

2.6990
x

043
76

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
SECRETARIA
16-9-86
ENTRADA N.º 3722

SOBRE LAS PERTURBACIONES DE LAS SUPERFICIES
SINGULARES DE CIERTOS JUEGOS DIFERENCIALES

Antes de la consulta de esta tesis
Manuel Delgado

V B

El Director del Trabajo

Fdo: Antonio Valle Sánchez

Memoria que presenta
Manuel Delgado Delgado
para optar al grado de
DOCTOR en Ciencias
Matemáticas.

Sevilla, Septiembre 1.986

Fdo: Manuel Delgado

Ponente de la Tesis

Fdo: Enrique Fernández Cava

A Julia y a
mis padres.

Deseo expresar mi agradecimiento:

Al Dr. D. ANTONIO VALLE SANCHEZ, anterior Catedrático-Director del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y actualmente en la Universidad de Málaga, por el constante estímulo y continua ayuda prestada a lo largo de la realización de este trabajo.

A M. PIERRE BERNHARD por haberme introducido en el ámbito de los Juegos Diferenciales y las numerosas orientaciones científicas proporcionadas en temas de escasa bibliografía que han posibilitado la elaboración de este trabajo.

Al Dr. D. JULIO COUCE CALVO, Profesor Adjunto del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Sevilla por la ayuda prestada en el primer periodo de elaboración de este trabajo.

Al Dr. D. ENRIQUE FERNANDEZ CARA, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla por aceptar ser Ponente de la Tesis.

A los Profesores del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Sevilla por las facilidades y ánimo proporcionadas en todo momento.

Al Departamento de Algebra de la Universidad de Sevilla por todas las facilidades dadas para la transcripción mecanográfica de este trabajo.

INTRODUCCION

Los Juegos Diferenciales fueron inventados por R. Isaacs sobre 1950. Su contribución, plasmada en [17], fue notable. En ausencia de una teoría de control aun no desarrollada, Isaacs estableció los conceptos fundamentales como variable de estado, feedback, las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, la ecuación adjunta, etc. en el marco de los juegos de dos jugadores y suma nula. El procedimiento de resolución que él utiliza es una generalización de la teoría de Carathéodory que lleva a la construcción de la solución por el método de las características.

Es muy notable la habilidad de este investigador para proponer ejemplos que intenta resolver hasta donde puede, dejando como problemas abiertos la resolución completa de los mismos. Y es muy preciso el valor que da a su solución, porque "cada uno tiene su comportamiento significativo, no obvio y no trivial que puede ser solamente aprehendido abordando su análisis". Los ejemplos son los que le permiten descubrir algunas singularidades o superficies de discontinuidad de la función valor o de su gradiente, entre ellas, la superficie equívoca y la superficie universal singular en un famoso juego conocido como el del chófer homicida.

Una de las vías de investigación que continuó el trabajo de Isaacs fue la de J. V. Breakwell y su escuela. Ellos hicieron también especial hincapié en la resolución de ejemplos como procedimiento de descubrimiento de nuevas singularidades. Así, se cuenta en el haber de este grupo la resolución de la gran mayoría de los juegos propuestos por Isaacs y otros originales y en ellos, la aparición de las envolventes

de conmutación, de las pseudoligaduras de estado ([20]), de las superficies de contacto seguro ([5]), de la unión cónica ([1]), de la maniobra de finta ([20]), etc.

P. Bernhard es un miembro de esta escuela que ha estudiado especialmente los juegos diferenciales de dos jugadores, suma nula y conocimiento perfecto ([5]). Una contribución suya ha sido el establecimiento de un teorema de condiciones suficientes que intenta englobar todas las situaciones conocidas, el estudio sistemático de las singularidades autorizadas por el teorema y los métodos de construcción trayectoria a trayectoria de estas singularidades y de las estrategias optimales en su entorno. En este trabajo va incluida información relativa al carácter tangente o no de la incidencia de los campos optimales de trayectorias en las superficies singulares según que haya o no unicidad en determinados problemas de optimización sobre ciertos conjuntos convexos llamados dominios de maniobrabilidad.

El trabajo de Bernhard acaba con la pregunta abierta de si son necesarias estas condiciones además de suficientes. El valor real de la teoría estriba en que permite aportar la solución efectiva de muchos juegos muy diversos que no puede hallarse sin ella. Teoría que podría por lo demás parecer arbitraria por apoyarse en el estudio de una condición suficiente de la que nada prueba a priori que tenga que satisfacerla la solución de un juego determinado. Posteriormente se han completado algunos aspectos de ella: García probó la necesidad de la regularidad C^2 de la función valor en el entorno de una superficie universal singular en determinados juegos. ([16]).

El problema que nosotros estudiamos en este trabajo puede explicarse informalmente del modo siguiente. Supongamos una familia de juegos dependientes de un pequeño parámetro ε en la que se tenga garantizada la incidencia tangente con una posible superficie singular; supongamos que el límite formal sea un juego en que tal incidencia tangente deje de estar garantizada. Donde el juego no perturbado presenta una superficie singular sin incidencia tangente, ¿tiene el juego perturbado la correspondiente superficie singular con contacto tangente?; en caso afirmativo, en el problema de capa límite, ¿hay convergencia de trayectorias y mandos?.

La cuestión presenta además interés porque el límite formal debe tener (en la forma más sencilla en que el problema se plantea) la dinámica lineal y ésta es en realidad una aproximación que se hace "despreciando" términos no lineales pequeños. ¿Es válida tal aproximación?; ¿hay riesgo de que varíe grandemente la solución del juego?.

El problema, no estudiado en la literatura era de gran amplitud, por lo que hemos comenzado reduciendo sus términos. Lo estudiamos aquí para juegos bidimensionales y escogemos la perturbación de modo que el dominio de maniobrabilidad de los juegos perturbados sea una elipse que tienda al segmento que constituye el dominio del juego límite formal. En aquéllos, el carácter estrictamente convexo de la elipse en R^2 (es lo que obliga a que el juego

sea bidimensional) garantiza la unicidad del problema de optimización antes citado; en éste, el carácter lineal del dominio posibilita la no unicidad de dicho problema.

Siguiendo los principios heurísticos anteriormente citados hemos resuelto multitud de ejemplos prácticos, clásicos unos, inventados otros, cuyo comportamiento hemos intentado determinar. Posteriormente se ha procurado formalizar los resultados obteniéndose la parte teórica que este trabajo presenta.

La parte teórica que comienza con las hipótesis y notaciones que utilizamos y la definición de la perturbación que vamos a estudiar, sigue en su desarrollo las etapas que se cubren al resolver un juego diferencial. Se comienza detectando la parte útil de la frontera del blanco o parte de ésta donde el jugador que desea acabar puede obligar al otro a atravesarla (por esta razón definimos el blanco como un conjunto abierto) y que viene definida por

$$\min_u \max_v v'x < 0$$

siendo v la normal al blanco que apunta al interior del espacio de juego y u y v los mandos que minimizan y maximizan el criterio. Sobre el borde de dicha parte útil se construye la barrera natural que puede existir de hecho (Ejs. 2, 4) o no (Ejs. 1, 3, 5), y sobre la parte útil, el campo optimal de trayectorias incidente en el blanco. En ocasiones, no existen barreras naturales, sino otras superficies semipermeables que inciden en el blanco con otra normal (Ej. 6).

Estudiamos en el capítulo II la perturbación

y convergencia del campo optimal incidente en el blanco donde puede presentarse (Ej. 4) o no (Ej. 3, 5) capa límite. La formulación que damos de los teoremas de convergencia los hace utilizables posteriormente en el trabajo. Discutimos también un caso teóricamente posible, pero del que no conocemos ningún ejemplo hasta hoy y que se halla relacionado con nuestro Ejemplo 1.

En el capítulo III estudiamos la convergencia de los mandos en bucle cerrado en el interior de los campos regulares de trayectorias.

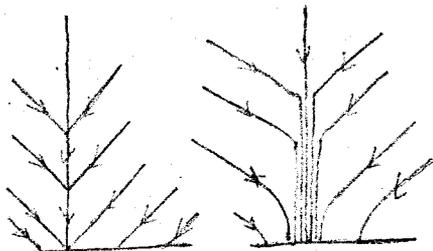
Las restantes singularidades implican discontinuidades del valor ó de su gradiente. Hemos incorporado en el capítulo IV el repaso de la teoría de Bernhard para hacer inteligibles los capítulos posteriores, junto con los nombres y descripciones de dichas singularidades.

El capítulo V se dedica a estudiar la perturbación de la barrera natural o barreras que tenga el juego. Se explica también en él la determinación del final de la barrera de los juegos perturbados, situación que se aplica al ejemplo 2.

Si el campo de trayectorias construido llena todo el espacio de juego, el problema está resuelto. Si no, es necesario utilizar las distintas singularidades para construir varios campos optimales acoplados que satisfagan globalmente el teorema de Bernhard. En ocasiones, el final del campo optimal es una superficie de cambio de mando para uno de los jugadores. (Ej. 6). Estudiamos la perturbación de este tipo de superficies en el capítulo VI.

El capítulo VII se dedica a las perturbaciones de las uniones. En ellas estudiamos dos tipos fundamentalmente: las uniones con barreras o pseudoligaduras (en las que se conoce a priori la superficie sobre la que incide el campo optimal) y los empalmes (uniones con superficies que hay que construir). En los dos casos se demuestra la convergencia esperada que verificamos posteriormente en el ejemplo 2.

Las superficies universales de las que se ocupa el capítulo VIII es un tema cuyo estudio se esperaba con interés. El hecho de ser la superficie focal la singularidad peor conocida y comprendida hacía difícil predecir qué pasaría. La primera conjetura, que la superficie universal fuera límite de superficies focales fue desechada por los ejemplos hasta



llegar a la hipótesis de que en multitud de casos en que esta singularidad se presenta, la curva $y = y(x)$ del plano que era la superficie universal, es una trayectoria normal del juego perturbado. Esta hipótesis ha sido probada con unas condiciones muy restrictivas, pero que dan cuenta de buen número de casos en que tal singularidad aparece, incluso en caso tan atípico como el que desarrolla el ejemplo 5.

Aún quedaba la pregunta: si la superficie singular universal no es el límite de las superficies focales, ¿hacia qué convergen éstas si se presentan en los juegos perturbados?. Planteada la cuestión, ha sido Breakwell quien ha dado una contestación. El descubrimiento de un nuevo tipo de

singularidad, una superficie focal singular, procedente de dominios de maniobrabilidad con trozos rectos y estrictamente convexos, y que no puede aparecer por tanto en el marco en el que nos movemos, ha sido su respuesta ([9]).

Los ejemplos tienen interés intrínseco por las razones que se han expuesto. Presentamos a continuación seis que creemos citables y cuyas principales características pasamos a describir. Todos son juegos de tiempo óptimo y en todos salvo en el segundo es u el mando que pretende minimizar el tiempo y v el que pretende maximizarlo.

El primero es un ejemplo propuesto para mostrar las patologías que se pueden mostrar en nuestro propio marco. En él, el juego perturbado es un auténtico problema de juegos mientras que el juego no perturbado es un problema de control. No cabe plantearse el problema de la convergencia de las trayectorias y cae fuera de nuestros resultados.

El segundo es el clásico ejemplo en que Isaacs muestra la superficie equívoca. Pensamos que merecía ser presentado por permitir mostrar la construcción de la superficie equívoca en el juego no perturbado y la de la envolvente de conmutación perturbada y la capa límite del campo incidente en ellas, aparte de razones históricas evidentes.

El tercero es un ejemplo original que muestra una superficie universal singular alcanzada de modo tangente por los campos optimales lo que, si bien teóricamente posible, no hemos encontrado en la literatura. La convergencia de los campos optimales perturbados se da por el Teorema 1 y se

verifica el Teorema 11.

El cuarto es una parte del terrible juego del chófer homicida, la parte resuelta ya por Isaacs ([17]), aunque utilizando las construcciones de Bernhard. Aparte de las razones históricas para proponerlo, es el único que está en las condiciones del Teorema 2, y el campo optimal perturbado incidente en el blanco presenta una capa límite que podemos detectar. Verifica también las hipótesis del Teorema 11.

El quinto es un ejemplo original que presenta de interés una infinidad de arcos singulares que inciden en el origen y la verificación, pese a todo, del Teorema 11. La convergencia de los campos optimales se demuestra por el Teorema 11.

El sexto y último ejemplo, también original, presenta la construcción y perturbación de barreras no naturales y de las superficies de cambio de mando. Tiene también una superficie de dispersión.

Incorporamos en un Anexo algunas situaciones físicas que pueden dar lugar a algunos de los ejemplos anteriormente resueltos, pudiendo interpretarse sobre el sistema real el movimiento del estado a lo largo del juego.

I- GENERALIDADES

1. Planteamiento

Consideremos un juego diferencial constituido por un sistema dinámico bidimensional, cuya evolución en función del tiempo viene regida por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x,u) + \phi(x) \cdot v$$

donde

- x es un elemento de R^2 : $x = (x_1, x_2) \in R^2$
- u es una función vectorial: $R^2 \times R \longrightarrow R^m$
 $(x, t) \longmapsto u(x, t)$
- v es una función vectorial: $R^2 \times R \longrightarrow R$
 $(x, t) \longmapsto v(x, t)$
acotada por 1 en valor absoluto: $|v(x, t)| \leq 1$
- f y ϕ son funciones globalmente de clase C^1

Las funciones u y v pertenecen a clases de funciones, que denotamos \mathcal{U} y \mathcal{V} respectivamente, denominadas conjuntos de funciones de feedback admisibles y que verifican los axiomas de P. Bernhard [5]. Denotaremos $U \subset R^m$ y $V \subset R$ los conjuntos donde u y v toman sus valores.

La función $x(t)$ es solución de este sistema de ecuaciones de estado con condiciones iniciales (x_0, t_0) y se llama trayectoria si:

- $x(\cdot)$ es absolutamente continua
 - para todo t donde $x(\cdot)$ sea derivable, se verifica
- $$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))) + \phi(x(t)) \cdot v(x(t), t)$$
- $x(t_0) = x_0$.

El punto representativo del sistema $(x(t), t)$ en el instante t evoluciona en una parte \mathcal{E} del espacio $R^2 \times R$ que llamaremos espacio de fases y que contiene a (x_0, t_0) .

El juego se acaba en un instante t_f tal que

$$t_f = \inf \{ t > t_0 : (x(t), t) \in \mathcal{B} \},$$

donde \mathcal{B} , llamado "blanco", es un subconjunto de \mathcal{E} que supon-
dremos abierto y conexo.

La función de coste será definida por:

(4)

$$\left\{ \begin{aligned} J(x_0, t_0; u, v) &= K(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [A(x(s), u(x(s), s)) + \\ &\quad B(x(s)) \cdot v(x(s), s)] \cdot ds, \\ &\text{si para la trayectoria generada por } x(\cdot), \\ &\text{solución de (2) verificando (3), } \exists t_f > t_0 \\ &\text{tal que } (x(t_f), t_f) \in \mathcal{B}. \\ J(x_0, t_0; u, v) &= +\infty, \\ &\text{si } \forall t > t_0, (x(t), t) \notin \mathcal{B}. \end{aligned} \right.$$

Las funciones K y $L=A + B \cdot v$ (lagrangiano) son funciones esca-
lares de sus argumentos que consideraremos globalmente C^1 .

Diremos que el juego es separado porque la dinámica
y el lagrangiano se descomponen como suma de dos funciones que
dependen una de la función u y otra de la función v .

El primer jugador, que utiliza el mando u , intenta
minimizar el coste J , mientras que el segundo jugador, que ma-
neja el mando v , busca maximizar dicha función de coste. Resol-
ver el problema de juego optimal consiste en encontrar mandos
 u^* y v^* que constituyan un punto-silla de la función de coste
 J respetando las condiciones iniciales, es decir, que verifiquen

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{V} \quad \begin{aligned} J(x_0, t_0; u^*, v) &\leq J(x_0, t_0; u^*, v^*) \\ J(x_0, t_0; u^*, v^*) &\leq J(x_0, t_0; u, v^*). \end{aligned}$$

En este caso, el escalar

$$V(x_0, t_0) = J(x_0, t_0; u^*, v^*)$$

se llama el valor del juego, y la pareja (u^*, v^*) es la pareja
de estrategias optimales.

Hay que resaltar que consideramos que el mando de
cada jugador en un instante $t=\bar{t}$ es función de la posición en
el instante $t=\bar{t}$, formalización que se llama estrategia en bu-
cle cerrado. Es necesario distinguir este planteamiento de los
problemas en bucle abierto, donde los mandos son escogidos a
priori en forma de funciones del tiempo. Si en los problemas
de control optimal la distinción presenta poco interés, en los
problemas de juego es fundamental la precisión, porque cuando
un jugador escoge una estrategia, no sabe aún qué mando en bu-

cle abierto va a elegir ya que eso depende de lo que haga su adversario. La información disponible evoluciona con el tiempo y la posibilidad de utilizar las observaciones pasadas cambia profundamente la naturaleza del problema con respecto al bucle abierto.

Introducimos los dominios de maniobrabilidad de ambos jugadores, \bar{P} y \bar{Q} , que se definen

$$\bar{P}(x, v, t) = f(x, U) + \phi(x) \cdot v$$

$$\bar{Q}(x, u, t) = f(x, u) + \phi(x) \cdot V,$$

que se supondrán convexos para todo valor de sus argumentos en $R^2 \times V \times R$ y $R^2 \times U \times R$ respectivamente. De hecho, ya que nuestro juego es separado, podremos utilizar los siguientes dominios:

$$P(x) = f(x, U) \subset R^2$$

$$Q(x) = \phi(x) \cdot V \subset R^2.$$

Se utilizarán también los dominios de maniobrabilidad extendidos que se definen

$$\bar{P}(x) = (f(x, U), A(x, U))$$

$$\bar{Q}(x) = (\phi(x) \cdot V, B(x) \cdot V)$$

que deberán ser convexos para todos los valores del argumento.

2. Ecuación fundamental

Nos limitaremos en este trabajo a las condiciones suficientes dadas por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (H-J-I). Se define el hamiltoniano del sistema como la función

$$H: R^2 \times R \times R^m \times R \times R^2 \longrightarrow R$$

$$(x, t, u, v, \lambda) \longmapsto L(x, t, u, v) + \lambda' [f(x, u) + \phi(x) \cdot v]$$

donde denotamos λ' el vector traspuesto de λ .

Un punto-silla del hamiltoniano en el punto $(x, t, \lambda) \in R^2 \times R \times R^2$ será definido como

$$\exists u^*(x, t, \lambda)$$

$$\exists v^*(x, t, \lambda) : \begin{aligned} H(x, t, u^*(x, t, \lambda), v, \lambda) &\leq H(x, t, u^*, v^*, \lambda) \\ H(x, t, u^*, v^*, \lambda) &\leq H(x, t, u, v^*(x, t, \lambda), \lambda) \end{aligned}$$

$$\forall u \in R^m, \forall v \in R.$$

Se tiene el resultado clásico siguiente:

Teorema (Isaacs). Si el hamiltoniano posee un punto-silla para todo $(x, t, \lambda) \in R^2 \times R \times R^2$, y si existe una función real de clase C^1 definida sobre \mathcal{E}, V^* , que satisface la ecuación (H-J-I)

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + H(x, t, u^*(x, t, \frac{\partial V^*}{\partial x}), v^*(x, t, \frac{\partial V^*}{\partial x}), \frac{\partial V^*}{\partial x}) = 0$$

$V^*(x, t) \Big|_{\mathcal{B}} = K(x, t)$
 y tal que las estrategias asociadas

$$\bar{u}(x, t) = u^*(x, t, \frac{\partial V^*}{\partial x})$$

$$\bar{v}(x, t) = v^*(x, t, \frac{\partial V^*}{\partial x})$$

estén en \mathcal{U} y \mathcal{V} respectivamente, entonces $V^*(x, t)$ es la función valor del juego y \bar{u} y \bar{v} los argumentos del punto-silla de J para todas las fases iniciales $(x_0, t_0) \in \mathcal{E}$, tales que para todo $v \in \mathcal{V}$, la solución del sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \bar{u}(x, t)) + \phi(x) \cdot v(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

encuentre el blanco.

La hipótesis del carácter separable de la dinámica elimina los problemas inherentes a la existencia del punto-silla que plantea la ecuación (H-J-I), reduciéndolos a la existencia de solución para un problema de máximo y otro de mínimo, que quedan garantizadas por la hipótesis del carácter convexo de los dominios de maniobrabilidad para todo valor de sus argumentos.

La no unicidad de estos problemas origina como veremos las superficies singulares. Supondremos que es el mando escalar v quien las crea, por lo que establecemos

Hipótesis 0 El problema

$$\min_{u \in \mathcal{U}} [A(x, u) + \lambda' f(x, u)]$$

admite solución única.

En lo que sigue, los mandos u y v son intercambiables cuando $m = 1$, de modo que mutatis mutandis todo será válido si es u el mando escalar causante de la singularidad.

Integraremos dicha ecuación de modo regresivo dando como condiciones finales las que se dan sobre \mathcal{B} e intentare-

mos construir un campo que verifique las condiciones suficientes del teorema anterior. Para poder obtener la solución por el método de las características, se refuerzan las hipótesis del teorema de Isaacs exigiendo fundamentalmente la regularidad C^2 a trozos para la función $V^*(x,t)$ (cf. Bernhard [5]).

El teorema de Bernhard de condiciones suficientes permite la existencia de superficies de discontinuidad del valor o de su gradiente para acoplar distintos campos de trayectorias optimales en distintas zonas de \mathcal{E} ; estas superficies son originadas en muchas ocasiones por la existencia de dos valores optimales para los mandos de uno u otro jugador.

Llamaremos solución isaaciana aquella función $V^*(x,t)$ que verifica el teorema de condiciones suficientes de Bernhard y que constituye por tanto el valor del juego. La gran mayoría de los juegos para los que se ha propuesto solución efectiva, verifica estas condiciones.

La dinámica que hemos elegido como punto de partida (juego separado, autónomo, y con un mando en forma lineal) nos proporciona un dominio de maniobrabilidad para el jugador que maximiza convexo no estrictamente $\forall u \in U$: un segmento, con posibilidad por tanto de presentar superficies singulares debidas a la no unicidad anteriormente mencionada.

Definiremos en lo que sigue una perturbación mediante un parámetro ε de modo que el dominio de maniobrabilidad para el segundo jugador sea un subconjunto de R^2 estrictamente convexo que tienda con $\varepsilon \rightarrow 0$ al segmento que constituye el dominio de maniobrabilidad del segundo jugador en el juego no perturbado. Estudiaremos en el próximo capítulo la convergencia de los campos de trayectorias optimales de los juegos perturbados al campo optimal del juego no perturbado en ausencia de superficies de discontinuidad de la función valor del juego no perturbado y de sus derivadas. En capítulos posteriores se verá lo que sucede en tales superficies.

II- PERTURBACION DEL JUEGO. CONVERGENCIA
DE LOS CAMPOS OPTIMALES.

1. Definición de la perturbación

Al modelizar un fenómeno con la dinámica

$$\dot{x} = f + \phi \cdot v$$

se está haciendo en realidad una aproximación tomando como lineal un dominio de maniobrabilidad estrecho.

Se define la dinámica del juego perturbado:

$$(5) \quad \dot{x} = f(x, u) + \phi(x) \cdot \cos v + \varepsilon \cdot \psi(x) \cdot \sin v,$$

$$\psi = (-\phi_2, \phi_1)$$

Es fácil comprobar que $Q_\varepsilon(x)$ es una elipse (conjunto estrictamente convexo en R^2), de eje mayor el dominio $Q(x)$ del juego no perturbado y de excentricidad ε .

Precisaremos la perturbación que se admitirá en el blanco. Supongamos que la frontera de \mathcal{B} viene parametrizada mediante funciones de clase C^1 definidas en R , $x = b(s)$. Será blanco perturbado, \mathcal{B}_ε , el subconjunto de $R^2 \times R$ abierto y conexo cuya frontera venga parametrizada por dos funciones de clase C^1 , $x = b_\varepsilon(s)$, verificando la siguiente

Hipótesis 1. $b_\varepsilon(s) \rightarrow b(s)$

$$\frac{db_\varepsilon(s)}{ds} \rightarrow \frac{db(s)}{ds} \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Las respectivas normales a dichas superficies vienen denotadas por $\bar{n}(s)$ y $\bar{n}_\varepsilon(s)$, y en virtud de nuestra hipótesis,

$$\bar{n}_\varepsilon(s) \longrightarrow \bar{n}(s) \quad \text{con } \varepsilon \rightarrow 0.$$

La función de coste del juego perturbado será de la forma

sobre ella un campo optimal de este juego que construimos también por el método de las características.

Establecemos la

Hipótesis 2. $\xi_\epsilon(s) \rightarrow \xi(s)$

$$\frac{d\xi_\epsilon(s)}{ds} \rightarrow \frac{d\xi(s)}{ds} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0$$

(Posteriormente nos ocuparemos de la convergencia de las condiciones finales, es decir, de las variedades singulares).

Denotaremos con $\hat{}$ los valores que las funciones toman en los puntos de la curva; así, por ejemplo, $\hat{\phi}(s) = \phi(\xi(s))$ para el juego no perturbado y $\hat{\phi}(s) = \psi(\xi_\epsilon(s))$ para el juego perturbado. Además escribiremos $\lambda = \frac{\partial v^*}{\partial x}$ ($\lambda_\epsilon = \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x_\epsilon}$) con el convenio habitual de representar con la misma letra la función y su valor; con este convenio, $\lambda = \hat{\lambda}(s)$ sobre $x = \xi(s)$ y $\lambda_\epsilon = \hat{\lambda}_\epsilon(s)$ en $x = \xi_\epsilon(s)$.

Es inmediato comprobar que los mandos optimales para el segundo jugador son, en uno y otro caso,

$$v^* = \text{sgn}(\lambda' \phi)$$

$$\cos v_\epsilon^* = \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}}$$

$$\text{sen } v_\epsilon^* = \frac{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}}$$

Si el mando optimal para el primer jugador es $u^*(x, \lambda)$, denotaremos

$$\tilde{f}(x, \lambda) = f(x, u^*(x, \lambda))$$

$$\tilde{L}(x, \lambda) = L(x, u^*(x, \lambda), v^*(x, \lambda)).$$

Estas funciones admiten derivadas parciales en virtud del

teorema de Danskin [15], pues por la Hipótesis 0, el mando $u^*(x, \lambda)$ es único.

Resulta así que las ecuaciones que dan los campos optimales de trayectorias para los juegos no perturbado y perturbados son:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x, \lambda) + \phi(x) \cdot \text{sgn}(\lambda' \phi) \\ \dot{\lambda}' = -\left(\frac{\partial H^*}{\partial x}\right)' = -\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}\right)' - \lambda' \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \text{sgn}(\lambda' \phi)\right] \end{cases}$$

y

$$(8') \quad \begin{cases} \dot{x}_\epsilon = \tilde{f}(x_\epsilon, \lambda_\epsilon) + \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \cdot \phi(x_\epsilon) + \\ \quad + \frac{\epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \cdot \psi(x_\epsilon) \\ \dot{\lambda}'_\epsilon = -\left(\frac{\partial H_\epsilon^*}{\partial x_\epsilon}\right)' = -\left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x_\epsilon}\right)' - \lambda'_\epsilon \tilde{f}_x - \\ \quad - \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)(\lambda'_\epsilon \phi_x) + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)(\lambda'_\epsilon \psi_x)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \end{cases}$$

donde hemos denotado $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)$, y análogamente para las funciones \tilde{f} y ψ . Alguna vez indicaremos las ecuaciones (8) como

$$\begin{cases} \dot{x} = F_0(x, \lambda) \\ \dot{\lambda}' = \Lambda_0(x, \lambda) \end{cases}$$

y las ecuaciones (8') como

$$\begin{cases} \dot{x}_\epsilon = F_\epsilon(x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \epsilon) \\ \dot{\lambda}'_\epsilon = \Lambda_\epsilon(x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \epsilon) \end{cases}$$

Pueden comprobarse también las expresiones siguientes:

$$(9) \quad \left(\frac{\partial(\cos v_\epsilon^*)}{\partial x_\epsilon} \right)' = \frac{\epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi) [(\lambda'_\epsilon \psi)(\lambda'_\epsilon \phi_x) - (\lambda'_\epsilon \phi)(\lambda'_\epsilon \psi_x)]}{[(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2]^{3/2}}$$

$$\left(\frac{\partial(\sin v_\epsilon^*)}{\partial x_\epsilon} \right)' = \frac{\epsilon (\lambda'_\epsilon \phi) [(\lambda'_\epsilon \phi)(\lambda'_\epsilon \psi_x) - (\lambda'_\epsilon \psi)(\lambda'_\epsilon \phi_x)]}{[(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2]^{3/2}}$$

$$\left(\frac{\partial(\cos v_\epsilon^*)}{\partial \lambda_\epsilon} \right)' = \frac{\epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi) [(\lambda'_\epsilon \psi)\phi' - (\lambda'_\epsilon \phi)\psi']}{[(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2]^{3/2}}$$

$$\left(\frac{\partial(\sin v_\epsilon^*)}{\partial \lambda_\epsilon} \right)' = \frac{\epsilon (\lambda'_\epsilon \phi) [(\lambda'_\epsilon \phi)\psi' - (\lambda'_\epsilon \psi)\phi']}{[(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2]^{3/2}}$$

que se utilizarán más adelante.

