

R.25746

LBS 1358744

UNIVERSIDAD DE SEVILLA ^{BCA}
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio 14 número 195 del libro
correspondiente.

Sevilla, 21 DIC. 2000
El Jefe del Negociado.

P.D.


UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN NO LOCALES

043
362

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

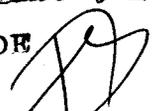
Director: **Pablo Pedregal Tercero**

Autor: **José Carlos Bellido Guerrero**

Sevilla, 2000, UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Dpto. de EDPN
de la Facultad de Matemáticas
de esta Universidad desde el día 27/12/00
hasta el día 24/01/01
Sevilla 27 de diciembre de 2000



EL DIRECTOR DE 

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

**ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS
DE OPTIMIZACIÓN NO LOCALES**

Memoria presentada por
José Carlos Bellido Guerrero
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº

EL DIRECTOR DEL TRABAJO

Sevilla, 27 de octubre del 2000



Fdo. Pablo Pedregal Tercero



Fdo. José Carlos Bellido Guerrero

Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante una beca de formación de personal investigador vinculada al proyecto PB96-0534.

Quisiera expresar mis agradecimientos más sinceros a todas las personas que de alguna manera me han ayudado a realizar este trabajo:

En primer lugar, me gustaría agradecer al director de este trabajo, el profesor Pablo Pedregal, por su apoyo continuo y por la excelente labor de dirección de esta tesis.

Al profesor Vladimír Šverák de la Universidad de Minnesota por acogerme durante tres meses y por las diferentes conversaciones muy fructíferas que mantuvimos sobre el capítulo cuarto.

A los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, y en particular a mi tutor Pepe Real, por su desinteresada ayuda.

A mis compañeros Ernesto Aranda y Julio Muñoz, por tantas cuestiones que me han resuelto, y al resto de mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la UCLM, Juanjo, Henar,.....

A mis compañeros y amigos de la ETSII y de Ciudad Real, Juanjo, María, José Manuel, Natalia, Ernesto, Olga, Octavio, Leticia, Chari, Julio, Pedro,

Por último, quiero dedicar este trabajo a mi familia, a Isabel y a mis amigos, por el cariño que me dan siempre y por su apoyo y ánimos constantes durante estos años.

Índice General

1	Planteamiento y resultados	1
1.1	Introducción: objetivo de este trabajo	1
1.2	Dos casos paradigmáticos: conductividad y elasticidad	6
1.3	Descripción de resultados obtenidos en función de la dimensión	9
1.3.1	El caso unidimensional	10
1.3.2	El caso bidimensional	13
1.3.3	El caso tridimensional	18
1.4	Conclusiones	24
2	El problema de control en dimensión $N = 1$	27
2.1	Introducción	27
2.2	Formulación alternativa	31
2.3	Existencia sin condición integral	35
2.4	Existencia en el caso general	38
2.5	Ejemplos y comentarios	41
3	El problema de control en dimensión $N = 2$	53
3.1	Introducción	53
3.2	Formulación alternativa	55
3.3	Existencia de controles óptimos	60
3.4	Homogeneización y G-clausura	68
3.5	Relajación y medidas parametrizadas	71
4	Principios variacionales bajo la restricción divergencia nula en dimensión $N = 3$	81
4.1	Introducción	81
4.2	Un lema fundamental	85
4.3	Semicontinuidad inferior débil y relajación	87
4.4	Caracterización de medidas parametrizadas	90

4.5	Una aplicación: relajación en micromagnetismo	98
5	El problema de control en dimensión $N=3$	105
5.1	Introducción	105
5.2	Problemas variacionales en los que intervienen gradientes y funciones con divergencia nula	107
5.3	El problema de control óptimo en dimensión $N = 3$	112
5.4	Relajación de un método variacional para tomografía	115
5.5	Relajación en magnetostricción	119
5.6	Relajación en optimización estructural	123
5.6.1	Cuasiconvexidad restringida. Relajación	125
5.6.2	Optimización estructural	131
A	Resultados generales	135
A.1	El método directo	135
A.2	Semicontinuidad inferior débil. Existencia de minimizadores	137
A.3	Problemas no convexos: relajación	140
A.4	Una herramienta importante: las medidas parametrizadas	141
A.5	Medidas parametrizadas gradientes. Problemas generalizados	143
	Bibliografía.	147

Capítulo 1

Planteamiento y resultados

1.1 Introducción: objetivo de este trabajo

Muchos problemas de la ciencia y la tecnología se modelizan matemáticamente como problemas de optimización en los se buscan las soluciones óptimas con un determinado criterio. Dentro de la Teoría de la Optimización, el Cálculo de Variaciones trata el problema de encontrar minimizadores de funcionales en forma de integral definidos sobre espacios de dimensión infinita. Frecuentemente los problemas del Cálculo de Variaciones aparecen sometidos a restricciones, como por ejemplo restricciones de tipo integral en las que se debe garantizar que una determinada integral que depende de las variables del problema, tenga valor fijo o esté acotada por valores dados de antemano. Otro tipo de restricciones que aparecen en muchos modelos físicos “ligan” las variables sobre las que optimizamos mediante alguna ley. Habitualmente estas leyes suelen ser ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales, que usualmente tienen carácter no local. Con esto queremos decir que no podemos deducir de la ecuación diferencial una ley local entre las variables, es decir una ley que relacione valores de una de las variables en un punto con valores del resto de las variables en ese punto. En este contexto se enmarcan los problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones diferenciales. En estos problemas conocemos la ley por la que se rige un cierto sistema físico que viene dada en forma de ecuación diferencial, y disponemos de algún medio para actuar sobre el sistema, es decir, para variar el comportamiento natural del sistema. Las posibilidades que tenemos de actuar sobre el sistema es lo que se suele llamar conjunto de controles admisibles, y es el conjunto sobre el que pretendemos optimizar un determinado criterio o funcional de coste, que depende del control y del estado (o los estados) asociado a cada control; es decir, el coste depende de la solución (o las soluciones) de la ley diferencial que modeliza el estado del medio, cuando

influyamos en el sistema con ese control. Estrictamente hablando, los problemas de control óptimo son problemas de optimización no locales, ya que podemos verlos como problemas de optimización en los que optimizamos sobre pares, que representan el control y el estado, que deben verificar la restricción que es la ley diferencial. Por tanto son admisibles para el problema de optimización si verifican la ecuación diferencial, y posiblemente alguna otra restricción adicional.

En este trabajo nos preocuparemos de una familia de problemas de optimización no locales, que en realidad son problemas de control óptimo en los que el control actúa, o puede actuar, en la estructura principal de la ecuación diferencial, es decir en los coeficientes del término de mayor orden. Por esta razón se suele identificar a estos problemas como problemas de diseño óptimo, optimización estructural, de optimización de forma, etc. Se suele reservar el término problema de control óptimo para aquellos problemas en los que el control actúa en los términos de menor orden o en las condiciones de frontera (ver [39]).

El problema de optimización, que denotaremos como (P) , en el que nos centraremos a lo largo de este trabajo es

$$\text{Minimizar } I(u, y) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

sujeto a

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n), & u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \\ -\operatorname{div} [G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))] = 0, & \text{ en } \Omega, \\ \text{condiciones de frontera para } y, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\int_{\Omega} V(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx \leq \delta.$$

Ω es un abierto regular contenido en \mathbf{R}^N , K un subconjunto cerrado (usualmente compacto) de \mathbf{R}^n , y

$$F(x, u, y, A) : \Omega \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{N \times m} \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

$$G(x, u, y, A) : \Omega \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{N \times m} \rightarrow \mathbf{R}^{N \times l},$$

$$V(x, u, y, A) : \Omega \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{N \times m} \rightarrow \mathbf{R}^d$$

son funciones de Carathéodory, es decir, medibles respecto a x y continuas respecto a (u, y, A) . $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. N, n, m, l, d son enteros positivos. A lo largo de la memoria se irán imponiendo condiciones adicionales sobre los elementos que intervienen en el problema, como por ejemplo condiciones que garanticen la existencia de solución de la ecuación de estado para cada control.

Desde el punto de vista de la optimización este problema es no local, ya que minimizamos el funcional I en las variables u e y , que están ligadas por la restricción no local

$$-\operatorname{div}[G(x, u(x), y(x))\nabla y(x)] = 0.$$

Insistimos de nuevo en que restricción de tipo no local significa que para cada $x \in \Omega$ el valor $y(x)$ depende de todos los valores $u(z)$, con $z \in \Omega$. Estrictamente hablando se trata de un problema de control óptimo gobernado por una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales según el valor de N . Cuando $N > 1$, típicamente tendremos una ecuación en derivadas parciales elíptica de segundo orden. Siguiendo la terminología clásica en la teoría de control, a u lo llamaremos control, a las soluciones de la ecuación de estado (1.1), las llamaremos estados asociados al control u , a los pares (u, y) que verifican el conjunto de restricciones anteriores los llamaremos pares admisibles para el problema de optimización, al funcional I lo llamaremos funcional de coste o criterio, y a la función F función objetivo.

Nuestro objetivo es el de analizar la existencia-no existencia de soluciones óptimas para el problema anterior, y, en el caso de no existencia de solución, la relajación del problema. También estamos interesados en analizar o implementar las conclusiones obtenidas en este sentido en algunas situaciones concretas correspondientes a modelos físicos. La dificultad principal que encontramos, como hemos comentado, radica en el carácter no local de la restricción diferencial que liga las variables sobre las que optimizamos, es decir la ley de estado. Otro punto interesante es la gran generalidad en la que está formulado el problema anterior, que puede ser resumida en los puntos siguientes:

- La ecuación de estado puede ser no lineal en general.
- Permitimos la dependencia respecto de las derivadas del estado en la función objetivo F .

Los resultados para situaciones en los que se da alguna de estas características son prácticamente inexistentes en la literatura (ver [41, 73]). Para llevar a cabo el análisis del problema de control óptimo anterior, vamos a reformularlo en un problema puramente variacional. Esto lo conseguiremos mediante la introducción de funciones potenciales que serán incorporadas al conjunto de variables del problema, y que evitarán que tengamos que tratar el carácter no local de la ecuación de estado directamente. De esta manera conseguiremos un problema variacional de naturaleza local equivalente al problema de control. Veremos que así seremos capaces de probar resultados de existencia y analizar situaciones de no existencia.

Veamos cuál es la idea que hay detrás de la reformulación del problema de control como problema variacional. Por el momento olvidamos la restricción integral, ya que en cierto modo ésta es una restricción adicional al problema que no está directamente relacionada con la ecuación de estado. Dado un par admisible (u, y) para el problema de control, consideremos el campo

$$Z(x) = G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)).$$

Evidentemente

$$\operatorname{div}(Z) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Ahora podemos definir una nueva densidad de coste \tilde{F} de la siguiente manera

$$\tilde{F}(x, y, A, B) = \min_{u \in K(x, y, A, B)} F(x, u, y, A),$$

donde

$$K(x, y, A, B) = \{u \in K : G(x, u, y, A) = B\}.$$

Cuando el conjunto $K(x, y, A, B)$ es vacío damos a \tilde{F} el valor $+\infty$. El mínimo anterior se alcanza pues se trata del mínimo de una función continua sobre un compacto.

Según esta definición es razonable pensar que el problema variacional equivalente al problema de control es el problema

$$\text{Minimizar } \tilde{I}(y, Z) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), Z(x)) dx,$$

donde

$$\operatorname{div}(Z) = 0$$

e

y verifica las condiciones de frontera correspondientes.

A este problema lo denotamos como (\tilde{P}) . La clave de nuestro argumento está en el hecho de que ambos problemas son equivalentes en el sentido de que los ínfimos de los funcionales I e \tilde{I} coinciden y además existe un modo para pasar de soluciones óptimas del problema de control a soluciones óptimas del problema variacional y viceversa.

Mediante la idea anterior, hemos reformulado el problema de control como un problema del Cálculo de Variaciones, en el que minimizamos en las variables independientes y y Z , esta última sometida a la restricción divergencia nula. Las principales ventajas de esta formulación son las siguientes:

- las variables y y Z son independientes;

- no hay ninguna ley de tipo no local que involucre a y y a Z ;
- este problema es un problema que se enmarca en el Cálculo de Variaciones, con lo que podremos recurrir a toda la experiencia acumulada para este tipo de problemas.

Una vez que tenemos claro cuál es el camino para plantear el problema variacional subyacente al problema de control, y la forma de este problema variacional, debemos responder a las siguientes cuestiones:

1. **Validez de la reformulación del problema:** debemos asegurar rigurosamente que el problema de control y su formulación variacional son equivalentes.
2. **Resultados de existencia:** búsqueda de conjuntos de hipótesis que garanticen la existencia de soluciones óptimas de la reformulación variacional.
3. **Análisis de las situaciones de no existencia:** estudio de relajaciones del problema de control basadas en relajaciones de la reformulación variacional.

El problema variacional anterior no se encuentra en el marco más clásico del Cálculo de Variaciones de problemas que provienen de la elasticidad no lineal, en el que se trata de minimizar un determinado funcional en forma de integral, cuyo integrando depende de funciones en un espacio de Sobolev y de sus gradientes. Aquí tenemos un problema en el que el funcional además de depender de gradientes depende de funciones con divergencia nula. Los problemas variacionales sometidos a restricciones de tipo diferencial han sido tratados clásicamente a través de la teoría de compacidad por compensación ([19, 53, 54, 68, 69]). Alternativamente a estos trabajos, nosotros pensamos que en nuestro caso concreto se pueden obtener conclusiones mucho más explícitas, a las del caso de un operador diferencial general, mediante la introducción de potenciales tal y como se han tratado clásicamente los problemas sometidos a la restricción rotacional nulo ([20, 59]) (recordamos que una función tiene rotacional nulo si y sólo si es un gradiente). Sabemos que, si el dominio Ω es simplemente conexo, cuando:

- $N = 1$, $\operatorname{div}(Z) = Z' = 0$ si y sólo si Z es constante en Ω , es decir, existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $Z \equiv c$;
- $N = 2$, $\operatorname{div}(Z) = 0$ si y sólo si Z es un gradiente rotado $\frac{\pi}{2}$, es decir, existe $z : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$Z = T\nabla z = \left(-\frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_1} \right),$$

donde T es la matriz de la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$;

- $N = 3$, $\operatorname{div}(Z) = 0$ si y sólo si Z es un rotacional, es decir, existe $z : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que

$$Z = \nabla \times z = \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_3}, \frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{\partial z_3}{\partial x_1}, \frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right).$$

Ya que pretendemos estudiar el problema variacional anterior a partir de su reformulación con potenciales, el hecho de que los potenciales tengan naturaleza diferente según el valor de N motiva un tratamiento independiente del problema de control en función de la dimensión. En eso consiste el trabajo que aquí presentamos; en analizar el problema de control anterior, a través de la reformulación variacional que hemos indicado en función de la dimensión N .

A lo largo de esta memoria necesitaremos recurrir muchas veces a resultados clásicos o muy conocidos del Cálculo de Variaciones. Con el objetivo de evitar perdernos en detalles y tecnicismos que están fuera del objetivo del trabajo que presentamos aquí, siempre que tengamos que utilizar alguno de esos resultados nos referiremos al Apéndice de la memoria. Este Apéndice además de recoger estos resultados clásicos trata de dar una visión breve y global del Cálculo de Variaciones, presentando alguna de las problemáticas más importantes de este área de la Matemática Aplicada.

1.2 Dos casos paradigmáticos: conductividad y elasticidad

En esta sección vamos a comentar brevemente dos situaciones típicas que se enmarcan en la generalidad del problema (P) y que han sido objeto de mucha atención en la literatura tanto en el ámbito matemático como en el ámbito de la ingeniería. El primero de ellos se refiere a problemas de diseño óptimo en los que la ecuación de estado es la ecuación de la conductividad, y el segundo a problemas en los que ésta es el sistema de la elasticidad lineal.

Veamos el primero de estos ejemplos. Tenemos a nuestra disposición dos materiales conductores con muy distinta capacidad de conducir corriente: sus conductividades asociadas son α y β , $0 < \alpha < \beta$. Frecuentemente el primero de los conductores es un conductor muy malo, casi un material aislante, y el segundo es un material muy buen conductor y caro. Dado un dominio de diseño $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, el problema consiste en determinar cómo distribuir los dos materiales para rellenar todo el dominio Ω de manera que optimicemos un coste dado, que típicamente depende de la distribución de los dos materiales a través del potencial eléctrico que

es la solución de la ecuación:

$$-\operatorname{div}(u(x)\nabla y(x)) = P(x), \text{ en } \Omega, \quad y \in H_0^1(\Omega)$$

donde

$$u(x) = \chi(x)\alpha + (1 - \chi(x))\beta, \quad \int_{\Omega} u(x) dx \leq \delta.$$

χ representa la función característica del conjunto ocupado por el primer material y la condición integral sobre la conductividad u impone una restricción sobre la cantidad de material total que empleamos. La función $P \in L^2(\Omega)$ y $\delta \in \mathbf{R}$ son datos del problema. En vez de la restricción integral que estamos considerando podríamos incorporar una restricción que garantice cuál es exactamente la cantidad de cada material que empleamos,

$$\int_{\Omega} \chi(x) dx = \delta|\Omega|.$$

El funcional objetivo podría venir dado por una integral del tipo

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

donde

$$F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función de Carathéodory acotada inferiormente por alguna constante. En el contexto del problema de control (P) tenemos que $n = m = l = d = 1$,

$$G(x, u, y, A) = uA + \nabla p(x), \quad V(x, u, y, A) = u,$$

donde p es una función auxiliar fija que es la solución del problema

$$\Delta p = P \text{ en } \Omega, \quad p \in H_0^1(\Omega).$$

Veamos ahora el siguiente ejemplo. Se trata de un ejemplo de optimización estructural que consiste en determinar cómo mezclar dos materiales elásticos, lineales y homogéneos, con tensores elásticos E_1 y E_2 , de manera que minimicemos un funcional de coste que depende del tensor de elasticidad y de la deformación asociada, la cual se determina mediante la solución del sistema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(u(x)\epsilon(y(x))) &= P(x), \text{ en } \Omega, \\ u(x)\epsilon(y(x)) \cdot \eta &= g(x) \text{ en } \Gamma_1, \quad u(x) = u_0(x) \text{ en } \Gamma_0, \end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(y) = \frac{1}{2}(\nabla y + (\nabla y)^T)$$

es el gradiente simetrizado y

$$u(x) = \chi(x)E_1 + (1 - \chi(x))E_2$$

el tensor de elasticidad. P , g y u_0 son datos del problema y representan respectivamente la densidad de fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, una densidad superficial de carga sobre una parte de la frontera y una condición de tipo Dirichlet sobre el resto de la frontera. η es el vector normal exterior a la superficie. Con las notaciones empleadas para enunciar el problema (P) tenemos que en este caso es $n = N^2$, $m = l = N$ y

$$G(x, u, y, A) = \frac{u}{2}(A + A^T) + \nabla p(x),$$

donde como antes p es el gradiente de la solución de la ecuación de Poisson con dato P . En este ejemplo también podemos introducir restricciones de tipo integral, en particular es interesante considerar la misma restricción que en el caso de la conductividad, es decir la integral del tensor de elasticidad.

Como hemos comentado anteriormente, estos problemas han recibido mucha atención durante los últimos años debido fundamentalmente a la importancia que tienen estos modelos en diversas aplicaciones prácticas. Frecuentemente, este tipo de problemas carece de solución como se pone de manifiesto en [52]. La teoría de la homogeneización (aunque la literatura en este sentido es enorme, citamos por ejemplo [55, 56, 57, 67, 70]) ha sido la principal herramienta para abordar este tipo de problemas, tanto para determinar la existencia en algunas situaciones como para comprender y analizar la falta de ésta en otras. Estos métodos están basados en el concepto de H-convergencia o G-convergencia (ver las referencias anteriores) y en la caracterización de la “G-clausura” de ciertos conjuntos. Cuando la función objetivo F no depende de las derivadas del estado, o bien esta dependencia es adecuada al concepto de G-convergencia, mediante la teoría de la homogeneización se han conseguido logros analíticos y numéricos impresionantes. Referencias que ponen de manifiesto la importancia de estos logros son [17], en lo que respecta a los principales logros analíticos, y [11] en lo que respecta a los logros numéricos y a las aplicaciones prácticas.

Los métodos clásicos para estudiar problemas de diseño óptimo están basados en propiedades de compacidad suficientemente fuertes como para concluir la existencia de soluciones óptimas. Así, los métodos basados en la homogeneización se fundamentan, como hemos señalado, en la noción de G-convergencia o H-convergencia. Esta noción está adaptada al caso lineal, en que la ecuación de estado es una ecuación elíptica lineal (que es el caso de los dos ejemplos anteriores) y el control actúa

justamente en los coeficientes de esta ecuación. Si nos encontramos en esta situación, podríamos tratar el caso en que la función objetivo F depende de las derivadas del estado, pero la interacción entre éstas y el control no puede ser cualquiera, tiene que ser adecuada al concepto de G-convergencia. En el problema (P) permitimos cualquier tipo de interacción no lineal entre estos términos. Otros métodos están basados en propiedades de compacidad del conjunto de controles admisibles \mathcal{U}_{ad} en $C(\bar{\Omega})$ (ver [15]) y buenas propiedades de dependencia continua de la ecuación de estado, las cuales pueden ser obtenidas asumiendo más restricciones sobre el conjunto de controles admisibles.

En este trabajo estamos interesados en analizar los ejemplos anteriores cuando permitimos la dependencia explícita y conjunta en la función objetivo F respecto de los diseños u y de las derivadas de los estados ∇y . Ya que este tipo de problemas normalmente carece de solución, este análisis ha de llevarse a cabo estudiando relaciones apropiadas de estos problemas. En este sentido, el análisis se podría llevar a cabo a través de las relajaciones del funcional \tilde{I} que aparece en la reformulación variacional del problema, esto es, en relajaciones a través de convexificaciones del integrando \tilde{F} , o en términos de medidas parametrizadas o de Young.

Un caso particularmente interesante y que trataremos en capítulos posteriores es el caso en el que el funcional de coste es la integral del gradiente del estado al cuadrado

$$F(x, u, y, A) = |A|^2.$$

1.3 Descripción de resultados obtenidos en función de la dimensión

En esta sección vamos a señalar cuáles son las aportaciones originales que damos en este trabajo al objetivo formulado al principio del capítulo en relación a analizar la existencia-no existencia de soluciones óptimas para el problema de optimización no local (P) . Tras la discusión de la Sección 1.1 debemos responder a las cuestiones formuladas al final de esta sección. Para ello presentaremos por separado cada uno de los casos $N = 1, 2, 3$ indicando cuáles han sido los elementos fundamentales en el análisis de cada uno de ellos. No obstante, la respuesta a la primera de esas cuestiones, la que se refiere a la equivalencia entre el problema de control y su reformulación variacional, sí puede llevarse a cabo mediante un tratamiento general, aunque atendiendo a las peculiaridades de cada caso. La siguiente proposición, que engloba las Proposiciones 2.1 y 3.2, establece la equivalencia referida. En este resultado no consideramos la restricción integral, esta será introducida posteriormente.

Proposición 1.1 *Los problemas (P) y (\tilde{P}) son equivalentes en el sentido de que:*

(i) *Los ínfimos coinciden,*

$$\inf I(u, y) = \inf \tilde{I}(y, Z);$$

(ii) *si (u, y) es un minimizador para I entonces (y, Z) es un minimizador para \tilde{I} , donde*

$$Z(x) \equiv G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)).$$

Recíprocamente, si (y, Z) es un minimizador para \tilde{I} existe un control admisible u tal que

$$Z(x) \equiv G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)),$$

y (u, y) es un minimizador para I .

A partir de ahora la numeración de los resultados corresponde a la que aparece en los capítulos posteriores correspondientes.

1.3.1 El caso unidimensional

En este caso el problema variacional equivalente al problema de control se escribe como

$$\text{Minimizar } \tilde{I}(y, c) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), y'(x), c) dx$$

más condiciones frontera para y . Ahora Ω es un intervalo abierto de \mathbf{R} . Podemos suponer $\Omega = (0, 1)$.

Nuestro objetivo en este caso concreto es el de establecer resultados de existencia y analizar algunas situaciones en las que no se da existencia de soluciones óptimas. No obstante, en la situación unidimensional los fenómenos de no existencia de solución son más escasos que en dimensiones mayores, debido a que en este caso podemos llegar a la existencia por métodos específicos que no son extensibles a dimensiones mayores.

La primera dificultad que encontramos en el análisis de este problema es el hecho de que la función \tilde{F} no es de Carathéodory, pues por definición toma el valor $+\infty$ súbitamente, lo cual es un requisito esencial en el Cálculo de Variaciones (evidentemente esta dificultad se repite en los tres casos que vamos a considerar). Para el análisis de la cuestión de la existencia de soluciones óptimas para el problema de control trataremos de aplicar el método directo (ver Apéndice) al problema variacional anterior. Como sabemos este método está basado en la semicontinuidad inferior débil del funcional, y al tratarse de un funcional de forma integral es conocido que

esta propiedad es equivalente a ciertas propiedades de convexidad del integrando. En el caso escalar se sabe (ver Apéndice) que la propiedad que se debe verificar en orden a garantizar la semicontinuidad inferior débil de \tilde{I} es la convexidad habitual de la función integrando \tilde{F} con respecto a la variable y' .

Para enunciar el resultado principal que hemos obtenido en este caso, en el que ya incorporamos la restricción integral, necesitamos introducir la siguiente notación

$$K(x, c, y, \lambda) = \{u \in K : c = G(x, u, y, \lambda)\},$$

$$\tilde{F}(x, c, y, \lambda) = \min_{K(x, c, y, \lambda)} F(x, u, y, \lambda), \quad \tilde{V}(x, c, y, \lambda) = \min_{K(x, c, y, \lambda)} V(x, u, y, \lambda),$$

$$\Delta = \{\tilde{F} < +\infty\} = \{\tilde{V} < +\infty\} = \{(x, c, y, \lambda) : K(x, c, y, \lambda) \neq \emptyset\},$$

$$\Delta(x) = \{(c, y, \lambda) : (x, c, y, \lambda) \in \Delta\},$$

$$\Delta(x, c, y) = \{\lambda : (x, c, y, \lambda) \in \Delta\}.$$

Teorema 2.5 *Supongamos que:*

- (i) $\Delta(x)$ es cerrado p.c.t. $x \in (0, 1)$;
- (ii) $\tilde{F} : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ y $\tilde{V} : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ son funciones de Carathéodory;
- (iii) $\Delta(x, c, y)$ es convexo y

$$\tilde{F}(x, c, y, \cdot) : \Delta(x, c, y) \rightarrow \mathbf{R},$$

$$\tilde{V}(x, c, y, \cdot) : \Delta(x, c, y) \rightarrow \mathbf{R},$$

son convexas p.c.t. $x \in (0, 1)$ y para todo (c, y) ;

- (iv) el conjunto

$$\operatorname{argmin}_{K(x, c, y, \lambda)} F(x, u, y, \lambda) \cap \operatorname{argmin}_{K(x, c, y, \lambda)} V(x, u, y, \lambda)$$

es no vacío para todo (x, c, y, λ) ;

- (v) el funcional \tilde{I} es coercitivo en el sentido

$$\lim_{|c| + \|y\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)} \rightarrow +\infty} \tilde{I}(y, c) = +\infty, \quad p > 1;$$

- (vi) existen pares (u, y) admisibles para el problema de control.

Entonces el problema (P) posee soluciones óptimas.

Como hemos comentado este resultado está basado en la convexidad de los integrandos que en este caso garantizan la semicontinuidad inferior débil del funcional y de la restricción integral. La hipótesis (iv) impone un cierto acoplamiento entre las funciones F , G y V y el conjunto K , necesario para poder asegurar que se mantiene la equivalencia del problema de control y de su reformulación si incorporamos la restricción integral.

En este caso también hemos analizado diversas situaciones concretas en donde se pueden obtener conclusiones más explícitas que las del resultado general. Una de las situaciones que hemos analizado es la que se tiene cuando la ecuación de estado es el típico q -laplaciano ($q \geq 2$) en una dimensión

$$\begin{cases} -[u(x)|y'(x)|^{q-2}y'(x)]' = p(x), & y \in W^{1,q}(0,1), \\ y(0) = y_0, & y(1) = y_1. \end{cases}$$

A partir del resultado general de existencia anterior somos capaces de probar un resultado de existencia de soluciones óptimas para este problema. En este caso tenemos que

$$K(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} K, & \text{si } \lambda = 0 \text{ y } c = P(x), \\ \left\{ \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \right\}, & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K, \\ \emptyset, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

$$\Delta = \{(x, P(x), y, 0) : x \in (0, 1), y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (x, c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x) = \{(P(x), y, 0) : y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x, c, y) = \left\{ \left| \frac{c-P(x)}{u} \right|^{\frac{2-q}{q-1}} \frac{c-P(x)}{u} : u \in K \right\},$$

$$\tilde{F}(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} F\left(x, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda}, y, \lambda\right), & \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K, \\ \min_K F(x, u, y, \lambda), & \lambda = 0, c = P(x), \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

y

$$\tilde{V}(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} V\left(x, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda}, y, \lambda\right), & \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K, \\ \min_K V(x, u, y, \lambda), & \lambda = 0, c = P(x), \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Corolario 2.8 *En las condiciones anteriores, si*

- (i) K es un intervalo cerrado contenido en $(0, +\infty)$;
- (ii) las funciones

$$F\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right) \text{ y } V\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right)$$

son convexas en λ siempre que $\frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}} \in K$;

- (iii) $\operatorname{argmin}_K F(x, u, y, 0) \cap \operatorname{argmin}_K V(x, u, y, 0) \neq \emptyset$;
- (iv) existen pares (u, y) admisibles para el problema;
- (v) coercitividad:

$$c(|\lambda|^p - 1) \leq F\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right), \quad c > 0, 1 < p \leq q;$$

entonces el problema de control óptimo asociado a la ecuación anterior admite solución óptima.

En el caso particular en que $q = 2$ tenemos un resultado de existencia de controles óptimos para el problema de diseño óptimo en el que la ecuación de estado es la ecuación de la conductividad en dimensión uno.

El Capítulo 2 está dedicado al análisis de la situación unidimensional. Aunque en este caso no estudiamos la no existencia de solución a través del análisis de relajaciones, algunos comentarios a este respecto han sido incluidos en este capítulo. Los resultados correspondientes a este capítulo aparecerán publicados en [8].

1.3.2 El caso bidimensional

El análisis de este caso corresponde al Capítulo 3 de esta memoria. Como hemos comentado con anterioridad en la situación bidimensional un campo Z tiene divergencia nula si y sólo si existe z tal que

$$Z(x) \equiv T\nabla z(x).$$

Así pues, en este caso estamos interesados en el siguiente problema variacional

$$\text{Minimizar } \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), T\nabla z(x)) dx,$$

con y verificando las condiciones de frontera correspondientes, y donde

$$\tilde{F}(x, y, A^{(1)}, A^{(2)}) = \min_{K(x, y, A^{(1)}, A^{(2)})} F(x, u, y, A^{(1)}).$$

Podemos hacer un ligero cambio de notación y llamar \tilde{F} a la función

$$\tilde{F}(x, Y^{(1)}, Y^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}) = \min_{\{u \in K : G(x, u, y, A^{(1)}) = TA^{(2)}\}} F(x, u, y, A^{(1)}),$$

y entonces podemos escribir el problema variacional anterior como

$$\text{Minimizar } \tilde{I}(Y) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y(x), \nabla Y(x)) dx,$$

donde $Y : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una función en algún espacio de Sobolev apropiado y tal que su primera componente $Y^{(1)}$ verifica la correspondiente condición de frontera. Nótese que $Y^{(1)} = y$ e $Y^{(2)} = z$.

Este problema se encuentra en el marco clásico de problemas variacionales que provienen de la elasticidad no lineal, salvo por el hecho, de nuevo, de que \tilde{F} no es una función de Carathéodory. En este caso la propiedad que, junto con la condición técnica de crecimiento polinomial, garantiza la semicontinuidad inferior débil de funcionales en forma de integral es la cuasiconvexidad del integrando (ver Apéndice). Una función $\varphi : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R}$ es cuasiconvexa si

$$\varphi(F) \leq \frac{1}{|D|} \int_{\Omega} \varphi(F + \nabla w(x)) dx,$$

para todo dominio D , toda matriz F y toda función test w . Por tanto, en esta situación la existencia de minimizadores para el problema de control óptimo estará basada en la cuasiconvexidad de la función \tilde{F} . Éste es un concepto difícil, que de hecho, la comunidad matemática aún no ha sido capaz de comprender completamente. Este hecho, en cierto sentido, limita cualquier resultado basado en esta propiedad, aunque sabemos que, ya que la cuasiconvexidad de los integrandos es equivalente a la semicontinuidad inferior débil de los funcionales, hemos de apoyarnos en este concepto siempre que utilicemos el método directo para establecer la existencia en problemas variacionales vectoriales. Para enunciar el principal resultado de existencia en la situación bidimensional necesitamos introducir las siguientes notaciones:

$$\Delta = \left\{ (x, Y, A) \in \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l) \times (\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l}) : |\tilde{F}(x, Y, A)| < +\infty \right\},$$

$$\Delta(x) = \{(Y, A) : (x, Y, A) \in \Delta\},$$

$$\Delta(x, Y) = \{A : (x, Y, A) \in \Delta\},$$

$$K(x, Y, A) = \{u \in K : G(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}) = TA^{(2)}\},$$

$$\tilde{F}(x, Y, A) = \min_{K(x, Y, A)} F(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}),$$

$$\tilde{V}(x, Y, A) = \min_{K(x, Y, A)} V(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}).$$

Teorema 3.8 *Supongamos que:*

- (i) *El conjunto $\Delta(x)$ es cerrado, p.c.t. $x \in \Omega$;*
- (ii) *\tilde{F} y \tilde{V} son funciones de Carathéodory en Δ ;*
- (iii) *existen dos constantes $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, dos funciones $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l))$ y $p > 1$ tales que*

$$c_1 \leq \tilde{F}(x, Y, A) \leq h_1(x, Y)(1 + |A|^p),$$

$$c_2 \leq \tilde{V}(x, Y, A) \leq h_2(x, Y)(1 + |A|^p),$$

para todo $(x, Y, A) \in \Delta$;

- (iv) *$\Delta(x, Y)$ es cuasiconvexo, y las funciones*

$$\tilde{F}(x, Y, \cdot) : \Delta(x, Y) \rightarrow \mathbf{R},$$

$$\tilde{V}(x, Y, \cdot) : \Delta(x, Y) \rightarrow \mathbf{R}$$

son cuasiconvexas p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo Y ;

- (v) *$\operatorname{argmin}_{K(x, Y, A)} F(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}) \cap \operatorname{argmin}_{K(x, Y, A)} V(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)})$ es no vacío para todo (x, Y) ;*

- (vi) *existen pares (u, y) admisibles para el problema de control;*

- (vii) *el funcional \tilde{I} es coercitivo.*

Entonces (\tilde{P}) posee al menos una solución óptima, y consecuentemente, existen controles óptimos para (P) .

Éste es un resultado abstracto basado en la cuasiconvexidad. También hemos explorado situaciones más específicas en donde podemos garantizar la cuasiconvexidad de \tilde{F} , y por tanto obtener conclusiones más explícitas. Esto lo hemos conseguido a través de la policonvexidad (ver Apéndice), que como sabemos es una propiedad que implica la cuasiconvexidad. A modo de ejemplo enunciaremos el siguiente resultado (en el Capítulo 3 han sido analizados más ejemplos mediante la policonvexidad y se han incluidos algunos comentarios a este respecto).

Teorema 3.5 *Supongamos que*

$$G(x, u, y, A) = g(x, y, A) + h(x, y, u)$$

donde

$$g : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

$$h : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

son funciones de Carathéodory, afines en A y u respectivamente, y elegidas tal que la ecuación de estado está bien planteada. Supongamos además que K es convexo. Si

$$f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2 \times 2} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función de Carathéodory, convexa (en el sentido usual) en las variables (A, t) p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $y \in \mathbf{R}$, y

$$f(x, y, B, t) \geq c(|B|^2 - 1), \quad c > 0,$$

entonces el problema de diseño óptimo correspondiente con función objetivo dada por

$$F(x, u, y, A) = f(x, y, (A, -T(g(x, y, A) + h(x, y, u))), A \cdot (g(x, y, A) + h(x, y, u)))$$

posee soluciones óptimas.

Un ejemplo típico en el que se dan las condiciones de la proposición anterior se tiene cuando

$$G(u, A) = -A + u,$$

es decir, la ecuación de estado es

$$\operatorname{div}(-\nabla y(x) + u(x)) = 0,$$

junto con condiciones de frontera para y , y F tiene la forma

$$F(u, A) = f(u, A, uA),$$

con f una función convexa.

El caso bidimensional es el caso en que la teoría de la homogeneización ha sido más fructífera gracias a la caracterización de la G-clausura de ciertos conjuntos (ver por ejemplo [43, 44, 45, 55, 57, 70]), que como sabemos es el ingrediente clave en la comprensión de la existencia-no existencia en problemas de diseño óptimo. Por tanto, en este caso es obligado estudiar la relación entre el método variacional que proponemos y los métodos basados en la homogeneización. Uno de los primeros trabajos donde se exploró la relación entre la homogeneización, los problemas de diseño óptimo y la relajación de problemas variacionales es [35]. En la Sección 3.4 hemos analizado esta cuestión brevemente.

