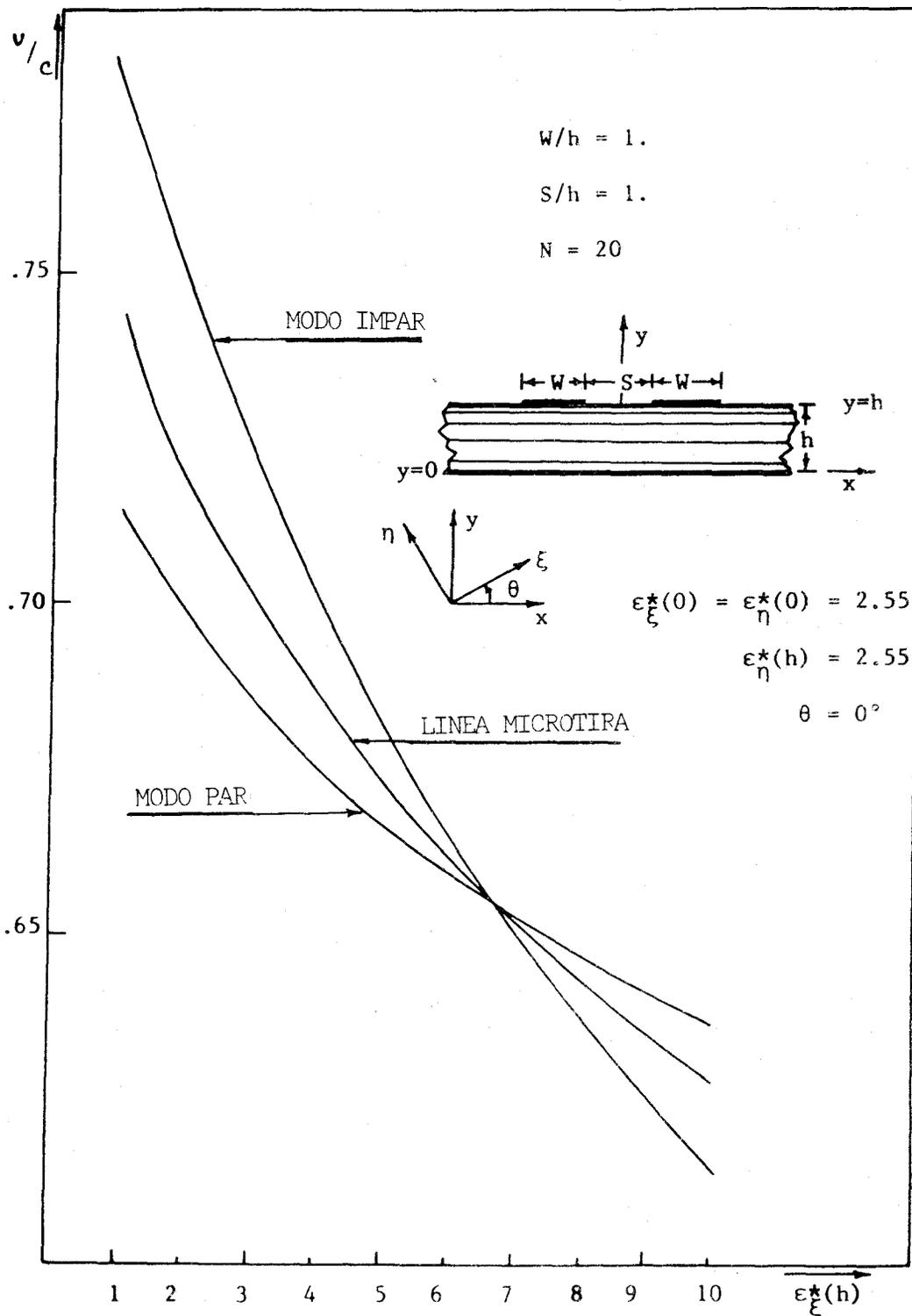


Fig. IV.3

Variación de las velocidades de fase modales para microtiras simples y acopladas sobre sustrato anisótropo con un gradiente lineal de $\epsilon_{\xi}^* = \epsilon_x^*$.

-000-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

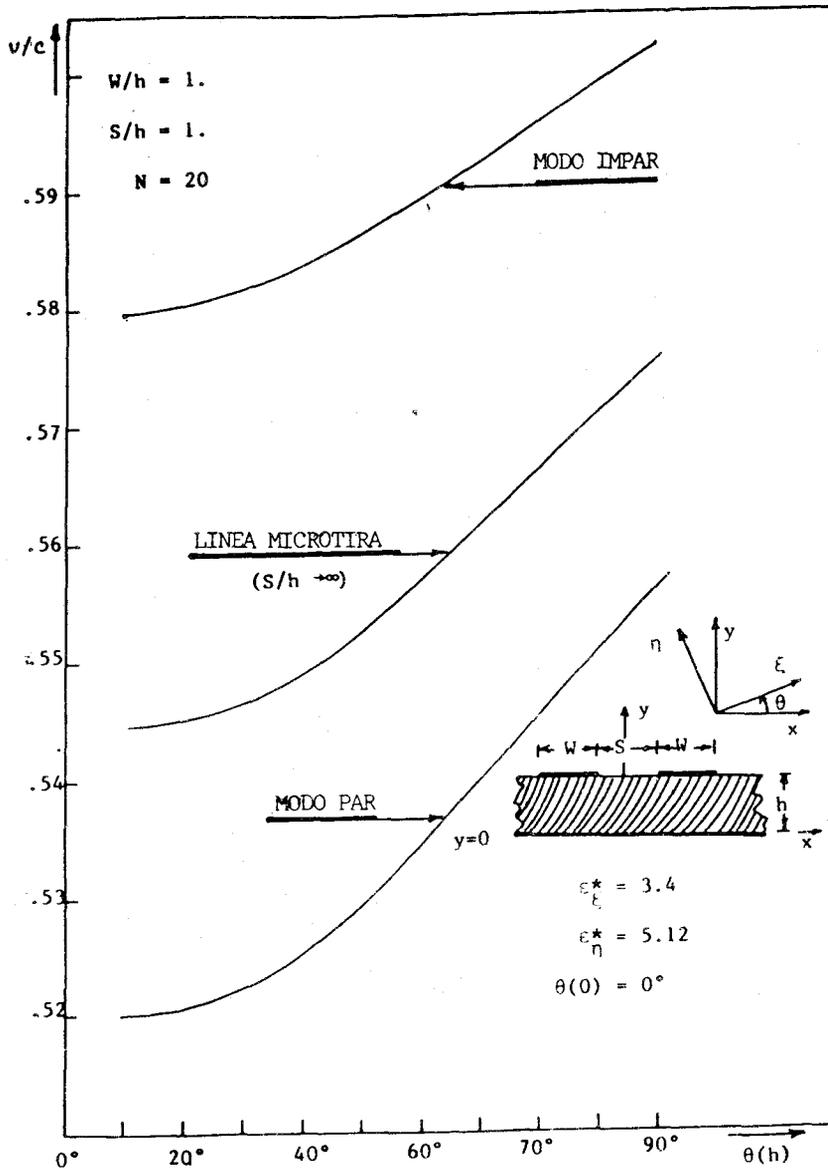


Fig. IV.4

Variación de las velocidades de fase modales para microtiras simples y acopladas sobre sustrato anisótropo ($\epsilon_{\xi}^* = 5.12$, $\epsilon_{\eta}^* = 3.4$) con un gradiente lineal de θ .

-o0o-

En la fig. IV.2 el sustrato es isótropo para $y=0$ con $\epsilon_y^*(0) = \epsilon_x^*(0) = 2.55$, y ϵ_y^* va variando linealmente con "y" hasta alcanzar el valor indicado en la abscisa para $y=h$.

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

En la fig.IV.3 la variación la realiza ε_x^* . Finalmente la fig.IV.4 presenta la variación de la velocidad de fase a consecuencia de la "torsion" de un substrato anisótropo de constantes $\varepsilon_3^*=5.12$, $\varepsilon_2^*=3.4$ que hace variar el ángulo $\vartheta(y)$ de inclinación de los ejes principales del tensor $\overline{\varepsilon}_t$ desde 0° hasta el valor indicado en la abscisa. Puede observarse como las variaciones en la permitividad según el eje "y" son las que mas afectan a los parámetros de la línea, así como la importancia de la orientación del sustrato (fig.IV.4). El tipo de análisis aquí esbozado podría ser de utilidad en el análisis de los efectos del calentamiento en sustratos con $\overline{\varepsilon}$ dependiente de la temperatura, o, en general, de cualquier otra causa que provoque un gradiente de $\overline{\varepsilon}$ (deformación mecánica, dopado, etc...).

IV.1.b.-Microtiras acopladas por superposición

Consideremos ahora dos microtiras acopladas por superposición -"broadside coupled microstrips"- tal como se muestran en la fig.IV.1.b.. Cuando el medio satisface las condiciones para que exista simetría de reflexión respecto del plano x-z - $\varepsilon_2(y) = \varepsilon_2(-y)$, $\varepsilon_3(y) = \varepsilon_3(-y)$, $\vartheta(y) = -\vartheta(-y)$ -, la línea propaga modos par e impar como se indicó en la sec.II.3. Además, las configuraciones par e impar a que hace alusión la expresión (II-22) se corresponden con las configuraciones de la fig.IV.1.c cuando el plano inferior es

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

una pared magnética y un plano conductor respectivamente. Consecuentemente C y C^V pueden calcularse haciendo uso de (I-32) con $\tilde{G}(\alpha)$ dado por las expresiones recurrentes para \tilde{G}_{ee} de la sec.III.1 para los dos casos citados.

La función de prueba para la densidad de carga vuelve a ser (IV.1) y (I-32) se minimiza por el procedimiento de Rayleigh-Ritz.

La fig.IV muestra la variación de la velocidad de fase normalizada y de la impedancia característica para un acoplamiento por superposición, de las características mencionadas, con estrato central de dieléctrico anisótropo para un valor de $\epsilon_x^*=10$, $\theta=0$, y ϵ_y^* variable de 5 a 15. Puede observarse cómo los modos impares son mucho más sensibles a las variaciones en ϵ_y^* que los modos pares, como era de esperar del hecho de que en aquellos modos el campo se halla mucho más concentrado en la zona entre las microtiras.

La fig.IV.6 muestra la variación de los parámetros característicos para los modos par e impar que se propagan en un acoplamiento simétrico por superposición con estrato central de nitruro de boro - $\epsilon_x^*=5.12$, $\epsilon_y^*=3.4$, $\theta=0$ - y superestrato de zafiro - $\epsilon_x^*=9.4$, $\epsilon_y^*=11.6$, $\theta=0$ -. Puede observarse como la introducción de un superestrato de alta permitividad hace que, para determinadas dimensiones de la

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

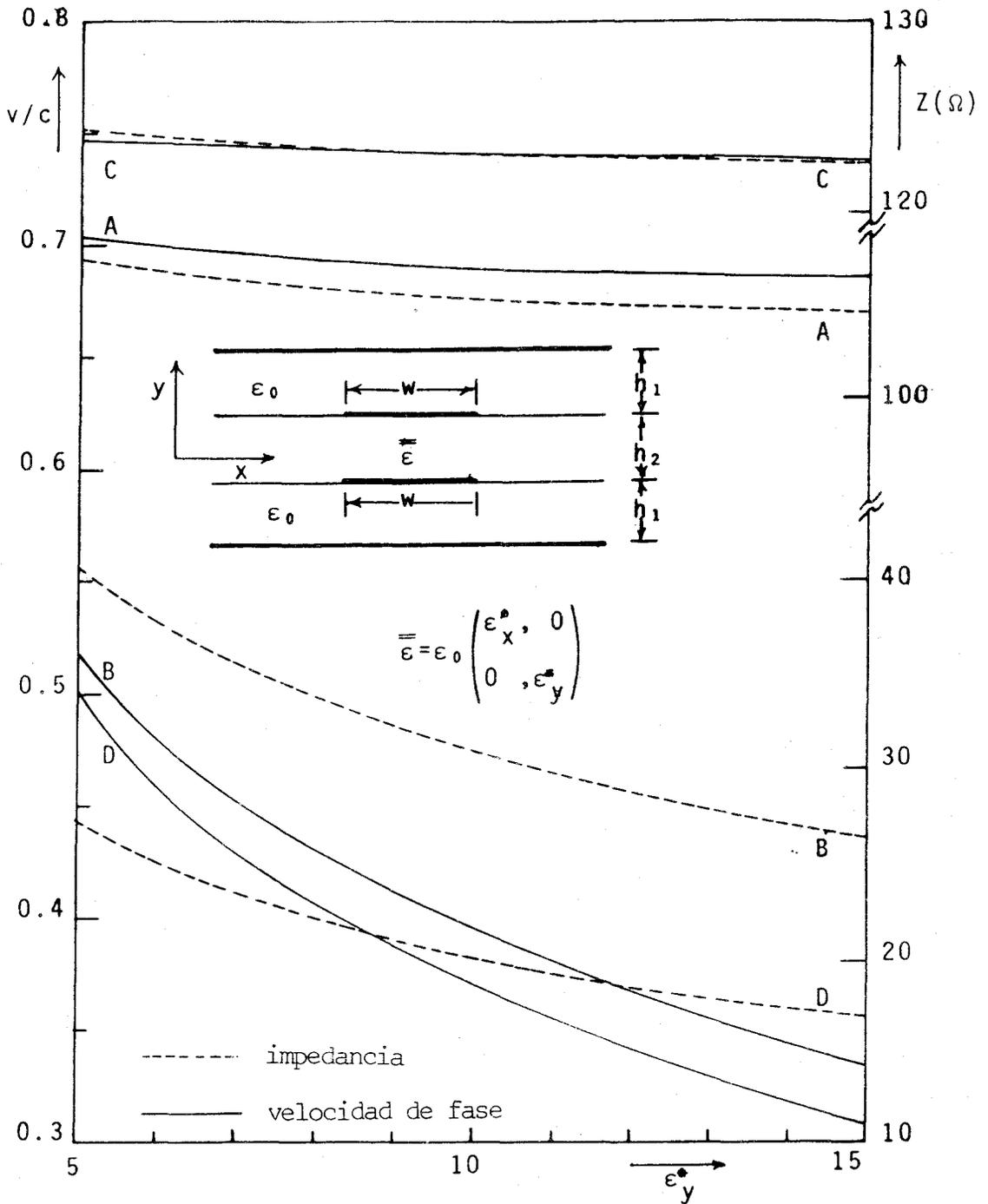


Fig. IV.5

Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales para un acoplamiento por superposición de microtiras con intercapa anisótropa de ϵ_y^* variable ($\epsilon_x^*=10$, $h_1/w=1$). A: $h_2/w=1$, modo par; B: $h_2/w=1$ modo par; C: $h_2/w=0.5$ modo par; D: $h_2/w=0.5$ modo impar.

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

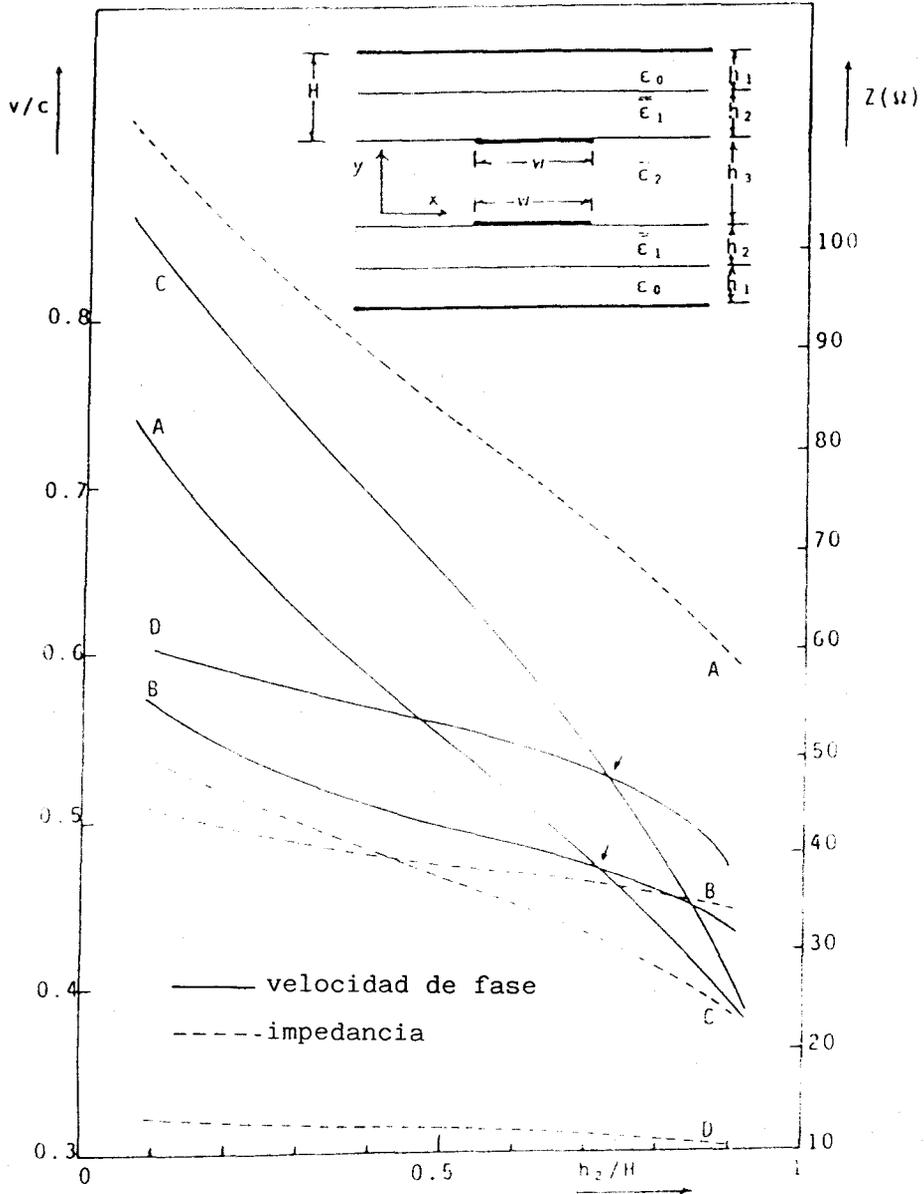


Fig. IV.6

Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales para un acoplamiento por superposición de microtiras con intercapa anisótropa de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$) y superestrato de zafiro ($\epsilon_x^* = 9.4$, $\epsilon_y^* = 11.6$), frente a la altura del superestrato ($h_3/H = 1$). A: $w/H = 1$ modo par; B: $w/H = 1$ modo impar; C: $w/H = 5$ modo par; D: $w/H = 5$ modo impar.

-o0o-

estructura, las velocidades de fase de los modos par e impar coinciden -señalado con flechas en la figura-, lo que

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

resulta de gran utilidad para el diseño de determinados componentes tales como acopladores direccionales. Dicha propiedad de la estructura de la fig.IV.6 era de esperar desde el momento en que la velocidad de fase de los modos crece a medida que la permitividad de las zonas que ha de atravesar el campo en cada configuración es menor. Consecuentemente, al introducir una zona de alta permitividad en el espacio que normalmente ocupan los campos del modo par, la velocidad de fase de éste tiende a disminuir hasta alcanzar los valores del modo impar.

IV.1.c.-Acoplamiento coplanar de microtiras

Consideremos ahora (fig.IV.7) los acoplamientos coplanares. En la fig.IV.7 se representa un par de microtiras en acoplamiento coplanar. Cuando el medio es isótropo, o incluso si el tensor $\bar{\epsilon}_t$ es diagonal respecto de los ejes "x" e "y" de la figura ($\theta=0$), la estructura tiene simetría de reflexión respecto del plano y-z, lo que permite tratar el problema de la propagación en términos de modos par e impar, correspondiendo el primero al caso en que se coloca una pared magnética en el plano y-z, y el segundo al caso en que dicho plano se supone conductor. Cuando el tensor de anisotropía está girado ($\theta \neq 0$) dicha simetría de reflexión queda rota, por cuanto la reflexión invierte el signo de θ . No obstante, dado que las

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

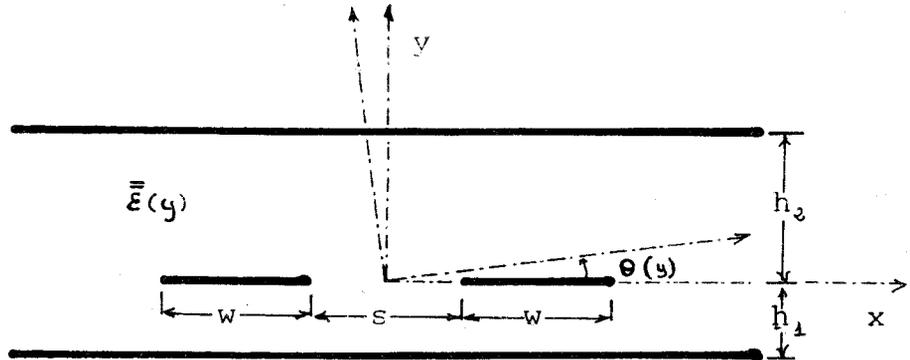


Fig.IV.7

Acoplamiento coplanar de microtiras en un medio dieléctrico de anisotropía arbitraria.

-o0o-

microtiras son coplanares, al construir la estructura isótropa equivalente según vimos en la sec.III.1, ésta si resulta tener simetría de reflexión respecto del plano entre ambas microtiras, por lo que debe cumplirse que:

$$\rho(x) = \pm \rho(-x) \quad (\text{IV.2})$$

donde el signo "+" vale para el modo par y el "-" para el impar. Así pues, la función $\rho(x)$ completa sobre la interfase es una función par para el modo par e impar para

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

el modo impar. Consecuentemente, el problema de determinar C y C^v para la configuración de la fig.IV.7, puede resolverse, cómo un problema de líneas monoconductoras, usando para $f(\alpha)$ en (I-32) la transformada de Fourier en seno para el modo impar, y en coseno para el modo par, con $\tilde{G}(\alpha)$ dada por el correspondiente elemento de matriz (III-23.b). El lector interesado en una descripción mas detallada puede consultar [67].

La función de prueba usada en (I-32) para la densidad de carga sobre la microtira de la izquierda es:

$$f_1(x) = a_0 + a_1(x+s/2)^{-1/2} + a_2(x+s/2+w)^{-1/2} \quad (IV-3)$$

que representa una modificación de (IV-1) acorde con el hecho de que ahora dicha función no tiene que ser simétrica respecto del centro de la tira. Sobre la microtira de la derecha es $f_2(x) = \pm f_1(-x)$, según se trate del modo par o impar.

En las figs.IV.2-4 se muestra la variación de la velocidad de fase normalizada para microtiras acopladas sobre sustrato dieléctrico con un gradiente lineal de anisotropía según la dirección del eje "y" (ver mas arriba). En la fig.IV.3 se aprecia como para cierto gradiente de ϵ_x^* , las velocidades de fase de los modos par e

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

impar coinciden. Dicho efecto puede entenderse mediante razonamientos análogos a los que se hicieron en torno a la fig.IV.6.

Otro método para obtener dicha igualación de las velocidades de fase en un acoplamiento coplanar, sin duda mucho más asequible, se muestra en la fig.IV.8, y consiste en la utilización de un sustrato en doble capa, lo que permite conseguir dos cortes entre las velocidades de fase de ambos modos para un mismo valor de las dimensiones de la estructura (variando sólo la relación $h_2/(h_1+h_2)$).

Finalmente, usando un sustrato y un superestrato del mismo material anisótropo, con su dirección de mayor permitividad alineada según el eje "x", puede también conseguirse dicha igualación de las velocidades de fase para ambos modos, como se muestra en la fig.IV.9. Se trata aquí de una propiedad ligada al uso de sustratos anisótropos, por cuanto el uso de un sustrato y un superestrato isótropo, muy popular en el diseño de acopladores, acerca los valores de ambas velocidades de fase, pero sin llegar nunca a igualarlos. Por otra parte, la elevada homogeneidad de las estructuras de la fig.IV.9, permite esperar que la igualdad de ambas velocidades se mantenga dentro de márgenes aceptables incluso a muy altas frecuencias, allí donde la aproximación cuasi-estática no

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

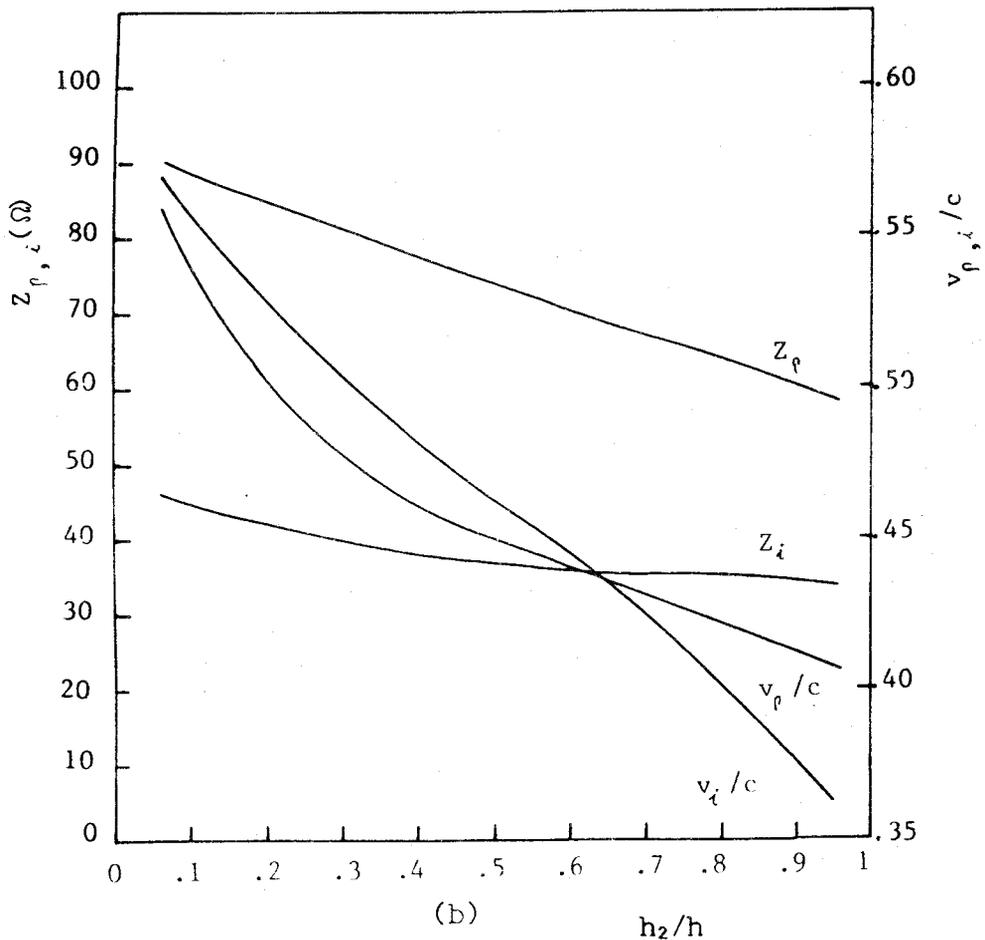
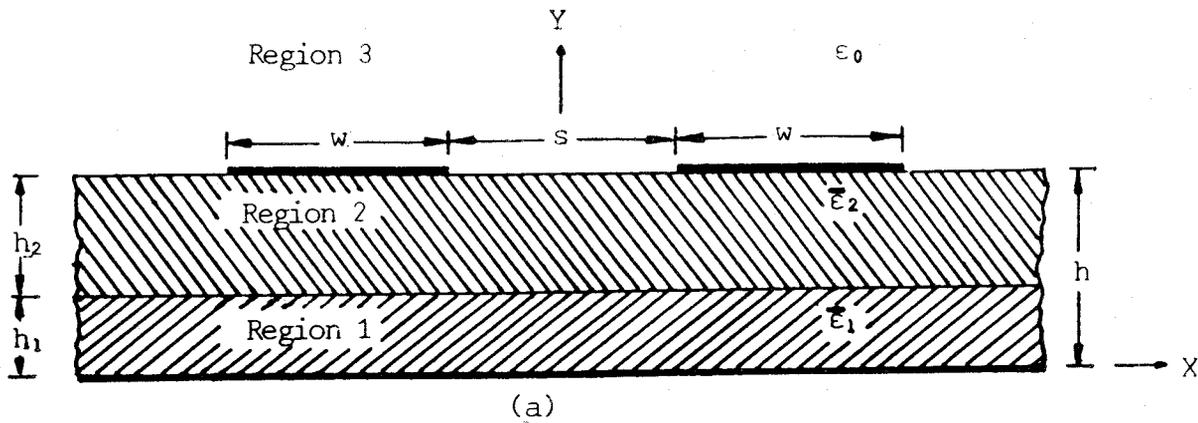


Fig. IV.8

(a).- Acoplamiento coplanar de microtiras sobre sustrato anisótropo en doble capa ($h_3 \rightarrow \infty$). (b).- Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales frente al cociente h_2/h ($w/h=1.05$, $s/h=0.37$). Región 1 nitruro de boro ($\epsilon_s^*=5.12$, $\epsilon_p^*=3.4$). Región 2 zafiro ($\epsilon_s^*=9.4$, $\epsilon_p^*=11.6$).

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

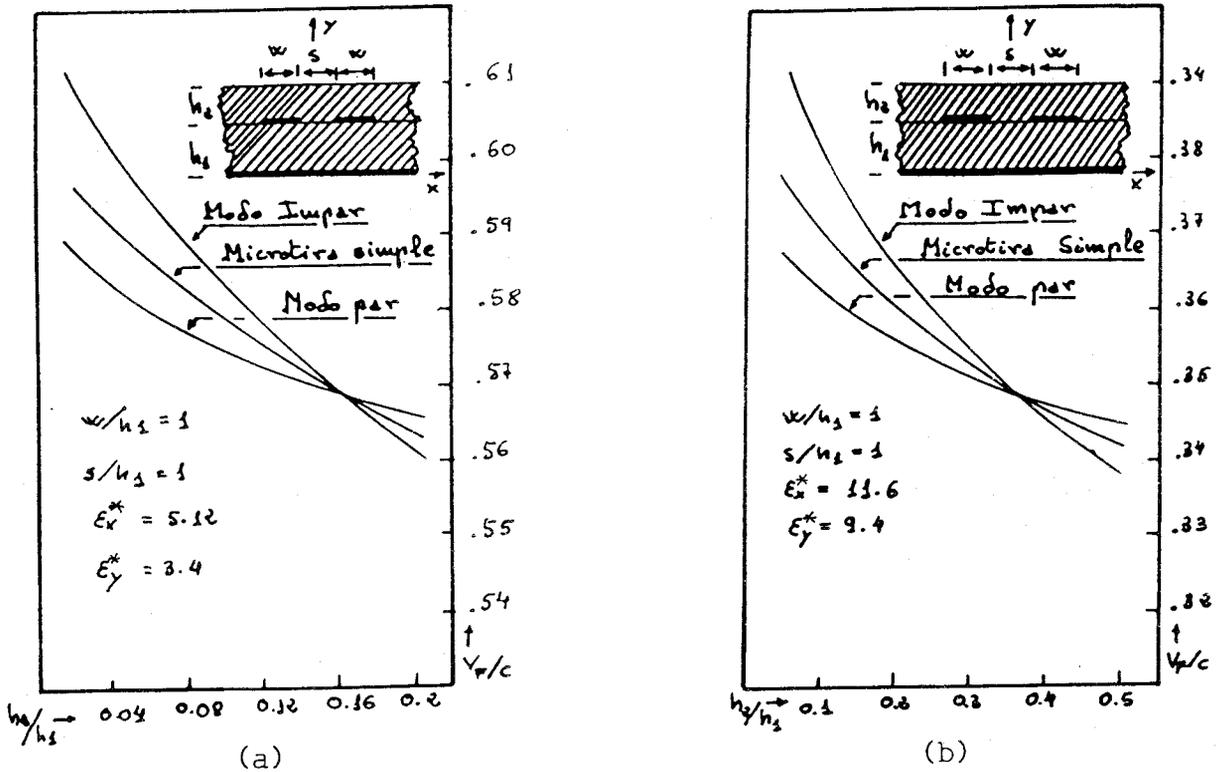


Fig. IV.9

Variación de la velocidad de fase para un acoplamiento coplanar de microtiras sobre sustrato anisótropo con superestrato del mismo material y orientación. (a).- Medio: Nitruro de boro. (b).- Medio: Zafiro.

-000-

resulta generalmente aplicable (volveremos sobre este extremo mas adelante). Todos los efectos hasta aquí mencionados en relación con la igualación de las velocidades de fase de los modos par e impar, pueden interpretarse físicamente a la luz de razonamientos similares a los realizados mas arriba en torno a la fig. IV.6.

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

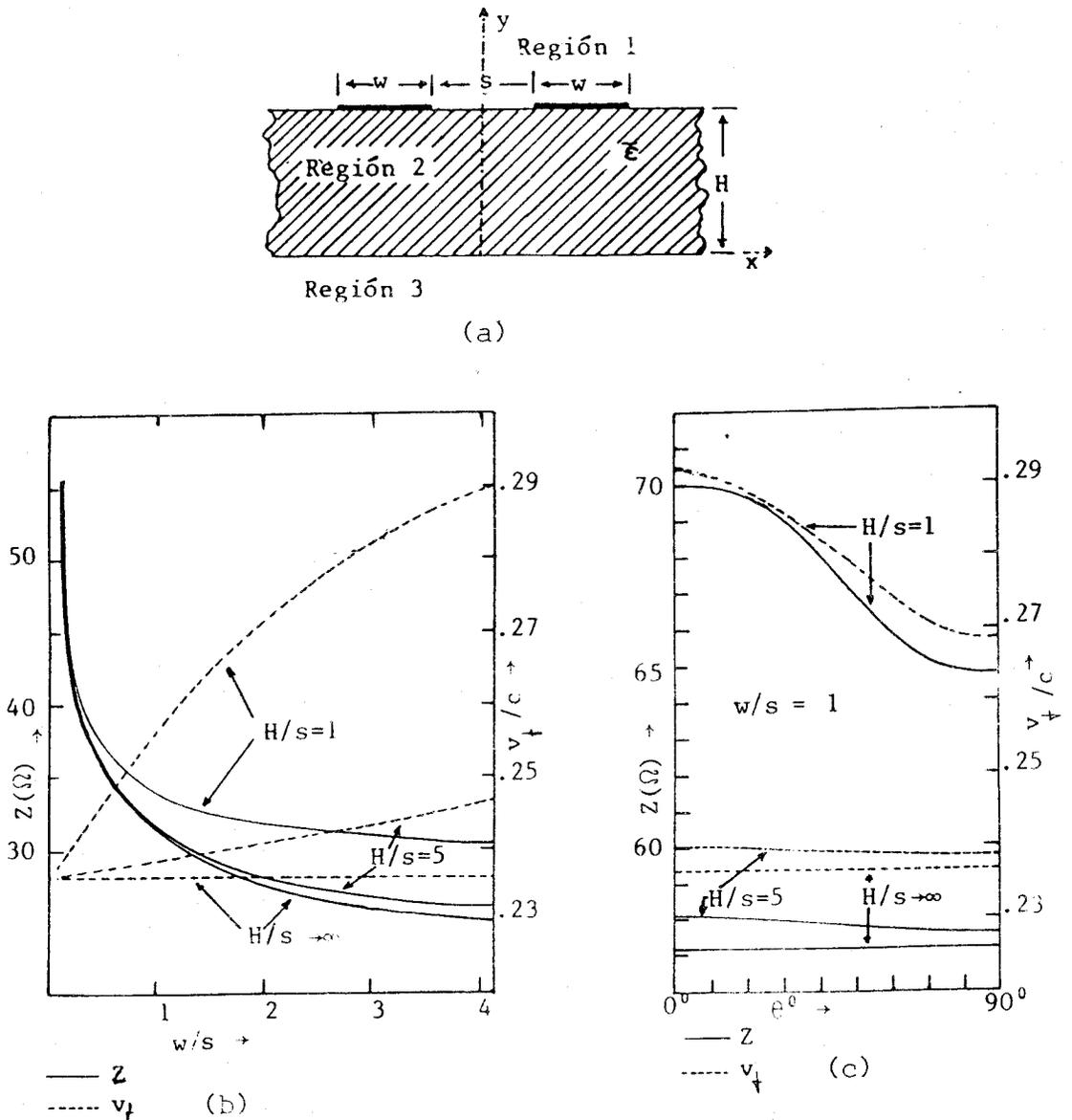


Fig. IV.10

(a).- Tiras coplanares sobre sustrato anisótropo.
(b).- y (c).- Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales en tiras coplanares sobre sustrato anisótropo de LiNbO ($\epsilon_x^* = 28$, $\epsilon_y^* = 43$).

-o0o-

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

Cuando en la fig.IV.7 hacemos tender h_1 y h_2 a infinito, aún tenemos una línea de transmisión por la que se propaga un modo análogo al modo impar definido para la línea de la fig.IV.1. Dicha estructura que se analiza de forma totalmente análoga a la de la fig.IV.7 recibe el nombre de "tiras coplanares" y se usa en el diseño de moduladores electroópticos (modulación de haces laser por efecto electrooptico en cristales anisótropos [48]), por cuanto permite crear un campo aproximadamente constante según la dirección del eje "x" en la zona entre las microtiras. En la fig.IV.10 se muestra la variación de los parámetros característicos de propagación para una estructura como la descrita, respecto de la variación de algunos parámetros estructurales.

IV.2.-Acoplamiento simétrico de dos microtiras

En la presente sección analizaremos aquellos acoplamientos de dos microtiras que, pese a no poder reducirse a problemas de un sólo conductor, como los de la sección anterior, presentan no obstante cierta simetría que hace posible la transmisión a través de la línea de modos escalares par e impar.

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

La estructura general se muestra en la fig.II.3.b. Si indicamos con los subíndices 1 y 2 las interfases que soportan ambas tiras, la densidad de carga y el potencial de las configuraciones par e impar satisfarán las relaciones:

$$\rho_1(\mathbf{x}) = \pm \rho_2(-\mathbf{x}) \quad (\text{IV-4.a})$$

$$V_1(\mathbf{x}) = \pm V_2(-\mathbf{x}) \quad (\text{IV-4.b})$$

donde el signo "+" vale para la configuración par y el "-" para la impar.

La ecuación (IV-4) puede trasladarse al dominio de Fourier, donde toma la forma:

$$\tilde{\rho}_1(\alpha) = \pm \tilde{\rho}_2^*(\alpha) \quad (\text{IV-5.a})$$

$$\tilde{V}_1(\alpha) = \pm \tilde{V}_2^*(\alpha) \quad (\text{IV-5.b})$$

Las componentes del vector potencial $\vec{\tilde{V}} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ están relacionadas con las del vector densidad de carga $\vec{\tilde{\rho}} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ mediante la matriz de Green estática $\bar{\bar{G}}$, cuyas componentes son los elementos $\tilde{G}_{K,L}(\alpha)$; K,L=1,2, definidos en (III-24). Teniendo en cuenta la simetría de la estructura la matriz $\bar{\bar{G}}$

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

puede escribirse como:

$$\bar{\bar{G}} = \begin{bmatrix} G_{\Delta\Delta} & G_{\Delta e} \\ G_{\Delta e}^* & G_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-6})$$

Cómo ya señalamos en la sec.II.3 todos los parámetros característicos pueden deducirse de las capacidades modales par e impar de la estructura, $C_{p,i}$ y $C_{p,i}^y$. Para obtenerlas usaremos las relaciones variacionales (II-77), (II-78) con la energía por unidad de longitud $U_{p,i}$ dada por:

$$U_{p,i} = (1/4) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\rho}_{p,i}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{G}} \cdot \tilde{\rho}_{p,i} \quad (\text{IV-7})$$

donde $\tilde{\rho}_{p,i}$ es el vector densidad de carga de las configuraciones par e impar respectivamente y el superíndice "+" indica complejo conjugado. Para obtener $U_{p,i}^y$ puede usarse una relación análoga a (IV-7), usando en lugar de $\bar{\bar{G}}$ la matriz de Green para la estructura en vacío.

La expresión (IV-7) puede escribirse, usando (IV-5) y (IV-6) en la forma:

$$U_{p,i} = (1/2\pi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\rho}_1^* G_{11} \tilde{\rho}_1 \pm \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \text{Re}(\tilde{\rho}_1^* G_{\Delta e} \tilde{\rho}_\Delta^*) \right] \quad (\text{IV-8})$$

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

donde el signo "+" vale para la configuración par y el "-" para la impar. Obsérvese cómo en (IV-8) sólo aparece la densidad de carga de una de las microtiras.

La densidad de carga $\tilde{\rho}_s(\alpha)$ es una función en general compleja; escribámosla en la forma:

$$\tilde{\rho}_s(\alpha) = I_1 + jI_2 \quad (\text{IV-9})$$

donde

$$I_1(\alpha) = \int_{s/2 - w/2}^{s/2 + w/2} dx \rho_1(x) \cos(\alpha x) \quad (\text{IV-10.a})$$

$$I_2(\alpha) = \int_{s/2 - w/2}^{s/2 + w/2} dx \rho_1(x) \text{sen}(\alpha x) \quad (\text{IV-10.b})$$

El siguiente paso es introducir (II-10) en (II-8):

$$U_{p,i} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha G_{33} (I_1^2 - I_2^2) \pm \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha [\text{Re}(G_{32}) (I_1^2 - I_2^2) + 2\text{Im}(G_{32}) I_1 I_2] \quad (\text{IV.11})$$

La expresión (IV-11) aún puede reducirse si se tienen en cuenta las propiedades de simetría de las funciones $G_{ij}(\alpha)$ e $I_j(\alpha)$:

$$I_1(\alpha) = I_1(-\alpha); \quad I_2(\alpha) = -I_2(-\alpha);$$

$$G_{33}(\alpha) = G_{33}(-\alpha); \quad \text{Re}(G_{32}(\alpha)) = \text{Re}(G_{32}(-\alpha));$$

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

$\text{Im}(G_{1,2}(\alpha)) = -\text{Im}(G_{1,2}(-\alpha))$, como se deduce de las definiciones (IV-10) y (III-22)-(III-23):

$$U_{p,i} = (1/n) \int_0^{\infty} d\alpha G_{11} (I_1^2 - I_2^2) \pm \int_0^{\infty} d\alpha [\text{Re}(G_{12})(I_1^2 - I_2^2) + 2\text{Im}(G_{12})I_1 I_2] \quad (\text{IV-12})$$

La expresión (IV-12) puede ahora introducirse en (II-24) para obtener C . Expresiones análogas pueden obtenerse para C^v .

Cómo función de prueba para la densidad de carga se ha usado:

$$\rho(x) = a_0 + a_1 \left(\frac{s+w}{2} - x \right)^{-1/2} + a_2 \left(\frac{s-x}{2} + x \right)^{-1/2} \quad (\text{IV-13})$$

que es una generalización obvia de (IV-3)

Siguiendo el método delineado arriba se han computado las características de propagación de varias estructuras acopladas tal y como se muestra en las figs. IV-11 y IV-12.

En la fig. IV-11 se muestra la variación de los parámetros característicos en un acoplamiento por superposición de microtiras con sustrato invertido de

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

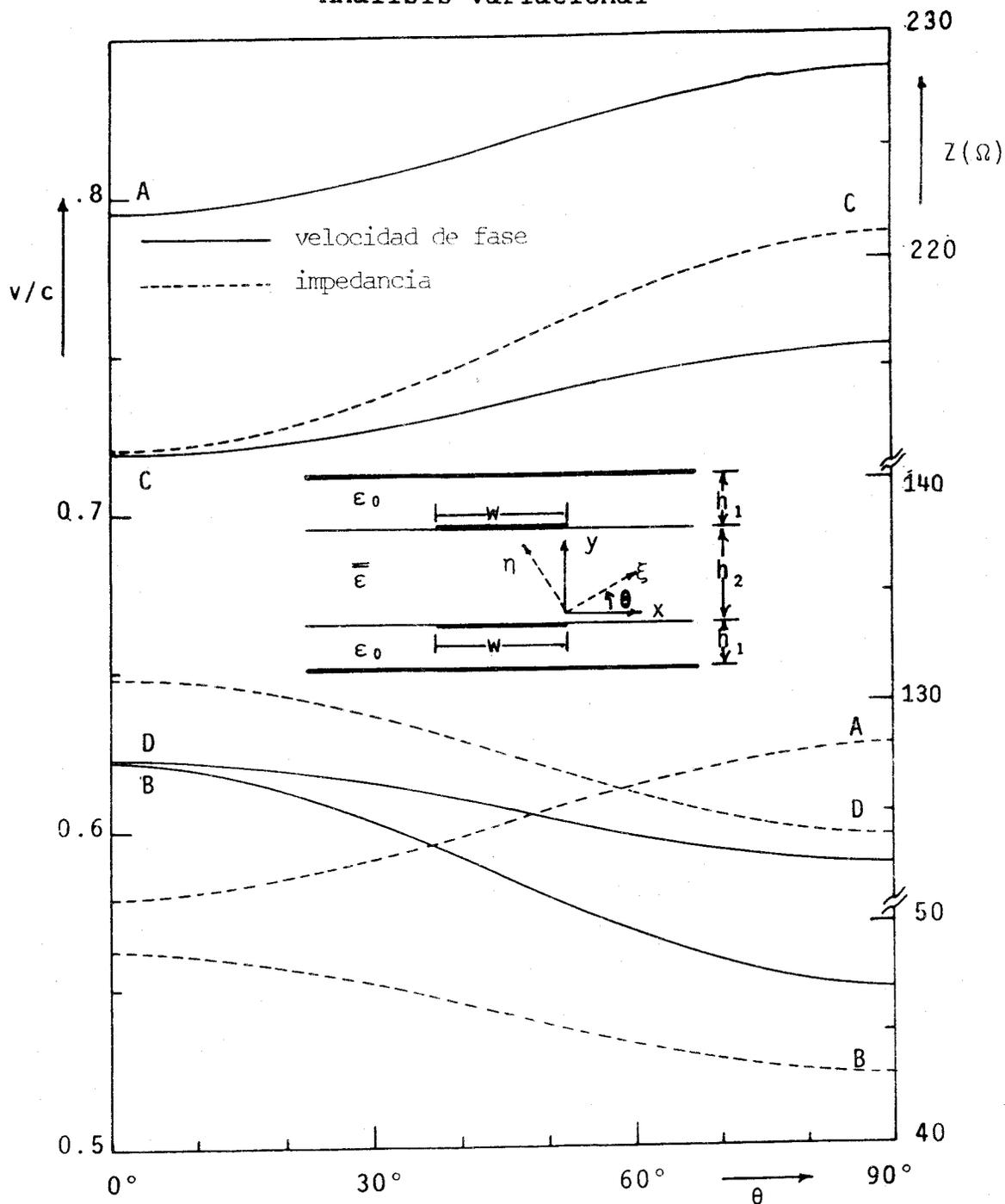


Fig. IV.11

Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales en un acoplamiento por superposición de microtiras con intercapa anisótropa de nitruro de boro ($\epsilon_1^* = 5.12$, $\epsilon_2^* = 3.4$, $h_1/h_2 = 1$) frente al ángulo de inclinación de los ejes principales del tensor. A: $w/h_2 = 1$ modo par; B: $w/h_2 = 1$ modo impar; C: $w/h_2 = 0.1$ modo par; D: $w/h_2 = 0.1$ modo impar.