Estas ecuaciones se integran en sentido retrógrado a partir de las superficies sobre las que inciden los campos de trayectorias. Las condiciones finales para el gradiente en ambos juegos vienen dadas por unas condiciones de transversalidad que se formalizan del modo siguiente:

Denotaremos por W (resp. W_ϵ) una función de clase C^2 definida en un abierto que contenga a la superficie y que coincida con V^* (resp. V_ϵ^*) en el semiespacio abierto al otro lado de ella. Se prueba en [5] la posibilidad de definir tal función incluso en el caso en que la variedad sea envolvente del campo de trayectorias. En estas condiciones, postulamos

$$\text{Hipótesis 3} \quad \hat{W}_\epsilon(s) \rightarrow \hat{W}(s) \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\nabla W_\epsilon(s) \rightarrow \nabla W(s) \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0.$$

Se tiene entonces, [5], la siguiente condición de transversalidad para el juego no perturbado

$$\nabla V^* = \nabla W + \alpha \cdot \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}(s) = \nabla \hat{W}(s) + \alpha \cdot \hat{\bar{n}}(s),$$

determinándose α con la condición

$$(10) \quad \begin{aligned} & \forall s, \hat{H}^*(s, \hat{\lambda}(s)) = 0 \\ & \hat{L}(s, \nabla \hat{W}(s) + \alpha \cdot \bar{n}(s)) + \\ & + (\nabla \hat{W}(s) + \alpha \cdot \bar{n}(s))' [\hat{F}(s, \nabla \hat{W}(s) + \alpha \cdot \bar{n}(s)) + \hat{\phi}(s) \cdot \text{sgn}(\hat{\lambda}' \hat{\phi})] = 0 \end{aligned}$$

Hipótesis 4. Se puede aplicar el teorema de la función implícita a la igualdad (10), esto es:

$$\begin{aligned} \forall s, \exists \bar{\alpha} : \quad & \hat{H}^*(s, \nabla \hat{W}(s) + \bar{\alpha} \cdot \bar{n}(s)) = 0 \\ & \frac{\partial \hat{H}^*}{\partial \alpha}(s, \nabla \hat{W}(s) + \bar{\alpha} \cdot \bar{n}(s)) \neq 0 \end{aligned}$$

Para el juego perturbado, la condición de transversalidad es

$$\nabla V_{\epsilon}^* = \nabla \hat{W}_{\epsilon} + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon} \Rightarrow \hat{\lambda}_{\epsilon}(s) = \nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s),$$

determinándose α_{ϵ} con la condición

$$\begin{aligned} \forall s, \quad & \hat{H}_{\epsilon}^*(s, \hat{\lambda}_{\epsilon}(s), \epsilon) = 0 \\ & \hat{L}_{\epsilon}(s, \nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s)) + \\ & + (\nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s))' \cdot \hat{F}(s, \nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s)) + \\ & + \sqrt{[(\nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s))' \hat{\phi}(s)]^2 + \epsilon^2 [(\nabla \hat{W}_{\epsilon}(s) + \alpha_{\epsilon} \cdot \bar{n}_{\epsilon}(s))' \hat{\psi}(s)]^2} = 0 \end{aligned}$$

Proposición 1. Existe una función $\alpha_{\epsilon} = \alpha_{\epsilon}(s, \epsilon)$ para valores suficientemente pequeños de ϵ . Además, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_{\epsilon} = \alpha$.

Demostración.

Es inmediato comprobar que $H_0^*(s, \hat{\lambda}_0, 0) = H^*(s, \hat{\lambda})$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \forall s, \exists \bar{\alpha} : \quad & H_0^*(s, \nabla \hat{W}_0(s) + \bar{\alpha} \cdot \bar{n}_0(s), 0) = 0 \\ & \frac{\partial H_0^*}{\partial \alpha}(s, \nabla \hat{W}_0(s) + \bar{\alpha} \cdot \bar{n}_0(s), 0) \neq 0 \end{aligned}$$

Por el teorema de la función implícita, existe un entorno bidimensional de $(s, 0)$ y una única función γ tal que

- γ es de clase C^1 en el entorno
- $\gamma(s, 0) = \bar{\alpha}$
- $H_\epsilon^*(s, \gamma(s, \epsilon), \epsilon) = 0$.

En ese entorno, $\alpha_\epsilon = \gamma(s, \epsilon)$ y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(s, \epsilon) = \gamma(s, 0) = \bar{\alpha} \quad \#$$

Supondremos que a lo largo de las trayectorias del juego no perturbado que estamos considerando, $\lambda' \phi$ es no nulo, pues esto conllevaría la indeterminación del mando v^* y el fin de dicho campo de trayectorias. Admitiremos sin embargo que $\lambda' \phi$ pueda ser nulo sobre la superficie final; en este caso, el signo de $\lambda' \phi$ se determina mediante el cálculo

$$\text{de } \left. \frac{d}{dt} (\lambda' \phi) \right|_{t=t_1}$$

Se presentan en nuestro análisis las siguientes situaciones, supuestas verificadas las Hipótesis 0, 1 ó 2, 3 y 4:

I) Sobre la superficie final, $\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s) \neq 0$.

Existe entonces un entorno de $(\xi(s), \hat{\lambda}(s)) \in R^4$ donde por continuidad $|\lambda' \phi| \geq a > 0$.

La Hipótesis 3 y la Proposición 1 aseguran la continuidad del producto de $\hat{\lambda}'_\epsilon(s) \hat{\phi}(s)$ respecto de ϵ . Por tanto, existe un entorno de cero tal que las trayectorias de los juegos perturbados para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, inciden en puntos verificando

$$|\hat{\lambda}'_\epsilon(s) \hat{\phi}(s)| \geq a > 0.$$

Comparando los mandos y las ecuaciones de los juegos perturbados y no perturbado, observamos:

$$\begin{aligned} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cos v_\epsilon^* &= v^* \\ - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin v_\epsilon^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ya que } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)}{(\lambda'_\epsilon \phi)} = 0$$

- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon = \alpha$, por la Proposición 1.
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(x, \lambda, \epsilon) = F_0(x, \lambda)$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda_\epsilon(x, \lambda, \epsilon) = \Lambda_0(x, \lambda)$.

Por tanto, podemos enunciar:

Teorema 1. Sea $(x(t), \lambda(t))$ la solución del juego no perturbado que incide en $(\xi(s), \hat{\lambda}(s))$, definida en un intervalo $[t_0, t_1]$. Si $\lambda' \phi$ es no nulo a lo largo de la trayectoria y $\lambda'(s)\phi(s) \neq 0$, se tiene:

$\forall \eta > 0, \exists \epsilon_0(\eta): 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, la solución del juego perturbado incidente en $(\xi_\epsilon(s), \hat{\lambda}_\epsilon(s))$ existe y verifica

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon(t) - x(t)\| &< \eta \\ \|\lambda_\epsilon(t) - \lambda(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad t \in [t_\eta, t_1], \quad t_0 \leq t_\eta < t_1$$

Demostración.

Basta aplicar el teorema de la dependencia continua de las soluciones del sistema diferencial (8') respecto del parámetro ϵ . #

II) Sobre la superficie final, $\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s) = 0$.

Es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(x, \lambda, \epsilon) &= F_0(x, \lambda) \\ - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda_\epsilon(x, \lambda, \epsilon) &= \Lambda_0(x, \lambda) \end{aligned} \quad \text{si } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)}{(\lambda'_\epsilon \phi)} \neq 0$$

mientras que no puede asegurarse nada en la zona donde

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)}{(\lambda'_\epsilon \phi)} = 0.$$

Por tanto puede suceder que sobre una franja estrecha cerca de la superficie final, el mando del segundo ju-

gador en el juego perturbado sea muy diferente del mando que utiliza en el juego no perturbado. Y pueden presentarse fenómenos de capa-límite al no tener asegurada la convergencia de las pendientes de las trayectorias de los campos óptimos en esa franja estrecha cerca de la superficie final.

El procedimiento para determinar v^* consiste en estudiar $\left. \frac{d}{dt} (\lambda' \phi) \right|_{t=t_1}$ para conocer el signo de $(\lambda' \phi)$ instantes antes de t_1 . Se puede intuir que puedan presentarse situaciones diferentes según que las derivadas sucesivas de $(\lambda' \phi)$ permitan determinar el signo de $(\lambda' \phi)$ antes de t_1 o no por anularse todas. Podemos enunciar:

Teorema 2. Sean $(x(t), \lambda(t))$ y $(x_\epsilon(t), \lambda_\epsilon(t))$ las soluciones de los juegos no perturbado y perturbado que inciden respectivamente en $(\xi(s), \hat{\lambda}(s))$ y $(\xi_\epsilon(s), \hat{\lambda}_\epsilon(s))$ definidas en un intervalo $[t_0, t_1]$. Supongamos que $\lambda' \phi$ es no nulo a lo largo de la trayectoria no perturbada y que $\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s) = 0$.

Denotemos $G(x, \lambda) = \lambda' [(\phi_x \tilde{\delta} t) - (\tilde{\delta}_x \phi)]$ y $\hat{G}(s) = G(\xi(s), \hat{\lambda}(s))$. Entonces, si $\hat{G}(s) \neq 0$,

$\forall \eta > 0, \exists \epsilon_0(\eta): 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, la solución del juego perturbado incidente $(\xi_\epsilon(s), \hat{\lambda}_\epsilon(s))$ verifica

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon(t) - x(t)\| &< \eta \\ \|\lambda_\epsilon(t) - \lambda(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \forall t \in (t_0, t_1].$$

Además $\exists \delta(\epsilon): \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} = 0$$

tal que se verifica

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon(t) - \dot{x}(t)\| &< \eta \\ \|\dot{\lambda}_\epsilon(t) - \dot{\lambda}(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \text{para } t_0 < t < t_1 - \delta(\epsilon).$$

Demostración.

Nótese que $\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s) \neq 0$, pues de ser

$$\begin{cases} \hat{\lambda}'_x(s) \cdot \hat{\phi}_1(s) + \hat{\lambda}'_y(s) \cdot \hat{\phi}_2(s) = 0 \\ \hat{\lambda}'_x(s) \cdot \hat{\phi}_1(s) + \hat{\lambda}'_y(s) \cdot \hat{\phi}_2(s) = 0 \end{cases}$$

seguiría $\hat{\lambda}'_x(s) = \hat{\lambda}'_y(s) = 0$, violando la condición $\hat{H}(s) = 0$.

Puede observarse de las respectivas expresiones que las funciones $F_\varepsilon(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, \varepsilon)$ y $\Lambda_\varepsilon(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, \varepsilon)$ se mantienen uniformemente acotadas para todo ε . Sin embargo, las derivadas parciales

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon}, \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \lambda_\varepsilon}, \frac{\partial \Lambda_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon} \text{ y } \frac{\partial \Lambda_\varepsilon}{\partial \lambda_\varepsilon} \text{ no se mantienen acotadas cuando}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$, como sigue de (9). Es claro, pues, que si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot (\lambda'_\varepsilon \psi)}{(\lambda'_\varepsilon \phi)} = 0,$$

F_ε , Λ_ε y sus derivadas parciales se mantienen uniformemente acotadas y se puede deducir el carácter uniformemente lipschitziano de estas funciones.

Puede comprobarse que a lo largo de la trayectoria del juego perturbado que incide en $(\xi_\varepsilon(s), \hat{\lambda}_\varepsilon(s))$, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (\lambda'_\varepsilon \phi) = G(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) + \varepsilon \cdot \text{sen } v_\varepsilon^* \cdot \lambda'_\varepsilon \left[(\phi_x \psi) - (\psi_x \phi) \right]$$

y que para la trayectoria del juego no perturbado incidente en $(\xi(s), \hat{\lambda}(s))$ es:

$$\frac{d}{dt} (\lambda' \phi) = G(x, \lambda).$$

Por hipótesis, $\hat{G}(s) = a \neq 0$. Por la continuidad de G respecto de sus argumentos, existe un entorno de $(\xi(s), \hat{\lambda}(s)) \in \mathbb{R}^4$, Ω , donde $G(x, \lambda)$ mantiene signo constante y se verifica que

$$|G(x, \lambda)| \geq \frac{|a|}{2}$$

Y por la continuidad de \hat{H}_ε respecto de ε (Hipótesis 3 y Proposición 1) existe un entorno $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$: $(\xi_\varepsilon(s), \hat{\lambda}_\varepsilon(s)) \in \Omega$.

Sea $W = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : \lambda' \phi = 0\}$. Es claro que

$$(\xi(s), \hat{\lambda}(s)) \in \partial W,$$

pues se tiene que

$$\frac{d}{dt} (\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s)) = \hat{G}(s) \neq 0.$$

Consideremos una función $\delta(\varepsilon) \geq 0$, tal que:

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \\ \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{con } \varepsilon \rightarrow 0,$$

y denotemos por W_δ al conjunto

$$W_\delta = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : |\lambda' \phi| \leq \delta(\varepsilon)\}.$$

Pongamos por último $\bar{W} = W_\delta \cap \Omega$.

Nótese que de (11) sigue la posibilidad de hallar un entorno $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ en el que

$$\frac{d}{dt} (\hat{\lambda}'_\varepsilon(s) \cdot \hat{\phi}(s)) \geq \frac{|a|}{4}.$$

En efecto, ya que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ se tiene asegurado que el primer sumando es $\geq \frac{|a|}{2}$, basta con que se pueda garantizar el poder

tomar ε de modo que el segundo sea $\leq \frac{|a|}{4}$. Esto sigue de la

continuidad de $\hat{\lambda}_\varepsilon(s)$ respecto de ε y de que ϕ y ψ están acotadas en $\xi_\varepsilon(s)$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Por tanto, en ese entorno,

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (\xi_\varepsilon(s), \hat{\lambda}_\varepsilon(s)) \notin \text{int}(W).$$

Calculemos el tiempo que tarda la trayectoria optimal del juego perturbado en abandonar \bar{W} ; será

$$\delta \geq \left| \lambda'_{\epsilon} \phi \right|_{\partial \bar{W}} = \left| \int_0^{t_{\delta}} \frac{d}{dt} (\lambda'_{\epsilon} \phi) \cdot dt \right| \geq \frac{|a|}{4} \cdot t_{\delta}$$

Por tanto,

$$t_{\delta} \leq \frac{4\delta}{|a|}$$

Comparemos ahora las soluciones del juego no perturbado y de los juegos perturbados. Si llamamos $Y' = (x, \lambda)$,

$Z' = (-F_0, -\Lambda_0)$, $Y'_{\epsilon} = (x_{\epsilon}, \lambda_{\epsilon})$, $Z'_{\epsilon} = (-F_{\epsilon}, -\Lambda_{\epsilon})$ y si

tomamos $\tau = t_1 - t$, los sistemas (8) y (8') se pueden poner

$$\frac{dY}{d\tau} = Z(Y(\tau))$$

$$\frac{dY_{\epsilon}}{d\tau} = Z_{\epsilon}(Y_{\epsilon}(\tau))$$

El intervalo de integración es ahora $[0, T]$ con $T = t_1 - t_0$.

Se tiene que

$$Y_{\epsilon}(\tau) - Y(\tau) = Y_{\epsilon}(0) - Y(0) + \int_0^{\tau} [Z_{\epsilon}(Y_{\epsilon}(t)) - Z(Y(t))] \cdot dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|Y_{\epsilon}(\tau) - Y(\tau)\| \leq & \|Y_{\epsilon}(0) - Y(0)\| + \int_0^{t_{\delta}} \|Z_{\epsilon}(Y_{\epsilon}(t)) - Z(Y(t))\| dt + \\ & + \int_{t_{\delta}}^{\tau} \|Z_{\epsilon}(Y_{\epsilon}(t)) - Z(Y(t))\| dt \end{aligned}$$

Vamos a acotar ahora cada sumando. Fijando η_1 que luego

determinaremos, se tiene:

$$a) \text{ Para } \epsilon \text{ suficientemente pequeño, } \|Y_{\epsilon}(0) - Y(0)\| < \frac{1}{2} \cdot \eta_1$$

$$b) \int_0^{t_{\delta}} \|Z_{\epsilon}(Y_{\epsilon}) - Z(Y)\| dt \leq C \cdot t_{\delta} < \frac{1}{2} \cdot \eta_1;$$

la primera desigualdad sigue de la acotación uniforme de Z_{ϵ} y la segunda de una elección apropiada de ϵ pues

$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$.

$$c) \int_{t_\delta}^{\tau} \|Z_\varepsilon(Y_\varepsilon(t)) - Z(Y(t))\| dt \leq \int_{t_\delta}^{\tau} \|Z_\varepsilon(Y_\varepsilon(t)) - Z_\varepsilon(Y(t))\| dt + \int_{t_\delta}^{\tau} \|Z_\varepsilon(Y(t)) - Z(Y(t))\| dt.$$

$$*) \|Z_\varepsilon(Y_\varepsilon(t)) - Z_\varepsilon(Y(t))\| \leq L^* \|Y_\varepsilon(t) - Y(t)\|,$$

pues para $\lambda'_\varepsilon \phi \geq \delta$, Z_ε es uniformemente lipschitziana respecto de ε por ser $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \rightarrow 0$.

$$*) \|Z_\varepsilon(Y(t)) - Z(Y(t))\| \leq \eta_1,$$

con ε suficientemente pequeño, pues para $\lambda'_\varepsilon \phi \geq \delta$ es $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(Y(t)) = Z(Y(t))$.

Por consiguiente, resulta

$$\|Y_\varepsilon(\tau) - Y(\tau)\| \leq (\tau + 1) \cdot \eta_1 + L^* \int_0^\tau \|Y_\varepsilon(t) - Y(t)\| dt.$$

Aplicando el lema de Gronwall [12],

$$\|Y_\varepsilon(\tau) - Y(\tau)\| \leq \eta_1 \cdot e^{\int_0^\tau L^* d\tau'} + \int_0^\tau \eta_1 \cdot e^{\int_{\tau'}^\tau L^* d\tau''} d\tau' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|Y_\varepsilon(\tau) - Y(\tau)\| \leq \eta_1 \cdot (e^{L^* \cdot \tau} \left[1 + \frac{1}{L^*}\right] - \frac{1}{L^*}).$$

Dado $\eta > 0$, basta tomar

$$\eta_1 < \frac{\eta}{e^{L^* \cdot \tau} \left[1 + \frac{1}{L^*}\right] - \frac{1}{L^*}}$$

para tener asegurado que

$$\|Y_\varepsilon(\tau) - Y(\tau)\| < \eta,$$

lo que prueba la primera parte del teorema.

La segunda sigue de la propiedad ya citada de que para $\lambda'_\epsilon \phi \geq \delta$, es $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_\epsilon(Y(t)) = Z(Y(t))$. #

Caso de anularse la derivada primera de $\lambda' \phi$ y no la segunda, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3. Sean $(x(t), \lambda(t))$ y $(x_\epsilon(t), \lambda_\epsilon(t))$ las soluciones de los juegos no perturbado y perturbado que inciden respectivamente en $(\xi(s), \phi(s))$ y $(\xi_\epsilon(s), \lambda_\epsilon(s))$ definidas en un intervalo $[t_0, t_1]$. Supongamos que $\lambda' \phi$ es no nulo a lo largo de la trayectoria no perturbada y que $\lambda'(s)\phi(s) = 0$.

Si se verifica que

$$\left. \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \right|_{t=t_1} = 0$$

$$\left| \left. \frac{d^2}{dt^2} (\lambda'_\epsilon \phi) \right|_{t=t_1} \right| \geq a > 0,$$

para las trayectorias de los juegos perturbados con $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, entonces,

$\forall \eta > 0$, $\exists \epsilon_0(\eta)$: $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ la solución del juego perturbado incidente en $(\xi_\epsilon(s), \lambda_\epsilon(s))$ verifica

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\| < \eta$$

$$\|\lambda_\epsilon(t) - \lambda(t)\| < \eta \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

Además, $\exists \delta(\epsilon)$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} = 0$$

tal que se tiene

$$\|\dot{x}_\epsilon(t) - \dot{x}(t)\| < \eta$$

$$\|\dot{\lambda}_\epsilon(t) - \dot{\lambda}(t)\| < \eta \quad \text{para } t_0 < t \leq t_1 - \delta(\epsilon).$$

Demostración.

Denotemos $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto de puntos constituidos por el rango de las aplicaciones que resuelven (8) y (8'). Para cada elemento $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ tiene sentido hablar de $\frac{d}{dt} (\bar{\lambda}'\phi)$ a lo largo de la trayectoria optimal que pasa por él.

Sean

$$\Omega_0 = \left\{ (x_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in \Omega : \left| \frac{d^2}{dt^2} (\lambda'_\epsilon \phi(x_\epsilon)) \right| > \frac{a}{2} \right\}$$

$$W_0 = \left\{ (x_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in \Omega : \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi(x_\epsilon)) = 0 \right\}.$$

Es claro que

$$(\xi(s), \hat{\lambda}(s)) \in \partial W_0$$

$$(\xi_\epsilon(s), \hat{\lambda}_\epsilon(s)) \in \partial W_0, \text{ si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*.$$

Consideremos una función $\delta_0(\epsilon) \geq 0$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0(\epsilon) \rightarrow 0 \\ \frac{\epsilon}{\delta_0(\epsilon)} \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0$$

y denotemos por W_{δ_0} al conjunto

$$W_{\delta_0} = \left\{ (x_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in \mathbb{R}^4 : \left| \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \right| \leq \delta_0(\epsilon) \right\}.$$

Pongamos $\bar{W}_{\delta_0} = W_{\delta_0} \cap \Omega_0$.

Calculemos el tiempo que tarda la trayectoria optimal del juego perturbado en abandonar W_{δ_0} ; será

$$\delta_0 \geq \left. \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \right|_{\partial \bar{W}_{\delta_0}} = \left| \int_0^{t_{\delta_0}} \frac{d^2}{dt^2} (\lambda'_\epsilon \phi) \cdot dt \right| \geq \frac{a}{2} \cdot t_{\delta_0}$$

Por tanto,

$$t_{\delta_0} \leq \frac{2\delta_0}{a}$$

Al cabo de este tiempo t_{δ_0} ,

$$\left| \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \right| = \delta_0$$

Por la continuidad de $\frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi)$ respecto de sus argumentos para cada ϵ , existe un entorno de $(x(t_{\delta_0}), \lambda_\epsilon(t_{\delta_0})) \in \mathbb{R}^4$, $\Omega_1(\epsilon)$, donde

$$\left| \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \right| \geq \frac{\delta_0(\epsilon)}{2}$$

Consideremos ahora una función $\delta_1(\epsilon) \geq 0$, que verifique

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1(\epsilon) \rightarrow 0 \\ \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)} \rightarrow 0 \\ \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_0(\epsilon)} \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0$$

y denotemos por último para cada ϵ

$$\bar{W}_{\delta_1}(\epsilon) = W_{\delta_1} \cap \Omega_1(\epsilon)$$

Si al cabo del tiempo t_{δ_0} , sobre las trayectorias perturbadas es $|\lambda'_\epsilon \phi| \geq \delta_1(\epsilon)$, nos encontramos en la situación del Teorema 2 y sigue la demostración como aquél. Si no, estas trayectorias optimales estarán en $\bar{W}_{\delta_1}(\epsilon)$. El tiempo que tardarán en llegar a la frontera de $\bar{W}_{\delta_1}(\epsilon)$ donde $|\lambda'_\epsilon \phi| = \delta_1$, será para valores de ϵ suficientemente pequeños

$$\delta_1 \geq (\lambda'_\epsilon \phi) \Big|_{\partial W_{\delta_1}} = \left| \int_0^{t_{\delta_1}} \frac{d}{dt} (\lambda'_\epsilon \phi) \cdot dt \right| \geq \frac{\delta_0(\epsilon)}{2} \cdot t_{\delta_1}$$

Por tanto,

$$t_{\delta_1} \leq \frac{2\delta_1}{\delta_0}$$

Tomemos ahora

$$\delta(\varepsilon) = 2. \left(\frac{\delta_0(\varepsilon)}{a} + \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} \right)$$

$$t_\delta = t_{\delta_0} + t_{\delta_1}.$$

Podemos comparar ya las soluciones de los juegos perturbados y del no perturbado. La conclusión del Teorema es análoga a la del Teorema 2. #

Pensamos que se podría generalizar la tesis del teorema y la idea de su demostración para el caso en que las trayectorias incidentes de los juegos perturbados verificasen en $t=t_1$ y para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*$

$$\lambda'_\varepsilon \phi = \frac{d}{dt} (\lambda'_\varepsilon \phi) = \dots = \frac{d^k}{dt^k} (\lambda'_\varepsilon \phi) = 0$$

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (\lambda'_\varepsilon \phi) \neq 0, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}$$

III) Sobre algún punto de la superficie final es $\hat{\lambda}'(s_0) \hat{\phi}(s_0) = 0$, siendo no nulo el producto $\hat{\lambda}'(s) \hat{\phi}(s)$ para los restantes valores de s .

Este caso da origen a una curva universal y estudiaremos en el capítulo 8 el problema de la convergencia.

Esencialmente distinto sería el hipotético caso en que

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} (\lambda'_\epsilon \phi) \right|_{t=t_1} = o(\epsilon \cdot (\hat{\lambda}'_\epsilon(s) \hat{\phi}(s))) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Queremos señalar que no hemos encontrado ejemplos plenamente satisfactorios (Cf. Ejemplo 1) en que se presente esta situación. El problema de la convergencia de las soluciones de (8') a las de (8) se complica al perder validez el teorema de la continuidad de las soluciones con respecto de ϵ .

De hecho vamos a señalar un sencillo ejemplo de sistema fácilmente resoluble cuya situación es la misma que la de los sistemas (8) y (8') y en el que es inmediato verificar la no convergencia de las trayectorias perturbadas a las no perturbadas, por lo que sospechamos la imposibilidad de formular un resultado general que pruebe la convergencia.

Ejemplo. Se considera el sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-x \cdot y + \epsilon \cdot x^2}{x + \epsilon} & x(0) = 0 \\ \dot{y} = \frac{x^2 + \epsilon \cdot y^2}{x + \epsilon} & y(0) = A \end{cases}$$

cuyo límite formal con $\epsilon \rightarrow 0$ es:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y & x(0) = 0 \\ \dot{y} = x & y(0) = A \end{cases}$$

Puede comprobarse que las correspondientes soluciones son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\frac{1}{A} - t} \end{cases}$$

para el sistema perturbado (independiente de ϵ), y

$$x^2 + y^2 = A^2$$

para el no perturbado.

Si se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-x \cdot y + \varepsilon \cdot x^2}{x + \varepsilon} & x(0) = x_\varepsilon > 0 \quad (x_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ con } \varepsilon \rightarrow 0) \\ \dot{y} = \frac{x^2 + \varepsilon \cdot y^2}{x + \varepsilon} & y(0) = A \end{cases}$$

se tiene que su solución es

$$\begin{aligned} & - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \ln |x| - \frac{1}{2(1 + \varepsilon)} \cdot \ln |x^2 - \varepsilon \cdot x \cdot y + (1 + \varepsilon)y^2| - \\ & - \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon)}{(1 + \varepsilon)\sqrt{4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot x - \varepsilon \cdot y}{\sqrt{4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}} = \\ & - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \ln x_\varepsilon - \frac{1}{2(1 + \varepsilon)} \cdot \ln |x_\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot A \cdot x_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \cdot A^2| - \\ & - \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon)}{(1 + \varepsilon)\sqrt{4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot x_\varepsilon - \varepsilon \cdot A}{\sqrt{4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

Puede comprobarse que la condición para que esta solución tienda a la solución de su límite formal es que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \ln x_\varepsilon = 0.$$

Así, si adoptamos

$$x_\varepsilon = \varepsilon^p \quad (p > 1),$$

el límite de la solución perturbada es

$$x^2 + y^2 = A^2;$$

si se adopta

$$x_\varepsilon = e^{-1/\varepsilon},$$

el límite de la solución es

$$x^2 + y^2 = (A/e)^2.$$

III- CONVERGENCIA DE MANDOS EN BUCLE CERRADO.

