UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

SOBRE ULTRAPRODUCTOS DE ESPACIOS DE BANACH EN CUERPOS NO ARQUIMEDIANOS

Visado en Sevilla

Julio de 1979

EL CATEDRATICO DIRECTOR

Fdo. Antonio de Castro

Brzezicki

Tesis que presenta

Jose Ramirez Labrador

para optar al grado de

Doctor en Ciencias,

Sección de Matematicas

Sevilla Julio de 1979

Fdo. Jose Ramirez Labrador

Quiero expresar mi agradecimiento
a D. Antonio de Castro Brzezicki
director del presente trabajo por
su constante ayuda y estímulo.
Tambien quiero agradecer la ayuda
recibida de D. Juan Arias de Reyna
y de D. Luis Laita de la Rica.

INDICE

INTRODUCCION

Según el teorema de Ostrowski todo cuerpo conmutativo con valoración arquimediana es isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y la valoración es equivalente al valor absoluto usual en $\mathbb{C}$.

De aquí que todo análisis sobre cuerpos valorados distinto del análisis real ó complejo será un análisis no arquimediano , en particular en todo cuerpo discreto puede considerarse la valoración trivial (no estudiaremos este caso) .

El análisis no arquimediano fué iniciado por A.F. Monna (1943) y desde entonces ha experimentado un gran desarrollo (ver (14) y (16))como índice del mismo la última clasificación del Zentralblatt le dedica varios apartados.

En 1934 T. Skolem introdujo la construcción de ultraproductos en lógica que desde el trabajo de J. Łoś (1955) se utliliza extensamente , sin embargo hasta que en (1961) A. Robinson inicia el análisis no standar no empieza el empleo de métodos derivados de la lógica en el análisis real, basados en este caso en sustituir $\mathbb{R}$ por una extensión que admite elementos infinitesimales e infinitos, en la misma construcción de $^*\mathbb{R}$ ver (12) se utilizan los ultraproductos.

Otra forma de aplicación de métodos derivados de la lógica en el análisis real fué iniciada por J. L. Krivine

(11) en 1974 y continuada por J. Stern (15) en 1976 definiendo los ultraproductos de espacios de Banach reales con la diferencia, respecto del análisis no standar, de que se deja invariante el cuerpo base y se utiliza lenguajes con valores reales es decir en los que los símbolos de predicado toman valores en $\mathbb{R}$ en lugar de en $\{0, 1\}$.

La utilización de estos métodos ha servido para resolver algunos problemas abiertos en análisis real (ver por ejemplo (*) para el análisis no standar y (**) para ultraproductos en lenguajes real valorados).

Nuestro trabajo está destinado a introducir los ultraproductos en los espacios de Banach sobre cuerpos no arquimedianos con valoración no trivial.

En el capítulo 0 damos definiciones y propiedades básicas de los espacios no arquimedianos y algunos teoremas que justifican restringirnos a los cuerpos no arquimedianos con valoración no trivial.

En el capítulo 1 definimos los ultraproductos de espacios de Banach no arquimedianos, para ello damos un lenguaje lógico L que tendrá cuatro símbolos de predicado unitario, correspondientes a la pertenencia al espacio, al cuerpo, al grupo de valores del cuerpo y al conjunto de valores de la norma en el espacio; tendrá tambien los símbolos de funciones correspondientes a la suma y producto, norma y distancia en el cuerpo y en el espacio, producto y máximo para el orden en el grupo en que toma valores la norma en el cuerpo y en el espacio, un símbolo de predicado binario $\geq$ y un conjunto de constantes; L posee pues los símbolos suficientes para estudiar los espacios de Banach no arquimedianos ya que el concepto de sucesión y límite lo introduciremos en determinadas estructuras para L , definimos diversas clases de estructuras y probamos que existe un conjunto de fórmulas de L y una clase de estructuras que si son modelos del conjunto de fórmulas se les puede asociar a espacios de Banach no arquimedianos , definimos los ultraproductos , ultrapotencias y u-extensiones probando que son espacios de Banach no arquimedianos si lo son las estructuras de partida y damos algunas aplicaciones .

Las diferencias más importantes con el caso real son: introduciendo estos predicados unitarios el lenguaje L es de primer orden usual tomando valores de verdad en $\{0,1\}$, no necesitamos considerar la función $+$ en el conjunto en que toma valores la norma porque no es preciso que , como el caso real , sea el cuerpo base y además al ser no arquimediano no aparece la desigualdad triangular (incluso considerarla sería muy perjudicial para nosotros ya que para una valoración discreta si imponemos que Γ sea cerrado para la suma se tendría que 1 es punto de acumulación de Γ y al ser Γ cerrado para el producto la valoración sería densa), otra ventaja es que nos podemos reducir a $\mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$, con 0 jugando el papel de elemento inferior para el orden de $\mathbb{R}_+$, un inconveniente obvio es que manejamos muchos más símbolos y trabajamos a la vez con el cuerpo y el espacio.

En el capítulo 2 , introduciendo algunas modificaciones en L (esencialmente eliminar un predicado unitario e introducir una función logaritmo definida en el análogo de $(1,\infty)$;preferimos esto a tener que utilizar $\mathbb{R}$ con lo que 0 perdería su sentido) obtenemos un lenguaje L_1 con símbolos para estudiar los espacios de Banach en los que no vale la desigualdad ultramétrica (les llamaremos espacios casi arquimedianos) sobre cuerpos no arquimedianos con $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$; tales espacios existen , ver (13) y (16) , y según (13) no se han estudiado las propiedades generales de este tipo de espacios.

Definimos tambien aquí los ultraproductos y probamos que una ultrapotencia es casi arquimediana si y sólo si el espacio de partida es casi arquimediano y algunas propiedades relacionadas. Es obvio que los capítulos 1 y 2 no pueden tratarse conjuntamente a no ser que nos reduzcamos al caso $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$.

Bibliografía específica citada :

(*) M. Davis , "Applied nonstandard analysis", New York ,John Wiley & Sons (1977)

(**) J. Stern , "The problem of envelopes for Banach spaces" Israel J. Math. 20 nº 1 (1976)p. 1-15

CAPITULO 0

En este trabajo ordenaremos las definiciones y proposiciones dentro de cada capítulo y los corolarios dentro de cada proposición .

Toda referencia dentro de un mismo capítulo será citada únicamente por el número, fuera de su capítulo añadiremos el número del capítulo separado por una , al número de la proposición , por ejemplo , la proposición 23 del capítulo 1 será la proposición 23,1 .

Las llamadas a la bibliografía las indicaremos con un número entre paréntesis , por ejemplo , (7) Sea C (ó K) un cuerpo , indicaremos por a,b,c sus elementos , $+_C$, $\cdot_C$ sus operaciones , 0_C ,(1_C) el elemento neutro para $+_C$ ($\cdot_C$) .

En este capítulo G será un grupo , indicaremos por λ, μ, ρ sus elementos , . la operación del grupo , 1 el elemento neutro de G , supondremos que G es un grupo ordenado linealmente con orden arquimediano e indicaremos por 0 un elemento distinguido tal que para cada λ de G sea $\lambda \cdot 0 = 0$ y $\lambda \geqslant 0$ (0 no pertenecerá a G) .

DEFINICION 1. Diremos que C es un cuerpo valorado no arquimediano si existe una función $|\ \ |$ (ó N_C) de K en $G \cup \{0\}$ con :

1) $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0_C$

2) $|a \cdot_C b| = |a| \cdot |b|$

3) $|a +_C b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ (desigualdad ultramétrica)

De 2) se sigue que $|1_C| = 1$, y que $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ y por tanto el conjunto $\{ |a| , a \in C , a \neq 0 \}$ es un subgrupo de G que será el grupo de valores de la valoración y lo indicaremos por Γ_C ó abreviadamente Γ .

Si $G = \mathbb{R}_+^*$ diremos que la valoración es real . Según (7) (3.5) p. 20 toda valoración exponencial induce una valoración real no arquimediana .

Una valoración no arquimediana induce una métrica , indicando con -b el inverso de b respecto de $+_C$,

$D_C(a,b) = |a-b|$ en C , para esta métrica C es un cuerpo topológico .

Diremos que una valoración es trivial , discreta ó densa si el grupo de valores Γ es $\{1\}$, un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_+^*$, ó un subconjunto denso de $\mathbb{R}_+^*$.

Sea E un espacio vectorial sobre C , cuerpo valorado no arquimediano , indicamos por x , y , z los elementos de E , $+_E$ la suma en E con elemento neutro 0_E , $\cdot_E$ el producto de elementos de E por elementos de $\mathbb{C}$.

DEFINICION 2. Diremos que E es un espacio normado no arquimediano sobre C si existe una función N_E de E en $G \cup \{0\}$ con :

1) $N_E(a \cdot_E x)=N_C(a).N_E(x)$

2) $N_E(x) = 0$ si y sólo si $x = 0_E$

3) $N_E(x +_E y) \leq \max (N_E(x),N_E(y))$

Esta norma induce la métrica $D_E(x,y) = N_E(x-y)$ indicando con $-y$ el inverso de y respecto $+_E$. Respecto de esta métrica E es un espacio vectorial topológico sobre E . Diremos que E es un espacio de Banach no arquimediano si es completo para esta topología .

Llamaremos $E_{\mathbb{R}}$ al subconjunto de G : $\{ N_E(x),\ x\in E,\ x\neq 0\}$ llamaremos para cada λ de G y cada x de E , $B_\lambda(x)$ al conjunto $\{ y : D_E(x-y) < \lambda \}$, $B'_\lambda(x)$ al conjunto $\{ y : D_E(x-y) \leq \lambda \}$. A $B_\lambda(x)$ [ó $B'_\lambda(x)$] le diremos bola " abierta " [ó "cerrada"] de centro x y radio λ .

Igual notación usaremos para los a de C . Es conocido , ver (16), que una bola puede tener muchos radios y que todo punto de la bola puede servir de centro , y que toda bola "abierta" ó "cerrada" de E (ó de C) es abierta y cerrada para la topología de E (ó de C) , además para cada dos bolas con intersección no vacía una está contenida en la otra.

PROPOSICION 1. Sean $B'_\lambda(x)$, $B_\mu(x)$ con $\lambda \geq \mu$, $y \in B'_\lambda(x)$, $y \notin B_\mu(x)$, entonces para cada z de $B_\mu(x)$ se cumple $D_E(y,z) \geq \mu$

Demostración:

Si para algún z de $B_\mu(x)$, $D_E(y,z) < \mu$ entonces $D_E(x,y) \leq \max (D_E(x,z), D_E(z,y)) < \mu$.

En particular se deduce que para cada centro , todo punto de "la circunferencia" de una bola "cerrada" $B'_\lambda(x)$ dista de la bola "abierta" $B_\lambda(x)$ su radio λ .

Como G es un grupo conmutativo ordenado linealmente con orden arquimediano , podemos suponer que G es un subgrupo (estricto ó no) de $\mathbb{R}^*_+$ y que 0 es el cero real .

Diremos que la <u>norma</u> de E es <u>discreta</u> si toda sucesión estrictamente decreciente en $E_\mathbb{R}$ tiende a 0 con la topología de $\mathbb{R}$.

Al ser las bolas abiertas y cerradas, se tiene que E es un espacio separado de dimensión topológica 0 y por tanto será totalmente disconexo . Se dice que un espacio topológico es extremadamente disconexo (ó extremadamente discontinuo) si la clausura de un abierto es abierta. Según (17) p.107 toda sucesión convergente en un espacio separado extremadamente disconexo , es constante excepto un número finito de elementos iniciales .

PROPOSICION 2. Si E es extremadamente disconexo , entonces 0 es punto aislado , para la topología usual de $\mathbb{R}$, de $E_{\mathbb{R}}$.

Demostración:

Sea $\langle\lambda_n\rangle$ una sucesión estrictamente decreciente de $E_{\mathbb{R}}$ que tienda a 0 , y x_n con $N_E(x_n) = \lambda_n$, entonces $\langle x_n\rangle$ tiende a 0_E y todos los x_n son distintos .

COROLARIO . La topología de E es discreta si y sólo si 0 es punto aislado de $E_{\mathbb{R}}$.

Demostración:

La primera afirmación es trivial , ya que todo espacio topológico discreto es extremadamente disconexo .

Si 0 es punto aislado de $E_{\mathbb{R}}$ sea $\xi \in \mathbb{R}^*_+$ con $0 < \xi < \lambda$ para cada λ de $E_{\mathbb{R}}$, $B_\xi(x)$ se reduce a x para cada x de E y por tanto todos los puntos son abiertos y la topología es discreta .

Diremos que un espacio topológico es perfecto si todo punto es punto de acumulación .

PROPOSICION 3. E es perfecto si y sólo si 0 es punto de acumulación , para la topología de $\mathbb{R}$, de $E_{\mathbb{R}}$.

Demostración:

Si E es perfecto 0_E es punto de acumulación de E y por tanto existe en $E_{\mathbb{R}}$ una sucesión que tiende a 0 .

Si 0 es punto de acumulación de $E_{\mathbb{R}}$, 0_E es punto de acumulación de E y se sigue por ser la topología compatible con la estructura de grupo aditivo de E .

Como según (17) p. 218 un espacio numerable métrico completo no es perfecto se sigue :

COROLARIO . Si E es espacio de Banach no arquimediano y 0 es punto de acumulación de $E_{\mathbb{R}}$, E es no numerable .

Como hemos trabajado exclusivamente con la estructura aditiva, los resultados obtenidos se extienden tambien para los cuerpos no arquimedianos .

PROPOSICION 4. $E_{\mathbb{R}}$ es cerrado para la multiplicación por elementos de Γ .

Demostración:

Es trivial por ser E espacio vectorial sobre C y por 1) de la definición 2 .

Aunque la topología discreta puede inducirse por una norma no arquimediana , en este trabajo no estudiaremos este caso y supondremos que la valoración de C no es trivial. Entonces Γ contiene a algún subgrupo de la forma ρ^n y 0 es punto de acumulación para la topología de $\mathbb{R}$ de Γ , y por la proposición 4 tambien lo es para $E_{\mathbb{R}}$ y se tiene que E es perfecto y no es extremadamente disconexo .

Como Γ es un subgrupo de $\mathbb{R}_+^*$ y $E_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}_+^*$, por ser $\mathbb{R}_+^*$ grupo topológico , considerando la topología inducida por la de $\mathbb{R}_+^*$, Γ opera continuamente en $E_{\mathbb{R}}$.

De (3) TG III p. 9 lema 1 , se deduce que para cada λ de Γ la aplicación $\mu \to \lambda.\mu$ es homeomorfismo de $E_{\mathbb{R}}$ en sí mismo . Es trivial que para cada μ de $E_{\mathbb{R}}$ el estabilizador de $\mu = \{ \lambda \in \Gamma$ tal que $\lambda.\mu = \mu \}$ se reduce a 1 y por tanto Γ opera libre y fielmente en $E_{\mathbb{R}}$.

Si para cada μ de $E_{\mathbb{R}}$ llamamos la órbita de μ al conjunto $\{ \lambda.\mu$ para $\lambda \in \Gamma \}$, la relación μ, θ pertenecen a la misma órbita es una relación de equivalencia en $E_{\mathbb{R}}$ e indicamos por $E_{\mathbb{R}} / \Gamma$ al conjunto cociente .

Como $E_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}_+^*$ y $\mathbb{R}_+^*$ es un grupo metrizable , abeliano y completo , Γ será un subgrupo distinguido de $\mathbb{R}_+^*$ y R_+^* / Γ será un grupo topológico para la topología cociente ; es trivial que $E_{\mathbb{R}} / \Gamma$ es un subconjunto de $\mathbb{R}_+^*$.

PROPOSICION 5. $\mathbb{R}_+^* / \Gamma$ es separado si y sólo si Γ es cerrado .
$\mathbb{R}_+^* / \Gamma$ es discreto si y sólo si Γ es abierto.
Si Γ es discreto , $\mathbb{R}_+^*$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}_+^* / \Gamma$.
Si Γ es cerrado , $\mathbb{R}_+^* / \Gamma$ es metrizable y completo.

Demostración:

Se sigue de (6) (12.11.2) y (12.11.3) .

Por ser $\mathbb{R}_{+}^{*}$ conexo se tiene que si Γ es abierto , entonces $\Gamma = \mathbb{R}_{+}^{*}$.

De la proposición 1 y del teorema 1 § 4 del capítulo 5 de (3) se sigue que los únicos subgrupos cerrados no triviales de $\mathbb{R}_{+}^{*}$ son subgrupos discretos de la forma ρ^{n} con $n \in \mathbb{Z}$, por tanto si la valoración de C es discreta ó densa con $\Gamma = \mathbb{R}_{+}^{*}$, entonces $E_{\mathbb{R}} / \Gamma$ es separado para la topología inducida por la de $\mathbb{R}_{+}^{*} / \Gamma$.

A continuación daremos algunas definiciones :

Sea E un espacio normado no arquimediano, diremos que E es <u>esfericamente completo</u> si toda familia de bolas "cerradas" ordenadas por inclusión tiene intersección no vacía . Análoga definición vale para cuerpos valorados no arquimedianos .

Sea E un espacio normado no arquimediano, diremos que E es <u>inyectivo</u> si F es un espacio normado no arquimediano, G un subespacio lineal de F y φ una aplicación lineal acotada de G en E , entonces φ puede extenderse a una $\bar{\varphi}$ de F en E con $\|\bar{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

TEOREMA DE INGLETON . Un espacio normado no arquimediano es inyectivo si y sólo si es esfericamente completo. Ver (16) p. 104 .

CAPITULO I

TEORIA DE MODELOS PARA ESPACIOS DE BANACH NO ARQUIMEDIANOS

A partir de ahora seguiremos fundamentalmente la notación de Chang-Kreisler. (4)

Sea L un lenguaje lógico, contendrá simbolos de variable z , simbolos de función u , simbolos de predicado P ,simbolos de constante c , si es necesario utilizaremos subíndices . Estamos interesados en la teoría de espacios vectoriales normados , en general no serán reales.

Definimos como es usual los términos del lenguaje de forma que una variable es un término , si $t_1, \ldots t_n$ son términos y u es n-aria $u(t_1, \ldots t_n)$ es un término , y todo término puede construirse por un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Nuestro lenguaje tendrá cuatro predicados unitarios P_1 , P_2 , P_3 , P_4 (predicados de pertenencia) y entre los axiomas de la teoría estarán los siguientes:

$$\forall z \quad (P_1(z) \vee P_2(z) \vee P_3(z))$$

$$\forall z \quad (P_1(z) \longrightarrow ((\neg P_2(z)) \wedge (\neg P_3(z)))$$

$$\forall z \quad (P_2(z) \longrightarrow ((\neg P_1(z)) \wedge (\neg P_3(z)))$$

$$\forall z \ (P_3(z) \longrightarrow ((\neg P_1(z)) \wedge (\neg P_2(z)))$$

$$\forall z \ (P_4(z) \longrightarrow P_3(z))$$

Para arrastrar lo menos posible P_1 , P_2 , P_3 , P_4 emplearemos la siguiente nomenclatura:

llamaremos f n,k-aria a todo simbolo de función u n+k-aria tal que entre los axiomas de la teoría esté el siguiente

$$\forall z_1,..\forall z_{n+k} \ (P_1(z_1)\wedge ..\wedge P_1(z_n)\wedge P_2(z_{n+1})\wedge ..P_2(z_{n+k}) \longrightarrow P_1(u(z_1,..z_{n+k}))$$

llamaremos f' n,k-aria a todo simbolo de función u n+k-aria tal que entre los axiomas de la teoría esté:

$$\forall z_1,.. \forall z_{n+k} \ (P_1(z_1)\wedge ..\wedge P_1(z_n)\wedge P_2(z_{n+1})\wedge ..\wedge P_2(z_{n+k}) \longrightarrow P_2(u(z_1,..z_{n+k}))$$

llamaremos R n,k-aria a todo simbolo de función u n+k-ario tal que entre los axiomas de la teoría esté:

$$\forall z_1,.. \forall z_{n+k} \ (P_1(z_1)\wedge ..\wedge P_1(z_n)\wedge P_2(z_{n+1})\wedge ..\wedge P_2(z_{n+k}) \longrightarrow P_3(u(z_1,..z_{n+k})) \ .$$

A veces en lugar de usar f usaremos g ó h; en lugar de f', g' ó h' y en lugar de R , F ó G .

Como en la mayoría de las fórmulas y axiomas las variables no recorrerán todo $|\mathcal{M}|$ sino P_1 ó P_2 ó P_3 , utilizaremos x (ó y) como abreviatura de z $(P_1(z))$, utilizaremos a (ó b) como abreviatura de z $(P_2(z))$, λ (ó μ) como abreviatura de z $(P_3(z))$.

Por ejemplo la definición de f n,k-aria se escribiría:

$$\forall x_1,..\forall x_n \ \forall a_1,.. \forall a_k \ (P_1(u(x_1,..x_n,a_1,..a_k)))$$

Si t es un término diremos que es de tipo 1 si $P_1(t)$, y lo indicaremos por t ; de tipo 2 si $P_2(t)$ y lo indicaremos por t´ y de tipo 3 si $P_3(t)$. Por ejemplo f,x serán de tipo 1 ; f´,a serán de tipo 2 ; R , λ serán del tipo 3 .

A las constantes de tipo 1 los indicarmos c;a las constantes de tipo 2 las indicaremos c´; si R es n,k-aria y $t_1,.,t_n$ son términos de tipo 1 y $t_1',.,t_k'$ son términos de tipo 2 , a $R(t_1,..t_n,t_1',..t_k')$ le llamaremos expresión atómica . Si t (ó t´) es un término de tipo 1 ó 2 y en su construcción entran exclusivamente términos de tipo 1 ó 2 lo llamaremos término propio.

P_1 será cierto cuando opera sobre un elemento del "espacio vectorial".

P_2 será cierto cuando opera sobre un elemento del "cuerpo".

P_3 será cierto cuando opera sobre un elemento del conjunto en que toma valores la norma en el espacio ó en el cuerpo (en principio un subconjunto de $R_+^* \cup \{0\}$) .

Entonces las expresiones atómicas tomarán valores en $\mathbb{R}$ y los términos propios tomarán valores en el cuerpo ó en el espacio según sean del tipo 2 ó del tipo 1 .

Entre los tres tipos anteriormente descritos de funciones (observar q ue todos tienen argumentos de tipo 1 ó de tipo 2) en nuestro lenguaje L estarán las siguientes funciones:

del tipo 1 : $+_E$, 2,0-aria ; $\cdot_E$, 1,1-aria

del tipo 2 : $+_C$, 0,2-aria ; $\cdot_C$,0,2-aria

del tipo 3 : N_E , 1,0-aria ; D_E , 2,0-aria

N_C , 0,1-aria ; D_C , 0,2-aria

los simbolos de constante 0_E de tipo 1 , 0_C de tipo 2 , 1_C de tipo 2 , -1_C de tipo 2 ;

(si no hay confusión posible a veces escribiremos $\dot{+}$ por $\dot{+}_E$ ó $\dot{+}_C$ etc.)

Con argumentos en P_3 y valores en P_3 las siguientes funciones :

. función binaria que tambien usaremos para un número finito de argumentos.

max función binaria que tambien utilizaremos para un número finito de argumentos , conviniendo que el max de un argumento es él mismo y que el max de un conjunto vacío de argumentos es la constante 1 .

En las estructuras que vamos a utilizar serán axiomas los siguientes :

$$\forall\lambda\ \forall\mu(P_4(\lambda)\vee P_4(\mu)\longrightarrow P_3(\lambda.\mu))$$

$$\forall\lambda\ \forall\mu(P_3(\max(\lambda,\mu)))$$

y un simbolo de predicado binario $\geqslant$ que convenimos sigue la axiomática usual de orden actuando en P_3 , en P_4 ; existirán además dos simbolos de constante 0 , 1 .

Análogamente a como se definieron los términos definimos las <u>expresiones</u> :

0 , 1 y las expresiones atómicas son expresiones ,
si F , G son expresiones , max(F,G) es una expresión ,
si $P_4(\lambda)$ y F es una expresión , λ.F es una expresión
Toda expresión puede construirse aplicando un número finito de veces las reglas anteriores . (Observar que las expresiones son de tipo 3) .