-o0o-

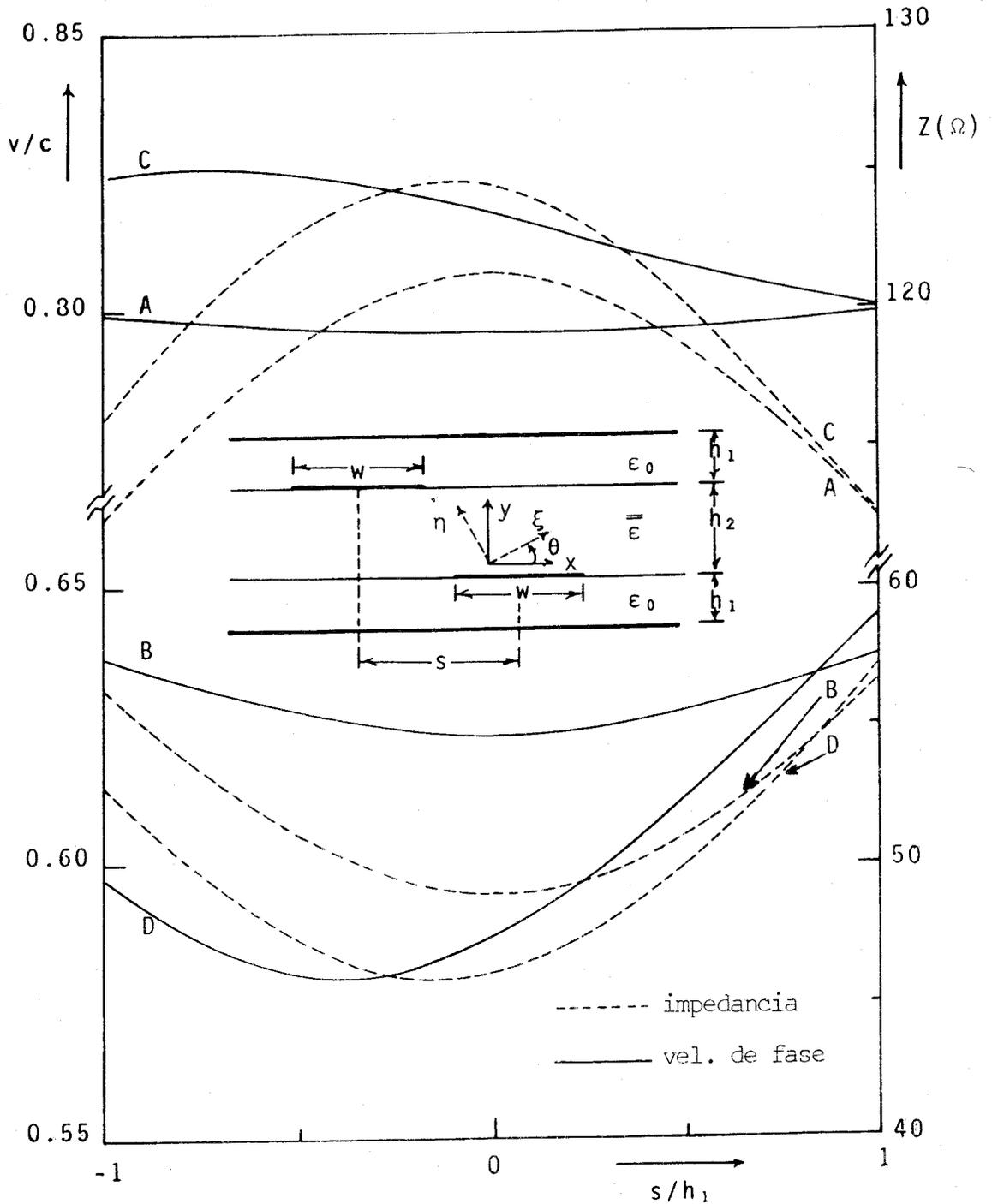


Fig. IV.12

Velocidades de fase normalizadas e impedancias modales en un acoplamiento por superposición de microtiras con intercapa anisótropa de nitruro de boro ($\epsilon_{\xi}^*=5.12$, $\epsilon_{\eta}^*=3.4$, $h_1/w=1$, $h_2/w=1$) frente a la desviación "s" de las microtiras. A: $\theta=0^\circ$ modo par; B: $\theta=0^\circ$ modo impar; C: $\theta=45^\circ$ modo par; D: $\theta=45^\circ$ modo impar.

-o0o-

nitruro de boro ($\epsilon_{\eta}^*=3.4$, $\epsilon_{\xi}^*=5.12$) frente al ángulo de orientación del tensor. Obsérvese cómo, excepto para $\theta=0$

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

ó $\theta=90^\circ$, la estructura carece de simetría especular y no puede por tanto ser analizada según los métodos expuestos en la sec.IV.1.

En la fig.IV-12 se muestra la variación de los parámetros modales frente a la desviación de las microtiras "s" en un acoplamiento por superposición de microtiras con desviación lateral y sustrato invertido de nitruro de boro. Las gráficas C y D muestran dicha variación en una estructura con sustrato girado según un ángulo de 45° , puede observarse la asimetría a que da lugar la mencionada inclinación de los ejes principales del tensor, por comparación con las gráficas A y B, que hacen referencia a la estructura con tensor diagonal ($\theta=0$).

IV.3.-Línea multiconductora y multicapa

Consideremos ahora el caso completamente general de una estructura compuesta por N capas de dieléctrico anisótropo con M tiras conductoras en las interfases (fig.III.2). Como ya indicamos en la sec.II.2 la estructura propaga M modos cuasiestáticos cuyas velocidades de fase normalizadas $v_f/c = \omega/(\beta c) = 1/(\beta_1 c)$ vienen dadas por las raíces cuadradas de los inversos de los valores propios de la matriz $(\bar{C}^v)^{-1} \bar{C}$ (II-17), y cuyos vectores de intensidad y potencial están relacionados mediante una matriz de

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

impedancia \bar{Z} , dada por (II-18) y común a los M modos.

Así pues todos los parámetros característicos de la línea pueden expresarse en función de \bar{C} y \bar{C}^v . El problema consiste entonces en el cálculo de las matrices \bar{C} y \bar{C}^v . A continuación describiremos el método variacional que se ha usado para el cálculo de \bar{C} , siendo el algoritmo para el cálculo de \bar{C}^v en todo análogo al anterior.

IV.3.a.-Método de análisis

Numeremos cada una de las tiras desde 1 hasta M, y sea $U_{\gamma\nu}$ ($\gamma, \nu = 1, 2, \dots, M$) la energía electrostática por unidad de longitud de la estructura de la fig. III.2 cuando sólo las tiras γ y ν están cargadas con una carga total unidad. Debe cumplirse entonces que:

$$U_{\gamma\gamma} = (1/2)C_{\gamma\gamma}^{-1} \quad (\text{IV-14.a})$$

$$U_{\gamma\nu} = (1/2)[C_{\gamma\gamma}^{-1} + C_{\nu\nu}^{-1}] + C_{\gamma\nu}^{-1} \quad (\text{IV-14.b})$$

donde $C_{\gamma\nu}^{-1}$ son los elementos de la matriz \bar{C}^{-1} . Las relaciones (IV-14) determinan por completo la matriz \bar{C} , por lo que el problema se reduce al cálculo de las $M(M+1)/2$ cantidades independientes $U_{\gamma\nu}$ ($\gamma, \nu = 1, 2, \dots, M$).

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

Para calcular $U_{\gamma, \nu}$ usamos la expresión:

$$U_{\gamma, \nu} = (1/2) \sum_L \int dx \rho_L(x) V_L(x) \quad ; \quad L=1, 2, \dots \quad (IV-15)$$

donde la suma debe extenderse a todas las interfaces que contengan tiras -cargadas o no- y $\rho_L(x)$, $V_L(x)$ son las densidades de carga por unidad de longitud y el potencial en dichas interfaces. La expresión (IV-15) puede escribirse usando los resultados de la sec.III.1 y la identidad de Parseval en la forma:

$$U_{\gamma, \nu} = (1/4\pi) \sum_{k, L} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\rho}_k^*(\alpha) \tilde{G}_{k, L}(\alpha) \rho_L(\alpha) \quad (IV-16)$$

De acuerdo con el teorema de Thompson [6], la energía electrostática $U_{\gamma, \nu}$ corresponde al mínimo valor posible de (IV-16) cuando a $\rho_k(x)$ y $\rho_L(x)$ se les impone la restricción de que la carga total sobre los conductores se anule para toda microtira distinta de la γ o la ν :

Así pues, la expresión (IV-16) con la restricción mencionada sobre las $\rho_L(x)$ es una expresión variacional para el cálculo de la cantidades $U_{\gamma, \nu}$. Además, cuando las densidades de carga $\rho_k(x)$ se aproximan mediante funciones arbitrarias que cumplan las condiciones de contorno apropiadas, se obtiene siempre una cota superior del valor

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

verdadero de $U_{\gamma\nu}$. De acuerdo con (IV-14.a) lo mismo puede decirse de $C_{\gamma\gamma}^{-1}$. De las cantidades $C_{\gamma\nu}^{-1}$ ($\gamma \neq \nu$) obtenidas mediante (IV-14.b) sólo cabe decir que su expresión en función de las densidades de carga aproximadas es variacional, pero nada nos permite afirmar que su expresión aproximada sea una cota inferior o una cota superior de su verdadero valor.

Para aproximar las densidades de carga sobre cada conductor puede recurrirse a una expresión similar a (IV-1):

$$\rho_{\gamma}(x) = a_0 + a_1 (1 - 2z/w_{\gamma})^{-1/2} + a_2 (1 + 2z/w_{\gamma})^{-1/2} \quad (\text{IV.17})$$

donde $z = x - x_{\gamma}$, siendo x_{γ} la coordenada "x" del punto central de la microtira γ , y w_{γ} la anchura de dicha microtira.

IV.3.b.-Ejemplos

Usando el método variacional descrito hasta aquí, se han analizado las estructuras descritas desde un punto de vista cualitativo en la sec.II.3.

Centrandonos en primer lugar en la estructura de la fig.II.2. Se ha elaborado un programa para la evaluación de los parámetros característicos \bar{C} , $v_{\downarrow}^{\alpha}/c$ ($\alpha=c, \pi$) y P^{α} ($\alpha=c, \pi$) de acuerdo con las expresiones desarrolladas en la

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

sec.II.3.

Las figs.IV.13, IV.14 muestran la variación de los parámetros característicos v_{\dagger}^{α}/c y P_{α} ($\alpha=c,\pi$) para un par de microtiras acopladas asimétricamente con sustrato invertido de nitruro de boro ($\epsilon_{\eta}=3.4$, $\epsilon_{\xi}=5.12$). En la figura IV-13 la asimetría se introduce variando la altura del plano de masa superior. En la figura IV-14 la asimetría se introduce variando el ancho de una de las microtiras. En ambos casos se aprecian importantes desviaciones de los modos par e impar, bien sea en los vectores de intensidad (modos c) o de potencial (modos π), de acuerdo con (II-27) y (II-34).

Considerando ahora la estructura de la figura II.5, en las figs.IV.15, IV.16 se muestra la variación de los parámetros $v_{\dagger}^{\alpha\beta}$ y $P^{\alpha\beta}$ ($\alpha,\beta=c,\pi$) respectivamente para un acoplamiento de cuatro microtiras como el descrito en el párrafo II.3.b con sustrato invertido de nitruro de boro (fig.II.5), con respecto al ángulo de inclinación de los ejes principales del tensor de anisotropía, $\overline{\epsilon}_t$. Puede observarse cómo las desviaciones de los modos par e impar son pequeñas pero apreciables, sobre todo en los modos c- π y π -c.

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

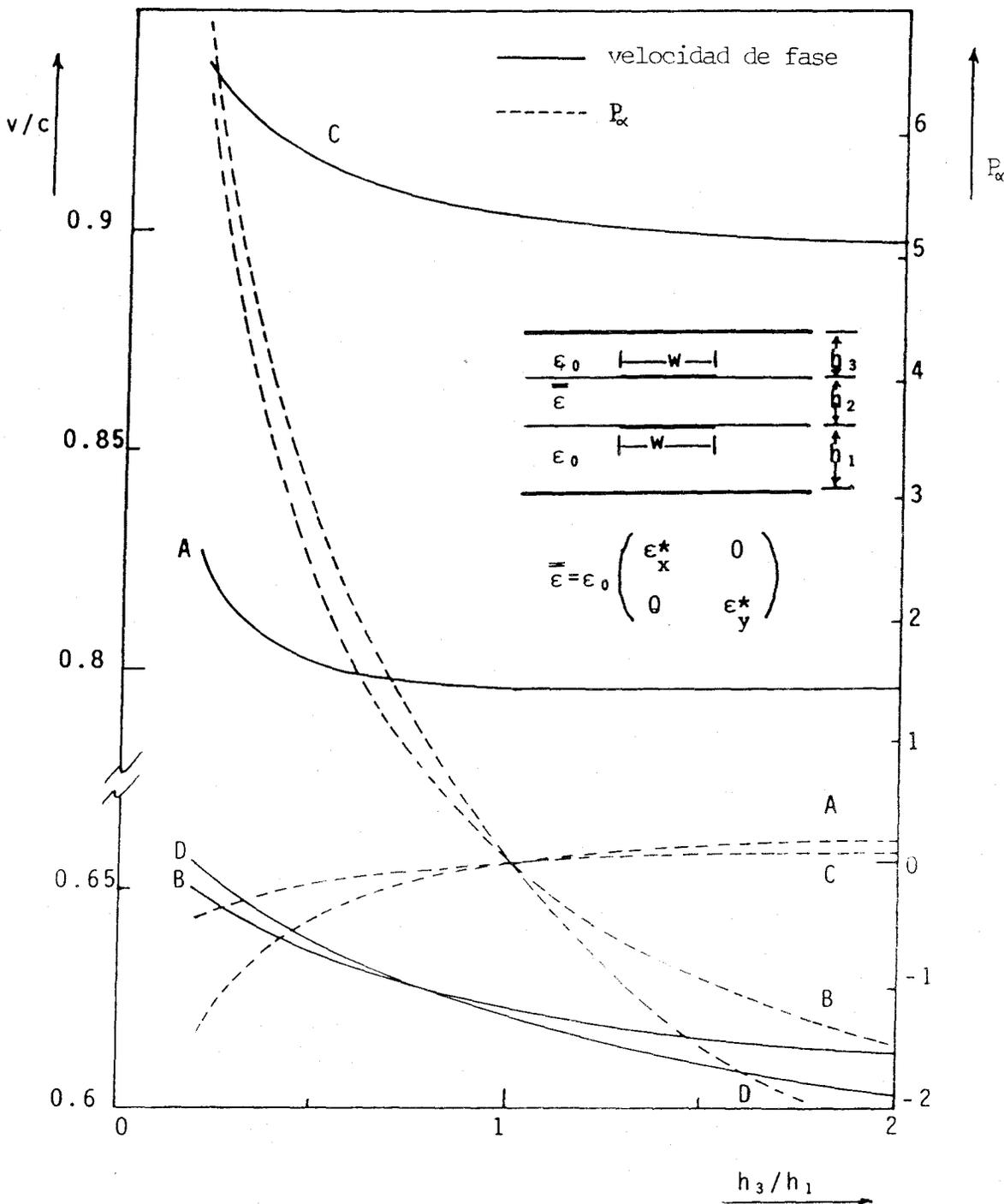


Fig. IV.13

Parámetros característicos (velocidades de fase normalizadas y P_α) para un acoplamiento asimétrico por superposición de mirotiras con intercapa de nitruro de boro ($\epsilon_x^*=5.12$, $\epsilon_y^*=3.4$) y altura variable del plano de masa superior ($h_1/h_2=1$). A: $w/h_2=1$ modo c. B: $w/h_2=1$ modo π ; C: $w/h_2=5$ modo c; D: $w/h_2=5$ modo π .

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

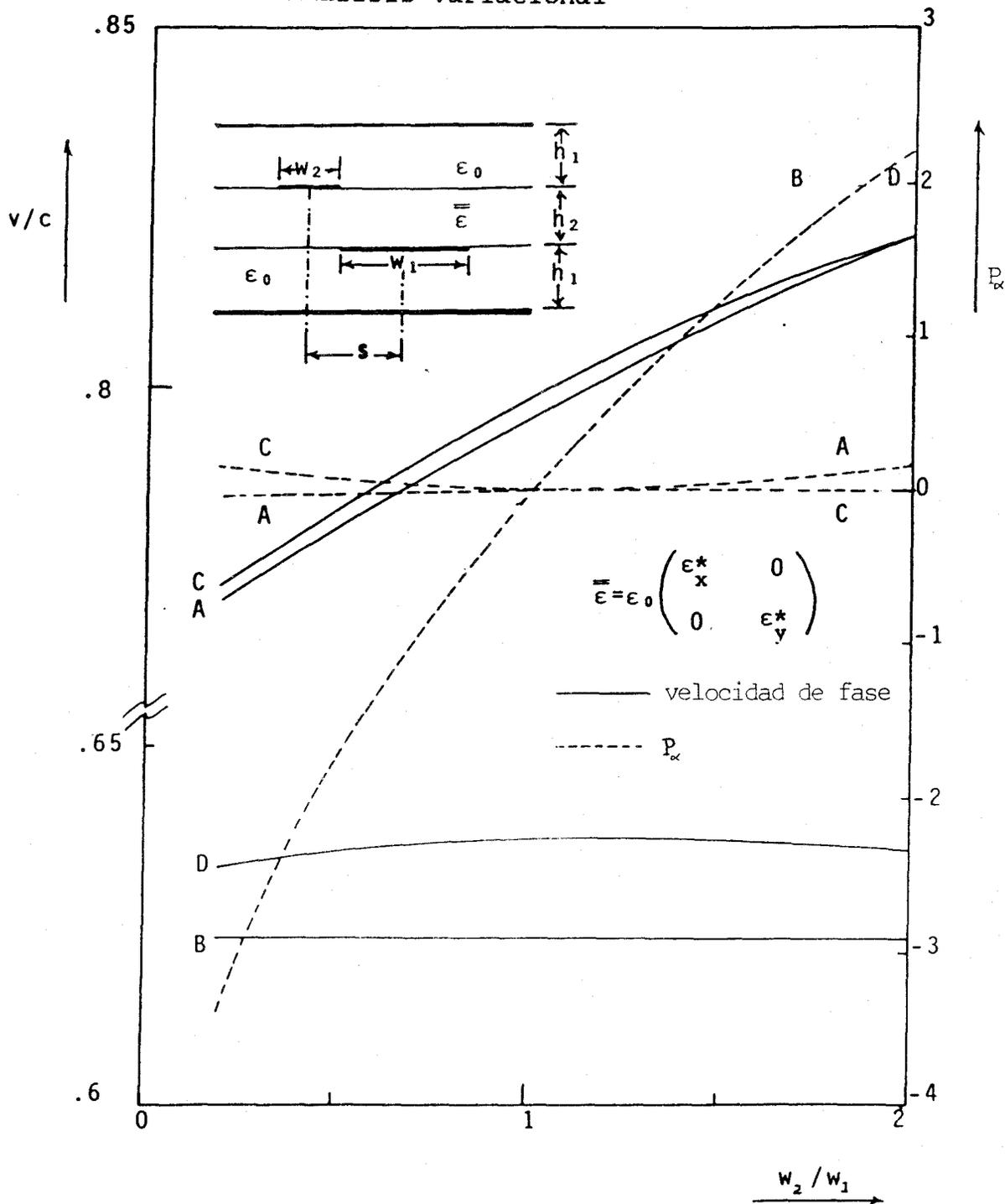


Fig. IV.14

Parámetros característicos (velocidades de fase normalizadas y P_α) para un acoplamiento asimétrico por superposición de microtiras con intercapa de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$) y anchura variable de la microtira superior ($h_1/w_1 = 1$, $h_2/w_1 = 1$). A: $s=0$ modo c; B: $s=0$ modo n; C: $s/w = 1$ modo c; D: $s/w = 1$ modo n.

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

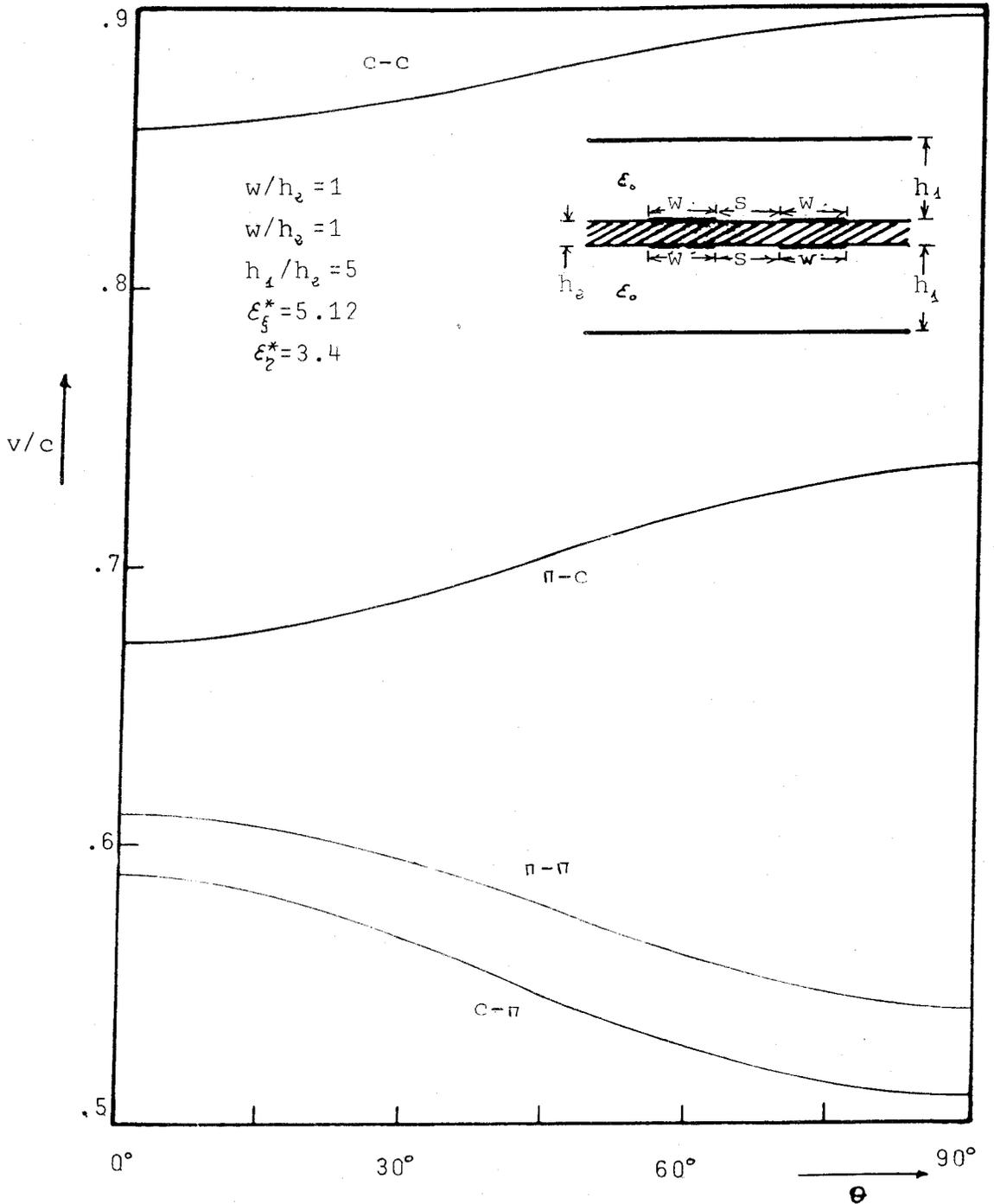


Fig. IV.15

Variación de las velocidades de fase normalizadas modales en la estructura de la fig. II.5 en función del ángulo de orientación de los ejes principales del tensor $\bar{\epsilon}_t$. Medio: Nitruro de boro ($\epsilon_s^* = 5.12$, $\epsilon_2^* = 3.4$).

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

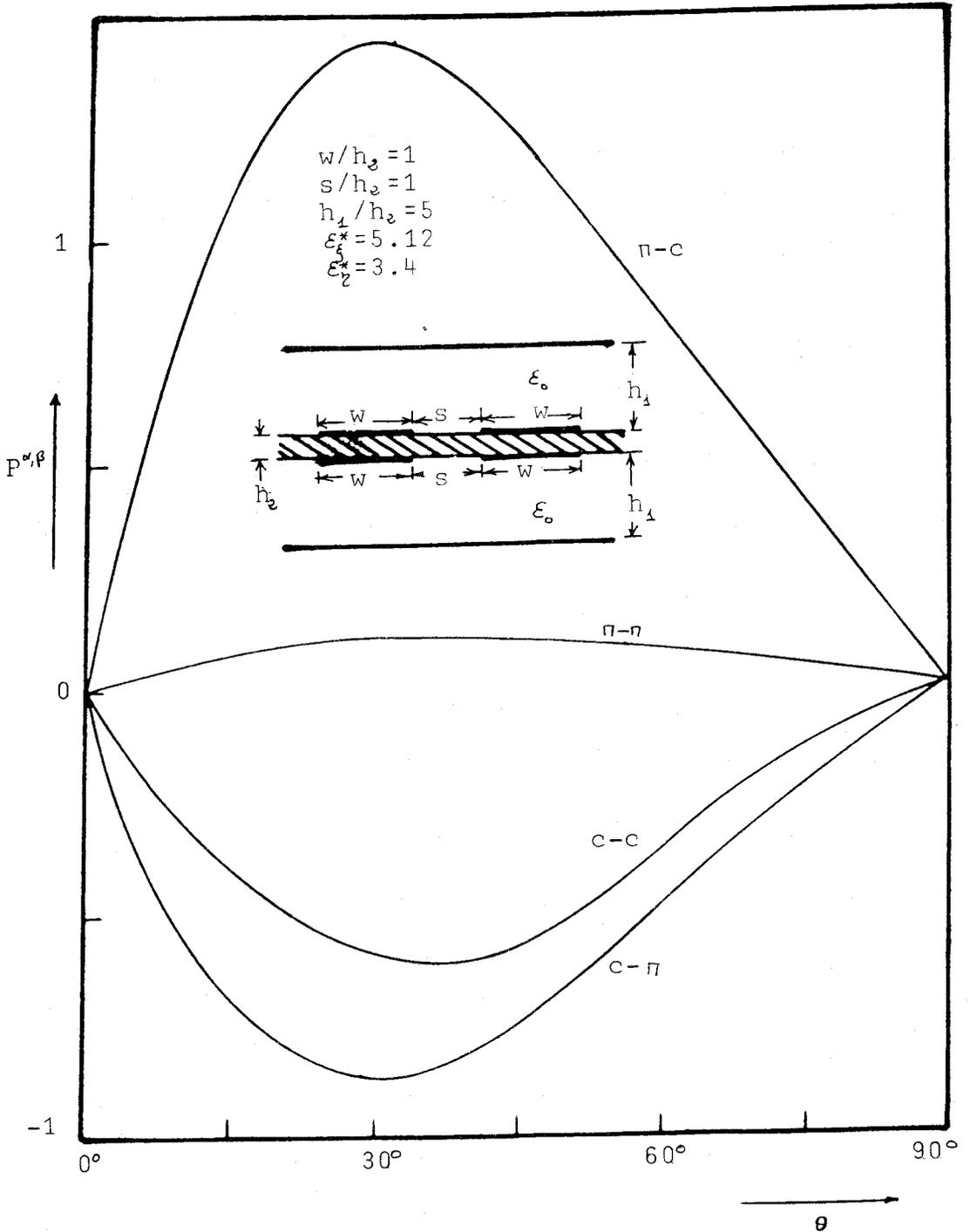


Fig.IV.16

Variación de los parámetros modales $P^{\alpha, \beta}$ en la estructura de la fig.II.5 en función del ángulo de orientación de los ejes principales de $\bar{\epsilon}_t$. Medio: Nitruro de boro ($\epsilon_1^* = 5.12$, $\epsilon_2^* = 3.4$).

-o0o-

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

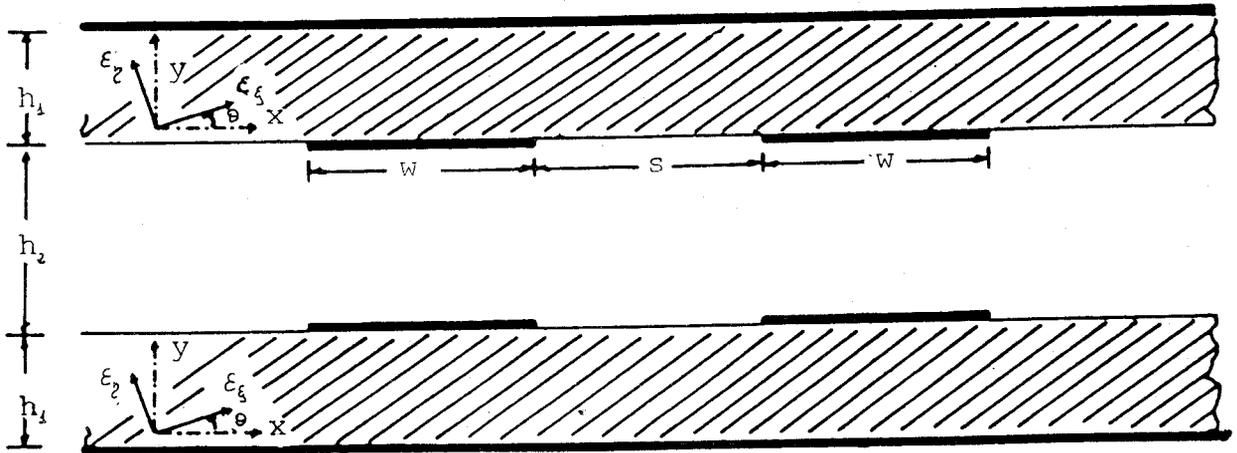


Fig. IV.17

-o0o-

Finalmente, en la fig. IV.18 se muestra la variación de las velocidades de fase de los diferentes modos par-par, par-impar, etc., para un acoplamiento de cuatro microtiras idénticas similar al anterior (fig. IV.17) con sustrato de nitruro de boro, frente al ángulo de inclinación de los ejes principales del tensor. Que dicha estructura propaga modos par e impar puede probarse considerando las propiedades de simetría de la estructura isotropa equivalente construida tal y como se indica en la sec. III.2.

IV.4.-Conclusiones

Podemos afirmar como conclusión general del presente capítulo y de la primera parte de esta memoria que disponemos de un algoritmo completo para el cálculo de los

Aproximación cuasi-estática
Análisis variacional

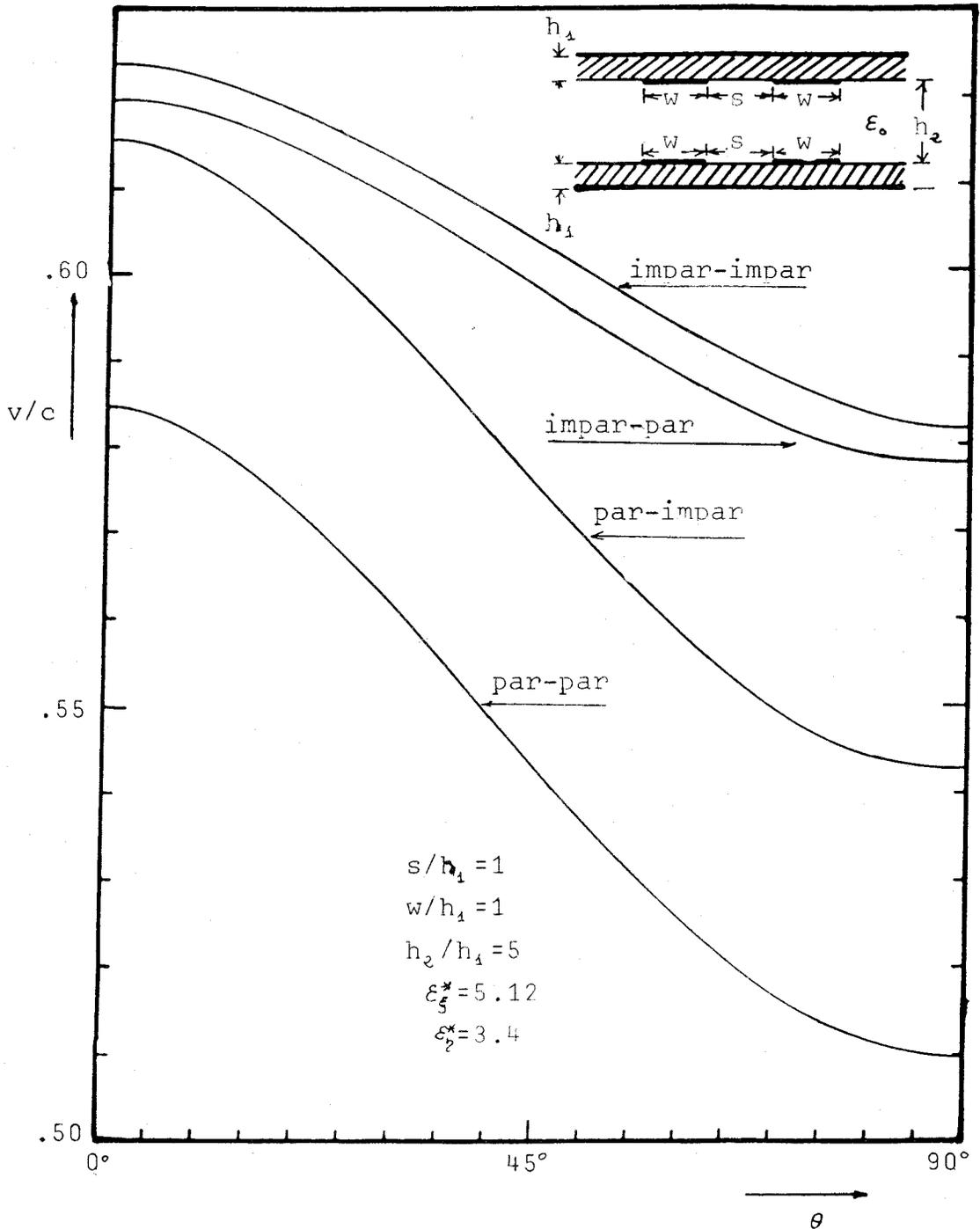


Fig. IV.18

Variación de las velocidades de fase normalizadas e impedancias modales en la estructura de la fig. IV.17 frente al ángulo de orientación de los ejes principales de $\bar{\epsilon}_t$. Medio: Nitruro de boro ($\epsilon_5^* = 5.12$, $\epsilon_2^* = 3.4$).

Aproximación cuasi-estática Análisis variacional

parámetros cuasiestáticos de líneas multiconductoras de configuración planar en medios dieléctricos multicapa de anisotropía arbitraria. Simultáneamente han sido desarrollados algoritmos particulares para el análisis de estructuras sencillas, que engloban todos los posibles acoplamientos de dos microtiras en configuración planar capaces de propagar modos escalares par e impar. Numerosos ejemplos concretos han sido analizados numéricamente y los resultados expuestos en forma de gráficas.

SEGUNDA PARTE:

ANALISIS EN FRECUENCIA

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

V-METODOS DE ANALISIS EN FRECUENCIA DE
SISTEMAS DE TRANSMISION DE CONFIGURACION PLANAR

De forma análoga a como hicimos en el cap.I, damos a continuación una panorámica general, necesariamene subjetiva, de los, a nuestro juicio, principales métodos de análisis para obtener la variación con la frecuencia de los parámetros característicos de sistemas planares de transmisión.

Resulta extremadamente difícil hacer una clasificación de los diferentes métodos que aparecen en la literatura sobre el tema, por cuanto se presentan muy variados criterios de clasificación, y las diferentes clasificaciones así obtenidas solapan unas con otras. Al final hemos optado por agrupar el gran número de trabajos publicados en cuatro grandes categorías.

En primer lugar están los modelos aproximados semiempíricos. La característica común a estos trabajos es que, basándose en un modelo físico intuitivo de la línea, desarrollan expresiones aproximadas para la variación con la frecuencia de sus parámetros característicos. Dichas expresiones dependen por lo general de uno o varios

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

parámetros que es necesario ajustar empíricamente dentro del rango de aplicabilidad del modelo. En lo sucesivo no prestaremos mucha atención a tales trabajos, ya que nuestro objetivo es obtener resultados lo más exactos posibles, basándonos en el menor número de hipótesis posible. No obstante es preciso señalar, por su gran importancia práctica y teórica, el modelo de Getsinger para la línea microtira.

En segundo lugar tenemos los métodos propiamente numéricos de resolución de las ecuaciones de Maxwell en el interior de la línea (método de las diferencias finitas, método de las líneas y TLM). La característica común a tales métodos es que parten de una discretización de las ecuaciones de Maxwell para a continuación resolverlas numéricamente, bien directamente (método de las diferencias finitas, método de las líneas), bien modelándolas mediante un circuito de líneas ideales (TLM). En ambos casos la exactitud del método está sólo limitada por la finura de la discretización, siendo deseable a veces efectuar una discretización no uniforme.

Luego consideramos un gran grupo de trabajos que hemos agrupado bajo el título genérico de "métodos de análisis modal". Dichos métodos utilizan técnicas derivadas casi siempre del análisis de discontinuidades en guías, y su



Análisis en frecuencia Métodos de análisis

característica común es que consideran a la microlínea como una perturbación de la guía parcialmente llena que le sirve de soporte, estando su validez limitada, por tanto, a líneas encerradas entre, al menos, dos planos conductores paralelos a masa. La guía -rectangular o de placas paralelas- que alberga la línea, es entonces dividida en dos o mas subregiones, y los campos dentro de cada subregión desarrollados en modos normales de estructura y propiedades conocidas. A continuación dichos campos deben acoplarse de acuerdo con las condiciones de contorno impuestas por las interfases de separación entre las diferentes subregiones, determinándose así los coeficientes del desarrollo de los campos en cada subregión.

Finalmente están los métodos de momentos y variacionales. La característica común de tales métodos es que, partiendo de una relación, que es preciso obtener analíticamente, entre los campos y las corrientes en la microtira o la ranura que configura la línea de transmisión, se determinan aquellos mediante su expansión en funciones base convenientemente elegidas.

Quedan por último algunos tópicos de interés que merecen ser tratados aparte: La propagación en líneas inmersas en medios anisótropos y el problema de la definición de la impedancia fuera del régimen

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

cuasiestático.

V.1.-Modelos semiempíricos. Modelo de Getsinger

El modelo de Getsinger [83] para el estudio de la dispersión en líneas microtira es, con mucho, el más usado a la hora de caracterizar la variación con la frecuencia de los parámetros de dicha línea, y ha sido usado con profusión tanto desde el punto de vista práctico, como desde el teórico para justificar ciertas aproximaciones (ver más adelante sec.V.6).

El modelo propuesto por Getsinger está esquematizada en la fig.V.1.b y configura una guía en π parcialmente llena de dieléctrico con paredes magnéticas laterales, cuyas dimensiones s , a' , b , b' se eligen de modo que la capacidad y autoinducción estáticas del modelo coincidan con las del original (fig.V.1). La capacidad y la autoinducción de la estructura original (fig.V.1.a) vienen dadas por:

$$L = \mu_0 Z_0 \sqrt{\epsilon_{e,0}} / \gamma_0 \quad (V-1.a)$$

$$C = \gamma_0 \sqrt{\epsilon_{e,0}} / Z_0 \quad ; \quad \gamma_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad (V-1.b)$$

donde Z_0 es la impedancia característica de la línea, y

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

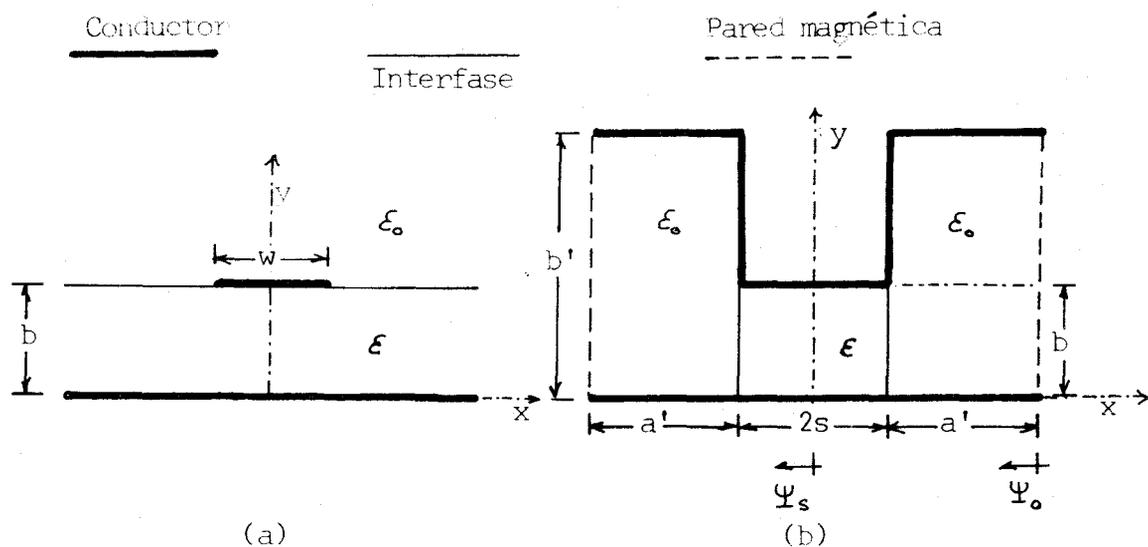


Fig.V.1

(a).- Línea microtira. (b).- Modelo de Getsinger

-o0o-

$\epsilon_{e,0}$ la constante dieléctrica efectiva de la línea, definida como el cuadrado de la inversa de la velocidad de fase normalizada ($\epsilon_{e,0} = (c/v_f)^2 = C/C^v$), ambas cantidades calculadas en el límite cuasiestático.

Las características estáticas del modelo pueden calcularse de modo aproximado considerándolo como la combinación de tres condensadores en paralelo de anchura a' , $2s$ y a' respectivamente. De ese modo:

$$L = \mu_0 \epsilon_0 / C^v = 0.5 \mu_0 [(a'/b') + (s/b)] \quad (V-2.a)$$

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$C = 2 \epsilon_0 [(a'/b') + \epsilon^*(s/b)] \quad (V-2.b)$$

lo que nos permite determinar dos de los tres parámetros desconocidos, s , a' y b' :

$$a'/b' = [\rho_0 / (2Z_0 \sqrt{\epsilon_{e,o}})] [(\epsilon^* - \epsilon_{e,o}) / (\epsilon^* - 1)] \quad (V-3.a)$$

$$s/b = [\rho_0 / (2Z_0 \sqrt{\epsilon_{e,o}})] [(\epsilon_{e,o} - 1) / (\epsilon^* - 1)] \quad (V-3.b)$$

Nos falta una última relación para tener perfectamente definido el modelo (fig.V.1.b) que debe ser establecida empíricamente.

Las características de propagación del modelo no pueden calcularse exactamente, sino que deben ser evaluadas también de un modo aproximado. Para ello observamos cómo en la estructura original (fig.V.1.a) y para el modo fundamental -quasi TEM- las líneas del campo eléctrico siguen esencialmente el patrón estático, esto es, van dirigidas mayoritariamente según la dirección "y" en la zona entre la tira conductora y el plano de masa, y según la dirección "x" en la interfase aire-dieléctrico, cerca del borde de la tira. Ello se traduce, en el modelo, en campos esencialmente dirigidos en la dirección "y" por toda la estructura, o, dicho de otra manera, en un modo

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

esencialmente LSE respecto a la interfase aire-dieléctrico, ó TE respecto de la dirección "x". La virtud esencial del modelo es precisamente esa, que transforma el modo fundamental aproximadamente LSE de la estructura original en otro modo LSE que, en el modelo, tiene el campo dirigido fundamentalmente en dirección "y" en todas partes.