1. Introducción.

El mando en bucle cerrado es aquél que es susceptible de utilizar en cada instante la información recogida sobre los estados precedentes del sistema, mientras que el mando en bucle abierto es un mando definido como una función del tiempo en un programa establecido a priori. Hay que añadir además que los mandos en bucle abierto calculados integrando las trayectorias bioptimales, y que permiten por tanto calcular el valor, no son necesariamente estrategias óptimas, no constituyen punto-silla; únicamente lo constituyen los mandos en bucle cerrado que se sintetizan a partir de ellas. (Cf. [6]).

El estudio de la convergencia de los mandos en bucle cerrado se apoya en el estudio previo del campo de trayectorias.

Definición 1. Se dice que un campo óptimal de trayectorias es regular si existen dos funciones biunívocas y continuas definidas sobre un dominio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{X}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tales que

$$x = \mathcal{X}(s, t)$$

$$\lambda = \mathcal{L}(s, t)$$

Proposición 2. Sea $\mathcal{P}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\omega \longmapsto \mathcal{P}(\omega) = p$$

biunívoca y continua y sea Ω compacto. Entonces, la función

inversa $\omega = \rho^{-1}(p)$ es continua en todo punto $p \in \rho(\Omega)$.

Demostración.

Véase [2]. #

Aplicando la Proposición 2 a la función

$$x = \mathcal{X}(s, t),$$

sigue la existencia y unicidad para todo punto $x \in \mathcal{X}(\Omega)$ de las funciones

$$\begin{array}{ccc} \tilde{s}: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tilde{s}(x) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{t}: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tilde{t}(x) \end{array}$$

tales que

$$x = \mathcal{X}(\tilde{s}(x), \tilde{t}(x)).$$

Esto permite a su vez definir una función

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\lambda}: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \tilde{\lambda}(x) = \mathcal{L}(\tilde{s}(x), \tilde{t}(x)), \end{array}$$

continua por ser composición de funciones continuas.

Supondremos que el juego no perturbado y que los juegos perturbados para todo ε suficientemente pequeño originan campos optimales regulares. De modo que además de lo anterior, a partir de un ε , existen funciones biunívocas y continuas definidas sobre dominios compactos $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{X}_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tales que

$$x_\varepsilon = \mathcal{X}_\varepsilon(s, t)$$

$$\lambda_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(s, t).$$

Las funciones inversas

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{y} & & \tilde{t}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{s}_\varepsilon(x) & & & x &\longmapsto \tilde{t}_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

tales que

$$x_\varepsilon = \chi_\varepsilon(\tilde{s}_\varepsilon(x), \tilde{t}_\varepsilon(x))$$

existen y son continuas; y se puede definir la función

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \tilde{\lambda}_\varepsilon(x) = \mathcal{J}_\varepsilon(\tilde{s}_\varepsilon(x), \tilde{t}_\varepsilon(x)), \end{aligned}$$

continua a su vez por ser composición de funciones continuas.

Probaremos la continuidad respecto de ε basándonos en el siguiente:

Lema. Con las notaciones e hipótesis de los Teoremas 1, 2 o 3, se verifica que si $\{t_\varepsilon\} \rightarrow \bar{t}$,

$$\begin{aligned} \forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0 : \varepsilon < \varepsilon_0 & \quad \|x_\varepsilon(t_\varepsilon) - x(\bar{t})\| < \eta \\ & \quad \| \lambda_\varepsilon(t_\varepsilon) - \lambda(\bar{t}) \| < \eta. \end{aligned}$$

Demostación.

En efecto,

$$\|x_\varepsilon(t_\varepsilon) - x(\bar{t})\| \leq \|x_\varepsilon(t_\varepsilon) - x_\varepsilon(\bar{t})\| + \|x_\varepsilon(\bar{t}) - x(\bar{t})\|.$$

Dado $\eta > 0$,

*) Según los teoremas 1, 2 o 3,

$$\exists \varepsilon_1 : \varepsilon < \varepsilon_1, \quad \|x_\varepsilon(\bar{t}) - x(\bar{t})\| < \frac{\eta}{2}$$

*) Por el teorema del Valor Medio,

$$\|x_\varepsilon(t_\varepsilon) - x_\varepsilon(\bar{t})\| \leq M |t_\varepsilon - \bar{t}|,$$

siendo M una cota superior de F_ε ; por tanto

$$\exists \varepsilon_2 : \varepsilon < \varepsilon_2, \quad \|x_\varepsilon(t_\varepsilon) - x_\varepsilon(\bar{t})\| < \frac{\eta}{2}$$

tomando $|t_\epsilon - t| < \frac{\eta}{2M}$.

Escogiendo $\epsilon_0 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ sigue el lema.

De modo similar se demuestra la afirmación para el gradiente. #

Proposición 3. Sea $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ un punto interior de los campos regulares de trayectorias construidos para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Supongamos que dichos campos verifican las hipótesis de los Teoremas 1, 2 o 3. Entonces:

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon(\eta): \|\tilde{\lambda}_\epsilon(\bar{x}) - \tilde{\lambda}(\bar{x})\| < \eta$$

Demostración.

Puede probarse en primer lugar que

$$\begin{aligned} \tilde{t}_\epsilon(\bar{x}) &\longrightarrow \tilde{t}(\bar{x}) \\ \tilde{s}_\epsilon(\bar{x}) &\longrightarrow \tilde{s}(\bar{x}) \end{aligned} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0.$$

En efecto, si

$$\begin{aligned} \tilde{t}_\epsilon(\bar{x}) &\longrightarrow t^* \neq t(\bar{x}) \\ \tilde{s}_\epsilon(\bar{x}) &\longrightarrow s^* \neq s(\bar{x}) \end{aligned}$$

según el lema anterior sería

$$\chi_\epsilon(\tilde{s}_\epsilon(\bar{x}), \tilde{t}_\epsilon(\bar{x})) \longrightarrow \chi(s^*, t^*) \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0;$$

pero al ser

$$\forall \epsilon, \quad \chi_\epsilon(\tilde{s}_\epsilon(\bar{x}), \tilde{t}_\epsilon(\bar{x})) = \bar{x}$$

será

$$\chi(s^*, t^*) = \bar{x}.$$

Por otra parte

$$\chi(\tilde{s}(\bar{x}), \tilde{t}(\bar{x})) = \bar{x},$$

y ambas afirmaciones violarían el carácter regular del juego no perturbado.

Entonces, la afirmación del lema anterior relativa al gradiente asegura que

$$\forall \eta > 0, \exists \bar{\epsilon}(\eta): 0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}(\eta)$$

$$\|\tilde{\lambda}_\epsilon(\bar{x}) - \tilde{\lambda}(\bar{x})\| = \|\mathcal{L}_\epsilon(\tilde{s}_\epsilon(\bar{x}), \tilde{t}_\epsilon(\bar{x})) - \mathcal{L}(\tilde{s}(\bar{x}), \tilde{t}(\bar{x}))\| < \eta.$$

2. Convergencia del mando $u_\epsilon^*(x_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ a $u^*(x, \lambda)$.

Los mandos optimales $u^*(x, \lambda)$ y $u_\epsilon^*(x_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ y las funciones obtenidas a partir de ellas:

$$\tilde{u}(x) = u^*(x, \lambda(x))$$

$$\tilde{u}_\epsilon(x_\epsilon) = u_\epsilon^*(x_\epsilon, \lambda_\epsilon(x_\epsilon))$$

son los resultados de problemas de optimización donde no aparece explícitamente ϵ y que tienen solución única. Se trata, pues, de la misma función para el juego no perturbado y para los juegos perturbados.

Es sabido que estas funciones no han de ser ni siquiera continuas respecto de sus argumentos. Las discontinuidades del mando u se traducen en discontinuidades de las funciones $F_0, \Lambda_0, F_\epsilon, \Lambda_\epsilon$ y por tanto en una brusca variación de las pendientes de las trayectorias del campo optimal correspondiente. En estas superficies, dicho campo deja de ser regular en ocasiones y mantiene la regularidad en otras.

* Estableceremos el siguiente resultado inmediato válido en la zona donde no hay superficies de cambio de mando, es decir, donde hay continuidad del mando u^* respecto de sus argumentos.

Teorema 4. Sea $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ un punto interior de los campos regulares de trayectorias construidos para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, en la zona donde $u^*(x, \lambda)$ depende continuamente de sus argumentos. Supongamos que dichos campos verifican las hipótesis de los Teoremas 1, 2 o 3. Entonces:

$$\tilde{u}_\epsilon(\bar{x}) \longrightarrow \tilde{u}(\bar{x}) \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0.$$

Demostración.

Ya que existe una misma función

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$u^*(t) = \sigma(x(t), \lambda(t))$$

$$u_\epsilon^*(t) = \sigma(x_\epsilon(t), \lambda_\epsilon(t))$$

y como $\tilde{\lambda}_\epsilon(\bar{x}) \longrightarrow \tilde{\lambda}(\bar{x})$, sigue de la continuidad de u^* respecto de sus argumentos que

$$\tilde{u}_\epsilon(\bar{x}) \longrightarrow \tilde{u}(\bar{x}) \quad \#$$

3. Convergencia del mando $\cos v_\epsilon^*$ a $v^*(x, \lambda)$.

Los mandos optimales del segundo jugador, (7), dan origen a las siguientes funciones

$$\tilde{v}(x) = \text{sgn}(\lambda'(x)\phi(x))$$

$$\cos \tilde{v}_\epsilon(x_\epsilon) = \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}}$$

$$\text{sen } \tilde{v}_\epsilon(x_\epsilon) = \frac{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}}$$

cuya convergencia pasamos a estudiar.

Teorema 5. Sea $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ un punto interior de los campos

regulares de trayectorias construidos para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Supongamos que dichos campos verifican las hipótesis de los Teoremas 1, 2 o 3. Entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cos \tilde{v}_\epsilon(\bar{x}) = \tilde{v}(\bar{x}) \quad \text{y} \quad |\cos v_\epsilon(\bar{x}) - v(\bar{x})| = o(\epsilon)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin \tilde{v}_\epsilon(\bar{x}) = 0$$

Demostración.

Por estar $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ situado en el interior del campo optimal no perturbado, será

$$\tilde{\lambda}(\bar{x})' \phi(\bar{x}) \neq 0.$$

Y por la Proposición 3,

$$\tilde{\lambda}_\epsilon(\bar{x})' \phi(\bar{x}) \rightarrow \tilde{\lambda}(\bar{x})' \phi(\bar{x}).$$

En estas condiciones es inmediato comprobar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cos \tilde{v}_\epsilon(\bar{x}) = \tilde{v}(\bar{x})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin \tilde{v}_\epsilon(\bar{x}) = 0.$$

Y además se determina fácilmente que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \tilde{v}_\epsilon(\bar{x}) - \tilde{v}(\bar{x})}{\epsilon} = 0. \quad \#$$

IV- SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD DEL VALOR

Y SU GRADIENTE. REPASO.

1. Introducción.

En el marco de la teoría que se apoya en el teorema de verificación de Isaacs [17], y en el de condiciones suficientes para la aplicación de dicho teorema de P. Bernhard [5], se plantean ahora los problemas de convergencia de los distintos tipos de discontinuidad del valor o de su gradiente, cuyas construcciones vienen explicitadas en [5], al aproximar los juegos perturbados al no perturbado.

Conviene recalcar que tanto el teorema de Isaacs como el de Bernhard son teoremas de condiciones suficientes, lo que explica construcciones de campos de trayectorias no forzadas en principio, aparentemente al menos, por la dinámica del juego. A veces es forzoso construirlas para acoplar distintos campos de trayectorias optimales sobre las que definir una función valor que satisfaga el teorema de Isaacs. A consecuencia de esto aparecerán juegos muy parecidos y muy alejados no obstante en su resolución cualitativa y cuantitativa.

Recuérdese a propósito de esto que era esencial en los resultados anteriores la Hipótesis 2 que postulaba que las superficies de los juegos perturbados sobre las que inciden los campos de trayectorias optimales perturbadas tienden a la superficie sobre la que incide el campo optimal no perturbado.

En los próximos capítulos estudiaremos el problema de la convergencia anteriormente citada. Comenzaremos

estudiando la barrera natural, algo especial en cuanto que puede delimitar la zona de captura. A continuación se estudiarán las superficies de cambio de mando, las uniones y los empalmes, cuyas construcciones se indicarán en los respectivos capítulos. Ahora pasaremos a describir el modelo matemático en el que nos moveremos para solventar los problemas relativos a la definición, existencia y unicidad de las soluciones de sistemas diferenciales con segundo miembro discontinuo; definiremos luego tales superficies de discontinuidad y citaremos algunas de sus propiedades. (Cf. [5]).

2. Feedbacks y solución causal de una ecuación diferencial.

Definición 2. Una solución causal de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0,$$

es una curva absolutamente continua $x(\cdot)$ que satisface

$$\forall t, \lim_{\tau \rightarrow 0} \dot{x}(t + \tau) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Definición 3. Un feedback admisible para el jugador "V" es una aplicación

$$\psi: X \times R \longrightarrow U$$

tal que cualquier $u(\cdot) \in \Omega_u$ que sea el mando admisible

(dominio admisible constituido por ejemplo por las funciones medibles con valores en un convexo c.p.d), la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, u), \forall t \in \mathbb{R}^+$ tenga una solución causal única para cualquier fase inicial $(x_0, t_0) \in X \times R$ que engendre un

mando $v(\cdot): t \rightarrow \Psi(x(t), t)$ admisible.

Definición 4. Un feedback discriminante admisible para el jugador "U" es una aplicación

$$\phi: X \times R \times R \longrightarrow U$$

tal que para todo feedback admisible para "V", ψ , la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, \phi(x, t, \psi(x, t)) + \phi(x) \cdot \psi(x, t)$$

tenga solución causal única para toda fase inicial $(x_0, t_0) \in X \times R$ que engendre un mando admisible

$$u(\cdot): t \rightarrow \phi(x(t), t, \psi(x, t)).$$

Análogamente se definen el feedback admisible para el jugador "U" y el feedback discriminante admisible para el jugador "V". Estas definiciones, aunque implícitas, describen la clase más amplia de funciones que satisfacen los axiomas entre los feedbacks.

Escogiendo como conjunto de estrategias admisibles las parejas estrategias inferiores (formadas por un feedback discriminante para "U" y un feedback ordinario para "V") se introduce para la función valor el concepto de punto-silla inferior. Escogiendo entre las parejas estrategias superiores (feedback ordinario para "U" y feedback discriminante para "V"), se llega al concepto de punto-silla superior para la función valor.

3. Uniones.

Se llama unión la situación en la cual un campo de extremales alcanza una superficie S y luego permanece en ella durante un tiempo no nulo.

Denotaremos aquí u^* y v^* los límites de los correspondientes mandos a lo largo de la trayectoria optimal que llega a $x \in S$, y denotaremos \hat{u} y \hat{v} la restricción del punto-silla superior a S . Se tienen los siguientes resultados (Cf. [5]):

"Si la solución es isaaciana y si el máximo en v de $H(u^*, v)$ sobre V es único, las trayectorias optimales alcanzan S tangencialmente. Si el mínimo en u de $H(u, \hat{v}(u))$ sobre U es único, la estrategia optimal $u^*(x)$ es continua en la unión. Si las dos condiciones se satisfacen, los dos mandos son continuos sobre una trayectoria optimal."

Como consecuencia se sigue que:

"Si el dominio de maniobrabilidad extendido \bar{Q} es estrictamente convexo para todo u en U (lo que sucede en los juegos perturbados), la unión para una solución isaaciana es tangente. Si existe una unión no tangente, al menos una de las coordenadas aparece linealmente en el hamiltoniano (lo que ocurre en el juego no perturbado)"

Según que los campos por una parte y otra de S alcancen, sean paralelos o dejen la superficie, las uniones se clasifican en:

- a) Ligaduras y pseudoligaduras de estado.

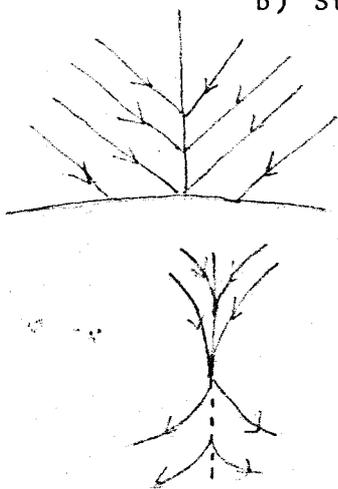


Son superficies de discontinuidad alcanzadas en su cara continua por un campo optimal. En ocasiones la superficie forma parte de $\partial(\Theta)$

constituyendo las llamadas ligaduras de estado del problema y las superficies de "contacto seguro". En otras ocasiones, la superficie es una superficie semipermeable que constituye una barrera del juego y que por el lado disconti-

nuo aparece en general como el límite continuo de un campo de trayectorias optimales; en este caso, la superficie se llama una pseudoligadura de estado y el campo tiene la estructura que se esquematiza en la figura adjunta.

b) Superficies universales.



Son superficies alcanzadas desde los dos lados por campos de trayectorias optimales. Esquemáticamente presentan la estructura que se indican en la figura. Las superficies universales regulares (es decir, de gradiente discontinuo) se llaman superficies focales.

Denotaremos con índices 1 y 2 las cantidades calculadas sobre S en los campos incidentes a la izquierda y a la derecha de S; y sea ν la normal a S orientada de la región 1 a la 2.

(Desarrollaremos lo que sigue escribiendo la dinámica del juego no perturbado. Las afirmaciones se mantienen si se escriben las ecuaciones correspondientes a los juegos perturbados).

Por el tipo de unión de que se trata, se debe verificar:

$$\nu' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot \nu_1^*] \geq 0$$

$$\nu' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot \nu_2^*] \leq 0.$$

) Si $\nu' [f(x, u_1^) + \phi(x) \cdot \nu_2^*] < 0$,

se demuestra que $\nu' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot \nu_1^*] \geq 0$ y que puede existir una solución isaaciana con punto-silla superior satisfaciendo el campo las condiciones de una unión con S.

) Si $\nu' [f(x, u_2^) + \phi(x) \cdot \nu_1^*] > 0$,

se demuestra que $v' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^*] \leq 0$ y que puede existir una solución isaaciana con punto-silla inferior verificando el campo las condiciones de una unión con S.

En las superficies focales las dos parejas de mandos optimales (u_1^*, v_1^*) y (u_2^*, v_2^*) son posibles y dan la misma trayectoria, verificándose pues que:

$$\begin{aligned} f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot \cos v_1^* + \varepsilon \cdot \psi(x) \cdot \sen v_1^* &= \\ = f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot \cos v_2^* + \varepsilon \cdot \psi(x) \cdot \sen v_2^* . \end{aligned}$$

4. Empalmes.

Se trata de singularidades sin discontinuidad del valor. Consideramos aquí superficies, S, sobre las cuales los mandos optimales y, por tanto, la pendiente de las trayectorias sufren una discontinuidad con eventualmente una discontinuidad del gradiente de V.

Denotaremos con índices 1 y 2 las cantidades calculadas sobre S en los campos incidente y emergente; y sea ν la normal a S orientada de la región 1 a la 2.

Poseemos una serie de resultados relativos al comportamiento del campo de trayectorias optimal que depende del signo de las expresiones

$$\begin{aligned} v' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^*] \\ v' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_1^*] \end{aligned}$$

y que podemos sintetizar del modo siguiente:

$$*) \text{ Si } \begin{cases} v' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^*] > 0 \\ v' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_1^*] > 0, \end{cases}$$



entonces el gradiente es continuo sobre S y el valor presenta un punto-silla, pero hay cambio brusco de alguno de los mandos. S se llama superficie de transición y esquemáticamente adopta la forma de la figura.

Nótese que esta hipótesis significa que si uno cualquiera de los dos jugadores mantiene el mando del campo incidente, el estado atraviesa S.

) Si $v' [f(x, u_1^) + \phi(x) \cdot v_2^*] < 0,$

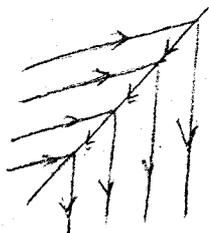


entonces puede haber punto-silla superior con gradiente discontinuo, se verifica que

$$v' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_1^*] > 0$$

y el campo incidente verifica las condiciones de una unión con S. S se llama superficie equívoca y esquemáticamente tiene la forma adjunta.

) Si $v' [f(x, u_2^) + \phi(x) \cdot v_1^*] < 0,$



entonces puede haber punto-silla inferior con gradiente discontinuo, se verifica que

$$v' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^*] > 0$$

y el campo incidente verifica las condiciones de una unión con S. El nombre de la superficie es el del apartado anterior y el esquema es el adjunto.

Nótese que en un juego separado como el que consideramos no pueden presentarse simultáneamente

$$v' [f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^*] < 0$$

$$v' [f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_1^*] < 0.$$

En efecto, para que el campo incidente alcance S y el campo emergente la deje, se debe tener

$$v' \left[f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_1^* \right] \geq 0$$

$$v' \left[f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_2^* \right] \geq 0,$$

de donde se sigue que

$$v' f(x, u_1^*) \geq -v' \phi(x) \cdot v_1^*$$

$$v' f(x, u_2^*) \geq -v' \phi(x) \cdot v_2^* .$$

Si además

$$v' \left[f(x, u_1^*) + \phi(x) \cdot v_2^* \right] < 0,$$

será

$$v' f(x, u_1^*) < -v' \phi(x) \cdot v_2^* .$$

Por tanto,

$$-v' \phi(x) \cdot v_1^* \leq v' f(x, u_1^*) < -v' \phi(x) \cdot v_2^* \leq v' f(x, u_2^*)$$

$$v' \left[f(x, u_2^*) + \phi(x) \cdot v_1^* \right] \geq 0.$$

Análogos resultados existen para los juegos regulares cambiando en las anteriores expresiones la dinámica por la de los juegos perturbados. La superficie de conmutación regular se llama envolvente de conmutación.

V- PERTURBACION DE LA BARRERA NATURAL.

Llamamos barrera natural a la superficie semipermeable que se construye sobre el borde de la parte útil del blanco y que es la candidata natural para definir la zona de captura. En ocasiones permite aislar una zona cerrada que contiene la parte útil del blanco fuera de la cual es imposible la captura. Son estas superficies semipermeables las herramientas básicas para el estudio cualitativo del juego.

Supondremos que la frontera del blanco del juego no perturbado, \mathcal{B} , es un subconjunto del rango de cierta función de clase C^2 , $x = b(s)$, lo que permite encontrar en cada punto de la frontera de \mathcal{B} una normal de clase C^1 . En los juegos perturbados, la función de clase C^2 que define la frontera del blanco \mathcal{B}_ϵ es $x = b_\epsilon(s)$. Establecemos:

Hipótesis 1'. $b_\epsilon(s) \rightarrow b(s)$ con $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{db_\epsilon(s)}{ds} \rightarrow \frac{db(s)}{ds}$$

La hipótesis 1' implica la continuidad de las normales respecto de ϵ .

Supondremos que el borde de la parte útil del blanco es un punto sobre el que puede encontrarse una normal a la frontera de \mathcal{B} . Este punto viene dado por

$$\min_u \max_v v' \left[f(x,u) + \phi(x) \cdot v \right] \Big|_{x \in \partial(\mathcal{B})} = 0,$$

siendo v' la normal a la frontera de \mathcal{B} . El borde de la parte útil de cada blanco perturbado viene dado por

$$(12') \quad \min_u \max_v v'_\epsilon \left[f(x,u) + \phi(x) \cdot \cos v + \epsilon \cdot \psi(x) \cdot \text{sen } v \right] \Big|_{x \in \partial(\mathcal{G}_\epsilon)} = 0.$$

De la continuidad pedida a las normales sigue que los puntos definidos por (12') tienden a los definidos por (12) cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De forma que las barreras naturales perturbadas se apoyan en puntos que tienden a los puntos donde se apoyan las barreras naturales no perturbadas.

Las barreras naturales, como superficies semipermeables que son, vienen definidas implícitamente por las ecuaciones

$$(13) \quad \begin{aligned} \min_u \max_v v' [f(x,u) + \phi(x) \cdot v] &= 0 \\ \min_u \max_v v'_\epsilon [f(x,u) + \phi(x) \cdot \cos v + \epsilon \cdot \psi(x) \cdot \text{sen } v] &= 0. \end{aligned}$$

Estas relaciones son equivalentes a ecuaciones en derivadas parciales del tipo Hamilton-Jacobi-Isaacs, de forma que con las hipótesis hechas se puede desarrollar una teoría de características. Explicitamos los resultados.

Para el juego no perturbado, (12) se convierte en

$$v' f(x, u^{**}) + |v' \phi(x)| = 0,$$

siendo los mandos óptimos sobre la barrera

$$(14) \quad \begin{aligned} u^{**} : v' f(x, u^{**}) &= \min_u v' f(x, u) \\ v^{**} : v^{**} &= \text{sgn } (v' \phi) \end{aligned}$$

El sistema de Hamilton-Jacobi asociado es

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u^{**}) + \phi(x) \cdot \text{sgn } (v' \phi) \\ \dot{v}' = -v' \left[\frac{\partial f(x, u^{**})}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \text{sgn } (v' \phi) \right] \end{cases}$$

siendo las condiciones finales los bordes de la parte útil del

blanco. En el instante final ν es normal a $\partial(\mathcal{B})$; si esta condición no estuviera definida (por ejemplo, en el caso de un blanco puntual), los valores finales de ν se pueden obtener de:

$$v' \hat{f}(b(s_0), u^{**}(b(s_0), v)) + |v' \hat{\phi}(b(s_0))| = 0,$$

siendo $b(s_0)$ el borde de la parte útil.

Para los juegos perturbados, (12') se convierte en

$$v'_\epsilon f(x, u_\epsilon^{**}) + \sqrt{(v'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (v'_\epsilon \psi)^2} = 0,$$

siendo los mandos óptimos sobre la barrera

$$u_\epsilon^{**} : v'_\epsilon f(x, u_\epsilon^{**}) = \min_u v'_\epsilon f(x, u)$$

(14')

$$v_\epsilon^{**} ; \cos v_\epsilon^{**} = \frac{(v'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(v'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (v'_\epsilon \psi)^2}}$$

$$\text{sen } v_\epsilon^{**} = \frac{\epsilon \cdot (v'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(v'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (v'_\epsilon \psi)^2}}.$$

El sistema diferencial asociado es:

$$(15') \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u_\epsilon^{**}) + \phi(x) \cdot \cos v_\epsilon^{**} + \epsilon \cdot \psi(x) \cdot \text{sen } v_\epsilon^{**} \\ \dot{v}'_\epsilon = -v'_\epsilon \left[\frac{\partial f(x, u_\epsilon^{**})}{\partial x} + \frac{(v'_\epsilon \phi_x) \cdot \phi + \epsilon^2 \cdot (v'_\epsilon \psi_x) \cdot \psi}{\sqrt{(v'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (v'_\epsilon \psi)^2}} \right] \end{cases}$$

tomando como condiciones finales los bordes de la parte útil del blanco perturbado.

Puede observarse la total analogía entre los sistemas (15) y (15') y los sistemas (8) y (8') para el caso $L = L_\epsilon = 1$, colocando v y v_ϵ donde había λ y λ_ϵ . Esto permite llevar a cabo un análisis paralelo al que allí se hacía, llegando a parecidos resultados de convergencia de las barreras naturales perturbadas a la barrera no perturbada que ahora enunciamos.

Con las Hipótesis 0 y 1' se tiene:

Teorema 6. Sea $(x(t), v(t))$ la ecuación de la barrera natural que incide en (x_0, v_0) obtenidos para $s=s_0$, definida en un intervalo $[t_0, t_1]$. Si $\hat{v}'(s_0) \cdot \hat{\phi}(s_0) \neq 0$, se tiene:

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0(\eta): 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, la barrera del juego perturbado incidente en $(b_\varepsilon(s_0), v_\varepsilon(s_0))$ existe y verifica

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x(t)\| &< \eta \\ \|v_\varepsilon(t) - v(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad t \in [t_\eta, t_1], \quad t_0 \leq t_\eta \leq t_1$$

#

Teorema 7. Sean $(x(t), v(t))$ y $(x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))$ las barreras de los juegos no perturbado y perturbado que inciden respectivamente en $(b(s_0), \hat{v}(s_0))$ y $(b_\varepsilon(s_0), \hat{v}_\varepsilon(s_0))$ definidas en un intervalo $[t_0, t_1]$. Supongamos que $\hat{v}'(s_0) \cdot \hat{\phi}(s_0) = 0$.

