

R. 23450

L35 1127254

043  
247

BCA.

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tesis Doctoral de Miguel Sánchez López  
presentada en la Facultad de Ciencias  
de la Universidad de Sevilla y dirigida  
por el Ilmo Sr D. Antonio Castro Brczezicki.

*[Handwritten signature]*

Vº Bº

Autº de Castro

UNIVERSIDAD DE SEVILLA	
SECRETARIA CIENCIAS	
11. Dicbre 73	
ENTRADA N.º	JM

Sevilla, a 8 de Noviembre de 1.973

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TESIS DOCTORAL

Sevilla, 1.973

## INDICE

### Antecedentes obligados

1. Problema de Cauchy
2. Metodos de pasos multiples.
3. Ecuaciones en diferencias finitas.
4. Esquemas explicitos e implicitos.
5. Convergencia.
6. Orden de un esquema.
7. Consistencia.
8. Estabilidad.
9. Consecuencias.
10. Error local de truncamiento.
11. Cotas del error local de truncamiento.
12. Error global de truncamiento.
13. Debil estabilidad.
14. Estabilidad absoluta.
15. Estabilidad relativa.
16. Metodos predictores-correctores (P.C.)
17. Descripcion de los P.C.
18. Error local de truncamiento. metodo de Milne.

### PRIMERA PARTE

#### Otencion formulas fundamentales

- A. Formulas tipo Euler.
- B. Formulas tipo Taylor.
- C. Cotas de la integral de  $y' = f(x,y)$ .
- D. Analisis del metodo.
  1. Analogias.
  2. Operador
  3. Orden del metodo.
  4. Debil estabilidad.
  5. Ventajas.

6. Inconvenientes.

E. Derivaciones sucesivas

1. Notacion  $F(1,M,N)$

2. Formula general.

3. Detalles de la programacion.

4. Diagramas de flujo.

5. Programa Fortran.

F. Resolucion de las ecuaciones claves.

i. Ecuaciones lineales.

ii. Ecuaciones no-lineales.

G. Realizacion practica.

a. Ecuaciones lineales.

b. Caso general: ecuaciones no-lineales.

c. Diagrama de flujo del metodo de Runge-Kutta.

H. Acotacion del parametro

metodo general.

I. Acotacion unilateral del parametro

i. Metodo de tanteos y ensayos previos.

a. Campo de tangetes  $T$ .

b. Campo de tangentes  $T_y$

c. Angulos de las tangentes  $T$  y  $T_y$ .

d. Calculo de  $y_1$ .

ii. Metodo de la ecuacion diferencial.

SEGUNDA PARTE: Prolongacion de soluciones.

1. Enunciado de la cuestion.

2. Aproximacion por el algoritmo super ( $\bar{y}$ )

3. Aproximacion por el algoritmo sub ( $\underline{y}$ )

4. Aproximacion conjunta: sup y sub.

b. Prolongacion irregular de soluciones

c. Estudio del error.

1º Error global de truncamiento.

2º caso.

d. Formulas de pasos multiples.

- e. Algoritmo del diente de sierra.
- f. Formulas de los errores.
- 2. Investigacion del signo de los  $e_i$ .
- 3. Error global de  $y_{n+2}$

TERCERA PARTE : Resultados numericos.

1. Soluciones iniciales.

- Ejemplo nº 1.  $y' = y - (2x/y)$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Cellatz
- Ejemplo nº 2.  $y' = x + y$   $y(0) = 0$   $h = 0.1$  Collatz
- Ejemplo nº 3.  $y' = -y$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Hamming, Ralston, etc
- Ejemplo nº 4.  $y' = y - 1.5 e^{-0.5x}$   $y(0.4) = 0.818730753$   $h = 0.1$   
Kuntzmann.
- Ejemplo nº 5.  $y' = y + x^2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Levy and Baggot.
- Ejemplo nº 6.  $y' = yx^2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  McCalla.
- Ejemplo nº 7.  $y' = y - (y/x)$   $y(2) = 2$   $h = 0.2$  Levy and Baggot
- Ejemplo nº 8.  $y' = -16xy$   $y(-0.15) = 0.0022159242$   $h = 0.03125$  Henrici.
- Ejemplo nº 9.  $y' = -2xy^2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Kuntzmann.
- Ejemplo nº 10.  $y' = x^2 + y^2$   $y(0) = 0$   $h = 0.1$  Mikhlin.
- Ejemplo nº 11.  $y' = y^2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Moore.
- Ejemplo nº 12.  $y' = xy(y-2)$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  H.T. Davis.
- Ejemplo nº 13.  $y' = -y - y^2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Bellman.
- Ejemplo nº 14.  $y' = e^{\log(x-y)}$   $y(0) = 0.1$   $h = 0.01$  Lambert
- Ejemplo nº 15.  $y' = 4xy^{1/2}$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$  Lambert
- Ejemplo nº 16.  $y' = x^2 - y^2$   $y(-1) = 0$   $h = 0.1$  Milne
- Ejemplo nº 17.  $y' = 1 - y^2$   $y(0) = 0$   $h = 0.125$  Lapidus and Seinfeld

2. Prolongacion de soluciones.

BIBLIOGRAFIA

## SOBRE LA RESOLUCION NUMERICA DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### Preambulo

No pretendemos ni con mucho, dada la enorme abundancia de temas sobre la materia, dar una exposicion detallada - como es costumbre - sobre el origen y presentacion de las EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias), asi como de los métodos de resolucion de las mismas.

La simple lectura de la bibliografia específica, bastaria para confirmar tal imposibilidad. Por otra parte, es un hecho conocido, que han sido las exigencias de la Técnica, al encontrarse como punto final de sus problemas con una ecuacion diferencial, las que han motivado la creacion y desarrollo del calculo numérico actual.

Tenemos, pues, en las EDO, una rama relativamente moderna de las matemáticas, que nace por obra y arte de Newton y Leibnitz; con la familia bernoulli y Euler, alcanza su mayoria de edad, y es plenamente justificada con la llamada aritmetizacion del Análisis, empresa reservada al s. XIX y llevada a cabo por Cauchy, Abel, Jacobi, Weierstrass, etc.

Comprobada, en lo que respecta a las EDO, la imposibilidad de encontrar siempre una solución de las llamadas exactas, y siendo exigencia inaplazable de la Técnica, su cálculo aproximado, aparece el cálculo numerico de las mismas; en un principio timidamente, con no poco recelo por parte de los matemáticos puros, y sin mas auxilio que algunas tablas y calculadores electro-mecanicas, adobadas con un estudio ad hoc, de la teoria de errores.

Bien pronto, adquiere su madurez, gracias a la ayuda suministrada por el calculo de diferencias finitas y operadores similares, sobresaliendo las obras de Whittaker-Robinson, Milne-Thomsen, Jordan, Hildebrand, etc y los llamados métodos de Milne-Moulton y Basfnort-Adams.

Con la aparicion o por lo menos, con la facilidad de acceso a las computadoras electrónicas, hecho que tiene lugar a partir de la segunda mitad de este siglo, se inicia una segunda epoca en los métodos del calculo numerico.

Con estos instrumentos, bautizados por Simmons, como tontos que dan mas de lo que tienen, se modifica totalmente las formas de ataque a las EDO.

Ya no es obstaculo, el gran numero de operaciones aritmeticas por realizar, ni en general, el numero de cifras de los operandos. Aparecen y estan especialmente indicados, los algoritmos iterativos, y pierden puntos por tanto, las famosas diferencias finitas, tan tratadas hasta entonces, asi como los métodos de relajacion, cuya vida efimera, hay que explicarla en el caracter personal de tales metodos, que los hacen dificilmente programables.

Por su facil programacion, sigue siendo el Runge-Kutta con sus distintas variantes, el metodo de mas aceptacion, tanto para la obtencion de valores iniciales como para la continuacion de los mismos.

Finalmente, toman auge los algoritmos de uno y varios pasos, de tipo lineal, de la forma

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad j=0, 1, \dots, k \quad x_n = a + nh$$

$$f_n \equiv f(x_n, y_n)$$

y dentro de estos, los del tipo predictor-corrector: Milne-Moulton, Hamming,Ralston, Wilf, etc, dirigiendose los esfuerzos actuales, al estudio de los diversos tipos de error: truncamiento (local y global), redondeo, destacandose especialmente los trabajos de Collatz, Henrici, Wilkinson, etc, y en particular los problemas suscitados por el concepto de estabilidad.

Con este preámbulo, a vuelo de pájaro, veamos ahora el objeto de este trabajo.

Como se sabe, para la resolucion de una EDO, con un solo paso, existen tres metodos fundamentales: desarrollo en serie de Taylor; aproximaciones sucesivas de Picard y el Runge-Kutta; aparte, los pocos susceptibles de programacion, como el Kaplighin, Newton-Kantorovich, etc.

Todos ellos, buscan la aproximacion a la solucion exacta, unilateralmente y linealmente en h, lo que obliga a pagar por la presunta facilidad suministrada por la linealidad susodicha, una fuerte prenda a cargo de la complicacion encontrada en las formulas de los distintos errores.

En consecuencia, tras unos antecedentes obligados, en los que hacemos una rápida panorámica de los conceptos y métodos predictores-correctores, hoy mas en boga, pasamos a la primera parte, en la que propugnamos un algoritmo original, que no es lineal en  $h$ , ni se aproxima unilateralmente a la solución exacta, sino que proporciona dos valores:  $\bar{y}$  (super),  $\underline{y}$  (sub), tales que acotan al valor exacto.