Para cada par de expresiones F,G existe una <u>fórmula propia</u> que definimos $F\geqslant G$, por ejemplo $1\geqslant 0$; como es usual definimos para cada dos fórmulas propias las fórmulas :
$(F\geqslant G)\wedge(F'\geqslant G')$, notar sim embargo que no definimos

$\neg(F \geqslant G)$.

Todas las fórmulas que utilizaremos estarán en forma prenex .

Decimos que una variable es libre en una fórmula si no aparece con ningun simbolo cuantificador . Decimos que una fórmula es abierta si no contiene cuantificadores . Decimos que una fórmula es cerrada si no tiene variables libres . Decimos que una fórmula es universal si no aparecen cuantificadores existenciales . Si no hay confusión usaremos a veces " fórmulas " por " fórmulas propias " , " términos " por " términos propios " .

Estructuras real valoradas

Una estructura $\mathcal{M}$ constará de un conjunto no vacío $|\mathcal{M}|$ y una interpretación para cada una de las funciones y predicados del lenguaje.

Entre todas las posibles estructuras para L estamos interesados en las que tienen las siguientes propiedades :

$|\mathcal{M}|$ estará descompuesto en tres conjuntos disjuntos:

$|\mathcal{M}_E| \cup |\mathcal{M}_C| \cup |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$ con

$|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \subset R^{*}_{+} \cup \{0\}$

$|\mathcal{M}_E| \cap |\mathcal{M}_C| = \emptyset$

$|\mathcal{M}_E| \cap |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| = \emptyset$

$|\mathcal{M}_C| \cap |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| = \emptyset$

Al simbolo de predicado unitario P_1 le corresponderá el predicado $\in |\mathcal{M}_E|$, al simbolo de predicado unitario P_2 le corresponderá el predicado $\in |\mathcal{M}_C|$, al simbolo de predicado unitario P_3 le corresponderá el predicado $\in |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$, al al simbolo de predicado unitario P_4 le corresponderá el predicado $\in \Gamma_{\mathbb{R}}$ un subconjunto fijado de R_+ (será subgrupo no reducido al neutro $\cup \{0\}$).

La interpretación de la función binaria . será el producto usual en los reales ; la interpretación de la función binaria max será el max usual entre dos números reales; la interpretación del simbolo de predicado binario $\geqslant$ será el de la relación de orden usual en los reales ; 0 será el ínfimo de R_+ , 1 será el neutro del producto en R_+ ; a cada simbolo de función f n,k-aria de L le corresponderá una función $f^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k$ en $|\mathcal{M}_E|$;

a cada simbolo de función f'n,k-aria de L le corresponderá una función $f'^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k$ en $|\mathcal{M}_C|$;

a cada simbolo de función R n,k-aria le corresponderá una función $R^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k$ en $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$;

a cada simbolo de constante c de L le corresponderá un elemento fijado $c^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}_E|$;

a cada simbolo de constante c' de L le corresponderá un elemento fijado $c'^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}_C|$.

Definimos el valor de los términos por sustitución (como es usual) es decir sustituyendo cada simbolo de función f por $f^{\mathcal{M}}$, f' por $f'^{\mathcal{M}}$, c por $c^{\mathcal{M}}$, c'por $c'^{\mathcal{M}}$.

Por tanto :

a cada término propio t con n,k variables le corresponde una aplicación :

$$t^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k \longrightarrow |\mathcal{M}_E|$$

a cada término propio t'con n,k variables le corresponde una aplicación :

$$t'^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k \longrightarrow |\mathcal{M}_C|$$

analogamente si R es una expresión atómica a

$R(t_1,..t_n,t'_1,..t'_k)$ le corresponde

$R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}},..t_n^{\mathcal{M}},t'^{\mathcal{M}}_1,t'^{\mathcal{M}}_k)$ obtenida por sustitución ;

a las constantes 0 , 1 le corresponderán los números reales 0 , 1 ;

a max le corresponde el max usual de dos números reales ;

a $\geqslant$ le corresponde la relación de orden usual ;

por tanto ya tenemos definida la interpretación para las expresiones .

Para cada par de expresiones F , G decimos que la fórmula :

$Qx_1,..Qx_n \ Qa_1,..Qa_k\ (F(x_1,..x_n,x_{n+1},..x_m,a_1,..a_k,a_{k+1},..a_{\tilde{n}})\geqslant$

$G\ (x_1,..x_n,x_{n+1},..x_m,a_1,..a_k,a_{k+1},..a_{\tilde{n}}))$

vale en $\mathcal{M}$ para la m-n,ñ-k upla $y_{n+1},..y_m,b_{k+1},..b_{\tilde{n}}$ si es cierto que

$Qx_1,..Qx_n \ Qa_1,..Qa_k\ (F^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,y_{n+1},..y_m,a_1,..a_k,b_{k+1},..b_{\tilde{n}})\geqslant$

$G^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,y_{n+1},..y_m,a_1,..a_k,b_{k+1},..b_{\tilde{n}}))$ (*) ,

como es usual al poner $F(x_1,..x_m,a_1,..a_{\tilde{n}})$indicamos que las variables(libres ó no) de F están entre $x_1,..x_m,a_1,..a_{\tilde{n}}$,

con Q indicamos tambien $\forall$ ó $\exists$ como es usual ,

con $F^{\mathcal{M}}$, $G^{\mathcal{M}}$ indicamos la interpretación de las expresiones F , G en $\mathcal{M}$.

Observar que la fórmula (*) está en $\mathbb{R}$ y con $\geqslant$ indicamos el orden usual y por tanto sabemos si es cierto ó no . En particular si $\varphi(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$ es una fórmula cerrada , admite un único significado en $\mathcal{M}$.

Si φ vale $\mathcal{M}$ diremos que $\mathcal{M}$ es un modelo de φ ó que $\mathcal{M}$ satisface φ ,análogamente si Φ es un conjunto de fórmulas cerradas de L , diremos que $\mathcal{M}$ es un modelo de Φ si $\mathcal{M}$ es un modelo de cada una de ellas .

Diremos que dos fórmulas son equivalentes en un modelo real valorado cuando $\mathcal{M}$ es un modelo de una de ellas si y sólo si es modelo de la otra , por ejemplo :
$F \geqslant G$, $F \geqslant 1.G$ son equivalentes , $(F \geqslant G) \wedge (F \leqslant G)$, $F=G$ son equivalentes .

Llamaremos diagrama universal de $\mathcal{M}$, $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ al conjunto de fórmulas cerradas universales de L válidas en $\mathcal{M}$ con la interpretación definida anteriormente .

Llamaremos u-extensión real valorada de $\mathcal{M}$ a una estructura en la cual todas las fórmulas de $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ valen .

Existencia de modelos real valorados

En el apartado anterior hemos descrito un tipo particular de modelos , los modelos real valorados , sin embargo no es fácil dar un conjunto de fórmulas del lenguaje que nos permitan probar la existencia de modelos real valorados, para ello vamos a utilizar una clase intermedia de estructuras , las estructurasadecuadas.

DEFINICION 1. Diremos que $\mathcal{M}$, una estructura para L , es una estructura adecuada si $|\mathcal{M}|$ está descompuesto en tres subconjuntos disjuntos:
$|\mathcal{M}_E| \cup |\mathcal{M}_C| \cup |\mathcal{M}_3|$
siendo $|\mathcal{M}_3|$ un subconjunto de un grupo conmutativo linealmente ordenado, con orden arquimediano , con supremo para el orden , conteniendo un subgrupo no reducido al elemento neutro , de forma que :
la interpretación de . sea el producto en el grupo,
la interpretación de $\geqslant$ sea la relación de orden en el grupo,
la interpretación de 1 sea el neutro del grupo ,

y la interpretación de 0 sea un elemento distinguido , el ínfimo de todos los elementos del grupo con $\forall\lambda \ \lambda .0 = 0$ en el grupo,

que a cada simbolo R 0,k-ario de L le corresponda una aplicación de $|\mathcal{M}_C|^k$ sobre el subgrupo dado $\Gamma_3 \cup \{0\}$ y que $|\mathcal{M}_3|$ sea cerrado para la multiplicación por elementos del subgrupo .

(Se puede dar un conjunto de axiomas para grupos ordenados linealmente , ver por ejemplo (4) p. 37-39)

DEFINICION 2. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas universales de L , Diremos que Φ es acotado si se cumple :

1.- Para cada simbolo f n,k-ario de L existe un elemento de Γ λ_f , tal que la fórmula φ:

$$\forall x_1,.. \forall x_n \ \forall a_1,.. \forall a_k$$

$$(N_E(f(x_1,..x_n,a_1,..a_k)) \leq \lambda_f \ . \ (\max_{i=1..n}(N_E(x_i))).(\max_{j=1..k}(N_C(a_j))))$$

es deducible de Φ en todo modelo adecuado (indicamos por $\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ que φ es deducible de Φ en todo modelo adecuado)

2.- Para cada simbolo f' n,k-ario de L existe un elemento de Γ $\lambda_{f'}$, tal que la fórmula φ :

$$\forall x_1,.. \forall x_n \ \forall a_1,.. \forall a_k$$

$$(N_C(f'(x_1,..x_n,a_1,..a_k)) \leq \lambda_{f'}.(\max(1,(\max_{j=1..k}(N_C(a_j)))^k))$$

$$\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$$

3.- Para cada simbolo R n,k-ario de L existe un elemento de Γ λ_R tal que la fórmula φ :

$$\forall x_1,.. \forall x_n \ \forall a_1,.. \forall a_k$$

$$(R(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \leq \lambda_R \ . \ (\max(\max_{i=1..n}(N_E(x_i)),\max_{j=1..k}(N_C(a_j)))))$$

$$\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$$

4.- Para cada simbolo c de L existe un elemento de Γ, λ_c tal que la fórmula φ : $N_E(c) \leq \lambda_c$; $\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

5.- Para cada simbolo c´de L existe un elemento de Γ, $\lambda_{c'}$ tal que la fórmula φ : $N_C(c') \leq \lambda_{c'}$; $\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

PROPOSICION 1. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas de L que forman un sistema de axiomas de la teoría de espacios normados no arquimedianos sobre un cuerpo no discreto , si Φ tiene un modelo real valorado entonces Φ tiene un modelo adecuado .

Demostración :

Se deduce de las definiciones y de las relaciones existentes entre el conjunto de valores que toma la norma en el cuerpo y en el espacio .

PROPOSICION 2. Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L , si Φ tiene un modelo adecuado entonces Φ tiene un modelo real valorado .

Demostración:

Sea $\mathcal{N}$ el modelo adecuado de Φ , $|\mathcal{N}_E|$, $|\mathcal{N}_C|$, $|\mathcal{N}_3|$ los tres tipos , según Jacobson (9) todo grupo ordenado arquimediano conmutativo es isomorfo con su orden a un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ considerando el isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*_+$ dado por una función exponencial , sea

$$\varphi : |\mathcal{N}_3| \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \cup \{0\}$$

la composición de las dos aplicaciones anteriores, indicaremos por α los elementos de $|\mathcal{N}_3|$, λ los de $\mathbb{R}^*_+ \cup \{0\}$.

Definamos un modelo real valorado, sea Γ_3 el subgrupo fijado de $|\mathcal{N}_3|$, como no está reducido al elemento neutro al ser $|\mathfrak{N}_3|$ un subconjunto que contiene a Γ_3 de un grupo ordenado arquimediano se tiene que Γ_3 es al menos cíclico infinito .

Por $|\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}|$ tomamos la imagen por φ de $|\mathfrak{N}_3|$, por $\Gamma_{\mathbb{R}}$ el subconjunto de $|\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}|$ el subgrupo imagen por φ de Γ_3 .

Sea $|\mathfrak{M}_E|$ el conjunto de los eleemntos x de $|\mathfrak{N}_E|$ tal que para algún número real λ en $\mathfrak{N}$ se satisface

$N_E^{\mathfrak{N}}(x) \leq \varphi^{-1}(\lambda)$,

como Γ_3 es al menos cíclico infinito para cada λ perteneciente a $\mathbb{R}_+^*$ existe un n perteneciente a $\mathbb{Z}$ tal que

$\lambda \leq \varphi(\alpha^n)$ con $\alpha \in \Gamma_3$ y por tanto $\alpha \in |\mathfrak{N}_3|$,

analógamente sea $|\mathfrak{M}_C|$ el conjunto de los elementos a de $|\mathfrak{N}_C|$ tal que para algún número real λ se satisface en

$N_C^{\mathfrak{N}}(a) \leq \varphi^{-1}(\lambda)$,

como Φ es acotado y $\mathfrak{N}$ es un modelo de Φ para cada simbolo de función f tendremos :

$$\forall x_1, \ldots \forall x_n \forall a_1, \ldots \forall a_k$$

$$(N_E(f(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_k)) \leq \lambda_f \cdot (\max_{i=1..n} (N_E(x_i)) \cdot \max_{j=1..k} (N_C(a_j)))$$

y al estar los argumentos de la función acotados la imagen lo estará y $|\mathfrak{M}|$ es cerrada para las funciones f ..

Podemos por tanto definir :

$$f^{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_k) = f^{\mathfrak{N}}(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_k)$$

(observar que empleamos x indistintamente para $|\mathfrak{M}_E|$ y $|\mathfrak{N}_E|$ a para $|\mathfrak{M}_C|$ y $|\mathfrak{N}_C|$ en virtud de la definición de $\mathfrak{M}$) ;

analogamente definimos :

$$f^{\cdot\mathfrak{M}}(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_k) = f^{\cdot\mathfrak{N}}(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_k)$$

$c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}$; $c^{\cdot\mathfrak{M}} = c^{\cdot\mathfrak{N}}$.

como para cada simbolo de función R ,$R^{\mathcal{N}}$ está en $|\mathcal{N}_3|$ y 0 es el ínfimo de $|\mathcal{N}_3|$ tendremos que

$$\forall x_1,\ldots\forall x_n\ \forall a_1,\ldots\forall a_k\ (\ 0\leq R^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k))$$

y por ser Φ acotado se tiene que

$$\forall x_1,\ldots\forall x_n\ \forall a_1,\ldots\forall a_k$$

$$R^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k)\leq \lambda_R\ (\max(\max_{i=1..n}(N_E(x_i)),\ \max_{j=1..k}(N_C(a_j))))$$

entonces para cada $x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k$ existe λ con

$$\varphi^{-1}(0)\leq R^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k)\leq \varphi^{-1}(\lambda)$$

y como además todo grupo ordenado que es semirretículo es retículo tendremos definido en el grupo el ínfimo (inf) .

Definamos pues :

$$R^{\mathcal{M}}(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k)=\inf\left\{\ \varphi(\alpha):\ \mathcal{N}\text{ satisface } R^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots a_k)\leq\alpha\right\}$$

la definición es válida ya que el conjunto está acotado inferiormente , los reales son completos y $R^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots a_k)\in|\mathcal{N}_3|$

Veamos (por inducción en la longitud) que las expresiones están bien definidas:

si $R^{\mathcal{N}}$ es $\max(F^{\mathcal{N}},\ G^{\mathcal{N}})$ sea $x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k$ una n+k-upla, haciendo

$$\lambda = \inf\left\{\ \varphi(\alpha)\ :\mathcal{N}\text{ satisface } \max(F^{\mathcal{N}},G^{\mathcal{N}})(x_1,\ldots a_k)\leq\alpha\right\}$$

$$\mu = \inf\left\{\ \varphi(\beta)\ :\mathcal{N}\text{ satisface } F^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots a_k)\leq\beta\right\}$$

$$\theta = \inf\left\{\ \varphi(\gamma)\ :\mathcal{N}\text{ satisface } G^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots a_k)\leq\gamma\right\}$$

y el resultado se deduce inmediatamente por conservar φ el orden ;

si $G^{\mathcal{N}}(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k)$ está en $\Gamma_3\cup\{0\}$ y $R^{\mathcal{N}}$ es $F^{\mathcal{N}}.G^{\mathcal{N}}$ se tiene análogamente que $R^{\mathcal{M}}$ es $F^{\mathcal{M}}.\ G^{\mathcal{M}}$ por ser Φ acotado y φ un homomorfismo que conserva el orden .

Veamos que $\mathcal{M}$ es un modelo de Φ , sea φ una fórmula propia cerrada universal de Φ :

$$\forall x_1,.. \forall x_n \forall a_1,.. \forall a_k(F(x_1,..x_n,a_1,..a_k)\geqslant G(x_1,..a_k))$$

supongamos que no vale en $\mathcal{M}$ entonces

$$\exists x_1,.. \exists x_n \exists a_1,.. \exists a_k (F^{\mathcal{M}}(x_1,..a_k)< G^{\mathcal{M}}(x_1,..a_k))$$

pero por la definición de $F^{\mathcal{M}}$, $G^{\mathcal{M}}$ esto contradice que $\mathcal{N}$ es un modelo de Φ .

COROLARIO. Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L , si todo subconjunto finito de Φ tiene un modelo adecuado , entonces Φ tiene un modelo adecuado .

Demostración:

Sea Φ' un conjunto de sentencias cuyos modelo son grupos abelianos totalmente ordenados conteniendo un subgrupo no acotado con orden denso y un subgrupo no reducido al elemento neutro.

Consideremos $\Phi \cup \Phi'$. Por hipótesis todo subconjunto finito de $\Phi \cup \Phi'$ tiene un modelo ,por el teorema de compacidad clásico $\Phi \cup \Phi'$ tiene un modelo que será adecuado por ser modelo de Φ'.

DEFINICION 3. Dadas dos estructuras $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ adecuadas para L , decimos que $\mathcal{M}$ es una subestructura de $\mathcal{N}$ si :

$$|\mathcal{M}| \subset |\mathcal{N}| \text{ con } \Gamma_{\mathcal{M}} = \Gamma_{\mathcal{N}}$$

y la interpretación de los simbolos de L en $\mathcal{M}$ coincide con la restricción de la interpretación en $\mathcal{N}$.

DEFINICION 4. Decimos que dos estructuras $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ adecuadas para L son isomorfas (en el sentido de teoría de modelos) si existe una biyección :

$$\varphi : |\mathcal{M}| \longrightarrow |\mathcal{N}| \text{ tal que}$$

$$\varphi : |\mathcal{M}_C| \longrightarrow |\mathcal{N}_C|$$

$$\varphi : |\mathcal{M}_E| \longrightarrow |\mathcal{N}_E|$$

$$\text{y} \quad \varphi : |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \longrightarrow |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$$

es una restricción de un isomorfismo entre grupos ordenados;

para cada simbolo de función f n,k-aria de L y cada $x_1,..x_n,a_1,..a_k$ de $|\mathcal{M}|$

$$D_E^{\mathcal{N}}(\varphi(f^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)),f^{\mathcal{N}}(\varphi(x_1),..\varphi(x_n),\varphi(a_1),.\varphi(a_k)))=0$$

para cada simbolo de función f´n,k-aria de L y cada $x_1,..x_n,a_1,..a_k$ de

$$D_C^{\mathcal{N}}(\varphi(f'^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)),f'^{\mathcal{N}}(\varphi(x_1),..\varphi(x_n),\varphi(a_1),.\varphi(a_k)))=0$$

Para cada simbolo de función R n,k-aria de L y cada $x_1,..x_n,a_1,..,a_k$ de

$$\varphi(R^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k))=R^{\mathcal{N}}(\varphi(x_1),..\varphi(x_n),\varphi(a_1),..\varphi(a_k))$$

para cada simbolo de constante c (ó c´)

$$D_E^{\mathcal{N}}(c^{\mathcal{N}},\varphi(c^{\mathcal{N}})) = 0 \quad (D_C^{\mathcal{N}}(c'^{\mathcal{N}},\varphi(c'^{\mathcal{N}})) = 0)$$

PROPOSICION 3. La relación ser isomorfas es una relación de equivalencia entre estructuras adecuadas.

Demostración:

Trivial .

DEFINICION 5. Sean $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dos estructuras adecuadas para L , decimos que existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{M}$ es isomorfa a una subestructura de $\mathcal{N}$.

PROPOSICION 4. Sea $\mathcal{M}$ una subestructura de $\mathcal{N}$, si φ es una fórmula cerrada universal de L y $\mathcal{N}$ es modelo de φ , entonces $\mathcal{M}$ es modelo de φ .

Demostración:

Trivial .

PROPOSICION 5. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras isomorfas , sea φ una fórmula cerrada universal de L , $\mathcal{N}$ es modelo de φ si y sólo si $\mathcal{M}$ es modelo de φ .

Demostración:

Para cada término t de tipo 1 de L se tiene que

$$D_E^{\mathcal{N}}(\varphi(t^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)),t^{\mathcal{N}}(\varphi(x_1),..\varphi(x_n),\varphi(a_1),..\varphi(a_k)))=0$$

como es fácil probar por inducción sobre el número de funciones de L que aparecen en t .

Analogamente para cada término t' de tipo 2 de L se tiene que

$$D_C^{\mathcal{N}}(\varphi(t'^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)),t'^{\mathcal{N}}(\varphi(x_1),...\varphi(a_k)))=0$$

por ser $\varphi : |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \to |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$

la restricción de un isomorfismo entre grupos ordenados , compatible con su orden , se tiene que

$$\varphi(\max(F^{\mathcal{M}}, G^{\mathcal{M}}) = \max(\varphi(F^{\mathcal{M}}),\varphi(G^{\mathcal{M}}))$$

para cada dos expresiones F , G de L

y tambien :

$\varphi(F^{\mathfrak{M}} \cdot G^{\mathfrak{M}}) = \varphi(F^{\mathfrak{M}}) \cdot \varphi(G^{\mathfrak{M}})$

sea Φ la fórmula

$\forall x_1,..\forall x_n \forall a_1,..\forall a_k \quad F^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k) \geqslant G^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k)$

supongamos que no es cierta en $\mathfrak{M}$ entonces

$\exists x_1,..\exists x_n \exists a_1,..\exists a_k \quad F^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k) < G^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k)$

sea $\alpha = F^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k)$

$\beta = G^{\mathfrak{M}}(x_1,...a_k)$ con $\alpha < \beta$, entonces

$\varphi(\alpha) = F^{\mathfrak{N}}(\varphi(x_1),...\varphi(a_k)) < G^{\mathfrak{N}}(\varphi(x_1),...\varphi(a_k)) = \varphi(\beta)$

en contra de ser $\mathfrak{N}$ modelo de Φ .

Sea $\mathfrak{M}$ una estructura adecuada , ω el primer ordinal límite , con $\langle x_n : n < \omega \rangle$ ($\langle a_n : n < \omega \rangle$) indicaremos una función definida en ω y que toma valores en $|\mathfrak{M}_E|$ ($|\mathfrak{M}_C|$), como es habitual la llamaremos sucesión y la escribiremos abreviadamente $\langle x_n \rangle$ ($\langle a_n \rangle$).

Sea $\langle x_n \rangle$ ($\langle a_n \rangle$) una sucesión , diremos que es de Cauchy si para cada α de Γ (grupo de valores) existe un $N < \omega$ tal que $D_E^{\mathfrak{M}}(x_n, x_m) < \alpha$ ($D_C^{\mathfrak{M}}(a_n, a_m) < \alpha$)

para cada $n,m > N$.

DEFINICION 6. Dadas dos sucesiones de Cauchy , $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ ($\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$) diremos que son equivalentes si para cada α de Γ existe un $N < \omega$ tal que

$D_E^{\mathfrak{M}}(x_n, y_n) < \alpha$ ($D_C^{\mathfrak{M}}(a_n, b_n) < \alpha$)

para cada $n,m > N$.