Otro punto interesante en este caso, en el que los fenómenos de no existencia de solución son más frecuentes que en el caso unidimensional, es el de la relajación. Los conceptos de G-convergencia y G-clausura son las vías a través de las cuales se ha abordado esta cuestión clásicamente. Nosotros pensamos que se pueden abordar situaciones mucho más generales a través de los métodos de relajación para problemas variacionales, es decir, a través de las cuasiconvexificaciones y de las medidas de Young. El hecho de que la función \tilde{F} tome el valor $+\infty$ de manera no continua puede afectar a la relajación en los términos anteriores. En particular, la relajación en términos de medidas de Young gradientes podría servir para recuperar el comportamiento de sucesiones minimizantes. Esta cuestión la hemos estudiado en la Sección 3.5 para una situación simplificada: el problema de diseño óptimo para la ecuación de la conductividad (con término independiente $P \equiv 0$ y valores frontera no nulos) con coste la norma L^2 al cuadrado del gradiente del estado. En este caso la reformulación variacional del problema es

$$\text{Minimizar } \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla Y(x)) dx,$$

donde

$$\tilde{F}(A) = \begin{cases} |A^{(1)}|^2, & \text{si } A \in \Delta, \\ +\infty, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con

$$\Delta = \{A \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \alpha A^{(1)} = TA^{(2)} \text{ ó } \beta A^{(1)} = TA^{(2)}\}.$$

El resultado de relajación que obtenemos es el siguiente. Establece que la relajación en términos de medidas parametrizadas gradientes es válida para entender o aproximar las sucesiones minimizantes del problema de control original, a pesar de que el integrando \tilde{F} no es continuo.

Teorema 3.10 *Los ínfimos*

$$m = \inf \left\{ \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla Y(x)) dx : Y^{(1)} - y_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \right\},$$

y

$$\bar{m} = \inf \left\{ \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu_x(A) dx : \nu_x \in \bar{\mathcal{A}}, \right.$$

$$\left. \nabla Y(x) = \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} A d\nu_x(A), Y^{(1)} - y_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \right\},$$

coinciden, donde $\bar{\mathcal{A}}$ es el conjunto de las medidas parametrizadas homogéneas generadas por sucesiones de gradientes admisibles para el problema de optimización.

Es más, para cada medida parametrizada gradiente ν con soporte contenido en Δ , existe una sucesión de gradientes $\{\nabla Y_j\}$ que la genera tal que $Y_j^{(1)} = y_0$ y

$$\nabla Y_j(x) \in \Delta$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo j , y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla Y_j(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu_x(A) dx.$$

La dificultad de este resultado, según hemos insistido, radica en el hecho de que la función \tilde{F} no es una función de Carathéodory, y esto que implica que, en principio, sólo podemos asegurar que

$$m \geq \bar{m}.$$

Pensamos que este resultado es importante porque, al establecer el hecho de que ambos ínfimos coinciden, permite un análisis de la relajación del problema en términos de medidas parametrizadas gradientes. Estas medidas son, como sabemos, una buena herramienta matemática para el análisis de los fenómenos microestructurales o de no existencia. En particular este resultado permite un análisis de la aproximación de las medidas de Young minimizadoras para el problema relajado anterior mediante laminados (ver [3]).

El análisis del problema (P) correspondiente al caso bidimensional aparece recogido en [9].

1.3.3 El caso tridimensional

En este caso ya hemos comentado que las funciones con divergencia nula son rotacionales y viceversa. Así pues el problema variacional equivalente al problema de control

$$\text{Minimizar } \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), Z(x)) dx,$$

con

$$\operatorname{div}(Z) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y las correspondientes condiciones de frontera para y , se puede reescribir como

$$\text{Minimizar } \tilde{I}(y, z) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), \nabla \times z(x)) dx,$$

donde (y, z) pertenece a un cierto espacio de Sobolev, e y verifica las correspondientes condiciones de frontera.

En el caso bidimensional, como hemos señalado, las funciones con divergencia nula son esencialmente gradientes y por tanto en el problema de optimización que aparece sólo intervienen gradientes, con lo cual nos encontramos en el marco habitual del Cálculo de Variaciones. Sin embargo, en la situación tridimensional no es este el caso, ya que el funcional depende conjuntamente de gradientes y rotacionales, y no sabemos qué condiciones garantizan que podamos aplicar el método directo. Necesitamos, por tanto, analizar cuestiones como: la semicontinuidad inferior débil, la existencia, la relajación, medidas parametrizadas generadas por sucesiones admisibles, etc., para este tipo de funcionales. Una vez que estas cuestiones queden claras, será fácil, usando las ideas del caso bidimensional, establecer un resultado de existencia para la situación $N = 3$.

Como paso previo al análisis de problemas variacionales en los que intervienen gradientes y rotacionales pensamos que es natural plantearse el caso de problemas en los que sólo intervienen rotacionales, es decir, el problema

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(\nabla \times z(x)) dx,$$

o lo que es lo mismo, el problema

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(Z(x)) dx,$$

donde

$$\operatorname{div}(Z) = 0.$$

Además este problema tiene interés en sí mismo, ya que existen modelos o situaciones que se ajustan a este marco. En el Capítulo 4 realizamos un análisis exhaustivo de cuestiones básicas del Cálculo de Variaciones para este tipo de principios variacionales. En particular somos capaces de aclarar los siguientes puntos:

- reformulación en términos de potenciales vectoriales;
- semicontinuidad inferior débil y nociones de convexidad involucradas;

- caracterización de las medidas de Young generadas por sucesiones verificando la restricción divergencia nula, y relevancia de esta caracterización para la relajación de funcionales no débilmente semicontinuos inferiormente.

Con lo que respecta al primero de esos puntos, si consideramos la aplicación lineal $T : \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times l}$, $l = 1, 2, 3$, definida componente a componente en cada una de sus l componentes como

$$T(F) = (F_{32} - F_{23}, F_{13} - F_{31}, F_{21} - F_{12}),$$

tenemos

$$T(\nabla z) = \nabla \times z = Z.$$

Observando esta relación uno está tentado a reemplazar el problema variacional anterior

$$\inf_{\Omega} \int \varphi(Z(x)) dx, \quad \operatorname{div}(Z) = 0,$$

por

$$\inf_{\Omega} \int \tilde{\varphi}(\nabla z(x)) dx,$$

donde

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ T : \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R},$$

y reducir todo el análisis a una referencia a los problemas variacionales bajo la restricción rotacional nulo a través de la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$. Ahora bien, es claro que para poder obtener la s.c.i.d. de la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$ necesitaríamos asegurar que

$$\nabla \times u_j \rightharpoonup \nabla \times u,$$

que es lo único que podemos obtener de las condiciones habituales de coercitividad para φ , implica

$$\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u,$$

lo cual es evidentemente falso en general. No obstante, gracias al siguiente lema sí es posible reducir todo el análisis de este tipo de problemas a la noción de cuasiconvexidad.

Lema 4.1 Sean $Z_j, Z \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ campos vectoriales tales que

$$\operatorname{div}(Z_j) = \operatorname{div}(Z) = 0 \text{ en } \Omega,$$

$$Z_j \rightharpoonup Z \text{ débil en } L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l}).$$

Existen funciones $z_j, z \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tales que para alguna subsucesión, que seguimos denotando igual, se tiene

$$Z_j = \nabla \times z_j, \quad Z = \nabla \times z,$$

$$z_j \rightharpoonup z \text{ débil en } H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l}).$$

Ahora tiene perfecto sentido la siguiente definición: decimos que $\varphi : \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ es D-convexa si $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T$ es cuasiconvexa. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2 Sea $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua tal que

$$\varphi(F) \leq C(|F|^2 + 1), \quad C > 0.$$

El funcional I es s.c.i.d. en L^2 con respecto a sucesiones que verifican la restricción diferencial divergencia nula si y sólo si φ es D-convexa.

De esta manera hemos respondido al segundo de los puntos anteriores, pero no completamente, puesto que no hemos hablado de la relajación del funcional en términos de D-convexificaciones. Dada una función φ , llamamos D-convexificación de φ a la función

$$D\varphi = \sup \{ \psi : \psi \leq \varphi, \psi \text{ D-convexa} \}.$$

La importancia de esta envoltura radica en el siguiente resultado de relajación.

Teorema 4.5 Sea $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua verificando

$$c(|F|^2 - 1) \leq \varphi(F) \leq C(|F|^2 + 1), \quad 0 < c < C,$$

y sea $D\varphi$ su D-convexificación. Los dos ínfimos

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(\nabla \times u(x)) dx$$

y

$$\inf \int_{\Omega} D\varphi(\nabla \times u(x)) dx,$$

bajo condiciones adicionales sobre u que sean invariantes con respecto a la convergencia débil, son iguales.

Otro punto importante es el de la caracterización de las medidas parametrizadas generadas por sucesiones que verifican la restricción divergencia nula. Esta caracterización aparece en [23] en un marco más general que admite muchas más tipos de restricciones diferenciales sobre las sucesiones. Nosotros hemos reinterpretado este

resultado, Teorema 4.7, en términos de potenciales vectoriales para poder aplicarlos a diversas situaciones de no existencia que comentaremos después.

Otro punto muy interesante desde el punto de vista matemático que ha sido analizado es el de la relación de la convexidad asociada al cono característico del operador divergencia y la D-convexidad. Sabemos que si el funcional

$$\int_{\Omega} \varphi(Z(x)) dx, \quad \operatorname{div}(Z(x)) = 0,$$

es débilmente semicontinuo inferiormente entonces φ es convexa a lo largo de las direcciones pertenecientes al cono característico del operador divergencia. En este caso veremos que el cono característico del operador divergencia es todo el espacio cuando $l = 1, 2$ y el conjunto de las matrices singulares 3×3 si $l = 3$. Esto motiva el siguiente resultado.

Proposición 4.9 *Se tiene lo siguiente:*

- Si $l = 1$ ó $l = 2$, una función continua φ es D-convexa si y sólo si es convexa en el sentido usual.
- Si $l = 3$, la D-convexidad implica la convexidad singular, es decir, la convexidad a lo largo de direcciones singulares, o dicho de otra manera la convexidad en segmentos cuyos extremos difieren en una matriz singular.

Algunas de las conclusiones que obtenemos son aplicadas a la obtención de una relajación en términos de medidas parametrizadas o de Young en un modelo de micromagnetismo para el que ha sido analizada esta relajación en dimensión dos ([61]) mediante la idea de que todo campo con divergencia nula es esencialmente un gradiente. Consideremos el funcional

$$I(m) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), m(x)) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

donde Ω es un abierto simplemente conexo de \mathbf{R}^3 , y donde $m \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ están acopladas por la ley diferencial, no local

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0, \quad \text{en } H^{-1}(\Omega).$$

Nuestro objetivo ahora es calcular explícitamente el funcional generalizado

$$I(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} I(m_j) : \{m_j\} \text{ genera } \nu \right\},$$

pues bajo esta definición es inmediato el resultado de relajación

$$\inf_{\mathcal{A}} I = \min_{\bar{\mathcal{A}}} I,$$

donde \mathcal{A} denota el conjunto de funciones admisibles para I (en este caso $L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$), y $\overline{\mathcal{A}}$ denota el conjunto de medidas parametrizadas generadas por sucesiones en \mathcal{A} . Las conclusiones principales que obtenemos en este sentido están plasmadas en el teorema

Teorema 4.12 *Bajo las condiciones anteriores si ψ es convexa con respecto a la variable gradiente, entonces*

$$I(\nu) = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(x, u(x), \lambda) d\nu_x(\lambda) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

donde ν y u están relacionadas a través de la ecuación diferencial

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0, \text{ en } H^{-1}(\Omega),$$

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \lambda d\nu_x(\lambda).$$

El análisis de problemas variacionales bajo la restricción divergencia nula en dimensión tres aparece en [10].

Una vez concluido el análisis de problemas variacionales bajo la restricción divergencia nula es muy fácil comprender las cuestiones básicas del Cálculo de Variaciones que señalamos anteriormente para problemas variacionales en los que intervienen conjuntamente gradientes y funciones con divergencia nula (o rotacionales). En los Teoremas 5.1 y 5.2 están dadas las respuestas a las cuestiones anteriores para este tipo de problemas. A partir de estos resultados y mediante un tratamiento completamente paralelo a los de los casos $N = 1$ y $N = 2$ podemos establecer un resultado de existencia de controles óptimos para el problema (P) en la situación tridimensional (Teorema 5.3).

En el caso bidimensional la idea que aquí presentamos de que todo campo con divergencia nula es esencialmente un gradiente ha sido explorada para obtener relajaciones en algunas situaciones concretas: micromagnetismo y magnetostricción [61], diseño óptimo [64], optimización estructural [63] y tomografía [36]. Pensamos que es interesante analizar estas situaciones físicas en la situación tridimensional con la ayuda de las conclusiones obtenidas en el análisis de problemas variacionales en los que intervienen gradientes y rotacionales tal y como hemos hecho para el funcional de micromagnetismo que comentamos anteriormente. En el Capítulo 5 estudiamos estas cuestiones. Consideramos que el caso del micromagnetismo, comentado antes, puede servir de ejemplo para el tipo de análisis llevado a cabo, así que nos referimos al Capítulo 5 de esta memoria para más detalles. En esencia, todos estos resultados son más o menos automáticos después del análisis del Capítulo 4 y las correspondientes situaciones en dimensión 2. Todo el material contenido en este capítulo aparece recogido en [7].

1.4 Conclusiones

El objetivo de la tesis doctoral que presentamos, como hemos señalado con anterioridad, ha sido el de analizar el problema de la existencia-no existencia de soluciones óptimas para una familia de problemas de optimización no locales, la familia de problemas de control óptimo introducida en la Sección 1.1. Esta cuestión ha sido tratada en un marco puramente variacional a través del método directo del Cálculo de Variaciones. Basándonos en este procedimiento clásico y en los resultados conocidos para problemas variacionales hemos sido capaces de determinar conjuntos de hipótesis que garantizan la existencia de controles óptimos para nuestro problema. Estos conjuntos de hipótesis garantizan la semicontinuidad inferior débil del funcional que aparece en la formulación variacional equivalente del problema, luego cabe esperar que en ausencia de alguna de estas hipótesis esta propiedad no se verifique, y por tanto no podamos garantizar la existencia de soluciones óptimas para el problema variacional, y consecuentemente para el problema de control óptimo. Es por este conjunto de razones por lo que pensamos que en el análisis del problema variacional subyacente al problema de control óptimo es donde podemos comprender la cuestión que nos preocupa de la existencia-no existencia de soluciones óptimas. Además, necesariamente este análisis ha de pasar por el método directo y por la comprensión de las propiedades de convexidad del integrando del funcional que son equivalentes, o garantizan, la semicontinuidad inferior débil de éste. En esta tesis hemos realizado un análisis sistemático de estas cuestiones consiguiendo establecer respuestas precisas en el marco abstracto y analizando situaciones concretas.

Como sabemos los problemas de diseño óptimo, optimización estructural, o de control en los coeficientes frecuentemente carecen de solución. En estos casos el análisis de estos problemas continúa con el estudio de relajaciones de los mismos. Hemos comentado que clásicamente el estudio de tales relajaciones ha sido tratado a través de la homogeneización, ampliando convenientemente el conjunto de controles admisibles (aquí es esencial el concepto de G -clausura). Gracias al marco variacional que hemos introducido para este tipo de problemas de control, el análisis de la relajación podría llevarse a cabo estudiando la relajación de los problemas variacionales equivalentes, es decir, estudiando las relajaciones en términos de cuasiconvexificaciones y en términos de medidas parametrizadas generadas por sucesiones admisibles para el problema. Esto abre un amplio campo de posibilidades, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista numérico. Desde el punto numérico un análisis que podría ser satisfactorio continuaría estudiando la aproximación de las envolturas convexas del integrando y de las medidas parametrizadas minimizadoras (ver [3]). Debido a que cada problema tiene una na-

turaliza específica por el conjunto de restricciones que debe verificar, este análisis no puede llevarse a cabo en general, y hemos de estudiar cada situación particular independientemente. En esta tesis hemos analizado alguna de estas situaciones concretas correspondientes a modelos físicos, consiguiendo establecer tales relajaciones. Creemos que estas ideas pueden ser de utilidad en muchos otros contextos distintos de los que aquí han sido analizados.

Capítulo 2

El problema de control en dimensión $N = 1$

2.1 Introducción

Sean K un subconjunto compacto de \mathbf{R}^n , y

$$F : (0, 1) \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

$$G : (0, 1) \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l,$$

$$V : (0, 1) \times K \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d,$$

tres funciones de Carathéodory, con n, m, l, d enteros positivos y $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Con el término “función de Carathéodory” queremos decir que es medible respecto de $x \in (0, 1)$ y continua respecto de todas las demás variables conjuntamente. Ya que F será un integrando asociado con algún coste supondremos que está acotada inferiormente.

A lo largo de este capítulo nos centraremos, como comentamos en el capítulo anterior, en el siguiente problema de optimización, al que identificamos como (P) :

Encontrar un control u , perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty((0, 1); \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_0^1 F(x, u(x), y(x), y'(x)) dx,$$

sujeto a

$$\int_0^1 V(x, u(x), y(x), y'(x)) dx \leq \delta,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -[G(x, u(x), y(x), y'(x))] = 0 & \text{en } (0, 1), \\ y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Los datos de frontera y_0, y_1 y el vector $\delta \in \mathbf{R}^d$ son datos del problema. La desigualdad en la condición integral la entendemos componente a componente. Otro tipo de condiciones de frontera se podrían admitir.

Se trata de un problema de control óptimo donde el control actúa, o puede actuar, en la estructura principal de la ecuación de estado, por esta razón a estos problemas se les suele llamar en la literatura problemas de diseño óptimo, optimización estructural, control en los coeficientes, etc. Frecuentemente este tipo de problemas carece de solución: en el trabajo pionero [52] pueden encontrarse varios contraejemplos. No obstante, debido a lo peculiar de la dimensión $N = 1$ los fenómenos de no existencia son más raros ya que en muchos casos podemos probar la existencia de soluciones óptimas por métodos especiales que no pueden ser aplicados en dimensiones superiores. Nuestro objetivo en este capítulo es entender la relación e interacción entre las funciones F , G y V , y el conjunto K , desde el punto de vista de la existencia y no existencia de solución óptima, como situación preliminar a los casos $N = 2, 3$. En la situación particular de problemas de diseño óptimo y optimización estructural, este problema ha sido abordado a través de la teoría de la homogeneización y el cálculo de la G -clausura de ciertos conjuntos [43, 45, 55, 56, 67, 70]. Esta teoría es útil para determinar la existencia en situaciones concretas, a saber, cuando la ecuación de estado es lineal y la interacción entre el control y las derivadas del estado en la función objetivo F tiene una forma adecuada con respecto al concepto de G -convergencia. En este sentido las principales novedades del problema de control (P) son:

1. la dependencia respecto de las derivadas del estado en la función objetivo F ;
2. el carácter no lineal, en general, de la función G .

La herramienta fundamental para tratar el problema es usar una reformulación variacional de (P) que evite tener que tratar directamente el carácter no local de la ecuación de estado.

El problema de optimización anterior tiene carácter no local según acabamos de afirmar, a consecuencia de que la ecuación de estado, (2.1), es una ley no local. Precisamente, es este carácter no local lo que hace de este problema una tarea difícil. La idea esencial que nos permite establecer el resultado de existencia de

controles óptimos es la de evitar la ecuación de estado mediante la introducción de un “potencial”, y reformular el problema de control óptimo, de manera equivalente, como un problema variacional de naturaleza local. Este paso nos permitirá usar toda la experiencia acumulada para este tipo de problemas.

Veamos un ejemplo sencillo para ilustrar el método. Consideremos el siguiente problema de optimización:

Encontrar

$$u \in \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(0, 1) : u(x) \in [\alpha, \beta], \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\},$$

donde $\alpha > 0$, tal que minimice

$$\int_0^1 |y'(x)|^2 dx,$$

donde $y \in H_0^1(0, 1)$ es el estado asociado al control u a través de la ecuación

$$-[u(x)y'(x)]' = p(x). \quad (2.2)$$

$p \in L^2(0, 1)$ es un dato del problema. Para reformular el problema, las distintas etapas que debemos cubrir son:

1. *Función auxiliar.* En primer lugar sea P la solución de la ecuación de Poisson

$$P'' = p, \quad P \in H_0^1(0, 1).$$

En realidad bastaría con tomar una primitiva de p , no obstante elegimos la derivada de la solución de la ecuación de Poisson por analogía con la situación en dimensiones mayores.

2. *Ecuación de estado.* La ecuación de estado (2.2) ahora se escribe como

$$-[u(x)y'(x) + P'(x)]' = 0,$$

y por tanto $u(x)y'(x) + P'(x)$ debe ser constante en $(0, 1)$:

$$u(x)y'(x) + P'(x) = c.$$

3. *Nuevo integrando.* Definimos una nueva densidad de coste,

$$\varphi : (0, 1) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

como

$$\varphi(x, c, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2, & \text{si } (x, c, \lambda) \in \Delta \\ +\infty, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde

$$\Delta = \{(x, u\lambda + P'(x), \lambda) : x \in (0, 1), u \in [\alpha, \beta], \lambda \in \mathbf{R}\},$$

i.e., Δ es el conjunto de las ternas (x, c, λ) tales que existe $u \in [\alpha, \beta]$ con $u\lambda + P'(x) = c$ (abusando del lenguaje, las ternas que verifican la ecuación de estado).

Ahora es fácil entender que nuestro problema de control óptimo se expresa de forma equivalente mediante el principio variacional

$$\inf \left\{ I(y, c) = \int_0^1 \varphi(x, c, y'(x)) dx : (y, c) \in H_0^1(0, 1) \times \mathbf{R} \right\}.$$

En definitiva, el procedimiento que proponemos consiste en evitar la ley no local (2.1), mediante la introducción de una nueva variable independiente, sustituyendo la dependencia respecto del control en el funcional de coste por la dependencia respecto de esta nueva variable, y estudiar a continuación el problema variacional resultante. Tres son las principales ventajas de esta formulación:

1. Los pares (y, c) son independientes: no existe relación alguna entre y y c .
2. No hay ninguna ley de tipo no local involucrada.
3. Este problema es un problema de Cálculo de Variaciones, de modo que podremos usar todo lo que sabemos acerca de este tipo de problemas.

La principal dificultad que encontraremos en el análisis es que este problema variacional no se encuentra en el marco clásico del Cálculo de Variaciones, debido a que la nueva densidad de energía que aparece en la reformulación, φ , no es una función de Carathéodory, pues puede tomar el valor $+\infty$ bruscamente.

Acabamos la introducción de este capítulo señalando la organización del mismo. En la Sección 2.2 tratamos de forma general y rigurosa la formulación variacional alternativa de la que hemos hablado. La Proposición 2.1 establece la equivalencia de ambas formulaciones. En las Secciones 2.3 y 2.4 damos los resultados de existencia de controles óptimos, Teorema 2.2 y Corolario 2.6, para los casos sin restricción integral y la situación general respectivamente. En la Sección 2.5 analizamos algunos ejemplos concretos e incluimos algunos comentarios sobre la no existencia de soluciones óptimas. El material de este capítulo aparecerá publicado en [8].

2.2 Formulación alternativa

Consideramos el problema de control óptimo descrito en la Introducción:
Encontrar un control u , perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty((0, 1); \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_0^1 F(x, u(x), y(x), y'(x)) dx,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -[G(x, u(x), y(x), y'(x))] = 0 & \text{en } (0, 1), \\ y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \end{cases}$$

Aquí explícitamente ignoramos la restricción integral, ya que de alguna manera ésta es una restricción adicional que no está directamente relacionada con la ecuación de estado. En la Sección 2.4 trataremos el problema de control con esta restricción y estableceremos un resultado de existencia de minimizadores.

Antes de proseguir debemos apuntar alguna aclaración sobre la ecuación de estado. Nos situaremos en el contexto en el que la existencia de solución débil para esta ecuación está garantizada. Existe una vasta literatura sobre el tema. Citamos a modo de ejemplo y sin pretender cubrir todas las referencias posibles las siguientes [20, 24, 40, 65]. Una situación típica (el caso del p -laplaciano, por ejemplo, se ajusta a esta situación) en que tenemos garantizada la existencia de solución de la ecuación de estado se da cuando G es el gradiente de una cierta función convexa, i.e.,

$$G(x, u, y, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial \lambda}(x, u, y, \lambda),$$

donde W es una función convexa en λ verificando ciertas condiciones técnicas (ver [20]). Supondremos por tanto que existe $1 < p \leq \infty$ tal que para cada control $u \in \mathcal{U}_{ad}$ existe al menos una solución $y_u \in W^{1,p}((0, 1); \mathbf{R}^m)$ de

$$\begin{cases} -[G(x, u(x), y(x), y'(x))] = 0 & \text{en } (0, 1), \\ y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Es obvio que para que esta ecuación tenga sentido el número de ecuaciones ha de ser menor o igual al número de variables, luego se debe tener $l \leq m$. La posible no

unicidad de solución de esta ecuación no crea ninguna ambigüedad en el problema, simplemente diremos que el par (u, y) es un par admisible para el problema (P) si (u, y) verifica (2.3). Asimismo, diremos que el par (\bar{u}, \bar{y}) es óptimo para (P) si es admisible y

$$I(\bar{u}, \bar{y}) \leq I(u, y),$$

para cada par admisible (u, y) ; y diremos que u es un control óptimo para (P) si existe y tal que (u, y) es óptimo. Típicamente, no obstante, tendremos $l = m = 1$ y u determina unívocamente y . Así ocurrirá en los ejemplos que consideraremos.

Veamos ya la formulación alternativa del problema de control. Sea (u, y) un par admisible para (P) . Esto implica que existe un vector constante $c \in \mathbf{R}^l$ tal que

$$G(x, u(x), y(x), y'(x)) = c, \quad \text{p.c.t } x \in (0, 1).$$

Usando esta relación definimos una nueva densidad de coste, \tilde{F} , de la manera siguiente. Dado $(x, c, y, \lambda) \in (0, 1) \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, ponemos

$$\tilde{F}(x, c, y, \lambda) = \min \{F(x, u, y, \lambda) : u \in K \text{ tal que } G(x, u, y, \lambda) = c\}.$$

Ese mínimo tiene sentido puesto que al ser F y G continuas respecto a (u, y, λ) y K compacto, se trata del mínimo de la función continua $F(x, \cdot, y, \lambda)$ sobre el compacto

$$K(x, c, y, \lambda) = \{u \in K : G(x, u, y, \lambda) = c\}.$$

En el caso en que este conjunto sea vacío damos a \tilde{F} el valor $+\infty$.

Tras la definición de esta nueva función debe quedar claro, teniendo en cuenta el planteamiento del ejemplo que vimos en la Introducción, que la nueva formulación del problema de control óptimo (P) es el principio variacional, el cuál denotamos (\tilde{P}) ,

$$\inf_{\{y \in W^{1,p}((0,1); \mathbf{R}^m), y(0)=y_0, y(1)=y_1, c \in \mathbf{R}^l\}} \tilde{I}(y, c) = \int_0^1 \tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) dx.$$

La siguiente proposición establece de manera más precisa que los problemas (P) y (\tilde{P}) son en verdad equivalentes.

Proposición 2.1 *Los problemas (P) y (\tilde{P}) son equivalentes en el sentido de que:*

- (i) *los valores de los dos ínfimos coinciden, i.e.,*

$$\inf I(u, y) = \inf \tilde{I}(y, c);$$

(ii) si (u, y) es un par óptimo para (P) entonces (y, c) es óptimo para (\tilde{P}) , donde c es el vector constante

$$c \equiv G(x, u(x), y(x), y'(x)).$$

Recíprocamente, si (y, c) es óptimo para (\tilde{P}) entonces existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$c \equiv G(x, u(x), y(x), y'(x))$$

y (u, y) es un par óptimo para (P) .

Demostración.

Sea (u, y) un par admisible para (P) . Existe $c \in \mathbf{R}^l$ tal que

$$G(x, u(x), y(x), y'(x)) \equiv c, \quad \text{p.c.t. } x \in (0, 1),$$

de donde por la propia definición de \tilde{F} se tiene

$$\tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) \leq F(x, u(x), y(x), y'(x)).$$

Como esto se verifica para cada par (u, y) admisible para (P) , tenemos que

$$\inf \tilde{I} \leq \inf I.$$

Sea ahora (y, c) tal que $\tilde{I}(y, c) < \infty$. Teniendo en cuenta que F está acotada inferiormente tenemos

$$|\tilde{F}(x, c, y(x), y'(x))| < +\infty, \quad \text{p.c.t. } x \in (0, 1). \quad (2.4)$$

Consideremos la multifunción

$$U(x) = \operatorname{argmin}_{K(x, c, y(x), y'(x))} F(x, u, y(x), y'(x)),$$

que nos proporciona para cada x , el conjunto de valores $u \in K$ para los cuales se alcanza el mínimo de la función $F(x, \cdot, y(x), y'(x))$ en el conjunto

$$K(x, c, y(x), y'(x)).$$

Esos conjuntos son no vacíos por (2.4). Ahora bien, como G es una función de Carathéodory, U toma valores cerrados, por tanto existe una selección medible, u , de la multifunción U (ver [38, Th. 2.23]). Así pues, sea $u : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función medible tal que p.c.t. $x \in (0, 1)$ se tiene

$$c = G(x, u(x), y(x), y'(x)),$$

$$F(x, u(x), y(x), y'(x)) = \min_{K(x, c, y(x), y'(x))} F(x, u, y(x), y'(x));$$

además es claro que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (u es medible y acotada puesto que toma valores en K). Esta última igualdad implica

$$I(u, y) = \tilde{I}(y, c),$$

de donde

$$\inf I(u, y) \leq \inf \tilde{I}(y, c).$$

El punto (ii) es trivial a partir de todo lo anterior. ■

NOTA 2.1 Esta formulación también permite considerar otros conjuntos de controles admisibles, siempre que sean asumidas ciertas condiciones técnicas adicionales. Por ejemplo, si queremos considerar el conjunto \mathcal{U}_{ad} ,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty((0, 1); \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\},$$

siendo K cerrado no acotado, entonces no tenemos garantizado que el conjunto

$$K(x, c, y, \lambda)$$

sea compacto para cada (x, c, y, λ) , y en consecuencia no podemos asegurar que el ínfimo

$$\inf_{K(x, c, y, \lambda)} F(x, u, y, \lambda)$$

se alcance. Esta dificultad se solventaría, por ejemplo, asumiendo que para cada (x, y, λ) se tiene

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} F(x, u, y, \lambda) = \infty.$$

El resto del planteamiento sería el mismo.

Otra situación interesante ocurre cuando $\mathcal{U}_{ad} = L^q((0, 1); \mathbf{R}^n)$ ($1 < q \leq \infty$). Obsérvese que p y q no tienen por qué ser iguales. En este caso necesitamos condiciones de coercitividad sobre G , tales como que exista una función localmente acotada,

$$k : (0, 1) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$$

verificando

$$0 < k(x, y, \lambda) \leq C(|\lambda|^p + 1),$$

con $C > 0$ una constante, tal que

$$\frac{1}{k(x, y, \lambda)} (|u|^q - 1) \leq |G(x, u, y, \lambda)|,$$

para todo (x, u, y, λ) . Asumiendo esto seríamos capaces de probar que el mínimo anterior se alcanza y además que la selección medible que tomamos en la demostración de la Proposición 2.1 está en $L^q((0, 1); \mathbf{R}^n)$. El resto de la formulación sería idéntica.

2.3 Existencia sin condición integral

En virtud de la proposición anterior la existencia de controles óptimos para (P) es equivalente a la existencia de minimizadores para (\tilde{P}) . Así pues, en esta sección nos planteamos la existencia de minimizadores para el problema variacional

$$\inf_{(y,c)} \int_0^1 \tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) dx.$$

Nuestra intención ahora es probar la existencia de minimizadores para (\tilde{P}) por medio del método directo del Cálculo de Variaciones. El principal ingrediente de este procedimiento es la semicontinuidad inferior débil (s.c.i.d.) (ver [20, 59]) del funcional \tilde{I} , por tanto ésto es lo que estableceremos en primer lugar. Este hecho no es directo, es decir, este problema no es exactamente un problema “clásico” del Cálculo de Variaciones debido a que la densidad de energía, \tilde{F} , no es una función de Carathéodory, pues por su propia definición puede tomar el valor $+\infty$ súbitamente. Así pues, no podremos aplicar los resultados clásicos del Cálculo de Variaciones para determinar la s.c.i.d de \tilde{I} , y esto requiere en este caso un poco de trabajo adicional. Para los resultados posteriores necesitamos la siguiente notación:

$$\Delta = \{ \tilde{F} < +\infty \} = \{ (x, c, y, \lambda) : K(x, c, y, \lambda) \neq \emptyset \},$$

$$\Delta(x) = \{ (c, y, \lambda) : (x, c, y, \lambda) \in \Delta \},$$

$$\Delta(x, c, y) = \{ \lambda : (x, c, y, \lambda) \in \Delta \}.$$

Teorema 2.2 *En las condiciones anteriores supongamos que:*

- (i) $\Delta(x)$ es cerrado p.c.t. $x \in (0, 1)$;
- (ii) $\tilde{F} : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de Carathéodory;
- (iii) $\Delta(x, c, y)$ es convexo y

$$\tilde{F}(x, c, y, \cdot) : \Delta(x, c, y) \rightarrow \mathbf{R},$$

es convexa p.c.t. $x \in (0, 1)$ y para todo (c, y) .

Entonces el funcional \tilde{I} es débilmente semicontinuo inferiormente con respecto a la convergencia débil en $W^{1,p} \times \mathbf{R}^l$.

Demostración.

Supongamos que $c_j \rightarrow c$ en \mathbf{R}^l y $y_j \rightharpoonup y$ débil en $W^{1,p}((0,1); \mathbf{R}^m)$. Tenemos que probar que

$$\int_0^1 \tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{F}(x, c_j, y_j(x), y_j'(x)) dx.$$

Debe quedar claro que basta probar el teorema para el caso en que la sucesión $\{(c_j, y_j)\}$ verifica

$$\int_0^1 \tilde{F}(x, c_j, y_j(x), y_j'(x)) dx \leq +\infty,$$

para todo $j \geq 1$. Esto implica que

$$(x, c_j, y_j(x), y_j'(x)) \in \Delta,$$

o dicho de otra manera

$$(c_j, y_j(x), y_j'(x)) \in \Delta(x),$$

p.c.t. $x \in (0,1)$ y para todo $j \geq 1$.

Sea $\{(c_j, y_j)\}$ una sucesión en las condiciones anteriores. Sea $\mu = \{\mu_x\}_{x \in (0,1)}$ la medida parametrizada generada por la sucesión $\{(c_j, y_j, y_j')\}$ (más exactamente por una subsucesión suya, que seguimos denotando igual). Teniendo en cuenta que $\Delta(x)$ es cerrado tenemos que

$$\text{sop}(\mu_x) \subset \Delta(x),$$

p.c.t. $x \in (0,1)$. Por otro lado, en virtud de la Proposición A.10, ya que $c_j \rightarrow c$ e $y_j \rightarrow y$ fuerte en L^p (Teor. de Rellich), podemos decir

$$\mu_x = \delta_c \otimes \delta_{y(x)} \otimes \nu_x,$$

p.c.t. $x \in (0,1)$, donde $\nu = \{\nu_x\}_{x \in (0,1)}$ es la medida parametrizada asociada a $\{y_j'\}$. Por tanto, podemos concluir que

$$\text{sop}(\nu_x) \subset \Delta(x, c, y(x)),$$

p.c.t. $x \in (0,1)$. Examinemos el límite

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{F}(x, c_j, y_j(x), y_j'(x)) dx.$$

Ya que \tilde{F} es una función de Carathéodory restringida sobre Δ , podemos aplicar la Proposición A.9 y tenemos que el límite anterior es mayor o igual a

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{F}(x, c, y(x), \lambda) d\nu_x(\lambda) dx;$$

teniendo en cuenta la hipótesis (iii) y aplicando la Desigualdad de Jensen (Teorema A.13) tenemos que esta integral es mayor o igual a

$$\int_0^1 \tilde{F} \left(x, c, y(x), \int_{\mathbf{R}^m} \lambda d\nu_x(\lambda) \right) dx.$$

Ahora bien,

$$y'(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \lambda d\nu_x(\lambda) \in \text{co}(\Delta(x, c, y(x))) = \Delta(x, c, y(x)),$$

con lo que hemos concluido la prueba. ■

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar un resultado de existencia de minimizadores para el problema (\tilde{P}) .

Teorema 2.3 *En las condiciones del teorema anterior, si además \tilde{I} es coercivo, es decir,*

$$\lim_{\|y_j\|_{W^{1,p}} + |c_j| \rightarrow \infty} \tilde{I}(y_j, c_j) = +\infty,$$

entonces existe al menos un minimizador de (\tilde{P}) . Como consecuencia inmediata el problema (P) posee al menos un control óptimo.

La demostración es una aplicación simple del método directo (Teorema A.1).

NOTA 2.2 Si existen una función positiva, $h \in L_{loc}^\infty((0, 1) \times K \times \mathbf{R}^m)$, y una constante, $k > 0$, tales que

$$k(1 - |\lambda|^p) \leq \tilde{F}(x, c, y, \lambda), \quad (2.5)$$

y

$$|G(x, u, y, \lambda)| \leq h(x, u, y)(1 + |\lambda|^p), \quad (2.6)$$

para todos x, u, y, λ , entonces \tilde{I} es coercitivo.

En efecto, supongamos que \tilde{I} verifica las condiciones anteriores y que existe una sucesión $\{(y_j, c_j)\}$ tal que

$$\|y_j\|_{W^{1,p}} + |c_j| \rightarrow \infty,$$

y

$$\lim \tilde{I}(y_j, c_j) < +\infty.$$

Entonces, por (2.5), $\{y_j\}$ está acotada en $W_0^{1,p}$. Por otro lado existe una sucesión de controles $\{u_j\}$ tal que

$$c_j = G(x, u_j(x), y_j(x), y_j'(x)), \text{ p.c.t. } x \in (0, 1).$$

Por (2.6), para todo subconjunto medible $E \subset (0, 1)$, se tiene

$$|c_j| = \frac{1}{|E|} \int_E |G(x, u_j(x), y_j(x), y_j'(x))| dx \leq C \int_0^1 (1 + |y_j'(x)|^p) dx,$$

de donde concluimos que $\{c_j\}$ está acotada. Luego hemos llegado a una contradicción, y por tanto las condiciones anteriores implican la coercitividad de \tilde{I} .

