DEPARTAMENTO DE
ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

NUEVOS RESULTADOS DE CONTROL PARA ALGUNOS PROBLEMAS PARABÓLICOS ACOPLADOS NO LINEALES: CONTROLABILIDAD Y CONTROLES INSENSIBILIZANTES

Memoria presentada por
Rosario Pérez García
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Sevilla, Mayo 2004.

V.B. del Director:

Fdo.: Rosario Pérez García

Fdo.: Dr. D. Manuel González Burgos
Profesor Titular
de la Universidad de Sevilla.

Índice general

Notaciones

$\mathbb{R}^N$: Espacio Euclídeo N–dimensional.

$\cdot$: Producto escalar Euclídeo. Dados $A = \{A_{ij}\}$ y $B = \{B_{ij}\}$, se recurrirá a la notación $A : B = \sum\limits_{i,j} A_{ij}B_{ij}$.

$|\cdot|$: Norma Euclídea habitual en $\mathbb{R}^N$.

Ω : Abierto de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: Frontera del abierto Ω.

$\overline{\Omega}$: Adherencia de Ω.

$\subset\subset$: Inclusión estricta de conjuntos; $\Omega' \subset\subset \Omega$ equivale a decir que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

γ, Γ : Abiertos relativos de $\partial\Omega$.

$(0, T)$, con $T > 0$: Intervalo temporal de observación.

$Q = \Omega \times (0, T)$.

$\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$.

$\mathbf{1}_\omega$: Función característica del conjunto ω.

∇ : Operador gradiente.

Δ : Operador Laplaciano.

$\nabla\cdot$: Operador divergencia.

$n = n(x)$: Vector normal unitario en el punto $x \in \partial\Omega$ orientado hacia el exterior de Ω.

∂_t : Derivada parcial respecto de t.

∂_n : Derivada en la dirección n.

sop : Soporte de una función.

dx : Elemento de volumen para la integración de Lebesgue habitual en $\mathbb{R}^N$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: Espacio vectorial de las funciones "test" habituales, de clase $C^\infty(\Omega)$ y de soporte compacto contenido en Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: Espacio de las distribuciones sobre Ω, es decir, aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathbb{R}$ (para la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(\Omega)$).

$L^p(\Omega)$: Espacio de Banach de las (clases de) funciones de Ω en $\mathbb{R}$, medibles y p–sumables.

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$: Espacio de Fréchet de las (clases de) funciones localmente p–sumables, i.e.: p–sumables en cada compacto $K \subset \Omega$.

$W^{m,p}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$: Espacio de Banach de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$, cuyas derivadas en $\mathcal{D}'(\Omega)$ de orden $\leq m$ son también de $L^p(\Omega)$.

$W^{m,p}_0(\Omega)$: Cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ y $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{r;\Omega}$ (resp. $\|\cdot\|_{r;Q}$): Norma en $L^r(\Omega)$ (resp. en $L^r(Q)$), para $r \in [1,\infty)$.

$\|\cdot\|_\infty$: Norma en $L^\infty(Q)$ o en $L^\infty(Q)^N$.

$\|\cdot\|_{\infty;\Sigma}$: Norma en $L^\infty(\Sigma)$.

Sea B un espacio de Banach.

$\|\cdot\|_B$: Norma en B.

$L^p(B) \equiv L^p(0,T;B)$: Espacio de Banach de las (clases de) funciones $f : [0,T] \mapsto B$ medibles y tales que la función $t \in [0,T] \mapsto \|f(t)\|_B$ (definida c.p.d., i.e.: casi por doquier) es p–sumable.

$C([0,T];B)$: Espacio de Banach de las funciones $f : [0,T] \mapsto B$ que son continuas.

Sean $r \in [1,\infty)$, $\delta \in [0,T)$ y un abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ arbitrarios.

$X^r(\delta,T;\mathcal{V}) = \{u : u \in L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V})),\ \partial_t u \in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))\}$, que es un espacio de Banach dotado de su norma natural $\|u\|_{X^r(\delta,T;\mathcal{V})} = \|u\|_{L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V}))} + \|\partial_t u\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}$.

$X^r = \{u : u \in L^r(0,T;W^{2,r}(\Omega) \cap W^{1,r}_0(\Omega)),\ \ \partial_t u \in L^r(Q)\}$. La norma en él se denotará por $\|\cdot\|_{X^r}$.

$$Z_r = \begin{cases} L^r(0,T;W^{1,r}_0(\Omega)) & \text{si} \quad r \in \left[2, \dfrac{N}{2}+1\right], \\ C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0,T;W^{1,r}_0(\Omega)) & \text{si} \quad r > \dfrac{N}{2}+1. \end{cases}$$

Sean $\beta \in (0,1)$ y $u \in C^0(\overline{Q})$.

$$[u]_{\beta,\frac{\beta}{2}} = \sup_{\substack{\overline{Q} \\ x\neq x'}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^{\beta}} + \sup_{\substack{\overline{Q} \\ t\neq t'}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{\beta}{2}}}.$$

$C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : [u]_{\alpha,\frac{\beta}{2}} < \infty\right\}$, que es un espacio de Banach con su norma natural $|u|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} = \|u\|_\infty + [u]_{\beta,\frac{\beta}{2}}$.

$$C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \sup_{\overline{Q}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{1+\beta}{2}}} < \infty\right\}.$$

$$C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \partial_t u \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\right\}.$$

$$C^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \partial_t u \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})\right\}.$$

$|\cdot|_{n+\beta,\frac{n+\beta}{2};\overline{Q}}$: Norma en el espacio de Banach $C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{Q})$, $n = 1,2,3$.

$C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{\Sigma})$: Espacio de Banach formado por las restricciones a $\overline{\Sigma}$ de las funciones de $C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{Q})$, $n = 1,2,3$.

$|\cdot|_{n+\beta,\frac{n+\beta}{2};\overline{\Sigma}}$: Norma en el espacio de Banach $C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{\Sigma})$, $n = 1,2,3$.

$\|\cdot\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}$: Norma en el espacio $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

$\|\cdot\|_{L^2(H_0^1)\cap C(L^2)}$: Norma en el espacio $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

$\|\cdot\|_{L^2(0,T;H^2\cap H_0^1)\cap C(H_0^1)}$: Norma en el espacio $L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$.

$f * g$: Convolución de f con g.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: Producto de dualidad genérico entre un espacio de Banach y su dual.

$\hookrightarrow$: Inyección continua.

$\rightrightarrows$: Inyección compacta.

Introducción

En la presente Memoria se analizan diversos problemas de controlabilidad relacionados con sistemas parabólicos no lineales acoplados.

De manera general, un problema de controlabilidad puede formularse de la siguiente forma: Supongamos dado un sistema de estado gobernado por una EDP (o sistema de EDPs) que evoluciona en un intervalo temporal $[0, T]$ junto con determinadas condiciones inicial y de contorno. Supongamos que es posible actuar sobre el sistema desde el exterior mediante una función control que se toma en un conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ de controles admisibles. Fijado $v \in \mathcal{U}_{ad}$, llamaremos estado asociado al control v a la correspondiente solución $y_v = y_v(t)$ del sistema de estado. Dados y_0 e y_d en determinado espacio de Banach H donde la ecuación de estado tiene sentido, estamos interesados en "conducir" el sistema desde y_0 en $t = 0$ hasta y_d en $t = T$, es decir, queremos encontrar un control v tal que

$$y_v(T) = y_d.$$

Si esto es posible para cualesquiera $y_0, y_d \in H$, diremos que el sistema es *exactamente controlable* en H en el instante T. Si, como se pone de manifiesto en muchos ejemplos, la condición anterior es demasiado restrictiva, es natural relajarla reemplazándola por

$$y_v(T) \text{ pertenece a un entorno "pequeño" de } y_d.$$

Si esto es posible, diremos que el sistema es *aproximadamente controlable* en H en el instante T. Por otro lado, diremos que el sistema es *exactamente controlable a trayectorias* en el instante T si para cualquier $y_0 \in H$ y cualquier trayectoria y^* acotada y definida en $[0, T]$ (asociada a ciertos $y_0^* \in H$ y $v^* \in \mathcal{U}_{ad}$) existe un control v tal que el correspondiente estado y_v satisface

$$y_v(T) = y^*(T).$$

Finalmente, diremos que el sistema es *exactamente controlable a cero* en el instante T si para cualquier y_0 en H existe un control v tal que el estado y_v asociado a v verifica

$$y_v(T) = 0.$$

El objetivo principal de la Memoria es aportar nuevos resultados de controlabilidad para algunos sistemas parabólicos acoplados no lineales cuando ejercemos un control distribuido que actúa en una única ecuación del sistema a través de un abierto arbitrariamente pequeño contenido en el dominio. Nos centraremos principalmente en analizar la controlabilidad exacta a cero (y aproximada) de sistemas de dos ecuaciones del calor acopladas (lineales o semilineales), para distintos tipos de condiciones de contorno, cuando hay un único control, mientras que queremos conducir a cero (o tan próximo como queramos a un estado deseado), bien la variable sobre la cual el control no actúa directamente, bien las dos variables que intervienen. Este problema es más difícil que el problema de controlabilidad nula para una sola ecuación del calor (lineal o semilineal) puesto que, incluso en el caso lineal, surgen dificultades adicionales que provienen del acoplamiento de las dos ecuaciones.

Es bien conocido que la controlabilidad exacta a cero de un sistema parabólico lineal equivale, básicamente, a probar la llamada *desigualdad de observabilidad* para las soluciones del sistema adjunto asociado, desigualdad que se deduce de una *estimación global de tipo Carleman* para estas mismas soluciones. Para probar la controlabilidad nula de un sistema parabólico lineal acoplado mediante un solo control tenemos que obtener una desigualdad de tipo Carleman que nos permita acotar todos los términos que aparecen a la izquierda en las estimaciones usuales de Carleman para las soluciones del sistema adjunto (acoplado) en función, únicamente, de una de las variables intervinientes "localizada" en un subconjunto del abierto de control. La primera desigualdad de tipo Carleman para este tipo de sistemas fue probada por L. de Teresa en [51] para dos ecuaciones del calor lineales (con términos de orden cero) acopladas. En [2], los autores prueban, con una técnica diferente, una desigualdad de tipo Carleman para un nuevo sistema lineal acoplado llamado modelo (lineal) de campo de fases. Las estimaciones de tipo Carleman que probamos en el Capítulo 1 de la Memoria generalizan las obtenidas en [51] y [2] a sistemas lineales acoplados más generales y jugarán un papel fundamental en la demostración de los resultados principales que presentamos.

Para estudiar la controlabilidad nula de sistemas no lineales, una estrategia ya clásica, introducida por E. Zuazua en [54] en el contexto de la ecuación semilineal de ondas, se basa en combinar un resultado de controlabilidad nula para el correspondiente sistema linealizado y un argumento adecuado de punto fijo (véanse también [53], [56], [19], [24], [51],...). La presencia de no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito hace necesaria la construcción de "buenos" controles junto con estimaciones de los mismos respecto del tamaño de los datos del problema. En [5] y [24], los autores introducen dos técnicas diferentes para la construcción de controles regulares en el caso de una sola ecuación del calor. En el Capítulo 3 de la Memoria desarrollamos una estrategia alternativa a las introducidas en [5] y [24] que permite abordar el estudio, más complejo, de la controlabilidad nula de sistemas acoplados superlineales.

Motivación y objetivos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) un dominio acotado con $\partial\Omega$ de clase C^2 (al menos) y pongamos $Q = \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, con $T > 0$ dado. Consideramos asimismo un abierto no vacío $\omega \subset \Omega$ arbitrariamente pequeño, el *abierto de control*.

• Uno de los problemas que abordamos extensamente en la Memoria es la *insensibilización de un funcional* asociado a un sistema de estado, problema estrechamente relacionado con la controlabilidad nula de sistemas acoplados que fue formulado por primera vez por el Profesor J.-L. Lions en [42]. Para fijar ideas, consideremos una ecuación del calor semilineal

$$\partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \text{ en } Q, \tag{1}$$

donde f es una función de clase C^1 y globalmente Lipschitziana definida sobre $\mathbb{R}$, $\xi \in L^2(Q)$ es una fuente de calor dada y $v \in L^2(Q)$ es una función control por determinar. Para simplificar la exposición, supondremos aquí que

$$y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \tag{2}$$

pero, de hecho, pueden darse otro tipo de condiciones de contorno. Supongamos que la condición inicial es parcialmente conocida, es decir, podemos escribir

$$y(x, 0) = y_0(x) + \tau\, \hat{y}_0(x) \text{ en } \Omega, \tag{3}$$

donde y_0 es un valor conocido que aproxima el valor de $y(\cdot, 0)$ y $\tau\hat{y}_0$ es el error (desconocido) que afecta a esta aproximación. Aquí, $\hat{y}_0$ representa una función de norma uno (por ejemplo, en el espacio de funciones de cuadrado integrable, $L^2(\Omega)$) y τ es un número real desconocido que se supone pequeño.

Nos planteamos si sería posible actuar sobre el sistema (acción humana) para obtener mediciones en cierta región del dominio que sean independientes de las incertidumbres en las condiciones iniciales. Más precisamente, sea $\mathcal{O} \subset \Omega$ un abierto no vacío (*abierto de observación*) y consideremos el funcional Φ definido por

$$\Phi(y(x, t; \tau, v)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x, t; \tau, v)|^2 \, dx\, dt, \tag{4}$$

donde $y = y(\cdot, \cdot; \tau, v)$ es la solución de (1)–(3) asociada a τ y a v. Este funcional es uno de los "ejemplos modelo" propuesto en [42] y el considerado en los posteriores trabajos sobre problemas de insensibilización, aunque hay otras "mediciones" posibles. El problema de "insensibilizar" el funcional Φ consiste en buscar un control v que actúe lo menos posible sobre el sistema (de ahí que se concentre sobre un abierto, ω, que puede ser muy pequeño) y tal que la energía del sistema (1)–(3) en el abierto de observación $\mathcal{O}$ sea localmente insensible a las pequeñas perturbaciones, $\tau\hat{y}_0$, en la condición inicial. Más precisamente, se tiene la siguiente:

Definición *(Definición 2.1, p. 45) Decimos que un control* v *insensibiliza el funcional* Φ *dado por* (4) *si se verifica*

$$\left.\frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega) \ \textit{con} \ \|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1. \tag{5}$$

En [42] y [8] se prueba que, en este marco, un control v insensibiliza el funcional Φ definido en (4) si y sólo si v resuelve el problema "no estándar" de controlabilidad exacta a cero:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + f'(y)q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{8}$$

Así, en problemas de insensibilización estamos en presencia de un problema de controlabilidad nula para un sistema en cascada donde el control no actúa directamente sobre la EDP que verifica la función que queremos conducir a cero después de un intervalo de tiempo de longitud T, sino que actúa indirectamente, a través de y. El problema a analizar es más difícil que el problema de controlabilidad nula para una sola ecuación del calor (lineal o semilineal) debido a que surgen dificultades adicionales que provienen del acoplamiento de las dos ecuaciones.

Este problema ha sido estudiado en [8] y [51] para no linealidades globalmente Lipschitzianas y condiciones de contorno de tipo Dirichlet cuando $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. En primer lugar, en [8] los autores relajaron el problema planteado y probaron la existencia de los llamados *controles ε–insensibilizantes* (ver (2.6), p. 46) para condiciones, tanto inicial como de contorno, parcialmente conocidas (y cualquier y_0 en $L^2(\Omega)$). Un resultado similar se demostró en [52] en el caso de dominios Ω no acotados. En [51] se probó, por un lado, que no podemos esperar la existencia de controles insensibilizantes para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$ cuando $\Omega \setminus \overline{\omega} \neq \emptyset$, incluso si $f \equiv 0$. Por otro lado, para $y_0 = 0$, L. de Teresa demostró, bajo hipótesis adecuadas sobre ξ, la existencia de controles tales que se verifica la condición de insensibilización (5) (véase el Teorema 1, p. 42, [51]). Serán hipótesis esenciales en lo sucesivo que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ (tanto para la existencia de controles insensibilizantes como ε–insensibilizantes) y que el dato inicial y_0 sea nulo (para la existencia de controles insensibilizantes).

A la vista de los resultados conocidos sobre controlabilidad nula para una sola ecuación del calor semilineal (cf. [19], [56], [5], [24], [17],...), nuestro principal objetivo fue, en principio, extender el Teorema 1 de [51] a no linealidades más generales: primero, a no linealidades de la forma $f(y, \nabla y)$, con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ globalmente Lipschitziana, y seguidamente a no linealidades de la forma $f(y)$ ó $f(y, \nabla y)$ con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Como segundo objetivo, nos propusimos generalizar el mencionado resultado al caso en que se consideran otro tipo de condiciones de contorno, en concreto, al caso de condiciones de contorno (lineales o no lineales) de tipo Fourier (o Robin). Nos planteamos finalmente estudiar la existencia de controles ε–insensibilizantes (y, a ser posible, insensibilizantes) en el caso del sistema de Stokes y otros problemas parabólicos. La discusión de estos problemas es abordada en los Capítulos 2 y 3 de la Memoria.

• Nos interesamos seguidamente en la investigación de las propiedades de controlabilidad de un nuevo sistema parabólico acoplado no lineal, conocido como *sistema de campo de fases*, cuando controlamos solamente a través de una de las ecuaciones. Los modelos de campo de fases proporcionan una descripción matemática para problemas de frontera libre asociados a una amplia clase de procesos físicos que transcurren con una transición de fases, entre los que se incluyen los *procesos de solidificación* y *fusión*.

Hasta lo que conocemos, los únicos resultados en la literatura relacionados con la controlabilidad de un sistema no lineal de campo de fases con un único control son los probados en [2]. En este trabajo se considera un sistema de campo de fases de la forma:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $h \in C^1(\mathbb{R})$, (u_0, ϕ_0) es conocido en un espacio apropiado y $v \in L^2(Q)$ (al menos) es un control por determinar que actúa en la EDP de la *entalpía* u a través de un subconjunto abierto no vacío $\omega \subset \Omega$ arbitrariamente pequeño (la función ϕ se conoce como *parámetro de fase*). Para $1 \leq N < 6$, los autores prueban un resultado de controlabilidad exacta a trayectorias para el anterior sistema cuando h verifica $h(0) = 0$ y la hipótesis

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|h(s)|}{|s| \log^{3/2}(1+|s|)} = 0. \tag{9}$$

Es natural e interesante proponerse analizar modelos de campo de fases más generales que permitan, en lo posible, revelar la complejidad del fenómeno físico. Ello motivó la idea de plantearnos generalizar los resultados de [2] al caso de un modelo de campo de fases que, además de no linealidades de la forma $h(\phi)$, en la ecuación del parámetro de fase ϕ, contemple no linealidades que dependen de la entalpía u y del gradiente de ésta, en la ecuación para u. El siguiente paso sería analizar las propiedades de controlabilidad de sistemas parabólicos acoplados no lineales más generales que el modelo considerado, por ejemplo, a modelos similares con no linealidades de la forma $f(u, \nabla u, \phi, \nabla\phi)$ y/o $h(\phi, \nabla\phi)$. Estas cuestiones son comentadas en el último capítulo de la Memoria y se verán con más detalle en el artículo en preparación [29].

Principales aportaciones originales

A continuación, haremos una breve descripción de los resultados originales que aportamos en la Memoria y de las principales ideas usadas en las demostraciones.

El **Capítulo 1** está dedicado a obtener las estimaciones de tipo Carleman que se precisan para probar los resultados sobre controlabilidad de sistemas parabólicos acoplados que presentamos en los capítulos siguientes. Obtenemos una primera estimación de Carleman para un sistema en cascada de dos ecuaciones lineales del calor con términos de primer orden y condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas (ver el Teorema 1.4). Seguidamente probamos una estimación análoga a la anterior cuando se consideran condiciones de contorno lineales de tipo Fourier (cf. Teorema 1.6), finalizando el capítulo con una desigualdad de Carleman para un modelo lineal de campo de fases. Para probar estos resultados, adaptamos la demostración de la estimación de Carleman obtenida en [51] a cada una de las situaciones consideradas. Además, en los Teoremas 1.4 y 1.7, damos la expresión explícita de las constantes que aparecen en la correspondiente estimación de tipo Carleman con respecto a T y al tamaño de los potenciales y ello será esencial en lo sucesivo.

En el **Capítulo 2** se recogen nuevos resultados de existencia de controles insensibilizantes para algunos sistemas parabólicos lineales y sublineales que extienden el Teorema 1 de [51] en algunas de las direcciones que indicamos anteriormente. Consideramos dos abiertos no vacíos arbitrariamente pequeños $\omega, \mathcal{O} \subset \Omega$ (los *abiertos de control* y *de observación*, respectivamente). En primer lugar, obtenemos un resultado de existencia de controles que insensibilizan la energía en $\mathcal{O}$ del sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $f : (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto f(s,p) \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 globalmente Lipschitziana tal que $f(0,0) = 0$ y ξ, τ e $\hat{y}_0$ son como en (1)–(3) (cf. Teorema 2.2). En segundo lugar, probamos un resultado análogo al anterior (ver el Teorema 2.3) para el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + F(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 globalmente Lipschitziana tal que $F(0) = 0$, $h \in L^\infty(\Sigma)$, con $\partial_t h \in L^\infty(\Sigma)$ y donde ξ, τ e $\hat{y}_0$ son como antes (aquí, ∂_n denota la derivación con respecto a la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$).

En ambos casos, la existencia de controles insensibilizantes se reformula de manera equivalente como un problema de controlabilidad nula para un sistema en cascada. De acuerdo con los resultados principales probados en [51], probaremos los Teoremas 2.2 y 2.3 bajo la hipótesis geométrica esencial $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Además, el término fuente ξ debe decaer rápidamente a cero cerca del instante inicial $t = 0$. Las pruebas de estos resultados, inspiradas en las de otros conocidos sobre controlabilidad para sistemas no lineales (véanse [54], [19], [24], [51],...), se basan en resultados de controlabilidad nula para sistemas lineales similares al correspondiente sistema linealizado en cascada y argumentos adecuados de punto fijo. El punto clave de ambas demostraciones reside en la obtención, en el caso lineal, de adecuadas desigualdades de observabilidad para las soluciones del correspondiente sistema adjunto acoplado (véanse los Teoremas 2.4 y 2.6), las cuales se deducen de las estimaciones de tipo Carleman establecidas en los Teoremas 1.4 y 1.6 de la Memoria.

En la última sección del segundo capítulo presentamos algunos resultados sobre la existencia de controles ε–insensibilizantes para el sistema de Stokes, bajo la hipótesis $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Haremos notar asimismo las dificultades para obtener un resultado de existencia de controles insensibilizantes en este caso.

El propósito del **Capítulo 3** de la Memoria será analizar la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal cuando se consideran términos no lineales con cierto crecimiento superlineal en el infinito.

Comenzaremos estudiando el caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \tag{10}$$

siendo f una función de clase C^1 definida sobre $\mathbb{R}$ con determinado crecimiento superlineal en el infinito, ξ una fuente de calor conocida y suficientemente regular, $\tau \in \mathbb{R}$ desconocido y pequeño, e $\hat{y}_0$ desconocido en un espacio de Banach apropiado X que se inyecta de forma continua y densa en $L^2(\Omega)$, con $\|\hat{y}_0\|_X = 1$.

Consideraremos nuevamente el funcional Φ definido en (4), siendo ahora $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ una solución de (10) (asociada a τ y a v) definida en $(0,T)$, cuando ésta exista. Debido al crecimiento superlineal de f en el infinito, el problema (10) podría no admitir solución definida en todo el intervalo $[0,T]$ para cualesquiera ξ y v. Este hecho hace que cambiemos ligeramente en este marco la noción usual de control insensibilizante (véase la Definición 3.1, p. 83, de la Memoria). El resultado que obtenemos es el siguiente:

Teorema *(Teorema 3.8, p. 99) Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $f'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f'(s)}{\log(1+|s|)} = 0.$$

Sea $r \in \left(\frac{N}{2}+1, \infty\right)$. Entonces, para cualquier $\xi \in L^r(Q)$ tal que

$$\iint_Q \exp\left(\frac{1}{t^3}\right) |\xi|^2 \, dx\, dt < \infty, \tag{11}$$

existe una función control $v \in L^r(Q)$ que insensibiliza el funcional Φ dado por (4) *en el sentido de la Definición 3.1.* $\square$

La búsqueda de controles que insensibilicen la energía del sistema (10) en $\mathcal{O}$ nos va a llevar de nuevo a analizar el problema de controlabilidad nula (6)–(8), donde la primera ecuación es ahora superlineal. Como en el caso en el que f tiene crecimiento sublineal en el infinito, la prueba de este resultado combina un argumento de punto fijo con el estudio de la controlabilidad nula del correspondiente sistema linealizado. Como en [5] y [24], también en este caso obtendremos controles "regulares" que resuelvan el mencionado problema lineal de controlabilidad junto a estimaciones de dichos controles con respecto a los datos.

En el capítulo que nos ocupa desarrollamos una técnica de construcción de controles regulares para resolver problemas de controlabilidad nula para sistemas parabólicos lineales acoplados donde juega un papel esencial el efecto regularizante del problema. Esta estrategia va a permitir demostrar el Teorema 3.8 y, en general, dar una nueva demostración de resultados conocidos de controlabilidad nula para ecuaciones del calor no lineales, así como probar nuevos resultados de controlabilidad nula para sistemas parabólicos que no son abordables con las técnicas existentes.

Posteriormente ofreceremos un resultado de insensibilización de carácter negativo para ciertas no linealidades con comportamiento superlineal en el infinito. Es el siguiente:

Teorema *(Teorema 3.11, p. 110) Existen funciones $f \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $f'' \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y*

$$|f(s)| \sim |s| \log^\alpha(1 + |s|) \qquad \textit{cuando } |s| \to \infty, \tag{12}$$

con $\alpha > 2$, y existen términos fuente $\xi \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (11), *para los que no es posible encontrar funciones control que insensibilicen el funcional Φ dado por* (4) *en el sentido de la Definición 3.1.* $\square$

Para demostrar este resultado, veremos que, para ciertas funciones f como en el enunciado y ciertos términos fuente $\xi \in L^\infty(Q)$ que se anulan para $t \in (0, t_0)$, con $t_0 \in (0, T)$, la solución y de (6) asociada a cualquier control v explota antes del instante $t = T$ y, por consiguiente, el funcional Φ definido en (4) no puede ser insensibilizado.

Como último resultado de la sección dedicada al caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas, veremos un resultado de existencia de controles insensibilizantes que simultáneamente dan la controlabilidad exacta a cero, es decir, controles para los cuales el sistema en cascada (6)–(7) (con $y_0 = 0$) admite una solución (y, q) que verifica, simultáneamente, $q(x, 0) = 0$ e $y(x, T) = 0$ en Ω (cf. Teorema 3.12). Una hipótesis natural sobre el término fuente ξ en este caso es que decaiga rápidamente a cero, no sólo cerca de $t = 0$, sino también cerca del instante final $t = T$.

Finalmente, analizaremos el caso de una ecuación del calor semilineal con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + F(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ \partial_n y + f(y) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{13}$$

donde $F, f \in C^1(\mathbb{R})$ son dos funciones dadas con crecimiento arbitrario en el infinito, ξ es conocido y suficientemente regular, $\tau \in \mathbb{R}$ es desconocido y pequeño, e $\hat{y}_0$ es desconocido en un nuevo espacio de Banach $\hat{X}$ que se inyecta de forma continua y densa en $L^2(\Omega)$, con $\|\hat{y}_0\|_{\hat{X}} = 1$. En este contexto, probaremos el siguiente resultado local de existencia de controles insensibilizantes (en el sentido de la Definición 3.2):

Teorema *(Teorema 3.18, p. 121) Supongamos que $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$ y $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Sean $F, f \in C^3(\mathbb{R})$ verificando $F(0) = f(0) = 0$. Entonces, existen dos constantes positivas $\widetilde{\mathcal{M}}$ y η (que dependen de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, F y f) tales que, para cualquier $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando*

$$|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \leq \eta,$$

podemos encontrar un control $v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ que insensibilice el funcional Φ definido por (4).

La búsqueda de controles que insensibilicen la energía del sistema (13) en $\mathcal{O}$ nos va a llevar de nuevo a analizar un problema de controlabilidad nula para un sistema acoplado de dos ecuaciones del calor con condiciones de contorno de tipo Fourier (la primera de ellas, de tipo semilineal y con condición de contorno no lineal), el cual se resolverá usando sendos argumentos de linealización y de punto fijo. Analizando un problema de controlabilidad nula lineal similar, pondremos de manifiesto que los potenciales $a, b \in L^\infty(\Sigma)$ que aparecen en las condiciones de contorno han de tener derivada temporal también en $L^\infty(\Sigma)$. Ello hará que tengamos que buscar un punto fijo y, en consecuencia, también controles, en determinados espacios de Hölder. Una construcción similar a la utilizada en el caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet nos permitirá construir, en el caso lineal, controles con regularidad Hölderiana a partir de controles en $L^2(Q)$. Este punto será el más importante en la resolución de este problema.

En el **Capítulo 4** de la Memoria nos centraremos principalmente en analizar las propiedades de controlabilidad del sistema no lineal de campo de fases

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u & \text{en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, el dato inicial (u_0, ϕ_0) está dado en un espacio apropiado y v es el control por determinar. Supondremos que las no linealidades consideradas tienen determinado crecimiento superlineal en el infinito. Más precisamente, supongamos que $f(s,p) = g(s,p)s + G(s,p) \cdot p$ para cualquier $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. En primer lugar, demostramos un resultado de controlabilidad exacta a cero del modelo considerado cuando se verifican, entre otras, las hipótesis (9),

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|)} = 0,$$

estos dos límites, uniformes en p (ver el Teorema 4.8). Seguidamente mostramos un resultado de controlabilidad exacta a trayectorias bajo hipótesis ligeramente diferentes sobre las no linealidades, el cual generaliza los resultados obtenidos en [2] (véase el Teorema 4.9). Como consecuencia de este teorema, probamos un resultado de controlabilidad aproximada para el sistema (14), el Teorema 4.10.

El Teorema 4.8 y el resultado principal de [2] se prueban, como viene siendo habitual, mediante linealización y argumentos adecuados de punto fijo. La presencia de no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito hace nuevamente necesaria la construcción, en el caso lineal, de “buenos” controles (y estimar la norma de los mismos) que permitan obtener un punto fijo en espacios apropiados. La diferencia esencial entre nuestra aportación y la de F. Ammar Khodja et al. en [2] reside en las distintas técnicas empleadas para construir tales controles. Es importante resaltar que el modo en que procedemos aquí permite que los resultados que presentamos sean válidos para dimensiones $N \geq 1$ arbitrarias, mientras que la técnica usada en [2] sólo es válida cuando $1 \leq N < 6$. Además, estos resultados pueden extenderse a sistemas parabólicos acoplados no lineales más generales, a saber, sistemas de la forma (14), donde la no linealidad en la ecuación de u es de la forma $f(u, \nabla u, \phi, \nabla \phi)$.

Los resultados que aparecen en el segundo capítulo de la Memoria junto con las desigualdades de Carleman requeridas en cada caso constituyen la base de la referencia [11]. Los resultados del Capítulo 3 se han recogido en varios trabajos (cf. [9], [10] y [12]) y algunas de las generalizaciones que han quedado pendientes se verán en [30]. Finalmente, el contenido del cuarto capítulo corresponde a la referencia [29], actualmente en preparación.

Comentarios adicionales y algunos resultados que quedan pendientes

La técnica de construcción de controles regulares (a partir de controles en $L^2(Q)$) desarrollada en esta Memoria puede aplicarse al estudio de la controlabilidad nula de la ecuación semilineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = v\mathbf{1}_\omega \text{ en } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con f de clase C^1 con determinado crecimiento superlineal en el infinito. De hecho, pueden obtenerse controles en $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, con $\alpha \in (0,1)$, para datos suficientemente regulares.

Esta estrategia de construcción de controles regulares ha sido utilizada en [16] para probar un resultado local de controlabilidad nula para la ecuación clásica del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier y, en la actualidad, está siendo utilizada por M. González-Burgos y L. de Teresa para probar la controlabilidad exacta a cero de una ecuación del calor semilineal con un término superlineal de la forma $f(y, \nabla y)$ en dominios no acotados (cf. [28]).

Durante el tiempo que hemos trabajado en las aportaciones que han permitido elaborar esta Memoria, han ido surgiendo diversos problemas estrechamente relacionados con los resultados obtenidos y que no han podido ser resueltos hasta el momento. Finalizaremos esta introducción comentando brevemente algunos de estos problemas, sobre los que pretendemos seguir nuestra investigación. Remitimos al lector a la última sección de cada capítulo de la Memoria para los detalles.

1. Una cuestión interesante sería intentar dar condiciones suficientes sobre y_0 para garantizar la existencia de controles insensibilizantes en las distintas situaciones consideradas. En [51], la autora da un resultado positivo sobre existencia de controles insensibilizantes para una clase pequeña de datos iniciales cuando $f \equiv 0$ y $\mathcal{O} = \Omega$ (véase el Lema 2 de [51]). Para una ecuación del calor con un potencial en $L^\infty(Q)$, e incluso para la ecuación clásica del calor cuando $\mathcal{O} \neq \Omega$, el problema sigue abierto.

2. La hipótesis geométrica $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ es esencial para demostrar tanto la existencia de controles ε–insensibilizantes como la de controles insensibilizantes. Por el momento, ambos problemas están lejos de ser resueltos para abiertos de control y de observación disjuntos. Hasta lo que conocemos, sólo existen algunos resultados parciales de existencia de controles ε–insensibilizantes en esta dirección (cf. [47] y [48]). Por otro lado, la existencia de controles insensibilizantes cuando $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$ es un problema completamente abierto.

3. A la vista de los resultados conocidos de controlabilidad nula para una ecuación del calor semilineal con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas (véase el Teorema 1.2 de [24]), resulta natural proponerse extender el Teorema 3.8 de la presente Memoria a no linealidades f con crecimiento de orden

$$|f(s)| \sim |s| \log^\alpha(1 + |s|) \quad \text{cuando } |s| \to \infty, \quad \text{con } 1 \leq \alpha < 3/2.$$

La idea en [24] consiste en controlar el sistema a cero en un tiempo pequeño para evitar la explosión de la solución y tomar $v \equiv 0$ durante el resto del intervalo temporal. Pero esta estrategia falla en nuestro problema: por un lado, en los problemas de insensibilización, tanto la condición inicial como la final están fijas y, además, hay un término fuente en la ecuación. Así, el problema sigue abierto para tales no linealidades.

4. Sería también de interés generalizar el resultado establecido en el Teorema 2.2 a no linealidades $f(y, \nabla y)$ para funciones f con cierto crecimiento superlineal en el infinito. Para ello, en una primera etapa deberían construirse controles en $L^r(Q)$, $r > N+2$, que resuelvan un problema de controlabilidad nula para un sistema de dos ecuaciones del calor lineales acopladas. Desafortunadamente, la técnica de construcción de controles regulares desarrollada en el Capítulo 3 no puede aplicarse en este caso debido a la falta de regularidad introducida por un término de la forma $-\nabla \cdot (Dq)$, con $D \in L^\infty(Q)$, que aparece en la segunda ecuación (véase (3.103)–(3.104)). De este modo, este problema también permanece abierto para las no linealidades indicadas.

5. Recientemente, E. Fernández-Cara y otros autores (cf. [21]) han obtenido una desigualdad de Carleman para un sistema (adjunto) general de la forma

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = f_1 + \nabla \cdot f_2 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n z + f_2 \cdot n = f_3 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(x,0) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $f_1 \in L^2(Q)$, $f_2 \in L^2(Q)^N$ y $f_3 \in L^2(\Sigma)$. Como consecuencia, se puede probar una desigualdad de tipo Carleman que generaliza la establecida en el Teorema 1.6 de la Memoria al caso de sistemas lineales acoplados más generales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta \varphi + D \cdot \nabla \varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \varphi + k\varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta \psi - \nabla \cdot (B\psi) + a\psi = \varphi \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \psi + (B \cdot n + h)\psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ y h, k sólo en $L^\infty(\Sigma)$. Aquí, $\mathcal{O}$ es nuevamente un subconjunto abierto de Ω tal que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Así, combinando argumentos de linealización y de punto fijo, puede probarse un resultado de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con término no lineal dependiendo del estado y de su gradiente cuando se consideran condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, para ambas no linealidades con crecimiento sublineal en el infinito. Asimismo queda pendiente un resultado global de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con término no lineal $f(y)$ y condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, para no linealidades con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Estos resultados quedarán recogidos en el trabajo en elaboración [30].

6. Algunos comentarios relacionados con la ε–insensibilización e insensibilización de sistemas de tipo Stokes con condición inicial parcialmente conocida podrían ser los siguientes:

   (a) Queda pendiente de analizar la posible generalización de los resultados que presentamos en la Sección 2.3 al caso de un sistema de quasi-Stokes y al caso en que se consideran otro tipo de condiciones de contorno tales como condiciones de tipo Fourier no lineales.

   (b) Un problema interesante (y difícil) que cabe plantearse investigar es la existencia de controles insensibilizantes para un sistema de Stokes con condición inicial parcialmente conocida. El problema se reduce a resolver un problema de controlabilidad nula para un par de sistemas de Stokes en cascada. Para poder obtener un resultado positivo, habría que probar una desigualdad de observabilidad para las soluciones φ y ψ del correspondiente sistema adjunto. El punto clave estaría en obtener una desigualdad de tipo Carleman que nos permita acotar ciertos términos globales de φ y ψ en función de una sola de las variables (localizada en un abierto $\omega \subset \Omega$ tal que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$), pero ello es difícil sin que aparezcan las presiones. Así, el problema formulado queda abierto.

   (c) El único resultado en la literatura sobre existencia de controles insensibilizantes para sistemas de tipo Stokes, en nuestro conocimiento, se prueba en [20]. Los autores consideran un modelo oceánico quasi-geostrófico lineal con condición inicial parcialmente conocida y demuestran la existencia de controles que insensibilizan la observación de la velocidad en un abierto $\mathcal{O}$. Es interesante remarcar que la presencia del término de Coriolis en el modelo juega un papel fundamental en la demostración del mencionado resultado.

7. Se desconocen resultados positivos de existencia de controles insensibilizantes cuando sobre un sistema de estado con datos incompletos ejercemos un control frontera. Por un lado, no parece claro que existan controles que insensibilicen la energía en un abierto $\mathcal{O}$ del sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi \ \text{ en } Q, \\ y = v\mathbf{1}_\gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

   donde $a \in L^\infty(Q)$, ξ, τ e $\hat{y}_0(x)$ son como en (1)–(3) y $v \in L^2(\Sigma)$ es una función control por determinar que actúa sobre $\gamma \subset \partial\Omega$, un abierto relativo no vacío de la frontera. Por otro lado, una interesante cuestión abierta es la existencia de controles que insensibilicen el funcional $\widetilde{\Phi}$ dado por

$$\widetilde{\Phi}(y(x,t;\tau,v)) = \frac{1}{2}\iint_{\Gamma\times(0,T)} |\partial_n y(x,t;\tau,v)|^2\, d\sigma\, dt,$$

donde $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es la solución de (15) asociada a τ y a v, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es un nuevo abierto relativo (no vacío) de la frontera tal que $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$. La dificultad de este problema reside en analizar la posibilidad de obtener una adecuada desigualdad de observabilidad para un sistema (adjunto) acoplado.

Otro análisis interesante que aún queda por hacer es el de las propiedades de controlabilidad de un sistema de campo de fases no lineal y otros sistemas parabólicos acoplados no lineales más generales cuando sobre el sistema se ejerce un control frontera.

8. Como otros resultados que quedan pendientes, cabe mencionar los relativos a la existencia (o no existencia) de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal considerada en un dominio no acotado. A la vista de los resultados principales de los trabajos [44], [45] y [14] (en el contexto de la controlabilidad exacta a cero para una ecuación del calor) es esperable que obtengamos: no existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor lineal considerada en un semiespacio y existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con no linealidades de la forma $f(y,\nabla y)$ con crecimiento sublineal en el infinito cuando la región $\Omega \setminus \overline{\omega \cap \mathcal{O}}$ es acotada. Por otro lado, es interesante extender el resultado de insensibilización establecido en el Teorema 3.8 de la presente Memoria al caso de dominios no acotados. Pensamos que, si se supone nuevamente que la región $\Omega \setminus \overline{\omega \cap \mathcal{O}}$ sea acotada, este problema podrá ser abordado adaptando a esta situación la técnica introducida en [9] (ver también [28]).

   Asimismo, queda pendiente la investigación de las propiedades de controlabilidad para sistemas no lineales de campo de fases y otros problemas parabólicos no lineales acoplados considerados en dominios no acotados. Los problemas mencionados en este punto serán objeto de nuestro estudio en un futuro inmediato.

Capítulo 1

Desigualdades de tipo Carleman para algunos sistemas parabólicos lineales acoplados

Dedicaremos el primer capítulo de esta Memoria a probar algunas estimaciones conocidas como *estimaciones globales de tipo Carleman* para determinados sistemas parabólicos lineales acoplados.

Como es bien conocido, la controlabilidad exacta a cero de un sistema parabólico lineal es, básicamente, equivalente a probar la llamada *desigualdad de observabilidad* para las soluciones del sistema adjunto asociado, desigualdad que se deduce de una estimación global de tipo Carleman para estas mismas soluciones. Para estudiar la controlabilidad nula de sistemas no lineales, una estrategia ya clásica, introducida por E. Zuazua en [54] en el contexto de la ecuación semilineal de ondas, se basa en combinar un resultado de controlabilidad nula para el correspondiente sistema linealizado y un argumento adecuado de punto fijo (véanse también [53], [56], [19], [24], [51],...). Además, en el caso en que se consideran no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito, este argumento de punto fijo es factible si somos capaces de obtener la dependencia de las constantes que aparecen en las estimaciones de Carleman con respecto a los potenciales del sistema linealizado. Dado que los resultados principales que presentamos en esta Memoria están estrechamente relacionados con la controlabilidad nula de sistemas parabólicos no lineales acoplados, las estimaciones de tipo Carleman que probamos en este capítulo jugarán un papel fundamental en la demostración de los mismos.

Comenzaremos con una sección de carácter introductorio en la cual recordaremos algunas desigualdades globales de Carleman conocidas que usaremos en las secciones siguientes. El primer objetivo que nos plantearemos en este capítulo será obtener una estimación de tipo Carleman para un sistema en cascada de dos ecuaciones lineales del calor con términos de primer orden a las que se añaden condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas (véase la Sección 1.2). Dedicaremos la siguiente sección del capítulo al caso en que se consideran condiciones de contorno lineales de tipo Fourier (o Robin). Analizaremos finalmente el caso de un modelo lineal llamado sistema (lineal) de campo de fases.

A lo largo de toda la Memoria trabajaremos en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ arbitrario, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2, al menos. Cuando se requiera más regularidad sobre la frontera, se indicará expresamente. Para $T > 0$ dado, denotaremos por Q el cilindro $\Omega \times (0,T)$ y por Σ su frontera lateral $\partial\Omega \times (0,T)$.

1.1. Algunas desigualdades globales de Carleman conocidas

La herramienta básica para demostrar los resultados que presentamos en el capítulo la constituyen las desigualdades globales de tipo Carleman que a continuación recordamos para sistemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = F \ \text{ en } Q, \\ z = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad z(x,0) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

con $z^0 \in L^2(\Omega)$ y F en $L^2(Q)$ o en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, o bien de la forma

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = F \ \text{ en } Q, \\ \partial_n z + bz = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(x,0) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

con $z^0 \in L^2(\Omega)$, F en $L^2(Q)$ y $b \in L^\infty(\Sigma)$ (al menos). Aquí, y en toda la Memoria, ∂_t denota la derivada temporal y ∂_n representa la derivación con respecto a n, la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

Necesitamos introducir previamente una función auxiliar, cuya existencia está garantizada por el siguiente resultado (véase el Lema 1.1. de [26]):

Lema 1.1 *Sea $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces, existe una función $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta^0 > 0$ en Ω, $\eta^0 = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $|\nabla\eta^0| > 0$ en $\overline{\Omega \setminus \mathcal{B}}$.* □

Fijado un abierto no vacío $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$, pongamos

$$\beta_0(x) = e^{2C^*\|\eta^0\|_\infty} - e^{C^*\eta^0(x)} \tag{1.3}$$

y

$$\widetilde{\beta}_0(x) = e^{2C^*\|\eta^0\|_\infty} - e^{-C^*\eta^0(x)}, \tag{1.4}$$

para $x \in \overline{\Omega}$, donde C^* es una constante positiva apropiada que sólo depende de Ω y $\mathcal{B}$. Para sistemas lineales tales como (1.1), se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.2 *Sea $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces, existen constantes positivas C_0, σ_0 y $\overline{\sigma}_0$ (dependiendo sólo de Ω y $\mathcal{B}$) tales que:*

(1) Si $F \in L^2(Q)$, para cualquier $s \geq s_0 = \sigma_0(\Omega, \mathcal{B})\,(T + T^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s} \iint_Q e^{-2s\beta} t(T-t)\left(|\partial_t z|^2 + |\Delta z|^2\right) + s \iint_Q e^{-2s\beta} t^{-1}(T-t)^{-1} |\nabla z|^2 \\ &+ s^3 \iint_Q e^{-2s\beta} t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 \leq C_0 \left(s^3 \iint_{\mathcal{B}\times(0,T)} e^{-2s\beta} t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 \right. \\ &\left. + \iint_Q e^{-2s\beta}|F|^2 \right), \end{aligned} \tag{1.5}$$

siendo z la solución de (1.1) asociada a $z^0 \in L^2(\Omega)$ y a F. En esta expresión, la función β viene dada por

$$\beta(x,t) = \frac{\beta_0(x)}{t(T-t)} \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T),$$

donde β_0 es la función definida en (1.3) para el abierto $\mathcal{B}$.

(2) Si $F = f_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, con $f_i \in L^2(Q)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, entonces

$$\begin{aligned} &s \iint_Q e^{-2s\beta} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla z|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\beta} t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 \\ &\leq C_0 \left(s^3 \iint_{\mathcal{B}\times(0,T)} e^{-2s\beta} t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 + \iint_Q e^{-2s\beta}|f_0|^2 \right. \\ &\left. + s^2 \sum_{i=1}^{N} \iint_Q e^{-2s\beta} t^{-2}(T-t)^{-2}|f_i|^2 \right), \end{aligned}$$

para $s \geq \overline{s}_0 = \overline{\sigma}_0(\Omega, \mathcal{B})\,(T + T^2)$. De nuevo, z es la solución de (1.1) asociada a $z^0 \in L^2(\Omega)$ y a F, y β es la función del apartado anterior. □

La prueba del primer apartado (resp. segundo apartado) del lema se encuentra esencialmente en [26] (resp. en [34]), pero en estos trabajos los autores no precisaron cómo las constantes s_0 y $\overline{s}_0$ dependían de T. La dependencia explícita de s_0 con respecto a T fue analizada en [25]. Razonando de modo similar, se obtiene el modo preciso en que $\overline{s}_0$ depende de T y ello ha sido ya utilizado en [17].

Obsérvese que, sin más que cambiar t por $T - t$, el Lema 1.2 sigue siendo válido para las soluciones de sistemas retrógrados de la forma

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z = F \ \text{ en } Q, \\ z = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad z(x,T) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $z^0 \in L^2(\Omega)$ y F en $L^2(Q)$ o en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Recordamos a continuación la siguiente desigualdad global de Carleman para sistemas lineales de la forma (1.2):

Lema 1.3 *Supongamos que $b, \partial_t b \in L^\infty(\Sigma)$. Sea $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces, existen constantes positivas $\widetilde{C}_0$ y $\widetilde{s}_0$ (dependiendo de Ω, $\mathcal{B}$, T, $\|b\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t b\|_{\infty;\Sigma}$) tales que, si z es la solución de (1.2) asociada a $z^0 \in L^2(\Omega)$ y a $F \in L^2(Q)$, para cualquier $s \geq \widetilde{s}_0$ se verifica*

$$\frac{1}{s}\iint_Q \rho t(T-t)\left(|\partial_t z|^2 + |\Delta z|^2\right) + s\iint_Q \rho t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla z|^2$$
$$+ s^3 \iint_Q \rho t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 \leq \widetilde{C}_0 \left(s^3 \iint_{\mathcal{B}\times(0,T)} \rho t^{-3}(T-t)^{-3}|z|^2 + \iint_Q \rho |F|^2\right),$$

con $\rho(x,t) = e^{-2s\beta(x,t)} + e^{-2s\widetilde{\beta}(x,t)}$ para $(x,t) \in Q$, β la función del Lema 1.2 y $\widetilde{\beta}$ dada por $\widetilde{\beta}(x,t) = \dfrac{\widetilde{\beta}_0(x)}{t(T-t)}$ para $(x,t) \in Q$, siendo $\widetilde{\beta}_0$ la función introducida en (1.4) para el abierto $\mathcal{B}$. □

La demostración de este resultado puede encontrarse en [26]. En esta referencia se exigen condiciones algo más fuertes a b y $\partial_t b$, aunque su prueba es válida bajo las hipótesis del Lema 1.3. Como en el caso anterior, el resultado sigue siendo válido para sistemas retrógrados de la forma

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z = F \ \text{ en } Q, \\ \partial_n z + bz = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(x,T) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $z^0 \in L^2(\Omega)$ y $F \in L^2(Q)$.

***Observación* 1.1** La estructura de la función peso ρ proviene de cancelar los términos sobre $\partial\Omega$ al sumar las desigualdades de Carleman cuando se consideran, respectivamente, las funciones peso $e^{-2s\beta}$ y $e^{-2s\widetilde{\beta}}$, donde β y $\widetilde{\beta}$ son las funciones del Lema 1.3 para el abierto $\mathcal{B}$. Observemos que, sin más que tener en cuenta que estas funciones verifican

$$0 < e^{-2s\widetilde{\beta}(x,t)} \leq e^{-2s\beta(x,t)}, \qquad (x,t) \in Q,$$

deducimos de manera inmediata que las soluciones del sistema (1.2) también verifican la estimación (1.5) para cualquier $s \geq \widetilde{s}_0$ para la constante $C_0 = 2\widetilde{C}_0$, siendo $\widetilde{C}_0$ y $\widetilde{s}_0$ las constantes positivas (dependientes de Ω, $\mathcal{B}$, T, $\|b\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t b\|_{\infty;\Sigma}$) que proporciona el Lema 1.3. Volveremos sobre este comentario más adelante. □

Como ya hemos comentado, haciendo uso de estas herramientas fundamentales, probaremos en este capítulo algunas estimaciones globales de Carleman para ciertos sistemas parabólicos lineales acoplados.

1.2. El caso de condiciones de contorno Dirichlet homogéneas

El primer objetivo que nos planteamos en el capítulo es obtener una desigualdad de Carleman para el siguiente sistema parabólico lineal acoplado:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta\varphi + D\cdot\nabla\varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

donde $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ y $\mathcal{O}$ es un subconjunto abierto no vacío de Ω (en (1.7), se denota por $\nabla\cdot(B\psi)$ la divergencia de la función vectorial $B\psi$). Es bien conocido que, bajo las condiciones anteriores, el sistema precedente admite una única solución (φ,ψ), con

$$\varphi,\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad \partial_t\varphi, \partial_t\psi \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Consideremos un nuevo abierto no vacío $\omega \subset \Omega$. Nos proponemos obtener una estimación de tipo Carleman para (φ,ψ) que nos permita acotar todos los términos que aparecen a la izquierda en las estimaciones usuales de Carleman para φ y ψ en función, únicamente, de ψ localizada en un subconjunto no vacío de ω, de hecho, localizada en un abierto no vacío contenido en $\omega\cap\mathcal{O}$ (véase el Teorema 1.4). De aquí que una hipótesis fundamental en lo que sigue sea que los abiertos ω y $\mathcal{O}$ sean no disjuntos.

La primera desigualdad de tipo Carleman para sistemas parabólicos lineales acoplados fue probada por L. de Teresa en [51], donde la autora consideró un sistema de la forma (1.6)–(1.7), con $B \equiv D \equiv 0$ (véase la prueba de la Proposición 2 del mencionado trabajo). En la presente sección contemplamos el caso en que se consideran también términos de primer orden y damos, además, la expresión explícita de las constantes que aparecen en la estimación de tipo Carleman con respecto a T y al tamaño de los potenciales y ello será esencial más adelante.

Como hemos adelantado, nuestro objetivo es la obtención de una desigualdad de Carleman para las soluciones de (1.6)–(1.7). Así, se tiene:

Teorema 1.4 *Supongamos que $\omega\cap\mathcal{O} \neq \emptyset$ y sea $B_0 \subset \omega\cap\mathcal{O}$ un abierto no vacío. Entonces, existe una función $\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y existen dos constantes positivas C y $\overline{\sigma}$ (dependiendo sólo de Ω y B_0) tales que la solución (φ,ψ) de* (1.6)–(1.7) *asociada a*

$\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ satisface

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) \\
&+ s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\
&+ s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\leq Cs^7 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

para cualquier $s \geq \overline{s}$, con

$$
\overline{s} = \overline{\sigma}(\Omega, B_0)(T + T^2 M'), \tag{1.9}
$$

donde

$$
M' = 1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|a-c\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty + \|B-D\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2 \tag{1.10}
$$

y α es la función dada por

$$
\alpha(x,t) = \frac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}, \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T). \tag{1.11}
$$

Demostración: La estructura de la demostración es similar a la de la estimación de tipo Carleman probada en [51]. Aquí, adaptamos el método utilizado en el citado trabajo a la falta de regularidad del término $-\nabla\cdot(B\psi)$ de la ecuación (1.7).

La herramienta básica para probar este resultado es el Lema 1.2. Procederemos en varios pasos:

1. Consideremos un nuevo abierto auxiliar no vacío B_1 tal que

$$
B_1 \subset\subset B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}.
$$

Sean α_0 y α las funciones asociadas a $\mathcal{B} = B_1$ proporcionadas por el Lema 1.2. Aplicando este resultado a la función φ solución de (1.6) y a $F = -D\cdot\nabla\varphi - c\varphi \in L^2(Q)$, obtenemos que, para ciertas constantes positivas $C_0 = C_0(\Omega, B_1) = C_0(\Omega, B_0)$ y $\sigma_0 = \sigma_0(\Omega, B_1) = \sigma_0(\Omega, B_0)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) \\
&+ s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\
&\leq C_0\left(s^3\iint_{B_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}\left(|D\cdot\nabla\varphi|^2 + |c\varphi|^2\right)\right),
\end{aligned}
$$

para $s \geq s_0 = \sigma_0(\Omega, B_0)\,(T + T^2)$. Ahora bien, podemos estimar

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|c\varphi|^2 \leq 2^{-6}T^6\|c\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2$$

y

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|D\cdot\nabla\varphi|^2 \leq 2^{-2}T^2\|D\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2$$

De aquí se sigue fácilmente que, para dos nuevas constantes positivas $C_1 = C_1(\Omega, B_1) = C_1(\Omega, B_0)$ y $\sigma_1 = \sigma_1(\Omega, B_1) = \sigma_1(\Omega, B_0)$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha}t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) \\ &+ s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ &\leq C_1\, s^3 \iint_{B_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

válida para cualquier $s \geq s_1$, con

$$s_1 = \sigma_1(\Omega, B_0)\,\left(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3} + T^2\|D\|_\infty^2\right). \tag{1.13}$$

Aplicamos ahora el segundo apartado del Lema 1.2 a la solución ψ de (1.7), con $F = \nabla\cdot(B\psi) - a\psi + \varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ y $\mathcal{B} = B_1 \subset B_0$. Entonces, existe $\overline{\sigma}_0 = \overline{\sigma}_0(\Omega, B_1) = \overline{\sigma}_0(\Omega, B_0) > 0$ tal que, para cualquier $s \geq \overline{s} = \overline{\sigma}_0(\Omega, B_1)(T + T^2)$, se tiene

$$\begin{aligned} &s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\ &\leq C_0\Bigg(s^3\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 + \iint_Q e^{-2s\alpha}|a\psi|^2 \\ &+ \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 + s^2\sum_{i=1}^N \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-2}(T-t)^{-2}|B_i\psi|^2\Bigg). \end{aligned}$$

Procediendo como antes, deducimos la existencia de nuevas constantes $C_2 = C_2(\Omega, B_1) = C_2(\Omega, B_0) > 0$ y $\sigma_2 = \sigma_2(\Omega, B_1) = \sigma_2(\Omega, B_0) > 0$ tales que, para cualquier $s \geq s_2$, con

$$s_2 = \sigma_2(\Omega, B_0)\,(T + T^2 + T^2\|a\|_\infty^{2/3} + T^2\|B\|_\infty^2),$$

se tiene

$$\begin{aligned} &s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\ &\leq C_2\left(s^3\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}|\varphi|^2\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

2. A continuación probamos una desigualdad "mixta"para φ y ψ que nos permitirá acotar todos los términos que aparecen a la izquierda en (1.12) en función sólo de ψ. Consideremos una función $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ verificando

$$0 \leq \xi_1 \leq 1 \text{ en } \Omega, \quad \xi_1 = 1 \text{ en } B_1, \quad \operatorname{sop} \xi_1 \subset B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}, \tag{1.15}$$

$$\Delta\xi_1/\xi_1^{1/2} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla\xi_1/\xi_1^{1/2} \in L^\infty(\Omega)^N. \tag{1.16}$$

Es fácil ver que una función tal existe. En efecto, basta tomar $\xi_1 = \zeta^4$, con $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ verificando (1.15). Para simplificar la notación, pongamos

$$u = e^{-2s\alpha}s^3t^{-3}(T-t)^{-3}. \tag{1.17}$$

Sea $s \geq s_1$, con s_1 dado por (1.13). Multiplicamos la EDP en (1.7) por $\varphi\xi_1 u$ e integramos en Q. Teniendo en cuenta que $u(0)$ y $u(T)$ se anulan en Ω, obtenemos

$$\begin{aligned}
s^3 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} & e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 = \iint_Q \left[-\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi\right]\varphi\xi_1 u \\
&= \iint_Q \psi\xi_1 u\partial_t\varphi + \iint_Q \varphi\psi\xi_1\partial_t u - \iint_Q \psi\left[\xi_1 u\Delta\varphi + \Delta(\xi_1 u)\varphi + 2\nabla(\xi_1 u)\cdot\nabla\varphi\right] \\
&\quad + \iint_Q a\varphi\psi\xi_1 u + \iint_Q B\psi\left[\nabla(\xi_1 u)\varphi + \xi_1 u\nabla\varphi\right],
\end{aligned}$$

de donde, recordando la EDP que verifica φ, se tiene

$$\begin{aligned}
s^3 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} & e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 = \iint_Q (a-c)\varphi\psi\xi_1 u \\
&+ \iint_Q (B-D)\cdot\nabla\varphi\,\psi\xi_1 u + \iint_Q \varphi\psi\left[\xi_1\partial_t u - \Delta(\xi_1 u) + B\cdot\nabla(\xi_1 u)\right] \\
&-2\iint_Q \psi\nabla(\xi_1 u)\cdot\nabla\varphi := I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Estimemos cada I_i, $1 \leq i \leq 6$. En lo que sigue, C designará una constante positiva que dependerá sólo de Ω y B_1 (es decir, de Ω y de B_0), cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente.

$\diamond$ Primero, usando desigualdades de Cauchy y Young, tenemos

$$I_1 = \iint_Q (a-c)\varphi\psi\xi_1 u \leq \delta_1 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{1}{4\delta_1}\|a-c\|_\infty^2 \iint_Q \xi_1 u|\psi|^2, \tag{1.19}$$

para cualquier $\delta_1 > 0$.

$\diamond$ En segundo lugar,

$$\begin{aligned}
I_2 = \iint_Q (B-D)\cdot\nabla\varphi\,\psi\xi_1 u &\leq \gamma_1 s \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\xi_1 \\
&+ \frac{1}{4\gamma_1}\|B-D\|_\infty^2 s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\xi_1,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

para $\gamma_1 > 0$ arbitrario.

$\diamond$ Observemos ahora que

$$|\partial_t u| \leq T s^3 e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}\left(Cs + 3T^2/4\right) \leq CTs^4 e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5},$$

puesto que $s \geq \sigma_1(\Omega, B_0)T^2$. De este modo, podemos estimar

$$\begin{aligned} I_3 \leq \iint_Q |\varphi||\psi|\xi_1|\partial_t u| \leq CTs^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\varphi||\psi|\xi_1 \\ \leq \delta_2 s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 + \frac{CT^2}{\delta_2} s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\xi_1 \\ \leq \delta_2 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_2} s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\xi_1\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

para $\delta_2 > 0$, pues $s \geq \sigma_1(\Omega, B_0)T$.