Los campos eléctrico y magnético del modo fundamental, aproximadamente LSE, del modelo, pueden ahora escribirse en forma aproximada cómo:

$$H_{z,\alpha} = -A_\alpha \gamma \gamma_\alpha \sinh(\gamma_\alpha \Psi_\alpha) e^{-\gamma z} \quad (\text{V-4.a})$$

$$H_{y,\alpha} = -A_\alpha \gamma^2 \cosh(\gamma_\alpha \Psi_\alpha) e^{-\gamma z} \quad (\text{V-4.b})$$

$$E_{y,\alpha} = s\mu_0 \gamma A_\alpha \cosh(\gamma_\alpha \Psi_\alpha) e^{-\gamma z} \quad (\text{V-4.c})$$

donde $\alpha=0,s$ indica que los campos se evalúan en la zona vacía ($\alpha=0$), o en la zona llena de dieléctrico ($\alpha=s$), $\gamma=j\beta$ es la constante de propagación según "z", y las constantes de propaación transversales γ_α vienen dadas por:

$$\gamma_\alpha^2 + \gamma^2 + k_0^2 \epsilon_\alpha^* = 0 \quad (\text{V-5})$$

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Aplicamos ahora la técnica de la resonancia transversal [2] para la determinación de γ . Dicha determinación se hace a partir de las condiciones de contorno en la interfase aire-dieléctrico, igualando a cero la admitancia total en dicha interfase. En nuestro caso es evidente que los campos (V-4) no satisfacen las condiciones de contorno en $x=s/2$, lo que era de esperar por tratarse de campos sólo aproximados. Para aplicar la técnica de la resonancia transversal de manera también aproximada, debemos definir la admitancia total en $x=s/2$, debida a ambas secciones de línea -de $x=0$ a $x=s/2$ y de $x=s/2$ a $x=s/2+a'$ - de manera apropiada a nuestros fines. Definimos la admitancia total como el cociente entre la intensidad total que circula por la interfase aire-dieléctrico y la diferencia de potencial entre $y=0$ e $y=b$ a lo largo de dicha interfase. Como la diferencia de potencial a lo largo de la pared conductora entre $y=b$ e $y=b'$ debe anularse, dicha diferencia de potencial puede escribirse como la suma del potencial a lo largo de ambas secciones de línea. De acuerdo con esto y con (V.4) la admitancia total en la interfase puede escribirse en la forma:

$$0 = (\gamma_0/b') \tanh(\gamma_0 a') + (\gamma_s/b') \tanh(\gamma_s s) \quad (V-6)$$

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Las ecuaciones (V-5) y (V-6) conforman de un modo implícito la relación de dispersión en el modelo de Getsinger. Para expresarla de un modo explícito es preciso hacer nuevas aproximaciones sobre (V-6) en las que ya no entraremos.

Como ya indicamos necesitamos otra relación, independiente de (V-6), para determinar completamente las dimensiones del modelo. Dicha relación se establece empíricamente, encontrándose que para líneas de dimensiones usuales y constantes dieléctricas usuales e impedancias por encima de 35Ω , es suficiente con poner $b'/b=3$.

El modelo de Getsinger representa un método fácil y eficaz de calcular la variación con la frecuencia de la constante de propagación γ y la impedancia Z (respecto a Z ver sec.V.6), a partir de sus valores cuasiestáticos. Las principales deficiencias del modelo, comunes a todos los modelos semiempíricos, radican en que, por un lado, hay siempre ciertos parámetros que es preciso determinar empíricamente (b'/b en este caso), lo que hace necesario el análisis exacto de las estructuras, siquiera sea para determinar empíricamente dichos parámetros; y por otro lado, en que su extensión a estructuras complejas -multiconductoras, multicapas y anisótropas- no resulta ni mucho menos sencilla.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

V.2.-Métodos numéricos

El método de las diferencias finitas [78] para el análisis de líneas de transmisión, parte de una discretización de las ecuaciones de Maxwell en el interior de la línea, para a continuación resolverlas mediante un método iterativo apropiado.

Cómo es bien sabido [16] los campos en el interior de una línea microtira pueden obtenerse como una superposición de campos TE y TM cada uno de los cuales cumple la ecuación de onda en las diferentes subregiones homogéneas en que puede dividirse la línea:

$$\left(\vec{\nabla}_{\epsilon}^2 + k_{\alpha}^2 \right) \begin{cases} H_z \\ E_{\perp} \end{cases} = 0 \quad \begin{matrix} \text{(TE)} \\ \text{(TM)} \end{matrix} \quad \text{(V-7)}$$

donde el subíndice $\alpha=a,d$, indica la subregion -vacía o llena de ieléctrico- que se considera, y:

$$k_{\alpha}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2 \quad \text{(V-8.a)}$$

$$k = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon^* - \beta^2 \quad \text{(V-8.b)}$$

donde β es la constante de propagación de la onda

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$(H_z, E_z \propto e^{j\beta z}).$$

A continuación se procede a reticular la sección transversal e la línea en una trama de espaciado Δx , Δy (fig.V.2) y a la consiguiente discretización de las ecuaciones (V-7) de acuerdo con [78]:

$$\phi_{i,j} = \phi(i\Delta x, j\Delta y) \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (V-9.a)$$

$$\partial\phi/\partial x)_{i,j} = [\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}] / (2\Delta x) \quad (V-9.b)$$

$$\partial^2\phi/\partial x^2)_{i,j} = [\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}] / (\Delta x)^2 \quad (V-9.c)$$

donde ϕ es (E_z) o (H_z) .

Tras sustituir (V-9) en (V-7) se obtiene:

$$\chi\lambda\phi_{i,j} = 2(1+R)\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - R^2\phi_{i,j+1} - R^2\phi_{i,j-1} \quad (V-10)$$

con $\phi_{i,j} = (E_z)_{i,j}$, $(H_z)_{i,j}$; $R = \Delta x / \Delta y$, $\chi = 1$ en la zona vacía y $\chi = (k_d^2 / k_0^2)$ en el dieléctrico, $\lambda = k_0^2 (\Delta x)^2$.

Las ecuaciones (V-10) constituyen la discretización buscada y son válidas en toda la sección transversal de la línea, excepto en el contorno, en la interfase aire-dieléctrico y en la tira conductora, donde deben

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

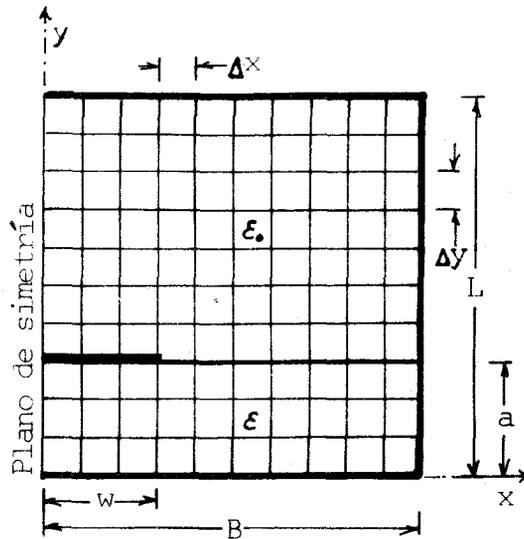


Fig.V.2

Ilustración del método de las diferencias finitas
-o0o-

incorporar las condiciones de contorno [78].

Si \vec{v} es un vector que contione todas las incognitas $(E_z)_{i,j}$ y $(H_z)_{i,j}$, el conjunto completo de ecuaciones toma la forma de una ecuación de autovalores:

$$[\bar{A} - \lambda \bar{I}] \cdot \vec{v} = 0 \quad (V-11)$$

donde \bar{A} es una matriz de orden $2(mn-1)$ si $B=m\Delta x$ y $L=n\Delta y$. El elevado orden de dicha matriz hace que sea imposible invertirla por los métodos tradicionales, debiendo ser

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

resuelto el problema de autovalores por un procedimiento iterativo [78].

En el método de las líneas [122], [123], se procede, igual que en el caso anterior, a una discretización de la sección transversal de la línea, pero ahora, a diferencia del método anterior, las ecuaciones de onda (V-7) son parcialmente resueltas a lo largo de la coordenada transversal "y", de forma que la discretización se realiza en realidad en base a una serie de líneas paralelas al eje "y", a lo largo de las cuales la dependencia en "y" de los campos es conocida. Para que tal proceso de discretización sea posible es necesario que la línea sea de configuración planar, con tiras conductoras de espesor despreciable.

Una vez se ha completado la discretización, se obtiene, a partir de las condiciones de contorno en la interfase que soporta la tira conductora, una ecuación matricial del tipo:

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_z \\ \vec{E}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{J}_z \\ \vec{J}_x \end{bmatrix} \quad (V-12)$$

donde \vec{E}_z , \vec{E}_x , \vec{J}_z , \vec{J}_x son vectores que contienen los valores de E_z , E_x , J_z y J_x en cada uno de los puntos que configuran

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

la discretización de dicha interfase. Dado que $J_z = J_x = 0$ en todos los puntos exteriores a la tira conductora, y que $E_z = E_x = 0$ en todos los puntos de la tira, se obtiene una ecuación del tipo:

$$\det[\bar{\bar{Z}}] = 0 \quad (V-13)$$

donde $\bar{\bar{Z}}$ es la restricción de la matriz (V-12) a los puntos de la tira. La matriz $\bar{\bar{Z}}$ en (V-13) es ahora de orden mucho menor que $\bar{\bar{A}}$ en (V-11) y su determinante puede ser calculado, por ejemplo, por el método de triangulartización de Gauss [123].

La eficiencia del método puede ser incrementada mediante el uso de una discretización no uniforme [123], que tenga en cuenta la desigual distribución de las corrientes sobre la tira (las corrientes, como la densidad de carga en el caso estático, tienden ser mas intensas en los bordes de la tira).

El método de la matriz de líneas de transmisión (TLM), inspirado en modelos de simulación de las ecuaciones de Maxwell mediante redes de circuitos, es un método que permite estudiar la propagación de pulsos de radiación tipo delta de Dirac en el dominio del tiempo. La traslación al dominio espectral se realiza mediante la transformada de

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Fourier.

La modelización de las ecuaciones de Maxwell se realiza mediante una malla cartesiana tridimensional o bidimensional de líneas de transmisión ideales, por la cual se propagan los pulsos elementales de radiación de acuerdo con el principio de Huygens [135].

Consideremos para fijar ideas el modelo bidimensional, mas sencillo que el tridimensional. La propagación de un pulso elemental por la red se ilustra en la fig.V.3. La energía del pulso se supone unidad. De acuerdo con el principio de Huygens dicha energía es dispersada de modo isótropo en las cuatro direcciones por cada nodo de la malla. Las correspondientes magnitudes de los campos reflejados deben ser, por tanto, $1/2$ de las incidentes en cada proceso de scattering por un nodo. Además el coeficiente de reflexión "visto" por cada pulso incidente debe ser $-1/2$, para que se cumpla la continuidad del campo en cada nodo. Las dos primeras iteraciones se ilustran en la fig.V.3. El proceso de scattering descrito forma el algoritmo básico del método TLM [135].

Quedan ahora por establecer las correspondencias entre el modelo y el original. Dichas correspondencias se establecen entre los potenciales e intensidades en cada sección de línea por un lado y los campos eléctricos y

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

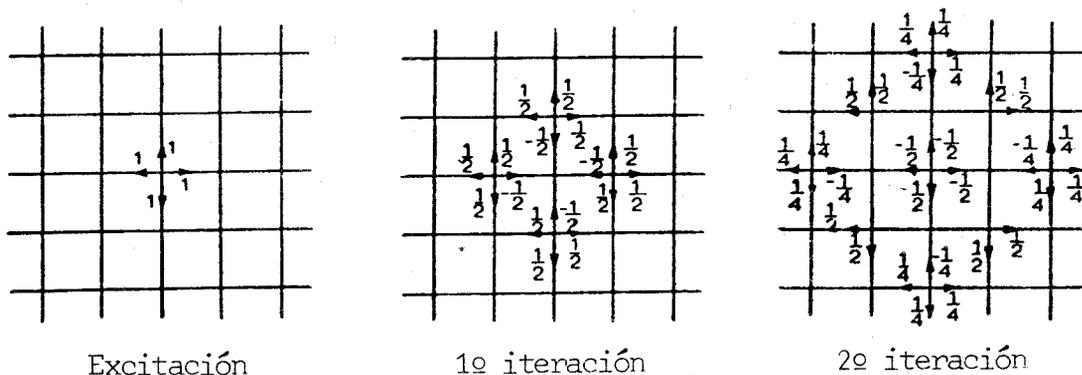


Fig.V.3

Tres dispersiones consecutivas de un pulso elemental en una red TLM bidimensional .

-o0o-

magnéticos por otro, estando las propiedades dieléctricas del medio representadas por los parámetros característicos de las líneas que forman la malla [135]. Otras características adicionales del medio, como presencia de paredes conductoras o magnéticas, inhomogeneidades, anisotropía, pérdidas, etc, pueden también modelarse cargando los nodos mediante "stubs" de propiedades adecuadas [135], [133].

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

El método TLM bidimensional ha sido utilizado para obtener las frecuencias de corte de los modos de propagación en fin-lines [107], y el método TLM tridimensional, para el análisis de líneas microtira sobre sustratos anisótropos [133].

De los tres métodos someramente descritos en la presente sección, dos son de aplicación en problemas mucho más generales que los correspondientes al análisis de líneas de transmisión de configuración planar. El método de las diferencias finitas, y el método TLM son métodos de análisis general de la propagación electromagnética en estructuras de forma y propiedades prácticamente arbitrarias, por lo que su aplicación al análisis de líneas planares puede resultar "excesiva", en la misma medida en que el método de las diferencias finitas podía resultar también "excesivo" para el análisis cuasiestático.

El método de las líneas es, en cambio, mucho más específico, siendo las ecuaciones finales parecidas a las que se obtendrían aplicando el método de momentos (ver sec.V.4) con funciones pulso como funciones base y peso.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

V.2.-Métodos de análisis modal

Cómo ya señalamos en la introducción, hay una serie de métodos para el análisis de líneas planares que se basan en métodos desarrollados originalmente para el análisis de discontinuidades en guías. En tales métodos la línea es dividida en una serie de subregiones tales que los campos en su interior puedan desarrollarse en serie de modos ortogonales. Generalmente las interfases de separación entre tales subregiones coinciden con las interfases que alojan las tiras conductoras o las ranuras que configuran la línea. La excepción, como veremos mas adelante, la constituye el método de Wiener-Hopf.

Cuando las superficies de separación entre las distintas subregiones coinciden con las interfases que soportan las tiras conductoras o las ranuras, y una vez se ha desarrollado el campo en cada subregión como una serie -en principio infinita- de modos ortogonales de estructura y propiedades conocidas, se presenta el problema de determinar los coeficientes del desarrollo modal mencionado, acoplando los campos en las citadas interfases. Tal determinación puede realizarse por discretización de los campos [88], [134], tomando el producto escalar de cada ecuación por un conjunto completo de funciones ortogonales apropiado (Fourier matching) [77], [116], [125], [134],

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

[136], [141], por la técnica de los mínimos cuadrados [84], [134], por el método de la ecuación integral singular [81], [93], [128], [139], [16], etc.

Atendiendo a los diferentes desarrollos modales posibles, éstos pueden subdividirse en tres tipos fundamentalmente: Expansión en series de Fourier [77], en modos TE y TM según la dirección de propagación [81], [88], [93], [84], [115], [116], y en modos TE y TM según la dirección perpendicular a las interfases (método de la resonancia transversal) [79], [109], [111], [125], [128], [134], [136], [139], [141], [142].

Quedan finalmente los métodos de Wiener-Hopf, en los cuales las superficies de separación entre las diferentes subregiones de la línea se eligen perpendiculares a las interfases aire-dieléctrico. Asimismo, el acoplamiento de los campos a uno y otro lado de tales superficies de separación, se realiza mediante una técnica específica. Los métodos de Wiener-Hopf constituyen así una categoría aparte dentro de los métodos estudiados en esta sección, tanto por la expansión modal propuesta como por la técnica de determinación de los coeficientes de tal expansión.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

V.3.a.-Análisis de Fourier.

Hornsby y Gropinat propusieron en 1969 [77] un método de análisis para la línea microtira sobre sustrato dieléctrico isótropo basada en la expansión de los campos en series de Fourier, dentro y fuera del dieléctrico (fig.V.4).

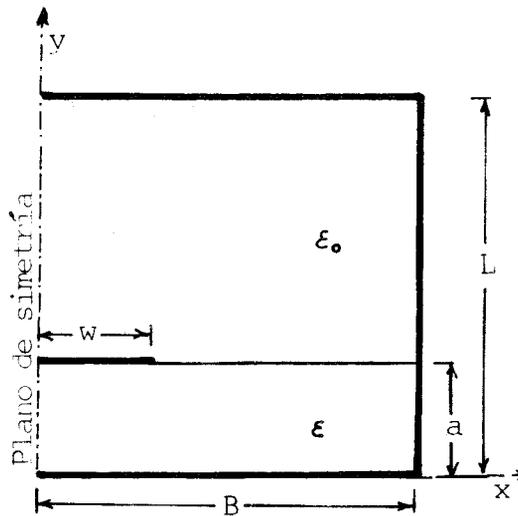


Fig.V.4
-o0o-

Los campos \vec{E} y \vec{H} deben satisfacer en cualquiera de las zonas citadas la ecuación de onda:

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$\nabla_t^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \nabla_t^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{V-14.a})$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \beta^2 \quad (\text{V-14.b})$$

donde ϵ es el valor de la constante dieléctrica para $y < a$, y $\epsilon = \epsilon_0$ para $y > a$. β es la constante de propagación a lo largo del eje z .

Debido a la simetría de la estructura respecto al plano $x=0$, los modos de propagación serán de dos tipos: E_z impar y H_z par, o bien, E_z par y H_z impar. El modo fundamental quasi-TEM corresponderá al primer modo par según E_z .

En ambos casos, las soluciones a las ecuaciones (V-14) pueden desarrollarse en cada zona en serie de funciones del tipo:

$$\phi_n = \left. \begin{array}{l} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} (C_n x) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} (\nu_n (L-y)) e^{-j\beta z} \quad (\text{V-15})$$

donde $C_n = n\pi/2B$, $\nu_n = \sqrt{k^2 - C_n^2}$, y las funciones seno o coseno deben elegirse de forma que se satisfagan las condiciones de contorno en $x=B$ junto con las propiedades de simetría de cada componente del campo para cada modo.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

Ahora es preciso determinar los coeficientes del desarrollo de los campos en cada zona, de modo que se cumplan las condiciones de contorno en la interfase. Para que tal cosa suceda es suficiente exigir la anulación de E_z y de la derivada normal de H_z en ambas caras de la microtira, y la continuidad de H_x , H_y y H_z en la interfase aire-dieléctrico.

Dichas condiciones pueden expresarse igualando a cero las cantidades:

$$F_1(x) = [\{ (H_z)^+ - (H_z)^- \} D(x) + (\partial H_z / \partial y)^+ \{ 1 - D(x) \}]_{y=a} \quad (V-16.a)$$

$$F_2(x) = [\{ (H_y)^+ - (H_y)^- \} D(x) + (\partial H_y / \partial y)^- \{ 1 - D(x) \}]_{y=a} \quad (V-16.b)$$

$$F_3(x) = [\{ (H_x)^+ - (H_x)^- \} D(x) + E_z \{ 1 - D(x) \}]_{y=a} \quad (V-16.c)$$

donde $D(x)$ es una función que es cero sobre la microtira y uno en la interfase aire-dieléctrico.

La determinación de los coeficientes a partir de (V-16) puede realizarse [77] a partir de la ortogonalidad de las propias funciones $\text{sen}(C_n x)$, $\text{cos}(C_n x)$ del desarrollo (V-15) tomando el producto escalar de cada una de estas

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

funciones con $F_i(x)$ y exigiendo su anulación (Fourier matching):

$$\int_0^B F_i(x) \begin{Bmatrix} \text{sen} \\ \text{cos} \end{Bmatrix} (C_n x) dx = 0 \quad (V-17)$$

Se obtiene así un sistema de ecuaciones singular, cuyo determinante debe anularse para que exista solución no trivial.

En la práctica la serie infinita (V-15) debe truncarse para algún valor finito de n , de forma que la anulación del determinante de (V-17) represente una ecuación trascendente para β , que es resuelta por métodos numéricos.

El desarrollo de los campos en series de Fourier es el método conceptualmente mas sencillo y directo de desarrollar los campos en el interior de cualquier zona homogénea e isotrópica de límites rectangulares, no obstante puede resultar incómodo manejar tantas funciones como componentes del campo, sobre todo cuando trabajamos con estructuras multicapa que implican un número elevado de subzonas, cada una con su desarrollo en serie de Fourier. Resulta entonces conveniente expresar los campos en función de ciertos potenciales. Los dos siguientes apartados

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

presentan ejemplos de dichos potenciales y de las peculiaridades de los desarrollos a que dan lugar.

V.3.b.-Desarrollo en modos TE y TM según la dirección de propagación.

Consideremos de nuevo la estructura de la fig.V.4. Si quitamos momentáneamente la tira conductora, tenemos una guía rectangular parcialmente llena de dieléctrico. Como es bien sabido por dicha guía no pueden propagarse modos TE ni TM puros, sino una combinación de ambos, para que puedan satisfacerse las condiciones de contorno en la interfase aire-dieléctrico. De ese modo, los campos deben desarrollarse tanto en la zona cargada con dieléctrico, como en la zona vacía, en una combinación de modos TE y TM según la dirección de propagación. Cuando introducimos la microtira, dicha combinación se convierte en una serie infinita.

Los modos TE y TM pueden expresarse en función de los potenciales Ψ^h y Ψ^e respectivamente [16], que a su vez deben satisfacer la ecuación de onda en cada zona:

$$(\nabla_z^2 + k_z^e) \Psi_z^{e,h} = 0 \quad (\text{V-18.a})$$

$$k_z^e = \omega^2 \mu \epsilon_z^e - \beta^2 \quad (\text{V-18.b})$$

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

donde el subíndice "i" hace referencia a las diferentes zonas homogéneas que configuran la línea. Los campos vienen dados en función de Ψ^e y Ψ^h por [16]:

$$E_{z,i} = j[(k_i^2 - \beta^2)/\beta] \Psi_i^e e^{-j\beta z} \quad (\text{V-19.a})$$

$$H_{z,i} = j[(k_i^2 - \beta^2)/\beta] \Psi_i^h e^{-j\beta z} \quad (\text{V-19.b})$$

$$\vec{E}_{t,i} = \vec{\nabla}_t \Psi_i^e e^{-j\beta z} - (\omega\mu/\beta) \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t \Psi_i^h e^{-j\beta z} \quad (\text{V-19.c})$$

$$\vec{H}_{t,i} = (\omega\epsilon/\beta) \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t \Psi_i^e e^{-j\beta z} + \vec{\nabla}_t \Psi_i^h e^{-j\beta z} \quad (\text{V-19.d})$$

Volviendo a la fig.V.4, los potenciales en cada zona pueden desarrollarse en serie de Fourier, al igual que los campos en el apartado anterior [16]. Considerando sólo el modo fundamental ($E_z(x)$ par $H_z(x)$ impar):

$$\Psi_i^e = \sum_n A_n \sinh(\alpha_n^i y) \cos(k_n x) \quad (\text{V-20.a})$$

$$\Psi_i^h = \sum_n B_n \cosh(\alpha_n^i y) \sin(k_n x) \quad (\text{V-20.b})$$

con $k_n = (n-1/2)\pi/B$, $\alpha_n^i = (k_n^2 + \beta^2 - \epsilon_i^* k_0^2)^{1/2}$.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

El acoplamiento en la interfase que soporta la microtira debe hacerse en base a las condiciones de contorno impuestas por la interfase aire-dieléctrico y por la presencia de la microtira. Dichas condiciones de contorno, cómo ya se señaló, imponen un acoplamiento entre los modos TE y TM (o entre Ψ^e y Ψ^h), de modo que, en las ecuaciones a que dan lugar, los coeficientes A_n y B_n aparecen mezclados.

El modo concreto en que dichas condiciones de contorno se formulan y resuelven varía de unos trabajos a otros, y referimos al lector interesado a la bibliografía. Los métodos más usados son el de la ecuación integral singular [93], mínimos cuadrados [84], discretización no uniforme de los campos [88] y Fourier matching [116].

La expansión de los campos en modos TE y TM según la dirección de propagación permite una formulación más compacta del problema, permitiendo además reducir de tres a dos (tantas como potenciales), las ecuaciones que deben cumplirse en cada punto de la interfase. No obstante, en el estudio de estructuras multicapa [88], [93], [115], [116], puede resultar un método muy farragoso, por cuanto cada interfase aire-dieléctrico, aun en ausencia de tiras conductoras, introduce condiciones de contorno en las que Ψ^e y Ψ^h aparecen mezclados.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

V.3.c.-Método de la resonancia transversal.

Dicho método de expansión de los campos consiste básicamente en desarrollar los campos a uno y otro lado de cada interfase metalizada en modos TE y TM según la dirección perpendicular a las interfaces, aprovechándose del hecho de que la refracción de un modo TE o TM por una interfase dieléctrica sin metalizar y normal a su dirección de propagación, no altera su carácter de modo TE o TM [4]. Tales modos reciben también el nombre de modos LSE y LSM.

Mediante este método es posible mantener desacoplados los campos LSE y LSM (o TE y TM según "y") a lo largo de todas aquellas interfaces que no contengan metalizaciones, lo que proporciona, en estructuras multicapa, un considerable ahorro de cálculo, aparte de una mayor simplicidad conceptual y una mejor comprensión física de la estructura de los campos.

Consideremos, para fijar ideas, la línea de aletas -"fin-line"- de la fig.V.5.a. Un método de resonancia transversal fué propuesto por Cohn [79] para el análisis de este tipo de estructuras. El método propuesto pasaba por considerar que dos ondas de igual amplitud y constante de propagación según "z", se propagaban por la estructura de la fig.V.5.a. De ese modo era posible colocar dos planos metálicos en $z=0$ y $z=\lambda/2$ sin perturbar los campos,

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

transformando así la línea de transmisión en un resonador Fig.V.5.a,b,c.

Cambiando ahora de punto de vista, dicho resonador podía considerarse como el resultado de cortocircuitar en $y=-d-h_2$ y en $y=h_1$ una guía de onda rectangular orientada según el eje "y" y cargada con una lámina dieléctrica transversal y un iris también transversal. Dicho problema podía ahora resolverse usando técnicas conocidas, y la constante de propagación de la línea original venía dada en función de la longitud Δz del resonador:

$$\beta = \pi/\Delta z \quad (V-21)$$

Siguiendo a Cohn, los campos en ambas zonas ($y > 0$ e $y < 0$) se expresan como suma de modos LSE (TE según "y") y LSM (TM según "y") desacoplados. Considerando sólo modos impares en E_z y pares en H_z , los modos pertinentes en el mencionado desarrollo son del tipo $TE_{1,2n}$ ($n=0,1,2,\dots$) y $TM_{1,2n}$ ($n=1,2,\dots$), donde el primer subíndice hace referencia a la variación con "z" y asegura una variación del tipo $\sin(\beta z)$ para los modos TE y $\cos(\beta z)$ para los TM. El segundo subíndice hace referencia a la variación con "x" y asegura que el campo total es impar en E_z y par en H_z . Para β real y menor que la constante de propagación en el

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

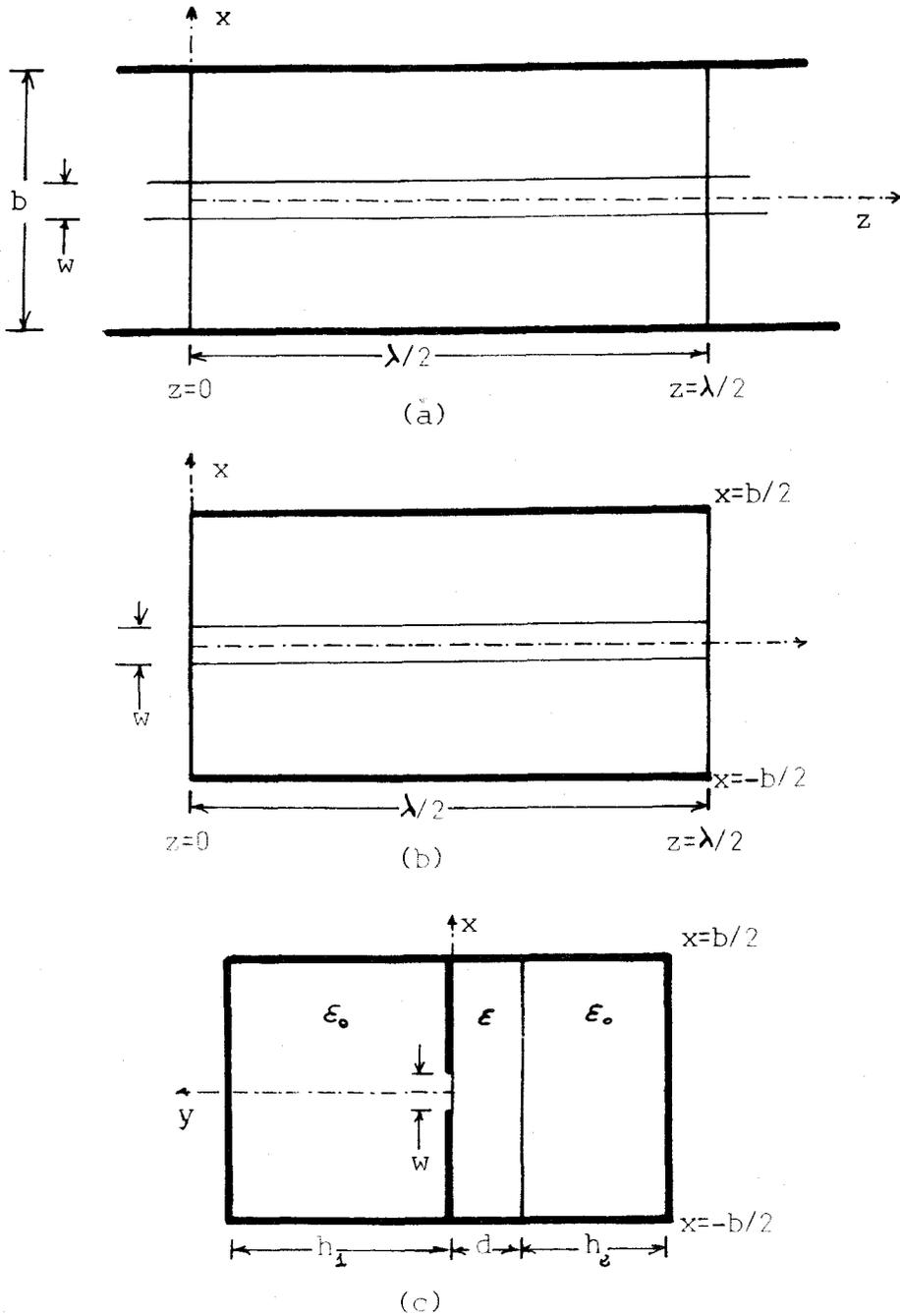


Fig.V.5

Método de la resonancia transversal en fin-lines (método de Cohn). (a).- Inserción de paredes conductoras en $z=0$ y $z= \lambda/2$. (b).- Eliminación de las regiones semiinfinitas para $z < 0$ y $z > \lambda/2$. (c).- Resonador parcialmente lleno de dieléctrico y con un iris capacitivo.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

vacio, todos los modos están al corte en la zona vacía ($y > 0$), pero eso no altera el análisis.

Los campos LSE y LSM a ambos lados de la interfase metalizada ($y=0$), deben ahora acoplarse entre sí de forma que satisfagan las condiciones de contorno impuestas por las metalizaciones.

Las técnicas para acoplar los campos a ambos lados de dicha interfase son esencialmente las mismas que ya citamos en el apartado anterior. Cohn [79] y Simons [109], [111], proponen un análisis aproximado en base a suponer que $E_x = \text{Cte}$ y $E_z = 0$ en la ranura entre las aletas. Las restantes técnicas ya fueron citadas: Fourier matching [125], [134], [136], [141], discretización [134], ecuación integral singular [128], [139], mínimos cuadrados con cambio de base [142].

Algunos trabajos [125], [136], [141], tratan por el método de la resonancia transversal estructuras con espesor finito de las metalizaciones (fig.V.6). El problema estriba en el desigual ancho de las diferentes secciones de la línea. El acoplo a través de dichas secciones I-VI se realiza mediante Fourier matching, usando como funciones ortogonales las funciones seno y coseno de semiperiodo igual al ancho de la apertura entre dos subregiones adyacentes.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

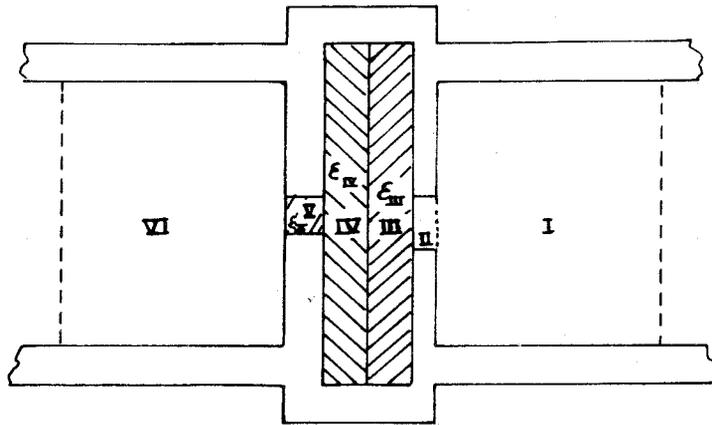


Fig.V.6

Estructura fin-line generalizada con aletas de grosor finito.

-o0o-

El método de la resonancia transversal presenta múltiples ventajas sobre cualquier otra expansión de los campos, sobre todo en el análisis de estructuras multicapa y con metalizaciones de espesor no despreciable. Las técnicas de resonancia transversal están también en la base del método TTL para la obtención de la función de Green que veremos en la próxima sección.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

V.3.d.-Técnicas de Wiener-Hopf

Las técnicas de Wiener-Hopf han sido empleadas para el análisis de líneas microtira y de aletas (fin-line) con notable éxito, al menos en estructuras sencillas [30], [99], [108], [110], [112]. Tales técnicas han sido históricamente aplicadas al análisis de iris y otras discontinuidades en guías rectangulares [10], y luego extendidas al análisis de líneas microtira.

Para ilustrar el método consideremos una línea microtira sencilla, como la de la fig.V.7. Partimos de una ecuación de Green que liga las transformadas de Fourier de los campos y las corrientes en la interfase que soporta la tira conductora (fig.V.7):

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} = j\omega\mu_0 \bar{G} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \quad (\text{V-22})$$

estando la transformada de Fourier definida en la forma:

$$\tilde{F}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{j\alpha x} dx \quad (\text{V-23})$$

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

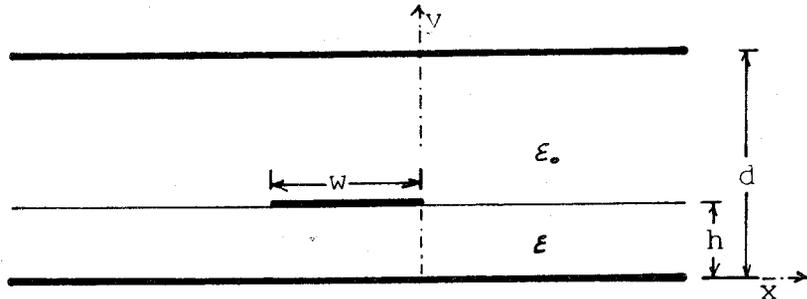


Fig.V.7
-o0o-

La ecuación (V-22) sobre la que volveremos en la próxima sección, puede ser diagonalizada mediante la transformación (ver mas adelante, sec.VI.2):

$$\bar{\bar{Q}} = \begin{bmatrix} \beta, \alpha \\ -\alpha, \beta \end{bmatrix} \quad (V-24)$$

obteniendose:

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$W_1(\alpha) = j\omega\mu_0 G_1(\alpha, \beta, \omega) F_1(\alpha) \quad (\text{V-25.a})$$

$$W_2(\alpha) = j\omega\mu_0 G_2(\alpha, \beta, \omega) F_2(\alpha) \quad (\text{V-25.b})$$

donde $G_i(\alpha, \beta, \omega)$ ($i=1,2$) son los valores principales de la transformada mediante \overline{Q} de \overline{G} , y W_1, W_2, F_1, F_2 las componentes de los vectores \vec{W} y \vec{F} transformados de \vec{E}_t y \vec{J}_t respectivamente mediante \overline{Q} .

Consideremos ahora la extensión de (V-22) y (V-25) al plano complejo. \tilde{J}_z y \tilde{J}_x son transformadas de Fourier de funciones de integral finita y definidas en un intervalo finito de "x": $-w/2 < x < w/2$. De ese modo ni \tilde{J}_z ni \tilde{J}_x pueden tener singularidades cuando se entienden al plano α -complejo. Consecuentemente, F_1, F_2 serán funciones enteras. De ese modo, de acuerdo con (V-25), los polos de W_1 y W_2 deben coincidir con los polos de G_1 y G_2 respectivamente. De ese modo W_1 y W_2 pueden desarrollarse como una suma infinita de la forma:

$$W_i = \sum_n A_{n,i} / (\alpha - \alpha_n) \quad (\text{V-26})$$

donde α_n son los polos (que se suponen conocidos) de G_i .

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Los polos de G_i corresponden a las constantes de propagación según "x" de los modos de la guía parcialmente llena que se forma para $x > 0$ cuando se impone a dichos modos una propagación según "z" del tipo $\exp(-j\beta z)$. De esa forma, puede demostrarse, invirtiendo (V-23), que el desarrollo (V-25) corresponde, para modos no radiantes de la microtira, a desarrollar los campos en $x > 0$ en suma de modos de la guía parcialmente llena, evanescentes en la dirección "x" [108]. Un razonamiento análogo es válido para $x < -w/2$.

Ahora podemos determinar los coeficientes $A_{v,i}$ en (V-26) sustituyendo (V-26) en (V-25) y evaluando (V-25) en los ceros (conocidos también) de G_i . Dado que F_i carece de polos, se obtiene así un doble sistema infinito de ecuaciones homogéneas en $A_{v,i}$. Para evaluar dicho sistema existen técnicas numéricas de gran eficiencia [10]. De hecho es posible una solución analítica cuando $w \rightarrow \infty$, y la solución numérica se construye a partir de ésta considerando la perturbación introducida por el ancho finito de la microtira [108].

También es posible construir, para "w" grande o para elevadas frecuencias, soluciones aproximadas considerando las sucesivas reflexiones en $x=0$ y $x=-w/2$ de los modos de la guía de placas paralelas bajo la microtira, supuesta

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

esta de ancho infinito (las constantes de propagación de dichos modos según "x" coinciden con los ceros de G_i , como se deduce de (V-25)). En ese caso, los diferentes coeficientes de reflexión se calculan analíticamente como mencionamos en el párrafo anterior [99].

Los métodos de Wiener-Hopf son de una gran exactitud y eficiencia numérica. Su principal inconveniente, hasta el momento, parece ser la dificultad para extenderlos a estructuras complejas, puesto que sólo ha sido aplicado, al menos hasta donde nosotros sabemos, al análisis de líneas microtira abiertas lateralmente y sobre sustrato de una sola capa [99], [108], [110], y a estructuras tipo fin-line también abiertas lateralmente [110], [112].

V.4.-Métodos de momentos y variacionales

Los métodos de momentos [9] en el dominio real [89], y sobre todo en el dominio espectral [82], [95], [86], [91], [92], [97], [104], [105], [106], [62], [113], [117], [118], [121], [124], [130], [138], [140], son ampliamente usados en el análisis dinámico de líneas plenas de transmisión.

Cifándonos en este caso a la línea microtira (fig.V.8), expondremos brevemente las líneas generales del método de momentos en el dominio espectral. Consideremos

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

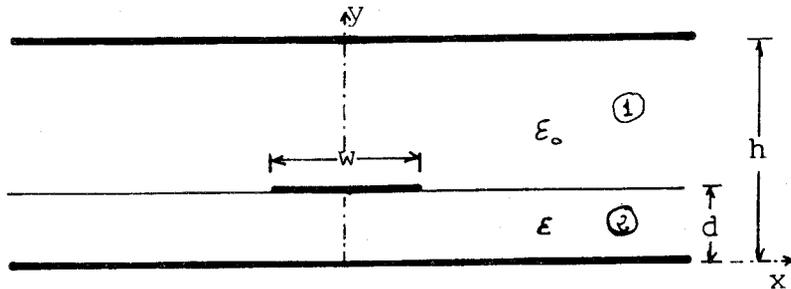


Fig.V.8
-o0o-

en primer lugar la relación, via una función de Green, entre los campos eléctricos tangenciales y las densidades de corriente en la interfase $y=d$ de la fig.V.8:

$$\vec{E}_t(\mathbf{x}) = j\omega\mu_0 \int_{-w/2}^{w/2} \vec{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \vec{J}_t(\mathbf{x}') dx' \quad (V-27)$$

Dicha expresión puede transformarse al dominio de Fourier, obteniendose la expresión (V-22) del apartado anterior. Definamos ahora el producto escalar de dos funciones en la forma:

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$\langle A(\alpha), B(\alpha) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) B^*(\alpha) d\alpha \quad (V-28)$$

Y efectuemos la expansión de J_z y J_x en serie de funciones base f_n y g_m :

$$J_z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \quad (V-29.a)$$

$$J_x = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m \quad (V-29.b)$$

El método de momentos para la resolución de (V-27) consiste en sustituir (V-29) en (V-22), y tomar posteriormente el producto escalar por una serie de funciones peso, tal como se hizo en el párrafo I.2.c, para obtener un sistema de ecuaciones indeterminado en a_n y b_m , cuyo determinante debe anularse para la β correcta, dando así la relación de dispersión. Usualmente se toman como funciones peso las mismas funciones base f_n y g_m (método de Galerkin), llegandose al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{n=1}^N \langle \mathcal{G}_{j,j}(\alpha) \tilde{f}_n, \tilde{f}_k \rangle a_n + \sum_{m=1}^M \langle \mathcal{G}_{j,e}(\alpha) \tilde{g}_m, \tilde{f}_k \rangle b_m = 0 \quad (V-30.a)$$

$$\sum_{n=1}^N \langle \mathcal{G}_{e,l}(\alpha) \tilde{f}_n, \tilde{g}_l \rangle a_n + \sum_{m=1}^M \langle \mathcal{G}_{e,e}(\alpha) \tilde{g}_m, \tilde{g}_l \rangle b_m = 0 \quad (V-30.b)$$

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

El método puede ser fácilmente extendido a estructuras con mas de una tira conductora, sin mas que tomar, en lugar de (V-27) la relación general entre los campos tangenciales en aquellas interfases que soportan metalizaciones, y sus fuentes en las mencionadas metalizaciones. También puede extenderse a líneas ranuradas -"slot-lines"-, tomando la relación inversa a (V-22) y expandiendo los campos tangenciales en lugar de las densidades de corriente.

La extensión del método a líneas encapsuladas se realiza sin dificultad, según lo expuesto al final del parágrafo I.2.c.

El método de Galerkin así formulado, en base a una relación de Green, es con mucho el mas usado. Caben sin embargo otras formulaciones [80]. El método puede también ser extendido sin dificultad al análisis de estructuras con metalizaciones de espesor finito.

Como veremos al final de la presente sección, el método de Galerkin en el dominio espectral, resulta especialmente apropiado para el análisis de la dispersión del modo fundamental (quasi-TEM). Para dicho modo, la corriente en la tira va dirigida fundamentalmente en la dirección "z". Se han propuesto muchas expansiones para J_z , y a continuación damos una breve reseña de las expansiones propuestas, adaptandolas al caso de una

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

microtira simple como la de la fig.V.8, con semiancho normalizado a la unidad.

La expansión mas simple es suponer que J_z está distribuida uniformemente sobre la tira [86], una aproximación burda, pero que da resultados en buen acuerdo con la experiencia, con un error máximo del 2 por ciento, para frecuencias inferiores a 12 GHz y dimensiones usuales ($d=0.025$ pulgadas, $\epsilon^*=9.7$).

Otras expansiones sencillas son en funciones pulso [89], y en serie de Taylor en torno a $x=0$ [140]. Una expansión que da muy buenos resultados es [80], [91], [104], [138]:

$$J_z = a_1 / \sqrt{1-x^2} \quad (V-31)$$

análoga a (I-34.c). Una versión un tanto mas compleja de (V-30) es [117], [130]:

$$f_n = T_{n-1}(x) / \sqrt{1-x^2} \quad (V-32)$$

donde $T_n(x)$ son los polinomios de Chebyshev de primer tipo, y una versión simplificada, que reúne algunas de sus características, y cuya transformada de Fourier es inmediata, es [80], [85], [121]:

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$J_z = a_d (1 - |x|^3) \quad (V-33)$$

Finalmente, otra expansión que ha sido propuesta es [113]:

$$f_n = P_{2(n-1)}(x) \quad (V-34)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de orden n . La justificación radica en la conocida relación:

$$[2(1-x)]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \quad (V-35)$$

donde el término de la izquierda presenta el mismo comportamiento asintótico en los bordes de la microtira que J_z .

Como ya se señaló en la sec.II.1, para medios isotropos, si J_z se supone real, J_x debe ser imaginaria. Por otro lado, para el modo fundamental, quasi-TEM, J_x debe ser una función impar de x que se anule para $x = w/2$. En base a ello se han propuesto una serie de expansiones para J_x que a continuación describimos. Su extensión a líneas de varios conductores es inmediata.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

La aproximación mas simple es suponer que J_x se anula [80], [85], [86], [121], de acuerdo con razonamientos cuasiestáticos. Dicha aproximación da buenos resultados para la línea microtira siempre que $w/\lambda_0 \leq 0.1$ [80].