2.4 Existencia en el caso general

En esta sección incorporamos al problema de control (P) la restricción integral

$$\int_0^1 V(x, c, y(x), y'(x)) dx \leq \delta.$$

Frecuentemente en las aplicaciones aparecen problemas de control en donde deben garantizarse este tipo de restricciones integrales sobre el control y/o el estado. Sobre esto se insistió suficientemente en el capítulo anterior. Un caso particularmente relevante en las aplicaciones supone que la integral del control esté acotada por una cierta constante.

Siguiendo con las notaciones de las secciones anteriores estamos interesados en el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u, y) = \int_0^1 F(x, u(x), y(x), y'(x)) dx, \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty((0, 1); \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\}, \\ \text{sujeto a } \int_0^1 V(x, u(x), y(x), y'(x)) dx \leq \delta, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

donde y es un estado determinado por el control u a través de la ecuación de estado

$$\begin{cases} -[G(x, u(x), y(x), y'(x))]' = 0 \\ y(0) = y_0 \quad y(1) = y_1, \end{cases}$$

$V : (0, 1) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ una función de Carathéodory acotada inferiormente, y $\delta \in \mathbf{R}^d$ un vector constante.

Los problemas variacionales bajo condiciones integrales clásicamente han sido abordados mediante la introducción de un multiplicador de Lagrange estudiando las condiciones de optimalidad ([16]). Proponemos explorar la idea de las secciones precedentes en esta situación más complicada y estudiar posibles resultados de existencia en estas circunstancias.

Vamos a tratar la restricción integral de la misma manera que tratamos el problema sin restricción, es decir, vamos a definir una nueva densidad, \tilde{V} , en la que sustituiremos la dependencia de V respecto del control, u , por la dependencia respecto de la nueva variable independiente, c . Así pues, sea \tilde{V} la función dada por

$$\tilde{V}(x, c, y, \lambda) = \min_{u \in K(x, c, y, \lambda)} V(x, u, y, \lambda),$$

para cada (x, c, y, λ) . Recordamos que

$$K(x, c, y, \lambda) = \{u \in K : G(x, u, y, \lambda) = c\}.$$

Siguiendo las pautas de la Proposición 2.1 parece razonable pretender que el problema (2.7) se replantea como

$$\inf \tilde{I}(y, c) = \int_0^1 \tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) dx \quad (2.8)$$

bajo la restricción

$$\tilde{J}(y, c) = \int_0^1 \tilde{V}(x, c, y(x), y'(x)) dx \leq \delta.$$

Lamentablemente no podemos asegurar, en general, que este problema sea equivalente a (2.7). Para ver ésto situémonos en la demostración de la Proposición 2.1, y supongamos que (y, c) es un par óptimo para (2.8). Un control óptimo sería entonces una selección medible, u , de la multifunción

$$U(x) = \operatorname{argmin}_{K(x, c, y(x), y'(x))} F(x, u, y(x), y'(x)).$$

Ahora bien no podemos asegurar que para esa selección medible ocurra

$$\tilde{V}(x, c, y(x), y'(x)) = V(x, u(x), y(x), y'(x)),$$

p.c.t. $x \in (0, 1)$, de hecho sólo se tiene en general la desigualdad

$$\tilde{V}(x, c, y(x), y'(x)) \leq V(x, u(x), y(x), y'(x)),$$

de donde no podríamos afirmar que el par (u, y) verifica la restricción

$$\int_0^1 V(x, u(x), y(x), y'(x)) dx \leq \delta.$$

sabiendo que (y, c) verifica la restricción integral para la reformulación variacional.

Para poder tratar este tipo de restricciones integrales es necesario que se dé un cierto acoplamiento entre las funciones que intervienen, F , G y V , expresado en la siguiente proposición.

Proposición 2.4 *Supongamos que la intersección*

$$\operatorname{argmin}_{K(x,c,y,\lambda)} F(x, u, y, \lambda) \cap \operatorname{argmin}_{K(x,c,y,\lambda)} V(x, u, y, \lambda)$$

es no vacía, para todo $(x, c, y, \lambda) \in \Delta$ (recordamos que $\Delta = \{\tilde{F} < +\infty\}$). Entonces los problemas (P) y (\tilde{P}) , incluyendo las restricciones integrales (i.e. los problemas (2.7) y (2.8)), son equivalentes en el sentido de la Proposición 2.1.

La prueba de este resultado es directa siguiendo la demostración de la Proposición 2.1. Las hipótesis de la proposición anterior se da, por ejemplo, si V es constante a lo largo de las curvas de nivel de G , es decir, si $V(x, u, y, \lambda)$ permanece constante siempre que $G(x, u, y, \lambda) = c$, y esto para cada (x, c, y, λ) . Una situación en la que esto ocurre trivialmente se da cuando V es independiente de u .

Teorema 2.5 *En las condiciones de la proposición anterior supongamos que los funcionales*

$$\tilde{I}(y, c) = \int_0^1 \tilde{F}(x, c, y(x), y'(x)) dx$$

y

$$\tilde{J}(y, c) = \int_0^1 \tilde{V}(x, c, y(x), y'(x)) dx,$$

verifican las hipótesis del Teorema 2.2 (i.e., son s.c.i.d.). Supongamos además que \tilde{I} verifica las hipótesis del Teorema 2.3 (i.e., es coercitivo), y que el conjunto de pares (y, c) que verifican la restricción integral

$$\tilde{J}(y, c) \leq \delta$$

es no vacío. Entonces el problema (\tilde{P}) con restricción integral (i.e., el problema (2.8)) tiene al menos un minimizador.

Demostración.

La prueba de este resultado es una simple aplicación del método directo. Gracias a la coercitividad de \tilde{I} toda sucesión minimizante está acotada, y por tanto posee una subsucesión (que seguimos denotando igual) débilmente convergente. Así pues, sea $\{(y_j, c_j)\}$ una sucesión minimizante que converge débil a (y, c) . Como \tilde{I} es s.c.i.d., (y, c) será un minimizador para el problema (2.8) si verifica la restricción integral. En efecto (y, c) verifica la restricción integral, pues

$$\int_0^1 \tilde{V}(x, c, y(x), y'(x)) dx$$

es menor o igual, debido a la s.c.i.d. de \tilde{J} , a

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{V}(x, c_j, y_j(x), y_j'(x)) dx,$$

y este límite es evidentemente menor o igual que δ . ■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de los dos resultados anteriores.

Corolario 2.6 *En las condiciones de la Proposición 2.4 y el Teorema 2.5, el problema de control óptimo (P) con restricciones integrales (i.e., (2.7)) posee al menos un control óptimo.*

2.5 Ejemplos y comentarios

En esta sección analizamos algunas situaciones y ejemplos típicos en los que se puede, o no se puede, aplicar el resultado de existencia anterior para establecer la existencia de controles óptimos. Muchos de los ejemplos siguientes vienen motivados por las aplicaciones (diseño óptimo, optimización estructural, etc.). En el resto de la sección supondremos $n, m, l, d = 1$.

EJEMPLO 2.1 Consideremos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u, y) = \int_0^1 F(x, u(x), y(x), y'(x)) dx, \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty((0, 1); \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\}, \\ \text{sujeto a } \int_0^1 V(x, u(x), y(x), y'(x)) dx \leq \delta, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

donde y es el estado determinado unívocamente por el control u a través de la ecuación de estado lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} -[u(x)y'(x)]' = p(x), \quad y \in H^1(0, 1), \\ y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \end{array} \right.$$

K un compacto contenido en $(0, \infty)$ y $p \in L^2(0, 1)$ son datos del problema. Sea $P(x)$ una primitiva de $p(x)$:

$$P(x) = \int_0^x p(s) ds.$$

La ecuación de estado se reescribe como

$$[u(x)y'(x) + P(x)]' = 0, \quad \text{en } (0, 1).$$

Para el estudio de la existencia de solución de (2.9) debemos empezar comprobando las hipótesis del Teorema 2.2. Es elemental ver que

$$K(x, c, y, \lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} K, & \text{si } \lambda = 0 \text{ y } c = P(x), \\ \left\{ \frac{c - P(x)}{\lambda} \right\}, & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \frac{c - P(x)}{\lambda} \in K, \\ \emptyset, & \text{caso contrario,} \end{array} \right.$$

$$\Delta = \{(x, P(x), y, 0) : x \in (0, 1), y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (x, c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c - P(x)}{\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x) = \{(P(x), y, 0) : y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c - P(x)}{\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x, c, y) = \left\{ \frac{c - P(x)}{u} : u \in K \right\},$$

$$\tilde{F}(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} F\left(x, \frac{c - P(x)}{\lambda}, y, \lambda\right), & \lambda \neq 0, \frac{c - P(x)}{\lambda} \in K, \\ \min_K F(x, u, y, \lambda), & \lambda = 0, c = P(x), \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

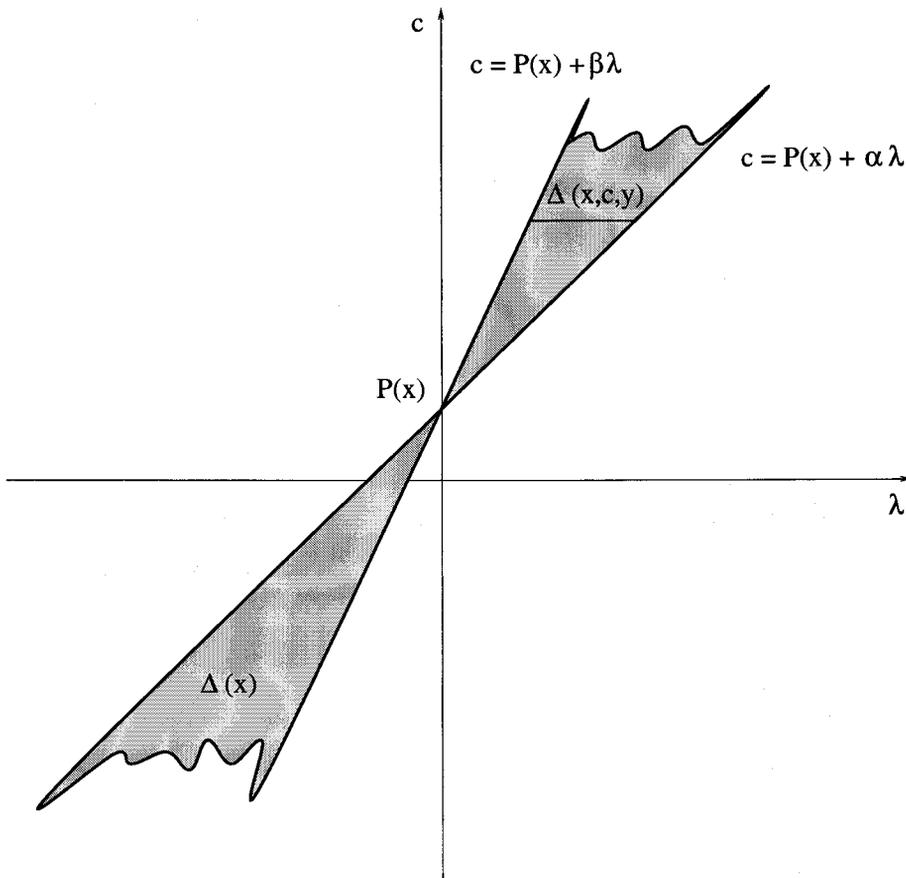


Figura 2.1: representación gráfica de $\Delta(x)$.

Por tanto es directo comprobar:

- (i) $\Delta(x)$ es cerrado;
- (ii) $\Delta(x, c, y)$ es convexo si y sólo si K es convexo;
- (iii) $\tilde{F}(x, c, y, \cdot) : \Delta(x, c, y) \rightarrow \mathbf{R}$ es convexa si y sólo si la función

$$\varphi(x, k, y, \lambda) = F\left(x, \frac{k}{\lambda}, y, \lambda\right)$$

es convexa en λ siempre que $\frac{k}{\lambda} \in K$.

Si ahora consideramos la restricción integral

$$\int_0^1 V(x, u(x), y(x), y'(x)) dx \leq \delta,$$

tenemos que incorporar la hipótesis adicional de la Proposición 2.4. Ahora bien, $K(x, c, y, \lambda)$, cuando es no vacío, es o bien un conjunto con un solo elemento, en cuyo caso la hipótesis es inmediata, o bien todo K , en cuyo caso la hipótesis se escribe como

$$\operatorname{argmin}_K F(x, u, y, 0) \cap \operatorname{argmin}_K V(x, u, y, 0) \neq \emptyset.$$

Podemos resumir todas las consideraciones anteriores en el siguiente resultado.

Corolario 2.7 *En las condiciones anteriores, si además:*

- (i) \tilde{F} y \tilde{V} son funciones de Carathéodory en Δ ;
- (ii) K es un cerrado, acotado y convexo;
- (iii) las funciones

$$F\left(x, \frac{k}{\lambda}, y, \lambda\right) \text{ y } V\left(x, \frac{k}{\lambda}, y, \lambda\right)$$

son convexas en λ siempre que $\frac{k}{\lambda} \in K$;

- (iv) $\operatorname{argmin}_K F(x, u, y, 0) \cap \operatorname{argmin}_K V(x, u, y, 0) \neq \emptyset$;
- (v) *coercitividad:*

$$c(|\lambda|^p - 1) \leq F\left(x, \frac{k}{\lambda}, y, \lambda\right), \quad c > 0, \quad 1 < p \leq 2,$$

entonces el problema de control óptimo (2.9) admite solución óptima.

Casos particulares de este resultado pueden obtenerse a partir de la teoría de la homogeneización. Ya que el conjunto $K = [\alpha, \beta]$ ($\alpha > 0$) es G-cerrado [70], bastaría con garantizar que el funcional I es semicontinuo con respecto a la G-convergencia [14]. No obstante, ésto puede no ocurrir incluso en el caso de que F sea convexa conjuntamente en u y λ (ver [14]). Por tanto, es evidente que el Corolario 2.7 abarca muchas más situaciones de las que podemos abordar a través de estos métodos clásicos.

Es fácil imaginarse multitud de ejemplos en donde se puede aplicar este resultado. Muchos de los ejemplos que se pueden encontrar están motivados por las aplicaciones, ya que esta ecuación de estado es la ecuación que aparece típicamente en problemas de diseño óptimo [42].

■

EJEMPLO 2.2 Vemos ahora un ejemplo donde aplicamos el resultado anterior, a pesar de no verificarse una de las hipótesis. Sean $y_0, y_1 \in \mathbf{R}$, $y_0 \neq y_1$, $0 < \alpha \leq \beta$, y $\delta > \alpha$. El siguiente problema de control tiene solución.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u, y) = \int_0^1 [|y'(x)|^2 + |u(x)|^2] dx, \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(0, 1) : u(x) \in [\alpha, \beta], \text{ p.c.t. } x \in (0, 1)\}, \\ \text{sujeto a } \int_0^1 u(x) dx \leq \delta, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

donde el estado y viene determinado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -[u(x)y'(x)]' = 0, \quad y \in H^1(0, 1), \\ y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \end{array} \right.$$

La restricción integral que hemos impuesto es la típica condición volumétrica que aparece en problemas de optimización estructural.

Es trivial comprobar que la formulación alternativa del problema se escribe como

$$\inf_{(y,c)} \int_0^1 \tilde{F}(c, y'(x)) dx,$$

sujeto a

$$\int_0^1 \tilde{V}(c, y'(x)) dx \leq \delta,$$

donde los integrandos \tilde{F} y \tilde{V} están dados por

$$\tilde{F}(c, \lambda) = \begin{cases} \alpha^2, & \text{si } (\lambda, c) = (0, 0), \\ |\frac{c}{\lambda}|^2 + |\lambda|^2, & \text{si } \frac{c}{\lambda} \in [\alpha, \beta], \lambda \neq 0, \\ +\infty, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

y

$$\tilde{V}(c, \lambda) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } (\lambda, c) = (0, 0), \\ \frac{c}{\lambda}, & \text{si } \frac{c}{\lambda} \in [\alpha, \beta], (\lambda, c) \neq (0, 0), \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso es fácil comprobar que se verifican todas las hipótesis del Corolario 2.7 salvo (i), es decir, que \tilde{F} y \tilde{V} son funciones de Carathéodory. De hecho, no son continuas en el origen. No obstante, esta dificultad es más bien una dificultad de carácter técnico y puede ser superada sin dificultad probando que para toda sucesión minimizante, $\{(y_j, c_j)\}$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|y'_j(x)|, |c_j| \geq \epsilon,$$

p.c.t. $x \in (0, 1)$, y para todo $j \geq 1$. En efecto, supongamos que para cada $n \geq 1$ existe $j_n \in \mathbf{N}$ y $E_{j_n} \subset (0, 1)$ con $|E_{j_n}| \neq 0$ tal que

$$|y'_{j_n}(x)| < \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } x \in E_{j_n},$$

ó

$$|c_{j_n}| < \frac{1}{n},$$

como y'_{j_n} y c_{j_n} están ligadas por la ecuación de estado, la condición anterior implica que

$$y'_{j_n}(x) \rightarrow 0, \quad \text{p.c.t. } x \in (0, 1). \quad (2.11)$$

Ya que la sucesión $\{(y_j, c_j)\}$ es minimizante, está acotada, y por tanto existe una subsucesión (que seguimos denotando igual) y un par (y, c) tal que

$$y_j \rightharpoonup y, \quad \text{débil en } W^{1,p},$$

y

$$c_j \rightarrow c.$$

Por tanto, según (2.11), y debe ser constante, además, y verifica la ecuación de estado para algún control, lo cual está en contradicción con el hecho de que $y_0 \neq y_1$.

Según lo anterior la medida parametrizada generada por $\{(c_j, y'_j)\}$,

$$\mu = \{\mu_x\}_{x \in (0,1)},$$

tiene soporte en $\mathbf{R}^2 \setminus B((0,0); \varepsilon)$. Ahora bien, las funciones \tilde{F} y \tilde{V} restringidas a $\Delta \setminus B((0,0); \varepsilon)$ se pueden extender como funciones continuas a todo Δ . Esto significa, de acuerdo con la prueba del Teorema 2.2, que recuperamos la s.c.i.d., y en consecuencia la existencia de controles óptimos. ■

EJEMPLO 2.3 En el Ejemplo 2.1 hemos visto una familia amplia de problemas de control óptimo donde podemos garantizar la existencia de solución. También pueden ser interesantes los ejemplos donde en ausencia de alguna de las hipótesis del Corolario 2.7 no existen controles óptimos. El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de acotación de K es esencial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u) = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(0,1) : u(x) \in [1, \infty) \text{ p.c.t. } x \in (0,1)\}, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

donde y es el estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\left\{ \begin{array}{l} -(u(x)y'(x) - (1 - 2x))' = 0, \\ y \in H_0^1(0,1). \end{array} \right.$$

Para probar que el problema anterior carece de solución veremos que el valor del ínfimo de I sobre \mathcal{U}_{ad} es cero, y teniendo en cuenta que la única función que hace cero el funcional de coste es la función $y \equiv 0$, la cual no verifica la ecuación de estado para ningún control, llegamos a la conclusión de que (2.12) no tiene solución.

Sean las sucesiones $y_j(x) = \frac{1}{j}(x - x^2)$ y $u_j(x) = j$, $j \geq 1$. Es trivial comprobar que (u_j, y_j) verifica la ecuación de estado para cada $j \geq 1$ y que $u_j(x) \in [1, \infty)$ para todo $x \in (0,1)$, con lo cual (u_j, y_j) es admisible para el problema (2.12), para todo $j \geq 1$. Además se tiene que

$$I(u_j) = \int_0^1 |y_j'(x)|^2 dx = \frac{1}{j^2} \int_0^1 |1 - 2x|^2 dx \rightarrow 0,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Por lo que, teniendo en cuenta que el funcional coste es positivo, necesariamente el valor del ínfimo es cero.

Es fácil ver que se verifican todas las hipótesis del Corolario 2.7 salvo que las secciones de Δ ,

$$\Delta(x, c) = (0, 1 - 2x + c],$$

son cerradas. Este hecho ocasiona la no existencia de solución. Ello viene motivado porque el conjunto donde toman valores los controles no es acotado. ■

EJEMPLO 2.4 Veamos un ejemplo de un problema de control con ecuación de estado no lineal. La ecuación viene dada por el típico operador q -laplaciano ($q > 2$) en una dimensión

$$\begin{cases} -[u(x)|y'(x)|^{q-2}y'(x)]' = p(x), & y \in W^{1,q}(0,1) \\ y(0) = y_0 \quad y(1) = y_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Seguimos en las condiciones del caso lineal. Esta ecuación tiene solución única para cada control u . Mucho de los puntos que tenemos que analizar son una generalización directa del Ejemplo 2.1. A saber,

$$K(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} K, & \text{si } \lambda = 0 \text{ y } c = P(x), \\ \left\{ \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \right\}, & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K, \\ \emptyset, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

$$\Delta = \{(x, P(x), y, 0) : x \in (0, 1), y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (x, c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x) = \{(P(x), y, 0) : y \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ (c, y, \lambda) : \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K \right\},$$

$$\Delta(x, c, y) = \left\{ \left| \frac{c-P(x)}{u} \right|^{\frac{2-q}{q-1}} \frac{c-P(x)}{u} : u \in K \right\},$$

$$\tilde{F}(x, c, y, \lambda) = \begin{cases} F\left(x, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda}, y, \lambda\right), & \lambda \neq 0, \frac{c-P(x)}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K, \\ \min_K F(x, u, y, \lambda), & \lambda = 0, c = P(x), \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Al igual que en el caso lineal es fácil comprobar que

- (i) $\Delta(x)$ es cerrado;
- (ii) $\Delta(x, c, y)$ es convexo si y sólo si K es convexo;

(iii) $\tilde{F} : \Delta(x, c, y) \rightarrow \mathbf{R}$ es convexa si y sólo si

$$F\left(x, \frac{k}{|\lambda|^{q-2}\lambda}, y, \lambda\right)$$

es convexa en λ siempre que $\frac{k}{|\lambda|^{q-2}\lambda} \in K$.

El análisis bajo la condición integral es análogo al caso anterior. Podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Asumimos que la ecuación de estado está dada por (2.13). Si*

(i) \tilde{F} y \tilde{V} son funciones de Carathéodory en Δ ;

(ii) K es un intervalo cerrado contenido en $(0, +\infty)$;

(iii) las funciones

$$F\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right) \text{ y } V\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right)$$

son convexas en λ siempre que $\frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}} \in K$;

(iv) $\operatorname{argmin}_K F(x, u, y, 0) \cap \operatorname{argmin}_K V(x, u, y, 0) \neq \emptyset$;

(v) coercitividad:

$$c(|\lambda|^p - 1) \leq F\left(x, \frac{k}{\lambda|\lambda|^{q-2}}, y, \lambda\right), \quad c > 0, 1 < p \leq q,$$

entonces el problema de control óptimo asociado a la ecuación (2.13) admite solución óptima. ■

EJEMPLO 2.5 El último ejemplo de este capítulo lo dedicamos a la cuestión de existencia-no existencia en ausencia de convexidad. Para ello vamos a analizar el siguiente ejemplo típico de diseño óptimo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u) = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u = \alpha\chi + \beta(1 - \chi) : \chi \text{ función característica en } (0, 1)\}, \\ \text{sujeto a } \int_0^1 \chi(x) dx = L, \end{array} \right. \quad (2.14)$$

donde el estado y se determina unívocamente a partir del control a través de la ecuación

$$\begin{cases} -[u(x)y'(x)]' = p(x), & y \in H^1(0, 1), \\ y(0) = 0, & u(1)y'(1) = \gamma. \end{cases}$$

$L \in [0, 1]$, $p \in L^2(0, 1)$, $0 < \alpha < \beta$ y $\gamma \in \mathbf{R}$ son datos del problema. En este caso no podemos aplicar el Corolario 2.7 debido a la falta de convexidad del conjunto K donde toman valores los diseños lo que provoca la no convexidad de las secciones de Δ , $\Delta(x, c, y)$. Esta falta de convexidad causa incertidumbre sobre la existencia o no existencia de soluciones óptimas para (2.14). Como hemos señalado en la Introducción el caso unidimensional es bastante peculiar en este sentido. Esto lo pondremos de manifiesto a continuación probando que este caso concreto admite solución. No obstante, pensamos que en dimensiones mayores esta falta de “convexidad” es a menudo motivo directo de la no existencia de soluciones óptimas (en el siguiente capítulo nos centraremos en más profundidad en este tema).

Para cada control u es fácil comprobar que la solución de la ecuación de estado se escribe como

$$y(x) = \int_0^x \left[\frac{\gamma}{u(s)} + \frac{1}{u(s)} \int_s^1 p(\tau) d\tau \right] ds,$$

y consecuentemente podemos hacer explícita la dependencia de I con respecto a la función característica χ ,

$$I(\chi) = \int \left(\frac{1}{\alpha^2} \chi(x) + \frac{1}{\beta^2} (1 - \chi(x)) \right) \left(\gamma + \int_x^1 p(s) ds \right)^2 dx.$$

Ahora es fácil ver que si tomamos χ la función característica de una región A de medida L donde

$$\max_{x \in A} \left(\gamma + \int_x^1 p(s) ds \right)^2 \leq \min_{x \in (0,1) \setminus A} \left(\gamma + \int_x^1 p(s) ds \right)^2,$$

entonces el diseño $u(x) = \alpha\chi(x) + \beta(1 - \chi(x))$ es un diseño óptimo para el problema (2.14). Mirando el grafo de la función

$$\left(\gamma + \int_x^1 p(s) ds \right)^2$$

es fácil convencerse de que existen tales conjuntos A (ver Figura 2.5).

En este ejemplo hemos sido capaces de probar la existencia de solución en ausencia de convexidad por una técnica diseñada exclusivamente para él. En la mayoría de los casos en los que no tenemos la convexidad no sabemos determinar si existe o no solución del problema. Sin ir más lejos, si consideramos el problema anterior con

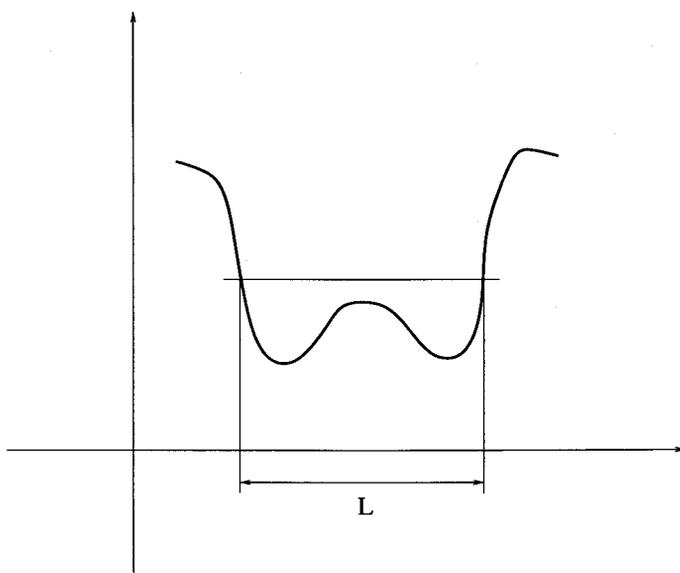


Figura 2.2: representación gráfica de A .

condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, razonando como en el caso anterior (escribiendo explícitamente la solución de la ecuación de estado y expresando I en función de χ) llegamos al funcional

$$I(\chi) = \int_0^1 \left(\frac{\chi(x)}{\alpha} + \frac{1 - \chi(x)}{\beta} \right) \cdot \left[P(x) - \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{1-\delta}{\beta} \right) \int_0^1 \left(\frac{\chi(s)}{\alpha} + \frac{1 - \chi(s)}{\beta} \right) P(s) ds \right]^2 dx,$$

y no sabemos determinar si se alcanza o no el ínfimo de I sobre la clase de las funciones características con integral fija. En general, en ausencia de convexidad el análisis puede proseguir como es típico en problemas variacionales no convexos examinando la relajación a diferentes niveles ([20, 59]). Aquí no analizamos esta cuestión en la situación unidimensional pero sí en los casos multidimensionales, como veremos en los capítulos siguientes.

■

Capítulo 3

El problema de control en dimensión $N = 2$

3.1 Introducción

Sea Ω un abierto de \mathbf{R}^2 , K un subconjunto de \mathbf{R}^n , F , G y V tres funciones de Carathéodory,

$$F : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

$$G : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^{2 \times l},$$

$$V : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^d,$$

con F acotada inferiormente, y n, m, l, d enteros positivos. En este capítulo vamos a estudiar el siguiente problema de control óptimo, que identificamos como (P) :

Encontrar un control u perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

sujeto a

$$\int_{\Omega} V(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx \leq \delta,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

y_0 y δ son datos del problema. Otro tipo de condiciones de contorno podrían ser permitidas. Debemos precisar qué se entiende por divergencia de una función que toma valores en un conjunto de matrices. Dada $f : \Omega \subset \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^{N \times M}$, $f = (f_i)_1^M$, llamamos divergencia de f a la función $\operatorname{div}(f) = (\operatorname{div}(f_1), \dots, \operatorname{div}(f_M))$.

En el capítulo anterior hemos analizado la versión en dimensión uno de este problema obteniendo un resultado de existencia de controles óptimos que hemos aplicado a varias situaciones concretas. Este caso ha sido el paso previo al estudio de los casos más complicados $N = 2, 3$. Nuestro propósito en este capítulo es el de analizar cómo podemos implementar las ideas de la situación precedente en el caso $N = 2$, con el fin de obtener un resultado de existencia de controles óptimos para el problema (P) por un lado, y analizar distintas situaciones de no existencia, por otro. Las dificultades con las que nos enfrentamos en esta situación son, a priori, las mismas que las del caso anterior, a saber, el carácter no local de la ecuación de estado, y la dependencia respecto del gradiente del estado en la función objetivo F . La idea que nos conducirá a un planteamiento alternativo de este tipo de problemas, al igual que en el capítulo anterior, es la de introducir un “potencial” con el fin de evitar la ley no local que es la ecuación de estado, y reformular el problema de control óptimo, de manera equivalente, como un problema variacional de naturaleza local. La diferencia esencial que nos encontramos con respecto al caso unidimensional es el carácter genuinamente vectorial del problema variacional que surge.

Para tratar el carácter no local de la ecuación de estado el principal ingrediente será el hecho de que todo campo con divergencia nula es un rotacional, lo que en dimensión dos equivale esencialmente a un gradiente. Es decir, utilizamos el hecho de que, bajo ciertas condiciones técnicas, dado un campo $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$$\operatorname{div}(v) = 0,$$

existe $w : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$v(x) = T \nabla w(x),$$

donde T es la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Por tanto dado un par (u, y) admisible para el problema de control, es decir, tal que verifica (3.1), existe un campo z tal que

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) = T \nabla z(x).$$

De esta manera cambiamos la restricción no local que es la ecuación de estado (3.1), por una restricción local que involucra una nueva variable, el campo ∇z . En vista de esto último, y siguiendo con la idea expuesta en el capítulo anterior, lo que proponemos es evitar esta ley no local mediante la introducción de z como

variable independiente en el problema de optimización, eliminando la dependencia del funcional de coste respecto del control, y obteniendo de este modo un problema variacional equivalente, en el que las variables independientes son el estado y y el potencial z .

La idea de que todo campo con divergencia nula en dimensión dos es esencialmente un gradiente ha sido usada para obtener relajaciones de problemas de control óptimo que provienen de modelos de tomografía [36], de micromagnetismo y magnetostricción [61], de diseño óptimo [63], y de optimización estructural [64]. Esta idea también ha sido explotada para dar contraejemplos a la regularidad de soluciones ecuaciones en derivadas parciales elípticas [51, 76]. En este capítulo lo que se pretende es un tratamiento sistemático de estas ideas en el contexto de la existencia y no existencia de soluciones óptimas para el problema (P) .

Como hemos insistido con anterioridad, la motivación para el análisis del problema (P) viene de diversas situaciones prácticas en las que aparecen problemas de control en los coeficientes. A este tipo de problemas también se les suele llamar problemas de diseño óptimo u optimización estructural. La homogeneización ha sido la principal herramienta para abordar esta clase de problemas, tanto desde el punto de vista analítico como numérico (ver por ejemplo [43, 44, 45, 55, 56, 67, 70], y los trabajos más recientes [41, 73]). Como hemos señalado con anterioridad pensamos que nuestro marco es más amplio que el de estos problemas de diseño óptimo y optimización estructural que se pueden abordar mediante la homogeneización, en el sentido de que permite ecuaciones de estado no lineales y la dependencia explícita respecto de las derivadas del estado en el funcional de coste.

La organización del capítulo es la siguiente. En la Sección 3.2 plantearemos la formulación variacional alternativa del problema. La Sección 3.3 estará dedicada a los resultados de existencia de controles óptimos para el problema (P) , mientras que en la Sección 3.4 analizaremos la relación del método presentado con la teoría de la homogeneización. En la Sección 3.5 hablaremos de relajación para problemas en los que no hay existencia en una doble vertiente: a través de envolturas convexas y de medidas parametrizadas. El material de este capítulo aparece recogido en [9].

3.2 *Formulación alternativa*

Nuestro punto de partida en esta sección es el problema de control óptimo descrito en la Introducción:

Encontrar un control u perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Olvidamos por el momento la condición integral ya que no tiene relevancia en la discusión que sigue. Más tarde introduciremos esta restricción justificando las conclusiones que obtengamos.

A lo largo de la sección supondremos que K es un conjunto compacto. Nos situaremos en el contexto en el que la existencia de solución débil para la ecuación de estado está garantizada en un cierto espacio de Sobolev $W^{1,p}$ (ver [20, 24, 40, 65]). Una situación típica en la que esto ocurre se da cuando G tiene crecimiento polinomial de orden $p - 1$ y coincide con la derivada de una densidad convexa en ∇y y coercitiva. Supondremos por tanto, que existe $1 < p \leq +\infty$ tal que para cada control $u \in \mathcal{U}_{ad}$ existe un estado $y \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ que es solución débil de la ecuación

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Evidentemente para que la ecuación de estado tenga sentido el número de incógnitas debe ser menor o igual que el número de ecuaciones, luego se debe tener $l \leq m$.

Veamos la formulación variacional alternativa del problema de control óptimo. Para ello necesitamos el siguiente resultado, utilizado en la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes, que aparece en [25, Th 3.1].

Teorema 3.1 *Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbf{R}^2 , regular y simplemente conexo, y $v \in L^s(\Omega; \mathbf{R}^2)$, con $s \geq 2$. Entonces existe una función $w \in W^{1,s}(\Omega)$ tal que*

$$v = T\nabla w,$$

donde T es la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si y sólo si $\operatorname{div}(v) = 0$ en sentido débil.

Suponemos ahora y para el resto del capítulo que Ω es un abierto regular y simplemente conexo. Sea (u, y) un par admisible para (P) verificando

$$I(u, y) < +\infty.$$

Si

$$c(|G(x, u, y, A) - 1|)^s \leq F(x, u, y, A), \quad s \geq 2, c > 0 \quad (3.2)$$

entonces

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) \in L^s(\Omega; \mathbf{R}^{2 \times l}),$$

y

$$\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0.$$

Por el Teorema 3.1, existe $z \in W^{1,s}(\Omega; \mathbf{R}^l)$ tal que

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) = T\nabla z(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$. Con $T\nabla z$ representamos el vector $(T\nabla z_1, \dots, T\nabla z_l)$. En vista de esta última relación para cada $(x, Y, A) \in \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l) \times (\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l})$ definimos la nueva densidad \tilde{F} como

$$\tilde{F}(x, Y, A) = \min_{u \in K(x, Y, A)} F(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}), \quad (3.3)$$

donde

$$K(x, Y, A) = \{u \in K : G(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}) = TA^{(2)}\}.$$

Debemos hacer notar que la variable $Y^{(1)}$ corresponde al estado y , $Y^{(2)}$ al potencial z , $A^{(1)}$ al gradiente del estado y $A^{(2)}$ al gradiente del potencial. La función \tilde{F} está bien definida pues el mínimo (3.3) se alcanza ya que es el mínimo de una función continua (debido a que F es una función de Carathéodory) sobre un compacto (debido a que G es una función de Carathéodory y K un compacto). En el caso en que el conjunto $K(x, Y, A)$ sea vacío damos a $\tilde{F}(x, Y, A)$ el valor $+\infty$. Si K no es un conjunto compacto, para poder garantizar que el mínimo (3.3) se alcanza, F debería ser coercitiva en el sentido

$$\lim_{u \in K, |u| \rightarrow +\infty} F(x, u, y, A) = +\infty.$$

Tras la definición de la nueva densidad \tilde{F} , es natural considerar el siguiente problema variacional, que denotamos como (\tilde{P}) ,

$$\inf \tilde{I}(Y) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y(x), \nabla Y(x)) dx$$

sujeto a

$$Y = (Y^{(1)}, Y^{(2)}), \quad Y^{(1)} \in y_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m), \quad Y^{(2)} \in W^{1,s}(\Omega; \mathbf{R}^l).$$

En este problema las componentes de la variable Y no tienen por qué estar, en principio, en el mismo espacio. Con el fin de evitar dificultades técnicas, que están fuera del objetivo que aquí nos ocupa, introducimos una condición que nos permita asegurar que ambas componentes están en el mismo espacio. Una condición que, junto a (3.2), implica que $Y \in W^{1,s}(\Omega; \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l)$ es la condición de coercitividad para G

$$c(|A|^{p-1} - 1) \leq G(x, u, y, A), \quad c > 0.$$

Advertimos que $p \leq s(p-1)$ y $s \leq s(p-1)$ si s y p son mayores o iguales a 2. Es muy razonable asumir esta condición, ya que es una hipótesis habitual para asegurar la existencia de solución de la ecuación de estado ([20, 24]).