$\diamond$ Para estimar $I_4 = -\iint_Q \varphi\psi\Delta(\xi_1 u)$, observemos que

$$\Delta(\xi_1 u) = s^3 t^{-3}(T-t)^{-3}\left((\Delta\xi_1)e^{-2s\alpha} + 2\nabla\xi_1\cdot\nabla(e^{-2s\alpha}) + \xi_1\Delta(e^{-2s\alpha})\right),$$

con

$$|\nabla(e^{-2s\alpha})| = 2se^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\alpha_0| \leq Cse^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}, \tag{1.22}$$

y

$$\begin{aligned} |\Delta(e^{-2s\alpha})| \leq 2se^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2}\left(2s|\nabla\alpha_0|^2 + t(T-t)|\Delta\alpha_0|\right) \\ \leq Cse^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2}(s+T^2) \leq Cs^2 e^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones y (1.16), tenemos

$$\begin{aligned} I_4 \leq C\Bigg(s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi||\psi|\xi_1^{1/2} \\ + s^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4}(T-t)^{-4}|\varphi||\psi|\xi_1^{1/2} + s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\varphi||\psi|\xi_1\Bigg). \end{aligned}$$

Usamos ahora desigualdades de Cauchy y Young junto con (1.15), obteniendo

$$\begin{aligned} I_4 \leq \delta_3 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_3} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0} \\ + \frac{C}{\delta_3} s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0} + \frac{C}{\delta_3} s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0}, \end{aligned}$$

para $\delta_3 > 0$ arbitrario. Nótese que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$, tenemos

$$\begin{aligned} s^m t^{-m}(T-t)^{-m} = s^m t^{-n}(T-t)^{-n}\left(t(T-t)\right)^{n-m} \\ \leq s^m t^{-n}(T-t)^{-n}\left(T^2/4\right)^{n-m} \leq Cs^n t^{-n}(T-t)^{-n}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

pues $s \geq \sigma_1(\Omega, B_0)T^2$. Entonces,

$$I_4 \leq \delta_3 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_3} s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}. \tag{1.24}$$

$\diamond$ Estimamos $I_5 = \iint_Q \varphi\psi B \cdot \nabla(\xi_1 u)$ de modo similar. Observando que

$$\nabla(\xi_1 u) = (\nabla \xi_1)u - 2st^{-1}(T-t)^{-1}\xi_1 u \nabla \alpha_0, \tag{1.25}$$

y procediendo como antes, tenemos

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C \iint_Q e^{-2s\alpha} \left(s^3 t^{-3}(T-t)^{-3}\xi_1^{1/2} + s^4 t^{-4}(T-t)^{-4}\xi_1 \right) |\varphi||\psi|\|B\|_\infty \\ &\leq \delta_4 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_4}\|B\|_\infty^2 s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

para cualquier $\delta_4 > 0$.

$\diamond$ Finalmente acotamos $I_6 = -2 \iint_Q \psi \nabla(\xi_1 u) \cdot \nabla\varphi$. Se tiene

$$\begin{aligned} I_6 &\leq C \iint_Q e^{-2s\alpha} \left(s^3 t^{-3}(T-t)^{-3}|\nabla\varphi||\psi|\xi_1^{1/2} + s^4 t^{-4}(T-t)^{-4}|\nabla\varphi||\psi|\xi_1 \right) \\ &\leq \gamma_2 s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 \xi_1 \; + \; \frac{C}{\gamma_2} s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

para $\gamma_2 > 0$, usando (1.16), (1.17) y (1.23).

Tomemos ahora $\delta_i = 1/8$, $1 \leq i \leq 4$, y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/(8C_1)$, con $C_1 = C_1(\Omega, B_0) > 0$ como en (1.12). Llevando las estimaciones (1.19)–(1.21), (1.24) y (1.26)–(1.27) a (1.18) y recordando (1.15), obtenemos

$$\begin{aligned} s^3 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \xi_1 &\leq \frac{1}{2C_1} s \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 \\ &+ C \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} \left[\|a-c\|_\infty^2 s^3 t^{-3}(T-t)^{-3} + s^7 t^{-7}(T-t)^{-7} \right] |\psi|^2 \\ &+ C \left(\|B\|_\infty^2 + \|B-D\|_\infty^2 \right) s^5 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2. \end{aligned}$$

De aquí, y en virtud de (1.12) y (1.15), para $s \geq s_1$ (s_1 dado en (1.13)) tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) \\ &+ s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ &\leq C\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\left[\|a-c\|_\infty^2 s^3 t^{-3}(T-t)^{-3} + s^7 t^{-7}(T-t)^{-7}\right]|\psi|^2 \\ &+ C\left(\|B\|_\infty^2 + \|B-D\|_\infty^2\right) s^5 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2. \end{aligned}$$

Si elegimos ahora $s \geq \text{máx}\left\{s_1, CT^2\left(\|a-c\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty + \|B-D\|_\infty\right)\right\}$, la estimación precedente nos da la desigualdad "mixta"

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) \\ &+ s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ &\leq\; Cs^7\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Teniendo en cuenta la expresión de s_1 (ver (1.13)) deducimos que la estimación anterior es válida para cualquier $s \geq s_3$, con

$$s_3 = \sigma_3\left(T + T^2\left(1 + \|c\|_\infty^{2/3} + \|a-c\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty + \|B-D\|_\infty + \|D\|_\infty^2\right)\right)$$

y $\sigma_3 = \sigma_3(\Omega, B_0)$ una nueva constante positiva.

3. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}|\varphi|^2 = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} t^3(T-t)^3|\varphi|^2 \\ &\leq \frac{1}{2C_2}s^3\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \leq \frac{1}{2C_2}s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \end{aligned}$$

si $s \geq \sqrt[3]{2C_2}\,T^2/4$. Supongamos ahora que $s \geq \overline{s}$, con $\overline{s}$ dado por (1.9), siendo $\overline{\sigma}(\Omega, B_0) = \text{máx}\{\sigma_2(\Omega, B_0), \sigma_3(\Omega, B_0), \sqrt[3]{2C_2}/4\}$. Se verifican de este modo las desigualdades (1.14) y (1.28). Sumando estas dos estimaciones y usando la desigualdad precedente llegamos a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha}t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2\right)\\
&+s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2+s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\\
&+s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2+s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\\
\leq{}& C\left(s^3\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2+s^7\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\right).
\end{aligned}
$$

Basta con tener de nuevo en cuenta (1.23) para inferir la estimación (1.8). $\square$

En el capítulo siguiente mostraremos una desigualdad de observabilidad para las soluciones de (1.6)–(1.7) cuando $\psi^0 = 0$ (ver el Teorema 2.4), cuya demostración combina la desigualdad de Carleman que acabamos de demostrar para estas mismas soluciones con las correspondientes estimaciones de energía. Como veremos, dicha desigualdad de observabilidad constituirá la principal herramienta para demostrar el primer resultado que presentaremos en esta Memoria sobre existencia de los llamados controles insensibilizantes, el Teorema 2.2.

1.3. El caso de condiciones de contorno lineales de tipo Fourier

Dedicamos esta sección a probar una desigualdad de tipo Carleman para las soluciones del sistema lineal acoplado

$$
\begin{cases}
\partial_t\varphi-\Delta\varphi+c\varphi=0 \ \text{ en } Q,\\
\partial_n\varphi+k\varphi=0 \ \text{ sobre } \Sigma,\\
\varphi(x,0)=\varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega,
\end{cases}
\tag{1.29}
$$

$$
\begin{cases}
-\partial_t\psi-\Delta\psi+a\psi=\varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q,\\
\partial_n\psi+h\psi=0 \ \text{ sobre } \Sigma,\\
\psi(x,T)=\psi^0(x) \ \text{ en } \Omega,
\end{cases}
\tag{1.30}
$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $h, k \in L^\infty(\Sigma)$ (al menos) y $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$. Comenzamos estudiando la existencia y unicidad de solución débil de sistemas lineales de la forma

$$
\begin{cases}
\partial_t z-\Delta z+az=g \ \text{ en } Q,\\
\partial_n z+hz=0 \ \text{ sobre } \Sigma,\\
z(x,0)=z^0(x) \ \text{ en } \Omega.
\end{cases}
\tag{1.31}
$$

Se dice que z es solución débil de (1.31) si $z \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $\partial_t z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ y se tiene

$$\begin{cases} \langle \partial_t z(t), u\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega \nabla z(t)\cdot\nabla u\,dx + \int_\Omega a(t)z(t)u\,dx + \int_{\partial\Omega} h(t)z(t)u\,d\sigma \\ = \displaystyle\int_\Omega g(t)u\,dx \quad \text{en } L^2(0,T), \quad \forall u \in H^1(\Omega), \\ z(0) = z^0. \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado de existencia de solución débil, unicidad y dependencia continua respecto de los datos:

Proposición 1.5 *Supongamos que $a \in L^\infty(Q)$, $h \in L^\infty(\Sigma)$, $g \in L^2(Q)$ y $z^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, el sistema (1.31) posee una única solución z que verifica*

$$z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \quad y \quad \partial_t z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)').$$

Además, existen constantes positivas $C = C(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma}, \|g\|_{2;Q}, \|z^0\|_{2;\Omega})$ y $K = K(\|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma})$ tales que

$$\|z\|_{L^2(H^1(\Omega))} + \|z\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|\partial_t z\|_{L^2(H^1(\Omega)')} \le C$$

y

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\|z(t)\|_{2;\Omega}^2 + \displaystyle\int_\Omega |\nabla z(t)|^2\,dx \le K(\|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma})\|z(t)\|_{2;\Omega}^2 + \|g(t)\|_{2;\Omega}^2, \\ \textit{para } t \textit{ c.p.d. (casi por doquier) en } (0,T). \end{cases} \tag{1.32}$$

Idea de la demostración: La existencia y unicidad de solución de (1.31) y la dependencia continua respecto de los datos se prueba utilizando el Método de Galerkin junto con las estimaciones de energía para las correspondientes soluciones aproximadas. Al ser el Método de Galerkin un argumento bien conocido, éste será omitido y sólo nos centraremos en la prueba de la estimación de energía para z.

Multiplicando la EDP de (1.31) por z e integrando en Ω, obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{2;\Omega}^2 + \int_\Omega |\nabla z(t)|^2 \\ &\le \|h\|_{\infty;\Sigma}\int_{\partial\Omega}|z(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} + \|a\|_\infty\right)\|z(t)\|_{2;\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|g(t)\|_{2;\Omega}^2, \end{aligned} \tag{1.33}$$

para t c.p.d. en $(0,T)$. Ahora bien, gracias a la cadena de inyecciones

$$H^1(\Omega) \rightrightarrows H^\gamma(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad 0 < \gamma < 1,$$

(siendo la primera compacta), podemos aplicar un argumento de compacidad–unicidad y deducir que, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{C}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{H^\gamma(\Omega)} \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{C}(\varepsilon)\|u\|^2_{2;\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Teniendo en cuenta, además, la inyección continua de $H^\gamma(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$, para $\gamma > 1/2$, existe $\mathcal{C}(\|h\|_{\infty;\Sigma}) > 0$ tal que

$$\|h\|_{\infty;\Sigma} \int_{\partial\Omega} |z(t)|^2 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla z(t)|^2 + \mathcal{C}(\|h\|_{\infty;\Sigma})\|z(t)\|^2_{2;\Omega},$$

para $1/2 < \gamma < 1$. Combinando esta estimación con (1.33), se obtiene (1.32), con $K = K(\|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma})$ dada por $K = 1 + 2(\|a\|_\infty + \mathcal{C}(\|h\|_{\infty;\Sigma}))$. □

Como consecuencia inmediata del resultado precedente, para cada $a, c \in L^\infty(Q)$, $h, k \in L^\infty(\Sigma)$ y $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, el sistema acoplado (1.29)–(1.30) posee una única solución débil (φ, ψ) que verifica

$$\varphi, \psi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t\varphi, \partial_t\psi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)').$$

Como dijimos, nos proponemos ahora probar una desigualdad de Carleman para (φ, ψ). Consideramos nuevamente dos abiertos no vacíos ω y $\mathcal{O}$ contenidos en Ω. En este caso podemos probar el siguiente resultado:

Teorema 1.6 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, $a, c \in L^\infty(Q)$ y $h, k, \partial_t h, \partial_t k \in L^\infty(\Sigma)$. Sea $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto no vacío. Entonces, existe una función $\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y existen dos constantes positivas C_0 y $\overline{s}$ (dependiendo de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$) tales que, para cualesquiera $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, la solución (φ, ψ) de* (1.29)–(1.30) *satisface*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2 + |\partial_t\psi|^2 + |\Delta\varphi|^2 + |\Delta\psi|^2\right) \\
&\quad + s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}\left(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2\right) \\
&\quad + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}\left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right) \\
&\quad \leq C_0 s^7 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

para cualquier $s \geq \overline{s}$, donde $\alpha(x,t) = \dfrac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

Demostración: La prueba de este resultado sigue los mismos pasos de la demostración del Teorema 1.4. Por esta razón, omitiremos los detalles.

Consideramos de nuevo un abierto auxiliar no vacío $B_1 \subset\subset B_0$. Sean α_0, $\widetilde{\alpha}_0$, α y $\widetilde{\alpha}$ las funciones del Lema 1.3 asociadas a $\mathcal{B} = B_1$. Aplicamos dicho lema a la solución φ de (1.29) y a $F = -c\varphi$, con $\mathcal{B} = B_1$. Recordando la Observación 1.1, deducimos que, para dos nuevas constantes $C_1 = C_1(\Omega, B_0, T, \|k\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}) > 0$ y $s_1 = s_1(\Omega, B_0, T, \|c\|_\infty, \|k\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}) > 0$, la función φ verifica la estimación (1.12), para cualquier $s \geq s_1$.

En segundo lugar, aplicamos el Lema 1.3 y la Observación 1.1 a la solución ψ de (1.30) con $\mathcal{B} = B_1$ y $F = -a\psi + \varphi \mathbf{1}_{\mathcal{O}}$. Entonces, para dos nuevas constantes positivas $C_2 = C_2(\Omega, B_0, T, \|h\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma})$ y $s_2 = s_2(\Omega, B_0, T, \|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma})$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s} \iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t) \left(|\partial_t \psi|^2 + |\Delta \psi|^2 \right) \\ &+ s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1} |\nabla \psi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\psi|^2 \\ &\leq C_2 \left(s^3 \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\psi|^2 + \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 \right), \end{aligned} \tag{1.35}$$

para cualquier $s \geq s_2$.

Sea $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ una función verificando (1.15) y (1.16). Tomamos $s \geq s_1$. Multiplicando la EDP de (1.30) por $\varphi \xi_1 u$, con u dada por (1.17) e integrando en Q se obtiene

$$\begin{aligned} &s^3 \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \xi_1 \\ &= \iint_Q \left(-\partial_t \psi - \Delta \psi + a\psi \right) \varphi \xi_1 u := I_1 + I_3 + I_4 + I_6, \end{aligned} \tag{1.36}$$

con I_i, $i = 1, 3, 4, 6$ como en (1.18). Cada I_i puede acotarse exactamente como se hizo en la demostración del Teorema 1.4, obteniendo de este modo las estimaciones (1.19), (1.21), (1.24) y (1.27), respectivamente, válidas para cualquier $s \geq \text{máx}\{s_1, C(T+T^2)\}$, con $C > 0$ dependiendo sólo de Ω y B_0. Llevando tales estimaciones a (1.36) y usando (1.12) (y (1.15)), podemos estimar

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s} \iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t) \left(|\partial_t \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2 \right) \\ &+ s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1} |\nabla \varphi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \\ &\leq C \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \left[\|a-c\|_\infty^2 s^3 t^{-3}(T-t)^{-3} + s^7 t^{-7}(T-t)^{-7} \right] |\psi|^2, \end{aligned}$$

para $s \geq \text{máx}\{s_1, C(T+T^2)\}$. Entonces, si

$$s \geq \text{máx}\left\{ s_1, C\left(T + T^2 + T^2 \|a-c\|_\infty^{1/2} \right) \right\},$$

la función φ satisface la estimación “mixta” (1.28), para una nueva constante $C > 0$ que depende de Ω, B_0, T, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$. Finalmente, argumentando como en la demostración del Teorema 1.4, de (1.28) y (1.35) deducimos la existencia de $C_0 = C_0\,(\Omega, B_0, T, \|h\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}, \|k\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}) > 0$ tal que se tiene (1.34), para cualquier $s \geq \overline{s} = \text{máx}\{s_1, s_2, C(T+T^2+T^2\|a-c\|_\infty^{1/2})\}$, como queríamos probar. □

Como en la sección anterior, probaremos en el próximo capítulo una desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema acoplado (1.29)–(1.30) cuando $\psi^0 = 0$, a partir de la desigualdad de Carleman (para estas mismas soluciones) que acabamos de demostrar y de las estimaciones de energía correspondientes (ver el Teorema 2.6).

***Observación* 1.2** Es interesante hacer notar que podría obtenerse la dependencia explícita de las constantes C_0 y $\overline{s}$ del Teorema 1.6 con respecto a T y a los potenciales a y c. Sin embargo, la dependencia con respecto a los potenciales h y k que aparecen en las condiciones de contorno no es explicíta. Ello viene de aplicar el Lema 1.2 de [26] que hemos recordado en el Lema 1.3 de la sección introductoria. □

1.4. Una desigualdad de Carleman para un modelo lineal de campo de fases

En esta sección probaremos una desigualdad de Carleman para un nuevo problema parabólico lineal acoplado. Como en las secciones precedentes, trataremos de acotar todos los sumandos de Carleman que aparecen a la izquierda por una sola de las variables intervinientes (localizada en el abierto de control). En concreto, consideramos el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi - \nabla\cdot(D\varphi) + c\varphi = -\Delta\psi \ \text{ en } Q, \\ -\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x), \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.37}$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$. Gracias a las correspondientes estimaciones de energía y al método de Galerkin, se prueba que este sistema posee una única solución (φ, ψ), con la siguiente regularidad:

$$\varphi, \psi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t\varphi, \partial_t\psi \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

El sistema (1.37) es el sistema adjunto de un *sistema de campo de fases* lineal, cuyas propiedades de controlabilidad analizaremos en el Capítulo 4 de esta Memoria.

Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío arbitrario. Se tiene:

Teorema 1.7 *Sea B_0 un abierto no vacío contenido en ω. Entonces, existe una función $\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y existen dos constantes $C, \overline{\sigma} > 0$ (dependiendo sólo de Ω y B_0) tales que la solución (φ, ψ) de* (1.37) *asociada a cualquier $(\varphi^0, \psi^0) \in L^2(\Omega)^2$ satisface*

$$\begin{aligned} s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ + s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2}|\nabla\psi|^2 + s^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4}(T-t)^{-4}|\psi|^2 \\ \leq C s^7 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2, \end{aligned} \tag{1.38}$$

para cualquier $s \geq \overline{s}$, con

$$\overline{s} = \overline{\sigma}(\Omega, B_0)(T + T^2 M''), \tag{1.39}$$

siendo

$$M'' = 1 + \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|B+D\|_\infty + \|B\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty + \|D\|_\infty^2.$$

De nuevo, la función α que aparece en (1.38) *es de la forma $\alpha(x,t) = \dfrac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}$.*

Demostración: El esquema de la demostración es similar a la del Teorema 1.4. Sean (φ, ψ) la solución de (1.37) asociada a $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ y B_1 un abierto auxiliar no vacío tal que $B_1 \subset\subset B_0 \subset \omega$.

1. *Desigualdades de Carleman para φ y ψ.* Comenzamos aplicando el Lema 1.2 con $\mathcal{B} = B_1$. Sean α_0 y α las correspondientes funciones asociadas a B_1. Aplicando este resultado a la función φ y a $F = -c\varphi + \nabla \cdot (D\varphi - \nabla\psi)$ obtenemos que, para ciertas constantes positivas $C_1 = C_1(\Omega, B_0)$ y $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1(\Omega, B_0)$, se tiene

$$\begin{aligned} s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ \leq C_1 \left(s^3 \iint_{B_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 + s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2}|\nabla\psi|^2 \right), \end{aligned} \tag{1.40}$$

para cualquier $s \geq \overline{s}_1$, con

$$\overline{s}_1 = \overline{\sigma}_1(\Omega, B_0)\left(T + T^2 + T^2\|c\|_\infty^{2/3} + T^2\|D\|_\infty^2\right). \tag{1.41}$$

Aplicamos ahora el segundo apartado del Lema 1.2, con $\mathcal{B} = B_1 \subset B_0$, a la función $z = \psi s^{1/2} t^{-1/2}(T-t)^{-1/2}$ solución de

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z = F \ \text{ en } Q, \\ z = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \end{cases}$$

donde F viene dada por

$$F = \frac{1}{2} s^{1/2} t^{-3/2} (T-t)^{-3/2} (T-2t) \psi + s^{1/2} t^{-1/2} (T-t)^{-1/2} [\varphi - a\psi + \nabla \cdot (B\psi)].$$

Teniendo en cuenta que $s \geq \overline{\sigma}(\Omega, B_0) T$, obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} & s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |\nabla \psi|^2 + s^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 \\ \leq \widetilde{C}_0 & \left(s^4 \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\psi|^2 \right. \\ + s & \left. \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1} (T-t)^{-1} (|\varphi|^2 + |a\psi|^2) + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |B\psi|^2 \right), \end{aligned}$$

y de aquí la desigualdad

$$\begin{aligned} & s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |\nabla \psi|^2 + s^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 \\ \leq C_2 & \left(s^4 \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 + s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1} (T-t)^{-1} |\varphi|^2 \right), \end{aligned} \tag{1.42}$$

válida para cualquier $s \geq \overline{s}_2 = \overline{\sigma}_2(\Omega, B_0) \left(T + T^2 + T^2 \|a\|_\infty^{2/3} + T^2 \|B\|_\infty^2 \right)$, con $C_2 = C_2(\Omega, B_0) > 0$, $\overline{\sigma}_2(\Omega, B_0) > 0$ y α como en (1.40). Combinando (1.40) y (1.42), existen $C_3 = C_3(\Omega, B_0) > 0$ y $\overline{\sigma}_3(\Omega, B_0) > 0$ tales que

$$\begin{aligned} & s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1} (T-t)^{-1} |\nabla \varphi|^2 + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 \\ & + s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |\nabla \psi|^2 + s^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 \\ \leq C_3 & \left(s^3 \iint_{B_1 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 + s^4 \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-4} (T-t)^{-4} |\psi|^2 \right), \end{aligned} \tag{1.43}$$

para cualquier $s \geq \overline{s}_3$, con

$$\overline{s}_3 = \overline{\sigma}_3(\Omega, B_0) \left(T + T^2 \left(1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2 \right) \right).$$

2. *Una desigualdad "mixta" para φ y ψ.* Sea $s \geq \overline{s}_1$, con $\overline{s}_1$ dado por (1.41). Como en la demostración del Teorema 1.4, consideremos una función $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ verificando (1.16) y

$$0 \leq \xi_1 \leq 1 \text{ en } \Omega, \quad \xi_1 = 1 \text{ en } B_1, \quad \operatorname{sop} \xi_1 \subset B_0 \subset \omega. \tag{1.44}$$

Pongamos $u = e^{-2s\alpha}s^3t^{-3}(T-t)^{-3}$. Multiplicando la EDP que verifica ψ por $\varphi\xi_1 u$ e integrando en Q, obtenemos

$$\begin{aligned}
&s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 = \iint_Q \left[-\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi\right]\varphi\xi_1 u \\
&= \iint_Q \varphi\psi\xi_1\partial_t u + \iint_Q \psi\xi_1 u[-\Delta\varphi - \nabla\cdot(D\varphi) + c\varphi + \Delta\psi] + \iint_Q (\nabla\psi\cdot\nabla(\xi_1 u))\varphi \\
&+ \iint_Q (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\xi_1 u + \iint_Q a\varphi\psi\xi_1 u + \iint_Q ((B\psi)\cdot\nabla\varphi)\xi_1 u + \iint_Q ((B\psi)\cdot\nabla(\xi_1 u))\varphi.
\end{aligned}$$

De aquí, sin más que integrar por partes, se tiene

$$\begin{aligned}
&s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 = \iint_Q (a+c)\varphi\psi\xi_1 u + \iint_Q (B\cdot\nabla\varphi)\psi\xi_1 u \\
&+ \iint_Q \varphi\psi\big(\xi_1\partial_t u - \Delta(\xi_1 u) + (B+D)\cdot\nabla(\xi_1 u)\big) + 2\iint_Q (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\xi_1 u \\
&+ \iint_Q (D\cdot\nabla\psi)\varphi\xi_1 u - \iint_Q (\nabla(\xi_1 u)\cdot\nabla\psi)\psi - \iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1 u := \sum_{k=1}^{9} J_k.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Estimemos cada J_k, $1 \le k \le 9$. Como en pruebas anteriores, C designará una constante positiva que dependerá sólo de Ω y B_0, cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente.

$\diamond$ Acotamos J_k, $1 \le k \le 5$, de manera análoga a como hicimos con las correspondientes I_k, $1 \le k \le 5$ en la prueba del Teroema 1.4 (de hecho, $J_k = I_k$ para $k = 3, 4$):

$$J_1 = \iint_Q (a+c)\varphi\psi\xi_1 u \le \delta_1 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{1}{4\delta_1}\|a+c\|_\infty^2 \iint_Q \xi_1 u|\psi|^2,$$

$$\begin{aligned}
J_2 = \iint_Q (B\cdot\nabla\varphi)\,\psi\xi_1 u &\le \gamma_1 s \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\xi_1 \\
&+ \frac{1}{4\gamma_1}\|B\|_\infty^2 s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\xi_1,
\end{aligned}$$

$$J_3 \le \delta_2 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_2}s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\xi_1,$$

$$J_4 \le \delta_3 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_3}s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0},$$

$$J_5 \le \delta_4 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{C}{\delta_4}\|B+D\|_\infty^2 s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0},$$

para cualesquiera $\gamma_1 > 0$ y $\delta_k > 0$, $1 \le k \le 4$, que elegiremos más adelante.

$\diamond$ Estimamos a continuación los términos en los que aparece ψ. Usando de nuevo desigualdades de Cauchy y Young, se tiene

$$J_6 = 2\iint_Q (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\xi_1 u \leq \gamma_2 s \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\xi_1 + \frac{1}{\gamma_2}s^5\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\nabla\psi|^2\xi_1,$$

para cualquier $\gamma_2 > 0$. De manera análoga estimamos $J_7 = \iint_Q (D\cdot\nabla\psi)\varphi\xi_1 u$. Así,

$$J_7 \leq \delta_5 \iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{1}{4\delta_5}\|D\|_\infty^2 s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\nabla\psi|^2\xi_1,$$

para $\delta_5 > 0$. Estimamos finalmente $J_8 = -\iint_Q (\nabla(\xi_1 u)\cdot\nabla\psi)\psi$ (obsérvese que $J_9 \leq 0$). Expresando J_8 en la forma

$$J_8 = -\frac{1}{2}\iint_Q \nabla(\xi_1 u)\cdot\nabla|\psi|^2 = \frac{1}{2}\iint_Q \Delta(\xi_1 u)|\psi|^2$$

y acotando como se hizo con I_4 en la demostración del Teroema 1.4 (ver p. 23), tenemos

$$J_8 \leq C\left(s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\xi_1^{1/2} + s^4\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-4}(T-t)^{-4}|\psi|^2\xi_1^{1/2} + s^5\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\xi_1\right) \leq Cs^5\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0},$$

usando (1.23).

Pasamos seguidamente a tratar los términos en los que aparece $|\nabla\psi|^2$. Como se verá más adelante, las constantes γ_2 y δ_5 sólo dependen de Ω y B_0. Utilizamos este hecho para deducir que, para una nueva constante $C = C(\Omega, B_0) > 0$, se verifica

$$\frac{1}{\gamma_2}s^5\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-5}(T-t)^{-5}|\nabla\psi|^2\xi_1 + \frac{1}{4\delta_5}\|D\|_\infty^2 s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\nabla\psi|^2\xi_1 \leq \frac{2}{\gamma_2}\iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1\overline{u}, \tag{1.46}$$

para $s \geq C(T^2 + T^2\|D\|_\infty)$. En esta acotación $\overline{u}$ viene dada por

$$\overline{u} = e^{-2s\alpha}s^5 t^{-5}(T-t)^{-5}.$$

De este modo, para tener estimados los términos J_6 y J_7 basta con acotar la última integral de la acotación (1.46). Para ello, multiplicamos la EDP que verifica ψ por $\psi\xi_1\overline{u}$ e integramos en Q, obteniendo

$$\begin{aligned}\iint_Q \varphi\psi\xi_1\overline{u} &= \iint_Q \left[-\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi\right]\psi\xi_1\overline{u} \\ = \frac{1}{2}\iint_Q |\psi|^2\xi_1\partial_t\overline{u} &+ \iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1\overline{u} - \frac{1}{2}\iint_Q |\psi|^2\Delta(\xi_1\overline{u}) + \iint_Q a|\psi|^2\xi_1\overline{u} \\ &+ \iint_Q (B\cdot\nabla\psi)\psi\xi_1\overline{u} + \iint_Q (B\cdot\nabla(\xi_1\overline{u}))|\psi|^2.\end{aligned}$$

Observando que

$$-\iint_Q (B\cdot\nabla\psi)\psi\xi_1\overline{u} \le \frac{1}{2}\iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1\overline{u} + \frac{1}{2}\|B\|_\infty^2\iint_Q |\psi|^2\xi_1\overline{u},$$

el término bajo estudio, $\displaystyle\iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1\overline{u}$, se acota como sigue:

$$\begin{aligned}\iint_Q |\nabla\psi|^2\xi_1\overline{u} &\le 2\iint_Q |\varphi||\psi|\xi_1\overline{u} + \iint_Q |\psi|^2\xi_1|\partial_t\overline{u}| + \iint_Q |\psi|^2|\Delta(\xi_1\overline{u})| \\ &+ 2\|B\|_\infty\iint_Q |\psi|^2|\nabla(\xi_1\overline{u})| + (2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)\iint_Q |\psi|^2\xi_1\overline{u} := \sum_{i=1}^5 A_i.\end{aligned} \tag{1.47}$$

Estimamos ahora A_i, $1 \le i \le 4$. Primero,

$$A_1 = 2\iint_Q |\varphi||\psi|\xi_1\overline{u} \le \delta\iint_Q \xi_1 u|\varphi|^2 + \frac{1}{\delta}s^7\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0},$$

para $\delta > 0$ arbitrario, que elegiremos más tarde. Observemos que

$$|\partial_t\overline{u}| \le Ts^5e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}\left(Cs + 5T^2/4\right) \le CTs^6e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7},$$

pues $s \ge \overline{\sigma}_1(\Omega, B_0)T^2$. Entonces, podemos estimar

$$A_2 = \iint_Q |\psi|^2\xi_1|\partial_t\overline{u}| \le Cs^7\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2\mathbf{1}_{B_0},$$

puesto que $s \ge \overline{\sigma}_1(\Omega, B_0)T$. Para acotar $A_3 = \displaystyle\iint_Q |\psi|^2|\Delta(\xi_1\overline{u})|$, notemos que

$$\Delta(\xi_1\overline{u}) = s^5t^{-5}(T-t)^{-5}\left((\Delta\xi_1)e^{-2s\alpha} + 2\nabla\xi_1\cdot\nabla(e^{-2s\alpha}) + \xi_1\Delta(e^{-2s\alpha})\right),$$

que junto a (1.16) y (1.22)–(1.23), nos da

$$A_3 \le Cs^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}.$$

De manera análoga, estimamos

$$A_4 = 2\|B\|_\infty \iint_Q |\psi|^2 |\nabla(\xi_1 \overline{u})| \le C\|B\|_\infty s^6 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-6}(T-t)^{-6}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0},$$

sin más que observar que

$$\nabla(\xi_1 \overline{u}) = (\nabla \xi_1)\overline{u} - 2\xi_1 e^{-2s\alpha} s^6 t^{-6}(T-t)^{-6} \nabla \alpha_0,$$

junto con (1.16) y (1.23). Así, gracias a las estimaciones de cada A_i, $1 \le i \le 4$, de (1.47) deducimos

$$\begin{aligned} \iint_Q |\nabla \psi|^2 \xi_1 \overline{u} \le \delta \iint_Q \xi_1 u |\varphi|^2 + \left(\frac{1}{\delta} + C\right) s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0} \\ + (2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2) s^5 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0} \\ + C\|B\|_\infty s^6 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-6}(T-t)^{-6}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}, \end{aligned} \tag{1.48}$$

estimación válida para $s \ge C(T + T^2)$ y $\delta > 0$ arbitrario.

Llevando a (1.45) las estimaciones de cada J_k ($1 \le k \le 9$, ver páginas 33 y 34) y teniendo en cuenta (1.46), (1.48) y (1.44), se obtiene (recordemos que $\overline{u} = e^{-2s\alpha} s^5 t^{-5}(T-t)^{-5}$)

$$\begin{aligned} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \xi_1 \le \left(\sum_{i=1}^{5} \delta_i + \frac{2\delta}{\gamma_2} \right) s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \xi_1 \\ + \frac{\|a+c\|_\infty^2}{4\delta_1} \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \xi_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) s \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla \varphi|^2 \xi_1 \\ + \left(\frac{1}{4\gamma_1}\|B\|_\infty^2 + \frac{C}{\delta_4}\|B+D\|_\infty^2 + C + \frac{4}{\gamma_2}\|a\|_\infty + \frac{2}{\gamma_2}\|B\|_\infty^2 \right) \iint_Q \overline{u}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0} \\ + \frac{2C}{\gamma_2}\|B\|_\infty s^6 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-6}(T-t)^{-6}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0} \\ + \left(\frac{C}{\delta_2} + \frac{C}{\delta_3} + \frac{2}{\gamma_2 \delta} + \frac{2C}{\gamma_2} \right) s^7 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \mathbf{1}_{B_0}, \end{aligned}$$

para cualquier $s \ge \overline{s}_4$, con

$$\overline{s}_4 = \overline{\sigma}_4(\Omega, B_0)(T + T^2 + T^2\|D\|_\infty).$$

Tomando ahora $\delta_i = 1/12$, $1 \le i \le 5$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/(8C_3)$, con $C_3 = C_3(\Omega, B_0)$ como en (1.43), y $\delta = \gamma_2/24$, deducimos que para cualquier $s \ge \overline{s}_4$ se verifica la estimación

$$\begin{aligned} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \xi_1 \le \frac{1}{2C_3} s \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 \\ + C\|a+c\|_\infty^2 s^3 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\ + C\left(1+\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|B+D\|_\infty^2\right) s^5 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-5}(T-t)^{-5}|\psi|^2 \\ + C\|B\|_\infty s^6 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-6}(T-t)^{-6}|\psi|^2 + Cs^7 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2. \end{aligned}$$

De aquí, se deduce fácilmente (recuérdese (1.23))

$$\begin{aligned} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \xi_1 \le \frac{1}{2C_3} s \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2 \\ + Cs^7 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2, \end{aligned} \tag{1.49}$$

para cualquier $s \ge \overline{s}_5$, con

$$\overline{s}_5 = \overline{\sigma}_5(\Omega, B_0)\left(T + T^2\left(1 + \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|B+D\|_\infty + \|B\|_\infty + \|D\|_\infty\right)\right).$$

Combinando finalmente la estimación precedente con (1.43) y recordando de nuevo (1.23), inferimos la desigualdad de Carleman deseada (1.38), válida para cualquier $s \ge \overline{s}$, con $\overline{s}$ dado por (1.39). □

Como en los casos estudiados en las secciones anteriores, en virtud de la desigualdad de tipo Carleman que acabamos de probar para las soluciones del sistema lineal acoplado (1.37) y de las correspondientes estimaciones de energía, se prueba una desigualdad de observabilidad para estas mismas soluciones, desigualdad que nos permitirá demostrar un resultado de controlabilidad nula para un sistema lineal llamado sistema (lineal) de campo de fases (remitimos al lector al Capítulo 4 de esta Memoria).

***Observación* 1.3** Notemos que, debido al hecho de que en (1.37) las ecuaciones no son de estructura autoadjunta, aparecen en (1.45) términos con $\nabla\psi$ que no aparecían en (1.18). Ello hace que en el segundo punto de la demostración precedente haya que trabajar un poco más que en la del Teorema 1.4. □

***Observación* 1.4** La desigualdad de Carleman que acabamos de probar mejora la establecida en [2]. Más precisamente, los autores consideran en dicho trabajo el sistema (1.37), con $a \equiv 0$ y $B \equiv D \equiv 0$, y prueban, con una técnica distinta a la desarrollada en esta Memoria, una estimación análoga a (1.38) con una constante $C > 0$ que depende de Ω, T y $\|c\|_\infty$ y con un peso a la derecha de la forma $e^{-rs\alpha}$ ($r \in (0,2)$) que, debido a la forma de la función $\alpha(x,t)$, es peor que el peso $e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}$ que aparece a la derecha de la desigualdad (1.38). □

1.5. Comentarios adicionales y algunos resultados que quedan pendientes

Finalizamos el capítulo con unos breves comentarios, algunos de los cuales dan lugar a problemas que quedan pendientes.

1. La hipótesis $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ es esencial para obtener las desigualdades de Carleman establecidas en los Teoremas 1.4 y 1.6. En particular, se usa esta hipótesis para eliminar φ a la derecha de las estimaciones (1.14) y (1.35). La obtención de resultados análogos para abiertos de control y de observación disjuntos es un problema abierto.

2. Recientemente, E. Fernández-Cara y otros autores (cf. [21]) han obtenido una desigualdad de Carleman para un sistema (adjunto) general de la forma

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z = f_1 + \nabla \cdot f_2 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n z + f_2 \cdot n = f_3 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(x,0) = z^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.50}$$

   donde $f_1 \in L^2(Q)$, $f_2 \in L^2(Q)^N$ y $f_3 \in L^2(\Sigma)$. Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío arbitrariamente pequeño. El resultado es el siguiente:

   Teorema *En las hipótesis precedentes, existen $\overline{\lambda}$, σ_1, σ_2 y C, dependiendo sólo de Ω y ω, tales que, para cualesquiera $\lambda \geq \overline{\lambda}$, $s \geq \overline{s} = \sigma_1(e^{\sigma_2 \lambda} T + T^2)$ y cualquier $z^0 \in L^2(\Omega)$, la solución débil de* (1.50) *satisface*

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\alpha}(s\,\lambda^2 \xi\, |\nabla z|^2 + s^3\,\lambda^4\,\xi^3\,|z|^2) + s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\,\xi^2\,|z|^2 \\ &\leq C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}(|f_1|^2 + \ s^2\,\lambda^2\,\xi^2\,|f_2|^2) + s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\,\xi\,|f_3|^2 \right. \\ &\qquad \left. + s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\,\xi^3\,|z|^2 \right). \end{aligned} \tag{1.51}$$

   Aquí, $\alpha = \alpha(x,t)$ y $\xi = \xi(x,t)$ son funciones positivas apropiadas, de nuevo dependiendo sólo de Ω y ω.

   En virtud de este resultado, que generaliza el establecido en el Lema 1.3, los autores prueban una desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema (adjunto) lineal

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi - \nabla\cdot(B\varphi) + a\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n\varphi + (B\varphi)\cdot n + \beta\varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$, $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ y β sólo está en $L^\infty(\Sigma)$, obteniendo además la dependencia explícita de las constantes respecto de T y de los potenciales. Como consecuencia de la citada desigualdad de observabilidad, se prueba en [21] la controlabilidad nula del sistema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B\cdot\nabla y + ay = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + \beta y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $y^0 \in L^2(\Omega)$ y potenciales a, B y β en L^∞. Un argumento adecuado de punto fijo permite demostrar un resultado de controlabilidad nula para una ecuación del calor semilineal con término no lineal de la forma $f(y,\nabla y)$, donde f tiene determinado crecimiento superlineal en el infinito, a la que se añaden condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier (cf. [22]).

Como consecuencia de la desigualdad (1.51) para las soluciones de (1.50), se puede probar una desigualdad de tipo Carleman que generaliza la establecida en el Teorema 1.6 del presente capítulo al caso de sistemas lineales acoplados más generales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t\varphi - \Delta\varphi + D\cdot\nabla\varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n\varphi + k\varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n\psi + (B\cdot n + h)\psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ y h, k sólo en $L^\infty(\Sigma)$. Aquí, $\mathcal{O}$ es nuevamente un subconjunto abierto de Ω tal que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Este resultado quedará recogido en [30], trabajo actualmente en preparación.

3. Una mirada detallada a la demostración del Teorema 1.7 nos permite observar que se puede obtener una desigualdad de tipo Carleman análoga a (1.38) para sistemas lineales acoplados más generales que (1.37), a saber, sistemas de la

forma:

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi - \nabla\cdot(D\varphi) + c\varphi - \nabla\cdot(F\psi) + e\psi = -\Delta\psi \ \text{ en } Q, \\ -\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x), \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.52}$$

con $a, c, e \in L^\infty(Q)$, $B, D, F \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$. Sea $B_0 \subset \omega$ un abierto no vacío. Siguiendo la demostración del Teorema 1.7, vemos que la presencia de los nuevos términos afecta, por un lado, a la desigualdad de Carleman para φ, obteniendo en este caso una estimación análoga a (1.43), válida ahora para cualquier $s \geq \widetilde{s}_1 = \widetilde{\sigma}_1 \left(T + T^2 \left(1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|e\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2 + \|F\|_\infty\right)\right)$, donde $\widetilde{\sigma}_1 = \widetilde{\sigma}_1(\Omega, B_0) > 0$. La etapa 2 de la demostración también se ve afectada. En concreto, al multiplicar la EDP que verifica ψ por $\varphi\xi_1 u$ e integrar en Q, se tiene en este caso la expresión

$$s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\xi_1 = \sum_{k=1}^{9} J_k + \iint_Q (F\psi)\cdot\nabla(\psi\xi_1 u) + \iint_Q e\xi_1 u|\psi|^2,$$

con J_k, $1 \leq k \leq 9$, como en (1.45). Al estimar los dos últimos sumandos, deducimos que existe $\widetilde{\sigma}_2 = \widetilde{\sigma}_2(\Omega, B_0) > 0$ tal que se tiene la estimación (1.49), para cualquier $s \geq \widetilde{s}_2$, con

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_2 = \widetilde{\sigma}_2 \Big(T + T^2 \Big(&1 + \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|e\|_\infty^{1/4} + \|B+D\|_\infty + \|B\|_\infty \\ &+ \|D\|_\infty + \|F\|_\infty^{1/4} + \|F\|_\infty^{1/3} + \|F\|_\infty^{2/3}\Big)\Big). \end{aligned}$$

En consecuencia, existen dos nuevas constantes $C, \widetilde{\sigma} > 0$ (dependiendo sólo de Ω y B_0) tales que la solución (φ, ψ) de (1.52) asociada a cualesquiera $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ satisface (1.38) (con α de la forma (1.11)), para cualquier $s \geq \widetilde{s} = \widetilde{\sigma}(\Omega, B_0)(T + T^2\widetilde{M})$, siendo

$$\begin{aligned} \widetilde{M} = 1 &+ \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|e\|_\infty^{1/4} + \|e\|_\infty^{1/2} + \|B+D\|_\infty \\ &+ \|B\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty + \|D\|_\infty^2 + \|F\|_\infty^{1/4} + \|F\|_\infty^{1/3} + \|F\|_\infty^{2/3} + \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Combinando la citada estimación de tipo Carleman obtenida para las soluciones de (1.52) con las correspondientes desigualdades de energía, es posible probar una desigualdad de observabilidad para estas soluciones, lo que permite probar un resultado de controlabilidad nula para sistemas lineales más generales que el sistema lineal de campo de fases que analizaremos en el Capítulo 4 de la Memoria. Volveremos sobre este punto en dicho capítulo.

Notemos finalmente que, si en la primera EDP de (1.52) reemplazamos el término $-\Delta\psi$ por un término de la forma $-\nabla \cdot (G\nabla\psi)$, con $G \in L^\infty(Q; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, se obtiene una desigualdad de Carleman análoga y nuevamente la dependencia de las constantes respecto de los potenciales es explícita.

Capítulo 2

Controles insensibilizantes para algunos sistemas parabólicos lineales y sublineales

Presentamos en este capítulo nuevos resultados de existencia de los denominados controles insensibilizantes para algunos sistemas parabólicos lineales y sublineales considerados en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$.

Comenzaremos con una sección de carácter introductorio donde se planteará el problema de la *insensibilización de un funcional* asociado a un sistema de estado. Definiremos los conceptos de *control insensibilizante* y *ε–insensibilizante* y haremos una breve descripción de los trabajos existentes en la literatura relativos a la existencia (o no existencia) de tales controles. En la segunda sección veremos dos nuevos resultados de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal. El primero de ellos, relativo a una ecuación del calor con un término sublineal de la forma $f(y, \nabla y)$ y condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogénas; el segundo, para una ecuación del calor con un término sublineal $F(y)$ y condiciones de contorno lineales de tipo Fourier (o Robin). En ambos casos, probaremos la existencia de controles que, actuando sobre un pequeño abierto ω del dominio, insensibilizan la energía del sistema en otro abierto $\mathcal{O} \subset \Omega$, bajo hipótesis adecuadas sobre los datos. Como veremos, estos resultados de insensibilización serán consecuencia inmediata de las desigualdades de Carleman para problemas parabólicos acoplados probadas en el capítulo anterior. En la última sección del capítulo analizaremos el caso del sistema de Stokes, presentando dos nuevos resultados sobre la existencia de controles ε–insensibilizantes para dicho sistema.

2.1. Planteamiento del problema. Antecedentes

Como en el capítulo anterior, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) un dominio acotado con $\partial\Omega$ de clase C^2 y pongamos $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, con $T > 0$ dado. En este capítulo, y en el siguiente, consideramos también dos abiertos no vacíos arbitrariamente pequeños, ω y $\mathcal{O}$, contenidos en Ω. Son los denominados *abiertos de control* y *de observación*, respectivamente.

El problema de la *insensibilización de un funcional* asociado a un sistema de estado fue introducido por J.-L. Lions en [42]. Para fijar ideas, consideremos una ecuación del calor semilineal con datos incompletos:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) + \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde f es una función de clase C^1 y globalmente Lipschitziana definida sobre $\mathbb{R}$, $\xi \in L^2(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$ son dados, τ es un número real desconocido y pequeño, $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ es desconocido, con $\|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1$, y $v \in L^2(Q)$ es una función control por determinar. La función de estado $y = y(x,t)$ puede interpretarse como la *temperatura relativa* de un cuerpo (con respecto a la del aire exterior que le rodea). La ecuación parabólica semilineal que aparece en (2.1) significa que hay una *fuente de calor* fija ξ actuando sobre el cuerpo y que también es posible actuar sobre una pequeña parte ω del mismo mediante una fuente de calor $v\mathbf{1}_\omega$. Asimismo, se supone que la temperatura sobre la frontera del cuerpo es cero y que la distribución inicial de temperatura es parcialmente conocida.

Estamos interesados en intentar dar respuesta a la siguiente

> **Cuestión 1:** *Dado un funcional diferenciable* $\Phi : L^2(Q) \to \mathbb{R}$ *definido sobre el conjunto de soluciones de* (2.1)*, ¿es posible encontrar un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que:*
>
> *i) v intervenga lo menos posible sobre el sistema (de ahí que el control v se concentre sobre un abierto ω que pueda ser "muy pequeño");*
>
> *ii) Φ "no varíe demasiado" cuando τ es suficientemente pequeño?*

Consideremos, entre las muchas elecciones posibles, el funcional Φ definido por

$$\Phi(y(x,t;\tau,v)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t;\tau,v)|^2 \, dx\, dt, \tag{2.2}$$

donde $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es la solución de (2.1) asociada a τ y a v. Este funcional es uno de los "ejemplos modelo" propuesto en [42] y el considerado en los trabajos posteriores sobre existencia de controles insensibilizantes.

Definición 2.1 *Decimos que un control v insensibiliza el funcional Φ dado por* (2.2) *si se verifica*

$$\left.\frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega) \ \textit{con} \ \|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1. \tag{2.3}$$

□

La *condición de insensibilización* (2.3) significa que buscamos un control v, actuando sobre un pequeño abierto $\omega \subset \Omega$, tal que la energía del sistema (2.1) en el abierto de observación $\mathcal{O}$ sea localmente insensible a pequeñas perturbaciones, $\tau\hat{y}_0$, en la condición inicial.

En [42] y [8] se prueba que, en este marco, la existencia de un control v que insensibilice el funcional Φ dado por (2.2) es equivalente a la existencia de un control v que resuelva el problema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + f'(y)q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega.$$

Así, el problema de encontrar un control insensibilizante de la energía del sistema (2.1) en $\mathcal{O}$ se reformula, de manera equivalente, como un problema "no estándar" de controlabilidad exacta a cero, el cual presenta diversas dificultades. Por un lado, se trata de un problema de controlabilidad nula para dos ecuaciones del calor acopladas, la primera de tipo semilineal y la segunda, aún siendo lineal, tiene coeficiente variable con y. Por otro lado, hay un único control y éste no actúa directamente sobre la ecuación que verifica q, que es la función que queremos conducir a cero después de un intervalo temporal de longitud T, sino indirectamente, a través de la variable y. Además, hay una fuente fija de calor, ξ, actuando sobre el sistema, la cual ha de suponerse "pequeña" cerca del instante $t = 0$ si nos proponemos conseguir que $q(0)$ se anule en Ω. Este problema es más difícil que el problema de controlabilidad nula para una sola ecuación del calor (lineal o semilineal) puesto que surgen dificultades adicionales que provienen del acoplamiento de las dos ecuaciones.

El problema de la existencia de controles insensibilizantes ha sido estudiado en [8] y [51] para no linealidades globalmente Lipschitzianas y bajo la hipótesis $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. En primer lugar, en [8] los autores relajaron la noción de control insensibilizante del modo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$, se dice que un control v ε–insensibiliza Φ si

$$\left| \frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} \right| \leq \varepsilon \quad \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega) \ \mathit{con} \ \|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1. \tag{2.6}$$

En el artículo mencionado se probó la existencia de controles ε–insensibilizantes, para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$, cuando se consideran condiciones, tanto inicial como de contorno, parcialmente conocidas. Este problema equivale a un problema de controlabilidad aproximada para un sistema de dos ecuaciones del calor acopladas y fue resuelto utilizando las técnicas de [19]. Un resultado similar se demostró en [52] en el caso de dominios Ω no acotados.

Los primeros resultados sobre existencia o no existencia de controles insensibilizantes fueron probados en [51]. La autora demostró, por un lado, que no podemos esperar que existan controles insensibilizantes para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$ cuando $\Omega \setminus \overline{\omega} \neq \emptyset$, incluso en el caso en que $f \equiv 0$. Siendo más precisos, L. de Teresa mostró:

> *(Teorema 2, p. 43, [51]) Si $f \equiv 0$ y $\Omega \setminus \overline{\omega} \neq \emptyset$, entonces existe $y_0 \in L^2(\Omega)$ tal que la solución (y,q) del sistema (2.4)–(2.5) asociada a cualquier control $v \in L^2(Q)$ satisface $q(0) \neq 0$ en Ω, es decir, el funcional Φ dado por (2.2) no puede ser insensibilizado.*

Por otro lado, L. de Teresa probó:

> *(Teorema 1, p. 42, [51]) Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ globalmente Lipschitziana tal que $f(0) = 0$. Existe una constante positiva $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega,\omega,T)$ tal que si $\xi \in L^2(Q;\exp(\mathcal{M}/2t))$, entonces existe un control $v \in L^2(Q)$ que insensibiliza el funcional Φ dado por (2.2).*

Aquí, $L^2(Q;\exp(\mathcal{M}/2t))$ es el espacio de Hilbert con peso definido por

$$L^2(Q;\exp(\mathcal{M}/2t)) = \{\xi \in L^2(Q) : \|\exp(\mathcal{M}/2t)\xi\|_{2;Q} < \infty\}.$$

La prueba de este resultado combina sendos argumentos de linealización y de punto fijo. Más precisamente, la autora linealiza primero el sistema y muestra su controlabilidad nula con controles que están uniformemente acotados en $L^2(Q)$ cuando los potenciales del sistema linealizado se mueven en un subconjunto acotado de $L^\infty(Q)$. Debido a que f es una función globalmente Lipschitziana, este hecho es suficiente para probar que la aplicación de punto fijo envía $L^2(Q)$ en un compacto convexo de $L^2(Q)$. Esta estrategia, introducida en [54] y posteriormente utilizada para probar otros resultados de controlabilidad para problemas no lineales (cf. [19], [24], [17], [51],...), será una herramienta de gran utilidad a lo largo de la Memoria, como iremos viendo.

En esta Memoria se presentan nuevos resultados de existencia de controles insensibilizantes que generalizan el Teorema 1 de [51] en varias direcciones. En el presente capítulo se consideran ecuaciones del calor no lineales con no linealidades globalmente Lipschitzianas. En concreto, para condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas consideraremos no linealidades que dependen del estado y del gradiente de éste; en el caso de condiciones de contorno lineales de tipo Fourier (o Robin) consideraremos en la ecuación no linealidades que dependen sólo del estado. Por otro lado, en el próximo capítulo abordaremos el caso de no linealidades $f(y)$ que tienen un crecimiento superlineal en el infinito (para los detalles, véanse los Teoremas 2.2, 2.3, 3.8 y 3.12 y la Proposición 3.10). De acuerdo con los Teoremas 1 y 2 de [51], probaremos estos resultados bajo las hipótesis esenciales $y_0 = 0$ y $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Como hemos adelantado, en este capítulo también se muestran dos nuevos resultados de existencia de controles ε–insensibilizantes para el sistema de Stokes cuando $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ (ver la Sección 2.3).

2.2. Dos nuevos resultados de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor sublineal

Uno de los objetivos de esta sección es extender el Teorema 1 de [51] al caso en que permitimos que la no linealidad de la ecuación que aparece en (2.1) dependa del estado y y de su gradiente. En segundo lugar, probamos un resultado de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor con un término no lineal $F(y)$, a la que se añaden condiciones de contorno lineales de tipo Fourier. En ambos casos, supondremos que las no linealidades tienen crecimiento sublineal en el infinito. Estos resultados (así como las desigualdades de Carleman requeridas en cada caso) han sido recogidos en [11]. En el próximo capítulo se analizará el caso en el que se consideran no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito.

Comenzamos analizando el primero de los casos señalados. Consideramos la ecuación del calor no lineal:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) + \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

donde $f : (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto f(s,p) \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 globalmente Lipschitziana y ξ, y_0, τ e $\hat{y}_0$ son como en la sección precedente. Aquí, $v \in L^2(Q)$ es nuevamente una función control por determinar y ω es el abierto de control. Mediante argumentos de linealización y punto fijo, podemos demostrar que para datos fijados bajo las hipótesis anteriores, el sistema (2.7) posee una única solución y en el espacio $W(0,T) = \{u : u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$ (aquí es fundamental el hecho de que f sea globalmente Lipschitziana).

Nos preguntamos sobre la existencia de controles que insensibilicen la energía del sistema (2.7) en el abierto de observación $\mathcal{O}$. Adaptando los cálculos de [42] y [8] al presente caso, se prueba fácilmente la siguiente

Proposición 2.1 *Sea Φ el funcional definido en* (2.2)*, donde $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es la solución de* (2.7) *asociada a τ y a v. Se tiene:*

1. *La existencia de un control v tal que se tenga la condición de insensibilización* (2.3) *equivale a la existencia de un control v tal que la solución (y,q) de*

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y,\nabla y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q - \nabla\cdot(\partial_p f(y,\nabla y)q) + \partial_s f(y,\nabla y)q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

   verifique

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{2.10}$$

2. *Fijado $\varepsilon > 0$, la condición de ε–insensibilización* (2.6) *equivale a*

$$\|q(\cdot,0)\|_{2;\Omega} \le \varepsilon, \tag{2.11}$$

   donde (y,q) es la solución de (2.8)–(2.9). □

Así, la existencia de controles que insensibilicen (resp. ε–insensibilicen) la norma $L^2(Q)$ de la observación de la solución de (2.7) en el abierto $\mathcal{O}$ nuevamente se reformula, de manera equivalente, como un problema de controlabilidad nula (resp. aproximada) para un sistema acoplado. En (2.9), $\partial_s f$ (resp. $\partial_p f$) denota la derivada de f con respecto a s (resp. el gradiente de f con respecto a p).

Esquema de la demostración de la Proposición 2.1: La prueba de esta proposición es análoga a la de su equivalente en [42] y [8] y por ello no daremos los detalles.

Supongamos, en primer lugar, que existe un control v que insensibiliza el funcional Φ definido en (2.2). La derivada de $\Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))$ con respecto a τ en $\tau=0$ viene dada por

$$\left.\frac{\partial\Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \iint_Q y(x,t)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\, y_\tau(x,t)\,dx\,dt,$$

donde y es la solución de (2.8) e $y_\tau = \left.\dfrac{\partial y(\cdot,\cdot;\tau,v)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}$ es la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y_\tau - \Delta y_\tau + \partial_p f(y,\nabla y)\cdot\nabla y_\tau + \partial_s f(y,\nabla y)y_\tau = 0 \ \text{ en } Q, \\ y_\tau = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y_\tau(x,0) = \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Sea q la correspondiente solución de (2.9). Recordando la EDP que satisface q e integrando por partes, se obtiene

$$\iint_Q y(x,t)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\, y_\tau(x,t)\, dx\, dt = \int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x)\, dx,$$

cualquiera que sea $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$. El resto de la prueba se sigue inmediatamente recordando (2.3) y (2.6). $\square$

Estamos ya en condiciones de enunciar el primer resultado sobre existencia de controles insensibilizantes que aportamos en esta Memoria:

Teorema 2.2 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 globalmente Lipschitziana tal que $f(0,0) = 0$ y sea $L > 0$ una cota de $|\partial_s f|$ y $|\partial_p f|$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Entonces, existe una constante $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\Omega, \omega, \mathcal{O}) > 0$ tal que para cualquier $\xi \in L^2(Q)$ verificando*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{\mathcal{M}}{t}\right)|\xi|^2\, dx\, dt < \infty, \tag{2.12}$$

con

$$\mathcal{M} = \widetilde{C}(\Omega, \omega, \mathcal{O})\left(1 + T\left(1 + L^2\right)\right), \tag{2.13}$$

podemos encontrar una función control $v \in L^2(Q)$ que insensibilice el funcional Φ dado por (2.2), donde $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es la solución de (2.7) asociada a τ y a v. $\square$

En virtud de la Proposición 2.1, para demostrar este teorema bastará con encontrar un control v en $L^2(Q)$ que resuelva el problema de controlabilidad nula (2.8)–(2.10) cuando $y_0 = 0$. La prueba de este resultado, que se da en la Subsección 2.2.2, sigue el mismo esquema de demostración que el Teorema 1 de [51]. Como allí, la principal herramienta de la demostración es una adecuada desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema adjunto asociado a un sistema lineal similar a (2.8)–(2.9) (véase el sistema (2.18)–(2.19)). En la Subsección 2.2.1 demostraremos las desigualdades de observabilidad que se requieren tanto en este caso como en el caso que estudiamos a continuación.

Pasamos a analizar el caso en el que se consideran condiciones de contorno lineales de tipo Fourier. Más precisamente, consideramos la ecuación del calor semilineal:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + F(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) + \tau\, \hat{y}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitziana con $F \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in L^\infty(\Sigma)$ (al menos), ξ, y_0, τ e $\hat{y}_0$ son como antes y $v \in L^2(Q)$ es de nuevo una función control por determinar. Recordemos que ∂_n denota la derivación con respecto a la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Una posible interpretación física de la condición de contorno que aparece en (2.14) podría ser la siguiente. El término $-\partial_n y$ puede interpretarse como el *flujo normal de calor*, dirigido hacia el interior, salvo un coeficiente positivo. Así, la igualdad

$$-\partial_n y = hy$$

significa que este flujo es una función lineal de la temperatura. Aunque sería físicamente razonable suponer que $h \geq 0$, no impondremos ninguna restricción sobre el signo de h.