DEFINICION 7. Decimos que una sucesión de Cauchy $\langle x_n \rangle$ ($\langle a_n \rangle$) converge si existe un x de $|\mathfrak{M}_E|$ (a de $|\mathfrak{M}_C|$) tal que para cada α de Γ existe un $N < \omega$ tal que

$D_E^{\mathfrak{M}}(x_n, x) < \alpha$ ($D_C^{\mathfrak{M}}(a_n, a) < \alpha$) $n > N$

DEFINICION 8. Sea $\mathfrak{M}$ una estructura adecuada para L , decimos que $\mathfrak{M}$ es regular si :

1.-Para cada simbolo de función f n,k-aria de L y cada dos n+k-uplas $x_1,..x_n,\ a_1,..a_k$

$y_1,..y_n,\ b_1,..b_k$ si

$D_E^{\mathfrak{M}}(x_i, y_i) \leq 0 \qquad i = 1,..n$

$D_C^{\mathfrak{M}}(a_j, b_j) \leq 0 \qquad j = 1,..k$, entonces

$D_E^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k),\ f^{\mathfrak{M}}(y_1,..y_n,b_1,..b_k)) \leq 0$

2.-Para cada simbolo de función f' n,k-aria de L y cada dos n+k-uplas $x_1,..x_n;\ a_1,..a_k$

$y_1,..y_n;\ b_1,..b_k$ si

$D_E^{\mathfrak{M}}(x_i, y_i) \leq 0 \qquad i = 1,..n$

$D_C^{\mathfrak{M}}(a_j, b_j) \leq 0 \qquad j = 1,..k$, entonces

$D_C^{\mathfrak{M}}(f'^{\mathfrak{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k),\ f'^{\mathfrak{M}}(y_1,..y_n,b_1,..b_k)) \leq 0$

3.-Para cada simbolo de función R n,k-aria y cada dos n+k, uplas $x_1,..x_n;\ a_1,..a_k$

$y_1,..y_n;\ b_1,..b_k$ si

$D_E^{\mathfrak{M}}(x_i, y_i) \leq 0 \qquad i = 1,..n$

$D_C^{\mathfrak{M}}(a_j, b_j) \leq 0 \qquad j = 1,..k$, entonces

$R^{\mathfrak{M}}(x_1,..x_n a_1,..a_k) = R^{\mathfrak{M}}(y_1,..y_n,b_1,..b_k)$

DEFINICION 9. Sea $\mathfrak{M}$ una estructura adecuada para L, decimos que $\mathfrak{M}$ es separada si en $\mathfrak{M}$ es cierto que :

$\forall x \forall y \ (D_E^{\mathfrak{M}}(x,y) \leq 0 \Longrightarrow x = y \ )$

$\forall a \forall b \ (D_C^{\mathfrak{M}}(a,b) \leq 0 \Longrightarrow a = b \ )$

DEFINICION 10. Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L , decimos que Φ es agradable si se tiene que las siguientes fórmulas son deducibles de Φ en toda estructura adecuada:

1.- $\forall x \forall y \ (D_E (x,y) \geq D_E (y,x))$

2.- $\forall x \ (D_E (x,x) \leq 0 \ )$

3.- $\forall x \ (D_E (x,0_E) = N_E(x))$

4.- $\forall a \forall b \ (D_C (a,b) \geq D_C (b,a))$

5.- $\forall a \ (D_C (a,a) \leq 0 \ )$

6.- $\forall a \ (D_C (a,0_C) = N_C(a))$

7.- La fórmula $\varphi : \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2$

$(D_E(x_1 +_E x_2 , y_1 +_E y_2) \leq \max (D_E(x_1,y_1), D_E(x_2,y_2))) \ \Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

8.- La fórmula $\varphi : \forall x_1 \forall x_2 \forall a_1 \forall a_2$

$(D_E(x_1 \cdot_E a_1 , x_2 \cdot_E a_2) \leq \max(N_E(x_1) . D_C(a_1,a_2), N_C(a_2) . D_E(x_1,x_2))) \Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

9.- La fórmula $\varphi : \forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2$

$(D_C(a_1 +_C a_2, b_1 +_C b_2) \leq \max (D_C(a_1,b_1), D_C(a_2,b_2))) \ \Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

10.- La fórmula $\varphi : \forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2$

$(D_C(a_1 \cdot_C a_2, b_1 \cdot_C b_2) \leq \max (N_C(a_1) . D_C(a_2,b_2), N_C(b_2) . D_C(a_1,b_1)))$
$\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

11.- Para cada simbolo de función R n,k-aria de L la fórmula φ:
$\forall x_1 ,.. \forall x_n \forall a_1 ,.. \forall a_k$
$\forall y_1 ,.. \forall y_n \forall b_1 ,.. \forall b_k$

$(R(x_1,..a_k) \leq \max (\max_{i=1..n}(D_E(x_i,y_i)), \max_{j=1..k}(D_C(a_j,b_j)), R(y_1,..b_k)))$

$\Phi \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

PROPOSICION 6. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas de L , si $\mathcal{M}$ es un modelo adecuado de Φ entonces $\mathcal{M}$ es regular .

Demostración:

Para las funciones $+_E$, $+_C$ se deduce directamente de 7), y 9) ; para $\cdot_E$ y $\cdot_C$ como $\mathcal{M}$ es adecuado se tiene que

$0 \cdot \lambda = 0$ se sigue de 8) y 10) ; para N_C , D_C , N_E , D_E por 11) se tiene que

$R(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \leq R(y_1,..y_n,b_1,..b_k)$

y sustituyendo x por y , a por b se tiene que

$R(y_1,..y_n,b_1,..b_k) \leq R(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$

y por ser $\leq$ una relación de orden en el modelo adecuado se tiene la igualdad.

PROPOSICION 7. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L, si $\mathcal{M}$ es un modelo adecuado de Φ existe un modelo separado $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N}$ es isomorfo a un submodelo de $\mathcal{M}$.

Demostración:

Sean $|\mathcal{M}_E|$, $|\mathcal{M}_C|$, $|\mathcal{M}_R|$, $\Gamma_{\mathcal{M}}$, como Φ es agradable $\mathcal{M}$ es regular .

Sea $\sim_E$ la relación $x \sim_E y$ si y sólo si $D_E^{\mathcal{M}}(x,y) \leq 0$

sea $\sim_C$ la relación $a \sim_C b$ si y sólo si $D_C^{\mathcal{M}}(a,b) \leq 0$

por la definición de agradable se tiene que $\sim_E$ es reflexiva y simetrica , igualmente del apartado 11) de la definición de agradable para $D_E^{\mathcal{M}}$ se deduce que $\forall x \forall y \forall z \forall t$

$D_E^{\mathcal{M}}(y,z) \leq \max(D_E^{\mathcal{M}}(x,y), D_E^{\mathcal{M}}(t,z), D_E^{\mathcal{M}}(x,t))$

haciendo $x = t$

$D_E^{\mathcal{M}}(y,z) \leq \max(D_E^{\mathcal{M}}(x,y), D_E^{\mathcal{M}}(x,z))$

de donde se sigue la transitiva , por tanto $\sim_E$ es una relación de equivalencia en $|\mathcal{M}_E|$; análogamente $\sim_C$ es una reción de equivalencia en $|\mathcal{M}_C|$, por ser $\mathcal{M}$ regular la relación de equivalencia es compatible con los simbolos de función de los tipos f, f′, R de L.

Sea pues $|\mathcal{N}_E| = |\mathcal{M}_E|_{/\sim_E}$ $|\mathcal{N}_C| = |\mathcal{M}_C|_{/\sim_C}$

el conjunto cociente para la relación de equivalencia ;

sean $\bar{a}$, $\bar{b}$,variables de $|\mathcal{N}_C|$, $\bar{x}$, $\bar{y}$,variables de $|\mathcal{N}_E|$, para cada simbolo de función f n,k-ario definimos

$$f^{\mathcal{N}}(\bar{x}_1,..\bar{x}_n,\bar{a}_1,..\bar{a}_k) = f^{\mathcal{M}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$$

con x_i de la clase $\bar{x}_i$, a_j de la clase $\bar{a}_j$, análogamente definimos $f'^{\mathcal{N}}, R^{\mathcal{N}}$. Se tiene que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{M}}$ $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| = |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$

$\Gamma_{\mathcal{N}} \subset \Gamma_{\mathcal{M}}, |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}| \subset |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$ se sigue de la definición , si $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}}$ $\lambda \notin \Gamma_{\mathcal{N}}$ sea a tal que $N_C^{\mathcal{M}}(a) = \lambda$ tomando $\bar{a}$ se llega a contradicción, por tanto $\mathcal{N}$ es adecuado.

Sea $\varphi : |\mathcal{N}_C| \longrightarrow |\mathcal{M}_C|$

$\varphi : |\mathcal{N}_E| \longrightarrow |\mathcal{M}_E|$

tal que a cada clase le hace corresponder un representante ;

$\varphi : |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \longrightarrow |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$

la identidad ,y que a cada simbolo de constante le hace corresponder él mismo como representante de su clase.

Para cada $\bar{x}_1,..\bar{x}_n$ $\bar{a}_1,..\bar{a}_k$

$$D_E^{\mathcal{M}}(\varphi(f^{\mathcal{N}}(\bar{x}_1,...\bar{a}_k)), f^{\mathcal{M}}(\varphi(\bar{x}_1),..\varphi(\bar{a}_k)) = D_E^{\mathcal{M}}(\varphi(f^{\mathcal{N}}(\bar{x}_1,..\bar{a}_k)), f^{\mathcal{M}}(x_1,...a_k)) = 0$$

por ser $f^{\mathcal{M}}$ compatible con la relación de equivalencia , análogamente para las demás condiciones de inmersión.

Sea $F \geqslant G$ una fórmula cerrada universal de L que vale en $\mathcal{M}$, supongamos que no vale en $\mathcal{N}$ entonces

$$\exists \bar{x}_1,..\exists \bar{x}_n \exists \bar{a}_1,..\exists \bar{a}_k \; F^{\mathcal{N}}(\bar{x}_1,...\bar{a}_k) < G^{\mathcal{N}}(\bar{x}_1,...\bar{a}_k)$$

por definición de $F^{\mathcal{N}}$, $G^{\mathcal{N}}$ tenemos que

$$\exists x_1,..\exists x_n \exists a_1,..\exists a_k \; F^{\mathcal{M}}(x_1,...a_k) < G^{\mathcal{M}}(x_1,...a_k)$$

en contra de ser $F \geqslant G$ cierta en $\mathcal{M}$.

Estamos interesados en un tipo particular de modelos: los modelos completados .

DEFINICION 11. Sea $\mathcal{M}$ una estructura adecuada para L , decimos que $\mathcal{M}$ es completado si en $\mathcal{M}$ es cierto que:

1.- $\forall x \forall y \ (D_E^{\mathcal{M}}(x,y) \geqslant D_E^{\mathcal{M}}(y,x) \geqslant 0 \ )$

2.- $\forall x \ (D_E^{\mathcal{M}}(x,x) \leq 0 \ )$

3.- $\forall x \ (D_E^{\mathcal{M}}(x,0_E) = N_E^{\mathcal{M}}(x))$

4.- $\forall x \forall y \ \ (D_E^{\mathcal{M}}(x,y) \leq 0 \Rightarrow \ x = y \ )$

5.- Toda sucesión $\langle x_n \rangle$ de elementos de $|\mathcal{M}_E|$ tal que $N_E^{\mathcal{M}}(x_n)$ está acotado (en el grupo ordenado) y es de Cauchy converge .

6.- $\forall a \forall b \ \ (D_C^{\mathcal{M}}(a,b) \geqslant D_C^{\mathcal{M}}(b,a) \geqslant 0 \ )$

7.- $\forall a \ \ (D_C^{\mathcal{M}}(a,a) \leq 0 \ )$

8.- $\forall a \ \ (D_C^{\mathcal{M}}(a,0_C) = N_C^{\mathcal{M}}(a) \ )$

9.- $\forall a \forall b \ \ (D_C^{\mathcal{M}}(a,b) \leq 0 \Longrightarrow a = b \ )$

10.- toda sucesión $\langle a_n \rangle$ de elementos de $|\mathcal{M}_C|$ tal que $N_C^{\mathcal{M}}(a_n)$ está acotado (en el grupo ordenado) y es de Cauchy converge .

PROPOSICION 8. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L que tiene un modelo adecuado $\mathcal{M}$, entonces existe un modelo completado $\mathcal{N}$ único, excepto isomorfismos entre modelos, tal que :

1.- Existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$.

2.- Para cada elemento a de $|\mathcal{N}_C|$ existe una sucesión de elementos de $|\mathcal{M}_C|$ $\langle a_n \rangle$ tal que $N_C^{\mathcal{M}}(a_n)$ está acotado (en el grupo Γ) y

$$\lim_{n \to \infty} D_C^{\mathcal{N}}(\varphi_C(a_n), a) = 0$$

3.- Para cada elemento x de $|\mathcal{N}_E|$ existe un sucesión de elementos de $|\mathcal{M}_E|$ $\langle x_n \rangle$ tal que $N_E^{\mathcal{M}}(x_n)$ está acotado (en el grupo Γ) y

$$\lim_{n \to \infty} D_E^{\mathcal{N}}(\varphi_E(x_n), x) = 0$$

4.- Sea ϕ una fórmula cerrada universal de L, $\mathcal{M}$ es modelo de ϕ si y sólo si $\mathcal{N}$ es modelo de ϕ ..

Demostración:

Definamos una nueva estructura $\mathcal{N}_0$ sea $|\mathcal{N}_{0_E}|$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy de elementos de $|\mathcal{M}_E|$; $|\mathcal{N}_{0_C}|$ el conjunto de sucesiones de Cauchy de elementos de $|\mathcal{M}_C|$; utilizaremos x^i para indicar los elementos de $|\mathcal{N}_{0_E}|$ a^i para los de $|\mathcal{N}_{0_C}|$.

Demos una interpretación de los simbolos de L en $\mathcal{N}_0$

si f es un simbolo de función m,k-aria de L definimos :

$f^{\mathcal{N}_0}(x^1,..x^m,a^1,..a^k)$ la sucesión $\langle f^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)\rangle$

si f' es un simbolo de función m,k-aria de L definimos :

$f'^{\mathcal{N}_0}(x^1,..x^m,a^1,..a^k)$ la sucesión $\langle f'^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)\rangle$

si R es un simbolo de función m,k-aria de L definimos :

$R^{\mathcal{N}_0}(x^1,..x^m,a^1,..a^k)$ la sucesión $\langle R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)\rangle$

Veamos que $\mathcal{N}_0$ es una estructura adecuada:

Sea $\mathcal{M}$ el modelo adecuado inicial, $|\mathcal{M}_3|$ el subconjunto del grupo ordenado linealmente, de acuerdo con lo probado anteriormente en la existencia de modelos real valorado, podemos suponer que $|\mathcal{M}_3|$ es un subconjunto de $\mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$, sea $\Gamma_{\mathcal{M}}$ el subgrupo de $\mathbb{R}_+^*$ no reducido a 1, la interpretación de . el producto en $\mathbb{R}_+^*$, la interpretación de max el supremo para la relación de orden en $\mathbb{R}_+^*$, la interpretación de $\geqslant$ la relación de orden usual en $\mathbb{R}^*_+$. Definiendo la interpretación de . , $\geqslant$, max de forma análoga para $|\mathcal{N}_{0_3}|$ veamos que $\Gamma_{\mathcal{M}} = \Gamma_{\mathcal{N}_0}$. Como Φ está acotado y $x^1,..x^m,a^1,..a^k$ son acotados se tiene que :

$$R^{\mathcal{N}_0}(x^1,..x^m,a^1,..a^k) = \langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n)\rangle$$

es una sucesión acotada en $R^*_+ \cup \{0\}$ y existe un M en $\mathbb{R}_+$ tal que para todo n

$$R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n) \in [0,M]$$

como la topología de los reales es separada y R es completo veamos que no hay dos puntos de acumulación distintos para la sucesión.

Estudiemos primero el caso en que 0 sea uno de los puntos de acumulación.

Como $\Gamma_{\mathcal{M}}$ es por lo menos cíclico infinito 0 es punto de acumulación de $\Gamma_{\mathcal{M}}$, sea pues ρ_m una sucesión de elementos de $\Gamma_{\mathcal{M}}$ con $\rho_m \longrightarrow 0$, entonces para cada $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ existe un ρ_h de $\Gamma_{\mathcal{M}}$ con $\alpha > \rho_h$.

Sea α otro punto de acumulación para

$$\langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n)\rangle$$

con $\alpha > 0 \Rightarrow \exists\, \rho_h \in \Gamma_{\mathcal{M}} \quad \alpha > \rho_h > 0$

como 0 es punto de acumulación de

$$\langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n)\rangle$$

existen m+k subsucesiones , $\langle \bar{y}^1_n\rangle,..\langle \bar{y}^m_n\rangle, \langle \bar{b}^1_n\rangle,..\langle \bar{b}^k_n\rangle$

tales que para cada $\rho_h \in \Gamma_{\mathcal{M}}$ $\exists$ N $n > N$ se tiene

$$R^{\mathcal{M}}(y^1_n,..y^m_n,b^1_n,..b^k_n) < \rho_h$$

escogemos ρ_h de forma que $\rho_h < \rho < \alpha$, como α es punto de acumulación de

$\langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n)\rangle$ existen m+k subsucesiones :

$\langle \bar{x}^1_n\rangle,..\langle \bar{x}^m_n\rangle \langle \bar{a}^1_n\rangle,..\langle \bar{a}^k_n\rangle$ tales que existe N $n > N$

se tiene

$$R^{\mathcal{M}}(\bar{x}^1_n,..\bar{x}^m_n,\bar{a}^1_n,..\bar{a}^k_n) \geq \rho$$

escogiendo n de forma que

$$D_E^{\mathcal{M}}(\bar{x}^i_n, \bar{y}^i_n) \leq \rho_h < \rho \qquad i = 1,..m$$

$$D_C^{\mathcal{M}}(\bar{a}^j_n, \bar{b}^j_n) \leq \rho_h < \rho \qquad j = 1,..k$$

como $\langle \bar{x}^i_n \rangle, \langle \bar{y}^i_n \rangle, \langle \bar{a}^j_n \rangle, \langle \bar{b}^j_n \rangle$, son subsucesiones de sucesiones de Cauchy , si ampliamos L añadiendo las nuevas constantes :

$$\bar{x}^1,..\bar{x}^m \qquad \bar{y}^1,..\bar{y}^m \;;$$
$$\bar{a}^1,..\bar{a}^k \qquad \bar{b}^1,..\bar{b}^k$$

añadiendole a Φ las fórmulas

$$N_C(\bar{a}^j) \leq M \qquad j = 1,..k$$

$$N_C(\bar{b}^j) \leq M \qquad j = 1,..k$$

$$N_E(\bar{x}^i) \leq M \qquad i = 1,..m$$

$$N_E(\bar{y}^i) \leq M \qquad i = 1,..m$$; y para cada h

$$D_C(\bar{a}^j, \bar{b}^j) \leq \rho_h \qquad j = 1,,.k$$

$$D_E(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \leq \rho_h \qquad i = 1,..m$$

por el teorema de compacidad tiene un modelo adecuado y por hipótesis

$$R(\bar{x}^1_n,..\bar{x}^m_n,\bar{a}^1_n,..\bar{a}^k_n) \geq \rho$$

$$R(\bar{y}^1_n,..\bar{y}^m_n,\bar{b}^1_n,..\bar{b}^k_n) < \rho$$

se contradice que Φ sea un conjunto agradable de fórmulas.

Hemos probado pues que si 0 es punto de acumulación de

$\langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n) \rangle$ dicha sucesión tiende a 0 , supongamos pues que 0 no es punto de acumulación de

$\langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n) \rangle$, podemos suponer entonces que para todo n

$$R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) > 0$$

(bastaría eliminar un número finito de términos de la sucesióm) ,es decir que todos los $R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)$ son elementos del grupo ordenado y $\exists \rho \in \Gamma_{\mathcal{M}}$ tal que

$$\rho^{-1} \leq R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \leq \rho$$

como $\mathbb{R}_+^*$ es grupo topológico la topología se puede dar por el filtro de los entorms simétricos de 1 ,elemento neutro, y coincide con la topología inducida por $\mathbb{R}$ en Γ , que es pues separada. Por ser $\mathbb{R}_+^*$ completo para las sucesiones de Cauchy que no tienden a 0 , sean pues α , β dos puntos de acumulación de

$$\langle R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \rangle$$

con $\alpha > \beta$; sean $\langle \bar{x}_n^1 \rangle, \langle \bar{x}_n^m \rangle, \langle \bar{a}_n^1 \rangle, \ldots \langle \bar{a}_n^k \rangle$ las subsucesiones tal que

$$R^{\mathcal{M}}(\bar{x}_n^1,..\bar{x}_n^m,\bar{a}_n^1,..\bar{a}_n^k) \longrightarrow \alpha$$

$\langle \bar{y}_n^1 \rangle, \ldots \langle \bar{y}_n^m \rangle, \langle \bar{b}_n^1 \rangle, \ldots \langle \bar{b}_n^k \rangle$ las subsucesiones tal que

$$R^{\mathcal{M}}(\bar{y}_n^1,..\bar{y}_n^m,\bar{b}_n^1,..\bar{b}_n^k) \longrightarrow \beta \;;$$

supongamos que existe γ en $|\mathcal{M}_3|$ con $\beta < \gamma < \alpha$ (en $\mathbb{R}_+^*$ seguro que existe por ser denso el orden) , entonces como $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\beta}\right)$ es un entorno de 1 y $\left(\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ es un entorno de 1 , existe un N tal que para cada $n > N$

$$\gamma < R^{\mathcal{M}}(\bar{x}_n^1,...\bar{a}_n^k) < \frac{\alpha^2}{\gamma}$$

existe un N_1 tal que para cada n N_1

$$\frac{\beta^2}{\gamma} < R^{\mathcal{M}}(\bar{y}_n^1,...\bar{b}_n^k) < \gamma$$

existirá un ρ_h de forma que $\rho_h < \beta$ si formamos la ampliación de L añadiendole las nuevas constantes

$\bar{x}^1,..\bar{x}^m$ $\bar{y}^1,..\bar{y}^m$

$\bar{a}^1,..\bar{a}^k$ $\bar{b}^1,..\bar{b}^k$

y a Φ las fórmulas siguientes

$N_C(\bar{a}^j) \leq M \qquad j = 1,..k$

$N_C(\bar{b}^j) \leq M \qquad$ "

$N_E(\bar{x}^i) \leq M \qquad i = 1,..m$

$N_E(\bar{y}^i) \leq M \qquad$ "

y para cada h

$D_C(\bar{a}^j,\bar{b}^j) \leq \rho_h \qquad j = 1,..k$

$D_E(\bar{x}^i,\bar{y}^i) \leq \rho_h \qquad i = 1,..m$

se contradice análogamente la definición de agradable ;

si no existe ρ en $|\mathcal{M}_3|$, entonces existe un N tal que para cada $n > N$

$R^{\mathcal{M}}(\bar{x}^1_n,...\bar{a}^k_n) \geq \alpha$

y existe un N_1 tal que para cada $n > N_1$

$R^{\mathcal{M}}(\bar{y}^1_n,...\bar{b}^k_n) \leq \beta$

y analogamente se obtiene la contradición.

Probemos que $|\mathcal{M}_3| = |\mathcal{N}_{0_3}|$ y $\Gamma_{\mathcal{M}} = |\Gamma_{\mathcal{N}_0}|$

Sea $\alpha = \langle R^{\mathcal{M}}(x^1_n,..x^m_n,a^1_n,..a^k_n) \rangle$
con $\langle x^1_n \rangle,..\langle x^m_n \rangle, \langle a^1_n \rangle,..\langle a^k_n \rangle$ sucesión de Cauchy .

Hemos probado que el límite existe y es único en $\mathbb{R}^*_+ \cup \{0\}$,
si $\alpha = 0$ no hay nada que probar ya que $0 \in |\Gamma_{\mathcal{N}_0}| \cup \{0\}$,

si $\alpha \neq 0$ como las funciones R que están en nuestro lenguaje son

D_C 0,2 - aria $\qquad$ N_C 0,1 - aria

D_E 2,0 - aria $\qquad$ N_E 1,0 - aria

entonces concretando de la definición de agradable para estos simbolos de función:

$N_E(x) \leq \max(D_E(x,y) , N_E(y))$

$N_C(a) \leq \max(D_C(a,b)\ ,\ N_C(b))$

si $D_C(a,b)$ es pequeño respecto de $N_C(a)$ (ó $N_C(b)$)

si $D_E(x,y)$ " " " " "

se tiene que

$N_E(x) = N_E(y)$ para $x = x_n$, $y = x_m$ $n,m > N$.