De esta manera, huelgan las complicaciones inherentes a la acotación de errores, según los métodos clásicos; vease, por ejemplo a dicho efecto, la fórmula (21) de Henrici, del error global de truncamiento

$$|e_n| \leq \Gamma^* [A \delta k + (X_n - a)(K, h^q + G Y h^r)] \exp[(X_n - a) L \Gamma^* B]$$

en la que aparte de su complicado cálculo, se tropieza con la determinación de numerosas constantes.

En el apartado D, hacemos un análisis del método, comprobando cumple las condiciones exigibles, en cuanto a consistencia, estabilidad y convergencia.

Por otra parte, como la determinación de los super y subvalores, resulta de la resolución de dos ecuaciones algebraicas, en general complicadas se hace imprescindible el uso de un ordenador.

La resolución práctica de estas ecuaciones, así como los distintos diagramas de flujo utilizados, aparecen en las secciones F y G, plasmandose todo ello, en la Subrutina EDO.

También es conocido el hecho, de que el defecto principal de los desarrollos Taylorianos - y nuestro algoritmo es consecuencia de la fórmula de Euler-MacLaurin - es la aparatosa complejidad de las derivadas sucesivas, en cuanto el orden de las mismas se eleva un poco, llegando a hacerse enseguida impracticable.

Para compensar este inconveniente, en E hemos desarrollado, una rutina original, denominada DERIVA, capaz de proporcionar las derivadas sucesivas de

$$y' = f(x, y)$$

sin mas entrada, que las derivadas parciales:



$$f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}, \dots$$

evidentemente mucho mas faciles de calcular que las derivadas totales:  $y', y''$ , ..

La correccion de dicha rutina DERIVA, queda comprobada con la ejecucion de un sencillo ejemplo.

En H, tratamos de acotar mas finamente el valor exacto; para ello en lugar de los valores iniciales de cero y uno, tomados por el parametro  $\theta$ , conseguimos otros dos mas proximos entre si, que acotan mas estrechamente a la solucion exacta. Tambien hemos programado una rutina TETSI, encargada de ello.

En la segunda parte, se procede a la inmediata prolongacion de soluciones, mediante la reiteracion de este algoritmo, que podemos llamar de error máximo. Al mismo tiempo damos cuenta del comportamiento irregular de algunas ecuaciones y de su correccion, junto con un estudio exhaustivo de las situaciones que pueden presentarse en la formulacion de los errores.

En el apartado 5, señalamos otro algoritmo, incluido en la categoria de los multipasos, que puede diversificarse de infinitas maneras; en nuestro caso, hemos elegido la mas sencilla, que llamamos diente de sierra, debido a que los puntos soluciones  $\tilde{y}$  e  $\underline{y}$ , describen un perfil ondulante, que periodicamente mejora la aproximacion a la solucion exacta.

En resumen, presentamos como resultado final, tres rutinas: EDO, TETSI y DERIVA, que enmarcadas en un programa principal, proporcionan una solucion aproximada del problema en cuestion, tanto en lo referente a la obtencion de valores iniciales, para prolongarse con otros metodos, como a la prolongacion con el mismo.

Como aplicacion de estos distintos algoritmos, en la parte tercera hemos seleccionado algunos ejemplos - diecisiete en total - tomados de los autores mas conocidos, resueltos algunos con todo detalle, por este metodo, asi como por el Runge-Kutta, y en los que como puede comprobarse la mejoria es evidente. Sirvan de muestra, los siguientes:

$$y' = y - (2x/y) \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1 \quad \text{Solucion exacta: } y = \sqrt{1+2x}$$

$$\tilde{y}(0.1) = 1.095\ 445\ 638 \quad \underline{y}(0.1) = 1.095\ 444\ 773$$

$$\text{media aritmetica: } \tilde{\tilde{y}}(0.1) = 1.095\ 445\ 205 \quad |e| < 4.32 (10^{-7})$$

$$\text{Valor exacto: } y_e(0.1) = 1.095\ 445\ 115$$

$$\text{Runge-Kutta: } y_{RK}(0.1) = 1.095\ 445\ 531$$

$$|e| < 1.4 (10^{-5}) \quad \text{Lotkin}$$

Utilizando la rutina TETSI, esto es acotando el parametro  $\theta$ , resulta:

$$\bar{y}(0.1) = 1.095\ 445\ 124 \quad \underline{y}(0.1) = 1.095\ 445\ 098 \quad \tilde{y}(0.1) = 1.095\ 445\ 111$$

con un error absoluto, dado por:

$$|e| < 1.3(10^{-8})$$

que muestra la ganancia conseguida, respecto del error dado por la formula de Lotkin, dado anteriormente.

Segundo ejemplo:

$$y' = x + y \quad y(0) = 0 \quad h = 0.1 \quad \text{Solucion exacta: } y = e^x - x - 1$$

La rutina EDO, proporciona:

$$\underline{y}(0.1) = 0.005\ 170\ 917\ 525 \quad \bar{y}(0.1) = 0.005\ 170\ 918\ 860$$

$$\text{con un valor medio: } \tilde{y}(0.1) = 0.005\ 170\ 918\ 091 \quad \text{y } |e| < 3.7(10^{-10})$$

El valor exacto, es

$$y(0.1) = 0.005\ 170\ 918\ 075$$

y el proporcionado por el Runge-Kutta:

$$y(0.1) = 0.005\ 170\ 833\ 333 \quad \text{con } |e| < 1.019(10^{-7})$$

Tambien, la ganancia es obvia.

Si utilizamos la rutina TETSI,

$$\bar{y}(0.1) = 0.005\ 170\ 918\ 075 \quad \underline{y}(0.1) = 0.005\ 170\ 918\ 075$$

coincidentes ambos valores con la solucion exacta, hasta ese orden decimal.

Finalmente, sea el ejemplo n° 15:

$$y' = 4xy^{\frac{1}{2}} \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1 \quad \text{Solucion exacta: } y = (1 + x^2)^2$$

Como a partir de la quinta, todas las derivadas son nulas; tenemos un ejemplo, en que tan solo utilizando la derivada segunda, se resuelve exactamente la EDO.

En efecto, dicha rutina proporciona:

$$\bar{y}(0.1) = \underline{y}(0.1) = \tilde{y}(0.1) = 1.020\ 099\ 999 \quad \text{y } y(0.1) = 1.020\ 100\ 000$$

El Runge-Kutta, dá

$$y_{RK}(0.1) = 1.020\ 099\ 916 \quad \text{con } |e| < 4.05(10^{-3}).$$

Bien me sé, que aun queda mucho por desollar; como por ejemplo la aplicacion a los sistemas de ecuaciones diferenciales; o la consideracion de un paso  $h$ , variable, en el que coincidan los super y subvalores; o tambien la eleccion de dichos valores sobre la normal a la curva integral; cuestiones no tratadas por no tenerlas resueltas. En cambio, en el apartado I (1ª parte), señalamos dos acotaciones unilaterales del parametro  $\theta$ , evidentemente de factura

mas complicada que el metodo primitivo, pero que muy bien podria en ocasiones mejorar alguna de las cotas anteriores del parametro  $\theta$  .

Como elemento de trabajo, hemos dispuesto de una modesta minicomputadora electronica (Compucorp Scientist), que muestra el partido que puede sacarse, asi como de la IBM 1620, del centro de cálculo de la Facultad de Veterinaria de Cordoba, a cuyo Director Dr Jordano Barea, nuestro desde estas lineas mi gratitud y admiracion por sus enseñanzas , y paciencia con que ha llevado mi adiestramiento en su programacion. Igualmente agradezco, a mi querido amigo Dr Castro Brzcezicki, su valiosa ayuda , desde la eleccion del tema, hasta la busqueda bibliografica y orientacion dentro de este enmarañado mundo de las EDO.

Jaen agosto 73.

Antes de comenzar el objeto de nuestro estudio, parece conveniente, a los efectos de las oportunas comprobaciones, efectuar una rápida pasada, sobre los métodos matemáticos actuales, que con mayor éxito se están utilizando en la resolución numérica de las EDO.

1. Problema de Cauchy.

Consiste como es sabido, en la resolución numérica de la ecuación diferencial

$$dy/dx = f(x,y) \quad \text{con } y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

a cuyo efecto, el siguiente teorema de existencia de Picard - tomado de L. Escoffier - garantiza la existencia y unicidad de su solución.

Teorema. Si en la ecuación

$$dy/dx = f(x,y)$$

la función  $f(x,y)$  es continua en el rectángulo D:

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

y satisface en D, la condición de Lipschitz:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

donde L es una constante, entonces existe una solución única  $y = y(x)$ , de la ecuación (1), con

$$x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$$

tal, que satisface la condición

$$y(x_0) = y_0$$

donde

$$H \leq \min(a, b/M, 1/L)$$

$$M = \max |f(x,y)| \quad \text{en D.}$$

2. Métodos de pasos múltiples.

Entre los numerosos métodos existentes para la resolución numérica de (1), este método de los pasos múltiples, nacido al amparo de las computadoras, es con mucho el más utilizado actualmente. En esencia trata de sustituir la (1), por una ecuación en diferencias finitas, lo suficientemente aproximada que cumpla además las condiciones iniciales, lo que implica a su vez los conceptos de consistencia y estabilidad, para llenar la correspondiente definición de convergencia.