Nótese que, mediante linealización y un argumento adecuado de punto fijo, para cada ξ, v, h, y_0 e $\hat{y}_0$ en las hipótesis anteriores, puede probarse que el sistema (2.14) posee una única solución $y = y(\cdot, \cdot; \tau, v)$ que satisface

$$y \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t y \in L^2(0,T; H^1(\Omega)').$$

El siguiente resultado establece la existencia de controles que insensibilizan la norma L^2 de la observación de la solución de (2.14) en el abierto $\mathcal{O}$:

Teorema 2.3 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea $F \in C^1(\mathbb{R})$ una función globalmente Lipschitziana (con constante de Lipschitz $\mathcal{L} > 0$) verificando $F(0) = 0$ y sea $h \in L^\infty(\Sigma)$ tal que $\partial_t h \in L^\infty(\Sigma)$. Entonces, existe una constante positiva $\widetilde{\mathcal{M}}$ (que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\mathcal{L}$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$) tal que, para cualquier $\xi \in L^2(Q)$ verificando*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{2.15}$$

podemos encontrar una función control $v \in L^2(Q)$ que insensibilice el funcional definido en (2.2), siendo $y(\cdot, \cdot; \tau, v)$ la solución de (2.14) asociada a τ y a v. $\square$

Como en los casos precedentes, se prueba fácilmente que la existencia de un control v tal que las soluciones de (2.14) verifiquen la condición de insensibilización (2.3) (resp. la condición de ε–insensibilización (2.6)) equivale a la existencia de un control v tal que la solución (y, q) de

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + F(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + F'(y)q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + hq = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.17}$$

satisface $q(x,0) = 0$ en Ω (resp. $\|q(\cdot,0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon$). Para probar el Teorema 2.3, será entonces suficiente encontrar un control $v \in L^2(Q)$ que resuelva el nuevo problema de controlabilidad nula (2.16)–(2.17) junto a (2.10) (para $y_0 = 0$). La demostración del Teorema 2.3 es similar a la del Teorema 2.2 y será solamente esbozada (véase la Subsección 2.2.2). El punto clave de esta prueba reside nuevamente en demostrar una desigualdad de observabilidad adecuada para las soluciones del sistema adjunto asociado al sistema linealizado correspondiente, desigualdad que mostramos en la subsección que desarrollamos a continuación.

2.2.1. Las desigualdades de observabilidad

Dedicamos este apartado a probar las desigualdades de observabilidad requeridas en la demostración de los Teoremas 2.2 y 2.3. Como ya hemos puesto de manifiesto, de forma general, las desigualdades de observabilidad para las soluciones de un sistema lineal (adjunto) se deducen de adecuadas estimaciones globales de tipo Carleman para estas mismas soluciones. En concreto, los resultados de observabilidad que damos en este apartado se obtienen combinando desigualdades de tipo Carleman probadas en el capítulo anterior con las correspondientes estimaciones de energía.

El caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet

En primer lugar, dados $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, consideramos el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta\varphi + D\cdot\nabla\varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \psi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

que tiene la forma del sistema (1.6)–(1.7) considerado en la Sección 1.2 del capítulo precedente. Combinando la desigualdad de Carleman establecida en el Teorema 1.4 de dicha sección para las soluciones del sistema (2.18)–(2.19) con las correspondientes estimaciones de energía, obtenemos el siguiente resultado de observabilidad:

Teorema 2.4 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ y sea $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto no vacío. Entonces, existen constantes positivas C, M y H tales que, para cualquier $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, la correspondiente solución (φ, ψ) de (2.18)–(2.19) satisface*

$$\iint_Q \exp\left(-\frac{CM}{t}\right) |\psi|^2 \, dx\, dt \le \exp(CH) \iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2 \, dx\, dt. \tag{2.20}$$

Más precisamente, $C = C(\Omega, B_0)$, $M = 1 + TM'$ y

$$H = M' + \frac{1}{T} + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2\right),$$

con $M' > 0$ *dada por* (1.10)*, i.e.:*

$$M' = 1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|a-c\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty + \|B-D\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2. \quad (2.21)$$

Esta desigualdad de observabilidad generaliza la dada en la Proposición 2 de [51], donde se consideraban sólo términos lineales de orden cero (i.e.: $B \equiv D \equiv 0$). Además, aquí obtenemos la dependencia explícita de las constantes que aparecen en la desigualdad con respecto a T y al tamaño de los potenciales. Esto será fundamental cuando tratemos, en el capítulo siguiente, con no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito.

En la demostración de este resultado, usaremos el siguiente lema de carácter técnico:

Lema 2.5 *Sea* $\gamma_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ *una función verificando* $\gamma_0(x) \geq l > 0, \forall x \in \overline{\Omega}$*. Pongamos* $\gamma(x,t) = \dfrac{\gamma_0(x)}{t(T-t)}$ *para* $(x,t) \in Q$*,* $m_0 = \min\limits_{\overline{\Omega}} \gamma_0$ *y* $M_0 = \max\limits_{\overline{\Omega}} \gamma_0$*.*

1. *Se tiene* $s^4 e^{-2s\gamma} t^{-7}(T-t)^{-7} \leq 2^2 e^{-7} \left(\dfrac{7}{m_0}\right)^4 T^{-6}$*, para cualquier* $s \geq \dfrac{7T^2}{2^3 m_0}$ *y* $(x,t) \in Q$*.*

2. *Para* $s \geq \dfrac{3T^2}{2M_0}$*, se tiene*

$$e^{-2s\gamma} t^{-3}(T-t)^{-3} \geq A_s \exp\left(-M_s/t\right), \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T/2),$$

con

$$A_s = 2^6 T^{-6} \exp\left(-4M_0 s/T^2\right), \quad M_s = 2M_0 s/T. \quad (2.22)$$

3. *Para cualquier* $s \geq 0$*, se tiene*

$$e^{2s\gamma} t^3 (T-t)^3 \leq 2^{-6} T^6 \exp\left(\frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right), \quad (x,t) \in \Omega \times (T/4, 3T/4).$$

Para mayor claridad en la exposición, daremos la prueba de este lema más adelante.

Demostración del Teorema 2.4: Sean α_0 y α como en el Teorema 1.4 y sea $\overline{\sigma}$ la constante positiva asociada al abierto B_0 proporcionada por dicho teorema. A lo largo de la prueba, C será una constante genérica positiva, que depende sólo de Ω y B_0, cuyo valor puede variar de una línea a la siguiente. Tomamos $s \geq \overline{s}$, con $\overline{s}$ dado por (1.9). La prueba consiste en combinar las estimaciones de energía para (2.18) y (2.19) con la estimación

$$\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right) \leq \ C s^4 \iint_{B_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7} |\psi|^2, \quad (2.23)$$

válida para $s \geq \overline{s}$, que se sigue inmediatamente de (1.8).

$\diamond$ En primer lugar, de las estimaciones de energía para las soluciones de (2.18) y (2.19), para $t_1, t_2 \in [0, T]$ con $t_1 < t_2$ y $t \in [0, T]$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_2)\|^2_{2;\Omega} &\leq \exp\big((2\|c\|_\infty + \|D\|^2_\infty)\,(t_2 - t_1)\big)\|\varphi(t_1)\|^2_{2;\Omega}, \\ \|\psi(t)\|^2_{2;\Omega} &\leq \int_t^T \exp\left(\left(1 + 2\|a\|_\infty + \|B\|^2_\infty\right)(s - t)\right)\|\varphi(s)\|^2_{2;\mathcal{O}}\, ds. \end{aligned} \tag{2.24}$$

En particular, tenemos

$$\left\|\varphi\left(t + \frac{T}{4}\right)\right\|^2_{2;\Omega} \leq \exp\left(\left(2\|c\|_\infty + \|D\|^2_\infty\right)\frac{T}{4}\right)\|\varphi(t)\|^2_{2,\Omega}, \quad \forall t \in [T/4, 3T/4]\,,$$

de donde

$$\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\varphi|^2 \leq \exp\left(\left(2\|c\|_\infty + \|D\|^2_\infty\right)\frac{T}{4}\right)\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2. \tag{2.25}$$

Además, de (2.24) se deduce fácilmente

$$\int_t^T \|\psi(s)\|^2_{2;\Omega}\, ds \leq \ (T - t)\exp\left(\left(1 + 2\|a\|_\infty + \|B\|^2_\infty\right)\frac{T}{2}\right)\int_t^T \|\varphi(s)\|^2_{2;\mathcal{O}}\, ds$$

para cualquier $t \in [T/2, T]$ y, así, también

$$\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\psi|^2 \leq \ \exp\left(\left(2 + 2\|a\|_\infty + \|B\|^2_\infty\right)\frac{T}{2}\right)\iint_{\mathcal{O}\times(T/2,T)} |\varphi|^2. \tag{2.26}$$

$\diamond$ Pongamos ahora $m_0 = \min\limits_{\overline{\Omega}} \alpha_0$ y $M_0 = \max\limits_{\overline{\Omega}} \alpha_0$, con α_0 como más arriba. Aplicando el Lema 2.5 con $\gamma_0 = \alpha_0$ (y así, $\gamma = \alpha$), para cualquier $s \geq 3T^2/(2M_0)$ tenemos

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T - t)^{-3}|\psi|^2 \geq A_s \iint_{\Omega\times(0,T/2)} \exp\left(-\frac{M_s}{t}\right)|\psi|^2,$$

con A_s y M_s dados por (2.22). Acotamos el segundo miembro de (2.23) usando de nuevo el Lema 2.5, obteniendo

$$\iint_{\Omega\times(0,T/2)} \exp\left(-\frac{M_s}{t}\right)|\psi|^2 \leq C\exp\left(\frac{4M_0 s}{T^2}\right)\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2$$

para $s \geq \hat{s}$, donde $\hat{s}$ viene dado por

$$\hat{s} = \hat{\sigma}(\Omega, B_0)\Big(T + T^2 M'\Big), \tag{2.27}$$

con $M' > 0$ definido en (2.21) y $\hat{\sigma}(\Omega, B_0) = \text{máx}\{\overline{\sigma}, 3/(2M_0), 7/(2^3 m_0)\}$, siendo $\overline{\sigma}$ como antes. Entonces, usando (2.26), para $s \geq \hat{s}$ tenemos

$$\begin{aligned}\iint_Q \exp\left(-\frac{M_s}{t}\right)|\psi|^2 &\leq \iint_{\Omega\times(0,T/2)} \exp\left(-\frac{M_s}{t}\right)|\psi|^2 + \iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\psi|^2 \\ &\leq C\exp\left(\frac{4M_0 s}{T^2}\right)\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2 \\ &+ \exp\left((2+2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)\frac{T}{2}\right)\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\varphi|^2,\end{aligned} \tag{2.28}$$

con M_0 como antes. Teniendo en cuenta (2.25), el Lema 2.5 y (2.23), acotamos a continuación la última integral que aparece en (2.28) como sigue:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\varphi|^2 &\leq \exp\left((2\|c\|_\infty + \|D\|_\infty^2)\frac{T}{4}\right)\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2 \\ &\leq \exp\left((2\|c\|_\infty + \|D\|_\infty^2)\frac{T}{4} + \frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right) 2^{-6}T^6 \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 \\ &\leq C\exp\left((2\|c\|_\infty + \|D\|_\infty^2)\frac{T}{4} + \frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right) T^6 s^4 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \\ &\leq C\exp\left((2\|c\|_\infty + \|D\|_\infty^2)\frac{T}{4} + \frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right)\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2.\end{aligned}$$

Combinando esta estimación con (2.28), obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_Q \exp\left(-\frac{M_s}{t}\right)|\psi|^2 &\leq C\exp\left(\frac{4M_0 s}{T^2}\right)\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2 \\ &+ C\exp\left((1+\|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2)T + \frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right)\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2,\end{aligned}$$

válida para cualquier $s \geq \hat{s}$, con $\hat{s}$ definido por (2.27). Finalmente, poniendo $s = \hat{s}$ en la desigualdad anterior y recordando la definición de M_s (ver (2.22)), obtenemos el resultado. □

Para completar la demostración, probamos ahora el Lema 2.5.

Demostración del Lema 2.5: Sean γ_0, γ, m_0 y M_0 como en el enunciado. Entonces,

$$s^4 e^{-2s\gamma}t^{-7}(T-t)^{-7} \leq s^4\exp\left(-\frac{2m_0 s}{t(T-t)}\right)t^{-7}(T-t)^{-7} := f_s(t) = \frac{1}{g_s(t)},$$

para $s > 0$ y $t \in (0,T)$. Determinaremos una cota inferior de $g_s(t)$, para $t \in (0,T)$. El cálculo de $g_s'(t)$ muestra que, para $s \geq 7T^2/(2^3 m_0)$, la función g_s es estrictamente decreciente en $(0,T/2)$ y estrictamente creciente en $(T/2,T)$. Así, en este caso,

$$f_s(t) \leq f_s(T/2) = 2^{14}T^{-14}G(s) \quad \forall t \in (0,T),$$

con $G(s) = s^4 \exp(-8m_0 s/T^2)$, que es estrictamente decreciente en $(T^2/(2m_0), +\infty)$ y, en particular, en $(7T^2/(2^3 m_0), +\infty)$. De aquí sigue la primera parte del lema.

Ahora, escribiendo $\dfrac{1}{t(T-t)} = \dfrac{1}{Tt} + \dfrac{1}{T(T-t)}$ $\forall t \in (0,T)$, tenemos

$$e^{-2s\gamma} t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \exp\left(-\frac{2M_0 s}{Tt}\right) t^{-3} H_s(t),$$

siendo $H_s(t) = (T-t)^{-3} \exp\left(-\dfrac{2M_0 s}{T(T-t)}\right)$. Es fácil ver que, para $s \geq 3T^2/(2M_0)$ arbitrario, H_s es decreciente en $(0, T/2)$. Por tanto, un simple cálculo nos da la segunda parte del lema.

Finalmente, observando que $\dfrac{1}{t(T-t)} \leq \dfrac{2^4}{3T^2}$ para cualquier $t \in (T/4, 3T/4)$, se obtiene

$$e^{2s\gamma} t^3 (T-t)^3 \leq \exp\left(\frac{2M_0 s}{t(T-t)}\right) 2^{-6} T^6 \leq 2^{-6} T^6 \exp\left(\frac{2^5 M_0 s}{3T^2}\right),$$

para $x \in \Omega$ y $t \in (T/4, 3T/4)$, con lo que termina la prueba. $\square$

El caso de condiciones de contorno de tipo Fourier

Pasamos ahora a analizar el caso en el que se consideran condiciones de contorno lineales de tipo Fourier. Más precisamente, consideramos el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta\varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \varphi + k\varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta\psi + a\psi = \varphi \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \psi + h\psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $h, k \in L^\infty(\Sigma)$ (al menos) y $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Obsérvese que en (2.29)–(2.30) hemos escrito condiciones de contorno lineales de Fourier con distintos potenciales h y k. Ello está motivado por el hecho de que la desigualdad de observabilidad que establecemos en el Teorema 2.6 también se requiere para probar un resultado local de insensibilización para una ecuación semilineal del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier (ver la Sección 3.5).

Como consecuencia inmediata de la Proposición 1.5, p. 27, del capítulo anterior, para cada a, c, h, k y φ^0 en estas condiciones, el sistema (2.29)–(2.30) posee una única solución (φ, ψ) que verifica

$$\varphi, \psi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t\varphi, \partial_t\psi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)').$$

Además, existen constantes positivas $K_1 = K_1(\|c\|_\infty, \|k\|_{\infty;\Sigma})$ y $K_2 = K_2(\|a\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma})$ tales que

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{2;\Omega} \leq K_1\|\varphi(t)\|^2_{2;\Omega} \quad \text{para } t \text{ c.p.d. en } (0,T),$$

$$-\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2_{2;\Omega} \leq K_2\|\psi(t)\|^2_{2;\Omega} + \|\varphi(t)\|^2_{2;\mathcal{O}} \quad \text{para } t \text{ c.p.d. en } (0,T).$$

De aquí se sigue inmediatamente que

$$\|\varphi\left(t + T/4\right)\|^2_{2;\Omega} \leq \exp\left(K_1 T/4\right)\|\varphi(t)\|^2_{2;\Omega} \quad \forall t \in (T/4, 3T/4) \tag{2.31}$$

y

$$\|\psi(t)\|^2_{2;\Omega} \leq \int_t^T \exp\left(K_2(s-t)\right)\|\varphi(s)\|^2_{2;\mathcal{O}}\,ds \quad \forall t \in (0,T). \tag{2.32}$$

Combinando estas estimaciones de energía con la desigualdad de tipo Carleman (1.34) para (φ, ψ) obtenida en el Teorema 1.6 del capítulo precedente, se deduce en este caso la siguiente desigualdad de observabilidad (aquí, $\psi^0 = 0$):

Teorema 2.6 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, $a, c \in L^\infty(Q)$ y $h, k, \partial_t h, \partial_t k \in L^\infty(\Sigma)$. Sea $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto no vacío. Entonces, existen dos constantes positivas $\widetilde{M}$ y $\widetilde{H}$ (dependiendo de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$) tales que*

$$\iint_Q \exp\left(-\frac{\widetilde{M}}{t}\right)|\psi|^2\,dx\,dt \leq \widetilde{H}\iint_{B_0\times(0,T)}|\psi|^2\,dx\,dt, \tag{2.33}$$

para cualquier $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, donde ψ resuelve (2.30)*, siendo φ la solución de* (2.29) *asociada a $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$.*

Demostración: Procedemos como en la demostración del Teorema 2.4. Sean las funciones α_0 y α y las constantes positivas C_0 y $\overline{s}$ (dependientes de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$) del Teorema 1.6. Partimos de la estimación

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}\left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right) \leq\ C_0 s^4 \iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2, \tag{2.34}$$

válida para cualquier $s \geq \overline{s}$, que se sigue de la desigualdad de Carleman (1.34) mencionada anteriormente. Así, fijando $s = \text{máx}\{\overline{s}, 3/(2M_0), 7/(2^3 m_0)\}$, podemos acotar ambos miembros de (2.34) (gracias al Lema 2.5) y deducir

$$\iint_{\Omega\times(0,T/2)} \exp\left(-\frac{\widetilde{M}}{t}\right)|\psi|^2 \leq C_1 \iint_{B_0\times(0,T)}|\psi|^2, \tag{2.35}$$

con $\widetilde{M} > 0$ y $C_1 > 0$ dos constantes que dependen de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$.

Por otro lado, de las estimaciones de energía (2.31) y (2.32), se deduce fácilmente que

$$\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\varphi|^2 \leq \exp\left(K_1 T/4\right) \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2$$

y

$$\iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\psi|^2 \leq \exp\left((1+K_2)T\right) \iint_{\mathcal{O}\times(T/2,T)} |\varphi|^2.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega\times(T/2,T)} \exp\left(-\frac{\widetilde{M}}{t}\right)|\psi|^2 \leq \iint_{\Omega\times(T/2,T)} |\psi|^2 \\ &\leq \exp\left(K_1\frac{T}{4}+(1+K_2)T\right) \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Observemos que la función $e^{2s\alpha}t^3(T-t)^3$ está acotada en $\overline{\Omega}\times[T/4,3T/4]$, luego podemos estimar

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2 \leq C_2 \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2,$$

con $C_2 > 0$ dependiendo de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$. Combinando esta estimación con (2.36) y (2.34), y acotando el lado derecho de (2.34) como hicimos para obtener (2.35), tenemos

$$\iint_{\Omega\times(T/2,T)} \exp\left(-\frac{\widetilde{M}}{t}\right)|\psi|^2 \leq C_3 \exp\left(K_1\frac{T}{4}+(1+K_2)T\right) \iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2. \tag{2.37}$$

Aquí, C_3 es una nueva constante positiva que depende de Ω, B_0, T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$, $\|k\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t k\|_{\infty;\Sigma}$. Finalmente, basta con sumar (2.35) y (2.37) para obtener la deseada desigualdad de observabilidad (2.33), con $\widetilde{M}$ como en (2.35) y $\widetilde{H}$ dada por

$$\widetilde{H} = C_1 + C_3 \exp\left(K_1\frac{T}{4}+(1+K_2)T\right).$$

□

***Observación* 2.1** Recordando la Observación 1.2 del capítulo precedente (ver página 30), se puede obtener la dependencia explícita de las constantes $\widetilde{M}$ y $\widetilde{H}$ del Teorema 2.6 con respecto a T y al tamaño de los potenciales a y c que aparecen en las EDPs (aunque no con respecto a los potenciales h y k de las condiciones de contorno). Ello permite conocer el modo preciso en que la constante $\widetilde{\mathcal{M}}$ del Teorema 2.3 depende de T y de la constante $\mathcal{L}$ de Lipschitz de la función no lineal F. □

2.2.2. Demostración de los Teoremas 2.2 y 2.3

Dedicamos esta sección a probar los Teoremas 2.2 y 2.3. Ambas demostraciones, inspiradas en las de otros resultados conocidos de controlabilidad para sistemas no lineales (véanse [54], [19], [24], [51],...), se basan en resultados de controlabilidad para sistemas lineales similares y argumentos adecuados de punto fijo. Aunque son demostraciones clásicas, se incluyen en esta Memoria para que la exposición resulte más completa.

Demostración del Teorema 2.2:

Supongamos que $y_0 = 0$. Como ya hemos comentado, en virtud de la Proposición 2.1, es suficiente con encontrar un control v en $L^2(Q)$ que resuelva el problema de controlabilidad nula (2.8)–(2.10). La demostración se hará en varias etapas.

Etapa 1.- Comenzamos con un resultado de existencia de controles ε–insensibilizantes para una versión linealizada de (2.8)–(2.9). Dados $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$ y $\xi \in L^2(Q)$, consideramos el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (Dq) + cq = y\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.39}$$

y el correspondiente sistema adjunto (2.18)–(2.19).

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.7 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ y sea $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto no vacío. Sean $C = C(\Omega, B_0)$, M y H las constantes positivas que proporciona el Teorema 2.4. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un control $v_\varepsilon \in L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} v_\varepsilon \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, tal que la correspondiente solución $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ de (2.38)–(2.39) satisface*

$$\|q_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon. \tag{2.40}$$

Además, si $\xi \in L^2(Q)$ verifica

$$\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{2.41}$$

entonces los controles $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ están uniformemente acotados en $L^2(Q)$. Más precisamente,

$$\|v_\varepsilon\|_{2;Q} \leq \exp\left(\frac{C}{2}H\right) \left(\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt\right)^{1/2}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.42}$$

Demostración: Al ser la estructura de la prueba idéntica a la de los correspondientes resultados de [8] y [51], no daremos todos los detalles. Fijado $\varepsilon > 0$, introducimos el funcional definido sobre $L^2(\Omega)$ como sigue

$$J(\varphi^0; a, c, B, D) = \frac{1}{2} \iint_{B_0 \times (0,T)} |\psi|^2 + \varepsilon \|\varphi^0\|_{2;\Omega} + \iint_Q \xi \psi, \tag{2.43}$$

donde ψ resuelve (2.19), siendo φ la solución de (2.18) con dato inicial $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$.

Se tiene la siguiente propiedad de continuación única para las soluciones del problema adjunto (2.18)–(2.19) (recuérdese que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$):

> *"Si $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, (φ, ψ) es la correspondiente solución de* (2.18)–(2.19) *y $\psi = 0$ en $\omega \times (0,T)$, entonces $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ en Q."*

Esta propiedad puede ser probada (por ejemplo) combinando el Teorema 2.4 con una propiedad de continuación única para las soluciones de (2.18). Deducimos entonces que el funcional continuo y convexo $J(\cdot; a, c, B, D)$ es estrictamente convexo y satisface

$$\liminf_{\|\varphi^0\|_{2;\Omega} \to +\infty} \frac{J(\varphi^0; a, c, B, D)}{\|\varphi^0\|_{2;\Omega}} \geq \varepsilon. \tag{2.44}$$

Así, $J(\cdot; a, c, B, D)$ es coercitivo y, por consiguiente, alcanza su mínimo en un único $\varphi^0_\varepsilon \in L^2(\Omega)$. Pongamos

$$v_\varepsilon = \psi_\varepsilon \mathbf{1}_{B_0}, \tag{2.45}$$

donde $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ es la solución de (2.18)–(2.19) con dato inicial φ^0_ε. Entonces, la solución $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ de (2.38)–(2.39) asociada a v_ε satisface (2.40). De hecho, v_ε es el único control de norma $L^2(Q)$ mínima entre todos los controles $v \in L^2(Q)$ que verifican sop $v \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$ y resuelven (2.38)–(2.40).

Supongamos ahora que ξ satisface (2.41). De la condición de optimalidad para φ^0_ε y de la desigualdad de observabilidad (2.20), se tiene

$$\begin{aligned}
&\iint_{B_0 \times (0,T)} |\psi_\varepsilon|^2 + \varepsilon \|\varphi^0_\varepsilon\|_{2;\Omega} = - \iint_Q \xi \, \psi_\varepsilon \\
&\leq \left(\iint_Q \exp\left(-\frac{CM}{t}\right) |\psi_\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right) |\xi|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\exp(CH) \iint_{B_0 \times (0,T)} |\psi_\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right) |\xi|^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

lo que da, recordando (2.45), la estimación uniforme de los controles (2.42). □

***Observación* 2.2** En particular, si $\xi \in L^2(Q)$ verifica (2.41), la Proposición 2.7 permite establecer la existencia de un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución (y, q) del problema lineal (2.38)–(2.39) verifique

$$q(x, 0) = 0 \quad \text{c.p.d. en } \Omega.$$

Además, dado un abierto $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$, podemos elegir v de tal modo que sop $v \subset \overline{B}_0 \times [0, T]$ y se tenga la estimación

$$\|v\|^2_{2;Q} \leq \exp(CH) \iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt,$$

siendo $C = C(\Omega, B_0)$, M y H como en el Teorema 2.4. En otras palabras, puede probarse un resultado de existencia de controles insensibilizantes en el caso lineal. □

ETAPA 2.- Aplicamos ahora un argumento de punto fijo para probar un resultado de ε–insensibilización en el caso no lineal. Se tiene:

Proposición 2.8 *En las hipótesis del Teorema 2.2, existe una constante positiva* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\Omega, \omega, \mathcal{O})$ *tal que, para* $\varepsilon > 0$ *fijado y cualquier* $\xi \in L^2(Q)$ *verificando* (2.12), *con* $\mathcal{M} > 0$ *dada por* (2.13) *(y* $L > 0$ *una cota de* $|\partial_s f|$ *y* $|\partial_p f|$ *en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$*), podemos encontrar un control* $v_\varepsilon \in L^2(Q)$*, con* sop $v_\varepsilon \subset \overline{B}_0 \times [0, T]$*, de modo que la solución* $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ *de* (2.8)–(2.9) *asociada a* v_ε *satisface*

$$\|q_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon.$$

Además,

$$\|v_\varepsilon\|_{2;Q} \leq \mathcal{H} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\mathcal{M}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{2.46}$$

donde

$$\mathcal{H} = \exp\left[\widetilde{C}(\Omega, \omega, \mathcal{O}) \left(1 + \frac{1}{T} + T + (1 + T)L^2 \right) \right]. \tag{2.47}$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $\varepsilon > 0$. La dependencia con respecto a ε, al ser un parámetro fijo, será omitida en esta demostración. Dada una función f como en el Teorema 2.2, podemos escribir

$$f(s, p) = g(s, p)s + G(s, p) \cdot p \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

donde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ son las funciones continuas y acotadas definidas por

$$g(s, p) = \int_0^1 \partial_s f(\sigma s, \sigma p) \, d\sigma, \quad G(s, p) = \int_0^1 \partial_p f(\sigma s, \sigma p) \, d\sigma, \quad (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

I. *El problema linealizado.*

Para cada $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, consideramos el sistema linealizado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B_z \cdot \nabla y + a_z y = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (D_z q) + c_z q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.49}$$

con $a_z = g(z, \nabla z)$, $c_z = \partial_s f(z, \nabla z) \in L^\infty(Q)$ y $B_z = G(z, \nabla z)$, $D_z = \partial_p f(z, \nabla z) \in L^\infty(Q)^N$. De hecho, el carácter globalmente Lipschitziano de f nos da

$$\|a_z\|_\infty, \|c_z\|_\infty, \|B_z\|_\infty, \|D_z\|_\infty \leq L, \quad \forall z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.50}$$

donde $L > 0$ es una cota de $|\partial_s f|$ y $|\partial_p f|$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Podemos aplicar la Proposición 2.7, con $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto cualquiera, y deducir que existe un control $v_z \in L^2(Q)$, con sop $v_z \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, tal que la correspondiente solución (y_z, q_z) del sistema linealizado satisface

$$\|q_z(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon. \tag{2.51}$$

Además, si M_z y H_z son las constantes positivas que proporciona el Teorema 2.4 para $a = a_z$, $c = c_z$, $B = B_z$ y $D = D_z$, entonces v_z verifica la estimación (2.42), con $M = M_z$, $H = H_z$ y con una constante positiva C que depende de Ω y B_0 (es decir, de Ω, ω y $\mathcal{O}$). Recordando las expresiones de M_z y H_z, y teniendo en cuenta la acotación uniforme (2.50) de los potenciales, existe una constante positiva $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\Omega, \omega, \mathcal{O})$ tal que, para cualquier $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, se tiene $\exp\left(\dfrac{C}{2} H_z\right) \leq \mathcal{H}$ y $CM_z \leq \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ y $\mathcal{H}$ vienen dadas, respectivamente, por (2.13) y (2.47). De este modo, si la fuente de calor ξ satisface (2.12) para esta constante $\mathcal{M}$, tenemos la siguiente estimación (uniforme con respecto a z y a ε):

$$\|v_z\|_{2;Q} \leq \mathcal{H} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\mathcal{M}}{t}\right) |\xi|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.52}$$

II. *El argumento de punto fijo.*

Consideramos ahora la aplicación $\Lambda_\varepsilon : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \to L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ definida por $\Lambda_\varepsilon(z) = y_z$, siendo y_z la solución de (2.48) asociada al control v_z construido en la Proposición 2.7 para $a = a_z$, $B = B_z$, $c = c_z$ y $D = D_z$ (v_z es el control de norma mínima en $L^2(Q)$ entre los controles que resuelven (2.48), (2.49) y (2.51)). Aplicaremos el Teorema de Schauder del punto fijo para probar que Λ_ε posee, al menos, un punto fijo.

$\diamond$ Primero, por resultados clásicos de regularidad para la ecuación del calor, la solución y_z de (2.48) está en el espacio Y definido por

$$Y = \{u : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(Q)\},$$

con

$$\|y_z\|_Y \leq \exp\left[C(\Omega, T, \|a_z\|_\infty, \|B_z\|_\infty)\right] (\|\xi + v_z \mathbf{1}_\omega\|_{2;Q})$$

(aquí, $\|y_z\|_Y = \|y_z\|_{L^2(H^2\cap H_0^1)} + \|\partial_t y_z\|_{2;Q}$; $\|\cdot\|_{L^2(H^2\cap H_0^1)}$ denota la norma en $L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ y la dependencia de la constante C respecto de T, $\|a_z\|_\infty$ y $\|B_z\|_\infty$ es explícita). De la acotación uniforme de los potenciales y de los controles (véanse (2.50) y (2.52)), se deduce que Λ_ε envía $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ en un conjunto acotado de Y. Puesto que este espacio se inyecta de manera compacta en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, existe un compacto fijo K en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\Lambda_\varepsilon(L^2(0,T; H_0^1(\Omega))) \subset K. \tag{2.53}$$

Así, Λ_ε es una aplicación compacta.

$\diamond$ Sea ahora $\{z_j\}_{j\geq 1} \subset L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$z_j \to z \quad \text{en } \ L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

De aquí, teniendo en cuenta la regularidad de f y (2.50), al menos para una subsuseción (que seguimos denotando $\{z_j\}_{j\geq 1}$) se deducen las convergencias

$$\begin{array}{ll} a_{z_j} = g(z_j, \nabla z_j) \rightharpoonup a_z, \quad c_{z_j} = \partial_s f(z_j, \nabla z_j) \rightharpoonup c_z \text{ débil-}\star & \text{en } L^\infty(Q), \\ B_{z_j} = G(z_j, \nabla z_j) \rightharpoonup B_z, \quad D_{z_j} = \partial_p f(z_j, \nabla z_j) \rightharpoonup D_z \text{ débil-}\star & \text{en } L^\infty(Q)^N \end{array} \tag{2.54}$$

(aquí, $a_z = g(z, \nabla z)$, $c_z = \partial_s f(z, \nabla z)$, $B_z = G(z, \nabla z)$ y $D_z = \partial_p f(z, \nabla z)$). Sea $\hat\varphi^0$ (resp. $\hat\varphi_j^0$, $j \geq 1$) el único minimizante en $L^2(\Omega)$ del funcional definido por (2.43), con $a = a_z$, $c = c_z$, $B = B_z$ y $D = D_z$ (resp. con $a = a_{z_j}$, $c = c_{z_j}$, $B = B_{z_j}$ y $D = D_{z_j}$). Razonando como en [19] y [51], se prueba:

i) la propiedad de coercitividad (2.44) se verifica uniformemente para potenciales a, c, B y D uniformemente acotados en L^∞;

ii) la sucesión $\{\hat\varphi_j^0\}$ está acotada en $L^2(\Omega)$;

iii)

$$\hat\varphi_j^0 \to \hat\varphi^0 \quad \text{en } \ L^2(\Omega). \tag{2.55}$$

Sea ahora $(\hat\varphi, \hat\psi)$ (resp. $(\hat\varphi_j, \hat\psi_j)$, $j \geq 1$) la solución de (2.18)–(2.19), con $a = a_z$, $c = c_z$, $B = B_z$, $D = D_z$ (resp. $a = a_{z_j}$, $c = c_{z_j}$, $B = B_{z_j}$, $D = D_{z_j}$) y condición inicial $\hat\varphi^0$ (resp. $\hat\varphi_j^0$). Las convergencias (2.54) y (2.55) implican que

$$\hat\varphi_j \to \hat\varphi, \quad \hat\psi_j \to \hat\psi \quad \text{en } \ L^2(Q). \tag{2.56}$$

Por la definición de Λ_ε, $\Lambda_\varepsilon(z)$ (resp. $\Lambda_\varepsilon(z_j)$, $j \geq 1$) es la solución de (2.38) asociada al control $\hat{v} = \hat{\psi}\mathbf{1}_\omega$ (resp. $\hat{v}_j = \hat{\psi}_j\mathbf{1}_\omega$) y a los potenciales $a = a_z$, $c = c_z$, $B = B_z$ y $D = D_z$ (resp. $a = a_{z_j}$, $c = c_{z_j}$, $B = B_{z_j}$ y $D = D_{z_j}$). De (2.56), se tiene que

$$\hat{v}_j \to \hat{v} \quad \text{en } \; L^2(Q),$$

convergencia que, junto a (2.54), nos da

$$\Lambda_\varepsilon(z_j) \to \Lambda_\varepsilon(z) \quad \text{en } \; L^2(Q).$$

De hecho, esta convergencia nos basta para deducir que

$$\Lambda_\varepsilon(z_j) \to \Lambda_\varepsilon(z) \quad \text{en } \; L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

En efecto, gracias a (2.53), al menos para una nueva subsucesión (que continuamos denotando $\{z_j\}_{j\geq 1}$) se tiene

$$\Lambda_\varepsilon(z_j) \to Y \quad \text{en } \; L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Por unicidad del límite se prueba que $Y = \Lambda_\varepsilon(z)$ y que, de hecho, toda la sucesión $\{\Lambda_\varepsilon(z_j)\}_{j\geq 1}$ converge a $\Lambda_\varepsilon(z)$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Esto prueba la continuidad de Λ_ε.

Puesto que estamos en las hipótesis del Teorema de Schauder, Λ_ε posee, al menos, un punto fijo $y_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Entonces, el control $v_\varepsilon = v_{y_\varepsilon}$ es tal que y_ε resuelve

$$\begin{cases} \partial_t y_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon + G(y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\cdot\nabla y_\varepsilon + g(y_\varepsilon,\nabla y_\varepsilon) y_\varepsilon = \xi + v_\varepsilon \mathbf{1}_\omega \;\; \text{en } Q, \\ y_\varepsilon = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \quad y_\varepsilon(x,0) = 0 \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.57}$$

y la solución q_ε de

$$\begin{cases} -\partial_t q_\varepsilon - \Delta q_\varepsilon - \nabla\cdot(\partial_p f(y_\varepsilon,\nabla y_\varepsilon) q_\varepsilon) + \partial_s f(y_\varepsilon,\nabla y_\varepsilon) q_\varepsilon = y_\varepsilon \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \;\; \text{en } Q, \\ q_\varepsilon = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \quad q_\varepsilon(x,T) = 0 \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.58}$$

satisface (2.40). En otras palabras, hemos encontrado un control $v_\varepsilon \in L^2(Q)$, con sop $v \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, tal que la correspondiente solución de (2.8)–(2.9) (con $y_0 = 0$) verifica (2.11). Finalmente, la estimación (2.46) se sigue directamente de (2.52), con lo que concluye la demostración de la Proposición 2.8. □

Etapa 3.- Terminaremos la demostración del Teorema 2.2 pasando al límite en (2.57), (2.58) y (2.11). Puesto que los controles $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que proporciona la Proposición 2.8 están uniformemente acotados en $L^2(Q)$ y se tiene (2.50), el efecto regularizante de la ecuación del calor implica que $\{(y_\varepsilon, q_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ se mueve en un acotado de $Y \times W(0,T)$ (Y es el espacio definido en la página 62), donde

$$W(0,T) := \{u : u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\; \partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}.$$

Luego $\{(y_\varepsilon, q_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ se mueve en un compacto de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(Q)$. Entonces, al menos para una subsucesión, se tiene

$$\begin{gathered} v_\varepsilon \rightharpoonup v \ \text{ débil en } \ L^2(Q), \\ (y_\varepsilon, q_\varepsilon) \to (y, q) \ \text{ en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(Q), \quad q_\varepsilon(0) \rightharpoonup q(0) \ \text{ débil en } \ L^2(\Omega), \end{gathered}$$

para algunos $v \in L^2(Q)$ (con sop $v \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$), $y \in Y$, $q \in W(0,T)$ (de hecho, se prueba que $q_\varepsilon(0) \to q(0)$ en $L^2(\Omega)$ y $q_\varepsilon \to q$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$). Gracias a la continuidad de las funciones g y G, podemos pasar al límite en (2.57)–(2.58), deduciendo que (y,q) resuelve (2.8)–(2.9) con término de control v y dato inicial $y_0 = 0$. Más aún, de (2.40) inferimos que la función q satisface $q(x,0) = 0$ en Ω. Así, la función v es un control insensibilizante para el funcional Φ dado por (2.2). Finalmente, la estimación uniforme de los controles (2.46) y las convergencias de más arriba, nos permiten estimar

$$\|v\|_{2;Q} \le \mathcal{H} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\mathcal{M}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}, \tag{2.59}$$

con $\mathcal{M}$ y $\mathcal{H}$ dadas, respectivamente, por (2.13) y (2.47), lo que completa la demostración. $\square$

Observación 2.3 Es interesante hacer notar que el argumento usado en la demostración precedente proporciona una estimación del *coste de la insensibilización* del funcional Φ. En efecto, hemos probado que el control insensibilizante v puede ser elegido de modo que verifique la estimación (2.59), donde la dependencia de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{H}$ con respecto a T y f es explícita (véanse (2.13) y (2.47)). Inspirados en [25], denotemos por $\mathcal{U}_{ad}$ al conjunto no vacío

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(Q) : (y,q) \text{ verifica (2.8)–(2.10), con } y_0 = 0\}.$$

Así, la cantidad

$$\mathcal{C}_{ins} = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \|v\|_{L^2(\omega \times (0,T))},$$

que mide el coste de insensibilizar el funcional Φ, puede estimarse como sigue

$$\mathcal{C}_{ins} \le \mathcal{H} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\mathcal{M}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}.$$

$\square$

Terminamos esta sección probando el resultado establecido en el Teorema 2.3.

Demostración del Teorema 2.3:

La prueba de este teorema es similar a la del Teorema 2.2. Por este motivo, daremos solamente un esquema de la misma. Como en aquel teorema, bastará con encontrar un control $v \in L^2(Q)$ que resuelva el problema de controlabilidad nula (2.16), (2.17) (con $y_0 = 0$) y (2.10).

Comencemos fijando $\varepsilon > 0$ y, por simplicidad, omitamos la dependencia con respecto a ε. Dada F como en el enunciado, sea $\mathcal{G}$ la función continua definida por

$$\mathcal{G}(s) = \begin{cases} \dfrac{F(s)}{s} & \text{si } \; s \neq 0, \\ F'(0) & \text{si } \; s = 0, \end{cases}$$

que satisface $F(s) = \mathcal{G}(s)s$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$.

Sea $h \in L^\infty(\Sigma)$ tal que $\partial_t h \in L^\infty(\Sigma)$. Fijado $z \in L^2(Q)$, se considera el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \mathcal{G}(z)y = \xi + v\mathbf{1}_\omega \;\; \text{en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + F'(z)q = y\mathbf{1}_\mathcal{O} \;\; \text{en } Q, \\ \partial_n q + hq = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.61}$$

donde los potenciales verifican

$$\|\mathcal{G}(z)\|_\infty \leq \mathcal{L}, \quad \|F'(z)\|_\infty \leq \mathcal{L}, \quad \forall z \in L^2(Q), \tag{2.62}$$

siendo $\mathcal{L} > 0$ la constante de Lipschitz de F.

Primero, una propiedad de continuación única para las soluciones del correspondiente sistema adjunto, que se deduce (por ejemplo) del Teorema 2.6, nos permite encontrar el control $v_z \in L^2(Q)$ de norma L^2 mínima tal que la solución (y_z, q_z) de (2.60)–(2.61) asociada a v_z satisface

$$\|q_z(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon.$$

Sean $\widetilde{M}_z$ y $\widetilde{H}_z$ las constantes positivas (que dependen de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\|\mathcal{G}(z)\|_\infty$, $\|F'(z)\|_\infty$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$) que proporciona el Teorema 2.6 para $a = \mathcal{G}(z)$, $c = F'(z)$, h como en el enunciado, $k \equiv h$ y $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto no vacío arbitrario. Si $\xi \in L^2(Q)$ satisface

$$\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{M}_z}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt < \infty,$$

razonando como en la demostración de la Proposición 2.7, gracias a la desigualdad de observabilidad (2.33) (ver el Teorema 2.6) deducimos

$$\|v_z\|_{2;Q} \leq \sqrt{\widetilde{H}_z} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{M}_z}{t} \right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}.$$

Sean $\widetilde{\mathcal{M}} > 0$ y $\widetilde{\mathcal{K}} > 0$ las constantes (dependiendo de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\mathcal{L}$, $\|h\|_{\infty;\Sigma}$ y $\|\partial_t h\|_{\infty;\Sigma}$) definidas, respectivamente, por

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \sup_{z \in L^2(Q)} \widetilde{M}_z \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathcal{K}} = \sup_{z \in L^2(Q)} \sqrt{\widetilde{H}_z}.$$

constantes que están bien definidas, gracias a (2.62). De este modo, para cualquier $\xi \in L^2(Q)$ verificando (2.15), se tiene

$$\|v_z\|_{2;Q} \leq \widetilde{\mathcal{K}} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{t} \right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}, \quad \forall z \in L^2(Q). \tag{2.63}$$

Consideramos el operador no lineal $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon : L^2(Q) \to L^2(Q)$ definido por $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon(z) = y_z$, donde y_z es la solución de (2.60) asociada al control v_z obtenido mediante el procedimiento anterior. Tenemos (recuérdese la Proposición 1.5)

$$y_z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad \partial_t y_z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)'),$$

con

$$\begin{aligned} &\|y_z\|_{L^2(H^1(\Omega))} + \|y_z\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|\partial_t y_z\|_{L^2(H^1(\Omega)')} \\ &\leq C\left(\Omega, T, \|\mathcal{G}(z)\|_\infty, \|h\|_{\infty;\Sigma}, \|\xi\|_{2;Q}, \|v_z\|_{2;Q}\right) \end{aligned}$$

(y análogamente para q_z). Como en la demostración de la Proposición 2.7, la estimación uniforme precedente, junto con las hipótesis de regularidad sobre F, nos dan la compacidad y continuidad del operador $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$. De hecho, $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon(L^2(Q)) \subset \widetilde{K}$, donde $\widetilde{K}$ es un compacto fijo de $L^2(Q)$. Podemos entonces aplicar el Teorema de Schauder del punto fijo y deducir la existencia de un punto fijo, y_ε, de $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, hemos probado que y_ε resuelve (2.16) con $y_0 = 0$ y término de control $v = v_\varepsilon$ (el control de norma L^2 mínima asociado a $z = y_\varepsilon$), y la correspondiente solución q_ε de (2.17) satisface (2.11). Además, v_ε verifica la estimación (2.63).

La estimación uniforme (con respecto a ε) de los controles v_ε y de los potenciales $\mathcal{G}(y_\varepsilon)$ y $F'(y_\varepsilon)$, junto con la continuidad de $\mathcal{G}$ y F', nos permiten pasar al límite en el sistema acoplado que verifica $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ y en (2.11), deduciendo la existencia de un control v verificando (2.63) y tal que la correspondiente solución (y,q) de (2.16)-(2.17) satisface (2.10). Esto completa la demostración. □

2.3. Controles ε-insensibilizantes para el sistema de Stokes

En esta sección abordamos el problema de la ε–insensibilización de un funcional asociado al sistema de Stokes en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ó 3) con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2. En concreto, mostramos resultados sobre la existencia de controles que ε–insensibilizan la energía del sistema los cuales son, en nuestro conocimiento, los primeros resultados en la literatura sobre la existencia de controles ε–insensibilizantes para el sistema de Stokes. Como veremos, el problema que analizamos en esta sección se reformula de manera equivalente como un problema de controlabilidad aproximada para un par de sistemas de Stokes en cascada. De este modo, el punto clave para probar los resultados que presentamos residirá en mostrar sendas propiedades de continuación única para el correspondiente sistema adjunto.

Comenzamos recordando los espacios funcionales en los que hemos de trabajar. Denotamos por H la adherencia en $L^2(\Omega)^N$ del conjunto

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N : \nabla\cdot\varphi = 0 \ \text{ en } \Omega\},$$

donde por $\nabla\cdot\varphi$ se denota la divergencia de la función vectorial φ. H es un espacio de Hilbert para el producto escalar inducido de $L^2(\Omega)^N$, que denotaremos por $(\cdot,\cdot)_{2;\Omega}$:

$$(u,v)_{2;\Omega} = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx, \quad \forall u = (u_1,\ldots,u_N), v = (v_1,\ldots,v_N) \in H.$$

Sea V la adherencia de $\mathcal{V}$ en $H_0^1(\Omega)^N$, que tiene también estructura hilbertiana con el producto escalar inducido de $H_0^1(\Omega)^N$, denotado por $(\cdot,\cdot)_{1,2;\Omega}$. Así, si $u = (u_1,\ldots,u_N)$, $v = (v_1,\ldots,v_N) \in V$:

$$(u,v)_{1,2;\Omega} = \int_\Omega \nabla u(x) : \nabla v(x)\,dx = \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx.$$

Las normas en H y V serán denotadas por $\|\cdot\|_{2;\Omega}$ y $|\cdot|_{1,2;\Omega}$, respectivamente. Los espacios H y V pueden ser caracterizados como sigue (cf. [50], entre otros):

$$H = \{u \in L^2(\Omega)^N : \nabla\cdot u = 0 \ \text{ en } \Omega,\ \gamma_n u = 0\}$$

y

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla\cdot u = 0 \ \text{ en } \Omega\},$$

siendo

$$\gamma_n : H(\mathrm{div};\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^N : \nabla\cdot u \in L^2(\Omega)\} \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

el operador (lineal y continuo) *traza normal* tal que

$$\gamma_n \varphi = \varphi \cdot n_{|\partial\Omega}, \quad \forall \varphi \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})^N.$$

Denotando por H' (resp. V') el espacio dual de H (resp. de V), tenemos la siguiente cadena de inyecciones

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

donde cada espacio es denso en el siguiente y las inyecciones son continuas y compactas.

Como en las secciones precedentes, supongamos dados un instante de tiempo $T > 0$ y dos abiertos no vacíos arbitrariamente pequeños ω (abierto de control) y $\mathcal{O}$ (abierto de observación) contenidos en Ω. Con la notación habitual, consideramos el sistema de Stokes con condición inicial parcialmente conocida:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = \xi + v\mathbf{1}_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0 \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(0) = y_0 + \tau\, \hat{y}_0, \end{cases} \tag{2.64}$$

donde $y(x,t)$ y $p(x,t)$ representan, respectivamente, la *velocidad* del fluido y su *presión* para $(x,t) \in Q$, $\xi \in L^2(Q)^N$ e $y_0 \in H$ son dados, τ es un número real desconocido y pequeño, $\hat{y}_0 \in H$ es desconocido, con $\|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1$, y $v \in L^2(Q)^N$ es una función control por determinar.

Es bien conocido que, para cada $\xi \in L^2(Q)^N$, $v \in L^2(Q)^N$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $y_0, \hat{y}_0 \in H$, el sistema (2.64) posee una única solución $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;V)$, con $\partial_t y \in L^2(0,T;V')$ (y así, $y \in C([0,T];H)$), en el sentido siguiente:

$$\begin{cases} \langle \partial_t y(t), w\rangle_{V',V} + (y(t),w)_{1,2;\Omega} = (\xi(t) + v(t)\mathbf{1}_\omega, w)_{2;\Omega}, \quad \forall w \in V, \ t \text{ c.p.d. en } (0,T), \\ y(0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 \ \text{ en } H. \end{cases}$$

En particular, se verifica $\nabla \cdot y = 0$ en el sentido de las distribuciones e $y(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)^N$ para t c.p.d. en $(0,T)$. Más aún, existe una distribución $p = p(\cdot,\cdot;\tau,v)$ definida sobre Q (única, salvo constante aditiva) tal que (y,p) verifica la EDP de (2.64) en el sentido de las distribuciones.

Pasamos a plantear el problema que analizaremos. Consideremos el funcional diferenciable $\Psi : L^2(Q)^N \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Psi(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t)|^2\,dx\,dt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y_i(x,t)|^2\,dx\,dt, \tag{2.65}$$

para $y = (y_1,\ldots,y_N) \in L^2(Q)^N$. Estamos interesados en dar respuesta a la siguiente

> **Cuestión 2:** *Fijado $\varepsilon > 0$, ¿es posible encontrar una función control v en $L^2(Q)^N$, con* sop $v \subset \overline{\omega} \times [0,T]$*, tal que*
>
> $$\left| \left.\frac{\partial \Psi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \right| \le \varepsilon, \quad \forall \hat{y}_0 \in H \ \text{con } \|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1? \tag{2.66}$$

Aquí, $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ (junto a alguna $p(\cdot,\cdot;\tau,v) \in \mathcal{D}'(Q)$) es la solución del sistema (2.64) *asociada a τ y a v.*

Por analogía con el concepto de control ε–insensibilizante introducido por O. Bodart y C. Fabre en [8] en el contexto de la ecuación del calor, si existe un control v tal que se tenga (2.66), diremos que dicho control v ε–insensibiliza el funcional Ψ.

El siguiente resultado da respuesta afirmativa a la cuestión que acabamos de plantear cuando los abiertos de control y de observación no son disjuntos:

Teorema 2.9 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un control $v \in L^2(Q)^N$ que ε–insensibiliza el funcional Ψ definido en* (2.65).

DEMOSTRACIÓN: Haremos la demostración de este teorema en dos etapas que iremos presentando en resultados diferentes.

1. En primer lugar, caracterizamos la condición de ε-insensibilización (2.66) en términos de la controlabilidad aproximada de un par de sistemas de Stokes en cascada. Se tiene:

Proposición 2.10 *Sea Ψ el funcional definido en* (2.65)*. Supongamos que $(\bar{y},\bar{p})$ y (q,π) (junto a cierto control $v \in L^2(Q)^N$) resuelven el sistema acoplado*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{y} - \Delta \bar{y} + \nabla \bar{p} = \xi + v\mathbf{1}_\omega, \quad \nabla \cdot \bar{y} = 0 \ \text{ en } Q, \\ \bar{y} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \bar{y}(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.67}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + \nabla \pi = \bar{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}, \quad \nabla \cdot q = 0 \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(T) = 0. \end{cases} \tag{2.68}$$

Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, el control v ε–insensibiliza Ψ si y sólo si

$$\|q(\cdot;0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon. \tag{2.69}$$

□

La demostración de este resultado es análoga a la de la segunda parte de la Proposición 2.1 y será omitida.

2. En virtud de la proposición anterior, la demostración del Teorema 2.9 queda reducida a probar la existencia de un control $v \in L^2(Q)^N$ que resuelva el problema de controlabilidad aproximada (2.67)–(2.69). De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.11 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Entonces, el conjunto $\mathcal{R}(0;\xi,y_0)$ definido por*

$$\mathcal{R}(0;\xi,y_0) = \left\{ q(0) : (\bar{y},\bar{p}),(q,\pi) \text{ solución de (2.67)–(2.68)}\ ,\ v \in L^2(Q)^N \right\}$$

es denso en H.

Demostración del Teorema 2.11: Debido al carácter lineal de los sistemas (2.67) y (2.68), observamos que $\mathcal{R}(0;\xi,y_0)$ es una variedad afín de H que puede escribirse en la forma

$$\mathcal{R}(0;\xi,y_0)=U(0)+\mathcal{R}(0;0,0),$$

donde $U\in L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H)$ (para alguna $\Pi\in\mathcal{D}'(Q)$) es la solución de

$$\begin{cases} -\partial_t U-\Delta U+\nabla\Pi=Y_0\mathbf{1}_{\mathcal{O}}, \quad \nabla\cdot U=0 \ \text{ en } Q,\\ U=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad U(T)=0, \end{cases}$$

siendo $Y_0\in L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H)$ (junto a alguna $P\in\mathcal{D}'(Q)$) la solución de

$$\begin{cases} \partial_t Y_0-\Delta Y_0+\nabla P=\xi, \quad \nabla\cdot Y_0=0 \ \text{ en } Q,\\ Y_0=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad Y_0(0)=y_0. \end{cases}$$

Además, $\mathcal{R}(0;\xi,y_0)$ es denso en H si y sólo si el subespacio vectorial $\mathcal{R}(0;0,0)$ de H es denso en H. Probaremos esto último. Al ser H un espacio de Hilbert, utilizando una consecuencia del Teorema de la Proyección (véanse, por ejemplo, el Corolario I.8 y la Nota 5, p. 7, en [13]), la densidad de $\mathcal{R}(0;0,0)$ en H equivale a una propiedad de continuación única para las soluciones del problema adjunto de (2.67)–(2.68). En concreto, sea $\varphi^0\in H$ y consideremos el problema (problema adjunto)

$$\begin{cases} \partial_t\varphi-\Delta\varphi+\nabla h=0, \quad \nabla\cdot\varphi=0 \ \text{ en } Q,\\ \varphi=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(0)=\varphi^0, \end{cases} \tag{2.70}$$

$$\begin{cases} -\partial_t\psi-\Delta\psi+\nabla\theta=\varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}}, \quad \nabla\cdot\psi=0 \ \text{ en } Q,\\ \psi=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \psi(T)=0. \end{cases} \tag{2.71}$$

La densidad de $\mathcal{R}(0;0,0)$ en H equivale a probar:

> *"Si $(\varphi,h),(\psi,\theta)\in(L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H))\times\mathcal{D}'(Q)$ son soluciones de (2.70)–(2.71), con $\psi\equiv 0$ en $\omega\times(0,T)$, entonces $\varphi\equiv\psi\equiv 0$ en Q."*

Para concluir la prueba del Teorema 2.11 y, en consecuencia, la del Teorema 2.9, bastará entonces con demostrar la propiedad de continuación única para las soluciones de (2.70)–(2.71) que acabamos de enunciar[1].

En primer lugar, el efecto regularizante del sistema de Stokes nos da, para $\delta>0$ arbitrariamente pequeño, la siguiente regularidad para (φ,h) y (ψ,θ) (véase, por ejemplo, [38]):

$$\varphi,\psi\in C^\infty(\Omega\times(\delta,T))^N \quad \text{y} \quad h,\theta\in C^\infty(\Omega\times(\delta,T)).$$

[1]Nuestro agradecimiento a S. Guerrero por aportar la idea de la demostración.

Ello nos permitirá trabajar en (2.70) y (2.71) en $\Omega \times (\delta, T)$.

Aplicando el operador divergencia en la EDP de (2.70), tenemos

$$\Delta h = 0 \ \text{ en } \Omega \times (\delta, T), \tag{2.72}$$

pues $\nabla \cdot \varphi = 0$. Además,

$$\partial_t(\Delta\varphi) - \Delta(\Delta\varphi) = 0 \ \text{ en } \Omega \times (\delta, T). \tag{2.73}$$

Para convencerse de ello, basta con tomar el laplaciano en la EDP de (2.70) y usar (2.72). Por otro lado, puesto que $\psi \equiv 0$ en $\omega \times (0, T)$, de (2.71) deducimos que

$$\varphi = \nabla\theta \ \text{ en } (\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T), \tag{2.74}$$

de donde

$$\Delta\theta = 0 \ \text{ en } (\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T),$$

sin más que tomar la divergencia. Aplicando ahora en (2.74) el operador de Laplace, se tiene

$$\Delta\varphi = \Delta(\nabla\theta) = \nabla(\Delta\theta) = 0 \ \text{ en } (\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T).$$

Observemos que $\Delta\varphi$ es solución de la ecuación clásica del calor en el cilindro $\Omega \times (\delta, T)$ (véase (2.73)) y se anula en $(\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T)$. Entonces, en virtud de la propiedad de continuación única para la ecuación del calor, se tiene que

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ en } \Omega \times (\delta, T),$$

de donde

$$\varphi \equiv 0 \ \text{ en } \Omega \times (\delta, T),$$

pues $\varphi(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)^N$ para t c.p.d. en $(0, T)$. Finalmente, como $\varphi \in C([0, T]; H)$, tenemos que $\varphi(\delta) = 0$ para cualquier $\delta \in (0, T)$, $\varphi(0) = \varphi^0 = 0$ en H y $\varphi \equiv 0$ en Q. Ello concluye la prueba del Teorema 2.11 y, por consiguiente, la del Teorema 2.9. $\square$

Seguidamente mostramos un resultado relativo a la existencia de controles ε–insensibilizantes bidimensionales para un sistema de Stokes 3–D. Más precisamente, consideramos el sistema (2.64), con $N = 3$, y nos planteamos la cuestion siguiente:

> **Cuestión 3:** *Fijado $\varepsilon > 0$, ¿es posible ε–insensibilizar el funcional Ψ dado por* (2.65) *actuando sobre el sistema (a través de un pequeño abierto $\omega \subset \Omega$) sólo en dos direcciones? En otras palabras, buscamos controles $v = (v_1, v_2, v_3)$ con una componente nula (por ejemplo, con $v_3 = 0$) de modo que se verifique la condición de ε–insensibilización* (2.66).

El resultado de ε–insensibilización que probamos es el siguiente:

Teorema 2.12 *Supongamos que $N = 3$ y $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un control $v \in L^2(Q)^3$ de la forma $v = (v_1, v_2, 0)$ que ε–insensibiliza el funcional Ψ definido en* (2.65).

Demostración: Razonando como en el Teorema 2.9, todo se reduce a probar:

> *“Si $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, $(\varphi, h), (\psi, \theta) \in (L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)) \times \mathcal{D}'(Q)$ resuelven* (2.70)–(2.71) *y, además,*
>
> $$\psi_i = 0 \quad \text{en } \omega \times (0,T) \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{2.75}$$
>
> *entonces $\varphi \equiv 0$ en Q. ”*

La prueba de esta propiedad de continuación única es análoga a la probada en la situación anterior, pero razonando por componentes. Recordemos que el efecto regularizante del sistema nos da $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega \times (\delta, T))^N$ y $h, \theta \in C^\infty(\Omega \times (\delta, T))$, para $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, lo que nos permite trabajar en $\Omega \times (\delta, T)$.