$N_C(a) = N_C(b)$ para $a = a_n$, $b = a_m$ $n,m > N$

analogamente se prueba para D .

Hemos probado pues que $\mathcal{N}_0$ es una estructura adecuada , probemos que es cerrada para la definición de las funciones $f^{\mathcal{N}_0}$, $f'^{\mathcal{N}_0}$.

Si

f es un simbolo de función m,k-aria de L

f' " " " " " " "

$\langle x_n^1 \rangle, \ldots \langle x_n^m \rangle, \langle a_n^1 \rangle, \ldots \langle a_n^k \rangle$ son sucesiones de Cauchy de $|\mathcal{M}_E|$ y $|\mathcal{M}_C|$ respectivamente , entonces existe un M_i perteneciente a $\Gamma_{\mathcal{M}}$ con

$N_E(x_n^i) < M_i$ $i = 1,..m$ $n < \omega$

y existe M_j perteneciente a $\Gamma_{\mathcal{M}}$ con

$N_C(a_n^j) < M_j$ $j = 1,..k$ $n < \omega$

sea $M = \max(\max_{i=1..m}(M_i)\ ,\ \max_{j=1..k}(M_j))$

por ser Φ un conjunto acotado se tiene que

$N_E^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \leq M.M_f$

analogamente

$N_C^{\mathcal{M}}(f'^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \leq M.M_{f'}$

para $n < \omega$, entonces

$\langle f^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \rangle$

es acotada,

$\langle f'^{\mathcal{m}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) \rangle$, es acotada

veamos que son sucesiones de Cauchy :

añadiendo a L las constantes

$\bar{x}^1,...\bar{x}^m \qquad \bar{a}^1,...\bar{a}^k$

$\bar{y}^1,...\bar{y}^m \qquad \bar{y}^1,...\bar{y}^k$

y a Φ las fórmulas

$N_E(\bar{x}^1) \leq M \ ,... \ N_E(\bar{x}^m) \leq M$

$N_E(\bar{y}^1) \leq M \ ,... \ N_E(\bar{y}^m) \leq M$

$N_C(\bar{a}^1) \leq M \ ,... N_C(\bar{a}^k) \leq M$

$N_C(\bar{b}^1) \leq M \ ,... N_C(\bar{b}^k) \leq M$

$D_C(\bar{a}^j,\bar{b}^j) \leq \rho_n \quad n < \omega \quad$ con $\rho_n \longrightarrow 0$ en $\Gamma_{\mathcal{m}}$

$D_E(\bar{x}^i,\bar{y}^i) \leq \rho_n \quad n < \omega \quad$ con $\rho_n \longrightarrow 0$ en $\Gamma_{\mathcal{m}}$

$j = 1,..k$

$i = 1,..m$

$D_C(f'(\bar{x}^1,..\bar{a}^k) \ , \ f'(\bar{y}^1,..\bar{b}^k) \geqslant \rho_k$

$D_E(f \ (\bar{x}^1,..\bar{a}^k) \ , \ f \ (\bar{y}^1,..\bar{b}^k) \geqslant \rho_k$

con ρ_k fijo, por el teorema de compacidad admite un modelo adecuado y esto es inconsistente con que todos los modelos adecuados sean regulares.

Definamos a continuación dos relaciones:

$x^1 \sim_E y^1$ si y sólo si $D_E^{\mathcal{n}_o}(x^1,y^1) = 0$

$a^1 \sim_C b^1$ si y sólo si $D_C^{\mathcal{n}_o}(a^1,b^1) = 0$

por definición de $D_E^{\mathcal{n}_o}$, $D_C^{\mathcal{n}_o}$ es evidente que son reflexivas y simétricas y por ser Φ agradable se deduce que son transitivas. Por tanto son relaciones de equivalencia que al ser Φ agradable son compatibles con las funciones f', f , R de L.

Sea pues $|\mathcal{N}_C| = |\mathcal{N}_{0_C}| / \sim_C$

$|\mathcal{N}_E| = |\mathcal{N}_{0_E}| / \sim_E$

indicamos por $\dot{x}$, $\dot{a}$ la clase de equivalencia a que pertenece $\bar{x}$, $\bar{a}$.

Como las relaciones de equivalencia son compatibles para f', f , R de L definimos

$$f^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) = \overbrace{\langle f^{\mathcal{N}_0}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)\rangle}^{\bullet}$$

$$f'^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) = \overbrace{\langle f'^{\mathcal{N}_0}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)\rangle}^{\bullet}$$

$$R^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) = \lim_{n\to\infty}(R^{\mathcal{N}_0}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k))$$

como hemos probado que $\mathcal{N}_0$ tiene un modelo adecuado y que

$R^{\mathcal{N}_0}(\bar{x}^1,...\bar{a}^k) = \langle R^{\mathcal{N}}(\bar{x}_n^1,...\bar{a}_n^k)\rangle$

converge a un elemento de $|\mathcal{N}_{0_3}|$ entonces $\mathcal{N}$ tiene un modelo adecuado. Veamos que $|\mathcal{N}_C|$, $|\mathcal{N}_E|$ son cerrados para las sucesiones de Cauchy.

Veamoslo para $|\mathcal{N}_C|$. Sea $\dot{a}^1,..\dot{a}^k,...$ una sucesión de Cauchy en $|\mathcal{N}_C|$,

$\bar{a}_n^1$, una sucesión de la clase $\dot{a}^1$

$\bar{a}_n^k$ una sucesión de la clase $\dot{a}^k$

....

sea $\rho_h \to 0$ $\rho_h \in \Gamma$, para cada k y para cada h existe $n_{k,h}$ $i,j > n_{k,h}$ tales que

$D_C^{\mathcal{N}_0}(a_i^k,a_j^k) < \rho_h$

en particular , existe n_k $i,j > n_k$ tal que

$D_C^{\mathcal{N}_0}(a_i^k,a_j^k) < \rho_k$

sea $\bar{b} = \langle a^k_{n_k}\rangle$, como $\langle \dot{a}^k\rangle$ es una sucesión de Cauchy para cada ρ_h existe N_h tal que $k,\bar{m} > N_h$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} D_C^{\mathcal{N}\,0}(a_n^k, a_n^{\tilde{n}}) < \rho_h$$

se tiene tomando $k,\tilde{n} > h$ que $\bar{b}$ es una sucesión de Cauchy; sea $\dot{b}$ su clase; además se cumple

$$\lim_{n\to\infty} D_C^{\mathcal{N}\,0}(a_{n_k}^k, a_n^k) = 0$$

y son de la misma clase.

Analogamente se emplea un argumento diagonal y se prueba que $|\mathcal{N}_E|$ es cerrado para los sucesiones de Cauchy.

Si $t(x_1,..x_m,a_1,..a_k)$ es un término de tipo 1 de L es trivial, por indución en el número de funciones que están en t, que $\mathcal{N}$ es cerrado para t, analogamente para los términos t'.

Sea F una expresión m,k-aria de L, veamos que

$$F^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) = \lim_{n\to\infty} F^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)$$

En efecto , si F es un simbolo de relación R se sigue por la definición de $R^{\mathcal{N}}$.

Si F es max(R , G) , sea

$$\alpha = R^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k)$$

$$\beta = G^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k)$$

si $\alpha > \beta$ se sigue de la definición de $R^{\mathcal{N}}$ por ser el límite, ya que existe N $\omega > n > N$ tal que $R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k)$ analogamente existe N $\omega > n > N$ tal que $G^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k)$ luego de aquí se deduce que $F^{\mathcal{N}} = \alpha$;

si $\alpha = \beta$ se sigue igualmente por ser el límite que $F^{\mathcal{N}} = \alpha$.

Si F es G.R con $G^{\mathcal{N}}$ perteneciente a Γ es trivial que $F^{\mathcal{N}} = G^{\mathcal{N}} . R^{\mathcal{N}}$ ya que el límite del producto es el producto de los límites y tanto la sucesión $G^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k)$ como la sucesión $R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k)$ estan acotadas .

Sea Φ una fórmula propia cerrada universal de L tal que $\mathcal{M}$ es un modelo de Φ, veamos que $\mathcal{N}$ es un modelo de Φ.

En efecto : sea Φ la fórmula $\forall x_1,..\forall x_m\ \forall a_1,.\forall a_k$ $(F(x_1,..x_m,a_1,..a_k) \geq G(x_1,..x_m,a_1,..a_k))$

si $\mathcal{N}$ no es modelo de Φ

$\exists \dot{x}^1,..\exists \dot{x}^m\ \exists \dot{a}^1,..\exists \dot{a}^k$ tal que

$F^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) < G^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k)$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} F^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k) < \lim_{n\to\infty} G^{\mathcal{M}}(x_n^1,..x_n^m,a_n^1,..a_n^k)$$

y para n sufucientemente grande se contradice que $\mathcal{M}$ es modelo de Φ.

Existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ ya que tomando para cada x de $|\mathcal{M}_E|$ la sucesión $\langle x_n \ ; x_n = x\ n<\omega \rangle$ y para cada a de $|\mathcal{M}_C|$ la sucesión $\langle a_n \ ; a_n = a \quad n<\omega\rangle$ y la identidad de $|\mathcal{M}_3|$ en $|\mathcal{N}_3|$ se sigue por la definición de las funcinnes en $\mathcal{N}$. Como existe una inmersión y por la proposición 4 se sigue que toda fórmula propia cerrada universal que vale en $\mathcal{N}$ vale tambien en $\mathcal{M}$.

Sean $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ dos modelos construidos por la proposición. Sean

$$\varphi_C : |\mathcal{M}_C| \longrightarrow |\mathcal{N}_C| \quad ; \quad \varphi_E : |\mathcal{M}_E| \longrightarrow |\mathcal{N}_E|$$

$$\varphi'_E : |\mathcal{M}_E| \longrightarrow |\mathcal{N}'_E| \quad ; \quad \varphi'_C : |\mathcal{M}_C| \longrightarrow |\mathcal{N}'_C|$$

por construcción, para cada $\dot{a}$ de $|\mathcal{N}_C|$ existe una sucesión $\langle a_n \rangle$ de elementos de $|\mathcal{M}_C|$ tal que $N_C^{\mathcal{M}}(a_n)$ está acotada y

$$\lim_{n\to\infty} D_C^{\mathcal{N}}(\varphi_C(a_n),\dot{a})=0$$

por la definición de agradable se tiene que $\langle a_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy, sea $\dot{a}'$ la clase correspondiente a la sucesión $\langle a_n \rangle$ en $|\mathcal{N}_C^{\cdot}|$ considerando la aplicación $\Pi_C : \dot{a} \longrightarrow \dot{a}'$ y analogamente $\Pi_E : \dot{x} \longrightarrow \dot{x}'$ es inmediato por las definiciones de funciones en $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$ que define un isomorfismo entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$.

DEFINICION 12. Sea A un anillo , decimos que $N_C : A \longrightarrow R_+$ es un semivalor absoluto no arquimediano en A si N_C satisface las condiciones:

$N_C(0) = 0$

$N_C(a-b) \leq \max (N_C(a), N_C(b))$

$N_C(a.b) \leq N_C(a).N_C(b)$

decimos que el valor absoluto es separado si para cada a de A con $N_C(a) = 0$ se cumple que $a = 0$.

PROPOSICION 9. Existe un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L cuyos modelos real valorados obtenidos a partir de un modelo adecuado son módulos topológicos sobre un anillo conmutativo con elemento unidad semivalorado no arquimediano ; los modelos separados son módulos separados sobre un anillo íntegro semivalorado separado no arquimediano ; los modelos completados obtenidos a partirde un modelo separado son módulos separados completos sobre un anillo íntegro semivalorado separado no arquimediano y completo.

Demostración:

Obviamente nos referimos a los elementos de tipo 1 sobre los elementos de tipo 2 de $\mathcal{M}$.

Sea Φ el conjunto de fórmulas :

$\forall a \quad (N_C(a) \leq D_C(a, 0_C))$

$\forall a \quad (N_C(a) \geq D_C(a, 0_C))$

$$\forall x \quad (N_E(x) \leq D_E(x, 0_E))$$

$$\forall x \quad (N_E(x) \geqslant D_E(x, 0_E))$$

$$\forall a \; \forall b \quad (D_C(a,b) \geqslant 0)$$

$$\forall a \; \forall b \quad (D_C(a,b) \geqslant D_C(b,a))$$

$$\forall a \quad (D_C(a,a) \leq 0)$$

$$\forall x \; \forall y \quad (D_E(x,y) \geqslant 0)$$

$$\forall x \; \forall y \quad (D_E(x,y) \geqslant D_E(y,x))$$

$$\forall x \quad (D_E(x,x) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (D_C(a +_C (b +_C c), (a +_C b) +_C c) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \quad (D_C(a +_C b, b +_C a) \leq 0)$$

$$\forall a \quad (D_C(a +_C 0_C \, , \, a) \leq 0)$$

$$\forall a \quad (D_C(a +_C ((-1_C) \cdot_C a), \, 0_C \,) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (D_C(a \cdot_C (b \cdot_C c), (a \cdot_C b) \cdot_C c) \leq 0)$$

$$\forall a \quad (D_C(a \cdot_C 1_C \, , \, a) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (D_C(a \cdot_C (b +_C c), (a \cdot_C b) +_C (a \cdot_C c) \leq 0)$$

$$\forall x \; \forall y \; \forall z \quad (D_E(x +_E (y +_E z), (x +_E y) +_E z) \leq 0)$$

$$\forall x \; \forall y \quad (D_E(x +_E y \, , \, y +_E x) \leq 0)$$

$$\forall x \quad (D_E(x +_E ((-1_C \,) \cdot_E x) \, , \, 0_E \,) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall y \; \forall x \quad (D_E(a \cdot_E (x +_E y), (a \cdot_E x) +_E (a \cdot_E y)) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall x \quad (D_E(a \cdot_E (b \cdot_E x), (a \cdot_C b) \cdot_E x) \leq 0)$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall x \quad (D_E((a +_C b) \cdot_E x \, , \, (a \cdot_E x) +_E (b \cdot_E x)) \leq 0)$$

$$\forall x \quad (D_E(x \, , \, 1_C \; \cdot_E x) \leq 0)$$

$$\forall x \; \forall y \; \forall z \quad (D_E(x,y) \geqslant D_E(x +_E z \, , \, y +_E z))$$

$$\forall x \; \forall y \; \forall z \quad (D_E(x +_E z \, , \, y +_E z) \geqslant D_E(x,y))$$

$$\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (D_C(a,b) \geqslant D_C(a +_C c, b +_C c))$$

$$\forall a \; \forall b \quad (N_C(a \cdot_C b) \leq N_C(a) \cdot N_C(b))$$

$\forall x \ (D_E(x +_E 0_E \ , \ x) \leq 0 \ )$

$\forall a \ \forall b \ \forall c \ \ (D_C(a +_C c, b +_C c) \geqslant D_C(a,b))$

$\forall a \ \forall b \ \ (N_C(a \cdot_C b) \geqslant N_C(a) . N_C(b))$

$\forall a \ \forall x \ \ (N_E(a \cdot_E x) \geqslant N_C(a) . N_E(x))$

$\forall a \ \forall x \ \ (N_E(a \cdot_E x) \leq N_C(a) . N_E(x))$

$\forall a \ \forall b \ \ (N_C(a +_C b) \leq \max(N_C(a), N_C(b))$

$\forall x \ \forall y \ \ (N_E(x +_E y) \leq \max(N_E(x), N_E(y))$

$N_C(\ 1_C \ ) \leq 1$

$N_C(\ -1_C \ ) \leq 1$

$N_C(\ 0_C \ ) \leq 0$

$N_E(\ 0_E \ ) \leq 0$

$\forall x \ \forall y \ \forall z \ \forall v \ \ (D_E(x,y) \leq \max \ (D_E(x,z), D_E(y,v), D_E(z,v)))$

$\forall a \ \forall b \ \forall c \ \forall d \ \ (D_C(a,b) \leq \max \ (D_C(a,c), D_C(b,d), D_C(c,d)))$

DEFINICION 13. Sea $\mathcal{M}$ una estructura adecuada para L , decimos que $\mathcal{M}$ es c-adecuada si $\mathcal{M}$ es un modelo de $\forall a \ \exists b \ ((N_C(a) \leq 0) \vee (D_C(a \cdot_C b \ , \ 1) \leq 0))$

PROPOSICION 10. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L dado en el anterior proposición , si Φ tiene un modelo adecuado $\mathcal{M}$, entonces Φ tiene un modelo c-adecuado separado.

Demostración:

Podemos suponer que $\mathcal{M}$ es un modelo separado. Sean $|\mathcal{M}_E|$, $|\mathcal{M}_C|$, $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$, $\Gamma_{\mathcal{M}}$ definamos :

$$|\mathcal{N}_{0_C}| = |\mathcal{M}_C| \times (|\mathcal{M}_C| - \{0_C^{\mathcal{M}}\})$$

$$|\mathcal{N}_{0_E}| = |\mathcal{M}_E| \times (|\mathcal{M}_C| - \{0_C^{\mathcal{M}}\})$$

por ser $\mathcal{M}$ un modelo separado se tiene que si a pertenece al conjunto $\left\{|\mathcal{M}_C| - \{0\}\right\}$ existe ρ perteneciente a $\Gamma_{\mathcal{M}}$ con $N_C^{\mathcal{M}}(a) \geqslant \rho > 0$ ya que si no $D_C^{\mathcal{M}}(a,0_C) = 0$ y se tiene que $a = 0_C$; indicaremos los elementos de $|\mathcal{N}_{0_C}|$ como (a,b) siendo a en $|\mathcal{M}_C|$, b en $|\mathcal{M}_C| - \{0\}$; los elementos de $|\mathcal{N}_{0_E}|$ como (x,a) con x en $|\mathcal{M}_E|$, a en $|\mathcal{M}_C| - \{0\}$;

por : $0_C^{\mathcal{N}_0}=(0_C^{\mathcal{M}},1_C^{\mathcal{M}})$

$1_C^{\mathcal{N}_0}=(1_C^{\mathcal{M}},1_C^{\mathcal{M}})$

$-1_C^{\mathcal{N}_0}=(-1_C^{\mathcal{M}},1_C^{\mathcal{M}})$

$1_E^{\mathcal{N}_0}=(1_E^{\mathcal{M}},1_C^{\mathcal{M}})$

definimos :

$(a,b) \dotplus_C^{\mathcal{N}_0} (c,d)=((a \cdot_C^{\mathcal{M}} d) \dotplus_C^{\mathcal{M}} (b \cdot_C^{\mathcal{M}} c),b \cdot_C^{\mathcal{M}} d)$

$(a,b) \cdot_C^{\mathcal{N}_0} (c,d)=(a \cdot_C^{\mathcal{M}} c,b \cdot_C^{\mathcal{M}} d)$

$(x,a) \dotplus_E^{\mathcal{N}_0} (y,b)=((x \cdot_E^{\mathcal{M}} b) \dotplus_E^{\mathcal{M}} (y \cdot_E^{\mathcal{M}} a),a \cdot_C^{\mathcal{M}} b)$

$(a,b) \cdot_E^{\mathcal{N}_0} (x,c)=(x \cdot_E^{\mathcal{M}} a,b \cdot_C^{\mathcal{M}} c)$

$N_C^{\mathcal{N}_0}((a,b))=N_C^{\mathcal{M}}(a).\left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1}$

$N_E^{\mathcal{N}_0}((x,a))=N_E^{\mathcal{M}}(x).\left[N_C^{\mathcal{M}}(a)\right]^{-1}$

$D_E^{\mathcal{N}_0}((x,a),(y,b))=D_E^{\mathcal{M}}(x \cdot_E^{\mathcal{M}} b,y \cdot_E^{\mathcal{M}} a).\left[N_C^{\mathcal{M}}(a)\right]^{-1}.\left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1}$

$D_C^{\mathcal{N}_0}((a,b),(c,d))=D_C^{\mathcal{M}}(a \cdot_C^{\mathcal{M}} d,b \cdot_C^{\mathcal{M}} c).\left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1}.\left[N_C^{\mathcal{M}}(d)\right]^{-1}$

$\mathcal{N}_0$ es una estructura adecuada ya que $\Gamma_{\mathcal{N}_0} \equiv \Gamma_{\mathcal{M}}$ por ser subgrupo y $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| = |\mathcal{N}_{0_{\mathbb{R}}}|$ por ser cerrado para la multiplicación para elementos de Γ.

Como $\mathcal{M}$ es un modelo separado de Φ , y en Φ está $N_C(a.b) = N_C(a).N_C(b)$ si :

$$\left.\begin{array}{l} N_C^{\mathcal{M}}(b) > 0 \\ N_C^{\mathcal{M}}(d) > 0 \end{array}\right. \quad \text{entonces} \quad N_C^{\mathcal{M}}(b \cdot_C^{\mathcal{M}} d) > 0$$

por tanto $\mathcal{N}_0$ es cerrado para la definición de $\dotplus_C^{\mathcal{N}_0}$, $\dotplus_E^{\mathcal{N}_0}$

$\cdot_C^{\mathcal{N}_0}$, $\cdot_E^{\mathcal{N}_0}$.

Veamos que $\mathcal{N}_0$ es un modelo de Φ . Lo probaremos unicamente para algunas de las fórmulas de Φ el resto es análogo.

Sea por ejemplo la fórmula :

$\varphi : \forall a \; \forall b \quad (N_C(a +_C b) \leq \max (N_C(a), N_C(b))$

supongamos que no es cierta en $\mathcal{N}_0$, entonces $\exists$ (a,b) , $\exists$ (c,d) tal que

$N_C^{\mathcal{N}_0}((a,b) +_C^{\mathcal{N}_0} (c,d)) > \max(N_C^{\mathcal{N}_0}(a,b), N_C^{\mathcal{N}_0}(c,d)$,entonces

$N_C^{\mathcal{N}_0}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} d) +_C^{\mathcal{M}} (b \cdot_C^{\mathcal{M}} c), b \cdot_C^{\mathcal{M}} d) > \max(N_C^{\mathcal{M}}(a) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1},$
$N_C^{\mathcal{M}}(c) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(d)\right]^{-1})$, entonces

$N_C^{\mathcal{M}}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} d) +_C^{\mathcal{M}} (b \cdot_C^{\mathcal{M}} c)) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(b \cdot_C^{\mathcal{M}} d)\right]^{-1} >$
$\max (N_C^{\mathcal{M}}(a) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1}, N_C^{\mathcal{M}}(c) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(d)\right]^{-1})$ luego

$N_C^{\mathcal{M}}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} d) +_C^{\mathcal{M}} (b \cdot_C^{\mathcal{M}} c)) > \max ((N_C^{\mathcal{M}}(b \cdot_C^{\mathcal{M}} d) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(a) \cdot$
$\left[N_C^{\mathcal{M}}(b)\right]^{-1}, N_C^{\mathcal{M}}(b \cdot_C^{\mathcal{M}} d) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(c) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(d)\right]^{-1})$

por ser modelo adecuado y ser la relación de orden compatible con el producto, como en Φ está :

$\forall a \; \forall b \quad N_C(a \cdot_C b) = N_C(a) \cdot N_C(b)$, entonces

$N_C^{\mathcal{M}}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} d) +_C^{\mathcal{M}} (b \cdot_C^{\mathcal{M}} c)) > \max (N_C^{\mathcal{M}}(d) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(a), N_C^{\mathcal{M}}(b) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(c$

llamando

$a_1 = a \cdot_C^{\mathcal{M}} d$

$b_1 = b \cdot_C^{\mathcal{M}} c$, entonces

$N_C^{\mathcal{M}}(a_1 +_C^{\mathcal{M}} b_1) > \max (N_C^{\mathcal{M}}(a_1), N_C^{\mathcal{M}}(b_1))$

en contra de ser $\mathcal{M}$ un modelo de :

$\forall a \; \forall b \quad (N_C(a + b) \leq \max (N_C(a), N_C(b)))$

Analogamente se prueba que $\mathcal{N}_0$ es un modelo de φ para las otras fórmulas φ de Φ .