Denotemos $M(x, v) = v \cdot [(\phi_x \delta(x, u^{**}) - (\delta_x(x, u^{**}) \phi)]$ y $\hat{M}(s) = M(b(s_0), \hat{v}(s_0))$. Entonces, si $\hat{M}(s_0) \neq 0$,

$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0(\eta): 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, la barrera del juego perturbado incidente en $(b_\varepsilon(s_0), \hat{v}_\varepsilon(s_0))$ verifica

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x(t)\| &< \eta \\ \|v_\varepsilon(t) - v(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

Además, $\exists \delta(\varepsilon): \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = 0$$

tal que se verifica

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_\varepsilon(t) - \dot{x}(t)\| &< \eta \\ \|\dot{v}_\varepsilon(t) - \dot{v}(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \text{para } t_0 < t < t_1 - \delta(\varepsilon).$$

#

Teorema 8. Sean $(x(t), v(t))$ y $(x_\epsilon(t), v_\epsilon(t))$ las barreras de los juegos no perturbado y perturbado que inciden respectivamente en $(b(s_0), \hat{v}(s_0))$ y $(b_\epsilon(s_0), \hat{v}_\epsilon(s_0))$ definidas en un intervalo $[t_0, t_1]$. Supongamos que $\hat{v}'(s_0) \cdot \hat{\phi}(s_0) = 0$.

Si se verifica que

$$\left. \frac{d}{dt} (v'_\epsilon \phi) \right|_{t=t_1} = 0$$

$$\left| \left. \frac{d^2}{dt^2} (v'_\epsilon \phi) \right|_{t=t_1} \right| \geq a > 0, \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*,$$

entonces,

$\forall \eta > 0$, $\exists \epsilon_0(\eta)$: $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ la barrera del juego perturbado incidente en $(b_\epsilon(s_0), \hat{v}_\epsilon(s_0))$ verifica

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon(t) - x(t)\| &< \eta \\ \|v_\epsilon(t) - v(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \forall t \in (t_0, t_1].$$

Además, $\exists \delta(\epsilon)$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} = 0$$

tal que se tiene

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_\epsilon(t) - \dot{x}(t)\| &< \eta \\ \|\dot{v}_\epsilon(t) - \dot{v}(t)\| &< \eta \end{aligned} \quad \text{para } t_0 < t < t_1 - \delta(\epsilon).$$

#

La barrera natural del juego no perturbado se acaba cuando $v'\phi = 0$, instante en el que presenta un punto de retroceso; en efecto, las ecuaciones (15) varían al cambiar de signo $v'\phi$, pero la pendiente de la barrera es continua en ese punto porque al ser

$$\begin{cases} v'(f + \phi.v) = 0 \\ v'\phi = 0, \end{cases}$$

sigue que

$$v'f = 0;$$

de modo que en ese momento f y ϕ son colineales, $f + \phi$ y $f - \phi$ tienen la misma dirección y la pendiente es continua. Indicaremos el procedimiento que nos permite saber si las barreras perturbadas terminan también en puntos que tiendan al final de la barrera no perturbada.

Ya que

$$\dot{x} = f(x,u) + \phi(x).v,$$

una dirección \dot{x} posible es un vector que une un punto de Q (origen) con uno de P (extremo) representados ambos dominios de maniobrabilidad en un sistema de ejes $Ox\dot{y}$. Puede probarse que las direcciones semipermeables son los vectores que se apoyan en rectas que dejan P y Q en el mismo semiplano cerrado, y que se determinan en cada caso concreto por continuidad con las condiciones finales.

Puede seguirse la barrera natural por continuidad en el curso de una integración retrógrada. Y se demuestra en muchas ocasiones que la continuación de la integración retrógrada en la barrera perturbada corresponde a la rama situada tras un punto de retroceso de la barrera que sabemos (Cf. [5]) debe ser ignorada.

En el ejemplo 2 veremos la aplicación a un caso concreto.

VI- PERTURBACION DE LAS CURVAS DE CAMBIO DE MANDO.

Los resultados descritos hasta ahora responden también a otra situación que se plantea con frecuencia. Supongamos una curva $x = \xi(s)$ en la que incide un campo óptimo del juego no perturbado. Supongamos también que dicho campo se acaba al hacerse

$$\lambda' \phi = 0$$

en una curva de cambio de mando para el segundo jugador,

$$x = \xi^*(s)$$

sobre la que

$$\lambda = \lambda^*(s).$$

Esto se manifiesta porque sobre dicha curva es

$$\frac{d}{dt} (\lambda' \phi) > 0 \quad \text{si era } v^* = 1$$

$$\frac{d}{dt} (\lambda' \phi) < 0 \quad \text{si era } v^* = -1$$

en cuyos casos se puede continuar la integración retrógrada tomando $v^* = -1$ en el primero o $v^* = 1$ en el segundo, y tomando como valores finales los que ya se tienen

$$(\xi^*(s), \lambda^*(s)).$$

Sobre dicha curva (que es el empalme llamado superficie de transición) las trayectorias óptimas y los gradientes son continuos, presentándose solo un brusco cambio de pendiente.

Supongamos la existencia de curvas $x = \xi_\epsilon(s)$ en los juegos perturbados verificándose la convergencia de los campos óptimos incidentes en ellas al campo incidente en $x = \xi(s)$ por la verificación de los Teoremas 1, 2 o 3. Por ellos, las curvas

$$x = \xi_{\epsilon}^*(s)$$

en que se anula el mando $\cos v_{\epsilon}^*$ verifican

$$\xi_{\epsilon}^*(s) \longrightarrow \xi^*(s) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

y sobre ellas

$$\lambda_{\epsilon}^*(s) \longrightarrow \lambda^*(s) \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Entonces, el teorema 2 es de aplicación inmediata y se tiene:

Teorema 9. En las condiciones anteriores, la curva en que $\cos v_{\epsilon}^* = 0$, $(\xi_{\epsilon}^*(s), \lambda_{\epsilon}^*(s))$ converge a la curva de cambio de mando $(\xi^*(s), \lambda^*(s))$.

y si $\hat{G}(s) \neq 0$, se tiene que

$\forall \eta > 0$, $\exists \epsilon_0(\eta)$: $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ la solución del juego perturbado incidente en $(\xi_{\epsilon}^*(s), \lambda_{\epsilon}^*(s))$ verifica

$$\|x_{\epsilon}(t) - x(t)\| < \eta$$

$$\|\lambda_{\epsilon}(t) - \lambda(t)\| < \eta$$

$$\forall t \in (t_0, t_1]$$

Además $\exists \delta(\epsilon)$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} = 0$$

tal que se verifica

$$\|\dot{x}_{\epsilon}(t) - \dot{x}(t)\| < \eta$$

$$\|\dot{\lambda}_{\epsilon}(t) - \dot{\lambda}(t)\| < \eta$$

para $t_0 < t < t_1 - \delta(\epsilon)$.

#

VII- PERTURBACION DE LAS UNIONES.

1. Introducción.

Supongamos que el juego no perturbado presenta una unión con una superficie S . En este marco van incluidos:

a) El caso en que S es una pseudoligadura de estado, es decir, una superficie conocida definida por una función de clase C^2 , $x = \xi(s)$, que adopta en un punto $\bar{x}_0 = \xi(s_0) \in S$ un valor V_0 conocido y en la que se denota $v(s)$ la normal a S que verifica que $v' \phi$ es no nulo.

b) El caso en que S es una superficie equívoca que interrumpe un campo ya construido que denotaremos por $\textcircled{2}$, que define una función valor $V^{\textcircled{2}}(x)$, y un punto x_0 a partir del cual construir la singularidad y la trayectoria del campo incidente (denotado por $\textcircled{1}$), y por tanto $\lambda^{\textcircled{1}}$, que será indicado en adelante por λ , en x_0 . En este caso sabemos que la normal a la superficie es $v = \lambda - \lambda^{\textcircled{2}}$.

Supondremos que los juegos perturbados presentan una unión con una superficie S_ϵ . Van incluidos los siguientes casos:

a) El caso en que S_ϵ es una pseudoligadura de estado definida por una función de clase C^2 , $x = \xi_\epsilon(s)$, que adopta en un punto $\bar{x}_\epsilon = \xi_\epsilon(s_0) \in S_\epsilon$ un valor V_ϵ conocido y en la que se designa $v_\epsilon(s)$ la normal a S_ϵ .

b) El caso en que S_ϵ es una envolvente de conmutación (E.C) que interrumpe un campo optimal ya construido denotado por $\textcircled{2}$

que define una función valor $v_{\varepsilon}^{(2)}$, y un punto \bar{x}_{ε} a partir del cual construir la E.C.; y la trayectoria del campo incidente, denotada por $\textcircled{1}$, y por tanto $\lambda_{\varepsilon}^{(1)}$ (que se indicará λ_{ε}) en \bar{x}_{ε} . Aquí se tiene que $v_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon}^{(2)}$.

Se establecen las siguientes hipótesis alternativas según se esté en los casos a) o b):

Hipótesis 5. Se verifica $\xi_{\varepsilon}(s) \longrightarrow \xi(s)$
 $v_{\varepsilon}(s) \longrightarrow v(s)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
 $v_{\varepsilon} \longrightarrow v_0$

Hipótesis 6. Se verifica $\bar{x}_{\varepsilon} \longrightarrow \bar{x}$
 $\lambda_{\varepsilon}^{(2)} \longrightarrow \lambda^{(2)}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
 $v_{\varepsilon}^{(2)}(x) \longrightarrow v^{(2)}(x)$

2. Construcción de la unión para el juego no perturbado.

Sobre la unión se verifica la condición de singularidad

$$\lambda' \phi \equiv 0.$$

El valor del mando optimal para el jugador que maximiza se obtiene de ser

$$v' [\tilde{f}(x, \lambda) + \phi \cdot \tilde{v}] = 0,$$

resultando

$$\tilde{v} = - \frac{v' \tilde{f}}{v' \phi}.$$

Por su parte:

$$H^* = \tilde{L} + \lambda' [\tilde{f} + \phi \cdot \tilde{v}] \equiv 0,$$

y las ecuaciones de la dinámica son

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{x} = \tilde{f} - \frac{v' \tilde{f}}{v' \phi} \cdot \phi \\ \dot{\lambda}' = - \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right)' - \lambda' \tilde{f}_x - \lambda' \phi_x \cdot \tilde{v} + \alpha \cdot v' \end{cases}$$

donde α se determina con la condición

$$\frac{d}{dt} (\lambda' \phi) = 0,$$

resultando

$$(16') \quad \alpha = \frac{(\lambda' \tilde{f}_x \phi) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right)' \phi - (\lambda' \phi_x \tilde{f})}{v' \phi}$$

Las condiciones finales para el sistema (16) son las dadas en el punto x_0 . (Cf. [5]).

3. Construcción de la unión para el juego perturbado.

Convergencia.

En este caso no hay indeterminación alguna sobre el mando del segundo jugador que viene dado por las fórmulas (7).

Ya que el movimiento se lleva a cabo sobre la unión, será:

$$(17) \quad v'_\epsilon \left[\tilde{f} + \phi \cdot \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} + \psi \cdot \frac{\epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \right] = 0.$$

De esta expresión se puede obtener tomando límites formalmente el valor de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)},$$

sobre la unión que luego se necesitará. Denotando

$$K_\epsilon = \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \psi)},$$

(17) se escribe

$$v'_\epsilon \left[\tilde{f} + \frac{\kappa_\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \cdot \psi \right] = 0;$$

y de ahí

$$(18) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa_\epsilon = - \frac{(v'_\epsilon \tilde{f})}{\sqrt{(v'_\epsilon \phi)^2 - (v'_\epsilon \tilde{f})^2}} \cdot \text{sgn}(v'_\epsilon \phi)$$

si se está en el caso a) o

$$(18') \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa_\epsilon = - \frac{(\lambda'_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}) \cdot \tilde{f}}{\sqrt{[(\lambda'_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}) \cdot \phi]^2 - [(\lambda'_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}) \cdot \tilde{f}]^2}} \cdot \text{sgn}(v'_\epsilon \phi)$$

si se está en el caso b).

Las ecuaciones sobre la unión son

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_\epsilon &= \tilde{f} + \frac{(\lambda'_\epsilon \phi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} \cdot \psi \\ \dot{\lambda}'_\epsilon &= - \left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x} \right)' - \lambda'_\epsilon \tilde{f}_x - \frac{(\lambda'_\epsilon \phi) \cdot (\lambda'_\epsilon \phi_x) + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (\lambda'_\epsilon \psi_x)}{\sqrt{(\lambda'_\epsilon \phi)^2 + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi)^2}} + \\ &\quad + \alpha_\epsilon \cdot v'_\epsilon \end{aligned} \right.$$

con las condiciones finales dadas en el punto $\bar{x}_\epsilon \in S_\epsilon$.

El coeficiente α_ϵ se determina con la condición

$$\frac{d}{dt} \left[v'_\epsilon (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \text{sen } v_\epsilon^*) \right] = 0,$$

que desarrollada es

$$(20) \quad \begin{aligned} & \dot{v}'_\epsilon (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \text{sen } v_\epsilon^*) + \\ & + v'_\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \text{sen } v_\epsilon^*) \cdot \dot{x}_\epsilon + \\ & + v'_\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_\epsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \text{sen } v_\epsilon^*) \cdot \dot{\lambda}'_\epsilon = 0. \end{aligned}$$

El cálculo de v'_ϵ varía ligeramente según se esté en el caso a) o en el b).

a) Caso de la pseudoligadura de estado.

En este caso no hay ningún campo que emerja de la pseudoligadura. Por ello, definimos

$$\lambda_\epsilon^{(2)} = \lambda_\epsilon - v_\epsilon,$$

de modo que será

$$v_\epsilon = \lambda_\epsilon - \lambda_\epsilon^{(2)}.$$

De la Hipótesis 5 sigue que

$$v'_\epsilon \phi \rightarrow v\phi,$$

y de (18) se obtiene que sobre la pseudoligadura

$$\lambda'_\epsilon \phi \rightarrow 0, \text{ con } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \dot{v}'_\epsilon \dot{x}_\epsilon &= (\dot{\lambda}'_\epsilon - \dot{\lambda}'_\epsilon^{(2)}) \cdot \dot{x}_\epsilon = \\ & \left[- \left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x_\epsilon} \right)' - \lambda'_\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_\epsilon^*) + \right. \\ & \left. + \alpha_\epsilon \cdot v'_\epsilon - \dot{\lambda}'_\epsilon^{(2)} \right] \cdot \dot{x}_\epsilon; \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \dot{v}'_\epsilon \dot{x}_\epsilon &= - \left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x_\epsilon} \right)' \dot{x}_\epsilon - \lambda'_\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_\epsilon^*) \cdot \dot{x}_\epsilon - \\ & - \lambda'_\epsilon^{(2)} \dot{x}_\epsilon. \end{aligned}$$

De modo que (20) queda

$$- \left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x_\epsilon} \right)' \dot{x}_\epsilon - \lambda'_\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_\epsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\epsilon^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_\epsilon^*) \cdot \dot{x}_\epsilon -$$

$$- \dot{\lambda}'_{\epsilon} \dot{x}_{\epsilon} + v'_{\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{x}_{\epsilon} +$$

$$+ v'_{\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{\lambda}_{\epsilon} = 0.$$

Utilizando las fórmulas (9) se obtiene

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' + \dot{\lambda}'_{\epsilon} \right] \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_{\epsilon}}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \psi \right) - \\ & - (\lambda'_{\epsilon} - v'_{\epsilon}) \cdot \left[\tilde{f}'_x + \frac{\kappa_{\epsilon}}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \phi'_x + \phi \cdot \frac{(\lambda'_{\epsilon} \phi'_x) - \epsilon \cdot \kappa_{\epsilon} \cdot (\lambda'_{\epsilon} \psi'_x)}{\epsilon (\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \psi'_x + \psi \cdot \frac{\epsilon \cdot \kappa_{\epsilon}^2 \cdot (\lambda'_{\epsilon} \psi'_x) - \kappa_{\epsilon} \cdot (\lambda'_{\epsilon} \phi'_x)}{(\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} \right] \\ & \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_{\epsilon}}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \psi \right) + \\ & + \left[- \left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' - \lambda'_{\epsilon} \tilde{f}'_x - \frac{\kappa_{\epsilon} \cdot (\lambda'_{\epsilon} \phi'_x) + \epsilon^2 (\lambda'_{\epsilon} \psi'_x)}{(1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} + \alpha_{\epsilon} \cdot v'_{\epsilon} \right] \cdot \\ & \cdot \left[\tilde{f}'_{\lambda} + \frac{\phi - \epsilon \cdot \kappa_{\epsilon} \cdot \psi}{\epsilon (\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} \cdot \phi' + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\kappa_{\epsilon} \cdot (\epsilon \cdot \kappa_{\epsilon} \cdot \psi - \phi)}{(\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} \cdot \psi' \right] \cdot v_{\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

Proposición 4. Para valores suficientemente pequeños de ϵ , existe una función $\alpha_{\epsilon} : \mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2 * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_{\epsilon}(x_{\epsilon}, \lambda_{\epsilon}, \epsilon) = \alpha_{\epsilon}.$$

Demostración.

De (22) sigue que al despejar α_ϵ aparece un denominador cuyos términos están todos acotados excepto

$$\frac{1}{\epsilon(\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} \cdot v'_\epsilon \cdot (\phi\phi') \cdot v_\epsilon$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por tanto, el denominador es distinto de 0 para todos los valores de ϵ suficientemente pequeños y α_ϵ se puede despejar. #

Proposición 5. Se verifica que formalmente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon = \frac{(\lambda'_\epsilon \tilde{f}_x \phi + (\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x})' \phi - (\lambda'_\epsilon \phi_x \tilde{\delta}))}{v' \phi}$$

Demostración.

De la expresión (22) puede despejarse α_ϵ . Aparecen términos no acotados en el numerador y el denominador que son los que influyen al tomar límites con $\epsilon \rightarrow 0$. Ya se han indicado los términos no acotados del denominador en la Proposición 5; los del numerador son:

$$\frac{1}{\epsilon(\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} \left\{ ((v'_\epsilon - \lambda'_\epsilon) \phi) \cdot (\lambda'_\epsilon \phi_x) \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \cdot \phi \right) + \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_\epsilon} \right)' + \lambda'_\epsilon \tilde{f}_x + \frac{\kappa_\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \phi_x)}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \right] \cdot (\phi\phi') \cdot v_\epsilon \right\}$$

Ya que $v'\phi$ es un escalar y teniendo en cuenta (18), se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = \frac{1}{v'\phi} \left[-(\lambda'_\varepsilon \phi_x) \cdot \left(\tilde{f} - \frac{v'\tilde{f}}{v'\phi} \cdot \phi \right) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right)' \phi + \lambda'_\varepsilon \tilde{f}_x \phi - \frac{v'\tilde{f}}{v'\phi} \cdot (\lambda'_\varepsilon \phi_x \phi) \right],$$

que es el resultado de la Proposición. #

Teorema 9. Si se verifica la Hipótesis 5, las pseudolíneas de estado perturbadas tienden a la no perturbada con $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración.

Basta aplicar el teorema de la dependencia continua de las soluciones respecto del parámetro ε al sistema (19) y observar que su límite formal es el sistema (16). #

b) Caso de las superficies de conmutación.

En este caso es

$$v'_\varepsilon = \lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon \textcircled{2};$$

de modo que

$$v'_\varepsilon \phi = (\lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon \textcircled{2}) \cdot \phi.$$

Como

$$\lambda'_\varepsilon \phi \rightarrow 0 \quad \text{con } \varepsilon \rightarrow 0,$$

según se sigue de (18'), se tiene que

$$v'_\varepsilon \phi \rightarrow -\lambda'_\varepsilon \textcircled{2} \phi.$$

Por otra parte, por razones análogas a las del apartado a);

$$\dot{v}'_\varepsilon \dot{x}'_\varepsilon = \left[- \left(\frac{\partial \tilde{L}_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon} \right)' - \lambda'_\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_\varepsilon^* + \varepsilon \cdot \psi \cdot \sin v_\varepsilon^*) + \alpha_\varepsilon \cdot v'_\varepsilon - \dot{\lambda}'_\varepsilon \textcircled{2} \right] \cdot \dot{x}'_\varepsilon;$$

de donde

$$\dot{v}'_{\epsilon} \dot{x}_{\epsilon} = - \left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' \dot{x}_{\epsilon} - \lambda'_{\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{x}_{\epsilon} - \dot{\lambda}'_{\epsilon} \dot{x}_{\epsilon}.$$

De modo que (20) queda

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' \dot{x}_{\epsilon} - \lambda'_{\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{x}_{\epsilon} - \\ & - \dot{\lambda}'_{\epsilon} \dot{x}_{\epsilon} + (\lambda'_{\epsilon} - \dot{\lambda}'_{\epsilon}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{x}_{\epsilon} + \\ & + (\lambda'_{\epsilon} - \dot{\lambda}'_{\epsilon}) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{\lambda}_{\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

Y simplificando:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' + \dot{\lambda}'_{\epsilon} \right] \dot{x}_{\epsilon} - \\ & - \lambda'_{\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{x}_{\epsilon} + \\ & + (\lambda'_{\epsilon} - \dot{\lambda}'_{\epsilon}) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_{\epsilon}} (\tilde{f} + \phi \cdot \cos v_{\epsilon}^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v_{\epsilon}^*) \cdot \dot{\lambda}_{\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

Utilizando las fórmulas (9) se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}_{\epsilon}}{\partial x_{\epsilon}} \right)' + \dot{\lambda}'_{\epsilon} \right] \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_{\epsilon}}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \psi \right) - \\ & - \lambda'_{\epsilon} \left[\tilde{f}_x + \frac{\kappa_{\epsilon}}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \phi_x + \phi \cdot \frac{(\lambda'_{\epsilon} \phi_x) - \epsilon \cdot \kappa_{\epsilon} \cdot (\lambda'_{\epsilon} \psi_x)}{\epsilon (\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{1 + \kappa_{\epsilon}^2}} \cdot \psi_x + \psi \cdot \frac{\epsilon \cdot \kappa_{\epsilon}^2 \cdot (\lambda'_{\epsilon} \psi_x) - \kappa_{\epsilon} \cdot (\lambda'_{\epsilon} \phi_x)}{(\lambda'_{\epsilon} \psi) \cdot (1 + \kappa_{\epsilon}^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \cdot \phi + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\epsilon^2}} \cdot \psi \right) + \\
 & + \left[- \left(\frac{\partial \tilde{L}_\epsilon}{\partial x_\epsilon} \right)' - \lambda'_\epsilon \tilde{f}'_x - \frac{\kappa_\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon \phi'_x) + \epsilon^2 (\lambda'_\epsilon \psi'_x)}{(1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} + \alpha_\epsilon \cdot (\lambda'_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}_\epsilon) \right] \\
 & \cdot \left[\tilde{f}'_\lambda + \frac{\phi - \epsilon \cdot \kappa_\epsilon \cdot \psi}{\epsilon (\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} \cdot \phi' + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa_\epsilon \cdot (\epsilon \cdot \kappa_\epsilon \cdot \psi - \phi)}{(\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} \cdot \psi' \right] \cdot (\lambda_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}_\epsilon) = 0.
 \end{aligned}$$

Proposición 6. Para valores suficientemente pequeños de ϵ , existe una función $\alpha_\epsilon: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

tal que

$$\alpha_\epsilon(x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \epsilon) = \alpha_\epsilon.$$

Demostración.

Basta comprobar como en la Proposición 4 que al despejar α_ϵ aparece un denominador cuyos términos están todos acotados excepto

$$\frac{1}{\epsilon (\lambda'_\epsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\epsilon^2)^{3/2}} \cdot (\lambda'_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}_\epsilon) \cdot (\phi \phi') \cdot (\lambda_\epsilon - \lambda'^{\textcircled{2}}_\epsilon)$$

Proposición 7. Se verifica que formalmente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon = \frac{(\lambda'_\epsilon \tilde{f}'_x \phi) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right)' \phi - (\lambda'_\epsilon \phi'_x \tilde{f})}{-\lambda'^{\textcircled{2}}_\epsilon \phi}$$

Demostración.

Al despejar α_ϵ en (26), los términos no acotados del nu-

merador son:

$$\frac{1}{\varepsilon(\lambda'_\varepsilon \psi) \cdot (1 + \kappa_\varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ (\lambda'_\varepsilon \phi) \cdot (\lambda'_\varepsilon \phi_x) \cdot \left(\tilde{f} + \frac{\kappa_\varepsilon}{\sqrt{1 + \kappa_\varepsilon^2}} \cdot \phi \right) + \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon} \right)' + \lambda'_\varepsilon \tilde{f}_x + \frac{\kappa_\varepsilon \cdot (\lambda'_\varepsilon \phi_x)}{\sqrt{1 + \kappa_\varepsilon^2}} \right] \cdot (\phi \phi') \cdot (\lambda_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon) \right\}$$

Teniendo en cuenta (18'), se obtiene de (26) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha'_\varepsilon = \frac{1}{-\lambda'_\varepsilon \phi} \left[-(\lambda'_\varepsilon \phi_x) \cdot \left(\tilde{f} - \frac{(\lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon) \tilde{f}}{(\lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon) \phi} \cdot \phi \right) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right)' \phi + \lambda'_\varepsilon \tilde{f}_x \phi - \frac{(\lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon) \tilde{f}}{(\lambda'_\varepsilon - \lambda'_\varepsilon) \phi} \cdot (\lambda'_\varepsilon \phi_x \phi) \right]$$

que es el resultado de la Proposición. #

Teorema 10. Si se verifica la Hipótesis 6, las envolventes de conmutación de los juegos perturbados tienden a la superficie equívoca del juego no perturbado con $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración.

Idéntica a la del Teorema 9. #

4. Convergencia de los campos incidentes a las uniones.

Se procede a continuación a la construcción de los campos de trayectorias incidentes a las uniones. Denotaremos $\hat{x}(s)$ y $\hat{\lambda}(s)$ la ecuación de la unión no perturbada y el valor del gradiente sobre ella; y por $\hat{x}_\varepsilon(s, \varepsilon)$ y $\hat{\lambda}_\varepsilon(s, \varepsilon)$ la ecuación de la unión perturbada y el valor del gradiente sobre ella.

De los Teoremas 9 y 10, sigue el siguiente

Corolario 1. Se pueden escoger parametrizaciones $\hat{x}_\epsilon(s, \epsilon)$, $\hat{\lambda}_\epsilon(s, \epsilon)$, $\hat{x}(s)$ y $\hat{\lambda}(s)$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{x}_\epsilon(s, \epsilon) &\longrightarrow \hat{x}(s) \\ \hat{\lambda}_\epsilon(s, \epsilon) &\longrightarrow \hat{\lambda}(s) \end{aligned} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0.$$

#

Las ecuaciones que dan el campo incidente en la unión no perturbada son (8), tomando como condiciones finales

$$\begin{cases} x(t_1) = \hat{x}(s) \\ \lambda(t_1) = \hat{\lambda}(s) \end{cases},$$

y las que dan el campo incidente en la unión perturbada son (8') tomando como condiciones finales

$$\begin{cases} x_\epsilon(t_1) = \hat{x}_\epsilon(s, \epsilon) \\ \lambda_\epsilon(t_1) = \hat{\lambda}_\epsilon(s, \epsilon) \end{cases}.$$

Comparando estos sistemas, se puede apreciar un fenómeno del tipo capa-límite como los considerados anteriormente y se puede enunciar el siguiente resultado de demostración análoga a la del Teorema 2:

Teorema 10. Sean $(x(t), \lambda(t))$ y $(x_\epsilon(t), \lambda_\epsilon(t))$ las soluciones de los juegos no perturbado y perturbado que inciden respectivamente en $(\hat{x}(s), \hat{\lambda}(s))$ y $(\hat{x}_\epsilon(s, \epsilon), \hat{\lambda}_\epsilon(s, \epsilon))$ definidas en un intervalo $[t_0, t_1]$. Supongamos que $\lambda' \phi$ es no nulo a lo largo de la trayectoria no perturbada.