En primer lugar, nuevamente se tienen (2.72) y (2.73) y, así, también

$$\partial_t(\Delta\varphi_i) - \Delta(\Delta\varphi_i) = 0 \;\text{ en } \Omega \times (\delta, T), \quad i = 1, 2, 3.$$

De (2.71) y (2.75) se deduce ahora que

$$\varphi_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \;\text{ en } (\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T), \quad i = 1, 2.$$

Por otro lado, aplicando el operador divergencia en la EDP de (2.71), tenemos que

$$\Delta\theta = 0 \;\text{ en } \Omega \times (\delta, T).$$

Combinando las últimas identidades, obtenemos

$$\Delta\varphi_i = \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\theta) = 0 \;\text{ en } (\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T), \quad i = 1, 2.$$

Notemos que, para $i = 1, 2$, $\Delta\varphi_i$ es solución de la ecuación clásica del calor en $\Omega \times (\delta, T)$ y se anula en $(\omega \cap \mathcal{O}) \times (\delta, T)$. De este modo, aplicando la propiedad de continuación única de la ecuación del calor a $\Delta\varphi_i$, $i = 1, 2$, y recordando de nuevo que $\varphi(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)^3$ para t c.p.d. en $(0,T)$, deducimos que

$$\varphi_i = 0 \;\text{ en } \Omega \times (\delta, T), \quad i = 1, 2,$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} = 0 \;\text{ en } \Omega \times (\delta, T),$$

pues $\nabla \cdot \varphi = 0$. Así, en $\Omega \times (\delta, T)$, φ es de la forma $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$, con $\varphi_3 = \varphi_3(x_1, x_2, t)$. Puesto que Ω es acotado y $\varphi_3(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ para t c.p.d. en $(0, T)$, deducimos que también $\varphi_3 = 0$ en $\Omega \times (\delta, T)$. Finalmente, como $\varphi \in C([0, T]; H)$, razonando como en el caso anterior, inferimos que $\varphi \equiv 0$ en Q y $\varphi(0) = \varphi^0 = 0$ en H, como se quería probar. $\square$

El último resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.13 *Supongamos que* $N = 2$ *y* $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. *Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un control* $v \in L^2(Q)^2$ *de la forma* $v = (v_1, 0)$ *que* ε*–insensibiliza el funcional* Ψ *definido en* (2.65).

Omitiremos la demostración de este resultado, al ser idéntica a la del Teorema 2.12.

***Observación* 2.4** En [43] se prueba la existencia de un control nulo aproximado del sistema 3–D de Stokes

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla p = v\mathbf{1}_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0 \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(0) = y_0, \end{cases}$$

con controles de la forma $v = (v_1, 0, 0)$, para cierto tipo de abiertos cilíndricos Ω, es decir, de la forma

$$\Omega = G \times (0, L),$$

con G abierto (acotado y regular) de $\mathbb{R}^2$ y $0 < L < \infty$. También se prueba en el citado trabajo que el resultado falla cuando G es una bola. Así, el problema de ε–insensibilizar el funcional Ψ dado por (2.65) actuando sobre el sistema 3–D a través de un pequeño abierto $\omega \subset \Omega$ con controles $v = (v_1, 0, 0)$ no es un problema fácil y ha de ser analizado. $\square$

2.4. Comentarios adicionales y algunos resultados que quedan pendientes

Terminamos el capítulo con algunos comentarios que conducen a cuestiones abiertas y problemas pendientes.

1. Sería interesante dar condiciones suficientes sobre el dato inicial y_0 para garantizar la existencia de controles insensibilizantes. Cuando $f \equiv 0$ y $\mathcal{O} = \Omega$, L. de Teresa prueba un resultado positivo sobre existencia de controles que insensibilizan (2.2) para una clase pequeña de datos iniciales (véase el Lema 2 de [51]). La prueba de este resultado se basa fuertemente en las propiedades del semigrupo de la ecuación clásica del calor. Para una ecuación del calor con un potencial en $L^\infty(Q)$ el problema sigue abierto. Incluso éste sigue abierto en el caso de la ecuación clásica del calor cuando $\mathcal{O} \neq \Omega$.

2. La hipótesis geométrica $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ se requiere para demostrar tanto la existencia de controles ε–insensibilizantes como la de controles insensibilizantes. En el primer caso, la hipótesis se utiliza para probar que cierto funcional es coercitivo, usando una propiedad de continuación única. En el caso de los controles insensibilizantes, esta hipótesis se usa para probar una desigualdad de observabilidad apropiada. Por el momento, ambos problemas están lejos de ser resueltos para abiertos de control y de observación disjuntos y, hasta lo que conocemos, sólo existen algunos resultados parciales. En [47], los autores prueban un resultado de existencia de controles ε–insensibilizantes para la ecuación clásica del calor cuando $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, pero el conjunto de observación $\mathcal{O}$ que consideran no es un abierto puesto que es una unión finita de puntos. El resultado es en todo caso interesante puesto que, desde el punto de vista físico, esto es precisamente lo que podemos hacer: tomar mediciones en un número finito de puntos. Por otro lado, en [48] se prueba la existencia de controles ε–insensibilizantes para la ecuación clásica del calor en el caso (unidimensional) $\Omega = (-L, L)$, $\omega = (0, L)$ y $\mathcal{O} = (-L, 0)$. Pero las técnicas usadas en el mencionado trabajo no pueden aplicarse para analizar la existencia de controles ε–insensibilizantes en el caso de una ecuación del calor con un término lineal ay ($a \in L^\infty(Q)$). Comentamos finalmente que, en los casos considerados en los trabajos [47] y [48] citados anteriormente, la existencia de controles insensibilizantes es un problema completamente abierto.

3. Una cuestión natural que surge a la vista de los resultados de insensibilización establecidos en los Teoremas 2.2 y 2.3 es la siguiente: "¿por qué no analizar en el segundo resultado el caso de una ecuación del calor semilineal para no linealidades que dependen del estado y del gradiente de éste?." Remarquemos que probar la existencia de controles que insensibilicen la energía en el abierto de observación $\mathcal{O}$ del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = \tau \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.76}$$

con f una función globalmente Lipschitziana de clase C^1, es un problema mucho más difícil. Observemos que tal resultado de insensibilización equivale al siguiente problema de controlabilidad nula:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (\partial_p f(y, \nabla y) q) + \partial_s f(y, \nabla y) q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + hq + (\partial_p f(y, \nabla y) \cdot n)\, q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right.$$

$$q(x,0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Esto nos lleva a analizar el problema de controlabilidad nula para el sistema lineal en cascada

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + hy = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (Dq) + cq = y\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + (D \cdot n + h)\, q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

bajo las hypótesis $a, c \in L^\infty(Q)$ y $B, D \in L^\infty(Q)^N$ (hay que resaltar que éstas son las hipótesis naturales sobre estos potenciales cuando queremos tratar no linealidades $f(\cdot,\cdot)$ de clase C^1 y globalmente Lipschitzianas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$). Para ello hay que probar una desigualdad de observabilidad para las soluciones del problema adjunto del sistema lineal acoplado anterior, a saber:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta \varphi + D \cdot \nabla \varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \varphi + h\varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta \psi - \nabla \cdot (B\psi) + a\psi = \varphi\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \psi + (B \cdot n + h)\, \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Para obtener dicha desigualdad de observabilidad, necesitamos una desigualdad de Carleman para las soluciones de este problema (adjunto) acoplado. La presencia del término $(B \cdot n)\psi$ en la condición de contorno para ψ y la sola hipótesis $B \in L^\infty(Q)^N$ hace que esta situación sea más difícil (incluso en el caso de un problema de controlabilidad nula para una sola ecuación del calor lineal con el mismo tipo de condiciones de contorno). La desigualdad de Carleman que necesitamos en este caso puede obtenerse gracias a la desigualdad de Carleman (1.51) recientemente obtenida en [21] para las soluciones del sistema (1.50) (recordemos que en la Sección 1.5 ya hicimos un comentario en esta dirección). Así, combinando un resultado de existencia de controles insensibilizantes en el caso lineal con argumentos adecuados de punto fijo, puede probarse un resultado de existencia de controles insensibilizantes para el sistema (2.76), para f de clase C^1 y globalmente Lipschitziana. Asimismo, puede probarse la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con término no lineal dependiendo del estado y de su gradiente cuando se consideran condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, para ambas no linealidades con crecimiento sublineal en el infinito. Estos resultados quedarán recogidos en el trabajo en preparación [30].

4. Queda pendiente de analizar la posible generalización de los resultados obtenidos en la sección precedente al caso de un sistema de quasi-Stokes y al caso en que se consideran otro tipo de condiciones de contorno tales como condiciones de tipo Fourier no lineales:

$$(\sigma(y,p)\cdot n)_{tg} + (f(y))_{tg} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma,$$

donde

$$\begin{aligned} &(a)_{tg} = a - (a\cdot n)n \quad \text{(componente tangencial de } a),\\ &\sigma(y,p) = -pI_d + (\nabla y + {}^t\nabla y) \quad \text{(tensor de esfuerzos)}. \end{aligned}$$

5. A la vista de los resultados mostrados sobre existencia de controles insensibilizantes para la ecuación del calor, una pregunta natural e interesante en el marco del sistema de Stokes sería la siguiente:

Cuestión 4: *¿Es posible encontrar un control $v \in L^2(Q)^N$ tal que*

$$\left.\frac{\partial \Psi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad \forall \hat{y}_0 \in H \ \textit{con}\ \|\hat{y}_0\|_{2;\Omega} = 1? \tag{2.77}$$

De nuevo, aquí, $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ (junto a alguna $p(\cdot,\cdot;\tau,v) \in \mathcal{D}'(Q)$) denota la solución de (2.64) *(para $y_0 = 0$) asociada a τ y a v.*

Se comprueba sin dificultad que la condición de insensibilización (2.77) equivale a que

$$q(0) = 0 \ \text{ en } H,$$

donde $(q,\pi) \in \big(L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)\big) \times \mathcal{D}'(Q)$ resuelve (2.68), siendo $\overline{y}$ (junto a alguna $\bar{p} \in \mathcal{D}'(Q)$) la solución de (2.67). De este modo, como en el caso de la ecuación del calor, el problema se reduce a resolver un problema de controlabilidad nula para un par de sistemas parabólicos en cascada, en este caso, un par de sistemas de Stokes. Para poder dar respuesta afirmativa a la cuestión planteada habría que probar una desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema adjunto (2.70)–(2.71). El punto clave estaría en obtener una desigualdad de tipo Carleman que nos permita acotar ciertos términos globales de φ y ψ en función solamente de ψ (localizada en un abierto $\omega \subset \Omega$ tal que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$). Pero ello es difícil sin que aparezcan las presiones. La cuestión formulada queda de este modo pendiente.

6. En conexión con el comentario anterior, en nuestro conocimiento, el único resultado en la literatura sobre existencia de controles insensibilizantes para

sistemas de tipo Stokes se prueba en [20]. Los autores consideran un modelo oceánico quasi-geostrófico lineal con condición inicial parcialmente conocida y demuestran la existencia de controles que insensibilizan la observación de la velocidad en un abierto $\mathcal{O}$. Más precisamente, el modelo (2–D) considerado en [20] está descrito por las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t y - A\Delta y + \gamma y + (f_0 + \beta x_2) k \wedge y + \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p = \xi + v\mathbf{1}_\omega, \quad \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 + \tau \hat{y}_0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.78}$$

donde $y(x,t)$ y $p(x,t)$ denotan, respectivamente, la velocidad y la presión del fluido, $(x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, ξ es una fuente dada, A representa el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal, γ es el coeficiente de fricción en el fondo, ρ_0 es la densidad del fluido y $(f_0 + \beta x_2) k \wedge y$ es el término de Coriolis, donde $k \wedge y = (-y_2, y_1)$ (por simplicidad, los autores toman $A = 1$, $\gamma = 1$, $f_0 = 1$, $\beta = 1$ y $\rho_0 = 1$).

Como en los casos anteriores, es fácil caracterizar el problema de la insensibilización (resp. ε–insensibilización) del funcional Ψ dado por (2.65) (siendo y la solución de (2.78)) en términos de la controlabilidad nula (resp. controlabilidad aproximada) de un sistema de tipo Stokes en cascada. En una primera etapa, los autores prueban, gracias a la presencia del término de Coriolis, una propiedad de continuación única para un sistema (adjunto) en cascada y, en consecuencia, la existencia de controles ε–insensibilizantes. Seguidamente se demuestra una desigualdad de observabilidad que permite probar que existen controles insensibilizantes bajo hipótesis adecuadas sobre el término fuente ξ cuando $y_0 = 0$. La prueba de esta desigualdad de observabilidad se basa en una adecuada desigualdad global de Carleman para el sistema adjunto, la cual se obtiene siguiendo una cadena de estimaciones basadas en los mismos pasos de la prueba de la propiedad de continuación única.

7. Se desconocen resultados de existencia de controles insensibilizantes cuando sobre un sistema de estado con datos incompletos ejercemos un control frontera. Para fijar ideas, consideremos una ecuación del calor lineal con condición inicial parcialmente conocida

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi \ \text{ en } Q, \\ y = v\mathbf{1}_\gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.79}$$

donde $a \in L^\infty(Q)$, ξ, τ e $\hat{y}_0(x)$ son como en (2.1) y $v \in L^2(\Sigma)$ es una función control por determinar que actúa sobre $\gamma \subset \partial\Omega$, un abierto relativo no vacío de la frontera. Se pueden hacer diversos comentarios en relación con la “insensibilización frontera” de un funcional asociado al sistema de estado (2.79). He aquí algunos de ellos:

(a) Consideremos el funcional Φ definido por

$$\Phi(y(x,t;\tau,v)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t;\tau,v)|^2 \, dx \, dt,$$

donde $\mathcal{O} \subset \Omega$ es un abierto no vacío e $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es la solución de (2.79) asociada a τ y a v. La búsqueda de controles que insensibilicen el funcional Φ nos lleva a resolver el problema de controlabilidad exacta a cero

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi \ \text{ en } Q, \\ y = v\mathbf{1}_\gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + aq = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0, \ q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora bien, no parece claro que existan controles que resuelvan el anterior problema de controlabilidad exacta a cero. De hecho, E. Fernández-Cara, L. de Teresa y M. González-Burgos han analizado el sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial^2_{xx} y = 0 \ \text{ en } (0,1)\times(0,T), \\ y_{|x=0} = v, \ y_{|x=1} = 0, \quad y(x,0) = y_0 \ \text{ en } (0,1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \nu\partial^2_{xx} q = y \ \text{ en } Q, \\ q_{|x=0} = q_{|x=1} = 0, \quad q(x,T) = q_0 \ \text{ en } (0,1), \end{cases}$$

y han demostrado que, si $\sqrt{\nu} = i/j$, con $i,j \in I\!N, i \neq j$, incluso no hay propiedad de continuación única para el correspondiente problema adjunto. Por otro lado, la controlabilidad aproximada y exacta del problema acoplado 1–D anterior en el caso en que $\sqrt{\nu} \neq i/j$ $(i,j \in I\!N)$ queda por analizar. Con ello se pone de manifiesto el comportamiento diferente de la propiedad de controlabilidad exacta a cero con controles frontera para una sola ecuación del calor y para dos ecuaciones acopladas (recuérdese que, en el caso de una sola ecuación del calor, la controlabilidad exacta a cero con controles frontera se deduce fácilmente de la misma propiedad de controlabilidad con controles distribuidos).

(b) Una cuestión natural que cabe plantearse es la insensibilización del funcional $\widetilde{\Phi}$ dado por

$$\widetilde{\Phi}(y(x,t;\tau,v)) = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma\times(0,T)} |\partial_n y(x,t;\tau,v)|^2 \, d\sigma \, dt,$$

donde $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es como antes y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es un nuevo abierto relativo (no vacío) de la frontera tal que $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$. La existencia de controles que insensibilicen $\widetilde{\Phi}$ se reformula en este caso de manera equivalente como el siguiente problema de controlabilidad exacta a cero

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi \ \text{ en } Q, \\ y = v\mathbf{1}_\gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + aq = 0 \ \text{ en } Q, \\ q = -\partial_n y\, \mathbf{1}_\Gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0, \ q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Para probar un resultado positivo de insensibilización en este marco, habría que probar una desigualdad de observabilidad de la forma

$$\iint_Q \exp\left(-\frac{M}{t}\right)|\psi|^2\,dx\,dt \le C \iint_{\gamma\times(0,T)} |\partial_n\psi|^2\,d\sigma\,dt, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega),$$

donde ψ junto a φ resuelven el problema (adjunto) acoplado

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta\varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta\psi + a\psi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \psi = \partial_n \varphi\, \mathbf{1}_\Gamma \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \psi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora bien, éste es un problema difícil y queda aún pendiente de ser estudiado.

8. En [52] se prueba un resultado positivo de existencia de controles ε–insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal (con no linealidad globalmente Lipschitziana) considerada en un dominio no acotado. Sin embargo, existen en la literatura resultados negativos de controlabilidad exacta a cero para una sola ecuación del calor en dominios no acotados (cf. [44] y [45]), a la vista de cuales, parece claro que vayamos a tener un resultado negativo de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor lineal considerada en un semiespacio (tanto en el caso unidimensional como multidimensional). Por otro lado, razonando como en [14], es esperable que podamos probar la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con no linealidades de la forma $f(y,\nabla y)$ con crecimiento sublineal en el infinito cuando, incluso siendo el dominio Ω no acotado, la región $\Omega \setminus \overline{\omega \cap \mathcal{O}}$ se supone acotada.

Capítulo 3

Existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor superlineal

El principal objetivo de este capítulo es analizar la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal cuando se consideran términos no lineales con crecimiento superlineal en el infinito. Comenzaremos considerando una ecuación del calor superlineal con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas. Probaremos la existencia de un control, actuando sobre un abierto $\omega \subset \Omega$, que insensibiliza la energía del sistema en otro abierto $\mathcal{O} \subset \Omega$, bajo hipótesis adecuadas sobre el término no lineal y sobre la fuente de calor dada, ξ, cuando $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ (véase el Teorema 3.8). Mostraremos asimismo un resultado de insensibilización de carácter negativo para ciertas no linealidades con comportamiento superlineal en el infinito. En segundo lugar, estudiaremos el caso de una ecuación del calor superlineal a la que se añaden condiciones de contorno no lineales de la forma $\partial_n y + f(y) = 0$. En este marco, probaremos un resultado local de existencia de controles insensibilizantes, el Teorema 3.18.

Los problemas de insensibilización que consideramos en este capítulo nos llevan nuevamente a analizar sendos problemas no lineales de controlabilidad nula no clásicos. Las demostraciones de los resultados principales del capítulo combinan el estudio detallado de problemas lineales similares al correspondiente sistema linealizado y argumentos apropiados de punto fijo. Debido a la presencia de términos no lineales con crecimiento superlineal en el infinito, nos vemos forzados a construir controles regulares. Una de las aportaciones más relevantes de este capítulo y, de hecho, de esta Memoria, reside en la introducción de una nueva técnica de construcción de controles regulares (a partir de controles en $L^2(Q)$) en el caso lineal.

3.1. Los problemas considerados. Necesidad de una nueva técnica de construcción de controles más regulares

Como viene siendo habitual, sean Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) con $\partial\Omega \in C^2$ (al menos), ω y $\mathcal{O}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de Ω arbitrariamente pequeños y pongamos $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, con $T > 0$ dado.

Presentamos en este capítulo nuevos resultados relativos a la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación no lineal del calor que generalizan el Teorema 1 de [51] al caso en que permitimos a las no linealidades del problema un comportamiento superlineal en el infinito. Estos resultados han sido recogidos en varios trabajos (cf. [9], [10] y [12]) y son, en nuestro conocimiento, los primeros resultados en la literatura sobre existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor superlineal. Como hemos adelantado, abordaremos, por un lado, el caso de una ecuación del calor superlineal con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas y, por otro, el caso en que se consideran condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier.

Caso 1: Condiciones de contorno de tipo Dirichlet

Comenzamos analizando el primero de los casos señalados. Consideremos una ecuación del calor semilineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) + \tau\,\hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde f es una función de clase C^1 definida sobre $\mathbb{R}$ con determinado crecimiento superlineal en el infinito (que precisaremos más adelante), la fuente de calor ξ y el dato inicial y_0 son conocidos y suficientemente regulares, $\tau \in \mathbb{R}$ es de nuevo desconocido y pequeño, e $\hat{y}_0$ es desconocido en un espacio de Banach apropiado X que se inyecta de manera continua y densa en $L^2(\Omega)$, con $\|\hat{y}_0\|_X = 1$.

Nuestro primer objetivo será analizar la existencia de controles $v = v(x,t)$, actuando sobre ω, tales que la energía del sistema (3.1) en $\mathcal{O}$ sea invariante a las pequeñas perturbaciones $\tau\hat{y}_0$ en la condición inicial. Más precisamente, como en el capítulo anterior, consideramos el funcional definido por

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t;\tau,v)|^2\,dx\,dt, \tag{3.2}$$

donde aquí $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es una solución de (3.1) (asociada a τ y a v) definida en $(0,T)$, cuando ésta exista. Obsérvese que, debido al crecimiento superlineal de f en el infinito, dados ξ, v e y_0, el problema (3.1) podría no admitir solución definida en todo el intervalo $(0,T)$. Este hecho hace que cambiemos ligeramente la noción usual de control insensibilizante (Definición 2.1, p. 45).

Definición 3.1 *Decimos que un control v insensibiliza el funcional Φ si existe $\tau_0 > 0$ tal que el sistema* (3.1) *admite una solución débil $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$ para $|\tau| \leq \tau_0$ y si se verifica la condición de insensibilización*

$$\left.\frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}_0 \in X \text{ con } \|\hat{y}_0\|_X = 1, \tag{3.3}$$

donde $X = W^{2-2/r,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$, con $r \in \left(\frac{N}{2}+1, \infty\right)$. □

Para problemas lineales, no es difícil comprobar que esta definición es equivalente a la definición usual de control insensibilizante (Definición 2.1, p. 45).

***Observación* 3.1** Para no linealidades $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaciendo la hipótesis

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f'(s)}{\log(1+|s|)} = 0 \qquad \text{(ver (3.39))}$$

el sistema (3.1) admite una solución global cuando los datos ξ, v, y_0 e $\hat{y}_0$ son suficientemente regulares. Por ejemplo, por linealización y una posterior aplicación de un argumento de punto fijo, puede probarse que, dados ξ y v en $L^r(Q)$ e $y_0, \hat{y}_0$ en $W^{2-2/r,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$, con $r > N/2+1$, el sistema (3.1) posee solución en $L^r(0,T;W^{2,r}(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$, espacio en el que está garantizada la unicidad de solución, debido al carácter localmente Lipschitziano de f en $\mathbb{R}$. Señalemos que, durante el análisis del caso con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, supondremos esta regularidad sobre los datos. Esta es la razón por la cual hemos introducido el espacio X en la definición precedente.

□

Por las razones expuestas en el capítulo precedente, supondremos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. El problema de insensibilización planteado nos llevará a analizar el siguiente problema no "estándar" de controlabilidad nula no lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \overline{y} - \Delta \overline{y} + f(\overline{y}) = \xi + v\mathbf{1}_\omega & \text{en } Q, \\ \overline{y} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \overline{y}(x,0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + f'(\overline{y})q = \overline{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ q = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega.$$

Se trata de un problema de controlabilidad nula para dos ecuaciones del calor acopladas, donde la primera es de tipo superlineal. Además, el control sólo aparece en la primera ecuación, mientras que es q la función que queremos conducir a cero después de un intervalo temporal de longitud T.

Como es bien sabido, en el estudio de la controlabilidad nula de sistemas parabólicos con no linealidades con crecimiento superlineal surgen dificultades técnicas adicionales. Recordemos lo que ocurrre en el caso más simple de una sola ecuación del calor superlineal. Durante los últimos años, la controlabilidad nula de

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + f(y) = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

con un término superlineal $f(y)$ (e y^0 suficientemente regular) ha sido intensamente estudiada por varios autores. Como en el caso en el que f tiene crecimiento sublineal en el infinito, la técnica para tratar este problema combina un argumento de punto fijo con el estudio de la controlabilidad nula de problemas lineales de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t y - \Delta y + ay = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

donde $a \in L^\infty(Q)$. La presencia en (3.6) de una no linealidad con crecimiento superlineal en el infinito hace necesaria la construcción de controles en $L^r(Q)$, con $r > (N+2)/2$. Además, hay que analizar, en el caso lineal, cómo la norma L^r de los controles depende de $\|a\|_\infty$. Comentemos algunos trabajos en los cuales se aborda este problema:

1. En [5], el autor obtuvo un control v en $L^{r(N)}(Q)$ que da la controlabilidad exacta a cero de (3.7), con
$$\|v\|_{L^{r(N)}(Q)} \le C(\|a\|_\infty)\|y^0\|_{2;\Omega}.$$
Aquí, $r(N) \in \left[2, \dfrac{2(N+2)}{N-2}\right]$ si $N \ge 3$, $r(N) \in [2,\infty)$ si $N=2$, y $r(N) \in [2,\infty]$ si $N=1$. La prueba de esta estimación está basada en una desigualdad global de Carleman para las soluciones del problema adjunto
$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi + a\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,T) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.8}$$
con $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, la cual fue probada por A.V. Fursikov y O.Yu. Imanuvilov en [26]. Más precisamente, V. Barbu construyó este control v en $L^{r(N)}(Q)$ como límite débil en $L^{r(N)}(Q)$ de controles v_ε ($\varepsilon > 0$) que hacen que la solución y_ε de (3.7) verifique $\|y_\varepsilon(T)\|_{2;\Omega} \le \varepsilon$. Estos controles son, básicamente, una solución φ_ε del

problema adjunto (3.8). Por regularidad parabólica y, en virtud de la mencionada desigualdad de Carleman, dichos controles v_ε están uniformemente acotados en el espacio

$$\{u : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L^2(Q)\},$$

que se inyecta de manera continua en $L^{r(N)}(Q)$, con $r(N)$ como antes. El autor obtuvo también una estimación de la constante que aparece en el lado derecho de la desigualdad de Carleman con respecto a $\|a\|_\infty$. Para resolver el problema no lineal de controlabilidad nula, el autor está obligado a imponer la condición $N < 6$. Ello viene de hacer una formulación de punto fijo en $L^\infty(Q)$ la cual es factible para tales dimensiones. Para otros resultados de controlabilidad probados de modo similar, véase [3].

2. Una segunda técnica fue desarrollada por E. Fernández-Cara y E. Zuazua en [24]. En este trabajo se probó la siguiente desigualdad de observabilidad “refinada”

$$\|\varphi(0)\|_{2;\Omega}^2 \leq C(T, \|a\|_\infty) \left(\iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi| \, dx \, dt \right)^2 \tag{3.9}$$

para las soluciones de (3.8), desigualdad que implica la existencia de un control $v \in L^\infty(Q)$ que da la controlabilidad nula de (3.7), con

$$\|v\|_\infty \leq C(T, \|a\|_\infty) \|y^0\|_{2;\Omega}.$$

En este caso, la desigualdad de observabilidad (3.9) se obtuvo combinando una desigualdad global de Carleman para el problema adjunto y el efecto regularizante de la ecuación del calor. Siendo más precisos, en [24] se probó la siguiente estimación para las soluciones de (3.8):

$$\left(\iint_{\omega_0 \times (\delta_0, T-\delta_0)} |\varphi|^{r_0} \, dx \, dt \right)^{1/r_0} \leq \mathcal{C}(T, \|a\|_\infty) \left(\iint_{\omega_1 \times (\delta_1, T-\delta_1)} |\varphi|^{r_1} \, dx \, dt \right)^{1/r_1},$$

donde $\omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \Omega$, $0 < \delta_1 < \delta_0 < T/2$ y $1 \leq r_1 < r_0 < \infty$. Los autores dieron la dependencia explícita de la constante $C(T, \|a\|_\infty)$ que aparece en (3.9) con respecto a T y $\|a\|_\infty$, hecho esencial para probar su resultado de controlabilidad nula en el caso no lineal. Esta técnica ha sido posteriormente utilizada en [17] para obtener un resultado de controlabilidad nula en el caso de una ecuación del calor con un término superlineal de la forma $f(y, \nabla y)$.

El estudio de la controlabilidad nula del sistema acoplado superlineal (3.4)–(3.5) es más complejo. Como en [3], [5] y [24], también en este caso es necesario construir controles en $L^r(Q)$, con $r > (N+2)/2$, que resuelvan el correspondiente problema lineal de controlabilidad nula:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi + v \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + cq = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0, \ q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$. Asimismo, necesitamos nuevamente estimaciones de la norma $L^r(Q)$ de dichos controles con respecto a los datos del problema. La técnica introducida por V. Barbu podría aplicarse en este marco si consideramos dimensiones $N < 6$. Pero esta restricción no parece muy natural y, de hecho, proviene únicamente de la técnica particular utilizada por el autor. Por otro lado, la estrategia propuesta por E. Fernández-Cara y E. Zuazua no puede aplicarse en nuestra situación, puesto que en el efecto regularizante del problema lineal adjunto asociado intervienen dos funciones, mientras que en la correspondiente desigualdad de observabilidad "refinada"debería intervenir sólo una de ellas (recuérdese que hay un único control v que aparece en (3.10)). Se hace entonces necesario el idear una nueva estrategia para construir controles más regulares.

En [9], los autores introdujimos una técnica de construcción de controles regulares para resolver problemas de controlabilidad nula para sistemas parabólicos lineales acoplados, lo que hizo posible extender el Teorema 1 de [51] a no linealidades más generales (véase el Teorema 1.1 de [9]). La prueba de este resultado de insensibilización, así como la mencionada técnica, fueron esbozadas en dicho trabajo y serán desarrolladas en las Secciones 3.3 y 3.4 del presente capítulo (véase también [10]).

Adelantamos aquí un breve apunte sobre la citada técnica. La idea es la siguiente. Se consideran dos abiertos B_0 y B tales que $B_0 \subset\subset B \subset \omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. En primer lugar, se construye un control $\hat{v} \in L^2(Q)$, con soporte en $\overline{B}_0 \times [0,T]$, que resuelva el problema de controlabilidad nula (3.10)–(3.11), gracias a la desigualdad de observabilidad para el correspondiente sistema adjunto que fue probada en el capítulo precedente. Se obtiene también una estimación de la norma $L^2(Q)$ de $\hat{v}$ en función de T, $\|a\|_\infty$, $\|c\|_\infty$ y ξ. Denotemos por $(\hat{y}, \hat{q})$ la solución de (3.10)–(3.11) asociada a dicho control $\hat{v}$. En una segunda etapa, se considera una función $\theta \in \mathcal{D}(B)$ tal que $\theta \equiv 1$ en un entorno de B_0 y ponemos

$$q = (1-\theta)\,\hat{q} \quad \text{e} \quad y = (1-\theta)\,\hat{y} + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}.$$

Utilizando el efecto regularizante de la ecuación del calor, bajo hipótesis adecuadas sobre el término fuente ξ y sobre los potenciales a y c, probaremos que (y, q) resuelve (3.10)–(3.11) para el control $v \in L^r(Q)$ dado por

$$v = -\theta\xi + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y} + (\Delta\theta)\hat{y} + (\partial_t - \Delta + a)\left[2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}\right],$$

que tiene soporte en $\overline{B} \times [0,T]$. Además, estimaremos la norma $L^r(Q)$ de v con respecto a $\|\hat{v}\|_{2;Q}$. Obsérvese que, por la elección de la función θ, la regularidad del nuevo control v depende de la regularidad de la fuente ξ y del potencial a y de la regularidad de $(\hat{y}, \hat{q})$ en la "corona" sop$\,(\nabla\theta)$.

Es interesante remarcar que, en el contexto de la ecuación del calor, la técnica introducida proporciona una estrategia de construcción de controles regulares alternativa a las ya existentes y permite, por un lado, dar una nueva demostración de resultados conocidos de controlabilidad nula para ecuaciones del calor no lineales. Por otro lado, permite probar nuevos resultados de controlabilidad nula para sistemas parabólicos que no sabemos abordar con las técnicas existentes. De hecho, esta técnica ha sido utilizada en [16] para probar un resultado local de controlabilidad nula para la ecuación clásica del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier y, en la actualidad, está siendo utilizada por M. González-Burgos y L. de Teresa para probar la controlabilidad exacta a cero de una ecuación del calor semilineal con un término superlineal de la forma $f(y, \nabla y)$ en dominios no acotados (cf. [28]). Remitimos al lector a la última sección de este capítulo para algunos comentarios adicionales.

Caso 2: Condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier

Pasamos a continuación a describir el segundo problema que abordamos en este capítulo. Como veremos, una construcción similar a la introducida en [9] nos permitirá probar un resultado local de existencia de controles insensibilizantes, con regularidad Hölderiana, para una ecuación del calor semilineal cuando se consideran condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier (véanse la Sección 3.5 de este capítulo y [12]).

En concreto, consideraremos una ecuación del calor semilineal de la forma:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + F(y) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + f(y) = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) + \tau\, \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

donde $F, f \in C^1(\mathbb{R})$ son dos funciones dadas (sin restricción alguna sobre su crecimiento en el infinito), ξ e y_0 son conocidos y suficientemente regulares, $\tau \in \mathbb{R}$ es desconocido y pequeño, e $\hat{y}_0$ es desconocido en un nuevo espacio de Banach $\hat{X}$ que se inyecta de manera continua y densa en $L^2(\Omega)$, con $\|\hat{y}_0\|_{\hat{X}} = 1$. Una posible interpretación física de la condición de contorno no lineal $\partial_n y + f(y) = 0$, podría ser la siguiente. Recordemos que $-\partial_n y$ puede interpretarse como el *flujo normal de calor*, dirigido hacia el interior (salvo un coeficiente positivo). Así, la igualdad

$$-\partial_n y = f(y)$$

significa que este flujo es una función (no lineal) de la temperatura. Una hipótesis física natural sería suponer que f fuera no decreciente, con $f(0) = 0$, pero no impondremos ninguna restricción sobre el crecimiento de f.

Estamos interesados en analizar la existencia de funciones control $v = v(x,t)$ actuando sobre ω que hagan que la energía del sistema (3.12) en el abierto $\mathcal{O}$ sea localmente insensible a pequeñas variaciones de la condición inicial. En este marco, podemos dar la siguiente:

Definición 3.2 *Sea* Φ *el funcional definido en* (3.2)*, siendo* $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ *una solución de* (3.12) *(asociada a* τ *y a* v*) definida en* $(0,T)$*, cuando ésta exista. Decimos que una función control* v *insensibiliza* Φ *si existe* $\tau_0 > 0$ *tal que* (3.12) *admite una solución débil* $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$ *para* $|\tau| \leq \tau_0$ *y si se verifica*

$$\left.\frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}_0 \in \hat{X} \text{ con } \|\hat{y}_0\|_{\hat{X}} = 1, \tag{3.13}$$

donde $\hat{X} = C^{2+\beta}(\overline{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)$ *con* $\beta \in (0,1)$*.* $\square$

Por solución débil de (3.12) (asociada a τ y a v) entenderemos una función (si existe) $y = y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$, con $\partial_t y \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tal que

$$\begin{cases} \langle \partial_t y(t), u\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega \nabla y(t)\cdot\nabla u\,dx + \int_\Omega F(y(t))u\,dx + \int_{\partial\Omega} f(y(t))u\,d\sigma \\ = \displaystyle\int_\Omega (\xi(t) + v(t)\mathbf{1}_\omega)u\,dx \quad \text{en } L^2(0,T), \quad \forall u \in H^1(\Omega), \\ y(0) = y_0 + \tau\,\hat{y}_0. \end{cases}$$

Como es habitual en los problemas de insensibilización, la condición (3.13) nos llevará nuevamente a resolver un problema no "estándar" de controlabilidad nula no lineal, a saber:

$$\begin{cases} \partial_t\overline{y} - \Delta\overline{y} + F(\overline{y}) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n\overline{y} + f(\overline{y}) = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + F'(\overline{y})q = \overline{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + f'(\overline{y})q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0,\ q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

(de nuevo suponemos que $y_0 = 0$). La existencia de una función control v que resuelva el problema de controlabilidad nula precedente se probará mediante linealización y una posterior aplicación de un argumento adecuado de punto fijo. Analizando un problema de controlabilidad nula lineal similar (ver (3.74)–(3.75) y (3.73) en la página 117), nos damos cuenta de que los potenciales $a, b \in L^\infty(\Sigma)$ han de tener derivada temporal también en $L^\infty(\Sigma)$. Esta hipótesis viene de aplicar el Lema 1.2 de [26] para obtener una adecuada desigualdad de observabilidad para las soluciones del correspondiente problema adjunto. Para resolver el problema de controlabilidad nula no lineal, tendríamos que buscar un punto fijo en un espacio Z que contenga a las funciones $z \in L^\infty(Q)$ tales que la traza de $\partial_t z$ esté en $L^\infty(\Sigma)$. Como en [16] pusieron de manifiesto los autores (véase la Observación 15 de aquel trabajo), no estamos muy lejos de imponer que $\partial_t z \in L^\infty(0,T;W^{1,N+\gamma}(\Omega))$, con $\gamma > 0$. Pero estos espacios son demasiado pequeños para conseguir la compacidad de la aplicación de punto fijo junto con buenas estimaciones. Buscaremos entonces un punto fijo y, en consecuencia, también controles, en determinados espacios de Hölder que introduciremos en la próxima sección.

El punto más importante en la resolución del problema que estamos describiendo reside en la construcción, en el caso lineal, de controles con regularidad Hölderiana a partir de controles en $L^2(Q)$. Como ya hemos indicado, utilizaremos para ello una construcción similar a la esbozada para el caso anterior. Para asegurar la existencia de solución del sistema (3.12) en los mencionados espacios de Hölder, se requerirá que los datos sean suficientemente regulares y "pequeños" y que el dato inicial verifique, además, cierta condición de compatibilidad (véase el Lema 3.19). Esta es la razón por la cual hemos introducido el espacio $\hat{X} = C^{2+\beta}(\overline{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)$, con $\beta \in (0,1)$, en la Definición 3.2. Para los detalles de lo adelantado en el presente apartado, remitimos al lector a la Sección 3.5 de la presente Memoria.

3.2. Algunos resultados de carácter técnico

En esta sección enunciamos algunos resultados de carácter técnico que serán de gran utilidad en el resto de la Memoria. A pesar de que se trata de resultados conocidos sobre regularidad local de las soluciones de una ecuación del calor lineal, hemos optado por incluir su demostración en un Apéndice para así obtener, en los casos en los que sea necesario, la dependencia explícita de las constantes con respecto a T y a los potenciales de la ecuación.

Comenzamos presentando la notación que usaremos en lo que sigue. Para $r \in [1,\infty)$ y $\delta \in [0,T)$ arbitrarios y para cualquier abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$, se considera el espacio de Banach $X^r(\delta,T;\mathcal{V})$ definido por

$$X^r(\delta,T;\mathcal{V}) = \left\{u : u \in L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V})),\, \partial_t u \in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))\right\},$$

dotado de su norma natural

$$\|u\|_{X^r(\delta,T;\mathcal{V})} = \|u\|_{L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V}))} + \|\partial_t u\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}.$$

Denotaremos por X^r el espacio de Banach

$$X^r = \{u : u \in L^r(0,T;W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)),\ \partial_t u \in L^r(Q)\}$$

y por $\|\cdot\|_{X^r}$, la norma en él.

Por otro lado, para $\beta \in (0,1)$ y $u \in C^0(\overline{Q})$, definimos la cantidad

$$[u]_{\beta,\frac{\beta}{2}} = \sup_{\substack{\overline{Q} \\ x\neq x'}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^\beta} + \sup_{\substack{\overline{Q} \\ t\neq t'}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Consideramos el espacio normado $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : [u]_{\alpha,\frac{\beta}{2}} < \infty\right\}$, que es un espacio de Banach con su norma natural $|u|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} = \|u\|_\infty + [u]_{\beta,\frac{\beta}{2}}$. Consideraremos también los espacios de Banach definidos por

$$C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \sup_{\overline{Q}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{1+\beta}{2}}} < \infty\right\},$$

$$C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \partial_t u \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\right\}$$

y

$$C^{3+\beta,\,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{Q}) = \left\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})\ \forall i,\ \partial_t u \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})\right\},$$

con normas denotadas por $|\cdot|_{n+\beta,\frac{n+\beta}{2};\overline{Q}}$, $n = 1,2,3$. El espacio de Banach formado por las restricciones a $\overline{\Sigma}$ de las funciones de $C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{Q})$ será representado por $C^{n+\beta,\frac{n+\beta}{2}}(\overline{\Sigma})$, su norma por $|\cdot|_{n+\beta,\frac{n+\beta}{2};\overline{\Sigma}}$ y escribiremos $|\cdot|_{2+\beta;\overline{\Omega}}$ para designar la norma en $C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. Finalmente, como en los capítulos anteriores, la norma en los espacios $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ y $L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)) \cap C([0,T];H^1_0(\Omega))$ será denotada por $\|\cdot\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}$, $\|\cdot\|_{L^2(H^1_0)\cap C(L^2)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H^2\cap H^1_0)\cap C(H^1_0)}$, respectivamente.

El primer resultado que presentamos es el siguiente:

Proposición 3.1 *Sean $a \in L^\infty(Q)$ y $B \in L^\infty(Q)^N$. Consideramos una solución débil $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ de*

$$\partial_t y - \Delta y + ay + B\cdot\nabla y = F \quad en\ Q. \tag{3.14}$$

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos abiertos arbitrarios tales que $\mathcal{V}' \subset\subset \mathcal{V} \subset \Omega$ y sea $r \in [2,\infty)$.

a) Supongamos que $F \in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))$, con $\delta \in [0,T)$ arbitrario. Entonces,

$$y \in X^r(\delta',T;\mathcal{V}') \quad \forall \delta' \in (\delta,T),$$

y existen constantes $C = C(\Omega,N,r,\mathcal{V},\mathcal{V}')$, $\alpha = \alpha(r)$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(N) > 0$ tales que

$$\|y\|_{X^r(\delta',T;\mathcal{V}')} \leq C(1+T^\alpha)M_0^{\mathcal{K}}\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right), \tag{3.15}$$

donde $M_0 = M_0(\delta'-\delta,a,B) > 0$ viene dada por

$$M_0(\delta'-\delta,a,B) = \left(1+\frac{1}{\delta'-\delta}\right)(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty). \tag{3.16}$$

b) Si, además, $y(x,0)=0$ en Ω y $F \in L^r(0,T;L^r(\mathcal{V}))$, entonces

$$y \in X^r(0,T;\mathcal{V}'),$$

y existe una nueva constante $C = C(\Omega, N, r, \mathcal{V}, \mathcal{V}') > 0$ tal que

$$\|y\|_{X^r(0,T;\mathcal{V}')} \leq C(1+T^\alpha)\,(1+\|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{\mathcal{K}}\left(\|F\|_{L^r(L^r(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right),$$

con $\alpha = \alpha(r)$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}(N)$ como en el apartado anterior.

c) En las hipótesis del apartado anterior, si además $F \in L^r(0,T;W^{1,r}(\mathcal{V}))$, $B \equiv 0$ y $\nabla a \in L^\gamma(Q)^N$, con

$$\gamma = \begin{cases} \max\left\{r, \dfrac{N}{2}+1\right\} & si \quad r \neq \dfrac{N}{2}+1, \\ \dfrac{N}{2}+1+\varepsilon & si \quad r = \dfrac{N}{2}+1, \end{cases} \tag{3.17}$$

siendo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Entonces,

$$y \in L^r(0,T;W^{3,r}(\mathcal{V}')), \quad \partial_t y \in L^r(0,T;W^{1,r}(\mathcal{V}'))$$

y, para una nueva positiva $C = C(\Omega, N, r, \mathcal{V}, \mathcal{V}')$, se tiene la estimación

$$\begin{aligned} &\|y\|_{L^r(W^{3,r}(\mathcal{V}'))} + \|\partial_t y\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}'))} \\ &\leq C\widetilde{M}_0\,(1+\|\nabla a\|_{\gamma;Q})\left(\|F\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right), \end{aligned}$$

con $\alpha = \alpha(r)$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}(N)$ como antes y $\widetilde{M}_0 = \widetilde{M}_0(T, \|a\|_\infty)$ dada por

$$\widetilde{M}_0(T, \|a\|_\infty) = \left(1+\frac{1}{T}\right)(1+T^\alpha)(1+\|a\|_\infty)^{\mathcal{K}+1}. \tag{3.18}$$

□

Observación 3.2 Siguiendo la demostración del resultado precedente (véase el Apéndice A), se observa fácilmente que se obtiene el mismo resultado si reemplazamos la hipótesis $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ por

$$y \in L^2(0,T;H^1_{\text{loc}}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2_{\text{loc}}(\Omega)).$$

□

Se tiene un resultado similar en el caso en el que se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas:

Proposición 3.2 *Sean* $a \in L^\infty(Q)$ *y* $B \in L^\infty(Q)^N$*. Consideramos una solución débil* $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ *de* (3.14).

a) Supongamos que $F \in L^r(\delta,T;L^r(\Omega))$*, con* $\delta \in [0,T)$ *y* $r \in [2,\infty)$ *arbitrarios. Entonces,*

$$y \in X^r(\delta',T;\Omega) \quad \forall \delta' \in (\delta,T),$$

y existe $C = C(\Omega,N,r) > 0$ *tal que*

$$\|y\|_{X^r(\delta',T;\Omega)} \le C(1+T^\alpha)M_0^{\mathcal{K}}\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\Omega))} + \|y\|_{L^2(H_0^1)\cap C(L^2)}\right),$$

con $\alpha = \alpha(r)$, $\mathcal{K}(N)$ *y* $M_0(\delta'-\delta,a,B)$ *como en la Proposición 3.1.*

b) Supongamos, además, que $y(x,0) = 0$ *en* Ω *y sea ahora* $F \in L^r(0,T;L^r(\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}))$*, donde* $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$ *es un abierto y* r *es como antes. Entonces, para cualquier abierto* $\mathcal{B}'$ *tal que* $\mathcal{B} \subset\subset \mathcal{B}' \subset\subset \Omega$ *se tiene*

$$y \in X^r(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}'}).$$

Más aún, existe una constante positiva $C = C(\Omega,N,r,\mathcal{B},\mathcal{B}')$ *tal que*

$$\begin{aligned}&\|y\|_{X^r(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}'})}\\ &\le C(1+T^\alpha)(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty)^{\mathcal{K}}\left(\|F\|_{L^r(L^r(\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}))} + \|y\|_{L^2(H_0^1)\cap C(L^2)}\right),\end{aligned}$$

con $\alpha = \alpha(r)$ *y* $\mathcal{K} = \mathcal{K}(N)$ *como en la Proposición 3.1.* □

La demostración de este resultado es similar a la de la Proposición 3.1 y será omitida. Nótese que aquí necesitamos que y satisfaga, además, una condición de contorno de tipo Dirichlet homogénea.

Para demostrar los resultados precedentes, será de gran utilidad el siguiente lema:

Lema 3.3 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, con* $N \ge 1$*, un abierto acotado de clase* C^2 *y* $r \in [1,\infty)$*. Se tienen las siguientes inyecciones continuas:*

i. Si $r < \dfrac{N}{2}+1$*, entonces* $X^r \hookrightarrow L^p(Q)$*, donde* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{N+2}$.

ii. Si $r = \dfrac{N}{2}+1$*, entonces* $X^r \hookrightarrow L^q(Q)$ *para cualquier* $q < \infty$.

iii. Si $\dfrac{N}{2}+1 < r < N+2$*, entonces* $X^r \hookrightarrow C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$*, con* $\beta = 2 - \dfrac{N+2}{r}$.

iv. Si $r = N+2$*, entonces* $X^r \hookrightarrow C^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q})$ *para cualquier* $l \in (0,1)$.

v. Si $r > N+2$*, entonces* $X^r \hookrightarrow C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q})$*, donde* $\alpha = 1 - \dfrac{N+2}{r}$.

Además, la constante en cada una de las inyecciones precedentes se puede escribir de la forma $C(\Omega, N, r)\,(1 + 1/T)$*, con* $C(\Omega, N, r) > 0$. $\square$

***Observación* 3.3** Este resultado, que utilizaremos en reiteradas ocasiones a partir de ahora, se obtiene reescribiendo el Lema 3.3, p. 80, de [39] con nuestra notación. Es interesante comentar que este resultado es válido para un dominio Ω, acotado o no, que satisfaga una propiedad del cono uniforme (ver en [39] los detalles). $\square$

Terminamos esta sección enunciando un resultado sobre regularidad interior Hölderiana para una ecuación del calor lineal, cuya prueba damos también en el Apéndice A:

Proposición 3.4 *Supongamos que* $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$ *para algún* $\beta \in (0,1)$. *Consideremos una solución* $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ *de*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + du = h \quad en\ Q, \\ u(x,0) = 0 \quad en\ \Omega, \end{cases}$$

con $d \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})$ *y* $h \in L^2(Q) \cap C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{\mathcal{V}} \times [0,T])$*, donde* $\mathcal{V} \subset \Omega$ *es un abierto no vacío arbitrario. Entonces, para cualquier abierto* $\mathcal{V}' \subset\subset \mathcal{V}$*, se tiene* $u \in C^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{\mathcal{V}'} \times [0,T])$ *y*

$$|u|_{3+\beta,\frac{3+\beta}{2};\overline{\mathcal{V}'}\times[0,T]} \le C\left(|h|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{\mathcal{V}}\times[0,T]} + \|u\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right), \tag{3.19}$$

donde C *es una constante positiva que depende de* Ω, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$, T *y* $|d|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{Q}}$. $\square$

Usaremos esta proposición en la Sección 3.5 para probar un resultado local de existencia de controles insensibilizantes para (3.12).

Una vez enunciados los resultados de carácter técnico que vamos a necesitar, pasamos a abordar los problemas de insensibilización planteados en la sección precedente.

3.3. Un problema lineal de controlabilidad nula: técnica de construcción de controles más regulares

Supongamos que $\omega, \mathcal{O} \subset \Omega$ son dos abiertos arbitrariamente pequeños tales que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Esta sección está dedicada a probar la controlabilidad nula de un sistema lineal acoplado similar a (3.4)–(3.5) con controles suficientemente regulares. Desarrollamos para ello la técnica de construcción de controles regulares introducida en [9]. Consideramos sistemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + ay = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + cq = y\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

donde $a, c \in L^\infty(Q)$ y $\xi \in L^2(Q)$ (al menos). Nuestro objetivo es entonces construir un control v en $L^r(Q)$, con $r > N/2+1$, tal que la solución (y,q) de (3.20)–(3.21) verifique

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{3.22}$$

De hecho, obtendremos un control $v \in L^r(Q)$ que actúe en un abierto B_0 contenido en $\omega \cap \mathcal{O}$. Para ello, habrá que imponer hipótesis adicionales sobre el término fuente, ξ, y sobre los potenciales a y c. La regularidad del control v y la de (y,q) nos permitirán abordar el caso no lineal.

Como adelantamos en la primera sección, procederemos en dos etapas. En primer lugar, construiremos controles en $L^2(Q)$ con soporte en $\overline{B}_0 \times [0,T]$, gracias a la desigualdad de observabilidad (2.20) (Teorema 2.4, p. 51, del capítulo anterior) para las soluciones del correspondiente sistema adjunto

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta \varphi + c\varphi = 0 \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta \psi + a\psi = \varphi\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \psi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

donde $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. En una segunda etapa, utilizando algunos de los resultados sobre regularidad interior de la sección precedente, construiremos controles en $L^r(Q)$, $r > N/2+1$ con soporte en $\overline{B} \times [0,T]$, siendo B un abierto tal que $B_0 \subset\subset B \subset \omega \cap \mathcal{O}$. Este punto será esencial en la demostración del resultado de insensibilización que damos en la próxima sección, el Teorema 3.8, puesto que consideraremos no linealidades con determinado crecimiento superlineal en el infinito.

Controles en $L^2(Q)$

Fijemos un abierto no vacío regular $B_0 \subset\subset \omega \cap \mathcal{O}$. Recordando la Proposición 2.7 y la Observación 2.2 del capítulo precedente, se tiene inmediatamente el siguiente resultado (por simplicidad, en lo sucesivo omitiremos la dependencia de las constantes con respecto a B_0):

Proposición 3.5 *Sean $a, c \in L^\infty(Q)$ y sean $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O})$, $M = M(T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty)$ y $H = H(T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty)$ las constantes positivas que proporciona el Teorema 2.4 para $B \equiv D \equiv 0$. Entonces, para cualquier $\xi \in L^2(Q)$ verificando*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right)|\xi|^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{3.23}$$

existe una función control $\hat{v} \in L^2(Q)$ tal que $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0, T]$ y la correspondiente solución $(\hat{y}, \hat{q})$ de (3.20)–(3.21) satisface $q(x, 0) = 0$ en Ω. Además, $\hat{v}$ puede elegirse de modo que

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \leq \exp\left(\frac{C}{2}H\right)\left(\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t}\right)|\xi|^2 \, dx \, dt\right)^{1/2}. \tag{3.24}$$

□

Destaquemos que un argumento fundamental en la demostración del resultado anterior es la estimación uniforme (2.42) de los controles v_ε que hacen que la solución $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ del sistema acoplado (3.4)–(3.5) verifique $\|q_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon$, estimación que se deduce de la desigualdad de observabilidad (2.20).

Controles en $L^r(Q)$

Veamos a continuación que, partiendo de un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ con soporte en $\overline{B}_0 \times [0, T]$, podemos construir un control en $L^r(Q)$ con soporte ligeramente más grande. Además, estimaremos la norma del nuevo control con respecto a $\|\hat{v}\|_{2;Q}$.

Procederemos como sigue. Sean B, B_1 y B_2 tres nuevos abiertos regulares tales que

$$B_0 \subset\subset B_1 \subset\subset B_2 \subset\subset B \subset \omega \cap \mathcal{O},$$

siendo B_0 el abierto considerado anteriormente. Para $a, c \in L^\infty(Q)$ y $\xi \in L^2(Q)$ satisfaciendo (3.23), sea $\hat{v}$ un control (asociado a B_0) proporcionado por la proposición precedente y sea $(\hat{y}, \hat{q})$ la correspondiente solución de (3.20)–(3.22).

Construiremos un control regular con soporte en $B \times [0, T]$. Para ello, consideremos una función $\theta \in \mathcal{D}(B)$ tal que $\theta \equiv 1$ en B_2 (la utilidad de B_1 se verá más adelante). Pongamos

$$q = (1 - \theta)\,\hat{q} \tag{3.25}$$

e

$$y = (1 - \theta)\,\hat{y} + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}. \tag{3.26}$$

Bajo hipótesis apropiadas de regularidad sobre los datos ξ, a y c, veremos que (y, q) resuelve el problema de controlabilidad nula (3.20)–(3.22) con término de control v dado por

$$v = -\theta\xi + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y} + (\Delta\theta)\hat{y} + (\partial_t - \Delta + a)\left[2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}\right]. \tag{3.27}$$

Para $r \in (2, \infty)$, definimos

$$Z_r = \begin{cases} L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)) & \text{si} \quad r \in \left(2, \dfrac{N}{2} + 1\right], \\ C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)) & \text{si} \quad r > \dfrac{N}{2} + 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, C designará una constante genérica positiva que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$ y T (por simplicidad se omitirá la dependencia con respecto a N y r), cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.6 *Sea $\xi \in L^r(Q)$ verificando* (3.23), *con $r \in (2, \infty)$, y sea $\hat{v} \in L^2(Q)$ un control dado por la Proposición 3.5 (asociado a B_0). Se tiene lo siguiente:*

a) Para $a, c \in L^\infty(Q)$, las funciones y, q definidas por (3.26) *y* (3.25), *respectivamente, están en el espacio Z_r y*

$$\|y\|_{Z_r} + \|q\|_{Z_r} \le C_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}\right), \tag{3.29}$$

donde

$$C_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty) = \exp\left[C(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty)\right]. \tag{3.30}$$

b) Supongamos, además, que $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por (3.17). *Entonces, el control v definido en* (3.27) *satisface $v \in L^r(Q)$, $\operatorname{sop} v \subset B \times [0, T]$ y*

$$\|v\|_{r;Q} \le C_2(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty, \|\nabla c\|_{\gamma;Q}) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}\right), \tag{3.31}$$

donde $C_2 = C_2(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, \|a\|_\infty, \|c\|_\infty, \|\nabla c\|_{\gamma;Q})$ viene dada por

$$C_2 = \exp\left[C(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty)\right] (1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q}). \tag{3.32}$$

Demostración: Sean $r \in (2, \infty)$ y $\xi \in L^r(Q)$ verificando (3.23). Observando las expresiones (3.25)–(3.27), nos damos cuenta de que, para probar este resultado, basta con analizar la regularidad interior parabólica de $\hat{y}$ y $\hat{q}$. Usaremos algunos resultados de la sección precedente.

a) En primer lugar, veamos que, para $a, c \in L^\infty(Q)$, las funciones y y q están en $L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))$. Para ello, escribamos $y = y_1 + y_2 + y_3$, con

$$y_1 = (1 - \theta)\hat{y}, \qquad y_2 = 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} \quad \text{e} \quad y_3 = (\Delta\theta)\hat{q}.$$

Puesto que $(\hat{y}, \hat{q})$ es la solución de (3.20)–(3.21) asociada a un control $\hat{v}$ en $L^2(Q)$ (dado por la Proposición 3.5), las estimaciones clásicas de energía nos dan:

$$\hat{y}, \hat{q} \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega)),$$

$$\|\hat{y}\|_{L^2(H^2\cap H_0^1)} + \|\hat{y}\|_{C(H_0^1)} \leq \exp\left[C(1+\|a\|_\infty)\right](\|\xi\|_{2;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}) \tag{3.33}$$

y

$$\|\hat{q}\|_{L^2(H^2\cap H_0^1)} + \|\hat{q}\|_{C(H_0^1)} \leq \exp\left[C(1+\|a\|_\infty + \|c\|_\infty)\right](\|\xi\|_{2;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}). \tag{3.34}$$

Aplicamos el apartado b) de la Proposición 3.2 a $\hat{y}$ y a los abiertos $\mathcal{B} = B_0$ y $\mathcal{B}' = B_1$. Teniendo, además, en cuenta (3.33), se obtiene

$$\hat{y} \in X^r(0,T;\Omega \setminus \overline{B}_1), \quad \|\hat{y}\|_{X^r(0,T;\Omega\setminus\overline{B}_1)} \leq \exp\left[C(1+\|a\|_\infty)\right](\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}). \tag{3.35}$$

Entonces, puesto que $\mathrm{sop}\,(1-\theta) \subset \overline{\Omega} \setminus \overline{B}_1$, se tiene que

$$y_1 = (1-\theta)\hat{y} \in X^r \quad \text{y} \quad \|y_1\|_{X^r} \leq \exp\left[C(1+\|a\|_\infty)\right](\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}). \tag{3.36}$$

Por otra parte, como en particular $\hat{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \in L^r((\Omega \setminus \overline{B}_1) \times (0,T))$, podemos ahora aplicar la Proposición 3.2 a $\hat{q}$ y a los abiertos B_1 y B_2 y deducir que

$$\hat{q} \in X^r(0,T;\Omega \setminus \overline{B}_2)$$

y

$$\|\hat{q}\|_{X^r(0,T;\Omega\setminus\overline{B}_2)} \leq C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_\infty,\|c\|_\infty)(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}),$$

con $C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_\infty,\|c\|_\infty) > 0$ como en (3.30) (aquí hemos usado (3.34) y (3.35)). Razonando como antes, obtenemos que

$$y_2 = 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} \in L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega)), \quad y_3 = (\Delta\theta)\hat{q},\ q \in X^r, \tag{3.37}$$

y podemos estimar

$$\|y_2\|_{L^r(W^{1,r}(\Omega))} + \|y_3\|_{X^r} + \|q\|_{X^r} \leq C_1(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}). \tag{3.38}$$

En particular, para $r \in \left(2, \dfrac{N}{2}+1\right]$ se tiene que $y, q \in Z_r = L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$ (de hecho, $q \in X^r$) y se satisface la estimación (3.29).