Se llaman también esquemas, y los más usuales son los lineales de k pasos, representados siguiendo a Henrici, por

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (2)$$

donde las  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  son constantes;

$$\alpha_k = 1; \quad f_{n+j} \equiv f(x_{n+j}, y_{n+j}); \quad x_{n+j} = x_n + jh$$

$$j \in \{0, 1, \dots, k\} \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$$

Simbolicamente, este metodo puede escribirse, siguiendo a Vitasek

$$p(E) y_n = h \sigma(E) f_n \quad (3)$$

donde  $E$ , es como se sabe, el operador traslacion ( $E y_n = y_{n+1}$ ), y  $p$  y  $\sigma$  son polinomios definidos por

$$p(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j \quad \sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j \quad (4)$$

Tales ecuaciones, necesitan por tanto, de  $k$  valores iniciales o de partida

$$\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$$

lo que presupone como subproblema, la consecucion de  $k-1$  valores, no conocidos a priori

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$$

Conseguidos estos valores, dentro de la tolerancia de error admitida, aparece la resolusion de la ecuacion en diferencias finitas, de  $k$ -orden con coeficientes constantes

$$Y_k y_{n+k} + Y_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + Y_0 y_n = \Phi \quad (5)$$

donde las  $Y_j$ ;  $j=0, 1, \dots, k$

son constantes independientes de  $n$ , y  $Y_k \neq 0$ ,  $Y_0 \neq 0$

### 3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

La solucion o integral general de la ecuacion

(5), viene dada por (V. por ej. Levy and Lessman)

$$y_n = \sum_{t=1}^k d_t r_t^n + Y_n \quad (6)$$

donde las  $d_t$  son constantes arbitrarias, y las  $r_t$ , las raíces de la ecuación

$$Y_k r^k + Y_{k-1} r^{k-1} + \dots + Y_0 = 0 \quad (7)$$

supuestas simples.

$\Psi_n$ , es una solución particular de la (5), dada por

$$\Psi_n = \phi / \sum_{j=0}^k \gamma_j$$

En el caso de la existencia de raíces múltiples de (7) de orden  $m$ , las  $m$  raíces correspondientes, serían sustituidas por el término

$$[d_{1s} + d_{2s} n + d_{3s} n(n-1) + \dots + d_{ms} n(n-1)\dots(n-m+2)] \cdot r^n \quad (8)$$

#### 4. ESQUEMAS EXPLICITOS E IMPLICITOS.

Si en (2), se tiene  $\beta_k = 0$ , el método se dice explícito, e implícito en el caso contrario,  $\beta_k \neq 0$ .

En este último caso, (2) se convierte en una ecuación algebraica de la forma

$$y_{n+k} = h \sum f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g \quad (9)$$

que al no ser lineal, a igual que su homóloga diferencial, se resuelve utilizando uno cualquiera de los métodos de iteración; en particular en este caso viene impuesto por la forma de (9), la siguiente

$$y_{n+k}^{[j+1]} = h \beta_j f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[j]}) + g \quad (10)$$

$$y_{n+k}^{[0]} = y_{n+k-1} \quad \text{por ejemplo.}$$

para cuya convergencia y unicidad, el teorema del punto fijo (V. Conte and Carl y Henrici), establece la condición de

$$h < 1 / L |\beta_k| \quad (11)$$

siendo  $L$ , la constante de Lipschitz de  $f$  respecto de  $y$ .

#### 5. CONVERGENCIA.

La solución de la ecuación en diferencias finitas (8), hemos dicho se toma como solución aproximada de la EDO (1), lo que exige la siguiente definición de convergencia del esquema (2), tomada de Henrici/

Definición. El método lineal de pasos múltiples, definido por (2), se dice convergen, si para todas las funciones  $f(x,y)$ , cumplidoras de las condiciones del teorema I, se verifica

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = x-a}} y_n = y(x) \tag{12}$$

siendo  $y(x_n)$  la solución de (1), y esto para todo

$$x \in [a, b]$$

y para todas las soluciones  $\{y_n\}$ , de la ecuación en diferencias finitas (8), cuyos valores iniciales

$$y_\mu = \gamma_\mu(h)$$

satisfagan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma_\mu(h) = y_0 \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1$$

### 6. ORDEN DE UN ESQUEMA.

La fórmula (2), se dice es de orden  $p > 0$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j$$

(13)

---


$$\sum_{j=0}^k j^p \alpha_j / p! = \sum_{j=0}^k j^{p-1} \beta_j / (p-1)!$$

obtenidas igualando a cero, los coeficientes  $C_i$  de las potencias de  $h$ , en el desarrollo Tayloriano del operador

$$\mathcal{L}(y(x); h) = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x+jh) - h \beta_j y'(x+jh)] \tag{14}$$

asociado al esquema (2), donde las  $y(x)$  son funciones arbitrarias, continuas y diferenciables en  $[a, b]$ .

Es decir

$$\mathcal{L}(y(x); h) = C_0 y(x) + C_1 h y^{(1)}(x) + C_2 h^2 y^{(2)}(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots \tag{15}$$

### 7. CONSISTENCIA.

El metodo (2), se dice consistente, si tiene un orden  $p > 1$ .

De otra manera, si se verifica simultaneamente

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \qquad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j \qquad (16)$$

escrito tambien

$$p(1) = 0 \qquad p'(1) = \sigma(1)$$

Puede demostrarse, que la consistencia es necesaria para la convergencia del esquema (V. J.M. Ortega).

### 8. ESTABILIDAD -D.

Definicion. El metodo (2) se dice estable segun Dahlquist, o tambien cero-estable (Lambert), si el llamado primer polinomio caracteristico del esquema

$$p(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j \qquad (17)$$

no tiene ninguna raiz fuera del circulo unidad, y si tiene alguna de modulo 1, esta raiz es simple.

Teorema fundamental de Dahlquist. La condicion necesaria y suficiente para que un metodo lineal de pasos multiples sea convergente, es que sea consistente y estable segun D.

En su consecuencia, solo se trataran con metodos consistentes y cero-estables y a ser posible del mayor orden. Para este objetivo, se tienen los siguientes teoremas (Henrici).

### 9. CONSECUENCIAS.

Ningun k-metodo lineal, estable-D puede tener un orden mayor que  $k + 1$  si  $k$  es impar; o mayor que  $k+2$  cuando  $k$  sea par.

Si el orden es  $k+2$ , el metodo se dice optimo y segun la forma del primer polinomio caracteristico, asi reciben distintos nombres, las EDO asociadas.

De esta manera, cuando

$$p(\xi) = \xi^k - \xi^{k-1}$$



el metodo se llama de Adams; con las variantes, Adams-Moulton si es implicita, y Adams-Bashforth si tiene forma explicita.

Si

$$\rho(\zeta) = \zeta^k - \zeta^{k-2}$$

el metodo se llama de Nystron para la forma explicita, y de Milne-Simpson para la otra.

10. ERROR LOCAL DE TRUNCAMIENTO.

Definicion. Se llama error local de truncamiento del esquema (2) en  $x_n$ , al error cometido al aproximar el valor exacto  $y(x_n)$ , por el valor aproximado  $y_n$  proporcionado por el esquema (2), y siempre que no hayan sido considerados errores previos de truncamiento. Es decir que se tenga

$$y_{n+j} = y(x_{n+j})$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$

Se llega para el mismo, a la siguiente expresion (V. Lambert)

$$e_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k} = \frac{\mathcal{L}(y(x_n); h)}{1 - h\beta_k \frac{\partial f(x_{n+k}, y_{n+k})}{\partial y}} \quad (18)$$

$$\eta_{n+k} \in [y_{n+k}, y(x_{n+k})]$$

coincidente con  $\mathcal{L}[y(x_n); h]$  si la formula (2) es explicita.

Se tiene en este caso

$$e_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k} = \mathcal{L}[y(x_n); h] = C_{n+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \quad (19)$$

11. COTA DEL ERROR LOCAL DE TRUNCAMIENTO.

Una cota del error anterior, se encuentra en la siguiente, cuya obtencion puede verse, bien en Ralston, o Henrici, Lambert, etc

$$|\mathcal{L}[y(x_n); h]| \leq h^{p+1} \cdot G \cdot Y \quad (20)$$

donde

$$Y = \max |y^{(p+1)}(x)| \quad x \in [a, b]$$

$G$  es la llamada función de influencia del método, dada por

$$G = \frac{1}{p!} \int_0^k |G(s)| ds = c_{p+1} \quad G(s) = \sum_{j=0}^k [\alpha_j (j-s)_+^k - \beta_j (j-s)_+^{k-1}]$$

con  $(j-s)_+ = \begin{cases} j-s & \text{si } j > s \\ 0 & \text{" } j \leq s \end{cases}$

## 12. ERROR GLOBAL DE TRUNCAMIENTO.

Suprimiendo la condición previa, de la no existencia de errores de truncamiento y redondeo en el paso de un punto al siguiente, se tiene el error global de truncamiento

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

una cota del cual, tras complicado aparato matemático, viene dada por Henrici, con la hipótesis de  $|h \beta_k \alpha_k^{-1}| L < 1$ , en la forma siguiente

$$|\tilde{e}_n| \leq \Gamma^* \left\{ A k \delta + (x_n - a) (h^k G Y + h^k K_1) \right\} \exp \{ \Gamma^* L B (x_n - a) \} \quad (21)$$

donde

$$A = \sum_{j=0}^k |\alpha_j|, \quad B = \sum_{j=0}^k |\beta_j|, \quad \Gamma^* = \Gamma / (1 - h \alpha_k^{-1} \beta_k) L$$

$$\Gamma = \sup_{l=0,1,\dots} |\beta_l| \quad 1 / (\alpha_k + \alpha_{k-1} \zeta + \dots + \alpha_0 \zeta^k) = \zeta_0 + \zeta_1 \zeta + \zeta_2 \zeta^2 + \dots$$

$$G = \int_0^k |G(s)| ds, \quad Y = \max \{ |y^{(p+1)}(x)| \} \quad x \in [a, b]$$

$$\delta = \delta(h) = \max_{\mu=0,1,\dots,k-1} |y_\mu(h) - y(a + \mu h)| = \text{máximo error de partida}$$

En ella se aprecia, el término  $A k$ , representante del error de partida, independiente de  $h$ ; el término que lleva  $K_1, G, Y$  representante de los errores locales y de redondeo. Ahora bien, todas estas cotas son muy generosas, por lo que su aplicación es más teórica que práctica. En particular la cotación de  $|y^{(p+1)}(x)|$  es muy aleatoria.