Con las notaciones del Teorema 2, si $\hat{G}(s) \neq 0$,

$\forall \eta > 0$, $\exists \epsilon_0(\eta)$: $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, la solución del juego perturbado incidente en $(\hat{x}_\epsilon(s, \epsilon), \hat{\lambda}_\epsilon(s, \epsilon))$ verifica

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\| < \eta$$

$$\|\lambda_\epsilon(t) - \lambda(t)\| < \eta$$

$$\forall t \in (t_0, t_1].$$

Además $\exists \delta(\epsilon): \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} = 0$$

tal que se verifica

$$\|\dot{x}_\epsilon(t) - \dot{x}(t)\| < \eta$$

$$\|\dot{\lambda}_\epsilon(t) - \dot{\lambda}(t)\| < \eta$$

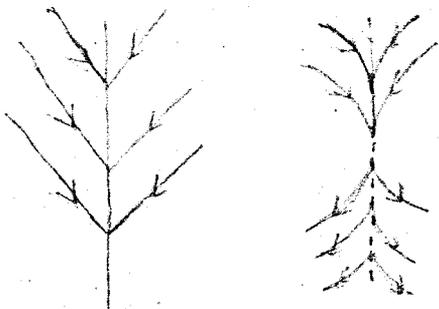
$$\text{para } t_0 < t < t_1 - \delta(\epsilon).$$

#

VIII- PERTURBACION DE SUPERFICIES UNIVERSALES.

1. Introducción.

Se da este nombre a singularidades alcanzadas desde los dos lados por el campo optimal. El adjetivo "uni-



versal" viene del hecho de que en los casos lineales estudiados por Isaacs, estos arcos singulares intervienen en la solución de la mayor parte de los

estados iniciales. Las superficies universales atractivas singulares se llaman superficies universales, mientras que se reserva el nombre de superficies focales a las superficies universales atractivas regulares.

Si numeramos ① y ② las dos regiones delimitadas por la curva, se sigue verificando que

$$v = \lambda^{①} - \lambda^{②}$$

y por hipótesis será

$$v' \cdot F_0(u^{①}, v^{①}) \geq 0$$

$$v' \cdot F_0(u^{②}, v^{②}) \leq 0,$$

y análogas expresiones para los juegos perturbados. Es decir, que sobre S, cuando los jugadores escogen una de las estrategias optimales del campo adyacente, el estado vuelve a la región donde la elección del primer jugador es optimal. Se verifica el siguiente resultado [5]:

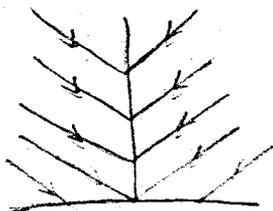
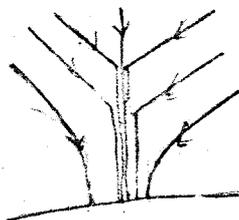
"Con las anteriores condiciones puede existir una solución con punto-silla superior. El campo optimal satisface las condiciones de una unión".

En el caso singular, se construye la singularidad en la que el adjunto es el mismo en los dos campos adyacentes, permitiendo el carácter singular del hamiltoniano tener dos valores extremos de v^* a partir de los cuales construir los campos. En el caso regular, se deberán tener dos campos que emerjan uniéndose tangencialmente o al menos dos adjuntos diferentes $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$ que den el mismo $F(\bar{x}, \lambda^{(i)})$ para todos los \bar{x} de la curva focal.

Nótese que las condiciones de la unión (Cf. IV. 3) liga el carácter tangente o no tangente del contacto de los campos incidentes en las superficies universales atractivas a la unicidad o no de la solución de un cierto problema de optimización, unicidad que se encuentra garantizada en el caso regular y que puede tenerse o no en el caso singular. Es, por tanto, teóricamente posible encontrar una superficie universal singular (o unión singular en general) con incidencia tangente, aunque no habíamos encontrado ejemplos de ello en la literatura. En el ejemplo 3 presentamos uno que hemos construido, de modo que reservaremos el nombre de curva focal a las superficies universales atractivas con gradiente discontinuo.

2. Convergencia hacia un arco singular universal.

Los intentos realizados para verificar la con-



vergencia de las curvas focales de los juegos perturbados a la curva universal del juego no perturbado no dieron resultado, porque los

juegos perturbados no presentaban curvas focales donde el juego no perturbado tenía la curva universal. Esto llevó a establecer la conjetura de que no se da dicha convergencia, sino que el comportamiento es el descrito en el esquema adjunto: en los juegos perturbados hay una trayectoria ordinaria que converge a la curva universal del juego no perturbado, mientras que en su entorno las trayectorias perturbadas la siguen hasta que se separan de ella, todo ello respetando las convergencias ya conocidas.

En esta línea se han producido dos resultados. Obtuvimos un resultado parcial con hipótesis aparentemente muy restrictivas en las que esto sucede. Todos los ejemplos que conocemos resueltos por nosotros en los que hay superficie universal entran en este marco, por lo que consideramos que el resultado tiene cierta validez aunque diste de ser general. En él, el arco singular es una trayectoria perturbada aunque los valores del gradiente y el valor del juego no son iguales en los juegos perturbados y no perturbado. El resultado tiene incluso aplicación en juegos como el Ejemplo 5 con una infinidad de arcos singulares incidiendo en el mismo punto.

Pensamos que la dificultad fundamental para la obtención de un teorema general es la ausencia de condiciones analíticas que garanticen que existe superficie universal, circunstancia ésta común por otra parte a todas las singularidades que presentan los Juegos Diferenciales. Compárese a este efecto los Ejemplos 3 y 6, de resolución bastante diferente. El campo optimal incidente en el blanco en uno y otro

caso tienen trazado análogo. Empiezan a diferenciarse al acabar este campo antes de llegar al blanco en el ejemplo 6 y no hacerlo así en el 3. Es decir, la existencia de superficie universal depende de una circunstancia totalmente ajena a lo que sucede en el punto donde dicha superficie incide.

Por otra parte, J. V. Breakwell, estudiando el mismo problema ha descubierto un nuevo tipo de curva focal desconocida hasta ahora, una superficie focal singular, hacia la que convergen las superficies focales regulares (las conocidas hasta hoy) que pueden tener juegos regulares que actúen como perturbados. Pero este tipo de perturbación no puede presentarse con la dinámica que estudiamos en este trabajo. Por ello citaremos solo que el juego con superficie focal regular que Breakwell maneja como perturbado es un célebre ejemplo propuesto por Isaacs que viene descrito y estudiado en [8], y que no tenemos noticias de que haya sido aún publicado su reciente descubrimiento de la variedad focal singular [9].

En lo que sigue utilizaremos las notaciones de II.2 y siguientes. Denotaremos aquí por \bar{x} e \bar{y} la primera y segunda coordenadas del plano, y $\lambda = (\lambda_{\bar{x}}, \lambda_{\bar{y}})$

Supongamos que $\hat{\lambda}'(s_0)\hat{\phi}(s_0) = 0$ para algún valor s_0 , siendo $\hat{\lambda}'(s)\hat{\phi}(s)$ no nulo para los restantes valores de s , y que sobre el punto $(\hat{\bar{x}}(s_0), \hat{\bar{y}}(s_0))$ puede construirse una superficie universal. Sobre ella ha de verificarse la condición de singularidad

$$\lambda' \phi \equiv 0;$$

y la obtención del mando singular se realiza usando el hecho

de ser nulas todas las derivadas respecto de t de $\lambda'\phi$. Así por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}(\lambda'\phi) = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}\right)'\phi - \lambda'\tilde{f}_x\phi + \lambda'\phi_x\tilde{f} = 0.$$

Eliminando $\dot{\lambda}$ y \dot{x} en sucesivas derivaciones con ayuda del sistema (8) se obtienen ecuaciones algebraicas que permiten determinar \tilde{v} probándose, [19], que es una derivada de orden par la primera en que aparece \tilde{v} explícitamente.

Establecemos la siguiente

Hipótesis 7. Supongamos que se verifica:

- *) $L = 1$ (juegos de tiempo óptimo)
- *) $\tilde{f} = \tilde{f}(\lambda)$. (esto es, $f(x,u)$ depende solo de u)
- *) $\tilde{f}_1 = \lambda_{\bar{x}} \cdot \delta^*(\lambda)$
- *) $\tilde{\lambda}_{\bar{x}}(s_0) = 0$
- *) $\phi_1 = \phi_1(\bar{y})$ (ϕ_1 depende solo de \bar{y})
- *) $\phi_2 = \phi_2(\bar{x})$ (ϕ_2 depende solo de \bar{x})
- *) $\hat{\phi}_2(s_0) = 0$
- *) Sobre la curva universal, $\lambda_{\bar{x}}\phi_1\frac{\tilde{v}_2^2}{yy} + \lambda_{\bar{y}}\phi_2\frac{\tilde{v}_1^2}{xx} = 0$
- *) El mando v se obtiene en $\frac{d^2}{dt^2}(\lambda'\phi)$
- *) Para los juegos perturbados, $\hat{\lambda}_{\bar{x}}(s_0) = 0$

Teorema 11. Si se verifica la Hipótesis 7, la superficie universal del juego no perturbado es una trayectoria ordinaria

de los juegos perturbados verificándose que sobre ella

$$\lambda_{\epsilon \bar{x}} = \lambda_{\bar{x}}$$

$$\lambda_{\epsilon \bar{y}} \rightarrow \lambda_{\bar{y}}$$

$$\bar{y}_{\epsilon}(t) \rightarrow \bar{y}(t) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Demostración.

Con la Hipótesis 7, el sistema (8) queda

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\lambda}_{\bar{x}} = -\phi_{2\bar{x}} \lambda_{\bar{y}} \tilde{v} & \lambda_{\bar{x}}(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_{\bar{y}} = -\phi_{1\bar{y}} \lambda_{\bar{x}} \tilde{v} & \lambda_{\bar{y}}(t_1) = \hat{\lambda}_{\bar{y}}(s_0) \\ \dot{\bar{x}} = \tilde{f}_1 + \phi_{1\bar{x}} \tilde{v} & \bar{x}(t_1) = \hat{\bar{x}}(s_0) \\ \dot{\bar{y}} = \tilde{f}_2 + \phi_{2\bar{y}} \tilde{v} & \bar{y}(t_1) = \hat{\bar{y}}(s_0) \end{array} \right.$$

La ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2} (\lambda' \phi) = 0$$

se convierte en una expresión del tipo

$$A \tilde{v} + \lambda_{\bar{x}} \phi_{1\bar{y}\bar{y}} \tilde{f}_2^2 + \lambda_{\bar{y}} \phi_{2\bar{x}\bar{x}} \tilde{f}_1^2 = 0$$

donde A es cierta función de $\lambda_{\bar{x}}, \lambda_{\bar{y}}, \phi_{1\bar{y}}, \phi_{2\bar{x}}, \tilde{f}_2, \tilde{f}_1$; de

la Hipótesis sigue que

$$\tilde{v} = 0$$

Por tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \lambda_{\bar{x}} = \hat{\lambda}_{\bar{x}}(s_0) = 0 \\ \dot{\lambda}_{\bar{y}} = 0 \Rightarrow \lambda_{\bar{y}} = \text{Cte, que se determina con la condición } H^* = 0. \end{array} \right.$$

Ya que $\tilde{f}_1 = \lambda \frac{f^*}{\bar{x}}(\lambda)$, se tiene que

$$\tilde{f}_1 \equiv 0.$$

Por tanto:

$$\dot{\bar{x}} = 0 \Rightarrow x = \hat{x}(s_0),$$

y

$$\dot{\bar{y}} = \tilde{f}_2 \quad y(t_1) = \hat{y}(s_0)$$

es el problema de valor final que, resuelto, expresa

$$\bar{y} = \bar{y}(t)$$

y permite calcular el valor del juego.

Consideremos a continuación el sistema diferencial que da la trayectoria ordinaria del juego perturbado incidente en $(\hat{x}_\varepsilon(s_0), \hat{y}_\varepsilon(s_0))$. Con la Hipótesis 7, dicho sistema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}_\varepsilon = \tilde{f}_1 + \frac{(\lambda'_\varepsilon \phi) \cdot \phi_1 - \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi) \cdot \phi_2}{\sqrt{(\lambda'_\varepsilon \phi)^2 + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi)^2}} \\ \dot{\bar{y}}_\varepsilon = \tilde{f}_2 + \frac{(\lambda'_\varepsilon \phi) \cdot \phi_2 + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi) \cdot \phi_1}{\sqrt{(\lambda'_\varepsilon \phi)^2 + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi)^2}} \\ \dot{\lambda}_{\varepsilon \bar{x}} = - \frac{(\lambda'_\varepsilon \phi) \lambda_{\varepsilon \bar{y}} \phi_{2 \bar{x}} - \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi) \lambda_{\varepsilon \bar{x}} \phi_{2 \bar{x}}}{\sqrt{(\lambda'_\varepsilon \phi)^2 + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi)^2}} \\ \dot{\lambda}_{\varepsilon \bar{y}} = - \frac{(\lambda'_\varepsilon \phi) \lambda_{\varepsilon \bar{x}} \phi_{1 \bar{y}} + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi) \lambda_{\varepsilon \bar{y}} \phi_{1 \bar{y}}}{\sqrt{(\lambda'_\varepsilon \phi)^2 + \varepsilon^2 (\lambda'_\varepsilon \psi)^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{x}_\varepsilon(t_1) = \hat{x}_\varepsilon(s_0) \\ \bar{y}_\varepsilon(t_1) = \hat{y}_\varepsilon(s_0) \\ \lambda_{\varepsilon \bar{x}}(t_1) = 0 \\ \lambda_{\varepsilon \bar{y}}(t_1) = \hat{\lambda}_{\varepsilon \bar{y}}(s_0) \end{array}$$

Puede comprobarse que

$$\begin{cases} \bar{x}_\varepsilon = \hat{x}_\varepsilon(s_0) \\ \lambda_{\varepsilon\bar{x}} = 0 \end{cases}$$

junto con dos funciones más

$$\begin{cases} \bar{y}_\varepsilon = \bar{y}_\varepsilon(t) \\ \lambda_{\varepsilon\bar{y}} = \lambda_{\varepsilon\bar{y}}(t) \end{cases}$$

constituyen la solución del sistema. En efecto,

$$\lambda'_\varepsilon \phi = \lambda_{\varepsilon\bar{x}} \phi_1 + \lambda_{\varepsilon\bar{y}} \phi_2 = 0,$$

pues

$$\lambda_{\varepsilon\bar{x}} = 0$$

y

$$\phi_2(\bar{x}_\varepsilon) = \phi_2(\hat{x}_\varepsilon(s_0)) = \hat{\phi}_2(s_0) = 0.$$

Además,

$$\tilde{f}_1 = 0,$$

por ser

$$\tilde{f}_1 = \lambda_{\varepsilon\bar{x}} f^*(\lambda).$$

Por tanto

$$\dot{\bar{x}}_\varepsilon = 0 \Rightarrow \bar{x}_\varepsilon = \hat{x}_\varepsilon(s_0),$$

pudiendo comprobarse por último que

$$\dot{\lambda}_{\varepsilon\bar{x}} = 0.$$

Las funciones $\bar{y}_\varepsilon(t)$ y $\lambda_{\varepsilon\bar{y}}(t)$ son las soluciones del sis-

tema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_{\varepsilon \bar{y}} = \varepsilon \lambda_{\varepsilon \bar{y}} \phi_{1 \bar{y}} \\ \dot{\bar{y}}_{\varepsilon} = \tilde{f}_2 + \varepsilon \phi_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_{\varepsilon \bar{y}}(t_1) = \hat{\lambda}_{\varepsilon \bar{y}}(s_0) \\ \bar{y}_{\varepsilon}(t_1) = \hat{y}_{\varepsilon}(s_0) \end{array}$$

verificándose la convergencia indicada en el enunciado por el teorema de la dependencia continua de las soluciones respecto del parámetro ε .

#

EJEMPLOS

EJEMPLO 1.1. Juego no perturbado.

Se considera el siguiente juego

$$\begin{cases} \dot{x} = yu + v \\ \dot{y} = yu \end{cases} \quad u \in [-1,1] \quad v \in [-1,1]$$

Espacio de juego: $y \geq 1$

Blanco: $y < 1$

$$\text{Criterio: } J = \int_{t_0}^{t_1} dt$$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_u \max_v v' F \leq 0 \Rightarrow \min_u \max_v u \cdot 1 = -1 < 0.$$

Todo el blanco es parte útil y no hay barrera natural.

b) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 - |\lambda_x + \lambda_y|y + |\lambda_x| = 0,$$

siendo:

$$\begin{cases} u^* = -\operatorname{sgn}(\lambda_x + \lambda_y) \\ v^* = \operatorname{sgn} \lambda_x \end{cases}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = 0 & \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = -(\lambda_x + \lambda_y)u^* & \lambda_y(t_1) = 1 \\ \dot{x} = yu^* + v^* & x(t_1) = s \\ \dot{y} = yu^* & y(t_1) = 1 \end{cases}$$

Sobre el blanco,

$$\lambda_x + \lambda_y = 1,$$

y por tanto

$$u^* = -1$$

$$v^* = \operatorname{sgn} 0,$$

siendo:

$$\frac{d^k}{dt^k} (\lambda_x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Así pues, v^* queda indeterminado; cualquiera que sea el valor que adopte, el valor del juego será, para una posición (x_0, y_0)

$$J = \ln y_0.$$

Evidentemente las trayectorias variarán según sea el mando v^* elegido.

2. Juegos perturbados.

Se considera el juego

$$\begin{cases} \dot{x} = yu + \cos v \\ \dot{y} = yu + \varepsilon \operatorname{sen} v \end{cases} \quad u \in [-1, 1] \quad v \in [-\pi, \pi]$$

Espacio de juego: $y \geq 1$

Blanco: $y < 1$

$$\text{Criterio: } J_\varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} dt$$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_u \max_v \nu' F_\varepsilon \leq 0 \Rightarrow \min_u \max_v (u \cdot 1 + \varepsilon \operatorname{sen} v) = -1 + \varepsilon < 0.$$

Todo el blanco es parte útil y no hay barrera natural.

b) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 - |\lambda_x + \lambda_y| y + \sqrt{\lambda_x^2 + \varepsilon^2 \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$u^* = -\operatorname{sgn} (\lambda_x + \lambda_y)$$

$$\cos v^* = \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \epsilon^2 \lambda_y^2}} ; \quad \text{sen } v^* = \frac{\epsilon \lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \epsilon^2 \lambda_y^2}}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = 0 \\ \dot{\lambda}_y = -(\lambda_x + \lambda_y)u^* \\ \dot{x} = yu^* + \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \epsilon^2 \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = yu^* + \frac{\epsilon^2 \lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \epsilon^2 \lambda_y^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - \epsilon} \\ x(t_1) = s \\ y(t_1) = 1 \end{array}$$

Sobre el blanco,

$$\lambda_x + \lambda_y = \frac{1}{1 - \epsilon} > 0,$$

y por tanto

$$u^* = -1.$$

Las soluciones del anterior sistema son para el gradiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot e^{-(t - t_1)} \end{array} \right. ,$$

y las trayectorias optimales son la familia de curvas

$$x = y - 1 + s + \epsilon \cdot \ln \frac{y - \epsilon}{1 - \epsilon}$$

El valor del juego es

$$J_\epsilon = \ln \frac{y_0 - \epsilon}{1 - \epsilon}$$

desde una posición inicial (x_0, y_0) .

Ya que el problema no perturbado no tiene campo de trayectorias definido, no tiene sentido hablar de la convergencia de los campos optimales perturbados al campo no perturbado. Hay convergencia hacia el campo no perturbado resultante de tomar allí $v^* = 0$. En todo caso, hay convergencia del valor del juego.

Lo que sucede es que en el juego no perturbado la coordenada x es ignorable, pues no interviene en el criterio, ni en el blanco, ni en la dinámica de y que define el blanco.

El juego es en realidad el problema de control

$$\left\{ \begin{array}{l} y = yu \quad u \in [-1, 1] \\ \text{Espacio de juego: } y \geq 1 \\ \text{Blanco: } y < 1 \\ \text{Criterio: } J = \int_{t_0}^{t_1} dt \end{array} \right.$$

El juego perturbado sí es realmente un juego de dos jugadores y por eso sus mandos quedan realmente determinados.

En este caso en que no tiene sentido hablar del problema de la convergencia de los campos perturbados al campo no perturbado, se verifica que:

$$\frac{d^k}{dt^k} (\lambda' \phi) \equiv 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO 2.1. Juego no perturbado.

Consideremos el siguiente juego propuesto por

Isaacs:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 + w \cdot \text{sen } u \\ \dot{y} = w \cdot \text{cos } u - bv \end{cases} \quad b > w > 1; \quad v \in [-1, 1]; \quad u \in [-\pi, \pi]$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0 \wedge x > 0$

$$\text{Criterio: } J = \int_{t_0}^{t_1} dt$$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_v \max_u v'F \leq 0 \Rightarrow \min_v \max_u (w \cdot \text{cos } u - bv) = w - b < 0.$$

Todo el blanco es parte útil. Se construye barrera natural sobre el borde de su frontera que es $(0, 0)$

b) Barrera natural.

Sobre ella ha de verificarse

$$\min_v \max_u v'F = 0$$

y, por tanto,

$$v_x (y + 1) - b |v_y| + w \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\begin{cases} v^* = \text{sgn } v_y \\ \text{sen } u^* = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}; \quad \text{cos } u^* = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \end{cases}$$

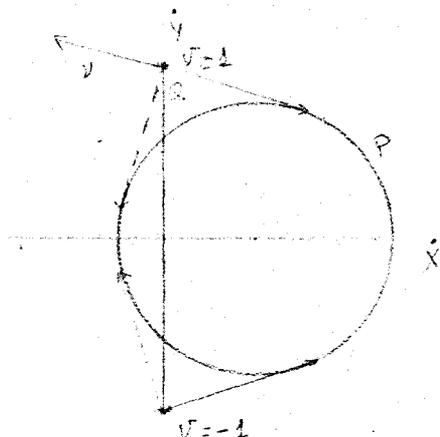
El sistema diferencial que define la barrera es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = -v_x \\ \dot{x} = y + 1 + \frac{wv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad x(t_1) = 0 \\ \dot{y} = \frac{wv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - b \cdot \text{sgn } v_y \quad y(t_1) = 0. \end{array} \right.$$

Si escribimos la dinámica como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 1 + w \cdot \cos u \\ w \cdot \sin u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot v$$

y se dibujan los dominios de maniobrabilidad P (circunferencia



cia $(\dot{x} - y - 1)^2 + \dot{y}^2 = w^2$) y Q (segmento de extremos $(0, b)$ y $(0, -b)$) en unos ejes $\dot{X}\dot{Y}$ en las proximidades de $(0, 0)$, pueden trazarse las cuatro posibles direcciones semipermeables que hay. De ellas hay una, la punte-

ada, que consigue

$$\dot{x} < 0 \quad \wedge \quad \dot{y} < 0.$$

Es ésa la dirección semipermeable de la barrera. Su normal tiene, pues,

$$v_x < 0 \quad \text{y} \quad v_y > 0.$$

Como v_x es constante, tomamos

$$v_x = -1,$$

y de la integral primera se despeja $v_y(t_1)$ obteniéndose

$$v_y(t_1) = \frac{-b + w \sqrt{b^2 + 1 - w^2}}{b^2 - w^2}$$

La barrera puede calcularse ya. Acaba cuando

$$v_y = 0,$$

instante en el cual

$$y = w - 1,$$

según se sigue de la integral primera. Denotaremos por B el punto final de la barrera.

c) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 + \lambda_x (y + 1) - b |\lambda_y| + w \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\begin{cases} v^* = \text{sgn} \lambda_y \\ \text{sen } u^* = \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{cases}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = 0 & \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = -\lambda_x & \lambda_y(t_1) = \frac{1}{b-w} \\ \dot{x} = y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & x(t_1) = s \\ \dot{y} = -b \cdot \text{sgn } \lambda_y + \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & y(t_1) = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = \frac{1}{b-v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-b+w).(t-t_1)^2 + (t-t_1) + s \\ y = (-b+w).(t-t_1) \end{cases}$$

Las trayectorias optimales constituyen la familia de parábolas

$$x = \frac{1}{2(-b+w)}.y^2 + \frac{1}{-b+w}.y + s,$$

que inciden en el blanco con pendiente

$$y' = -b+w.$$

Los mandos optimales son:

$$\begin{cases} v^* = 1 \\ \text{sen } u^* = 0 \quad ; \quad \text{cos } u^* = 1. \end{cases}$$

Para cada punto (x_0, y_0) , el valor del juego viene dado por

$$J = t_1 - t = \frac{y_0}{b-w}.$$

c) Superficie equívoca.

Como explica Isaacs, [17], no todo el campo anteriormente construido es válido. Existe una superficie equívoca que se apoya en B, que pasamos a construir siguiendo el método de [5].

La condición de singularidad, $\lambda' \phi = 0$, sobre la S. E. es $\lambda_y \equiv 0$.

El campo que emerge de la S. E. es el ya construido; por tanto

$$\lambda' \textcircled{2} = \left(0, \frac{1}{b-w}\right).$$

El campo incidente en la S. E. tendrá un gradiente

$$\lambda' = (\lambda_x, \lambda_y)$$

La normal ν a la S. E. es

$$\nu' = \lambda' - \lambda \textcircled{2} = \left(\lambda_x, \lambda_y - \frac{1}{b-w} \right),$$

de manera que la condición $\nu'(f + \phi \cdot \tilde{\nu}) = 0$ se escribe:

$$(*) \quad \lambda_x \left(y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right) + \left(\lambda_y - \frac{1}{b-w} \right) \cdot \left(\frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - b\tilde{\nu} \right) = 0.$$

Como $H^* = 0$ y $\lambda_y = 0$, se verificará:

$$1 + \lambda_x(y + 1) + w|\lambda_x| = 0,$$

de donde se sigue que

$$\lambda_x < 0$$

y, despejando, que

$$\lambda_x = \frac{1}{w - y - 1}$$

sobre la S. E.

Sustituyendo estos valores en la condición (*), se obtiene:

$$-1 + \frac{b}{b-w} \cdot \tilde{\nu} = 0 \Rightarrow \tilde{\nu} = 1 - \frac{w}{b}.$$

Además,

$$\cos u^* = 0 \quad ; \quad \sin u^* = -1.$$

El sistema diferencial que construye la S. E. y los valores del gradiente sobre ella es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = \alpha \lambda_x \\ \dot{\lambda}_y = -\lambda_x + \alpha \left(\lambda_y - \frac{1}{b-w} \right) \\ \dot{x} = y + 1 + w \cdot \sin u^* \\ \dot{y} = w \cdot \cos u^* - b \left(1 - \frac{w}{b} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = \frac{1}{w - y_B - 1} \\ \lambda_y(t_1) = 0 \\ x(t_1) = x_B \\ y(t_1) = y_B \end{array}$$

Nótese que el denominador de $\lambda_x(t_1)$ es nulo, por lo que se busca la solución que

$$\lambda_x(t) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } t \rightarrow t_1.$$

La determinación de α se hace considerando que

$$\dot{y} = 0,$$

resultando

$$\alpha = - (b - w)\lambda_x.$$

Las soluciones que se obtienen son:

$$\lambda_x = \frac{1}{(b - w) \cdot (t - t_1)}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-b + w) \cdot (t - t_1)^2 + x_B \\ y = (-b + w) \cdot (t - t_1) + y_B \end{cases},$$

de modo que la S. E. es la parábola

$$x = \frac{1}{2(-b + w)}(y - w + 1)^2 + x_B$$

Sobre la S. E. hay dos alternativas entre las que decide el minimizador. Si adopta v^* , el maximizador debe adoptar $u^* = 0$, y el estado llegará al blanco en el tiempo ya calculado. Si adopta \tilde{v} , el maximizador debe adoptar $u^* = -\pi/2$ y desplazarse por la S. E.; en este caso, el minimizador debe conmutar a v^* antes de llegar a B cuando desee, momento en el que el maximizador adoptará $u^* = 0$. El tiempo que se tarda en llegar al blanco es el mismo en cualquier caso.

Si el minimizador no conmuta a v^* antes de llegar a B, se metría en la barrera semipermeable y no podría forzar al maximizador a penetrar en el campo optimal que lleva el estado

al blanco si éste adopta su mando de desplazamiento por la barrera natural.

d) Campo incidente en la S. E.

Las ecuaciones de las características en este campo son las de pág. 77, tomando como condiciones finales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = \frac{1}{w - y_*(s) - 1} \\ \lambda_y(t_1) = 0 \\ x(t_1) = x_*(s) \\ y(t_1) = y_*(s), \end{array} \right.$$

donde hemos denotado $(x_*(s), y_*(s))$ una representación paramétrica de la S. E..