Se tiene sin embargo que $\mathcal{N}_0$ no es un modelo separado , sin embargo aplicando la proposición 7) obtenemos un modelo separado $\mathcal{N}$.

De forma análoga a la proposición 7) definimos la relación :

$(a,b)\sim_C (c,d)$ si y sólo si $D_C^{\mathcal{N}_0}((a,b),(c,d))\leq 0$

como por hipótesis :

$N_C^{\mathcal{M}}(b)>0$

$N_C^{\mathcal{M}}(d)>0$

equivale a que $D_C^{\mathcal{M}}(a \cdot_C^{\mathcal{M}} d , b \cdot_C^{\mathcal{M}} c)\leq 0$

y la relación :

$(x,b)\sim_E (y,d)$ si y sólo si $D_E^{\mathcal{M}}(x \cdot_E^{\mathcal{M}} d , y \cdot_E^{\mathcal{M}} b)\leq 0$

veamos que el modelo separado es c-adecuado:

sea (a,b) tal que $N_C^{\mathcal{N}}(a,b)>0$, entonces

$N_C^{\mathcal{M}}(a).\left[N_C (b)\right]^{-1}>0$

por tanto $N_C^{\mathcal{M}}(a)>0$, tomando (b,a) está en $|\mathcal{N}_{0_C}|$ y

$D_C^{\mathcal{N}_0}((a,b) \cdot_C^{\mathcal{N}_0}(b,a) , 1_C^{\mathcal{N}_0}) =$

$D_C^{\mathcal{N}_0}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} b,b \cdot_C^{\mathcal{M}} a),(1_C^{\mathcal{M}},1_C^{\mathcal{M}}))=$

$D_C^{\mathcal{M}}((a \cdot_C^{\mathcal{M}} b) \cdot_C^{\mathcal{M}} (1_C^{\mathcal{M}}),(b \cdot_C^{\mathcal{M}} a) \cdot_C^{\mathcal{M}} (1_C^{\mathcal{M}}))\leq 0$

por ser $\mathcal{M}$ modelo de Φ.

PROPOSICION 11. Los modelos completados obtenidos a partir de modelos c-adecuados son c-adecuados.

Demostración:

Supongamos lo contrario. Sea $\mathcal{M}$ el modelo c-adecuado , sea $\mathcal{N}$ el modelo completado y supongamos que $\mathcal{N}$ no es c-adecuado, entonces existe $\bar{a}$,siendo $N_C^{\mathcal{N}}(\bar{a})>0$ tal que para todo $\bar{b}$ $D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a}.\bar{b},1)>0$, supongamos que hubiera una sucesión $\langle\bar{b}_n\rangle$ tal que :

$$D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a}._c\bar{b}_n,1) = \rho_n \qquad \rho_n \longrightarrow 0$$

$$D_C^{\mathcal{N}}(\bar{b}_n,\bar{b}_k) = D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a} ._C^{\mathcal{N}} \bar{b}_n, \bar{a} ._C^{\mathcal{N}} \bar{b}^{\cdot}).\left[N_C^{\mathcal{N}}(\bar{a})\right]^{-1} \leq$$

$$\left[N_C^{\mathcal{N}}(\bar{a})\right]^{-1}_{\cdot} \max (D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a} ._C^{\mathcal{N}} \bar{b}_n,1), D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a} ._C^{\mathcal{N}} \bar{b}_k,1))$$

$$\left[N_C^{\mathcal{N}}(a)\right]^{-1}_{\cdot} \max (\rho_k , \rho_n) \longrightarrow 0$$

entonces se tiene que la sucesión $\langle \bar{b}_n \rangle = \bar{\bar{b}}$ es de Cauchy

y se deduce que $D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a}._c\bar{\bar{b}},1) \leq 0$ en contra de la hipótesis.

Entonces existe ρ_k de Γ tal que

$$D_C^{\mathcal{N}}(\bar{a}._c\bar{b},1) \geqslant \rho_k$$

Ampliando el lenguaje conla constante $\bar{a}$ se tiene la contradición con el hecho de que toda fórmula universal cerrada que vale en $\mathcal{N}$ vale en $\mathcal{M}$.

PROPOSICION 12. Existe un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales cuyos modelos completados obtenidos a partir de un modelo c-adecuado son espacios de Banach no arquimedianos sobre un cuerpo valorado completo no arquimediano.

Demostración:

Se sigue de las proposiciones anteriores.

DEFINICION 14. Sea L el lenguaje anteriormente descrito .Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de estructuras separadas c-adecuadas para L , supongamos que toda estructura de $\mathcal{C}$ es real valorada y sea $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ el conjunto de fórmulas cerradas universales de L válido en todas las estructuras de $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{C}$ es acotado (ó agradable) si $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ es acotado (ó agradable) .

DEFINICION 15. Sea A un conjunto infinito $,(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto acotado de estructuras para L , $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en A , diremos que $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ es $\mathcal{F}$ - apropiado si:

1.- Existe un $\beta\in$ A tal que :
$\{\alpha\in A$ tal que las subestructuras $|\mathcal{M}_C|_\alpha$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$; $|\mathcal{M}_C|_\beta$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$ son isomorfas y el isomorfismo entre grupos ordenados es la identidad $\}\in\mathcal{F}$

2.- $\{\alpha\in A$ tal que Imagen $D_E^{\mathcal{M}_\alpha}\subset$ Imagen $N_E^{\mathcal{M}_\alpha}\}\in\mathcal{F}$

De la definición se sigue inmediatamente la siguiente proposición .

PROPOSICION 13. Si en $\mathcal{U}(\mathcal{M}_\alpha)$ están las fórmulas:

$$\forall x\ \forall y\ (D_E(x,y)\leq N_E(x +_E(-1_C \cdot_E y)))$$

$$\forall x\ \forall y\ (D_E(x,y)\geq N_E(x +_E(-1_C \cdot_E y)))$$

y para cada α , β de A las subestructuras :
$|\mathcal{M}_C|_\alpha$,$\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$;$|\mathcal{M}_C|_\beta$,$\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$ son isomorfas y el isomorfismo entre grupos ordenados es la identidad ,
entonces $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ es $\mathcal{F}$ - apropiado para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ de A .

Sea pues $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto de estructuras $\mathcal{F}$ - apropiadas , llamaremos <u>casiultraproducto</u> de $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ a la estructura $\mathcal{N}$ tal que :
$|\mathcal{N}_C|$ es el conjunto de las aplicaciones $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $a_\alpha\in|\mathcal{M}_C|_\alpha$ para cada α y si $\varphi_{\alpha\beta}$ es la biyección entre $|\mathcal{M}_C|_\alpha$ y $|\mathcal{M}_C|_\beta$ $a_\beta=\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha)$;
$|\mathcal{N}_E|$ es el conjunto de las aplicaciones $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ con $x_\alpha\in|\mathcal{M}_E|_\alpha$ y tal que existe $\mu\in\Gamma$ con

$$\left\{ \alpha \text{ tal que } N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha) \leq \mu \right\} \in \mathcal{F}$$

para los simbolos de constante c ,

$c^{\mathcal{N}}$ es $(c_\alpha^{\mathcal{M}_\alpha})_{\alpha \in A}$

para los simbolos de constante c',

$c'^{\mathcal{N}}$ es $(c'^{\mathcal{M}_\alpha}_\alpha)_{\alpha \in A}$

si f' es un simbolo de función 0,k-aria de L $a^1,..a^k$ están en $|\mathcal{N}_C|$, a^i es $(a_\alpha^i)_{\alpha \in A}$ $\quad i = 1,..k$ entonces

$$f'^{\mathcal{N}}(a^1,..a^k) = (f'^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1,..a_\alpha^k))_{\alpha \in A}$$

si f es un simbolo de función n,k-aria de L , si

$x^1,\dots,x^n$ están en $|\mathcal{N}_E|$

$a^1,\dots,a^k$ están en $|\mathcal{N}_C|$

x^i es $(x_\alpha^i)_{\alpha \in A}$ $\quad i = 1,..n$

a^j es $(a_\alpha^j)_{\alpha \in A}$ $\quad j = 1,..k$

$$f^{\mathcal{N}}(x^1,,.x^n,a^1,..a^k) = (f^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k))_{\alpha \in A}$$

si R es un simbolo de función n,k-aria de L , y

$x^1,\dots,x^n$ están en $|\mathcal{N}_E|$

$a^1,\dots,a^k$ están en $|\mathcal{N}_C|$

x^i es $(x_\alpha^i)_{\alpha \in A}$ $\quad i = 1,..n$

a^j es $(a_\alpha^j)_{\alpha \in A}$ $\quad j = 1,..k$

$$R^{\mathcal{N}}(x^1,..x^n,a^1,..a^k) = \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)$$

Veamos que $\mathcal{N}$ es cerrado para la definición de las funciones .

Como $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto acotado de modelos para cada simbolo de función f n,k-aria de L existe λ_f de

Γ tal que la fórmula :

$\forall x_1,\dots \forall x_n \ \forall a_1,\dots \forall a_k$

$(N_E(f(x_1,\dots x_n,a_1,\dots a_k)) \leq \lambda_f \cdot (\max_{i=1..n} (N_E(x_i) . \max_{j=1..k} (N_C(a_j)))$

vale en $\mathcal{M}_\alpha$ para cada α de A ;

analogamente para cada simbolo f' n,k-ario de L existe un elemento de Γ, $\lambda_{f'}$ tal que la fórmula

$\forall x_1,\dots \forall x_n \ \forall a_1,\dots \forall a_k$

$(N_C(f'(x_1,\dots x_n,a_1,\dots a_k) \leq \lambda_{f'} \cdot (\max (1, \max_{j=1..k} (N_C(a_j))^k))$

es cierta en $\mathcal{M}_\alpha$ para cada α de A

para cada simbolo R n,k-ario de L existe un elemento de Γ, λ_R tal que la fórmula

$\forall x_1,\dots \forall x_n \ \forall a_1,\dots \forall a_k$

$(R(x_1,\dots x_n,a_1,\dots a_k) \leq \lambda_R \cdot (\max(\max_{i=1..n} (N_E(x_i)),\max_{j=1..k} (N_C(a_j))))$

vale en $\mathcal{M}_\alpha$ para cada α de A .

Sean $x^1,\dots,x^n$ en $|\mathcal{N}_E|$

$a^1,\dots,a^k$ en $|\mathcal{N}_C|$

sea para i = 1,..n , μ_i en Γ con

$B_i = \{\alpha : N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(x^i_\alpha) \leq \mu_i\} \in \mathcal{F}$

$B_0 = \{\alpha \in A$: las subestructuras $|\mathcal{M}_C|_\alpha$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$; $|\mathcal{M}_C|_\beta$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$ son isomorfas $\} \in \mathcal{F}$

Para cada α de B_0 se tendrá que para j = 1,..k

$N_C^{\mathcal{M}_\alpha}(a^j_\alpha) = N_C^{\mathcal{M}_\beta}(\varphi(a^j_\alpha)) = \lambda_j \in \Gamma$

por ser isomorfas .

Tomemos $B = B_1 \cap \dots \cap B_n \cap B_0$, por ser intersección finita de elementos del ultrafiltro se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

Tomemos $\mu = \max_{i=1..n} \mu_i$ $\lambda = \max_{j=1..k} \lambda_j$

y tanto μ como λ pertenecen a Γ, entonces

si f es n,k-aria con $k \neq 0$

$$N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(f^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)) \leq \lambda_f \cdot \lambda \cdot \mu \text{ para cada } \alpha \in B$$

si f es n,0-aria

$$N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(f^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n)) \leq \lambda_f \cdot \mu \quad \text{para cada } \alpha \in B$$

luego $(f^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n))_{\alpha \in A}$ está en $|\mathcal{N}_E|$.

Analogamente para cada f' 0,k-aria de L

$$N_C^{\mathcal{M}_\alpha}(f'^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1,..a_\alpha^k)) \leq \lambda_{f'} \cdot \max(1,\lambda^k) \text{ para cada } \alpha \in B_0$$

y

$$D_C^{\mathcal{M}_\beta}(\varphi_{\alpha\beta}(f'^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1,..a_\alpha^k)),f'^{\mathcal{M}_\beta}(\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha^1),..\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha^k)))=0$$

como $\mathcal{M}_\beta$ es un modelo separado tenemos que

$$\varphi_{\alpha\beta}(f'^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1,..a_\alpha^k))=f'^{\mathcal{M}_\beta}(\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha^1),..\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha^k))$$

y se tiene que $|\mathcal{N}_C|$ es cerrado para las funciones f'.

Según (1) lema 2,1 p. 123, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en A y $B \in \mathcal{F}$ entonces

$$\mathcal{F}' = \{ X \cap B \text{ con } X \in \mathcal{F} \} \text{ es un ultrafiltro en B.}$$

Tomemos como B el definido anteriormente, entonces para cada simbolo de función R n,k-ario de L se tiene

$$0 \leq R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k) \leq \lambda_R \cdot \max(\mu,\lambda) \text{ para cada}$$

$\alpha \in B$. $\mathcal{F}'$ es un ultrafiltro en B, su imagen es base de ultrafiltro en $[0,\lambda_R \cdot \max(\mu,\lambda)]$ que es compacto en $\mathbb{R}$ y por tanto converge. Veamos que :

$$\lim_{\mathcal{F}'} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,..a_\alpha^k) = \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)$$

Como todo punto límite de la imagen de $\mathcal{F}'$ es punto límite de la imagen de $\mathcal{F}$ y por ser $\mathbb{R}$ separado se tiene que el límite es único, por lo tanto las funciones $R^{\mathcal{N}}$ están bien definidas .

Definimos pues

$$\Gamma_{\mathcal{N}} = \{ \text{imagenes por las funciones R 0,k-aria de L de} |\mathcal{N}_C|^k \} \setminus \{0\}$$

$$|\mathcal{N}_{\mathbb{R}}| = \{ \text{imagenes por las funciones R de L} \}$$

por ser $B = \{ \alpha \in A : \text{las subestructuras} |\mathcal{M}_C|_\alpha , \Gamma_{\mathcal{M}_\alpha} ; |\mathcal{M}_C|_\beta , \Gamma_{\mathcal{M}_\beta} \text{ isomorfas} \} \in \mathcal{F}$

es trivial que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$ ya que para cada $\alpha \in B$ y cada símbolo R 0,k-ario

$R^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k)$ es constante $= R^{\mathcal{M}_\beta}(a_\beta^1,\ldots a_\beta^k)$.

Veamos que $|\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$ es cerrado para la multiplicación por elementos de $\Gamma_{\mathcal{N}}$.

Sea λ un elemento de $|\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$ entonces para alguna R n,k-aria y para algún $x^1,\ldots x^n,a^1,\ldots a^k$ $\lambda = \lim\limits_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k)$

sea μ un elemento de $\Gamma_{\mathcal{M}}$, como $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$ y $\mathcal{M}_\alpha$ es adecuado

$$\mu . R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1 ,\ldots x_\alpha^n ,a_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k) \in |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\alpha$$

$$\mu . R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1 ,\ldots x_\alpha^n ,a_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k) = R^{\mathcal{M}_\alpha}(y_\alpha^1 ,\ldots y_\alpha^n ,b_\alpha^1 ,\ldots b_\alpha^k)$$

entonces

$$\lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(y_\alpha^1 ,\ldots b_\alpha^k) = \mu . \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k)$$

por tanto $\mathcal{N}$ es una estructura adecuada .

Sea $F(x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_k)$ una expresión n,k-aria , veamos que :

$$F^{\mathcal{N}}(x^1,\ldots x^n,a^1,\ldots a^k) = \lim_{\mathcal{F}} F^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1 ,\ldots x_\alpha^n ,a_\alpha^1 ,\ldots a_\alpha^k)$$

si F es G.H , como la topología de $\mathbb{R}$ es compatible con el producto se tiene que :

$$\lim_{\mathcal{F}} F^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k) = \lim_{\mathcal{F}} G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)$$

$$\cdot \lim_{\mathcal{F}} H^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)$$

igualmente si F es max (G,H) como existe algún $B \in \mathcal{F}$ con

$G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k) \leq \rho$ para $\alpha \in B$

$H^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k) \leq \rho$ para $\alpha \in B$.

se prueba facilmente estudiando por separado los casos

$$\lim_{\mathcal{F}} G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k) > \lim_{\mathcal{F}} H^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k)$$

$$\lim_{\mathcal{F}} G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k) = \lim_{\mathcal{F}} H^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,...a_\alpha^k)$$

y el resultado se deduce por aparecer en cada expresión un número finito de simbolos max δ .

PROPOSICION 14. Sea B un elemento de $\mathcal{F}$, se cumple que el casiultraproducto es un modelo de $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$.

Demostración:

Supongamos que la fórmula

$$\varphi: \forall x_1,.. \forall x_n \forall a_1,.. \forall a_k$$

$$(F(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \geq G(x_1,..x_n,a_1,..a_k))$$

está en $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$ y no vale en $\mathcal{N}$, entonces existen

$$(x_\alpha^1)_{\alpha \in A},..(x_\alpha^n)_{\alpha \in A}, (a_\alpha^1)_{\alpha \in A},..(a_\alpha^k)_{\alpha \in A} .$$

con

$$\lim_{\mathcal{F}} F^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..a_\alpha^k) < \lim_{\mathcal{F}} G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..a_\alpha^k)$$

entonces para cada α_1 de algún $B_1 \in \mathcal{F}$

$$F^{\mathcal{M}_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}^1,...a_{\alpha_1}^k) < G^{\mathcal{M}_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}^1,..a_{\alpha_1}^k)$$

como $B \in \mathcal{F}$ $B \cap B_1 \neq \emptyset \in \mathcal{F}$ todo α_1 en $B \cap B_1$

$$F^{\mathcal{M}_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}^1,..a_{\alpha_1}^k) < G^{\mathcal{M}_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}^1,..a_{\alpha_1}^k)$$

en contra de que φ está en $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in B})$.

COROLARIO. El casiultraproducto es un modelo de $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Demostración:

Trivial, ya que A pertenece a $\mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ filtro.

DEFINICION 16. Sea $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras, llamaremos <u>ultraproducto</u> de $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ respecto al ultrafiltro $\mathcal{F}$ y lo indicaremos por $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$, al completado obtenido por la proposición 8 del casiultraproducto para $\mathcal{F}$.

PROPOSICION 15. Sea B un elemento de $\mathcal{F}$, entonces $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$ es un modelo de $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in B}$.

Demostración:

Se sigue de las proposiciones 8 y 14.

PROPOSICION 16. Sea el ultraproducto $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$; la subestructura $\left|\left(\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}\right)_C\right|$, $\Gamma_{\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}}$ es isomorfa al completado de la subestructura $|\mathcal{M}_C|_\beta$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$

Demostración:

Basta probar que la subestructura $|\mathcal{N}'_C|$, $\Gamma_{\mathcal{N}'}$ de $\mathcal{N}^\bullet$, estructura separada del casiultraproducto es isomorfo a $|\mathcal{M}_C|_\beta$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$.

Sea B = $\{ \alpha\in A$: las subestructuras $|\mathcal{M}_C|_\alpha$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$; $|\mathcal{M}_C|_\beta$,

$\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$, son isomorfas $\} \in \mathcal{F}$.

Por la definición de ultraproducto para cada elemento de $|\mathcal{N}_C|$

$(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ si $\alpha \in B$ $a_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha)$,

para cada elemento $\bar{a}$ de $|\mathcal{M}_C|_\beta$ sea $\varphi(\bar{a}) = (a_\gamma)_{\gamma\in A}$ con

$\bar{a} = \varphi_{\gamma\beta}(a_\gamma)$ si $\gamma \in B$

$a_\gamma = 0_C^{\mathcal{M}_\gamma}$ si $\gamma \notin B$

entonces $\varphi : |\mathcal{M}_C|_\alpha \longrightarrow |\mathcal{N}_C|$ es inyectiva,

sea $(b_\alpha)_{\alpha\in A}$ otro elemento de $|\mathcal{N}_C|$ con $a_\gamma = b_\gamma$ si $\gamma \in B$

veamos que

$$D_C^{\mathcal{N}}((a_\gamma)_{\gamma\in A}, (b_\alpha)_{\alpha\in A}) = 0$$

por definición de $D_C^{\mathcal{N}}$ se tiene

$$D_C^{\mathcal{N}}((a_\gamma)_{\gamma\in A}, (b_\alpha)_{\alpha\in A}) = \lim_{\mathcal{F}} D_C^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha, b_\alpha) = 0$$

ya que $D_C^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha, b_\alpha) = 0$ para cada α de B y por estar B en $\mathcal{F}$.

Por tanto la aplicación φ es sobre en la subestructura separado del casiultraproducto .

Cuando probanos que el casiultraproducto es una estructura adecuada , vimos que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$. Sea $\bar{a}$, $\bar{b}$ dos elementos de $|\mathcal{M}_C|_\beta$ probemos que

$$D_C^{\mathcal{N}}(\varphi(f'^{\mathcal{M}_\beta}(\bar{a}, \bar{b}), f'^{\mathcal{N}}(\varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{b}))) = 0$$ para cada símbolo de función f' de L .

Probemoslo para $\dot{+}_C$.

Sea $\alpha \in B$, por ser $|\mathcal{M}_C|_\alpha$ isomorfo a $|\mathcal{M}_C|_\beta$ se tiene

$$D_C^{\mathcal{M}_\alpha}(\varphi_{\beta\alpha}(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}), \varphi_{\beta\alpha}(\bar{a}) \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} \varphi_{\beta\alpha}(\bar{b})) = 0 \quad ,$$

por ser $\mathcal{M}_\alpha$ separado se tiene (*) :

$$\varphi_{\beta\alpha}(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}) = \varphi_{\beta\alpha}(\bar{a}) \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} \varphi_{\beta\alpha}(\bar{b})$$ para cada α de B

sea entonces

$(a_\alpha)_{\alpha\in A} = \varphi(\bar{a})$

$(b_\alpha)_{\alpha\in A} = \varphi(\bar{b})$

por definición de $\dot{+}_C^{\mathcal{N}}$ tendremos

$(a_\alpha)_{\alpha\in A} \dot{+}_C^{\mathcal{N}} (b_\alpha)_{\alpha\in A} = (a_\alpha \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} b_\alpha)_{\alpha\in A}$

por la definición de $D_C^{\mathcal{N}}$

$D_C^{\mathcal{N}} (\varphi(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}), (a_\alpha \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} b_\alpha)_{\alpha\in A} = \lim\limits_{\mathcal{F}} D^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b})_\alpha$

$, (a_\alpha \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} b_\alpha))$

y por la definición de φ para cada α de B

$(\varphi(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}))_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b})$

y por 4) de la definición de agradable y (*) se tiene que

$D^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}))_\alpha , (a_\alpha \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} b_\alpha))=0$

y por tanto

$D_C^{\mathcal{N}} (\varphi(\bar{a} \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\beta} \bar{b}) , (a_\alpha \dot{+}_C^{\mathcal{M}_\alpha} b_\alpha)) = 0$

Analogamente se prueba para $\cdot_C$

Además para cada $\bar{a}$ de $|\mathcal{M}_C|_\beta$ el que se cumpla

$N_C^{\mathcal{M}_\beta}(\bar{a}) = N_C^{\mathcal{N}}(\varphi(\bar{a}))$

se sigue inmediatamente de la definición de $N_C^{\mathcal{N}}$ y de que para cada α de B $|\mathcal{M}_C|_\beta$ y $|\mathcal{M}_C|_\alpha$ son isomorfos .

De igual modo se ve para D_C y para los simbolos constantes 0_C , 1_C , -1_C .

COROLARIO. El ultraproducto $\prod\limits_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es c-adecuado.