## 13. DEBIL ESTABILIDAD.

Existen situaciones, en las cuales el error global va amortiguándose a medida que aumenta el número de pasos; situación óptima dentro de la convergencia del método, y para cuyo estudio - V. Lambert - se parte de las siguientes hipótesis, no siempre satisfechas:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \lambda = \text{cte} \quad \text{asi como} \quad \phi_n = T_n - R_n = \text{cte}$$

$T_n$  = error local de truncamiento

$R_n$  = error de redondeo

y se considera el siguiente polinomio característico del método:

$$\pi(r, \bar{h}) \equiv p(r) - \bar{h} \sigma(r) = 0 \quad \text{donde } \bar{h} = h\lambda \quad (22)$$

y  $p$  y  $\sigma$  son, los ya conocidos 1º y 2º polinomios característicos.

En estas circunstancias se tienen las siguientes definiciones:

### 14. ESTABILIDAD ABSOLUTA.

**Definición.** Un método lineal  $k$ -multiple, se dice absolutamente estable para un  $\bar{h}$  dado, si para ese  $\bar{h}$ , todas las raíces de la ecuación (22), satisfacen a la desigualdad

$$|r_s| < 1 \quad s = 1, 2, \dots, k$$

y absolutamente inestable en el caso contrario.

Lo mismo se dice de los intervalos;  $(a, b)$  es absolutamente estable si el método es absolutamente estable para todo

$$\bar{h} \in (a, b)$$

si el método es inestable para todo  $\bar{h}$ , se dice no tiene intervalo alguno de estabilidad.

**Consecuencia de la definición:** Todo método  $k$ -lineal, consistente y cero estable, es absolutamente inestable para valores positivos y pequeños de  $\bar{h}$ , con lo que los métodos que carezcan de intervalos de absoluta estabilidad, el crecimiento del error con  $n$  es inevitable.

**Otra consecuencia:** Todos los métodos llamados óptimos, esto es de orden  $k+2$ , son absolutamente inestables.

Y más todavía, toda ecuación diferencial en la cual  $\frac{\partial t}{\partial y} > 0$  es absolutamente inestable y los errores crecen con el proceso de cálculo.

15. ESTABILIDAD RELATIVA.

Afinando aun mas, en este crecimiento del error, Hull y Howbe dan la siguiente:

Definicion. Un k-metodo lineal (2), se dice relativamente estable, para un h dado, si para dicho h, las raices r<sub>s</sub> de la ecuacion caracteristica (22), satisfacen

$$|r_s| < |r_1| \quad s = 2, 3, \dots, k$$

y relativamente inestable, en el caso contrario.

La raiz r<sub>1</sub> es aquella que tiende a ξ<sub>1</sub> cuando h → 0, y ξ<sub>1</sub> es la raiz +1 del primer polinomio caracteristico q(λ), que cuando el metodo es consistente siempre existe.

Entonces, si la solucion de la ecuacion linealizada del error, es dominada por el termino en r<sub>s</sub><sup>n</sup>, ocurre que el error crece en la misma razon que la solucion, lo cual es generalmente aceptado. Por eso, en los metodos consistentes, y cero estables, para h positiva y pequena, que son inestables en sentido absoluto, es conveniente la investigacion de la estabilidad relativa. Surge ahora el problema de acotacion de estas raices de ecuaciones algebraicas, presentandose diversos criterios: Wilf, Routh, Hurwitz, etc.

16. METODOS PREDICTORES CORRECTORES.

Estos metodos, escritos corrientemente PC, consisten en utilizar un k-metodo lineal implicito, con lo que cada paso presupone la resolucion de la ecuacion

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \quad (23)$$

mediante la iteracion

$$y_{n+k}^{(s+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{(s+1)} = h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(s+1)}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \quad (24)$$

con  $y_{n+k}^{(0)}$  arbitrario y siempre con

$$h < \frac{1}{L |\beta_s|} \quad s = 0, 1, \dots$$

como es sabido,



Por otra parte, debe procurarse para ambas formulas P y C, que ambas tengan el mismo numero k de pasos. De esta manera, los metodos P(EC)<sup>m</sup> son descritos formalmente como siguen, reservandose la notacion con asterisco, para la P.

$$y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m-1]}$$

$$f_{n+k}^{[s]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]})$$

$$y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} = h \beta_j f_{n+k}^{[s]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m-1]}$$

} s = 0, 1, \dots, m-1

No es corriente utilizar metodos con m > 2.

18. ERROR LOCAL DE TRUNCAMIENTO. Metodo de MILNE.

Milne ha encontrado para el error local de truncamiento, de los metodos PC, la formula

$$C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} [y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}]$$

la que ha sido utilizada por Hamming, como formula modificadora, reemplazando el valor dado por la correctora

$$y_{n+k}^{[m]}$$

por la modificadora

$$\tilde{y}_{n+k}^{[m]} = y_{n+k}^{[m]} + \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} [y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}]$$

De esta manera, el metodo Hamming - V. Ralston - constaria de los siguientes pasos:

Predictora:  $p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} [2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}]$

Modificadora:  $m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{112}{121} (p_n - c_n)$

$$m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$$

Correctora:  $c_{n+1} = \frac{1}{8} [9y_n - y_{n-2} + 3h(m'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})]$

Valor final:  $y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{9}{121} (p_{n+1} - c_{n+1})$

PRIMERA PARTE

Obtencion formulas fundamentales

A. Formulas tipo Euler.

Sea la EDO

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con  $y(x_0) = y_0$  (2)

donde  $f(x, y)$  real, definida y continua, cumple las condiciones mostradas en el teorema existencial, esto es

$$a \ll x \ll b$$

$$c \ll y \ll d$$

$$|f(x, y_i) - f(x, y_j)| < L|y_i - y_j| \tag{3}$$

Se sabe, que en estas condiciones existe una sola funcion  $y(x)$ , que satisface a (1) con la condicion (2), en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Restringiendo la generalidad de esta solucion, al caso en que  $f(x, y)$  sea algebraica en  $y$ , asi como que  $y(x)$  y sus derivadas sucesivas sean monotonas en dicho intervalo, la fórmula que proponemos con estas hipotesis es la sumatoria de Euler-MacLaurin, completada con una expresion del resto puest en forma explicita respecto del parametro  $\theta$ , y al que por último se le dan sus valores extremos, cero y uno.

Para ello, la integracion reiterada por partes, de la integral contenida en el segundo miembro de la identidad

$$y(a + h) - y(a) = - \int_0^h y'(a + t) d(h-t) \tag{4}$$

conduce como es sabido, al desarrollo de Taylor con el resto integral, esto es

$$y(a+h) - y(a) = h y'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a) + \dots + \frac{h^{2m}}{2m!} y^{(2m)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2m}}{2m!} y^{(2m+1)}(a+t) dt \quad (5)$$

Aplicando esta formula a las derivadas  $y', y'', \dots, y^{(2m-2)}$ , se tiene

$$y'(a+h) - y'(a) = h y''(a) + \frac{h^2}{2!} y'''(a) + \dots + \frac{h^{2m-1}}{2m-1!} y^{(2m)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} y^{(2m+1)}(a+t) dt$$

$$y''(a+h) - y''(a) = h y'''(a) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(a) + \dots + \frac{h^{2m-2}}{2m-2!} y^{(2m)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^{2m-2}}{(2m-2)!} y^{(2m+1)}(a+t) dt$$

$$y^{(2m-2)}(a+h) - y^{(2m-2)}(a) = h y^{(2m-1)}(a) + \frac{h^2}{2!} y^{(2m)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^2}{2!} y^{(2m+1)}(a+t) dt$$

multiplicando cada una de las igualdades anteriores, de indice  $i$  de derivacion en el primer miembro, por

$$\frac{h^i}{i!} B_i$$

donde las  $B_i$ , son los correspondientes numeros de Bernoulli:

$$B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0, B_6 = 1/42, \dots$$

$$B_{2n+1} = 0$$

y sumando miembro a miembro, se tiene

$$\begin{aligned} & y(a+h) - y(a) - h y'(a) + \sum_{k=1}^{2m-1} h^k \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) = \\ & y''(a) \left\{ \frac{h^2}{2!} B_0 + \frac{h^2}{1!} B_1 \right\} + y'''(a) \left\{ \frac{h^3}{3!} B_0 + \frac{h^3}{2!1!} B_1 + \frac{h^3}{1!2!} B_2 \right\} + \dots \\ & + y^{(k)}(a) \left\{ \frac{h^k}{k!} B_0 + \frac{h^k}{(k-1)!1!} B_1 + \dots + \frac{h^k}{(k-1)!1!} B_{k-1} \right\} + \dots \\ & + y^{(2m)}(a) \left\{ \frac{h^{2m}}{2m!} B_0 + \frac{h^{2m}}{(2m-1)!1!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m}}{(2m-1)!1!} B_{2m-1} \right\} + \\ & + \int_0^h y^{(2m+1)}(a+t) \left\{ \frac{(h-t)^{2m}}{2m!} B_0 + \frac{h(h-t)^{2m-1}}{2m-1!1!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m-2}(h-t)^2}{2!(2m-2)!} B_{2m-2} \right\} dt \end{aligned}$$