Por otra parte,

$$\lambda_x < 0$$

y, por tanto

$$\dot{\lambda}_y > 0.$$

Como en el instante final vale 0, antes es negativo y

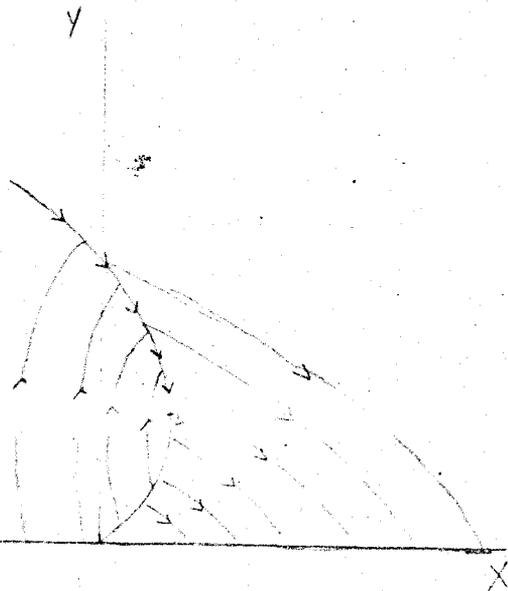
$$v^* = -1.$$

De modo que el sistema diferencial a integrar es también

resoluble por cuadraturas.

La pendiente de las trayectorias optimales al incidir en la S.E. es:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t = t_1} = \frac{b}{y_*(s) + 1 - w}$$



2. Juegos perturbados.

Perturbamos el anterior juego transformándolo en el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 + w \cdot \text{sen } u + \epsilon \cdot b \cdot \text{sen } v & u \in [-\pi, \pi] \\ \dot{y} = w \cdot \text{cos } u - b \cdot \text{sen } v & b > v > 1 \quad v \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0 \wedge x > 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_v \max_u v' F_\epsilon \leq 0 \Rightarrow \min_v \max_u (w \cdot \text{cos } u - b \cdot \text{cos } v) = w - b < 0.$$

Todo el blanco es parte útil. Se construye barrera natural sobre (0,0).

b) Barrera natural.

Se verificará

$$\min_v \max_u v' F_\epsilon = 0,$$

que es

$$v_x (y + 1) - b \sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2} + w \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\cos v^* = \frac{v_y}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{-\epsilon v_x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}}$$

$$\text{sen } u^* = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \cos u^* = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

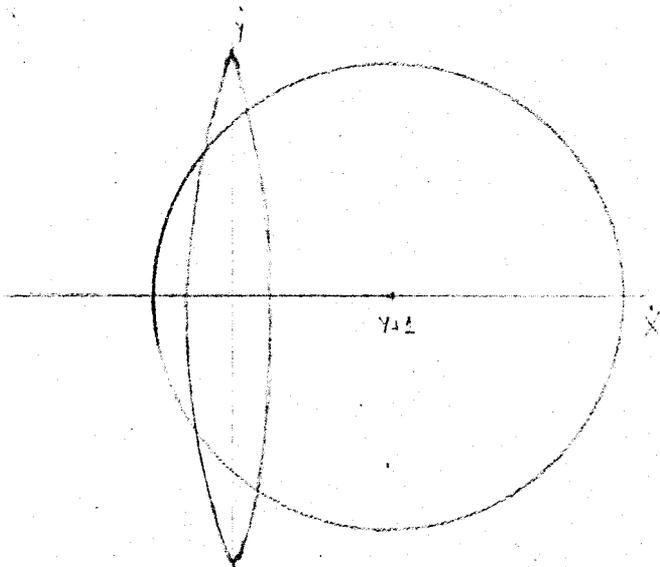
El sistema diferencial que define la barrera es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = -v_x \\ \dot{x} = y + 1 + \frac{wv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \frac{\epsilon^2 b v_x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{wv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \frac{b v_y}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(t_1) = 0 \\ y(t_1) = 0 \end{array}$$

determinándose $v_x(t_1) = -1$ y el valor de $v_y(t_1)$ de forma análoga a la realizada para el juego no perturbado.

La solución de este sistema tiende a la barrera natural no perturbada. Además se acaba como aquélla en el punto de tangente vertical, B_ϵ , a pesar de seguir definidos ambos mandos.

Consideremos, en efecto, la construcción geométrica



de las direcciones semipermeables. Ya que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 1 + w \cdot \text{sen} u \\ w \cdot \text{cos} u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\epsilon \cdot \text{sen} v \\ b \cdot \text{cos} v \end{pmatrix},$$

resulta que P es la circunferencia

$$(\dot{x} - y - 1)^2 + \dot{y}^2 = w^2$$

y Q es la elipse

$$\frac{\dot{x}^2}{\epsilon^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} = 1$$

A medida que se integra la barrera en tiempo retrógrado, y crece y la circunferencia se desplaza hacia la derecha hasta que la dirección de la barrera se hace "vertical" en el límite. No se puede continuar integrando hacia arriba, porque entonces las posiciones respectivas de la elipse y la circunferencia serían tales que no existiría ninguna dirección semipermeable que prolongara la precedente por continuidad. La única solución sería integrar hacia abajo a lo largo de la dirección simétrica respecto del eje de las \hat{x} . Pero esto corresponde a un punto de retroceso de la barrera y se sabe por la teoría general que esta rama de la barrera debe ignorarse.

c) Trayectorias óptimas.

$$H^* = 1 + \lambda_x (y + 1) - b\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2} + w\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos v^* = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{-\epsilon \lambda_x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \text{sen } u^* = \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \cos u^* = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{array} \right.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = 0 \\ \dot{\lambda}_y = -\lambda_x \\ \dot{x} = y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{\epsilon^2 b\lambda_x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{b\lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{b-w} \\ x(t_1) = s \\ y(t_1) = 0, \end{array}$$

cuyas soluciones son como en el juego no perturbado

$$\begin{cases} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = \frac{1}{b - w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-b + w) \cdot (t - t_1)^2 + (t - t_1) + s \\ y = (-b + w) \cdot (t - t_1) \end{cases}$$

Los mandos optimales son:

$$\begin{cases} \cos v^* = 1 & ; & \sin v^* = 0 \\ \sin u^* = 0 & ; & \cos u^* = 1 \end{cases}$$

y el valor del juego para cada punto (x_0, y_0) es

$$J = t_1 - t = \frac{y_0}{b - w}$$

c) Envolvente de conmutación.

Pasamos a construir la envolvente de conmutación que se apoya en B_ϵ siguiendo el método de .

El campo que emerge de la E. C. es el ya construido; por tanto:

$$\lambda'^{\textcircled{2}} = \left(0, \frac{1}{b - w} \right).$$

El gradiente del campo incidente en la E. C. será denotado

$$\lambda' = (\lambda_x, \lambda_y).$$

La normal v a la E. C. será

$$v' = \lambda' - \lambda'^{\textcircled{2}} = \left(\lambda_x, \lambda_y - \frac{1}{b - w} \right),$$

de manera que la condición

$$\frac{d}{dt} (v' (f + \phi \cdot \cos v^* + \epsilon \cdot \psi \cdot \sin v^*)) = 0$$

se escribe:

$$\frac{d}{dt} \left[\lambda_x \left(y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{\epsilon^2 b \lambda_x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right) + \left(\lambda_y - \frac{1}{b - w} \right) \cdot \left(\frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{b\lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right) \right] = 0.$$

El sistema que construye la E. C. y los valores del gradiente sobre ella es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = \alpha \lambda_x \\ \dot{\lambda}_y = -\lambda_x + \alpha \left(\lambda_y - \frac{1}{b - w} \right) \\ \dot{x} = y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{\epsilon^2 b \lambda_x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{b\lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(t_1) = x_{B\epsilon} \\ y(t_1) = y_{B\epsilon} \end{array}$$

El valor de α se determina sustituyendo en la ecuación anterior el valor de las derivadas dadas por el sistema. Habida cuenta que:

$$\tilde{f}' = \left(y + 1 + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}, \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right)$$

$$\phi' = (0, -b)$$

$$\psi' = (b, 0)$$

$$\phi_x = \phi_\lambda = \psi_x = \psi_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{w\lambda_y^2}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{3/2}} & \frac{-w\lambda_x\lambda_y}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{3/2}} \\ \frac{-w\lambda_x\lambda_y}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{3/2}} & \frac{w\lambda_x^2}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

y que

$$k_\varepsilon = - \frac{\lambda_y}{\varepsilon\lambda_x}$$

en la notación de la teoría, la ecuación (26) de allí se convierte en:

$$\frac{1}{b-w} \cdot \left(\frac{w}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{3/2}} + \frac{\varepsilon^2 b}{(\lambda_y^2 + \varepsilon^2 \lambda_x^2)^{3/2}} \right) \cdot \lambda_x^2 \cdot \left(\lambda_x + \frac{1}{b-w} \cdot \alpha \right) = 0,$$

de donde

$$\alpha = - (b-w)\lambda_x,$$

formalmente igual al resultado del juego no perturbado.

Sustituyendo este valor de α en las dos primeras ecuaciones del sistema, se tiene

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = - (b-w)\lambda_x^2 \\ \dot{\lambda}_y = - (b-w)\lambda_x\lambda_y, \end{cases}$$

de donde se deduce que sobre la E.C.,

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = k \text{ (Cte.)}$$

que vamos a determinar. En efecto, la condición

$$v'F_\varepsilon = 0$$

se escribe

$$\lambda_x (y + 1) + w \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} - b \sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2} - \frac{1}{b - w} \left(\frac{w \lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{b \lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right) = 0 ;$$

como $H^* = 0$, se sigue que

$$-1 - \frac{1}{b - w} \left(\frac{w \lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{b \lambda_y}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \right) = 0,$$

e introduciendo la k se convierte en

$$(**) \quad 1 + \frac{k}{b - w} \left(\frac{w}{\sqrt{1 + k^2}} - \frac{b}{\sqrt{k^2 + \epsilon^2}} \right) = 0,$$

ecuación que permite determinar k .

Sustituyendo en la integral primera $H^* = 0$, se determinan los valores del gradiente en el punto B_ϵ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = \frac{-1}{y_{B_\epsilon} + 1 - w\sqrt{1+k^2} + b\sqrt{k^2+\epsilon^2}} \\ \lambda_y(t_1) = \frac{-k}{y_{B_\epsilon} + 1 - w\sqrt{1+k^2} + b\sqrt{k^2+\epsilon^2}} \end{array} \right.$$

Por último, la ecuación (**) permite determinar también el valor del $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k/\epsilon$, obteniéndose

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\epsilon} = \frac{b - w}{\sqrt{2bw - w^2}}.$$

Puede comprobarse que el sistema que da las E. C. tiene de al que da la S. E. en el juego no perturbado con $\epsilon = 0$, siendo aplicable el teorema de la dependencia continua de las soluciones.

d) Campo incidente en la E. C.

Las ecuaciones del campo de primarias son ahora las de pág. 84, tomando como condiciones finales:

$$\lambda_x(t_1) = \frac{1}{w\sqrt{1+k^2} - y_{**}(s,\epsilon) - 1 - b\sqrt{k^2 + \epsilon^2}}$$

$$\lambda_y(t_1) = \frac{k}{w\sqrt{1+k^2} - y_{**}(s,\epsilon) - 1 - b\sqrt{k^2 + \epsilon^2}}$$

$$x(t_1) = x_{**}(s,\epsilon)$$

$$y(t_1) = y_{**}(s,\epsilon),$$

denotando $(x_{**}(s,\epsilon), y_{**}(s,\epsilon))$ la representación paramétrica de la E. C. ya calculada.

El Teorema 2 es aplicable, pues en este caso,

$$\hat{G}(s) = \frac{b}{w\sqrt{1+k^2} - y_{**}(s,\epsilon) - 1 - b\sqrt{k^2 + \epsilon^2}} \neq 0,$$

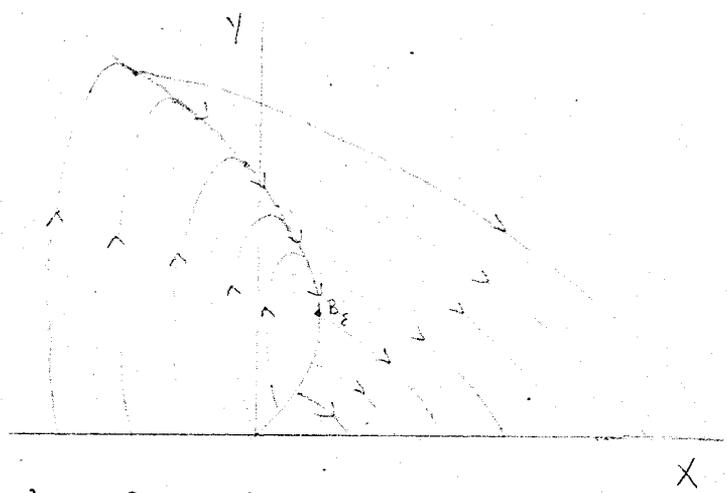
y se deduce de él que este campo converge hacia el que incide en la S. E. La incidencia en la E. C. es, por supuesto, tangente.

Cada trayectoria optimal incidente en la E. C. tiene un

máximo caracterizado por

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow \lambda_y = 0.$$

Es posible la determinación explícita de esta línea de máximos con ayuda de la integral primera $H^* = 0$; sabiendo que



$\lambda_y = 0$, resulta de ella

$$y = \frac{(w - \varepsilon b - 1)\lambda_x - 1}{\lambda_x},$$

y al ser λ_x constante resulta

$$y = y_{**}(s, \varepsilon) - w(\sqrt{1 + k^2} - 1) + b(\sqrt{k^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon).$$

La otra ecuación paramétrica se obtiene integrando el sistema formado por las ecuaciones que dan $\dot{\lambda}_y$ y \dot{x} , y sustituyendo luego

$$\lambda_y = 0.$$

Quedaría por verificar que

$$\max_{v \in \tilde{V}_u} H \geq 0, \quad \forall u \in \tilde{U}(x),$$

siendo:

$$\tilde{U} = \left\{ u \in U: \begin{array}{l} v' F_\varepsilon(u, \psi_1^*(u)) > 0, \quad H(\lambda_2, u, \psi_1^*(u)) < 0; \\ v' F_\varepsilon(u, \psi_2^*(u)) < 0, \quad H(\lambda_1, u, \psi_1^*(u)) < 0 \end{array} \right\}$$

y

$$\tilde{V}_u = \{v \in V; v' F_\varepsilon(u, v) = 0\}.$$

(Cf. [5]. pág 244). Dicha verificación solo puede hacerse desde el punto de vista numérico.

EJEMPLO 3.1. Juego no perturbado.

Se considera el juego definido del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{sen } u \\ \dot{y} = \text{cos } u + xv \end{cases} \quad u \in [-\pi, \pi] \quad v \in [-1, 1]$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\begin{aligned} \min_u \max_v v'F \leq 0 &\Rightarrow \min_u \max_v (\text{cos } u + xv) = -1 + |x| \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Se intentan construir barreras naturales sobre los bordes de la frontera útil que son $(1,0)$ y $(-1,0)$.

b) Barrera natural.

Sobre ella será

$$\min_u \max_v v'F = 0,$$

esto es,

$$-\sqrt{v_x^2 + v_y^2} + |v_y x| = 0,$$

siendo:

$$\text{sen } u^* = \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$v^* = \text{sgn}(v_y x).$$

El sistema diferencial que define la barrera es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -v_y \cdot \operatorname{sgn}(v_y x) \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{x} = \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} + x \cdot \operatorname{sgn}(v_y x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_x(t_1) = 0 \\ v_y(t_1) = 1 \\ x(t_1) = 1 \\ y(t_1) = 0. \end{array}$$

Este sistema es integrable, obteniéndose

$$v_x = t_1 - t$$

$$v_y = 1$$

$$x = \sqrt{1 + (t - t_1)^2}$$

y

$$\dot{y} = \frac{(t - t_1)^2}{\sqrt{1 + (t - t_1)^2}} > 0.$$

La barrera viene, pues, del cuarto cuadrante, esto es, de fuera del terreno de juego. No hay barrera natural que se apoye en $(1,0)$ ni tampoco la hay análogamente apoyándose en $(-1,0)$.

c) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 + |\lambda_y x| - \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\operatorname{sen} u^* = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \operatorname{cos} u^* = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}$$

$$v^* = \operatorname{sgn}(\lambda_y x).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \cdot \text{sgn}(\lambda_y x) \\ \dot{\lambda}_y = 0 \\ \dot{x} = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + x \cdot \text{sgn}(\lambda_y x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - |s|} \\ x(t_1) = s \\ y(t_1) = 0 \end{array}$$

Cuando $s > 0$, se obtiene

$$v^* = 1$$

y las soluciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{t_1 - t}{1 - s} \\ \lambda_y = \frac{1}{1 - s} \\ x = \sqrt{1 + (t - t_1)^2} + s - 1 \\ y = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} - 2 \cdot \ln |\alpha| \right) + (s - 1) \cdot (t - t_1), \end{array} \right.$$

$$\text{siendo } \alpha = \sqrt{1 + (t - t_1)^2} + (t - t_1).$$

Pueden comprobarse:

a) La incidencia vertical en el blanco de todas las trayectorias optimales.

b) La existencia para cada trayectoria de un máximo al que llegan creciendo desde el eje OX.

c) Que este campo no llena el primer cuadrante.

d) Que para $s < 0$, es $v^* = -1$ y el campo optimal es el simétrico del anteriormente construido respecto de la recta $x = 0$.

Para $s = 0$ no hay trayectoria optimal en este campo por no estar definido el mando v^* . Intentaremos construir una curva universal sobre el eje vertical.

d) Curva universal.

La condición de singularidad es

$$x = 0.$$

La integral primera $H^* = 0$ implica que

$$\lambda_y = 1,$$

sobre el arco singular. El sistema diferencial que lo define es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \hat{v} \\ \dot{\lambda}_y = 0 \\ \dot{x} = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + x\hat{v} \end{array} \right.$$

Ya que

$$\dot{x} \equiv 0,$$

será

$$\lambda_x \equiv 0.$$

por tanto

$$\dot{\lambda}_x = 0,$$

es decir

$$\hat{v} = 0.$$

Resulta, pues, que sobre el arco singular,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = 1 \end{array} \right.,$$

los mandos optimales sobre ella son

$$\begin{cases} \text{sen } u^* = 0 & ; & \text{cos } u^* = -1 \\ \hat{v} = 0, \end{cases}$$

permitiendo la última ecuación del sistema determinar el valor del juego desde cada punto del eje.

e) Trayectorias incidentes en la curva universal.

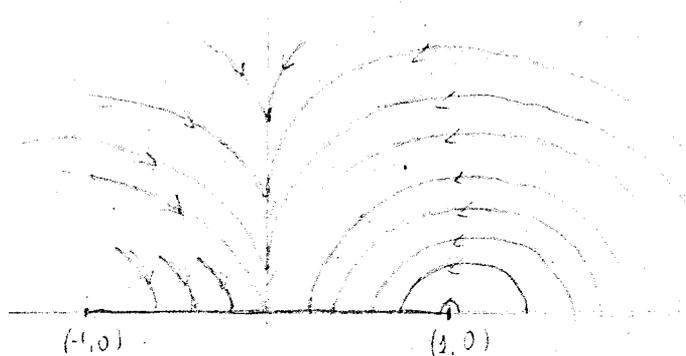
En el campo incidente en la curva universal por la derecha es

$$v^* = 1.$$

Y el sistema que lo determina es:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y & \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = 0 & \lambda_y(t_1) = 1 \\ \dot{x} = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & x(t_1) = 0 \\ \dot{y} = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + x & y(t_1) = s \end{cases}$$

sistema resoluble cuyas soluciones son:



$$\begin{cases} \lambda_x = t_1 - t \\ \lambda_y = 1 \\ x = \sqrt{1 + (t - t_1)^2} - 1 \\ y = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \right) \end{cases}$$

$$- 2.1n |\alpha| - (t - t_1) + s,$$

siendo α la misma expresión de pág. 93.

Puede observarse la incidencia tangencial del campo en la curva universal, lo que no es frecuente en un arco singular. Además nótese que la solución de este campo cuando $s \rightarrow 0$, tiende a la solución del campo incidente en el blanco cuando allí $s \rightarrow 0$.

En el campo incidente por la izquierda de la curva universal, es

$$v^* = -1$$

y resulta un campo simétrico al anterior respecto de la recta $x = 0$.

2. Juego perturbado.

Perturbamos el juego transformándolo en:

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{sen } u - \varepsilon \cdot x \cdot \text{sen } v \\ \dot{y} = \text{cos } u + x \cdot \text{cos } v \end{cases} \quad u \in [-\pi, \pi] \quad v \in [-\pi, \pi]$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_u \max_v v' F_\varepsilon \leq 0 \Rightarrow \min_u \max_v (\text{cos } u + x \cdot \text{cos } v) = -1 + |x| \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Se intentan construir barreras naturales sobre $(-1,0)$ y $(1,0)$.

b) Barrera natural.

Sobre ella será

$$\min_u \max_v v' F_\varepsilon = 0,$$

es decir,

$$-\sqrt{v_x^2 + v_y^2} + |x| \cdot \sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } u^* = \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ \text{cos } v^* = \frac{v_y \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{\epsilon \cdot v_x \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \end{array} \right.$$

El sistema diferencial que define la barrera es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2} \cdot \text{sgn } x \quad v_x(t_1) = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \quad v_y(t_1) = 1 \\ \dot{x} = \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \frac{\epsilon^2 v_x \cdot x \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \quad x(t_1) = 1 \\ \dot{y} = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} + \frac{x \cdot v_y \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 v_x^2 + v_y^2}} \quad y(t_1) = 0, \end{array} \right.$$

sistema resoluble con ayuda de la integral primera. La solución tiende a la solución del sistema no perturbado de pág. 92 y no es barrera del juego por la misma razón que se expuso allí. Esto puede comprobarse viendo que las dos primeras ecuaciones tienen por solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{1}{2\epsilon} (1 - e^{2\epsilon(t - t_1)}) \\ v_y = 1 \end{array} \right. ,$$

y el carácter monótono de estas normales impide que la solución venga del primer cuadrante.

Algo análogo sucede con la barrera que se apoya en $(-1, 0)$.

c) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 - \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} + |x| \cdot \sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } u^* = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \text{cos } v^* = \frac{\lambda_y \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{\epsilon \cdot \lambda_x \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{array} \right.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2} \cdot \text{sgn } x \quad \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = 0 \quad \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - |s|} \\ \dot{x} = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + \frac{\epsilon^2 \lambda_x \cdot x \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad x(t_1) = s \\ \dot{y} = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + \frac{\lambda_y \cdot x \cdot \text{sgn } x}{\sqrt{\epsilon^2 \lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad y(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

Puede observarse que para $s \neq 0$,

$$\hat{\lambda}'(s) \cdot \hat{\phi}(s) = \lambda_y \cdot x \Big|_{t=t_1} = \frac{s}{1 - |s|} \neq 0,$$

por lo que el teorema de la dependencia continua de las soluciones con respecto a ϵ garantiza que este campo tiende al campo optimal incidente en el blanco para el juego no perturbado. Este es el caso descrito en pág. 12.

Las trayectorias perturbadas inciden también verticalmente en el blanco. Además:

$$\ddot{x}(t_1) = 1 - \epsilon^2 s$$

por lo que

$$x(t) > s$$

antes de t_1 y no hay capa límite.

Para $s = 0$, la solución del sistema perturbado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = 1 \\ x = 0 \\ y = t_1 - t. \end{array} \right.$$

Así pues, el arco singular es una trayectoria ordinaria del juego perturbado, resultado que podía haberse obtenido del Teorema 11, pues puede comprobarse la verificación de la Hipótesis 7.

EJEMPLO 4.

1. Juego no perturbado.

Consideremos el juego del chófer homicida, planteado y parcialmente resuelto por Isaacs [17] y completado en [10]. Nos ocuparemos aquí solo del estudio de la perturbación de la barrera, del campo incidente en el blanco, de la curva universal y campo incidente en ella. El juego se define así:

$$\begin{cases} \dot{x} = -uy + w \cdot \sin v \\ \dot{y} = ux + w \cdot \cos v - V \end{cases} \quad V > w; u \in [-1, 1]; v \in [-\pi, \pi]$$

$$\text{Espacio de juego: } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 1^2\}$$

$$\text{Blanco: } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1^2\}$$

$$\text{Criterio: } J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt$$

a) Parte útil del blanco.

Si denotamos α el ángulo formado por el radio de la frontera del blanco con el eje OY, la condición

$$\min_u \max_v v'F \leq 0$$

será

$$\min_u \max_v \left[\sin \alpha \cdot (-u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin v) + \cos \alpha \cdot (u \cdot \sin \alpha + w \cdot \cos v - V) \right] = w - V \cdot \cos \alpha.$$

Por tanto, la parte útil de la frontera del blanco es

$$\left\{ \alpha: -\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0, \quad \cos \alpha_0 = \frac{w}{V} \right\}$$

Se construye la barrera natural sobre el borde de la parte útil del blanco. Continuaremos nuestra construcción en el semiplano $x \geq 0$. Puede comprobarse la simetría respecto del eje OY.

b) Barrera natural.

Sobre ella se tendrá

$$\min_u \max_v v'F = 0$$

que en este caso es

$$- |v_y x - v_x y| + w \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - V v_y = 0,$$

siendo:

$$\begin{cases} u^* = - \operatorname{sgn} (v_y x - v_x y) \\ \operatorname{sen} v^* = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} ; \quad \operatorname{cos} v^* = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \end{cases}$$

El sistema diferencial que define la barrera es

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -v_y u^* & v_x(t_1) = \operatorname{sen} \alpha_0 \\ \dot{v}_y = v_x u^* & v_y(t_1) = \operatorname{cos} \alpha_0 \\ \dot{x} = -y u^* + w \operatorname{sen} v^* & x(t_1) = 1 \operatorname{sen} \alpha_0 \\ \dot{y} = x u^* + w \operatorname{cos} v^* - V & y(t_1) = 1 \operatorname{cos} \alpha_0 \end{cases}$$

En el borde de la parte útil es

$$v_y x - v_x y = 1 \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{cos} \alpha_0 - 1 \operatorname{cos} \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = 0.$$

Pero

$$\frac{d}{dt} (v_y x - v_x y) = V v_x,$$

por lo que en $t = t_1$,

$$\frac{d}{dt} (v_y x - v_x y) > 0,$$

y

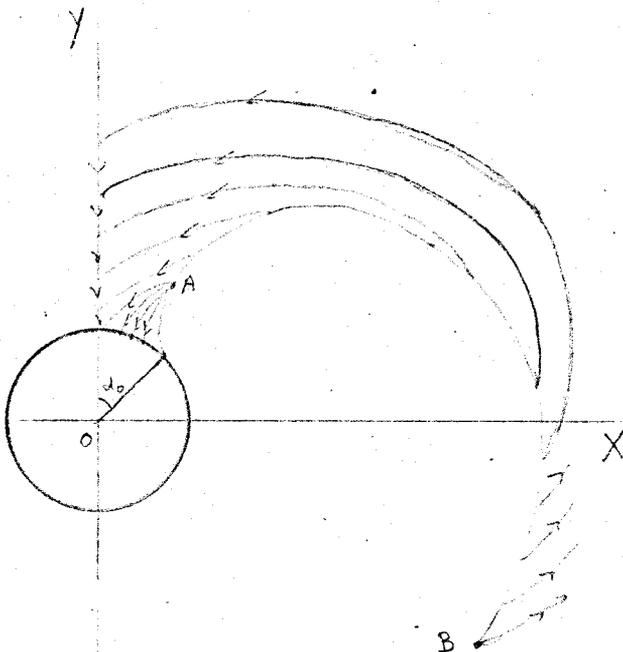
$$u^* = 1.$$

Sustituyendo este valor en el anterior sistema e integrándolo, se obtiene:

$$\begin{cases} v_x = \text{sen}(t_1 - t + \alpha_0) \\ v_y = \text{cos}(t_1 - t + \alpha_0) \\ x = [1 + w(t - t_1)] \cdot \text{sen}(t_1 - t + \alpha_0) - V \cdot \text{cos}(t - t_1) + V \\ y = [1 + w(t - t_1)] \cdot \text{cos}(t_1 - t + \alpha_0) - V \cdot \text{sen}(t - t_1) \end{cases}$$

La barrera no corta al eje OY con tal que se tenga

$$1 > w \cdot \text{arc sen} \frac{w}{V} + \sqrt{V^2 - w^2} - V,$$



pues el punto de tangente vertical se halla para

$$v_y = 0,$$

esto es, para

$$t - t_1 = \alpha_0 - \frac{\pi}{2};$$

y la anterior es la condición para que en ese punto sea

$$x > 0.$$

Supondremos esta hipótesis en adelante.