Supongamos ahora que $r > N/2+1$. En este caso, en virtud del Lema 3.3 de la sección anterior, el espacio X^r se inyecta de manera continua (y compacta) en $C^0(\overline{Q})$. De este modo, tenemos que

$$y_1, y_3, q \in Z_r = C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega)),$$

con

$$\|y_1\|_{Z_r} + \|y_3\|_{Z_r} + \|q\|_{Z_r} \leq C_1(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}),$$

sin más que tener en cuenta (3.36), (3.37) y (3.38). Veamos que, además, $y_2 \in C^0(\overline{Q})$, lo que concluirá la prueba de la primera parte del resultado. En efecto, como teníamos que $\hat{y} \in X^r(0,T;\Omega \setminus \overline{B}_1)$ y $r > N/2+1$, de nuevo el Lema 3.3 nos da que $\hat{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ está en $L^\infty((\mathcal{O}\setminus\overline{B}_1)\times(0,T))$ (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{O}$ es un abierto regular). Podemos entonces aplicar a $\hat{q}$ la Proposición 3.1 y deducir que

$$\hat{q} \in X^p(0,T;B \setminus \overline{B}_2) \quad \text{ y } \quad \|\hat{q}\|_{X^p(0,T;B\setminus\overline{B}_2)} \le C_1\left(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}\right) \quad \forall p < \infty.$$

Por tanto, para $p > N+2$ fijo, tenemos que

$$\hat{q} \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{B \setminus B_2} \times [0,T]), \qquad \text{con } \alpha = 1 - \frac{N+2}{p},$$

usando nuevamente el Lema 3.3. De este modo, $y_2 = 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, espacio que se inyecta de manera continua en $C^0(\overline{Q})$, luego

$$y_2 \in C^0(\overline{Q}) \quad \text{ y } \quad \|y_2\|_{C^0(\overline{Q})} \le C_1\left(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}\right),$$

de donde inferimos que $y \in Z_r = C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$ junto con la estimación (3.29).

b) Supongamos, además, que $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por (3.17). Primero, observamos que el soporte del control v definido por (3.27) está contenido en $B\times[0,T]$. En segundo lugar, puesto que $\hat{q} \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $\hat{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \in X^r(0,T;\mathcal{O}\setminus\overline{B}_1)$, podemos aplicar a $\hat{q}$ (y a los abiertos $\mathcal{O}\setminus\overline{B}_1$ y $B\setminus\overline{B}_2$) el tercer apartado de la Proposición 3.1 y deducir que

$$\hat{q} \in L^r(0,T;W^{3,r}(B\setminus\overline{B}_2)), \quad \partial_t\hat{q} \in L^r(0,T;W^{1,r}(B\setminus\overline{B}_2))$$

y

$$\|\hat{q}\|_{L^r(W^{3,r}(B\setminus\overline{B}_2))} + \|\partial_t\hat{q}\|_{L^r(W^{1,r}(B\setminus\overline{B}_2))} \le C_2\left(\|\xi\|_{r;Q} + \|\hat{v}\|_{2;Q}\right),$$

donde la constante $C_2 = C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_\infty,\|c\|_\infty,\|\nabla c\|_{\gamma;Q}) > 0$ es de la forma (3.32).

Por tanto, volviendo a la expresión (3.27) de v y, gracias a la elección de θ y a las consideraciones previas sobre $(\hat{y},\hat{q})$, concluimos que v está en $L^r(Q)$ y satisface la estimación (3.31). Con esto termina la prueba de la Proposición 3.6. $\square$

En virtud de la regularidad que acabamos de probar para las funciones y, q y v definidas por (3.26), (3.25) y (3.27), respectivamente, es un ejercicio sencillo comprobar que (y,q) junto a v resuelven el problema de controlabilidad nula (3.20)–(3.22). En particular, estamos usando que $\hat{y},\hat{q} \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$, $\operatorname{sop}(\nabla\theta), \operatorname{sop}(\Delta\theta) \subset\subset \Omega$ e $\hat{y}(x,0) = \hat{q}(x,0) = \hat{q}(x,T) = 0$ en Ω.

Sin más que recordar la estimación (3.24) de $\|\hat{v}\|_{2;Q}$, hemos probado entonces el siguiente resultado de controlabilidad nula en el caso lineal:

Corolario 3.7 *Sea* $\xi \in L^r(Q)$ *verificando* (3.23), *con* $r \in (2,\infty)$. *Supongamos que* $a \in L^\infty(Q)$ *y* $c \in L^\infty(Q) \cap L^\gamma(0,T;W^{1,\gamma}(\Omega))$, *con* γ *dado por* (3.17). *Entonces, las funciones* y, q *definidas por* (3.26) *y* (3.25) *están en el espacio* Z_r *introducido en* (3.28) *y resuelven, junto al control $v \in L^r(Q)$ dado por* (3.27)*, el problema de controlabilidad nula* (3.20)–(3.22)*. Además, existe una constante positiva C, que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$ y T, tal que se satisfacen las siguientes estimaciones*

$$\|y\|_{Z_r} + \|q\|_{Z_r} \leq C_1 \left(\|\xi\|_{r;Q} + \exp\left(\frac{C}{2}H\right) \left\| \exp\left(\frac{CM}{2t}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right),$$

$$\|v\|_{r;Q} \leq C_2 \left(\|\xi\|_{r;Q} + \exp\left(\frac{C}{2}H\right) \left\| \exp\left(\frac{CM}{2t}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right),$$

con $C_1, C_2 > 0$, respectivamente, de la forma (3.30) *y* (3.32)*,*

$$M = 1 + T\left(1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|a - c\|_\infty^{1/2}\right)$$

y

$$H = 1 + \frac{1}{T} + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty\right) + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|a - c\|_\infty^{1/2}.$$

□

***Observación* 3.4** Es interesante resaltar que la regularidad de (y, q) se ha obtenido independientemente de la regularidad de v. Lo mismo puede decirse sobre las estimaciones de las normas $\|y\|_{Z_r}$ y $\|q\|_{Z_r}$, que se obtienen con independencia de la acotación de $\|v\|_{r;Q}$. Este hecho jugará un papel esencial en el estudio de la existencia de controles insensibilizantes para la ecuación no lineal del calor. □

3.4. Controles insensibilizantes para una ecuación del calor superlineal con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas

Estamos ya en condiciones de presentar los resultados que aportamos sobre existencia (y no existencia) de controles insensibilizantes para una ecuación del calor superlineal cuando se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas.

3.4.1. El resultado principal y su demostración

El primer resultado relevante de este capítulo sobre la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor superlineal es el siguiente:

Teorema 3.8 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $f'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f'(s)}{\log(1 + |s|)} = 0. \tag{3.39}$$

Sea $r \in \left(\dfrac{N}{2}+1,\infty\right)$*. Entonces, para cualquier* $\xi \in L^r(Q)$ *tal que*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{1}{t^3}\right)|\xi|^2\,dx\,dt < \infty, \tag{3.40}$$

existe una función control $v \in L^r(Q)$ *que insensibiliza el funcional* Φ *dado por* (3.2) *en el sentido de la Definición 3.1.* □

La condición (3.40) significa que el término fuente ξ tiene que decaer rápidamente a cero cerca del instante inicial $t = 0$. Recordemos que una hipótesis similar, aunque algo más débil, se impone en el caso en que se consideran no linealidades globalmente Lipschitzianas. Obsérvese, además, que la hipótesis $f(0) = 0$ está en concordancia con la condición sobre ξ. En otro caso, en el sistema linealizado estaría actuando un término fuente constante que no está en $L^2(Q;\exp(\mathcal{M}/2t))$ (ver [51] para ambas consideraciones).

***Observación* 3.5** La hipótesis (3.39) la verifican ciertas no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito tales como funciones f de la forma

$$|f(s)| = |p_1(s)|\log^\alpha(1+|p_2(s)|) \quad \forall s : |s| \geq s_0 > 0,$$

con $\alpha \in [0,1)$, donde p_1 y p_2 son funciones polinómicas reales de primer grado.

Para no linealidades $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaciendo la hipótesis (3.39), el sistema (3.1) admite una solución global cuando los datos ξ, v, y_0 e $\hat{y}_0$ son suficientemente regulares (recuérdese la Observación 3.1). □

Como adelantamos en la primera sección, el problema que estamos abordando nos lleva a analizar un problema no lineal de controlabilidad nula de tipo especial. Más precisamente, tenemos la siguiente

Proposición 3.9 *Sea* Φ *el funcional definido por* (3.2)*, donde* $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ *es una solución de* (3.1) *(asociada a* τ *y a* v*) definida en* $(0,T)$*, cuando ésta exista. Se tiene:*

1. *Si existe un control* v *que insensibiliza* Φ *en el sentido de la Definición 3.1, entonces este control* v *resuelve el problema de controlabilidad nula*

$$\begin{cases} \partial_t\overline{y} - \Delta\overline{y} + f(\overline{y}) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \overline{y} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \overline{y}(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + f'(\overline{y})q = \overline{y}\mathbf{1}_\mathcal{O} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.42}$$

$$q(x,0) = 0 \text{ en } \Omega. \tag{3.43}$$

2. Si un control v resuelve (3.41)–(3.43) y existe $\tau_0 > 0$ tal que el sistema (3.1) admite una solución débil $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$ para $|\tau| \leq \tau_0$, entonces v insensibiliza el funcional Φ (en el sentido de la Definición 3.1).

Demostración de la Proposición 3.9: Razonaremos como en [42] y [8]. Primero, supongamos la existencia de un control v que insensibilice el funcional Φ dado por (3.2). Entonces, el sistema (3.1) admite una solución débil $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$ para cualquier $|\tau| \leq \tau_0$, para algún $\tau_0 > 0$. La derivada de $\Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))$ con respecto a τ en $\tau = 0$ viene dada por

$$\left.\frac{\partial \Phi(y(\cdot,\cdot;\tau,v))}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \iint_Q \overline{y}(x,t)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\, y_\tau(x,t)\,dx\,dt,$$

donde $\overline{y} = y(\cdot,\cdot;0,v) \in C^0(\overline{Q})$ es la solución de (3.41) e $y_\tau = \left.\dfrac{\partial y(\cdot,\cdot;\tau,v)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$ es la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y_\tau - \Delta y_\tau + f'(\overline{y})y_\tau = 0 \ \text{ en } Q, \\ y_\tau = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y_\tau(x,0) = \hat{y}_0(x) \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Sea q la solución de (3.42). Recordando la EDP que satisface q e integrando por partes, se obtiene

$$\iint_Q \overline{y}(x,t)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\, y_\tau(x,t)\,dx\,dt = \int_\Omega q(x,0)\hat{y}_0(x)\,dx,$$

cualquiera que sea $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$. Finalmente, de la condición de insensibilización (3.3) se deduce que

$$q(0) = 0 \quad \text{en } X',$$

de donde inferimos que $q(x,0) = 0$ en Ω ($X = W^{2-2/r,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$). El resto de la prueba se sigue inmediatamente de la Definición 3.1 y de las consideraciones previas. $\square$

Es importante señalar que un control v que resuelva el problema de controlabilidad nula (3.41)–(3.43), si existe, no insensibiliza necesariamente el funcional Φ (piénsese, por ejemplo, en un dato inicial $\hat{y}_0$ para el cual el sistema (3.1) no admita solución global en el intervalo $[0,T]$). En otras palabras, en el caso bajo estudio, el problema de la búsqueda de controles insensibilizantes no puede reformularse de manera equivalente como un problema de controlabilidad nula, como es usual en los problemas de insensibilización cuando se consideran no linealidades con crecimiento sublineal en el infinito. Así, para probar el Teorema 3.8, probaremos primero la existencia de un control v que resuelva el correspondiente problema de controlabilidad nula para el sistema acoplado (3.41)–(3.42) y, en un segundo paso, justificaremos que dicho control también insensibiliza el funcional Φ definido por (3.2).

Pasamos seguidamente a probar el resultado principal.

Demostración del Teorema 3.8: La demostración quedará dividida en dos etapas. En la primera de ellas, aplicaremos un argumento adecuado de punto fijo para probar el resultado cuando la función f es de clase C^2. Analizaremos el caso general en la segunda etapa. En ambos casos, probaremos la existencia de un control v que resuelva el problema de controlabilidad nula (3.41)–(3.43) (con y_0=0) y, como acabamos de comentar, veremos a continuación que dicho control v insensibiliza Φ.

Etapa 1.- El caso en que f es una función de clase C^2: El argumento de punto fijo.

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ una función verificando $f(0) = 0$ y (3.39). Sea $\xi \in L^r(Q)$, con $r > N/2 + 1$, satisfaciendo la hipótesis (3.40).

Definamos

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Entonces g, $f' \in C^1(\mathbb{R})$ y $f(s) = g(s)\, s$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$. La hipótesis (3.39) para f' implica una similar para g, es decir,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{\log(1 + |s|)} = 0.$$

Así, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante positiva C_ε (que sólo depende de ε y de la función f) tal que

$$|g(s)| + |f'(s)| \leq C_\varepsilon + \varepsilon \log(1 + |s|) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

I. *El problema linealizado.*

Recordemos que, para $r > N/2 + 1$, habíamos definido

$$Z_r = C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega)).$$

Para cada $z \in \overline{B}(0; R) \subset Z_r$, donde $R > 0$ se determinará más adelante, consideramos el problema lineal de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + g(z) y = \xi + v \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x, 0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.45}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + f'(z) q = y \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x, T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.46}$$

$$q(x, 0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{3.47}$$

Observemos que el sistema acoplado (3.45)–(3.46) es de la forma (3.20)–(3.21), con potenciales

$$\begin{cases} a = a_z = g(z) \in L^\infty(Q), \\ c = c_z = f'(z) \in L^\infty(Q) \cap L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega)) \ (\gamma = r \text{ en este caso}). \end{cases}$$

En virtud del Corolario 3.7 de la sección anterior, para cualquier $z \in \overline{B}(0;R) \subset Z_r$ existe un control $v_z \in L^r(Q)$ tal que la correspondiente solución (y_z, q_z) de (3.45)–(3.46) está en $Z_r \times Z_r$ y verifica $q_z(x,0) = 0$ en Ω. Además, se tienen las estimaciones

$$\|y_z\|_{Z_r} + \|q_z\|_{Z_r} \leq C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z)\left(\|\xi\|_{r;Q} + \exp\left(\frac{C}{2}H_z\right)\left\|\exp\left(\frac{CM_z}{2t}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right) \tag{3.48}$$

y

$$\|v_z\|_{r;Q} \leq C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z)\left(\|\xi\|_{r;Q} + \exp\left(\frac{C}{2}H_z\right)\left\|\exp\left(\frac{CM_z}{2t}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right), \tag{3.49}$$

donde

$$\begin{aligned} &C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) = \exp\left[C(1 + \|g(z)\|_\infty + \|f'(z)\|_\infty)\right], \\ &C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) = \exp\left[C(1 + \|g(z)\|_\infty + \|f'(z)\|_\infty)\right](1 + \|f''(z)\nabla z\|_{r;Q}), \\ &M_z = 1 + \|g(z)\|_\infty^{2/3} + \|f'(z)\|_\infty^{2/3} + \|g(z) - f'(z)\|_\infty^{1/2}, \\ &H_z = 1 + \|g(z)\|_\infty + \|f'(z)\|_\infty + \|g(z)\|_\infty^{2/3} + \|f'(z)\|_\infty^{2/3} + \|g(z) - f'(z)\|_\infty^{1/2} \end{aligned}$$

y $C = C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T) > 0$.

Gracias a la hipótesis (3.40) sobre ξ, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_Q \exp\left(\frac{CM_z}{t}\right)|\xi|^2\,dx\,dt &= \iint_Q \exp\left(\frac{CM_z}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\exp\left(\frac{1}{t^3}\right)|\xi|^2\,dx\,dt \\ &\leq \exp\left(CM_z^{3/2}\right)\iint_Q \exp\left(\frac{1}{t^3}\right)|\xi|^2\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{3.50}$$

para una nueva constante positiva $C = C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T)$ (aquí hemos usado el hecho de que la función $h_z(\sigma) = \exp\left(\dfrac{CM_z}{\sigma} - \dfrac{1}{\sigma^3}\right)$, $\sigma \in (0,\infty)$, alcanza el valor máximo absoluto en $\sigma_z^* = \sqrt{3/(CM_z)}$). De este modo, de (3.48)–(3.50) y de la convexidad de la función $s \in (0,\infty) \mapsto s^{3/2}$, se deduce

$$\|y_z\|_{Z_r} \leq C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z)\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right), \tag{3.51}$$

junto con una estimación análoga para q_z, y

$$\begin{aligned} \|v_z\|_{r;Q} &\leq C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z)\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right), \\ &\leq \widetilde{C}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,R)\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right), \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde $\widetilde{C}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,R)$ es una constante positiva independiente de z.

II. *El argumento de punto fijo.*

Definamos

$$\mathcal{A} : z \in \overline{B}(0;R) \subset Z_r \longmapsto \mathcal{A}(z) \subset L^r(Q),$$

donde

$$\mathcal{A}(z) = \left\{v \in L^r(Q) : (y,q) \text{ satisface (3.45)–(3.47)},\ v \text{ verificando (3.52)}\right\},$$

y consideremos la aplicación multivaluada Λ definida sobre Z_r como sigue:

$$\Lambda : z \in \overline{B}(0;R) \subset Z_r \longmapsto \Lambda(z) \subset Z_r,$$

con

$$\Lambda(z) = \left\{y \in Z_r : (y,q) \text{ resuelve (3.45)–(3.46) con } v \in \mathcal{A}(z),\ y \text{ satisfaciendo (3.51)}\right\}.$$

Probaremos que Λ está en las hipótesis del Teorema de Kakutani del Punto Fijo.

$\diamond$ En primer lugar, es fácil ver que, para $z \in Z_r$ fijo, $\Lambda(z)$ es un subconjunto convexo cerrado y no vacío de Z_r, debido al carácter lineal de los sistemas (3.45) y (3.46). De hecho, en virtud del Teorema 9.1 de [39] y de (3.52), $\{\Lambda(z) : z \in \overline{B}(0;R)\}$ está uniformemente acotado en el espacio X^r introducido en la Sección 3.2 (ver p. 89). Recordemos que, para r mayor que $N/2+1$, este espacio se inyecta de manera continua en el espacio de Hölder $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$, con $\beta = 2-(N+2)/r$ (ver el Lema 3.3). Por otro lado, también se tiene que X^r se inyecta de forma compacta en $L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$. Deducimos entonces que existe un compacto fijo $K \subset Z_r$, que sólo depende de R, tal que

$$\Lambda(z) \subset K \quad \forall z \in \overline{B}(0;R). \tag{3.53}$$

$\diamond$ Probemos ahora que Λ es *hemicontinua superiormente*, es decir, para cualquier forma lineal y continua $\mu \in Z_r'$, la función real

$$z \in \overline{B}(0;R) \subset Z_r \longmapsto \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle$$

es *semicontinua superiormente*. Equivalentemente, veamos que

$$B_{\lambda,\mu} = \left\{ z \in \overline{B}(0;R) : \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle \ \geq \lambda \right\}$$

es un subconjunto cerrado de Z_r para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in Z_r'$ (ver [24] y [17] para una demostración similar). Para ello, fijemos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in Z_r'$, y consideremos una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset B_{\lambda,\mu}$ tal que

$$z_n \to z \quad \text{en } Z_r.$$

Tenemos que probar que $z \in B_{\lambda,\mu}$. Puesto que todos los $\Lambda(z_n)$ son compactos, para cada $n \geq 1$ existe $y_n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\langle \mu, y_n \rangle = \sup_{y \in \Lambda(z_n)} \langle \mu, y \rangle \ \geq \lambda. \tag{3.54}$$

Recordando la definición de $\mathcal{A}(z_n)$ y $\Lambda(z_n)$, existen $v_n \in \mathcal{A}(z_n)$ y $q_n \in Z_r$ tales que (y_n, q_n) resuelve (3.45)–(3.47) con control v_n y potenciales $g(z_n)$ y $f'(z_n)$. Ahora bien, de (3.51) y (3.52), tenemos las estimaciones

$$\|y_n\|_{Z_r} \leq C_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, z_n) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{1}{2t^3}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right),$$

junto con una estimación análoga para q_n, y

$$\|v_n\|_{r;Q} \leq C_2(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, z_n) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{1}{2t^3}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right).$$

Así, $\{v_n\}$ (resp. $\{(y_n, q_n)\}$) está uniformemente acotada en $L^r(Q)$ (resp. en $Z_r \times Z_r$). De hecho, (3.53) nos da, en particular, que $\{y_n\}$ está contenida en un compacto fijo de Z_r y un razonamiento análogo al utilizado para obtener (3.53) nos lleva a que la sucesión $\{q_n\}$ también está contenida en un compacto fijo de Z_r. Por tanto, existen subsucesiones, que seguiremos denotando por $\{v_n\}$ e $\{(y_n, q_n)\}$, y existen $\overline{v} \in L^r(Q)$ e $\overline{y}, \overline{q} \in Z_r$ tales que

$$v_n \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{débilmente en } L^r(Q)$$

e

$$(y_n, q_n) \to (\overline{y}, \overline{q}) \quad \text{fuertemente en } Z_r \times Z_r.$$

Puesto que g y f'' son funciones continuas, se tienen también las convergencias

$$g(z_n) \to g(z) \quad \text{en } C^0(\overline{Q}),$$

$$f'(z_n) \to f'(z) \quad \text{en } C^0(\overline{Q})$$

y

$$f''(z_n)\nabla z_n \to f''(z)\nabla z \quad \text{en } L^r(Q)^N.$$

Podemos entonces pasar al límite en las ecuaciones que satisfacen y_n y q_n, deduciendo que $\overline{y}$ y $\overline{q}$ resuelven el problema de controlabilidad nula (3.45)–(3.47) con función control $\overline{v}$ (y potenciales $g(z)$ y $f'(z)$). Además, tomando límites en las estimaciones que verifican v_n e y_n, tenemos que $\bar{v}$ (resp. $\bar{y}$) satisface (3.52) (resp. (3.51)), es decir, $\overline{v} \in \mathcal{A}(z)$ e $\overline{y} \in \Lambda(z)$. Entonces, sin más que tomar límites en (3.54), se tiene

$$\sup_{y\in\Lambda(z)} \langle \mu, y\rangle \geq \langle \mu, \overline{y}\rangle \geq \lambda,$$

de donde se deduce que $z \in B_{\lambda,\mu}$ y, por tanto, Λ es hemicontinua superiormente.

$\diamond$ Finalmente, veamos que existe $R > 0$ tal que

$$\Lambda\left(\overline{B}(0;R)\right) \subset \overline{B}(0;R). \tag{3.55}$$

Sea $R > 0$ arbitrario, por el momento, y que será determinado a continuación. Para cualquier $z \in \overline{B}(0;R) \subset Z_r$, de (3.51) y (3.44) se sigue que cada $y \in \Lambda(z)$ satisface

$$\begin{aligned} \|y\|_{Z_r} &\leq \exp\left[C(1 + C_\varepsilon + \varepsilon\log(1 + \|z\|_\infty))\right]\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right) \\ &\leq \exp\left[C(1 + C_\varepsilon)\right](1+R)^{C\varepsilon}\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right), \end{aligned}$$

con $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T) > 0$. De este modo, eligiendo $\varepsilon = 1/2C$, obtenemos

$$\|y\|_{Z_r} \leq C(1+R)^{1/2}\left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{1}{2t^3}\right)\xi\right\|_{2;Q}\right),$$

de donde se deduce la existencia de $R > 0$ suficientemente grande tal que se verifica (3.55).

Puesto que Λ está en las hipótesis del Teorema de Kakutani del Punto Fijo, inferimos la existencia de, al menos, un punto fijo $y \in Z_r$ de Λ (i.e. $y \in \Lambda(y)$). De este modo, hemos encontrado un control $v \in \mathcal{A}(y)$ que resuelve el problema de controlabilidad nula (3.41)–(3.43) (con $y_0 = 0$). Ahora bien, dado que ξ y v están en $L^r(Q)$, con $r > N/2+1$, por linealización y una posterior aplicación de un argumento de punto fijo (por ejemplo) se prueba que, para cualquier $\hat{y}_0$ en $W^{2-2/r,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$, el sistema (3.1) posee solución en $L^r(0,T;W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$, espacio en el que está garantizada la unicidad de solución, debido al carácter localmente Lipschitziano de f en $\mathbb{R}$. Así, en virtud de la Proposición 3.9, el control v insensibiliza el funcional Φ dado por (3.2). Con esto termina la demostración del Teorema 3.8 cuando f es una función de clase C^2.

Etapa 2.- El caso general.

Supongamos ahora que f es una función de clase C^1 verificando $f'' \in L^\infty_{\rm loc}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y (3.39) y sea ξ como antes.

Consideramos una función $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\rho \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}, \quad \operatorname{sop} \rho \subset [-1,1] \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\, ds = 1.$$

Para cada $n \geq 1$, pongamos

$$\rho_n(s) = n\rho(ns) \text{ para cualquier } s \in \mathbb{R},$$

$$F_n = \rho_n * f, \quad f_n(\cdot) = F_n(\cdot) - F_n(0)$$

y

$$g_n(s) = \begin{cases} \dfrac{f_n(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f_n'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Gracias a las propiedades de ρ_n y de la convolución (véase, por ejemplo, [13]), así como a las hipótesis sobre f, no es difícil probar que las funciones f_n y g_n verifican las siguientes propiedades:

i. f_n'' y g_n son continuas y $f_n(0) = 0$ para cualquier $n \geq 1$.

ii. $f_n \to f$ en $C^1(K)$ para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}$.

iii. $g_n \to g$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.

iv. Para cualquier $M > 0$, existe una constante positiva $C(M)$ tal que

$$\sup_{|s| \leq M} (|g_n(s)| + |f_n'(s)| + |f_n''(s)|) \leq C(M)$$

para $n \geq 1$ arbitrario.

v. También se tiene:

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{|f_n'(s)| + |g_n(s)|}{\log(1+|s|)} = 0 \quad \text{uniformemente en } n,$$

es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$|g_n(s)| + |f_n'(s)| \leq \varepsilon \log(1+|s|) \text{ para cualesquiera } |s| \geq M_\varepsilon \text{ y } n \geq 1.$$

En particular, las dos últimas propiedades implican que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$, dependiendo sólo de ε y no de la función f_n, tal que

$$|g_n(s)| + |f_n'(s)| \leq C_\varepsilon + \varepsilon \log(1 + |s|) \ \text{ para cualesquiera } s \in \mathbb{R} \text{ y } n \geq 1. \qquad (3.56)$$

Razonando como en la etapa anterior, para cada $n \geq 1$ existe un control $v_n \in L^r(Q)$, con $\operatorname{sop} v_n \subset \omega \times [0, T]$, tal que el sistema acoplado

$$\begin{cases} \partial_t y_n - \Delta y_n + f_n(y_n) = \xi + v_n \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y_n = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y_n(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \qquad (3.57)$$

$$\begin{cases} -\partial_t q_n - \Delta q_n + f_n'(y_n) q_n = y_n \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q_n = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q_n(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \qquad (3.58)$$

posee una solución $(y_n, q_n) \in Z_r \times Z_r$ verificando

$$q_n(x, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \qquad (3.59)$$

Además, para cada $n \geq 1$, se tienen las estimaciones

$$\|y_n\|_{Z_r} \leq \mathcal{C}_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, y_n) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{1}{2t^3}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right), \qquad (3.60)$$

junto con una estimación similar para q_n, y

$$\|v_n\|_{r;Q} \leq \mathcal{C}_2(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, y_n) \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{1}{2t^3}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right), \qquad (3.61)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, y_n) &= \exp\left[C(1 + \|g_n(y_n)\|_\infty + \|f_n'(y_n)\|_\infty) \right], \\ \mathcal{C}_2(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, y_n) &= \exp\left[C(1 + \|g_n(y_n)\|_\infty + \|f_n'(y_n)\|_\infty) \right] (1 + \|f_n''(y_n) \nabla y_n\|_{r;Q}) \end{aligned}$$

y $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T) > 0$.

Recordemos que y_n es, para cada $n \geq 1$, un punto fijo de una aplicación multivaluada Λ_n definida sobre el convexo cerrado y no vacío $\overline{B}(0; R_n) \subset Z_r$, con $R_n > 0$ tal que Λ_n envía $\overline{B}(0; R_n)$ en sí mismo. Gracias a la propiedad (3.56), de (3.60) deducimos que

$$\|y_n\|_{Z_r} \leq \exp\left[C(1 + C_\varepsilon) \right] (1 + R_n)^{C\varepsilon} \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{1}{2t^3}\right) \xi \right\|_{2;Q} \right).$$

Así, tomando $\varepsilon = 1/2C$, como en la etapa anterior, para cualquier $n \geq 1$ podemos elegir $R_n = R$, con $R > 0$ suficientemente grande, e independiente de n, de modo que

$$\Lambda_n(\overline{B}(0; R)) \subset \overline{B}(0; R).$$

Además, la sucesión $\{y_n\}$ está uniformemente acotada en Z_r y, usando la propiedad *iv.*, de (3.61) se sigue que $\{v_n\}$ está uniformemente acotada en $L^r(Q)$. Razonando como en el caso anterior, $\{y_n\}$ está, de hecho, uniformemente acotada en el espacio X^r y, al ser $r > N/2 + 1$, existe un compacto K en Z_r tal que $\{y_n\} \subset K$. Un razonamiento similar para q_n permite deducir que también $\{q_n\}$ está contenida en un compacto fijo de Z_r.

De este modo, al menos para una subsucesión, se tiene

$$(y_n, q_n) \to (y, q) \quad \text{fuertemente en } Z_r \times Z_r$$

y

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{débilmente en } L^r(Q),$$

con $v \in L^r(Q)$ e $y, q \in Z_r$. Teniendo ahora en cuenta las propiedades *ii.* y *iii.*, se tienen también las convergencias

$$g_n(y_n) \to g(y) \quad \text{y} \quad f_n'(y_n) \to f'(y) \quad \text{en } C^0(\overline{Q}).$$

Finalmente, basta con pasar al límite en (3.57)–(3.59) para inferir que y y la correspondiente q resuelven (3.45)–(3.47). Es decir, hemos encontrado un control v en $L^r(Q)$ que resuelve el problema de controlabilidad nula (3.41)–(3.43) y, en consecuencia, también insensibiliza Φ, razonando como en la etapa anterior. Esto termina la prueba del Teorema 3.8. $\square$

Adaptando la demostración precedente, se prueban otros resultados de insensibilización para el sistema (3.1).

1. El Teorema 3.8 sigue siendo válido bajo una hipótesis ligeramente más débil sobre f. Más precisamente, existe $l_1(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T) > 0$ tal que, si se sustituye la hipótesis (3.39) por

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|f'(s)|}{\log(1+|s|)} \leq l_1,$$

para cualquier término fuente ξ en las hipótesis del Teorema 3.8, podemos encontrar una función control v que insensibiliza el funcional Φ dado por (3.2) en el sentido de la Definición 3.1.

2. Si no imponemos ninguna restricción sobre el crecimiento de f, no es difícil probar el siguiente resultado local de insensibilización:

Proposición 3.10 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f'' \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$. Sea $r \in \left(\dfrac{N}{2} + 1, \infty\right)$. Entonces, existen dos constantes positivas $M = M(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, f)$ y $\eta = \eta(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, f)$ tales que, para cualquier $\xi \in L^r(Q)$ verificando*

$$\|\xi\|_{r;Q} + \left\|\exp\left(\frac{M}{2t}\right)\xi\right\|_{2;Q} \leq \eta,$$

existe un control $v \in L^r(Q)$ que insensibiliza el funcional Φ definido en (3.2) *en el sentido de la Definición 3.1.* □

3.4.2. Un resultado de insensibilización de carácter negativo

El segundo resultado de relevancia de este capítulo es de carácter negativo. Es el siguiente:

Teorema 3.11 *Existen funciones $f \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $f'' \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y*

$$|f(s)| \sim |s| \log^\alpha(1 + |s|) \quad \text{cuando } |s| \to \infty, \tag{3.62}$$

con $\alpha > 2$, y existen términos fuente $\xi \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (3.40)*, para los que no es posible encontrar funciones control que insensibilicen el funcional Φ dado por* (3.2) *en el sentido de la Definición 3.1.*

Demostración: Probaremos que, para ciertas funciones f como en el enunciado y ciertos términos fuente $\xi \in L^\infty(Q)$ que se anulan para $t \in (0, t_0)$, con $t_0 \in (0, T)$, la solución y de (3.41) asociada a cualquier control v explota antes del instante $t = T$ y, por consiguiente, el funcional Φ definido por (3.2) no puede ser insensibilizado.

Procedemos como en [26], Sección I.5 (véase también la demostración del Teorema 1.1 de [24], donde se prueba un resultado de controlabilidad nula de carácter negativo para una ecuación del calor semilineal y [31] para un argumento similar en el contexto de la controlabilidad aproximada). Consideramos la función

$$f(s) = \int_0^{|s|} log^\alpha(1 + \sigma)\, d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

con $\alpha > 2$. Es fácil comprobar que f es una función convexa y verifica $f(s)s < 0$ para cualquier $s < 0$ y la condición (3.62).

Sea $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\rho \geq 0 \;\text{ en } \Omega, \quad \rho \equiv 0 \;\text{ en } \omega \quad \text{y} \quad \int_\Omega \rho(x)\, dx = 1.$$

Fijado $t_0 \in (0,T)$, pongamos

$$\xi(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \Omega,\ t \in [0,t_0], \\ -(M+k) & \text{si} \quad x \in \Omega,\ t \in (t_0,T], \end{cases} \tag{3.63}$$

donde M es una constante positiva que elegiremos más adelante y k viene dada por

$$k = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho f^* \left(2 \frac{|\Delta \rho|}{\rho} \right) dx.$$

Aquí, f^* es la *convexa conjugada* de la función convexa f y hemos de notar que la función ρ puede elegirse de modo que $\rho f^*(2|\Delta\rho|/\rho) \in L^1(\Omega)$ (véase [24]).

Sea y una solución de (3.41) asociada al término fuente ξ definido en (3.63) y a un control v arbitrario, y definida en el intervalo maximal $[0,T^*)$. Multiplicando la EDP que verifica y por ρ e integrando en Ω, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho y \, dx = \int_\Omega (\Delta y) \rho \, dx - \int_\Omega \rho f(y) \, dx + \int_\Omega \rho \xi \, dx,$$

de donde, integrando por partes y recordando la definición de f, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(- \int_\Omega \rho y \, dx \right) \geq - \left| \int_\Omega (\Delta \rho) y \, dx \right| + \int_\Omega \rho f(|y|) \, dx - \int_\Omega \rho \xi \, dx.$$

Por la desigualdad de Young, tenemos

$$\left| \int_\Omega (\Delta\rho) y \, dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \rho f^*(2|\Delta\rho|/\rho) \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho f(|y|) \, dx = k + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho f(|y|) \, dx.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la desigualdad de Jensen y que f es creciente en $[0,\infty)$, se obtiene

$$\int_\Omega \rho f(|y|) \, dx \geq f \left(\int_\Omega \rho |y| \, dx \right) \geq f \left(\left| \int_\Omega \rho y \, dx \right| \right) = f \left(- \int_\Omega \rho y \, dx \right).$$

Así, poniendo

$$z(t) = - \int_\Omega \rho(x) y(x,t) \, dx, \quad \forall t \in [t_0, T^*),$$

de las consideraciones anteriores deducimos que

$$\begin{cases} z'(t) \geq M + \dfrac{1}{2} f(z(t)), \quad t \in [t_0, T^*), \\ z(t_0) = z_0 = - \displaystyle\int_\Omega \rho(x) y(x,t_0) \, dx. \end{cases}$$

La función z es creciente. Además, definiendo

$$G(z_0; s) = \int_{z_0}^{s} \frac{2}{f(\sigma) + 2M}\, d\sigma, \quad \forall s \geq z_0,$$

tenemos

$$\frac{d}{dt} G(z_0; z(t)) = \frac{2z'(t)}{f(z(t)) + 2M} \geq 1 \quad \forall t \in [t_0, T^*),$$

luego

$$G(z_0; z(t)) \geq t - t_0 \quad \forall t \in [t_0, T^*).$$

Así, podemos probar que

$$T^* \leq t_0 + \sup_{t \in [t_0, T^*)} G(z_0; z(t)) \leq t_0 + \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(\sigma) + 2M}\, d\sigma.$$

Ahora bien, esta última integral es convergente para cada $M > 0$, gracias a (3.62), y tiende a cero cuando M tiende a infinito. Así, para $M > 0$ suficientemente grande, z explota, antes de T luego y explota en $L^1(\Omega)$. Con esto termina la prueba. $\square$

***Observación* 3.6** El Teorema 3.8 implica, en particular, la existencia de controles insensibilizantes para funciones $f \in C^1(\mathbb{R})$ tales que $f'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$ verificando (3.62), con $\alpha \in [0, 1)$. Comparando este resultado con el establecido en el teorema precedente, hay un rango de no linealidades con crecimiento superlineal, a saber, no linealidades f satisfaciendo (3.62), con $1 \leq \alpha \leq 2$, para las que la existencia o no de controles que insensibilizan el funcional Φ es un problema abierto. $\square$

3.4.3. Controles insensibilizantes que simultáneamente dan la controlabilidad exacta a cero

Como extensión del Teorema 3.8, se puede probar un resultado de existencia de los denominados *controles simultáneamente insensibilizantes y exactos a cero*, es decir, controles para los cuales el sistema en cascada (3.41)–(3.42) (con $y_0 = 0$) admite una solución (y, q) que verifica, simultáneamente, $q(x, 0) = 0$ en Ω e

$$y(x, T) = 0 \ \text{ en } \Omega.$$

Una hipótesis natural en este caso es pedir al término fuente, ξ, que decaiga rápidamente a cero, no sólo cerca de $t = 0$, sino también cerca del instante final $t = T$. Se tiene:

Teorema 3.12 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sea f una función en las hipótesis del Teorema 3.8 y sea $r \in \left(\frac{N}{2} + 1, \infty\right)$. Entonces, para cualquier $\xi \in L^r(Q)$ verificando*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{1}{t^3 (T - t)^3}\right) |\xi|^2 \, dx\, dt < \infty, \tag{3.64}$$

existe una función control $v \in L^r(Q)$ que insensibiliza el funcional dado por (3.2) *(en el sentido de la Definición 3.1) y tal que la solución $y(\cdot,\cdot;\tau,v)|_{\tau=0}$ de* (3.1) *(asociada a $\tau = 0$ y a v) satisface*

$$y(x,T;\tau,v)|_{\tau=0} = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Demostración: La prueba es similar a la del Teorema 3.8. Por este motivo, pasaremos por encima de algunos detalles. Haremos la demostración en el caso de una función f de clase C^2 verificando $f(0) = 0$ y (3.39). El caso general se estudia fácilmente siguiendo la demostración del citado teorema.

Sea $\xi \in L^r(Q)$ satisfaciendo (3.64), con $r > N/2+1$. Veamos que existe un control v suficientemente regular tal que el sistema en cascada (3.41)–(3.42) (con $y_0 = 0$) admite una solución (y,q) que verifica, simultáneamente, $q(x,0) = 0$ y $y(x,T) = 0$ en Ω. Como es habitual, en un primer paso se muestra un resultado de insensibilización similar para el caso lineal. Después se aplica un argumento de punto fijo para resolver el problema no lineal.

Comenzamos analizando el caso lineal. Consideramos el sistema lineal acoplado (3.20)–(3.21), con a y b en $L^\infty(Q)$, y el correspondiente sistema adjunto

$$\begin{cases} \partial_t\varphi - \Delta\varphi + b\varphi = 0 \;\; \text{en } Q, \\ \varphi = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.65}$$

y

$$\begin{cases} -\partial_t\psi - \Delta\psi + a\psi = \varphi\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \;\; \text{en } Q, \\ \psi = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \;\; \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.66}$$

con φ^0 y ψ^0 en $L^2(\Omega)$. Primero construimos controles en $L^2(Q)$. Sea $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ un abierto arbitrario no vacío. Es este caso, se tiene la siguiente desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema adjunto anterior:

Lema 3.13 *Existen dos constantes positivas C y M tales que*

$$\iint_Q \exp\left(-\frac{CM}{t(T-t)}\right)|\psi|^2\,dx\,dt \le C\iint_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2\,dx\,dt \tag{3.67}$$

para cualquier $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, donde φ y ψ resuelven (3.65)–(3.66)*. Más precisamente, C sólo depende de Ω, ω y $\mathcal{O}$ y la constante M viene dada por*

$$M = 1 + T + T^2\left(1 + \|a\|_\infty^{2/3} + \|b\|_\infty^{2/3} + \|a-b\|_\infty^{1/2}\right).$$

□

La demostración de este resultado es similar a la de la desigualdad de observabilidad (2.20) establecida en la Proposición 2.4 del capítulo precedente y será omitida.

Obsérvese que, en (3.66), permitimos que $\psi(T)$ sea no nulo y así, en este caso, obtenemos una desigualdad de observabilidad diferente.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos el funcional continuo y convexo $\tilde{J}_\varepsilon$ definido sobre $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ por

$$\tilde{J}_\varepsilon(\varphi^0, \psi^0) = \frac{1}{2} \iint_{B_0 \times (0,T)} |\psi|^2 \, dx \, dt + \varepsilon \|\varphi^0\|_{2;\Omega} + \varepsilon \|\psi^0\|_{2;\Omega} + \iint_Q \xi \psi \, dx \, dt,$$

donde φ y ψ resuelven (3.65)–(3.66). Se tiene la siguiente propiedad de continuación única para las soluciones de (3.65)–(3.66):

Si $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, (φ, ψ) es la correspondiente solución de (3.65)–(3.66) y $\psi = 0$ en $\omega \times (0,T)$, entonces $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ en Q.

Puesto que $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$, el Lema 3.13 nos da que $\psi \equiv 0$ en Q y, por tanto, $\varphi \equiv 0$ en $\mathcal{O} \times (0,T)$. Una propiedad clásica de continuación única para la ecuación del calor (cf. [49]) implica que $\varphi \equiv 0$ en Q.

Como consecuencia de la propiedad previa de continuación única para las soluciones de (3.65)–(3.66), el funcional $\tilde{J}_\varepsilon$ es, de hecho, estrictamente convexo y satisface

$$\liminf_{\|\varphi^0\|_{2;\Omega} + \|\psi^0\|_{2;\Omega} \to +\infty} \frac{\tilde{J}_\varepsilon(\varphi^0, \psi^0)}{\|\varphi^0\|_{2;\Omega} + \|\psi^0\|_{2;\Omega}} \geq \varepsilon.$$

Consecuentemente, $\tilde{J}_\varepsilon$ alcanza su mínimo en un único $(\varphi^0_\varepsilon, \psi^0_\varepsilon) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Sea $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ la solución de (3.65)– (3.66) asociada a $(\varphi^0_\varepsilon, \psi^0_\varepsilon)$. Entonces, la solución $(y_\varepsilon, q_\varepsilon)$ de (3.20)–(3.21) asociada al control

$$v_\varepsilon = \psi_\varepsilon \mathbf{1}_{B_0}$$

satisface

$$\|q_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon. \tag{3.68}$$

En virtud de (3.67), los controles $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ están acotados uniformemente en $L^2(Q)$ (obsérvese que si ξ verifica (3.64), entonces también satisface

$$\iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t(T-t)}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{3.69}$$

con C y M como en el Lema 3.13). De este modo, razonando como se hizo para obtener la Proposición 3.5 y usando (3.68), se deduce la existencia de un control $\hat{v} \in L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, tal que la solución asociada $(\hat{y}, \hat{q})$ de (3.20)–(3.21) satisface $\hat{y}(x,T) = 0$ y $\hat{q}(x,0) = 0$ en Ω. Además, puede estimarse

$$\|\hat{v}\|^2_{2;Q} \leq C \iint_Q \exp\left(\frac{CM}{t(T-t)}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt, \tag{3.70}$$

con C y M como antes.

La construcción de un control regular a partir de $\hat{v} \in L^2(Q)$ es igual que la que hicimos en el caso de los controles insensibilizantes propiamente dichos. Más precisamente, definamos y y q por (3.26) y (3.25), respectivamente. Como en la Proposición 3.6, para $a \in L^\infty(Q)$ y $b \in L^\infty(Q) \cap L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega))$ se tiene que y y q están en $Z_r = C^0(\overline{Q}) \cap L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$, resuelven (3.20)–(3.22) para el control $v \in L^r(Q)$ dado por (3.27), y se tiene $y(x,T) = 0$ en Ω (aquí usamos que $\hat{y}(T) = \hat{q}(T) = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $\hat{q} \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$). Además, de (3.29), (3.31), (3.69) y (3.70), se obtienen las siguientes estimaciones, similares a las del Corolario 3.7:

$$\|y\|_{Z_r} + \|q\|_{Z_r} \leq C_1 \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{CM}{2t(T-t)} \right) \xi \right\|_{2;Q} \right)$$

y

$$\|v\|_{r;Q} \leq C_2 \left(\|\xi\|_{r;Q} + \left\| \exp\left(\frac{CM}{2t(T-t)} \right) \xi \right\|_{2;Q} \right),$$

con C_1 y C_2 como en la Proposición 3.6, M dada por el Lema 3.13 y siendo C una nueva constante positiva que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$ y T.

Finalmente, aplicando un argumento de punto fijo completamente análogo al utilizado en la demostración del Teorema 3.8, puede deducirse la existencia de un control $v \in L^r(Q)$ resolviendo el caso no lineal cuando f es una función de clase C^2. Como se dijo anteriormente, es suficiente seguir la demostración del citado teorema para tratar el caso general. Esto finaliza la prueba del Teorema 3.12. $\square$

3.5. Un resultado local de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier

Dedicamos esta sección a analizar el caso de una ecuación del calor superlineal cuando se consideran condiciones de contorno no lineales de la forma $\partial_n y + f(y)$. En este marco, presentamos un resultado local de existencia de controles insensibilizantes en el sentido de la Definición 3.2, el Teorema 3.18, cuando los abiertos de control y de observación, ω y $\mathcal{O}$, no son disjuntos.

Como ya hemos puesto de manifiesto, la condición de insensibilización (3.13) nos lleva nuevamente a estudiar un problema no lineal de controlabilidad nula para un sistema de dos ecuaciones del calor en cascada. Más precisamente, se prueba en este caso el siguiente resultado:

Proposición 3.14 *Sea Φ el funcional definido por* (3.2)*, donde $y(\cdot,\cdot;\tau,v)$ es una solución de* (3.12) *definida en* $(0,T)$ *(asociada a τ y a v), si existe. Se tiene:*

1. *Si un control v insensibiliza Φ en el sentido de la Definición 3.2, entonces v resuelve el problema de controlabilidad nula*

$$\begin{cases} \partial_t \overline{y} - \Delta \overline{y} + F(\overline{y}) = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n \overline{y} + f(\overline{y}) = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(x,0) = y_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.71}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + F'(\overline{y})q = \overline{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + f'(\overline{y})q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.72}$$

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{3.73}$$

2. *Si un control v resuelve* (3.71)–(3.73) *y existe $\tau_0 > 0$ tal que* (3.12) *posee una solución débil $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})$ para $|\tau| \leq \tau_0$, entonces este control v insensibiliza el funcional Φ en el sentido de la Definición 3.2.* $\square$

La demostración de este resultado será omitida, al ser idéntica a la de su equivalente en el caso de condiciones Dirichlet homogéneas, la Proposición 3.9. De nuevo en este caso, observamos que el problema de insensibilización planteado no es equivalente a un problema de controlabilidad nula. En virtud del resultado previo, para buscar un control insensibilizante en el sentido de la Definición 3.2, primero hemos de encontrar un control regular que resuelva el problema de controlabilidad nula (3.71)–(3.73) y, en un segundo paso, habrá que verificar que dicho control puede elegirse de modo que, además, insensibilice el funcional Φ. De hecho, se construirá un control con regularidad Hölderiana con soporte en $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.

Recordemos que hemos de imponer la hipótesis esencial $y_0 = 0$. Como es habitual en el estudio de la controlabilidad de sistemas no lineales, la existencia de controles v que resuelvan el problema no lineal (3.71)–(3.73) (con $y_0 = 0$) se probará mediante linealización y un argumento apropidado de punto fijo. Dedicamos la próxima subsección a resolver una versión linealizada del correspondiente problema de controlabilidad nula. En la Subsección 3.5.2 daremos el resultado principal en este marco y su demostración.

3.5.1. El problema lineal de controlabilidad nula: construcción de controles con regularidad Hölderiana

Como acabamos de comentar, en esta subsección resolvemos un problema de controlabilidad nula lineal similar a (3.71)–(3.73) (con $y_0 = 0$). Consideramos el sistema lineal en cascada

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + cy = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + ay = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.74}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + dq = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + bq = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.75}$$

donde $a, b \in L^\infty(\Sigma)$, $c, d \in L^\infty(Q)$ y $\xi \in L^2(Q)$ (al menos). Para cada $v \in L^2(Q)$, el sistema (3.74)–(3.75) admite una única solución (y, q) verificando

$$y, q \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t y, \partial_t q \in L^2(0,T; H^1(\Omega)'),$$

$$\|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)} + \|\partial_t y\|_{L^2(H^1(\Omega)')} \le C\left(\Omega, T, \|a\|_{\infty;\Sigma}, \|c\|_\infty\right)\left(\|\xi\|_{2;Q} + \|v\|_{2;Q}\right) \tag{3.76}$$

y

$$\begin{aligned} &\|q\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)} + \|\partial_t q\|_{L^2(H^1(\Omega)')} \\ &\le C\left(\Omega, T, \|a\|_{\infty;\Sigma}, \|b\|_{\infty;\Sigma}, \|c\|_\infty, \|d\|_\infty\right)\left(\|\xi\|_{2;Q} + \|v\|_{2;Q}\right). \end{aligned} \tag{3.77}$$

Bajo hipótesis adicionales sobre los potenciales a, b, c, d y sobre el término fuente ξ, construiremos un control v con regularidad Hölderiana, actuando sobre un subconjunto abierto no vacío de $\omega \cap \mathcal{O}$, tal que la correspondiente solución (y, q) de (3.74)–(3.75) verifique $q(x, 0) = 0$ en Ω.

Haremos una construcción similar a la desarrollada en la Sección 3.3. Procederemos como sigue. Fijamos un abierto no vacío B_0 tal que $B_0 \subset\subset \omega \cap \mathcal{O}$. En un primer paso, construiremos un control en $L^2(Q)$ con soporte contenido en $\overline{B}_0 \times [0, T]$. En este paso juega un papel fundamental una adecuada desigualdad de observabilidad para las soluciones del sistema adjunto de (3.74)–(3.75). En segundo lugar, mediante la construcción mencionada, y gracias al efecto regularizante de la ecuación del calor, seremos capaces de construir un control Hölderiano con soporte ligeramente más grande. Nuevamente, la regularidad de v e (y, q) nos permitirán abordar el problema no lineal.

En lo que sigue, sólo explicitaremos la dependencia de las constantes con respecto a los argumentos que sean relevantes en nuestro análisis. Así, por ejemplo, omitiremos la dependencia con respecto a la dimensión N, al abierto B_0 y a los abiertos que consideraremos más adelante.

Controles en $L^2(Q)$

Consideramos el sistema adjunto del sistema acoplado (3.74)–(3.75), a saber,

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta\varphi + d\varphi = 0 \quad \text{en } Q, \\ \partial_n \varphi + b\varphi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \quad \text{en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \Delta \psi + c\psi = \varphi \mathbf{1}_{\mathcal{O}} \quad \text{en } Q, \\ \partial_n \psi + a\psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Gracias a una propiedad de continuación única para las soluciones de este sistema, la cual se deduce de la desigualdad de observabilidad (para estas mismas soluciones) establecida en el Teorema 2.6, bajo hipótesis apropiadas sobre el término fuente, ξ, se obtienen controles en $L^2(Q)$:

Proposición 3.15 *Supongamos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, $a, b, \partial_t a, \partial_t b \in L^\infty(\Sigma)$ y $c, d \in L^\infty(Q)$. Sean $\widetilde{M}$ y $\widetilde{H}$ las constantes positivas (que dependen de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\|a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|b\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t b\|_{\infty;\Sigma}$, $\|c\|_\infty$ y $\|d\|_\infty$) que proporciona el Teorema 2.6. Entonces, para cualquier $\xi \in L^2(Q)$ verificando*

$$\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{M}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{3.78}$$

existe una función control $\hat{v} \in L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, tal que la solución $(\hat{y}, \hat{q})$ de (3.74)–(3.75) *asociada a $\hat{v}$ satisface $\hat{q}(x,0) = 0$ en Ω. Además, $\hat{v}$ puede elegirse de modo que*

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \leq \sqrt{\widetilde{H}} \left(\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{M}}{t}\right) |\xi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}. \tag{3.79}$$

□

La demostración de este resultado es análoga a la de la Proposición 3.5 y está esencialmente hecha en el capítulo anterior. Por este motivo, la omitiremos.

***Observación* 3.7** En toda esta subsección, la dependencia de las constantes con respecto a los potenciales a y b que aparecen en la condición de contorno no es explícita (ver también las Observaciones 1.2 y 2.1, pp. 30 y 57, de esta Memoria). Recordemos que esto viene de aplicar el Lema 1.3 de esta Memoria para obtener la desigualdad de observabilidad mencionada anteriormente. Esta es la razón por la cual, en el marco de una ecuación semilineal del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, obtenemos un resultado local de insensibilización. Sin embargo, podría obtenerse la dependencia explícita de las constantes con respecto a T y a los potenciales c y d que aparecen en las EDPs. Ello permitiría conocer el modo preciso en que la constante $\widetilde{\mathcal{M}}$ del Teorema 3.18 depende de T y F. □

Controles con regularidad Hölderiana

Como hemos anticipado, una construcción similar a la desarrollada en la Sección 3.3 nos permitirá obtener un control con regularidad Hölderiana que resuelva el problema de controlabilidad nula (3.74)–(3.75) y (3.73). Utilizaremos el efecto regularizante de la ecuación de calor y, más precisamente, las Proposiciones 3.1 y 3.4 de este capítulo.

El resultado principal de esta subsección es el siguiente:

Proposición 3.16 *Supongamos que $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$, para algún $\beta \in (0,1)$, $a, b, \partial_t a, \partial_t b \in L^\infty(\Sigma)$, $c \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y $d \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})$. Sea $\widetilde{M}$ la constante positiva (dependiendo de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\|a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|b\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t b\|_{\infty;\Sigma}$, $\|c\|_\infty$ y $\|d\|_\infty$) que proporciona el Teorema 2.6. Entonces, para cualquier $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ satisfaciendo (3.78), podemos encontrar un control $v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ tal que la solución (y,q) de (3.74)–(3.75) satisface $q(x,0) = 0$ en Ω. Además, la norma $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}$ de v puede estimarse de la forma siguiente*

$$|v|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq C \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{M}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right), \tag{3.80}$$

donde C es una nueva constante positiva que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\|a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|b\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t a\|_{\infty;\Sigma}$, $\|\partial_t b\|_{\infty;\Sigma}$, $|c|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}$ y $|d|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{Q}}$.

Demostración: Supongamos que $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$. Sean a, b, c y d como en el enunciado y sea $\widetilde{M} > 0$ la constante que se obtiene en el Teorema 2.6. Dado $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando (3.78), la proposición anterior nos proporciona un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ tal que la correspondiente solución $(\hat{y},\hat{q})$ de (3.74)–(3.75) verifica $\hat{q}(x,0) = 0$ en Ω. Además, $\hat{v}$ satisface la estimación (3.79) y $\operatorname{sop}\hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, donde B_0 es el abierto considerado anteriormente. Tenemos $\hat{y},\hat{q} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $\partial_t\hat{y}, \partial_t\hat{q} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ y para $\hat{y}$, $\hat{q}$ se tienen estimaciones análogas a (3.76) y (3.77).

Sean B, B_1 y B_2 tres abiertos regulares tales que

$$B_0 \subset\subset B_1 \subset\subset B_2 \subset\subset B \subset\subset \omega \cap \mathcal{O}.$$

Pongamos nuevamente

$$q = (1-\theta)\,\hat{q} \tag{3.81}$$

e

$$y = (1-\theta)\,\hat{y} + 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}, \tag{3.82}$$

con $\theta \in \mathcal{D}(B)$ verificando $\theta \equiv 1$ en B_2. Analizaremos la regularidad interior de $\hat{y}$ y $\hat{q}$, infiriendo que (y,q) resuelve el problema de controlabilidad nula (3.74)–(3.75) y (3.73) con término de control $v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ dado por

$$v = -\theta\xi + 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{y} + (\Delta\theta)\hat{y} + (\partial_t - \Delta + c)\left[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q}\right], \tag{3.83}$$

que, de hecho, tiene soporte en $B \times [0,T]$.

En primer lugar, como $c \in L^\infty(Q)$ y $\xi + \hat{v}\mathbf{1}_{B_0} \in L^2(Q) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega \setminus \overline{B}_0))$, podemos aplicar la Proposición 3.1, con $r = (N+2)/(1-\beta)$, siendo $\beta \in (0,1)$ el del enunciado, y deducir que $\hat{y}$ está en $X^r(0,T;(\omega\cap\mathcal{O})\setminus\overline{B}_1)$ (nótese que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\omega\cap\mathcal{O}$ es un abierto regular que está estrictamente contenido en Ω). Puesto que $r>N+2$, este espacio se inyecta de manera continua en $C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{(\omega\cap\mathcal{O})\setminus B_1}\times[0,T])$, por el Lema 3.3. Así,

$$\hat{y}\in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{(\omega\cap\mathcal{O})\setminus B_1}\times[0,T]), \tag{3.84}$$

y de las estimaciones (3.15) y (3.76) se obtiene

$$|\hat{y}|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{(\omega\cap\mathcal{O})\setminus B_1}\times[0,T]}\leq C\left(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|c\|_\infty\right)\left(\|\xi\|_\infty+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right). \tag{3.85}$$

Por la elección de θ, el sumando $v_1=2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{y}+(\Delta\theta)\hat{y}$ de (3.83) está entonces en $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y podemos estimar

$$|v_1|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}\leq C\left(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|c\|_\infty\right)\left(\|\xi\|_\infty+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right).$$

Teniendo en cuenta la regularidad interior de $\hat{y}$ (ver (3.84)), un argumento como el anterior implica que $\hat{q}\in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{B\setminus B_2}\times[0,T])$ y las estimaciones (3.15), (3.77) y (3.85) nos dan

$$|\hat{q}|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{B\setminus B_2}\times[0,T]}\leq C\left(\|\xi\|_\infty+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right), \tag{3.86}$$

con $C=C\left(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|b\|_{\infty;\Sigma},\|c\|_\infty,\|d\|_\infty\right)$. Por la regularidad $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}$ de ξ y c, es entonces claro que $v_2=-\theta\xi+c[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q}+(\Delta\theta)\hat{q}]$ está en $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y se tiene la estimación

$$|v_2|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}\leq C(\Omega,\omega,\mathcal{O})\left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}+|c|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}|\hat{q}|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{B\setminus B_2}\times[0,T]}\right),$$

que combinada con (3.86), nos da

$$|v_2|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}\leq C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|b\|_{\infty;\Sigma},|c|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}},\|d\|_\infty)\left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right).$$

Analizamos ahora el término $v_3=(\partial_t-\Delta)[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q}+(\Delta\theta)\hat{q}]$, usando la Proposición 3.4. Teniendo en cuenta (3.84) y la regularidad del potencial d, podemos aplicar a $u=\hat{q}$ el mencionado resultado sobre regularidad interior Hölderiana, con $h=\hat{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{V}=(\omega\cap\mathcal{O})\setminus\overline{B}_1$ y $\mathcal{V}'=B\setminus\overline{B}_2$, deduciendo que $\hat{q}\in C^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{B\setminus B_2}\times[0,T])$. Además, de las estimaciones (3.19), (3.85) y (3.77) se tiene que

$$|\hat{q}|_{3+\beta,\frac{3+\beta}{2};\overline{B\setminus B_2}\times[0,T]}\leq C\left(\|\xi\|_\infty+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right),$$

con $C=C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|b\|_{\infty;\Sigma},\|c\|_\infty,|d|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{Q}})$. Por la elección de θ, inferimos que $2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q}+(\Delta\theta)\hat{q}\in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y, en consecuencia, v_3 está en $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y se tiene la estimación

$$|v_3|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}\leq C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|a\|_{\infty;\Sigma},\|b\|_{\infty;\Sigma},\|c\|_\infty,|d|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{Q}})\left(\|\xi\|_\infty+\|\hat{v}\|_{2;Q}\right).$$

En virtud de las consideraciones previas para cada término v_i, $1 \leq i \leq 3$, y usando la estimación (3.79) de la norma L^2 de $\hat{v}$, concluimos que v dado por (3.83) está en $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y satisface la estimación (3.80).