Demostración:

Por la proposición 11 , basta probar que la estructura separado obtenido del casiultraproducto es c - adecuado , pero esto es trivial por la proposición anterior , ya que si

$\mathcal{N}$ no es c - adecuado , existe a tal que para todo b

$D_C^{\mathcal{N}}(a \cdot_C^{\mathcal{N}} b , 1_C) \geq \lambda > 0$

y añadiendo un nuevo simbolo de constante existe una fórmula cerrada universal de L tal que $\mathcal{N}$ es modelo de φ y $\mathcal{M}_\alpha$ no es modelo de φ en contra de ser isomorfos .

PROPOSICION 17. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro principal em A , existe algún β perteneciente a A tal que el ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es isomorfo a la estructura completada de $\mathcal{M}_\beta$

Demostración:

Por ser el ultrafiltro principal , está formado por los conjuntos que contienen a un elemento de A ; sea β este elemento .

Veamos que la estructura separada obtenida del casiultraproducto es isomorfo a $\mathcal{M}_\beta$. Por la proposicion 16 ya hemos probado que las subestructuras :

$|\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}|_c$, $\Gamma_{\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}}$; $|\mathcal{M}_c|_\beta$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\beta}$

son isomorfas , sea x un elemento de $|\mathcal{M}_E|_\beta$. Definimos

$\varphi(x) = (x_\gamma)_{\gamma \in A}$ de forma que

$x_\gamma = x$ si $\gamma = \beta$

$x_\gamma = 0_E^{\mathcal{M}_\gamma}$ en otro caso ,

si $(y_\gamma)_{\gamma \in A}$ con $y_\beta = x$, entonces

$D_E^{\mathcal{N}}((x_\gamma)_{\gamma \in A}, (y_\gamma)_{\gamma \in A}) = \lim_{\mathcal{F}} D_E^{\mathcal{M}_\gamma}((x_\gamma),(y_\gamma))=0$

por ser $\mathcal{F}$ el ultrafiltro generado por β .

El resto de la demostración es análoga a la de la proposición 16 .

Como en un conjunto finito todos los ultrafiltros son principales , esta es la razón por la que hemos supuesto inicialmente que A es infinito .

De ahora en adelante supondremos , salvo afirmación explícita en contra , que el ultrafiltro $\mathcal{F}$ es no principal ya que si es principal resulta mas cómodo completar directamente $\mathcal{M}_\beta$.

DEFINICION 17. Si todas las estructuras $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ coinciden , al ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ le llamaremos ultrapotencia y lo indicaremos por $\mathcal{M}^A / \mathcal{F}$

PROPOSICION 18. Sea $\mathcal{M}$ una estructura c - adecuada, separada que es modelo de

$$\forall x \, \forall y \, (D_E(x,y) \geq N_E(x +_E (-1_C \cdot_E y)))$$

$$\forall x \, \forall y \, (D_E(x,y) \leq N_E(x +_E (-1_C \cdot_E y)))$$

entonces $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ con $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}$ para cada α es $\mathcal{F}$ - apropiada para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ de A .

Demostración:

Se sigue de la proposición 13 .

PROPOSICION 19. Sea $\mathcal{M}$ una estructura que cumple las hipótesis de la proposición 18 , entonces existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^A / \mathcal{F}$.

Demostración:

Sea $\varphi : |\mathcal{M}_E| \longrightarrow |(\mathcal{M}^A / \mathcal{F})_E|$

tal que a cada x de $|\mathcal{M}_E|$ le corresponde $(\varphi(x))_\alpha = x$ para cda α de A

$$\varphi : |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \longrightarrow |(\mathcal{M}^A/\mathcal{F})_{\mathbb{R}}| \qquad \text{la identidad ,}$$

por la proposición 16 basta probar que φ es restricción de un isomorfismo para las funciones f y las R n,k-aria con $n \neq 0$

Sea pues R n,0-aria con $n \neq 0$, por definición

$$R^{\mathcal{M}^A/\mathcal{F}} = \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}}(x^1_\alpha, \ldots x^n_\alpha)$$

entonces :

$$R^{\mathcal{M}}((\varphi(x^1))_\alpha, \ldots (\varphi(x^n))_\alpha) = R^{\mathcal{M}}(x^1, \ldots x^n) =$$
$$R^{\mathcal{M}^A/\mathcal{F}}(\varphi(x^1), \ldots \varphi(x^n))$$

sea f n,k-aria ,

$$R^{\mathcal{M}^A/\mathcal{F}}(\varphi(x^1), \ldots \varphi(a^k)) = (f^{\mathcal{M}}((\varphi(x^1)_\alpha, \ldots (\varphi(a^k))_\alpha))_{\alpha \in A}$$
$$= (f^{\mathcal{M}}(x^1, \ldots x^n, a^1, \ldots a^k))_{\alpha \in A} = \varphi(f^{\mathcal{M}}(x^1, \ldots x^n, a^1, \ldots a^k))$$

PROPOSICION 20. Sea $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras para L , si existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que en $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$ están las fórmulas cerradas universales de la demostración de la proposición 9 , el ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es un espacio de Banach no arquimediano.

Demostración:

Se deduce de las proposiciones 9 y 15 .

Sea $(\mathcal{M})_{\alpha \in A}$ un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras para L ; para cada $\mathcal{M}_\alpha$ indicamos por E_α al conjunto de elementos de $\mathcal{M}_\alpha$ de tipo 1 y por $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ al al conjunto de elementos del ultraproducto $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$ de tipo 1 ; analogamente usaremos $E^A/\mathcal{F}$ para el conjunto de elementos de tipo 1 de $\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$.

COROLARIO 1. Sea $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ una colección de espacios de Banach no arquimedianos sobre un mismo cuerpo valorado completo con valoración no trivial K , entonces para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ en A , $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha/\mathcal{F}$ es un espacio de Banach no arquimediano sobre K .

Demostración:

Sea $\mathcal{M}_\alpha$ la estructura obtenida de E_α , K , $\mathbb{R}_+$ de forma que la interpretación del predicado unitario P_1 sea el predicado $\in E_\alpha$, la interpretación del predicado P_2 sea el predicado $\in$ K , la interpretación del predicado P_3 sea el predicado $\in$ al conjunto de valores que toma la norma en el espacio ó la valoración en el cuerpo , la interpretación del predicado P_4 sea el predicado $\in$ al conjunto de valores que toma la valoración en el cuerpo $\Gamma_K \cup \{0\}$ entonces ,

$$|\mathcal{M}_E|_\alpha = E_\alpha$$

$$|\mathcal{M}_C|_\alpha = K$$

la interpretación de :

$+_E$ será la suma en E_α

$\cdot_E$ será el producto de elementos de E_α por elementos de K

$+_C$ será la suma en K

$\cdot_C$ será el producto en K

N_E será la norma en E

D_E será la distancia inducida por la norma en E

N_C será la valoración en K

D_C será la distancia inducida por la valoración

0_E será el neutro para la suma en E_α

0_C será el neutro para la suma en K

1_C será el neutro para el producto en K

-1_C será el inverso de 1_C para la suma en K

Como E_α es un espacio de Banach y K es un cuerpo valorado, el conjunto en que toma valores la norma en E_α y donde toma valores la valoración de K es $\mathbb{R}$ y la interpretación de $\cdot$ es el producto en $\mathbb{R}$, la interpretación de max el máximo en $\mathbb{R}$ y la interpretación de $\geqslant$ la relación de orden en $\mathbb{R}$.

Con esta interpretación de los simbolos de L, es trivial que $\mathcal{M}_\alpha$ es una estructura c - adecuada, separada y completada y es un simple ejercicio comprobar que es un modelo del conjunto de fórmulas de la proposición 9, como E_α es un espacio de Banach sobre un mismo cuerpo K para cada de A, se cumplen las condiciones de la proposición 13 y el resultado se obtiene directamente de la proposición 19.

Dado un espacio de Banach no arquimediano E_α a la estructura $\mathcal{M}_\alpha$ obtenida en la anterior demostración la llamaremos <u>estructura asociada</u> a E_α y reciprocamente, si $\mathcal{M}_\alpha$ es una estructura completada c - adecuada para L que es modelo de las fórmulas cerradas universales dadas por la proposición 12, llamaremos a $|\mathcal{M}_E|_\alpha$ <u>espacio de Banach</u> no arquimediano sobre el cuerpo $|\mathcal{M}_C|_\alpha$ <u>asociado</u> a $\mathcal{M}_\alpha$.

COROLARIO 2. Sea E un espacio de Banach no arquimediano sobre un cuerpo valorado completo con valoración no trivial K, cada ultrapotencia $\dot{E}^{A}/\mathcal{F}$ es un espacio de Banach no arquimediano sobre K .

Demostración:

Se deduce del corolario 1 y de la proposición 18 .

DEFINICION 18. Sea $\mathcal{N}$ una estructura para L ,

$$\varphi : F(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \geqslant G(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$$

una fórmula para L ,
decimos que $\mathcal{N}$ realiza φ (ó que φ es satisfacible en $\mathcal{N}$) si $\mathcal{N}$ es un modelo de

$$\exists x_1,.. \exists x_n \exists a_1,.. \exists a_k$$

$$\left(F(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \geqslant G(x_1,..x_n,a_1,..a_k)\right)$$

PROPOSICION 21. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto agradable de estructuras separadas c - adecuadas que cumplen las hipótesis de la proposición 13 , y sea $\mathcal{N}$ una estructura completada c - adecuada tal que existe un $\mathcal{M}_\alpha$ en $\mathcal{C}$ de forma que:

$|\mathcal{N}_c|$, $\Gamma_{\mathcal{N}}$; $|\mathcal{M}_c|_\alpha$, $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$ denso en $\mathbb{R}^*_+$, son isomorfos.

Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

a) $\mathcal{N}$ es isomorfo a una subestructura de algún ultraproducto de elementos de $\mathcal{C}$

b) $\mathcal{N}$ es un modelo de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$

c) Para cada fórmula φ n,0-aria sin cuantificadores en el tipo 1 de L

$$F(x_1,..x_n) \geqslant G(x_1,..x_n) \quad .$$

tal que $\mathcal{N}$ realiza φ y cada $\lambda < 1$ $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$, existe algún $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{M}$ realiza

$$F(x_1,..x_n) \geqslant \lambda \cdot G(x_1,..x_n)$$

Demostración:

a $\Longrightarrow$ b . Se deduce de las proposiciones 4 , 5 ,15 .

b $\Longrightarrow$ c . Supongamos que no se cumple c) entonces para algún $\lambda < 1$ en ninguna estructura $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ es realizable

$$F(x_1,..x_n) \geqslant \lambda\, G(x_1,..x_n)$$

entonces para cada $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ se tiene que

$$\forall x_1,.. \forall x_n (F(x_1,..x_n) < \lambda\, G(x_1,..x_n))$$

y por tanto la fórmula

$$\forall x_1,.. \forall x_n (F(x_1,..x_n)) \leq \lambda\, G(x_1,..x_n))$$

está en $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ en contra de que $\mathcal{N}$ sea un modelo de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$.

c $\Longrightarrow$ a . Para la demostración usaremos una versión del método de los diagramas (4) p. 68 .

Sea $L_{\mathcal{N}}$ el lenguaje obtenido de L añadiendole un simbolo de constante $\overline{x}$ para cada elemento x de $|\mathcal{N}_E|$ (se sobreentiende que si x es distinto de y entonces $\overline{x}$ es distinto de $\overline{y}$) .

Sea $\Delta_{\mathcal{N}}$ el conjunto de fórmulas propias cerradas de $L_{\mathcal{N}}$ ciertas en la expansión de $\mathcal{N}$ (que indicaremos tambien por $\mathcal{N}$) para $L_{\mathcal{N}}$ que interpreta cada constante $\overline{x}$ como el elemento x .

Por construcción si $\mathcal{N}$ realiza una fórmula Φ sin cuantificadores en x , entonces Φ está en $\Delta_{\mathcal{N}}$.

Sea A el conjunto de los conjuntos finitos de fórmulas propias cerradas sin cuantificadores de $\Delta_{\mathcal{N}}$, para cada

α de A sea $\hat{\alpha}$ el conjunto de todos los conjuntos de A que contienen a α , el conjunto de los $\hat{\alpha}$ cuando α recorre A tiene la propiedad de intersección finita,(4) p. 166 , y es base de filtro y puede extenderse a un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en A.

Sea $n(\alpha)$ el número de fórmulas que están en α , para cada α de A $n(\alpha) \geqslant 1$ y como en $\mathcal{F}$ están conjuntos con un número de fórmulas arbitrariamente grande se tiene que

$$\lim_{\mathcal{F}} \frac{1}{n(\alpha)} = 0 \quad .$$

Para cada α de A

$$\alpha = \left\{ F_1 \geqslant G_1 \;, \ldots\ldots, F_{n(\alpha)} \geqslant G_{n(\alpha)} \right\}$$

sean $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_m$ los simbolos de constante que aparecen en estas fórmulas.

Ya que $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$ es denso , sea $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}_\alpha}$ tal que

$$\frac{n(\alpha)-1}{n(\alpha)} \leq \lambda < 1$$

como la fórmula

$$\bigwedge_{i=1}^{n(\alpha)} (F_i(x_1, \ldots x_m) \geqslant G_i(x_1, \ldots x_m))$$

se realiza en $\mathcal{N}$, existe un $\mathcal{M}_\alpha$ en $\mathcal{C}$ en el que es cierto

$$\exists x_1, \ldots \exists x_m \left(\bigwedge_{i=1}^{n(\alpha)} (F_i(x_1, \ldots x_m) \geqslant \lambda \; G_i(x_1, \ldots x_m)) \right)$$

y sean $x_1^\alpha , \ldots x_m^\alpha$ elementos de $|\mathcal{M}_E|_\alpha$ que satisfacen esta fórmula .

Sea el ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{N}$ es isomorfo a una subestructura de $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$.

Para cada ele mento a de $|\mathcal{N}_C|$ $(\varphi(a))_\alpha$ es la imagen por el isomorfismo entre $|\mathcal{N}_C|$ y $|\mathcal{M}_C|_\alpha$; φ en $|\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$ es una restricción de la identidad de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$;

para cada elemento x de $|\mathcal{N}_E|$:

$(\varphi(x))_\alpha$ es x^i si $\bar{x}$ aparece en α como x_i

$(\varphi(x))_\alpha$ es $0_E^{\mathcal{M}_\alpha}$ si x no aparece en α

Es evidente que φ es un isomorfismo entre $|\mathcal{N}_C|$ y $\left|\left(\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}\right)_C\right|$

Veamos ahora que para cada x de $|\mathcal{N}_E|$ $\varphi(x)$ está acotada en el ultrafiltro:

sea ρ en Γ tal que $N_E^{\mathcal{N}}(x)\leq \rho$, entonces todo α que contenga a la fórmula $N_E(\bar{x})\leq\rho$ en $\hat{\alpha}$ se tiene que

$\lambda \cdot N_E^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(x))_\alpha) \leq \rho$

y multiplicando por λ^{-1} se sigue que en $\hat{\alpha}$ $\varphi(x)$ está acotada luego $\varphi(x)$ está en el ultraproducto.

Veamos que φ es inyectiva en $|\mathcal{N}_E|$.

Si no existe x , y en $|\mathcal{N}_E|$ con $D_E^{\mathcal{N}}(x,y)\geq\rho>0$,

$\varphi(x) = \varphi(y)$, tomando α que contenga a $D_E(\bar{x},\bar{y})\geq\rho$

se tiene que

$D_E^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(x))_\alpha,(\varphi(y))_\alpha)\geq\lambda\rho>0$

en contra de que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Veamoslo para las funciones, como φ es un isomorfismo entre

$|\mathcal{N}_C|$, $\Gamma_{\mathcal{N}}$ y $\left|\left(\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}\right)_C\right|$, $\Gamma_{\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}}$

tenemos que para las funciones f' de L , que son 0,k-arias, y las funciones R 0,k-arias se cumple la condición de isomorfismo . Sea f una función n,k-aria de L ,

$y = f^{\mathcal{N}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$

Veamos que :

$D_E^{\prod_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}}(\varphi(f^{\mathcal{N}}(x_1,..a_k)),f^{\prod\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}}(\varphi(x_1),..\varphi(a_k)))=0$

en caso contrario se tendría:

$$\lim_{\mathcal{F}} D_E^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(f^{\mathcal{N}}(x_1,..a_k)))_\alpha , f^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(x_1))_\alpha ,..(\varphi(a_k))_\alpha)$$

$\geqslant \mu > 0$ con $\mu \in \Gamma$

tomando α que contenga la fórmula

$$\exists a_1,.. \exists a_k (D_E(\bar{y} , f(\bar{x}_1,..\bar{x}_n,a_1,..a_k)) \leqslant 0)$$

y al menos otra fórmula más ;

como β está en $\hat{\alpha}$, en β existen al menos dos fórmulas y $n(\alpha) > 1$, para cada β de $\hat{\alpha}$ se tiene que

$$D^{\mathcal{M}_\beta}((\varphi(f^{\mathcal{N}}(x_1,..a_k)))_\beta , f^{\mathcal{M}_\beta}((\varphi(x_1))_\beta ,..((a_k))_\beta)) \leq$$

$$\leq \lambda . 0 = 0 \qquad \text{con} \qquad 1 < \lambda < \frac{n(\beta)}{n(\beta)-1} \leq 2$$

en contra de que

$$\lim_{\mathcal{F}} D_E^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(f^{\mathcal{N}}(x_1,..a_k)))_\alpha , f^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(x_1))_\alpha ,.(\varphi(a_k))_\alpha) > 0$$

Sea R un simbolo de función n,k-ario con $n \neq 0$,

como $\varphi : |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}| \longrightarrow \left| \left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F} \right)_{\mathbb{R}} \right|$ es la restricción de la identidad de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$, sea $\mu = R^{\mathcal{N}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)$

entonces $\varphi(R^{\mathcal{N}}(x_1,..x_n,a_1,..a_k)) = \mu$

veamos que:

$\mu = R^{\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}}(\varphi(x_1),.. \varphi(a_k))$ es decir

$$\mu = \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}((\varphi(x_1))_\alpha ,..(\varphi(a_k))_\alpha)$$

tomando α de forma que estén las fórmulas en $\hat{\alpha}$

$$\exists a_1,.. \exists a_k (R(\bar{x}_1,..\bar{x}_n,a_1,..a_k) \geqslant \mu)$$

$$\exists a_1,.. \exists a_k (R(\bar{x}_1,..\bar{x}_n,a_1,..a_k) \geqslant \mu)$$

se tiene :

$$R^{\mathcal{M}_{\beta'}}((\varphi(x_1))_\beta,\ldots(\varphi(x_n))_\beta,(\varphi(a_1))_\beta,\ldots(\varphi(a_k))_\beta)\geq\lambda\cdot\mu$$

$$1>\lambda>\frac{n(\beta)-1}{n(\beta)}\geq\frac{1}{2}$$

$$R^{\mathcal{M}_\beta}((\varphi(x_1))_\beta,\ldots(\varphi(a_k))_\beta)\leq\lambda^{-1}\cdot\mu$$

tomando β de forma que en β estén un número suficientemente grande de fórmulas tenemos que:

$$\mu=\lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(\varphi(x_1)_\alpha,\ldots(\varphi(a_k))_\alpha)$$

PROPOSICION 22. Sea $\mathcal{M}$ una estructura agradable que cumple las hipótesis de la proposición 18 , $\mathcal{N}$ una estructura completada tal que $|\mathcal{N}_c|$, $\Gamma_{\mathcal{N}}$; $|\mathcal{M}_c|$, $\Gamma_{\mathcal{M}}$ sean isomorfos, con $\Gamma_{\mathcal{M}}$ denso en $\mathbb{R}_+^*$.

Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

a) Existe una inmersión de $\mathcal{N}$ en alguna ultrapotencia $\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$

b) $\mathcal{N}$ es un modelo de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$

c) Para cada fórmula φ n,0-aria sin cuantificadores de tipo 1 $F(x_1,..x_n)\geq G(x_1,..x_n)$ de L tal que $\mathcal{N}$ realiza φ y cada $\lambda<1$ de $\Gamma_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ realiza $F(x_1,..x_n)\geq\lambda\, G(x_1,..x_n)$

Demostración:

Se deduce de la proposición anterior .

DEFINICION 19. Sean $E_1\subset E_2$ espacios de Banach no arquimedianos , decimos que E_2 es una u - extensión de E_1 si las estructuras asociadas $\mathcal{M}_{E_1}$, $\mathcal{N}_{E_2}$ verifican que existe una inmersión de $\mathcal{N}_{E_2}$ en una ultrapotencia de $\mathcal{M}_{E_1}$ que restrigida a $\mathcal{M}_{E_1}$ coincide con la inmersión de la proposición 19

PROPOSICION 23. Sea $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ una colección de espacios de Banach no arquimedianos sobre un mismo cuerpo K, si existe un β perteneciente a A tal que para las estructuras asociadas se tiene que :

$$\{ \alpha \in A \text{ tal que } |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\alpha \text{ es idéntico a } |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta \} \in \mathcal{F}$$

y $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta$ es discreto en $\mathbb{R}_+^*$, entonces $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ es un espacio de Banach no arquimediano inyectivo .

Demostración:

Basta probar que $\left| \left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F} \right)_{\mathbb{R}} \right|$ es discreto en $\mathbb{R}_+^*$.

Por definición de las funciones R en el ultraproducto ,

$$R^{\mathcal{N}} (x^1, \ldots x^n, a^1, \ldots a^k) = \lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha} (x^1_\alpha, \ldots x^n_\alpha, a^1_\alpha, \ldots a^k_\alpha)$$

sea $B = \{ \alpha \in A \text{ tal que } |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\alpha \text{ es idéntico a } |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta \}$ $B \in \mathcal{F}$

entonces $\mathcal{F} \cap B$ es un ultrafiltro en B y su imagen es base de ultrafiltro en $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta$ .Por la proposición 6 (3) I p. 47: todo punto adherente a la base del ultrafiltro imagen pertenece a la clausura de $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta$, que por ser discreto coincide con $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|_\beta$. Como todo ultrafiltro tiene límite y éste es único se tiene que

$$\lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha} (x^1, \ldots x^n, a^1, \ldots a^k) = \lim_{\mathcal{F} \cap B} R^{\mathcal{M}_\alpha} (x^1, \ldots x^n, a^1, \ldots a^k)$$

y por tanto $\left| \left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F} \right)_{\mathbb{R}} \right|$ es discreto en $\mathbb{R}_+^*$, y según (13) proposición 6 , p. 37 $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ es esféricamente completo y por el teorema de Ingleton es inyectivo .

COROLARIO 1. Sea E un espacio de Banach no arquimediano localmente compacto, entonces para cada ultrafiltro $E^{A}/\mathcal{F}$ es inyectivo .

Demostración:

Por el corolario 3.17 (16) , E es de dimensión finita y K es localmente compacto, por el teorema 7 capitulo 1 (13) la valoración de K es discreta , y al ser E de dimensión finita y la valoración de K discreta se tiene que para la estructura asociada $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$ es discreto en $\mathbb{R}_{+}^{*}$ y el resultado se deduce de la proposición .

COROLARIO 2. Toda u - extensión de un espacio de Banach no arquimediano localmente compacto es inyectiva .

Demostración:

Se deduce de la definición de u - extensión y del corolario 1 ya que como existe una inmersión de $\mathcal{N}_{E_2}$ en una ultrapotencia de $\mathcal{M}_{E_1}$ y $|(\mathcal{M}_{E_1}^{A}/\mathcal{F})_{\mathbb{R}}| \subset |(\mathcal{M}_{E_1})_{\mathbb{R}}|$

$$\varphi : |(\mathcal{M}_{E_2})_{\mathbb{R}}| \longrightarrow |(\mathcal{M}_{E_1})_{\mathbb{R}}|$$

es la restricción de un isomorfismo entre grupos ordenados , que podemos suponer es la identidad de $\mathbb{R}_{+}^{*}$ en $\mathbb{R}_{+}^{*}$ entonces

$$|(\mathcal{M}_{E_2})_{\mathbb{R}}| \subset |(\mathcal{M}_{E_1}^{A}/\mathcal{F})_{\mathbb{R}}| \subset |(\mathcal{M}_{E_1})_{\mathbb{R}}|$$

y $|(\mathcal{M}_{E_2})_{\mathbb{R}}|$ es discreto en $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

CAPITULO II

APLICACION A LOS ESPACIOS DE BANACH SOBRE CUERPOS NO ARQUIMEDIANOS CON $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$

A lo largo de este capítulo , K será un cuerpo valorado no arquimediano con $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$.