Al igual que en la situación unidimensional se puede probar que los problemas (P) y (\tilde{P}) son equivalentes.

Proposición 3.2 *Supongamos lo siguiente:*

1. Para algún $s \geq 2$

$$(c|G(x, u, y, A)|^s - 1) \leq F(x, u, y, A), \quad c > 0$$

para todo (x, u, y, A) ;

2. G verifica la acotación

$$c(|A|^{p-1} - 1) \leq G(x, u, y, A), \quad c > 0,$$

para todo (x, u, y, A) .

Entonces los problemas (P) y (\tilde{P}) son equivalentes en el sentido de que:

(i) los valores de los dos ínfimos coinciden, i.e.,

$$\inf I(u, y) = \inf \tilde{I}(Y);$$

(ii) si (u, y) es óptimo para (P) entonces $Y = (y, z)$ es óptimo para (\tilde{P}) , donde z es tal que

$$T\nabla z(x) \equiv G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)).$$

Recíprocamente, si Y es óptimo para (\tilde{P}) entonces existe un control $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$TY^{(2)}(x) \equiv G(x, u(x), Y^{(1)}(x), \nabla Y^{(1)}(x)),$$

y $(u, Y^{(1)})$ es un par óptimo para (P) .

La demostración de este resultado es análoga a la de la Proposición 2.1 del capítulo anterior.

Merece la pena observar la naturaleza vectorial del problema variacional (\tilde{P}) . Con esto queremos indicar que se trata de un problema de optimización en el que minimizamos en un cierto conjunto de funciones vectoriales. En el Apéndice de esta memoria se señalan las diferencias esenciales entre problemas variacionales vectoriales y escalares.

NOTA 3.1

(i) Es importante hacer una observación sobre las hipótesis 1 y 2 de la Proposición 3.2. Estas hipótesis sirven para:

- Por un lado, poder asegurar que para cada par admisible (u, y) , el campo vectorial $G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))$ pertenece a un cierto espacio L^s con $s \geq 2$ y por tanto existe un potencial, en el sentido del Teorema 3.1, para este campo;
- y por otro lado, garantizar que tanto los estados como los potenciales están en el mismo espacio de Sobolev (con el objeto de evitar complicaciones técnicas).

Cualquier otro conjunto de hipótesis que implique estos dos puntos es suficiente para nuestros propósitos. Por ejemplo, las acotaciones

$$c(|A|^{p-1} - 1) \leq G(x, u, y, A), \quad c > 0$$

y

$$(|G(x, u, y, A)|^s) \leq C(1 + |y|^p + |A|^p), \quad C > 0, \quad 2 \leq s \leq p$$

bastarían. Conviene decir que, ya que típicamente tendremos crecimiento de orden p para F , esta hipótesis es menos general que la anterior.

(ii) Nos gustaría señalar cuáles son las dificultades cuando el dominio Ω no es simplemente conexo. En tal caso no podemos deducir la existencia de funciones potenciales para campos vectoriales w con divergencia nula. Para ello necesitamos una condición adicional ([25]). Supongamos que $\partial\Omega$ puede escribirse como una unión disjunta y finita de curvas regulares y cerradas

$$\partial\Omega = \Lambda_0 \cup (\cup_i \Lambda_i)$$

donde Λ_0 es la frontera exterior. Si v es un campo tal que

$$\operatorname{div}(v) = 0,$$

$$\int_{\Lambda_i} v \cdot n \, dS = 0,$$

para todos los índices $i = 1, 2, \dots$, salvo posiblemente uno (n es el vector normal exterior a la frontera), entonces existe un potencial w tal que

$$v(x) = T\nabla w(x).$$

En nuestro contexto esta condición estaría garantizada bajo el requisito adicional

$$\int_{\Lambda_i} G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) \cdot n \, dS = 0,$$

para todos los índices salvo quizás uno. Esta es una especie de condición de carga superficial.

3.3 Existencia de controles óptimos

Gracias a la Proposición 3.2 estudiar la existencia de controles óptimos para el problema (P) es equivalente a estudiar la existencia de minimizadores para (\tilde{P}) . Así pues, a este fin nos dedicaremos en esta sección. Esto se llevará a cabo a través del método directo del Cálculo de Variaciones, el cuál tiene como elemento fundamental la semicontinuidad inferior débil (s.c.i.d.) del funcional \tilde{I} . Este problema no se encuentra en el marco “clásico” debido a que la densidad \tilde{F} no es una función de Carathéodory pues puede tomar el valor $+\infty$ súbitamente. Esta dificultad la superaremos con un poco de trabajo adicional, tal y como hicimos en el caso $N = 1$. La otra dificultad relativa a la existencia de minimizadores que presenta el problema (\tilde{P}) es, como hemos insistido con anterioridad, la naturaleza vectorial del mismo. Sabemos que en esta situación el concepto de s.c.i.d. va ligado una cierta propiedad de convexidad generalizada, la “cuasiconvexidad”. Decimos que una función $F : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R}^*$ es cuasiconvexa si

$$F(A) \leq \frac{1}{|D|} \int_D F(A + \nabla w(x)) \, dx$$

para toda $A \in \mathbf{R}^{N \times M}$, todo dominio D y toda función test w (este concepto se trata en el Apéndice de esta memoria). En esta sección estableceremos resultados de existencia abstractos basados en la cuasiconvexidad tanto para el caso sin restricciones integrales como para el caso en que estas restricciones son consideradas. También daremos dos ejemplos explícitos donde la cuasiconvexidad puede ser probada: esto lo conseguiremos mediante hipótesis más restrictivas que impliquen de hecho la “policonvexidad” de \tilde{F} .

Antes de enunciar y demostrar los resultados de existencia de minimizadores para el problema (\tilde{P}) hemos de introducir el concepto de cuasiconvexidad de conjuntos. Sobre esto y sobre otros conceptos de convexidad generalizada de conjuntos puede consultarse [50] y las referencias que allí se indican. Dado un conjunto de matrices $D \subset \mathbf{R}^{N \times M}$ llamamos cuasiconvexificación o envoltura cuasiconvexa de D al conjunto

$$Q(D) = \left\{ A \in \mathbf{R}^{N \times M} : F(A) \leq \sup_D F, \forall F : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R} \text{ cuasiconvexa} \right\}.$$

Diremos que D es cuasiconvexo si $D = Q(D)$. Obsérvese que la cuasiconvexificación de D viene definida a través de los subconjuntos de nivel, tal y como se define la convexificación cerrada de un conjunto,

$$\overline{\text{co}(D)} = \left\{ A \in \mathbf{R}^{N \times M} : F(A) \leq \sup_D F, \forall F : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R} \text{ convexa} \right\}.$$

El siguiente lema da una caracterización de la cuasiconvexificación de D , $Q(D)$. Esta caracterización muestra de manera más clara el significado de este concepto, ya que está en la línea de la caracterización de la cuasiconvexidad en términos de medidas parametrizadas (Sección A.5 del Apéndice).

Lema 3.3 ([50]) *El conjunto $Q(D)$ coincide con el conjunto de matrices $A \in \mathbf{R}^{N \times M}$ baricentro de medidas parametrizadas gradientes homogéneas con soporte contenido en D , i.e.,*

$$Q(D) = \left\{ \int_{\mathbf{R}^{N \times M}} A d\nu(A) : \nu \in \mathcal{M}^{qc}(D) \right\},$$

donde $\mathcal{M}^{qc}(D)$ es el conjunto de medidas parametrizadas gradientes homogéneas con soporte contenido en D .

Ya estamos en condiciones de enunciar y probar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.4 *Sea*

$$\Delta = \left\{ (x, Y, A) \in \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l) \times (\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l}) : |\tilde{F}(x, Y, A)| < +\infty \right\}.$$

En las condiciones de la Proposición 3.2, supongamos además que:

(i) *El conjunto*

$$\Delta(x) = \{(Y, A) : (x, Y, A) \in \Delta\}$$

es cerrado, p.c.t. $x \in \Omega$;

(ii) \tilde{F} es una función de Carathéodory en Δ , i.e.,

$$\tilde{F}(\cdot, Y, A)$$

medible para todo Y, A y

$$\tilde{F}(x, \cdot, \cdot)$$

continua en $\Delta(x)$ p.c.t. $x \in \Omega$;

(iii) existe una constante $c \in \mathbf{R}$ y una función $h \in L^\infty(\Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l))$ tal que

$$c \leq \tilde{F}(x, Y, A) \leq h(x, Y)(1 + |A|^p),$$

para todo $(x, Y, A) \in \Delta$;

(iv) para cada x, Y la sección

$$\Delta(x, Y) = \{A : (x, Y, A) \in \Delta\} =$$

$$\{A : \text{existe } u \in K \text{ con } G(x, u, Y, A^{(1)}) = TA^{(2)}\}$$

es cuasiconvexa, y la función

$$\tilde{F}(x, Y, \cdot) : \Delta(x, Y) \rightarrow \mathbf{R}$$

es cuasiconvexa.

Entonces (\tilde{P}) posee al menos una solución óptima, y consecuentemente existen controles óptimos para (P) .

La prueba de este teorema sigue las mismas pautas que la del Teorema 2.2, teniendo en cuenta las peculiaridades del caso vectorial.

Demostración.

Para poder aplicar el método directo tenemos que probar la coercitividad y la s.c.i.d. de \tilde{I} . La coercitividad en los espacios de Sobolev apropiados es una consecuencia directa de la definición de \tilde{F} y de las acotaciones asumidas en la Proposición 3.2.

Veamos la s.c.i.d.. Supongamos que $Y_j \rightharpoonup Y$ en algún espacio de Sobolev, donde

$$\tilde{I}(Y_j) < +\infty, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} \tilde{I}(Y_j) < +\infty,$$

así que

$$(Y_j(x), \nabla Y_j(x)) \in \Delta(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$. Consideremos la medida parametrizada $\mu = \{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ asociada a la sucesión

$$\{(Y_j, \nabla Y_j)\}.$$

Por el teorema de compacidad en espacios de Sobolev, el hecho de que

$$Y_j^{(1)} = y_0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

para todo j , y que los potenciales $(Y_j^{(2)})$ se pueden elegir salvo constante, podemos suponer que

$$Y_j \rightarrow Y, \text{ fuerte en } L^{s(p-1)}.$$

Esto implica (Proposición A.10) que

$$\mu_x = \delta_{Y(x)} \otimes \nu_x$$

p.c.t. $x \in \Omega$, donde $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ es la medida parametrizada asociada a la sucesión $\{\nabla Y_j\}$.

Por otro lado gracias a que $\Delta(x)$ es cerrado y a que

$$Y_j(x) \rightarrow Y(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$ podemos afirmar que la medida de probabilidad ν_x está soportada en

$$\Delta(x, Y(x)),$$

p.c.t. $x \in \Omega$. Examinemos el límite

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y(x), \nabla Y(x)) dx.$$

Razonando como en la prueba del Teorema 2.2 llegamos a que este límite es mayor o igual a la integral

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l}} \tilde{F}(x, Y(x), A) d\nu_x(A) dx. \quad (3.4)$$

Ahora bien, ν_x es una medida parametrizada homogénea [59], y además está soportada en el conjunto $\Delta(x, Y(x))$, que es cuasiconvexo, luego aplicando el Lema 3.3 tenemos que

$$\nabla Y(x) = \int_{\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l}} A d\nu_x(A) \in \Delta(x, Y(x)),$$

p.c.t. $x \in \Omega$. Aplicando ahora la desigualdad de Jensen (Teorema A.13) a \tilde{F} obtenemos que la expresión (3.4) es mayor o igual a

$$\int_{\Omega} \tilde{F} \left(x, Y(x), \int_{\mathbf{R}^{2 \times m} \times \mathbf{R}^{2 \times l}} A d\nu_x(A) \right) dx,$$

y por tanto

$$\int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y(x), \nabla Y(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y_j(x), \nabla Y_j(x)) dx,$$

que es lo que queríamos probar. ■

La utilidad del resultado anterior está limitada por las dificultades intrínsecas de los problemas de Cálculo de Variaciones vectoriales. Como hemos señalado, en estos problemas la s.c.i.d. del funcional es equivalente a la cuasiconvexidad de la función integrando. Dada una función es muy difícil verificar si ésta satisface o no la condición de cuasiconvexidad. Afortunadamente existe una gran familia de funciones cuasiconvexas no triviales (i.e., no convexas), las funciones policonvexas. Una función $F : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R}^*$, se dice policonvexa si se puede escribir como

$$F(A) = g(M(A)),$$

para toda matriz A , donde $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^*$ es una función convexa y $M(A)$ es el vector de todos los posibles menores de la matriz A dados en algún orden. Se puede probar que toda función policonvexa es cuasiconvexa (ver Apéndice y [20, 59]).

Tampoco la noción de cuasiconvexidad de conjuntos es sencilla, aunque existen algunos criterios para determinar si un conjunto es o no cuasiconvexo [12, 69, 75, 76]; éstos se muestran insuficientes para la mayoría de las situaciones que se plantean en el Cálculo de Variaciones y sus aplicaciones.

El siguiente resultado muestra un ejemplo en el que, aplicando el Teorema 3.4 y la noción de policonvexidad introducida anteriormente, obtenemos conclusiones mucho más explícitas.

Teorema 3.5 *Supongamos que*

$$G(x, u, y, A) = g(x, y, A) + h(x, y, u)$$

donde

$$g : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

$$h : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

son funciones de Carathéodory, afines en A y u respectivamente, y elegidas tal que la ecuación de estado está bien planteada. Tomamos $s = p = 2$. Además de las hipótesis de la Proposición 3.2, suponemos que K es convexo. Si

$$f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2 \times 2} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función de Carathéodory, convexa (en el sentido usual) en las variables (A, t) p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $y \in \mathbf{R}$, y

$$f(x, y, B, t) \geq c(|B|^p - 1), \quad c > 0,$$

entonces el problema de diseño óptimo correspondiente con función objetivo dada por

$$F(x, u, y, A) = f(x, y, (A, -T(g(x, y, A) + h(x, y, u))), A \cdot (g(x, y, A) + h(x, y, u)))$$

posee soluciones óptimas.

Demostración.

Es elemental comprobar que

$$K(x, Y, B) = \{u \in K : h(x, Y^{(1)}, u) = TB^{(2)} - g(x, Y^{(1)}, B^{(1)})\}.$$

Por otro lado de la igualdad

$$g(x, Y^{(1)}, B^{(1)}) + h(x, Y^{(1)}, u) = TB^{(2)},$$

multiplicando escalarmente por el vector $B^{(1)}$ y teniendo en cuenta la relación

$$\det(B) = B^{(1)} \cdot TB^{(2)},$$

obtenemos que

$$\det(B) = B^{(1)} \cdot (g(x, Y^{(1)}, B^{(1)}) + h(x, Y^{(1)}, u)).$$

Por tanto, es claro que

$$\tilde{F}(x, Y, B) = \begin{cases} f(x, Y^{(1)}, B, \det(B)), & \text{si } K(x, Y, B) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora bien esta función es cuasiconvexa ya que de hecho es policonvexa (al ser \tilde{F} policonvexa no necesitamos la acotación de la hipótesis (iii) del Teorema 3.4). Para terminar de comprobar las hipótesis de Teorema 3.4 resta probar la convexidad de cada sección $\Delta(x, Y)$. Pero esto es trivial teniendo en cuenta la convexidad de K y la afinidad de g y h . ■

Debido a la forma de la ecuación de estado (lineal en u y ∇y y sin interacción entre ambos términos), este resultado puede ser probado usando el Lema Div-Curl [53, 69] y el Teorema de regularidad de Meyers [47]. En efecto, supongamos que $\{(u_j, y_j)\}$ es una sucesión minimizante. Ya que K es compacto y F coercitiva, existe (u, y) tal que

$$u_j \xrightarrow{*} u, \text{ débil-* en } L^\infty(\Omega; K),$$

$$y_j \rightharpoonup y, \text{ débil en } H^1(\Omega).$$

Estas convergencias, junto con la forma de la ecuación de estado, implican que (u, y) es un par admisible para el problema de diseño óptimo. Para concluir hemos de probar que

$$I(u, y) \leq \liminf I(u_j, y_j).$$

Pero esto es una consecuencia inmediata de la convexidad de F y de la convergencia

$$\nabla y_j \cdot G(x, u_j(x), y_j(x), \nabla y_j(x)) \rightharpoonup \nabla y \cdot G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)), \text{ débil en } L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

la cual se obtiene como aplicación sucesiva del Lema Div-Curl y del Teorema de regularidad de Meyers.

Un ejemplo típico donde las ideas del Teorema 3.5 pueden ser aplicadas es el siguiente

$$\text{Minimizar } I(u) = \int_{\Omega} \varphi (|\nabla y(x)|^2 + u(x)\nabla y(x)) \, dx,$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^2) : u(x) \in K \text{ p.c.t. } x \in \Omega\},$$

y la ecuación de estado es

$$\text{div}(-\nabla y + u) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad y \in H_0^1(\Omega),$$

donde $K \subset \mathbf{R}^2$ es un compacto, convexo, y φ es una función convexa verificando

$$\varphi(t) \geq |t| - c, \quad c, \text{ una constante.}$$

El Teorema 3.5 puede ser extendido a situaciones más complejas.

Proposición 3.6 *En las condiciones del teorema anterior, sea*

$$f : (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

dada por

$$f((\lambda_1, \lambda_2), t) = (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 - 2\gamma t).$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que si $\gamma \in (1, 1 + \epsilon]$, la función

$$F(B) = f(B, \det(B))$$

no es policonvexa (lo que implica que f no es convexa), y sin embargo el problema de control óptimo del Teorema 3.5 tiene solución.

Demostración.

En [1] está probado que para valores de γ estrictamente mayores que uno la función

$$F(B) = f(B, \det(B))$$

no es policonvexa y por tanto f no es convexa. Además, en este trabajo también se prueba que para valores de γ estrictamente mayores a uno y suficientemente cerca a uno la función

$$F(B) = f(B, \det(B))$$

es cuasiconvexa. El resto de la prueba sigue como en el teorema anterior. ■

A través de este ejemplo hemos puesto de manifiesto que el método variacional que presentamos permite analizar situaciones que parecen estar fuera de alcance de los métodos clásicos basados en la homogeneización y la compacidad por compensación. En los ejemplos anteriores hemos tratado una ecuación de estado lineal; mediante nuestro método variacional, también podemos tratar algunos problemas en los que la ley de estado es no lineal.

Teorema 3.7 *Sea*

$$G(x, u, y, A) = g(x, y, A) + h(x, y)u$$

donde

$$g : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

$$h : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

son funciones de Carathéodory verificando:

- (i) $h \in L^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$, $h \geq c > 0$;
- (ii) $c(|G(x, u, y, A)|^s - 1) \leq (|y|^p + |A|^p)$, $s \geq 2$, $c > 0$;
- (iii) $c(|A|^{p-1} - 1) \leq G(x, u, y, A)$;
- (iv) la ecuación de estado está bien planteada.

Como conjunto de controles admisibles consideramos $\mathcal{U}_{ad} = L^s(\Omega; \mathbf{R}^2)$. Si

$$f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2 \times 2} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función de Carathéodory, convexa (en el sentido usual) en las variables (A, t) p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $y \in \mathbf{R}$, y

$$f(x, y, B, t) \geq c(|B|^p - 1), \quad c > 0,$$

entonces el problema de diseño óptimo correspondiente con función objetivo dada por

$$F(x, u, y, A) = f(x, y, (A, -T(g(x, y, A) + h(x, y, u))), A \cdot (g(x, y, A) + h(x, y, u)))$$

posee soluciones óptimas.

La prueba es análoga a la del Teorema 3.7. Simplemente hay que hacer notar que no hay ninguna dificultad en tomar como conjunto de controles admisibles todo $L^s(\Omega; \mathbf{R}^2)$ (ver Nota 2.1).

Para terminar con esta sección vamos a enunciar un resultado de existencia general para el caso en que consideramos restricciones integrales. Tendríamos que asegurar la cuasiconvexidad (policonvexidad) de la función \tilde{V} de la misma manera que lo hemos hecho para \tilde{F} . Además se debe dar una cierta compatibilidad entre estas dos funciones y la función G (ver el Capítulo 2). Ponemos

$$\tilde{V}(x, Y, A) = \min_{u \in K(x, u, Y)} V(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}).$$

Teorema 3.8 *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.4, y que las hipótesis (iii) y (iv) también se verifican para \tilde{V} . Suponemos además que*

$$\operatorname{argmin}_{K(x, u, Y)} F(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)}) \cap \operatorname{argmin}_{K(x, u, Y)} V(x, u, Y^{(1)}, A^{(1)})$$

es no vacío para todo (x, Y, A) , y que existe algún Y tal que

$$\int_{\Omega} \tilde{V}(x, Y(x), \nabla Y(X)) dx < +\infty.$$

Entonces el problema (P) de la Introducción posee al menos una solución óptima.

Se pueden dar enunciados más explícitos imponiendo la policonvexidad de \tilde{V} como hemos hecho anteriormente con \tilde{F} .

3.4 Homogeneización y G-clausura

Como hemos insistido con anterioridad los problemas de diseño óptimo frecuentemente carecen de soluciones óptimas [52]. La teoría de la homogeneización ha sido la principal herramienta en el análisis, tanto desde el punto de vista teórico como numérico, de estas situaciones de no existencia con una tremenda productividad [55, 56, 70]. En este contexto la caracterización de la G-clausura de ciertos conjuntos es determinante. En esta sección nos gustaría explorar brevemente la

relación entre la homogeneización y el método variacional que proponemos. Un trabajo pionero en donde ha sido tratada la relación entre relajación en problemas variacionales, homogeneización y diseño óptimo es [35].

Por simplicidad y por fijar ideas nos centraremos en el siguiente problema de diseño óptimo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u) = \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 dx \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : u(x) \in \{\alpha, \beta\}, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}, \end{array} \right.$$

donde el estado y se determina unívocamente a partir del control u mediante la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(u(x)\nabla y(x)) = p(x), \quad \text{en } \Omega, \\ y = y_0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$p \in L^2(\Omega)$, $y_0 \in H^1(\Omega)$ y $0 < \alpha < \beta$ son datos del problema. Por simplicidad hemos obviado la restricción integral. Se sabe en teoría de homogeneización que si ampliamos convenientemente el conjunto de controles admisibles se puede probar la existencia de solución del problema anterior. Se trataría de considerar todos los diseños que se obtienen como G-límites de diseños pertenecientes a \mathcal{U}_{ad} . Necesitamos recordar algunos conceptos básicos de homogeneización [56, 67]. Una sucesión de diseños $\{u_j\}$ (ahora con el término diseño nos estamos refiriendo a funciones que toman valores en las matrices definidas positivas) G-converge a u si para todo $p \in L^2(\Omega)$ e $y_0 \in H^1(\Omega)$ la solución y_j de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(u_j \nabla y_j(x)) = p(x), \quad \text{en } \Omega, \\ y_j = y_0, \quad \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

es tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_j \rightharpoonup y \text{ débil en } H^1(\Omega), \\ u_j \nabla y_j \rightharpoonup u \nabla y \text{ débil en } L^2(\Omega; \mathbf{R}^2), \end{array} \right.$$

donde y es la solución del problema homogeneizado,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(u \nabla y(x)) = p(x), \quad \text{en } \Omega, \\ y = y_0, \quad \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

Frecuentemente es interesante considerar sucesiones de diseños u_j , sujetas a una restricción puntual

$$u_j(x) \in K,$$

p.c.t. x , y para algún conjunto K . El conjunto de todos los posibles G-límites de u_j está caracterizado por

$$u(x) \in GK,$$

p.c.t. x , para algún conjunto GK de matrices definidas positivas [14]. A este conjunto GK se le llama G-clausura de K .

En nuestro marco variacional, teniendo en cuenta las descomposiciones

$$u_j \nabla y_j + P(x) = T \nabla z_j(x), \quad u \nabla y + P(x) = T \nabla z,$$

con $z_j, z \in H^1(\Omega)$ funciones potenciales adecuadas, y $P \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ una función auxiliar, la noción de G-convergencia se traslada a la convergencia débil de los estados y las funciones potenciales. En otras palabras, u_j G-converge a u si y sólo si

$$\nabla y_j \rightharpoonup \nabla y, \quad \nabla z_j \rightharpoonup \nabla z$$

débil en $L^2(\Omega; \mathbf{R}^2)$. De esta manera estamos incorporando el concepto de G-convergencia al principio variacional, ya que la convergencia débil de los estados y de las funciones potenciales es justamente la convergencia apropiada para la existencia y la semicontinuidad inferior.

Desde este punto de vista, muchas cuestiones sobre G-convergencia y G-clausura pueden ser reinterpretadas en términos de la cuasiconvexidad de la función \tilde{F} y de ciertos conjuntos de matrices: aquellos en los que el integrando \tilde{F} es finito. En general, cuando la existencia de soluciones óptimas en problemas variacionales vectoriales está comprometida, el paso siguiente en el análisis de estos problemas es el estudio de la relajación. Clásicamente estas relajaciones se han llevado a cabo a través de los conceptos de G-convergencia y G-clausura; no obstante, nosotros pensamos que el análisis de situaciones más generales de las que se pueden abordar mediante esas técnicas requeriría el estudio de la función \tilde{F} desde el punto de vista de las envolturas convexas, relajación, etc. ([20, 59]). Es necesario advertir que aquí no estamos considerando la relajación con respecto al concepto de G-convergencia [14]. En particular, nos gustaría explorar cómo el hecho de que la función \tilde{F} no sea de Carathéodory afecta a la relajación en términos de cuasiconvexificaciones y medidas de Young gradientes [59].

3.5 Relajación y medidas parametrizadas

En esta sección consideraremos una situación simplificada como en la sección anterior,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(u) = \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 dx \\ \text{sobre} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : u(x) \in \{\alpha, \beta\}, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}, \end{array} \right.$$

donde el estado y se determina unívocamente a partir del control u mediante la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(u(x)\nabla y(x)) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$y_0 \in H^1(\Omega)$ y $0 < \alpha < \beta$ son datos del problema. Por evitar complicaciones en la discusión que sigue olvidamos por el momento las condiciones volumétricas, al final de la sección comentaremos qué ocurre cuando las incorporamos. Es sencillo comprobar que la formulación variacional alternativa en este caso viene dada por

$$\tilde{F}(A) = \begin{cases} |A^{(1)}|^2 & \text{si } A \in \Delta, \\ +\infty & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde

$$\Delta = \{A \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \alpha A^{(1)} = TA^{(2)} \text{ ó } \beta A^{(1)} = TA^{(2)}\}.$$

Es muy elemental ver que la función \tilde{F} no es cuasiconvexa. De hecho, es suficiente observar que hay pares de matrices en Δ conectadas por una matriz de rango uno y tales que el segmento que las une no está contenido en Δ . Esto implica que \tilde{F} no es convexa de rango uno, y por tanto, tampoco cuasiconvexa (ver Apéndice). Como sabemos la falta de cuasiconvexidad de este integrando puede ocasionar la ausencia de soluciones óptimas del principio variacional asociado. Esto motiva la necesidad de considerar relajaciones de este problema variacional.

Necesitamos recordar un resultado de relajación fundamental en principios variacionales no convexos. En el Apéndice de esta memoria aparece suficientemente comentado y enmarcado este resultado. Dado D un abierto contenido en \mathbf{R}^N , sean A un subconjunto de $W^{1,p}(D; \mathbf{R}^M)$, cerrado bajo convergencia débil, y \bar{A} el conjunto de las medidas parametrizadas homogéneas asociadas a sucesiones acotadas

contenidas en \mathcal{A} . Entonces dada una función $\varphi : \mathbf{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbf{R}$ continua verificando las acotaciones

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi(A) \leq C(|A|^p + 1), \quad 0 < c < C, \quad 1 < p,$$

si

$$\begin{aligned} m &= \inf \left\{ \int_{\Omega} \varphi(\nabla y(x)) \, dx : u \in \mathcal{A} \right\}, \\ \tilde{m} &= \inf \left\{ \int_{\Omega} Q\varphi(\nabla y(x)) \, dx : u \in \mathcal{A} \right\}, \\ \bar{m} &= \inf \left\{ \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} \varphi(A) \, d\nu_x(A) \, dx : \nu_x \in \bar{\mathcal{A}} \right\}, \\ &\text{existe } u \in \mathcal{A} \text{ con } \nabla u(x) = \int_{\mathbf{R}^{N \times m}} A \, d\nu_x(A) \end{aligned}$$

se tiene:

1. $m = \tilde{m} = \bar{m}$;
2. \tilde{m} y \bar{m} se alcanzan;
3. existe un modo preciso de pasar de minimizadores de \tilde{m} a minimizadores de \bar{m} , y viceversa.

$Q\varphi$ representa la cuasiconvexificación de φ .

Si φ sólo verifica la acotación inferior

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi, \quad 0 < c, \quad 1 < p,$$

y no es continua (en particular puede tomar el valor $+\infty$ bruscamente) entonces sólo podemos afirmar ([59, 64])

$$m \geq \tilde{m} \geq \bar{m}.$$

El integrando \tilde{F} que aparece en la reformulación variacional del problema de diseño óptimo se encuentra en esta situación, luego en principio la relajación en términos de medidas parametrizadas podría dar un valor menor del ínfimo. En este caso cualquier medida parametrizada minimizadora tendría su soporte contenido en el conjunto donde \tilde{F} es finita (Δ), y sin embargo, podría ser imposible generar esta medida por una sucesión de gradientes que toma valores en el conjunto donde \tilde{F} es finita, es decir, una sucesión tal que

$$\nabla Y_j(x) \in \Delta, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Para esta sucesión de gradientes lo único que podemos afirmar es ([50])

$$\text{dist}(\nabla Y_j(x), \Delta) \rightarrow 0 \text{ en medida.}$$

Desde el punto de vista del funcional \tilde{I} , el valor en esa sucesión sería infinito (dicho en términos de los diseños asociados a esos gradientes, estos diseños no serían admisibles para el problema de diseño óptimo original) a pesar de que el valor del funcional en la medida parametrizada asociada sería finito. No obstante, el teorema principal de esta sección asegura que esta situación no ocurre, es decir, el valor de los ínfimos m y \bar{m} coinciden.

Teorema 3.9 *Los ínfimos*

$$m = \inf \left\{ \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla Y(x)) dx : Y^{(1)} - y_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \right\},$$

y

$$\bar{m} = \inf \left\{ \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu_x(A) dx : \nu_x \in \bar{\mathcal{A}}, \right.$$

$$\left. \nabla Y(x) = \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} A d\nu_x(A), Y^{(1)} - y_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \right\},$$

coinciden. Es más, para cada medida parametrizada gradiente ν con soporte contenido en Δ existe una sucesión de gradientes $\{\nabla Y_j\}$ que la genera tal que $Y_j^{(1)} = y_0$ en $\partial\Omega$ y

$$\nabla Y_j(x) \in \Delta$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo j , y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla Y_j(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu_x(A) dx.$$

La prueba está basada en el siguiente resultado elemental.

Lema 3.10 *Sean $u_j, \bar{u}_j : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2}$ tales que los problemas*

$$\begin{cases} -\text{div}(u_j(x)\nabla y_j(x)) = 0, & y_j \in H^1(\Omega), \\ y_j = y_0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\text{div}(\bar{u}_j(x)\nabla \bar{y}_j(x)) = 0, & \bar{y}_j \in H^1(\Omega), \\ \bar{y}_j = y_0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

admiten solución, y_j, \bar{y}_j respectivamente. Supongamos que

(i) existe $\Omega_j \subset \Omega$, $|\Omega_j| \searrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, y

$$u_j(x) = \bar{u}_j(x), \text{ para todo } x \in \Omega \setminus \Omega_j;$$

(ii) existe una constante $C > 0$, independiente de j , tal que

$$\|\bar{u}_j\|_\infty \leq C,$$

para todo j ;

(iii) existe $\lambda > 0$, independiente de j , tal que

$$\bar{u}_j(x)y \cdot y \geq \lambda|y|^2,$$

para todo $\lambda \in \mathbf{R}^2$ y p.c.t. $x \in \Omega$;

(iv) las dos sucesiones $\{|\nabla y_j|^2\}$ y $\{|u_j \nabla y_j|^2\}$ son equiintegrables en Ω .

Entonces

$$y_j - \bar{y}_j \rightarrow 0$$

fuerte en $H^1(\Omega)$. En particular $\{|\nabla \bar{y}_j|^2\}$ es también equi-integrable en Ω .

Demostración.

La demostración es sencilla y se obtiene simplemente manipulando las ecuaciones involucradas. Teniendo en cuenta las ecuaciones que verifican y_j e \bar{y}_j podemos decir que

$$\int_{\Omega} (\bar{u}_j(x) \nabla \bar{y}_j(x) - u_j(x) \nabla y_j(x)) \cdot \nabla v(x) dx = 0,$$

para toda función test v . Ahora bien, gracias a la relación

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_j(x) \nabla \bar{y}_j(x) - u_j(x) \cdot \nabla y_j(x)) \cdot \nabla v(x) \\ &= (\bar{u}_j(x) (\nabla \bar{y}_j(x) - \nabla y_j(x)) + (\bar{u}_j(x) - u_j(x)) \nabla y_j(x)) \cdot \nabla v(x), \end{aligned}$$

la igualdad anterior se reescribe como

$$\int_{\Omega} (\bar{u}_j(x) (\nabla \bar{y}_j(x) - \nabla y_j(x))) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} ((u_j(x) - \bar{u}_j(x)) \nabla y_j(x)) \cdot \nabla v(x) dx,$$

tomando $v = \bar{y}_j - y_j$ y utilizando la hipótesis de elipticidad uniforme de las \bar{u}_j tenemos que esta cantidad es mayor igual a

$$\lambda \|\nabla \bar{y}_j(x) - \nabla y_j(x)\|_2^2.$$

Por otro lado, se puede ver, aplicando la desigualdad de Hölder y las hipótesis (i) y (ii), que el término de la derecha es menor o igual a

$$\left(\int_{\Omega_j} |u_j \nabla y_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \bar{y}_j - \nabla y_j\|_2 + C \left(\int_{\Omega_j} |\nabla y_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \bar{y}_j - \nabla y_j\|_2.$$

Las dos desigualdades anteriores implican

$$\|\nabla \bar{y}_j - \nabla y_j\|_2 \leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\Omega_j} |\nabla y_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\Omega_j} |u_j \nabla y_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Debido a la integrabilidad de $\{|\nabla y_j|^2\}$ y $\{|u_j \nabla y_j|^2\}$, la estimación previa implica

$$\|\nabla \bar{y}_j - \nabla y_j\|_2 \rightarrow 0$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Esto junto con el hecho de que ambas soluciones tienen el mismo dato de frontera finaliza el resultado. ■

Veamos ahora con la prueba del Teorema 3.11

Demostración.

Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una medida parametrizada H^1 con soporte contenido en Δ . Sabemos (Lemas A.11 y A.12) que existe una sucesión acotada en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$, $\{Y_j\}$, tal que la sucesión de sus gradientes $\{\nabla Y_j\}$ genera ν , y tal que $\{|\nabla Y_j|^2\}$ es equiintegrable en Ω , y $Y_j^{(1)} = y_0$ en $\partial\Omega$. Como consecuencia

$$\text{dist}(\nabla Y_j, \Delta) \rightarrow 0 \quad \text{en medida,}$$

lo que en particular implica que si

$$\Omega_j = \{x \in \Omega : \nabla Y_j(x) \notin \Delta\},$$

entonces

$$|\Omega_j| \searrow 0$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Por la definición de Δ , existe $u_j \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^{2 \times 2})$ tal que $u_j(x) \in \{\alpha I, \beta I\}$, excepto posiblemente para puntos en Ω_j . En los puntos de Ω_j , $u_j(x)$ puede ser elegido de manera que se verifique la igualdad

$$u_j(x) \nabla Y_j^{(1)}(x) = T \nabla Y_j^{(2)}(x),$$

y por tanto

$$\text{div}(u_j \nabla Y_j^{(1)}) = 0, \quad Y_j^{(1)} = y_0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Definimos

$$\bar{u}_j(x) = \begin{cases} u_j(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_j, \\ \alpha I, & \text{si } x \in \Omega_j. \end{cases}$$

Según esta definición, está claro que $\bar{u}_j(x) \in \{\alpha I, \beta I\}$. Asociada a esta sucesión de diseños, \bar{u}_j , existe una sucesión $\{\bar{Y}_j\}$ (como hemos visto en la Sección 3.2) tal que

$$\bar{u}_j(x) \nabla \bar{Y}_j^{(1)}(x) = T \nabla \bar{Y}_j^{(2)}(x) \quad \text{en } \Omega,$$

y

$$\bar{Y}_j^{(1)} = y_0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por construcción, $\nabla \bar{Y}_j(x) \in \Delta$ p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo j . Ahora podemos aplicar el lema anterior (advertimos que $u_j \nabla Y_j^{(1)} = T \nabla Y_j^{(2)}$ es equiintegrable) y concluir que

$$\nabla Y_j^{(1)} - \nabla \bar{Y}_j^{(1)} \rightarrow 0$$

fuerte en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ y que la sucesión $\left\{ \left| \nabla \bar{Y}_j^{(1)} \right|^2 \right\}$ es equiintegrable. Si $\mu = \{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ es la medida parametrizada gradiente asociada con $\{\nabla \bar{Y}_j\}$, y $\pi_1 \mu$ y $\pi_1 \nu$ son las proyecciones en la primera componente de μ y ν , respectivamente, la convergencia fuerte anterior implica que en realidad (Proposición A.8)

$$\pi_1 \nu_x = \pi_1 \mu_x \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Teniendo en cuenta que ambas medidas parametrizadas y la sucesión $\{\nabla \bar{Y}_j\}$ tienen soporte en Δ , y que \tilde{F} restringida a Δ sólo depende de su primera componente podemos concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{F}(\nabla \bar{Y}_j(x)) dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\mu_x(A) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu_x(A) dx, \end{aligned}$$

como queríamos probar. La equiintegrabilidad de $\left\{ \left| \nabla \bar{Y}_j^{(1)} \right|^2 \right\}$ nos permite escribir la primera de las igualdades anteriores

■

Pensamos que este resultado tiene relevancia práctica, principalmente desde el punto de vista numérico, ya que permite un tratamiento del problema de diseño óptimo basado en el cálculo de las envolturas convexas de \tilde{F} y de las microestructuras óptimas o medidas parametrizadas minimizadoras. En particular pensamos

que sería interesante buscar microestructuras óptimas en forma de laminados calculando la convexificación de rango uno de \tilde{F} como en [3, 4]. Esta es una de las principales motivaciones del análisis presentado en esta sección.