Otras expansiones propuestas son en funciones pulso [89] y en series Fourier en seno [113], [140]. La hipótesis complementaria de (V-31) para la expansión de J es:

$$J_x = j b_1 x \sqrt{1-x^2} \quad (V-36)$$

y la complementaria de (V-32):

$$g_m = j U_m(x) \sqrt{1-x^2} \quad (V-37)$$

Si consideramos ahora una línea ranurada de espaciado "w" entre las aletas, resulta conveniente expandir E_x y E_z en lugar de J_z y J_x . En este caso la magnitud complementaria de J_z es E_x . La aproximación mas simple para E_x es suponerlo uniforme en la ranura [85], [105], de acuerdo con la hipótesis ya citada de Cohn [79]. Otra aproximación evidente es expandir E_x en funciones pulso [106]. Las expansión análogas a (V-31) [82], [91], [104], [106], [118], a (V-32) [102], [62], [126], y a (V-33) [97],

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

[[113]], han sido también propuestas. Otra expansión relacionada con (V-31) que ha sido propuesta es [106]:

$$f_n = [\cos((n-1)\pi(x+1))]/\sqrt{1-x^2} \quad (V-38)$$

La expansión mas simple para E_z es $E_z=0$ [85], [105], tambien se ha propuesto un desarrollo en serie de Fourier en seno [97], [113] y las análogas a (V-36) [82], [91], [104], [116], [118], y a (V-37) [102], [62], [126], así como la complementaria de (V-38) [106]:

$$g = j[\sin(m\pi(x+1))]/\sqrt{1-x^2} \quad (V-39)$$

Para el cálculo de las funciones de Green que aparecen en (V-27), (V-22), pueden usarse cualquiera de los métodos de descomposición modal expuestos en la sección anterior, considerando ahora que en la interfase metalizada hay, en lugar de la metalización, una densidad de corriente arbitraria. Para el cálculo de la función de Green real (V-27), ha sido tambien usado el método de las imágenes [94], [103]. No obstante el método mas extendido y ventajoso es, con mucho, el método de la línea de transmisión transversal (TTL) extendido.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

El método TTL para la obtención de la función diádica de Green en el dominio espectral, parte de los mismos presupuestos que el método de la resonancia transversal del párrafo V.3.c: La descomposición del campo, a ambos lados de la superficie metalizada, en modos TE y TM según la coordenada "y" (fig.V-8).

Siguiendo a Itoh [104], descomponemos los campos eléctricos y magnéticos en su espectro de Fourier según "x":

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x,y) \\ H(x,y) \end{array} \right\} e^{-j\beta z} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\alpha,y) \\ \vec{H}(\alpha,y) \end{array} \right\} e^{-j\alpha x - j\beta z} d\alpha \quad (V-40)$$

De (V-40) es evidente que todos las componentes del campo pueden construirse por superposición de ondas no uniformes según la dirección "y", propagándose en la dirección \vec{v} , donde \vec{v} es el vector unitario del plano x-z que forma un ángulo $\theta = \cos^{-1}(\beta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ con el eje "z". Para cada valor de θ las ondas pueden ser descompuestas en ondas TE ($\vec{E}_u, \vec{H}_y, \vec{H}_v$) y ondas TM ($\vec{E}_y, \vec{E}_v, \vec{H}_u$) según el eje "y" (ver párrafo V.3.c), donde las coordenadas "u" y "v" están relacionadas con "x" e "y" a través de:

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$u = z \operatorname{sen}(\theta) - x \operatorname{cos}(\theta) \quad (\text{V-41.a})$$

$$v = z \operatorname{cos}(\theta) + x \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{V-41.b})$$

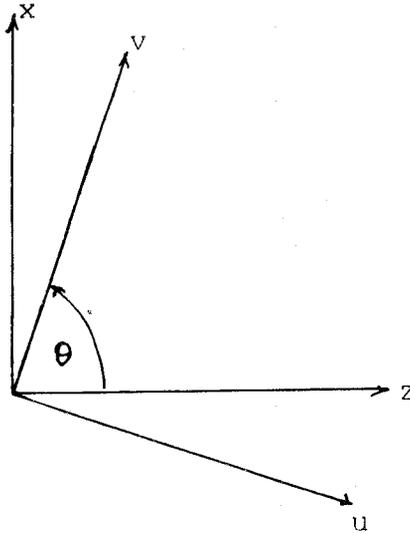
Puede demostrarse además que la densidad de corriente \tilde{J}_v crea sólo campos TM y la \tilde{J}_u sólo campos TE. Por tanto podemos construir, en base a una analogía similar a la establecida en la sec.I.4, circuitos equivalentes para los campos TE y TM (fig.V.9), compuestos por dos líneas de transmisión de longitudes "d" y "h-d" respectivamente (ver fig.V.8), cortocircuitadas en sus extremos, y conectadas a una fuente \tilde{J}_u o \tilde{J}_v en $y=d$. La admitancia de cada tramo de línea debe coincidir con la respectiva admitancia de onda de los modos TE o TM en cada región de la línea microtira de la fig.V.8:

$$Y_{TM,i} = \tilde{H}_u / \tilde{E}_v = j\omega \epsilon_0 \epsilon_i^* / \gamma_i \quad ; \quad i=1,2 \quad (\text{V-42.a})$$

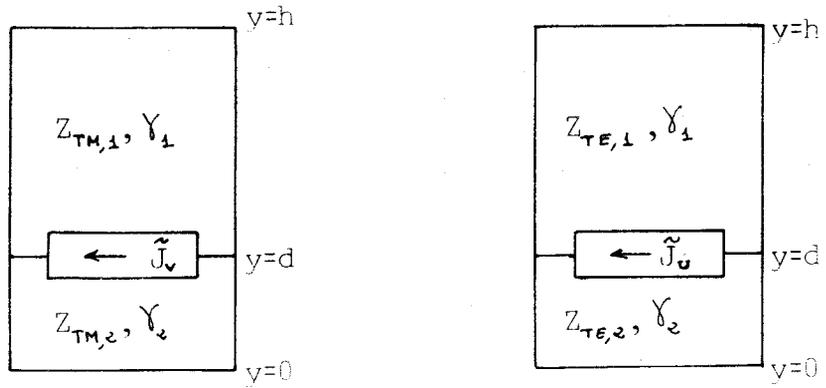
$$Y_{TE,i} = -\tilde{H}_v / \tilde{E}_u = \gamma_i / (j\omega \mu_i) \quad ; \quad i=1,2 \quad (\text{V-42.b})$$

donde $\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \epsilon_i^* k_0^2}$ es la constante de propagación en la dirección "y" en la región "i".

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis



(a)



(b)

Fig.V.9

Método TTL. (a).- Cambio de coordenadas. (b).- Líneas de transmisión equivalentes para los modos TE y TM según "y".

-o0o-

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

Los campos \tilde{E}_u y \tilde{E}_v son continuos a través de la interfase $y=d$ y están relacionados con las corrientes según:

$$\tilde{E}_v(\alpha, d) = G^e(\alpha, d) \tilde{J}_v(\alpha, d) \quad (V-43.a)$$

$$\tilde{E}_u(\alpha, d) = G^h(\alpha, d) \tilde{J}_u(\alpha, d) \quad (V-43.b)$$

donde G^e y G^h son las impedancias en $y=d$ del circuito equivalente de la fig.V.9.b, que vienen dadas por:

$$G^e(\alpha, d) = 1/(Y_1^e + Y_2^e) \quad (V-44.a)$$

$$G^h(\alpha, d) = 1/(Y_1^h + Y_2^h) \quad (V-44.b)$$

donde Y_1^h e Y_2^h son las admitancias "mirando hacia arriba y hacia abajo" en $y=d$ del circuito para el modo TE, e Y_1^e e Y_2^e las correspondientes admitancias del circuito para el modo TM:

$$Y_1^e = Y_{TM,1} \coth(\gamma_1(h-d)) \quad (V-45.a)$$

$$Y_2^e = Y_{TM,2} \coth(\gamma_2 d) \quad (V-45.b)$$

$$Y_1^h = Y_{TE,1} \coth(\gamma_1(h-d)) \quad (V-45.c)$$

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

$$Y_2^h = Y_{TE,2} \coth(\gamma_2 d) \quad (V-45.d)$$

El último paso consiste en pasar del sistema de coordenadas "u,v" al original "x,y". Volviendo atrás la transformación (V-41) se obtiene:

$$\oint_{ZZ}(\alpha, d) = N_z^2 G^e(\alpha, d) + N_x^2 G^h(\alpha, d) \quad (V-46.a)$$

$$\oint_{ZX}(\alpha, d) = \oint_{ZX}(\alpha, d) = N_x N_z [G^h(\alpha, d) - G^e(\alpha, d)] \quad (V-46.b)$$

$$\oint_{XX}(\alpha, d) = N_x^2 G^e(\alpha, d) + N_z^2 G^h(\alpha, d) \quad (V-46.d)$$

donde

$$N_x = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \text{sene} \theta \quad (V-47.a)$$

$$N_z = \beta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \text{cos} \theta \quad (V-47.b)$$

Obsérvese que G^e y G^h son funciones de $\alpha^2 + \beta^2$ y que la razón entre α y β sólo aparece a través de N_x y N_z .

El método TTL presenta múltiples ventajas a la hora de su extensión a estructuras multiconductoras [104] y multicapa [124]. En concreto, su extensión a estructuras multicapa es inmediata, en virtud del hecho, ya mencionado,

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

de que los modos TE y TM no pierden su carácter tras la refracción en una superficie dieléctrica normal a su dirección de propagación. Para ello basta con ampliar el número de secciones de línea en los circuitos equivalentes de la fig.9.b, a fin de tener en cuenta las múltiples refracciones en las interfases de separación entre la diferentes capas.

Digamos para finalizar que recientemente se han presentado trabajos [143], que tratan el problema de la determinación de ϵ_{eff} en líneas microtira de forma variacional. Como demostraremos mas adelante, dichos métodos variacionales son esencialmente idénticos al método de Galerkin en el dominio espectral aquí reportado, por lo que no nos detendremos mas sobre ellos.

El método de Galerkin en el dominio espectral presenta múltiples ventajas tanto por su sencillez, como por su fácil extensión a estructuras complejas: En esencia el método no varía de una estructura a otra, una vez se ha hallado la función de Green (V-22). Su principal inconveniente radica en su carácter dependiente de las funciones base elegidas, lo que lo hace poco fiable a la hora del estudio de modos superiores, debido a la aparición de raíces espúreas [89], [97]. En palabras de un conocido autor, nada sospechoso de parcialidad respecto del método

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

aquí descrito (El usa el método de la resonancia transversal, junto con el método de la ecuación integral singular), "El método de Galerkin en el dominio espectral es superior a todos los demás métodos, para el análisis del modo dominante y de los primeros modos superiores, debido a que el orden de la matriz característica (ec.V-30) puede ser tan bajo como cuatro... Para modos superiores, por encima del décimo o vigésimo, cuyo estudio es necesario para el análisis de discontinuidades, dos funciones base no son suficientes para aproximar el campo real, y el tamaño de la matriz debe ser incrementado considerablemente. En este caso es preferible usar la técnica de la ecuación integral, debido a que una matriz característica de orden siete puede ser suficiente" [128]. Independientemente de que creamos que A.S.Omar y K.Schunemann se exceden en su optimismo en lo relativo a las excelencias del método de Galerkin (10 ó 20 modos quizás sean muchos modos), sus palabras creemos que expresan de forma clara las ventajas y la principal limitación del método.

V.5.-Líneas en medios anisótropos

Cuando una o varias de las capas dieléctricas que constituyen el medio que soporta las metalizaciones de una línea de configuración planar presenta anisotropía

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

dieléctrica o magnética, intrínseca o inducida (semiconductores y ferritas magnetizados), muchos de los métodos de análisis descritos hasta aquí pierden validez, o deben ser generalizados convenientemente.

Hay, sin embargo, toda una familia de estructuras anisótropas que pueden ser analizadas siguiendo esencialmente los mismos esquemas de análisis descritos con anterioridad; son aquellas estructuras compuestas por dieléctricos uniaxiales con el eje óptico orientado en la dirección perpendicular a las interfases [62], [110], [112], [117], [130]. Puede demostrarse que, en tal caso, los campos en la estructura sin metalizar pueden descomponerse en modos TE y TM según la dirección perpendicular a la interfase (ver mas adelante, sec.VI.2), lo que permite analizar la estructura por el método de la resonancia transversal, o bien, por el método de Galerkin con la función de Green calculada por el método TTL [62], [117], [130]. También, como ya mencionamos, es posible aplicar técnicas de Wiener-Hopf, de un modo en todo similar al descrito en el apartado V.3.d. [110], [112].

Cuando dicha condición no se cumple, es necesario desarrollar nuevos caminos, que generalmente pasan por la determinación de una relación de Green del tipo (V-22) [114], [127], [129], [137], [140], [144], [145], para a

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

continuación aplicar el método de Galerkin, el único práctico dada la complejidad de la estructura bajo análisis.

En lo que respecta a estructuras simples sobre una sola capa anisótropa, el problema de determinar \bar{J} en (V-22) ha sido resuelto, para una anisotropía completamente general, por Tsalamengas et al. [129], [137]. Expresiones de validez mas limitada, pero de gran generalidad y mayor compacidad, pueden encontrarse en [114], [144] y en la presente memoria.

En lo que respecta a estructuras multicapa, han aparecido algunos algoritmos generales de mayor [127] o menor [140] generalidad. Un algoritmo completamente general, basado en los teoremas de equivalencia y unicidad del campo electromagnético [4], y válido para cualquier tipo de medio de comportamiento lineal puede encontrarse en [145] y en la presente memoria.

V.6.-El problema de la definición de impedancia

En el marco de la aproximación cuasiestática, la impedancia de una línea microtira, definida como el cociente entre el potencial cuasiestático y la intensidad que circula por la tira conductora, posee una expresión

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

unívoca en función de las integrales del campo (ver mas arriba sec.I.1 y sec.II.1).

Cuando abordamos el análisis dinámico de líneas inhomogeneas, el concepto de impedancia empieza a diluirse, al no existir una definición unívoca en términos de las integrales del campo. Dicha dificultad se incrementa en el análisis de líneas multiconductoras, no existiendo aqui ninguna generalización mas o menos válida de las expresiones de la sec.II.1 y II.2.

La solución mas sencilla es la propuesta por Denlinger [80] y apoyada por Getsinger [96]. Denlinger propone la siguiente expresión para la variación con la frecuencia de la impedancia de una línea microtira:

$$Z(\omega) = Z_0 \sqrt{\epsilon_{e,0} / \epsilon_e} \quad (V-47)$$

donde Z_0 es la impedancia cuasiestática, $\epsilon_{e,0}$ el valor cuasiestático de la constante dieléctrica efectiva y ϵ_e la constante dielectrica efectiva a la frecuencia considerada (ver mas arriba, sec.V.1).

Dicha definición de impedancia es coherente con el modelo de Getsinger [83], y corresponde al cociente entre el valor medio del potencial entre las dos placas conductoras de dicho modelo (fig.V.1) y la intensidad que

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

circula por una de las placas. También es consistente con el valor de la impedancia de onda, definida en cada punto como el cociente E_y/H_x , que en el modelo de Getsinger tiene un valor independiente de la posición e igual a $\eta_0/\sqrt{\epsilon_e}$ [96].

Nótese que el uso de la expresión (V-47) convierte a la constante de propagación en la única magnitud de interés desde el punto de vista de la teoría de circuitos, por cuanto ϵ_e puede obtenerse a partir de ésta mediante fórmulas elementales.

Una expresión muy usada para la impedancia es [85], [86], [97], [102], [104], [105], [106], [113], [117], [118], [126], [130], [141]:

$$Z = 2P/(I \cdot I^*) \quad \text{o bien} \quad Z = V \cdot V^*/2P \quad (\text{V-49})$$

donde P es el valor medio de la potencia transmitida por la línea, e I o V la intensidad que circula por la línea o la integral del campo entre dos puntos sobre las metalizaciones, a través de un camino que es preciso definir.

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

La primera expresión suele usarse para líneas microtira, y la segunda para fin-lines, siendo el camino de integración a través de la ranura entre las aletas, siguiendo la interfase.

Debe hacerse notar que ninguna de las expresiones (V-49) posee definición unívoca en términos de las integrales del campo, por cuanto I no puede identificarse con la integral del campo H a lo largo de cualquier camino cerrado en torno a la tira conductora, ni V con la integral del campo eléctrico entre puntos cualesquiera de la tira y del plano de masa.

Otra posibilidad, usada a veces, consiste en definir simplemente [108], [110], [112]:

$$Z = V/I \quad (V-50)$$

donde V es un potencial definido como la integral del campo eléctrico entre dos puntos convenientemente elegidos de los conductores que configuran la línea de transmisión, e I la intensidad que circula por la línea.

Finalmente se ha propuesto también una definición de Z en términos del coeficiente de reflexión entre la línea inhomogénea y la línea homogénea, de la misma geometría, que se obtiene tras sustituir todas las capas dieléctricas

Análisis en frecuencia
Métodos de análisis

por aire [98]; generalizando la expresión de la teoría de líneas de transmisión homogéneas:

$$Z = Z_0 [1 - S_{3,3}] / [1 + S_{3,3}] \quad (V-51)$$

donde $S_{3,3}$ es el coeficiente de reflexión de la línea homogénea a la inhomogénea, y Z_0 la impedancia conocida de la línea homogénea.

Ninguna de las expresiones hasta aquí listadas tiene mas justificación que aquella que quieran darle sus partidarios. En cuanto a su utilidad práctica, depende de cada circunstancia concreta: Así, por ejemplo, si se desea conectar algún elemento localizado de circuito (v.g. un diodo), interesará una definición de impedancia que incluya la diferencia de potencial entre los puntos en que piensa conectarse dicho elemento, etc.

Por otra parte, desde el punto de vista de la teoría de circuitos de parámetros distribuidos, la expresión (V-51) prece la mas lógica. No obstante, la elección de la línea patrón en [98], aunque natural, no deja de ser arbitraria, y queda por ver hasta que punto la expresión (V-51) puede generalizarse a la transición entre líneas inhomogéneas de la misma geometría en lo que respecta a los conductores.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

En cuanto a la expresión (V-48) tiene como principal ventaja su sencillez, estando al mismo tiempo bien justificada en términos del modelo de Getsinger [94], [96].

Las diferentes definiciones de impedancia mencionadas predicen, por otro lado, comportamientos completamente contradictorios de Z con la frecuencia. Así, mientras la expresión (V-48) predice un decrecimiento monótono de Z con la frecuencia (ya que ε_e tiende a aumentar con la frecuencia), las expresiones (V-49) y (V-50) predicen un crecimiento monótono de Z ; finalmente, la expresión (V-51) predice primero un decrecimiento y luego un crecimiento.

En lo que respecta a su acuerdo con los datos experimentales, la expresión (V-51) es la que mejor acuerdo cualitativo muestra con los datos publicados [119], pero ello tampoco es un argumento decisivo, desde el momento en que los resultados de que disponemos [119], parten de una definición de la impedancia en términos del coeficiente de reflexión.

En cualquier caso es evidente que, desde el punto de vista de la teoría de parámetros distribuidos, las expresiones (V-49), (V-50) no están justificadas, ni desde el punto de vista teórico (la impedancia debería servir aquí para predecir coeficientes de reflexión), ni desde el experimental, (dan un comportamiento cualitativamente

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

diferente del observado). La expresión (V-48), por su parte, se muestra como una buena aproximación, a baja frecuencia, de los resultados experimentales [119], mostrándose además en excelente acuerdo con los resultados teóricos de [98] para microtiras de espesor despreciable en las metalizaciones.

Expresiones para Z a partir de ϵ_e que muestran un mejor acuerdo con los datos experimentales de [119] que (V-48), pueden encontrarse en [119] (eqs.19 y 14).

V.7.-Conclusiones

Se ha propuesto una gran variedad de métodos para el análisis de la variación en frecuencia de los parámetros característicos de líneas de transmisión de configuración planar. Dejando aparte los métodos aproximados semiempíricos, de gran importancia práctica pero que aquí no tratamos por incluir ciertos parámetros que es preciso determinar experimentalmente o mediante análisis más rigurosos, los restantes métodos pueden clasificarse en tres grandes categorías: Numéricos, de análisis modal y de momentos, entre los que destaca el método de Galerkin en el dominio espectral.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Los métodos puramente numéricos (diferencias finitas, TLM y "de las líneas") son poco usados y su potencia excede, en general, de la necesaria para el análisis de líneas de transmisión de configuración planar.

Los métodos de análisis modal provienen de las técnicas de análisis de discontinuidades en guías y son especialmente indicados para el análisis de modos superiores.

El método de Galerkin en el dominio espectral, aparece como el más apropiado para el análisis de la dispersión del modo fundamental en líneas microtira de configuración planar, debido a su gran versatilidad -lo que lo hace apropiado para el análisis de estructuras complejas-, y al tamaño reducido -no mayor de $4 \times 4 \times N$, donde N es el número de conductores que configuran la línea- de la matriz característica a que da lugar.

Para su aplicación a estructuras multiconductoras en medios anisótropos, el primer paso es hallar la matriz de Green en el dominio espectral (V-22), lo que exige el desarrollo de metodologías específicamente adaptadas a la presencia de medios anisótropos.

Análisis en frecuencia Métodos de análisis

Finalmente es preciso señalar que, a diferencia del análisis cuasiestático, no existe en el análisis dinámico una definición unívoca de impedancia. Nosotros nos inclinamos, en virtud de su sencillez y de los argumentos expuestos en la sec.V.6, por la definición de Denlinger (V-48), u otra similar [119]; lo que convierte a la constante de propagación en la única magnitud de interés en el análisis de la dependencia con la frecuencia de los parámetros característicos de la línea en su modo fundamental.

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

VI-ANÁLISIS EN FRECUENCIA DE LINEAS DE CONFIGURACION PLANAR SOBRE UNA CAPA

A lo largo del presente capítulo expondremos un método para la obtención de la función diádica de Green en el dominio espectral, para estructuras sencillas sobre una sola capa de material anisótropo. Dicho método es válido siempre que el material anisótropo considerado esté orientado de modo que la dirección perpendicular al plano de masa coincida con un eje principal de anisotropía. Tal requisito incluye, aparte de materiales de anisotropía intrínseca, ferritas y plasmas magnetizados en la dirección perpendicular al plano de tierra.

Una vez ha sido obtenida la función de Green, el análisis de líneas microtira o fin-line sobre sustrato anisótropo, puede realizarse mediante el método de Galerkin en el dominio espectral, siguiendo esencialmente el método expuesto en la sec.V.4.

La principal ventaja de las expresiones que a continuación se obtienen para la función de Green radica en su compacidad, siendo al mismo tiempo de aplicación muy general. Dicha compacidad va ligada a la condición

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

impuesta más arriba sobre la orientación del sustrato y se perdería si considerásemos sustratos de orientación completamente arbitraria. Expresiones para la función diádica de Green en sustratos de orientación arbitraria pueden encontrarse en [137].

Digamos finalmente que las expresiones así obtenidas pueden generalizarse a estructuras multiconductoras y multicapa, mediante el método expuesto en el capítulo siguiente.

VI.1.-Obtención de la función de Green para medios de anisotropía dieléctrica

Consideremos la estructura de la fig.VI.1. Se trata de una lámina infinita de dieléctrico anisótropo, que llena parcialmente el espacio entre dos planos, de los cuales el superior es conductor, y el inferior puede ser un conductor o una pared magnética. Mediante la metalización parcial de la interfase aire-dieléctrico, pueden construirse una gran variedad de líneas de transmisión: Líneas microtira, acoplamiento simétrico de dos microtiras (tanto coplanar como por superposición), fin-lines bilaterales, etc.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

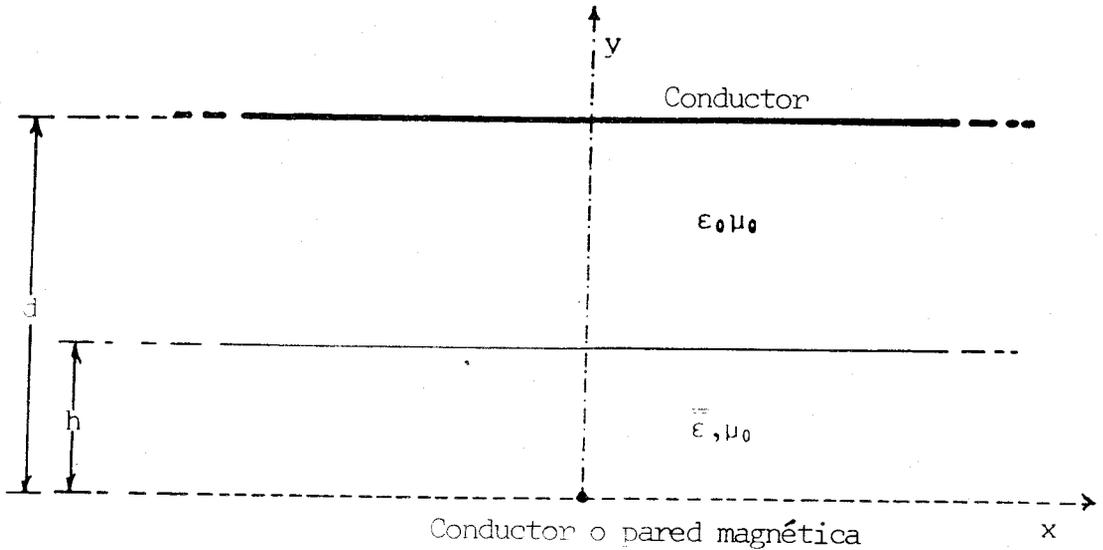


Fig.VI.1

Estructura aire-dieléctrico anisótropo de una sola capa. Una o más microtiras o ranuras pueden colocarse en la interfase para configurar una línea de transmisión.

-o0o-

Supondremos que, como es habitual, la permeabilidad magnética de la línea es igual a la del vacío ($\bar{\mu} = \mu_0$). En ese caso, el vector campo eléctrico en la región $0 < y < h$ debe cumplir la ecuación:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (\text{VI-1})$$

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

Definiendo la transformada de Fourier como:

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\alpha x} dx \quad (\text{VI-2})$$

la ecuación (VI-1) puede escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} (\alpha^2 + \beta^2) & -j\beta\partial_y & -j\alpha\partial_y \\ -j\beta\partial_y & (\alpha^2 - \partial_y^2) & -\alpha\beta \\ -j\alpha\partial_y & -\alpha\beta & (\beta^2 - \partial_y^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} = \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{VI-3})$$

donde ∂_y representa el operador $[\partial/\partial y]$.

De las ecuaciones (VI-3) podríamos ahora eliminar \tilde{E}_y , lo que nos conduciría a un par de ecuaciones acopladas en \tilde{E}_x y \tilde{E}_z , y, tras aplicar las condiciones de contorno en la interfase $y=h$, a una relación del tipo (V-22). No obstante es útil efectuar antes sobre (VI-3) la misma transformación (V-41) efectuada en el método TTL (ver sec.V.4). Dicha transformación se escribe:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{Q}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (\text{VI-4})$$

y corresponde, como ya señalamos (sec.V.4) a una rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje "y", de ángulo

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\theta = \cos^{-1}(\beta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

Cuando el tensor de permitividad es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{zz} & \epsilon_{zx} \\ 0 & \epsilon_{xz} & \epsilon_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_y & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_t \end{bmatrix} \quad (\text{VI-5})$$

tras introducir (VI-4) en (VI-3), se obtienen las ecuaciones:

$$(\alpha^2 + \beta^2) \tilde{E}_y - j\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} [\partial W_1 / \partial y] = \omega^2 \mu_0 \epsilon_y \tilde{E}_y \quad (\text{VI-6.a})$$

$$\begin{aligned} -j\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\partial \tilde{E}_y / \partial y] + \{(\alpha^2 + \beta^2) \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} - \partial^2 / \partial y^2\} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \\ = \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon}'_t(\theta) \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI-6.b})$$

donde $\vec{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$ y $\bar{\epsilon}'_t(\theta)$ son las transformadas mediante (VI-4) de $\tilde{E}_t = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix}$ y $\bar{\epsilon}_t$ respectivamente:

$$\vec{W} = \bar{Q} \cdot \tilde{E}_t \quad (\text{VI-7.a})$$

$$\bar{\epsilon}'_t(\theta) = \bar{Q} \cdot \bar{\epsilon}_t \cdot \bar{Q}^{-1} \quad (\text{VI-7.b})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

Dichas ecuaciones (VI-6) pueden ahora escribirse, tras eliminar \vec{E}_y , en una forma compacta:

$$[\partial^2/\partial y^2]\vec{U} = \vec{B} \cdot \vec{U} \quad (\text{VI-8})$$

donde

$$\vec{U} = \vec{S}^{-1} \vec{W} \quad ; \quad \vec{S}^{-1} = \begin{bmatrix} k_y^2 & 0 \\ 0 & -K_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-9})$$

$$\vec{B} = K_y^2 \left\{ -(\alpha^2 + \beta^2) \begin{bmatrix} 0, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix} + \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon}'_t(\theta) \right\} \cdot \vec{S} \quad (\text{VI-10})$$

$$K_y^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_y^2 \quad ; \quad k_y^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_y \quad (\text{VI-11})$$

Debe hacerse notar que, cuando empleamos un tensor arbitrario en lugar de (VI-5), la ecuación diferencial (VI-8) debe ser sustituida por otra que implica además una derivada primera de \vec{U} , con una matriz como coeficiente. La resolución de tal ecuación resulta mucho más complicada que la de (VI-9), no ofreciendo entonces el presente método ninguna ventaja esencial sobre la formulación usual de primer grado [127], [129].

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

Digamos finalmente que las expresiones (VI-1-11) pueden extenderse fácilmente al caso dual en que el medio presenta anisotropía magnética.

En lo que resta de la presente sección usaremos las expresiones anteriores para construir la función diádica de Green en el dominio espectral, de una gran variedad de estructuras.

VI.1.a.-Pared inferior conductora

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno en $y=0$, encontramos que, para el caso en que la pared inferior sea un conductor, las soluciones a [VI-8] deben ser de la forma:

$$U = \sinh(\bar{K}y) \cdot C \quad ; \quad \bar{K} = \bar{B}^{1/2} \quad (\text{VI-12})$$

donde \vec{C} es un vector constante respecto a "y", y la función $\sinh(\bar{K}y)$ se define en la forma usual, como una serie de Taylor infinita en $\bar{K}y$.

En la zona $y > h$, podemos definir el vector auxiliar \vec{U}_0 :

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\vec{U}_0 = \vec{S}_0^{-1} \vec{W} \quad ; \quad \vec{S}_0^{-1} = \begin{bmatrix} k_0^z & 0 \\ 0 & -K_0^z \end{bmatrix} \quad (\text{VI-13.b})$$

$$K_0^z = \alpha^z + \beta^z - k_0^z \quad ; \quad k_0^z = \omega^z \mu_0 \epsilon_0 \quad (\text{VI-13.b})$$

para el que debe cumplirse la ecuación:

$$[\partial^2 / \partial y^2] \vec{U}_0 = K_0^z \vec{U}_0 \quad (\text{VI-14})$$

cuya solución debe ser del tipo:

$$\vec{U}_0 = \sinh(K_0^z (d-y)) \vec{D} \quad (\text{VI-15})$$

donde \vec{D} , como \vec{C} , es un vector constante con "y", cuya relación con \vec{C} debe determinarse a partir de las condiciones de contorno en la interfase.

Las condiciones de contorno son:

$$\vec{W} \Big|_{y=h^+} = \vec{W} \Big|_{y=h^-} \quad (\text{VI-16})$$

y

$$\tilde{J}_x = -\tilde{H}_z \Big|_{y=h^-} + \tilde{H}_z \Big|_{y=h^+} \quad (\text{VI-17.a})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\tilde{J}_z = \tilde{H}_x \Big|_{y=h^-} - \tilde{H}_x \Big|_{y=h^+} \quad (\text{VI-17.b})$$

donde \tilde{J} es la transformada de Fourier de la densidad de corriente en la interfase.

Las condiciones de contorno (VI-17) han de expresarse ahora en función de W_1 y W_2 . Para ello usamos la relación $\text{rot}(\vec{E}) = -j\omega\mu_0\vec{H}$, junto con (VI-6.a) obteniéndose:

$$[\partial/\partial y]\vec{U} = j\omega\mu_0 K_y^2 \vec{Q} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ -\tilde{H}_z \end{bmatrix} \quad (\text{VI-18})$$

Con una relación análoga entre \vec{U}_0 y \vec{H}_t en la zona $y > h$.

De (VI-18), las condiciones de contorno (VI-17) pueden ahora expresarse como:

$$(1/K_y^2) \vec{S}_1^* [\partial/\partial y] \vec{W} \Big|_{y=h^-} - (1/K_0^2) \vec{S}_0^* [\partial/\partial y] \vec{W} \Big|_{y=h^+} = j\omega\mu_0 \vec{F} \quad (\text{VI-19})$$

donde \vec{F} es la transformada mediante (VI-6) de la densidad de corriente en la interfase:

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\vec{F} = \bar{Q} \cdot \vec{J}_t \quad ; \quad \vec{J}_t = \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \quad (\text{IV-20})$$

Usando ahora (VI-16) y (VI-19), los coeficientes \vec{C} y \vec{D} pueden determinarse, obteniéndose la siguiente relación entre \vec{W} y \vec{F} :

$$\vec{W} = j\omega\mu_0 \bar{G} \cdot \vec{F} \quad (\text{VI-21.a})$$

$$\bar{G} = [(\bar{K}/K_0^2) \cdot \coth(\bar{K}h) \cdot \bar{S}^{-1} + (1/K_0) \coth(K_0(d-h)) \bar{S}_0^{-1}]^{-1} \quad (\text{VI-21.b})$$

Las expresiones (VI-21), conforman ya de alguna manera una relación de Green. Una expresión mas explicita puede obtenerse simplemente invirtiendo la transformación (VI-7), (VI-20):

$$\vec{E}_t = j\omega\mu_0 \bar{G} \cdot \vec{J}_t \quad (\text{VI-22.a})$$

$$\bar{G} = \bar{Q} \cdot \bar{G} \cdot \bar{Q}^{-1} \quad (\text{VI-22.b})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

VI.1.b.-Expresiones compactas de la función de Green

Las ecuaciones (VI-21.b) y (VI-22.b) pueden expresarse de una manera explícita, sin recurrir a funciones de matrices, mediante el teorema de Sylvester [2]. Para ello nótese en primer lugar que la función $\bar{K} \cdot \coth(\bar{K}h)$ es realmente función de \bar{B} , y no de \bar{K} , como puede comprobarse desarrollándola en serie de Taylor. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Sylvester a la función $F(\bar{B}) = \bar{K} \coth(\bar{K}h)$, obteniéndose:

$$\bar{K} \cdot \coth(\bar{K}h) = \lambda_1 \coth(\lambda_1 h) \frac{\bar{B} - \lambda_2^2 \bar{I}}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \lambda_2 \coth(\lambda_2 h) \frac{\bar{B} - \lambda_1^2 \bar{I}}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$$

(VI-23)

donde λ_1^2 y λ_2^2 son los valores característicos de \bar{B} , que hemos supuesto distintos, debiéndose tomar el límite para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ en el caso en que se igualen. Los autovalores λ_1^2 y λ_2^2 pueden obtenerse analíticamente, adquiriendo expresiones especialmente simples en el caso de sustratos dieléctricos uniaxiales y plasmas magnetizados -ver Apéndice B-.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

De (VI-23) y tras algunas manipulaciones, $\overline{\overline{G}}$ puede escribirse en la forma:

$$\overline{\overline{G}}^{-1} = \begin{bmatrix} f_1 & , & 0 \\ 0 & , & f_2 \end{bmatrix} + \omega^2 \nu_0 \Gamma \overline{\overline{\varepsilon}}'_t(\theta) \quad (\text{VI-24})$$

donde

$$f_1 = (k_o^2 / K_o) \coth(K_o(d-h)) - (k_y^2 / K_y^2) \Phi \quad (\text{VI-25.a})$$

$$f_2 = -K_o \coth(K_o(d-h)) - \Gamma(\alpha^2 + \beta^2) + \Phi \quad (\text{VI-25.b})$$

$$\Gamma = [\lambda_1 \coth(\lambda_1 h) - \lambda_2 \coth(\lambda_2 h)] / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \quad (\text{VI-25.c})$$

$$\Phi = \lambda_3 \lambda_2 [\lambda_2 \coth(\lambda_1 h) - \lambda_1 \coth(\lambda_2 h)] / (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \quad (\text{VI-25.d})$$

La expresión para $\overline{\overline{G}}$ adopta también una forma simple, sin mas que tener en cuenta que el el transformado inverso de $\overline{\overline{\varepsilon}}'_t(\theta)$ es $\overline{\overline{\varepsilon}}_t$:

$$\overline{\overline{G}}^{-1} = \overline{\overline{Q}}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 & , & 0 \\ 0 & , & f_2 \end{bmatrix} \cdot \overline{\overline{Q}} + \omega^2 \nu_0 \Gamma \overline{\overline{\varepsilon}}_t \quad (\text{VI-26})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

VI.1.c.-Pared inferior magnética.

En muchas configuraciones, consideraciones de simetría llevan a un problema similar al dibujado en la fig.VI.1 cuando la pared inferior ($y=0$) es una pared magnética. En ese caso, las condiciones de contorno en $y=0$ se expresan mediante la anulación de las componentes tangenciales del campo magnético. Teniendo en cuenta (VI-18), dichas condiciones pueden expresarse mediante:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \vec{U} \right]_{y=0} = 0 \quad (\text{VI-27})$$

de modo que las soluciones a (VI-8) serán ahora de la forma:

$$\vec{U} = \cosh(\bar{K}y) \cdot \vec{C}' \quad (\text{VI-12.c})$$

Razonando a partir de aquí en forma del todo análoga a las dos secciones anteriores, encontramos, en lugar de (VI-21.b):

$$\bar{G} = \left[(\bar{K}/K_y) \cdot \tanh(\bar{K}h) \cdot \bar{S}^{-1} + (1/K_o) \coth(K_o(d-h)) \bar{S}_o^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{VI-21.c})$$

y, en lugar de (VI-25.c y .d)

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\Gamma = [\lambda_1 \tanh(\lambda_1 h) - \lambda_2 \tanh(\lambda_2 h)] / (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \quad (\text{VI-25.e})$$

$$\Phi = \lambda_3 \lambda_2 [\lambda_3 \tanh(\lambda_1 h) - \lambda_1 \tanh(\lambda_2 h)] / (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \quad (\text{VI-25.f})$$

permaneciendo válidas el resto de las expresiones (VI-21)-(VI-26).

VI.1.d.-Medios de anisotropía magnética

Consideremos ahora el caso en que el medio presenta anisotropía magnética (fig.VI.2), con el plano inferior conductor. El tensor de permeabilidad magnética se supone también de la forma:

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_y & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_t \end{bmatrix} ; \bar{\mu}_t = \begin{bmatrix} \mu_{zz} & \mu_{zx} \\ \mu_{xz} & \mu_{xx} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.5.b})$$

Haciendo uso de las relaciones de dualidad [4], la expresión (VI-1) puede trasladarse a nuestro caso sin más que cambiar \vec{E} por \vec{H} , \vec{H} por $-\vec{E}$, $\bar{\epsilon}$ por $\bar{\mu}$ y μ_0 por ϵ :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \omega^2 \bar{\mu} \vec{H} \quad (\text{VI-1.b})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

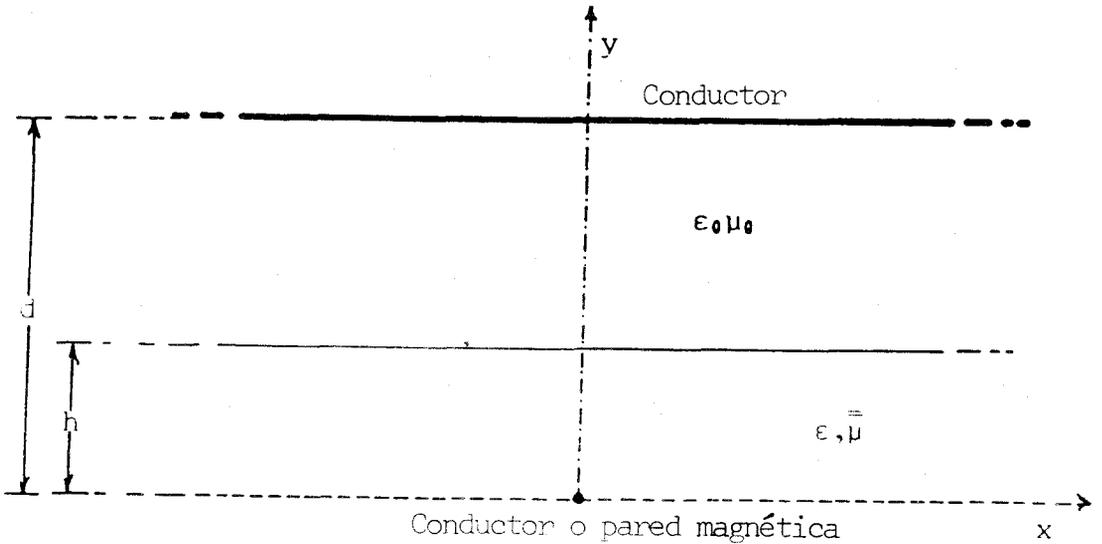


Fig.VI.2

Estructura aire-medio magnetizable anisótropo de una sola capa. Una o más microtiras o ranuras pueden colocarse en la interfase para configurar una línea de transmisión.

-o0o-

Siguiendo el mismo esquema desarrollado en los apartados anteriores, es útil definir los vectores:

$$\vec{\tilde{H}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{H}_z \\ \tilde{H}_x \end{bmatrix} \quad (\text{VI-28})$$

y

$$\vec{U}_M = \vec{S}^d \vec{W}_M = \vec{S}^d \vec{Q} \cdot \vec{\tilde{H}}_t \quad (\text{VI-9.b})$$

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\vec{U}_M^o = \vec{S}_o^{-1} \vec{W}_M = \vec{S}_o^{-1} \vec{Q} \cdot \vec{H}_t \quad (\text{VI-13.c})$$

donde \vec{S} y \vec{S}_o se definen según (VI-9) y (VI-13.a), con $K_y = \alpha^2 + \beta^2 - k_y^2$, $k_y^2 = \omega^2 \mu_y \epsilon$.

La ecuación diferencial para \vec{U}_M coincide con (VI-8), y las condiciones de contorno en $y=0$ -anulación de las componentes tangenciales del campo eléctrico- resultan ser las duales de (VI-27):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \right] \vec{U}_M \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{VI-29})$$

de modo que \vec{U}_M es de la forma:

$$\vec{U}_M = \cosh(\vec{K}_M y) \cdot \vec{C}'' \quad (\text{VI-30})$$

donde \vec{K}_M es la matriz dual de \vec{K} . Análogamente:

$$U_M^o = \cosh(K_o(d-h)) \cdot \vec{D}'' \quad (\text{VI-31})$$

(\vec{C}'' y \vec{D}'' son vectores constantes a determinar de acuerdo con las condiciones de contorno en $y=h$).

No obstante, nuestro interés radica en hallar una relación entre los campos eléctricos y las corrientes en $y=h$, análoga a (VI-21) ó (VI-22). Para ello es preciso

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

obtener la relación entre \vec{U}_M y \vec{U} . Para ello utilizamos la relación dual de (VI-18):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \right] \vec{U}_M = -j\omega \epsilon K_y^e \bar{Q} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ -\tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (\text{VI-32})$$

que tras algunas manipulaciones se transforma en:

$$U = (-j\omega \mu_y / K_y^e) \bar{M} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \right] \vec{U}_M ; M = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ K_y^2 / k_y^e & , & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-33})$$

Una vez conocida la relación entre \vec{U}_M y \vec{U} , pueden aplicarse las condiciones de contorno en $y=h$ (VI-16), (VI-17), con lo que \vec{C}'' y \vec{D}'' quedan determinados en función de las corrientes en la interfase. De ese modo puede finalmente obtenerse una relación entre \vec{W} y \vec{F} similar a (VI-21.a), (VI-24)-(VI-25):

$$\vec{W} = (1/j\omega \epsilon_0) \bar{G}_M \cdot \vec{F} \quad (\text{VI-34})$$

donde

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

$$\bar{\bar{G}}_M^{-1} = \begin{bmatrix} f_M^1, & 0 \\ 0, & f_M^2 \end{bmatrix} + \epsilon^* \omega^2 \epsilon \sqrt{\bar{\bar{M}}} \cdot \bar{\bar{\mu}}_t'(\theta) \cdot \bar{\bar{M}} \quad (\text{VI-35})$$

siendo

$$f_M^1 = -(1/K_o) \coth(K_o(d-h)) - \epsilon^* \sqrt{h} (\alpha^2 + \beta^2) + \epsilon^* \bar{\Phi}_M \quad (\text{VI-36.a})$$

$$f_M^2 = K_o \coth(K_o(d-h)) - \epsilon^* (K_y^2/k_y^2) \bar{\Phi}_M \quad (\text{VI-36.b})$$

$$\bar{\bar{M}} = [\coth(\lambda_{M,1} h) / \lambda_{M,1} - \coth(\lambda_{M,2} h) / \lambda_{M,2}] / (\lambda_{M,1}^2 - \lambda_{M,2}^2) \quad (\text{VI-36.c})$$

$$\bar{\Phi}_M = [\lambda_{M,2}^2 \coth(\lambda_{M,1} h) / \lambda_{M,1} - \lambda_{M,1}^2 \coth(\lambda_{M,2} h) / \lambda_{M,2}] / (\lambda_{M,1}^2 - \lambda_{M,2}^2) \quad (\text{VI-36.d})$$

con $\lambda_{M,1}^2, \lambda_{M,2}^2$ iguales a los autovalores de la matriz $\bar{\bar{B}}_M = \bar{\bar{K}}_M \cdot \bar{\bar{K}}_M$, dual de $\bar{\bar{B}}$, y vienen dados explícitamente en el Apéndice B.

Expresiones análogas a (VI-22.a), (VI-26), pueden obtenerse invirtiendo la transformación $\bar{\bar{Q}}$.

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

Cuando la pared inferior ($y=0$) es una pared magnética, todos los razonamientos hasta aquí expuestos permanecen válidos, excepto en el hecho de que las condiciones de contorno en $y=0$ son ahora de la forma

$$\vec{U}_M \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{VI-37})$$

ello lleva a sustituir la función "cosh" por "sinh" en (VI-31.a), y, consiguientemente, la función "coth" por "tanh" en (VI-36.c y .d).