Haciendo ahora uso, de la propiedad que relaciona los polinomios de Bernoulli con los numeros del mismo nombre, esto es, utilizando

$$B_m(t) = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} B_h t^{m-h} \quad (6)$$



asi como

$$B_m(1) = B_m(0) = B_m$$

se tiene, que todos los corchetes - coeficientes de las derivadas sucesivas de  $y$  - son nulos, con lo que queda

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [y'(a+h) + y'(a)] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \cdot \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) + \int_0^h y^{(2m+1)}(a+t) \left\{ \frac{(h-t)^{2m}}{2m!} B_0 + \frac{h(h-t)^{2m-1}}{2m-1!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m-2}(h-t)^2 B_{2m-2}}{2!(2m-2)!} \right\} dt$$

Efectuando en la integral el cambio

$$h-t = z$$

la expresion anterior se convierte en

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [y'(a) + y'(a+h)] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \cdot \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) + \int_0^h y^{(2m+1)}(a+h-z) \cdot \left\{ \frac{z^{2m} B_0}{2m!} + \frac{h z^{2m-1} B_1}{(2m-1)!} + \dots + \frac{h^{2m-2} z^2 B_{2m-2}}{2!(2m-2)!} \right\} dz$$

Aplicando a esta integral, el segundo teorema de la media, dada la monotonia supuesta en la hipotesis, se tiene entonces

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [y'(a+h) + y'(a)] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \cdot \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) + y^{(2m+1)}(a+h) \int_0^{\xi} \left\{ \frac{z^{2m} B_0}{2m!} + \frac{h z^{2m-1} B_1}{1!(2m-1)!} + \dots + \frac{h^{2m-2} z^2 B_{2m-2}}{2!(2m-2)!} \right\} dz + y^{(2m+1)}(a) \int_{\xi}^h \left\{ \frac{z^{2m} B_0}{2m!} + \frac{h z^{2m-1} B_1}{1!(2m-1)!} + \dots + \frac{h^{2m-2} z^2 B_{2m-2}}{2!(2m-2)!} \right\} dz$$

con  $0 \leq \xi \leq 1$

Efectuando las integraciones, tendremos

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [y'(a+h) + y'(a)] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \cdot \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) +$$

$$\begin{aligned}
 & + y^{(2m+1)}(a+h) \left\{ \frac{(h\xi)^{2m+1}}{(2m+1)!} B_0 + \frac{h(h\xi)^{2m}}{1! 2m!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m-2} (h\xi)^3}{3!(2m-2)!} B_{2m-2} \right\} + \\
 & + y^{(2m+1)}(a) \left\{ \frac{[h - (h\xi)]^{2m+1}}{(2m+1)!} B_0 + \frac{h[h - (h\xi)]^{2m}}{1! 2m!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m-2} [h - (h\xi)]^3}{(2m-2)! 3!} B_{2m-2} \right\}
 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad (6), y reordenando

$$\begin{aligned}
 y(a+h) &= y(a) + \frac{h}{2} [y'(a+h) + y'(a)] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \frac{B_k}{k!} \Delta y^{(k)}(a) - \frac{h^{2m+1} B_{2m}}{2m!} y^{(2m+1)}(a) + \\
 & + [y^{(2m+1)}(a+h) - y^{(2m+1)}(a)] \left\{ \frac{(h\xi)^{2m+1}}{2m+1!} B_0 + \frac{h(h\xi)^{2m}}{2m! 1!} B_1 + \dots + \frac{h^{2m-2} (h\xi)^3}{3!(2m-2)!} B_{2m-2} \right\}
 \end{aligned}$$

y finalmente, pasando a las  $f(x,y)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 y(a+h) &= y(a) + \frac{h}{2} [f(a+h, y(a+h)) + f(a, y(a))] - \sum_{k=2}^{2m-2} h^k \frac{B_k}{k!} \left\{ f^{(k-1)}(a+h, y(a+h)) - \right. \\
 & - \left. f^{(k-1)}(a, y(a)) \right\} - \frac{h^{2m+1} B_{2m}}{2m!} f^{(2m)}(a, y(a)) + \frac{h^{2m+1}}{2m+1!} \left\{ \binom{2m+1}{0} \xi^{2m+1} B_0 + \binom{2m+1}{1} \xi^{2m} B_1 + \dots \right. \\
 & \left. + \binom{2m+1}{2m-2} \xi^3 B_{2m-2} \right\} \cdot \left\{ f^{(2m)}(a+h, y(a+h)) - f^{(2m)}(a, y(a)) \right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

formula en la cual aparece  $\xi$  en forma explicita y es valida para  $m > 1$ .

Cuando  $m=1$ , en el corchete apareceria el termino

$$B_{2m-1} = B_1 = -1/2$$

que en este caso, a pesar de ser un numero de Bernoulli impar, es distinto de cero cesa que no ocurre si  $m > 1$ .

Haciendo pues,  $m=1, 2$  y  $3$  unicos casos que consideraremos, tendremos un primer grupo de formulas, en las cuales para mayor sencillez, notaremos

$$\begin{aligned}
 f(1) &= f(a+h, y(a+h)); \quad f(0) = f(a, y(a)); \quad \theta_1 = 2\xi^3 \\
 \theta_2 &= \xi^3 (6\xi^2 - 15\xi + 10); \quad \theta_3 = \xi^3 (6\xi^2 - 21\xi + 21\xi^2 - 7)
 \end{aligned}$$

como el siguiente:

$m = 1$

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^3}{12} f''(0) - \frac{h^3}{12} \theta_1 \{ f''(1) - f''(0) \} \quad (8)$$

m = 2

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} f''(0) + \frac{h^5}{720} \theta_2 \{ f''(1) - f''(0) \} \quad (9)$$

m = 3

$$y(a+h) = y(a) + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} [f'''(1) - f'''(0)] - \frac{h^7}{42720} f''(0) - \frac{h^7 \theta_3}{42720} [f''(1) - f''(0)] \quad (10)$$

donde facilmente se comprueba, que

$$0 \leq \theta_1 \leq 1$$

$$0 \leq \theta_2 \leq 1$$

$$0 \leq \theta_3 \leq 1$$

cuando

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Considerando el caso m = 2, que será el mas utilizado por nosotros, y particularizando para el parametro  $\theta_2$ , los valores cero y uno, obtenemos las dos ecuaciones siguientes, que definen el algoritmo del metodo.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} f''(0) \quad (11)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} f''(1) \quad (12)$$

B. SEGUNDO GRUPO DE FORMULAS .TIPO TAYLOR.

Este grupo se obtiene directamente por la aplicacion del segundo teorema de la media, al resto integral de la formula (5) de Taylor.

Asi, se tiene

$$y(a+h) = y(a) + h y'(a) + \frac{h^2}{2!} y''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} y^{(n+1)}(a+t) dt \quad (13)$$

y considerando la integral

$$R_{n+1} = \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} y^{(n+1)}(a+t) dt = \frac{1}{n!} \left\{ y^{(n+1)}(a) \int_0^{\xi} (h-t)^n dt + y^{(n+1)}(\alpha) \int_{\xi}^h (h-t)^n dt \right\} \quad (14)$$

con  $\xi = \alpha h$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Calculando las integrales anteriores

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(a) [h^{n+1} - h^{n+1}(1-\alpha)^{n+1}] + y^{(n+1)}(\alpha) h^{n+1} (1-\alpha)^{n+1} \right\} =$$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(a) + \frac{h^{n+1} (1-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} [y^{(n+1)}(\alpha) - y^{(n+1)}(a)]$$

se tiene finalmente

$$y(a+h) = y(a) + h y'(a) + \frac{h^2}{2!} y''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(a) +$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (1-\alpha)^{n+1} [y^{(n+1)}(\alpha) - y^{(n+1)}(a)]$$

y en funcion de las f(x,y)

$$y(a+h) = y(a) + h f(a) + \frac{h^2}{2!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta [f^{(n+1)}(\alpha) - f^{(n+1)}(a)] \quad (15)$$

$0 \leq \theta = 1-\alpha \leq 1$

donde el parametro  $\theta$  aparece en forma explicita.

Considerando ahora, como en las formulas tipo Euler, los valores extremos del parametro conseguimos tambien, dos ecuaciones claves del metodo, que indudablemente son de factura mas sencilla que las anteriores, pero tambien menos precisas.

son, pues

$$y_1 = y_0 + h f(a) + \frac{h^2}{2!} f'(a) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \quad (16)$$

$$y_1 = y_0 + h f(a) + \frac{h^2}{2!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \quad (17)$$

C. COTAS DE LA INTEGRAL DE  $y' = f(x, y)$

La EDO (1), proporciona al menos teóricamente -ya que en la práctica resulta muy enojoso - los valores numéricos de las derivadas sucesivas de  $y$ , en el punto  $(a, y(a))$ , las cuales al ser sustituidas en las fórmulas tipo Euler o Taylor, obtenidas anteriormente, juntamente con los  $\theta$ , de  $x_1$  y  $h$ , proporcionan sendas ecuaciones algebraicas en el parámetro  $\theta$  y en  $y_1$ . Esta claro, que si conociésemos el parámetro  $\theta$ , y particularizáramos dicho valor, en las ecuaciones anteriores, una de sus soluciones sería la integral que buscamos.

Dicha solución, viene acotada según la siguiente:

Proposición nº I. La integral de (1), para el valor  $x_1 = a + h$ , está acotada por los valores

$$\bar{y}_1 \equiv \bar{y}(a+h) \quad \underline{y}_1 \equiv \underline{y}(a+h)$$

siendo  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ , raíces de las ecuaciones (11) y (12), obtenidas dándole en (9) a  $\theta$ , los valores ~~xxxx~~  $x$  uno y cero respectivamente.