De la manera habitual podemos definir la envoltura cuasiconvexa de \tilde{F} en una matriz A como

$$Q\tilde{F}(Y) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} \tilde{F}(A) d\nu(A) : \nu \text{ med. par. hom.}, \int_{\mathbf{R}^{2 \times 2}} A d\nu(A) = Y \right\}.$$

Como consecuencia del Teorema 3.9 tenemos que

$$Q\tilde{F}(A) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|D|} \int_D \tilde{F}(\nabla Y_j(x)) dx : \nabla Y_j(x) \overset{*}{\rightharpoonup} A, \right.$$

$$\left. Y_j^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x, x \in \partial\Omega, \{Y_j\} \text{ acotada en } H^1(D; \mathbf{R}^2) \right\}.$$

Por su propia definición esta función es cuasiconvexa, lo que implica que el ínfimo

$$\tilde{m} = \inf \left\{ \int_{\Omega} Q\tilde{F}(\nabla Y(x)) dx : Y^{(1)} - y_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \right\}$$

se alcanza. Además, como consecuencia del Teorema 3.9 se tiene la igualdad

$$m = \tilde{m} = \bar{m},$$

es decir, que el problema cuasiconvexificado es una relajación del problema original. Esta la base del método de relajación [3, 4]. Una ventaja importante de cara calcular la envoltura $Q\tilde{F}$ analíticamente, o al menos de manera aproximada. En este sentido, pensamos que el siguiente corolario puede ser interesante, ya que en él identificamos el conjunto donde $Q\tilde{F}$ es finita.

Corolario 3.11 *La cuasiconvexificación de \tilde{F} , $Q\tilde{F}$, es finita justamente en el conjunto*

$$\Gamma = \left\{ A \in \mathbf{R}^{2 \times 2} : \text{existe } u \in G[\alpha, \beta], \text{ con } uA^{(1)} = TA^{(2)} \right\},$$

donde $G[\alpha, \beta]$ es la G -clausura de el conjunto $\{\alpha I, \beta I\}$, e I denota la matriz identidad.

Demostración.

Dada una matriz $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ se tiene que

$$Q\tilde{F}(A) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|D|} \int_D \tilde{F}(\nabla Y_j(x)) dx : \nabla Y_j(x) \overset{*}{\rightharpoonup} A, \right.$$

$$\left. Y_j^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x, x \in \partial\Omega, \{Y_j\} \text{ acotada en } H^1(D; \mathbf{R}^2) \right\}.$$

Esta caracterización de la cuasiconvexificación de \tilde{F} es una consecuencia inmediata de la segunda parte del Teorema 3.9, como hemos comentado.

Está claro que $Q\tilde{F}(A) < +\infty$ si y sólo si existe una sucesión $\{Y_j\}$ acotada en $H^1(D; \mathbf{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned}\nabla Y_j(x) &\overset{*}{\rightharpoonup} A, \\ \nabla Y_j(x) &\in \Delta\end{aligned}$$

y

$$Y_j^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y todo $j \geq 1$. Por tanto tenemos que probar que Γ coincide con el conjunto de matrices para las que esto se verifica.

Sea $A \in \Gamma$. Existe $u \in G[\alpha, \beta]$ tal que

$$uA^{(1)} = TA^{(2)}.$$

Ya que $u \in G[\alpha, \beta]$ existe una sucesión u_j de diseños que toman valores en $\{\alpha I, \beta I\}$ tal que G-converge a u (ver por ejemplo [55]),

$$u_j \xrightarrow{G} u.$$

Sea la sucesión $\{Y_j\}$ dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u_j \nabla Y_j^{(1)}) &= 0, \quad Y_j^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x \text{ en } \partial\Omega, \\ u_j(x) \nabla Y_j^{(1)}(x) &= T \nabla Y_j^{(2)}(x).\end{aligned}$$

Por la definición de G-convergencia y el hecho de que la función afín $Y^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x$ es la solución del problema

$$\operatorname{div}(u \nabla Y^{(1)}) = 0 \text{ en } \Omega, \quad Y^{(1)}(x) = A^{(1)} \cdot x \text{ sobre } \partial\Omega,$$

concluimos que

$$\nabla Y_j^{(1)} \overset{*}{\rightharpoonup} A^{(1)}$$

y

$$T \nabla Y_j^{(2)} = u_j \nabla Y_j^{(1)} \overset{*}{\rightharpoonup} TA^{(2)} = uA^{(1)},$$

de donde se sigue la convergencia débil $\nabla Y_j \overset{*}{\rightharpoonup} A$. La demostración de esta inclusión termina observando que $\nabla Y_j(x) \in \Delta$ p.c.t. $x \in \Omega$ y por tanto $Q\tilde{F}(A)$ es finito.

Para probar el recíproco, supongamos que tenemos una sucesión en las condiciones anteriores, es decir, $\{Y_j\}$ acotada en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ verificando

$$\nabla Y_j(x) \overset{*}{\rightharpoonup} A, \quad \nabla Y_j(x) \in \Delta$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y

$$Y_j^{(1)} = A^{(1)} \quad \text{en } \partial\Omega,$$

para todo j . Por definición de Δ , existe una sucesión u_j tal que $u_j(x) \in \{\alpha I, \beta I\}$,
y

$$u_j(x) \nabla Y_j^{(1)}(x) = T \nabla Y_j^{(2)}(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo j . Existe una subsucesión (que seguimos denotando igual) de u_j G-convergente a un diseño u que toma valores en $G[\alpha, \beta]$ ([55]),

$$u_j \xrightarrow{G} u.$$

Razonando como antes se concluye que $A \in \Gamma$. ■

El conjunto $G[\alpha, \beta]$ es conocido, de hecho es uno de los primeros ejemplos de caracterización de G-clausuras de conjuntos ([57]), y viene dado por

$$G[\alpha, \beta] = \{A : \text{los autovalores } \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ de } A \text{ satisfacen}$$

$$\alpha \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \beta, \text{ y } \alpha\beta \leq (\alpha + \beta - \lambda_2)\lambda_1\}$$

Conocido este conjunto es trivial comprobar que Γ está estrictamente contenido en $\mathbf{R}^{2 \times 2}$.

Situaciones más complicadas que la presentada aquí aceptan un tratamiento de relajación similar al llevado a cabo. En particular cuando consideramos restricciones de tipo volumétrica o integral, el análisis se puede realizar a través del concepto de cuasiconvexidad restringida. Esta cuestión ha sido tratada en [63, 64]. Sobre el concepto de cuasiconvexidad restringida volveremos en la Sección 5.6 del último capítulo. En cualquier caso se podría probar un resultado similar al Teorema 3.9 bajo esta restricción. El único cambio en la prueba afectaría a la definición de \bar{u}_j , para que así verifique la restricción integral. Este requisito probablemente nos obligaría a modificar ligeramente los conjuntos excepcionales Ω_j , pero seguirían teniendo la propiedad de que sus medidas convergen a cero, que a fin de cuentas es la propiedad importante.

Capítulo 4

Principios variacionales bajo la restricción divergencia nula en dimensión $N = 3$

4.1 Introducción

Consideremos, como en los capítulos anteriores, el problema de control óptimo: Encontrar un control u perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ω es ahora un abierto de \mathbf{R}^3 , y K y las funciones F y G están en las condiciones de los capítulos anteriores.

Nuestro objetivo es el de establecer resultados de existencia de controles óptimos para este problema. Pretendemos utilizar las ideas de los capítulos precedentes, es decir, reformular el problema de control óptimo como un problema variacional en el que aparece una nueva variable independiente. Este nuevo problema variacional tendrá naturaleza local, evitando así la principal dificultad del problema de control

óptimo original. En la situación bidimensional usábamos el hecho de que todo campo con divergencia nula es “esencialmente” un gradiente para reformular el problema de control como un problema variacional de la forma

$$\inf_Y \int_{\Omega} \tilde{F}(x, Y(x), \nabla Y(x)) dx.$$

Este problema se encuentra en el marco clásico (salvo ciertas cuestiones técnicas, como vimos en el capítulo anterior) del Cálculo de Variaciones. En este caso sabemos que el concepto que juega un papel esencial en lo que a existencia se refiere a través de la aplicación del método directo es la cuasiconvexidad. Por tanto, en la situación bidimensional conseguimos llevar el problema de control a un marco variacional en el que sabemos cuál es la condición exacta que nos permite aplicar el método directo.

La situación en dimensión tres es más complicada que las anteriores. En este caso sabemos que, bajo ciertas condiciones técnicas, dado un campo $v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que

$$\operatorname{div}(v) = 0,$$

existe $w : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que

$$v(x) = \nabla \times w(x).$$

w no está unívocamente determinada una vez conocida v . Usando este hecho, dado un par (u, y) que verifique la ecuación de estado (4.1), existe un campo $z : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) = \nabla \times z(x).$$

Definiendo una nueva densidad de coste $\tilde{F}(x, y, A^{(1)}, A^{(2)})$ como

$$\tilde{F}(x, y, A^{(1)}, A^{(2)}) = \min_{\{u \in K : G(x, y, A^{(1)}) = A^{(2)}\}} F(x, y, A^{(1)})$$

debe quedar claro que el problema de control óptimo se reformula como

$$\inf_{(y, z)} \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), \nabla \times z(x)) dx. \quad (4.2)$$

Este problema no se encuentra en el marco clásico del Cálculo de Variaciones de problemas que provienen de la elasticidad no lineal, puesto que además de depender de un gradiente depende de un rotacional. Un análisis de cuestiones clásicas del Cálculo de Variaciones: s.c.i.d., existencia, relajación, ..., para este tipo de problemas ha de ser por tanto desarrollado. El estudio de este problema de Cálculo de Variaciones fue propuesto en [36]. En este trabajo se analiza una relajación de un

modelo de tomografía en dos dimensiones; para poder establecer la relajación en la situación tridimensional se requiere el análisis que llevaremos a cabo aquí.

Como paso previo parece natural plantearse el problema en el que sólo intervienen rotacionales, es decir, el problema

$$\inf_u \int_{\Omega} \varphi(\nabla \times u(x)) dx,$$

o lo que es lo mismo el problema

$$\inf_U \int_{\Omega} \varphi(U(x)) dx,$$

donde

$$\operatorname{div}(U) = 0.$$

Nótese que hemos cambiado de notación. Al análisis de este problema de optimización no local dedicaremos en este capítulo. El problema variacional (4.2) y su relación con el problema de control tridimensional será tratado en el capítulo siguiente.

En definitiva, el objetivo de este capítulo es el de estudiar cuestiones típicas del Cálculo de Variaciones, en especial aquellas relacionadas con la semicontinuidad inferior débil, y eventualmente, la existencia-no existencia de soluciones óptimas, para funcionales del tipo

$$I(U) = \int \varphi(U(x)) dx,$$

donde $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es un abierto, regular y simplemente conexo, $U : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times l}$ es un campo vectorial perteneciente a un espacio funcional adecuado que especificaremos posteriormente, $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua verificando condiciones técnicas adicionales, y lo que es más importante, las funciones U verifican la restricción

$$\operatorname{div}(U) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (4.3)$$

Las condiciones de frontera típicas para este problema son condiciones sobre la traza sobre $\partial\Omega$ de la componente normal de U (ver [25]). Nos restringiremos a los casos $l = 1, 2, 3$, que son los casos de interés práctico; no obstante los resultados que daremos aquí se extienden sin dificultad a $l \geq 3$. Lo que pretendemos investigar con respecto a este tipo de problemas variacionales es:

1. Reformulación en términos de potenciales vectoriales.
2. S.c.i.d. en el marco funcional apropiado y noción de convexidad involucrada en función del valor de l .

3. Caracterización de las medidas de Young generadas por sucesiones verificando la restricción (4.3).
4. Relevancia de la caracterización anterior con respecto a funcionales que no verifican la convexidad que garantiza la s.c.i.d..

Este tipo de situaciones donde tenemos restricciones adicionales en forma de leyes diferenciales han sido tratadas clásicamente a través de la teoría de la compacidad por compensación [53, 54, 68, 69]. Ver también [19]. Un trabajo reciente sobre el tema es [23]. En éste se han establecido algunos resultados interesantes a partir de la caracterización de las medidas parametrizadas generadas por sucesiones que verifican la restricción diferencial. Nuestra filosofía aquí es diferente de la de estos trabajos. En vez de tratar directamente la restricción diferencial pensamos que se pueden obtener conclusiones más explícitas mediante la introducción de potenciales que eviten el carácter no local de esta restricción. Esta es la misma idea que se ha usado en el marco clásico de la elasticidad no lineal en el que tenemos la restricción $\text{rot}(U) = 0$ (lo que como bien sabemos es equivalente a que U es un gradiente). Algunos de los resultados en los que estamos interesados han sido obtenidos en [23] en mucha más generalidad; nosotros los reinterpretaremos desde nuestro punto de vista.

Si un campo vectorial $U \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ con $p \geq 2$ es tal que $\text{div}(U) = 0$ en el dominio simplemente conexo Ω , entonces ([25]) U admite un vector potencial $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$, tal que

$$U = \nabla \times u.$$

Sea $T : \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times l}$ la aplicación lineal definida componente a componente en cada una de sus l componentes como

$$T(F) = (F_{32} - F_{23}, F_{13} - F_{31}, F_{21} - F_{12}),$$

así

$$T(\nabla u) = \nabla \times u = U.$$

Observando esta relación uno está tentado a reemplazar el problema original

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(U(x)) dx, \quad \text{div}(U) = 0,$$

por

$$\inf \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u(x)) dx,$$

donde

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ T : \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R},$$

y reducir todo el análisis a una referencia a los problemas variacionales bajo la restricción rotacional nulo a través de la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$. Ahora bien, es claro que para poder obtener la s.c.i.d. de la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$ necesitaríamos asegurar que

$$\nabla \times u_j \rightharpoonup \nabla \times u$$

implica

$$\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u,$$

lo cual es evidentemente falso en general. Esta dificultad está relacionada con la singularidad de la aplicación T , o lo que es lo mismo con la falta de inyectividad del operador rotacional. Un importante lema elemental nos permitirá superar esta dificultad y conseguir relacionar la s.c.i.d. del funcional I con la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$, respondiendo de esta manera a las cuestiones planteadas anteriormente.

La organización del capítulo es la siguiente. Un lema esencial en nuestro planteamiento es expuesto en la siguiente sección. En la Sección 4.3 utilizamos el mencionado lema para relacionar el problema variacional bajo la restricción divergencia nula con problemas variacionales clásicos en los que intervienen gradientes. Esta sección contiene diferentes resultados relativos a la semicontinuidad inferior débil, la existencia de minimizadores y la relajación. En la Sección 4.4 caracterizamos las medidas parametrizadas generadas por sucesiones de funciones con divergencia nula y ponemos de manifiesto la diferencia entre los casos $l = 1, 2$ y $l = 3$. La última sección está dedicada al análisis de un ejemplo que proviene del micromagnetismo y que requiere la relajación en términos de medidas parametrizadas. Todo el material que aparece en este capítulo constituye [10].

4.2 Un lema fundamental

Recordemos que estamos en las condiciones en que Ω es un abierto simplemente conexo y regular de \mathbf{R}^3 . Como hemos comentado, la mayor dificultad que encontramos para conseguir entender las cuestiones básicas para nuestro funcional original en términos de las propiedades de convexidad de $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T$ es que la convergencia débil $\nabla \times u_j \rightharpoonup \nabla \times u$ no implica en general la convergencia débil $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$, y por tanto no podemos basarnos en la cuasiconvexidad de $\tilde{\varphi}$ para obtener la s.c.i.d.. Como comentamos anteriormente este hecho está relacionado con la singularidad de T .

Un modo de superar estas dificultades es a través del siguiente lema, el cuál es consecuencia de algunos resultados que se utilizan en la fundamentación de la

teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes ([25]). Para evitar dificultades técnicas supondremos $p = 2$, así trabajaremos en los espacios L^2 y H^1 .

Lema 4.1 Sean $U_j, U \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ campos vectoriales tales que

$$\operatorname{div}(U_j) = \operatorname{div}(U) = 0 \text{ en } \Omega,$$

$$U_j \rightharpoonup U \text{ débil en } L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l}).$$

Existen funciones $u_j, u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tales que para alguna subsucesión, que seguimos denotando igual, se tiene

$$U_j = \nabla \times u_j, \quad U = \nabla \times u,$$

$$u_j \rightharpoonup u \text{ débil en } H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l}).$$

Demostración.

La prueba es elemental y está basada en resultados conocidos. Esencialmente se trata de un resultado de inyección entre espacios de Sobolev. Referenciaremos diferentes resultados que aparecen en [25].

Sea $U \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que $\operatorname{div}(U) = 0$ en Ω . En virtud del Teorema 3.5 de [25] sabemos que existe $u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que

$$U = \nabla \times u, \quad \operatorname{div}(u) = 0, \quad u \cdot n = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde n es la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$.

Por el Lema 3.6 y el Corolario 3.7 de [25] existe una constante $R > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})} \leq R \|U\|_{L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})}.$$

Esta desigualdad implica el resultado. ■

NOTA 4.1 Cuando el abierto Ω es suficientemente regular el resultado continua siendo cierto si cambiamos $L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ por $L^p(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ y $H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ por $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ con $p \geq 2$. Cuando el dominio no es regular los valores de p para los que el resultado es cierto están en función de una constante que depende de $\partial\Omega$ (ver [2]). Por simplicidad y por evitar tecnicidades en el resto del capítulo supondremos $p = 2$.

Para ver cómo puede ayudarnos este lema supongamos que φ verifica las condiciones habituales de coercitividad y acotación

$$c(|F|^2 - 1) \leq \varphi(F) \leq C(|F|^2 + 1), \quad 0 < c < C. \quad (4.4)$$

Sea $\{U_j\}$ ($\operatorname{div}(U_j) = 0$, para todo $j \geq 1$) una sucesión minimizante para I . Por la coercitividad de φ es claro que existe U con $\operatorname{div}(U) = 0$ tal que para alguna subsucesión, que seguimos denotando igual, se tiene

$$U_j \rightharpoonup U \text{ débil en } L^2.$$

Por tanto, según el Lema 4.1 podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen potenciales u_j, u tales que

$$U_j = \nabla \times u_j, \quad U = \nabla \times u,$$

$$u_j \rightharpoonup u \text{ débil en } H^1.$$

Si además, $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T$ es cuasiconvexa podemos concluir que

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} I(U_j) &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(U_j(x)) \, dx \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(\nabla \times u_j(x)) \, dx \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u_j(x)) \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u(x)) \, dx \\ &= I(U). \end{aligned}$$

Por tanto I es s.c.i.d. y tendríamos minimizadores bajo condiciones que sean invariantes con respecto a la convergencia débil. Seremos más precisos en la siguiente sección.

4.3 Semicontinuidad inferior débil y relajación

El principal propósito de esta sección es el de demostrar que la condición necesaria y suficiente para la s.c.i.d. de I es la cuasiconvexidad (supuesta la condición habitual de acotación de φ) de la composición $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T$. Según esto decimos que una función $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ es D-convexa (D de divergencia) si la composición con la aplicación lineal T por la derecha es cuasiconvexa. Ahora vamos a probar que el funcional I es s.c.i.d. si y sólo si el integrando φ es D-convexo.

Proposición 4.2 *Sea $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua tal que*

$$\varphi(F) \leq C(|F|^2 + 1), \quad C > 0.$$

El funcional I es s.c.i.d. en L^2 con respecto a sucesiones que verifican la restricción diferencial (4.3) si y sólo si φ es D-convexo.

Demostración.

Supongamos que I es s.c.i.d. en L^2 con respecto a sucesiones que verifican la restricción divergencia nula. Sean $u_j, u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tales que $u_j \rightharpoonup u$ débil en H^1 . Entonces

$$\nabla \times u_j = Tu_j \rightharpoonup \nabla \times u = Tu \text{ en } L^2,$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u_j(x)) dx &= \liminf_{j \rightarrow \infty} I(Tu_j) \\ &\geq I(Tu) \\ &= \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u(x)) dx. \end{aligned}$$

Bajo la condición de acotación asumida sobre φ esta s.c.i.d. implica la cuasiconvexidad de φ (Teorema A.2).

El recíproco ha sido probado en la sección precedente. ■

Basándonos en este resultado es trivial establecer un resultado de existencia de minimizadores para nuestro problema variacional a partir del método directo.

Teorema 4.3 *Sea φ una función D-convexa verificando las acotaciones (4.4). Entonces existen minimizadores para el funcional I bajo la restricción diferencial (4.3) y posiblemente otro tipo de restricciones invariantes bajo convergencia débil (como por ejemplo una condición sobre la componente normal de la traza de las funciones que compiten en el problema, $U \cdot n = g$ sobre $\partial\Omega$).*

En el resto de ésta sección, nos dedicaremos a establecer un resultado de relajación, el cual es un ingrediente fundamental en la comprensión del comportamiento oscilatorio de las sucesiones minimizantes para nuestro problema de optimización.

Evidentemente para poder hablar de relajación necesitamos un concepto de envoltura convexa adecuado al problema considerado. En nuestro caso el concepto adecuado es el de D-convexificación ó envoltura D-convexa. Necesitamos expresar la noción de D-convexidad sin utilizar T . Utilizando el hecho trivial de que la aplicación T es sobreyectiva es fácil ver que la propiedad de D-convexidad para la función φ puede escribirse como la desigualdad

$$\varphi(F) \leq \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(F + \nabla \times u(y)) dy, \quad (4.5)$$

para todo $F \in \mathbf{R}^{3 \times l}$, toda función test $u \in W^{1, \infty}(S; \mathbf{R}^{3 \times l})$ y todo dominio regular y acotado $S \subset \mathbf{R}^3$. Esta caracterización nos ayudará a comprender mejor el concepto

de D-convexidad en la siguiente sección. En este momento nos sirve para definir la D-convexificación de φ como la función dada por

$$D\varphi(F) = \inf \left\{ \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(F + \nabla \times u(y)) dy : u \in W^{1,\infty}(S; \mathbf{R}^{3 \times l}) \right\}. \quad (4.6)$$

Para que esta definición tenga sentido debe ser independiente del dominio S . Este hecho y otras cuestiones técnicas, como que $D\varphi$ verifica la propiedad de D-convexidad, se obtienen de los hechos respectivos para la cuasiconvexificación y del siguiente resultado que relaciona esta envoltura con la cuasiconvexificación $Q\tilde{\varphi}$.

Proposición 4.4 *La función $D\varphi$ dada por (4.6) verifica la relación*

$$D\varphi \circ T = Q(\varphi \circ T).$$

La prueba es inmediata. Utilizando esta proposición y teniendo presentes las propiedades de la cuasiconvexificación (ver Apéndice y [20, 59]) se pueden probar propiedades de la envoltura D-convexa, como por ejemplo que la D-convexificación de una función es D-convexa y la siguiente caracterización

$$D\varphi = \sup \{ \psi : \psi \leq \varphi, \psi \text{ D-convexa} \}.$$

Enunciemos ya el resultado de relajación.

Teorema 4.5 *Sea $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua verificando*

$$c(|F|^2 - 1) \leq \varphi(F) \leq C(|F|^2 + 1), \quad 0 < c < C,$$

y sea $D\varphi$ su D-convexificación. Los dos ínfimos

$$\inf_u \int_{\Omega} \varphi(\nabla \times u(x)) dx$$

y

$$\inf_u \int_{\Omega} D\varphi(\nabla \times u(x)) dx,$$

bajo condiciones adicionales sobre u que sean invariantes con respecto a la convergencia débil, son iguales.

Demostración.

Para la prueba basta tener en cuenta el Teorema de relajación A.6 y la Proposición 4.4. Sabemos que los ínfimos

$$\inf_u \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(\nabla u(x)) dx, \quad \inf_u \int_{\Omega} Q\tilde{\varphi}(\nabla u(x)) dx.$$

coinciden Por otro lado los ínfimos

$$\inf_u \int_{\Omega} D\varphi(\nabla \times u(x)) dx, \quad \inf_u \int_{\Omega} Q\tilde{\varphi}(\nabla u(x)) dx$$

son iguales. La conclusión del resultado es inmediata teniendo en cuenta que

$$\varphi(\nabla \times u) = \tilde{\varphi}(\nabla u).$$

■

La computación efectiva de $D\varphi$ en casos explícitos es un problema muy complicado. Para $l = 3$ hemos examinado una situación típica donde φ es el mínimo de dos formas cuadráticas, de manera similar a como se hace en [34],

$$\varphi(A) = \min\{\varphi_i(A)\}, \quad \varphi_i(A) = \frac{1}{2}\langle M(A - A_i), (A - A_i) \rangle + w_i, \quad i = 1, 2.$$

M es un tensor, simétrico, definido positivo de cuarto orden, A_i son matrices 3×3 y $w_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$. R. Kohn en [34] calcula la cuasiconvexificación de esta función usando, fundamentalmente, técnicas de análisis de Fourier. Nosotros, usando las mismas técnicas e ideas que aparecen en ese trabajo, hemos conseguido calcular explícitamente $D\varphi$. Si llamamos

$$g = \max_{|k|=1} \left| \Pi_{M^{\frac{1}{2}}V(k)} M^{\frac{1}{2}}(A_1 - A_2) \right|^2,$$

donde Π_V representa la proyección ortogonal sobre el subespacio V y

$$V(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \times k \\ a_2 \times k \\ a_3 \times k \end{pmatrix} : a_i \in \mathbf{R}^3 \right\},$$

es un subespacio de matrices singulares, entonces

$$D\varphi(A) = \begin{cases} \varphi_1(A), & \varphi_1(A) \geq \varphi_2(A) + \frac{g}{2}, \\ \varphi_2(A), & \varphi_2(A) \geq \varphi_1(A) + \frac{g}{2}, \\ \varphi_2(A) - \frac{1}{2g}[\varphi_2(A) - \varphi_1(A) + \frac{g}{2}]^2, & |\varphi_1(A) - \varphi_2(A)| \geq \frac{g}{2}. \end{cases}$$

El sentido y la forma del subespacio $V(k)$ quedará más clara en la siguiente sección. No hemos reproducido los cálculos pues son completamente análogos a los de [34].

4.4 Caracterización de medidas parametrizadas

Una de los puntos más importantes en la comprensión de los principios variacionales sometidos a restricciones es el de la caracterización de las medidas parametrizadas asociadas a sucesiones admisibles para el problema variacional. En el caso de

restricciones diferenciales esta caracterización ha sido obtenida en [23] en un marco mucho más general. Nosotros aquí sólo pretendemos relacionar esta caracterización con nuestro enfoque particular. En esta sección, además, profundizaremos mucho más en el concepto de D-convexidad y trataremos otro concepto de convexidad involucrado en el problema variacional considerado para $l = 3$, la convexidad singular. A continuación enunciamos el resultado de caracterización adaptado a nuestra situación particular.

Teorema 4.6 ([23]) *Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una familia débilmente medible de probabilidades sobre $\mathbf{R}^{3 \times l}$. ν está generada por una sucesión $\{U_j\}$ contenida en $L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ verificando $\operatorname{div}(U_j) = 0$ en Ω y tal que la sucesión $\{|U_j|^2\}$ es equiintegrable si y sólo si:*

(i) *Existe $U \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que*

$$\operatorname{div}(U) = 0, \quad U(x) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} A \, d\nu_x(A), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega;$$

(ii) $\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} |A|^2 \, d\nu_x(A) \, dx < +\infty$;

(iii) *p.c.t. $x \in \Omega$ y para toda función continua g tal que*

$$|g(A)| \leq C(|A|^2 + 1), \quad C > 0,$$

se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} g(A) \, d\nu_x(A) \geq Q_{Dg} \left(\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} A \, d\nu_x(A) \right),$$

donde Q_{Dg} es la envoltura definida como

$$Q_{Dg}(A) = \left\{ \int_S g(A + V(x)) \, dx : V \text{ regular, } S\text{-periódica,} \right. \\ \left. \operatorname{div}(V) = 0, \int_S V(x) \, dx = 0 \right\},$$

para cualquier cubo S contenido en \mathbf{R}^3 .

Este teorema puede reescribirse usando funciones D-convexas. La equivalencia de ambos resultados se obtiene de manera directa usando el Lema 4.1 y las ideas de la Sección 4.3. La forma de este resultado recuerda el resultado de caracterización de medidas parametrizadas gradientes, Teorema A.13, ya que en este caso la caracterización consiste esencialmente en la desigualdad de Jensen para funciones D-convexas.

Teorema 4.7 Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una familia débilmente medible de probabilidades. ν está generada por una sucesión acotada $\{U_j\}$ contenida en $L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ verificando $\operatorname{div}(U_j) = 0$ en Ω y tal que la sucesión $\{|U_j|^2\}$ es equiintegrable si y sólo si:

(i) Existe $U \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que

$$\operatorname{div}(U) = 0, \quad U(x) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} A d\nu_x(A), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega;$$

(ii) $\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} |A|^2 d\nu_x(A) dx < +\infty$;

(iii) p.c.t. $x \in \Omega$ y para toda función continua y D -convexa g que verifica

$$|g(A)| \leq C(|A|^2 + 1), \quad C > 0,$$

se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} g(A) d\nu_x(A) \geq g\left(\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} A d\nu_x(A)\right).$$

Debido a la no inyectividad de la aplicación T no se puede obtener una prueba directa de este resultado basada en el teorema de caracterización de medidas parametrizadas gradientes (Teorema A.13) a través de la definición de D -convexidad. No obstante, la parte de necesidad sería trivial usando la proposición que sigue (Proposición 4.8).

Continuando con el punto de vista desde el que estamos mirando la restricción divergencia nula, sería interesante reinterpretar esta caracterización en términos de medidas parametrizadas gradientes con soporte en $\mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l}$. Para este propósito definimos la aplicación, denotada de nuevo T , de las medidas de Radon con soporte en $\mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l}$ en las medidas de Radon con soporte en $\mathbf{R}^{3 \times l}$, como

$$\langle T\nu, \varphi \rangle = \langle \nu, \varphi \circ T \rangle,$$

para cada función $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^{3 \times l})$. Esta aplicación es de alguna manera la proyección en el espacio de medidas, asociada a la anterior aplicación T . Uno de los logros de esta sección es el de probar que el conjunto de medidas parametrizadas generadas por sucesiones de campos vectoriales con divergencia nula es justamente la imagen por T del conjunto de medidas parametrizadas gradientes. Veamos esto en el siguiente resultado.

Proposición 4.8 Una medida parametrizada μ con soporte contenido en $\mathbf{R}^{3 \times l}$ puede ser generada por una sucesión de campos vectoriales con divergencia nula si y sólo si existe una medida parametrizada H^1 , con soporte contenido en $\mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l}$, tal que $T\nu = \mu$.

Demostración.

Sea ν la medida parametrizada generada por la sucesión de gradientes $\{\nabla u_j\}$, con $\{u_j\} \subset H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$. Veamos que la proyección $\mu = T\nu$ está generada por la sucesión $\{\nabla \times u_j\}$. Para ello basta probar (ver Sección A.4 del Apéndice) que para toda $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^{3 \times l})$ y para todo $E \subset \Omega$ medible se verifica

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E \varphi(\nabla \times u_j(x)) dx = \int_E \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} \varphi(A) d\mu_x(A) dx.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E \varphi(\nabla \times u_j(x)) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E \varphi \circ T(\nabla u_j(x)) dx \\ &= \int_E \int_{\mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l}} \varphi \circ T(A) d\nu_x(A) dx \\ &= \int_E \int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} \varphi(A) d\mu_x(A) dx \end{aligned}$$

El recíproco se obtiene, una vez más, aplicando el Lema 4.1. Sea μ la medida parametrizada asociada a la sucesión $\{U_j\}$, $\operatorname{div}(U_j) = 0$. En virtud del Lema 4.1 podemos afirmar que existe una sucesión, $\{u_j\}$, acotada en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$, tal que

$$U_j = \nabla \times u_j,$$

para todo $j \geq 1$. Sea ν la medida parametrizada asociada a la sucesión $\{\nabla u_j\}$. Razonando como en la otra implicación es claro que

$$T\nu = \mu.$$

■

Gracias a esta proposición podemos entender las medidas parametrizadas generadas por sucesiones con divergencia nula simplemente estudiando la imagen por T de las medidas parametrizadas H^1 . En particular sería interesante estudiar la imagen por T de los laminados (Apéndice y [59]). Es necesario observar la identidad

$$T(a \otimes n) = a \times n,$$

donde, como sabemos, \otimes representa el producto tensorial de vectores y \times el producto vectorial. Ahora ha llegado el momento de distinguir los tres casos $l = 1, 2, 3$.

Cuando $l = 1$, dados dos vectores $A, B \in \mathbf{R}^3$ siempre existen un vector a y un vector unitario n tal que

$$A - B = a \times n$$

(esto es trivial de comprobar). Esto implica, teniendo en cuenta la identidad anterior, que para todo $t \in [0, 1]$, la probabilidad

$$\mu = t\delta_A + (1 - t)\delta_B$$

es la imagen por T de un laminado de primer orden en $\mathbf{R}^{3 \times 3}$. Por tanto, toda combinación convexa de dos deltas de Dirac es una medida parametrizada con divergencia nula, es decir, puede ser generada por una sucesión de campos vectoriales con divergencia nula. La misma conclusión es cierta en el caso $l = 2$. Si ahora $A, B \in \mathbf{R}^{3 \times 2}$, y A_i, B_i , $i = 1, 2$, indican las dos columnas, de nuevo es cierto que podemos elegir un vector normal n ortogonal a las dos columnas $A_i - B_i$, y dos vectores a_i tales que

$$A_i - B_i = a_i \times n, \quad i = 1, 2.$$

Esto, de nuevo, implica que cualquier combinación convexa de dos deltas de Dirac es una medida parametrizada con divergencia nula. Además esta construcción nos dice explícitamente como construir una sucesión de campos con divergencia nula que generen la correspondiente medida parametrizada: la imagen por T de la sucesión de gradientes que genera el laminado asociado (Sección A.2 del Apéndice). Como consecuencia de esta discusión tenemos el siguiente resultado importante.

Proposición 4.9 *Supongamos $l = 1$ ó $l = 2$. Una función φ en las condiciones anteriores es D-convexa si y sólo si es convexa en el sentido habitual.*

Demostración.

La prueba es sencilla teniendo en cuenta los comentarios anteriores y el Teorema 4.7. Es trivial que si φ es convexa entonces es D-convexa. Veamos el recíproco. Sea φ una función D-convexa, entonces si ν es una medida parametrizada homogénea con divergencia nula por el Teorema 4.7 se verifica la desigualdad

$$\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} \varphi(A) d\nu(A) \geq \varphi \left(\int_{\mathbf{R}^{3 \times l}} A d\nu(A) \right).$$

Según la discusión anterior esta desigualdad se tiene para toda combinación convexa de dos deltas de Dirac, luego

$$t\varphi(A) + (1 - t)\varphi(B) \geq \varphi(tA + (1 - t)B),$$

para todo $t \in [0, 1]$ y para todos $A, B \in \mathbf{R}^{3 \times l}$. Es decir, φ es convexa. ■

Un comentario importante es que usando esta proposición y el apartado (iii) del Teorema 4.7 obtenemos que en los casos $l = 1, 2$ toda medida de probabilidad tiene

divergencia nula. En definitiva, en los casos $l = 1, 2$ la D-convexidad se reduce a la convexidad habitual de funciones y las medidas parametrizadas con divergencia nula son todas las medidas de probabilidad.

El caso $l = 3$ es mucho más interesante desde el punto de vista matemático. Ahora tenemos tres columnas $A_i - B_i$, $i = 1, 2, 3$, y no es posible elegir un vector n ortogonal a las tres $A_i - B_i$, a no ser que esos tres vectores sean linealmente dependientes. Esto es, en principio, una restricción que la medida de probabilidad con soporte en $\mathbf{R}^{3 \times 3}$

$$\mu = t\delta_A + (1 - t)\delta_B$$

debe verificar para tener divergencia nula: la matriz $A - B$ debe ser singular. Esto justifica la introducción de otra noción de convexidad: la convexidad singular. Decimos que una función $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbf{R}$ es convexa singular si verifica la desigualdad

$$\varphi(tA + (1 - t)B) \leq t\varphi(A) + (1 - t)\varphi(B),$$

para todas $A, B \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ verificando $\text{rango}(A - B) \leq 2$. Razonando como en los casos anteriores se prueba que la D-convexidad implica la convexidad singular. El paralelismo con el caso rotacional es notable: la convexidad singular es para la D-convexidad lo que la convexidad de rango uno es para la cuasiconvexidad. En el caso $l \geq 3$ la condición que deben verificar las matrices A y B para que $t\delta_A + (1 - t)\delta_B$ tenga divergencia nula continúa siendo $\text{rango}(A - B) \leq 2$.