VI.2.-Algunos comentarios

Las expresiones (VI-24)-(VI-26) y sus análogas (VI-25) y (VI-35)-(VI-36) son expresiones compactas que pueden implementarse fácilmente en un ordenador, sin necesidad de recurrir a subrutinas de diagonalización de matrices de orden superior a dos, incluso en la mayoría de los casos prácticos -dieléctricos uniaxiales y semiconductores o ferritas magnetizados-, ni siquiera es necesario diagonalizar numéricamente las matrices \bar{B} y \bar{B}_M , por cuanto sus autovalores pueden ser obtenidos analíticamente en forma compacta (ver Apéndice B). Todo ello representa una gran ventaja respecto de otros métodos mas generales [127], [129], tanto en lo referente a velocidad de cálculo cómo en

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

lo referente a la comprensión física de los resultados. Lógicamente el precio que hay que pagar por las mencionadas ventajas es una menor generalidad.

Desde el punto de vista matemático, la principal característica del método es que se trata de una formulación de segundo grado. De hecho, como ya mencionamos, la condición impuesta al medio (dirección "y" coincidente con un eje principal del tensor), es condición necesaria para que pueda obtenerse una ecuación diferencial para \vec{U} de la forma (VI-8). En cualquier otro caso, la ecuación que se obtiene es de la forma:

$$[\partial^2 / \partial y^2] \vec{U} + \bar{A} \cdot [\partial / \partial y] \vec{U} = \bar{B} \cdot \vec{U} \quad (\text{VI-38})$$

Dado que el producto de matrices no es en general conmutativo, dicha ecuación no puede ser resuelta como si de una ecuación con coeficientes escalares se tratase, forzandonos así a abandonar la formulación de segundo grado, y a transformar (VI-38) en una ecuación de primer grado con coeficientes matriciales de orden 4x4 (ver apdo.VII.3.b)

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

Consideremos ahora las "fuentes", F_1 y F_2 de (VI-21.a). $F_1 \propto \beta \tilde{J}_z + \alpha \tilde{J}_x$ es esencialmente la transformada de Fourier de la divergencia transversal de \vec{J} , es decir, de acuerdo con la ecuación de continuidad ($\vec{\nabla}_t \cdot \vec{J} = -j\omega\rho$) F_1 es proporcional al producto de la frecuencia por la densidad de carga superficial sobre la interfase aire-dieléctrico. Por su parte, F_2 , excepto por el factor " $1/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ", coincide con el valor del rotacional transversal de \vec{J} , en el dominio espectral. De ese modo, F_1 y F_2 representan la parte irrotacional y solenoidal respectivamente de \vec{J} .

Las componentes W_1 y W_2 del campo en (VI-21.a), son a su vez, excepto por el factor " $1/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ", las transformadas de Fourier de la divergencia transversal y del rotacional transversal del campo eléctrico transversal respectivamente.

En medios isótropos, o cuando el sustrato es uniaxial, con el eje óptico orientado en la dirección perpendicular a la interfase, el tensor transversal $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ ($\bar{\bar{\mu}}_t$), es un tensor escalar igual a $\epsilon_1 \bar{\bar{I}}$ ($\mu_1 \bar{\bar{I}}$), con lo que (VI-21.a) y (VI-34) se desacoplan en dos ecuaciones independiantes, una para W_1 y F_1 , y otra para W_2 y F_2 . Teniendo en cuenta lo dicho mas arriba acerca del significado fisico de \vec{W} y \vec{F} , podemos concluir que dichas ecuaciones corresponden respectivamente a modos TM y TE según "y". De acuerdo con lo dicho en la

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

sec. V.5, para cualquier otra orientación del tensor, o cualquier otro tipo de anisotropía, ambos modos TE y TM están acoplados.

Los ceros de $\overline{\mathcal{G}}$ (VI-22.a), vienen dados por la ecuación $\lambda_{y,z}^2 = -(n\pi/h)^2$ de acuerdo con (VI-25)-(VI-26), y corresponden a la existencia, para los valores apropiados de α y β , de modos de propagación en cualquiera de las guías de placas paralelas que pueden constriuirse colocando un plano conductor en $y=h$ (ver fig.VI.1). Dichos modos son de la forma $\vec{E} = \vec{E}(y)\exp(-j\alpha x - j\beta z + j\omega t)$. Para α y β reales, son modos que se propagan en una dirección que forma un ángulo $\theta = \cos^{-1}(\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ con el eje "z", con una constante de propagación $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Los polos de $\overline{\mathcal{G}}$ se obtienen igualando a cero el determinante de (VI-26). Al igual que los ceros, los polos corresponden a modos de propagación, pero ahora en la guía parcialmente llena de la fig.VI.1. Consideraciones idénticas a las realizadas anteriormente se pueden hacer en torno a la dirección de propagación y número de onda de estos modos.

Finalmente, si colocamos una fuente en $y=h$ del tipo $\vec{J} = \vec{J}(x)\exp(-j\beta z)$, los campos en la interfase aire-dieléctrico pueden obtenerse, vía (VI-22.a), como una superposición de todos los modos excitados por cada una de

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

las componentes de Fourier de \vec{J} , $\tilde{J}(\alpha)(\exp-j\alpha x - j\beta z)$, los cuales se propagan con una constante de propagación k y formando un ángulo θ con el eje "z".

VI.3.-Ejemplos

Para calcular la constante de propagación (o la constante dieléctrica efectiva) de las estructuras que pueden analizarse a partir de los resultados de la sec.VI.1, utilizaremos, como ya adelantamos, el método de Galerkin en el dominio espectral. Como veremos posteriormente, dicho método es variacional, en un sentido que quedará claro en la sec.VII.1.

Las estructuras que analizaremos se muestran en las figs.VI.3.a y .b. Se trata de una línea microtira y una línea fin-line bilateral, sobre sustrato dieléctrico uniaxial de orientación variable. Se dispone de datos experimentales para la estructura de la fig.VI.3.a, para el caso particular de un sustrato de zafiro con el eje óptico en dirección perpendicular al plano de masa [90]. En lo que respecta a la estructura de la fig.VI-3.b, disponemos de resultados teóricos de gran fiabilidad, obtenidos mediante el método de Wiener-Hopf [108], para el caso particular de un sustrato isótropo.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

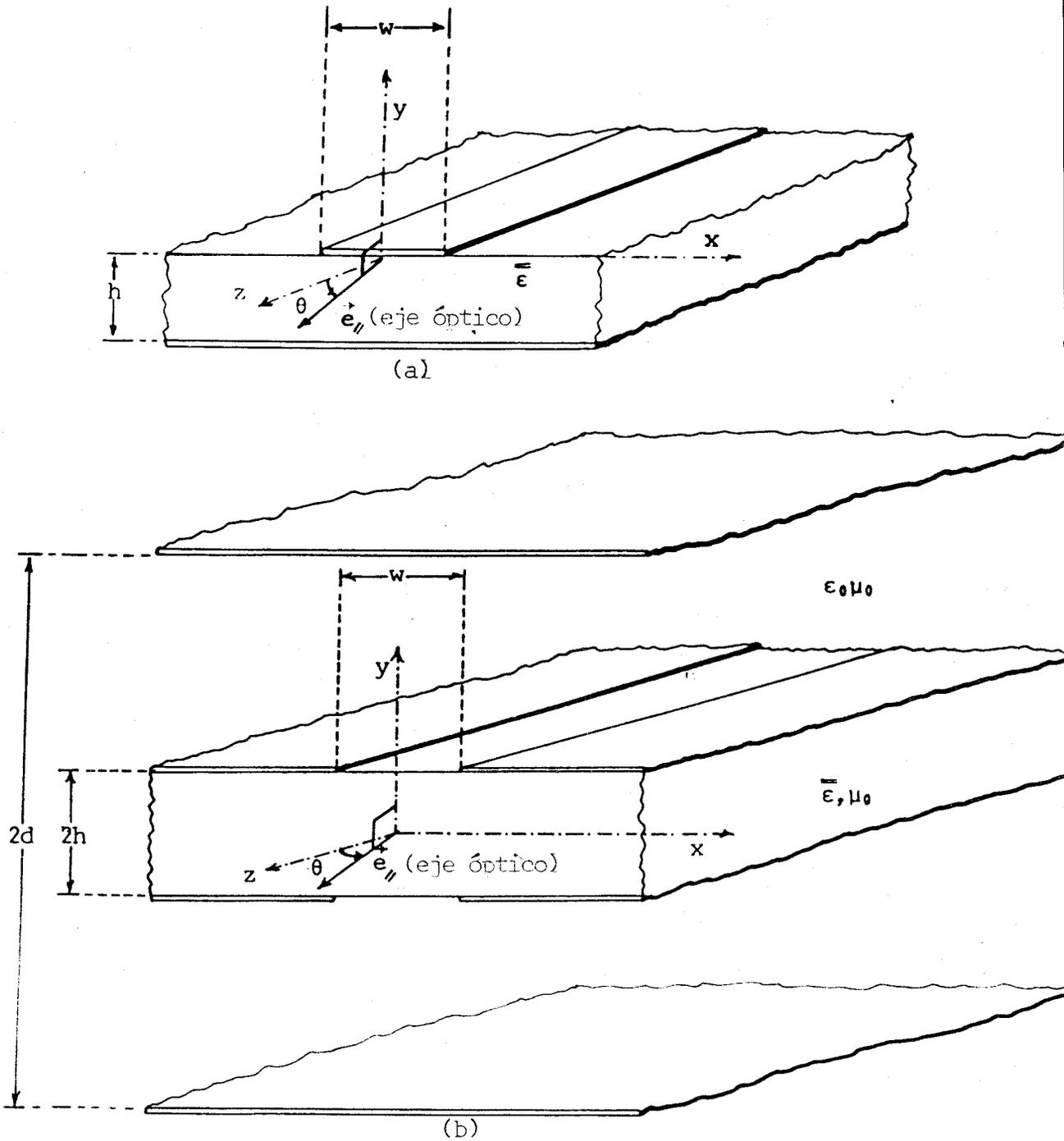


Fig.VI.3

(a).- Línea microtira sobre sustrato dieléctrico monoáxico con el eje óptico paralelo a la interfase. [también puede suponerse perpendicular a ésta]. (b).- Fin-line bilateral sobre idéntico sustrato.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

Las funciones base elegidas para la densidad de corriente en la tira conductora (fig.VI.a), lo han sido en consonancia con las utilizadas para la densidad de carga en el cap.IV:

$$J_z = a_0 + a_1 [1/\sqrt{1+2x/w} + 1/\sqrt{1-2x/w}] \quad (\text{VI-39.a})$$

$$J = ja_3 [2\sqrt{2x/w} - \sqrt{1+2x/w} + \sqrt{1-2x/w}] \quad (\text{VI-39.b})$$

Para el campo eléctrico en la ranura de la fig.VI.3.b, se ha elegido un desarrollo similar: Para E_x se ha elegido la misma expansión que para J_z , mientras que para E_z se ha utilizado un desarrollo análogo al utilizado para J_x en (VI-39.b).

En la fig.VI.4, nuestros resultados teóricos son comparados con los experimentales debidos a T.C.Edwards y R.P.Owens [90], para una línea microtira sobre zafiro. Puede comprobarse que los resultados coinciden con gran aproximación.

En la fig.VI.5 se muestra una comparación entre nuestros resultados y los publicados por A.M.El-Sherbiny [108], para una línea tipo fin-line bilateral sobre sustrato isótropo ($\epsilon^* = 2.22$). Puede comprobarse el excelente acuerdo alcanzado.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

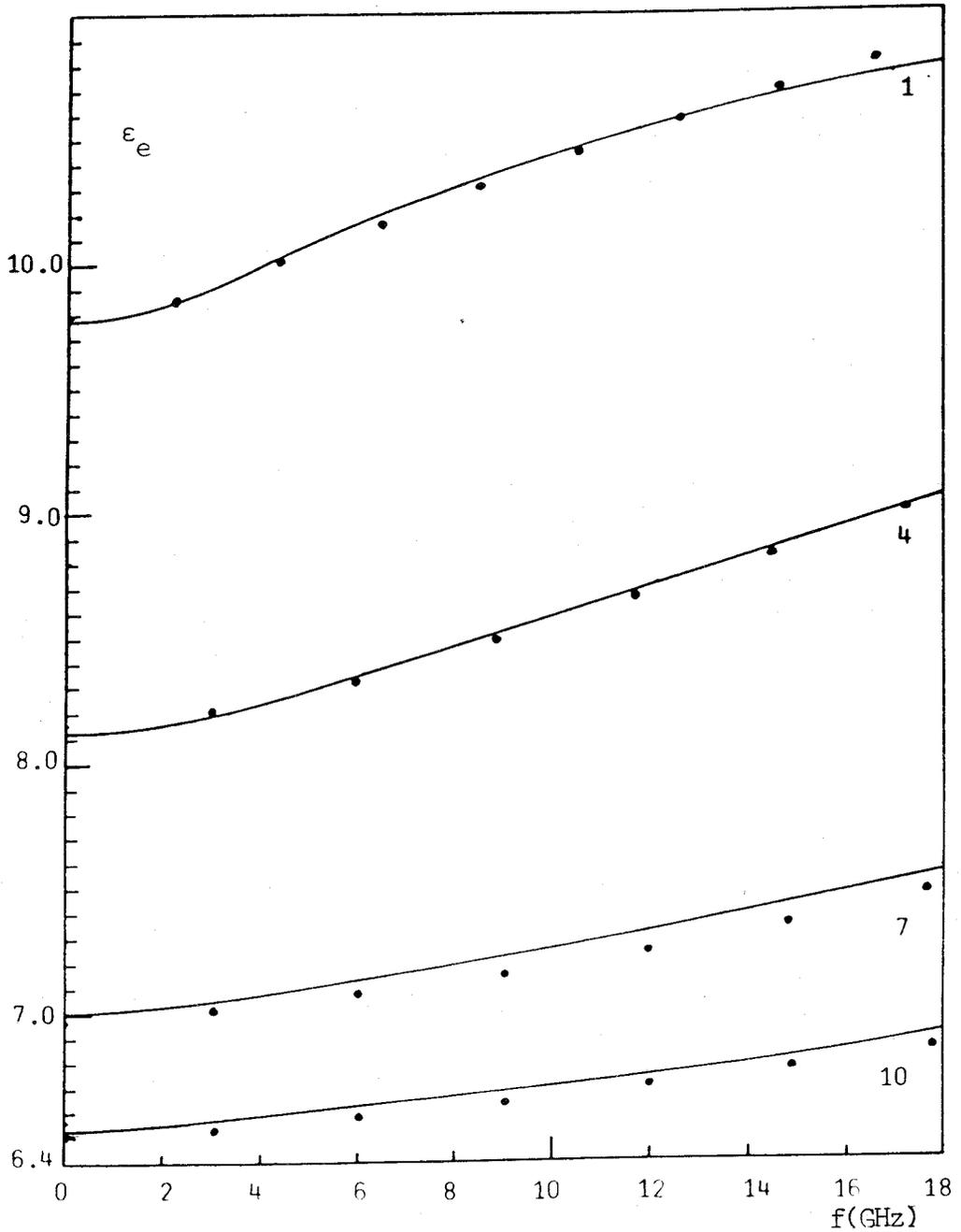


Fig.VI.4

Comparación de nuestros resultados (—) con los experimentales (•) de Edwards et al. [90]. Los numeros junto a las curvas hacen referencia a las dimensiones de la línea en la tabla 1 de la referncia [90]. Los puntos experimentales vienen dados en [90] fig.5.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

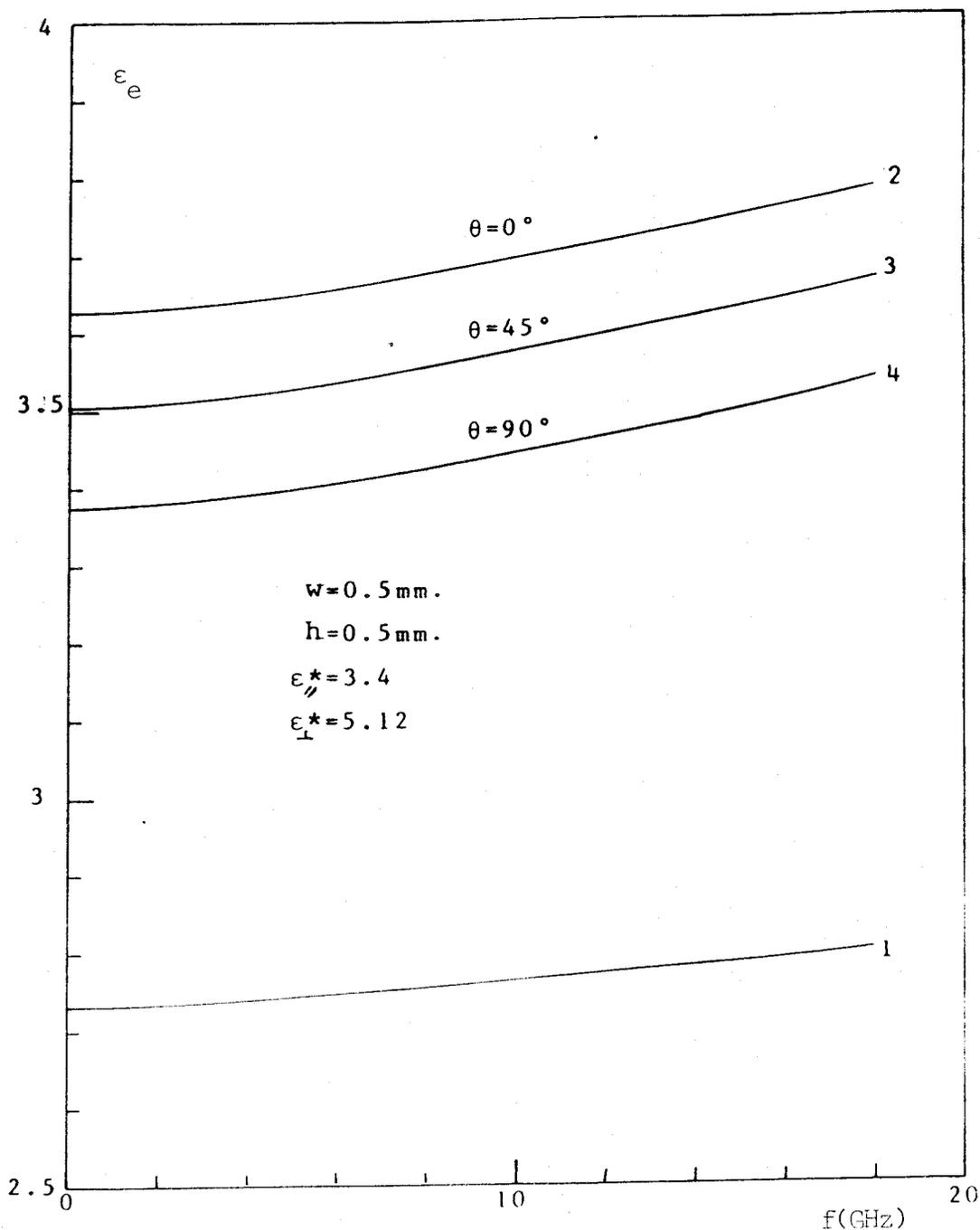


Fig.VI.6

Características de dispersión de líneas microtira sobre nitruro de boro ($\epsilon_{//}^*$ (eje óptico)=3.4, ϵ_{\perp}^* =5.12, $w=0.5\text{mm}$, $h=0.5\text{mm}$. (i).- Eje óptico perpendicular a la interfase. (ii)-(iv).- Eje óptico paralelo a la interfase y formando un ángulo de 0° , 45° y 90° respectivamente con la dirección de propagación.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

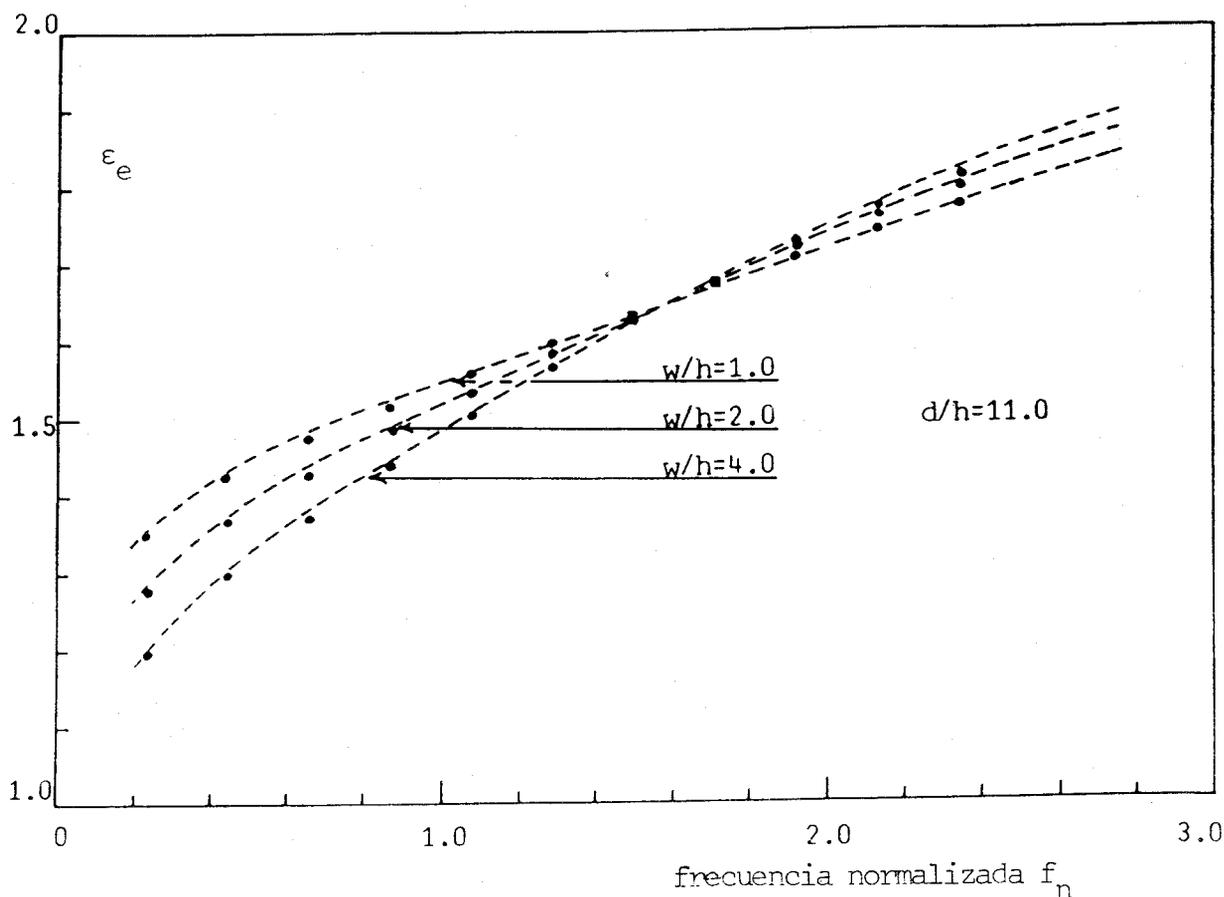


Fig.VI.5

Comparación entre nuestros resultados (•) y los de A.M.El Sherbiny en [108] (---) para un fin-line bilateral sobre sustrato isotrópico ($\epsilon^* = 2.22$). ($d/h = 11$. $f_n = (2\pi h/\lambda_0) \sqrt{\epsilon^*}$.

-o0o-

La fig.VI.6 muestra la variación con la frecuencia de la constante dieléctrica efectiva de una línea microtira sobre sustrato dieléctrico de nitruro de boro ($\epsilon_{//}^* = 3.4$,

Análisis en frecuencia Estructuras de una capa

$\epsilon_1^*=5.12$), para diferentes orientaciones del tensor. En la curva 1, el eje óptico es perpendicular al plano de masa; en las curvas 2-5 el eje óptico se toma paralelo al plano de masa y formando un ángulo con el eje "z" de 0° , 45° y 90° respectivamente.

Debemos indicar aquí que tomar J_z simétrica y J_x antisimétrica, cómo se hace en las expresiones (VI-39), no está justificado por la simetría de la estructura, excepto en el caso particular en que $\bar{\epsilon}$ es diagonal (curvas 1, 2 y 4). La justificación radica en las consideraciones hechas en la sec.II.1, según las cuales H_z es simétrica y H_x antisimétrica en primera aproximación. Naturalmente todo ello es válido a condición de no alejarse mucho del límite cuasiestático; para frecuencias mas elevadas puede ser necesario considerar, a la hora de expandir J_z y J_x , que tanto una como otra son, en la estructura general de la fig.VI.3.a, funciones complejas de x sin simetría definida.

Finalmente la fig.7 muestra la variación con la frecuencia de la constante dieléctrica efectiva de una línea fin-línea bilateral, sobre sustrato anisótropo de las mismas características que en el caso anterior.

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

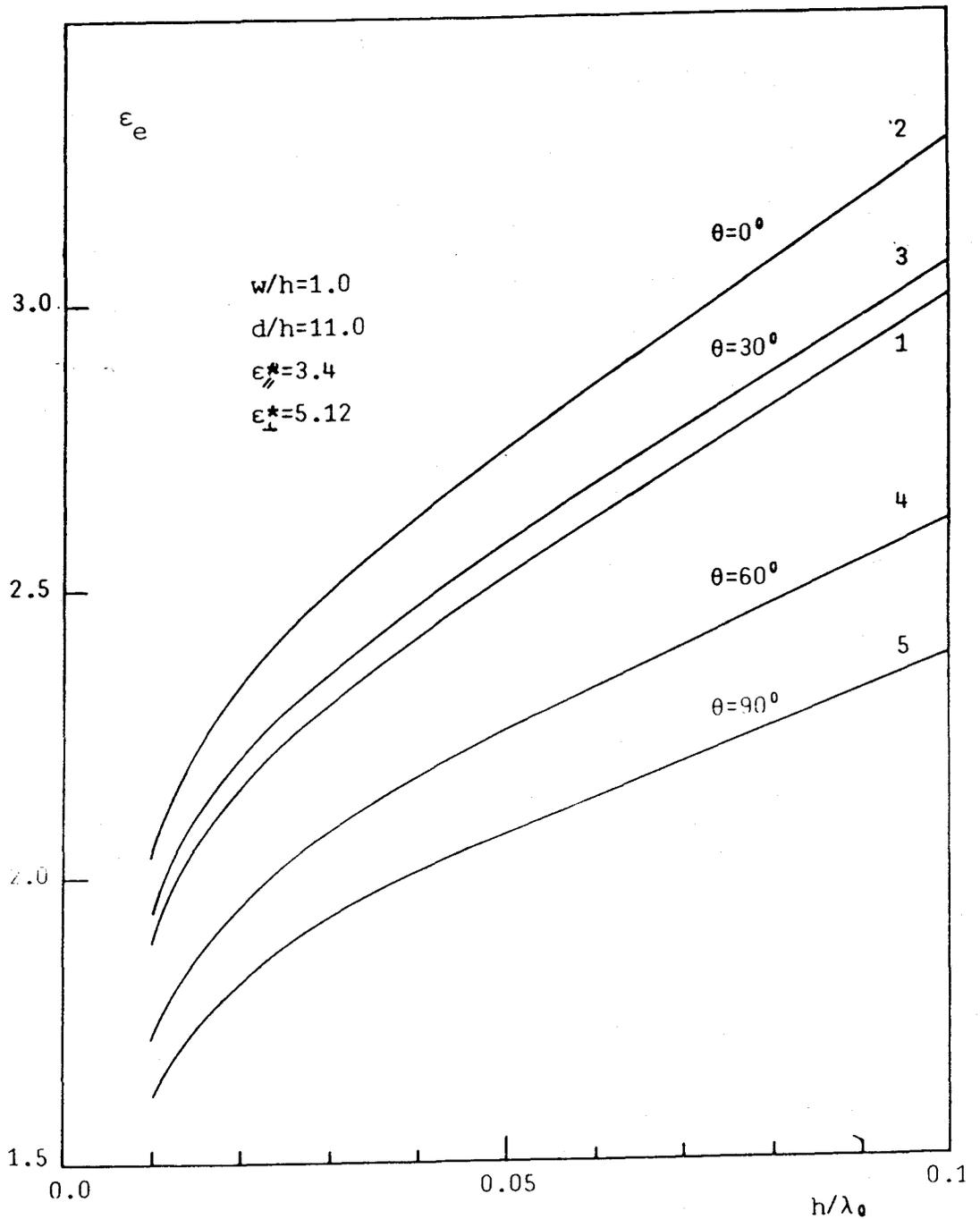


Fig.VI.7

Características de dispersión de una línea fin-lin bilateral sobre sustrato de nitruro de boro ($\epsilon_{//}^*=3.4$, $\epsilon_{\perp}^*=5.12$). (i).- Eje óptico perpendicular a la interfase. (ii)-(v).- Eje óptico paralelo a la interfase y formando un ángulo de 0° , 30° , 60° y 90° respectivamente con la dirección de propagación.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

VI.4.-Conclusiones

Un elevado número de líneas tipo microtira o fin-line con sustrato anisótropo, pueden analizarse bajo la hipótesis de que la dirección perpendicular al plano de masa es también una dirección principal del tensor de anisotropía dieléctrica o magnética. Tales estructuras incluyen líneas sobre dieléctricos anisótropos uniaxiales y biaxiales -orientados de modo que se cumpla la condición arriba mencionada-, y sobre ferritas y semiconductores magnetizados en la dirección perpendicular al plano de masa.

En ese caso es posible una formulación diferencial de segundo grado para los campos, que puede resolverse por los métodos del análisis matricial, conduciendo a expresiones compactas para la función diádica de Green (VI-22.a), susceptibles de ser usadas en el análisis de dichas estructuras por el método de Galerkin en el dominio espectral.

Cuando la condición arriba mencionada no se cumple, dicha formulación de segundo grado lleva a expresiones que es preciso resolver pasando a una formulación de primer grado y cuarto orden, que no es posible resolver de forma compacta. Un método para obtener la función de Green diádica para estructuras de anisotropía completamente

Análisis en frecuencia
Estructuras de una capa

general, susceptible de ser implementado en un ordenador, puede encontrarse en [129] y [137] y en el parágrafo VII.3.c de la presente memoria.

Finalmente, algunas estructuras de interés práctico han sido analizadas usando las expresiones desarrolladas en la sec.VI.1 y el método de Galerkin en el dominio espectral, y los resultados comparados, cuando ello era posible, con los disponibles en la literatura, tanto experimentales como teóricos, mostrando siempre un excelente acuerdo.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

VII-ANALISIS DE LA DISPERSION EN
LINEAS MULTICONDUCTORAS Y MULTICAPA

El análisis dinámico o de onda completa de líneas de transmisión de estructura compleja (multiconductoras y multicapa) en medios anisótropos, exige la elaboración de un método general de análisis que vaya mas allá de las técnicas, relativamente sencillas, desarrolladas en el capítulo anterior. En el presente capítulo abordaremos tal problema de un modo sistemático.

En primer lugar demostraremos que, bajo ciertas condiciones, el método de Galerkin en el dominio espectral es en cierto sentido variacional. De ese modo, y una vez decidida su aplicación al problema que estamos considerando, queda la cuestión de la determinación de la función diádica de Green en el dominio espectral.

Dicha determinación se realiza tras subdividir el problema en tantas partes como sea posible. Las soluciones de tales subproblemas son luego encadenadas mediante un algoritmo de recurrencia que proporciona la función de Green global.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Finalmente, es preciso resolver cada uno de los subproblemas mencionados para cada tipo de medio (isótropo, anisótropo, magnetizado,...) que consideremos como constitutivo de las diferentes capas de la estructura.

Una vez resuelto el problema de la determinación de la función de Green, la aplicación del método de Galerkin discurre por los cauces convencionales, quedando como única cuestión pendiente la elección de las funciones base.

VII.-El método de Galerkin como método variacional

Como ya señalamos en la sec.V.4 en una línea microtira y a una frecuencia dada, las constantes de propagación de los diferentes modos vendrán dadas de modo implícito por:

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dx' \bar{\bar{G}}(x, x'; \beta) \cdot \vec{J}(x') = 0; \quad |x| < \frac{w}{2} \quad (\text{VII-1})$$

donde $\bar{\bar{G}}(x, x'; \beta)$ es la función de Green de la estructura en el espacio real, y $\vec{J}(x')$ representa la densidad de corriente sobre la tira, que debe anularse para todos los puntos exteriores a la misma ($|x| > w/2$).

En líneas multiconductoras de configuración planar, β viene dada de forma implícita por una ecuación análoga a (VII-1), donde $\bar{\bar{G}}(x, x'; \beta)$ es una matriz de orden $2N \times 2N$ (si

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

N es el número de tiras conductoras acopladas) y $\vec{J}(x')$ un vector de orden $2N$ que representa las densidades de corriente en todas y cada una de las N tiras conductoras, y cuyas componentes se anulan para puntos " x' " situados fuera de las mismas.

En líneas ranuradas, la ecuación (VII-1) o su análoga debe ser sustituida por:

$$\int_{-w/2}^{w/2} dx' \bar{G}^{-1}(x, x'; \beta) \cdot \vec{E}(x') = 0 \quad (\text{VII-2})$$

donde la integral se extiende ahora por todo el ancho de la ranura. Para líneas de ranura acopladas, (VII-2) debe ser generalizada en el mismo sentido que lo fue (VII-1) para líneas multiconductoras.

Dada la similitud formal entre los diversos problemas mencionados, nos ceñiremos para simplificar al caso simple de una sola línea microtira, siendo los resultados obtenidos inmediatamente extensibles a líneas multiconductoras y ranuradas.

Cómo es ya sabido, la ecuación (VII-1) representa en realidad un producto de convolución, que puede expresarse en el dominio de Fourier mediante:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-w/2}^{w/2} dx' \bar{G}(x, x'; \beta) \cdot \vec{J}(x') \right] = j\omega \mu_0 \bar{G}(\alpha; \beta) \cdot \vec{J}(\alpha) \quad (\text{VII-3})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

donde $\tilde{J}(\alpha)$ es la transformada de Fourier de la densidad de corriente en la tira y, por tanto, debe ser tal que su transformada inversa se anule fuera de la metalización.

Multiplicando (VII-1) por $\vec{J}(x)$ e integrando se obtiene:

$$I = \int_{-w/2}^{w/2} dx (\vec{J}(x))^* \cdot \int_{-w/2}^{w/2} dx' \bar{G}(x, x'; \beta) \cdot \vec{J}(x') = 0 \quad (\text{VII-4})$$

o bien, teniendo en cuenta la identidad de Parseval:

$$I = (j\omega\mu/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\tilde{J}(\alpha))^* [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}(\alpha)] = 0 \quad (\text{VII-5})$$

Ahora demostraremos que en medios sin pérdidas la ecuación (VII-1) es equivalente a escribir $I=0$, con I dada por (VII-4)-(VII-5), siempre que $\vec{J}(x)$ se varíe de modo se mantenga nula fuera de la tira ($\vec{J}(x)=0$ si $|x| > w/2$). En efecto, la variación de I puede escribirse:

$$\begin{aligned} \delta I = (j\omega\mu_0/2\pi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\delta \tilde{J}(\alpha))^* \cdot [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}(\alpha)] + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\tilde{J}(\alpha))^* \cdot [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot (\delta \tilde{J}(\alpha))] \right\} \quad (\text{VII-6}) \end{aligned}$$

por otro lado, como veremos en la próxima sección, la matriz \bar{G} en medios sin pérdidas debe ser hermitica, de modo

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha (\tilde{J}(\alpha))^* \cdot [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot (\delta \tilde{J}(\alpha))] =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha (\delta \tilde{J}(\alpha))^* \cdot [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}(\alpha)] \right\}^* \quad (\text{VII-7})$$

de donde:

$$\delta I = (j\omega\mu_0/\pi) \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha (\delta \tilde{J}(\alpha))^* \cdot [\bar{G}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}(\alpha)] \right\} \quad (\text{VII-8})$$

Si imponemos ahora que la variación $\tilde{J}(\alpha)$ sea tal que su transformada inversa $\vec{J}(x)$ se anule en todo punto exterior a la tira conductora, podemos utilizar de nuevo la identidad de Parseval y el teorema de convolución para escribir:

$$\delta I = 2 \text{Re} \int_{-w/2}^{w/2} dx (\delta \vec{J}(x))^* \cdot \int_{-w/2}^{w/2} dx' \bar{G}(x, x'; \beta) \cdot \vec{J}(x') \quad (\text{VII-9})$$

Ahora es evidente que, si se cumple (VII-1), debe cumplirse que $\delta I=0$. Por otro lado, como la variación $\delta \vec{J}(x)$ es completamente arbitraria, para que se cumpla $\delta I=0$ debe cumplirse (VII-1). Así pues podemos concluir que la ecuación $\delta I=0$, con I dado por (VII-4), y con la condición de ser $\vec{J}(x)=0$ para $|x| > w/2$, equivale a (VII-1). De ese

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

modo podemos expresar (VII-1) mediante un principio variacional.

Aplicaremos ahora el método de Rayleigh-Ritz para la resolución de dicha expresión variacional. Para ello expandimos $\vec{J}(x)$ en funciones base apropiadas, de forma que todas las funciones base sean nulas fuera de la tira conductora. Expresando directamente estos desarrollos en el dominio de Fourier:

$$\tilde{J}_z(\alpha) = \sum_{n=1}^N a_n \tilde{J}_{z,n}(\alpha) \quad (\text{VII-10.a})$$

$$\tilde{J}_x(\alpha) = \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{x,m}(\alpha) \quad (\text{VII-10.b})$$

Podemos ahora expresar I, usando (VII-4) y (VII-10) en la forma:

$$I = (j\omega\mu_0/2\pi) \left[\sum_{k,l=1}^{N,N} a_k^* a_l \phi_{k,l} + \sum_{k,l=1}^{M,N} b_k^* a_l \psi_{k,l} + \sum_{k,l=1}^{N,M} a_k^* b_l \chi_{k,l} + \sum_{k,l=1}^{M,M} b_k^* b_l \Gamma_{k,l} \right] \quad (\text{VII-11})$$

donde:

$$\phi_{k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{J}_{z,k}^* \cdot \tilde{G}_{zz}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}_{z,l} = \phi_{l,k}^* \quad (\text{VII-12.a})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\Psi_{k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{J}_{x,k}^* \cdot \overline{G}_{x,z}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}_{z,l} \quad (\text{VII-12.b})$$

$$\chi_{k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{J}_{z,k}^* \cdot \overline{G}_{z,x}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}_x = \Psi_{e,k}^* \quad (\text{VII-12.b})$$

$$\Gamma_{k,l} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{J}_{x,k}^* \cdot \overline{G}_{x,x}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{J}_{x,l} = \Gamma_{k,l}^* \quad (\text{VII-12.b})$$

Sea ahora $\vec{V}^\dagger = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*, b_1^*, b_2^*, \dots, b_M^*)$ el vector fila que contiene los complejos conjugados de los coeficientes de (VII-10). De ese modo la ecuación (VII-11) se escribe:

$$\vec{I} = \vec{V}^\dagger \overline{M} \cdot \vec{V} \quad (\text{VII-13})$$

donde la matriz \overline{M} es una matriz dada, en virtud de (VII-12), por:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{\Phi} & \overline{\Psi} \\ \overline{\chi} & \overline{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{VII-14})$$

de donde se deduce, usando (VII-12), que \overline{M} es hermitica.

Si seguimos con la aplicación del método de Rayleigh-Ritz, variando (VII-11) y teniendo en cuenta la hermiticidad de \overline{M} , concluimos que la condición para que se cumpla que $\delta I = 0$ para variaciones arbitrarias de a y b es:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\vec{M} \cdot \vec{V} = 0$$

(VII-15)

(obsérvese que dicha ecuación implica, no sólo que $\delta I=0$, sino también que $I=0$).

Finalmente la ecuación de dispersión puede expresarse implícitamente mediante:

$$\det(M) = 0$$

(VII-16)

que es la misma expresión que se obtiene al resolver (VII-1) mediante el método de Galerkin en el dominio espectral. Así pues, el método de Galerkin en el dominio espectral lleva a las mismas expresiones que el método variacional de Rayleigh-Ritz, lo que demuestra el carácter variacional del método.

No obstante, esta equivalencia entre el método de Galerkin y el de Rayleigh-Ritz no implica, como en el caso del cálculo de los coeficientes de capacidad, que la β calculada no dependa fuertemente del desarrollo (VII-10) propuesto: Sólo el cálculo la magnitud I , cuyo valor por otra parte ya conocíamos, tiene carácter variacional

Análisis en frecuencia Análisis de multicapas

Por otra parte, la extensión de los resultados anteriores a líneas multiconductoras y/o multirranuradas, es inmediata, sin más que considerar variaciones de $\vec{J}(x)$ que se anulen fuera de las metalizaciones y/o variaciones de $\vec{E}(x)$ que se anulen fuera de las ranuras.

Una última observación debe ser hecha una vez llegados aquí, y es que la equivalencia demostrada entre el método de Galerkin y el de Rayleigh-Ritz está condicionada a la hermiticidad de $\epsilon_{00}^{\parallel}$; lo que físicamente restringe dicha equivalencia a líneas sin pérdidas.

VII.2-Matriz de Green para medios lineales multicapa

En la presente sección desarrollaremos un algoritmo para la obtención de la función diádica de Green en estructuras multicapa con medios lineales.

Dicho algoritmo se basa en los principios de equivalencia y unicidad del campo electromagnético, y su resultado final es la descomposición del problema general de N capas en una concatenación de problemas de una sola capa, que quedan claramente determinados a lo largo de la presente sección. La resolución de dichos problemas, para medios concretos, se deja para la siguiente sección.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

VII.2.a.-El problema de dos capas

Consideremos el problema de dos capas dibujado en la fig.VII.1.a, donde las fuentes $\vec{J}_i(x)$ se suponen confinadas en las interfases y tangentes a ellas, y las capas se suponen de extensión infinita en el plano x-z, homogéneas y dotadas de unas relaciones constitutivas lineales. Dichas capas pueden constituir una porción de un medio lineal arbitrario como el dibujado en la fig.VII.3.

Del teorema de unicidad del campo electromagnético [4], el campo entre las interfases i-1 e i+1 viene unívocamente determinado por los campos tangenciales en dichas interfases $\vec{E}_{t,i-1}$ y $\vec{E}_{t,i+1}$, mas las fuentes en la región comprendida entre dichas interfases, es decir, por hipótesis, la densidad de corriente superficial en la interfase "i", $\vec{J}_i(x)$, en caso de que exista.