Tales cuerpos existen , por ejemplo el cuerpo $\mathcal{L}$ de Levi-Civita cuyos elementos son las series de potencias generalizadas con coeficientes reales y exponentes reales siendo la sucesión de los exponentes estrictamente creciente y no acotada superiormente con la valoración:

$$N_C(0) = 0 \ , \quad N_C\left(\sum_{\omega} \lambda_k \ t^{\alpha_k}\right) = e^{-\alpha_0}$$

Si α_0 es el menor α_k para el que $\lambda_k \neq 0$, en (12) p. 31 se prueba que $\mathcal{L}$ es un cuerpo no arquimediano completo .

Tambien en (12) se prueba que ${}^{\rho}\mathbb{R}$, cuerpo obtenido de ${}^*\mathbb{R}$ (reales no estandar) como clases de equivalencia de

$$M_0 = \left\{ t \in {}^*\mathbb{R} \ ; \ |t| < \rho^{-n} \ \text{para algún } n < \omega \right\}$$

respecto de $\mathring{M}_1 = \left\{ t \in {}^*\mathbb{R} \ ; \ |t| < \rho^n \text{ para todo } n < \omega \right\}$

siendo ρ un infinitesimal de ${}^*\mathbb{R}$, es un cuerpo no arquimediano con $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$.

En (16) en el ejercicio 2,G se prueba que el cuerpo de Levi-Civita no es esféricamente completo y en el ejercicio 1,J se prueba que se puede construir para cada cuerpo arbitrario , considerando la colección de subconjuntos bien ordenados de $\mathbb{R}$, un cuerpo no arquimediano con grupo de valores $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$ y con el cuerpo residual isomorfo a un cuerpo arbitrario , que por el ejercicio 2,G es esféricamente completo.

Este cuerpo no coincide con el de Levi-Civita , ya que aunque según (3) IV p. 47 § 2 pb. 1 , todo subconjunto bien ordenado de $\mathbb{R}$ es numerable , una sucesión decreciente y acotada de reales es un conjunto bien ordenado, añadiendole su límite , que no se considera para la construcción de $\mathcal{L}$.

Este capítulo está dedicado a extender algunos resultados del anterior a espacios de Banach arquimedianos sobre cuerpos no arquimedianos con $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$.

Seguiremos el orden del capítulo 1 .

Sea L_1 el lenguaje obtenido de L identificando los predicados unitarios P_3 y P_4 (ó equivalentemente añadiendo a los axiomas de la teoría el siguiente:

$$\forall z\, (P_3\,(z) \longrightarrow P_4\,(z))),$$

añadiendo a L un nuevo símbolo de constante en P_3 , e , y un nuevo símbolo de función unitaria log , definida en P_3 y con valores en P_3 .

Utilizaremos la misma nomenclatura :

x, a, λ para indicar variables que recorren P_1 , P_2 ó P_3

f n,k-aria para las funciones que tienen n argumentos de tipo 1 , k argumentos de tipo 2 y toman valores de tipo 1 ;

f' n,k-aria para las funciones que tienen n argumentos de tipo 1 , k argumentos de tipo 2 y toman valores de tipo 2;

R n,k-aria para las funciones que tienen n argumentos de tipo 1 , k argumentos de tipo 2 y toman valores de tipo 3 .

Análogamente usaremos la misma definición de término propio , término de tipo 1 ó 2 y de expresión atómica.

En las estructuras que vamos a utilizar para L_1 serán axiomas , además de los dados para L el siguiente:

$$\forall \lambda (\ \lambda \geqslant 1 \longrightarrow P_3\ (\ \log \lambda\ ))$$

Definimos las expresiones de L_1 de forma que :

0 , 1 , e y las expresiones atómicas son expresiones ,

si F , G son expresiones , max (F,G) , λ . F son expresiones,

si F es una expresión y $F \geqslant 1$, log F es una expresión .

Toda expresión puede construirse aplicando un número finito de veces las reglas anteriores .

De igual modo que para L , definimos las fórmulas propias de L_1 .

Estructuras real valoradas para L_1

Análogamente a las estructuras real valoradas para L , $|\mathcal{M}|$ estará descompuesto en tres conjuntos disjuntos $|\mathcal{M}_E|$, $|\mathcal{M}_C|$, $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$ con $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| = \mathbb{R}^*_+ \cup \{0\} = \mathbb{R}_+$

La interpretación en $\mathcal{M}$ de los simbolos comunes a L y L_1 coincide con la de los modelos real valorados para L y la imagen de toda R de L_1 es $\mathbb{R}_+$.

La interpretación de la nueva función log será un logaritmo en R sobre una base > 1 y la interpretación de la nueva constante e será un número real con log e = 1 , e > 1 (observar que e no tiene por que ser el número e= 2´71.. usual) .

La definición de satisfacción de una fórmula en una estructura , fórmulas equivalentes , diagrama universal etc. son iguales para L y L_1 .

DEFINICION 1. Diremos que $\mathcal{M}$ una estructura para L_1, es una estructura adecuada si cumple la definición 1,1 con $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$ un grupo conmutativo linealmente ordenado , arquimediano con orden denso y tal que todo conjunto acotado inferiormente admita cota inferior mínima .

Como $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$ es un grupo linealmente ordenado arquimediano que es isomorfo con su orden a un subgrupo de R , por ser el orden denso y completo , $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$ será isomorfo con su orden a R.

Como R es isomorfo con su orden a $\mathbb{R}^*_+$, la interpretación de log será una función definida en $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$ $\cap$ $\lambda \geqslant 1$ tal que la imagen de la función por la composición de isomorfismos en $\mathbb{R}^*_+$ sea una función logaritmo usual con base > 1 , la interpretación de e será un elemento de $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$ tal que log e = 1 .

Además se tendrá que a cada simbolo de función R n,k-ario de L le corresponde una aplicación de:

$|\mathcal{M}_E|^n \times |\mathcal{M}_C|^k$ sobre $|\mathcal{M}_3|$. Utilizaremos en lo que sigue Γ como sinónimo de $|\mathcal{M}_3| \setminus \{0\}$.

DEFINICION 2. Como L_1 no difiere de L en los simbolos de constantes c , c′ y de funciones f , f′, R ; si Φ es un conjunto de fórmulas cerradas universales de L_1 diremos que Φ es acotado si se cumplen las condiciones 1 a 5 de la definición 2,1 .

PROPOSICION 1. Sea Φ un conjunto de fórmulas cerradas de L_1 , si Φ tiene un modelo real valorado , entonces Φ tiene un modelo adecuado .

Demostración:

Se deduce de la definición 1 .

PROPOSICION 2. Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L_1 , si Φ tiene un modelo adecuado , entonces Φ tiene un modelo real valorado .

Demostración:

Sea $\mathcal{N}$ el modelo adecuado , $|\mathcal{N}_E|$, $|\mathcal{N}_C|$, $|\mathcal{N}_3|$ los tres tipos ; según hemos visto en la definición 1 , $|\mathcal{N}_3| \setminus \{0\}$ es isomorfo con su orden a $\mathbb{R}$, sea φ el isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*_+$ dado por una función exponencial con base > 1 , por la imagen de 0 (ínfimo de $|\mathcal{N}_3|$) , tomamos 0 (ínfimo de $\mathbb{R}^*_+$) ; φ es un isomorfismo entre grupos ordenados y como $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$ tomamos $\mathbb{R}_+$ imagen por φ de $|\mathcal{N}_3|$ (observar que en algunos modelos adecuados , si consideramos la estructura aditiva de $\mathbb{R}$, la constante 0 juega el papel de $-\infty$, esto no debe inducir confusión ya que por la definición de la constante 0 será el ínfimo de todos los elementos del grupo) .

La definición de $|\mathcal{M}_E|$ y de $|\mathcal{M}_C|$ así como de las funciones f , f', R y de las constantes c , c' coincide con la dada en la demostración de la proposición 2,1.

A la demostración de que las expresiones están bien definidas es preciso añadir:

si $R^{\mathcal{N}}$ es $\log^{\mathcal{N}} F^{\mathcal{N}}$, tomando

$$\lambda = \inf \left\{ \varphi(\alpha) : \mathcal{N} \text{ satisface } \log^{\mathcal{N}} F^{\mathcal{N}}(x_1,..a_k) \leq \alpha \right\}$$

es inmediato por la definición de logaritmo en los modelos adecuados que $R^{\mathcal{M}}$ es $\log^{\mathcal{M}} F^{\mathcal{M}}$.

COROLARIO . Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L_1 , si todo subconjunto finito de Φ tiene un modelo adecuado , entonces Φ tiene un modelo adecuado .

Demostración:

Sea Φ' un conjunto de sentencias cuyos modelos son grupos conmutativos ordenados linealmente, tales que todo conjunto acotado inferiormente tiene cota inferior mínima que contiene un subgrupo con orden denso no acotado (1) p. 93 ejemplos 3.6,3.7,3.8 .

Por el teorema de compacidad clásico , se deduce que $\Phi \cup \Phi'$ tiene un modelo , luego Φ tiene un modelo que será adecuado por ser modelo de Φ' .

Como en este capítulo usamos Γ como sinónimo de $|\mathcal{M}_3| \sim \{0\}$, diremos que para dos estructuras $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ adecuadas para L_1, $\mathcal{M}$ es una subestructura de $\mathcal{N}$ si verifican la definición 3,1 .

DEFINICION 3. Decimos que dos estructuras $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ adecuadas para L_1 son isomorfas si se satisfacen las condiciones de la definición 4,1 y

$$\varphi : |\mathcal{M}_{\mathbb{R}}| \longrightarrow |\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$$

es un isomorfismo entre grupos ordenados , tal que la interpretación de la función logaritmo en $|\mathcal{N}_{\mathbb{R}}|$ sea la imagen por φ de la interpretación de la función logaritmo en $|\mathcal{M}_{\mathbb{R}}|$.

Se tiene que la relación de ser isomorfos es una relación de equivalencia entre los modelos adecuados de L_1 .

Diremos que para dos estructuras $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ adecuadas para L_1 existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{M}$ es isomorfa a una subestructura de $\mathcal{N}$.

Es trivial que si φ es una fórmula cerrada universal de L_1 y $\mathcal{M}$ es una estructura adecuada que es modelo de φ , toda subestructura de $\mathcal{M}$ es tambien modelo de φ .

PROPOSICION 3. Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son dos estructuras para L_1 y φ es una fórmula cerrada universal de L_1 , $\mathcal{N}$ es modelo de φ si y sólo si $\mathcal{M}$ es modelo de φ .

Demostración:

Se deduce de la proposición 5,1 y de la definición de estructuras isomorfas para L_1 por ser la interpretación de log en $\mathcal{N}$ la imagen por φ de la interpretación de log en $\mathcal{M}$.

La definición de sucesión , sucesión de Cauchy y sucesión de Cauchy convergente es la misma para L y para L_1 .

Como en la definición de estructura regular y estructura separada de L sólo intervienen las funciones f , f', R que son comunes a L y L_1 , diremos que una estructura adecuada $\mathcal{M}$ para L_1 es regular (separada) si y sólo si la estructura adecuada $\mathcal{M}$ es regular (separada) para L .

Si $\lambda , \mu \in \Gamma$ utilizaremos $\frac{\lambda}{\mu}$ como abreviatura de $\lambda . \mu^{-1}$, con μ^{-1} indicando el inverso de μ en el grupo Γ , utilizaremos tambien (λ , μ) para indicar los elementos θ de Γ con $(\lambda \leq \theta \leq \mu) \wedge (\theta \neq \lambda) \wedge (\theta \neq \mu)$.

La teoría que queremos desarrollar para L_1 es distinta de la teoría para L y es preciso dar la siguiente definición.

DEFINICION 4. Sea Φ un conjunto acotado de fórmulas cerradas universales de L_1 , decimos que Φ es agradable si las fórmulas 1,2,3,4,5,6,9,10 de la definición 10,1 son deducibles de Φ en toda estructura adecuada para L_1 y además :

7.- Existe un $\lambda_{\dot{+}_E}$ en Γ tal que la fórmula φ :

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2$$

$$(D_E(x_1 \dot{+}_E x_2, y_1 \dot{+}_E y_2) \leq \lambda_{\dot{+}_E} . \max(D_E(x_1 ,y_1),D_E(x_2,y_2)))$$

$$\Phi \vdash_{\lambda} \varphi$$

8.- Existe un $\lambda\cdot_E$ en Γ tal que la fórmula φ :

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall a_1 \forall a_2$$

$$(D_E(x_1 \cdot_E a_1, x_2 \cdot_E a_2) \leq \lambda\cdot_E \cdot \max(N_E(x_1).D_C(a_1,a_2), N_C(a_2).$$

$$D_E(x_1,x_2))) \quad \Phi \vdash_{\lambda} \varphi$$

11.- Para cada simbolo de función R 0,k-ario de L_1 la fórmula φ :

$$\forall a_1,.. \forall a_k \; \forall b_1,.. \forall b_k$$

$$(R(a_1,..a_k) \leq \max(R(b_1,..b_k, \max_{i=1..k} (D_C(a_i,b_i)))) \quad \Phi \vdash_{\lambda} \varphi$$

12.- Para cada simbolo de función R n,0-ario de L_1 existe un λ_R en Γ tal que para cada μ de Γ con $\mu \in (1,e)$ la fórmula φ :

$$\forall x_1,.. \forall x_n \; \forall y_1,. \forall y_n$$

$$(R(x_1,..x_n) \leq \max\left(\frac{\lambda_R \cdot \max_{i=1..n} (D_E(x_i,y_i))}{\log \mu} , \frac{R(y_1,..y_n)}{\log (\frac{e}{\mu})} \right))$$

$$\Phi \vdash_{\lambda} \varphi$$

PROPOSICION 4. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas de L_1 , si $\mathcal{M}$ es un modelo adecuado de Φ entonces $\mathcal{M}$ es regular .

Demostración:

Para las funciones $+_C$ y $\cdot_C$ se deduce directamente de 9) y 10) .

Para $+_E$ y $\cdot_E$ se deduce de 7) y 9) y de ser $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo λ de Γ .

Para N_C y D_C se deduce de 11) al ser $\geqslant$ una relación de orden y $\max(\lambda , 0) = \lambda$ para cada λ de Γ .

Veamoslo para N_E y D_E . Si $D_E(x_i,y_i) \leqslant 0$ entonces $\max D_E(x_i,y_i) \leqslant 0$ y de $\lambda . 0 = 0$ se deduce que

$$\lambda_R . \max (D_E(x_i,y_i)) \leqslant 0$$

y por 12 se tiene que :

$$R(x_1,..x_n) \leqslant \frac{R(y_1,..y_n)}{\log (\frac{e}{\mu})} , \text{ para cada } \mu \text{ de } (1,e) ,$$

por la definición de logaritmo , al ser la base > 1 , esto equivale a que para cada θ de Γ $\theta > 1$

$$R(x_1,..x_n) \leqslant \theta . R(y_1,..y_n)$$

por ser la fórmula simétrica en $x_1,..x_n$ $y_1,..y_n$ se tiene que

$$R(x_1,..x_n) = R(y_1,..y_n) .$$

PROPOSICION 5. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L_1 ;y $\mathfrak{M}$ un modelo adecuado de Φ entonces existe un modelo separado $\mathfrak{N}$ tal que $\mathfrak{N}$ es isomorfo a un submodelo de $\mathfrak{M}$.

Demostración:

Es análoga a la de la proposición 7,1 a excepción de la transitiva para $\sim_E$. Por el apartado 12 de la definición 4 se tiene que

$$\forall x \forall y \forall z \forall t \left(D_E^{\mathfrak{M}} (x,z) \leqslant \max \left(\frac{\lambda_D . \max(D_E^{\mathfrak{M}} (x,y),D_E^{\mathfrak{M}} (z,t))}{\log \mu}, \frac{D_E^{\mathfrak{M}}(y,t)}{\log (\frac{e}{\mu})} \right)\right)$$

haciendo y=t se tiene $D_E^{\mathfrak{M}} (x,z) \leqslant \dfrac{\lambda_D . \max(D_E^{\mathfrak{M}} (x,y),D_E^{\mathfrak{M}} (y,z))}{\log \mu}$

ya que $D_E^{\mathcal{M}}(y,y) = 0$ por 2 de la definición de agradable y por ser $\lambda . 0 = 0$ para cada λ de Γ , se sigue que $D_E^{\mathcal{M}}(x,z) \leq 0$ y la propiedad transitiva .

Diremos que $\mathcal{M}$, una estructura adecuada para L_1 , es una estructura completada si $\mathcal{M}$ como estructura para L cumple la definición 11,1 .

PROPOSICION 6. Sea Φ un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L_1 que tiene un modelo adecuado $\mathcal{M}$, existe un modelo completado $\mathcal{N}$ único excepto isomorfismos entre modelos que cumple las cuatro condiciones de la proposición 8,1 .

Demostración:

Sea $\mathcal{M}$ el modelo adecuado dado , podemos suponer que $|\mathcal{M}_3| = \mathbb{R}_+$ con $\Gamma = \mathbb{R}_+^*$, con la intepretación de . el producto en los reales ; $\geq$ la relación de orden usual en $\mathbb{R}$; max el supremo para $\geq$; log un logaritmo respecto de una base e en $\mathbb{R}$ con $e > 1$ y definido en $\lambda \geq 1$.

Definimos $|\mathcal{N}_{0_E}|$ ($\mathcal{N}_{0_C}|$) el conjunto de sucesiones de Cauchy de elementos de $|\mathcal{M}_E|$ ($|\mathcal{M}_C|$) , indicamos por x^i (a^i) los elementos de $|\mathcal{N}_{0_E}|$ ($|\mathcal{N}_{0_C}|$) y para cada x^i (a^i) la sucesión de Cauchy que la define la define la escribimos $\langle x_n^i \rangle$ ($\langle a_n^i \rangle$) .

Si f es una función n,k-aria de L_1 definimos $f^{\mathcal{N}_0}(x^1,..a^k)$ la sucesión $\langle f^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \rangle$ y análogamente para cada f´ ó R de L_1 .

Veamos que $|\mathcal{N}_{0_3}| = |\mathcal{M}_3| = \mathbb{R}_+$. Por ser x^i , a^j sucesiones de Cauchy se sigue que existe λ en $\mathbb{R}_+^*$ con $0 \leq x_n^i \leq \lambda$, $0 \leq a_n^j \leq \lambda$ para cada $n < \omega$ y como Φ es agradable, y por tanto acotado , existe un μ $\mathbb{R}_+^*$ con $0 \leq R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \leq \mu$

Si α , β son dos puntos de acumulación de $\langle R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \rangle$ con $\alpha < \beta$, por ser el orden denso existe γ con $\alpha < \gamma < \beta$

Descomponiendo las sucesiones $\langle x_n^i \rangle$, $\langle a_n^j \rangle$ en dos subsucesiones que serán de Cauchy $\langle \bar{x}_n^i \rangle$, $\langle \bar{a}_n^j \rangle$; $\langle \bar{y}_n^i \rangle$, $\langle \bar{b}_n^j \rangle$ con :

$$\langle R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \rangle \longrightarrow \alpha \qquad \langle R^{\mathcal{M}}(y_n^1,..b_n^k) \rangle \longrightarrow \beta$$

Si $\rho_h \longrightarrow 0$ en Γ añadiendo a L_1 las constantes :

$\bar{x}^1,..\bar{x}^m, \bar{y}^1,..\bar{y}^m$; $\bar{a}^1,..\bar{a}^k, \bar{b}^1,..\bar{b}^k$

y a Φ las fórmulas , para $j = 1,..k$, $i = 1,..m$

$N_C(\bar{a}^j) \leq \lambda$, $N_C(\bar{b}^j) \leq \lambda$

$N_E(\bar{x}^i) \leq \lambda$, $N_E(\bar{x}^i) \leq \lambda$

$D_C(\bar{a}^j, \bar{b}^j) \leq \rho_h$, $D_E(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \leq \rho_h$

por el teorema de compacidad tiene un modelo adecuado y por ser Φ agradable el modelo es regular en contra de que

$$R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) < \gamma < R^{\mathcal{M}}(y_n^1,..b_n^k)$$

para n suficientemente grande , por tanto

$\langle R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \rangle$ al estar acotada, es una sucesión convergente y como $[0,\mu]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, su límite está en $\mathbb{R}_+$

y considerando sucesiones constantes, es decir para cada $n < \omega$

$x_n^i = x_k^i$, $a_n^j = a_k^j$ para algún $k < \omega$ tenemos que

$|\mathcal{N}_{0_3}| = |\mathcal{M}_3|$ por tanto $\mathcal{N}_0$ es una estructura adecuada .

El resto de la demostración es análogo a la de la proposición 8,1 a excepción de que :

Si F es una expresión m,k-aria de L_1 F = log R, con

$R^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{x}^m,\dot{a}^1,..\dot{a}^k) \geqslant 1$

de la continuidad del logaritmo , de ser Φ acotado, x_n^i ,a_n^j sucesiones de Cauchy y por tanto acotadas, se sigue que

$$F^{\mathcal{N}}(\dot{x}^1,..\dot{a}^k) = \lim_{n \to \infty} \log R^{\mathcal{M}}(x_n^1,..a_n^k) \quad .$$

PROPOSICION 7. Existe un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L_1 cuyos modelos real valorados son módulos topológicos sobre un anillo conmutativo con elemento unidad semivalorado no arquimediano y los modelos completados obtenidos a partir de un modelo separado son módulos separados completos sobre un anillo íntegro semivalorado separado no arquimediano y completo .

Demostración:

Sea Φ_1 el conjunto de fórmulas obtenido de Φ dado en la demostración de la proposición 9,1 . Sustituyendo la fórmula

$$\forall x \ \forall y \ (N_E(x \dotplus_E y) \leqslant \max \ (N_E(x),N_E(y)))$$

por el conjunto de fórmulas

$$\forall x \ \forall y \ (N_E(x \dotplus_E y) \leqslant \max\left(\frac{N_E(x)}{\log \lambda}, \frac{N_E(y)}{\log(\frac{e}{\lambda})} \right))$$

para cada λ con $\lambda \in (1,e)$, y la fórmula

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall v$$

$$(\ D_E(x,y) \leq \max(D_E(x,z),D_E(y,v),D_E(z,v)))$$

por las fórmulas

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall v$$

$$(D_E(x,y) \leq \max(\frac{2.\max(D_E(x,z),D_E(y,v))}{\log.\ \lambda}\ ,\ \frac{D_E(z,v)}{\log\ (\frac{e}{\lambda})}))$$

para cada λ con $\lambda \in (1,e)$.

Igual que para L diremos que $\mathcal{M}$, una estructura real valorada para L_1 , es c - real valorada si es modelo de

$$\forall a\ \exists b\ ((N_C(a) \leq 0) \vee (D_C(a \cdot_C b,1) \leq 0))\ .$$

PROPOSICION 8. Sea Φ_1 el conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L_1 dado por la proposición 7 , si Φ tiene un modelo real valorado $\mathcal{M}$, entonces Φ_1 tiene un modelo c - real valorado separado .

Demostración:

De la misma forma que en la proposición 10,1 definimos $|\mathcal{N}_{0_C}|$, $|\mathcal{N}_{0_E}|$, y la interpretación en $\mathcal{N}_0$ de las diversas funciones f , f´, R de L_1 a partir de un modelo real valorado separado $\mathcal{M}$ y de igual modo se tiene que $\mathcal{N}_0$ es una estructura real valorada , cerrada para la definición de las funciones f , f´, R de L_1 .