NOTA 4.2 Toda la discusión anterior puede resumirse diciendo que si φ es D-convexa entonces es convexa a lo largo de las direcciones del cono característico del operador divergencia [23, 68, 69]. En efecto, se sabe que en el caso en que I sea d.s.c.i., entonces φ es convexa a lo largo de las direcciones del cono característico del operador divergencia. Recordemos brevemente qué es el cono característico de un operador. Dado un operador diferencial A definido sobre funciones $u : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^m$ como

$$(Au)_i = \sum_{l,k} a_{ilk} \frac{\partial u^l}{\partial x_k}, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde los coeficientes, a_{ilk} , son constantes, sea

$$\mathcal{V} = \left\{ (\lambda, \xi) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^N : \sum_{l,k} a_{ilk} \lambda_l \xi_k = 0 \right\}.$$

El cono característico de A está definido como el conjunto

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbf{R}^m : \text{existe } \xi \in \mathbf{R}^N - \{0\}, (\lambda, \xi) \in \mathcal{V} \}.$$

Por un simple cálculo es fácil comprobar que el cono característico del operador divergencia es todo el espacio, $\Lambda = \mathbf{R}^{3 \times l}$, si $l = 1, 2$, y

$$\Lambda = \{A \in \mathbf{R}^{3 \times 3} : \det(A) = 0\},$$

es decir las matrices singulares de orden 3, si $l = 3$. Luego, si φ es D-convexa y $l = 1, 2$ entonces φ es convexa; y si $l = 3$, φ es convexa a lo largo de direcciones singulares. Esto es lo que habíamos probado antes.

En principio en el caso $l = 3$ no podemos afirmar que la D-convexidad se reduzca a la convexidad habitual. Para asegurar que esto es falso basta probar que la convexidad singular no implica la convexidad. En una primera vista esto no parece claro puesto que podrían existir laminados complicados (del tipo de los que aparecen en [46] y en [72]) cuya proyección por T nos de una medida de probabilidad con soporte en dos matrices no conectadas por una matriz singular. No obstante este no es el caso.

Proposición 4.10 *Sea $l = 3$. La convexidad singular no implica la convexidad.*

Demostración.

Encontraremos un contraejemplo en la familia de las funciones cuadráticas ([66]). El siguiente resultado es una generalización directa de la situación con gradientes (ver por ejemplo [20]).

Lema 4.11 ([20]) *Sea M un tensor simétrico de cuarto orden en $\mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times \{3 \times 3\}}$ y sea*

$$\varphi(A) = \langle MA, A \rangle.$$

1. φ es convexa si y sólo si $\varphi(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$;
2. φ es D-convexa si y sólo si

$$\int_S \varphi(\nabla \times v(x)) dx \geq 0$$

para toda función test en S y para todo dominio S ;

3. φ es convexa singular si y sólo si $\varphi(A) \geq 0$ para toda matriz singular A .
4. φ es D-convexa si y sólo si φ es convexa singular.

En virtud de este lema necesitamos encontrar una forma cuadrática que sea no negativa en las matrices singulares y negativa en alguna matriz no singular.

Esto lo conseguiremos encontrando el cono adecuado en el espacio de matrices. En concreto, sean V_1 y V_2 los subespacios de matrices generados por las matrices de traza nula y por la identidad, respectivamente. Es elemental comprobar que

$$\mathbf{R}^{3 \times 3} = V_1 \oplus V_2,$$

así que cada matriz A la podemos escribir como $A = A_1 + A_2$, donde A_i es la proyección ortogonal de A en el subespacio V_i , $i = 1, 2$. Afirmamos que la forma cuadrática

$$\varphi(A) = |A_1|^2 - \frac{1}{3}|A_2|^2$$

es convexa singular pero no convexa. De acuerdo con el Lema 4.11 tenemos que probar que φ es no negativa en la matrices singulares y negativa en alguna matriz no singular (esto último es trivial). Es elemental comprobar que $\varphi(A) < 0$ implica que A es no singular ya que si elegimos λ tal que $\lambda A_2 = I$ (I es la matriz identidad) entonces

$$|\lambda A - I|^2 = |\lambda A_1|^2 = \lambda^2 |A_1|^2 < \frac{1}{3} |\lambda A_2|^2 = 1.$$

Esto implica que λA es no singular y por tanto tampoco A . Luego φ es no negativa sobre las matrices singulares y esto concluye la prueba. ■

Otra cuestión interesante es cuándo la D-convexidad es equivalente a la convexidad singular. Hemos visto en el punto 4 del Lema 4.11 que en el caso de las formas cuadráticas ambos conceptos coinciden. Así pues, no podemos buscar un contraejemplo en esta familia de funciones. Encontrar un contraejemplo para esta cuestión es una tarea muy difícil, como en el análogo para el caso rotacional: la conjetura de Morrey ([74]). Todos los intentos que hemos realizado en este sentido han resultado infructuosos y por el momento la cuestión continua abierta.

NOTA 4.3 Es interesante señalar que en la situación $l = 3$ no tiene sentido introducir una clase de funciones análoga a las funciones policonvexas en el caso rotacional. Esto se debe a que las funciones afines (en el sentido usual) son las únicas funciones afines singulares, es decir, afines a lo largo de matrices singulares. En realidad, esas funciones deben ser, en primer lugar, cuasiafines (es decir, afines a lo largo de direcciones de rango uno) y por tanto deben ser combinaciones lineales de menores ([20]). Ya que los menores de orden mayor que uno son polinomios de orden dos o mayor, concluimos que los menores de orden uno son los únicos menores afines singulares. En conclusión, los únicos funcionales débilmente continuos respecto de funciones con divergencia nula son aquellos que tienen como integrando funciones

afines. La cuestión de funcionales débilmente continuos está tratada ampliamente en [20].

4.5 Una aplicación: relajación en micromagnetismo

Pensamos que los resultados anteriores pueden aplicarse en multitud de situaciones prácticas. En particular, esta teoría puede servir para obtener relajaciones en modelos físicos concretos. A esto es a lo que dedicaremos esta sección: aquí presentamos una relajación para una familia de funcionales no locales relacionada con un modelo de micromagnetismo.

Vamos a calcular la relajación en términos de medidas de Young, en el espíritu del Teorema A.14, de una clase de funcionales no locales. El funcional que trataremos será

$$I(m) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), m(x)) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad (4.7)$$

donde Ω es un abierto simplemente conexo de \mathbf{R}^3 , y donde $m \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ están acopladas por la ley diferencial, no local

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0, \quad \text{en } H^{-1}(\Omega). \quad (4.8)$$

Nos gustaría calcular explícitamente el funcional generalizado

$$I(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} I(m_j) : \{m_j\} \text{ genera } \nu \right\}.$$

Bajo esta definición es inmediato el resultado de relajación

$$\inf_{\mathcal{A}} I = \min_{\overline{\mathcal{A}}} I,$$

donde \mathcal{A} denota el conjunto de funciones admisibles para I (en este caso $L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$), y $\overline{\mathcal{A}}$ denota el conjunto de medidas parametrizadas generadas por sucesiones en \mathcal{A} . Con el objetivo en mente de calcular explícitamente este funcional generalizado será crucial la caracterización de las medidas de Young generadas por sucesiones de funciones con divergencia nula hecha en la sección precedente, ya que reduciremos la ley no local (4.8) a una ley local mediante la introducción de un potencial, es decir

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad m(x) = \nabla u(x) + \nabla \times v(x),$$

donde v es una cierta función en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$. Esta clase de problemas viene motivada por el funcional de micromagnetismo ([13, 21, 26, 29, 58, 71])

$$I(m) = \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(m(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde de nuevo

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0 \text{ en } H^{-1}(\mathbf{R}^3),$$

y la magnetización, m , verifica la hipótesis de saturación, $|m(x)| = \chi_{\Omega}(x)$ p.c.t. $x \in \mathbf{R}^3$. Los dos términos del funcional I representan respectivamente la energía anisotrópica, que expresa la tendencia del material a alinear la magnetización con ciertas direcciones cristalográficas preferidas, y la energía magnetoestática. El objetivo del micromagnetismo es el de encontrar una magnetización admisible m que minimice I . Si tratamos de aplicar el método directo para probar que I alcanza el mínimo nos encontramos de entrada que los límites débiles de sucesiones minimizantes, que verifican la condición de saturación, no tienen por qué verificar esta condición. Luego no podemos concluir la existencia de solución para este problema a menos que tengamos la convergencia fuerte de las sucesiones minimizantes, y esto no tiene sentido imponerlo. No obstante, en algunos casos se puede probar la existencia de solución, mientras que en otros se comprueba que se desarrollan fenómenos oscilatorios, no pudiendo asegurar que los límites débiles de sucesiones minimizantes sean magnetizaciones admisibles. Esta restricción no convexa nos obliga a considerar alguna clase de formulación relajada en términos de medidas parametrizadas asociadas a las sucesiones de magnetizaciones. Relajaciones en términos de medidas de Young para este funcional (independientes de la dimensión) han sido obtenidas en [21, 58, 71] a través de diferentes técnicas.

Aquí estableceremos una relajación de funcional (4.7) en la situación tridimensional. Este problema ha sido estudiado en [61] para el caso bidimensional ($\Omega \subset \mathbf{R}^2$). En dimensión tres las dificultades aparecen al tener que tratar con campos con divergencia nula. Como sabemos, en dimensión dos todo campo con divergencia nula es esencialmente un gradiente. Aquí seguiremos las ideas de ese trabajo pero aplicaremos los resultados específicos para problemas en los que intervienen rotacionales en dimensión tres de este capítulo.

Imponemos las hipótesis técnicas habituales

$$c(|m|^2 - 1) \leq \varphi(x, u, m) \leq (|m|^2 + 1), \quad C > c > 0.$$

Sobre ψ sólo imponemos la continuidad en las variables u y ∇u . El resultado más importante de esta sección es el siguiente en el que establecemos la expresión explícita de $I(\nu)$.

Teorema 4.12 *Bajo las condiciones anteriores si ψ es convexa con respecto a la variable gradiente, entonces*

$$I(\nu) = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(x, u(x), \lambda) d\nu_x(\lambda) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad (4.9)$$

donde ν y u están relacionadas a través de la ecuación diferencial

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0, \text{ en } H^{-1}(\Omega),$$

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \lambda d\nu_x(\lambda).$$

Demostración.

Sea $\tilde{I}(\nu)$ el término de la derecha en (4.9). Debido a la continuidad débil del operador

$$m \rightarrow u \text{ donde } \operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0,$$

y a la convexidad de ψ es fácil convencerse de que

$$I(\nu) \geq \tilde{I}(\nu).$$

Para la otra desigualdad sea $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$ dada, y sea $m \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ su primer momento

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \lambda d\nu_x(\lambda).$$

Sabemos que existe $v \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ tal que

$$m(x) = \nabla u(x) + \nabla \times v(x).$$

Para cada $x \in \Omega$, sea la medida de probabilidad μ_x dada por

$$\langle \chi, \mu_x \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} \chi(\lambda - \nabla u(x)) d\nu_x(\lambda). \quad (4.10)$$

Afirmamos que la familia de medidas de probabilidad $\mu = \{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ está generada por una sucesión de funciones con divergencia nula en $H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$. Para probar esto utilizamos el Teorema 4.7. Estamos en el caso $m = 1$, sabemos que en este caso la D-convexidad es equivalente a la convexidad usual, luego la condición (iii) del teorema debe verificarse para toda función convexa, es decir tenemos que μ_x debe verificar la desigualdad de Jensen para toda función convexa y esto no impone ninguna restricción sobre esta medida. Así pues, para $m = 1$ (también para $m = 2$) la condición (iii) del Teorema 4.7 puede ser eliminada. Con respecto a las otras dos condiciones es elemental que el primer momento de la familia tiene divergencia nula, de hecho

$$\langle \lambda, \mu_x \rangle = \nabla \times v(x).$$

La otra condición también es elemental

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} |\lambda|^2 d\mu_x(\lambda) dx \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\lambda|^2 d\nu_x(\lambda) + |\nabla u(x)|^2 \right) dx < +\infty.$$

Por tanto existe una sucesión acotada $\{V_j\} \subset H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$, con $\operatorname{div}(V_j) = 0$, tal que tiene a μ como medida parametrizada asociada y $\{|V_j|^2\}$ es equiintegrable. Sea

$$m_j(x) = \nabla u(x) + V_j(x), \quad x \in \Omega.$$

Veamos que m_j genera ν . Sea $\chi(x, \lambda)$ una función regular. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi(x, m_j(x)) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi(x, \nabla u(x) + V_j(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \chi(x, \nabla u(x) + \lambda) d\mu_x(\lambda) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \chi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx. \end{aligned}$$

Además, por la elección de m_j , es claro que

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m_j) = 0, \quad \text{para todo } j.$$

Para finalizar, teniendo en cuenta la cota superior sobre φ y la equiintegrabilidad de la sucesión $\{|m_j|^2\}$ podemos pasar al límite y obtener

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I(m_j) = \tilde{I}(\nu).$$

Es importante observar que para la demostración, dada $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$, hemos sido capaces de construir una sucesión $\{m_j\} \in \mathcal{A}$ que genera ν y que tiene cuadrado equiintegrable. Esto lo hemos hecho a partir de la sucesión de funciones con divergencia nula que genera la medida parametrizada μ . En el caso en que ν sea minimizante para el problema generalizado entonces la sucesión m_j es minimizante para el funcional I .

Un caso particularmente importante es el caso en que ψ es estrictamente convexa con respecto a la variable ∇u , ya que en este caso somos capaces de conocer todas las sucesiones minimizantes para nuestro problema. Si ν es un minimizador y

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \lambda d\nu_x(\lambda), \quad \operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0,$$

todas las sucesiones minimizantes son esencialmente de la forma

$$m_j(x) = \nabla u(x) + V_j(x),$$

donde $\{V_j\}$ genera la medida en (4.10). Para el siguiente resultado necesitamos suponer cotas inferiores y superiores sobre ψ ,

$$c(|A|^2 - 1) \leq \psi(x, u, A) \leq C(|A|^2 + 1), \quad C > c > 0.$$

Teorema 4.13 *Sea m_j una sucesión minimizante tal que*

$$m_j(x) = \nabla u_j(x) + \nabla \times v_j(x).$$

Si ψ es estrictamente convexa con respecto a la variable gradiente, entonces $u_j \rightarrow u$ fuerte en $H^1(\Omega)$ y $\{\nabla \times v_j\}$ genera la medida en (4.10).

La demostración de este resultado puede encontrarse en [58] para el caso en dimensión dos. Para el caso en dimensión tres la prueba es idéntica.

Ahora nos gustaría aplicar estos resultados al caso del funcional de micromagnetismo

$$I(m) = \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(m(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0, \text{ en } H^{-1}(\mathbf{R}^3),$$

$|m(x)| = \chi_{\Omega}(x)$ e.c.t. $x \in \mathbf{R}^3$, y χ_{Ω} es la función característica de Ω . Los resultados anteriores no son directamente aplicables a este funcional. Definimos

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R}^3, \lambda = 0, \\ \tilde{\varphi}(\lambda), & x \in \Omega, |\lambda| = 1, \\ +\infty, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

y

$$I(m) = \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(x, m(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Con esta definición φ no es una función de Carathéodory ni verifica la cota superior de orden dos. Estas dificultades pueden ser fácilmente superadas observando que para calcular

$$I(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} I(m_j) : \{m_j\} \text{ genera } \nu \right\}$$

restringimos nuestra atención a sucesiones con $|m_j| = \chi_{\Omega}$, así que la familia de probabilidades debe verificar

$$\operatorname{sop}(\nu_x) \subset S^1 = \{\lambda \in \mathbf{R}^3 : |\lambda| = 1\},$$

para $x \in \Omega$ y $\nu_x = \delta_0$ si $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega$. Por tanto es cierto que

$$I(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} \bar{I}(m_j) : \{m_j\} \text{ genera } \nu \right\} = \bar{I}(\nu),$$

donde

$$\bar{I}(m) = \int_{\mathbf{R}^3} \bar{\varphi}(m(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

y

$$\bar{\varphi}(\lambda) = |\lambda|^2 \tilde{\varphi} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \right),$$

la extensión homogénea de grado dos de $\tilde{\varphi}$. Es obvio que $\varphi(x, \lambda) = \bar{\varphi}(\lambda)$ siempre que $\varphi(x, \lambda)$ es finita. Por los Teoremas 4.12 y 4.13 obtenemos

$$\tilde{I}(\nu) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \bar{\varphi}(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

y finalmente

$$I(\nu) = \int_{\Omega} \int_{S^1} \tilde{\varphi}(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Capítulo 5

El problema de control en dimensión $N = 3$

5.1 Introducción

Como hemos señalado en la introducción del capítulo anterior, para poder abordar nuestro problema de control óptimo en el caso tridimensional necesitamos desarrollar previamente el análisis de las cuestiones básicas del cálculo de variaciones para funcionales del tipo

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x), V(x)) dx, \quad (5.1)$$

con

$$\operatorname{div}(V) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Este análisis lo hemos desarrollado en el capítulo anterior para funcionales que dependen sólo de funciones con divergencia nula. Esta experiencia es fácil de trasladar al caso de funcionales en donde intervienen gradientes y funciones con divergencia nula. Así pues, usando las ideas y técnicas anteriores vamos a conseguir entender cuestiones como: la s.c.i.d., la existencia, relajación,..., para funcionales del tipo (5.1); así como las medidas parametrizadas generadas por sucesiones de pares de gradientes y funciones con divergencia nula.

Una vez esclarecidas esas cuestiones relativas al principio variacional (5.1) podremos entrar de lleno en el problema de la existencia de soluciones para el problema de control óptimo. La idea es la misma que en los casos precedentes: evitar el carácter no local de la ecuación de estado mediante la introducción de una nueva variable independiente, reformulando de manera equivalente, el problema de control como un problema del Cálculo de Variaciones. La nueva variable independiente viene del

hecho de que todo campo con divergencia nula en dimensión tres es un rotacional, por tanto para todo par admisible para el problema de control, (u, y) , tenemos que existe z tal que

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) = \nabla \times z(x).$$

Una vez reformulado el problema como problema variacional podremos aplicar los resultados relativos al problema (5.1) para obtener un teorema de existencia de controles óptimos, probando la existencia de minimizadores para el problema variacional equivalente. Al igual que antes nos encontraremos con dificultades de carácter técnico como que los integrandos que aparecen no son funciones de Carathéodory. Estas dificultades serán superadas utilizando las ideas de los Capítulos 2 y 3. También en este caso, como en la situación bidimensional, los principios variacionales que aparecen son de naturaleza vectorial, lo que nos obliga a tener que tratar con conceptos de convexidad generalizados.

Como ya hemos insistido con anterioridad la idea de que todo campo con divergencia nula en dimensión dos es esencialmente una gradiente ha sido usada con anterioridad para obtener relajaciones en algunos modelos físicos [36, 60, 61, 63, 64]. Para poder llegar a las mismas conclusiones es necesaria una teoría sobre funcionales del tipo de (5.1) donde aparecen conjuntamente gradientes y funciones con divergencia nula. En [36] se propone este trabajo para poder extender las conclusiones que allí aparecen a la situación tridimensional. Por tanto este capítulo también estará dedicado a la extensión de las conclusiones de esos trabajos al caso tridimensional por medio de los resultados obtenidos para el principio variacional (5.1). En la Sección 4.5 del capítulo anterior ya mostramos cómo los resultados obtenidos para el problema variacional en el que sólo intervienen funciones con divergencia nula fueron de utilidad para extender a dimensión tres algunos resultados conocidos para una relajación de un modelo de micromagnetismo en dimensión dos.

La distribución del capítulo es la siguiente: en la Sección 5.2 analizamos problemas del Cálculo de Variaciones en los que intervienen conjuntamente gradientes y campos con divergencia nula; en la siguiente sección abordamos el problema de control óptimo en el caso tridimensional; en el resto de las secciones tratamos diversos modelos físicos en tres dimensiones que precisan del estudio de la relajación para su análisis, en concreto, un modelo de tomografía, uno de magnetostricción y otro de optimización estructural son analizados. Todo el material contenido en este capítulo aparece recogido en [7].

Volvemos a insistir en que el estudio de estas situaciones en dimensión tres supone un tratamiento totalmente paralelo al bidimensional, una vez salvadas las distancias mediante los resultados del capítulo anterior.

5.2 Problemas variacionales en los que intervienen gradientes y funciones con divergencia nula

Sea el funcional

$$I(u, V) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x), V(x)) dx,$$

donde $\varphi : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un abierto, regular y simplemente conexo, $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ con $1 < p \leq \infty$, $V \in W^{1,q}(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ con $q \geq 2$, verificando la restricción

$$\operatorname{div}(V) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Diferentes condiciones de frontera sobre u y V pueden ser impuestas. Típicamente tendremos condiciones tipo Dirichlet sobre u y posiblemente condiciones sobre la traza de la componente normal sobre V .

En el análisis de cuestiones como la s.c.i.d., la existencia-no existencia de minimizadores, relajación, ..., para I , nos encontramos las mismas dificultades que en el análisis llevado a cabo en el capítulo anterior. Así pues, las mismas ideas y técnicas usadas para superar las dificultades en aquel caso serán útiles ahora. Es por ello, que en esta sección omitiremos las pruebas de los resultados y las referiremos al capítulo anterior. Como ya hemos señalado este tipo de situaciones donde tenemos restricciones diferenciales adicionales han sido tratadas clásicamente mediante la teoría de compacidad por compensación [53, 54, 68, 69]. Nuestra perspectiva aquí es distinta y está basada en la reformulación por potenciales vectoriales de los campos con divergencia nula. En principio los exponentes p y q pueden ser distintos; no obstante, podemos suponer sin pérdida de generalidad $p = q \geq 2$. Como antes, por simplicidad y para evitar dificultades técnicas con los potenciales vectoriales, supondremos $p = 2$.

Ya que suponemos que Ω es simplemente conexo, dado un campo vectorial V con $\operatorname{div}(V) = 0$, existe ([25]) un potencial vectorial v tal que

$$V = \nabla \times v.$$

Usando este hecho, el funcional I lo podemos escribir como

$$I(u, v) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x), \nabla \times v(x)) dx.$$

Sea ahora la aplicación $\hat{T} : \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l} \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}$ definida como

$$\hat{T}(A, B) = (A, T(B)),$$

donde T es la aplicación definida componente a componente, en cada una de sus l componentes, como

$$T(A) = (A_{32} - A_{23}, A_{13} - A_{31}, A_{21} - A_{12}), \quad A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}.$$

Así se verifica la relación

$$\hat{T}(\nabla u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla \times v),$$

y podemos escribir I como

$$I(u, v) = \int_{\Omega} \varphi \circ \hat{T}(x, u(x), \nabla u(x), \nabla v(x)) \, dx.$$

Supondremos de ahora en adelante que φ sólo depende de ∇u y de V . Esto no es ninguna pérdida de generalidad ya que los resultados se extienden al caso general simplemente requiriendo que las hipótesis se verifiquen p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $u \in \mathbf{R}^m$. Con la idea de basarnos en la cuasiconvexidad de la función $\hat{\varphi} = \varphi \circ \hat{T}$ para obtener la s.c.i.d. de I , encontramos la dificultad de que la convergencia débil de los rotacionales no impone ningún tipo de convergencia sobre los gradientes correspondientes, como insistimos en el Capítulo 4. Para solventar esta dificultad podemos hacer uso, de nuevo, del Lema 4.1. Razonando como en el capítulo anterior vemos que el concepto de convexidad relacionado con la s.c.i.d en este caso es, de nuevo, la cuasiconvexidad de $\hat{\varphi} = \varphi \circ \hat{T}$. Así pues, decimos que una función continua $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ es RD-convexa si y sólo si $\hat{\varphi} = \varphi \circ \hat{T}$ es cuasiconvexa. Utilizamos la notación RD por rotacional-divergencia, ya que los gradientes pueden verse como funciones que verifican la restricción rotacional nulo (de hecho, un campo es gradiente si y sólo si verifica la restricción $\text{rot} = 0$). Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.1 *Sea $\varphi : \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua. Se verifican las propiedades siguientes:*

(i) *Si φ es tal que*

$$\varphi(A, B) \leq C(|(A, B)|^2 + 1), \quad C > 0,$$

I verifica la propiedad de s.c.i.d para sucesiones $\{(u_j, V_j)\}$ tales que u_j converge débil en H^1 , V_j converge débil en L^2 y $\text{div}(V_j) = 0$ en Ω , si y sólo si φ es RD-convexa.

(ii) Si φ es RD-convexa y tal que

$$c(|(A, B)|^2 - 1) \leq \varphi(A, B) \leq C(|(A, B)|^2 + 1), \quad C > c > 0,$$

entonces existen minimizadores de I bajo la restricción diferencial

$$\operatorname{div}(V) = 0$$

y posiblemente otro tipo de condiciones invariantes bajo la convergencia débil.

Como ocurre siempre que se analizan problemas variacionales de algún tipo hay que hablar de relajación, ya que ésta es la clave para entender la naturaleza de las sucesiones minimizantes para el funcional I . Con este propósito es interesante expresar la RD-convexidad sin hacer referencia a la aplicación \hat{T} . Usando el hecho de que \hat{T} es sobreyectiva es fácil ver que φ es RD-convexa si y sólo si verifica

$$\varphi(A, B) \leq \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(A + \nabla u(y), B + \nabla \times v(y)) dy,$$

para toda (A, B) , todo par de funciones test (u, v) y todo dominio regular y acotado $S \subset \mathbf{R}^3$. Tras esta definición es claro cómo definir el concepto de envoltura convexa adecuado para la relajación de nuestro problema variacional. Llamamos RD-convexificación de φ a la función dada por

$$RD(\varphi)(A, B) = \inf \left\{ \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(A + \nabla u(y), B + \nabla \times v(y)) dy : u, v \in W_0^{1,\infty} \right\}.$$

Al igual que vimos en el capítulo anterior, la función definida de esta manera verifica la igualdad

$$RD(\varphi) \circ \hat{T} = Q(\varphi \circ \hat{T}).$$

Basándonos en esta relación y en las propiedades de la cuasiconvexificación (ver Apéndice) podemos probar:

1. La definición de RD-convexificación tiene sentido, es decir, no depende del dominio.
2. $RD\varphi$ es RD-convexa.
3. $RD\varphi = \sup \{ \psi : \psi \leq \varphi, \psi \text{ RD-convexa} \}$.
4. Los ínfimos

$$\inf_{\Omega} \varphi(\nabla u(x), \nabla \times u(x)) dx, \quad \inf_{\Omega} RD\varphi(\nabla u(x), \nabla \times u(x)) dx,$$

bajo condiciones invariantes por convergencia débil, coinciden.

Un punto fundamental es este análisis es el de la caracterización de las medidas de Young generadas por pares de gradientes y funciones con divergencia nula. Esta caracterización ha sido obtenida en [23] para medidas parametrizadas generadas por sucesiones que verifican restricciones diferenciales. Teniendo en cuenta que lo que nosotros pretendemos caracterizar son justamente las medidas parametrizadas generadas por pares (U, V) tales que $\text{rot}(U) = \text{div}(V) = 0$ en Ω el resultado del artículo mencionado nos da lo que buscamos. Enunciaremos el resultado adaptado a nuestra situación particular, usando funciones RD-convexas; de hecho, el resultado consiste en la desigualdad de Jensen para funciones RD-convexas y dos condiciones técnicas adicionales.

Teorema 5.2 ([23]) *Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una familia débilmente medible de probabilidades sobre $\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}$. ν está generada por una sucesión acotada $\{(\nabla u_j, V_j)\}$ tal que $\{u_j\} \subset H^1(\Omega; \mathbf{R}^m)$ y $\{V_j\} \subset L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ verificando $\text{div}(V_j) = 0$ en Ω , y tal que la sucesión $\{|\nabla u_j, V_j|^2\}$ es equiintegrable si y sólo si:*

(i) *Existe $(u, V) \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^m) \times L^2(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que*

$$\text{div}(V) = 0, \quad (\nabla u(x), V(x)) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}} (A, B) d\nu_x(A, B),$$

p.c.t. $x \in \Omega$;

(ii) $\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}} |(A, B)|^2 d\nu_x(A, B) < +\infty$;

(iii) *p.c.t. $x \in \Omega$ y para toda función g continua y RD-convexa tal que*

$$|g(A, B)| \leq C(|(A, B)|^2 + 1), \quad C > 0,$$

se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}} g(A, B) d\nu_x(A, B) \geq g\left(\int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}} (A, B) d\nu_x(A, B)\right).$$

De la misma manera que en el caso anterior también es posible probar que el conjunto de medidas parametrizadas generadas por pares de gradientes y funciones con divergencia nula es justamente la imagen por \hat{T} (en el sentido que hemos usado en el capítulo anterior) del conjunto de medidas parametrizadas gradientes. Merece la pena observar que la aplicación \hat{T} no es inyectiva.

Es interesante conocer a qué da lugar la aplicación \hat{T} actuando sobre la subclase de medidas gradientes constituida por los laminados. Para ello podemos empezar calculando la imagen por \hat{T} de las matrices de rango uno. Sea $a \otimes n$ una matriz

de rango uno en $\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times l}$. Esta matriz de rango uno la podemos escribir como $a \otimes n = (a \otimes n_1, (a \otimes n_2^{(1)}, \dots, a \otimes n_2^{(l)}))$ donde $n_1 \in \mathbf{R}^m$ y $n_2^{(j)} \in \mathbf{R}^3$, para todo $j = 1, \dots, l$. La imagen por \hat{T} de $a \otimes n$ es

$$(a \otimes n_1, (a \times n_2^{(1)}, \dots, a \times n_2^{(l)})) \in \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l} \quad (5.2)$$

(recordemos la identidad $T(a \otimes n) = a \times n$). Después de esta discusión, y teniendo en cuenta las conclusiones del capítulo anterior, es fácil entender que la medida de probabilidad

$$t\delta_{(A,B)} + (1-t)\delta_{(C,D)},$$

donde $t \in (0, 1)$ y $(A, B), (C, D) \in \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}$, está generada por una sucesión de pares de gradientes y funciones con divergencia nula si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

1. $\text{rango}(A - C) \leq 1$;
2. $\text{rango}(B - D) \leq 2$;
3. las columnas de $A - C$ son ortogonales a las columnas de $B - D$.

Razonando como en el capítulo anterior, usando la caracterización de medidas parametrizadas, Teorema 5.2, se puede probar que si φ es RD-convexa entonces es convexa a lo largo de direcciones de la forma (5.2), es decir, que verifican los tres puntos anteriores. Esta conclusión puede ser obtenida también observando que el cono característico del operador diferencial

$$A(U, V) = \begin{pmatrix} \text{rot}(U) \\ \text{div}(V) \end{pmatrix}$$

está formado exactamente por las matrices de la forma (5.2). Esto se obtiene por un simple cálculo.

Para tratar el problema de control óptimo en el caso tridimensional necesitaremos hacer uso del concepto de convexidad generalizada sobre conjuntos inducido por la RD-convexidad. En este sentido definiremos la RD-convexificación de un conjunto $S \subset \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}$ como el conjunto

$$RD(S) = \left\{ \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}} (A, B) d\nu(A, B), \nu \in \mathcal{M}^{RD}(S) \right\},$$

donde por $\mathcal{M}^{RD}(S)$ denotamos el conjunto de las medidas parametrizadas homogéneas generadas por sucesiones de pares de gradientes y funciones con divergencia nula con soporte contenido en S . Un conjunto se dice RD-convexo si coincide con su

RD-convexificación. Esta definición puede parecerle extraña al lector, aunque, no es más que una caracterización de esta otra, mucho más natural:

$$RD(S) = \left\{ (A, B) : F(A, B) \leq \sup_S F, \forall F : \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l} \rightarrow \mathbf{R}, \text{RD-convexa} \right\}.$$

La prueba de este hecho es análoga a la del resultado correspondiente para la cuasiconvexificación (ver Sección 3.3 del Capítulo 3 y [50])

5.3 El problema de control óptimo en dimensión $N = 3$

Sea Ω un dominio regular y simplemente conexo de \mathbf{R}^3 , K un subconjunto de \mathbf{R}^n , F , G y V tres funciones de Carathéodory,

$$F : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

$$G : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times l},$$

$$V : \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m} \rightarrow \mathbf{R}^d,$$

con F acotada inferiormente, y n, m, l, d enteros positivos con $l \leq m$. Consideremos el siguiente problema de control óptimo, que identificamos como (P) :

Encontrar un control u perteneciente al conjunto de controles admisibles,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n) : u(x) \in K, \text{ p.c.t. } x \in \Omega\},$$

que minimice el funcional

$$I(u, y) = \int_{\Omega} F(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx,$$

sujeto a

$$\int_{\Omega} V(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) dx \leq \delta,$$

donde y es un estado asociado al control u , a través de la ecuación de estado,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(G(x, u(x), y(x), \nabla y(x))) = 0, & \text{en } \Omega, \\ y = y_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

y_0 y δ son datos del problema.

Pretendemos establecer un resultado de existencia de controles óptimos para este problema mediante las ideas mostradas en capítulos anteriores. Para ello usaremos

estas ideas y técnicas junto con los resultados de la sección anterior de este capítulo. Muchos de los comentarios que hemos hecho sobre este problema para los casos $N = 1, 2$ se trasladan trivialmente al caso $N = 3$, así que los omitiremos con la intención de evitar ser repetitivos. También obviaremos las pruebas de los resultados que enunciemos, ya que no consisten más que en seguir la línea de las pruebas para los casos anteriores usando los resultados específicos para problemas variacionales en los que intervienen gradientes y funciones con divergencia nula. Por tanto, el principal objetivo de esta sección es el de enunciar de manera rigurosa un resultado de existencia para el problema (P).

El primer paso en el análisis del problema (P) es establecer la formulación variacional alternativa. Como siempre suponemos que K es un compacto y que la existencia de solución para la ecuación de estado (5.3) está garantizada para cada control, es decir, que existe $1 < p < +\infty$ tal que para cada control u existe un estado $y \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tal que (u, y) verifica la ecuación (sistema) en derivadas parciales (5.3). Supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$|G(x, u(x), y(x), A)|^p \leq C(1 + |y|^p + |A|^p),$$

para todo (x, u, y, A) . Como hemos visto en la Sección 3.2 se podrían dar hipótesis más generales que esta (que esencialmente implica que G es lineal en A), que permitieran proseguir con el razonamiento posterior. Aquí por simplicidad, y ya que en el Capítulo 3 hemos entrado en profundidad en esta cuestión, nos quedaremos con esta hipótesis más restrictiva de lo necesario.

Olvidemos por el momento la restricción integral, la recuperaremos en el resultado de existencia.

Si (u, y) es un par admisible para el problema (P), es decir que verifica la ley (5.3), entonces

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l}),$$

y teniendo en cuenta que ese campo tiene divergencia nula, si $p \geq 2$ existe ([25, Th. 3.4]) $z \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$ tal que

$$G(x, u(x), y(x), \nabla y(x)) = \nabla \times z(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$. Ahora podemos definir la nueva densidad de coste \tilde{F} en $(x, y, A, B) \in \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times l}$ como

$$\tilde{F}(x, y, A, B) = \min_{u \in K(x, y, A, B)} F(x, u, y, A),$$

donde

$$K(x, y, A, B) = \{u \in K : G(x, u, y, A) = B\}.$$

Cuando este conjunto es vacío damos a \tilde{F} el valor $+\infty$. Sabemos que en las hipótesis en las que nos encontramos esta función está bien definida. Llegados a este punto podemos afirmar que el siguiente problema variacional, denotado como (\tilde{P}) ,

$$\inf \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), \nabla \times z(x)) dx,$$

donde $y \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times m})$ verificando $y = y_0$ sobre $\partial\Omega$ y $z \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^{3 \times l})$, es equivalente, en el sentido de las Proposiciones 2.1 y 3.2, al problema de control óptimo (P) .

Estudiar la existencia de soluciones óptimas para nuestro problema de control óptimo es lo mismo que estudiar la existencia de minimizadores para (\tilde{P}) . Así pues para establecer el teorema de existencia deseado podemos utilizar los resultados (Teorema 5.1) de la sección precedente para problemas variacionales del tipo de (\tilde{P}) . La aplicación de estos resultados no es directa debido a que \tilde{F} no es una función de Carathéodory pues puede tomar el valor $+\infty$ repentinamente; no obstante, esta dificultad puede solventarse con las mismas ideas que en los casos anteriores. Para enunciar el teorema principal de la sección necesitamos la siguiente notación adicional:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y, A, B) &= \min_{K(x, y, A, B)} V(x, u, y, A), \\ \Delta &= \left\{ (x, y, A, B) : |\tilde{F}(x, y, A, B)| < +\infty \right\}, \\ \Delta(x) &= \{(y, A, B) : (x, y, A, B) \in \Delta\}, \\ \Delta(x, y) &= \{(A, B) : (x, y, A, B) \in \Delta\}. \end{aligned}$$

Teorema 5.3 *En las condiciones anteriores supongamos además que:*

- (i) $\Delta(x)$ es cerrado p.c.t. $x \in \Omega$;
- (ii) $\tilde{F} : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$, $\tilde{V} : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ son funciones de Carathéodory;
- (iii) existen $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ y $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^m)$ tales que

$$\begin{aligned} c_1 &\leq \tilde{F}(x, y, A, B) \leq h_1(x, y)(1 + |(A, B)|^p), \\ c_2 &\leq \tilde{V}(x, y, A, B) \leq h_2(x, y)(1 + |(A, B)|^p), \end{aligned}$$

para todo $(x, y, A, B) \in \Delta$;

- (iv) $\Delta(x, y)$ es RD-convexo y las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y, \cdot, \cdot) &: \Delta(x, y) \rightarrow \mathbf{R} \\ \tilde{V}(x, y, \cdot, \cdot) &: \Delta(x, y) \rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

son RD-convexas, p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $y \in \mathbf{R}^m$;

(v) la intersección

$$\operatorname{argmin}_{K(x,y,A,B)} F(x, u, y, A) \cap \operatorname{argmin}_{K(x,y,A,B)} V(x, u, y, A)$$

es no vacía para todo (x, y, A, B) , y existen pares admisibles para el problema de optimización (es decir, pares (y, z) que verifican la restricción integral);

(vi) el funcional

$$\tilde{I}(u, v) = \int_{\Omega} \tilde{F}(x, y(x), \nabla y(x), \nabla \times z(x)) dx$$

es coercitivo.

Entonces existen minimizadores para el problema (\tilde{P}) y consecuentemente controles óptimos para (P) .