Del principio de equivalencia [4], por otra parte, el problema de determinar el campo dentro de la región comprendida entre las interfases i-1 e i+1, puede transformarse en el problema equivalente de la fig.VII.1.b. Dicho problema se construye reemplazando las interfases i-1 e i+1 por dos planos conductores perfectos, y colocando justo sobre su superficie unas densidades de "corriente magnética" ficticias \vec{M}_{i+1} y \vec{M}_{i-1} respectivamente, dadas en función de los campos $\vec{E}_{t,i+1}$ y $\vec{E}_{t,i-1}$ mediante:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

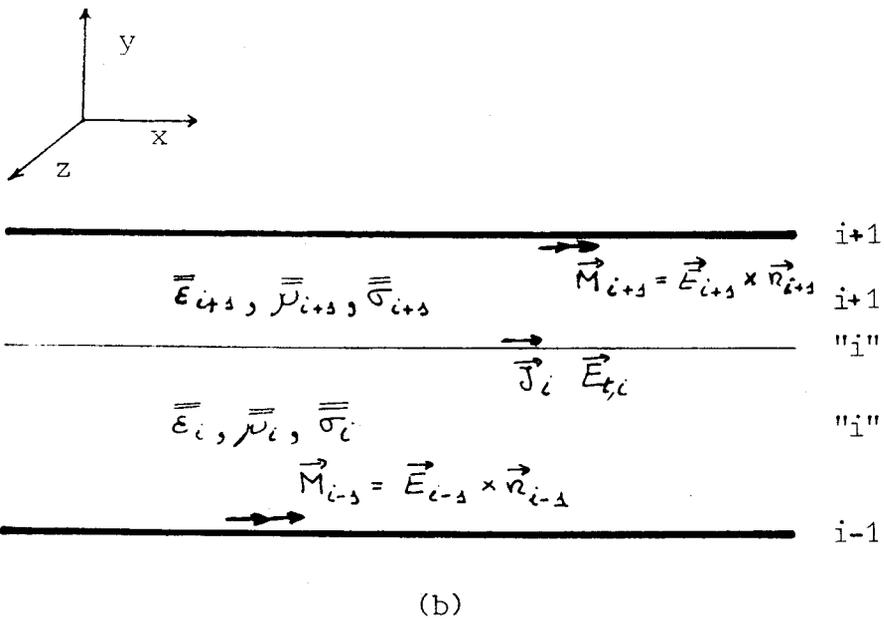
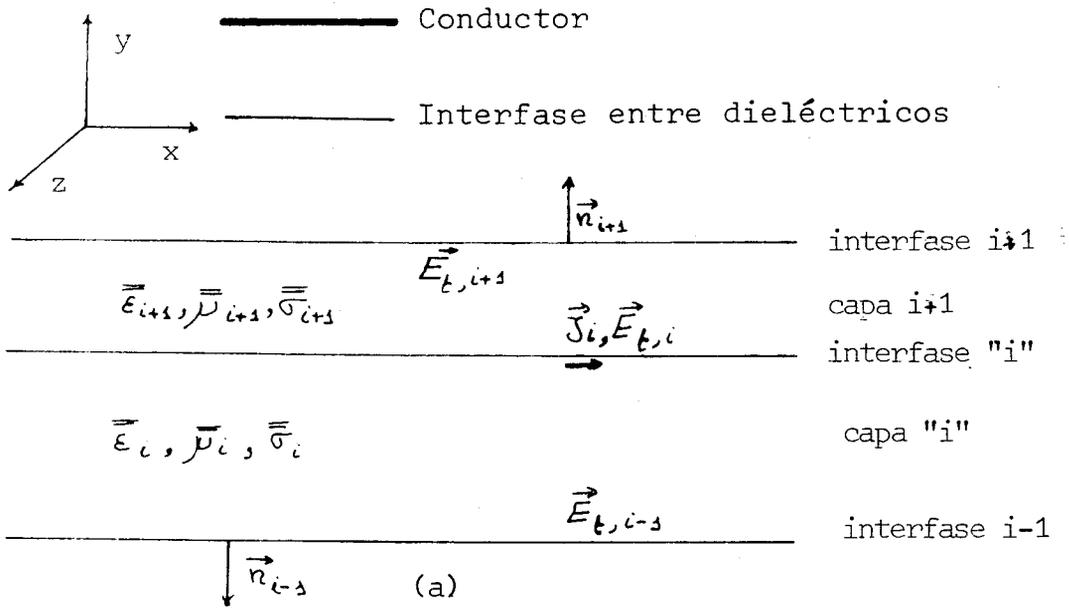


Fig.VII.1

(a).- El problema de dos capas. (b).- Problema equivalente de dos capas

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\vec{M}_j = \vec{E}_j \times \vec{n}_j ; j=i-1, i+1 \quad (\text{VII-17})$$

Ahora podemos, teóricamente, resolver el problema equivalente de la fig.VII.1.b, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{t,i} = & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \vec{F}_{ii}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'; \beta) \cdot \vec{J}_i(\mathbf{x}') \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \vec{H}_{i,i-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'; \beta) \cdot \vec{M}_{i-1}(\mathbf{x}') \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \vec{H}_{i,i+1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'; \beta) \cdot \vec{M}_{i+1}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\text{VII-18})$$

donde $\vec{E}_{t,i}$ es el campo eléctrico tangencial en la interfase "i", \vec{J}_i la densidad de corriente eléctrica en dicha interfase, \vec{M}_{i+1} y \vec{M}_{i-1} las densidades de "corriente magnética" dadas por (VII-17) y \vec{F}_{ii} , \vec{H}_{ij} ciertas diadas que relacionan el campo tangencial en la interfase "i" con sus fuentes \vec{J}_i , \vec{M}_{i-1} y \vec{M}_{i+1} en las interfaces "i", i-1 e i+1 respectivamente. Nótese que, dado el comportamiento por hipótesis lineal del medio, dichas diadas sólo pueden depender de las dimensiones y otras propiedades de las capas "i" e i+1, sin que influya en ellas para nada la estructura del medio mas allá de las interfaces i-1 e i+1, ni los valores del propio campo electromagnético en la región considerada.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Por otra parte, dado que la fig.VII.1.b muestra un problema invariante frente a las translaciones paralelas al plano z-x, tanto \overline{F}_{ii} como H_{ij} deben ser función de las diferencias x-x'e z-z': En consecuencia las integrales que aparecen en (VII-18) son productos de convolución, cuya transformada de Fourier puede escribirse en la forma:

$$\widetilde{E}_{t,i} = \overline{F}_{ii} \cdot \widetilde{J}_i + \overline{H}_{i,i-1} \cdot \widetilde{M}_{i-1} + \overline{H}_{i,i+1} \cdot \widetilde{M}_{i+1} \quad (\text{VII-19})$$

Ahora podemos despejar \widetilde{J}_i de (VII-19), obteniéndose:

$$j\omega\mu_0 \widetilde{J}_i = \overline{g}_{i,i-1} \cdot \widetilde{E}_{t,i-1} + \overline{g}_{ii} \cdot \widetilde{E}_{t,i} + \overline{g}_{i,i+1} \cdot \widetilde{E}_{t,i+1} \quad (\text{VII-20})$$

donde el factor $j\omega\mu_0$ se introduce por comodidad, y las matrices \overline{g}_{ij} , pueden obtenerse a partir de las matrices \overline{F}_{ii} , \overline{H}_{ij} mediante operaciones algebraicas, usando (VII-17).

Las matrices \overline{g}_{ij} sólo dependen, al igual que \overline{F}_{ii} y \overline{H}_{ij} , de las propiedades del medio entre las interfases i-1 e i+1.

Consideremos ahora la ecuación (VII-20) y hagamos tender a cero tanto $\widetilde{E}_{t,i-1}$ como $\widetilde{E}_{t,i+1}$. Obtenemos:

$$j\omega\mu_0 \widetilde{J}_i = \overline{g}_{ii} \cdot \widetilde{E}_{t,i} \quad (\text{VII-21})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

esta ecuación corresponde físicamente al problema dibujado en la fig.VII.2.a, que equivale al de la fig.VII.1.b cuando $\vec{M}_{ij}=0$ ($j=i-1, i+1$). Dicho en otras palabras, $\bar{g}_{i,i}$ corresponde a la inversa de la función de Green, tal y como fue definida en el capítulo anterior, para la estructura dibujada en la fig.VII.2.a.

Para obtener $\bar{g}_{i,i-1}$ partimos nuevamente de (VII-20) y hacemos tender a cero tanto $\vec{E}_{t,i}$ como $\vec{E}_{t,i+1}$:

$$j\omega\mu_0\vec{J}_i = \bar{g}_{i,i-1} \cdot \vec{E}_{t,i-1} \quad (\text{VII-22})$$

Dicha ecuación corresponde al problema de la fig.VII.2.b, donde \vec{J}_i es la densidad de corriente superficial inducida en el plano conductor por la presencia de un campo tangencial $\vec{E}_{t,i-1}$ en la interfase $i-1$. Por tanto, para obtener $\bar{g}_{i,i-1}$ debemos resolver el problema dibujado en la fig.VII.2.b.

Que dicho problema está bien definido y su solución es única se sigue inmediatamente de hecho de que, dados los campos eléctricos tangenciales en las interfases "i" e $i-1$ ($E_{t,i} = 0$ por hipótesis), el campo electromagnético queda unívocamente determinado en toda la región comprendida entre dichas interfases, y, en particular, el campo \vec{H} tangencial sobre el plano conductor en la interfase "i"

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

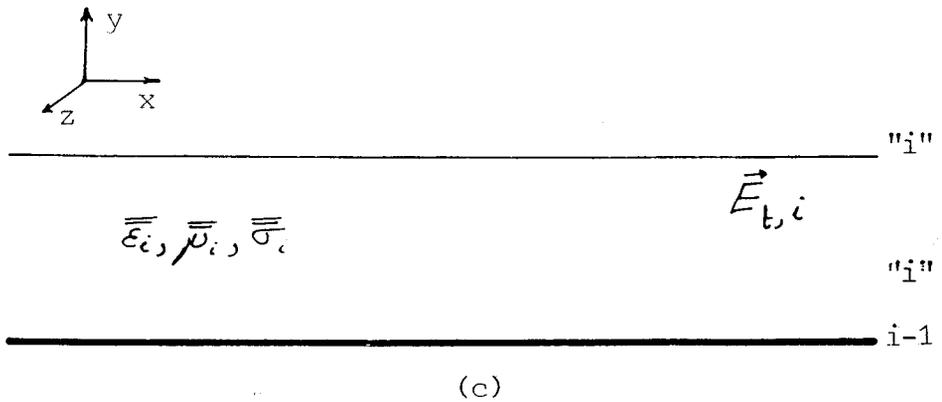
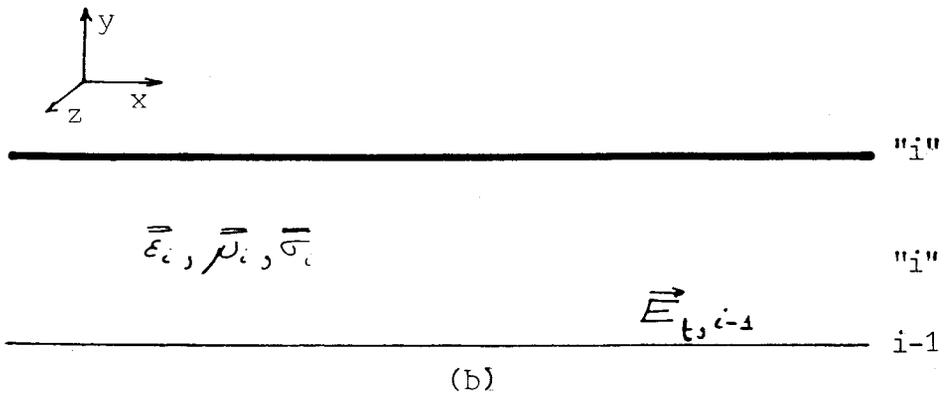
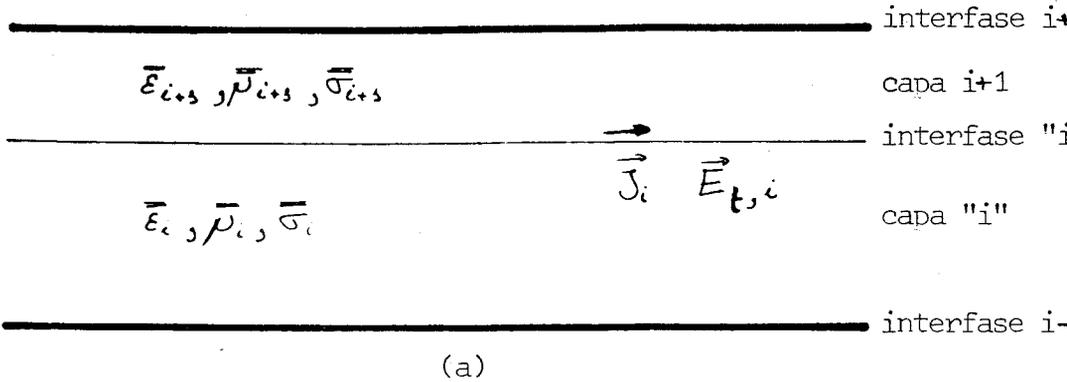
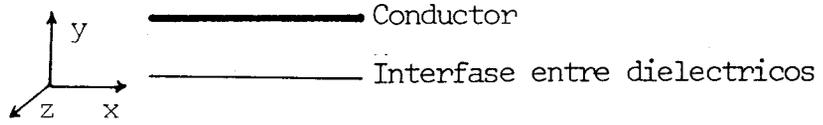


Fig.VII.2

(a).- Problema equivalente para obtener $\overline{g}_{i,i}$. (b).- Problema equivalente para obtener $\overline{g}_{i,i-1}$. (c).- Problema equivalente para obtener $\overline{g}_{i-1,i}$.

-000-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

queda entonces determinado unívocamente, lo que, a su vez, determina unívocamente a \vec{J}_i .

Nótese que, a diferencia de $\bar{g}_{i,i}$, $\bar{g}_{i,i-1}$ no depende para nada de las propiedades del medio constitutivo de la capa $i+1$. $\bar{g}_{i,i-1}$ es sólo función de las propiedades y dimensiones de la capa "i".

Del mismo modo que para $g_{i,i-1}$, su complementaria $g_{i-1,i}$ puede obtenerse resolviendo el problema de la fig.VII.2.c:

$$j\omega\mu_0\vec{J}_{i-1} = \bar{g}_{i-1,i} \vec{E}_{t,i} \quad (\text{VII-23})$$

es decir, $\bar{g}_{i-1,i}$ es la diada que relaciona los campos tangenciales en la interfase "i" de la fig.VII.2.c con la densidad de corriente inducida por ellos en el plano conductor colocado en la interfase $i-1$.

De modo similar a $\bar{g}_{i,i-1}$, $\bar{g}_{i-1,i}$ sólo depende de las propiedades y dimensiones de la capa "i".

Hasta aquí hemos demostrado cómo la transformada de Fourier de una densidad de corriente superficial, intercalada en una interfase arbitraria de un medio lineal infinito de configuración planar, está relacionada con las transformadas de Fourier de los campos tangenciales en dicha interfase y en las interfases adyacentes, por medio

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

de una relación algebraica que no depende para nada de la estructura y propiedades del medio mas alla de dichas interfases. Al mismo tiempo hemos separado e identificado los diferentes problemas físicos que deben ser resueltos para obtener los coeficientes en dicha relación (VII-20).

VII.2.b.-Algoritmo para la obtención de la matriz de Green

Consideremos ahora la estructura de la fig.VII.3. Se trata de una línea de transmisión multiconductora en un medio estratificado de configuración planar, y tal que presenta un comportamiento lineal con el campo electromagnético. Nuestro problema es encontrar una matriz de Green que relacione los campos electricos tangenciales y las densidades de corrientes en aquellas interfases de la fig.VII.3 que soportan metalizaciones. Si usamos letras mayúsculas para denominar sólo aquellas interfases que contienen metalizaciones, la matriz de Green es una matriz de orden $2M \times 2M$, siendo M el número total de interfases metalizadas:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{t,1} \\ \vec{E}_{t,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{E}_{t,M} \end{bmatrix} = j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{1,1} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{1,2} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{1,3} & \dots & \cdot \\ \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{2,1} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{2,2} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{2,3} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{M,1} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{M,2} & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{M,3} & \dots & \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{J}_1 \\ \vec{J}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{J}_M \end{bmatrix} \quad (\text{VII-24})$$

donde los elementos $\overline{\overline{\mathcal{L}}}_{K,L}$ son matrices 2x2 que relacionan los campos tangenciales en la interfase K con las densidades de corriente superficial en la interfase L.

Considerando ahora como una "capa" toda región comprendida entre dos interfases metalizadas, y razonando como en el apartado VII.2.a, deducimos que entre la densidad de corriente en una metalización y los campos tangenciales en su propia interfase y en interfases metalizadas adyacentes, existe una relación unívoca expresada de forma similar a (VII-20) mediante:

$$j\omega\mu_0 \vec{J}_K = \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{K,K-1} \cdot \vec{E}_{t,K-1} + \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{K,K} \vec{E}_{t,K} + \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{K,K+1} \vec{E}_{t,K+1} \quad (\text{VII-25})$$

donde $\overline{\overline{\mathcal{L}}}_{K,L}$ (L=K-1,K,K+1), son matrices a determinar.

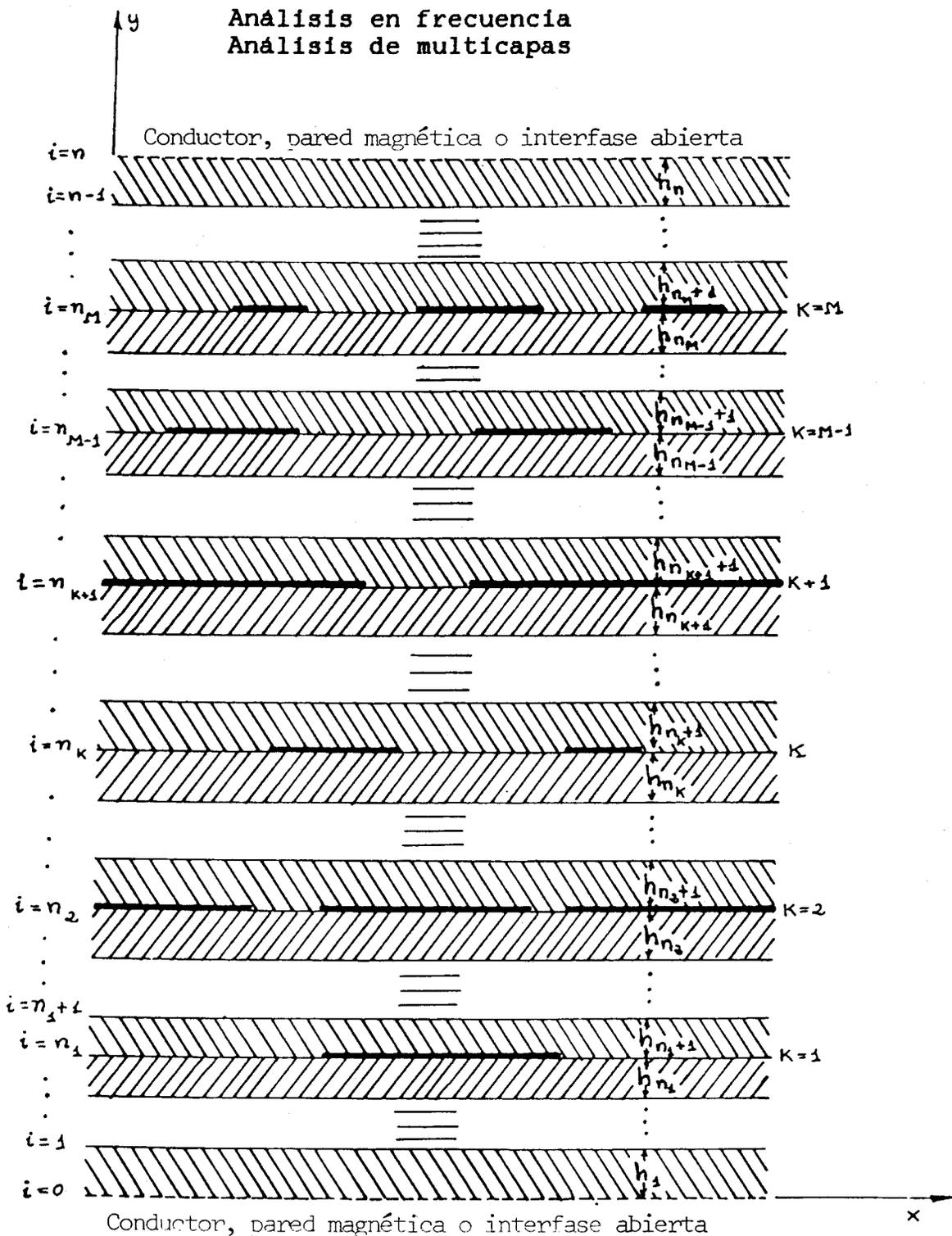


Fig.VII.3

Estructura general de n capas. Las letras mayúsculas hacen referencia solo a las interfases metalizadas.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

De (VII-25) se deduce que la matriz inversa de Green debe ser tridiagonal por bloques:

$$\bar{g}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,1} & \bar{d}_{1,2} & 0 & 0 & \dots & , 0 \\ \bar{d}_{2,1} & \bar{d}_{2,2} & \bar{d}_{2,3} & 0 & \dots & , 0 \\ 0 & \bar{d}_{3,2} & \bar{d}_{3,3} & \bar{d}_{3,4} & \dots & , 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & , 0 & , 0 & , 0 & \dots & , \bar{d}_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{VII-26})$$

El problema de obtener las matrices $\bar{L}_{K,L}$ ($L=K-1, K, K+1$) a partir de las $\bar{g}_{i,j}$ ($j=i-1, i, i+1$), es ahora una cuestión de álgebra. Para ello usamos (VII-20) y eliminamos $\tilde{E}_{t,i}$ en función de $\tilde{E}_{t,i-1}$ y $\tilde{E}_{t,i+1}$ en todas aquellas interfases sin metalizar, aprovechando que allí es $\tilde{J}_i = 0$. De ese modo podemos, a partir de (VII-20), obtener (VII-25). El procedimiento es tedioso aunque directo, por lo que no daremos los cálculos explícitamente, sino sólo el resultado final. Por lo demás, el método es en todo similar al usado en [75] para la determinación de la matriz de Green estática, excepto en que aquí debemos operar con matrices en lugar de escalares.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Las matrices $\overline{\mathcal{L}}_{KL}$ vienen dadas por:

$$\overline{\mathcal{L}}_{KK} = \overline{\mathbf{A}}_K^{n'_K} + \overline{\mathbf{B}}_K^{n''_K} - \overline{\mathbf{g}}_{n_K, n_K} \quad ; K=1, 2, \dots, M \quad (\text{VII-27})$$

y

$$\overline{\mathcal{L}}_{K, K-1} = \overline{\mathbf{C}}_K^{n'_K} \quad (\text{VII-28})$$

$$\overline{\mathcal{L}}_{K, K+1} = \overline{\mathbf{D}}_K^{n''_K} \quad (\text{VII-29})$$

donde n_K es el número de capas debajo de la interfase K , $n'_K = n_K - n_{K-1}$, el número de interfases entre la $K-1$ y la " K ", $n''_K = n_{K+1} - n_K$, y las matrices $\overline{\mathbf{A}}_K^j$, $\overline{\mathbf{B}}_K^j$, $\overline{\mathbf{C}}_K^j$ y $\overline{\mathbf{D}}_K^j$ vienen dadas mediante el algoritmo de recurrencia:

$$\overline{\mathbf{A}}_K^1 = \overline{\mathbf{g}}_{p+1, p+1} \quad (\text{VII-30.a})$$

$$\overline{\mathbf{B}}_K^1 = \overline{\mathbf{g}}_{q-1, q-1} \quad (\text{VII-30.b})$$

$$\overline{\mathbf{C}}_K^1 = \overline{\mathbf{g}}_{p+1, p} \quad (\text{VII-30.c})$$

$$\overline{\mathbf{A}}_K^j = \overline{\mathbf{g}}_{p+j, p+j} - \overline{\mathbf{g}}_{p+j, p+j-1} \cdot [\overline{\mathbf{A}}_K^{j-1}]^{-1} \cdot \overline{\mathbf{g}}_{p+j-1, p+j} \quad (\text{VII-30.d})$$

$$\overline{\mathbf{B}}_K^j = \overline{\mathbf{g}}_{q-j, q-j} - \overline{\mathbf{g}}_{q-j, q-j+1} \cdot [\overline{\mathbf{B}}_K^{j-1}]^{-1} \cdot \overline{\mathbf{g}}_{q-j+1, q-j} \quad (\text{VII-30.e})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\bar{C}_K^j = -\bar{g}_{p+j, p+j-1} [\bar{A}_K^{j-1}]^{-1} \bar{C}_K^{j-1} \quad (\text{VII-30.f})$$

$$\bar{D}_K^j = -\bar{g}_{q-j, q-j+1} \cdot [\bar{B}_K^{j-1}]^{-1} \bar{D}_K^{j-1} \quad (\text{VII-30.g})$$

donde $p=n_{k-1}$, $q=n_{k+1}$, y, cuando en la fig.VII.3 los planos inferior y superior son conductores, las matrices \bar{g}_{ij} son las definidas en los apartados anteriores, pero cuando el plano inferior (superior) en la fig.VII.3 es un plano magnético o una interfase abierta, entonces g_{ii} ($g_{n-1, n-1}$) debe ser sustituida por la correspondiente matriz de Green inversa para la estructura de la fig.VII.2.a con el plano inferior (superior) sustituido por un plano magnético o una interfase abierta.

VII.2.c.-Propiedades de las \bar{g}_{ij} , $\bar{L}_{K,L}$ para medios sin pérdidas.

Con gran frecuencia las líneas de transmisión utilizadas en los circuitos planares pueden considerarse sin pérdidas. Consideremos nuevamente el problema de la fig.VII.2.a en el caso en que no haya pérdidas en el medio. Consideraremos como es habitual campos de la forma $\vec{E}=\vec{E}(x,y)\exp(-j\beta z)$ con β real. En ese caso el flujo del vector de Poynting complejo a través de dos planos sucesivos de "z" constante, se mantiene idéntico a si mismo, y las

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

pérdidas de potencia por unidad de longitud vienen dadas por la parte real de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_i^* \cdot \vec{E}_{t,i} dx \quad (\text{VII-31})$$

por tanto, dicha cantidad debe ser un número imaginario puro.

Tras trasladar la integral (VII-31) al dominio de Fourier, vía la identidad de Parseval y (VII-21), se obtiene que:

$$\text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (\bar{g}_{ii} \cdot \tilde{\vec{E}}_{t,i}) \cdot \tilde{\vec{E}}_{t,i}^* \right\} = 0 \quad (\text{VII-32})$$

Como dicha relación debe cumplirse para cualquier campo eléctrico tangencial en la interfase, deducimos que la matriz \bar{g}_{ii} para α y β reales debe ser hermitica:

$$\bar{g}_{ii} = [\bar{g}_{ii}^t]^* = \bar{g}_{ii}^\dagger \quad (\text{VII-33})$$

Consideremos ahora los problemas de las figs.VII.2.b y c. Cuando el material de la capa "i" es un medio sin pérdidas debe cumplirse el teorema de reciprocidad [87]. Sea \vec{J}_i la densidad de corriente superficial inducida sobre el plano conductor de la fig.VII.2.b y $\vec{E}_{t,i-1}$ el campo

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

tangencial en la interfase $i-1$ de la misma figura. Sea asimismo \vec{J}_{i-1} la densidad de corriente inducida en el plano conductor de la fig.VII.2.c y $\vec{E}_{t,i}$ el campo tangencial en la interfase "i" de la misma figura. Podemos ahora aplicar el teorema de reciprocidad ([87], eq.(12)) a ambos problemas VII.2.b y VII.c., obteniéndose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{J}_i \cdot \vec{E}_{t,i}^* + \vec{J}_{i-1}^* \cdot \vec{E}_{t,i-1}) dx = 0 \quad (\text{VII-34})$$

Trasladando ahora (VII-34) al dominio de Fourier mediante la identidad de Parseval y (VII-22), (VII-23):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\vec{E}}_{t,i}^* \cdot (\bar{\vec{g}}_{i,i-1} \cdot \tilde{\vec{E}}_{t,i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\vec{E}}_{t,i-1} \cdot (\bar{\vec{g}}_{i-1,i} \cdot \tilde{\vec{E}}_{t,i})^* \quad (\text{VII-35})$$

Esta expresión debe cumplirse para todo $\vec{E}_{t,i}$, $\vec{E}_{t,i-1}$, por tanto $\bar{\vec{g}}_{i,i-1}$ debe ser la compleja conjugada de $\bar{\vec{g}}_{i-1,i}$:

$$\bar{\vec{g}}_{i-1,i} = [\bar{\vec{g}}_{i,i-1}^t]^* = \bar{\vec{g}}_{i,i-1}^\dagger \quad (\text{VII-36})$$

Las relaciones (VII-36) permiten reducir de dos a uno el número de problemas de una capa que es preciso resolver para obtener los coeficientes de (VII-20).

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Para medios sin pérdidas puede demostrarse también, de forma totalmente análoga que:

$$\overline{\mathcal{L}}_{KK} = \overline{\mathcal{L}}_{K,K}^{\dagger} \quad (\text{VII-37})$$

y

$$\overline{\mathcal{L}}_{K,K-1} = \overline{\mathcal{L}}_{K-1,K}^{\dagger} \quad (\text{VII-38})$$

de ese modo no es necesario calcular las matrices D_K^i en (VII-30).

VII.2.d.-Otras simetrías de $\overline{\mathbf{g}}_{ij}$, $\overline{\mathcal{L}}_{KL}$.

Para medios isótropos, o, en general, tales que la fig.VII.2.c pueda obtenerse a partir de la fig.VII.2.b mediante una operación de reflexión respecto de un plano paralelo al plano x-z (lo que incluye capas como las estudiadas en el capítulo anterior, con un eje principal perpendicular a las interfases), es evidente que, al ser los campos tangenciales y las densidades de corriente, invariantes frente a dicha reflexión, debe cumplirse también que:

$$\overline{\mathbf{g}}_{i,i-1} = \overline{\mathbf{g}}_{i-1,i} \quad (\text{VII-39})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

La ecuación (VII-39) debe también cumplirse para ferritas o semiconductores magnetizados según la dirección perpendicular a las interfases, por cuanto el campo estático de magnetización, que aquí actúa sólo como un parámetro, al ser un vector axial, no cambia de sentido por reflexión en un plano paralelo al x-z de la fig.VII.2.b.

Finalmente, cuando el medio de la fig.VII.2.b,c es, no sólo invariante por reflexión en el plano x-z, sino también sin pérdidas, debe cumplirse tanto (VII-36) como (VI-39). En ese caso las \bar{g}_{ij} ($j=i-1, i, i+1$) deben ser de la forma:

$$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}^{\dagger} ; j= i-1, i, i+1 \quad (\text{VII-40})$$

es decir, deben ser, como \bar{g}_{ii} , hermiticas. Tal propiedad es común a todo los medios estudiados en el capítulo anterior, cuando son medios sin pérdidas.

Finalmente, es evidente que las relaciones (VII-39) y (VII-40) son también válidas para las $\bar{p}_{k,L}$, cuando el medio satisface las propiedades señaladas.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

VII.2.e.-Descomposición en problemas de una capa

Las diadas g_{ij} ($i \neq j$) dependen sólo de las propiedades de una capa del medio estratificado de la fig.VII.3. No obstante, las g_{ii} dependen de dos capas, y sería deseable reducir completamente el problema a una concatenación de problemas de una sola capa. Esto siempre puede hacerse descomponiendo \bar{g}_{ii} en suma de dos matrices admitancia:

$$\bar{g}_{ii} = \bar{Y}_i^+ + \bar{Y}_{i+1}^- \quad (\text{VII-41})$$

donde las matrices \bar{Y}_i^+ e \bar{Y}_i^- se definen haciendo uso de

$$J_{z,i}^- = H_{x,i}^- - H_{x,i}^+ \quad (\text{VII-42.a})$$

$$J_{x,i}^- = -H_{z,i}^- + H_{z,i}^+ \quad (\text{VII-42.b})$$

donde $H_{x,i}^-$ y $H_{z,i}^-$ son los campos magnéticos justo bajo la interfase "i" y $H_{x,i}^+$, $H_{z,i}^+$ los campos justo sobre la interfase "i" (ver fig.VII.4) en la forma:

$$\bar{Y}_i^+ : j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} \tilde{H}_{x,i}^- \\ -\tilde{H}_{z,i}^- \end{bmatrix} = \bar{Y}_i^+ \cdot \tilde{\vec{E}}_{t,i} \quad \text{cuando } \tilde{\vec{E}}_{t,i-1} \hat{=} 0 \quad (\text{VII-43.a})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$Y_i^-: \quad -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} \tilde{H}_{x,i-1}^+ \\ \tilde{H}_{z,i-1}^+ \end{bmatrix} = \bar{Y}_i^- \cdot \tilde{E}_{t,i-1} \quad \text{cuando } \vec{E}_{t,i} \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (\text{VII-3.b})$$

Que las matrices \bar{Y}_i^+ e \bar{Y}_i^- están bien definidas se sigue del hecho de que, conocidos los campos electricos tangenciales en las interfases "i" e i+1, el campo electromagnético en toda la capa "i" queda determinado de modo unívoco.

Los problemas de una capa que definen las matrices \bar{Y}_i^+ e \bar{Y}_i^- , están dibujados en la fig.VII.4.a y b respectivamente.

Por un procedimiento análogo al utilizado en VII.2.c, y considerando que el flujo de potencia total a través de las interfases "i" e i-1 de las fig.VII.4.a y b respectivamente, debe ser nulo para medios sin pérdidas y campos con constante de propagación real (nótese que, por hipótesis, no hay fuentes en el interior de la capa "i") deducimos que para medios sin pérdidas y α y β reales las matrices \bar{Y}_i^+ e \bar{Y}_i^- deben ser hermiticas.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

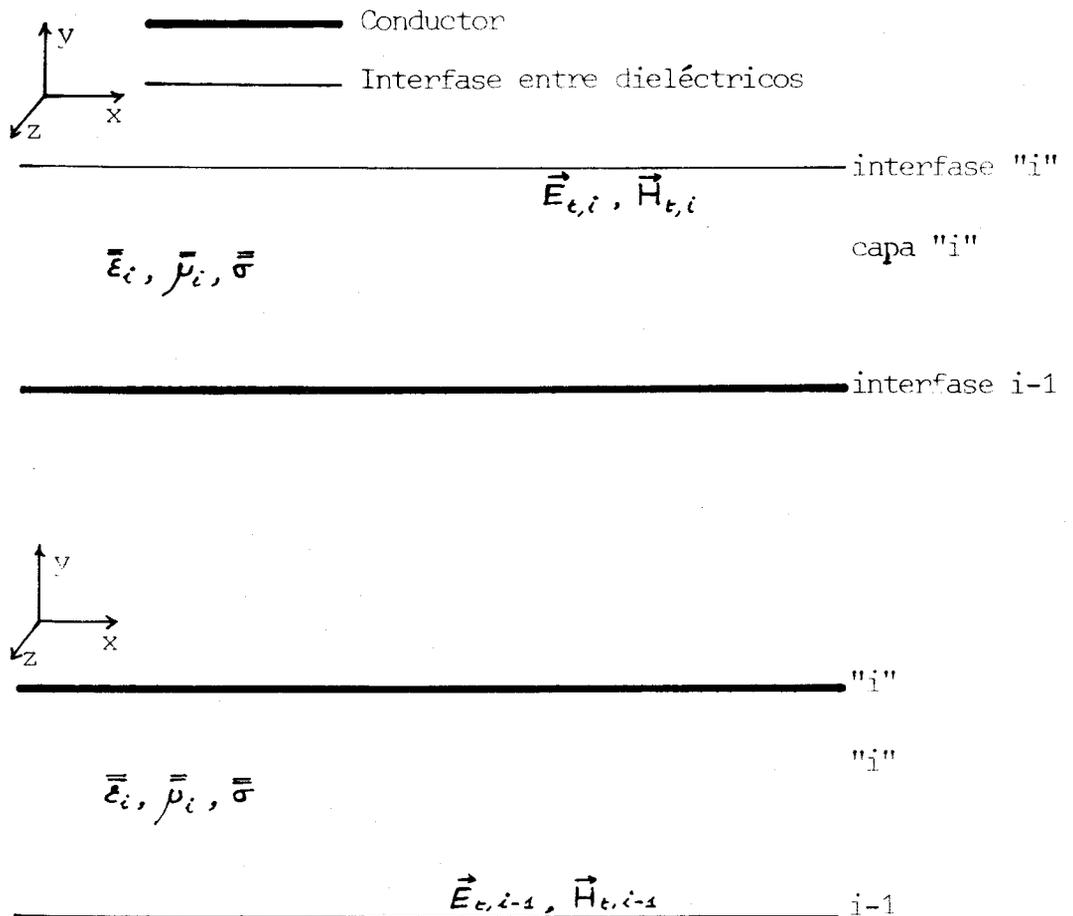


Fig.VII.4

- (a).- Problema equivalente para el cálculo de \bar{Y}_i^+ .
 (b).- Problema equivalente para la obtención de \bar{Y}_i^- .

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Asimismo, mediante razonamientos de simetría idénticos a los realizados al final del apartado VII.2.d, y teniendo en cuenta que el vector \vec{H} es un vector axial que cambia de sentido en las reflexiones respecto de un plano paralelo, así como las definiciones (VII-43), puede demostrarse que, para todos los medios estudiados en el capítulo anterior, debe ser $\bar{Y}_i^+ = \bar{Y}_i^-$.

VII.3.-Obtención de las \bar{Y}_i^+ , \bar{q}_{ij} en medios anisótropos

Por comparación con el método TTL mencionado en la sec.V.4, el método desarrollado en la sección precedente presenta la ventaja de su aplicabilidad a estructuras de anisotropía arbitraria, y no sólo a medios isótropos o uniaxiales con el eje óptico perpendicular a las interfases (ver sec.V.5).

Por otro lado y como ya mencionamos en el capítulo anterior, sólo es posible obtener expresiones compactas de la función de Green para capas anisótropas tales que la dirección perpendicular a las interfases sea también un eje principal del tensor de anisotropía. En el primer apartado de la presente sección nos limitaremos, por tanto, a dicho tipo de medios, considerando además únicamente el caso en que el medio presenta anisotropía dieléctrica, pudiéndose analizar el caso magnético por dualidad. Así pues nos

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

ceñiremos al caso de dieléctricos convenientemente orientados, y semiconductores o plasmas magnetizados según la dirección perpendicular a las interfases.

El caso de anisotropía dieléctrica arbitraria, incluyendo plasmas y semiconductores magnetizados, es analizado en el apartado VII.3.b. No hemos analizado el caso, poco corriente, de capas con anisotropía a la vez eléctrica y magnética, aunque podría analizarse de acuerdo con el método descrito en [129], [137]. Tanto en uno como en otro caso, no es posible desarrollar expresiones compactas para las g_{ij} , sino sólo elaborar un método para su evaluación numérica en un ordenador.

VII.3.a.-Medios con simetría de reflexión en el plano x-z

Nos restringiremos además en lo sucesivo a medios no magnéticos ($\bar{\mu} = \mu_0$).

Cuando el eje "y" de la fig.VII.3 coincide con un eje principal de anisotropía, como ya vimos en VII.2.b y VII.2.d, debe cumplirse que $\bar{Y}_i^+ = \bar{Y}_i^-$ y $\bar{g}_{i, (i-1)} = \bar{g}_{(i-1), i}$.

Para el cálculo de \bar{Y}_i^+ y $\bar{g}_{(i-1), i}$ (ver fig.VII.2.c y VII.4.a) partimos de la expresión:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\vec{W}(y) = \bar{S}_i \sinh(\bar{K}_i y) \cdot \vec{C}_i \quad (\text{VII-44})$$

donde \vec{W} viene dado por (VI.7.a) y \bar{S}_i , \bar{K}_i , etc, son la particularización para la capa "i" de las cantidades \bar{S} , \bar{K} , etc, obtenidas en el capítulo anterior (eqs. (VI-1)-(VI-25)). Y el origen de coordenadas ($y=0$) debe tomarse en el plano conductor de las figs.VII.2.c, ó VII.4.a.

Usando ahora (VI-18), (VI-9) y (VI-7.a), puede hallarse \bar{Y}_i^+ (VII-43.a) en la forma:

$$\bar{Y}_i^+ = \bar{Q}^{-1} \cdot (\bar{K}_i / K_{y,i}^e) \cdot \coth(\bar{K}_i h_i) \cdot S_i^{-1} \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-45})$$

donde h_i es el espesor de la capa considerada.

Análogamente, teniendo en cuenta que (ver fig.VII..c):

$$J_{z,i-1} = -H_{x,i-1}^+ \quad (\text{VII-46.a})$$

$$J_{x,i-1} = H_{z,i-1}^+ \quad (\text{VII-46.b})$$

a partir de (VI-18), (VI-9.a), y (VI-7.a), se demuestra que:

$$\bar{g}_{i-1,i} = -\bar{Q}^{-1} \cdot (\bar{K}_i / K_{y,i}^e) \cdot \text{csech}(\bar{K}_i h_i) \cdot S_i^{-1} \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-47})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Aplicando ahora la formula de Sylvester en un modo análogo a como hicimos en el capítulo anterior, tanto Y_i^+ como $\bar{g}_{i-1,i}$ pueden expresarse de una manera compacta:

$$Y_i^+ = \bar{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_{s,i} & 0 \\ 0 & f_{e,i} \end{bmatrix} \cdot \bar{Q} + \omega^e \mu_0 \Gamma_i \bar{\epsilon}_{t,i} \quad (\text{VII-48})$$

$$\bar{g}_{i-1,i} = -\bar{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} g_{s,i} & 0 \\ 0 & g_{e,i} \end{bmatrix} \cdot \bar{Q} - \omega^e \mu_0 \chi_i \bar{\epsilon}_{t,i} \quad (\text{VII-49})$$

donde

$$f_{s,i} = - (k_{y,i}^e / K_{y,i}) \Phi_i \quad (\text{VII-50.a})$$

$$f_{e,i} = - \Gamma_i (\alpha^e + \beta^e) + \Phi_i \quad (\text{VII-50.b})$$

$$g_{s,i} = - (k_{y,i}^e / K_y) \Psi_i \quad (\text{VII-50.c})$$

$$g_{e,i} = - \chi_i (\alpha^e + \beta^e) + \Psi_i \quad (\text{VII-50.d})$$

con Γ_i , Φ_i dados por (VI-25.c, d) y:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

$$\chi_i = [\lambda_{3,i} \operatorname{csech}(\lambda_{3,i} h_i) - \lambda_{2,i} \operatorname{csech}(\lambda_{2,i} h_i)] / (\lambda_{3,i}^e - \lambda_{2,i}^e) \quad (\text{VII-51.a})$$

$$= \lambda_{3,i} \lambda_{2,i} [\lambda_{2,i} \operatorname{csech}(\lambda_{3,i} h_i) - \lambda_{3,i} \operatorname{csech}(\lambda_{2,i} h_i)] / (\lambda_{3,i}^e + \lambda_{2,i}^e) \quad (\text{VII-51.b})$$

VII.3.b.-Medios de anisotropía dieléctrica general

En el presente apartado desarrollaremos un método para la evaluación mediante ordenador de la función de Green para estructuras multicapa de anisotropía dieléctrica arbitraria. El caso en que el medio presenta anisotropía magnética general no se contempla en este trabajo, aunque podría obtenerse por un procedimiento análogo.

Siguiendo el tratamiento del capítulos VI aplicamos a la ecuación de onda para el campo eléctrico en cada capa anisótropa (VI-3) la transformación \bar{T} (VI-4), para obtener:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & , -j\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \partial_y & , & 0 \\ -j\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \partial_y & , & -\partial_y^2 & , & 0 \\ 0 & & 0 & , & \alpha^2 + \beta^2 - \partial_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_y \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon}' \begin{bmatrix} \tilde{E}_y \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-52})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

La ecuación (VII-52) se desdobra a continuación en dos ecuaciones según:

$$(\alpha^2 + \beta^2)E - j\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} [\partial W_1 / \partial y] = \omega^2 \mu_0 [\epsilon_{yy} \tilde{E}_y + \epsilon'_{yz} W_1 + \epsilon'_{yx} W_2] \quad (\text{VII-53})$$

donde ϵ'_{yz} , ϵ'_{yx} , etc, son las componentes del tensor $\bar{\epsilon}'$, transformado de $\bar{\epsilon}$ mediante \bar{T} . Y según:

$$\begin{aligned} -j\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\partial \tilde{E}_y / \partial y] + [(\alpha^2 + \beta^2) \begin{bmatrix} 0, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix} - \partial / \partial y] \vec{W} = \\ = \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon}'_{\epsilon} \cdot \vec{W} + \omega^2 \mu_0 \begin{bmatrix} \epsilon'_{zy} \\ \epsilon'_{xy} \end{bmatrix} \tilde{E}_y \end{aligned} \quad (\text{VII-54})$$

Introduzcamos ahora la notación:

$$K_{\gamma\gamma}^z = \alpha^2 + \beta^2 - k_{\gamma\gamma}^z \quad ; \quad k_{\gamma\gamma}^z = \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\gamma\gamma} = \omega^2 \mu_0 \epsilon'_{\gamma\gamma} \quad (\text{VII-55.a})$$

$$k_{\rho\nu}^z = \omega^2 \mu_0 \epsilon'_{\rho\nu} \quad ; \quad \rho, \nu = x, y, z \quad (\text{VII-55.b})$$

$$\gamma^z = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{VII-55.c})$$

utilizando dicha notación, y tras algún reordenamiento

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

(VII-53) se transforma en:

$$K_{yy}^2 E = j\gamma [\partial W_1 / \partial y] + k_{yz}^2 W_1 + k_{yx}^2 W_2 \quad (\text{VII-56})$$

Ahora, tras derivar (VII-56) respecto de "y", y sustituir $[\partial \hat{E}_y / \partial y]$ en (VII-54), y tras algunos cálculos, obtenemos una ecuación diferencial para W en la forma:

$$[\partial^2 / \partial y^2] \vec{W} + j\bar{A} \cdot [\partial / \partial y] \vec{W} + \bar{B} \cdot \vec{W} = 0 \quad (\text{VII-57})$$

donde

$$\bar{A} = (\gamma / K_{yy}^2) \bar{S}' \cdot \begin{bmatrix} k_{yz}^2 + k_{zy}^2 & k_{yx}^2 \\ k_{xy}^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-58.a})$$

$$\bar{B} = \bar{S}' \cdot \left\{ \gamma^2 \begin{bmatrix} 0, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix} + (1 / K_{yy}^2) \begin{bmatrix} k_{yz}^2 & k_{zy}^2 & k_{yx}^2 & k_{xy}^2 \\ k_{yz}^2 & k_{xy}^2 & k_{yx}^2 & k_{xy}^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon}'_t \right\} \quad (\text{VII-58.b})$$

$$S' = \begin{bmatrix} K_{yy}^2 / k_{yy} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-58.c})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Dado que, en general, $\bar{\bar{A}}$ y $\bar{\bar{B}}$ no conmutan, la resolución de (VII-57) no puede hacerse por analogía con la ecuación escalar lineal de segundo grado, de modo que es preciso resolverla mediante su transformación en una ecuación de primer grado. Para ello utilizamos el vector auxiliar \vec{U} (que no tiene nada que ver con el vector \vec{U} definido en el capítulo VI):

$$\vec{U} = [\partial/\partial y] \vec{W} \quad (\text{VII-59})$$

de modo que la ecuación (VII-57) se transforma en:

$$[\partial/\partial y] \vec{U} + j\bar{\bar{A}} \cdot \vec{U} + \bar{\bar{B}} \cdot \vec{W} = 0 \quad (\text{VII-60})$$

El sistema de ecuaciones (VII-59), (VII-60) puede ahora resolverse como un sistema de primer orden:

$$[\partial/\partial y] \vec{V} + \bar{\bar{C}} \vec{V} = 0 \quad (\text{VII-61})$$

donde:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} ; \quad \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} j\bar{\bar{A}}, B \\ -I, 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-62})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

cuya solución es:

$$\vec{V} = \exp(-\bar{C}y) \cdot \vec{c} \quad (\text{VII-63})$$

donde \vec{c} es un vector constante a determinar.

La matriz $\exp(-\bar{C}y)$ puede calcularse explícitamente para cada valor de la variable "y" mediante los métodos usuales de la teoría de funciones de matrices. Una vez realizado el cálculo, la ecuación (VII-63) puede expresarse en la forma:

$$\vec{U} = \bar{M}_{11} \vec{c}_1 + \bar{M}_{12} \vec{c}_2 \quad (\text{VII-64.a})$$

$$\vec{W} = \bar{M}_{21} \vec{c}_1 + \bar{M}_{22} \vec{c}_2 \quad (\text{VII-64.b})$$

donde

$$\exp(-\bar{C}y) = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{bmatrix} ; \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-65})$$

La ecuación (VII-64.a) determina \vec{U} y la (VII-64.b) \vec{W} . Cuando la pared inferior ($y=0$) es un conductor debe ser $\vec{W}(0)=0$. De acuerdo con (VII-63) ello implica que $\vec{c}_2=0$; de

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

modo que:

$$\vec{W} = \bar{M}_{2,1} \cdot \vec{C}_1 \quad (\text{VII-66.a})$$

$$\vec{U} = \bar{M}_{1,1} \cdot \vec{C}_1 \quad (\text{VII-66.b})$$

Ahora, a partir de (VII-66), y de las definiciones de \bar{Y}_i^+ (VII-43) y de \bar{g}_{ij} ($i \neq j$) (VII-22) y (VII-23), pueden obtenerse expresiones para \bar{Y}_i^+ y \bar{g}_{ij} .