Veamos que $\mathcal{N}_0$ es un modelo de

$$\forall x\ \forall y\ (N_E(x +_E y) \leq \max(\frac{N_E(x)}{\log \lambda}\ ,\ \frac{N_E(y)}{\log(\frac{e}{\lambda})}))$$

para cada λ de (1 , e)

Supongamos que no es cierta en $\mathcal{N}_0$, entonces $\exists (x,a)$, $\exists (y,b)$ y un λ de $(1,e)$ con

$$N_E^{\mathcal{N}_0}((x,a) +_E (y,b)) > \max\left(\frac{N_E^{\mathcal{N}_0}(x,a)}{\log \lambda} , \frac{N_E^{\mathcal{N}_0}(y,b)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

entonces

$$N_E^{\mathcal{N}_0}(((x \cdot_E^{\mathcal{M}} b) +_E^{\mathcal{M}} (y \cdot_E^{\mathcal{M}} a), a \cdot_C^{\mathcal{M}} b)) >$$

$$\max \left(\frac{N_E^{\mathcal{N}_0}(x,a)}{\log \lambda} , \frac{N_E^{\mathcal{N}_0}(y,b)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

y por tanto

$$N_E^{\mathcal{M}}((x \cdot_E^{\mathcal{M}} b) +_E^{\mathcal{M}} (y \cdot_E^{\mathcal{M}} a)) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(a \cdot_C^{\mathcal{M}} b) \right]^{-1} >$$

$$\max \left(\frac{N_E^{\mathcal{M}}(x) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(a) \right]^{-1}}{\log \lambda} , \frac{N_E^{\mathcal{M}}(y) \cdot \left[N_C^{\mathcal{M}}(b) \right]^{-1}}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

por ser Γ grupo ordenado linealmente se tiene que

$$N_E^{\mathcal{M}}((x \cdot_E^{\mathcal{M}} b) +_E^{\mathcal{M}} (y \cdot_E^{\mathcal{M}} a)) > \max\left(\frac{N_E^{\mathcal{M}}(x) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(b)}{\log \lambda} , \frac{N_E^{\mathcal{M}}(y) \cdot N_C^{\mathcal{M}}(a)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

como de Φ_1 se sigue que

$$\forall x \, \forall a \, (N_E(x \cdot_E a) = N_E(x) \cdot N_C(a))$$

llamando a $x \cdot_E^{\mathcal{M}} b$, z , y a $y \cdot_E^{\mathcal{M}} a$, w, tenemos

$$N_E^{\mathcal{M}}(z +_E^{\mathcal{M}} w) > \max\left(\frac{N_E^{\mathcal{M}}(z)}{\log \lambda} , \frac{N_E^{\mathcal{M}}(w)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

en contra de ser $\mathcal{M}$ un modelo de Φ .

Análogamente se prueba que $\mathcal{N}_0$ es modelo de

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, \forall v$$

$$(D_E(x,y) \leq \max\left(\frac{2 \cdot \max(D_E(x,z), D_E(y,v))}{\log \lambda} , \frac{D_E(z,v)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

y para las restantes fórmulas de Φ_1 y el resto de la demostración es similar al de la proposición 10,1 .

De igual forma que para L , se prueba que los modelos completados obtenidos a partir de modelos c-real valorado para L_1 son c-real valorados .

PROPOSICION 9. Existe un conjunto agradable de fórmulas cerradas universales de L_1 cuyos modelos completados c-real valorados son espacios de Banach sobre un cuerpo valorado no arquimediano completo con $\Gamma = \mathbb{R}_+^*$.

Demostración:

Sea Φ_1 el conjunto de fórmulas dado en la proposición 7 .

Veamos que de las fórmulas :

$$\forall x\ \forall y\ (N_E(x \dotplus_E y) \leq \max\left(\frac{N_E(x)}{\log \lambda}, \frac{N_E(y)}{\log (\frac{e}{\lambda})} \right)$$

para cada λ de $(1,e)$, se deduce la desigualdad triangular. Como la interpretación de log es un logaritmo usual con base > 1 definido en $(1,\infty)$, $\log (\frac{e}{\lambda})$ es $1-\log\lambda$ y basta probar que

$$N_E(x) \dotplus N_E(y) = \inf_{\mu \in (0,1)} \left(\max\left(\frac{N_E(x)}{\mu}, \frac{N_E(y)}{1-\mu} \right)\right)$$

tomando $\mu = \dfrac{N_E(x)}{N_E(x) \dotplus N_E(y)}$ se tiene el $\geq$ por ser $N_E(x) \geq 0$ para cada x ; si

$$\mu > \frac{N_E(x)}{N_E(x) \dotplus N_E(y)} \qquad \frac{1}{\mu} < \frac{N_E(x) \dotplus N_E(y)}{N_E(x)}$$

entonces $\dfrac{N_E(x)}{\mu} < N_E(x) \dotplus N_E(y)$ y se sigue la igualdad .

DEFINICION 5. Sea $\mathcal{M}$ una estructura real valorada para L_1, decimos que $\mathcal{M}$ es λ - casi arquimediana si existe un $\lambda \in (1,2]$ en $\mathbb{R}_+^*$ tal que $\mathcal{M}$ es modelo de

$$\exists x \exists y \quad (N_E(x +_E y) \geq \lambda \cdot \max (N_E(x), N_E(y))) \quad .$$

De la definición se deduce directamente que toda superestructura para L_1 real valorada de una λ-casi arquimediana es λ-casi arquimediana y que todo λ - casi arquimediano es μ - casi arquimediano para $\mu \leq \lambda$.

Ultraproducto de espacios de Banach sobre cuerpos valorados no arquimedianos con $\Gamma = \mathbb{R}_+^*$

Si $\mathcal{C}$ es un conjunto de estructuras c-real valoradas, separadas para L_1, indicaremos por $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ al conjunto de fórmulas cerradas universales de L_1 que valen en todas las estructuras de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es acotado (agradable) si $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ es acotado (agradable).

DEFINICION 6. Sea A un conjunto infinito, $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto acotado de estructuras real valoradas para L_1 tal que en $\mathcal{U}(\mathcal{M}_\alpha)$ están las fórmulas

$$\forall x \, (D_E(x,0_E) \geq N_E(x)) \qquad \forall x \, (D_E(x,0_E) \leq N_E(x)) \quad ,$$

$\mathcal{F}$ un ultrafiltro en A, diremos que $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es $\mathcal{F}$ - apropiado si existe un $\beta \in A$ tal que

$$\Big\{ \alpha \in A \text{ tal que las subestructuras } |\mathcal{M}_C|_\alpha , \mathbb{R}_+^* \; ; |\mathcal{M}_C|_\beta , \mathbb{R}_+^*$$
$$\text{son isomorfas con el automorfismo en } \mathbb{R}_+^* \text{ la identidad} \Big\} \in \mathcal{F}$$

De la definición se sigue que si para α , β de A las subestructuras $|\mathcal{M}_C|_\alpha$, $\mathbb{R}_+^*$; $|\mathcal{M}_C|_\beta$, $\mathbb{R}_+^*$ son isomorfas con el automorfismo en $\mathbb{R}_+^*$ la identidad , entonces $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es $\mathcal{F}$ - apropiado para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ de A .

Si $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto de estructuras $\mathcal{F}$ - apropiadas , definimos el casiultraproducto $\mathcal{N}$ de igual forma que en el capítulo 1 , e igualmente se tiene que $\mathcal{N}$ es cerrado para la interpretación de las funciones f , f' de L_1 .

Veamos a continuación que el casiultraproducto es real valorado . Si definimos la interpretación de las funciones R de L_1 como en el capítulo 1 , se tiene igualmente que existe y es único el

$$\lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1, \ldots x_\alpha^n, a_\alpha^1, \ldots a_\alpha^k) \quad ,$$

por ser $\Gamma_{\mathcal{M}_\alpha} = \mathbb{R}_+^*$ para cada $\alpha \in A$, es trivial que $\Gamma_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$;

como existe un $B \in \mathcal{F}$ con $\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha) = a_\beta$ para cada α de B , si R es 0,k-aria y tomamos para i = 1,..k a_α^i tal que para cada α de B $\varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha^i) = a_\beta^i$ ya que las subestrucuras $|\mathcal{M}_C|_\alpha$ $|\mathcal{M}_C|_\beta$ isomorfas se tiene que

$$R^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1, \ldots a_\alpha^k) = R^{\mathcal{M}_\beta}(a_\beta^1, \ldots a_\beta^k)$$

para cada α de B y por tanto

$$\lim_{\mathcal{F}} R^{\mathcal{M}_\alpha}(a_\alpha^1, \ldots a_\alpha^k) = R^{\mathcal{M}_\beta}(a_\beta^1, \ldots a_\beta^k)$$

y se deduce que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \mathbb{R}_+^*$.

Sea R un simbolo de función n,0-ario de L_1 , veamos que la imagen de $R^{\mathcal{N}}$ es $\mathbb{R}_+$. Si R es N_E y $\lambda \in \mathbb{R}_+$ como todas las estructuras $\mathcal{M}_\alpha$ son real valoradas , la imagen de $N_E^{\mathcal{M}_\alpha}$ es $\mathbb{R}_+$ para todo α de A , sea x_α en $|\mathcal{M}_E|_\alpha$ tal que $N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha) = \lambda$

es trivial que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ está en el casiultraproducto y que

$N_E^{\mathcal{N}}((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = \lim_{\mathcal{F}} N_E^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha) = \lambda$.

Si R es D_E 2,0-aria escogiendo x_α de la misma forma se tiene que :

$D_E^{\mathcal{N}}((x_\alpha)_{\alpha \in A}, (0_E^{\mathcal{M}_\alpha})_{\alpha \in A}) = \lim_{\mathcal{F}} D_E^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha, 0_E^{\mathcal{M}_\alpha}) = \lambda$

y por tanto el casiultraproducto $\mathcal{N}$ es una estructura real valorada .

La interpretación de log en $\mathcal{N}$ será el mismo logaritmo con base > 1 que la interpretación de log en $\mathcal{M}_\beta$ para el cual se tiene la definición de $\mathcal{F}$ - apropiada .

Si $F(x_1,..x_n a_1,..a_k)$ es una expresión n,k-aria de L_1 , veamos que :

$F^{\mathcal{N}}(x^1,..x^n,a^1,..a^k) = \lim_{\mathcal{F}} F^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..x_\alpha^n,a_\alpha^1,..a_\alpha^k)$

Si F es G.H ó max (G,H) la demostración es análoga a la del capítulo 1 .

Supongamos pues que F es log G , sea $G^{\mathcal{M}_\alpha}(x^1,..x^n,a^1,..a^k) \geqslant 1$ para cda α de A , y

$G^{\mathcal{N}}(x^1,...a^k) = \lim_{\mathcal{F}} G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..a_\alpha^k) = \lambda \geqslant 1$

$\mu = \log \lambda \in \mathbb{R}_+$, para ver que $F^{\mathcal{N}}$ es

$\lim_{\mathcal{F}} (\log G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..a_\alpha^k))$ basta probar que

$\mu = \lim_{\mathcal{F}} (\log G^{\mathcal{M}_\alpha}(x_\alpha^1,..a_\alpha^k))$

sea pues ρ_1 , ρ_2 en $\mathbb{R}$ con $\rho_1 < \mu < \rho_2$, entonces por ser un logaritmo con base > 1 si denotamos con exp la función inversa de este logaritmo se tendrá que $\exp \rho_1$, $\exp \rho_2$ están en $\mathbb{R}_+^*$ y $\exp \rho_1 < \lambda < \exp \rho_2$, de la definición de λ se tiene que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que para cada α de B :

$$\exp \rho_1 < G^{\mathcal{M}_\alpha}(x^1_\alpha, \ldots a^k_\alpha) < \exp \rho_2$$

y por mantener el logaritmo el orden

$$\rho_1 < \log G^{\mathcal{M}_\alpha}(x^1, \ldots a^k) < \rho_2$$

para cada α de B , y por tanto

$$\lim_{\mathcal{F}} \log G^{\mathcal{M}_\alpha}(x^1_\alpha, \ldots a^k_\alpha) = \log \lambda .$$

Análogamente a la demostración de la proposición 14,1 se prueba que para cada elemento B de $\mathcal{F}$ el casiultraproducto es un modelo de $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$.
En particular si $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto agradable y $\mathcal{N}$ es un casiultraproducto de elementos de $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ el conjunto de fórmulas cerradas universales de L_1 que valen en $\mathcal{N}$ es agradable .

DEFINICION 7. Sea $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras para L_1 , llamaremos ultraproducto de $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ respecto al ultrafiltro $\mathcal{F}$ y lo indicaremos por $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ a la estructura completada obtenida de la proposición 6 del casiultraproducto para $\mathcal{F}$.

Ya que por la proposición 6 una fórmula cerrada universal de L_1 vale en una estructura adecuada que sea modelo de un conjunto agradable de fórmulas si y sólo si vale en su estructura completada , se tiene que para cada elemento B de $\mathcal{F}$ $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es un modelo de $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$;
por tanto si existe un B en $\mathcal{F}$ tal que en $\mathcal{U}((\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$ está la fórmula φ : $\forall x \forall y\ (N_E(x +_E y) \leq \max(N_E(x), N_E(y)))$ $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es un modelo de φ , y si $\mathcal{M}$ es modelo de φ

$\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$ es modelo de φ , y de forma análoga a la demostración de la proposición 16,1 se prueba que para cada ultraproducto $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$ la subestructura $\left|\left(\prod_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}\right)_c\right|$, $\mathbb{R}_+$ es isomorfa al completado de la subestructura $|\mathcal{M}_c|_\beta$, $\mathbb{R}_+$.

Del mismo modo se sigue que el ultraproducto $\prod_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$ es c - real valorado y que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro principal en A existe algún β en A tal que el ultraproducto es isomorfo al completado de $\mathcal{M}_\beta$.

Si todas las estructuras $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ coinciden , al ultraproducto $\prod_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{F}$ le llamaremos ultrapotencia y lo indicaremos por $\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$.

PROPOSICION 10. Sea $\mathcal{M}$ una estructura para L_1 c - real valorada separada que es modelo de

$$\forall x \quad (D_E(x,0_E)\leq N_E(x))$$

$$\forall x \quad (D_E(x,0_E)\geq N_E(x))$$

entonces para cada A $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$, con $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}$ para cada α de A , es $\mathcal{F}$ - apropiada para cada ultrafiltro $\mathcal{F}$ de A.

Demostración:

Se sigue de la definición 5 .

Si $\mathcal{M}$ es una estructura para L_1 que cumple las hipótesis de la proposición 10 se sigue de igual forma que en el capítulo 1 que existe una inmersión $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$.

Además se sigue de la definición de estructura λ casi arquimediana , que si $\mathcal{M}$ es λ - casi arquimediana entonces $\mathcal{M}^A/\mathcal{F}$ es λ - casi arquimediana para cada $\mathcal{F}$, y que si para algún $\mathcal{F}$, $\mathfrak{M}^A/\mathcal{F}$ es modelo de :

$$\forall x \forall y \, (N_E(x +_E y) \leq \max (N_E(x), N_E(y)))$$

entonces $\mathfrak{M}$ es modelo de :

$$\forall x \forall y \, (N_E(x +_E y) \leq \max (N_E(x), N_E(y))) \quad .$$

PROPOSICION 11. Sea $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras para L_1 , si existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que en $\mathcal{U}((\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$ están las fórmulas de la demostración de la proposición 7 , entonces el ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha / \mathcal{F}$ es un espacio de Banach sobre un cuerpo valorado no arquimediano completo con $\Gamma = \mathbb{R}^*_+$.

Demostración:

Se obtiene de la proposición 7 y de ser el ultraproducto modelo de $\mathcal{U}((\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha \in B})$ para cada B de $\mathcal{F}$.

Si $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto agradable $\mathcal{F}$ - apropiado de estructuras para L_1 , indicamos por E_α el conjunto de elementos de $\mathfrak{M}_\alpha$ de tipo 1 y por $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ el conjunto de elementos de $\prod_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha / \mathcal{F}$ de tipo 1 , si el ultraproducto es una ultrapotencia lo indicaremos por $E^A/\mathcal{F}$.

Dado un espacio de Banach E sobre un cuerpo valorado no arquimediano completo K con $\Gamma_K = \mathbb{R}^*_+$, diremos que la estructura para L_1 $\mathfrak{M}$ es la estrucutra asociada a E , K de forma que $|\mathfrak{M}_E| = E$, $|\mathfrak{M}_C| = K$, $|\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}| = \mathbb{R}_+$ y la intepretación de :

$+_E$ suma en E , $+_C$ suma en K

$\cdot_E$ producto de elementos de E por elementos de K

$\cdot_C$ producto en K

N_E norma em E , D_E distancia inducida por N_E

N_C valoración en K , D_C distancia inducida en K por N_C

0_E neutro para la suma en E

0_C neutro para la suma en K

1_C neutro para el producto en K

-1_C inverso para la suma de 1_C en K

la interpretación de $\cdot$ el producto en $\mathbb{R}$; de $\geqslant$ relación de orden en $\mathbb{R}$; de max supremo para la relación de orden en $\mathbb{R}$; de log un logaritmo usual en $\mathbb{R}$ con base > 1 ; de 0 y 1 el 0 y 1 real ; de e la base del logaritmo .

Por la definición se tiene que $\mathcal{M}$ es una estructura para L_1 c - real valorada , completada y es modelo de las fórmulas de la proposición 7 , recíprocamente , si $\mathcal{M}$ es una estructura para L_1 c - real valorada , completada modelo de las fórmulas de la proposición 7 llamaremos a $|\mathcal{M}_E|$ espacio de Banach sobre el cuerpo no arquimediano completo $|\mathcal{M}_C|$ asociado a $\mathcal{M}$.

Si además $\mathcal{M}$ es casi arquimediano llamaremos a $|\mathcal{M}_E|$ espacio de Banach casi arquimediano .

De la proposición 7 se deduce que para cada colección $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ de espacios de Banach sobre un mismo cuerpo valorado no arquimediano completo K con $\Gamma_K = \mathbb{R}^*_+$, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ (conjunto de elementos de tipo 1 de cada ultraproducto de las estrucutras asociadas $\mathcal{M}_\alpha$ a cada E_α) es un espacio de Banach sobre K .

En particular si E es un espacio de Banach sobre K, para cada $\mathcal{F}$ de A $E^{A}/\mathcal{F}$ es un espacio de Banach sobre K. Por tanto se tiene que para cada $\mathcal{F}$, $E^{A}/\mathcal{F}$ es no arquimediano si y sólo si E es no arquimediano .

Igual que para L , diremos que $\mathcal{M}$ una estructura real valorada para L_1 realiza φ una fórmula de L_1

$$F(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \geqslant G(x_1,..x_n,a_1;..a_k) \quad .$$

si $\mathcal{M}$ es modelo de

$$\exists x_1,..\exists x_n \exists a_1,..\exists a_k \quad (F(x_1,..x_n,a_1,..a_k) \geqslant G(x_1,...a_k))$$

PROPOSICION 12. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto agradable de estructuras para L_1 separadas c - real valoradas , $\mathcal{N}$ una estructura para L_1 c - real valorada completada tal que para cada $\mathcal{M}_\alpha$ de $\mathcal{C}$ las subestructuras : $|\mathcal{N}_C|$, $\mathbb{R}^*_+$; $|\mathcal{M}_C|_\alpha$, $\mathbb{R}^*_+$ son isomorfas con el automorfismo de $\mathbb{R}^*_+$ en $\mathbb{R}^*_+$ la identidad . Entonces son equivalentes las siguientes condiciones :

a) $\mathcal{N}$ es isomorfo a una subestructura de algún ultraproducto de elementos de $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{N}$ es modelo de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ . .

c) Para cada fórmula φ n,0-aria sin cuantificadores en el tipo 1 de L_1 $F(x_1,..x_n) \geqslant G(x_1,..x_n)$ tal que $\mathcal{N}$ realiza φ y cada $\lambda < 1$ de $\mathbb{R}^*_+$, existe algún $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{M}$ realiza $F(x_1,..x_n) \geqslant \lambda \cdot G(x_1,..x_n)$.

Demostración:

Análoga a la de la proposición 21,1 .

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ que cumplan las hipótesis de la proposición 12 .

COROLARIO 1. Si $\mathcal{N}$ es isomorfo a una subestructura de algún ultraproducto de elementos de $\mathcal{C}$, para cada λ de $(1,2]$, tal que $\mathcal{N}$ es λ - casi arquimediano existe algún $\mathcal{M}$ en $\mathcal{C}$ λ - casi arquimediano.

COROLARIO 2. Sea $\mu = \sup \lambda$ tal que en $\mathcal{C}$ hay algún $\mathcal{M}_\alpha$ λ - casi arquimediano, entonces todo ultraproducto de elementos de $\mathcal{C}$ es a lo más μ - casi arquimediano.

COROLARIO 3. Sea $\mu = \sup \lambda$ tal que $\mathcal{M}$ es λ - casi arquimediano, entonces toda ultrapotencia de $\mathcal{M}$ es a lo más μ - casi arquimediana.

Sea E un espacio de Banach sobre K, diremos que E es λ - casi arquimediano si la estructura asociada es λ - casi arquimediana.

Pasando estos tres corolarios a los espacios de Banach sobre K asociados a las estructuras tenemos.

COROLARIO 1 bis. Sea E un subespacio cerrado de un ultraproducto $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ si E es λ - casi arquimediano, existe algún E_α tal que E_α es λ - casi arquimediano.

COROLARIO 2 bis. Sea $\mu = \sup \lambda$ tal que algún E_α es λ - casi arquimediano, entonces para cada $\mathcal{F}$ en A

$\prod_{\alpha \in A} E_\alpha / \mathcal{F}$ es a lo más μ - casi arquimediano.

COROLARIO 3 bis. Sea $\mu = \sup \lambda$ tal que E es λ - casi arquimediano entonces $E^A / \mathcal{F}$ es a lo más μ - casi arquimediano.

BIBLIOGRAFIA

(1) BELL J.L. ,SLOMSON A.B., "Models and ultraproducts", Amsterdam Norh-Holland (1967)

(2) BOURBAKI N. ,"Eléments de Mathématique, espaces vectoriels topologiques" , Paris , Hermann (1965)

(3) BOURBAKI N. ,"Eléments de Mathématique,topologie générale" , Paris ,Hemann (1971)

(4) CHANG C.C.,KEISLER H.J., "Model theory" , Amsterdam North-Holland (1973)

(5) DACUNHA-CASTELLE D. ,KRIVINE J.L.,"Applications des ultraproduits à l'etude des espaces et des algèbres de Banach", Studia Mathematica T. XLI (1972) 315-334

(6) DIEUDONNE J., "Eléments d'analyse", Paris , Gauthier-Villars (1969)

(7) ENDER O., "Valuation theory", Berlin , Springer-Verlag (1972)

(8) GRUSON L.,VAN DER PUT M., "Banach spaces", Bull. Soc. Math. France 39-40 (1974) p. 55-100

(9) JACOBSON N., "Lectures in abstract algebra", vol. III New York, Van Nostrand (1964)

(10)KREISLER G. KRIVINE J.L., "Eléments de logique mathématique", Paris , Dunod (1967)

(11)KRIVINE J.L., "Langages à valeurs réelles et applications" Fundamenta matematicae, LXXXI (1974) p. 213-253

(12)LIGHTSTONE A.H., ROBINSON A., "Non archimedean fields and asymptotic expansions", Amsterdam , North-Holland (1975)

(13) MONNA A., "Analyse non archimedienne", Berlin , Springer-Verlag (1970)

(14) MONNA A.,"Rapport sur la theorie des espaces lineaires topologiques sur un corps value non-archimedien", Bull. Soc. Math. France 39-40 (1974) 255-278

(15) STERN J., "Some applications of model theory in Banach space theory" , Annals of mathematical logic 9 (1976) p. 49-121

(16) VAN ROOIJ A.C.M. , "Non archimedean functional analysis" New York, Marcel-Dekker (1978)

(17) WILLARD S. ,"General topology", Reading,Massachusetts , Addison-Wesley (1970)

INDICE DE TERMINOS

En caso de existir dos números , el segundo se refiere a L_1

INDICE DE NOTACIONES

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes, en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Jose Ramírez Labrador.

titulada "Sobre ultraproductos de espacios de Banach en cuerpos No arquimedianos"

acordó otorgarle la calificación de SOBRESA

Sevilla, 05 de octubre 1.979

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,