La barrera dura hasta que

$$v_y x - v_x y = 0.$$

Sustituyendo esta expresión, se halla

$$v_y x - v_x y = -2 \cdot V \cdot \text{sen} \frac{t_1 - t + 2\alpha_0}{2} \cdot \text{sen} \frac{t_1 - t}{2}.$$

El punto final de la barrera se halla donde se anula por

segunda vez (la primera es en $t = t_1$) esta expresión. Dicho punto final B es

$$\left(-1 - 2w(\pi - \alpha_0) \operatorname{sen} \alpha_0 - V \cdot \cos 2\alpha_0 + V, \right. \\ \left. 1 - 2w(\pi - \alpha_0) \cos \alpha_0 + V \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_0 \right).$$

c) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 - |\lambda_y x - \lambda_x y| + w \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} - V \lambda_y = 0,$$

siendo:

$$u^* = - \operatorname{sgn} (\lambda_y x - \lambda_x y)$$

$$\operatorname{sen} v^* = \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \cos v^* = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}$$

Determinando como antes

$$u^* = +1,$$

se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \\ \dot{\lambda}_y = \lambda_x \\ \dot{x} = -y + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = x + \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - V \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = \frac{\operatorname{sen} s}{V \cdot \cos s - w} \\ \lambda_y(t_1) = \frac{\cos s}{V \cdot \cos s - w} \\ x(t_1) = 1 \cdot \operatorname{sen} s \\ y(t_1) = 1 \cdot \cos s \end{array}$$

Integrándolas, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{\operatorname{sen}(t_1 - t + s)}{V \cdot \cos s - w} \\ \lambda_y = \frac{\cos(t_1 - t + s)}{V \cdot \cos s - w} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = [1 + w(t - t_1)] \cdot \text{sen}(t_1 - t + s) - V \cdot \cos(t - t_1) + V \\ y = [1 + w(t - t_1)] \cdot \cos(t_1 - t + s) - V \cdot \text{sen}(t - t_1) \end{cases}$$

Para

$$t_1 - t = \frac{1}{V}$$

se obtiene un punto común a todas las trayectorias optimales,

$$\left(V \left(1 - \cos \frac{1}{w}\right), V \cdot \text{sen} \frac{1}{w} \right),$$

situado sobre la barrera (A en el dibujo). Supondremos que A se halla situado entre B y el final de la barrera; para ello, basta que

$$\frac{1}{w} < \pi - \alpha_0 = \text{arc sen} \frac{w}{V}.$$

La pendiente de las trayectorias optimales sobre el blanco es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_1} = \frac{1 \cdot \text{sen } s + w \cdot \cos s - V}{-1 \cdot \cos s + w \cdot \text{sen } s}$$

d) Curva universal.

La condición de singularidad es

$$\lambda_y x - \lambda_x y = 0.$$

El sistema diferencial que construye la curva universal es

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = -\hat{u} \cdot \lambda_y \\ \dot{\lambda}_y = \hat{u} \cdot \lambda_x \\ \dot{x} = -\hat{u} \cdot y + \frac{w \lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = \hat{u} \cdot x + \frac{w \lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - V \end{cases}$$

Como

$$\frac{d}{dt} (\lambda_y x - \lambda_x y) = V \lambda_x,$$

sigue que sobre la curva universal

$$\lambda_x \equiv 0.$$

Por tanto,

$$\dot{\lambda}_x = 0,$$

y de ahí,

$$\hat{u} = 0.$$

De modo que

$$\lambda_y = \text{Cte},$$

que se puede determinar de la integral primera $H^* = 0$, resultando

$$\lambda_y = \frac{1}{V - w}.$$

De la última ecuación se obtiene el valor del juego desde un punto $(0, s)$ de la curva universal, obteniéndose que

$$t_1 - t = \frac{s - 1}{V - w}.$$

El mando optimal sobre la curva universal para el jugador que maximiza es

$$\text{sen } v^* = 0 \quad ; \quad \text{cos } v^* = 1.$$

e) Campo incidente en la curva universal.

El sistema de Euler-Lagrange es:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \cdot u^* \\ \dot{\lambda}_y = \lambda_x \cdot u^* \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{V - w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y.u^* + w.\text{sen } v^* & x(t_1) = 0 \\ \dot{y} = x.u^* + w.\text{cos } v^* - V & y(t_1) = s \end{cases}$$

En el campo optimal incidente por la derecha en la curva universal es

$$u^* = 1.$$

Integrando el sistema, se obtiene

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{\text{sen}(t_1 - t)}{V - w} \\ \lambda_y = \frac{\text{cos}(t_1 - t)}{V - w} \\ x = [s + w(t - t_1)] \cdot \text{sen}(t_1 - t) - V \cdot \text{cos}(t_1 - t) + V \\ y = [s + w(t - t_1)] \cdot \text{cos}(t_1 - t) + V \cdot \text{sen}(t_1 - t) \end{cases}$$

La pendiente de las trayectorias incidentes en la curva universal es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = t_1} = \frac{V - w}{s}.$$

Nótese por último que la trayectoria optimal de este campo cuando $s \rightarrow 1$ y la del campo incidente en el blanco cuando $s \rightarrow 0$, tienden al mismo límite.

Detenemos aquí el estudio del juego no perturbado y pasamos a estudiar el juego perturbado.

2. Juego perturbado.

Consideremos el juego definido del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y.\text{cos } u + w.\text{sen } v - \epsilon.x.\text{sen } u \\ \dot{y} = x.\text{cos } u + w.\text{cos } v - V - \epsilon.y.\text{sen } u \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [-\pi, \pi] \\ v \in [-\pi, \pi] \\ V > w \end{matrix}$$

Espacio de juego: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 1^2\}$

Blanco: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1^2\}$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

Con una notación análoga a la usada para el juego no perturbado, se tendrá que

$$\min_u \max_v v' F_\epsilon = -\epsilon l + w - V \cdot \cos \alpha.$$

Por tanto, la parte útil de la frontera del blanco es

$$\left\{ \alpha: -\alpha_\epsilon \leq \alpha \leq \alpha_\epsilon, \cos \alpha_\epsilon = \frac{w - \epsilon l}{V} \right\}$$

Se construye la barrera natural sobre el borde de la parte útil del blanco. Como en el juego no perturbado, continuamos nuestra construcción en el semiplano $x \geq 0$.

b) Barrera natural.

Denotando

$$p = v_y x - v_x y$$

$$q = v_x x + v_y y,$$

la condición

$$\min_u \max_v v' F_\epsilon = 0$$

se convierte en

$$-\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2} + w\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - Vv_y = 0,$$

siendo:

$$\cos u^* = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}}; \quad \text{sen } u^* = \frac{q}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}}$$

$$\cos v^* = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} .$$

El sistema diferencial que define la barrera es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = \frac{pv_y + \varepsilon^2 qv_x}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} \quad v_x(t_1) = \text{sen } \alpha_\varepsilon \\ \dot{v}_y = \frac{-pv_x + \varepsilon^2 qv_y}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} \quad v_y(t_1) = \text{cos } \alpha_\varepsilon \\ \dot{x} = \frac{py - \varepsilon^2 qx}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} + \frac{wv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad x(t_1) = 1.\text{sen } \alpha_\varepsilon \\ \dot{y} = \frac{-px - \varepsilon^2 qy}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} + \frac{wv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - v \quad y(t_1) = 1.\text{cos } \alpha_\varepsilon \end{array} \right.$$

Puede comprobarse que sobre el blanco,

$$p = 0$$

$$\frac{d}{dt} p \neq 0.$$

Una ligera modificación del Teorema 2 prueba que las barreras perturbadas tienden a la barrera no perturbada. Dichas barreras no cortarían al eje OY a partir de un ε con la misma restricción que para el juego no perturbado.

c) Trayectorias optimales.

Denotando en este apartado

$$r = \lambda_y x - \lambda_x y$$

$$z = \lambda_x x + \lambda_y y$$

se tendrá

$$H^* = 1 - \sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2} + w \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} - v \lambda_y \equiv Q,$$

siendo:

$$\begin{aligned} \cos u^* &= \frac{-r}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} & ; & \quad \text{sen } u^* = \frac{\epsilon z}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \\ \text{sen } v^* &= \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & ; & \quad \cos v^* = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{aligned}$$

El sistema de Euler-Lagrange es

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \frac{r\lambda_y + \epsilon^2 z\lambda_x}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} & \lambda_x(t_1) &= \frac{\text{sen } s}{V \cdot \cos s - w + 1} \\ \dot{\lambda}_y &= \frac{-r\lambda_x + \epsilon^2 z\lambda_y}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} & \lambda_y(t_1) &= \frac{\cos s}{V \cdot \cos s - w + 1} \\ \dot{x} &= \frac{ry - \epsilon^2 zx}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} + \frac{w\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & x(t_1) &= 1 \cdot \text{sen } s \\ \dot{y} &= \frac{-rx - \epsilon^2 zy}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} + \frac{w\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - v & y(t_1) &= 1 \cdot \cos s. \end{aligned} \right.$$

Puede comprobarse que para $s = 0$, la solución del sistema anterior es:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x &= 0 \\ \lambda_y &= \frac{1}{V - w + \epsilon l} \cdot e^{\epsilon(t - t_1)} \\ x &= 0 \\ y &= \frac{V - w}{\epsilon} \cdot (e^{\epsilon(t_1 - t)} - 1) + 1 \cdot e^{\epsilon(t_1 - t)} \end{aligned} \right.$$

de modo que el eje OY, arco singular del juego no perturbado es una trayectoria ordinaria de los juegos perturbados.

Es inmediato comprobar que sobre el blanco

$$\lambda' \phi = \lambda_y x - \lambda_x y = 0.$$

Por su parte, la expresión

$$G(x, \lambda) = \lambda' \left[(\phi_x \tilde{f}) - (\tilde{f}_x \phi) \right]$$

del Teorema 2 vale

$$G(x, \lambda) = V \lambda_x,$$

por lo que

$$\hat{G}(s) = \frac{V \cdot \text{sen } s}{V \cdot \text{cos } s - w}.$$

Es claro que la condición $\hat{G}(s) \neq 0$ se verifica en todo abierto del blanco que no contenga a $s = 0$. Por tanto, en tales abiertos se aplica el teorema general y hay continuidad.

La pendiente de las trayectorias optimales en el blanco es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = t_1} = \frac{(-\epsilon l + w) \cdot \text{cos } s - V}{(-\epsilon l + w) \cdot \text{sen } s}$$

cuyo límite para $\epsilon \rightarrow 0$ es

$$\frac{w \cdot \text{cos } s - V}{w \cdot \text{sen } s}.$$

Comparando esta pendiente con la que presentan las trayectorias no perturbadas, sigue la existencia de una capa límite en el blanco.

EJEMPLO 5.1. Juego no perturbado.

Se considera el juego definido del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -vy + \sin u \\ \dot{y} = vx + \cos u \end{cases} \quad u \in [-\pi, \pi] \quad v \in [-1, 1]$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\begin{aligned} \min_u \max_v v'F \leq 0 &\Rightarrow \min_u \max_v (vx + \cos u) = |x| - 1 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Se intentan construir barreras naturales sobre $(1,0)$ y $(-1,0)$.

b) Barrera natural.

La condición

$$\min_u \max_v v'F = 0$$

se escribe

$$|-v_x y + v_y x| - \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\sin u^* = \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad ; \quad \cos u^* = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$v^* = \operatorname{sgn}(v_y x - v_x y).$$

El sistema diferencial que define la barrera es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -v_y \cdot \text{sgn}(v_y x - v_x y) \quad v_x(t_1) = 0 \\ \dot{v}_y = v_x \cdot \text{sgn}(v_y x - v_x y) \quad v_y(t_1) = 1 \\ \dot{x} = -y \cdot \text{sgn}(v_y x - v_x y) - \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad x(t_1) = 1 \\ \dot{y} = x \cdot \text{sgn}(v_y x - v_x y) - \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad y(t_1) = 0. \end{array} \right.$$

La solución del sistema es

$$v_x = -\text{sen}(t - t_1)$$

$$v_y = \text{cos}(t - t_1)$$

$$x = (t - t_1) \cdot \text{sen}(t - t_1) + \text{cos}(t - t_1),$$

y

$$\dot{y} = (t - t_1) \cdot \text{sen}(t - t_1) > 0.$$

La barrera vendría, pues, del cuarto cuadrante. No hay barrera natural sobre (1,0) ni tampoco análogamente sobre (-1,0).

c) Trayectorias optimales.

$$H^* = 1 + \left| \lambda_y x - \lambda_x y \right| - \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\text{sen } u^* = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}$$

$$v^* = \text{sgn}(\lambda_y x - \lambda_x y).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \cdot \text{sgn}(\lambda_y x - \lambda_x y) \quad \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = \lambda_x \cdot \text{sgn}(\lambda_y x - \lambda_x y) \quad \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - |s|} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \cdot \operatorname{sgn}(\lambda_y x - \lambda_x y) - \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & x(t_1) = s \\ \dot{y} = x \cdot \operatorname{sgn}(\lambda_y x - \lambda_x y) - \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} & y(t_1) = 0 \end{cases}$$

Ya que sobre el blanco se tiene que

$$\lambda_y x - \lambda_x y = \frac{s}{1 - |s|},$$

el campo optimal estará definido para $s \neq 0$. Para $s > 0$, es

$$v^* = 1$$

y las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} \lambda_x = -\frac{\operatorname{sen}(t - t_1)}{1 - s} \\ \lambda_y = \frac{\operatorname{cos}(t - t_1)}{1 - s} \\ x = (t - t_1) \cdot \operatorname{sen}(t - t_1) + s \cdot \operatorname{cos}(t - t_1) \\ y = -(t - t_1) \cdot \operatorname{cos}(t - t_1) + s \cdot \operatorname{sen}(t - t_1) \end{cases}$$

Pueden comprobarse:

a) La incidencia vertical en el blanco de todas las trayectorias optimales.

b) La existencia para cada trayectoria de un máximo al que llegan creciendo desde el eje OX.

c) Que este campo no llena el primer cuadrante.

d) Que para $s < 0$, es $v^* = -1$, y el campo optimal es el simétrico del anteriormente construido respecto del eje OY.

Intentaremos construir una curva universal que se apoye en $s = 0$.

d) Curva universal.

La condición de singularidad es

$$\lambda_y x - \lambda_x y = 0.$$

El sistema diferencial que define el arco singular es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y \hat{v} \\ \dot{\lambda}_y = \lambda_x \hat{v} \\ \dot{x} = -y \hat{v} - \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \\ \dot{y} = x \hat{v} - \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \end{array} \right.$$

Para la determinación de \hat{v} , se calcula $\frac{d}{dt}(\lambda' \phi)$. Pero

$$\frac{d}{dt} (\lambda_y x - \lambda_x y) \equiv 0.$$

Por tanto, cualquiera que sea el mando \hat{v} se va a producir un arco singular y sin embargo, como veremos, el feedback para el primer jugador va a estar definido de modo único.

En efecto, tomemos un v integrable y pongamos

$$w(t) = \int_t^1 \hat{v}(\alpha) \cdot d\alpha.$$

Las dos primeras ecuaciones del anterior sistema den

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \mu(s) \cdot \text{sen } w \\ \lambda_y = \mu(s) \cdot \text{cos } w \end{array} \right.$$

determinándose $\mu(s)$ con el hamiltoniano y resultando

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \text{sen } w \\ \lambda_y = \text{cos } w \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$\bar{u} = -w ;$$

y si se integran las dos últimas ecuaciones del sistema se obtiene como solución

$$\begin{cases} x = (t - t_1) \cdot \text{sen } w \\ y = (t - t_1) \cdot \text{cos } w . \end{cases}$$

Este sistema es fácilmente inversible determinándose dos funciones:

$$\begin{cases} w = \text{arc tg } \frac{x}{y} \\ t_1 - t = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

que permiten definir el feedback único para el minimizador (independiente del v escogido) y el valor del juego. Así pues, hay una infinidad de arcos singulares y un único valor del juego para cada posición inicial dado por la última expresión.

Nótese por último que del campo optimal incidente en el blanco y construido anteriormente se obtiene

$$(t_1 - t)^2 = x^2 + y^2 - s^2 .$$

Por tanto, en su zona, el valor del juego que el minimizador consigue tomando u^* es menor que

$$\sqrt{x^2 + y^2} ;$$

y frente a u^* , el maximizador debe adoptar v^* . Al acercarse a la trayectoria que limita este campo, el valor del juego se va aproximando al anterior.

2. Juego perturbado.

Perturbamos el anterior juego transformándolo

en el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \cdot \cos v + \sin u - \varepsilon \cdot x \cdot \sin v & u \in [-\pi, \pi] \\ \dot{y} = x \cdot \cos v + \cos u - \varepsilon \cdot y \cdot \sin v & v \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\min_u \max_v v' F_\varepsilon \leq 0 \Rightarrow -1 + |x| \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Se intentan construir barreras naturales sobre $(1,0)$ y $(-1,0)$.

b) Barrera natural.

Denotando en este apartado

$$p = v_y x - v_x y$$

$$q = v_x x + v_y y,$$

la integral primera sobre la barrera es

$$-\sqrt{v_x^2 + v_y^2} + \sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2} = 0,$$

siendo:

$$\begin{aligned} \sin u^* &= \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} & ; & \quad \cos u^* = \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ \cos v^* &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} & ; & \quad \sin v^* = \frac{-\varepsilon q}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} \end{aligned}$$

El sistema diferencial que define la barrera es:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{v}_x &= \frac{-pv_y - \varepsilon^2 qv_x}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} & v_x(t_1) &= 0 \\
 \dot{v}_y &= \frac{pv_x - \varepsilon^2 qv_y}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} & v_y(t_1) &= 1 \\
 \dot{x} &= \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \frac{py - \varepsilon^2 qx}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} & x(t_1) &= 1 \\
 \dot{y} &= \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} + \frac{px + \varepsilon^2 qy}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} & y(t_1) &= 0.
 \end{aligned} \right.$$

Ya que

$$p \Big|_{t = t_1} = 1,$$

sigue del teorema de la dependencia continua que esta barrera tiende a la no perturbada que estaba en el interior del cuarto cuadrante. Por tanto, para valores suficientemente pequeños de ε no hay barrera natural.

c) Trayectorias optimales.

Denotando aquí

$$r = \lambda_y x - \lambda_x y$$

$$z = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

se tendrá

$$H^* = 1 + \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 z^2} - \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} = 0,$$

siendo:

$$\text{sen } u^* = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} \quad ; \quad \text{cos } u^* = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}$$

$$\cos v^* = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \quad ; \quad \text{sen } v^* = \frac{-\epsilon z}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = \frac{-r\lambda_y - \epsilon^2 z\lambda_x}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \quad \lambda_x(t_1) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = \frac{r\lambda_x - \epsilon^2 z\lambda_y}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \quad \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - |s|} \\ \dot{x} = \frac{-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} - \frac{ry - \epsilon^2 zx}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \quad x(t_1) = s \\ \dot{y} = \frac{-\lambda_y}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} + \frac{rx + \epsilon^2 zy}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \quad y(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

Puede notarse que

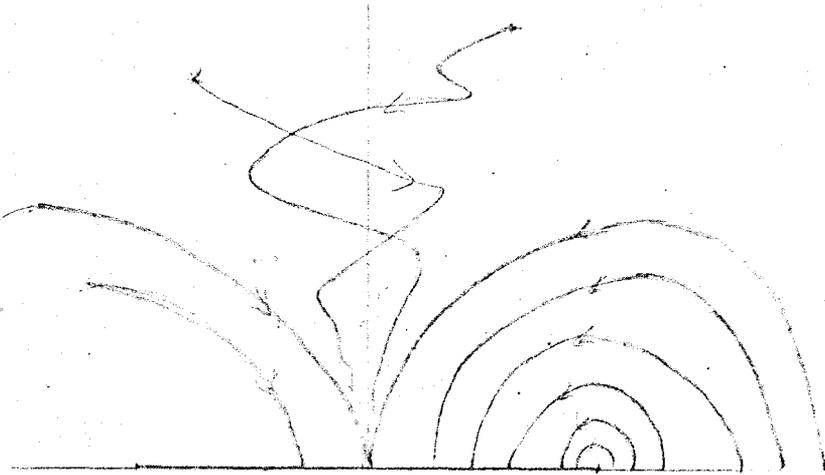
$$r \Big|_{t = t_1} = \frac{s}{1 - |s|},$$

por lo que hay convergencia hacia el campo no perturbado en cualquier abierto que no contenga el origen. Las trayectorias perturbadas inciden también verticalmente en el blanco.

Para $s = 0$, la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = 0 \\ \lambda_y = e^{-\epsilon(t - t_1)} \\ x = 0 \\ y = \frac{1}{\epsilon} \cdot (1 - e^{-\epsilon(t - t_1)}) \end{array} \right.$$

que sería el arco singular construido con la elección $\hat{v} = 0$.



Puede verificarse la Hipótesis 11 y, por tanto, el cumplimiento del Teorema 7.

En los puntos barridos por el campo incidente en el blanco hay convergencia del campo optimal perturbado al no perturbado. En los puntos de la zona interior no hay, evidentemente, convergencia a un campo no perturbado que no está definido, aunque sí hay convergencia del valor del juego perturbado al no perturbado.

EJEMPLO 6.

1. Juego no perturbado.

Se considera el juego definido del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{2} - yv \\ \dot{y} = x + u + 2xv \end{cases} \quad u \in [-1,1] \quad v \in [-1,1]$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $\dot{y} < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil del blanco.

$$\begin{aligned} \min_u \max_v v'F \leq 0 &\Rightarrow \min_u \max_v (x + u + 2xv) = x - 1 + 2|x| \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Se intentan construir barreras naturales sobre $(-1,0)$ y $(\frac{1}{3}, 0)$.

b) Barreras naturales.

La condición

$$\min_u \max_v v'F = 0$$

es en este caso

$$-\frac{yv}{2} + v_x x - |v_y| + |2v_y x - v_x y| = 0,$$

siendo:

$$u^* = -\operatorname{sgn} v_y$$

$$v^* = \operatorname{sgn} (2v_y x - v_x y).$$

El sistema diferencial que define la barrera que se apoya en

$(\frac{1}{3}, 0)$ es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -3v_y \\ \dot{v}_y = \frac{3}{2}v_x \\ \dot{x} = -\frac{3}{2}y \\ \dot{y} = 3x - 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x(t_1) = 0 \\ v_y(t_1) = 1 \\ x(t_1) = \frac{1}{3} \\ y(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

Puede comprobarse que la solución es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = 0. \end{array} \right.$$

No hay barrera natural sobre este punto.

Análogamente se comprueba que la solución del sistema que da la barrera natural que se apoya sobre $(-1,0)$ es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0. \end{array} \right.$$

Tampoco hay barrera natural en este punto.

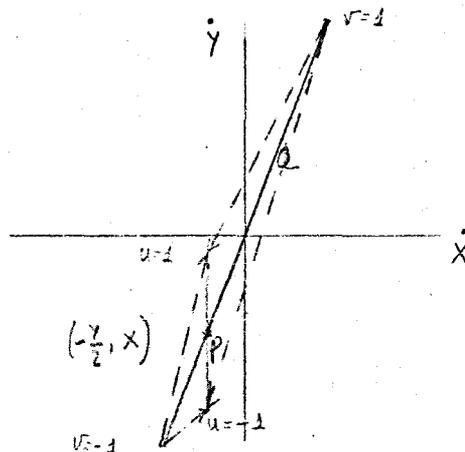
c) Barreras no naturales.

El juego presenta sin embargo otras barreras. Dibujemos el esquema de los dominios de maniobrabilidad F y Q en las proximidades del punto $(-1,0)$. Como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ x + u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ -2x \end{pmatrix} v$$

será:

- a) Si $x < -1$
 $y > 0$,

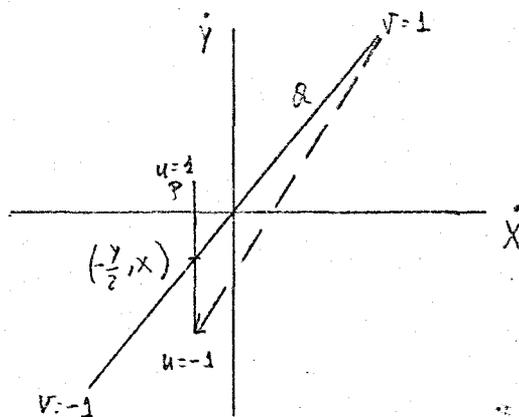


De las cuatro posibles trayectorias semipermeables ninguna consigue que sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \\ \dot{y} &< 0, \end{aligned}$$

condición necesaria para que la barrera se apoye en $(-1,0)$.

- b) Si $x > -1$
 $y > 0$



En este caso se necesita que

$$\begin{aligned} \dot{x} &< 0 \\ \dot{y} &< 0, \end{aligned}$$

y es la trayectoria punteada la que mejor lo consigue. Como se ve corresponde a los mandos

$$\begin{cases} u^* = -1 \\ v^* = 1. \end{cases}$$

Cuando el punto en que se calculan P y Q se aproxima a $(-1,0)$, los dominios tienden a confundirse, se hacen verticales y $(-1,0)$ corresponde al punto en que los extremos inferiores

coinciden. La posición límite de v es por tanto horizontal.

Con esto resulta que las ecuaciones de la barrera son

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = -3v_y \\ \dot{v}_y = \frac{3}{2} \cdot v_x \\ \dot{x} = -\frac{3}{2} \cdot y \\ \dot{y} = 3x - 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_x(t_1) = -1 \\ v_y(t_1) = 0 \\ x(t_1) = -1 \\ y(t_1) = 0. \end{array}$$

Integrando el sistema se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \cos \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \sen \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) \end{array} \right.$$

que es la elipse

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{16}{9},$$

centrada en $(1/3, 0)$ y de semiejes horizontal y vertical $4/3$ y $4\sqrt{2}/3$ respectivamente.

Un análisis análogo se lleva a cabo en el punto $(\frac{1}{3}, 0)$.

Se construye una barrera apoyándose en él, siendo la normal $v = (1, 0)$ y los mandos

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = -1 \\ v^* = -1. \end{array} \right.$$

Integrando el sistema que resulta, se obtiene

$$x = -1 + \frac{4}{3} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1)$$

$$y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1)$$

que es la elipse

$$(x + 1)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{16}{9},$$

centrada en $(-1,0)$ y de semiejes horizontal y vertical $4/3$ y $4\sqrt{2}/3$ respectivamente.

Ambas barreras se cortan en el punto $(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$,

delimitando en su interior una zona donde es posible la captura. en el exterior gana el maximizador.

d) Trayectorias óptimas.

$$H^* = 1 - \frac{1}{2}\lambda_x y + \lambda_y x - |\lambda_y| + |2\lambda_y x - \lambda_x y| = 0,$$

siendo:

$$u^* = -\text{sgn} \lambda_y$$

$$v^* = \text{sgn} (2\lambda_y x - \lambda_x y).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y - 2\lambda_y \cdot \text{sgn} (2\lambda_y x - \lambda_x y) \\ \dot{\lambda}_y = \frac{1}{2}\lambda_x + \lambda_x \cdot \text{sgn} (2\lambda_y x - \lambda_x y) \\ \dot{x} = -\frac{1}{2}y - y \cdot \text{sgn} (2\lambda_y x - \lambda_x y) \\ \dot{y} = x - \text{sgn} \lambda_y + 2x \cdot \text{sgn} (2\lambda_y x - \lambda_x y) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1-s-2} \\ x(t_1) = s \\ y(t_1) = 0 \end{array}$$

Cuando $s > 0$, se tiene

$$u^* = -1 \quad ; \quad v^* = 1$$

y la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = -\frac{\sqrt{2}}{1-3s} \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) \\ \lambda_y = \frac{1}{1-3s} \cdot \operatorname{cos} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) \\ x = \frac{1}{3} + \left(s - \frac{1}{3}\right) \cdot \operatorname{cos} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) \\ y = \sqrt{2} \cdot \left(s - \frac{1}{3}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) \end{array} \right.$$

Puede comprobarse que las trayectorias son arcos de las elipses

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(s - \frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left[\sqrt{2}\left(s - \frac{1}{3}\right)\right]^2} = 1,$$

centradas en $(1/3, 0)$, y semiejes horizontal y vertical $(1/3 - s)$ y $\sqrt{2}(1/3 - s)$ respectivamente. Inciden verticalmente en el blanco.