Es decir se cumple

$$\bar{y}(a+h) < y(a+h) < \underline{y}(a+h) \quad \text{o} \quad \bar{y}(a+h) > y(a+h) > \underline{y}(a+h)$$

siempre con las hipótesis que sirvieron de base, a la obtención de dichas fórmulas.

En efecto, refiriéndonos al caso  $m = 2$ , y a las fórmulas tipo Euler, la (9) puede escribirse indistintamente de una de las dos formas siguientes:

$$y_1 - y_0 - \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] + \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] - \frac{h^5}{720} f''(0) - \frac{h^5 \theta}{720} [f''(1) - f''(0)] = 0 \quad (18)$$

$$y_1 - y_0 - \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] + \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] - \frac{h^5}{720} f''(1) + \frac{h^5(1-\theta)}{720} [f''(1) - f''(0)] = 0 \quad (19)$$

y si designamos con  $\bar{F}$  y  $\underline{F}$  a las expresiones

$$\bar{F}(\bar{y}_1) \equiv \bar{y}_1 - y_0 - \frac{h}{2} [f(\bar{1}) + f(0)] + \frac{h^2}{12} [f'(\bar{1}) - f'(0)] - \frac{h^5}{720} f''(\bar{1})$$

$$\underline{F}(\underline{y}_1) \equiv \underline{y}_1 - y_0 - \frac{h}{2} [f(\underline{1}) + f(0)] + \frac{h^2}{12} [f'(\underline{1}) - f'(0)] - \frac{h^5}{720} f''(0)$$

donde como siempre

$$f^{(m)}(\bar{1}) = f^{(m)}(a+h, \bar{y}(a+h)) \quad , \quad f^{(m)}(\underline{1}) = f^{(m)}(a+h, \underline{y}(a+h))$$

y si introducimos las notaciones

$$G(y_1) = f''(1) - f''(0), \quad \underline{\varepsilon} = -\frac{h^5}{720} \theta, \quad \bar{\varepsilon} = -\frac{h^5}{720} (1-\theta)$$

se tiene entonces, las ecuaciones (18) y (19) en la forma mas simplificada

$$\underline{F}(y_1) + \underline{\varepsilon} G(y_1) = 0 \quad \theta = 0 \quad (20)$$

$$\bar{F}(\bar{y}_1) + \bar{\varepsilon} G(\bar{y}_1) = 0 \quad \theta = 1 \quad (21)$$

Se sabe por otra parte, - wilkinson (53) pag. 39 - que un cero  $y_1(\underline{\varepsilon})$

de

$$\underline{F}(y) + \underline{\varepsilon} G(y) = 0 \quad (22)$$

integral de la EDO (1), viene dado por un desarrollo en serie, convergente para  $\underline{\varepsilon}$  suficientemente pequeño, tal como

$$y_1(\underline{\varepsilon}) = \underline{y}_1 + \sum_1^{\infty} a_k \underline{\varepsilon}^k = \underline{y}_1 + a_1 \underline{\varepsilon} \quad (23)$$

una vez limitado el desarrollo de  $y_1(\underline{\varepsilon})$ , en la primera potencia de  $\underline{\varepsilon}$ , y donde  $\underline{y}_1$  es un cero de

$$\underline{F}(y) = 0$$

Sustituyendo este valor de  $y_1(\underline{\varepsilon})$ , en (22) y desarrollando en serie de Taylor, se tiene

$$\underline{F}(\underline{y}_1 + a_1 \underline{\varepsilon}) + \underline{\varepsilon} G(\underline{y}_1 + a_1 \underline{\varepsilon}) = 0$$

o lo que es lo mismo, suprimiendo la subraya de  $\underline{\varepsilon}$

$$\sum_0^n \frac{(a_1 \underline{\varepsilon})^k}{k!} \underline{F}^{(k)}(\underline{y}_1) + \underline{\varepsilon} \sum_0^n \frac{(a_1 \underline{\varepsilon})^k}{k!} G^{(k)}(\underline{y}_1) = 0$$

Ahora bien, la arbitrariedad de  $\underline{\varepsilon}$ , impone la anulacion de los coeficientes de sus distintas potencias, resultando asi, para la de  $\underline{\varepsilon}$ , la siguiente condicion

$$a_1 \underline{F}'(\underline{y}_1) + G(\underline{y}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{G(\underline{y}_1)}{\underline{F}'(\underline{y}_1)} \quad (24)$$

donde la derivada  $F'$  ha de interpretarse como es logico, respecto de  $y$ .

Entonces, sustituyendo valores se tiene

$$y_1 = y_1(\varepsilon) = \underline{y}_1 - \varepsilon \cdot \frac{G(\underline{y}_1)}{F'(\underline{y}_1)} = \underline{y}_1 + \frac{h^5}{720} \theta \cdot \frac{f''''(\underline{y}_1) - f''''(y_0)}{1 - \frac{h}{2} D_y f(\underline{y}_1) + \frac{h^2}{12} D_y^2 f'(\underline{y}_1)}$$

Por otra parte, la existencia de las cotas  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ , o de otra manera, la monotonia de  $y_1$  respecto de  $\xi$ , es consecuencia de la constancia del signo de la primera derivada de  $y_1$  respecto de  $\xi$ .

Esto ultimo, es inmediato, segun se deduce de

$$\frac{dy_1}{d\xi} = \frac{dy_1}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{h^5 [f''''(\underline{y}_1) - f''''(y_0)]}{720 [1 - \frac{h}{2} D_y f(\underline{y}_1) + \frac{h^2}{12} D_y^2 f'(\underline{y}_1)]} \cdot 30 \xi^2 (\xi - 1)^2$$

dada la paridad de los exponentes de  $\xi$  y  $\xi - 1$ .

Entonces,  $\underline{y}_1$  es una cota de la integral exacta  $y_1$ , con un error absoluto dado por

$$e_1 = y_1 - \underline{y}_1 = \frac{h^5}{720} \theta \cdot \frac{G(\underline{y}_1)}{F'(\underline{y}_1)} \tag{25}$$

y una cota del mismo, igual a

$$|e_1| = |y_1 - \underline{y}_1| < \frac{h^5}{720} \left| \frac{G(\underline{y}_1)}{F'(\underline{y}_1)} \right|$$

tomando  $\theta_1 = 1$ .

Repitiendo el razonamiento, para la segunda forma (19), o

$$F(\bar{y}_1) - \bar{\varepsilon}_1 \bar{G}(\bar{y}_1) = 0$$

llegamos a la siguiente expresion

$$y_1 = \bar{y}_1 - \frac{h^5}{720} (1 - \theta) \cdot \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} \tag{26}$$

con un error absoluto de

$$\bar{e}_1 = y_1 - \bar{y}_1 = -\frac{h^5}{720} (1 - \theta) \cdot \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} \tag{27}$$

y una cota del mismo, obtenida haciendo  $\theta = 0$ , dada por

$$|\bar{e}_1| < \frac{h^5}{720} \left| \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} \right| \tag{28(1)}$$

Podemos resumir todo lo dicho, en la siguiente

2. PROPOSICION nº 2. Un valor aproximado de la integral exacta de (1), viene dado por la media aritmetica de las cotas  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ , con un error absoluto

dado por

$$(29) \quad y_1 - \tilde{y}_1 = y_1 - \frac{\bar{y}_1 + \underline{y}_1}{2} = \frac{h^5}{1440} \left\{ \left[ \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} + \frac{G(\underline{y}_1)}{F'(\underline{y}_1)} \right] \theta_1 - \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} \right\}$$

Dado el desconocimiento de  $\theta_1$ , - valor del parametro  $\theta$ , correspondiente a la solucion exacta - dicho error vandra acotado por los valores obtenidos considerando los valores extremos de  $\theta_1$ , dado el caracter lineal de (29) respecto de  $\theta_1$ , esto es, se tendrá

$$-\frac{h^5}{1440} \cdot \frac{\bar{G}(\bar{y}_1)}{F'(\bar{y}_1)} < y_1 - \frac{\bar{y}_1 + \underline{y}_1}{2} < \frac{h^5}{1440} \cdot \frac{G(\underline{y}_1)}{F'(\underline{y}_1)}$$

o su inversa.

RESUMEN. Una solucion aproximada de la EDO  $y' = f(x, y)$  con  $y_0 = y(x_0)$ , en el punto  $x_1 = x_0 + h$ , viene determinada por la media aritmetica

$$\tilde{y}_1 = \frac{\bar{y}_1 + \underline{y}_1}{2}$$

de las soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_0 + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} f''(1) \\ \underline{y}_1 &= y_0 + \frac{h}{2} [f(1) + f(0)] - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^5}{720} f''(0) \end{aligned}$$

tomando las soluciones, en el caso de no ser lineales las ecuaciones anteriores, las mas proximas al valor inicial  $y_0$ .

El error cometido, viene acotado por

$$|e_1| = |y_1 - \tilde{y}_1| = \text{Max} \left\{ \frac{h^5}{1440} \frac{\bar{G}}{F'}, \frac{h^5}{1440} \frac{G}{F'} \right\} \quad (30)$$



D. ANALISIS DEL METODO

1. Analogias. El hecho de utilizar derivadas de ordenes superiores al primero, encasillan a cada una de las formulas anteriores, en los llamados metodos Obrechhoff, habiendo encontrado en Lambert , pag. 201, la siguiente formula, que utiliza los dos primeros terminos de las anteriores

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} (y'_{n+1} - y'_n) - \frac{h^2}{12} (y''_{n+1} - y''_n)$$

con  $p = 4$  y  $C_p = 1/720$ .