En este caso como en el caso bidimensional también se pueden obtener resultados de existencia particulares basados en la policonvexidad del integrando \tilde{F} . De hecho, los Teoremas 3.5 y 3.7 pueden probarse en la situación tridimensional. Para ello, simplemente habría que tener en cuenta que dados $y \in \mathbf{R}^3$ y $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ el producto escalar

$$y \cdot TA$$

es suma de menores de orden dos de la matriz (y, A) . También los comentarios hechos para problemas de diseño óptimo en el caso $N = 2$ pueden extenderse a este caso sin dificultad.

5.4 Relajación de un método variacional para tomografía

Unos de los problemas principales de la tomografía consiste en recuperar un coeficiente desconocido de una ecuación en derivadas parciales elíptica usando como información los valores en la frontera de un número finito de soluciones. Siendo más precisos se trata de encontrar la conductividad eléctrica de un cuerpo a partir de mediciones del potencial eléctrico y del flujo exterior de corriente en la frontera. El rango de aplicaciones de la tomografía es muy extenso. Particularmente atractivas son las aplicaciones en biomedicina, pues permite evitar los riesgos de utilizar radiaciones iónicas como los rayos X [6]; y en geofísica, pues por ejemplo permite predecir la evolución de vertidos tóxicos [77].

Matemáticamente el problema se formula de la siguiente manera. Sea la ecuación en derivadas parciales elíptica en forma de divergencia

$$\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \mathbf{R}^N \quad (N \geq 2), \quad (5.4)$$

donde γ representa la conductividad o permeabilidad del cuerpo, u el potencial eléctrico, ∇u el campo eléctrico y $\sigma = \gamma\nabla u$ la corriente eléctrica. El problema consiste en dados un número finito y arbitrario de pares $\{(f_i, g_i)\}_1^n$ (que representan mediciones del potencial eléctrico y del flujo exterior de corriente en la frontera, $\partial\Omega$) encontrar una conductividad γ con $\gamma(x) \in [\alpha, \beta]$, p.c.t. $x \in \Omega$, tal que existen u_i , $i = 1, \dots, n$, verificando la ecuación (5.4) y

$$u_i = f_i, \quad (\gamma\nabla u) \cdot \eta = g_i, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. η representa el vector normal exterior a la frontera de Ω .

En [36] se propone el siguiente planteamiento para estudiar este problema. Este método tiene naturaleza variacional y está basado en la minimización de funcionales que están definidos para cualquier conjunto de n campos eléctricos $\{u_i\}$ (funciones reales con valores frontera dados), n corrientes (campos vectoriales con divergencia nula y flujo normal en la frontera dado) y cualquier conductividad (función medible que toma valores en un intervalo dado). Se propone minimizar

$$J(u_1, \dots, u_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n; \gamma) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \gamma^{-\frac{1}{2}} \sigma_i - \gamma^{\frac{1}{2}} \nabla u_i \right|^2 dx,$$

donde

$$\operatorname{div}(\sigma_i) = 0,$$

$$u_i = f_i, \quad \sigma_i \cdot \eta = g_i, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. La idea está en que J es no negativo y se anula precisamente cuando $\sigma_i = \gamma\nabla u_i$ y se tiene

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u_i) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$u_i = f_i, \quad \gamma\nabla u_i \cdot \eta = g_i, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Otra posibilidad es la de trabajar con el siguiente funcional obtenido minimizando en γ explícitamente:

$$E = \int_{\Omega} e(\nabla u_1, \dots, \nabla u_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n) dx,$$

donde

$$e(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n) = \inf_{\alpha \leq \gamma \leq \beta} \sum_{i=1}^n \left| \gamma^{-\frac{1}{2}} \eta_i - \gamma^{\frac{1}{2}} \xi_i \right|^2$$

En el funcional J además de gradientes y campos con divergencia nula interviene la conductividad γ , por tanto, el concepto de semicontinuidad inferior que utilizemos para este funcional debe tener en cuenta este hecho. El concepto adecuado es el de s.c.i. con respecto a la G-convergencia [14]. La relajación de este funcional con respecto a esta convergencia ha sido extensamente comentada en [36]. Para los propósitos de esta memoria es mucho más interesante el funcional E en el que intervienen gradientes y funciones con divergencia nula. En [36] se calcula explícitamente la relajación de este funcional en el caso en que $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Si asumimos que el dominio es simplemente conexo el funcional E puede ser reescrito como un funcional en el que sólo intervienen gradientes, introduciendo los vectores potenciales de los campos con divergencia nula. Más concretamente, para cada campo con divergencia nula σ_i sea v_i una función potencial:

$$\sigma_i = T \nabla v_i,$$

donde T es la rotación de ángulo $\frac{\Pi}{2}$. La condición de frontera $v_i = h_i$ sobre $\partial\Omega$ se obtiene salvo constante aditiva integrando la condición $\sigma_i \cdot \eta = g_i$ en la frontera (advertimos que g_i debe tener valor medio nulo). Por tanto, minimizar el funcional E es equivalente a minimizar el funcional

$$\tilde{E} = \int_{\Omega} \tilde{e}(\nabla u_1, \dots, \nabla u_n; \nabla v_1, \dots, \nabla v_n) dx,$$

donde

$$\tilde{e}(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n) = \inf_{\alpha \leq \gamma \leq \beta} \sum_{i=1}^n \left| \gamma^{-\frac{1}{2}} T \eta_i - \gamma^{\frac{1}{2}} \xi_i \right|^2,$$

y con las condiciones de frontera

$$u_i = f_i, \quad v_i = h_i, \quad \text{en } \partial\Omega$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

El principal logro de [36] es el de obtener explícitamente la relajación del funcional \tilde{E} , es decir, la cuasiconvexificación de \tilde{e} . Esta cuasiconvexificación, que se obtiene usando resultados de homogeneización, es

$$Q\tilde{e} = \inf_{\gamma \in G[\alpha, \beta]} \sum_{i=1}^n \left| \gamma^{-\frac{1}{2}} T \eta_i - \gamma^{\frac{1}{2}} \xi_i \right|^2,$$

donde $G[\alpha, \beta]$ es, como ya sabemos, la G-clausura del conjunto de matrices diagonales

$$\{\lambda I : \lambda \in [\alpha, \beta]\}.$$

Recordamos que en el Capítulo 3 hemos comentado que esta G-clausura es conocida y está dada por

$$G\{\alpha, \beta\} = \{A \in \mathbf{R}^{2 \times 2} : \text{los autovalores } \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ de } A \text{ satisfacen}$$

$$\alpha \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \beta, \text{ y } \alpha\beta \leq (\alpha + \beta - \lambda_2)\lambda_1\}.$$

Como en la función \tilde{e} , la expresión de $Q\tilde{e}$ está dada como el ínfimo de todos los coeficientes posibles, aunque este conjunto ha sido extendido de las funciones escalares que toman valores entre α y β al subconjunto de matrices simétricas $G[\alpha, \beta]$. Evaluar este ínfimo en γ es un ejercicio de manipulación básica.

En [36] también se señala que un resultado semejante puede ser obtenido para el caso tridimensional, pero se descarta su interés por el hecho de que en esta situación la idea de usar vectores potenciales no es satisfactoria, ya que, al no ser única la representación de los campos con divergencia nula con potenciales, la coercitividad y la conexión entre cuasiconvexidad y existencia no está clara. Nosotros hemos intentado aclarar estas cuestiones en la Sección 5.2 de este capítulo, y en consecuencia, ahora sí que tenemos una teoría adecuada para poder tratar el tipo de problemas del Cálculo de Variaciones que aparece. En esta situación podemos hablar de la RD-convexificación de e , de hecho en [36] también se prueba implícitamente que esta convexificación está dada por la fórmula

$$RDe = \inf_{\gamma \in G[\alpha, \beta]} \sum_{i=1}^n \left| \gamma^{-\frac{1}{2}} \eta_i - \gamma^{\frac{1}{2}} \xi_i \right|^2$$

donde ahora $G[\alpha, \beta]$ representa la G-clausura del conjunto anterior en el espacio de matrices 3×3 . Una caracterización en forma reducida de este conjunto aparece en [14, Pr. 5.1]: una matriz $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ pertenece a $G[\alpha, \beta]$ si y sólo si

$$\lambda_3 - \alpha \leq (\alpha + \beta) \left(1 + \alpha \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \alpha)^{-1} \right)^{-1},$$

donde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ son los autovalores de A .

En esta sección nada de lo expuesto es original nuestro. Simplemente hemos tratado de poner de manifiesto como el análisis desarrollado para problemas del Cálculo de Variaciones en los que intervienen gradientes y funciones con divergencia nula en dimensión tres tiene utilidad en esta situación concreta, poniendo de manifiesto la relajación del modelo de tomografía presentado en la situación tridimensional.

5.5 Relajación en magnetostricción

En la Sección 4.5 hemos tratado la relajación en términos de medidas parametrizadas de una clase de funcionales no locales relacionados con el funcional típico de micromagnetismo. En esta sección trataremos este problema para el caso más complejo de la magnetostricción, en el que se tiene en cuenta, además, la interacción entre las propiedades magnéticas y elásticas de los materiales. Algunas referencias básicas sobre la magnetostricción son [27, 28, 30, 31]. Este problema fue tratado, junto con el problema de micromagnetismo, en [61] en la situación bidimensional, donde se obtuvieron algunas conclusiones relevantes. Una vez más en el caso tridimensional nos encontramos con la dificultad de tener que tratar conjuntamente con gradientes y campos con divergencia nula. Por tanto, nuestro objetivo en esta sección no es más que extender los resultados del artículo mencionado al caso en dimensión tres, haciendo uso de los resultados que hemos establecido para esa clase de problemas. Esto lo haremos siguiendo exactamente las mismas ideas de [61] pero aplicando nuestros resultados en vez de los resultados referentes a problemas en los que sólo intervienen gradientes.

En esta situación más compleja el funcional depende de pares (m, y) que describen el estado magnético y elástico, respectivamente. El funcional tiene la forma

$$I(m, y) = \int_{\Omega} \varphi(m(y(x)), \nabla y(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$y = y_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

$$|\det(\nabla y(x))m(y(x))| = 1, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega,$$

y

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m\chi_{y(\Omega)}) = 0, \quad \text{en } H^{-1}(\mathbf{R}^3).$$

y_0 es una función regular e inyectiva. Suponemos que todas las deformaciones admisibles y son invertibles, y sea $\tilde{\Omega} = y_0(\Omega) = y(\Omega)$ la configuración física del cuerpo. Si hacemos el cambio de variables $z = y(x)$ podemos reescribir el funcional I como

$$I(m, y) = \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(m(z), \nabla y(y^{-1}(z)))|m(z)| dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Si cambiamos la notación y ponemos y en vez de y^{-1} , y consideramos la deformación y_0 definida en todo el espacio, el funcional puede ser reescrito de la siguiente manera

$$I(m, y) = \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{\varphi}(x, m(x), \nabla y(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda, A) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R}^3 \setminus \tilde{\Omega}, \lambda = 0, A = \nabla(y_0)^{-1}(x), \\ |\lambda|\varphi(\lambda, A^{-1}), & x \in \tilde{\Omega}, |\lambda| = \det(A) > 0, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Advertimos que $\tilde{\varphi}$ no es una función de Carathéodory.

De la misma manera que para el micromagnetismo, nos gustaría calcular explícitamente el funcional

$$I(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} I(m_j, y_j) : \{(m_j, \nabla y_j)\} \text{ genera } \nu \right\}.$$

En este caso debido a la interacción entre m y ∇y no somos capaces de calcular explícitamente $I(\nu)$. La dificultad está en el hecho de que como las medidas ν están generadas conjuntamente por los pares $(m_j, \nabla y_j)$, no podemos cambiar libremente la sucesión m_j . No obstante, en lo que realmente estamos interesados es en las sucesiones minimizantes para I , y por tanto nos basta con encontrar un funcional \tilde{I} tal que verifique las tres condiciones:

1. $I(\nu) \geq \tilde{I}(\nu)$, para toda $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$;
2. $I(\nu) = \tilde{I}(\nu)$, siempre que ν esté generada por una sucesión minimizante para I en \mathcal{A} ;
3. $I(\nu) = \tilde{I}(\nu)$, para todo minimizador de \tilde{I} en $\overline{\mathcal{A}}$.

\mathcal{A} representa el conjunto de pares (m, y) admisible para el problema y $\overline{\mathcal{A}}$ el conjunto de medidas parametrizadas generadas por sucesiones de pares admisibles. En estas condiciones es trivial que

$$\inf_{\mathcal{A}} I = \min_{\overline{\mathcal{A}}} \tilde{I};$$

así que el análisis del problema anterior de minimización puede realizarse a través de \tilde{I} . Aquí vamos a calcular explícitamente un funcional \tilde{I} verificando esas tres condiciones para el caso del funcional de la magnetostricción bajo ciertas hipótesis simplificadoras.

Supondremos que $\tilde{\varphi}$ puede ser descompuesta en dos términos de la siguiente manera

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda, A) = F(x, \lambda) + W(x, \lambda, A)$$

donde W es convexa en (λ, A) . Esta simplificación es habitual en las teorías lineales de magnetostricción [21, 30, 31]. Asumimos también que W y F verifican la regularidad y acotaciones habituales

$$c(|\lambda|^2 - 1) \leq F(x, \lambda) \leq C(|\lambda|^2 + 1),$$

$$c(|A|^2 + |\lambda|^2 - 1) \leq W(x, \lambda, A) \leq C(|A|^2 + |\lambda|^2 + 1),$$

con $c < C < 0$.

Sea ν la medida parametrizada generada por la sucesión $\{(m_j, \nabla y_j)\}$, gracias a la continuidad débil del operador solución de la ecuación $\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0$ y a la Proposición A.9 podemos decir

$$I(\nu) \geq \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda, A) dx \\ + \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} W(x, \lambda, A) d\nu_x(\lambda, A) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \lambda d\nu_x(\lambda, A), \quad \operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0.$$

Si ahora se define $\tilde{I}(\nu)$ como

$$\tilde{I}(\nu) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda, A) dx \\ + \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} W(x, \lambda, A) d\nu_x(\lambda, A) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

está claro que $I(\nu) \geq \tilde{I}(\nu)$. Como es habitual reducimos la ley no local

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0$$

a una ley local mediante la introducción del rotacional de una función potencial, es decir

$$m(x) = \nabla u(x) + \nabla \times v(x).$$

Proposición 5.4 Si $\{(m_j, \nabla y_j)\}$ es una sucesión minimizante para I y

$$\operatorname{div}(-\nabla u_j + m_j) = 0,$$

entonces $u_j \rightarrow u$ fuerte en $H^1(\Omega)$, donde $u \in H^1(\Omega)$.

La prueba de este resultado puede encontrarse en [61] para el modelo de magnetostricción en dimensión 2. En nuestra situación la prueba es idéntica. Ya podemos probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.5 Bajo las hipótesis introducidas anteriormente, si ν es una medida parametrizada generada por una sucesión $\{(m_j, y_j)\}$ minimizante para I entonces

$$I(\nu) = \tilde{I}(\nu) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda, A) dx$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} W(x, \lambda, A) d\nu_x(\lambda, A) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

donde

$$m(x) = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \lambda d\nu_x(\lambda, A), \quad \operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0.$$

Demostración.

Sean

$$m(x) = \nabla u(x) + \nabla \times v(x),$$

$$m_j(x) = \nabla u_j(x) + \nabla \times v_j(x).$$

Para cada $x \in \mathbf{R}^3$ definimos la medida de probabilidad

$$\langle \chi, \mu_x \rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \chi(\lambda - \nabla u(x), A) d\nu_x(\lambda, A).$$

Afirmamos que la familia $\mu = \{\mu_x\}_{x \in \mathbf{R}^3}$ está en las hipótesis del Teorema 5.2 y por tanto está generada por una sucesión de pares de campos con divergencia nula y gradientes (cambiamos el orden por adecuarnos al modelo). En efecto, es trivial que el primer momento de μ_x es $(\nabla \times v(x), \nabla y(x))$, que es el límite débil de la sucesión $\{(\nabla \times v_j(x), \nabla y_j(x))\}$. La condición de integrabilidad espacial también se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} |(\lambda, A)|^2 d\mu_x(\lambda, A) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} |(\lambda - \nabla u(x), A)|^2 d\nu_x(\lambda, A) dx < +\infty. \end{aligned}$$

Para probar la otra condición, sea $\chi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbf{R}$ una función RD-convexa con crecimiento cuadrático. Tenemos que probar que

$$\int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \chi(\lambda, A) d\mu_x(\lambda, A) \geq \chi(\nabla \times v(x), \nabla y(x)),$$

p.c.t. $x \in \mathbf{R}^3$. Ya que $u_j \rightarrow u$ fuerte en $H^1(\Omega)$ de acuerdo con la Proposición 5.4, no es difícil convencerse de que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} \xi(x) \chi(m_j(x) - \nabla u(x), \nabla y_j(x)) dx \geq \int_{\mathbf{R}^3} \xi(x) \chi(\nabla \times v(x), \nabla y(x)) dx$$

donde ξ es cualquier función medible no negativa. De la arbitrariedad de ξ , del hecho de que χ tiene crecimiento cuadrático y de las propiedades de las medidas parametrizadas es claro que

$$\int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \chi(\lambda - \nabla u(x), A) d\nu_x(\lambda, A) \geq \chi(\nabla \times v(x), \nabla y(x)).$$

Según lo anterior podemos afirmar que existe una sucesión $\{(\tilde{v}_j, \tilde{y}_j)\}$ acotada en $H^1(\Omega; \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$ tal que $\{(\nabla \times \tilde{v}_j, \nabla \tilde{y}_j)\}$ genera μ . El resto de la prueba sigue la línea del Teorema 4.12. ■

Para completar este estudio necesitamos probar que $I(\nu) = \tilde{I}(\nu)$, siempre que ν es un minimizador para \tilde{I} . La prueba está hecha en [61] para el caso en dimensión 2. Para el caso en dimensión 3 la prueba es análoga.

5.6 Relajación en optimización estructural

En [63] se analiza un problema general de optimización estructural a través de técnicas variacionales. Este análisis se lleva a cabo en dimensión dos y, una vez más, se recurre a la utilización adecuada de funciones potenciales para campos con divergencia nula. Mediante estas ideas se obtienen conclusiones muy relevantes para problemas de optimización estructural y diseño óptimo en una gran generalidad. Como en los casos presentados anteriormente, para poder extender las conclusiones de [63] al caso tridimensional necesitamos recurrir a los resultados de la Sección 5.2. Este es el objetivo de esta sección.

Consideremos un problema de optimización estructural general, donde n materiales elásticos, no lineales y no homogéneos han de ser mezclados en proporciones θ_i , $\sum_i \theta_i = 1$, de manera que minimicen el coste

$$I(\chi) = \int_{\Omega} \psi(x, \chi(x), u(x), \nabla u(x)) dx,$$

donde χ es un vector de funciones características que forman una partición de la unidad de Ω

$$\sum_i \chi_i(x) = \chi_{\Omega}(x), \quad \int_{\Omega} \chi_i(x) dx = |\Omega| \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Suponemos que $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es un dominio regular, acotado y simplemente conexo. El vector u es la configuración de equilibrio cuando la parte de Ω donde $\chi_i = 1$ está ocupada por el i -ésimo material. Es decir, si $T_i(x, F)$ representa la función de respuesta del i -ésimo material, y

$$T(x, F) = \sum_i \chi_i(x) T_i(x, F)$$

representa la función de respuesta del compuesto, entonces u viene determinada por ser solución del sistema

$$-\operatorname{div}[T(x, \nabla u(x))] = P(x), \quad \text{en } \Omega,$$

$$T(x, \nabla u(x))\eta = G(x), \text{ sobre } \Gamma_1, \quad u(x) = u_0(x), \text{ sobre } \Gamma_0,$$

P , G , u_0 son datos del problema y representan respectivamente la densidad de fuerzas sobre el cuerpo, la densidad de fuerzas superficiales sobre $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ y una condición de frontera sobre $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$. η es la normal exterior a Γ . Asumiremos que la existencia de configuraciones de equilibrio está garantizada. Una situación típica es la del caso de materiales hiperelásticos, en la que las funciones de respuestas T_i no son más que las “derivadas” de las densidades de energía de los materiales, y estas densidades son funciones policonvexas [5, 18, 62].

Sea una función w tal que

$$-\operatorname{div}(w(x)) = P(x) \quad \text{en } \Omega.$$

Por ejemplo, w podría ser el gradiente de la solución de la ecuación de Poisson

$$-\Delta g(x) = P(x) \quad \text{en } \Omega, \quad g = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de equilibrio para uno de los compuestos es

$$-\operatorname{div}[T(x, \nabla u(x))] = P(x), \quad \text{en } \Omega,$$

$$T(x, \nabla u(x))\eta = G(x), \text{ sobre } \Gamma_1, \quad u(x) = u_0(x), \text{ sobre } \Gamma_0,$$

podemos asumir la existencia de un campo vectorial v tal que

$$T(x, \nabla u(x)) = w(x) + \nabla \times v(x).$$

Esta identificación de la ley no local permite la siguiente reinterpretación del problema de optimización. Teniendo en cuenta la naturaleza de las funciones características podemos escribir el funcional coste como

$$I(\chi) = \int_{\Omega} \sum_i \chi_i(x) \psi_i(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx; \quad (5.5)$$

así, podemos definir una nueva densidad de coste

$$\psi : \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \times (\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

($m \in \{1, 2, 3\}$) como

$$\psi(x, U, F) = \inf \{ \psi_i(x, U^{(1)}, F^{(1)}) : T_i(x, F^{(1)}) = w(x) + F^{(2)} \},$$

y $\psi = +\infty$ cuando ninguno de los índices i es tal que $T_i(x, F^{(1)}) = w(x) + F^{(2)}$. Aquí $F = (F^{(1)}, F^{(2)})$ representa un par de matrices. Usaremos F para representar

pares de matrices y matrices simples. En cada situación debe quedar claro qué representa F . Ahora es trivial comprobar que el funcional (5.5) es igual a

$$E(U) = \int_{\Omega} \psi(x, U(x), (\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x))) dx,$$

donde $U : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m}$ verifica

$$U^{(1)} = u_0 \text{ en } \Gamma_0, \quad \nabla \times U^{(2)} \cdot \eta = G(x) - w(x) \cdot \eta \text{ en } \Gamma_1.$$

Debemos también tener en cuenta la condición sobre las fracciones de volumen que debe ocupar cada material. Si llamamos

$$\varphi_i(x, U, F) = 1, \quad \text{si } \psi(x, U, F) = \psi_i(x, U^{(1)}, F^{(1)}),$$

y $\varphi_i = +\infty$ en caso contrario, nuestro problema de optimización se reinterpreta mediante la búsqueda de minimizadores de $E(U)$ bajo la condición

$$\int_{\Omega} \varphi_i(x, U, F) dx = \theta_i |\Omega|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Hemos reformulado nuestro problema de optimización en forma de un problema del Cálculo de Variaciones sujeto a una condición integral. En este problema variacional interviene un gradiente y una función con divergencia nula. Aquí nos preocuparemos de la relajación de este problema. Debido a la condición integral, en el análisis de este problema recurrimos al concepto de “cuasiconvexidad restringida”. Este concepto fue introducido en [64] en el contexto de problemas de diseño óptimo. En el siguiente apartado de esta sección introduciremos este concepto en un marco más abstracto y analizaremos la relajación. Por simplicidad supondremos en el resto del capítulo que para la ecuación de equilibrio tenemos una condición de frontera global de tipo Dirichlet, $u = u_0$ en $\partial\Omega$.

5.6.1 Cuasiconvexidad restringida. Relajación

Consideremos el problema variacional siguiente

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x)) dx : u \in H^1(\Omega), u_1 - u_0 \in H_0^1(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x)) dx = |\Omega| t_0 \right\}, \quad (5.6)$$

donde

$$\psi : \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \times (\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

$$\varphi : \Omega \times (\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \rightarrow (\mathbf{R}^*)^n,$$

son funciones de Carathéodory verificando las acotaciones

$$c(|(F_1, F_2)|^2 - 1) \leq \psi(x, u_1, u_2, F_1, F_2) \leq C(|(F_1, F_2)|^2 + 1),$$

$$|\varphi(x, F_1, F_2)| \leq M,$$

donde $0 < c < C$, $M > 0$ y $t_0 \in \mathbf{R}^n$ son constantes dadas. Las densidades que aparecen en la reformulación del problema de optimización estructural no verifican la hipótesis de ser funciones de Carathéodory. En el siguiente apartado analizaremos esta dificultad.

Pretendemos estudiar una relajación de ese problema. Como ya hemos comentado cuando se trata de estudiar problemas variacionales sujetos a condiciones integrales el concepto que juega un papel fundamental es el de cuasiconvexidad restringida [63, 64]. En nuestro caso quizás sería más adecuado el nombre RD-convexidad restringida. Introduciremos este concepto directamente en el caso particular del problema (5.6). Para ello sea la envoltura

$$\Psi : \Omega \times (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \times (\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

definida por

$$\Psi(x, u, F_1, F_2, t) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \psi(x, u, F_1 + \nabla v_1(x), F_2 + \nabla \times v_2(x)) dx : \right. \\ \left. (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \varphi(x, F_1 + \nabla v_1(x), F_2 + \nabla \times v_2(x)) dx = t|\Omega| \right\}. \quad (5.7)$$

Procederemos en dos pasos. Primero veremos la equivalencia del problema variacional (5.6) con el problema variacional

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \Psi(x, u(x), \nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x), t(x)) dx : u \in H^1(\Omega), \right. \\ \left. u_1 - u_0 \in H_0^1(\Omega), \|t\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \int_{\Omega} t(x) dx = t_0|\Omega| \right\}, \quad (5.8)$$

probando que ambos ínfimos coinciden. El segundo paso consiste en probar que existen minimizadores para este último problema variacional. Esto se consigue simplemente probando la convexidad conjunta en (F, t) de Ψ y usando resultados conocidos. El análisis de problemas variacionales donde el integrando del funcional depende de parámetros adicionales (en este caso t) ha sido realizado en un marco abstracto en [22], por tanto nos basaremos en las conclusiones de ese trabajo para

probar la existencia de minimizadores para el problema (5.8). El análisis que sigue está basado en los resultados que conocemos sobre medidas de Young generadas por sucesiones de pares de gradientes y campos con divergencia nula o rotacionales.

Necesitamos la siguiente notación. Dado un par $(u_0, t) \in H^1 \times \mathbf{R}^n$, sea $\mathcal{A}(u_0, t)$ el conjunto de las medidas de Young, $\nu = \{\nu_y\}_{y \in \Omega}$, generadas por sucesiones de pares de gradientes y rotacionales tales que:

$$\text{sop}(\nu_y) \subset \mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m},$$

existe $v = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m})$ tal que

$$v_1 - u_0 \in H_0^1 \text{ si } u_0 \in \mathbf{R}^m, \text{ o } v - u_0 \in H_0^1 \text{ si } u_0 \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m},$$

$$(\nabla v_1(y), \nabla \times v_2(y)) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} (A_1, A_2) d\nu_y(A_1, A_2),$$

y

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \varphi(x, A_1, A_2) d\nu_y(A_1, A_2) dy = t|\Omega|.$$

Lema 5.6 *Los ínfimos (5.6) y (5.7) son iguales, respectivamente, a*

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u_1(x), u_2(x), A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2) dx : \nu \in \mathcal{A}(u_0, t_0), \right.$$

$$\left. (\nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x)) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} (A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2) \right\}, \quad (5.9)$$

y

$$\inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u_1, u_2, A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2) dx : \nu \in \mathcal{A}(L_F, t) \right\}, \quad (5.10)$$

donde L_F es una función afín con gradiente F . En particular se tiene

$$\Psi(x, u, F_1, F_2, t) = \min \left\{ \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\nu(A_1, A_2) : \right.$$

$$\left. \nu \in \mathcal{A}(L_F, t) \text{ homogénea} \right\}.$$

Demostración.

La prueba de la primera parte del lema depende de las acotaciones asumidas sobre las densidades de energía ψ y φ , y es estándar [59]. La última parte del lema se obtiene mediante un argumento típico de homogeneización. Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega} \in$

$\mathcal{A}(L_F, t)$. Existe una sucesión (v_1, v_2) acotada en H^1 tal que $(\nabla v_1, \nabla \times v_2)$ genera ν . Sea $\mu = \{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ la medida parametrizada gradiente generada por $(\nabla v_1, \nabla v_2)$. Sabemos que podemos identificar ν_x de la siguiente manera

$$\nu_x = \hat{T} \circ \mu_x,$$

donde \hat{T} es la aplicación lineal que verifica $\hat{T}(\nabla v_1, \nabla v_2) = (\nabla v_1, \nabla \times v_2)$. Aplicando el resultado de homogeneización conocido para medidas parametrizadas gradientes [59] tenemos que la medida $\bar{\mu}$ dada por

$$\langle \varphi, \bar{\mu} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \varphi(A, B) d\mu_x(A, B) dx$$

es una medida parametrizada gradiente homogénea. Si ahora consideramos la medida $\bar{\nu}$ dada por

$$\langle \varphi, \bar{\nu} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \varphi(A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2) dx,$$

es fácil comprobar que

$$\bar{\nu} = \hat{T} \circ \bar{\mu},$$

con lo que $\bar{\nu}$ es una medida parametrizada generada por una sucesión de gradientes y campos con divergencia nula. El resto de la demostración es directa ya que $\bar{\nu} \in \mathcal{A}(L_F, t)$. ■

Teorema 5.7 *Los ínfimos (5.6) y (5.7) son iguales. En consecuencia, aplicando el Lema 5.6, los ínfimos (5.6) y (5.8) son también iguales.*

Demostración.

Denotemos \tilde{m} y m los ínfimos (5.6) y (5.7) respectivamente. Sea

$$\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega} \in \mathcal{A}(u_0, t_0),$$

entonces p.c.t. $x \in \Omega$ se tiene que ν_x es homogénea y

$$\nu_x \in \mathcal{A}(L_{(\nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x))}, t(x))$$

(este resultado de localización se obtiene a partir del correspondiente resultado para medidas gradientes [59] razonando con la identificación de medidas con divergencia nula como imagen de medidas gradientes por \hat{T}), donde

$$(\nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x)) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} (A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2),$$

$$t(x) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \varphi(x, A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2).$$

Es trivial de (5.11) que $\tilde{m} \leq m$.

Veamos la otra desigualdad. Dados (u, t) tal que

$$u \in H^1, u_1 - u_0 \in H_0^1, \int_{\Omega} t(x) dx = t_0,$$

por el Lema 5.6 podemos escribir

$$\Psi(x, u(x), \nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x), t(x)) = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\nu^x(A_1, A_2),$$

donde $\nu^x \in \mathcal{A}(L(\nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x)), t(x))$ homogénea. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi(x, u(x), \nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x), t(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\nu^x(A_1, A_2) dx. \end{aligned}$$

Si probamos que $\nu = \{\nu^x\}_{x \in \Omega} \in \mathcal{A}(u_0, t_0)$ habremos terminado. Pero esto es inmediato a partir de la caracterización de las medidas parametrizadas generadas por sucesiones de pares de gradientes y campos con divergencia nula (Teorema 5.2). ■

Teorema 5.8 *La envoltura Ψ verifica la propiedad de convexidad conjunta, i.e.,*

$$\Psi(x, u, F_1, F_2, \theta) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Psi(x, u, F_1 + \nabla v_1(x), F_2 + \nabla \times v_2(x), \theta + t(x)) dx,$$

para todas $v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{3 \times m})$ y toda $t \in L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n)$ con valor medio nulo.

Demostración.

Por el Lema 5.6, p.c.t. $x \in \Omega$ podemos encontrar una medida de probabilidad ν^x tal que

$$\begin{aligned} & \Psi(x, u, F_1 + \nabla v_1(x), F_2 + \nabla \times v_2(x), \theta + t(x)) \\ &= \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\nu^x(A_1, A_2). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\nu = \{\nu^x\}_{x \in \Omega}$ es una medida parametrizada cuya medida promedio, $\bar{\nu}$, pertenece a $\mathcal{A}(L(F_1, F_2), \theta)$ y tal que

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Psi(x, u, F_1 + \nabla v_1(x), F_2 + \nabla \times v_2(x), \theta + t(x)) dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\nu^x(A_1, A_2) dx \\ & = \int_{\mathbf{R}^{3 \times m} \times \mathbf{R}^{3 \times m}} \psi(x, u, A_1, A_2) d\bar{\nu}(A_1, A_2). \end{aligned}$$

Por (5.11) hemos terminado la prueba. ■

Teorema 5.9 *En las condiciones anteriores, el problema variacional (5.8) admite solución.*

Demostración.

Por definición, están claras las desigualdades

$$RD\psi(x, u, F_1, F_2) \leq \Psi(x, u, F_1, F_2, t) \leq \psi(x, u, F_1, F_2).$$

Esto implica, teniendo en cuenta que $RD\psi$ es el supremo de las funciones RD-convexas menores o iguales a ψ , las siguientes acotaciones sobre Ψ

$$c(|F_1|^2 + |F_2|^2 - 1) \leq \Psi(x, u, F_1, F_2, t) \leq C(|F_1|^2 + |F_2|^2 + 1), \quad 0 < c < C.$$

Consideremos la función $\tilde{\Psi}$ dada por

$$\hat{\Psi}(x, u, F, Y, t) = \Psi(x, u, F, T(Y), t),$$

donde $Y \in \mathbf{R}^{\{3 \times 3\} \times m}$. Gracias a los resultados de [22], y teniendo en cuenta que los potenciales se pueden elegir adecuadamente para que la norma del potencial acote a la norma de la función entera, el problema

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \hat{\Psi}(x, u(x), \nabla u(x), t(x)) dx : u \in H^1(\Omega), \right.$$

$$\left. u_1 - u_0 \in H_0^1(\Omega), \|t\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \int_{\Omega} t(x) dx = t_0 |\Omega| \right\},$$

tiene solución, con lo que hemos terminado la demostración. ■

Nótese que si (u_1, u_2, t) es una solución del problema relajado (5.8) entonces somos capaces, siguiendo el razonamiento de la prueba del Teorema 5.9, de construir una solución del problema generalizado (5.9). Una tal solución sería la medida parametrizada $\nu = \{\nu^x\}_{x \in \Omega}$ con ν^x solución del problema (5.11) para $(F, t) = (\nabla u_1(x), \nabla \times u_2(x), t(x))$. Es por esto que la envoltura Ψ codifica de alguna manera el comportamiento oscilatorio de las sucesiones minimizantes del problema original, es decir, las soluciones óptimas de (5.8) equivalen en algún sentido a sucesiones minimizantes para el problema de optimización (5.6)

5.6.2 Optimización estructural

Para aplicar los resultados de la sección precedente al contexto de la optimización estructural encontramos la dificultad de que las densidades φ y ψ no son funciones de Carathéodory verificando las acotaciones requeridas. En la última sección del Capítulo 3 hemos discutido esta cuestión largamente en el contexto particular del diseño óptimo para el caso bidimensional. También en los dos trabajos [63, 64] se ha analizado esa dificultad desde una perspectiva práctica. Teniendo en cuenta las conclusiones del capítulo antes mencionado, a pesar de que no se verifica el Lema 5.6, desde la perspectiva aplicada de los problemas de optimización estructural tenemos claro que estamos interesados en los ínfimos (5.9) y (5.10). El resto de los resultados sí que se verifican debido al hecho de que las densidades anteriores son funciones de Carathéodory y verifican las acotaciones en el conjunto donde son finitas. En particular, la clave de nuestro análisis es el cálculo y la comprensión de la densidad de energía relajada Ψ , tanto numéricamente como analíticamente. Para continuar debemos incorporar una restricción sobre el soporte de las medidas contenidas en $\mathcal{A}(u_0, t)$. Así, si

$$\begin{aligned} K(x) &= \{F \in \mathbf{M}^{3 \times m} \times \mathbf{M}^{3 \times m} : \psi(x, U, F) < +\infty\} \\ &= \{F \in \mathbf{M}^{3 \times m} \times \mathbf{M}^{3 \times m} : \varphi(x, U, F) < +\infty\}, \end{aligned}$$

debemos incorporar en la definición de $\mathcal{A}(u_0, t)$ la condición

$$\text{sop}(\nu_x) \subset K(x),$$

p.c.t. $x \in \Omega$.

Finalmente analizaremos ejemplos de la formulación discutida anteriormente en dos situaciones típicas: uno en el caso lineal con dos constituyentes y la misma densidad de coste que no depende de las derivadas del estado, y otro en el caso no lineal con dos constituyentes hiperelásticos y homogéneos y una densidad de coste que depende de las derivadas del estado. En ambos casos suponemos una condición global de frontera de tipo Dirichlet y que no actúan fuerzas sobre el cuerpo.

Para el caso lineal tomamos las densidades de coste $\psi_i(u) = \psi_0(u)$, $i = 1, 2$, la misma para los dos materiales lineales y homogéneos con funciones de respuesta $T_i(F)$ lineal en F . La densidad de energía está entonces definida para $(U, F) \in (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3 \times 3}) \times (\mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^{3 \times 3})$ como

$$\psi(U, F) = \psi_0(U^{(1)}) \quad \text{si} \quad T_i(F^{(1)}) = F^{(2)}, \quad i = 1, 2,$$

y $\psi = +\infty$ en caso contrario. La densidad φ se define como

$$\varphi(F) = 1 \quad \text{si} \quad T_1(F^{(1)}) = F^{(2)},$$

y $\varphi = +\infty$ en caso contrario. El problema variacional equivalente al problema de optimización estructural sería

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \psi(U(x), (\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x))) dx : U^{(1)} = u_0, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \varphi(\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x)) dx = \theta |\Omega| \right\}. \quad (5.12)$$

La densidad de energía relajada en términos de medidas parametrizadas es

$$\Psi(U, F, t) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \psi(U, (A_1, A_2)) d\nu(A_1, A_2) : \right. \\ \left. F = \int_{\mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} (A_1, A_2) d\nu(A_1, A_2), \text{ sop}(\nu) \subset \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \nu(\Lambda_1) = t \right\},$$

donde

$$\Lambda_i = \{F = (F^{(1)}, F^{(2)}) : T_i F^{(1)} = F^{(2)}\}, \quad i = 1, 2.$$

El problema variacional

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \Psi(U(x), (\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x)), t(x)) dx : U^{(1)} \in u_0 + H_0^1(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\Omega} t(x) dx = \theta |\Omega| \right\}$$

es equivalente a (5.12). Observamos que para calcular la envoltura Ψ tenemos que minimizar las correspondientes integrales sobre medidas parametrizadas generadas por pares de gradientes y campos con divergencia nula con soporte contenido en la unión de dos variedades lineales y una proporción fijada de su masa contenida en cada variedad. Sería interesante analizar computacionalmente este problema, al menos reemplazando las medidas parametrizadas generadas por sucesiones de gradientes y rotacionales por laminados (o mejor dicho la imagen por \hat{T} de laminados). En el problema anterior no podemos garantizar la existencia de solución puesto que no se tienen las habituales condiciones de acotación.