Finalmente, es un ejercicio sencillo justificar que (y, q) definidos por (3.82) y (3.81) junto con esta función control v resuelven (3.74)–(3.75) y (3.73). El único punto delicado podría ser comprobar que $y(x, 0) = 0$ en Ω. Pero esto sigue inmediatamente de la regularidad interior de $\hat{q}$ (que, en particular, da $\hat{q} \in C([0,T]; H^1(B \setminus \overline{B}_2)))$, de la elección de θ y del hecho de que $\hat{q}(x, 0) = 0$ en Ω. Esto finaliza la demostración de la Proposición 3.16. $\square$

Resaltemos que, de nuevo, la técnica empleada permite obtener la regularidad (resp. las estimaciones) para y y q independientemente de la regularidad (resp. la estimación) para el control v.

3.5.2. El resultado principal y su demostración

Comenzamos esta subsección recordando el siguiente resultado para sistemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + cu = h \ \text{ en } Q, \\ \partial_n u + au = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.87}$$

cuya prueba viene dada en [39] (ver el Teorema 5.3, p. 320):

Lema 3.17 *Supongamos que $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$, $a \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{\Sigma})$ y $c \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$. Entonces, para cualesquiera $h \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y $u_0 \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ verificando la condición de compatibilidad*

$$\partial_n u_0(x) + a(x,0)u_0(x) = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega,$$

el sistema (3.87) *admite una única solución $u \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando la estimación*

$$|u|_{2+\beta,1+\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq C(\Omega, T, |a|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{\Sigma}}, |c|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}}) \left(|h|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + |u_0|_{2+\beta;\overline{\Omega}} \right). \tag{3.88}$$

$\square$

Estamos ya en condiciones de presentar y probar el resultado local de existencia de controles insensibilizantes (para el sistema (3.12)) que ya hemos anunciado.

Teorema 3.18 *Supongamos que $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$, $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $y_0 = 0$. Sean $F, f \in C^3(\mathbb{R})$ verificando $F(0) = f(0) = 0$. Entonces, existen dos constantes positivas $\widetilde{\mathcal{M}}$ y η (que dependen de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, F y f) tales que, para cualquier $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ que verifique*

$$|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \leq \eta, \tag{3.89}$$

podemos encontrar un control $v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ que insensibilice el funcional Φ definido por (3.2) en el sentido de la Definición 3.2.

Demostración: Por las consideraciones expuestas al principio de esta sección, la prueba se divide, de manera natural, en dos etapas.

Etapa 1.- Existencia de un control con regularidad Hölderiana que resuelva el problema no lineal de controlabilidad nula (3.71)–(3.73): el argumento de punto fijo.

Sean G y g las funciones de clase C^2 definidas por

$$G(s) = \begin{cases} \dfrac{F(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ F'(0) & \text{si } s = 0, \end{cases} \qquad g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Pongamos

$$Z = C^1(\overline{Q}) \cap C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}).$$

Fijado $z \in \overline{B}(0;1) \subset Z$, consideramos los sistemas lineales

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + G(z)y = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + g(z)y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.90}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + F'(z)q = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ \partial_n q + f'(z)q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.91}$$

con potenciales $G(z), F'(z) \in Z$ y $g(z), f'(z) \in C^1(\overline{\Sigma}) \cap C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{\Sigma})$. Por abuso de la notación, a partir de ahora designaremos por $g(z)$ (resp. $f'(z)$) tanto la función $g(z)$ en Z como su restricción a $\overline{\Sigma}$ (resp. tanto $f'(z) \in Z$ como su restricción a $\overline{\Sigma}$). Pongamos

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, F, f) = \sup_{z \in \overline{B}(0;1)} \widetilde{M}_z, \tag{3.92}$$

donde $\widetilde{M}_z$ es, para $z \in \overline{B}(0;1)$ fijo, la constante positiva (que depende de Ω, ω, $\mathcal{O}$, T, $\|g(z)\|_Z$, $\|f'(z)\|_Z$, $\|G(z)\|_Z$ y $\|F'(z)\|_Z$) proporcionada por el Teorema 2.6. Sea ξ en $C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando (3.89), con $\eta > 0$ a elegir más adelante, por tanto, también verificando

$$\iint_Q \exp\left(\frac{\widetilde{M}_z}{t}\right)|\xi|^2 \, dx\, dt < \infty, \quad \forall z \in \overline{B}(0;1).$$

Por la Proposición 3.16, existe $v_z \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ tal que la correspondiente solución (y_z, q_z) de (3.90)–(3.91) está en $C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) \times C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ (por el Lema 3.17) y satisface $q_z(x,0) = 0$ en Ω. Más aún, se tiene

$$|v_z|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{M}_z}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right),$$

con $C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) = C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|g(z)\|_Z,\|f'(z)|_Z,\|G(z)\|_Z,\|F'(z)\|_Z)$, e y_z satisface una estimación análoga a (3.88), a saber:

$$|y_z|_{2+\beta,1+\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{M}_z}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right),$$

con $C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z) = C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,\|g(z)\|_Z,\|f'(z)|_Z,\|G(z)\|_Z,\|F'(z)\|_Z)$ (y se tiene una estimación similar para q_z). Entonces, para cualquier $z \in \overline{B}(0;1) \subset Z$, tenemos

$$|v_z|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq \widetilde{C}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right), \tag{3.93}$$

$$|y_z|_{2+\beta,1+\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right), \tag{3.94}$$

junto con una estimación similar para q_z, con

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) &= \sup_{z\in\overline{B}(0;1)} C(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z),\\ C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) &= \sup_{z\in\overline{B}(0;1)} C_1(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,z).\end{aligned}$$

Para cada $z \in \overline{B}(0;1) \subset Z$, consideramos las familias

$$\mathcal{A}(z) = \left\{ v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}) : (y,q) \text{ satisface } (3.90), (3.91) \text{ y } (3.73),\ v \text{ verificando } (3.93) \right\},$$
$$\Lambda(z) = \{ y : (y,q) \text{ resuelve } (3.90)\text{–}(3.91) \text{ con } v \in \mathcal{A}(z) \}.$$

Podemos definir entonces la aplicación multivaluada

$$\Lambda : z \in \overline{B}(0;1) \subset Z \mapsto \Lambda(z) \subset Z.$$

Fijado $z \in \overline{B}(0;1)$, cada $y \in \Lambda(z)$ está en $C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y satisface (3.94), así también

$$\|y\|_Z \leq C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) \left(|\xi|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + \left\| \exp\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2t}\right)\xi \right\|_{2;Q} \right). \tag{3.95}$$

Veamos que existe $\eta(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) > 0$ tal que, si $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ satisface (3.89), con $\widetilde{\mathcal{M}}$ dada por (3.92), entonces podemos aplicar a Λ el Teorema de Kakutani del punto fijo.

Primero, fijado $z \in \overline{B}(0;1) \subset Z$, es fácil comprobar que $\Lambda(z)$ es un subconjunto convexo cerrado y no vacío de Z (de nuevo, usamos aquí el carácter lineal de los sistemas (3.90) y (3.91)). Por la estimación (3.94), $\Lambda(z)$ es un conjunto acotado de $C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$, espacio que se inyecta de manera compacta en Z, luego cada $\Lambda(z)$ es un compacto de Z. Más aún, existe un compacto fijo $K \subset Z$ tal que $\Lambda(z) \subset K$ para cualquier $z \in \overline{B}(0;1)$.

En segundo lugar, razonando como en la demostración del Teorema 3.8, se prueba sin dificultad que la aplicación multivaluada Λ es hemicontinua superiormente, es decir, para cada $\mu \in Z'$, la función

$$z \in \overline{B}(0;1) \subset Z \mapsto \sup_{y\in\Lambda(z)} \langle \mu, y\rangle \in \mathbb{R}$$

es semicontinua superiormente. Para los detalles, véase [12].

Sea ahora $\eta = \eta(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) > 0$ tal que $\eta \leq C_2(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f)^{-1}$. Entonces, dado un término fuente $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando (3.89), con $\widetilde{\mathcal{M}}$ dada por (3.92), inferimos de (3.95) que cualquier $y \in \Lambda\left(\overline{B}(0;1)\right)$ verifica $\|y\|_Z \leq 1$, es decir, Λ envía el convexo cerrado no vacío $\overline{B}(0;1)$ en sí mismo.

Podemos entonces aplicar el Teorema de Kakutani del punto fijo y concluir que existe $\overline{y} \in Z$ tal que $\overline{y} \in \Lambda(\overline{y})$. En consecuencia, existe un control $v \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ que resuelve el problema de controlabilidad nula no lineal (3.71)–(3.73) (para $y_0 = 0$). Más aún, recordando (3.93) y (3.89), podemos estimar

$$|v|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} \leq \widetilde{C}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f)\eta. \tag{3.96}$$

ETAPA 2.- EXISTENCIA DE UN CONTROL QUE INSENSIBILIZA EL FUNCIONAL Φ.

Veamos que existe $\eta(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) > 0$ tal que, para cualquier $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando (3.89), $\widetilde{\mathcal{M}}$ como antes, el control v de la etapa anterior puede elegirse de modo que, para τ suficientemente pequeño, la existencia de una solución de (3.12) (con $y_0 = 0$) en $C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ esté garantizada. Con ello concluirá la prueba del teorema, puesto que, en virtud de la Proposición 3.14, un control v tal insensibiliza el funcional Φ dado por (3.2) en el sentido de la Definición 3.2.

Usamos el siguiente resultado, el cual puede probarse mediante linealización y un argumento adecuado de punto fijo:

Lema 3.19 *Supongamos que $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$ para algún $\beta \in (0,1)$. Sean $F \in C^2(\mathbb{R})$ y $f \in C^3(\mathbb{R})$ dadas. Entonces, existe $\delta > 0$ (dependiendo de Ω, T, F y f) con la siguiente propiedad: para cualquier $h \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ y $u_0 \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ verificando*

$$|h - F(0)|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + |f(0)| + |u_0|_{2+\beta;\overline{\Omega}} \leq \delta$$

y la condición de compatibilidad

$$\partial_n u_0 + f(u_0) = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{3.97}$$

el sistema no lineal

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + F(u) = h \ \text{ en } Q, \\ \partial_n u + f(u) = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

admite una única solución $u \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$.

Consideremos el espacio $\hat{X} = C^{2+\beta}(\overline{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)$, con $\beta \in (0,1)$ como en el enunciado. Sea $\delta > 0$ proporcionada por el lema precedente y sea $\widetilde{\mathcal{M}}(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f)$ dada por (3.92). Recordando (3.96), podemos elegir $\eta = \eta(\Omega,\omega,\mathcal{O},T,F,f) > 0$ suficientemente pequeño de modo que, para cualesquiera $\xi \in C^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$ verificando (3.89), $\hat{y}_0 \in \hat{X}$ con $\|\hat{y}_0\|_{\hat{X}} = 1$ y $\tau \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, se tiene

$$|\xi + v\mathbf{1}_\omega|_{\beta,\frac{\beta}{2};\overline{Q}} + |\tau\hat{y}_0|_{2+\beta;\overline{\Omega}} \le \delta.$$

Puesto que el dato inicial $\tau\hat{y}_0$ satisface (3.97) (por la elección de $\hat{X}$), inferimos del Lema 3.19 que el sistema (3.12) posee una solución $y(\cdot,\cdot;\tau,v) \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$, con lo que termina la prueba del Teorema 3.18. $\square$

3.6. Comentarios adicionales y algunos resultados que quedan pendientes

Sobre la construcción de controles regulares para algunos problemas de controlabilidad nula parabólicos

1. La técnica de construcción de controles regulares (a partir de controles en $L^2(Q)$) introducida en [9] y desarrollada en el presente capítulo (véase también [10]) puede aplicarse al estudio de la controlabilidad nula de la ecuación semilineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y,\nabla y) = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.98}$$

con f de clase C^1 con determinado crecimiento superlineal en el infinito. De hecho, pueden obtenerse controles en $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, con $\alpha \in (0,1)$, para datos suficientemente regulares. Describamos someramente la estrategia en el caso lineal. Consideramos el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B\cdot\nabla y + ay = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.99}$$

$$y(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega,$$

donde $y^0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$ y $B \in L^\infty(Q)^N$. Pongamos $q = y - \eta(t)Y$, donde $\eta \in C^\infty([0,T])$ satisface

$$0 \le \eta \le 1 \ \text{ en } [0,T], \quad \eta \equiv 1 \ \text{ en } [0,T/3] \quad \text{y} \quad \eta \equiv 0 \text{ en } [2T/3,T], \tag{3.100}$$

e Y resuelve (3.99) con $v \equiv 0$. Con este cambio de variables, el anterior problema es equivalente al nuevo problema de controlabilidad nula:

$$\begin{cases} \partial_t q - \Delta q + B \cdot \nabla q + aq = -\eta'(t)Y + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \\ q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{3.101}$$

Supongamos que existe un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ que resuelve el problema (3.101), con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$ (aquí, $B_0 \subset\subset \omega$ es un subconjunto abierto no vacío de Ω) y sea $\hat{q}$ el estado asociado a dicho control $\hat{v}$. Entonces,

$$q = (1 - \theta(x))\hat{q}$$

junto a

$$v = \theta(x)\eta'(t)Y + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q} - (B \cdot \nabla\theta)\hat{q},$$

donde $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$ verifica $\theta \equiv 1$ en B_0, resuelven el problema de controlabilidad nula (3.101). Siguiendo la Sección 3.3 de esta Memoria, se puede probar que $v \in L^\infty(Q)$ y satisface la estimación

$$\|v\|_\infty \le C(T, \Omega, \omega, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)\|\hat{v}\|_{2;Q},$$

y se puede obtener la dependencia explícita de la constante C con respecto a $\|a\|_\infty$ y $\|B\|_\infty$. Además, si $B \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, para cierto $\alpha \in (0,1)$, se prueba que el control v también está en $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$ y la norma $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ de v se acota en función de $\|\hat{v}\|_{2;Q}$ de manera similar a la estimación previa para $\|v\|_\infty$.

2. Esta estrategia de construcción de controles regulares ha sido utilizada en [16] para probar un resultado local de controlabilidad nula para la ecuación clásica del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier. La prueba del resultado combina un argumento de punto fijo con el estudio de la controlabilidad nula de problemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_n y + ay = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y^0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.102}$$

donde $a, \partial_t a \in L^\infty(\Sigma)$ e $y^0 \in L^2(\Omega)$ (al menos) y $\omega \subset \Omega$ es nuevamente el abierto de control. La idea en el caso lineal es la siguiente. Pongamos $w = y - \eta(t)q$, donde $\eta \in C^\infty([0,T])$ es una función verificando (3.100) y q resuelve (3.102) con $v \equiv 0$. En una primera etapa, los autores encuentran un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ que se anula fuera de $\overline{B}_0 \times [0,T]$ ($B_0 \subset \omega$ es un abierto no vacío), satisface

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \leq C(\Omega, \omega, T, \|a\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t a\|_{\infty;\Sigma})\|y^0\|_{2;\Omega}$$

y resuelve el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = -\eta'(t)q + v\mathbf{1}_\omega \;\text{ en } Q, \\ \partial_n w + aw = 0 \;\text{ sobre } \Sigma, \quad w(x,0) = 0 \;\text{ en } \Omega, \\ w(x,T) = 0 \;\text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Ello equivale a probar que tal control $\hat{v}$ da la controlabilidad nula de (3.102). La herramienta esencial en esta etapa es una desigualdad de observabilidad para las soluciones del problema adjunto de (3.102) la cual se deduce de la desigualdad de Carleman para estas mismas soluciones que recordamos en el Lema 1.3 de la presente Memoria. Usando la estrategia introducida en [9], en [16] se prueba la controlabilidad nula del sistema (3.102) con controles $v \in C^\infty(\overline{Q})$ que, además, verifican

$$\|v\|_{C^l(\overline{Q})} \leq C(\Omega, \omega, T, l, \|a\|_{\infty;\Sigma}, \|\partial_t a\|_{\infty;\Sigma})\|y^0\|_{2;\Omega},$$

para cualquier entero $l \geq 0$. Un argumento adecuado de punto fijo permite a los autores probar un resultado local de controlabilidad nula con controles Hölderianos para la ecuación clásica del calor con condiciones de contorno de la forma $\partial_n y + f(y) = 0$ cuando f es de clase C^3 y se anula en 0 e y^0 es suficientemente regular (y pequeño).

3. Esta técnica permite además obtener un control $v \in L^r(Q)$, $r \in [2,\infty)$, que resuelve el problema lineal de controlabilidad nula (3.20)–(3.22) (bajo la hipótesis adicional $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$, γ dado por (3.17)), sin necesidad de utilizar la desigualdad de Carleman (1.9) establecida en el Teorema 1.4. En efecto, dado un abierto regular no vacío $B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$, del Lema 1.2 deducimos la existencia de dos constantes positivas C y $\overline{\sigma}$ (dependiendo sólo de Ω y B_0) tales que la solución (φ, ψ) del correspondiente sistema adjunto asociada a cualquier $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$

satisface

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha}t(T-t)\left(|\partial_t\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2\right)+\frac{1}{s}\iint_Q e^{-2s\alpha}t(T-t)\left(|\partial_t\psi|^2+|\Delta\psi|^2\right)\\
&\qquad+s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2+s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2\\
&\qquad+s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2+s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\\
&\qquad\qquad\le Cs^3\iint_{B_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}\left(|\varphi|^2+|\psi|^2\right),
\end{aligned}$$

para cualquier $s \ge \overline{s} = \overline{\sigma}(\Omega, B_0)\left(T+T^2\left(1+\|a\|_\infty^{2/3}+\|c\|_\infty^{2/3}\right)\right)$. Esta desigualdad de Carleman permite obtener controles $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in L^2(Q)$ (de hecho, razonando como en [24], se obtienen controles en $L^\infty(Q)$), que resuelven el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t\hat{y}-\Delta\hat{y}+a\hat{y}=\xi+\hat{v}_1\mathbf{1}_{B_0} \ \text{ en } Q,\\ \hat{y}=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \hat{y}(x,0)=0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t\hat{q}-\Delta\hat{q}+c\hat{q}=\hat{y}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}+\hat{v}_2\mathbf{1}_{B_0} \ \text{ en } Q,\\ \hat{q}=0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \hat{q}(x,T)=0,\ \hat{q}(x,0)=0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Considerando ahora una función $\theta \in \mathcal{D}(B)$ (B es un nuevo abierto regular tal que $B_0 \subset\subset B \subset \omega\cap\mathcal{O}$) verificando $\theta \equiv 1$ en un entorno de B_0, al igual que en la Sección 3.3 se prueba que, si $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por (3.17) ($r \in [2,\infty)$), entonces las funciones $y=(1-\theta)\,\hat{y}+2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q}+(\Delta\theta)\hat{q}$ y $q=(1-\theta)\,\hat{q}$ resuelven el problema de controlabilidad nula (3.20)–(3.22) con término de control $v \in L^r(Q)$ dado por $v=-\theta\xi+2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{y}+(\Delta\theta)\hat{y}+(\partial_t-\Delta+a)\left[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{q}+(\Delta\theta)\hat{q}\right]$, como habíamos indicado.

4. En la actualidad, esta estrategia está siendo utilizada por M. González-Burgos y L. de Teresa (cf. [28]) para estudiar la controlabilidad exacta a cero de una ecuación del calor superlineal de la forma (3.98) en dominios no acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ (uniforme) de clase C^2 cuando la región donde no se ejerce control, $\Omega\setminus\overline{\omega}$, es acotada. En concreto, si suponemos que

$$f(s,p)=G(s,p)\cdot p+g(s,p)s, \quad \forall (s,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

los autores demuestran la controlabilidad exacta a cero del problema considerado, bajo las hipótesis

$$\lim_{|(s,p)|\to\infty}\frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{|(s,p)|\to\infty}\frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)}=0.$$

El resultado es similar al obtenido en [17] para dominios acotados. Para $\Omega \setminus \overline{\omega}$ acotado y f globalmente Lipschitziana, el resultado fue demostrado en [14].

Algunos problemas abiertos y problemas pendientes

1. A la vista de los resultados conocidos de controlabilidad nula para una ecuación del calor semilineal con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas (véase el Teorema 1.2 de [24]), resulta natural proponerse extender el Teorema 3.8 del presente capítulo a no linealidades f con crecimiento de orden

$$|f(s)| \sim |s| \log^{\alpha}(1+|s|) \quad \text{cuando } |s| \to \infty, \quad \text{con } 1 \leq \alpha < 3/2.$$

   Nótese que, en este caso, en ausencia de control, hay explosión bajo condiciones de signo adecuadas. En [24], la idea de los autores consiste en controlar el sistema a cero en un tiempo pequeño para impedir que la solución explote y, al ser el control el único término del segundo miembro de la ecuación, tomar $v \equiv 0$ durante el resto del intervalo temporal. Obsérvese que este argumento no se puede aplicar cuando en el segundo miembro de la ecuación (3.6) hay un término fuente ξ. Esta estrategia también falla en nuestro problema puesto que, en los problemas de insensibilización, tanto la condición inicial como la final están fijas y, además, hay un término fuente, ξ, en la ecuación. Por tanto, el problema sigue abierto para tales no linealidades.

2. En el capítulo anterior se probó un resultado de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación semilineal del calor con término no lineal $f(y, \nabla y)$, siendo $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ una función de clase C^1 globalmente Lipschitziana (ver el Teorema 2.2). Sería interesante generalizar este resultado a funciones f con crecimiento superlineal en el infinito. Para ello, deberían construirse controles en $L^r(Q)$, con $r > N+2$, para el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = \xi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.103}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (Dq) + cq = y\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \ \text{ en } Q, \\ q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad q(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.104}$$

$$q(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega,$$

   donde $a, c \in L^\infty(Q)$ y $B, D \in L^\infty(Q)^N$. Desafortunadamente, la técnica de construcción de controles regulares introducida en esta Memoria no puede aplicarse en este caso debido a la falta de regularidad introducida por el término $-\nabla \cdot (Dq)$. Siendo más precisos, supongamos que ya hemos obtenido un control $\hat{v}$ en $L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0,T]$, que nos da la controlabilidad nula del sistema (3.103)–(3.104) ($B_0 \subset \omega \cap \mathcal{O}$ es un abierto no vacío). Partiendo de $\hat{v}$ y de la correspondiente solución $(\hat{y}, \hat{q})$ de (3.103)–(3.104), la expresión de un nuevo control obtenido mediante esta estrategia sería:

$$\begin{aligned} v &= -\theta\xi + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y} + (\Delta\theta)\hat{y} - \nabla\theta \cdot (B\hat{y}) \\ &+ (\partial_t - \Delta + B \cdot \nabla + a)\left[2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{q} + (\Delta\theta)\hat{q} + \nabla\theta \cdot (D\hat{q})\right]. \end{aligned}$$

Aquí, $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$ verifica $\theta \equiv 1$ en B_0. Observemos que, si $D \in L^\infty(Q)^N$, algunos términos de esta expresión no son suficientemente regulares para que el estado y esté en un espacio adecuado para aplicar un argumento adecuado de punto fijo. Así, este problema también permanece abierto para tales no linealidades.

3. Como ya hemos puesto de manifiesto, quedan pendientes un resultado de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con término no lineal de la forma $f(y, \nabla y)$ y condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, para ambas no linealidades con crecimiento sublineal en el infinito y un resultado global de existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal con término no lineal $f(y)$ y condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier, para no linealidades con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Estos resultados quedarán recogidos en el trabajo en elaboración [30].

4. Sería asimismo interesante extender, entre otros, el resultado de insensibilización establecido en el Teorema 3.8 de la presente Memoria al caso de dominios no acotados. Pensamos que, si se supone que la región $\Omega \setminus \overline{\omega \cap \mathcal{O}}$ es acotada, este problema podrá ser abordado adaptando la técnica desarrollada en este capítulo a la presente situación y ello será objeto de nuestro estudio en un futuro inmediato.

Capítulo 4

Nuevos resultados de controlabilidad para algunos sistemas parabólicos acoplados no lineales con un único control

En este último capítulo de la Memoria presentamos nuevos resultados de controlabilidad para algunos sistemas parabólicos acoplados no lineales considerados en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 1$ arbitrario, cuando ejercemos un único control distribuido que actúa sobre un abierto arbitrariamente pequeño $\omega \subset \Omega$.

Nos centraremos principalmente en analizar las propiedades de controlabilidad de un sistema acoplado de dos EDPs parabólicas no lineales conocido como *sistema de campo de fases*. En concreto, el modelo que estudiamos es una generalización del modelo de campo de fases de Caginalp en su formulación de entalpía (cf. [15]). Las no linealidades consideradas son de la forma $f(u, \nabla u)$, en la ecuación de la entalpía u, y de la forma $h(\phi)$, en la ecuación del parámetro de fase ϕ. Demostraremos un resultado de controlabilidad exacta a cero para el modelo considerado cuando las no linealidades presentan determinado crecimiento superlineal en el infinito. La prueba de este resultado utiliza la desigualdad global de Carleman establecida en el Teorema 1.7 de esta Memoria y la técnica de construcción de controles regulares desarrollada en el capítulo anterior. Mostraremos asimismo sendos resultados de controlabilidad exacta a trayectorias y controlabilidad aproximada para el modelo. Los resultados de controlabilidad que presentamos generalizan, en particular, los obtenidos en [6] y [2]. Comentar finalmente que estas propiedades de controlabilidad pueden extenderse a otros sistemas no lineales acoplados más generales.

4.1. Un modelo de campo de fases para una frontera libre. Objetivos

Los modelos de campo de fases proporcionan una descripción matemática para problemas de frontera libre asociados a una amplia clase de procesos físicos que transcurren con una transición de fases, entre los que se incluyen los *procesos de solidificación* y *fusión*. El modelo que consideramos en esta Memoria es una generalización del modelo de campo de fases de Caginalp en su formulación de entalpía (ver [15]). Estamos interesados en analizar las propiedades de controlabilidad para dicho modelo cuando controlamos solamente a través de la ecuación de la entalpía.

Una breve descripción física del modelo es la siguiente. Suponemos que un material que puede presentarse en dos fases diferentes, por ejemplo, sólido y líquido, ocupa una región acotada Ω del espacio $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, siendo $\partial\Omega$ de clase C^2. Como viene siendo habitual, pongamos $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, con $T > 0$ un instante de tiempo arbitrario fijado. Sea $\mathcal{T}_M$ la *temperatura de fusión en el equilibrio*, la cual se supone constante. Físicamente, $\mathcal{T}_M$ es la temperatura a la cual sólido y líquido pueden coexistir separados por una interfase $\Gamma(t)$. Se define entonces la función $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x,t)$ como la temperatura en $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$. Por conveniencia, es costumbre considerar la *temperatura reducida*, θ, definida por

$$\theta(x,t) = \mathcal{T}(x,t) - \mathcal{T}_M, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T].$$

En el problema clásico de Stefan, se supone que la temperatura de la interfase entre sólido y líquido es $\mathcal{T}_M$, i.e., $\theta = 0$. Por tanto, se define la *interfase* (o *región de transición*), Γ, como

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega : \theta(x,t) = 0\}. \tag{4.1}$$

Además, si $\theta(x,t) > 0$, el punto $x \in \Omega$ está (en el instante t) en la región líquida, Ω_1, mientras que $\theta(x,t) < 0$ implica que x está (en el instante t) en la fase sólida, Ω_2.

La temperatura (reducida) $\theta(x,t)$ debe satisfacer la ecuación de difusión del calor

$$\partial_t\theta = K\Delta\theta \quad \text{ en } \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{4.2}$$

donde la constante positiva K es la *difusividad térmica*, que es la conductividad térmica dividida por la capacidad de calor por unidad de volumen (nosotros ponemos la capacidad de calor por volumen igual a la unidad) que, se supone que es la misma constante en el sólido y en el líquido. Para cualquier interfase Γ, se define la normal unitaria n (en la dirección del sólido al líquido) en cada punto de Γ, así como una velocidad local $v(x,t)$. A lo largo de la interfase Γ, el *calor latente de fusión* (por unidad de masa), l, debe estar compensado por el flujo de calor, es decir,

$$l\vec{v} \cdot n = K(\nabla\theta_S - \nabla\theta_L) \cdot n, \quad \text{para } x \in \Gamma, \tag{4.3}$$

donde $\nabla\theta_L$ es el límite del gradiente de θ en un valor $x \in \Gamma$ cuando se aproxima desde Ω_1 (líquido), mientras que $\nabla\theta_S$ es el límite desde Ω_2 (sólido). Por tanto, el segundo miembro representa el salto en la componente normal de la temperatura multiplicado por la conductividad térmica.

Para completar el planteamiento matemático del problema, deben especificarse las condiciones inicial y de contorno para θ, por ejemplo,

$$\theta = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) \text{ en } \Omega. \tag{4.4}$$

Por tanto, el problema matemático consiste en encontrar $\theta(x,t)$ en un espacio apropiado y $\Gamma(t)$ verificando (4.1)–(4.4). La interfase $\Gamma(t)$ se denomina usualmente *frontera libre*. Un método para estudiar el problema clásico de Stefan es el denominado "Método H o de la Entalpía". La idea básica consiste en introducir la función entalpía, u, definida por

$$u = \theta + \frac{l}{2}\,\phi, \qquad \text{donde } \phi = \begin{cases} 1 & \text{líquido,} \\ -1 & \text{sólido.} \end{cases}$$

Se demuestra (ver [7]) que la ecuación de la difusión del calor y la ecuación del calor latente son una formulación débil equivalente a la única ecuación

$$\partial_t\theta + \frac{l}{2}\partial_t\phi = K\Delta\theta. \tag{4.5}$$

Este problema sugiere extender la ecuación (4.5) para una función continua ϕ, llamada *función de campo de fases* (o *parámetro de fase*) y definida como una solución de la ecuación de Ginzburg–Landau:

$$\tau\partial_t\phi - \xi^2\Delta\phi + \frac{1}{2}(\phi^3 - \phi) = 2\theta, \tag{4.6}$$

donde las constantes positivas τ y ξ son escalas de tiempo y espacio, respectivamente. El valor $\phi(x,t)$ aproxima la fase (sólida o líquida) del material en $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$: en el instante t el material se considera que está en estado líquido (resp. sólido) si ϕ está próxima a $+1$ (resp. próxima a -1). Debemos especificar también las condiciones inicial y de contorno para ϕ, por ejemplo,

$$\phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \text{ en } \Omega. \tag{4.7}$$

Poniendo $u = \theta + \dfrac{l}{2}\,\phi$, donde ϕ es el parámetro de fase, el sistema (4.4)–(4.7) se transforma en el sistema parabólico no lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t u - K\Delta u = -\dfrac{Kl}{2}\Delta\phi \text{ en } Q, \\ \partial_t\phi - \dfrac{\xi^2}{\tau}\Delta\phi + \dfrac{1}{2\tau}(\phi^3 - \phi) + \dfrac{l}{\tau}\phi = \dfrac{2}{\tau}u \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) = \theta_0(x) + \dfrac{l}{2}\phi_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Existe una amplia bibliografía donde se analizan la existencia y unicidad de solución local de este modelo, así como la existencia de solución global, la regularidad y el comportamiento asintótico de las soluciones (cf. [15], [35], [36],...).

Recientemente, la controlabilidad de modelos de campo de fases ha sido asimismo objeto de estudio de varios autores. En primer lugar, en [6] se considera un sistema de campo de fases de la forma (4.4)–(4.7). Si $1 \leq N \leq 3$, el autor prueba la controlabilidad nula local del modelo mediante dos controles (un control distribuido en cada una de las EDPs del sistema) que actúan sobre el mismo abierto $\omega \subset \Omega$. Probar este resultado es, esencialmente, idéntico a demostrar la controlabilidad nula local de una sola ecuación del calor con un control distribuido. Por otro lado, en [2] los autores consideran un sistema no lineal de campo de fases de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

siendo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, (u_0, ϕ_0) dado en un espacio apropiado y $v \in L^2(Q)$ (al menos) un control por determinar que actúa sobre un subconjunto abierto no vacío $\omega \subset \Omega$ arbitrariamente pequeño. Para $1 \leq N < 6$, los autores prueban un resultado de controlabilidad exacta a trayectorias para el anterior sistema cuando h verifica $h(0) = 0$ y la hipótesis

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|h(s)|}{|s| \log^{3/2}(1 + |s|)} = 0. \tag{4.8}$$

Es natural e interesante proponerse analizar modelos de campo de fases más generales que permitan, en lo posible, revelar la complejidad del fenómeno físico. En este sentido, consideraremos en esta Memoria un modelo de campo de fases que, además de no linealidades de la forma $h(\phi)$, en la ecuación del parámetro de fase ϕ, contemple no linealidades que dependen de la entalpía u y del gradiente de ésta, en la ecuación para u. Consideraremos de este modo un sistema no lineal de campo de fases de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, el dato inicial (u_0, ϕ_0) está dado en un espacio apropiado y v es como antes. No es nuestro objetivo dar condiciones suficientes sobre v, u_0, ϕ_0 y sobre las no linealidades para tener garantizada la existencia y unicidad de solución débil del sistema anterior, sino que nos centraremos en analizar las propiedades de controlabilidad (exacta a cero, exacta a trayectorias y aproximada) de dicho sistema para no linealidades con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Siendo más precisos, supongamos que $f(s,p) = g(s,p)s + G(s,p) \cdot p$, para cualquier $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. En primer lugar, demostraremos un resultado de controlabilidad exacta a cero del modelo considerado cuando se verifican, entre otras, las hipótesis (4.8),

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|)} = 0,$$

estos dos últimos límites, uniformes en p (ver el Teorema 4.8). Seguidamente, bajo hipótesis ligeramente diferentes (sobre las no linealidades) que precisaremos más adelante, mostraremos un resultado de controlabilidad exacta a trayectorias, el Teorema 4.9, el cual generaliza los obtenidos en [6] y [2]. Como consecuencia, obtendremos un resultado de controlabilidad aproximada para el sistema (4.9) (ver el Teorema 4.10).

El Teorema 4.8 y los resultados principales de [6] y [2] se prueban, como es habitual, mediante linealización y argumentos adecuados de punto fijo. La presencia de no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito hace nuevamente necesaria la construcción, en el caso lineal, de “buenos” controles (y estimar la norma de dichos controles) que permitan obtener un punto fijo en espacios apropiados. La diferencia esencial entre nuestra aportación y la de los mencionados trabajos reside, de hecho, en las distintas técnicas empleadas para construir tales controles. En [2], por ejemplo, introduciendo un funcional adecuado con pesos apropiados, los autores prueban una desigualdad de observabilidad “refinada” la cual permite construir un control $v \in L^{q_N}(Q)$ que da la controlabilidad exacta a trayectorias del sistema lineal, con $q_N \in (2,\infty)$ si $N = 1,2$ y $N/2+1 < q_N \leq 2(N+2)/(N-2)$ si $3 \leq N < 6$. En la presente Memoria construimos buenos controles adaptando la técnica desarrollada en el capítulo precedente. Es importante resaltar que el modo en que procedemos aquí permite que los resultados que presentamos sean válidos para dimensiones $N \geq 1$ arbitrarias.

4.2. Un modelo lineal de campo de fases

El objetivo principal de esta sección es analizar la controlabilidad exacta a cero del sistema lineal de campo de fases

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + B \cdot \nabla u + au = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \;\; \text{en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + c\phi = u \;\; \text{en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \;\; \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(Q)$ (al menos) y $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío arbitrariamente pequeño. Como veremos, se requerirá una hipótesis adicional de regularidad sobre el potencial c.

4.2.1. Existencia y unicidad de solución. Regularidad

Comenzamos con un resultado de existencia de solución, unicidad y dependencia continua para un sistema lineal de campo de fases de la forma

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u} - \Delta \widetilde{u} + B \cdot \nabla \widetilde{u} + a \widetilde{u} = -\Delta \widetilde{\phi} + F_1 \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \widetilde{\phi} - \Delta \widetilde{\phi} + D \cdot \nabla \widetilde{\phi} + c \widetilde{\phi} = \widetilde{u} + F_2 \ \text{ en } Q, \\ \widetilde{u} = 0, \quad \widetilde{\phi} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \widetilde{u}(x,0) = u_0(x), \quad \widetilde{\phi}(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $F_1, F_2 \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$, al menos. Se tiene:

Proposición 4.1 *a) Supongamos que $F_1, F_2 \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe una única solución débil $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi})$ de (4.10) verificando*

$$\widetilde{u}, \widetilde{\phi} \in W(0,T) = \left\{ u : u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \right\},$$

$$\begin{gathered} \|\widetilde{u}\|_{W(0,T)} + \|\widetilde{\phi}\|_{W(0,T)} \\ \le \exp(CH_1) \left(\|F_1\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|F_2\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega} \right), \end{gathered}$$

donde $C = C(\Omega) > 0$ y $H_1 = H_1(a, c, B, D) > 0$ viene dada por

$$H_1 = 1 + T \left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2 \right)$$

(aquí, $\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{L^2(H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))}$, $\ u \in W(0,T)$).

b) Si ahora $F_1, F_2 \in L^2(Q)$ y $u_0, \phi_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces la solución débil $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi})$ de (4.10) satisface $\widetilde{u}, \widetilde{\phi} \in Y = \{u : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(Q)\}$ y, para una nueva constante positiva $C = C(\Omega)$, se tiene

$$\begin{gathered} \|\widetilde{u}\|_Y + \|\widetilde{\phi}\|_Y \\ \le \exp(CH_1) \left(1 + \|a\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2\right) \left(\|F_1\|_{2;Q} + \|F_2\|_{2;Q} + \|\nabla u_0\|_{2;\Omega} + \|\nabla \phi_0\|_{2;\Omega} \right), \end{gathered} \tag{4.11}$$

con $H_1 > 0$ como antes (aquí, $\|u\|_Y = \|u\|_{L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{2;Q}$, $u \in Y$). □

La prueba de este resultado utiliza el Método de Galerkin y las estimaciones de energía de las correspondientes soluciones aproximadas y, al ser una demostración estándar, la omitiremos.

Recordemos que, para $r \in [1,\infty)$ y $\delta \in [0,T)$ arbitrarios y cualquier abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$, habíamos definido

$$X^r(\delta,T;\mathcal{V}) = \left\{ u : u \in L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V})),\ \partial_t u \in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V})) \right\},$$

que es un espacio de Banach con su norma natural

$$\|u\|_{X^r(\delta,T;\mathcal{V})} = \|u\|_{L^r(\delta,T;W^{2,r}(\mathcal{V}))} + \|\partial_t u\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}.$$

También habíamos denotado $X^r = \{u : u \in L^r(0,T;W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)),\ \partial_t u \in L^r(Q)\}$ y la norma en él, por $\|\cdot\|_{X^r}$. A lo largo de todo el capítulo, como ha venido siendo la norma en toda la Memoria, C designará una constante genérica positiva que depende solamente de los datos geométricos (Ω, ω y/u otros abiertos que consideraremos) y, eventualmente, de N y/o r, pero independiente de T y cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente.

Se tiene el siguiente resultado de regularidad para las soluciones de (4.10):

Proposición 4.2 *Supongamos que $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $F_1, F_2 \in L^r(Q)$ y $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/r,r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $r \in (2,\infty)$ arbitrario. Entonces, la solución débil $(\widetilde{u},\widetilde{\phi})$ de (4.10) está en $X^r \times X^r$ y existen constantes positivas $C = C(\Omega,N,r)$ y $\widetilde{\mathcal{K}} = \widetilde{\mathcal{K}}(N)$ tales que*

$$\|\widetilde{u}\|_{X^r} + \|\widetilde{\phi}\|_{X^r} \le \exp(CH_1) H_2^{\widetilde{\mathcal{K}}} \left(\|F_1\|_{r;Q} + \|F_2\|_{r;Q} + \|u_0\|_{2-2/r,r;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/r,r;\Omega} \right),$$

con $H_1 = H_1(T,a,c,B,D) > 0$ como en la Proposición 4.1 y $H_2 = H_2(a,c,B,D) > 0$ dada por

$$H_2 = 1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty + \|D\|_\infty.$$

Esquema de la demostración: La prueba de este resultado utiliza un argumento de tipo "bootstrap" análogo al realizado para demostrar la Proposición 3.1 del capítulo anterior. Por ello, daremos solamente un esquema de la demostración. La diferencia esencial con aquella demostración reside en que el resultado básico que utilizamos aquí es el Teorema 2.3 de [27] (en lugar del Teorema 2.1 del mismo trabajo).

Supondremos que $N > 2$, siendo la demostración más directa cuando $N = 1$ ó 2. Por simplicidad, la dependencia de la constante genérica C con respecto a los argumentos N y/ó r no se explicitará.

$\diamond$ En primer lugar, la solución débil $(\widetilde{u},\widetilde{\phi})$ de (4.10) está en $Y \times Y$ (donde Y es el espacio introducido en el resultado anterior) y satisface la estimación (4.11). Ahora bien, $\widetilde{\phi}$ resuelve el problema

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\phi} - \Delta \widetilde{\phi} = G_2 \ \text{ en } Q, \\ \widetilde{\phi} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad \widetilde{\phi}(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con $G_2 = -c\widetilde{\phi} - D \cdot \nabla\widetilde{\phi} + \widetilde{u} + F_2$. Razonamos como en la demostración de la Proposición 3.1 de la Memoria. Por las inyecciones usuales de Sobolev, tenemos que

$$D \cdot \nabla\widetilde{\phi} \in L^2(0,T;L^{2^\star}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad \frac{1}{2^\star} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \text{ (recuérdese que } N > 2),$$

de donde

$$G_2 \in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega)), \quad p_0 = \min\left\{r, \frac{2Nr}{Nr-4}\right\},$$

$$\|G_2\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \le C\left(1 + \|c\|_\infty + \|D\|_\infty\right)\left(\|\widetilde{u}\|_Y + \|\widetilde{\phi}\|_Y + \|F_2\|_{r;Q}\right), \tag{4.12}$$

usando desigualdades clásicas de interpolación. Entonces, en virtud del Teorema 2.3 de [27], deducimos

$$\widetilde{\phi} \in L^r(0,T;W^{2,p_0}(\Omega)), \quad \partial_t\widetilde{\phi} \in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega)),$$

$$\|\widetilde{\phi}\|_{L^r(W^{2,p_0}(\Omega))} + \|\partial_t\widetilde{\phi}\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \le C\left(\|G_2\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} + \|\phi_0\|_{2-2/r,r;\Omega}\right),$$

donde C es una constante positiva independiente de T. Combinando esta estimación con (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\phi}\|_{L^r(W^{2,p_0}(\Omega))} + \|\partial_t\widetilde{\phi}\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \\ &\le C\left(1 + \|c\|_\infty + \|D\|_\infty\right)\left(\|\widetilde{u}\|_Y + \|\widetilde{\phi}\|_Y + \|F_2\|_{r;Q} + \|\phi_0\|_{2-2/r,r;\Omega}\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\diamond$ Por otro lado, $\widetilde{u}$ resuelve

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{u} - \Delta\widetilde{u} = G_1 \text{ en } Q, \\ \widetilde{u} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad \widetilde{u}(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

con segundo miembro $G_1 = -a\widetilde{u} - B \cdot \nabla\widetilde{u} - \Delta\widetilde{\phi} + F_1$. Razonando como antes y usando (4.13), se tiene que $G_1 \in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega))$ y

$$\|G_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \le CH_2\left(\|\widetilde{u}\|_Y + \|\widetilde{\phi}\|_Y + \|F_1\|_{r;Q} + \|F_2\|_{r;Q} + \|\phi_0\|_{2-2/r,r;\Omega}\right),$$

con $H_2 = 1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty + \|D\|_\infty$. Aplicamos ahora a $\widetilde{u}$ el Teorema 2.3 de Giga y Sohr (cf. [27]) usado anteriormente. Obtenemos

$$\widetilde{u} \in L^r(0,T;W^{2,p_0}(\Omega)), \quad \partial_t\widetilde{u} \in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega)),$$

$$\|\widetilde{u}\|_{L^r(W^{2,p_0}(\Omega))} + \|\partial_t\widetilde{u}\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \le C\left(\|G_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} + \|u_0\|_{2-2/r,r;\Omega}\right),$$

para una nueva constante positiva C independiente de T, de donde

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{u}\|_{L^r(W^{2,p_0}(\Omega))} + \|\partial_t\widetilde{u}\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))} \\ &\le CH_2\left(\|\widetilde{u}\|_Y + \|\widetilde{\phi}\|_Y + \|F_1\|_{r;Q} + \|F_2\|_{r;Q} + \|u_0\|_{2-2/r,r;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/r,r;\Omega}\right), \end{aligned}$$

usando la estimación de $\|G_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))}$ obtenida anteriormente.

$\diamond$ Como ya hemos comentado, se aplica a continuación un procedimiento de tipo "bootstrap" (análogo al realizado en la demostración de la Proposición 3.1) y, en un número finito de pasos, se obtiene el resultado. $\square$

4.2.2. Controlabilidad exacta a cero

Pasamos seguidamente a abordar el principal objetivo de esta sección, el estudio del problema lineal de controlabilidad nula

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \Delta u + B \cdot \nabla u + au = -\Delta \phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\
\partial_t \phi - \Delta \phi + D \cdot \nabla \phi + c\phi = u \ \text{ en } Q, \\
u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega,
\end{cases}
\tag{4.14}
$$

$$
u(x,T) = 0, \quad \phi(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{4.15}
$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$, $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$ (al menos) y $\omega \subset \Omega$ un abierto (el abierto de control) no vacío arbitrariamente pequeño.

Consideramos un abierto arbitrario no vacío $\mathcal{B}_0$ contenido en ω. En primer lugar, probaremos una desigualdad de observabilidad adecuada para las soluciones del sistema adjunto de (4.14) (véase el Teorema 4.3), gracias a la cual obtendremos un control $\hat{v}$ en $L^2(Q)$, con soporte contenido en $\overline{\mathcal{B}}_0 \times [0,T]$, que resolverá el anterior problema de controlabilidad nula. En una segunda etapa, adaptando a la presente situación la técnica de construcción de controles regulares desarrollada en el capítulo anterior, obtendremos un control v en $L^r(Q)$ (con soporte ligeramente más grande) junto con la estimación de la norma $L^r(Q)$ de v. Para poder llevar a cabo la construcción de dicho control regular, pediremos que $D \equiv 0$ y una hipótesis adicional sobre el potencial c, que explicitaremos en su momento.

I. La desigualdad de observabilidad

Dedicamos este apartado a probar la desigualdad de observabilidad que nos permitirá obtener controles en $L^2(Q)$ (y estimar su norma en este espacio) que resuelvan el problema de controlabilidad nula planteado. Consideramos el siguiente sistema lineal acoplado (adjunto del sistema (4.14)):

$$
\begin{cases}
-\partial_t \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot (D\varphi) + c\varphi = -\Delta \psi \ \text{ en } Q, \\
-\partial_t \psi - \Delta \psi - \nabla \cdot (B\psi) + a\psi = \varphi \ \text{ en } Q, \\
\varphi = 0, \quad \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\
\varphi(x,T) = \varphi^0(x), \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega,
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

con $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$. Por las correspondientes desigualdades de energía y el método de Galerkin, este sistema admite una única solución (φ, ψ), con la siguiente regularidad:

$$
\varphi, \psi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t \varphi, \partial_t \psi \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).
$$

Sea $\mathcal{B}_0 \subset \omega$ el abierto considerado anteriormente. Se tiene:

Teorema 4.3 *Existen dos constantes positivas* $C = C(\Omega, \mathcal{B}_0)$ *y* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T, a, c, B, D)$ *tales que, para cualesquiera* $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, *la correspondiente solución* (φ, ψ) *de* (4.16) *satisface*

$$\|\varphi(0)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(0)\|_{2;\Omega}^2 \leq \exp(C\mathcal{H}) \iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} |\psi|^2 \, dx \, dt. \tag{4.17}$$

Más precisamente, $\mathcal{H}$ *viene dada por*

$$\mathcal{H} = M'' + \frac{1}{T} + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2\right),$$

con $M'' > 0$ *como en el Teorema 1.7, i.e.:*

$$M'' = 1 + \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|B+D\|_\infty + \|B\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty + \|D\|_\infty^2.$$

Demostración: Sean α_0 y α las funciones asociadas a $\mathcal{B}_0$ proporcionadas por el Teorema 1.7 y tomemos $s \geq \overline{s}$ arbitrario, con $\overline{s}$ como en el mencionado teorema. El resultado se obtiene combinando la correspondiente estimación de energía para las soluciones de (4.16) con la estimación

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 + s\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-4}(T-t)^{-4}|\psi|^2 \\ &\qquad \leq Cs^4 \iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

que se deduce inmediatamente de la desigualdad de Carleman (1.38).

1. Para t c.p.d. en $(0,T)$, multiplicamos la EDP que satisface φ por $\varphi(t)$ y la EDP que satisface ψ por $\psi(t)$ e integramos en Ω, obteniendo

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}\left[\|\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(t)\|_{2;\Omega}^2\right] + \frac{1}{2}\|\nabla\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\psi(t)\|_{2;\Omega}^2 \\ &\leq \left(1 + 2\|c\|_\infty + 2\|D\|_\infty^2\right)\|\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \left(1 + 2\|a\|_\infty + 2\|B\|_\infty^2\right)\|\psi(t)\|_{2;\Omega}^2. \end{aligned}$$

En particular,

$$-\frac{d}{dt}\left[\|\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(t)\|_{2;\Omega}^2\right] \leq H_*\left(\|\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(t)\|_{2;\Omega}^2\right), \quad t \text{ c.p.d. en } (0,T),$$

con $H_* = H_*(a, c, B, D) > 0$ dada por

$$H_* = 1 + 2\left(\|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty^2\right).$$

De aquí, deducimos fácilmente que

$$\|\varphi(0)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(0)\|_{2;\Omega}^2 \leq \exp\left(H_* T\right)\left(\|\varphi(t)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(t)\|_{2;\Omega}^2\right), \quad t \in (0,T),$$

de donde, sin más que integrar respecto de t en $(T/2, 3T/4)$, se sigue inmediatamente la estimación

$$\|\varphi(0)\|^2_{2;\Omega} + \|\psi(0)\|^2_{2;\Omega} \leq \frac{4}{T} \exp\left(H_* T\right) \iint_{\Omega\times(T/2,3T/4)} \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right), \tag{4.19}$$

para cualesquiera $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$, donde (φ, ψ) resuelve (4.16).

2. Para concluir la demostración, estimaremos el segundo miembro de (4.19) en función de $\displaystyle\iint_{\mathcal{B}_0\times(0,T)} |\psi|^2$. Por un lado, debido a que $s \geq CT^2$, tenemos

$$st^{-4}(T-t)^{-4} \geq Ct^{-3}(T-t)^{-3}, \quad \forall t \in (0,T).$$

Sin más que observar que

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq 2^6 T^{-6} \exp\left(-2^5 M_0 s/(3T^2)\right), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (T/2, 3T/4),$$

con $M_0 = \max\limits_{\overline{\Omega}} \alpha_0$, deducimos

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times(T/2,3T/4)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 + s \iint_{\Omega\times(T/2,3T/4)} e^{-2s\alpha}t^{-4}(T-t)^{-4}|\psi|^2 \\ \geq CT^{-6}\exp\left(-\frac{Cs}{T^2}\right) \iint_{\Omega\times(T/2,3T/4)} \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right).\end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta (4.18) y el Lema 2.5 de la Memoria (ver p. 52) aplicado a α_0 y α, deducimos

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times(T/2,3T/4)} \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2\right) &\leq CT^6 \exp\left(\frac{Cs}{T^2}\right) s^4 \iint_{\mathcal{B}_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-7}(T-t)^{-7}|\psi|^2 \\ &\leq C\exp\left(\frac{Cs}{T^2}\right) \iint_{\mathcal{B}_0\times(0,T)} |\psi|^2,\end{aligned}$$

para cualquier $s \geq \hat{s} = \hat{\sigma}(\Omega, \mathcal{B}_0)(T + T^2 M'')$, con $M'' > 0$ como en el enunciado y $\hat{\sigma}(\Omega, \mathcal{B}_0) = \max\{\overline{\sigma}(\Omega, \mathcal{B}_0), 7/(2^3 m_0)\}$, siendo $m_0 = \min\limits_{\overline{\Omega}} \alpha_0$. Así, poniendo $s = \hat{s}$ en la estimación precedente y usando (4.19), se obtiene inmediatamente el resultado. $\square$

II. Controlabilidad exacta a cero con controles en $L^2(Q)$

Sea $\mathcal{B}_0 \subset\subset \omega$ el abierto considerado al principio de esta subsección. Como ya hemos comentado, la desigualdad de observabilidad que acabamos de probar nos va a permitir obtener controles en $L^2(Q)$ que nos dan la controlabilidad nula del sistema (4.14). Más precisamente, se tiene:

Teorema 4.4 *Dados $a, c \in L^\infty(Q)$, $B, D \in L^\infty(Q)^N$ y $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$, existe una función control $\hat{v} \in L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{\mathcal{B}}_0 \times [0, T]$, tal que la correspondiente solución $(\hat{u}, \hat{\phi})$ de (4.14) satisface $\hat{u}(x, T) = 0$, $\hat{\phi}(x, T) = 0$ en Ω. Además, $\hat{v}$ puede elegirse de modo que*

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \leq \exp\left(\frac{C}{2}\mathcal{H}\right)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \tag{4.20}$$

donde $C = C(\Omega, \omega)$ y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T, a, c, B, D)$ son las constantes positivas que proporciona el Teorema 4.3.

Demostración: Para $\varepsilon > 0$ fijado, planteamos el siguiente problema

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \text{Mín} & \left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_Q |v|^2\,dx\,dt + \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\|u_v(T)\|^2_{2;\Omega} + \|\phi_v(T)\|^2_{2;\Omega}\right)\right\} \\ \text{Sujeto a } v \in L^2(Q) & \end{cases},$$

donde (u_v, ϕ_v) denota la solución de (4.14) asociada a v, cambiando $\mathbf{1}_\omega$ por $\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}$. Este problema posee una única solución $\hat{v}_\varepsilon \in L^2(Q)$, caracterizada por

$$(\hat{v}_\varepsilon, v)_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left[(\hat{u}_\varepsilon(T), y_v(T))_{L^2(\Omega)} + (\hat{\phi}_\varepsilon(T), q_v(T))_{L^2(\Omega)}\right] = 0 \quad \forall v \in L^2(Q), \tag{4.21}$$

donde $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\phi}_\varepsilon)$ es la solución de (4.14) asociada a $\hat{v}_\varepsilon$ (reemplazando nuevamente $\mathbf{1}_\omega$ por $\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}$) e (y_v, q_v) es, para cada $v \in L^2(Q)$, la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y_v - \Delta y_v + B \cdot \nabla y_v + a y_v = -\Delta q_v + v\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0} \text{ en } Q, \\ \partial_t q_v - \Delta q_v + D \cdot \nabla q_v + c q_v = y_v \text{ en } Q, \\ y_v = 0, \quad q_v = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y_v(x, 0) = 0, \quad q_v(x, 0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Consideremos el operador lineal y continuo $A : L^2(Q) \to L^2(\Omega)^2$ definido por

$$Av = \{q_v(T), y_v(T)\} \quad \forall v \in L^2(Q).$$

Gracias a la Proposición 4.1, se tiene que $A \in \mathcal{L}(L^2(Q), L^2(\Omega)^2)$. No es difícil comprobar que el operador adjunto de A, $A^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^2, L^2(Q))$, viene dado por

$$\begin{array}{rccl} A^* : & L^2(\Omega)^2 & \longrightarrow & L^2(Q) \\ & \{\varphi^0, \psi^0\} & \longmapsto & A^*\{\varphi^0, \psi^0\} = \psi\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}, \end{array}$$

siendo (φ, ψ) la solución de (4.16) con dato inicial $(\varphi^0, \psi^0) \in L^2(\Omega)^2$. Con esta notación, (4.21) se reescribe en la forma

$$(\hat{v}_\varepsilon, v)_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{\hat{\phi}_\varepsilon(T), \hat{u}_\varepsilon(T)\right\}, Av\right)_{L^2(\Omega)^2} = 0 \quad \forall v \in L^2(Q)$$

o, equivalentemente,

$$(\hat{v}_\varepsilon, v)_{L^2(Q)} + \left(A^* \left(\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \hat{\phi}_\varepsilon(T), \frac{1}{\varepsilon} \hat{u}_\varepsilon(T) \right\} \right), v \right)_{L^2(\Omega)^2} = 0 \quad \forall v \in L^2(Q),$$

luego

$$\hat{v}_\varepsilon = A^* \left(\left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \hat{\phi}_\varepsilon(T), -\frac{1}{\varepsilon} \hat{u}_\varepsilon(T) \right\} \right).$$

Recordando ahora la definición de A^*, el control $\hat{v}_\varepsilon$ y el estado asociado $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\phi}_\varepsilon)$ vienen caracterizados por ser la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_\varepsilon - \Delta \hat{u}_\varepsilon + B \cdot \nabla \hat{u}_\varepsilon + a \hat{u}_\varepsilon = -\Delta \hat{\phi}_\varepsilon + \hat{v}_\varepsilon \mathbf{1}_{\mathcal{B}_0} \ \text{ en } Q \quad (\hat{v}_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon \mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}), \\ \partial_t \hat{\phi}_\varepsilon - \Delta \hat{\phi}_\varepsilon + D \cdot \nabla \hat{\phi}_\varepsilon + c \hat{\phi}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon \ \text{ en } Q, \\ \hat{u}_\varepsilon = 0, \quad \hat{\phi}_\varepsilon = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \hat{u}_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad \hat{\phi}_\varepsilon(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \\ -\partial_t \hat{\varphi}_\varepsilon - \Delta \hat{\varphi}_\varepsilon - \nabla \cdot (D \hat{\varphi}_\varepsilon) + c \hat{\varphi}_\varepsilon = -\Delta \hat{\psi}_\varepsilon \ \text{ en } Q, \\ -\partial_t \hat{\psi}_\varepsilon - \Delta \hat{\psi}_\varepsilon - \nabla \cdot (B \hat{\psi}_\varepsilon) + a \hat{\psi}_\varepsilon = \hat{\varphi}_\varepsilon \ \text{ en } Q, \\ \hat{\varphi}_\varepsilon = 0, \quad \hat{\psi}_\varepsilon = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \hat{\varphi}_\varepsilon(x,T) = -\dfrac{1}{\varepsilon} \hat{\phi}_\varepsilon(x,T), \quad \hat{\psi}_\varepsilon(x,T) = -\dfrac{1}{\varepsilon} \hat{u}_\varepsilon(x,T) \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora bien, es fácil comprobar que se tiene la relación

$$\int_\Omega \hat{u}_\varepsilon(T) \hat{\psi}_\varepsilon(T)\, dx + \int_\Omega \hat{\phi}_\varepsilon(T) \hat{\varphi}_\varepsilon(T)\, dx - \int_\Omega \hat{u}_\varepsilon(0) \hat{\psi}_\varepsilon(0)\, dx - \int_\Omega \hat{\phi}_\varepsilon(0) \hat{\varphi}_\varepsilon(0)\, dx$$
$$= \iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} \hat{v}_\varepsilon \hat{\psi}_\varepsilon \, dx\, dt,$$

de donde

$$\iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} |\hat{v}_\varepsilon|^2 \, dx\, dt + \frac{1}{\varepsilon} \left(\|\hat{u}_\varepsilon(T)\|_{2;\Omega}^2 + \|\hat{\phi}_\varepsilon(T)\|_{2;\Omega}^2 \right)$$
$$= -\int_\Omega \hat{\psi}_\varepsilon(0) u_0 \, dx - \int_\Omega \hat{\varphi}_\varepsilon(0) \phi_0 \, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Young y la desigualdad de observabilidad (4.17) probada anteriormente, obtenemos

$$\iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} |\hat{v}_\varepsilon|^2 \, dx\, dt + \frac{1}{\varepsilon} \left(\|\hat{u}_\varepsilon(T)\|_{2;\Omega}^2 + \|\hat{\phi}_\varepsilon(T)\|_{2;\Omega}^2 \right)$$
$$\leq \frac{1}{2} \delta^2 \left(\|\hat{\psi}_\varepsilon(0)\|_{2;\Omega}^2 + \|\hat{\varphi}_\varepsilon(0)\|_{2;\Omega}^2 \right) + \frac{1}{2\delta^2} \left(\|u_0\|_{2;\Omega}^2 + \|\phi_0\|_{2;\Omega}^2 \right)$$
$$\leq \frac{1}{2} \delta^2 \exp(C\mathcal{H}) \iint_{\mathcal{B}_0 \times (0,T)} |\hat{\psi}_\varepsilon|^2 \, dx\, dt + \frac{1}{2\delta^2} \left(\|u_0\|_{2;\Omega}^2 + \|\phi_0\|_{2;\Omega}^2 \right),$$

donde $C = C(\Omega, \omega)$ y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T, a, c, B, D)$ son las constantes positivas que proporciona el Teorema 4.3. Tomando ahora $\delta = \exp(-C\mathcal{H}/2)$ y recordando que $\hat{v}_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon \mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}$, llegamos a

$$\frac{1}{2}\|\hat{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\|\hat{u}_\varepsilon(T)\|^2_{2;\Omega} + \|\hat{\phi}_\varepsilon(T)\|^2_{2;\Omega}\right) \leq \frac{1}{2}\exp(C\mathcal{H})\left(\|u_0\|^2_{2;\Omega} + \|\phi_0\|^2_{2;\Omega}\right).$$

Así, por un lado, tenemos

$$\|\hat{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} \leq \exp(C\mathcal{H})\left(\|u_0\|^2_{2;\Omega} + \|\phi_0\|^2_{2;\Omega}\right) \tag{4.22}$$

y, por otro,

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\|\hat{u}_\varepsilon(T)\|^2_{2;\Omega} + \|\hat{\phi}_\varepsilon(T)\|^2_{2;\Omega}\right) \leq \frac{1}{2}\exp(C\mathcal{H})\left(\|u_0\|^2_{2;\Omega} + \|\phi_0\|^2_{2;\Omega}\right). \tag{4.23}$$

Como $\{\hat{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ está acotada en $L^2(Q)$, $\{\hat{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ y $\{\hat{\phi}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ están uniformemente acotadas en el espacio $W(0,T) = \{y : y \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega)),\ \partial_t y \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$, gracias a la Proposición 4.1. Recordando la inyección compacta (resp. continua) de $W(0,T)$ en $L^2(Q)$ (resp. en $C([0,T]; L^2(\Omega))$), existen subsucesiones $\{\hat{v}_{\varepsilon_n}\}_{n\geq 1}$ y $\{(\hat{u}_{\varepsilon_n}, \hat{\phi}_{\varepsilon_n})\}_{n\geq 1}$ tales que

$$\hat{v}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \hat{v} \text{ débilmente en } L^2(Q), \qquad (\hat{u}_{\varepsilon_n}, \hat{\phi}_{\varepsilon_n}) \to (\hat{u}, \hat{\phi}) \text{ en } L^2(Q)^2$$

y

$$\hat{u}_{\varepsilon_n}(T) \rightharpoonup \hat{u}(T) \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_{\varepsilon_n}(T) \rightharpoonup \hat{\phi}(T) \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega), \tag{4.24}$$

para ciertos $\hat{v} \in L^2(Q)$, con sop $\hat{v} \subset \overline{\mathcal{B}}_0 \times [0,T]$, y $(\hat{u}, \hat{\phi}) \in W(0,T)^2$. De (4.23) y (4.24), deducimos que

$$\hat{u}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(T) = 0 \text{ en } L^2(\Omega).$$

Podemos entonces pasar al límite en los problemas que verifican $\hat{u}_{\varepsilon_n}$ y $\hat{\phi}_{\varepsilon_n}$, infiriendo que $(\hat{u}, \hat{\phi})$ (junto a $\hat{v}$) resuelve el problema de controlabilidad nula (4.14)–(4.15), con $\hat{v} \in L^2(Q)$ verificando sop $\hat{v} \subset \mathcal{B}_0 \times (0,T)$ y (4.20), estimación que se sigue inmediatamente de (4.22). Esto concluye la demostración del resultado. $\square$

***Observación* 4.1** Combinando el resultado que acabamos de demostrar con un argumento de punto fijo, se prueba la controlabilidad exacta a cero, con controles en $L^2(Q)$, para sistemas de campo de fases no lineales de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi, \nabla\phi) = u \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \text{ en } \Omega, \end{array}\right. \tag{4.25}$$

cuando se consideran no linealidades $f(u, \nabla u)$ y $h(\phi, \nabla\phi)$, con $f, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ globalmente Lipschitzianas y datos iniciales u_0 y ϕ_0 en $L^2(\Omega)$. $\square$

III. Controlabilidad exacta a cero con controles en $L^r(Q)$

Supondremos a lo largo de este apartado que $D \equiv 0$. Sea $\hat{v} \in L^2(Q)$ un control dado por el Teorema 4.4 (asociado al abierto $\mathcal{B}_0$ considerado más arriba). Bajo hipótesis adecuadas sobre los datos, mediante una construcción similar a la llevada a cabo en el capítulo anterior, a partir de $\hat{v}$ obtendremos un control en $L^r(Q)$, con soporte ligeramente más grande. Además, estimaremos la norma $L^r(Q)$ del nuevo control. Ello será esencial para abordar el problema no lineal.