Igualmente , en Anthony Ralston ( ) pag. 212 , aparece la misma formula utilizada como correctora. La predictorica seria la siguiente de Hermite:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [-y'_n + 3y'_{n-1}] + \frac{h^2}{12} [17y''_n + 7y''_{n-1}]$$

con un error de truncamiento:

$$T_n = \frac{31h^5}{720} y^{(5)}(\eta)$$

y el conjunto del metodo - llamado de Hermite - tendria los siguientes pasos y formulas:

Predictora:  $y_{n+1}^{[0]} = y_n + \frac{h}{2} [-y'_n + 3y'_{n-1}] + \frac{h^2}{12} [17y''_n + 7y''_{n-1}]$

modificadora:  $\bar{y}_{n+1}^{[0]} = y_{n+1}^{[0]} + \frac{31}{30} [y_n - y_n^{[0]}]$

$$[\bar{y}_{n+1}^{[0]}]' = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{[0]})$$

Correctora:

$$y_{n+1}^{[j+1]} = y_n + \frac{h}{2} \{ [y_{n+1}^{[j]}]' + y'_n \} + \frac{h^2}{12} \{ -[y_{n+1}^{[j]}]'' - y''_n \}$$

2. Operador  $\mathcal{L}$  . Considerando cada uno de los algoritmos super y sub, desde el punto de vista clasico, esto es, como ecuaciones en diferencias finitas, en lugar de ecuaciones polinomicas, que es como lo hemos hecho, encajan en el metodo Obrechhoff - como ya dijimos - cuya formula general , para el k-metodo, seria la siguiente (Lambert, pag. 199)

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \sum_{i=1}^l h^i \sum_{j=0}^k \beta_{ij} y_{n+j}^{(i)} \quad \alpha_k = 1$$

y un operador  $\mathcal{L}$  ligado a ella, dado por

$$\mathcal{L}[y(x); h] = \sum_{j=0}^k \left[ \alpha_j y(x+jh) - \sum_{i=1}^l h^i \beta_{ij} y^{(i)}(x+jh) \right]$$

En nuestro caso,  $k = 1, l = 5$  se tienen la formulas conocidas

$$\underline{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} [y'(1) + y'(0)] - \frac{h^2}{12} [y''(1) - y''(0)] + \frac{h^5}{720} y^{(5)}(0) \quad (31)$$

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} [y'(1) + y'(0)] - \frac{h^2}{12} [y''(1) - y''(0)] + \frac{h^5}{720} y^{(5)}(1) \quad (32)$$

con sus operadores  $\underline{\mathcal{L}}$  y  $\bar{\mathcal{L}}$ , dados en terminos genrales por

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}} = & \alpha_0 y(0) - h \beta_{10} y'(0) - h^2 \beta_{20} y''(0) - h^3 \beta_{30} y'''(0) - h^4 \beta_{40} y^{(4)}(0) - h^5 \beta_{50} y^{(5)}(0) \\ & + \alpha_1 y(1) - h \beta_{11} y'(1) - h^2 \beta_{21} y''(1) - h^3 \beta_{31} y'''(1) - h^4 \beta_{41} y^{(4)}(1) - h^5 \beta_{51} y^{(5)}(1) \end{aligned}$$

que en el caso de la (31), proporciona para los coeficientes

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_0 = -1 \quad \underline{\beta}_{10} = 1/2 \quad \underline{\beta}_{20} = 1/12 \quad \underline{\beta}_{30} = \underline{\beta}_{40} = 0 \quad \underline{\beta}_{50} = 1/720 \\ \underline{\alpha}_1 = 1 \quad \underline{\beta}_{11} = 1/2 \quad \underline{\beta}_{21} = -1/12 \quad \underline{\beta}_{31} = \underline{\beta}_{41} = \underline{\beta}_{51} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

y en elde la segunda

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 = -1 \quad \bar{\beta}_{10} = 1/2 \quad \bar{\beta}_{20} = 1/12 \quad \bar{\beta}_{30} = \bar{\beta}_{40} = \bar{\beta}_{50} = 0 \\ \bar{\alpha}_1 = 1 \quad \bar{\beta}_{11} = 1/2 \quad \bar{\beta}_{21} = -1/12 \quad \bar{\beta}_{31} = \bar{\beta}_{41} = 0 \quad \bar{\beta}_{51} = \frac{1}{720} \end{aligned} \quad (34)$$

3. Orden del metodo. En cuanto al orden del metodo y constante del error, se obtendran, desarrollando en el operador  $\mathcal{L}$ , la funcion  $y(x+jh)$ , y sus derivadas en serie de Taylor, como sigue

$$\mathcal{L}[y(x); h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots \quad (35)$$

siendo el subíndice  $p+1$ , de la primera constante  $C_{p+1} \neq 0$ , el indicador del orden  $\frac{p}{h}$  del operador  $\mathcal{L}$ , y esta  $C_{p+1}$  la llamada constante del error.

Se tiene entonces, para  $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(x); h] &= \alpha_0 y_0 - \sum_{i=1}^5 h^i \beta_{i0} y^{(i)}(0) + \alpha_1 y(1) - \sum_{i=1}^5 h^i \beta_{i1} y^{(i)}(1) = \\ &= \alpha_0 y_0 - \sum_{i=1}^5 h^i \beta_{i0} y^{(i)}(0) + \alpha_1 \left[ y(0) + h y'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) + \frac{h^3}{3!} y'''(0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(0) + \dots \right] \\ &\quad - h \beta_{11} \left[ y'(0) + h y''(0) + \frac{h^2}{2!} y'''(0) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(0) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(0) + \dots \right] \\ &\quad - h^2 \beta_{21} \left[ y''(0) + h y'''(0) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(0) + \frac{h^3}{3!} y^{(5)}(0) + \dots \right] \\ &\quad - h^3 \beta_{31} \left[ y'''(0) + h y^{(4)}(0) + \frac{h^2}{2!} y^{(5)}(0) + \dots \right] \\ &\quad - h^4 \beta_{41} \left[ y^{(4)}(0) + h y^{(5)}(0) + \frac{h^2}{2!} y^{(6)}(0) + \dots \right] \\ &\quad - h^5 \beta_{51} \left[ y^{(5)}(0) + h y^{(6)}(0) + \dots \right] = C_0 y(0) + C_1 y'(0) + \dots \end{aligned}$$

Identificando coeficientes entre ambos miembros, resulta

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$C_1 = -\beta_{10} + \alpha_1 - \beta_{11}$$

$$C_2 = -\beta_{20} + \frac{\alpha_1}{2!} - \beta_{11} - \beta_{21}$$

$$C_3 = -\beta_{30} + \frac{\alpha_1}{3!} - \frac{\beta_{11}}{2!} - \beta_{21} - \beta_{31}$$

$$C_4 = -\beta_{40} + \frac{\alpha_1}{4!} - \frac{\beta_{11}}{3!} - \frac{\beta_{21}}{2!} - \beta_{31} - \beta_{41}$$

$$C_5 = -\beta_{50} + \frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\beta_{11}}{4!} - \frac{\beta_{21}}{3!} - \frac{\beta_{31}}{2!} - \beta_{41} - \beta_{51}$$

$$C_6 = \frac{\alpha_1}{6!} - \frac{\beta_{11}}{5!} - \frac{\beta_{21}}{4!} - \frac{\beta_{31}}{3!} - \frac{\beta_{41}}{2!} - \beta_{51}$$

y sustituyendo los valores encontrados en (33) y (34), se tiene para la fórmula sub o (31)

$$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0 \quad C_6 = 1/1440$$

y para la formula super (32)

$$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0 \quad C_6 = -1/1440$$

En consecuencia, ambos metodos son consistentes, puesto que su orden es  $5 > 1$ .

Por otra parte, el primer polinomio caracteristico

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j$$

viene dado, por

$$P(\xi) = -1 + \xi$$

y la raiz de la ecuacion

$$P(\xi) = 0$$

al ser  $\xi = 1$ , hace que el metodo sea cero-estable.

Entonces, como consistencia y ceroestabilidad implican convergencia, los metodos deducidos de ambas formulas, sub y sup son convergentes y cumplen por tanto, las minimas propiedades que un metodo aceptable debe poseer.

4. Debil estabilidad. En cuanto a la debil estabilidad, la ecuacion caracteristica cuyas raices determinan el caracter de absoluta estabilidad, vendrá dada por

$$\pi(r, \bar{h}) \equiv P(r) - \sum_{i=1}^l \bar{h}^i \sigma_i(r) = 0 \quad (36)$$

con

$$\sigma_i(r) = \sum_{j=0}^k \beta_{ij} r^j \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$P(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$$

siempre con la hipotesis de

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = C_n^{to}$$

$$\phi_n = T_n - R_n = C_n^{to}$$

$$\bar{h} = \lambda h$$

que en los metodos en consideracion proporcionan

$$r-1 - \sum_{i=1}^5 \bar{h}^i [\beta_{i0} + \beta_{i1} r] = 0 \quad (37)$$

y despejando r

$$r = \frac{1 + \bar{h}\beta_{10} + \bar{h}^2\beta_{20} + \bar{h}^3\beta_{30} + \bar{h}^4\beta_{40} + \bar{h}^5\beta_{50}}{1 - \bar{h}\beta_{11} - \bar{h}^2\beta_{21} - \bar{h}^3\beta_{31} - \bar{h}^4\beta_{41} - \bar{h}^5\beta_{51}}$$

que para los casos de la super y subformula, se tiene respectivamente:

$$\bar{r} = \frac{1 + \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{h}^2}{12}}{1 - \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{h}^2}{12} - \frac{\bar{h}^5}{720}} \quad (38)$$

$$\bar{r} = \frac{1 + \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{h}^2}{12} + \frac{\bar{h}^5}{720}}{1 - \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{h}^2}{12}} \quad (39)$$

viendose enseguida, como si  $\bar{h}$  o  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ , la inestabilidad absoluta es manifiesta, siendo preciso por tanto para que haya absoluta estabilidad, que

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0$$

encargandose entonces las formulas (38) y (39) de proporcionar los correspondientes intervalos de estabilidad.