Expresión para \bar{Y}_i^+ : \bar{Y}_i^+ viene definida por (VII-43.a). A partir de (VII-66) y teniendo en cuenta la relación $-j\omega\mu_0 \vec{H} = \text{rot}(\vec{E})$, así como (VII-56), se obtiene mediante cálculo directo la siguiente expresión para \bar{Y}_i^+ :

$$\bar{Y}_i^+ = \bar{Q}^{-1} \cdot [\bar{S} \cdot \bar{M}_{3,1} \cdot \bar{M}_{2,1}^{-1} - j\bar{R}] \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-67})$$

donde $\bar{M}_{3,1}$ y $\bar{M}_{2,1}$ deben evaluarse en $y=h$, y:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} k_{yz}^2 & k_{yx}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-68})$$

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Expresión para \bar{Y}_i^- : \bar{Y}_i^- viene definida mediante (VII-43.b). Dado que las ecuaciones de partida (VII-66) exigen que \vec{E}_z se anule para $y=0$, colocamos el origen de coordenadas en la interfase "i" y obtenemos, de modo análogo a como hicimos para \bar{Y}_i^+ :

$$\bar{Y}_i^- = -\bar{Q}^{-1} [\bar{S} \cdot \bar{M}_{2,3} \cdot \bar{M}_{2,3}^{-1} - j\bar{R}] \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-69})$$

con $\bar{M}_{2,3}$ y $\bar{M}_{2,3}^{-1}$ evaluadas en $y=-h$.

Expresión para $\bar{g}_{i-1,i}$: Usando (VII-42) y (VII-23), $\bar{g}_{i-1,i}$ puede definirse como:

$$\bar{g}_{i-1,i} : -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ -\tilde{H}_z \end{bmatrix}_{y=0} = \bar{g}_{i-1,i} \cdot \vec{E}_{zi}(h_i) \quad \text{cuando} \quad \vec{E}_{zi}(0) \hat{=} 0 \quad (\text{VII-70})$$

usando la expresión $-j\omega\mu_0 \vec{H} = \text{rot}(\vec{E})$ así como (VII-56) y (VII-66), se obtiene:

$$\bar{g}_{i-1,i} = -\bar{Q}^{-1} \cdot \bar{S} \cdot \bar{M}_{2,3}^{-1} \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-71})$$

con $\bar{M}_{2,3}$ evaluado en $y=h_i$.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Expresión para $\bar{g}_{i,i-1}$: La expresión general para $\bar{g}_{i,i-1}$ es:

$$\bar{g}_{i,i-1} = \bar{Q}^{-1} \cdot \bar{S} \cdot \bar{M}_{z_A}^{-1} \cdot \bar{Q} \quad (\text{VII-72})$$

donde \bar{M}_{z_A} debe evaluarse en $y=-h_i$.

VII.4-Ejemplos numéricos

En la presente sección daremos algunos ejemplos de utilización de los resultados obtenidos en el presente capítulo para el cálculo de estructuras de interés práctico. No pretendemos con ello dar una visión completa de la potencia del método, que excede con mucho los pocos ejemplos que aquí se dan, sino solo efectuar unas primeras aplicaciones.

Las estructuras que vamos a analizar se muestran en la fig.VII.5. Si colocamos un conductor perfecto en el plano inferior, estamos ante la conocida línea microtira simple (fig.VII.5.a) y el acoplamiento coplanar de microtiras (fig.VII.5.b). Colocando una pared magnética en el plano inferior de las figuras, podemos extender el análisis a acoplamientos simétricos por superposición de dos y cuatro líneas.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

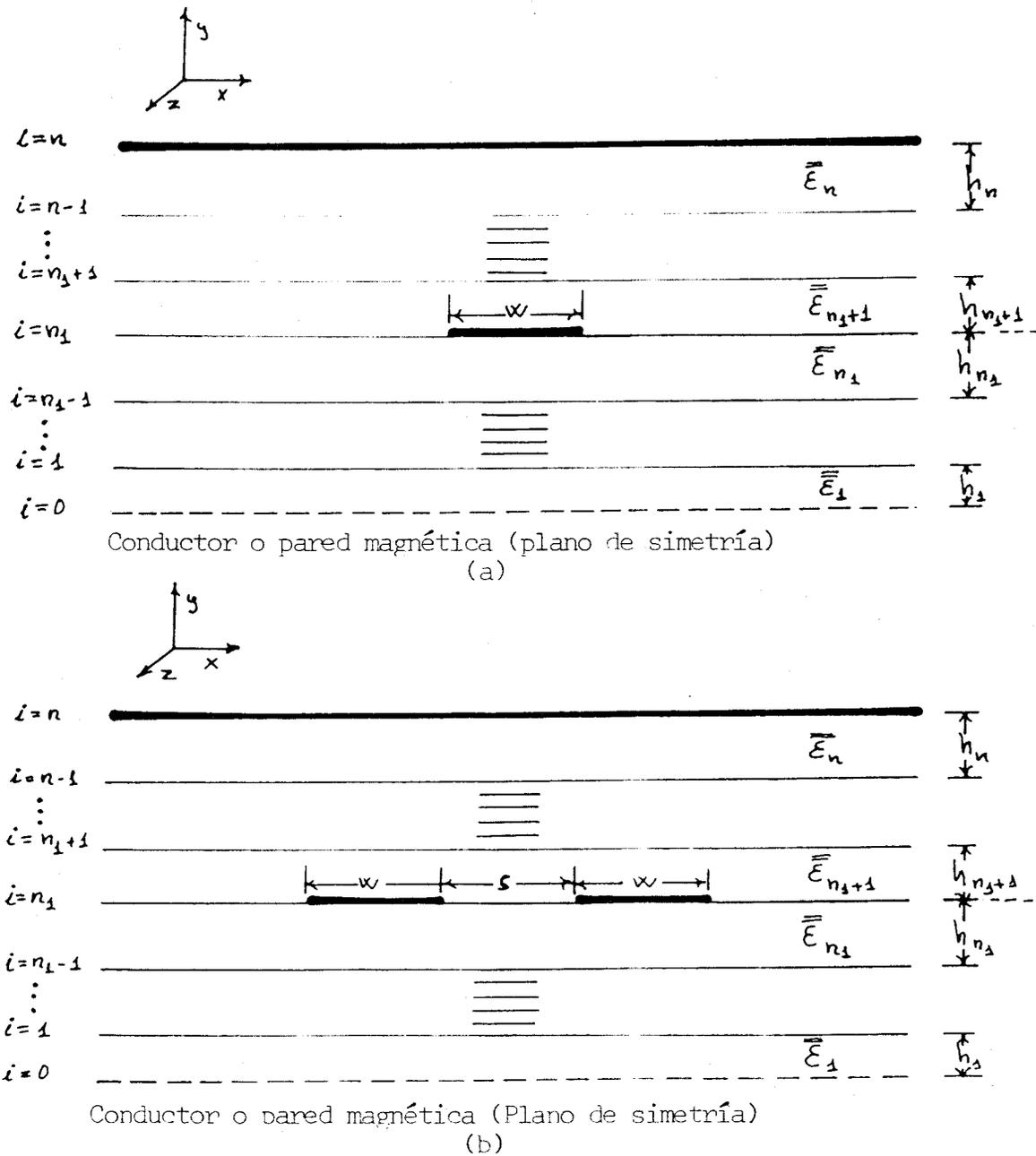


Fig.VII.5

Algunas líneas de transmisión sencillas en medios estratificados. (a).- Línea microtira simple y acoplamiento por superposición de microtiras. (b).- acoplamiento simétrico coplanar y mixto (coplanar y por superposición).

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

Cifándonos a las estructuras de la fig.VII.5, cómo solo hay metalizaciones en una capa, la matriz de Green inversa (VII-26), se reduce a la matriz $\bar{\bar{L}}_{1,1}$ dada por (VII-27) y (VII-30.a, b, e y f). El algoritmo de la sección VII.2 se simplifica así de la forma:

$$\bar{\bar{L}}_{1,1} = \bar{\bar{A}}^{n_1} + \bar{\bar{B}}^{n_2} - \bar{\bar{g}}_{n_1, n_2} \quad (\text{VII-73})$$

donde "n" es el número total de capas, n_1 el número de capas por debajo de la interfase metalizada, $n_2 = n - n_1$, y las matrices $\bar{\bar{A}}^j$, $\bar{\bar{B}}^j$ vienen dadas por:

$$\bar{\bar{A}}^1 = \bar{\bar{g}}_{1,1} \quad (\text{VII-74.a})$$

$$\bar{\bar{B}}^1 = \bar{\bar{g}}_{n-1, n-1} \quad (\text{VII-74.b})$$

$$\bar{\bar{B}}^j = \bar{\bar{g}}_{n-j, n-j} - \bar{\bar{g}}_{n-j, n-j+1} \cdot [\bar{\bar{B}}^{j-1}]^{-1} \cdot \bar{\bar{g}}_{n-j+1, n-j} \quad (\text{VII-74.c})$$

$$\bar{\bar{A}}^j = \bar{\bar{g}}_{jj} - \bar{\bar{g}}_{j, j-1} \cdot [\bar{\bar{A}}^{j-1}]^{-1} \cdot \bar{\bar{g}}_{j-1, j} \quad (\text{VII-74.d})$$

Una vez que la matriz de Green inversa (VII-73) ha sido calculada, podemos usar el método variacional de la sec.VII.1 para determinar la constante dieléctrica efectiva de las estructuras bajo análisis. Para ello usamos la expansión de J_z y J_x en polinomios de Chevishev (ver

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

sec.V.4):

$$J_z = \sum_{n=0}^N T_n(z) / \sqrt{1-z^2} \quad (\text{VII-75.a})$$

$$J_x = \sum_{m=1}^M U_m(z) \sqrt{1-z^2} \quad (\text{VII-75.b})$$

donde T_n y U_m son los polinomios de Chevishev de primer y segundo orden respectivamente, y

$$z = 2x/w \quad (\text{VII-76})$$

para una sola microtira (fig.VII.5.a), o

$$z = (2x-s-w)/w \quad (\text{VII-77})$$

para el par simétrico de la fig.VII.5.b.

En la fig.VII.5.a, consideramos solo el primer modo cuasi-estático, lo que equivale a suponer que $J_z(x)$ es una función par y $J_x(x)$ una función impar, por lo que sólo usamos en (VII-75.a) términos con "n" cero o par, y en (VII-75.b), términos con "n" impar. Para el caso de la fig.VII.5.b, analizaremos ambos modos cuasi-estáticos -par e impar-, utilizando en (VII-75) el desarrollo completo.

Análisis en frecuencia Análisis de multicapas

Con el objeto de comprobar la exactitud del método, hemos comparado nuestros resultados con los datos disponibles en la literatura. En la fig.VII.6, nuestros resultados son comparados con los obtenidos por Kitazawa et al. [117] para líneas microtira acopladas sobre sustrato suspendido de zafiro. El acuerdo es excelente con ésta y con todas las gráficas de [117]. Nuestro método ha sido testeado también con los resultados de [121], mostrando un excelente acuerdo.

En la fig.VII.7 se muestran las características de dispersión para líneas microtira sobre sustrato anisótropo de nitruro de boro con superestrato del mismo material ($\epsilon_{//}^* = 3.4$; $\epsilon_{\perp}^* = 5.12$) y orientación (eje óptico perpendicular al plano de masa). También se muestra la variación en frecuencia de la constante dieléctrica efectiva de una estructura isótropa ($\epsilon^* = 4.08$) similar. Nuestro objeto ha sido comparar los efectos sobre la dispersión de la inhomogeneidad (estructura isótropa) y de la inhomogeneidad combinada con la anisotropía (estructura anisótropa). Aunque el efecto de la anisotropía aquí considerada es menor, no es despreciable, y se hace necesario un análisis específico de las estructuras anisótropas, tanto en el límite cuasi-estático, como en el análisis dinámico.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

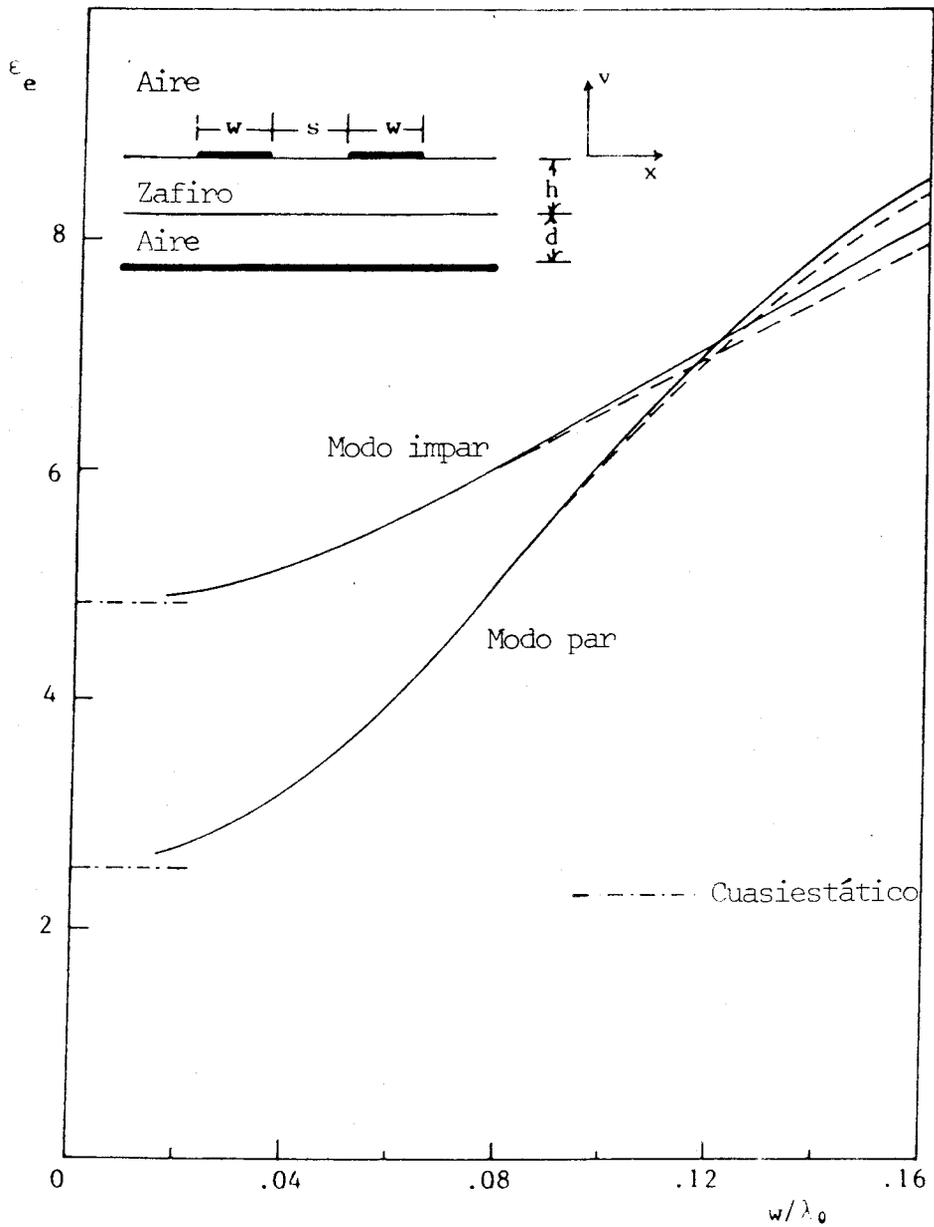


Fig.VII.6

Características de dispersión de un acoplamiento coplanar de microtiras idénticas sobre sustrato suspendido de zafiro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 9.4$, $\epsilon_y^* = 11.6$). $h/w = 1$, $d/w = 1$, $s/w = 0.5$. ——— calculado por el método propuesto, ----- Kitazawa et al. [117].

-o0o-

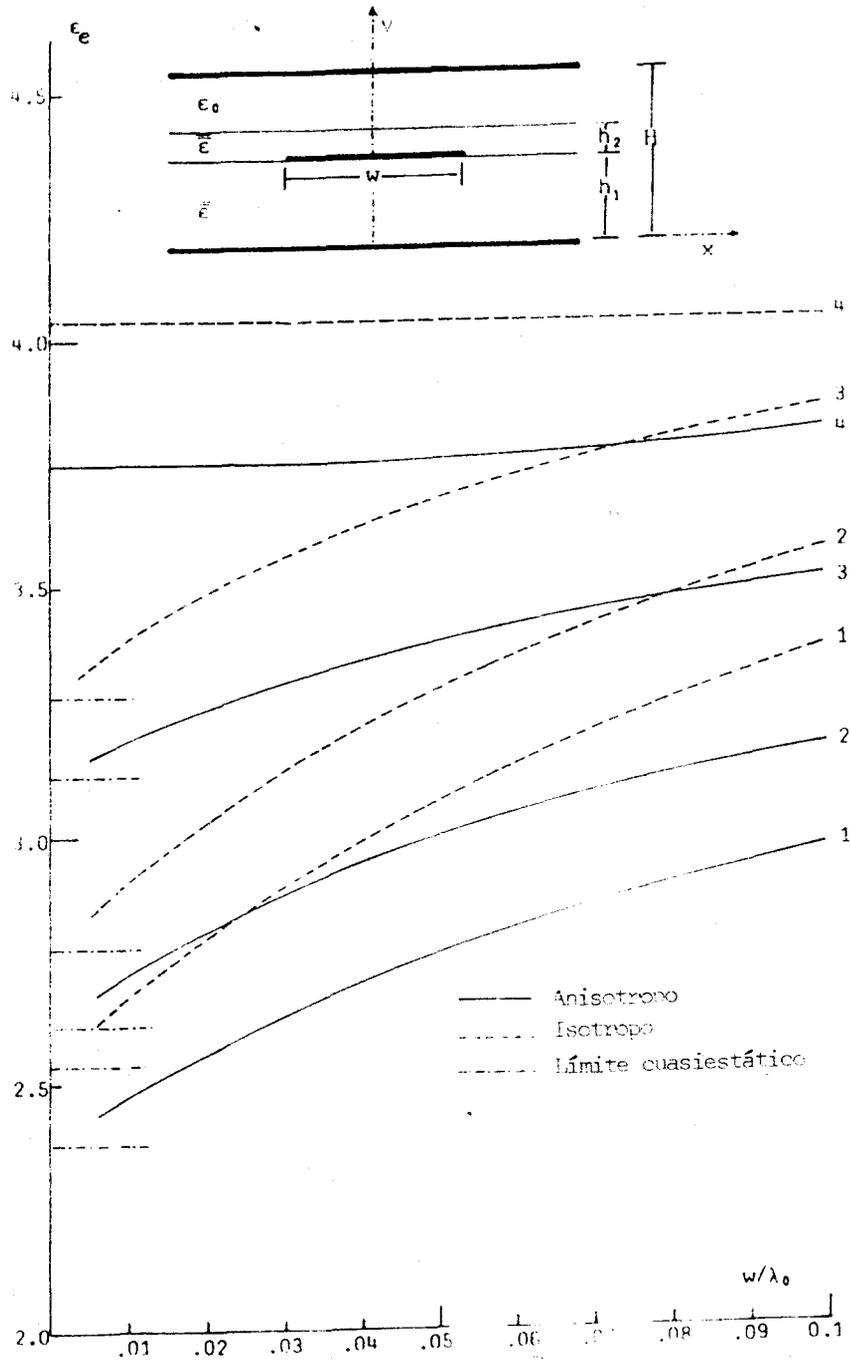


Fig.VII.7

Constante dieléctrica efectiva frente a w/λ , para una línea microtira simple con plano de masa superior sobre sustrato de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$) y con superestrato del mismo material y orientación de espesor variable. $H/w=2$, $h_1/w=1$. 1.- $h_2/w=0$, 2.- $h_2/w=0.1$, 3.- $h_2/w=0.5$, 4.- $h_2/w=1$.

-o0o-

En la fig.VII.8 se muestra la variación con la frecuencia de la constante dieléctrica efectiva de una

Análisis en frecuencia Análisis de multicapas

pareja de líneas microtira acopladas, sobre un sustrato en doble capa de nitruro de boro y zafiro. La estructura analizada fué propuesta por M.Horno y el autor como idónea para un acoplador direccional de bajo acoplamiento y alta directividad [70], basándose en un análisis cuasiestático que muestra cómo las velocidades de fase de ambos modos cuasiestáticos, par e impar, se igualan para una determinada razón del espesor de las capas (ver también fig.IV.8). En la gráfica 1 se muestran las características de dispersión de un acoplador direccional de 10-dB y 50Ω [70] diseñado mediante análisis cuasiestático. En la gráfica 2 vemos las características de dispersión de una estructura similar, pero con una razón de espesores de las capas algo diferente. Ambas estructuras muestran ser fuertemente dispersivas, pero la diferencia entre las velocidades de fase de ambos modos permanece pequeña para todo el rango de frecuencias analizado.

En la fig.VII.9 mostramos las características de dispersión de microtiras acopladas sobre sustrato de nitruro de boro, con superestrato del mismo material y orientación. Como ya señalamos en la sec.IV. , usando un dielectrico anisótropo con $\epsilon_x^* > \epsilon_y^*$ como sustrato y superestrato, es posible igualar las velocidades de fase de los modos par e impar. Este hecho ha sido usado por F.Medina y M.Horno [146] en el diseño de acopladores de

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

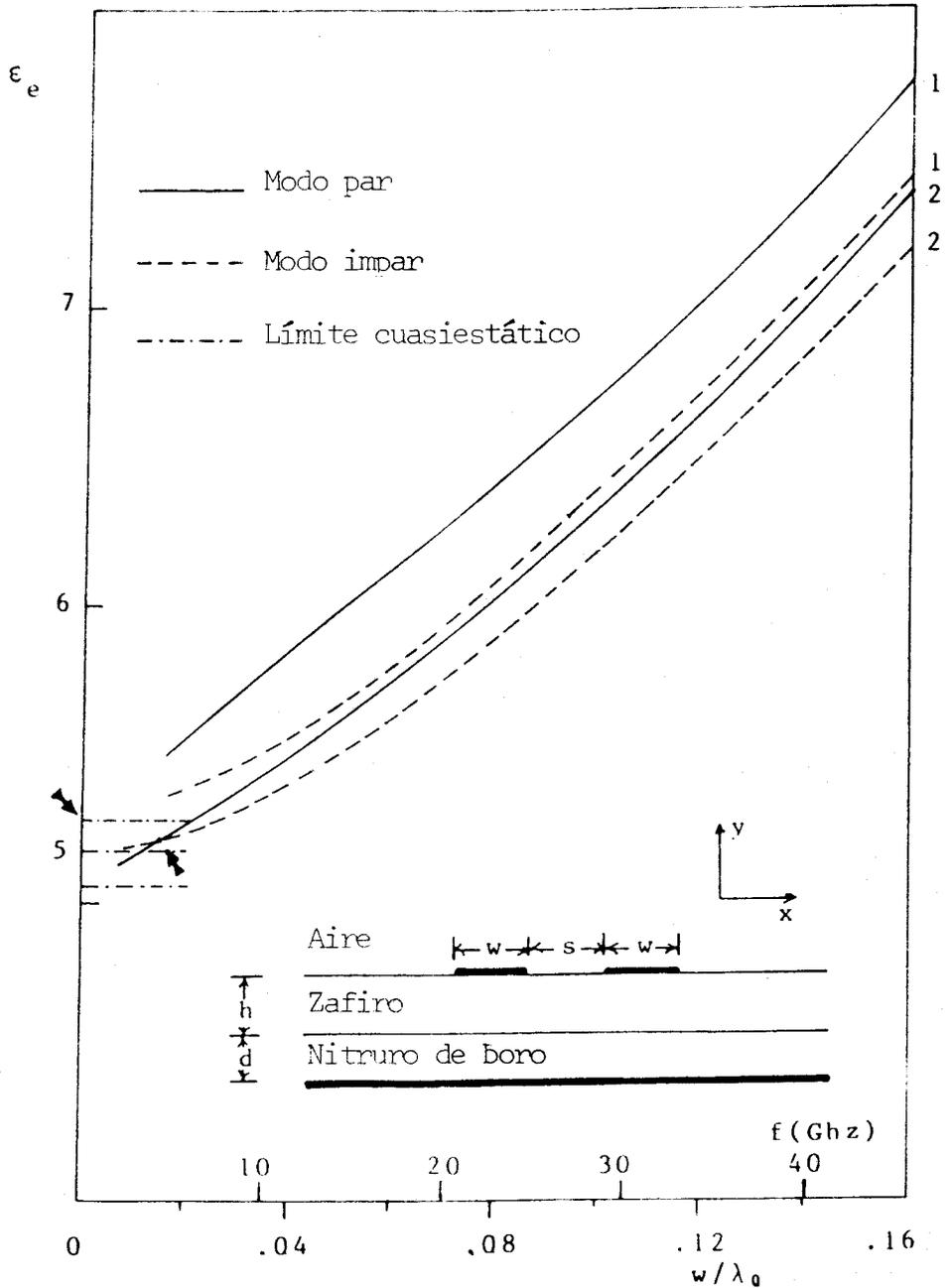


Fig.VII.8

Características de dispersión de un acoplamiento coplanar de dos microtiras idénticas sobre un sustrato en doble capa de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$) y zafiro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 9.4$, $\epsilon_y^* = 11.6$). $w = 1.05\text{mm}$. $s = 0.37\text{mm}$. $h + d = 1\text{mm}$.
1.- $h/(h+d) = 0.65$, 2.- $h/(h+d) = 0.6$.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

alta directividad. La estructura analizada en la gráfica 1 es un acoplador direccional de 20-dB y 50Ω [146]. La estructura de la graf.2 tiene un superestrato de espesor arbitrario.

En la fig.VII.10, se representan las características de dispersión de una estructura acoplada tipo "broadside" simétrico, con sustrato invertido de nitruro de boro y superestrato de zafiro. Esta estructura también permite igualar las velocidades de fase de ambos modos en el límite cuasiestático, pero no mucho más allá, como se muestra en la figura.

Finalmente, en la figura VII.11, analizamos un acoplamiento simétrico coplanar y por superposición de cuatro microtiras idénticas, con sustrato invertido de nitruro de boro.

Como indicamos más arriba, estos ejemplos son solo aplicaciones simples del algoritmo general desarrollado a lo largo de las diferentes secciones del presente capítulo, que puede ser usado en estructuras mucho más complejas. Nuestro ánimo al dar estos resultados numéricos ha sido exclusivamente el de dar algunas aplicaciones prácticas del método.

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

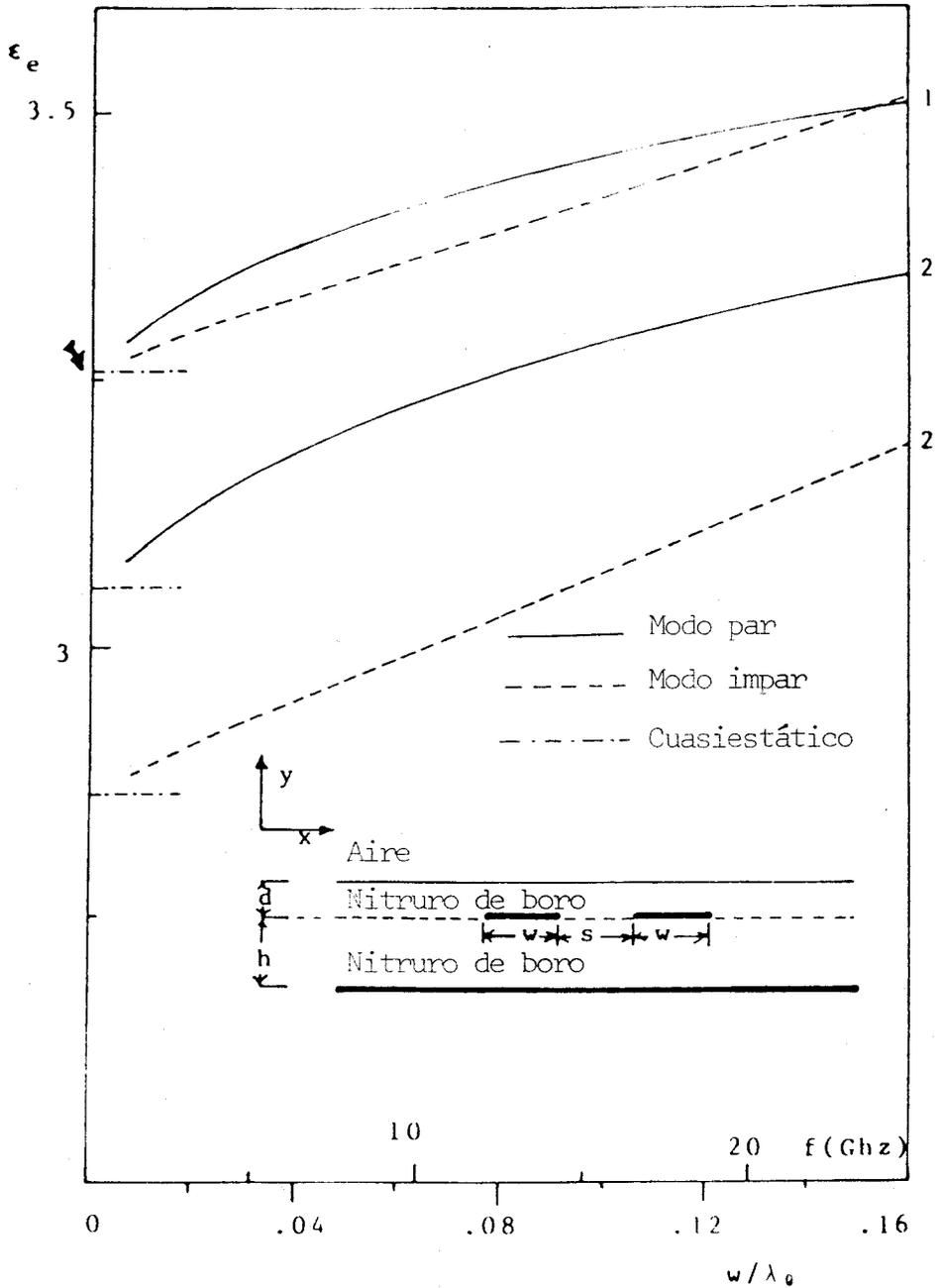


Fig.VII.9

Características de dispersión para un acoplamiento coplanar de microtiras sobre sustrato de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$), con superestrato del mismo material y orientación. $w = 1.93\text{mm.}$, $s = 1.75\text{mm.}$, $h = 1\text{mm.}$ 1.- $d/h = 0.45$. 2.- $d/h = 0.1$.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

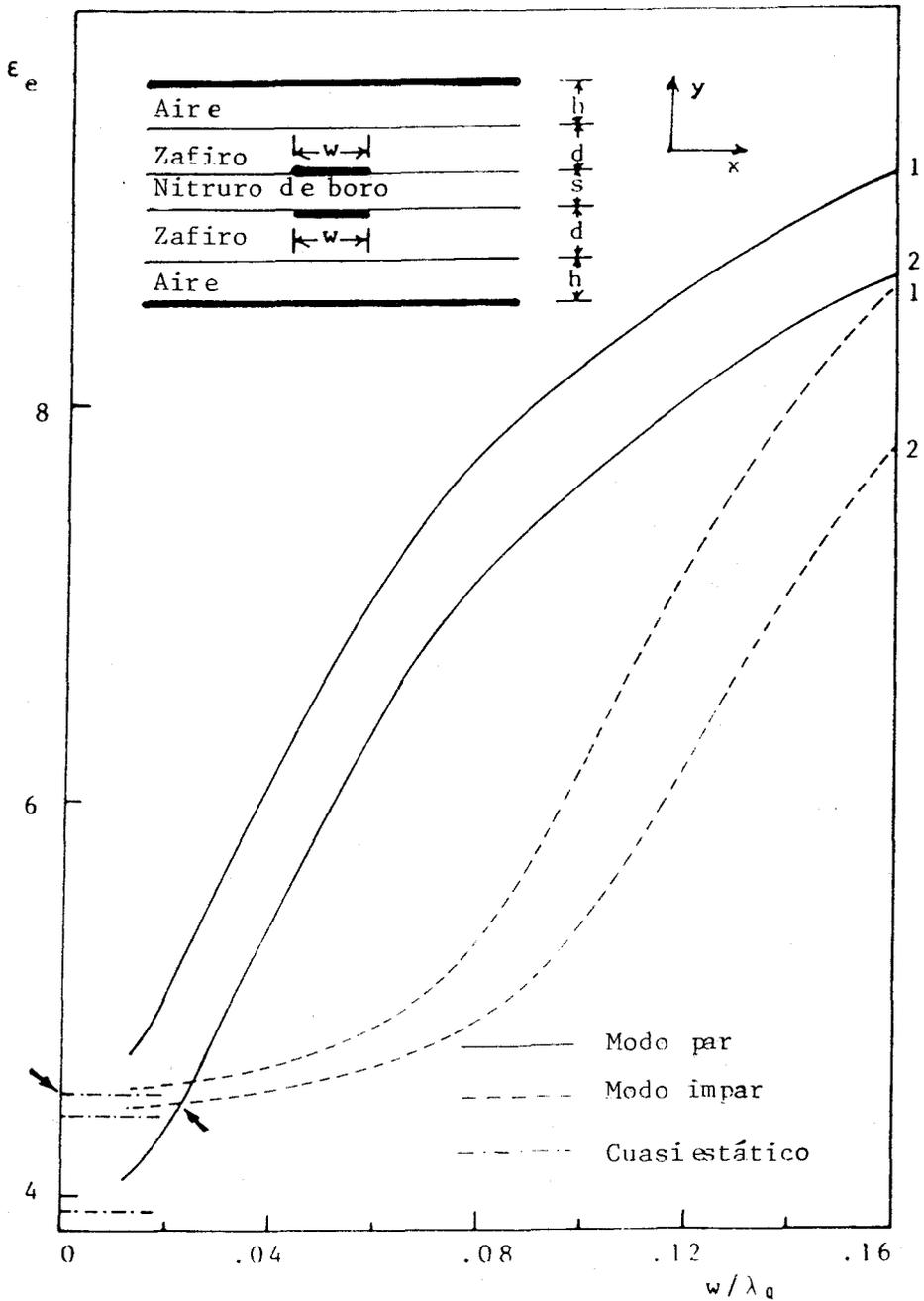


Fig.VII.10

Características de dispersión para un acoplamiento por superposición de microtiras con intercapa de nitruro de boro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 5.12$, $\epsilon_y^* = 3.4$) y sustrato de zafiro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 9.4$, $\epsilon_y^* = 11.6$). $s/w = 0.4$, $(d+h)/w = 1.8$. 1.- $d/w = 1.1$. 2.- $d/w = 0.9$.

-o0o-

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

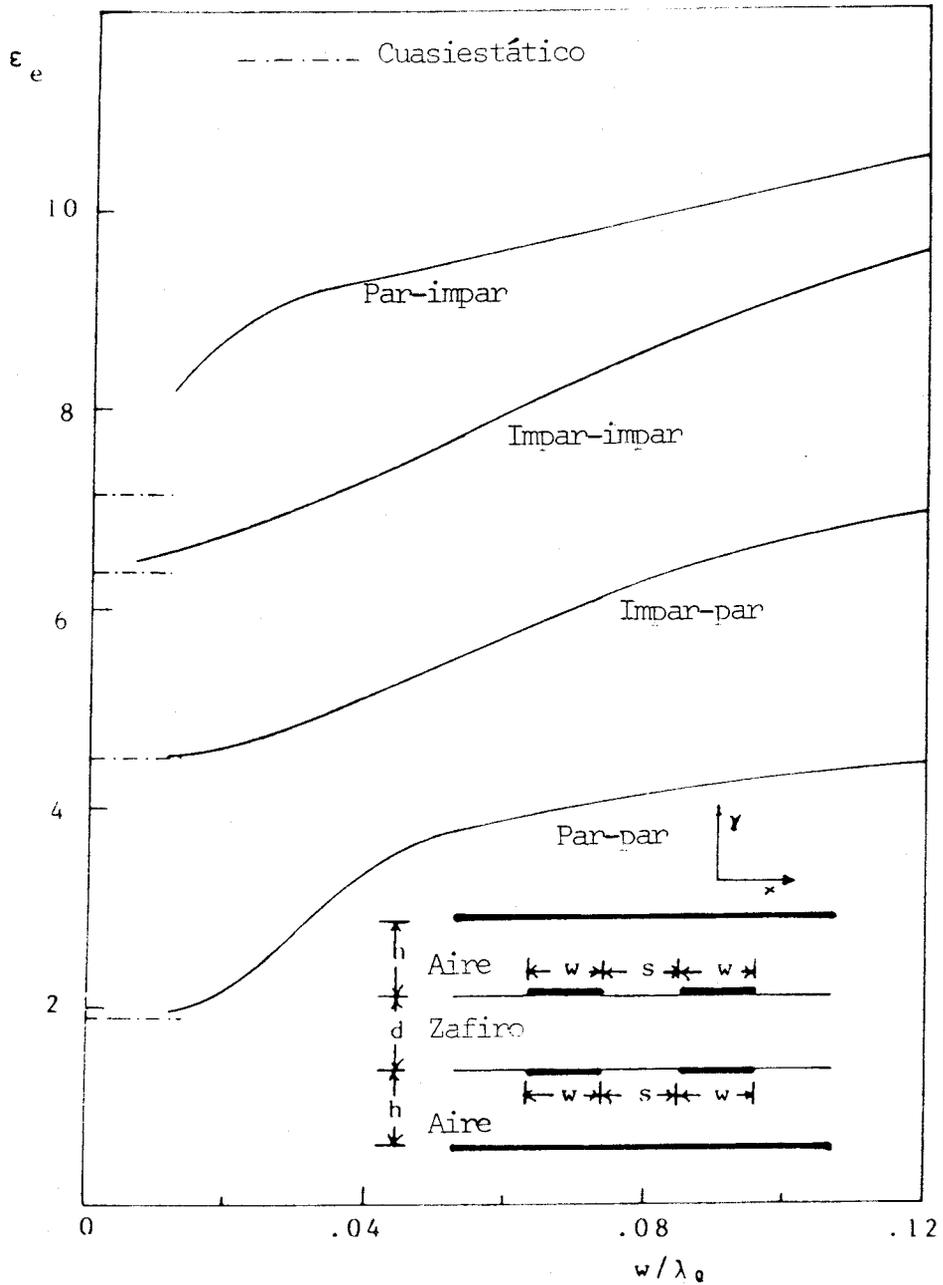


Fig.VII.11

Características de dispersión de un doble acoplamiento simétrico coplanar y por superposición de cuatro microtiras idénticas con intercapa de zafiro ($\epsilon_x^* = \epsilon_z^* = 9.4$, $\epsilon_y^* = 11.6$). $d/h = h/w = 2$, $s/w = 1$.

-o0o-

Análisis en frecuencia Análisis de multicapas

VII.5-Conclusiones

A lo largo del presente capítulo, hemos desarrollado un método variacional para el análisis de líneas de transmisión sin pérdidas en medios multicapa de configuración planar y anisotropía arbitraria. Dicho método puede también aplicarse a líneas con pérdidas, pero en ese caso pierde su carácter variacional.

Se ha demostrado, en efecto, cómo el método de Galerkin en el dominio espectral presenta características variacionales, siempre y cuando el medio en que están impresas las metalizaciones pueda considerarse sin pérdidas.

El problema de la determinación de la función de Green en el dominio espectral se ha resuelto mediante un algoritmo de recurrencia válido para toda estructura multicapa tal que las relaciones constitutivas de los diferentes medios que la componen sean lineales. En tal caso se demuestra que la matriz de Green inversa es una matriz tridiagonal por bloques, y que cada uno de dichos bloques (que son matrices 2×2) puede obtenerse mediante un algoritmo de recurrencia a partir de, como máximo, $4n$ matrices elementales 2×2 (donde "n" es el número total de

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

capas), cada una de las cuales depende sólo de las dimensiones y parámetros constitutivos de una capa.

El problema de la determinación de cada matriz elemental puede a su vez formularse de modo unívoco como el problema de hallar la relación entre determinadas magnitudes del campo electromagnético en la superficie de cada capa, dadas unas condiciones de contorno determinadas. Una vez así formulado, la resolución de cada problema concreto depende del tipo de relaciones constitutivas propio de cada capa. En ese sentido se avanzó en la sec.VII.3, encontrándose expresiones compactas para las mencionadas matrices elementales para el tipo de medios tratados en el cap.VI. Para medios de anisotropía eléctrica general, se desarrolla un método de cálculo, susceptible de ser llevado a cabo en ordenador, en el apdo. VII.3.b.

De ese modo el problema del cálculo de la función de Green para líneas planas de transmisión en medios estratificados de anisotropía arbitraria, queda resuelto sin más que aplicar el algoritmo descrito en la sec.VII.2 y utilizar para el cálculo de las diadas auxiliares $\bar{\bar{Y}}_{i,j}^{\pm}$ y $\bar{\bar{g}}_{i,j}$:

Análisis en frecuencia
Análisis de multicapas

a) En medios isótropos, la particularización de (VII-45) y (VII-47) a dichos medios, es decir, sustituyendo la matriz \bar{K} por el escalar K_y ($K_y = \alpha^e + \beta^e \omega^e \nu^e \epsilon$).

b) En medios anisótropos orientados del modo descrito en el apdo. VII.3.a y en el cap.VI, las expresiones compactas (VII-48) y (VII-49)

c) Para capas de anisotropía arbitraria, las expresiones desarrolladas en el apdo. VII.3.b.

Finalmente, en la sec. VII.4, se dan ejemplos numéricos que ilustran la aplicación del método general a situaciones concretas.

Conclusiones

CONCLUSIONES

A continuación, como conclusión de esta memoria, resumimos los resultados y aportaciones que consideramos de mayor interés y originalidad realizados a lo largo de la misma.

i.- Se ha hecho un estudio bibliográfico en profundidad de los diferentes métodos de análisis cuasiestático de líneas de transmisión de configuración planar. Como consecuencia de dicho estudio, se ha elegido como método mas acorde con los objetivos de este trabajo el análisis variacional en el dominio espectral, con el método de minimización de Rayleigh-Ritz, en base a las siguientes razones: Gran precisión debido a su carácter variacional, facilidad de formulación y extensión a estructuras multiconductoras y multicapas debido la mayor sencillez del cálculo de la matriz de Green en el dominio espectral, y rapidez de cálculo -por comparación con otros métodos de la misma generalidad y precisión- debido a su carácter semianalítico, lo que permite obtener matrices características de un tamaño típico de $2N \times 2N$, donde N es el número de conductores que configuran la línea.

Conclusiones

ii.- Se ha generalizado de modo riguroso la teoría cuasiestática de líneas de transmisión multiconductoras a líneas en medios inhomogéneos y anisótropos. Se ha demostrado que por una línea formada por $N+1$ conductores, uno de ellos a tierra, y cuando la conductividad estática del medio puede despreciarse, se propagan N modos cuasiestáticos de constante de propagación real, lo cual es una consecuencia directa del carácter definido positivo de las matrices de capacidad y autoinducción por unidad de longitud de la línea. Asimismo, se demuestra que todos los parámetros cuasiestáticos de la línea se deducen de dichas matrices, y que, en medios no magnéticos, tales parámetros pueden deducirse igualmente de las matrices de capacidad por unidad de longitud de la línea y de la matriz de capacidades de la línea en vacío.

iii.- Se ha analizado de modo cualitativo el acoplamiento arbitrario de dos líneas. Se demuestra que, en ese caso, debe existir al menos un modo tal que el potencial cuasiestático en ambas líneas posea el mismo signo (modo "c"). Excepto en líneas fuertemente asimétricas, existe también un modo en el cual los signos de ambos potenciales son opuestos (modo "n"), pero esto no puede demostrarse para todo acoplamiento y se proporciona un ejemplo teórico en que tal cosa no sucede. Asimismo se analiza el acoplamiento por superposición y coplanar de cuatro

Conclusiones

microtiras idénticas en un medio anisótropo, como ejemplo práctico de las asimetrías que tales medios introducen en acoplamientos de otro modo simétricos.

iv.- Se ha desarrollado un algoritmo para el cálculo mediante ordenador de la matriz estática de Green para medios estratificados dieléctricos de anisotropía arbitraria. Dicho algoritmo procede mediante recurrencia, e introduce desde un principio la anisotropía del medio en el método de cálculo, sin necesidad de recurrir a la construcción de estructuras isótropas equivalentes.

v.- Se ha desarrollado un método variacional para el análisis de líneas planares multiconductoras de configuración planar. Partiendo del algoritmo a que se hace referencia en el apartado anterior, se han desarrollado asimismo programas para cálculo de los parámetros característicos en régimen cuasiestático de una amplia gama de líneas de transmisión, útiles en tecnología MIC. Se presentan numerosos ejemplos en forma de gráficas.

vi.- Se ha hecho un estudio en profundidad de la bibliografía existente en lo relativo al análisis en frecuencia de líneas de configuración planar. Como resultado de dicho análisis se ha elegido, como el método mas adecuado a los objetivos del presente trabajo -análisis

Conclusiones

de la dispersión del modo fundamental- el método de Galerkin en el dominio espectral por las siguientes razones: Generalidad y fácil adaptación de los programas a cualquier tipo de líneas de configuración planar debido a la mayor facilidad de cálculo de la matriz de Green en el dominio espectral, precisión y rapidez de cálculo debida al reducido tamaño de las matrices características que se obtienen (no mayores de $4N \times 4N$, donde N es el número de conductores).

vii.- Se han desarrollado expresiones compactas de la función diádica de Green en el dominio espectral para líneas sobre sustratos de una capa de dieléctrico anisótropo tal que la dirección perpendicular al plano de masa sea un eje principal de anisotropía. Se demuestra que, en tal caso, es posible una formulación diferencial de segundo grado en términos de ciertas matrices y vectores auxiliares de dimensión dos, soluble mediante técnicas elementales, obteniéndose así expresiones compactas de la función diádica de Green.

viii.- En el caso de anisotropía general se demuestra que es preciso recurrir a una formulación de primer grado en términos de matrices y vectores auxiliares de dimensión cuatro, no siendo posible entonces la obtención de expresiones compactas, pero sí la obtención de algoritmos

Conclusiones

susceptibles de ser utilizados por un ordenador.

ix.- Se ha desarrollado un método de recurrencia para la obtención de la matriz diádica de Green en el dominio espectral para medios estratificados dotados de relaciones constitutivas lineales. El método parte de los teoremas generales de existencia y unicidad del campo electromagnético y es, por tanto, de aplicación completamente general. Se demuestra que la matriz inversa de Green del problema global debe ser una matriz tridiagonal por bloques, y a partir de ahí, el método actúa dividiendo el problema general de N capas en, a lo sumo, $4N$ problemas de una sola capa, cuyas diadas de Green se engarzan mediante un algoritmo recurrente para obtener la matriz diádica de Green global. Se analizan las propiedades de las mencionadas diadas elementales y de la matriz de Green global para el caso particular de medios sin pérdidas y para determinadas simetrías del mismo, lo que permite reducir el número de subproblemas de una capa.

x.- Se han elaborado expresiones compactas para las diadas elementales a que hace referencia el apartado anterior, para el caso particular de medios dieléctricos anisótropos con un eje principal perpendicular al plano de masa.