Comenzamos efectuando un cambio de variables. Sea $\eta \in C^\infty([0,T])$ verificando

$$\eta \equiv 1 \ \text{ en } \ [0,T/3], \quad \eta \equiv 0 \ \text{ en } \ [2T/3,T] \quad \text{ y } \quad 0 \le \eta \le 1, \ |\eta'(t)| \le \frac{C}{T} \ \text{ en } \ [0,T].$$

Pongamos

$$u = U + \eta \overline{u}, \quad \phi = \Phi + \eta \overline{\phi}, \tag{4.26}$$

donde $(\overline{u}, \overline{\phi})$ es la solución débil de

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} + B \cdot \nabla \overline{u} + a\overline{u} = -\Delta \overline{\phi} \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \overline{\phi} - \Delta \overline{\phi} + c\overline{\phi} = \overline{u} \ \text{ en } Q, \\ \overline{u} = 0, \quad \overline{\phi} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{u}(x,0) = u_0(x), \quad \overline{\phi}(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{4.27}$$

Gracias al cambio de variables introducido, podemos afirmar lo siguiente:

> *Hallar un control v que nos dé la controlabilidad nula de* (4.14) *($D \equiv 0$) equivale a encontrar un control v tal que la correspondiente solución* (U, Φ) *del sistema*
>
> $$\begin{cases} \partial_t U - \Delta U + B \cdot \nabla U + aU = -\Delta \Phi - \eta' \overline{u} + v \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \Phi - \Delta \Phi + c\Phi = U - \eta' \overline{\phi} \ \text{ en } Q, \\ U = 0, \quad \Phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ U(x,0) = 0, \quad \Phi(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.28}$$
>
> *verifique*
>
> $$U(x,T) = 0, \quad \Phi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega. \tag{4.29}$$

Nuestro objetivo será entonces *construir un control en $L^r(Q)$* ($r \in (2, \infty)$ arbitrario) que resuelva el problema de controlabilidad nula (4.28)–(4.29). Además, estimaremos la norma $L^r(Q)$ de dicho control. De esta forma, sin más que tomar (u, ϕ) dadas por (4.26), tendremos resuelto el problema de controlabilidad nula (4.14)–(4.15) con un control $v \in L^r(Q)$. Para ello, consideramos tres abiertos regulares $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}$ tales que

$$\mathcal{B}_0 \subset\subset \mathcal{B}_1 \subset\subset \mathcal{B}_2 \subset\subset \mathcal{B} \subset\subset \omega.$$

Introducimos una función $\theta \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ tal que $\theta \equiv 1$ en $\mathcal{B}_2$ y ponemos

$$\Phi = (1-\theta)\,\hat{\Phi}, \tag{4.30}$$

$$U = (1-\theta)\,\hat{U} + \theta\eta'\overline{\phi} + 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi} + (\Delta\theta)\hat{\Phi} \tag{4.31}$$

y

$$\begin{aligned} v &= \theta\eta'\overline{u} - 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi} - (\Delta\theta)\hat{\Phi} + 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{U} + (\Delta\theta)\hat{U} - \nabla\theta\cdot(B\hat{U}) \\ &+ (\partial_t - \Delta + B\cdot\nabla + a)\left[\theta\eta'\overline{\phi} + 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi} + (\Delta\theta)\hat{\Phi}\right], \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde $(\hat{U},\hat{\Phi})$ es la solución de (4.28) asociada al control $\hat{v}$ (la cual verifica $\hat{U}(x,T)=0$ y $\hat{\Phi}(x,T)=0$ en Ω, por el cambio de variables introducido).

***Observación* 4.2** En virtud de la Proposición 4.1, para a, c y B en L^∞ y $u_0,\phi_0 \in L^2(\Omega)$, tenemos

$$\overline{u},\overline{\phi} \in W(0,T), \quad \|\overline{u}\|_{W(0,T)} + \|\overline{\phi}\|_{W(0,T)} \le \exp(CM_1)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right),$$

donde $M_1 = M_1(T,a,c,B) > 0$ viene dada por

$$M_1 = 1 + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right). \tag{4.33}$$

El mencionado resultado nos da, por otro lado,

$$\hat{U},\hat{\Phi} \in Y = \{u : u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(Q)\}$$

y la acotación

$$\|\hat{U}\|_Y + \|\hat{\Phi}\|_Y \le \exp(CM_1)\left(1 + \|a\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2\right)\left(\|-\eta'\overline{u} + \hat{v}\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0}\|_{2;Q} + \|-\eta'\overline{\phi}\|_{2;Q}\right),$$

con $M_1 > 0$ dada por (4.33). Teniendo en cuenta la acotación del control $\hat{v}$ (ver (4.20)), es fácil comprobar que

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \le \exp(C\mathcal{H}_0)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right),$$

para una nueva constante $C = C(\Omega,\omega) > 0$ y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(T,a,c,B) > 0$ dada por

$$\mathcal{H}_0 = 1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2 + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right). \tag{4.34}$$

De las propiedades de η y de las estimaciones precedentes deducimos

$$\|\hat{U}\|_Y + \|\hat{\Phi}\|_Y \le \exp(C\mathcal{H}_0)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \tag{4.35}$$

siendo $C > 0$ una nueva constante y $\mathcal{H}_0 > 0$ como antes. $\square$

Para $s_1 \in [2, \infty)$ arbitrario, pongamos

$$Z_{s_1} = \begin{cases} L^{s_1}(0,T; W_0^{1,s_1}(\Omega)) & \text{si} \quad s_1 \in \left[2, \dfrac{N}{2}+1\right], \\ L^{s_1}(0,T; W_0^{1,s_1}(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q}) & \text{si} \quad s_1 > \dfrac{N}{2}+1, \end{cases} \tag{4.36}$$

y recordemos que habíamos denotado por X^{s_1} el espacio de Banach definido por $X^{s_1} = \{u : u \in L^{s_1}(0,T; W^{2,s_1}(\Omega) \cap W_0^{1,s_1}(\Omega)),\ \partial_t u \in L^{s_1}(Q)\}$. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.5 *Sean $a, c \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y pongamos $D \equiv 0$. Sea $\hat{v} \in L^2(Q)$ un control dado por el Teorema 4.4 (asociado a $\mathcal{B}_0$). Se tiene:*

a) Si $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $s_1 \in [2,\infty)$ arbitrario, la función (u,ϕ) definida en (4.26), con U y Φ dadas por (4.31) y (4.30), respectivamente, está en $Z_{s_1} \times X^{s_1}$ (Z_{s_1} el espacio definido en (4.36)) y se tiene

$$\|u\|_{Z_{s_1}} + \|\phi\|_{X^{s_1}} \leq \exp\left(C\mathcal{H}_0\right)\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right),$$

donde $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0\left(T,a,c,B\right) > 0$ viene dada por (4.34).

b) Sea $r \in [2,\infty)$ arbitrario. Supongamos que $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$ y que, además, $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por

$$\gamma = \begin{cases} \max\left\{r, \dfrac{N}{2}+1\right\} & si \quad r \neq \dfrac{N}{2}+1, \\ \dfrac{N}{2}+1+\varepsilon & si \quad r = \dfrac{N}{2}+1, \end{cases} \tag{4.37}$$

siendo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Entonces, el control v definido en (4.32) satisface $v \in L^r(Q)$, $\operatorname{sop} v \subset \omega \times [0,T]$ y

$$\|v\|_{r;Q} \leq \exp\left(C\mathcal{H}_0\right)\left(1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q}\right)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \tag{4.38}$$

con $\mathcal{H}_0 > 0$ como en el apartado anterior. □

A la vista de este resultado y al igual que se vio en el capítulo anterior, se tiene que la regularidad del control v construido mediante (4.32) sólo depende del efecto regularizante (regularidad interior en espacio y tiempo) de las EDPs que aparecen en el sistema (4.14) (es decir, de la regularidad de la función ∇c). Por contra, la regularidad de la solución (u,ϕ) de (4.14) asociada a este control (y dada por (4.26), con (U,Φ) definidas por (4.31), (4.30)) es independiente del término ∇c, dependiendo únicamente de la regularidad del dato inicial (u_0,ϕ_0) del sistema (4.14).

En la demostración de la Proposición 4.5, utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 4.6 *Supongamos que $a, c \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$. Se tiene:*

a) La solución débil $(\overline{u}, \overline{\phi})$ de (4.27) satisface

$$\overline{u}, \overline{\phi} \in X^p(\delta, T; \Omega) \quad \forall p \in [2, \infty), \ \forall \delta \in (0, T).$$

Además, existe una constante positiva C independiente de T tal que

$$\|\overline{u}\|_{X^p(\delta,T;\Omega)} + \|\overline{\phi}\|_{X^p(\delta,T;\Omega)} \leq \exp(CM_1) \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{2\widetilde{\mathcal{K}}} M_2^{\widetilde{\mathcal{K}}} \left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \quad (4.39)$$

donde $\widetilde{\mathcal{K}} = \widetilde{\mathcal{K}}(N) > 0$, $M_1 > 0$ viene dada por (4.33) y

$$M_2 = M_2(a, c, B) = (1 + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)(1 + \|c\|_\infty).$$

b) Sean $\mathcal{O}$ un abierto regular tal que $\mathcal{B}_0 \subset\subset \mathcal{O} \subset\subset \Omega$ y $\hat{v} \in L^2(Q)$ un control dado por el Teorema 4.4 (asociado a $\mathcal{B}_0$). Entonces, la solución débil $(\hat{U}, \hat{\Phi})$ de (4.28) asociada a $\hat{v}$ satisface

$$\hat{U}, \hat{\Phi} \in X^p(0, T; \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}) \quad \forall p \in [2, \infty),$$

$$\|\hat{U}\|_{X^p(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{O}})} + \|\hat{\Phi}\|_{X^p(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{O}})} \leq \exp(C\mathcal{H}_0)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \quad (4.40)$$

con $\mathcal{H}_0 > 0$ dada por (4.34) y C una nueva constante positiva independiente de T. $\square$

La prueba de este lema se basa en el efecto regularizante de la ecuación del calor y, al utilizar un procedimiento de tipo “bootstrap” análogo a los llevados a cabo en la demostración de las Proposiciones 3.1 y 4.2, será omitida.

Demostración de la Proposición 4.5:

a) Supongamos que $a, c \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $D \equiv 0$. Comenzamos analizando la regularidad de las funciones U y Φ dadas por (4.31) y (4.30), respectivamente. Como consecuencia inmediata, obtendremos la regularidad de las funciones $u = U + \eta\overline{u}$ y $\phi = \Phi + \eta\overline{\phi}$ junto con las correspondientes estimaciones. El análisis que sigue es similar al que se hizo en el capítulo anterior.

$\diamond$ En primer lugar, supongamos que las condiciones iniciales u_0 y ϕ_0 están sólo en $L^2(\Omega)$. Escribamos $U = U_1 + U_2$, con

$$U_1 = (1 - \theta)\,\hat{U} + \theta\eta'\overline{\phi} + (\Delta\theta)\hat{\Phi} \quad \text{y} \quad U_2 = 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{\Phi}.$$

Por el Lema 4.6 (tomando, por ejemplo, $\delta = T/6$ y $\mathcal{O} = \mathcal{B}_1$) y por la elección de θ y η, para cualquier $p \in [2, \infty)$ tenemos que U_1 y $\Phi = (1 - \theta)\,\hat{\Phi}$ están en X^p y $U_2 \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, junto con la estimación

$$\begin{aligned}
&\|U_1\|_{X^p} + \|U_2\|_{L^p(W^{1,p}(\Omega))} + \|\Phi\|_{X^p} \\
&\leq C\left(\|\hat{U}\|_{X^p(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}_2)} + \frac{1}{T}\|\overline{\phi}\|_{X^p(T/3,T;\Omega)} + \|\hat{\Phi}\|_{X^p(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}_2)}\right) \\
&\leq \exp(C\mathcal{H}_0)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right),
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_0 > 0$ dada por (4.34). Deducimos, así, que $U \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ y una acotación para la norma de U en este espacio análoga a la anterior. Además, como $U_1, \Phi \in X^p$ para cualquier $p \in [2,\infty)$, se tiene que $U_1, \Phi \in C^0(\overline{Q})$ y

$$\|U_1\|_\infty + \|\Phi\|_\infty \le \exp\left(C\mathcal{H}_0\right)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right)$$

(tomando $p > N/2+1$, ver Lema 3.3). Veamos ahora que también U_2 está en $C^0(\overline{Q})$. Como $\hat{\Phi} \in X^p(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}_2)$ para cualquier $p \in [2,\infty)$, tomando $p > N+2$, de nuevo por el Lema 3.3 tenemos que

$$\hat{\Phi} \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega\setminus\mathcal{B}_2}\times[0,T]), \qquad \text{con } \alpha = 1 - \frac{N+2}{p}.$$

Así,

$$U_2 = 2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi} \in C^0(\overline{Q}), \quad \|U_2\|_\infty \le \exp\left(C\mathcal{H}_0\right)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right).$$

En resumen, para $p \in [2,\infty)$ arbitrario hemos obtenido

$$\begin{cases} (U,\Phi) \in \left(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})\right) \times X^p, \\ \|U\|_{L^p(W_0^{1,p}(\Omega))\cap C^0(\overline{Q})} + \|\Phi\|_{X^p} \le \exp\left(C\mathcal{H}_0\right)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \end{cases} \tag{4.41}$$

con $\mathcal{H}_0 > 0$ como más arriba.

$\diamond$ Supongamos ahora que $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $s_1 \in [2,\infty)$ dado. En este caso, sin más que aplicar la Proposición 4.2, las funciones $\overline{u}$ y $\overline{\phi}$ están en X^{s_1} y

$$\|\overline{u}\|_{X^{s_1}} + \|\overline{\phi}\|_{X^{s_1}} \le \exp(CM_1)M_2^{\widetilde{\mathcal{K}}}\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right),$$

con $M_1 > 0$ dada por (4.33) y $M_2 > 0$ definida en el Lema 4.6. Ello junto con (4.41) nos da la primera parte del resultado (de nuevo utilizamos el Lema 3.3 del capítulo anterior y, en particular, la inyección continua $X^{s_1} \hookrightarrow C^0(\overline{Q})$ si $s_1 > N/2+1$).

b) Sea $r \in [2,\infty)$ arbitrario. Supongamos que $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$, $D \equiv 0$ y $c \in L^\infty(Q) \cap L^\gamma(0,T;W^{1,\gamma}(\Omega))$, con γ dado por (4.37). Bajo estas hipótesis, veremos que la función v definida por (4.32) está en $L^r(Q)$ y estimaremos su norma en este espacio.

Analizamos en detalle el término más delicado, a saber, el término $(\partial_t-\Delta)[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi}]$. Obsérvese que el segundo miembro de la EDP que satisface $\hat{\Phi}$, $\hat{U} - \eta'\overline{\phi}$, está en $X^r(0,T;\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}_1)$ (nuevamente por el Lema 4.6). Podemos entonces aplicar a $\hat{\Phi}$ el apartado c) de la Proposición 3.1 y deducir que $\hat{\Phi} \in L^r(0,T;W^{3,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))$, $\partial_t\hat{\Phi} \in L^r(0,T;W^{1,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))$ y

$$\begin{aligned} &\|\hat{\Phi}\|_{L^r(W^{3,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))} + \|\partial_t\hat{\Phi}\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))} \\ &\le C\left(1+\frac{1}{T}\right)(1+T^\alpha)(1+\|c\|_\infty)^{\widehat{\mathcal{K}}}\left(1+\|\nabla c\|_{\gamma;Q}\right)\left(\|\hat{U}-\eta'\overline{\phi}\|_{L^r(W^{1,r}(\Omega\setminus\overline{\mathcal{B}}_1))} + \|\hat{\Phi}\|_Y\right), \end{aligned}$$

con $\hat{\mathcal{K}} = \hat{\mathcal{K}}(N) > 0$ e $Y = \{u : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(Q)\}$. Usando ahora las estimaciones (4.39) (para $\delta = T/6$, por ejemplo), (4.40) (para $\mathcal{O} = \mathcal{B}_1$) y (4.35) junto a las propiedades de η, se obtiene inmediatamente

$$\|\hat{\Phi}\|_{L^r(W^{3,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))} + \|\partial_t\hat{\Phi}\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{B}\setminus\overline{\mathcal{B}}_2))} \le \exp(C\mathcal{H}_0)\,(1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q})\,(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega})\,,$$

con $\mathcal{H}_0 > 0$ como anteriormente. Así, el término $(\partial_t - \Delta)[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi}]$ está en $L^r(Q)$ y

$$\|(\partial_t - \Delta)[2\nabla\theta\cdot\nabla\hat{\Phi}]\|_{r;Q} \le \exp(C\mathcal{H}_0)\,(1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q})\,(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega})\,.$$

Gracias al Lema 4.6 y a la elección de θ y de η, es fácil ver que los restantes sumandos que aparecen en (4.32) y, en consecuencia, también v, están en $L^r(Q)$ y se tiene la estimación (4.38). Ello concluye la prueba del resultado. □

Es interesante notar que las funciones U y Φ introducidas en (4.30)–(4.31) verifican

$$\begin{cases} U = 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ U(x,0) = 0,\ \Phi(x,0) = 0,\ U(x,T) = 0,\ \Phi(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En particular, usamos que $\operatorname{sop}(\nabla\theta), \operatorname{sop}(\Delta\theta) \subset\subset \Omega$, que $\hat{\Phi} \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $\hat{U} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ y

$$\begin{cases} \hat{U} = 0, \quad \hat{\Phi} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{U}(x,0) = 0,\ \hat{\Phi}(x,0) = 0,\ \hat{U}(x,T) = 0,\ \hat{\Phi}(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Es ya un ejercicio sencillo comprobar que (U,Φ) resuelve (4.28) con término de control la función v introducida en (4.32). Así, las funciones $u = U + \eta\overline{u}$ y $\phi = \Phi + \eta\overline{\phi}$ (junto a v) resuelven el problema de controlabilidad nula (4.14)–(4.15), recordando el cambio de variables (4.26). Queda, en particular, probado el siguiente resultado de controlabilidad nula para el sistema lineal de campo de fases (4.14):

Corolario 4.7 *Sean $r, s_1 \in [2,\infty)$ y $T > 0$ arbitrarios. Sea γ dado por (4.37). Supongamos que $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$, $D \equiv 0$ y $c \in L^\infty(Q) \cap L^\gamma(0,T; W^{1,\gamma}(\Omega))$. Entonces, existe un control $v \in L^r(Q)$, con soporte en $\omega \times [0,T]$, tal que la correspondiente solución (u,ϕ) de (4.14) está en $Z_{s_1} \times X^{s_1}$ (Z_{s_1} el espacio introducido en (4.36)) y satisface $u(x,T) = 0$ y $\phi(x,T) = 0$ en Ω. Además, se tienen las estimaciones*

$$\|u\|_{Z_{s_1}} + \|\phi\|_{X^{s_1}} \le \exp\left[C(\Omega,\omega)\mathcal{H}_0\right]\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right)$$

y

$$\|v\|_{r;Q} \le \exp\left[C(\Omega,\omega)\mathcal{H}_0\right](1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q})\,(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega})\,,$$

siendo $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(T,a,c,B)$ la constante positiva definida en (4.34). □

Este resultado será crucial para abordar el caso no lineal que analizamos en la Sección 4.3.

***Observación* 4.3** Nótese que nuevamente hemos obtenido la regularidad de u y ϕ (resp. las estimaciones de las normas de estas funciones en los correspondientes espacios) independientemente de la regularidad del control v (resp. de la acotación de su norma en $L^r(Q)$). Por otro lado, observemos que, tomando $q = \text{mín}\{r, s_1\}$, la Proposición 4.2 nos da

$$u \in X^q, \quad \|u\|_{X^q} \leq \exp\left[C(\Omega,\omega)\mathcal{H}_0\right](1 + \|\nabla c\|_{\gamma;Q})\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right),$$

$\mathcal{H}_0 > 0$ como antes. □

4.3. Controlabilidad exacta a cero y a trayectorias de un sistema de campo de fases superlineal

En la presente sección, estamos interesados en analizar la controlabilidad exacta a cero y a trayectorias del sistema no lineal de campo de fases

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.42}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitziana y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 (ambas con determinado crecimiento superlineal en el infinito), el dato inicial (u_0, ϕ_0) está dado en $\left(W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$, con $s_1 \in (N/2+1, \infty)$ y $v \in L^2(Q)$ (al menos) es una función control por determinar que actúa sobre el abierto de control $\omega \subset \Omega$.

Al ser f localmente Lipschitziana, podemos escribir

$$f(s,p) = f(0,0) + g(s,p)s + G(s,p) \cdot p \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

donde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ son las funciones L^∞_{loc} definidas, respectivamente, por

$$g(s,p) = \int_0^1 \partial_s f(\sigma s, \sigma p)\, d\sigma, \quad G(s,p) = \int_0^1 \partial_p f(\sigma s, \sigma p)\, d\sigma, \quad (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{4.43}$$

Recordemos que denotamos por $\partial_s f$ (resp. $\partial_p f$) la derivada de f con respecto a s (resp. el gradiente de f con respecto a p).

El primer resultado relevante de esta sección establece la controlabilidad nula del sistema (4.42):

Teorema 4.8 *Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana y $h \in C^1(\mathbb{R})$, con $h'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, verificando*

$$f(0,0) = 0, \qquad h(0) = 0, \tag{4.44}$$

$$\forall R > 0 \quad \exists M_R > 0 : \quad |g(s,p)| + |G(s,p)| \le M_R \quad \forall s \in [-R,R],\ \forall p \in \mathbb{R}^N, \tag{4.45}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0 \quad y \quad \lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|)} = 0 \\ \textit{uniformemente en } p \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.46}$$

y

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|h(s)|}{|s| \log^{3/2}(1+|s|)} = 0. \tag{4.47}$$

Entonces, para cualesquiera $T > 0$ y (u_0, ϕ_0) en $\left(W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$, con $s_1 \in (N/2+1, \infty)$, existe un control $v \in L^2(Q)$ y un estado $(u,\phi) \in L^\infty(Q)^2$ asociado a (u_0,ϕ_0) y a v tal que $u(x,T) = 0$ y $\phi(x,T) = 0$ en Ω.

Demostración: La demostración del resultado se hará en dos etapas. En la primera, aplicando nuevamente un argumento adecuado de punto fijo, probaremos el resultado cuando las funciones g y G definidas en (4.43) son continuas y $h \in C^2(\mathbb{R})$. En la segunda etapa estudiaremos el caso general.

Etapa 1.- El caso en el que g, G y h'' son continuas.

Supongamos que las funciones g, G y h'' son continuas y que se verifican las hipótesis (4.44)–(4.47). Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de clase C^1 definida por

$$H(s) = \begin{cases} \dfrac{h(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ h'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon > 0$, que sólo depende de ε, tal que

$$|g(s,p)|^{2/3} + |G(s,p)|^2 + |H(s)|^{2/3} \le C_\varepsilon + \varepsilon \log(1+|s|) \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{4.48}$$

I. *Introducción de una aplicación multivaluada.*

Introduzcamos la *función truncante* $\mathbf{T}_R$ definida por

$$\mathbf{T}_R(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \le R, \\ R\,\mathrm{sgn}(s) & \text{si } |s| > R, \end{cases}$$

donde la constante $R > 0$ se determinará más adelante y pongamos

$$q = \begin{cases} 2 & \text{si } N = 1, \\ 2 + \varepsilon' & \text{si } N = 2, \\ \dfrac{N}{2} + 1 & \text{si } N \ge 3, \end{cases} \tag{4.49}$$

para $\varepsilon' > 0$ fijo arbitrariamente pequeño.

Para cada (z, ζ) en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, consideramos el sistema lineal acoplado[1]

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + B_z \cdot \nabla u + a_z u = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + c_\zeta \phi = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \quad \phi(0) = \phi_0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.50}$$

con potenciales definidos por $a_z = g(\mathbf{T}_R(z), \nabla z)$, $B_z = G(\mathbf{T}_R(z), \nabla z)$ y $c_\zeta = H(\mathbf{T}_R(\zeta))$, que verifican

$$a_z \in L^\infty(Q), \quad B_z \in L^\infty(Q)^N \quad \text{y} \quad c_\zeta \in L^\infty(Q) \cap L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)). \tag{4.51}$$

Más aún, para cualquier $(z,\zeta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ tenemos

$$\|a_z\|_\infty \le \alpha_R, \quad \|B_z\|_\infty \le \beta_R \quad \text{y} \quad \|c_\zeta\|_\infty \le \kappa_R, \tag{4.52}$$

con

$$\alpha_R = \sup_{|s|\le R,\, p\in\mathbf{R}^N} |g(s,p)|, \quad \beta_R = \sup_{|s|\le R,\, p\in\mathbf{R}^N} |G(s,p)| \quad \text{y} \quad \kappa_R = \max_{|s|\le R} |H(s)|. \tag{4.53}$$

En particular, hemos usado la hipótesis (4.45) y la continuidad de H para ver que los potenciales están uniformemente acotados en L^∞ y hemos aplicado el Teorema de Stampacchia (ver Teorema A.4.2., p. 256 de [37]) junto al hecho de que la función $\mathbf{T}_R$ es globalmente Lipschitziana para verificar que $c_\zeta \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$.

Razonando como en [24] (véase también [17]), vamos a asociar a cada $(z,\zeta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ una familia de controles que conducen el sistema (4.50) a cero en el instante T. La idea consiste en aplicar a este sistema el Corolario 4.7 de la sección anterior en un intervalo temporal adecuado, eventualmente más pequeño que $(0,T)$. Pongamos

$$T_R = \min\left\{T, \alpha_R^{-1/3}, \kappa_R^{-1/3}\right\}.$$

Recordando (4.51), para cada $(z,\zeta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ podemos aplicar el Corolario 4.7 para T_R, con $s_1 > N/2+1$ y $r = 2$ (obsérvese que, en este caso, el correspondiente γ dado por (4.37) es igual a q) y deducir la existencia de un control $v_{z,\zeta} \in L^2(\Omega \times (0,T_R))$ tal que la correspondiente solución $(u_{z,\zeta}, \phi_{z,\zeta})$ de (4.50) en el cilindro $\Omega \times (0,T_R)$, en particular, verifica

$$u_{z,\zeta} \in L^{s_1}(0,T_R;W_0^{1,s_1}(\Omega)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_R]), \quad \phi_{z,\zeta} \in X^{s_1}(0,T_R;\Omega)$$

[1]Por simplicidad, omitimos la dependencia respecto de R.

y
$$u_{z,\zeta}(x,T_R)=0, \quad \phi_{z,\zeta}(x,T_R)=0 \quad \text{ en } \Omega.$$
Además, se tienen las estimaciones
$$\begin{aligned} &\|u_{z,\zeta}\|_{L^{s_1}(0,T_R;W_0^{1,s_1}(\Omega))\cap C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_R])}+\|\phi_{z,\zeta}\|_{X^{s_1}(0,T_R;\Omega)} \\ &\leq C_1(\Omega,\omega,T_R,z,\zeta)\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}+\|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right) \end{aligned} \tag{4.54}$$
y
$$\|v_{z,\zeta}\|_{L^2(\Omega\times(0,T_R))}\leq C_2(\Omega,\omega,T_R,z,\zeta)\left(\|u_0\|_{2;\Omega}+\|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \tag{4.55}$$
donde
$$C_1(\Omega,\omega,T_R,z,\zeta)=\exp[C(\Omega,\omega)\mathcal{H}_0(T_R,a_z,c_\zeta,B_z)],$$
$$C_2(\Omega,\omega,T_R,z,\zeta)=C_1(\Omega,\omega,T_R,z,\zeta)(1+\|H'(\mathbf{T}_R(\zeta))\nabla(\mathbf{T}_R(\zeta))\|_{q;Q}),$$
con q dado por (4.49) y $\mathcal{H}_0(T_R,a_z,c_\zeta,B_z)=\mathcal{H}_{0_{z,\zeta}}>0$ definida por (ver (4.34))
$$\mathcal{H}_{0_{z,\zeta}}=1+\frac{1}{T_R}+\|a_z\|_\infty^{2/3}+\|c_\zeta\|_\infty^{2/3}+\|B_z\|_\infty^2+T_R\left(1+\|a_z\|_\infty+\|c_\zeta\|_\infty+\|B_z\|_\infty^2\right).$$
Extendemos ahora por cero a todo el cilindro Q las funciones $v_{z,\zeta}$, $u_{z,\zeta}$ y $\phi_{z,\zeta}$. Denotando tales extensiones por $\widetilde{v}_{z,\zeta}$, $\widetilde{u}_{z,\zeta}$ y $\widetilde{\phi}_{z,\zeta}$, respectivamente, tenemos que $(\widetilde{u}_{z,\zeta},\widetilde{\phi}_{z,\zeta})$ está en $Z_{s_1}\times X^{s_1}$ ($Z_{s_1}=L^{s_1}(0,T;W_0^{1,s_1}(\Omega))\cap C^0(\overline{Q})$), resuelve el sistema linealizado (4.50) en Q con término de control $v=\widetilde{v}_{z,\zeta}\in L^2(Q)$ y satisface
$$\widetilde{u}_{z,\zeta}(T)=0 \quad \text{y} \quad \widetilde{\phi}_{z,\zeta}(T)=0 \quad \text{en } \Omega.$$
Más aún, teniendo en cuenta las definiciones de $\mathcal{H}_{0_{z,\zeta}}$ y T_R junto a (4.52) y la regularidad de h, de las estimaciones (4.54) y (4.55) deducimos estas otras
$$\|\widetilde{u}_{z,\zeta}\|_{Z_{s_1}}+\|\widetilde{\phi}_{z,\zeta}\|_{X^{s_1}}\leq C_3(\Omega,\omega,T,R)\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}+\|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right), \tag{4.56}$$
$$\|\widetilde{v}_{z,\zeta}\|_{2;Q}\leq C_4(\Omega,\omega,T,R,\zeta)\left(\|u_0\|_{2;\Omega}+\|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \tag{4.57}$$
con
$$C_3(\Omega,\omega,T,R)=\exp\left[C(\Omega,\omega,T)\left(1+\alpha_R^{2/3}+\kappa_R^{2/3}+\beta_R^2\right)\right],$$
$$C_4(\Omega,\omega,T,R,\zeta)=C_3(\Omega,\omega,T,R)\left(1+\|\nabla\zeta\|_{q;Q}\max_{|s|\leq R}|H'(s)|\right),$$
para una nueva constante positiva C que depende ahora de Ω, ω y también de T.

Fijado un control $v\in L^2(Q)$, denotaremos por (u_v,ϕ_v) la solución de (4.50) asociada a v y a los potenciales a_z, B_z y c_ζ (hemos omitido la dependencia respecto de (z,ζ) para simplicar la notación). Para cada $(z,\zeta)\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, definimos $\mathcal{A}_R(z,\zeta)$ como la siguiente familia de controles $\mathcal{A}_R(z,\zeta)=\{v\in L^2(Q):$

(u_v, ϕ_v) está en $Z_{s_1} \times X^{s_1}$, satisface $u_v(x,T) = \phi_v(x,T) = 0$ en Ω y v verifica (4.57)$\}$. De este modo, podemos introducir la aplicación multivaluada

$$\Lambda_R : (z,\zeta) \in L^2(H_0^1(\Omega)) \times L^q(W_0^{1,q}(\Omega)) \mapsto \Lambda_R(z,\zeta) \subset L^2(H_0^1(\Omega)) \times L^q(W_0^{1,q}(\Omega)),$$

donde $\Lambda_R(z,\zeta)$ es la familia de las funciones $(u_v, \phi_v) \in Z_{s_1} \times X^{s_1}$ tales que $v \in \mathcal{A}_R(z,\zeta)$ y (u_v, ϕ_v) satisface (4.56).

II. *Aplicación del Teorema de Kakutani. Conclusión.*

Veamos que, para cada $R > 0$, la aplicación Λ_R está en las hipótesis del Teorema de Kakutani del punto fijo, quedando de este modo asegurada la existencia de (al menos) un punto fijo de Λ_R.

$\diamond$ En primer lugar, es fácil comprobar que $\Lambda_R(z,\zeta)$ es un subconjunto convexo cerrado y no vacío de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, para cada (z,ζ) de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$.

$\diamond$ Para cualquier $(z,\zeta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, cada $(u,\phi) \in \Lambda_R(z,\zeta)$ satisface la estimación uniforme (4.56), luego Λ_R envía todo el espacio $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ en un acotado de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$.

$\diamond$ Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto acotado de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$. La estimación (4.57) implica que $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigcup\{\mathcal{A}(z,\zeta) : (z,\zeta) \in \mathcal{C}\}$ está uniformemente acotado en $L^2(Q)$. Aplicando la Proposición 4.1 junto a (4.56)–(4.57) deducimos que $\Lambda_R(\mathcal{C})$ es un acotado de $Y \times X^{s_1}$ ($Y = \{u : u \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u \in L^2(Q)\}$) y, por consiguiente, cada $\Lambda_R(z,\zeta)$ es un compacto de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ y $\Lambda_R(\mathcal{C})$ es un relativamente compacto de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ (usamos aquí las inyecciones compactas $Y \rightrightarrows L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $X^{s_1} \rightrightarrows L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$).

$\diamond$ Probemos finalmente que Λ_R es *hemicontinua superiormente*, es decir, para cualquier forma lineal y continua μ definida sobre $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, la función de valores reales

$$(z,\zeta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \longmapsto \sup_{(u,\phi)\in\Lambda_R(z,\zeta)} \langle \mu, (u,\phi) \rangle$$

es semicontinua superiormente. Sean $\mu \in (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)))'$ y $\{(z_n,\zeta_n)\}_{n\geq 1} \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ tal que

$$(z_n,\zeta_n) \to (\overline{z},\overline{\zeta}) \quad \text{en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)). \tag{4.58}$$

Hemos de ver que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{(u,\phi)\in\Lambda_R(z_n,\zeta_n)} \langle \mu, (u,\phi) \rangle \right) \leq \sup_{(u,\phi)\in\Lambda_R(\overline{z},\overline{\zeta})} \langle \mu, (u,\phi) \rangle.$$

Trabajaremos con una subsucesión que proporcione este límite superior y, para no complicar la notación, seguiremos denotando a esta subsucesión de la misma forma.

Para cada $n \geq 1$, existe $(u_n, \phi_n) \in \Lambda_R(z_n, \zeta_n)$ tal que

$$\sup_{(u,\phi)\in\Lambda_R(z_n,\zeta_n)} \langle \mu, (u,\phi)\rangle = \langle \mu, (u_n, \phi_n)\rangle,$$

pues cada $\Lambda_R(z_n, \zeta_n)$ es compacto. Bastará con probar que existe una nueva subsucesión (que seguiremos denotando del mismo modo) y que existe $(\overline{u}, \overline{\phi}) \in \Lambda_R(\overline{z}, \overline{\zeta})$ tales que $\{(u_n, \phi_n)\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a $(\overline{u}, \overline{\phi})$ en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T; W_0^{1,q}(\Omega))$. Por la definición de $\Lambda_R(z_n, \zeta_n)$ y $\mathcal{A}_R(z_n, \zeta_n)$, para cada $n \geq 1$ tenemos que (u_n, ϕ_n) está en $Z_{s_1} \times X^{s_1}$ y existe un control $v_n \in L^2(Q)$ tal que (u_n, ϕ_n) (junto a v_n) resuelve el problema de controlabilidad nula (4.50), (4.15) para los potenciales

$$a_{z_n} = g(\mathbf{T}_R(z_n), \nabla z_n), \quad B_{z_n} = G(\mathbf{T}_R(z_n), \nabla z_n) \quad \text{y} \quad c_{\zeta_n} = H(\mathbf{T}_R(z_n)).$$

Además, se tienen las estimaciones

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{Z_{s_1}} + \|\phi_n\|_{X^{s_1}} &\leq C_3(\Omega, \omega, T, R)\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right), \\ \|v_n\|_{2;Q} &\leq C_4(\Omega, \omega, T, R, \zeta_n)\left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}\right), \end{aligned} \tag{4.59}$$

con $C_3(\Omega, \omega, T, R)$ y $C_4(\Omega, \omega, T, R, \zeta_n)$ como en (4.56) y (4.57), respectivamente. Del punto anterior y de la propia definición de Λ_R obtenemos que $\mathcal{A}_R(\{(z_n, \zeta_n)\}_{n\geq 1}) \subset \mathcal{U}$ y $\Lambda_R(\{(z_n, \zeta_n)\}_{n\geq 1}) \subset K$, con $\mathcal{U}$ acotado en $L^2(Q)$ y K acotado en $Z_{s_1} \times X^{s_1}$ y compacto en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T; W_0^{1,q}(\Omega))$. Así, existen subsucesiones, que seguimos denotando por $\{v_n\}_{n\geq 1}$ y $\{(u_n, \phi_n)\}_{n\geq 1}$, tales que

$$\begin{gathered} v_n \rightharpoonup \overline{v} \ \text{ débilmente en } L^2(Q), \\ (u_n, \phi_n) \to (\overline{u}, \overline{\phi}) \ \text{ fuertemente en } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T; W_0^{1,q}(\Omega)), \\ (u_n, \phi_n) \rightharpoonup (\overline{u}, \overline{\phi}) \ \text{ débilmente en } Z_{s_1} \times X^{s_1}, \end{gathered}$$

para algunos $\overline{v} \in L^2(Q)$ y $(\overline{u}, \overline{\phi}) \in Z_{s_1} \times X^{s_1}$.

Por otro lado, al menos para una subsucesión (que seguimos denotando $\{(z_n, \zeta_n)\}_{n\geq 1}$) se deducen las convergencias

$$\begin{aligned} c_{\zeta_n} = H(\mathbf{T}_R(\zeta_n)) &\rightharpoonup c_{\overline{\zeta}} = H(\mathbf{T}_R(\overline{\zeta})) && \text{en } L^\infty(Q) \ \text{ débil-}\star, \\ a_{z_n} = g(\mathbf{T}_R(z_n), \nabla z_n) &\rightharpoonup a_{\overline{z}} = g(\mathbf{T}_R(\overline{z}), \nabla \overline{z}) && \text{en } L^\infty(Q) \ \text{ débil-}\star, \\ B_{z_n} = G(\mathbf{T}_R(z_n), \nabla z_n) &\rightharpoonup B_{\overline{z}} = G(\mathbf{T}_R(\overline{z}), \nabla \overline{z}) && \text{en } L^\infty(Q)^N \ \text{ débil-}\star \end{aligned}$$

(en particular hemos usado (4.58), la continuidad de g, G y H y la acotación uniforme (4.52) de los potenciales). Podemos entonces pasar al límite en la formulación débil del problema que verifica (u_n, ϕ_n) y deducir que $(\overline{u}, \overline{\phi})$ (junto a $\overline{v}$) resuelve (4.50), (4.15) para los potenciales $a_{\overline{z}}$, $B_{\overline{z}}$ y $c_{\overline{\zeta}}$. Además, tomando límites en (4.59), $(\overline{u}, \overline{\phi})$ (resp. $\overline{v}$) satisface (4.56) (resp. (4.57)) y, en consecuencia, $\overline{v} \in \mathcal{A}_R(\overline{z}, \overline{\zeta})$ y $(\overline{u}, \overline{\phi}) \in \Lambda_R(\overline{z}, \overline{\zeta})$. De aquí se sigue la hemicontinuidad superior de Λ_R.

En consecuencia, podemos aplicar a Λ_R el Teorema de Kakutani, infiriendo la existencia de (al menos) un punto fijo (u_R, ϕ_R) de Λ_R en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$. Para concluir la demostración en este caso, basta con encontrar $R > 0$ tal que $\mathbf{T}_R(u_R) = u_R$ y $\mathbf{T}_R(\phi_R) = \phi_R$. Veamos para ello que existe $R > 0$ (suficientemente grande) tal que

$$\|u_R\|_\infty \le R, \quad \|\phi_R\|_\infty \le R. \tag{4.60}$$

De hecho, probaremos que cada punto fijo de Λ_R verifica (4.60). Sea (u, ϕ) un punto fijo de Λ_R. Entonces, en virtud de (4.56) y recordando (4.53) y (4.48), tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty + \|\phi\|_\infty &\le \exp[C\,(1 + C_\varepsilon + \varepsilon \log(1+R))] \left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right) \\ &= \exp\left[C(1+C_\varepsilon)\right](1+R)^{C\varepsilon} \left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right), \end{aligned}$$

con $C = C(\Omega, \omega, T) > 0$ (obsérvese que, para $s_1 > N/2+1$, $X^{s_1} \hookrightarrow L^\infty(Q)$ con inyección continua). Tomando $\varepsilon = 1/(2C)$, por ejemplo, obtenemos

$$\|u\|_\infty + \|\phi\|_\infty \le C(\Omega,\omega,T)(1+R)^{1/2}\left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega}\right),$$

luego para $R > 0$ suficientemente grande se tiene $\|u\|_\infty + \|\phi\|_\infty \le R$. El Teorema 4.8 queda así probado cuando las funciones g y G son continuas y $h \in C^2(\mathbb{R})$.

Etapa 2.- El caso general.

Supongamos que f y h están en las hipótesis del Teorema 4.8. Introducimos dos funciones $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ y $\widetilde{\rho} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $\rho \ge 0$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $\widetilde{\rho} \ge 0$ en $\mathbb{R}$, $\operatorname{sop} \rho \subset \overline{B}((0,0);1)$, $\operatorname{sop} \widetilde{\rho} \subset [-1,1]$ y

$$\iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N} \rho(s,p)\,ds\,dp = \int_{\mathbf{R}} \widetilde{\rho}(s)\,ds = 1.$$

Para cada $n \ge 1$, consideramos las funciones

$$\rho_n(s,p) = n^{N+1}\rho(ns,np) \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$\widetilde{\rho}_n(s) = n\widetilde{\rho}(ns) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$g_n = \rho_n * g, \qquad G_n = \rho_n * G \quad \text{y} \quad H_n = \widetilde{\rho}_n * H.$$

Finalmente, para cada $n \ge 1$, pongamos

$$f_n(s,p) = g_n(s,p)s + G_n(s,p)\cdot p \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

y

$$h_n(s) = H_n(s)s \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Las funciones que acabamos de introducir satisfacen las siguientes propiedades:

i. $g_n \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, $G_n \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^N$, $h_n \in C^2(\mathbb{R})$ (de hecho, son de clase C^∞), $f_n(0,0) = 0$ y $h_n(0) = 0$, para cualquier $n \geq 1$.

ii. $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

iii. $H_n \to H$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.

iv. Para cualquier $M > 0$, existe una constante $C(M) > 0$ tal que $\forall n \geq 1$ se tiene

$$\sup_{|s|\leq M,\, p\in\mathbf{R}^N} (|g_n(s,p)| + |G_n(s,p)|) \leq C(M), \quad \sup_{|s|\leq M} (|H_n(s)| + |H_n'(s)|) \leq C(M).$$

v. Las funciones g_n, G_n y h_n verifican (4.46) y (4.47) uniformemente en n, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$|g_n(s,p)| + |H_n(s)| \leq \varepsilon \log^{3/2}(1 + |s|), \quad |G_n(s,p)| \leq \varepsilon \log^{1/2}(1 + |s|),$$

siempre que $|s| > M_\varepsilon$, para cualesquiera $p \in \mathbb{R}^N$ y $n \geq 1$.

Las propiedades *i.*, *iii.*, *iv.* y *v.* se deducen fácilmente de las propiedades de la convolución y de las sucesiones regularizantes $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ y $\{\widetilde{\rho}_n\}_{n\geq 1}$, así como de las hipótesis sobre f y h. Veamos seguidamente que se tiene la segunda propiedad. Pongamos

$$\widetilde{f}_n = \rho_n * f \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces, $\widetilde{f}_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Por otro lado, para cada $n \geq 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_n(s,p) &= \iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N} \rho(\sigma,\pi) g\left(s - \frac{\sigma}{n}, p - \frac{1}{n}\pi\right)\left(s - \frac{\sigma}{n}\right) d\sigma\, d\pi \\
&\quad + \iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N} \rho(\sigma,\pi) G\left(s - \frac{\sigma}{n}, p - \frac{1}{n}\pi\right) \cdot \left(p - \frac{1}{n}\pi\right) d\sigma\, d\pi \\
&= g_n(s,p)s + G_n(s,p)\cdot p - \hat{f}_n(s,p),
\end{aligned}$$

con

$$\hat{f}_n(s,p) = \frac{1}{n}\iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N} \rho(\sigma,\pi)\left[g\left(s - \frac{\sigma}{n}, p - \frac{1}{n}\pi\right)\sigma + G\left(s - \frac{\sigma}{n}, p - \frac{1}{n}\pi\right)\cdot \pi\right] d\sigma\, d\pi,$$

luego $f_n(s,p) = \widetilde{f}_n(s,p) + \hat{f}_n(s,p)$, $\forall n \geq 1$. Ahora bien, fijado un compacto K de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, como $g, G \in L^\infty_{\text{loc}}$, existe una constante positiva C_K tal que

$$\begin{cases} \left|g\left(s - \dfrac{\sigma}{n}, p - \dfrac{1}{n}\pi\right)\right| \leq C_K, \quad \left|G\left(s - \dfrac{\sigma}{n}, p - \dfrac{1}{n}\pi\right)\right| \leq C_K, \\ \forall (s,p) \in K,\ \forall(\sigma,\pi) \in \overline{B}((0,0);1),\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Así, para cada $n \geq 1$ se tiene

$$|\hat{f}_n(s,p)| \leq C_K/n, \quad \forall (s,p) \in K,$$

de donde se deduce la convergencia uniforme $f_n \to f$ en K (y la propiedad *ii.*).

Para cada $n \geq 1$, consideramos ahora el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n + f_n(u_n, \nabla u_n) = -\Delta\phi_n + v_n \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi_n - \Delta\phi_n + H_n(\phi_n)\phi_n = u_n \ \text{ en } Q, \\ u_n = 0, \quad \phi_n = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u_n(0) = u_0, \quad \phi_n(0) = \phi_0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.61}$$

donde $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $s_1 > N/2 + 1$. Como consecuencia de las propiedades anteriores, razonando como en la etapa anterior, para cada $n \geq 1$ existe $v_n \in L^2(Q)$ tal que el sistema (4.61) admite una solución $(u_n, \phi_n) \in Z_{s_1} \times X^{s_1}$ verificando

$$u_n(x,T) = 0, \quad \phi_n(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \tag{4.62}$$

Recordemos que (u_n, ϕ_n) es un punto fijo de una determinada aplicación multivaluada Λ_{R_n} definida sobre $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, con $R_n > 0$ elegido de modo que $\|u_n\|_\infty + \|\phi_n\|_\infty \leq R_n$. Además,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{Z_{s_1}} + \|\phi_n\|_{X^{s_1}} &\leq C_{1,n}(\Omega,\omega,T,R_n) \left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} \right), \\ \|v_n\|_{2;Q} &\leq C_{2,n}(\Omega,\omega,T,R_n,\phi_n) \left(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega} \right), \end{aligned} \tag{4.63}$$

donde

$$C_{1,n}(\Omega,\omega,T,R_n) = \exp\left[C(\Omega,\omega,T) \left(1 + \widetilde{a}_n^{2/3} + \widetilde{c}_n^{2/3} + \widetilde{B}_n^2 \right) \right],$$

$$C_{2,n}(\Omega,\omega,T,R_n,\phi_n) = C_{1,n}(\Omega,\omega,T,R_n) \left(1 + \|\nabla\phi_n\|_{q;Q} \max_{|s|\leq R_n} |H_n'(s)| \right),$$

con q definido en (4.49) y $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{B}_n$ y $\widetilde{c}_n$ dados por

$$\widetilde{a}_n = \sup_{|s|\leq R_n,\, p\in\mathbb{R}^N} |g_n(s,p)|, \quad \widetilde{B}_n = \sup_{|s|\leq R_n,\, p\in\mathbb{R}^N} |G_n(s,p)| \quad \text{y} \quad \widetilde{c}_n = \max_{|s|\leq R_n} |H_n(s)|.$$

Ahora bien, de las propiedades *iv.* y *v.* se tiene inmediatamente que para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ (que depende sólo de ε y no de las funciones f_n y h_n) tal que

$$|g_n(s,p)|^{2/3} + |G_n(s,p)|^2 + |H_n(s)|^{2/3} \leq C_\varepsilon + \varepsilon \log(1 + |s|),$$

cualesquiera que sean $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $n \geq 1$. Así,

$$\|u_n\|_{Z_{s_1}} + \|\phi_n\|_{X^{s_1}} \leq \exp\left[C(1 + C_\varepsilon)\right] (1 + R_n)^{C\varepsilon} \left(\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} \right).$$

Tomando $\varepsilon = 1/(2C)$ (como en la etapa anterior), podemos elegir $R > 0$ suficientemente grande e independiente de n de modo que, poniendo $R_n = R$ para cualquier $n \geq 1$, se tiene

$$\|u_n\|_{Z_{s_1}} + \|\phi_n\|_{X^{s_1}} \leq R \quad \forall n \geq 1.$$

Por otro lado, usando la propiedad *iv.*, de (4.63) se sigue que $\{v_n\}_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada en $L^2(Q)$. Razonando como previamente, existen subsucesiones (que seguimos denotando por $\{v_n\}_{n\geq 1}$ y $\{(u_n, \phi_n)\}_{n\geq 1}$) tales que $v_n \rightharpoonup v$ débilmente en $L^2(Q)$ y $(u_n, \phi_n) \to (u, \phi)$ fuertemente en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$, para ciertos $v \in L^2(Q)$ y $(u, \phi) \in Z_{s_1} \times X^{s_1}$. En particular, existe una subsucesión (que seguimos denotando del mismo modo) tal que

$$u_n(x,t) \to u(x,t), \quad \nabla u_n(x,t) \to \nabla u(x,t), \quad \phi_n(x,t) \to \phi(x,t) \ \text{ c.p.d. en } Q$$

y existen $\psi_1, \psi_2 \in L^2(Q)$ y $\psi_3 \in L^q(Q)$ tales que

$$|u_n(x,t)| \leq \psi_1(x,t), \quad |\nabla u_n(x,t)| \leq \psi_2(x,t), \quad |\phi_n(x,t)| \leq \psi_3(x,t) \ \text{ c.p.d. en } Q.$$

Así, usando las propiedades *ii.* y *iv.*, deducimos que

$$f_n(u_n(x,t), \nabla u_n(x,t)) \to f(u(x,t), \nabla u(x,t)) \ \text{ c.p.d. en } Q$$

y

$$\begin{aligned} |f_n(u_n, \nabla u_n)| &\leq |g_n(u_n, \nabla u_n)||u_n| + |G_n(u_n, \nabla u_n)||\nabla u_n| \\ &\leq C(R)(\psi_1 + \psi_2) \equiv \widetilde{\psi} \quad \text{c.p.d. en } Q, \end{aligned}$$

con $\widetilde{\psi} \in L^2(Q)$, de donde se sigue que

$$f_n(u_n, \nabla u_n) \to f(u, \nabla u) \quad \text{ en } L^2(Q),$$

por el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Dominada. Análogamente (usando ahora las propiedades *iii.* y *iv.*), para una subsucesión se tiene que

$$h_n(\phi_n) \to h(\phi) \quad \text{ en } L^2(Q) \quad \text{(de hecho, en } L^q(Q)).$$

Podemos entonces pasar al límite en (4.61) y (4.62) y deducir que (u, ϕ) (junto a v) resuelve el problema no lineal de controlabilidad exacta a cero (4.42), (4.15). Esto termina la demostración del Teorema 4.8. □

***Observación* 4.4** En particular, el teorema precedente implica que, bajo las hipótesis (4.44)–(4.47), para cada $(u_0, \phi_0) \in \left(W^{2-2/s_1, s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$, con $s_1 \in (N/2 + 1, \infty)$, existe un control v tal que el correspondiente sistema (4.42) posee una solución (u, ϕ) globalmente definida en $[0, T]$. Obsérvese que esta afirmación no es cierta para cualquier término de control y cualquier dato inicial, pues estamos en el rango de no linealidades para las que puede haber explosión en un instante de tiempo $T^\star < T$. □

***Observación* 4.5** Analizando la demostración del Teorema 4.8, observamos que la controlabilidad exacta a cero del sistema (4.42) continúa siendo válida si reemplazamos las hipótesis (4.46) y (4.47) por estas otras ligeramente más débiles:

$$\begin{cases} \limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} \leq l_1 \quad \text{y} \quad \limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|)} \leq l_2 \\ \text{uniformemente en } p \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

y

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|h(s)|}{|s|\log^{3/2}(1+|s|)} \leq l_3$$

donde l_1, l_2 y l_3 son constantes positivas suficientemente pequeñas que dependen sólo de Ω, ω y T. $\square$

***Observación* 4.6** Adaptando la demostración del Teorema 4.8, deducimos un resultado de controlabilidad exacta a cero local para el sistema (4.42), sin restricción alguna sobre el crecimiento de las funciones f y h. En concreto, dadas una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana y $h \in C^1(\mathbb{R})$, con $h'' \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, verificando $f(0,0) = 0$ y $h(0) = 0$, existe $\rho = \rho(\Omega, \omega, T, f, h) > 0$ con la siguiente propiedad: para cualesquiera datos iniciales $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, con $s_1 > N/2 + 1$, verificando $\|u_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} + \|\phi_0\|_{2-2/s_1,s_1;\Omega} \leq \rho$, podemos encontrar un control $v \in L^2(Q)$ tal que el correspondiente sistema (4.42) admite una única solución $(u, \phi) \in \left(L^{s_1}(0,T; W^{1,s_1}_0(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q})\right) \times X^{s_1}$ verificando $u(x,T) = 0$ y $\phi(x,T) = 0$ en Ω. Este resultado generaliza el resultado principal de [6], el cual establece la controlabilidad exacta a cero local de un sistema de campo de fases con $f \equiv 0$ considerado en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $1 \leq N \leq 3$, mediante dos controles. $\square$

***Observación* 4.7** En el Teorema 4.8, podemos considerar términos no lineales más generales de la forma $f(x,t; u(x,t), \nabla u(x,t))$ y $h(x,t;\phi(x,t))$ con $(x,t) \in Q$. Inspeccionando la demostración de dicho teorema nos damos cuenta de que, para demostrar el resultado en este caso, basta que las funciones f y h verifiquen las propiedades siguientes:

1. $f(x,t;0,0) = 0$ y $h(x,t;0) = 0$ para (x,t) c.p.d. en Q.
2. $h(x,t;\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ y $\dfrac{\partial^2 h}{\partial s^2}(x,t;\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ para (x,t) c.p.d. en Q.
3. $f(\cdot; s, p) = g(\cdot; s, p)s + G(\cdot; s, p) \cdot p \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, con

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(x,t;s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|G(x,t;s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|)} = 0$$

uniformemente en $p \in \mathbb{R}^N$ y en (x,t) c.p.d. en Q.

4.
$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|h(x,t;s)|}{|s|\log^{3/2}(1+|s|)} = 0 \quad \text{uniformemente en } (x,t) \text{ c.p.d. en } Q.$$

5. Para cada $R > 0$, existe $M_R > 0$ tal que
$$|g(x,t;s,p)| + |G(x,t;s,p)| + \left|\frac{\partial h}{\partial s}(x,t;s)\right| + \left|\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(x,t;s)\right| \leq M_R,$$
para cualquier $(s,p) \in [-R,R] \times \mathbb{R}^N$ y (x,t) c.p.d. en Q.