Calculemos el final de este campo:

$$*) \lambda_y \text{ se anula para } \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$*) -\lambda_x y + 2\lambda_y x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ \frac{1}{1-3s} \cdot \operatorname{cos} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) - 1 \right\},$$

expresión que se anula para

$$\frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) = -\operatorname{arc} \operatorname{cos} (1-3s) > -\frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, el campo se acaba al anularse $2\lambda_y x - \lambda_x y$. La superficie de cambio de mando para v es la obtenida sustituyendo en las ecuaciones del campo

$$\operatorname{cos} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) = 1-3s \quad ; \quad \operatorname{sen} \frac{3}{\sqrt{2}}(t-t_1) = -\sqrt{1-(1-3s)^2}$$

Se trata, pues, de la curva

$$\begin{cases} x^*(s) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot (1 - 3s)^2 \\ y^*(s) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (1 - 3s) \cdot \sqrt{1 - (1 - 3s)^2}, \end{cases}$$

sobre la que

$$\begin{cases} \lambda_x^*(s) = \frac{\sqrt{2 \cdot (1 - (1 - 3s)^2)}}{1 - 3s} \\ \lambda_y^*(s) = 1. \end{cases}$$

La curva es la elipse

$$\frac{(x - \frac{1}{6})^2}{(1/6)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}/6)^2} = 1,$$

centrada en $(1/6, 0)$ y de semiejes horizontal y vertical $1/6$ y $\sqrt{2}/6$ respectivamente.

Esta superficie es superficie final para un nuevo campo de trayectorias que se construye tomando

$$u^* = -1 \quad ; \quad v^* = -1$$

y las condiciones finales $\lambda_x^*(s)$, $\lambda_y^*(s)$, $x^*(s)$, $y^*(s)$. Las trayectorias de este campo son las curvas

$$\begin{cases} x = -1 + (1 + x^*(s)) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) + \frac{y^*(s)}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ y = -\sqrt{2} \cdot (1 + x^*(s)) \cdot \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) + y^*(s) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1). \end{cases}$$

Puede comprobarse que se trata de los arcos de las elipses

$$(x + 1)^2 + \frac{y^2}{2} = (1 + x^*(s))^2 + \frac{y^*(s)^2}{2}$$

centradas en $(-1,0)$.

Puede calcularse el valor del juego desde unas condiciones iniciales (x_0, y_0) . En efecto, de ser

$$(x_0 + 1)^2 + \frac{y_0^2}{2} = (1 + x^*(s))^2 + \frac{y^*(s)^2}{2},$$

sigue, sustituyendo estas expresiones que

$$(1 - 3s)^2 = \frac{16}{7} - \frac{9}{7} \cdot (1 + x_0)^2 - \frac{9}{14} \cdot y_0^2.$$

De donde:

$$x^*(s) = -\frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot (1 + x_0)^2 + \frac{3}{14} \cdot y_0^2$$

$$y^*(s) = \sqrt{2(1 + x_0)^2 + y_0^2 - 2\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}(1 + x_0)^2 + \frac{3}{14}y_0^2\right)^2}$$

El tiempo que tarda el estado en llegar desde (x_0, y_0) hasta $(x^*(s), y^*(s))$ puede hallarse resolviendo

$$\begin{cases} (1 + x^*(s)) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) + \frac{y^*(s)}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) = x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{y^*(s)}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) - (1 + x^*(s)) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) = \frac{y_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$\cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) = \frac{(1 + x^*(s)) \cdot (1 + x_0) + \frac{1}{2} \cdot y^*(s) \cdot y_0}{(1 + x_0)^2 + \frac{y_0^2}{2}}$$

Y es también sabido el tiempo que se tarda en llegar desde

$(x^*(s), y^*(s))$ al blanco

$$\cos \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) = 1 - 3s.$$

De modo que se obtiene

$$J_1 = \sqrt{2} \cdot \arccos \frac{(1 + x^*(s)) \cdot (1 + x_0) + \frac{1}{2} \cdot y^*(s) \cdot y_0}{(1 + x_0)^2 + \frac{y_0^2}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \arccos \sqrt{\frac{16}{7} - \frac{9}{7} \cdot (1 + x_0)^2 - \frac{9}{14} \cdot y_0^2}$$

Un estudio análogo al realizado anteriormente permite determinar el final de este campo de trayectorias. Terminaría en una superficie de cambio de mando para el segundo jugador, que sería la elipse

$$\frac{(x + \frac{7}{6})^2}{(\frac{7}{6})^2} + \frac{y^2}{(\frac{7\sqrt{2}}{6})^2} = 1,$$

centrada en $(-7/6, 0)$ y de semiejes $7/6$ y $7\sqrt{2}/6$.

Cuando $s < 0$,

$$u^* = -1 ; \quad v^* = -1,$$

y las soluciones del sistema son

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{\sqrt{2}}{s+1} \cdot \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ \lambda_y = \frac{1}{s+1} \cdot \text{cos} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ x = -1 + (s+1) \cdot \text{cos} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ y = -\sqrt{2} \cdot (s+1) \cdot \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) \end{array} \right.$$

Puede comprobarse que se trata de las elipses

$$\frac{(x + 1)^2}{(s + 1)^2} + \frac{y^2}{[\sqrt{2}(s + 1)]^2} = 1,$$

centradas en $(-1,0)$ y de semiejes $1 + s$ y $\sqrt{2}(1 + s)$. Inciden verticalmente en el blanco.

Este campo se acaba al anularse $2\lambda_y x - \lambda_x y$. La superficie de cambio de mando para el segundo jugador es la obtenida sustituyendo en las ecuaciones del campo

$$\cos \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) = 1 + s \quad ; \quad \text{sen} \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_1) = -\sqrt{1 - (1 + s)^2}$$

Se trata de la curva:

$$\begin{cases} x^{**}(s) = -1 + (1 + s)^2 \\ y^{**}(s) = \sqrt{2 \cdot (1 - (1 + s)^2)} \cdot (1 + s), \end{cases}$$

que es la elipse

$$\frac{(x + \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1,$$

centrada en $(-1/2,0)$ y de semiejes $1/2$ y $\sqrt{2}/2$. Sobre dicha elipse se tiene que

$$\begin{cases} \lambda_x^{**}(s) = \frac{\sqrt{2 \cdot (1 - (1 + s)^2)}}{1 + s} \\ \lambda_y^{**}(s) = 1. \end{cases}$$

Esta superficie es superficie final de un nuevo campo de trayectorias que se construye tomando

$$u^* = -1 \quad ; \quad v^* = 1$$

y las condiciones finales $\lambda_x^{**}(s)$, $\lambda_y^{**}(s)$, $x^{**}(s)$, $y^{**}(s)$. Las trayectorias son las curvas

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{3} + (x^{**}(s) - \frac{1}{3}) \cdot \cos \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) - \\ &\quad - \frac{y^{**}(s)}{2} \cdot \text{sen} \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) \\ y &= y^{**}(s) \cdot \cos \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) + 2 \cdot (x^{**}(s) - \frac{1}{3}) \cdot \text{sen} \frac{3}{\sqrt{2}}(t - t_1) \end{aligned} \right.$$

es decir, arcos de las elipses

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \left(x^{**}(s) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{y^{**}(s)^2}{2},$$

centradas en $(1/3, 0)$.

Siguiendo la pauta explicada anteriormente puede obtenerse el valor del juego desde unas condiciones iniciales (x_0, y_0) . Se determina que

$$J_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \text{arc cos} \frac{\left(x^{**}(s) - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x_0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot y^{**}(s) \cdot y_0}{\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot y_0^2} + \sqrt{2} \cdot \text{arc cos} \sqrt{\frac{16}{15} - \frac{3}{5} \cdot \left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{10} \cdot y_0^2}$$

siendo:

$$x^{**}(s) = \frac{1}{15} - \frac{3}{5} \cdot \left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{10} \cdot y_0^2$$

$$y^{**}(s) = \sqrt{2 \left(x_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + y_0^2 - 2 \left(\frac{4}{15} + \frac{3}{5} \left(x_0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{10} y_0^2\right)}$$

Este campo de trayectorias acabaría en una nueva superficie de cambio de mando para el segundo jugador, que es la elipse

$$\frac{\left(x - \frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)^2} = 1,$$

centrada en $(5/6, 0)$ y de semiejes $5/6$ y $5\sqrt{2}/6$.

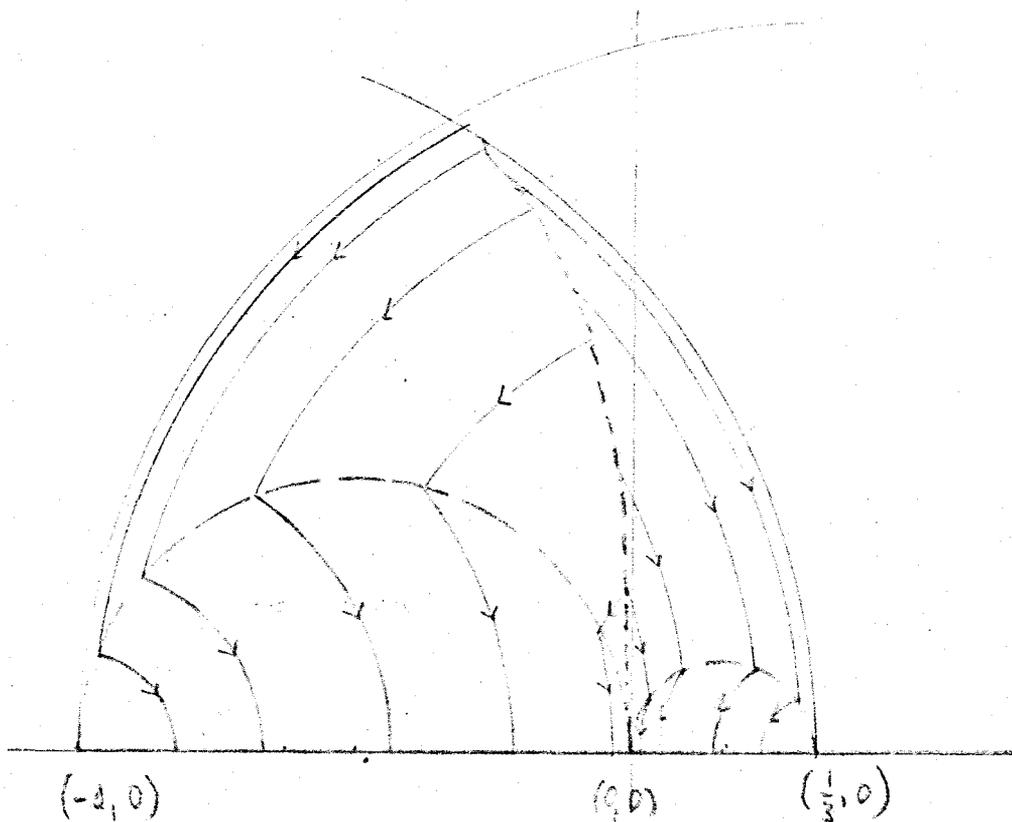
En la zona donde intersecan ambos campos aparece una línea de dispersión de ecuación implícita

$$J_1 = J_2,$$

que separa la zona donde el segundo jugador escoge $v^* = 1$ de la zona donde elige $v^* = -1$. Naturalmente, opta por el mando con el que tarda más en llegar al blanco.

La línea de dispersión corta al blanco en $s = 0$, donde no incide ninguna trayectoria optimal. Corta además a la barrera de la derecha en un punto de ordenada $\simeq 1.5732$; no pasa, pues, por el punto de intersección de las barreras.

Todas las elipses anteriores tienen excentricidad $\sqrt{2}$, por lo que pueden dibujarse como circunferencias haciendo un cambio de escala en el eje vertical. Se obtiene así el siguiente esquema del campo optimal de trayectorias



2. Juego perturbado.

Perturbamos el anterior juego transformándolo en el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{2} - y \cdot \cos v - 2 \cdot \epsilon \cdot x \cdot \sin v & u \in [-1, 1] \\ \dot{y} = x + u + 2 \cdot x \cdot \cos v - \epsilon \cdot y \cdot \sin v & v \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Espacio de juego: $y \geq 0$

Blanco: $y < 0$

Criterio: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt$

a) Parte útil.

$$\min_u \max_v v' F_\epsilon \leq 0 \Rightarrow \min_u \max_v (x + u + 2.x.\cos v - \epsilon.y.\sen v) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Se intentan construir barreras naturales sobre los bordes de la parte útil.

b) Barrera natural.

La condición

$$\min_u \max_v v' F_\epsilon = 0$$

es en este caso

$$-\frac{yv_x}{2} + v_y x - |v_y| + \sqrt{(2v_y x - v_x y)^2 + (2v_x x + v_y y)^2} = 0,$$

siendo:

$$u^* = -\operatorname{sgn} v_y$$

$$\cos v^* = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}}; \quad \sen v^* = \frac{-\epsilon q}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}},$$

con

$$p = 2v_y x - v_x y$$

$$q = 2v_x x + v_y y.$$

El sistema diferencial que define la barrera que se apoya en

$(\frac{1}{3}, 0)$ es:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -v_y - \frac{2pv_y + 2\epsilon^2 qv_x}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}} & v_x(t_1) = 0 \\ \dot{v}_y = \frac{v_x}{2} - \frac{-v_x p + \epsilon^2 qv_y}{\sqrt{p^2 + \epsilon^2 q^2}} & v_y(t_1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{2} - \frac{py - 2\varepsilon^2 qx}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} \\ \dot{y} = x - 1 + \frac{2px + \varepsilon^2 qy}{\sqrt{p^2 + \varepsilon^2 q^2}} \end{cases} \quad \begin{aligned} x(t_1) &= \frac{1}{3} \\ y(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

que tiende a la barrera no perturbada por el teorema de la dependencia de las soluciones. El siguiente razonamiento muestra la existencia de barreras no naturales.

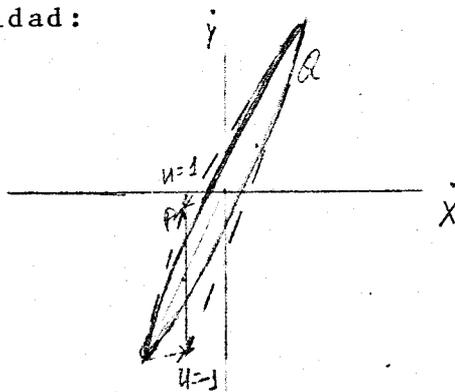
c) Barreras no naturales.

Un análisis análogo al realizado en el caso del juego no perturbado evidencia la existencia de barreras no naturales en los juegos perturbados. Como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ x + u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \cdot \cos v + 2 \cdot \varepsilon \cdot x \cdot \sin v \\ -2 \cdot x \cdot \cos v + \varepsilon \cdot y \cdot \sin v \end{pmatrix}$$

en las proximidades de $(-1, 0)$ se tendrá el siguiente esquema de los dominios de maniobrabilidad:

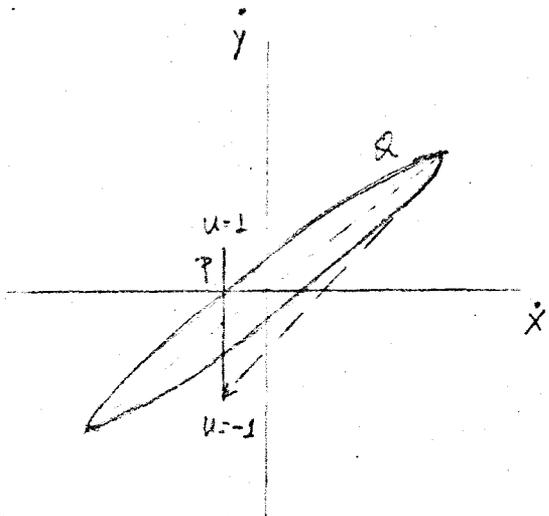
- a) Si $x < -1$
- $y > 0,$



Ninguna de las cuatro posibles trayectorias semipermeables consigue la doble condición

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \\ \dot{y} &< 0. \end{aligned}$$

b) Si $x > -1$
 $y > 0,$



Hemos punteado la trayectoria semipermeable que mejor consigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &< 0 \\ \dot{y} &< 0. \end{aligned}$$

Los valores de los mandos sobre ella son

$$u^* = -1$$

y un valor de v^* de cálculo laborioso que vamos a describir.

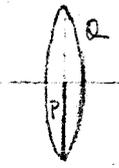
Se trata del valor de v^* correspondiente al punto de tangencia de la elipse

$$\begin{cases} \dot{x} = y \cdot \cos v + 2 \cdot \epsilon \cdot x \cdot \sin v \\ \dot{y} = -2 \cdot x \cdot \cos v + \epsilon \cdot y \cdot \sin v \end{cases}$$

con la tangente a ella trazada por el punto $(-\frac{y}{2}, x-1)$.

Cuando el punto en que se calculan P y Q es $(-1,0)$,

los dominios adoptan la posición de la figura, y los dos extremos del vector trayectoria se confunden. En los instantes anteriores el vector es casi vertical; por continuidad, pues, v es horizontal como en el juego no perturbado.



Puede comprobarse además que

$$\cos v^* \rightarrow -1, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

por lo que las barreras tienden a las correspondientes barreras no perturbadas.

c) Trayectorias optimales.

Llamando

$$r = 2\lambda_y x - \lambda_x y$$

$$z = 2\lambda_x x + \lambda_y y,$$

se tiene que

$$H^* = 1 - \frac{1}{2}\lambda_x y + \lambda_y x - |\lambda_y| + \sqrt{p^2 + \epsilon^2 z^2} = 0,$$

siendo:

$$u^* = -\operatorname{sgn} \lambda_y$$

$$\cos v^* = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}}; \quad \operatorname{sen} v^* = \frac{-\epsilon z}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = -\lambda_y - \frac{2r\lambda_y + 2\epsilon^2 z\lambda_x}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \\ \dot{\lambda}_y = \frac{\lambda_x}{2} - \frac{-r\lambda_x + \epsilon^2 z\lambda_y}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \\ \dot{x} = -\frac{y}{2} - \frac{ry - 2\epsilon^2 zx}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \\ \dot{y} = x - 1 + \frac{2rx + \epsilon^2 zy}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2 z^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_x(t_1) = 0 \\ \lambda_y(t_1) = \frac{1}{1 - s - 2|s|} \\ x(t_1) = s \\ y(t_1) = 0 \end{array}$$

Se tiene que para $t = t_1$,

$$r = \frac{2s}{1 - s - 2|s|}.$$

Esta expresión es no nula si $s \neq 0$; por tanto, las trayectorias perturbadas incidentes en puntos del blanco distintos del origen

convergen a las correspondientes trayectorias no perturbadas.

Por su parte, pude comprobarse que con las notaciones del Teorema 2,

$$\hat{G}(s) = 0$$

de modo que no se puede garantizar la convergencia de la trayectoria incidente en $s = 0$. De hecho ya se sabía que no hay trayectoria optimal no perturbada en $s = 0$.

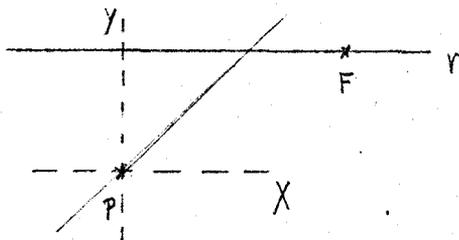
Las trayectorias inciden en el blanco con pendiente vertical y no hay capa límite.

ANEXO

Incorporamos como anexo distintos modelos físicos cuyas dinámicas corresponden a algunos de los ejemplos que hemos desarrollado. La interpretación de los resultados obtenidos en el sistema de referencia utilizado indica como se realiza el movimiento en cada caso.

1. Ejemplo 1.

Supongamos un juego de persecución en el plano. El fugitivo, F, huye en una cierta dirección y puede controlar el módulo de su velocidad sobre ella hasta un valor máximo 1 y el sentido de la misma. El perseguidor, P, corre en otra dirección que forma con la anterior un ángulo de 45° , y puede variar el módulo de su velocidad sobre ella hasta un valor máximo igual a $\sqrt{2}$ por la distancia de P a la recta por la que corre F y el sentido de la misma velocidad. El juego acaba cuando la distancia de P a la recta por la que huye F es menor que 1.



Con un sistema de referencia ligado a P que tenga el eje OX en la dirección de la recta por la que se mueve F y la parte positiva del eje OY cortando a dicha recta, y designando

(x, y) las coordenadas de F, será la velocidad de F $(0, v)$, mientras que el sistema de referencia se mueve paralelamente a sí mismo con una velocidad $(-y_u, -y_u)$. Por tanto, será:

$$\begin{cases} \dot{x} = y_u + v \\ \dot{y} = y_u \end{cases} .$$

En el juego perturbado, F se mueve en el plano y elige instantáneamente su velocidad. La componente de la misma en la dirección de la recta anterior tiene un módulo comprendido entre 0 y 1, que se tomará como $\cos v$; la componente en la dirección normal será $\xi \cdot \sin v$. P sigue en las mismas condiciones y el juego se acaba como en el caso anterior.

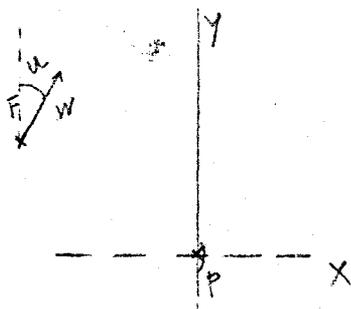
2. Ejemplo 2.

Se considera un juego de persecución en el plano. Entre dos jugadores P y F.

El perseguidor, P, se mueve en una recta, r, con una velocidad de módulo máximo b que puede controlar instantáneamente en módulo y sentido. P puede ver en la dirección normal a r hacia uno de sus lados.

El fugitivo, F, se mueve por todo el plano. Controla la dirección de su velocidad de módulo constante w ($b > w$) y se ve arrastrado en la dirección normal a r hacia el lado por el que ve P. El módulo de esta velocidad de arrastre es una unidad mayor que la distancia entre P y la proyección de F sobre r.

El juego acaba cuando F está en el punto de mira de P.



Se toma un sistema de referencia ligado a P, con el eje OY en la dirección de r y el sentido positivo del eje OX el de la visual; el semiplano $y > 0$ es aquél en que se encuentra F.

Sean (x, y) las coordenadas de F. La velocidad de F será $(y + 1 + w \cdot \sin u, w \cdot \cos u)$ mientras que la

del sistema de referencia moviéndose paralelamente a sí mismo será $(0, bv)$. Con respecto a este sistema, la dinámica es

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 + w \cdot \text{sen } u \\ \dot{y} = w \cdot \text{cos } u - bv \end{cases}$$

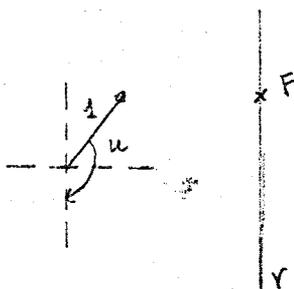
En el juego perturbado, P se mueve en el plano y elige su velocidad en cada instante. La componente de la misma en la dirección de la recta anterior tiene un módulo comprendido entre 0 y b, longitud que se tomará como $b \cdot \text{cos } v$; en la dirección normal y sentido opuesto al de la visual, la componente es $\{b \cdot \text{sen } v$

3. Ejemplo 3.

Se considera un juego de persecución en el plano entre dos jugadores P y F. P se mueve por todo el plano con una velocidad de módulo 1 cuya dirección controla instantáneamente. F se mueve en una recta controlando en cada instante el sentido de su velocidad y su módulo, con un valor máximo igual a la distancia de P a la recta sobre la que se mueve F.

El juego se acaba cuando F es la proyección ortogonal de P sobre r.

Se toma un sistema de referencia ligado a P, con el eje OY en la dirección de r y como semiplano $y > 0$ aquél en que se encuentra F. Si se toman (x, y) las coordenadas de F, su velocidad será $(0, xv)$. A su vez, el sistema de referencia se mueve paralelamente a sí mismo con una velocidad $(- \text{sen } u, - \text{cos } u)$.



Con respecto a este sistema, la dinámica es

la rotación de \bar{x} alrededor de C en la dirección opuesta con la misma velocidad angular. Así \bar{x} se mueve con una velocidad

$$\frac{V \cdot u \cdot d}{R}$$

en dirección perpendicular a CF. Las componentes de la velocidad se obtienen multiplicando la velocidad por el vector unitario en la dirección deseada, que es

$$\left(-\frac{y}{d}, \frac{x - R/u}{d}\right).$$

Así, las ecuaciones de la dinámica son

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{V}{R}yu + w \cdot \text{sen } v \\ \dot{y} = \frac{V}{R}xu - V + w \cdot \text{cos } v. \end{cases}$$

El caso que hemos desarrollado ha sido para $V = R$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAMATIC J. F. "Un jeu différentiel avec une contrainte d'état".
Thèse d'ingénieur docteur. Paris-Sud. 1975
- [2] APOSTOL T. M. "Análisis Matemático".
Reverté. 1960
- [3] BERNHARD P. "New results about corners in differential games, including state constraints".
6 IFAC. World Congress. Boston 1976
- [4] BERNHARD P. "Commande optimale, décentralisation, jeux dynamiques"
Dunod Automatique. 1976
- [5] BERNHARD P. "Contribution a l'étude des jeux différentiels a deux joueurs, somme nulle et information parfaite".
Thèse d'Etat. Paris VI. 1979
- [6] BERNHARD P. "Principe d'optimalité et information nécessaire pour la conception dans le cas le plus défavorable".
Cahier Céremade 7923. 1979
- [7] BREAKWELL J. V. "Zero-sum differential games with terminal payoff", en
Springer Lecture Notes on Information and Control Sciences. vol 3. 1977

- [8] BREAKWELL J. V. "Sufficient conditions in zero-sum differential games".
- [9] BREAKWELL J. V. No publicado.
- [10] BREAKWELL J. V. y MERZ A. W.
"Toward a complete solution of the homicidal chauffeur game".
First International Conference on Theory and Applications of Differential Games. Amherst. 1969
- [11] COLLETER P. "Un jeu de gardiennage a instant final fixé"
Thèse d'ingénieur docteur. Paris-Dauphine. 1976
- [12] CONTI R. y SANSONE G.
"Equazioni differenziali non lineari"
Cremonese. 1956.
- [13] COUCE J. y DELGADO M.
"Perturbaciones singulares en un juego diferencial", en
Actas IV CEDYA. 1981
- [14] COURANT R. y HILBERT D.
"Methods of Mathematical Physics".
Interscience. 1962
- [15] DANSKIN J. M. "The theory of max-min".
Springer Verlag. 1967
- [16] GARCIA A. "Surfaces singulieres dans une classe de jeux différentiels".
Thèse 3^{me} Cycle. Paris IX. 1981

- [17] ISAACS R. "Differential games".
John Wiley. 1964
- [18] ISAACS R. "Some fundamental of differential games"
Topics in Differential Games. Ed. A.
Blaquière. North Holland. 1973
- [19] KELLEY H. J., KOPP R. E. y MOYER H. G.
"Singular Extremals", en
Topics in Optimization. Academic Press. 1973
- [20] MASLE J. F. "Problemes quantitatif et qualitatif
lies en jeux différentiels".
Thèse d'ingénieur docteur. Paris IX. 1976
- [21] PO-LUNG YU "Transition surfaces of a class of
differential games".
First International Conference on
Theory and Applications of Differential
Games. Amherst. 1969

INDICE

	Introducción	I
Cap. I.	Generalidades	1
Cap. II.	Perturbación del juego. Convergencia de los campos optimales	6
Cap. III.	Convergencia de mandos en bucle cerrado	25
Cap. IV.	Superficies de discontinuidad del valor y su gradiente. Repaso	32
Cap. V.	Perturbación de la barrera natural ..	40
Cap. VI.	Perturbación de las curvas de cambio de mando	46
Cap. VII.	Perturbación de las uniones	48
Cap. VIII.	Perturbación de las superficies universales	61
	Ejemplo 1	71
	Ejemplo 2	75
	Ejemplo 3	91
	Ejemplo 4	100
	Ejemplo 5	111
	Ejemplo 6	120
	Anexo	138
	Bibliografía	143

UNIVERSIDAD

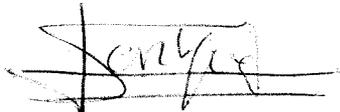
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Manuel Delgado Delgado titulada "Sobre las perturbaciones de las superficies regulares de ciertos juegos diferenciales"

acordó otorgarle la calificación de APTO cum laude por unanimidad

Sevilla, 4 de Noviembre

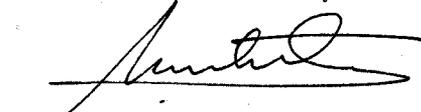
El Vocal,



El Presidente.

A. de Castro

El Vocal,



El Secretario,

J. Gal

1986

El Vocal,



El Doctorado,

Manuel Delgado