Para el ejemplo no lineal tomamos la misma densidad de coste para cada material

$$\psi_0(F) = |F|^2, \quad F \in \mathbf{R}^{3 \times 3},$$

y como energías internas del material i

$$W_i(F) = |F|^2 + g_i(\det F),$$

donde g_i son funciones, diferenciables, convexas tales que $g_i(s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \rightarrow 0$, o $s \rightarrow +\infty$. En estas condiciones estas funciones son policonvexas ([5, 18, 62]) y por tanto, si tomamos como funciones de respuesta

$$T_i(x, F) = \frac{\partial}{\partial F} W_i(x, F),$$

$i = 1, 2$, tenemos garantizada la existencia de solución para la ecuación de equilibrio. Si ahora llamamos

$$\Lambda_i = \{F = (F^{(1)}, F^{(2)}) : 2F^{(1)} + g'_i(\det F^{(1)}) \text{adj} F^{(1)} = F^{(2)}\}, \quad i = 1, 2,$$

una variedad no lineal en el espacio de pares de matrices, entonces

$$\psi(F) = |F^{(1)}|^2,$$

cuando $F \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, y $\psi = +\infty$ en caso contrario. De la misma manera definimos

$$\varphi(F) = 1 \quad \text{si } F \in \Lambda_1,$$

y $\varphi = +\infty$ en caso contrario. El problema variacional equivalente al problema de optimización estructural es

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \psi(\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x)) dx : U^{(1)} = u_0 \text{ en } \partial\Omega, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \varphi(\nabla U^{(1)}, \nabla \times U^{(2)}(x)) dx = \theta |\Omega| \right\}. \quad (5.13)$$

La energía de densidad relajada en términos de medidas de Young se escribe como

$$\Psi(F, t) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} \psi(A_1, A_2) d\nu(A_1, A_2) : \right. \\ \left. F = \int_{\mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^{3 \times 3}} (A_1, A_2) d\nu_x(A_1, A_2), \text{ sop}(\nu) \subset \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \nu(\Lambda_1) = t \right\}.$$

Finalmente, el problema variacional

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \Psi(\nabla U^{(1)}(x), \nabla \times U^{(2)}(x)) dx : U^{(1)} = u_0 \text{ en } \partial\Omega, \int_{\Omega} t(x) dx = \theta |\Omega| \right\}$$

es equivalente a (5.13).

La gran diferencia que existe entre los dos ejemplos expuestos es el carácter lineal y no lineal respectivamente de las variedades Λ_i .

Apéndice A

Resultados generales

El propósito de este apéndice es fundamentalmente el de enunciar de la manera más breve y concisa posible algunos resultados clásicos del Cálculo de Variaciones y otros de carácter técnico que hemos usado o invocado a lo largo de la memoria. No obstante, intentaremos dar una visión global sobre algunas de las cuestiones más importantes del Cálculo de Variaciones: la semicontinuidad inferior débil, la existencia, la relajación, problemas generalizados, etc.. Todos los resultados que aparecen aquí son muy conocidos, y las pruebas de todos ellos pueden encontrarse en [59]. Para algunos de los resultados que siguen daremos otras referencias particulares.

A.1 El método directo

Los problemas del Cálculo de Variaciones consisten en encontrar minimizadores de un determinado funcional en forma de integral, que depende de funciones en un espacio de dimensión infinita. Clásicamente, el problema de determinar la existencia de minimizadores en esos problemas variacionales ha sido tratado por dos caminos: el método indirecto, basado en la ecuación de Euler-Lagrange, y el método directo. Mediante el estudio de la ecuación de Euler-Lagrange se buscan puntos que anulen la “derivada” del funcional, de manera análoga a como se hace con funciones reales de variable real. Esos puntos que anulan esa ecuación son llamados extremales y son los candidatos a minimizadores. El inconveniente principal de este método está en que resolver esta ecuación no siempre es sencillo, pues es una ecuación (o sistema) diferencial ordinaria o en derivadas parciales, que puede ser no lineal. Además, incluso en el caso de poder determinar los extremales del problema, puede ser muy difícil decidir cuáles de ellos son efectivamente minimizadores. Así pues, ante estas dificultades, el método directo es el camino más usual para probar la existencia de

minimizadores de un determinado problema variacional.

Este método está basado en la aplicación del famoso resultado abstracto:

Teorema A.1 *Consideremos el siguiente problema variacional*

$$\inf \{I(u) : u \in \mathcal{A}\}$$

donde:

- (i) \mathcal{A} es un cerrado, convexo de un espacio de Banach reflexivo X ;
- (ii) I es coercitivo, es decir, $\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} I(u) = +\infty$;
- (iii) I es débilmente semicontinuo inferiormente en X , i.e.,

$$u_j \rightharpoonup u \text{ débil en } X \Rightarrow I(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(u_j);$$

- (iv) Existe $u \in X$, tal que $I(u) < +\infty$.

Entonces existe $u_0 \in \mathcal{A}$, con $I(u_0) \leq I(u)$ para todo $u \in \mathcal{A}$.

Aquí nos centramos en el problema de la existencia de minimizadores para un funcional del estilo

$$I(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x)) dx \quad (\text{A.1})$$

donde $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, con $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un abierto, acotado y regular, $1 < p < \infty$ y $\varphi : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ una función de Carathéodory, esto es, medible en la variable x y continua en $(u, \nabla u)$, que habitualmente verifica ciertas propiedades de acotación y coercitivas. Este problema típicamente incorpora condiciones de frontera de tipo Dirichlet; no obstante, se pueden considerar otro tipo de condiciones de frontera siempre que sean invariantes con respecto a la convergencia débil.

En este caso, si intentamos aplicar el método directo para probar la existencia de solución del problema

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right\} \quad (\text{A.2})$$

nos encontramos que todas las hipótesis del Teorema A.1 se verifican trivialmente salvo (iii), es decir, la s.c.i.d. del funcional I . Esta es la propiedad difícil de verificar en orden a aplicar el método directo y está ligada a las propiedades de convexidad del integrando φ del funcional, como veremos en la siguiente sección.

A.2 Semicontinuidad inferior débil. Existencia de minimizadores

Con el objetivo de entender cuándo el funcional I es débilmente semicontinuo inferiormente (d.s.c.i.) aparecen, de modo natural, condiciones de convexidad sobre el integrando φ . Necesitamos introducir una noción de convexidad más amplia que la convexidad habitual de funciones: la cuasiconvexidad.

Definición A.1 Sea la función $\varphi : \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$. Decimos que φ es cuasiconvexa si verifica

$$\varphi(Y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi(Y + \nabla u(x)) dx,$$

para todo $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, para todo $Y \in \mathbf{R}^{m \times N}$ y para todo dominio Ω .

Este concepto fue introducido por Morrey a mediados de siglo [48]. Se puede comprobar que en el caso escalar, es decir, cuando $N = 1$ ó $m = 1$ una función es cuasiconvexa si y sólo si es convexa. Los siguientes resultados establecen la equivalencia de este concepto con la s.c.i.d. de I . El primero de ellos se refiere al caso vectorial ($N, m > 1$).

Teorema A.2 Supongamos $N, m > 1$. Sea $1 < p < \infty$ y sea $\varphi : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de Carathéodory tal que

$$c \leq \varphi(x, u, A) \leq h(x, u)(1 + |A|^p),$$

donde $h(x, u) \in L_{loc}^{\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^m)$ es continua en su segunda variable. El funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

es débilmente semicontinuo inferiormente en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ si y sólo si $\varphi(x_0, u_0, \cdot)$ es cuasiconvexa para todo $x_0 \in \Omega$ y todo $u_0 \in \mathbf{R}^m$.

En el caso escalar tenemos el siguiente resultado, algo distinto del anterior.

Teorema A.3 Sea $m = 1$ (respectivamente $N = 1$), y sea $\varphi : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{1 \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ (respectivamente $\varphi : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m \times 1} \rightarrow \mathbf{R}$) una función de Carathéodory. El funcional I es d.s.c.i. con respecto a la convergencia débil en $W^{1,p}(\Omega)$ (respectivamente $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$), con $1 \leq p \leq \infty$, si y sólo si $\varphi(x_0, u_0, \cdot)$ es convexa para todo $x_0 \in \Omega$ y todo $u_0 \in \mathbf{R}^m$.

Una vez determinado cuándo se tiene la semicontinuidad inferior débil del funcional I estamos en situación de poder aplicar el método directo para determinar la existencia de minimizadores para el problema (A.2). En los teoremas siguientes establecemos los resultados para el caso vectorial y escalar respectivamente.

Teorema A.4 Sean $m > 1$ y $N > 1$. Si φ es una función de Carathéodory, cuasiconvexa en la variable gradiente tal que

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi(x, u, A) \leq h(x, u)(1 + |A|^p), \quad c > 0, \quad p > 1$$

donde $h \in L_{loc}^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^m)$ es continua en la segunda variable, entonces el problema variacional (A.2) admite al menos un minimizador.

Teorema A.5 Sea $m = 1$ ó $N = 1$. Sea φ una función de Carathéodory, convexa en la variable gradiente tal que

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi(x, u, A), \quad c > 0, \quad p > 1$$

e.c.t. $x \in \Omega$ y todo $u \in \mathbf{R}^m$. Entonces el problema variacional (A.2) admite al menos un minimizador.

En la práctica la condición de cuasiconvexidad es difícil de comprobar debido a su carácter no local [37], salvo en el caso escalar en el que coincide con la convexidad habitual. Por tanto, es interesante buscar condiciones más fuertes o más débiles que la cuasiconvexidad. Una condición más fuerte, que fue introducida por Morrey [49] y utilizada por Ball en el contexto de problemas realistas en elasticidad no lineal [5], es la policonvexidad.

Definición A.2 Diremos que $\varphi : \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ es policonvexa si

$$\varphi(A) = g(M(A)),$$

para toda matriz A , donde g es una función convexa y $M(A)$ es el vector formado por todos los menores de A dados en algún orden.

Esta condición, que puede parecer extraña, está motivada por el hecho de que los menores son los únicos integrandos que dan lugar a funcionales débilmente continuos en $W^{1,\infty}$ [20]. Esta propiedad junto con la convexidad de g implica la cuasiconvexidad de φ .

Por otro lado, una importante condición necesaria puede ser obtenida mediante el siguiente argumento. Sean $A_1, A_2 \in \mathbf{R}^{m \times N}$ dos matrices tales que $\text{rango}(A_1 -$

$A_2) \leq 1$, y sea $t \in (0, 1)$. Es claro que existe un vector $a \in \mathbf{R}^m$ y un vector unitario $n \in \mathbf{R}^N$ tales que

$$A_1 - A_2 = a \otimes n = an^T.$$

Consideremos la sucesión de gradientes

$$\begin{aligned} \nabla u_j(x) &= A_2 + \chi_t(jx \cdot n)a \otimes n, \\ u_j(x) &= A_2x + \int_0^{jx \cdot n} \chi_t(s) ds a, \end{aligned}$$

donde χ_t es la función característica de $(0, t)$ en $(0, 1)$ extendida por periodicidad a todo \mathbf{R} . La sucesión de gradientes $\{\nabla u_j\}$ toma justamente los valores A_1 y A_2 en proporciones t y $1 - t$. No es difícil comprobar que

$$u_j \rightharpoonup u_A, \text{ débil en } W^{1,\infty},$$

donde $u_A(x) = A \cdot x$, con $A = tA_1 + (1 - t)A_2$. Si ahora tenemos una función $\varphi : \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ cuasiconvexa y verificando las condiciones de acotación habituales, entonces el funcional

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) dx$$

es d.s.c.i. y aplicando esto a la sucesión $\{u_j\}$ llegamos a que

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u_A(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_j(x)) dx,$$

de donde tenemos la desigualdad

$$\varphi(A) \leq t\varphi(A_1) + (1 - t)\varphi(A_2).$$

La discusión anterior motiva la siguiente definición.

Definición A.3 Diremos que $\varphi : \mathbf{R}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ es convexa de rango uno si

$$\varphi(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2) \leq \lambda\varphi(A_1) + (1 - \lambda)\varphi(A_2),$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$ y para todo par de matrices A_1, A_2 verificando $\text{rango}(A_1 - A_2) \leq 1$.

Por el razonamiento anterior es claro que esta condición es más débil que la cuasiconvexidad.

Podemos resumir los comentarios anteriores gráficamente en el siguiente diagrama

$$\varphi \text{ convexa} \Rightarrow \varphi \text{ policonvexa} \Rightarrow \varphi \text{ cuasiconvexa} \Rightarrow \varphi \text{ convexa de rango uno.}$$

Ninguno de las implicaciones recíprocas es cierta. Para contraejemplos y referencias en este sentido puede consultarse [20]. El recíproco de la última de las implicaciones es lo que se conoce como conjetura de Morrey [49, 48]. Recientemente Sverak demostró la falsedad de esta conjetura probando que la última de las implicaciones anteriores es falsa en el caso de matrices $\mathbf{R}^{3 \times 2}$, [74]. El caso de matrices 2×2 continua abierto.

A.3 Problemas no convexos: relajación

Hemos visto en la sección precedente que los problemas de Cálculo de Variaciones en los que es posible aplicar el método directo son justamente aquellos en los que se verifica la cuasiconvexidad del integrando. A menudo aparecen en la Matemática Aplicada problemas variacionales en los que no se verifica esta propiedad, y por tanto, no es posible aplicar el método directo. Estos son los llamados problemas no convexos. En algunos de estos casos se puede probar la existencia de solución por métodos específicos para cada problema concreto. En otros la falta de cuasiconvexidad conduce a la no existencia de solución debido al comportamiento altamente oscilante que suelen presentar las sucesiones minimizantes. Es en estos casos en los que necesitamos hablar de relajación. En esta sección enunciamos un importante resultado de relajación que establece que el ínfimo de un determinado funcional no cambia si sustituimos el integrando por una determinada función cuasiconvexa. Para ello será necesario definir la envoltura cuasiconvexa o cuasiconvexificación de una función.

Definición A.4 *Llamamos cuasiconvexificación o envoltura cuasiconvexa de φ a la función dada por*

$$Q\varphi(Y) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi(Y + \nabla u(x)) dx : u \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right\},$$

para cada $Y \in \mathbf{R}^{m \times N}$. u_Y es la función afín $u_Y(x) = Y \cdot x$.

Esta definición tiene perfecto sentido puesto que se puede probar que no depende del dominio Ω . Está claro que φ es cuasiconvexa si y sólo si $Q\varphi(Y) = \varphi(Y)$, para toda matriz Y . Dos propiedades importantes de la cuasiconvexificación son las siguientes:

1. la cuasiconvexificación de una función es siempre una función cuasiconvexa;
2. $Q\varphi = \sup \{ \psi : \psi \leq \varphi, \psi \text{ cuasiconvexa} \}$.

El siguiente resultado es conocido como Teorema de Relajación y es debido a Dacorogna [20].

Teorema A.6 *Sea $\varphi : \mathbf{M}^{m \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua tal que*

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi(A) \leq C(1 + |A|^p), \quad 1 < p < +\infty, \quad 0 < c < C.$$

Entonces, para todo $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, los dos ínfimos

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) \, dx : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} Q\varphi(\nabla u(x)) \, dx : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right\} \quad (\text{A.4})$$

son iguales.

Al problema (A.4) lo llamamos problema relajado del problema (A.3). Se puede probar que si φ verifica las condiciones de coercitividad y acotación habituales, entonces $Q\varphi$ también las verifica y por tanto, según los Teorema A.4 y A.5, el problema relajado (A.4) tiene solución.

A.4 Una herramienta importante: las medidas parametrizadas

El propósito de esta sección es el de enunciar el Teorema Fundamental de las Medidas Parametrizadas, así como otros resultados relacionados, que constituyen una herramienta teórica en el estudio que sigue. En la referencia [59], puede encontrarse un estudio exhaustivo de las medidas parametrizadas y las medidas parametrizadas gradientes, de las que hablaremos en la siguiente sección.

Empezamos por el Teorema Fundamental, que es un profundo resultado de análisis no lineal y que nos permite representar el límite débil de la composición de una función con una sucesión débilmente convergente.

Teorema A.7 (Teorema Fundamental de Medidas Parametrizadas) *Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ medible y sean $z_j : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ funciones medibles tales que*

$$\sup_j \int_{\Omega} g(|z_j(x)|) \, dx < \infty,$$

donde $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ es una función continua, no decreciente y tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} g(t) = \infty$. Existe una subsucesión de $\{z_j\}$, que no renombramos, y una

familia de medidas de probabilidad, $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ que depende mediblemente¹ de x , y que llamamos la medida parametrizada asociada a la sucesión, con la propiedad de que si la sucesión $\{\psi(x, z_j(x))\}$ es débilmente convergente en $L^1(\Omega)$, cualquiera que sea la función de Carathéodory $\psi : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^*$, entonces su límite débil es la función

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda).$$

Tomando $g(t) = t^p$ o $g(t) = +\infty$, si $t > R$, podemos obtener medidas parametrizadas asociadas a sucesiones acotadas en L^p o L^∞ respectivamente. Se puede probar que si $B_R(x)$ denota la bola de radio R centrada en x , entonces para todo $E \subset \mathbf{R}^m$

$$\nu_x(E) = \lim_{R \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\{y \in B_R(x) : z_j(y) \in E\}|}{|B_R(x)|},$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

Una importante observación a tener en cuenta cuando necesitemos identificar la medida parametrizada asociada a una sucesión $\{z_j\}$ es que $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ está asociada $\{z_j\}$ si y sólo si

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi(x) \varphi(z_j(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx,$$

para todas ξ y φ pertenecientes a subespacios densos y numerables de $L^1(\Omega)$ y $C_0(\mathbf{R}^m)$ respectivamente.

Esta observación tiene relevancia en las situaciones siguientes, incluidas en la siguiente proposición.

Proposición A.8 Sean $\{z_j\}$ y $\{w_j\}$ dos sucesiones acotadas en $L^p(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Si se da alguna de las condiciones siguientes:

- (i) $|\{z_j \neq w_j\}| \rightarrow 0$;
- (ii) $\|z_j - w_j\|_{L^p} \rightarrow 0$,

entonces ambas sucesiones comparten la misma medida parametrizada.

El siguiente resultado es importante en orden a obtener propiedades de semi-continuidad inferior débil.

¹Esto significa que para toda φ continua, la aplicación $x \rightarrow \langle \nu_x, \varphi \rangle$ es medible.

Proposición A.9 Si $\{z_j\}$ es una sucesión de funciones con medida parametrizada asociada $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$, entonces

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E \psi(x, z_j(x)) dx \geq \int_E \int_{\mathbf{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx,$$

para toda ψ función de Carathéodory acotada inferiormente y para todo subconjunto $E \subset \Omega$ medible.

La proposición siguiente se refiere a cómo influye la convergencia fuerte en la medida parametrizada.

Proposición A.10 Sea $z_j = (u_j, v_j) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^m$ una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, tal que $\{u_j\}$ converge fuertemente a u , en $L^p(\Omega)$. Si $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ es la medida parametrizada asociada a $\{z_j\}$, entonces, es $\nu_x = \delta_{u(x)} \otimes \mu_x$, e.c.t. $x \in \Omega$, donde $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ es la medida parametrizada asociada a $\{v_j\}$.

A.5 Medidas parametrizadas gradientes. Problemas generalizados

Por medidas parametrizadas gradientes entendemos aquellas medidas parametrizadas generadas por los gradientes de sucesiones acotadas en $W^{1,p}$. Así decimos que una medida parametrizada es una medida parametrizada $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ si existe una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ cuyos gradientes generan la medida parametrizada (“generan” en el sentido del Teorema A.7). A una medida de probabilidad que además sea medida parametrizada $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ la llamamos medida parametrizada $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ homogénea. Las medidas parametrizadas gradientes tienen una gran importancia en el estudio de principios variacionales del tipo (A.1). Aquí enunciamos algunos resultados y hacemos algunos comentarios sobre un tipo de relajación en términos de medidas parametrizadas: los problemas generalizados.

Los dos resultados siguientes son de carácter técnico, aunque tienen interés es sí mismos.

Lema A.11 Sea $\{v_j\}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tal que $\{\nabla v_j\}$ genera la medida parametrizada $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$. Sea u el límite débil de $\{v_j\}$ en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Entonces existe una nueva sucesión $\{u_k\}$, acotada en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, tal que $\{\nabla u_k\}$ genera también ν y $u_k - u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, para todo k . Más aún si $p < \infty$ entonces $\{|\nabla v_j|^p\}$ es equiintegrable si y sólo si lo es $\{|\nabla u_k|^p\}$.

Lema A.12 Sea $\{v_j\}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Entonces existe otra sucesión $\{u_j\}$ de funciones Lipschitz tales que $\{|\nabla u_j|^p\}$ es equiintegrable y las dos sucesiones de gradientes, $\{\nabla u_j\}$ y $\{\nabla v_j\}$ tienen la misma medida parametrizada $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$.

Una caracterización completa de medidas de Young generadas por gradientes fue dada en [32, 33].

Teorema A.13 Sea $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una familia de medidas de probabilidad con soporte contenido en $\mathbf{R}^{m \times N}$. ν puede ser generada por una sucesión de gradientes $\{\nabla u_j\}$ de funciones $\{u_j\}$ en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ si y solo si

- (i) existe $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tal que $\nabla u(x) = \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} A d\nu_x(A)$, p.c.t. $x \in \Omega$;
- (ii) $\int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} |A|^p d\nu_x(A) dx < \infty$;
- (iii) desigualdad de Jensen:

$$\int_{\mathbf{R}^{m \times N}} \varphi(A) d\nu_x(A) \geq \varphi \left(\int_{\mathbf{R}^{m \times N}} A d\nu_x(A) \right),$$

para toda función φ cuasiconvexa con crecimiento polinomial de orden p .

En el caso escalar $\mathbf{R}^{m \times N}$ es justamente \mathbf{R}^N (ó \mathbf{R}^m) y la condición (iii) es la desigualdad clásica de Jensen, que se verifica para toda medida de probabilidad y por tanto no supone ninguna restricción.

A partir de este resultado pueden demostrarse los resultados anteriores de s.c.i.d. y relajación. Esto da muestra de la importancia que este resultado tiene. Se puede probar que

$$Q\varphi(Y) = \left\{ \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} \varphi(A) d\nu(A) : \nu \text{ med. grad. hom.}, \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} A d\nu(A) = Y \right\}$$

de donde tenemos que φ es cuasiconvexa si y sólo si

$$\varphi(Y) \leq \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} \varphi(A) d\nu(A),$$

para toda medida gradiente homogénea ν con primer momento Y .

A continuación vamos a presentar de manera breve otro tipo de relajación distinto del que hemos expuesto anteriormente. Consideremos el siguiente principio variacional

$$I(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad u \in u_0 + W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m),$$

donde φ no tiene por qué ser una función cuasiconvexa. En este caso el comportamiento típico de las sucesiones minimizantes es altamente oscilante, lo que nos lleva a hablar de medidas parametrizadas soluciones, ya que las medidas parametrizadas contienen información sobre las oscilaciones, y sobre las escalas en las que éstas se producen. Necesitamos asumir las acotaciones habituales para φ

$$c(|A|^p - 1) \leq \varphi(x, \lambda, A) \leq C(1 + |\lambda|^p + |A|^p), \quad 0 < c < C.$$

Nos gustaría admitir las medidas gradiente en el proceso de minimización. Para ello definimos la energía de la medida parametrizada μ como

$$\tilde{I}(\mu) = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} \varphi(x, u(x), A) d\mu_x(A) dx,$$

donde

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} A d\mu_x(A).$$

Nos planteamos el problema de minimizar \tilde{I} sobre la clase de las medidas $W^{1,p}$ generadas por sucesiones de gradientes que verifican la condición de frontera. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.14 *Existe una medida parametrizada admisible ν tal que*

$$\tilde{I}(\nu) = \inf \tilde{I}(\mu).$$

Es más, en las condiciones del Teorema A.6 se dan las igualdades

$$\inf I(u) = \min \tilde{I}(\mu) = \min \bar{I}(u),$$

donde \bar{I} es el funcional cuya densidad es la cuasiconverificación de φ . Más aún, la función $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ dada por

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbf{R}^{m \times N}} A d\nu_x(A),$$

minimiza el funcional \bar{I} .

Bibliografía

- [1] ALIBERT, J., & DACOROGNA, B. An example of quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.* 117 (1992), 155–166.
- [2] AMROUCHE, C., BERNARDI, C., DAUGE, M., & GIRAULT, V. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.* 21, 9 (1998), 823–864.
- [3] ARANDA, E. *Análisis de la Aproximación Numérica de Problemas Variacionales No Convexos*. Tesis, Universidad de Sevilla, 2000.
- [4] ARANDA, E., & PEDREGAL, P. On the computation of the rank-one convex hull. *SIAM J. Scient. Comp.* (en prensa), 2000.
- [5] BALL, J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 63 (1977), 337–403.
- [6] BARBER, D., & BROWN, B. Applied potential tomography. *J. Phys.E. Sci. Instr.* 17 (1984).
- [7] BELLIDO, J. C., & PEDREGAL, P., 2000. En preparación.
- [8] BELLIDO, J. C., & PEDREGAL, P. Optimal design via variational principles: the one-dimensional case. *J. Math. Pures et Appl.* (en prensa), 2000.
- [9] BELLIDO, J. C., & PEDREGAL, P. Structural design via variational principles: the two-dimensional case. Preprint, 2000.
- [10] BELLIDO, J. C., & PEDREGAL, P. Variational principles under divergence-free constraints. Preprint, 2000.
- [11] BENDSOE, M. *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer, 1995.

- [12] BHATTACHARYA, K., FIROOZY, N., JAMES, R., & KOHN, R. Restrictions on microstructure. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 124 (1994), 843–878.
- [13] BROWN, W. *Micromagnetics*. Wiley-Interscience, New York, 1963.
- [14] CABIB, E., & DAL MASO, G. On a class of optimum problems in structural design. *J. Opt. Theory Appl.* 56, 1 (1988), 39–65.
- [15] CASAS, E. Optimal control in coefficients of elliptic equations with state constraints. *Appl. Math. Opt.* 26 (1992), 21–37.
- [16] CESARI, L. *Optimization-Theory and Applications*. Springer-Verlag, 1983.
- [17] CHERCAEV, A., & KOHN, R. *Topics in the mathematical modelling of composites materials*. Birkhäuser, Boston, 1997. Edts.
- [18] CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity. Volume I, Three-Dimensional Elasticity*, vol. 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [19] DACOROGNA, B. *Weak continuity and weak lower semicontinuity for non-linear functionals*, vol. 922. Springer Lectures Notes, 1982.
- [20] DACOROGNA, B. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 1989.
- [21] DE SIMONE, A. Energy minimizers for large ferromagnetic bodies. *Arch. Rational Mech. Anal.* 125 (1993), 99–143.
- [22] FONSECA, I., KINDERLEHRER, D., & PEDREGAL, P. Energy functionals depending on elastic strain and chemical composition. *Cal. Var.* 2 (1994), 283–313.
- [23] FONSECA, I., & MÜLLER, S. \mathcal{A} -quasiconvexity, lower semicontinuity, and Young measures. *SIAM J. Math. Anal.* 30, 6 (1999), 1355–1390.
- [24] GILBARG, D., & TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, vol. 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [25] GIRAULT, V., & RAVIART, P. *Finite elements methods for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

- [26] JAMES, R., & KINDERLEHRER, D. Frustration in ferromagnetics materials. *Cont. Mech. Therm.* 2 (1990), 215–239.
- [27] JAMES, R., & KINDERLEHRER, D. A theory in magnetostriction with applications to TbDyFe₂. *Phil. Mag. B* 68 (1993), 237–274.
- [28] JAMES, R., & KINDERLEHRER, D. Magnetoelastic interactions. En *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 76 (1996), pp. 401–404.
- [29] JAMES, R., & MÜLLER, S. Internal variables and fine scale oscillations in micromagnetics. *Cont. Mech. Therm.* 6 (1994), 291–336.
- [30] JAMES, R., & WUTTIG, M. Alternative smart materials. En *SPIE Symposium on Mathematics and Control in Smart Structures* (1996), V. Varadan & J. Chandra, Eds., vol. 2715, pp. 420–426.
- [31] JAMES, R., & WUTTIG, M. Magnetostriction of martensite. *Phil. Mag. B* (en prensa), 1996.
- [32] KINDERLEHRER, D., & PEDREGAL, P. Characterizations of Young measures generated by gradients. *Arch. Rational Mech. Anal.* 115 (1991), 329–365.
- [33] KINDERLEHRER, D., & PEDREGAL, P. Gradient Young measures generated by sequences in sobolev spaces. *J. Geom. Anal.* 4 (1994), 59–90.
- [34] KOHN, R. The relaxation of a double-well energy. *Cont. Mech. Thermodyn.* 3 (1991), 193–236.
- [35] KOHN, R., & STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, I, II and III. *Com. Pure Appl. Math.* 34 (1986), 113–137, 139–182, 353–377.
- [36] KOHN, R., & VOGELIUS, M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Com. Pure Appl. Math.* 40 (1987), 745–777.
- [37] KRISTENSEN, J. On the non-locality of quasiconvexity. *Ann. IHP, Ana. non lin.* 16, 1 (1999), 1–13.
- [38] LI, X., & YONG, J. *Optimal control theory for infinite dimensional systems*. Systems and control: foundations and applications. Birkhäuser, 1995.
- [39] LIONS, J. L. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.

- [40] LIONS, J. L. *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [41] LIPTON, R., & VELO, A. Optimal design of gradient fields with applications to electrostatics. En *Nonlinear P.D.E. and their applications, College de France Seminar (1999)*, D. Cioranescu, F. Murat, & J. L. Lions, Eds., Chapman and Hall.
- [42] LURIE, K. Optimum control of conductivity of a fluid moving in a channel in a magnetic field. *P.M.M.* 28 (1964), 258–267.
- [43] LURIE, K. A., & CHERKAEV, A. V. Exact estimates of conductivity of composites formed by two isotropically conducting media taken in prescribed proportion. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A* 99 (1984), 71–87.
- [44] LURIE, K. A., & CHERKAEV, A. V. G-closure of a set of anisotropically conducting media in the two-dimensional case. *J. Optim. Theory Appl.* 42 (1984), 283–304.
- [45] LURIE, K. A., & CHERKAEV, A. V. Exact estimates of the conductivity of a binary mixtures of isotropic components. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 104 (1986), 21–38.
- [46] MATOUŠEK, J., & PLECHÁČ, P. On functional separately convex hull. *Discrete Comput. Geom.* 19 (1998), 105–130.
- [47] MEYERS, N. G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic equations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* 17 (1963), 189–206.
- [48] MORREY, C. B. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. Math.* 2 (1952), 25–53.
- [49] MORREY, C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1966.
- [50] MÜLLER, S. Variational methods for microstructure and phase transitions. Aparecerá en Proc. CIME summer school on “Calculus of variations and geometric evolution problems”, Cetraro 1996, (S. Hildebrandt and M Struwe, eds.), <http://www.mis.mpg.de/cgi-bin/lectures-notes.pl>.
- [51] MÜLLER, S., & ŠVERÁK, V. Convex integration for lipschitz mappings and counterexamples for regularity. Tech. Rep. 26, Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, 1999.

- [52] MURAT, F. Contre-exemples pur divers problèmes ou le contrôle intervient dans les coefficients. *Ann. Mat Pura et Appl.* 112 (1977), 49–68.
- [53] MURAT, F. Compacité par compensation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat.* 5 (1978), 489–507.
- [54] MURAT, F. Compacité par compensation II. En *Recent Methods in Nonlinear Analysis* (Bologna, 1979), E. Giorgi, E. Magenes, & U. Mosco, Eds., Pitagora, pp. 245–256.
- [55] MURAT, F., & TARTAR, L. Calculus of variations and homogenization. En *Topics in the mathematical modelling of composites materials* (1997), A. Cherkaev & R. Kohn, Eds., Birkhäuser, pp. 139–173. (French version: F. Murat, Calcul des variations et homogénéisation. In *Les méthodes de l'homogénéisation, théorie et applications en physique. Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF, Eyrolles*, pp. 319–369, 1985).
- [56] MURAT, F., & TARTAR, L. H-convergence. En *Topics in the mathematical modelling of composites materials* (Boston, 1997), A. Cherkaev & R. Kohn, Eds., Birkhäuser, pp. 21–44. (French version: F. Murat. H-convergence. Mimeographed notes, *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger*, 1978).
- [57] MURAT, F., & TARTAR, L. On the control of coefficients in partial differential equations. En *Topics in the mathematical modelling of composites materials* (Boston, 1997), A. Cherkaev & R. Kohn, Eds., Birkhäuser, pp. 1–8. (French version: L. Tartar, Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles, in *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems 107 (Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling)* Springer-Verlag, 1975, 420–426.).
- [58] PEDREGAL, P. Relaxation in ferromagnetism: the rigid case. *J. of Nonlinear Science* 4 (1994), 105–125.
- [59] PEDREGAL, P. *Parametrized Measures and Variational Principles*. Progress in Nonlinear Partial Differential Equations. Birkhäuser, 1997.
- [60] PEDREGAL, P. Optimization, relaxation and Young measures. *Bull. AMS* 36, 1 (1999), 27–58.
- [61] PEDREGAL, P. Relaxation in magnetostriction. *Cal. Var.* 10 (2000), 1–19.

- [62] PEDREGAL, P. *Variational methods in nonlinear elasticity*. SIAM, 2000.
- [63] PEDREGAL, P. Constrained quasiconvexity and structural optimization. *Arch. Rat. Mech. Ana.* (en prensa), 2001.
- [64] PEDREGAL, P. Optimal design and constrained quasiconvexity. *SIAM J. Math. Anal.* (en prensa), 2001.
- [65] RENARDY, M., & ROGERS, R. *An introduction to partial differential equations*. Springer-Verlag, 1993.
- [66] SERRE, D. Formes quadratiques et calcul des variations. *J. Math. Pures et Appl.* 62 (1983), 177–196.
- [67] SPAGNOLO, S. Convergence in energy for elliptic operators. En *Numerical solutions of partial differential equations III* (New York, 1976), B. Hubbard, Ed., Academic Press.
- [68] TARTAR, L. Compesated compactness and applications to partial differential equations. En *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium* (1979), R. Knops, Ed., vol. 39, Pitman Res. Notes Math., pp. 136–212.
- [69] TARTAR, L. The compesated compactness method applied to systems of conservation laws. En *Systems of nonlinear partial differential equations* (1983), J. Ball, Ed., Dordrecht: D. Reidel, pp. 263–285.
- [70] TARTAR, L. Estimations fines de coefficients homogénéisés. En *Ennio de Giorgi Colloquium* (1985), P. Kree, Ed., vol. 125 of *Pitman research notes in mathematics*, Pitman, pp. 168–187.
- [71] TARTAR, L. On the mathematical tools for studying partial differential equations of continuum physics: H-measures and Young measures. En *Developments in partial differential equations and applications to continuum physics* (New York, 1991), Buttazzo, Galdi, & Zanghirati, Eds., Pitman research notes in mathematics, Plenum.
- [72] TARTAR, L. Some remarks on separately convex functions. En *Microstructure and Phase Transition*, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, & J. L. Ericksen, Eds., vol. 54 of *IMA Volumes*. Springer-Verlag, 1993, pp. 191–204.
- [73] TARTAR, L. Remarks on optimal design problems. En *Homogenization and continuum mechanics* (Singapore, 1994), G. Buttazzo, G. Bouchitte, & P. Suquet, Eds., World Scientific, pp. 279–296.

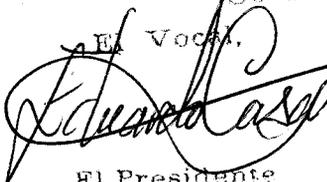
-
- [74] ŠVERÁK, V. Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 120 (1992), 185–189.
- [75] ŠVERÁK, V. On a Tartar's conjecture. *Ann. I.H.P.* 10 (1993), 405–412.
- [76] ŠVERÁK, V. Lower semicontinuity of variational integrals and compensated compactness. En *Proc. ICM* (1994), S. Chatterji, Ed., vol. 2, Birkhäuser, pp. 1153–1158.
- [77] WEXLER, A., & MANDEL, C. An impedance computed tomography algorithm and system for ground water and hazardous waste imaging. En *2nd Canadian-American Conference on Hydrogeology* (Banff, 1985).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. JOSÉ CARLOS BELLUC BERRERO
titulada ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE
OPTIMIZACIÓN DE LOCALS

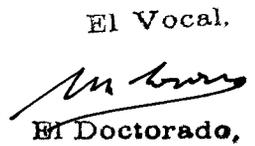
acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CON LAUDE
PER UNANIMIDAD

Sevilla, 9 de MARZO de 2001

El Vocal,

El Presidente

El Vocal,

El Secretario,

El Vocal,

El Doctorado,





* 5 0 1 3 5 8 7 4 4 *