6. $h(\cdot;s) = H(\cdot;s)s \;\; \forall s \in \mathbb{R}$ y para cada $R > 0$, existe $w_R \in L^q(Q)$, con q dado por (4.49), tal que
$$\left|\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,t;s)\right| \leq w_R(x,t),\ 1 \leq i \leq N, \quad \forall s \in [-R,R],\ (x,t) \text{ c.p.d. en } Q.$$

Omitiremos la prueba del resultado en este caso. Notemos solamente que la quinta propiedad se utiliza para probar que, para cada (z,ζ) en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, los nuevos potenciales a_z, B_z y c_ζ definidos por
$$a_z = g(\cdot;\mathbf{T}_R(z),\nabla z), \quad B_z = G(\cdot;\mathbf{T}_R(z),\nabla z) \quad \text{y} \quad c_\zeta = H(\cdot;\mathbf{T}_R(\zeta)),$$
están uniformemente acotados en L^∞. Además, la hipótesis $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(x,t;s)\right| \leq M_R$ *para cualquier* $(s,p) \in [-R,R] \times \mathbb{R}^N$ *y* (x,t) *c.p.d. en* Q implica una acotación similar para la función $\partial H/\partial s$. Este hecho, junto con la última propiedad permiten probar, además, que $\nabla c_\zeta \in L^q(Q)^N$, con q dado por (4.49). $\square$

Seguidamente pasamos a presentar el siguiente resultado de controlabilidad exacta a trayectorias para el sistema (4.42), el cual generaliza los resultados principales de [2] y [6]:

Teorema 4.9 *Sean $T > 0$ arbitrario y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 verificando $h'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y la hipótesis* (4.47)*, y sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitziana tal que*
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1+|s|)} \left|\int_0^1 \partial_s f(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\,d\lambda\right| = 0, \\ \displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1+|s|)} \left|\int_0^1 \partial_{p_i} f(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\,d\lambda\right| = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \end{array}\right. \tag{4.64}$$

uniformemente en $(s_0, p_0, p) \in K \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$*, siendo* $K \subset \mathbb{R}$ *un compacto. Supongamos, además, que para cada* $R > 0$ *y* $k^* > 0$*, existe* $M_{R,k^*} > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \partial_s f(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p)\, d\lambda \right| \le M_{R,k^*}, \\ &\left| \int_0^1 \partial_{p_i} f(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p)\, d\lambda \right| \le M_{R,k^*}, \quad 1 \le i \le N, \end{aligned} \tag{4.65}$$

para cualesquiera $s_0 \in [-k^*, k^*]$*,* $s \in [-R, R]$ *y* $p_0, p \in \mathbb{R}^N$*. Sea* (u^*, ϕ^*) *una solución débil de* (4.42) *en* $L^\infty(Q)^2$ *asociada a* $(u_0^*, \phi_0^*) \in (W^{2-2/s_1, s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$*, con* $s_1 > N/2 + 1$*, y a* $v^* \in L^2(Q)$*. Entonces, para cualquier dato inicial* (u_0, ϕ_0) *en* $(W^{2-2/s_1, s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$*, existe un control* $v \in L^2(Q)$ *y un estado* $(u, \phi) \in L^\infty(Q)^2$ *asociado a* (u_0, ϕ_0) *y a* v *tal que*

$$u(x, T) = u^*(x, T) \quad y \quad \phi(x, T) = \phi^*(x, T) \quad en\ \Omega.$$

□

***Observación* 4.8** Dado que, cuando $f(0,0) = h(0) = 0$, la controlabilidad exacta a cero puede interpretarse como la controlabilidad exacta a la trayectoria $(u^*, \phi^*) \equiv (0, 0)$ (asociada a $v^* = 0$ y a $(u_0^*, \phi_0^*) = (0, 0)$), parece natural que para probar el Teorema 4.9 impongamos hipótesis ligeramente más fuertes que las exigidas en el Teorema 4.8, tales como (4.64)–(4.65). Por otro lado, la hipótesis (4.47) sobre el crecimiento de h, que no es otra que

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s|)} \int_0^1 h'(\lambda s)\, d\lambda = 0,$$

es equivalente a

$$\begin{cases} \displaystyle \lim_{|s| \to \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s|)} \left| \int_0^1 h'(s_0 + \lambda s)\, d\lambda \right| = 0, \\ \text{uniformemente en } s_0 \in K \text{ para cada compacto } K \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

como ya se observó en [17]. □

Demostración del Teorema 4.9: En primer lugar, pongamos $w = u - u^*$ y $q = \phi - \phi^*$, con (u^*, ϕ^*) como en el enunciado. Entonces, (u, ϕ) resuelve (4.42) con término de control v si y sólo si (w, q) satisface

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + \widetilde{f}(x, t; w, \nabla w) = -\Delta q + \nu \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t q - \Delta q + \widetilde{h}(x, t; q) = w \ \text{ en } Q, \\ w = 0, \quad q = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ w(0) = u_0 - u_0^*, \quad q(0) = \phi_0 - \phi_0^* \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.66}$$

donde $\nu = v - v^*$ y $\widetilde{f}, \widetilde{h}$ vienen dadas por

$$\widetilde{f}(x,t;s,p) = f(u^*(x,t)+s, \nabla u^*(x,t)+p) - f(u^*(x,t), \nabla u^*(x,t)),$$
$$\widetilde{h}(x,t;s) = h(\phi^*(x,t)+s) - h(\phi^*(x,t)),$$

para $(x,t) \in Q$, $s \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}^N$. Gracias al cambio de variables introducido, la demostración del lema se reduce a probar que existe un control $\nu \in L^2(Q)$ tal que el sistema (4.66) posee una solución $(w,q) \in L^\infty(Q)^2$ verificando

$$w(x,T) = 0 \quad \text{y} \quad q(x,T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Para garantizar la existencia de tal control, es suficiente ver que las funciones $\widetilde{f}$ y $\widetilde{h}$ verifican las propiedades de la Observación 4.7. Notemos que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{h}$ pueden escribirse en la forma

$$\widetilde{f}(x,t;s,p) = \widetilde{g}(x,t;s,p)s + \widetilde{G}(x,t;s,p)\cdot p \quad \text{y} \quad \widetilde{h}(x,t;s) = \widetilde{H}(x,t;s)s,$$

para $(x,t) \in Q$, $s \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}^N$, donde

$$\widetilde{g}(x,t;s,p) = \int_0^1 \partial_s f(u^*(x,t)+\lambda s, \nabla u^*(x,t)+\lambda p)\, d\lambda,$$

$$\widetilde{G}_i(x,t;s,p) = \int_0^1 \partial_{p_i} f(u^*(x,t)+\lambda s, \nabla u^*(x,t)+\lambda p)\, d\lambda, \quad 1 \le i \le N,$$

y

$$\widetilde{H}(x,t;s) = \int_0^1 h'(\phi^*(x,t)+\lambda s)\, d\lambda.$$

Teniendo en cuenta la regularidad de h y (u^*, ϕ^*), las expresiones precedentes y las hipótesis (4.47), (4.64) y (4.65) (véase también la Observación 4.8), es un ejercicio sencillo comprobar que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{h}$ verifican las condiciones de la Observación 4.7. Esto termina la demostración del lema. $\square$

***Observación* 4.9** Adaptando la demostración anterior, se deduce sin dificultad un resultado de controlabilidad exacta local a trayectorias para el sistema (4.42). $\square$

4.4. Controlabilidad aproximada de un sistema de campo de fases superlineal

En esta sección mostramos el siguiente resultado de controlabilidad aproximada para un sistema superlineal de campo de fases de la forma (4.42):

Teorema 4.10 *Supongamos que f y h están en las hipótesis del Teorema 4.9. Entonces, para cualesquiera $T > 0$, $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, con $s_1 > N/2+1$, $u_d, \phi_d \in L^2(\Omega)$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(Q)$ y un estado (u, ϕ) en $L^\infty(Q)^2$ asociado a v y a (u_0, ϕ_0) tal que*

$$\|u(\cdot, T) - u_d\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon \quad y \quad \|\phi(\cdot, T) - \phi_d\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon. \tag{4.67}$$

Demostración: Sean f y h dos funciones en las hipótesis del Teorema 4.9 y sean $T > 0$, $\varepsilon > 0$ y $u_0, \phi_0 \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $s_1 > N/2 + 1$. Obsérvese que es suficiente probar el resultado para datos finales $u_d, \phi_d \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, por ser este espacio denso en $L^2(\Omega)$. La demostración se hará en varios pasos.

1. En primer lugar, existe $\delta_0 > 0$ (dependiendo sólo de Ω, u_d, ϕ_d, f y h) tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + f(w, \nabla w) = -\Delta q \text{ en } \Omega \times (0, \delta_0), \\ \partial_t q - \Delta q + h(q) = w \text{ en } \Omega \times (0, \delta_0), \\ w = 0, \quad q = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \delta_0), \\ w(x, 0) = u_d(x), \quad q(x, 0) = \phi_d(x) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

posee una solución $(w, q) \in L^\infty(\Omega \times (0, \delta_0))^2$ verificando

$$w(\cdot, t),\ q(\cdot, t) \in W^{2-2/s_1,s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \forall t \in [0, \delta_0].$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ suficientemente pequeño tal que

$$\|w(\cdot, t) - u_d\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon,\ \|q(\cdot, t) - \phi_d\|_{2;\Omega} \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, \delta_1]. \tag{4.68}$$

2. Dado δ_1 verificando (4.68), fijamos $m \in I\!N$ tal que $\delta := T/m \leq \delta_1$. En virtud del Teorema 4.9, existe $v_1 \in L^2(\Omega \times (0, \delta))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + v_1 \mathbf{1}_\omega \text{ en } \Omega \times (0, \delta), \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \text{ en } \Omega \times (0, \delta), \\ u = 0, \quad \phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \delta), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

admite una solución $(u_1, \phi_1) \in L^\infty(\Omega \times (0, \delta))^2$ tal que

$$u_1(x, \delta) = w(x, \delta), \quad \phi_1(x, \delta) = q(x, \delta) \text{ en } \Omega.$$

3. De nuevo por el Teorema 4.9, existe $\widetilde{v} \in L^2(\Omega \times (0, \delta))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u) = -\Delta\phi + \widetilde{v} \mathbf{1}_\omega \text{ en } \Omega \times (0, \delta), \\ \partial_t \phi - \Delta\phi + h(\phi) = u \text{ en } \Omega \times (0, \delta), \\ u = 0, \quad \phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \delta), \\ u(x, 0) = w(x, \delta), \quad \phi(x, 0) = q(x, \delta) \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

tiene una solución $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}) \in L^\infty(\Omega \times (0,\delta))^2$ verificando

$$\widetilde{u}(x,\delta) = w(x,\delta), \quad \widetilde{\phi}(x,\delta) = q(x,\delta) \text{ en } \Omega.$$

4. *Conclusión.* Construimos finalmente el control buscado v de la siguiente manera. Pongamos $I_k = [(k-1)\delta, k\delta]$, para $1 \le k \le m$. Para (x,t) c.p.d. en Q, definimos

$$v(x,t) = \begin{cases} v_1(x,t) & \text{si } (x,t) \in \Omega \times I_1, \\ \widetilde{v}(x, t-(k-1)\delta) & \text{si } (x,t) \in \Omega \times I_k, \quad 2 \le k \le m. \end{cases}$$

Por construcción, $v \in L^2(Q)$ y el correspondiente sistema (4.42) admite una solución $(u,\phi) \in L^\infty(Q)^2$ tal que

$$u(x,T) = w(x,\delta), \quad \phi(x,T) = q(x,\delta) \quad \text{en } \Omega.$$

Finalmente, recordando (4.68) y que $\delta \le \delta_1$, se tiene (4.67). Ello concluye la prueba. □

4.5. Controlabilidad exacta a cero de otros sistemas parabólicos acoplados no lineales

Una mirada detallada a la demostración del Teorema 4.8 revela que podemos probar el resultado para sistemas parabólicos acoplados no lineales más generales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u, \nabla u, \phi, \nabla \phi) = -\Delta \phi + v\mathbf{1}_\omega \text{ en } Q, \\ \partial_t \phi - \Delta \phi + h(\phi) = u \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.69}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitziana, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, el dato inicial (u_0, ϕ_0) está dado en $\left(W^{2-2/s_1, s_1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$, con $s_1 > N/2 + 1$, y $v \in L^2(Q)$ es nuevamente una función control por determinar que actúa sobre un abierto no vacío $\omega \subset \Omega$ arbitrariamente pequeño. Supondremos que las funciones f y h tienen determinado crecimiento superlineal en el infinito y que verifican $f(0,0,0,0) = 0$ y $h(0) = 0$.

Al ser f localmente Lipschitziana, podemos escribir

$$f(s,p,\sigma,\pi) = g_1(s,p,\sigma,\pi)s + G_1(s,p,\sigma,\pi) \cdot p + g_2(s,p,\sigma,\pi)\sigma + G_2(s,p,\sigma,\pi) \cdot \pi,$$

para cualquier $(s,p,\sigma,\pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, donde $g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $G_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $i = 1,2$, son las funciones L^∞_{loc} definidas por

$$g_1(s,p,\sigma,\pi) = \int_0^1 \partial_s f(\lambda s, \lambda p, \lambda \sigma, \lambda \pi)\, d\lambda, \quad G_1(s,p,\sigma,\pi) = \int_0^1 \partial_p f(\lambda s, \lambda p, \lambda \sigma, \lambda \pi)\, d\lambda,$$

$$g_2(s,p,\sigma,\pi) = \int_0^1 \partial_\sigma f(\lambda s, \lambda p, \lambda \sigma, \lambda \pi)\, d\lambda, \quad G_2(s,p,\sigma,\pi) = \int_0^1 \partial_\pi f(\lambda s, \lambda p, \lambda \sigma, \lambda \pi)\, d\lambda,$$

para cualquier $(s,p,\sigma,\pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (aquí hemos denotado por $\partial_\sigma f$ la derivada de f con respecto a σ y por $\partial_\pi f$ el gradiente de f con respecto a π).

En la situación anterior, se tiene el siguiente resultado de controlabilidad exacta a cero:

Teorema 4.11 *Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana y $h \in C^1(\mathbb{R})$, con $h'' \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, verificando*

i) $f(0,0,0,0) = 0$, $h(0) = 0$;

ii) para cada $R > 0$, existe $M_R > 0$ tal que

$$|g_1(s,p,\sigma,\pi)| + |G_1(s,p,\sigma,\pi)| + |g_2(s,p,\sigma,\pi)| + |G_2(s,p,\sigma,\pi)| \le M_R,$$

para cualesquiera $s, \sigma \in [-R,R]$, $p, \pi \in \mathbb{R}^N$;

iii)

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{|s|+|\sigma|\to\infty} \frac{|g_1(s,p,\sigma,\pi)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|\sigma|)} = 0, & \displaystyle\lim_{|s|+|\sigma|\to\infty} \frac{|G_1(s,p,\sigma,\pi)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|\sigma|)} = 0, \\ \displaystyle\lim_{|s|+|\sigma|\to\infty} \frac{|g_2(s,p,\sigma,\pi)|}{\log^{2}(1+|s|+|\sigma|)} = 0 \quad y & \displaystyle\lim_{|s|+|\sigma|\to\infty} \frac{|G_2(s,p,\sigma,\pi)|}{\log(1+|s|+|\sigma|)} = 0 \end{cases}$$

uniformemente en $(p,\pi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$;

iv)

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \frac{|h(\sigma)|}{|\sigma|\log^{3/2}(1+|\sigma|)} = 0.$$

Entonces, para cualquier $T > 0$, el sistema (4.69) *es exactamente controlable a cero en el instante T.* □

***Observación* 4.10** La prueba del resultado precedente sigue los pasos de la del Teorema 4.8 y, por ello, la omitiremos. Nos limitaremos a señalar los pasos esenciales en el análisis de la controlabilidad exacta a cero de un sistema lineal similar a (4.69), con el fin de ayudarnos a comprender las hipótesis impuestas a las no linealidades en el Teorema 4.11. Sea $\mathcal{B}_0$ un abierto no vacío arbitrariamente pequeño tal que $\mathcal{B}_0 \subset\subset \omega \subset \Omega$. Dados $a, c, e \in L^\infty(Q)$, $B, F \in L^\infty(Q)^N$ y $u_0, \phi_0 \in L^2(\Omega)$ (al menos), consideramos el sistema lineal acoplado

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + B\cdot\nabla u + au + F\cdot\nabla\phi + e\phi = -\Delta\phi + v\mathbf{1}_{\mathcal{B}_0} \ \text{ en } Q, \\ \partial_t\phi - \Delta\phi + c\phi = u \ \text{ en } Q, \\ u = 0, \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \phi(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.70}$$

y el correspondiente sistema adjunto

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - \Delta\varphi + c\varphi - \nabla\cdot(F\psi) + e\psi = -\Delta\psi \ \text{ en } Q, \\ -\partial_t\psi - \Delta\psi - \nabla\cdot(B\psi) + a\psi = \varphi \ \text{ en } Q, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x), \quad \psi(x,T) = \psi^0(x) \ \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{4.71}$$

Como hicimos notar en la Sección 1.5 de la Memoria (véase la página 38), existen dos constantes positivas C y $\widetilde{\sigma}$ (dependiendo sólo de Ω y $\mathcal{B}_0$) tales que la solución (φ,ψ) de (4.71) asociada a cualesquiera $\varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega)$ satisface la desigualdad de Carleman (1.38) (con α de la forma (1.11)), para cualquier $s \geq \widetilde{s} = \widetilde{\sigma}(\Omega,\mathcal{B}_0)(T + T^2\widetilde{M})$, siendo

$$\begin{aligned}\widetilde{M} = 1 &+ \|a+c\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{1/2} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|e\|_\infty^{1/4} + \|e\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty \\ &+ \|B\|_\infty^2 + \|F\|_\infty^{1/4} + \|F\|_\infty^{1/3} + \|F\|_\infty^{2/3} + \|F\|_\infty.\end{aligned}$$

Combinando dicha estimación de Carleman con las correspondientes estimaciones de energía, se prueba la siguiente desigualdad de observabilidad para las soluciones de (4.71):

$$\|\varphi(0)\|_{2;\Omega}^2 + \|\psi(0)\|_{2;\Omega}^2 \leq \exp(C\widetilde{\mathcal{H}}) \iint_{\mathcal{B}_0\times(0,T)} |\psi|^2 \, dx\, dt, \quad \forall \varphi^0, \psi^0 \in L^2(\Omega),$$

donde $C = C(\Omega,\mathcal{B}_0) > 0$ y $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}(T,a,c,e,B,F) > 0$ viene dada por

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{M} + \frac{1}{T} + T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|e\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|F\|_\infty^2\right),$$

con $\widetilde{M} > 0$ como más arriba. La desigualdad de observabilidad anterior nos permite obtener una función control $\hat{v} \in L^2(Q)$, con $\operatorname{sop} \hat{v} \subset \overline{\mathcal{B}}_0 \times [0,T]$, que da la controlabilidad exacta a cero del sistema (4.70) y podemos estimar

$$\|\hat{v}\|_{2;Q} \leq \exp\left(\frac{C}{2}\widetilde{\mathcal{H}}\right)(\|u_0\|_{2;\Omega} + \|\phi_0\|_{2;\Omega}),$$

con $C = C(\Omega,\omega) > 0$ y $\widetilde{\mathcal{H}} > 0$ como anteriormente. Para convencerse de ello, basta seguir la demostración del Teorema 4.4. Finalmente, la construcción de controles en $L^r(Q)$ sigue los mismos pasos de la llevada a cabo en la Subsección 4.2.2, obteniendo un resultado análogo al Corolario 4.7, pero reemplazando en las estimaciones la constante $\mathcal{H}_0$ por $\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \widetilde{\mathcal{H}}_0(T,a,c,e,B,F)$ dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}_0 = 1 &+ \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|c\|_\infty^{2/3} + \|e\|_\infty^{1/2} + \|B\|_\infty^2 + \|F\|_\infty \\ &+ T\left(1 + \|a\|_\infty + \|c\|_\infty + \|e\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|F\|_\infty^2\right).\end{aligned}$$

El estudio detallado del caso lineal combinado con un argumento de punto fijo análogo al llevado a cabo en la prueba del mencionado teorema, nos dan el resultado cuando las funciones g_i, G_i, $i = 1, 2$, y h'' son continuas. Solamente indicamos que, en este caso, elegimos el intervalo temporal $(0, T_R)$, con T_R dado por

$$T_R = \text{mín}\{T, \alpha_{1,R}^{-1/3}, \alpha_{2,R}^{-1/2}, \beta_{2,R}^{-1}, \kappa_R^{-1/3}\},$$

donde

$$\alpha_{i,R} = \sup_{|s|+|\sigma|\leq R,\, p,\pi\in\mathbf{R}^N} |g_i(s,p,\sigma,\pi)|, \quad \beta_{i,R} = \sup_{|s|+|\sigma|\leq R,\, p,\pi\in\mathbf{R}^N} |G_i(s,p,\sigma,\pi)|, \quad i = 1, 2,$$

y

$$\kappa_R = \max_{|\sigma|\leq R} |H(\sigma)|.$$

Adaptando la etapa 2 del Teorema 4.8 a la presente situación, se prueba el resultado en el caso general.

□

4.6. Comentarios adicionales y algunos resultados que quedan pendientes

Finalizamos el capítulo con unos breves comentarios, algunos de los cuales dan lugar a cuestiones sobre las que pretendemos seguir nuestra investigación.

1. La técnica de construcción de controles regulares desarrollada en el Capítulo anterior permite obtener un control $v \in L^r(Q)$, $r \in [2, \infty)$, que resuelve el problema lineal de controlabilidad nula (4.14)–(4.15) cuando $D \equiv 0$, bajo la hipótesis adicional $\nabla c \in L^\gamma(Q)^N$ (γ dado por (4.37)), sin necesidad de utilizar la desigualdad de Carleman (1.38) establecida en el Teorema 1.7. Bastaría con controlar el sistema a cero con dos controles en $L^2(Q)$, uno en la ecuación de la entalpía u y otro en la ecuación del parámetro de fase ϕ (actuando ambos sobre un mismo abierto $B_0 \subset\subset \omega$) y eliminar seguidamente el segundo control mediante la mencionada técnica[2].

   Utilizando un argumento similar, es posible controlar a cero, con un solo control

[2] Recuérdese un comentario similar en el marco de la existencia de controles insensibilizantes (ver p. 127).

distribuido v, un sistema de 3 ecuaciones lineales del calor acopladas de la forma

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 + B \cdot \nabla y_1 + a y_1 = \xi_1 + v \mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t y_2 - \Delta y_2 = y_1 + \xi_2 \ \text{ en } Q, \\ \partial_t y_3 - \Delta y_3 = y_2 + \xi_3 \ \text{ en } Q, \\ y_i = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad 1 \le i \le 3, \\ y_i(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \quad 1 \le i \le 3, \end{cases} \tag{4.72}$$

con potenciales a y B en L^∞ y términos fuente ξ_i $(1 \le i \le 3)$ bajo hipótesis adecuadas[3]. En primer lugar, se obtendrían tres controles $\hat{v}_i$ $(1 \le i \le 3)$ actuando sobre un abierto $\omega_0 \subset\subset \omega$ que resuelvan el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y}_1 - \Delta \hat{y}_1 + B \cdot \nabla \hat{y}_1 + a \hat{y}_1 = \xi_1 + \hat{v}_1 \mathbf{1}_{\omega_0} \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \hat{y}_2 - \Delta \hat{y}_2 = \hat{y}_1 + \xi_2 + \hat{v}_2 \mathbf{1}_{\omega_0} \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \hat{y}_3 - \Delta \hat{y}_3 = \hat{y}_2 + \xi_3 + \hat{v}_3 \mathbf{1}_{\omega_0} \ \text{ en } Q, \\ \hat{y}_i = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad 1 \le i \le 3, \\ \hat{y}_i(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \quad 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

Se considera seguidamente una función $\theta \in \mathcal{D}(\widetilde{\omega})$ ($\widetilde{\omega}$ es un nuevo abierto regular tal que $\omega_0 \subset\subset \widetilde{\omega} \subset \omega$) verificando $\theta \equiv 1$ en un entorno de ω_0. Entonces, si los términos fuente ξ_i $(1 \le i \le 3)$ son suficientemente regulares, las funciones $y_1 = (1-\theta)\hat{y}_1 - \theta\xi_2 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_2 + (\Delta\theta)\hat{y}_2 + (\partial_t - \Delta)[-\theta\xi_3 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_3 + (\Delta\theta)\hat{y}_3]$, $y_2 = (1-\theta)\hat{y}_2 - \theta\xi_3 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_3 + (\Delta\theta)\hat{y}_3$ e $y_3 = (1-\theta)\hat{y}_3$ también lo son y resuelven el problema de controlabilidad nula para el sistema (4.72) con término de control v dado por

$$\begin{aligned} v = & -\theta\xi_1 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_1 + (\Delta\theta)\hat{y}_1 - \nabla\theta \cdot (B\hat{y}_1) \\ & + (\partial_t - \Delta + B \cdot \nabla + a)\left[-\theta\xi_2 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_2 + (\Delta\theta)\hat{y}_2\right] \\ & + (\partial_t - \Delta + B \cdot \nabla + a)\left[(\partial_t - \Delta)(-\theta\xi_3 + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y}_3 + (\Delta\theta)\hat{y}_3)\right]. \end{aligned}$$

Un razonamiento similar permite controlar a cero, con un solo control distribuido,

[3] Obsérvese que si el problema de controlabilidad nula tiene condiciones iniciales no homogéneas, éste puede ser fácilmente llevado a la forma (4.72), con términos fuente ξ_i, al menos, en X^p con p arbitrario en $(1,\infty)$.

un sistema de m ecuaciones lineales del calor acopladas de la forma

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 + B \cdot \nabla y_1 + a y_1 = \xi_1 + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t y_2 - \Delta y_2 = y_1 + \xi_2 \ \text{ en } Q, \\ \partial_t y_3 - \Delta y_3 = y_2 + \xi_3 \ \text{ en } Q, \\ \cdots \\ \partial_t y_m - \Delta y_m = y_{m-1} + \xi_m \ \text{ en } Q, \\ y_i = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad 1 \le i \le m, \\ y_i(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \quad 1 \le i \le m, \end{cases}$$

con $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y bajo hipótesis adecuadas sobre los términos fuente ξ_i $(1 \le i \le m)$. Esta estrategia también contempla la posibilidad de considerar términos lineales de orden cero (no de primer orden) en las $m-1$ últimas ecuaciones, aunque ello conlleva pedir hipótesis adicionales de regularidad sobre los potenciales.

2. Extendiendo el Teorema 4.11 a términos no lineales más generales de la forma $f(x,t;u(x,t),\nabla u(x,t),\phi(x,t),\nabla\phi(x,t))$ y $h(x,t;\phi(x,t))$ (con $(x,t) \in Q$) bajo hipótesis adecuadas, pueden obtenerse sendos resultados de controlabilidad exacta a trayectorias y controlabilidad aproximada para el sistema (4.69), análogos a los establecidos en los Teoremas 4.9 y 4.10. Los detalles quedarán recogidos en el trabajo en preparación [29].

3. Sería de interés generalizar los Teoremas 4.8, 4.9 y 4.10 al caso de modelos similares en los que se consideran, en la ecuación del parámetro de fase ϕ, no linealidades de la forma $h(\phi,\nabla\phi)$ con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Para ello, deberían construirse "buenos" controles para el problema de controlabilidad nula

$$\begin{cases} \partial_t U - \Delta U + B \cdot \nabla U + aU = -\Delta\Phi - \eta'\overline{u} + v\mathbf{1}_\omega \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \Phi - \Delta\Phi + D \cdot \nabla\Phi + c\Phi = U - \eta'\overline{\phi} \ \text{ en } Q, \\ U = 0, \quad \Phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ U(x,0) = 0, \quad \Phi(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{4.73}$$

$$U(x,T) = 0, \quad \Phi(x,T) = 0 \ \text{ en } \Omega,$$

donde $(\overline{u},\overline{\phi})$ es ahora la solución débil de

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u} - \Delta\overline{u} + B \cdot \nabla\overline{u} + a\overline{u} = -\Delta\overline{\phi} \ \text{ en } Q, \\ \partial_t \overline{\phi} - \Delta\overline{\phi} + D \cdot \nabla\Phi + c\overline{\phi} = \overline{u} \ \text{ en } Q, \\ \overline{u} = 0, \quad \overline{\phi} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{u}(x,0) = u_0(x), \quad \overline{\phi}(x,0) = \phi_0(x) \ \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

donde $a, c \in L^\infty(Q)$ y $B, D \in L^\infty(Q)^N$. Sin embargo, en la línea de un comentario hecho en el capítulo anterior, la técnica de contrucción de controles regulares desarrollada en el capítulo anterior no puede aplicarse a sistemas acoplados de este tipo. En efecto, supongamos que ya hemos obtenido un control $\hat{v}$ en $L^2(Q)$, con sop $\hat{v} \subset \overline{B}_0 \times [0, T]$, que nos da la controlabilidad nula del sistema (4.73) ($B_0 \subset \omega$ es un abierto no vacío). Partiendo de $\hat{v}$ y de la correspondiente solución $(\hat{U}, \hat{\Phi})$ de (4.73), la expresión de un nuevo control obtenido mediante la mencionada estrategia sería:

$$\begin{array}{rcl} v &=& \theta\eta'\overline{u} - 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{\Phi} - (\Delta\theta)\hat{\Phi} + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{U} + (\Delta\theta)\hat{U} - \nabla\theta \cdot (B\hat{U}) \\ &+& (\partial_t - \Delta + B \cdot \nabla + a)\left[\theta\eta'\overline{\phi} + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{\Phi} + (\Delta\theta)\hat{\Phi} - \nabla\theta \cdot (D\hat{U})\right], \end{array}$$

donde $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$ verifica $\theta \equiv 1$ en B_0. Observamos que, si $D \in L^\infty(Q)^N$, algunos términos de esta expresión no son suficientemente regulares para que el estado (U, Φ) esté en un espacio adecuado para aplicar un argumento adecuado de punto fijo, luego el problema permanece abierto para tales no linealidades.

4. Queda asimismo pendiente la investigación de las propiedades de controlabilidad para sistemas no lineales de campo de fases y otros problemas parabólicos no lineales acoplados más generales cuando sobre el sistema ejercemos un control frontera. Por otro lado, sería también de interés intentar extender las propiedades de controlabilidad que se muestran en este último capítulo de la Memoria al caso de dominios no acotados.

Apéndice A

Demostración de algunos resultados técnicos

Concluimos la Memoria con un apéndice en el que demostramos algunos resultados de carácter técnico enunciados en la Sección 3.2.

Demostración de la Proposición 3.1: Sean $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $r \in [2, \infty)$. La prueba de los dos primeros apartados es análoga. Nos centraremos en la demostración del primero y en el caso $N > 2$ y $r \in (2, \infty)$, siendo la discusión similar, pero más directa, en los otros casos.

Consideramos una solución débil $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ de (3.14) y sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ como en el enunciado. A lo largo de la prueba, C designará una constante genérica positiva independiente de T, cuyo valor puede cambiar de una línea a la siguiente. Por simplicidad, la dependencia de la constante C con respecto a Ω, N, r, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$, al no ser esencial en nuestro análisis, no se explicitará.

a) Supongamos que $F \in L^r(\delta, T; L^r(\mathcal{V}))$, con $\delta \in [0, T)$ arbitrario, y fijemos $\delta' \in (\delta, T)$. Procederemos en varias etapas y, en cada una de ellas, realizaremos una localización en espacio y tiempo.

Consideramos una familia de abiertos $\{\mathcal{V}_i\}_{0 \le i \le I+1}$ tales que

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_{I+1} \subset\subset \mathcal{V}_I \subset\subset \cdots \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}_0 \subset\subset \mathcal{V},$$

donde el entero I se determinará más adelante (veremos que I depende de N y r). Dividimos el intervalo $[\delta, \delta']$ en $I + 2$ partes iguales y ponemos

$$\delta_i = \delta + \frac{(i+1)(\delta' - \delta)}{I+2}, \quad i = 0, 1, \ldots, I+1.$$

$\diamond$ En primer lugar, consideramos una función $\eta_0 \in C^\infty([0, T])$ verificando

$$\eta_0 \equiv 0 \text{ en } [0, \delta], \quad \eta_0 \equiv 1 \text{ en } [\delta_0, T] \quad \text{y} \quad 0 \le \eta \le 1,\ |\eta_0'(t)| \le \frac{C}{\delta_0 - \delta} \quad \text{en } [0, T],$$

y sea $\xi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ tal que $\xi_0 \equiv 1$ en $\mathcal{V}_0$. Poniendo $w_0 = \eta_0 \xi_0 y$, es fácil comprobar que w_0 resuelve el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t w - \Delta w = G \ \text{ en } Q, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad w(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \tag{A.1}$$

con $G = G_0$ dada por

$$G_0 = \eta_0 \xi_0 F + \eta_0' \xi_0 y - \eta_0 \left[\xi_0 a y + \xi_0 B \cdot \nabla y + 2 \nabla \xi_0 \cdot \nabla y + (\Delta \xi_0) y \right].$$

De la regularidad de y y F (y por la elección de η_0 y ξ_0), deducimos que $G_0 \in L^2(Q)$ y

$$\|G_0\|_{2;Q} \leq C M_0 \left(\|F\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1) \cap C(L^2)} \right), \tag{A.2}$$

con $M_0 = M_0(\delta' - \delta, a, B) > 0$ dada por (3.16). Entonces,

$$w_0 \in Y = \{ u : u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\, \partial_t u \in L^2(Q) \} (\subset C([0,T]; L^2(\Omega)),$$

con

$$\|w_0\|_Y \leq C \|G_0\|_{2;Q} \quad (\text{aquí } C = 1).$$

Así, recordando que $w_0|_{\mathcal{V}_0 \times (\delta_0,T)} \equiv y|_{\mathcal{V}_0 \times (\delta_0,T)}$ y (A.2), deducimos que

$$\begin{array}{c} y \in L^2(\delta_0,T; H^2(\mathcal{V}_0)) \cap L^\infty(\delta_0,T; H^1(\mathcal{V}_0)), \\ \|y\|_{L^2(\delta_0,T;H^2(\mathcal{V}_0)) \cap L^\infty(\delta_0,T;H^1(\mathcal{V}_0))} \leq C M_0 \left(\|F\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1) \cap C(L^2)} \right), \end{array} \tag{A.3}$$

con $M_0 > 0$ como antes.

$\diamond$ Sean ahora $\xi_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_0)$ y $\eta_1 \in C^\infty([0,T])$ tales que $\xi_1 \equiv 1$ en $\mathcal{V}_1$,

$$\eta_1 \equiv 0 \ \text{ en } [0,\delta_0], \quad \eta_1 \equiv 1 \ \text{ en } [\delta_1,T] \quad \text{y} \quad 0 \leq \eta_1 \leq 1,\ |\eta_1'(t)| \leq C/(\delta_1 - \delta_0) \ \text{ en } [0,T].$$

Entonces, $w_1 = \eta_1 \xi_1 y$ resuelve (A.1), con $G = G_1$ definida por

$$G_1 = \eta_1 \xi_1 F + \eta_1' \xi_1 y - \eta_1 [\xi_1 a y + \xi_1 B \cdot \nabla y + 2 \nabla \xi_1 \cdot \nabla y + (\Delta \xi_1) y].$$

Por un lado, la regularidad de F y la elección de η_1 y ξ_1 nos dan $\eta_1 \xi_1 F \in L^r(Q)$. Por otro, de (A.3) y de las inyecciones usuales de Sobolev, se sigue que

$$G_1 - \eta_1 \xi_1 F \in L^2(0,T; L^{2^\star}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \quad \text{con } \frac{1}{2^\star} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$$

(recordemos que $N > 2$). Usando desigualdades clásicas de interpolación, obtenemos

$$G_1 - \eta_1 \xi_1 F \in L^r(0,T; L^p(\Omega)), \quad p = \frac{2Nr}{Nr - 4},$$

$$\begin{aligned}\|G_1-\eta_1\xi_1F\|_{L^r(L^p(\Omega))} &\le \|G_1-\eta_1\xi_1F\|^{2/r}_{L^2(L^{2^\star}(\Omega))}\|G_1-\eta_1\xi_1F\|^{1-2/r}_{L^\infty(L^2(\Omega))}\\ &\le M_0\|y\|_{L^2(\delta_0,T;H^2(\mathcal{V}_0))\cap L^\infty(\delta_0,T;H^1(\mathcal{V}_0))}.\end{aligned}$$

De este modo,

$$G_1\in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega)),\quad p_0=\text{mín}\left\{r,\frac{2Nr}{Nr-4}\right\},$$

junto con

$$\|G_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))}\le C\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}+M_0\|y\|_{L^2(\delta_0,T;H^2(\mathcal{V}_0))\cap L^\infty(\delta_0,T;H^1(\mathcal{V}_0))}\right), \tag{A.4}$$

con $M_0>0$ como más arriba. Aplicando ahora el Teorema 2.1 de [27], se tiene que $w_1\in L^r(0,T;W^{2,p_0}(\Omega))$, $\partial_t w_1\in L^r(0,T;L^{p_0}(\Omega))$ y

$$\|w_1\|_{L^r(W^{2,p_0}(\Omega))}+\|\partial_t w_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))}\le C\|G_1\|_{L^r(L^{p_0}(\Omega))}, \tag{A.5}$$

donde la constante positiva C es independiente de T. Como $w_1\equiv y$ en $\mathcal{V}_1\times(\delta_1,T)$, tenemos

$$y\in L^r(\delta_1,T;W^{2,p_0}(\mathcal{V}_1)),\quad \partial_t y\in L^r(\delta_1,T;L^{p_0}(\mathcal{V}_1)),$$

y de (A.3)–(A.5) deducimos la estimación

$$\begin{aligned}&\|y\|_{L^r(\delta_1,T;W^{2,p_0}(\mathcal{V}_1))}+\|\partial_t y\|_{L^r(\delta_1,T;L^{p_0}(\mathcal{V}_1))}\\ &\le C\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}+M_0^2\left(\|F\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathcal{V}))}+\|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right)\right)\\ &\le C(1+T^\alpha)M_0^2\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}+\|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right),\end{aligned} \tag{A.6}$$

con $\alpha=\alpha(r)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}$ y $M_0>0$ como antes. Aquí hemos usado que

$$\|F\|_{L^2(\delta,T;L^2(\mathcal{V}))}\le C(T-\delta)^{1/2-1/r}\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))}.$$

Si $r\le 2+4/N$, es decir, si $p_0=r$, la primera parte de la proposición estaría probada. Supongamos ahora que $r>2+4/N$, es decir, $2<p_0=2Nr/(Nr-4)<r$. Aplicamos ahora el siguiente lema, cuya demostración damos al término de esta prueba.

Lema A.1 *Sean $a\in L^\infty(Q)$, $B\in L^\infty(Q)^N$ e $y\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ una solución débil de* (3.14)*. Supongamos que $F\in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))$, con $\mathcal{V}\subset\Omega$ un abierto, $\delta\in[0,T)$ y $r\in(2,\infty)$ arbitrarios. Sean ω_0 y ω_1 dos abiertos tales que $\omega_1\subset\subset\omega_0\subset\mathcal{V}$ y $\varepsilon_0,\varepsilon_1\in(\delta,T)$, con $\varepsilon_0<\varepsilon_1$. Supongamos que $y\in L^r(\varepsilon_0,T;W^{2,r_0}(\omega_0))$, con $r_0\in[2,r)$. Entonces,*

$$y\in L^r(\varepsilon_1,T;W^{2,r_1}(\omega_1))\quad y\quad \partial_t y\in L^r(\varepsilon_1,T;L^{r_1}(\omega_1)),$$

donde

$$r_1 = \begin{cases} \min\left\{r, \left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{N}\right)^{-1}\right\} & si \quad r_0 < N, \\ r & si \quad r_0 \geq N. \end{cases} \tag{A.7}$$

Además, se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} &\|y\|_{L^r(\varepsilon_1,T;W^{2,r_1}(\omega_1))} + \|\partial_t y\|_{L^r(\varepsilon_1,T;L^{r_1}(\omega_1))} \\ \leq C &\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\right)(1 + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)\left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^r(\varepsilon_0,T;W^{2,r_0}(\omega_0))}\right), \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva que depende de Ω, N, r, ω_0 y ω_1. □

◇ Aplicamos este lema para $i = 1, \dots, I$, reemplazando ε_0, ε_1, ω_0, ω_1, r_0 y r_1, respectivamente, por δ_i, δ_{i+1}, $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_{i+1}$, p_{i-1} y p_i, donde

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_0} - \frac{i}{N} \quad \text{para } \ i = 1, \dots, I-1 \quad \text{ y } \quad p_I = r,$$

con $p_0 = \dfrac{2Nr}{Nr-4}$. De este modo, tenemos

$$y \in L^r(\delta_{i+1}, T; W^{2,p_i}(\mathcal{V}_{i+1})), \quad \partial_t y \in L^r(\delta_{i+1}, T; L^{p_i}(\mathcal{V}_{i+1})), \quad 1 \leq i \leq I,$$

y las correspondientes estimaciones. Para determinar I, observemos que podemos aplicar el Lema A.1 mientras $p_{i-1} < N$ y $p_i < r$, es decir, mientras $i < \dfrac{N(r-2)-4}{2r}$. Así, en I etapas, con

$$I = \left[\frac{N(r-2)-4}{2r}\right] + 1,$$

donde $[\sigma]$ designa la parte entera del número real σ, obtenemos $y \in X^r(\delta', T; \mathcal{V}')$ (recordemos que $\mathcal{V}_{I+1} = \mathcal{V}'$ y $\delta_{I+1} = \delta'$) y la estimación

$$\|y\|_{X^r(\delta',T;\mathcal{V}')} \leq C M_0^I \left(\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^r(\delta_1,T;W^{2,p_0}(\mathcal{V}_1))}\right),$$

con $M_0 > 0$ definida en (3.16). Combinando esta estimación con (A.6), se obtiene inmediatamente (3.15), con $\mathcal{K} = \mathcal{K}(N) = N/2 + 3$, que es una cota uniforme de $I + 2$. La primera parte de la proposición queda así probada.

b) La demostración de este apartado será omitida, al ser idéntica, e incluso más sencilla, que la que acabamos de hacer. Solamente indicar que, en este caso, basta con hacer un proceso de localización en espacio. De ahí que en la estimación no aparezca el término $1/(\delta' - \delta)$, el cual procedía del proceso de localización en tiempo (recordemos que $|\eta_i'(t)| \leq C/(\delta' - \delta)\ \forall t \in [0, T],\ \forall i \in \{0, \dots, I\}$).

c) En las hipótesis del apartado anterior, supongamos además que F está en $L^r(0,T;W^{1,r}(\mathcal{V}))$, $B\equiv 0$ y $\nabla a\in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por (3.17) y $B\equiv 0$. Consideramos un nuevo abierto $\widetilde{\mathcal{V}}$ tal que

$$\mathcal{V}'\subset\subset\widetilde{\mathcal{V}}\subset\subset\mathcal{V}.$$

Aplicando el apartado anterior, se tiene inmediatamente

$$\begin{gathered} y\in X^r(0,T;\widetilde{\mathcal{V}}),\\ \|y\|_{X^r(0,T;\widetilde{\mathcal{V}})}\le C(1+T^\alpha)\,(1+\|a\|_\infty)^{\mathcal{K}}\left(\|F\|_{L^r(L^r(\mathcal{V}))}+\|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right), \end{gathered}\tag{A.8}$$

con $\alpha=\alpha(r)$ y $\mathcal{K}=\mathcal{K}(N)$ como antes. Para concluir la demostración, bastará con ver que, además, se tiene

$$\partial_i y\in X^r(0,T;\mathcal{V}'),\quad 1\le i\le N,\tag{A.9}$$

y la siguiente estimación

$$\|\partial_i y\|_{X^r(0,T;\mathcal{V}')}\le C\widetilde{M}_0\,(1+\|\partial_i a\|_{\gamma;Q})\left(\|F\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}))}+\|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right),$$

donde $\partial_i y$ denota la derivada de y con respecto a x_i $(1\le i\le N)$ y $\widetilde{M}_0$ viene dada por (3.18). Para ello, fijemos $i\in\{1,\dots,N\}$ y pongamos

$$w_i=\zeta\partial_i y,$$

con $\zeta\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{V}})$ tal que $\zeta\equiv 1$ en $\mathcal{V}'$. Por la elección de ζ y las hipótesis sobre y, se comprueba fácilmente que w_i resuelve (A.1) con $G=\widetilde{G}_i$ dada por

$$\widetilde{G}_i=\zeta\partial_i F-\zeta a\partial_i y-\zeta y\partial_i a-2\nabla\zeta\cdot\nabla(\partial_i y)-(\Delta\zeta)\partial_i y\tag{A.10}$$

(aquí usamos, en particular, $y\in C([0,T];H^1(\mathcal{V}))$). Veamos que $\widetilde{G}_i\in L^r(Q)$. Para ello, estudiaremos con detalle el término $\zeta y\partial_i a$. Bajo las hipótesis sobre y, a y F, es inmediato ver que los restantes términos también están en $L^r(Q)$.

Regularidad de $\zeta y\partial_i a$

En primer lugar, observamos que $\zeta y\in X^r$, gracias a la elección de ζ y a (A.8). En virtud del Lema 3.3 de la Memoria y teniendo en cuenta que $\nabla a\in L^\gamma(Q)^N$, con γ dado por (3.17), podemos afirmar lo siguiente:

- ◇ Si $r<N/2+1$, entonces $\zeta y\partial_i a\in L^r(Q)$, puesto que, en este caso, $\zeta y\in L^p(Q)$, con $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{2}{N+2}$ y $\partial_i a\in L^{N/2+1}(Q)$.
- ◇ Si $r=N/2+1$, entonces $\zeta y\in L^q(Q)$ para cualquier $q<\infty$ y $\partial_i a\in L^{N/2+1+\varepsilon}(Q)$ para $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño. De nuevo inferimos que el término bajo estudio está en $L^r(Q)$.

- $\diamond$ Recordando que los espacios de Hölder $C^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q})$ se inyectan de forma continua en $C^0(\overline{Q})$, para $r > N/2+1$ deducimos la regularidad L^r del término $\zeta y \partial_i a$.
- $\diamond$ Finalmente, en cualquiera de los casos anteriores se tiene

$$\|\zeta y \partial_i a\|_{r;Q} \leq C\left(1+\frac{1}{T}\right)\|\zeta y\|_{X^r}\|\partial_i a\|_{\gamma;Q},$$

  con $C>0$ independiente de T.

Volviendo a (A.10), de las consideraciones anteriores deducimos que $\widetilde{G}_i \in L^r(Q)$ y

$$\|\widetilde{G}_i\|_{r;Q} \leq C\left(1+\frac{1}{T}\right)\left(\|\partial_i F\|_{L^r(L^r(\mathcal{V}))} + (1+\|a\|_\infty + \|\partial_i a\|_{\gamma;Q})\,\|y\|_{X^r(0,T;\widetilde{\mathcal{V}})}\right). \quad \text{(A.11)}$$

Aplicamos nuevamente el Teorema 2.1 de [27], infiriendo que

$$w_i \in X^r, \quad \|w_i\|_{X^r} \leq C\|\widetilde{G}_i\|_{r;Q},$$

con $C>0$ independiente de T, que junto a (A.11) y a (A.8), nos da

$$\|w_i\|_{X^r} \leq C\widetilde{M}_0\,(1+\|\partial_i a\|_{\gamma;Q})\left(\|F\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right),$$

con $C = C(\Omega, N, r, \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ y $\widetilde{M}_0$ como antes. Finalmente, teniendo en cuenta que $w_i \equiv \partial_i y$ en $\mathcal{V}'$, se obtiene (A.9) y la correspondiente estimación, con lo que concluye la demostración del resultado. $\square$

Seguidamente pasamos a probar el Lema A.1.

Demostración del Lema A.1: Razonamos nuevamente por localización. Consideramos dos funciones $\widetilde{\eta} \in C^\infty([0,T])$ y $\widetilde{\xi} \in \mathcal{D}(\omega_0)$ tales que $\widetilde{\eta} \equiv 0$ en $[0,\varepsilon_0]$, $\widetilde{\eta} \equiv 1$ en $[\varepsilon_1, T]$, $0 \leq \widetilde{\eta} \leq 1$ y $|\widetilde{\eta}'(t)| \leq C/(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$ en $[0,T]$ y $\widetilde{\xi} \equiv 1$ en ω_1. Pongamos $\widetilde{w} = \widetilde{\eta}\widetilde{\xi}y$. Entonces, $\widetilde{w}$ resuelve (A.1), con

$$G = \widetilde{\eta}\widetilde{\xi}F + \widetilde{\eta}'\widetilde{\xi}y - \widetilde{\eta}\left[\widetilde{\xi}ay + \widetilde{\xi}B\cdot\nabla y + 2\nabla\widetilde{\xi}\cdot\nabla y + (\Delta\widetilde{\xi})y\right].$$

La regularidad de F e y junto a las inyecciones usuales de Sobolev nos dan, en particular, $G \in L^r(0,T;L^{r_1}(\Omega))$ y

$$\|G\|_{L^r(L^{r_1}(\Omega))} \leq CM_0(\varepsilon_1-\varepsilon_0, a, B)\left[\|F\|_{L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))} + \|y\|_{L^r(\varepsilon_0,T;W^{2,r_0}(\omega_0))}\right],$$

con r_1 y $M_0(\cdot, a, B)$ definidos por (A.7) y (3.16), respectivamente (aquí C depende de los abiertos ω_0 y ω_1).

De nuevo en virtud del resultado de Giga y Sohr citado en la página 175, deducimos

$$\widetilde{w} \in L^r(0,T;W^{2,r_1}(\Omega)), \quad \partial_t \widetilde{w} \in L^r(0,T;L^{r_1}(\Omega)),$$
$$\|\widetilde{w}\|_{L^r(W^{2,r_1}(\Omega))} + \|\partial_t \widetilde{w}\|_{L^r(L^{r_1}(\Omega))} \leq C\|G\|_{L^r(L^{r_1}(\Omega))},$$

con $C > 0$ independiente de T. Finalmente, basta con tener en cuenta que $\widetilde{w}$ e y coinciden en $\omega_1 \times (\varepsilon_1, T)$ y la estimación de $\|G\|_{L^r(L^{r_1}(\Omega))}$ para obtener el resultado. □

Terminamos este Apéndice con la demostración del resultado de regularidad interior Hölderiana establecido en la Proposición 3.4, que combina un sencillo argumento de localización y la aplicación del Teorema 5.2 de [39].

Demostración de la Proposición 3.4: Supongamos que estamos en las hipótesis del enunciado, con $\beta \in (0,1)$ y $\mathcal{V}$ fijados. Dado un abierto $\mathcal{V}' \subset\subset \mathcal{V}$, consideramos un abierto regular $\mathcal{V}_1$ tal que $\mathcal{V}' \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}$. De acuerdo con la regularidad de h y del potencial d, podemos aplicar el último apartado de la Proposición 3.1, con $r = (N+2)/(1-\beta)$ (así, $\gamma = r$, puesto que $r > N+2$), y deducir que $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in X^r(0,T;\mathcal{V}_1)$, $i = 1, \ldots, N$, junto con la estimación

$$\|u\|_{X^r(0,T;\mathcal{V}_1)} + \|\nabla u\|_{X^r(0,T;\mathcal{V}_1)^N} \leq C\left[\|h\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}))} + \|u\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right],$$

con $C > 0$ dependiendo de Ω, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$, T, $\|d\|_\infty$ y $\|\nabla d\|_{r;Q}$. Como $r > N+2$, por el Lema 3.3 de la Memoria tenemos

$$u, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}}(\overline{\mathcal{V}}_1 \times [0,T]), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{A.12}$$

con

$$\begin{aligned} &|u|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{\mathcal{V}}_1\times[0,T]} + |\nabla u|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{\mathcal{V}}_1\times[0,T]} \\ &\leq C\left(\Omega, \mathcal{V}, \mathcal{V}', T, \|\widetilde{a}\|_\infty, \|\nabla \widetilde{a}\|_{L^r}\right)\left(\|h\|_{L^r(W^{1,r}(\mathcal{V}))} + \|u\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Veamos que, de hecho, u está en $C^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{\mathcal{V}'}\times[0,T])$ y satisface la estimación (3.19). Para ello, sea $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_1)$ una función tal que $\zeta \equiv 1$ en $\mathcal{V}'$ y pongamos $w = \zeta u$. Entonces, w resuelve

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = \widetilde{h} \ \text{ en } Q, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \quad w(x,0) = 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{A.14}$$

con $\widetilde{h} = \zeta h - [d\zeta u + 2\nabla\zeta\cdot\nabla u + (\Delta\zeta)u]$. La regularidad de h y d junto con (A.12) nos dan $\widetilde{h} \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q})$ y, usando (A.13), se tiene

$$|\widetilde{h}|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{Q}} \leq C\left(|h|_{1+\beta,\frac{1+\beta}{2};\overline{\mathcal{V}}\times[0,T]} + \|u\|_{L^2(H^1)\cap C(L^2)}\right), \tag{A.15}$$

con $C = C(\Omega, \mathcal{V}, \mathcal{V}', T, |\widetilde{a}|_{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}; \overline{Q}})$. Debido a que $\partial\Omega \in C^{3+\beta}$ y al hecho de que se satisface trivialemente la condición de compatibilidad de orden 1 para el sistema (A.14), podemos aplicar el Teorema 5.2 de [39] y obtener $w \in C^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}}(\overline{Q})$, con

$$|w|_{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}; \overline{Q}} \leq C(\Omega, T) |\widetilde{h}|_{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}; \overline{Q}}. \tag{A.16}$$

Finalmente, recordando que $u \equiv w$ en $\mathcal{V}'$, inferimos la regularidad interior deseada de u y se tiene la estimación (3.19), usando (A.16) y (A.15). $\square$

Bibliografía

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.

[2] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, I. Kostin, Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force, SIAM J. Control Optim. 42 (2003), no. 5, 1661–1680.

[3] S. Anita, V. Barbu, Null controllability of a nonlinear convective heat equations, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. 5 (2000), 157–173.

[4] S. Anita, V. Barbu, Local exact controllability of a reaction–diffusion system, Differential Integral Equations 14 (2001), no. 5, 577–587.

[5] V. Barbu, Exact controllability of the superlinear heat equation, Appl. Math. Optim. 42 (2000), no. 1, 73–89.

[6] V. Barbu, Local controllability of the phase field system, Nonlinar Anal. 50 (2002), 363–372.

[7] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the bpundary, SIAM J. Control Optim. 30 (1992), no. 5, 1024–1065.

[8] O. Bodart, C. Fabre, Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), no 3, 658–683.

[9] O. Bodart, M. González-Burgos, R. Pérez-García, Insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity, C.R. Acad. Sci. Paris 335 (2002), no. 8, 677–682.

[10] O. Bodart, M. González-Burgos, and R. Pérez-García, Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity, Comm. Partial Differential Equations, en prensa.

[11] O. Bodart, M. González-Burgos, R. Pérez-García, Insensitizing controls for a heat equation with a nonlinear term involving the state and the gradient, Nonlinear Anal., en prensa.

[12] O. Bodart, M. González-Burgos, R. Pérez-García, A local result on insensitizing controls for the heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions, SIAM J. Control Optim., en prensa.

[13] H. Brézis, Análisis funcional, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[14] V.R. Cabanillas, S.B. de Menezes, E. Zuazua, Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms, J. Optim. Theory Appl. 110 (2001), no. 2, 245–264.

[15] G. Caginalp, An analysis of a phase phield model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal. 92 (1986), pp. 205–245.

[16] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, On the controllability of the heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions, J. Differential Equations 196 (2004), 385–417.

[17] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient, SIAM Journal on Control and Optimization 41 (2002), no. 3, 798-819.

[18] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[19] C. Fabre, J.-P. Puel, E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 125 (1995), no. 1, 31–61.

[20] E. Fernández-Cara, G.C. García, A. Osses, Insensitizing controls for a large-scale ocean circulation model, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 4, 265–270.

[21] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, J.-P. Puel, Null controllability of the linear heat equation with boundary Fourier conditions, en preparación.

[22] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, J.-P. Puel, Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions, Part II: The semilinear case, en preparación.

[23] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, J.-P. Puel, O. Yu. Imanuvilov, Local exact controllability of the NavierStokes system, to aparecerá en J. Math. Pures Appl.

[24] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000), no. 5, 583–616.

[25] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case, Adv. Differential Equations 5 (2000), no. 4–6, 465–514.

[26] A. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Series #34, Seoul National University, Seoul, 1996.

[27] Y. Giga, H. Sohr, Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains, J. Funct. Anal. 102 (1991), no. 1, 72–94.

[28] M. González-Burgos, L. de Teresa, Null controllability of a semilinear heat equation in unbounded domains, en preparación.

[29] M. González-Burgos, R. Pérez-García, Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force, en preparación.

[30] M. González-Burgos, R. Pérez-García, Insensitizing controls for a semilinear heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions, en preparación.

[31] J. Henry, Contrôle d'un réacteur enzymatique à l'aide de modèles à paramètres distribués: Quelques problèmes de contrôlabilité de systèmes paraboliques, Ph. D. Thesis, Université Paris VI, 1978.

[32] M. Hieber, J. Pruss, Heat kernels and maximal L^p-L^q estimates for parabolic evolution equations, Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), no. 9-10, 1647–1669.

[33] O. Yu. Imanuvilov, Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 6 (2001), 39–72.

[34] O.Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, UTMS 98-46.

[35] A. Jiménez-Casas, A. Rodríguez-Bernal, Linear stability analysis and metastable solutions for a phase–field model, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 129 A (1999), 571–600.

[36] A. Jiménez-Casas, A. Rodríguez-Bernal, Asymptotic behaviour for a phase–field model in higher order Sobolev spaces, Revista Matemática Complutense 15 (2002), no. 1, 213–248.

[37] S. Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley Eastern Limited, New Dehli, 1989.

[38] O.A. Ladyzenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, New York-London, 1963.

[39] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Uraltzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Trans. Math. Monograph, Vol. 23, Moscow, 1967.

[40] G. Lebeau, L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 335–356.

[41] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

[42] J.-L. Lions, Quelques notions dans l'analyse et le contrôle de systèmes à données incomplètes, in: Proceedings of the XIth Congress on Differential Equations and Applications/First Congress on Applied Mathematics, University of Málaga, Málaga, 1990, 43–54.

[43] J.-L. Lions, E. Zuazua, A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences. Partial differential equations and applications, 221–235, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 177, Dekker, New York, 1996.

[44] S. Micu, E. Zuazua, On the lack of null controllability of the heat equation on the half line, Transactions of the American Mathematical Society, 353 (2001), 1635–1659.

[45] S. Micu, E. Zuazua, On the lack of null controllability of the heat equation on the half space, Portugaliae Mathematica, 58 (2001), 1–24.

[46] C. Morosanu, D. Motreanu, A generalized phase–field system, J. Math. Anal. Appl. 237 (1999), no. 2, 515–540.

[47] S. Micu, J.H. Ortega, L. de Teresa, ε–Insensitizing controls for pointwise observations of the heat equation, Systems & Control Letters 51 (2004), 407–415.

[48] S. Micu, J.H. Ortega, L. de Teresa, An example of ε–insensitizing controls for the heat equation with non intersecting observation and control regions, preprint.

[49] J.C. Saut, B. Scheurer, Unique continuation for some evolution equations, J. Differential Equations 66 (1987), no. 1, 118–139.

[50] R. Temam, Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis, 2nd edition, North–Holland Publishing Co., Amsterdam 1977.

[51] L. de Teresa, Insensitizing controls for a semilinear heat equation, Comm. Partial Differential Equations 25 (2000), no. 1-2, 39–72.

[52] L. de Teresa, Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation in unbounded domains, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., 2 (1997), 125–149.

[53] E. Zuazua, Exact controllability for the semilinear wave equation, J. Math. Pures Appl. 69 (1990), no. 1, 1–31.

[54] E. Zuazua, Exact boundary controllability for the semilinear wave equation, In Nonlinear Partial Differential Equations and their applications, Vol. X (Paris, 1987–1988), 357–391, Pitman Res. Notes Math. Ser., 220, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[55] E. Zuazua, Exact controllability for semilinear wave equations in one dimension, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10 (1993), no. 1, 109–129.

[56] E. Zuazua, Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities, Control Cybernet. 28 (1999), no. 3, 665–683.