Conclusiones

xi.- Se han elaborado algoritmos utilizables por un ordenador para el cálculo de las diadas elementales a que hace referencia el apartado ix en el caso de medios dieléctricos de anisotropía arbitraria.

xii.- Se ha demostrado que el método de Galerkin en el dominio espectral es equivalente a la resolución de cierto problema variacional por el método de Rayleigh-Ritz. No obstante, la magnitud de interés (la constante dieléctrica efectiva de la línea), no es en este caso una magnitud variacional.

xiii.- Se han desarrollado, en base a las conclusiones anteriores, programas para el análisis dispersivo de los parámetros característicos del modo dominante, mediante el método de Galerkin en el dominio espectral, de una amplia gama de líneas de transmisión de configuración planar, tanto sobre sustrato de una capa como en medios multicapa. Numerosos ejemplos han sido calculados y los resultados presentados en forma de gráficas.

xiv.- El estudio realizado y los algoritmos utilizados son útiles para el diseño, tanto en aproximación cuasiestática (hasta 10 GHz en líneas de dimensiones usuales) como en frecuencia, de una amplia gama de elementos pasivos de circuitos de microondas, construidos en configuración

Conclusiones

planar, fundamental hoy en la tecnología integrada y monolítica de microondas.

APENDICE A

Para demostrar la simetría de la matriz \bar{C} , podemos seguir un procedimiento similar al seguido en [1] para el caso isótropo. Consideremos en primer lugar la integral de energía electrostática:

$$U_e = (1/2) \iiint d\tau \vec{\nabla} V \cdot \bar{\epsilon}_0 \cdot \vec{\nabla} V \quad (A-1)$$

donde $\bar{\epsilon}_0$ es el primer término en el desarrollo en frecuencias de $\bar{\epsilon}$, y la integral se extiende a todo el volumen comprendido entre los conductores para una porción Δz de línea.

La variación de U_e puede escribirse:

$$\begin{aligned} \delta U_e = (1/2) \iiint d\tau \vec{\nabla}(\delta V) \cdot \bar{\epsilon}_0 \cdot \vec{\nabla} V + \\ + (1/2) \iiint d\tau \vec{\nabla} V \cdot \bar{\epsilon}_0 \cdot \vec{\nabla}(\delta V) \end{aligned} \quad (A-2)$$

Supongamos ahora que los campos resultado de la variación cumplen a su vez las condiciones de contorno sobre los conductores y en el infinito. En ese caso podemos escribir, usando la primera identidad de Green:

$$U = (1/2) \sum_i V_i \oint d\vec{s} \cdot \delta(\vec{\epsilon}_0 \cdot \vec{\nabla} V) + \\ + (1/2) \sum_i \delta V_i \oint d\vec{s} \cdot (\vec{\epsilon}_0 \cdot \vec{\nabla} V) \quad (A-3)$$

donde $d\vec{s}$ es el vector diferencial de superficie normal a la superficie de los conductores, dirigido hacia dentro de ellos, y las integrales se extienden a toda la superficie de los conductores incluida en la porción de línea considerada.

Teniendo en cuenta la simetría de $\vec{\epsilon}_0$, ambos términos de (A-3) son equivalentes, y δU_e puede escribirse de dos maneras indistintamente:

$$\delta U_e = \sum_i V_i \delta Q_i \quad (A-4.a)$$

$$\delta U_e = \sum_i Q_i \delta V_i \quad (A-4.b)$$

donde Q_i es la carga sobre el conductor "i" a lo largo de Δz , y V_i el potencial en la superficie de dicho conductor.

De (A-4) se deduce que:

$$[\partial^2 U_e / \partial Q_i] = V_i \quad (A-5.a)$$

$$[\partial^2 U_e / \partial V_i] = Q_i \quad (A-5.b)$$

y, por tanto:

$$[\partial^3 U_e / \partial V_i \partial V_j] = [\partial Q_i / \partial V_j] = C_{ij} \Delta z \quad (\text{A-6})$$

y, cambiando el orden de derivación $C_{ij} = C_{ji}$.

Para demostrar la simetría de \bar{L} , podemos seguir un procedimiento dual. Consideremos en primer lugar las N espiras que se pueden construir con el conductor "i" ($i=1,2,\dots,N$) y el N+1. La integral de la energía magnetostática de la línea se escribe, en función del potencial vector, como:

$$U_m = (1/2) \iiint dz (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \mu_0^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{A-7})$$

Teniendo en cuenta la simetría de μ_0 , y usando la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{C} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \quad (\text{A-8})$$

con $\vec{C} = \vec{A}$, y $\vec{W} = \mu_0^{-1} (\nabla \times \vec{A})$, la variación de U_m puede escribirse en las dos formas equivalentes:

$$\delta U_m = \sum_i \Phi_i \delta I_i \quad (\text{A-9.a})$$

$$\delta U_m = \sum_i I_i \delta \Phi_i$$

donde I_i es la corriente que fluye a lo largo del conductor "i" y Φ_i el flujo magnético a través de la espira formada por el conductor "i" y el N+1:

$$\Phi_i = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

donde la integral de superficie se toma a través de la espira "i" y la de línea siguiendo una línea de corriente en la misma espira.

Considerando ahora las expresiones (A-9) extendidas a una porción de línea de longitud unidad, y procediendo en forma análoga a como hicimos con \vec{C} , la simetría de \vec{L} queda demostrada.

APENDICE B

1.- Dieléctrico uniaxico

Consideremos en primer lugar el caso en que el medio es un dieléctrico uniaxial, tal que el eje "y" coincida con uno de sus ejes principales.

El cálculo de los autovalores de $\bar{\bar{B}}$ (VI-10) puede realizarse directamente, teniendo en cuenta las relaciones de transformación entre el tensor tangencial $\bar{\bar{\epsilon}}_t(\theta)$ y $\bar{\bar{\epsilon}}_t$, y las expresiones para los autovalores de $\bar{\bar{\epsilon}}_t$. Dicho método es, sin embargo, muy farragoso y es preferible situarse desde el principio en el sistema de referencia en el que $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ es diagonal. Llamemos a dichos ejes con dos primas (z",x"). Entonces:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_t'' = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{bmatrix} \quad (B-1)$$

Consideremos (fig.B.1) el caso mas general en el que $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ no es diagonal en el sistema de referencia original z-x, de modo que su eje óptico forme un ángulo ϕ con el eje "z"

(cuando el eje óptico es perpendicular al plano z-x, los ejes principales en dicho plano pueden elegirse arbitrariamente y el ángulo ϕ puede igualarse a cero). La transformación de ejes que lleva del sistema z',x' al sistema z'',x'' (es decir, de $\bar{e}'_t(\theta)$ a \bar{e}''_t) coincide con un giro en torno al eje "y" de ángulo $\phi - \theta$. La matriz de dicha transformación vendrá dada por:

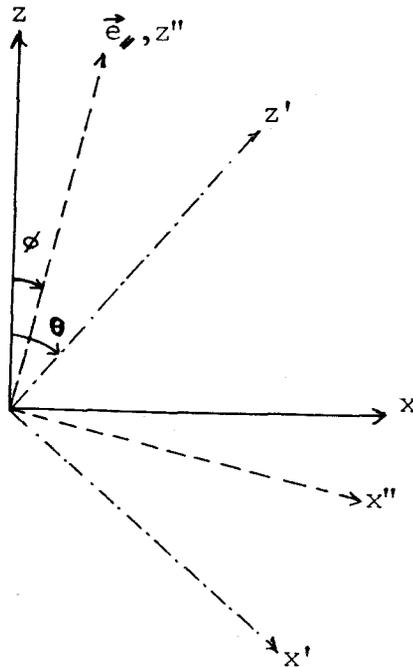


Fig.B.1

-o0o-

$$\bar{Q}'' = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \bar{Q}^{-1} \quad (\text{B-2})$$

o bien:

$$\bar{Q}'' = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \beta \cos\phi + \alpha \text{sen}\phi & -\alpha \cos\phi + \beta \text{sen}\phi \\ -\beta \text{sen}\phi + \alpha \cos\phi & \alpha \text{sen}\phi + \beta \cos\phi \end{bmatrix} \quad (\text{B-3})$$

Escribamos dichas expresiones en la forma:

$$\bar{Q}'' = (\alpha''^2 + \beta''^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \beta'' & -\alpha'' \\ \alpha'' & \beta'' \end{bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

donde:

$$\beta'' = \beta \cos\phi + \alpha \text{sen}\phi \quad (\text{B-5.a})$$

$$\alpha'' = \alpha \cos\phi - \beta \text{sen}\phi \quad (\text{B-5.b})$$

ya que

$$\alpha''^2 + \beta''^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{B-6})$$

como se comprueba por sustitución directa.

La aplicación de la transformación (B-4) a (VI-10) lleva, teniendo en cuenta (B-6), así como la relación:

$$K_y^e = \alpha^2 + \beta^2 - k_y^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 - k_y^2 \quad (\text{B-7})$$

a la expresión final:

$$\bar{\bar{B}}'' = \bar{\bar{Q}}'' \cdot \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{Q}}''^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha''^2 + (\beta''^2 - k_y^2) \epsilon_v / \epsilon_y, & \beta'' \alpha'' (\epsilon_v / \epsilon_y - 1) \\ \beta'' \alpha'' (\epsilon_2 / \epsilon_y - 1) & , \beta''^2 + (\alpha''^2 - k_y^2) \epsilon_2 / \epsilon_y \end{bmatrix} \quad (\text{B-8})$$

Es claro que la transformación efectuada no altera los autovalores de $\bar{\bar{B}}$ (o $\bar{\bar{B}}''$), que vendrán expresados por la fórmula general:

$$\lambda^2 = (1/2) [B''_{1,1} + B''_{2,2} \pm \sqrt{(B''_{1,1} - B''_{2,2})^2 + 4B''_{1,2} B''_{2,1}}] \quad (\text{B-9})$$

donde, en función de (B-8):

$$B_{3,1}'' + B_{3,2}'' = \alpha''^2 (1 + \epsilon_2/\epsilon_y) + \beta''^2 (1 + \epsilon_v/\epsilon_y) - k_y^2 (\epsilon_v/\epsilon_y + \epsilon_2/\epsilon_y) \quad (\text{B-10.a})$$

$$B_{4,1}'' - B_{4,2}'' = -\alpha''^2 (\epsilon_2/\epsilon_y - 1) + \beta''^2 (\epsilon_v/\epsilon_y - 1) - k_y^2 (\epsilon_2/\epsilon_y - \epsilon_v/\epsilon_y) \quad (\text{B-10.b})$$

$$4B_{3,2}'' B_{4,1}'' = 4\beta''^2 \alpha''^2 (\epsilon_2/\epsilon_y - 1)(\epsilon_v/\epsilon_y - 1) \quad (\text{B-10.c})$$

La cantidad bajo la raíz en (B-9) viene dada entonces por:

$$\begin{aligned} D^2 = & \alpha''^4 (\epsilon_2/\epsilon_y - 1)^2 + \beta''^4 (\epsilon_v/\epsilon_y - 1)^2 + k_y^4 (\epsilon_2/\epsilon_y - \epsilon_v/\epsilon_y)^2 + \\ & + 2\alpha''^2 \beta''^2 (\epsilon_2/\epsilon_y - 1)(\epsilon_v/\epsilon_y - 1) - \\ & - 2\alpha''^2 k_y^2 (\epsilon_2/\epsilon_y - 1)(\epsilon_v/\epsilon_y - \epsilon_v/\epsilon_y) + \\ & + 2\beta''^2 k_y^2 (\epsilon_v/\epsilon_y - 1)(\epsilon_2/\epsilon_y - \epsilon_v/\epsilon_y) \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

Como el cristal es uniaxial, o bien es $\epsilon_2 = \epsilon_v$, o bien $\epsilon_2 = \epsilon_y$ (por definición (B-1) ϵ_v coincide con la permitividad a lo largo del eje óptico cuando éste está contenido en el plano z-x). Consideremos en primer lugar el caso en que $\epsilon_2 = \epsilon_y$. En tal caso (B-11) se reduce a un cuadrado perfecto y

$$D = (\beta''^2 - k_y^2) \cdot (\epsilon_v/\epsilon_y - 1) \quad (\text{B-12.a})$$

Usando (B-12.a), (B-10) y (B-9) podemos ahora hallar ambos autovalores:

$$\lambda_{a,1}^2 = (\beta''^2 - k_y^2) \varepsilon_v / \varepsilon_y + \alpha''^2 \quad (\text{B-13.a.1})$$

$$\lambda_{a,2}^2 = (\beta''^2 - k_y^2) + \alpha''^2 \quad (\text{B-13.a.2})$$

Conviene ahora eliminar en (B-13.a.1) las variables β'' y α'' , haciendo uso de sus expresiones en función de α y β :

$$\begin{aligned} \lambda_{a,1}^2 = & \beta^2 (\cos^2 \phi \varepsilon_v / \varepsilon_y + \sin^2 \phi) + \alpha^2 (\sin^2 \phi \varepsilon_v / \varepsilon_y + \cos^2 \phi) + \\ & + 2\alpha\beta \cos \phi \sin \phi (\varepsilon_v / \varepsilon_y - 1) - k_y^2 \varepsilon_v / \varepsilon_y \end{aligned} \quad (\text{B-14.a.1})$$

y eliminar los senos y cosenos haciendo uso de las conocidas transformaciones de $\varepsilon_v, \varepsilon_z$, (en el sistema z'', x'' de la fig. B.1), a $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{zx}$ (en el sistema z, x de la misma figura):

$$\lambda_{a,1}^2 = (\beta^2 \varepsilon_{zz} + \alpha^2 \varepsilon_{xx} + 2\alpha\beta \varepsilon_{zx} - k_y^2 \varepsilon_v) / \varepsilon_y \quad (\text{B-15.a.1})$$

También, usando (B-6) en (B-13.a.2):

$$\lambda_{a,2}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_y^2 \quad (\text{B-15.a.2})$$

Consideremos ahora el caso en que $\epsilon_2 = \epsilon_v$. En dicho caso (B-11) es también un cuadrado perfecto:

$$D = (\alpha^2 + \beta^2) (\epsilon_2 / \epsilon_y - 1) \quad (\text{B-12.b})$$

Usando (B-12.b), así como (B-6) en (B-9):

$$\lambda_{b,3}^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \epsilon_2 / \epsilon_y - k_y^2 \epsilon_2 / \epsilon_y \quad (\text{B-15.b.1})$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + k_y^2 \epsilon_2 / \epsilon_y \quad (\text{B-15.b.2})$$

Ahora bien, como en este caso es $\epsilon_{zz} = \epsilon_{xx} = \epsilon_2$, $\epsilon_{xz} = 0$, todas las expresiones (B-15) pueden resumirse en:

$$\lambda_{1,2}^2 = (\alpha^2 \epsilon_{xx} + \beta^2 \epsilon_{zz} + 2\alpha\beta \epsilon_{xz} - k_y^2 \epsilon_v) / \epsilon_y \quad (\text{B-16.1})$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 - k_y^2 \epsilon_2 / \epsilon_y \quad (\text{B-16.2})$$

donde ϵ_v y ϵ_2 son los valores principales de $\bar{\epsilon}$ en el plano z-x, y si el eje óptico está contenido en dicho plano, entonces ϵ_y debe coincidir con el valor de la permitividad a lo largo de dicho eje.

2.- Plasmas y semiconductores

La proyección del tensor de permitividades en el plano x-z $\bar{\bar{\epsilon}}_t$, para plasmas y semiconductores magnetizados según la dirección del eje "y", debe ser tal que permanezca invariante tras rotaciones en torno al eje "y", puesto que la estructura rotada es físicamente indistinguible de la estructura sin rotar. Ello implica que $\bar{\bar{\epsilon}}_t$ debe ser de la forma:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-17})$$

Para plasmas sin pérdidas, el tensor (B-17) debe ser además hermitico, es decir, ϵ_1 y ϵ_2 deben ser reales.

Usando la expresión (B-17) directamente en (VI-10), junto con el hecho de que $\bar{\bar{\epsilon}}'_t(\theta) = \bar{\bar{\epsilon}}_t$, por cuanto ambos tensores están relacionados por una rotación en torno al eje "y", la obtención de los autovalores de $\bar{\bar{B}}$ es inmediata:

$$\lambda_{1,2}^2 = (1/2) [k^2 (\epsilon_1/\epsilon_y + 1) - 2k_1^2 \pm \sqrt{k^4 (\epsilon_1/\epsilon_y - 1)^2 - 4k_2^2 (k^2 \epsilon_2/\epsilon_y - k_2^2)}] \quad (\text{B-18})$$

donde $k^2 = (\alpha^2 + \beta^2)$, $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$ y $k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$.

3.- Medios de anisotropía magnética

Para sustratos de anisotropía magnética, son aplicables las expresiones duales de (B-16) y (B-18), cambiando $\bar{\epsilon}_t$ por $\bar{\mu}_t$, ϵ_γ por μ_γ y μ_o por $\epsilon^*\epsilon_o$.

Perspectivas

APENDICE C: PERSPECTIVAS

A la finalización de la presente memoria se abren varias líneas de investigación que aprovechen el potencial de análisis y las ideas desarrolladas en ella.

La primera es extender los programas de cálculo al análisis de estructuras sobre medios girotrópicos (ferritas, plasmas y semiconductores) combinados con medios dieléctricos en estructuras multicapas (como ya advertimos en la introducción, en los ejemplos nos hemos limitado a considerar dieléctricos ideales). Dichas estructuras son de interés en el diseño de dispositivos no recíprocos (ferritas) y en el diseño de circuitos monolíticos (estructuras dieléctrico- semiconductor- dieléctrico).

Otra posibilidad es investigar las posibilidades de utilización de los algoritmos obtenidos para el cálculo de la función de Green en el análisis de los problemas de radiación asociados, tanto desde el punto de vista de las pérdidas, como desde el punto de vista del diseño de antenas planares integradas.

Una aplicación que creemos de interés de los algoritmos aquí desarrollados sería el análisis de elementos de circuito tridimensionales, tales como resonadores, giradores, etc. Para lo cual habría que considerar el desarrollo de los campos y corrientes en

Perspectivas

doble serie de Fourier, permaneciendo inalterados los algoritmos para el cálculo de la matriz de Green estática o dinámica.

Por otra parte es evidente que las ideas básicas desarrolladas en el cap.VII referentes a la descomposición del problema de N capas en problemas de una capa, para la obtención de la matriz de Green, son extensibles a medios estratificados de simetrías diferentes a la traslacional en un plano aquí considerada (cilíndrica, esférica...), sin mas que cambiar el desarrollo en integral de Fourier por los desarrollos ortogonales correspondientes a cada tipo de simetría. De ese modo, nuevas familias de estructuras se harían accesibles al análisis.

En el análisis de discontinuidades en líneas de transmisión, es fundamental el conocimiento de las características de propagación de modos superiores (modos híbridos). Un primer paso en ese sentido sería la utilización del mismo método desarrollado en el cap.VII, con un conjunto más completo de funciones base, que permita aproximar mejor las distribuciones de corriente de dichos modos.

No obstante, como ya mencionamos en el cap.V, la utilización del método de Galerkin puede tropezar aquí con serios inconvenientes, derivados de la aparición de raíces

Perspectivas

espúreas. Una nueva línea de trabajo tendría como fin el desarrollo de métodos de análisis más exactos, que resuelvan el problema sin recurrir a hipótesis previas sobre el desarrollo de las densidades de corriente en la metalizaciones, y que hagan uso al mismo tiempo de los algoritmos desarrollados para el cálculo de la matriz de Green.

Así pues, y a modo de conclusión, podemos decir que las ideas y algoritmos desarrollados en esta memoria no agotan su potencial en las aplicaciones que en ella se muestran, sino que aparecen también como interesantes puntos de partida de futuras investigaciones.

Referencias

APENDICE D: REFERENCIAS

Las siguientes referencias no pretenden ser exhaustivas, sino que son el resultado de una selección mediante la cual pretendemos citar sólo aquellos trabajos que nos han sido de utilidad, o que consideramos hacen aportaciones de interés al tema tratado.

El lector interesado en ampliar las presentes referencias puede consultar los índices anuales de las revistas especializadas, principalmente IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., IEE Proc. Pt. H, Electronic Letters e International journal of electronics.

I-Libros y artículos de interés general.

[1].-L.D.Landau and E.M.Lifshitz "Electrodinámica de los medios continuos", Fitzmatgiz (Moscu), trad. Reverté ed., 1975.

[2].-R.E.Collin "Field theory of guided waves", McGraw Hill Inc, 1960.

[3].-R.B.Adler, L.J.Chu and R.M.Fano "Electromagnetic

Referencias

- energy transmission and radiation", MIT Press ed., 1973.
- [4].-R.F.Harrington "Time-harmonic electromagnetic fields", McGraw Hill Inc., 1961.
- [5].-K.H.Panofsky and M.Phillips "Classical electricity and magnetism", Addison-Wesley, 1977.
- [6].-J.D.Jackson "Electrodinámica clásica", J.Wiley and Sons Inc., trad. Alhambra ed., 1980.
- [7].-C.C.Johnson "Field and wave electrodinamics", McGraw Hill Inc., 1965.
- [8].-E.Durand "Electrostatique (II) .-Problemes Generaux .-Conducteurs", Masson et Cie., 1966.
- [9].-R.F.Harrington "Field computation by moment methods", McMillan Co., 1968.
- [10].-R.Mittra "Computer techniques for electromagnetics", Pergamon Press Ltd., 1973.
- [11].-L.B.Felsen and N.Marcuvitz "Radiation and scattering of waves", Prentice Hall, 1973.

Referencias

- [12].-H.Howe Jr. "Stripline circuit design", Artech House Inc., 1982.
- [13].-K.C.Gupta, R.Garg, I.J.Bahl "Microstrip lines and slot-lines", Artech House Inc., 1979.
- [14].-T.C.Edwards "Foundations for microstrip circuit design", J.Wiley and Sons Ltd., 1981.
- [15].-H.Sobol "Microwave integrated circuits", en Advances in Microwaves, vol.8, pp. 1-9, Academic Press, 1974.
- [16].-R.Mittra and T.Itoh "Analysis of microstrip transmission lines", in Advances in microwaves, vol.8, pp. 67-141, Academic Press, 1974.
- [17].-R.M.Barret " Microwave printed circuits- The early years", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 983-990, Sept. 1984.
- [18].-H.Howe Jr. "Microwave integrated circuits- An historical perspective", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 991-996, Sept. 1984.
- [19].-A.A.Oliner "Historical perspectives on microwave

Referencias

field theory", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 1022-1045, Sept. 1984.

[20].-N.G.Alexopoulos "Integrated circuit structures on anisotropic substrates", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 847-881, Oct. 1985.

II-Aproximacion cuasiestática

[21].-H.A.Wheeler "Transmission-line properties of parallel wide strips by a conformal-mapping approximation", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-12, PP. 280-289, May 1964.

[22].-H.A.Wheeler "Transmission-line properties of parallel strips separated by a dielectric sheet", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-13, pp. 172-185, Mar. 1965.

[23].-H.E.Green "The numerical solution of some important transmission line problems", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-13, pp. 676-692, Sept. 1965.

Referencias

[24].-P.Silvester "TEM wave properties of microstrip transmission lines", Proc. IEE, vol. 115, pp. 43-48, Jan. 1968.

[25].-E.Yamashita and R.Mitra "Variational method for the analysis of microstrip lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-16, pp. 251-256, April 1968.

[26].-O.Taussky "Positive definite matrices and their role in the study of the characteristic roots of general matrices", Advances in Math., vol. 2, fascicle 2, pp. 175-185, New York: Academic Press, June 1968.

[27].-E.Yamashita "Variational method for the analysis of microstrip-like transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-16, pp. 529-535, Aug. 1968.

[28].-T.G.Bryant and J.A.Weiss, "Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-16, pp.1021-1027, Dec.1968.

[29].-Y.Chang and I.C.Chang "Simple method for the variational analysis of a generalised N-dielectric-layer transmission line", Electron. Letters, vol. 6, pp. 49-50,

Referencias

Feb. 1970.

[30].-R.Mittra and T.Itoh "Charge and potential distributions in shielded striplines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-18, pp. 149-156, March. 1970.

[31].-Y.Chang "Extension of Chang and Chang's method to analysis of generalised multilayer and multiconductor transmission-line system", Electron. Letters, vol. 7, pp. 45-47, Jan. 1971.

[32].-K.D.Marx "Propagation modes, equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-21, pp. 450-457, July 1973.

[33].-L.J.Peter Linnér "A method for the computation of the characteristic immittance matrix of multiconductor striplines with arbitrary widths", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-22, pp. 930-937, Nov. 1974.

[34].-V.K.Tripathi "Asymmetric coupled transmission lines in an inhomogeneous medium", IEEE Trans. Microwave Theory

Referencias

and Tech., vol. MTT-23, pp. 734-739, Sept. 1975.

[35].- A.F.dos Santos and J.P.Figanier "The method of series expansion in the frequency domain applied to multidielectric transmission lines" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 753-756, Sept. 1975.

[36].-M.Kobayashi "Green's function in a region with inhomogeneous isotropic dielectric media", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 760-762, Sept. 1975

[37].-T.Hatsuda "Computation of coplanar-type strip-line characteristics by relaxation method and its application to microwave circuits", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 795-802, Oct. 1975.

[38].-G.M.L.Gladwell and S.Cohen "A Chebyshev approximation method for microstrip problems", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 865-870, Nov. 1975.

[39].-R.A.Speciale "Even- and odd-mode waves for non-symmetrical coupled lines in nonhomogeneous media", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 897-908, Nov. 1975.

Referencias

- [40].-R.P.Owens "Quasi-static characteristics of microstrip on an anisotropic sapphire substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 499-505, Aug. 1976.
- [41].-M.Kobayashi and R.Terakado "General form of Green's function for multiayer microstrip line with rectangular side walls", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 626-628, Sept. 1976
- [42].-N.G.Alexopoulos, S.Ferner and C.M.Krowne "Dispersionless coupled microstrip over fused silica-like anisotropic substrates", Electron. Letters, vol. 12, pp. 579-580, Oct. 1976.
- [43].-C.M.Krowne "Microstrip transmission lines on pyrolytic boron nitride", Electron. Letters, vol. 12, pp. 624-625, Nov. 1976.
- [44].-B.T.Szentkuti "Simple analysis of anisotropic microstrip lines by a transform method", Electron. Letters, vol. 12, pp. 672-673, Dec. 1976.
- [45].-E.Yamashita, K.Atsuki and T.Mori "Application of MIC formulas to a class of integrated-optics modulator



Referencias

analysis: A simple transformation" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-25, pp. 146-150, Feb. 1977.

[46].-H.A.Wheeler "Transmission-line properties of a strip on a dielectric sheet on a plane", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-25, pp. 631-647, Aug. 1977.

[47].-R.Crampagne, M.Admapanah and J-L. Giraud "A simple method for determining the Green's function for a large class of MIC lines having multilayered dielectric structures", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 82-87, Feb. 1978.

[48].-M.Kobayashi "Analysis of the microstrip and the electrooptic light modulator", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 119-126, Feb. 1978.

[49].-N.G.Alexopoulos and C.M.Krowne "Characteristics of single and coupled microstrips on anisotropic substrates", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp.387-393, June 1978.

[50].-K.Araky and Y.Naito "Upper bound calculations on capacitance of microstrip line using variational method and spectral domain approach", IEEE trans. Microwave Theory

Referencias

and Tech., vol. MTT-26, pp. 506-509, July 1978.

[51].-M.Kobayashi "Green's function technique for solving anisotropic electrostatic field problems", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 510-512, July 1978.

[52].-T.Itoh "Generalized spectral domain method for multiconductor printed lines and its application to turnable suspended microstrips", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 983-987, Nov. 1978.

[53].-H.A.Wheeler "Transmission-line properties of a strip line between parallel planes", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 866-876, Nov. 1978.

[54].-S.Kusase and R.Terakado "Mapping theory of two dimensional anisotropic regions", IEEE Proc., vol. 67, pp. 171-172, Jan. 1979.

[55].-M.Kobayashi and R.Terakado "New view on an anisotropic medium and its application to transformation from anisotropic to isotropic problems", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-27, pp. 769-775, Sept. 1979.

Referencias

- [56].-K.K.Joshi, J.S.Rao and B.N.Das "Analysis of inhomogeneously filled stripline and microstripline", IEE Proc., vol. 127, pt. H, pp. 11-14, Feb. 1980.
- [57].-E.F.Kuester and D.C.Chang "Closed-form expressions for the current or charge distribution on parallel strips or microstrip", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 254-259, March 1980.
- [58].-I.J.Bahl and P.Bhartia "Characteristics of inhomogeneous broadside-coupled striplines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 529-535, June 1980.
- [59].-M.Kobayashi and R.Terakado "Method for equalizing phase velocities of coupled microstrip lines by using anisotropic substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 719-722, July 1980
- [60].-M.Horno "Quasistatic characteristics of microstrip on arbitrary anisotropic substrates", IEEE Proc., vol. 68, pp. 1033-1034, Aug. 1980.
- [61].-I.V.Lindell "On the quasi-TEM modes in inhomogeneous multiconductor transmission lines", IEEE Trans. Microwave

Referencias

- Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 812-817, Aug. 1981.
- [62].-T.Kitazawa and Y.Hayashi "Coupled slots on an anisotropic sapphire substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 1035-1040, Oct. 1981.
- [63].-S.K.Koul and B.Bhat "Propagation parameters of coupled microstrip-like transmission lines for millimeter-wave applications", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 1346-1369, Dec. 1981.
- [64].-M.Horno "Upper and lower bounds on capacitances of coupled microstrip lines with anisotropic substrates" IEE Proc., vol. 129, pt. H, pp. 89-93, June 1982.
- [65].-T.Kitazawa, H.Kumagami and Y.Hayashi "Unsymmetric broadside-coupled striplines" Electron. Letters, vol. 18, pp. 425-426, May 1982.
- [66].-H.Shibata, S.Minakawa and R.Terakado "Analysis of the shielded strip transmission line with an anisotropic medium", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 1264-1267, Aug. 1982.
- [67].-R.Marqués "Un nuevo algoritmo para la determinación

Referencias

de los parámetros quasi-estáticos de microtiras simples y acopladas", Tesina de Licenciatura, Sevilla, Junio 1983.

[68].-F.Medina "Análisis variacional en el dominio espectral de los parámetros cuasiestáticos de microtiras encapsuladas con substratos anisótropos", Tesina de Licenciatura, Sevilla, Sept. 1983.

[69].-S.K.Koul and B.Bhat "Generalized analysis of microstrip-like transmission lines and coplanar strips with anisotropic substrates for MIC, electrooptic modulator and SAW application", IEEE Trans. Microwave Theory and tech., vol. MTT-31, pp. 1051-1058, Dec. 1983.

[70].-M.Horno and R.Marqués "Coupled microstrips on double anisotropic layers", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 467-470, April 1984.

[71].-B.N.Das and K.V.S.V.R.Prasad "A Generalized formulation of electromagnetically coupled striplines", IEEE Trans. Microwave Theory and tech., vol. MTT-32, pp. 1427-1433, Nov. 1984.

[72].-R.Marqués, M.Horno and F.Medina "A new recurrence method for determining the Green's function of planar

Referencias

structures with arbitrary anisotropic layers", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 424-428, May 1985.

[73].-F.Medina and M.Horno "Upper and lower bounds on mode capacitances for a large class of anisotropic multilayered microstrip-like transmission lines", IEE Proc., vol. 132, pt. H, pp. 157-163, June 1985. Ver también corrección en IEEE-MTT-34, p. 746.

[74].-R.Marqués and M.Horno "Propagation of quasi-static modes in anisotropic transmission lines: Application to MIC lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp.927-932, Oct. 1985.

[75].-F.Medina and M.Horno "Determination of Green's function matrix for multiconductor and anisotropic multidielectric planar transmission lines: A variational approach", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp.933-940, Oct. 1985.

Referencias

III.-Análisis en frecuencia

[76].-L.Lewin "The use of singular integral equations in the solution of waveguide problems", in Advances in Microwaves, vol. 1, pp. 212-284, Academic Press, 1966.

[77].-J.S.Hornsby and A.Grophinat "Fourier analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line", Electronic Letters, vol. 5, no. 12, pp. 265-267, June 1969.

[78].-J.S.Hornsby and A.Grophinat "Numerical analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line.- Finite difference methods", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-17, pp. 684-690, Sept. 1969

[79].-S.B.Cohn "Slot-line on a dielectric substrate" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-17, pp. 786-778, Oct. 1969.

[80].-E.J.Denlinger "A frequency dependent solution for microstrip transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-19, pp. 30-39, Jan. 1971.

[81].-R.Mitra and T.Itoh "A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines",

Referencias

IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-19, pp. 47-56, Jan. 1971

[82].-T.Itoh and R.Mittra "Dispersion characteristics of slot-lines", Electronic Letters, vol. 7, no.13, pp. 364-365, July 1971.

[83].-W.J.Getsinger "Microstrip dispersion model" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-21, pp. 34-39, Jan. 1973.

[84].-H.J.A.Larriviere and J.B.Davies "The solution of eletromagnetic eigenvalues problems by least squares boundary residuals" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 436-441, May 1975.

[85].-J.B.Knorr and K.D.Kuchler "Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 541-548, July 1975.

[86].-J.F.Knorr and A.Tufekciuglu "Spectral domain calculation of microstrip characteristic impedance" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-23, pp. 725-728, Sept. 1975.

Referencias

- [87].-M.Kobayashi "Reciprocity theorem for a region with inhomogeneous bianisotropic media and surface impedance", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 114-116. Feb. 1976.
- [88].-E.Yamashita and Z.Atsuki "Analysis of microstrip-like transmission lines by nonuniform discretization of integral equations", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 195-200, April 1976.
- [89].-A.Farrar and A.T.Adams "Computation of propagation constants for the fundamental and higher order modes in microstrip", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 456-460, July 1976.
- [90].-T.C.Edwards and R.P.Owens "2-18-GHz dispersion measurements on 10-100-ohms microstrip lines on sapphire", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 506-513, Aug. 1976.
- [91].-N.Samardzija and T.Itoh "Double-layered slot line for millimeter wave integrated circuits", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-24, pp. 827-831, Nov. 1976.

Referencias

- [92].-J.B.Davies and D.Mirshekar-Syahkal "Spectral domain solution of arbitrary coplanar transmission line with multilayer substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-25, pp. 143-146, Feb. 1977.
- [93].-P.K.Saha "Dispersion in shielded planar transmission lines on two-layer composite substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-25, pp. 907-911, Nov. 1977.
- [94].-B.Bianco, L.Panini, M.Parodi and S.Ridella "Some considerations about the frequency dependence of the characteristic impedance of uniform microstrips", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 182-185, March 1978.
- [95].-Y.L.Chow and I.N.El-Behery "An approximate dynamic spatial Green's function for microstriplines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-26, pp. 978-983, Dec. 1978.
- [96].-W.J.Getsinger "Microstrip characteristic impedance", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-27, p. 293, April 1979.

Referencias

- [97].-D.Mirshekar-Syahkal and J.B.Davies "Accurate solution of microstrip and coplanar structures for dispersion and for dielectric and conductor losses", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-27, pp. 694-699, July 1979.
- [98].-F.Arndt and G.U.Paul "The reflection definition of the characteristic impedance of microstrips", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-27, pp. 724-731, Aug. 1979.
- [99].-E.I.Nefedov, N.P.Santalov and A.T.Fialkovskii "Dispersion characteristics of nonradiating modes of microstrip waveguides", Radiotekh. Elecktron., vol. 24, pp. 17-23, 1979. (en ruso, trad. inglesa en Radio Eng. Electron. Phis., vol. 24, no. 1).
- [100].-B.Bianco, M.Parodi and S.Ridella "Comments on 'Microstrip characteristic impedance'", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, p. 152, Feb. 1980.
- [101].-W.J.Getsinger "Response to comments on 'Microstrip characteristic impedance'", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, p. 152, Feb. 1980.

Referencias

[102].-T.Kitazawa, Y.Hayashi and M.Suzuki "Analysis of the dispersion characteristics of slot line with thick metal coating", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 387-392, April 1980.

[103].-Y.L.Chow "An approximate dynamic Green's function in three dimensions for finite length microstripline", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 393-397, April 1980.

[104].-T.Itoh "Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 733-736, July 1980.

[105].-J.B.Knorr and P.M.Shayda "Millimeter-wave fin-line characteristics", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 737-743, July 1980.

[106].-L.P.Schmidt and T.Itoh "Spectral domain analysis of dominant and higher order modes in fin-lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 981-985, Sept. 1980.

[107].-Y.C.Shih and W.J.R.Hoefer "Dominant and second-order

Referencias

mode cutoff frequencies in fin-lines calculated with a two-dimensional TLM program", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-28, pp. 1443-1448, Dec. 1980.

[108].-A.M.A.El-Sherbiny "Exact analysis of shielded microstrip lines and bilateral fin-lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 669-675, July 1981.

[109].-R.Simons "Suspended slot line using double layer dielectric", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 1102-1107, Oct. 1981.

[110].-A.M.A.El-Sherbiny "Hybrid mode analysis of microstrip lines on anisotropic substrates", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-29, pp. 1261-1265, Dec. 1981.

[111].-R.N.Simons "Suspended broadside-coupled slot line with overlay", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 76-81, Jan. 1982.

[112].-A.M.A.El-Sherbiny "Millimeter-wave performance of shielded slot-lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 750-756, May 1982.

Referencias

[113].-D.Mirshekar-Syahkal and J.B.Davies "Accurate analysis of coupled strip-finline structure for phase constant, characteristic impedance, dielectric and conductor losses", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 906-910, June 1982.

[114].-H.Lee and V.J.Tripathi "Spectral domain analysis of frequency dependent propagation characteristics of planar structures on uniaxial medium", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 1188-1192, Aug. 1982.

[115].-A.M.K.Saad and K.Schunemann "Closed form approximations for fin-line eigenmodes", IEE Proc. Pt.H, vol. 129, pp. 253-261, Oct. 1982.

[116].-A.K.Saad and K.Schunemann "Efficient eigenmode analysis for planar transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-30, pp. 2125-2131, Dec. 1982.

[117].-T.Kitazawa and Y.Hayashi "Propagation characteristics of striplines with multilayered anisotropic media", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-31, pp. 429-433, June 1983.

Referencias

- [118].-A.K.Sharma and W.J.R.Hoefer "Propagation in coupled unilateral and bilateral finlines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-31, pp. 498-502, June 1983.
- [119].-W.J.Getsinger "Measurement and modeling of the apparent characteristic impedance of microstrip", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-31, pp. 624-632, Aug. 1983.
- [120].-T.Sphicopoulos, V.Teodoridis and F.Gardiol "Tractable form of the dyadic green function for application to multilayered isotropic media", Electronic Letters, vol. 19, no.24, pp. 1055-1057, Nov. 1983.
- [121].-K.Kawano "Hybrid mode analysis of a broadside-coupled microstrip line", IEE Proc. Pt. H, vol. 131, pp. 21-24, Feb. 1984.
- [122].-S.B.Worm and R.Pregla "Hybrid-mode analysis of arbitrarily shaped planar microwave structures by the method of lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 191-196, Feb. 1984.
- [123].-H.Diestel and S.R.Worm "Analysis of hybrid field problems by the method of lines with nonequidistant

Referencias

discretization", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 633-638, June 1984.

[124].-H.C.C.Fernandes and A.J.Giarola "Dispersion in unilateral fin lines with two dielectric layers", IEE Proc. Pt. H, vol. 131, pp. 139-142, June 1984.

[125].-R.Vahldieck "Accurate hybrid-mode analysis of various finline configurations including multilayered dielectrics, finite metallization thickness, and substrate holding grooves", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 1454-1460, Nov. 1984.

[126].-T.Kitazawa and R.Mitra "Analysis of finline with finite metallization thickness", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 1484-1487, Nov. 1984.

[127].-C.M.Krowne "Fourier transformed matrix method of finding propagation characteristics of complex anisotropic layered media", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-32, pp. 1617-1625, Dec. 1984.

[128].-A.S.Omar and K.Schunemann "Space domain decoupling of LSE and LSM fields in generalized planar guiding structures", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.,

Referencias

- vol. MTT-32, pp. 1626-1632, Dec. 1984.
- [129].-J.L.Tsalamengas and N.K.Uzunoglu "Radiation from a dipole in the proximity of a general anisotropic grounded layer", IEEE Antennas and Propag., vol. AP-33, pp. 165-172, Feb. 1985.
- [130].-T.Kitazawa and R.Mitra "Analysis of asymmetric coupled striplines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 643-646, July 1985.
- [131].-T.Sphicopoulos, V.Teodoridis and F.E.Gardiol "Dyadic Green function for the electromagnetic field in multilayered isotropic media: An operator approach", IEE Proc. Pt.H, vol. 132, pp. 329-334, Aug. 1985.
- [132].-M.Kobayashi "Longitudinal and transverse current distributions on microstriplines and their closed-form expression", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 784-788, Sept. 1985.
- [133].-G.E.Mariki and C.Yeh "Dinamic three-dimensional TLM analysis of microstriplines on anisotropic substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 789-799, Sept. 1985.

Referencias

- [134].-H.Y.Yee "Transverse modal analysis of printed circuit transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 808-816, Sept. 1985.
- [135].-W.J.R.Hoefer "The transmission-line matrix method-Theory and applications", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 882-893, Oct. 1985.
- [136].-R.Vahldieck and J.Bornemann "A modified mode-matching technique and its application to a class of quasi-planar transmission lines" IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 916-925, Oct. 1985.
- [137].-J.T.Tsalamengas, K.Uzunoglu and N.Alexopoulos "Propagation characteristics of a microstrip line printed on a general anisotropic substrate", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 943-945, Oct. 1985.
- [138].-H.Mizuno, C.J.Verver, R.Douville and M.G.Stubbs "Propagation in broadside-coupled suspended-substrate stripline in E- plane", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 946-951, Oct. 1985.
- [139].-A.S.Omar and K.Schunemann "Formulation of the singular integral equation technique for planar

Referencias

transmission lines", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 1313-1322, Dec. 1985.

[140].-A.Nakatani and N.Alexopoulos "Toward a generalized algorithm for the modeling of the dispersive properties of integrated circuit structures on anisotropic substrates", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, pp. 1436-1441, Dec. 1985.

[141].-J.Bornemann and F.Arndt "Calculating the characteristic impedance of finlines by transverse resonance method", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-34, pp. 85-92, Jan. 1986.

[142].-H.Baudrand, M.Boussouis and J.L.Amalric "Analysis of some planar structures by the least-squares boundary residual method", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-34, pp. 298-301, Feb. 1986.

[143].-E.E.Hassan "Field solution. polarization, and eigenmodes of shielded microstrip transmission line", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-34, pp. 845-852, Aug. 1986.

[144].-R.Marqués and M.Horno "Dyadic Green's function for



Referencias

microstrip- like transmission lines on a large class of anisotropic substrates", IEE Proc. Pt. H, vol. 133, pp. 450-454. Dec. 1986

[145].-R.Marqués and M.Horno "On the spectral dyadic Green's function for stratified linear media. Application to multilayered MIC lines with anisotropic substrates", (por aparecer en IEE Proc. pt.H).

[146].-M.Horno and F.Medina "Multilayer planar structures for high-directivity coupler design". IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-34, pp. 1442-1449, Dec. 1986.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes,
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. Ricardo Marqués Sillero
titulada Ahortación y el análisis de líneas
de transmisión de corriente alterna
en medios locales estroboscópicos
acordó otorgarle la calificación de APTO "Cum LAUDE"

Sevilla,

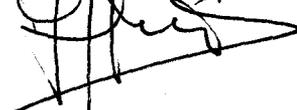
3

de

Julio

1987

El Vocal,



El Vocal,



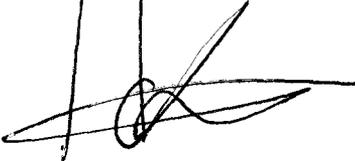
El Vocal,



El Presidente



El Secretario,



El Doctorado,