5. Ventajas. La gran ventaja que creemos encontrar, es la facil acotacion del error local de truncamiento, que contrasta con las complicadas y generosas cotas mas teoricas que practicas, de los restantes metodos. Esto le hace apropiado para la busqueda de valores iniciales, con los que empezar cualquiera de los multipaso predictores-correctores.

Tambien destaca el caracter lineal de la ecuacion caracteristica, que interviene en la determinacion de los intervalos de absoluta estabilidad, caballo de batalla en otros metodos, en cuanto dicha ecuacion deja de ser lineal.

6. Inconvenientes.

a) Indudablemente, el mas notorio, es la dificultad de calcular las derivadas sucesivas de  $y$ , a partir de la EDO

$$y' = f(x, y)$$

Intentamos paliar este inconveniente, mediante la subrutina DERIVA, con la que se calculan las derivadas sucesivas de  $y$ , tomando como datos de entrada las derivadas parciales de  $f$  respecto de  $x$ , como de  $y$ ; evidentemente mas facil de obtener que las susodichas derivadas totales. El programa sera descrito a continuacion.

b) La resolucion de las ecuaciones (31) y (32), que corrientemente no seran lineales. Tambien se tratara ambos casos a continuacion.

E

E. DERIVACIONES SUCESIVAS

Como es obvio, la precision de cualquier metodo crece , con el orden de las derivadas presentes en el mismo. Son pues, necesarios los calculos de tales derivadas, que por otra parte, en la mayoria de los casos, enseguida se complica grandemente, naciendose poco menos que imposible la consecucion de la f<sup>iv</sup> y siguientes.

Son de recomendar, entonces metodos que ayudados por un ordenador, faciliten tan ardua tarea.

El metodo presente, esta basado en el calculo directo de las derivadas parciales respecto de x e y, de la f(x,y); se guramente mas sencillas que la obtencion directa de la Df(x,y).

1. Notacion. A efectos de programacion, introducimos la siguiente notacion, impuesta por el lenguaje FORTRAN, y la ausencia de ceros como subindice, caracteristica del ordenador utilizado.

Por este motivo, la derivada total l-esima , de la funcion

$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$  o sea  $\frac{d^l}{dx^l} \left( \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \right)$

la representamos por

F(L,M,N).

De otra manera, F(L,M,N) señala la derivada total l-esima, de la funcion derivada parcial m-esima respecto de x, y n-esima respecto de y, de f(x,y).

2. FORMULA GENERAL/Con esta notacion, aplicando la regla de derivacion de las funciones compuestas, tendremos

$F(l,m,n) = D^l F(o,m,n) = D^{l-1} DF(o,m,n) = D^{l-1} ( F(o,m+1,n) + f.F(o,m,n+1) ) = D^{l-1} F(o,m+1,n) + D^{l-1} (f.F(o,m,n+1))$

Haciendo variar l , y encadenando estas identidades, tendremos

$$D^{\ell} F(o, m, n) = D^{\ell-1} F(o, m+1, n) + D^{\ell-1} \{ f \cdot F(o, m, n+1) \}$$

$$D^{\ell-1} F(o, m+1, n) = D^{\ell-2} F(o, m+2, n) + D^{\ell-2} \{ f \cdot F(o, m+1, n+1) \}$$

$$D^{\ell-2} F(o, m+2, n) = D^{\ell-3} F(o, m+3, n) + D^{\ell-3} \{ f \cdot F(o, m+2, n+1) \}$$

$$D^3 F(o, m+l-3, n) = D^2 F(o, m+l-2, n) + D^2 \{ f \cdot F(o, m+l-3, n+1) \}$$

$$D^2 F(o, m+l-2, n) = D F(o, m+l-1, n) + D \{ f \cdot F(o, m+l-2, n+1) \}$$

$$D F(o, m+l-1, n) = F(o, m+l, n) + f \cdot F(o, m+l-1, n+1)$$

Sumando y simplificando, resulta la siguiente formula general

$$F(\ell, m, n) = F(o, \ell+m, n) + \sum_{j=0}^{\ell-1} D^j \{ f \cdot F(o, \ell+m-j-1, n+1) \} \quad (4o)$$

Aplicando la regla de derivacion de Leibnitz, queda

$$F(\ell, m, n) = F(o, \ell+m, n) + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{h=0}^j \binom{j}{h} D^h f \cdot D^{j-h} F(o, \ell+m-j-1, n+1)$$

teniendo en cuenta que

$$f(x, y) = F(o, o, o)$$

y por tanto

$$D^h f = F(h, o, o)$$

se tiene finalmente

$$F(\ell, m, n) = F(o, \ell+m, n) + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{h=0}^j \binom{j}{h} F(h, o, o) \cdot F(j-h, \ell+m-j-1, n+1) \quad (41)$$

El no poder utilizar los ceros como subindices, nos obliga a esta otra notacion

$$FI(m, n) = F(o, m, n) \quad FJ(l, n) = F(l, o, n) \quad FK(l, m) = F(l, m, o)$$

$$FIJ(n) = F(o, o, n) \quad FIK(m) = F(o, m, o) \quad FJK(L) = F(l, o, o)$$

$$FIJK = F(o, o, o) = f(x, y)$$

Con todos estos antecedentes, la formula a programar será

$$F(l, m, n) = FI(l+m, n) + \sum_{j=1}^l \sum_{h=1}^j \binom{j-1}{h-1} D(h) \cdot F(j-h, l+m-j, n+1) \quad (42)$$

donde para evitar el inconveniente tantas veces citado, hemos desfasado en una unidad los subindices  $h$  y  $j$ ; traslacion que se ha reflejado tambien en el numero combinatorio  $\binom{j-1}{h-1}$

asi como en la derivada  $D(n)$  y en  $F(j-n, l+m-j, n+1)$ .

Previamente a llegar a la consecucion de la sexta derivada -  $D(6)$  - lo mas seguro a los efectos de su programacion, sera la realizacion efectiva de la formula a emplear, al objeto de ver como estan enlazadas las distintas derivadas y no corranos el riesgo de utilizar alguna antes de su ejecucion por el ordenador.

5. Detalles de la programacion.

Se tiene entonces para las  $D(l)$

$$D(l+1) = FIK(l) + \sum_{j=1}^l \sum_{h=1}^j \binom{j-1}{h-1} D(h) \cdot F(j-h, l-j, 1)$$

y desarrollando las sumatorias

$$l=1$$

$$D(2) = FIK(1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1, 1)$$

$$l=2$$

$$D(3) = FIK(2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1, 1)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(1, 1) *$$

$$j=2 \quad h=2 \quad + D(2) \cdot FIJ(1)$$

$$l=3$$

$$D(4) = FIK(3) +$$



$$\begin{aligned}
 j=1 & \quad h=1 & + D(1) \cdot FI(2,1) \\
 j=2 & \quad h=1 & + D(1) \cdot F(1,1,1) * \\
 & \quad h=2 & + D(2) \cdot FI(1,1) \\
 & \quad & + D(1) \cdot FJ(2,1) * \\
 j=3 & \quad h=1 & + 2D(2) \cdot FJ(1,1) * \\
 & \quad h=2 & + D(3) \cdot FIJ(1) \\
 & \quad h=3 &
 \end{aligned}$$

l=4

D(5) = FIK(4) +

$$\begin{aligned}
 j=1 & \quad h=1 & + D(1) \cdot FI(3,1) \\
 j=2 & \quad h=1 & + D(1) \cdot F(1,2,1) * \\
 & \quad h=2 & + D(2) \cdot FI(2,1) \\
 & \quad & + D(1) \cdot F(2,1,1) * \\
 j=3 & \quad h=1 & + 2D(2) \cdot F(1,1,1) * \\
 & \quad h=2 & + D(3) \cdot FI(1,1) \\
 & \quad h=3 & + D(1) \cdot FJ(3,1) * \\
 j=4 & \quad h=1 & + 3D(2) \cdot FJ(2,1) * \\
 & \quad h=2 & + 3D(3) \cdot FJ(1,1) * \\
 & \quad h=3 & + D(4) \cdot FIJ(1) \\
 & \quad h=4 &
 \end{aligned}$$

l=5

D(6) = FIK(5) +

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(4,1)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(4,1)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(3,1)$$

$$j=3 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(2,2,1)$$

$$h=2 \quad + 2D(2) \cdot F(1,2,1)$$

$$h=3 \quad + D(3) \cdot FI(2,1)$$

$$j=4 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(3,1,1) \times$$

$$h=2 \quad + 3D(2) \cdot F(2,1,1) \times$$

$$h=3 \quad + 3D(3) \cdot F(1,1,1) \times$$

$$h=4 \quad + D(4) \cdot FI(1,1)$$

$$j=5 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(4,1) \times$$

$$h=2 \quad + 4D(2) \cdot FJ(3,1) \times$$

$$h=3 \quad + 6D(3) \cdot FJ(2,1) \times$$

$$h=4 \quad + 4D(4) \cdot FJ(1,1) \times$$

$$h=5 \quad + D(5) \cdot FIJJ(1)$$

Ahora bien, los datos de que disponemos, caso de que podamos calcular estas derivadas parciales, serian

$FI(1,1)$  ,  $FI(1,2)$  ,  $FI(1,3)$  ,  $FI(1,4)$  ,  $FI(2,1)$  ,  $FI(2,2)$  ,  $FI(2,3)$  ,  $FI(3,2)$  ,  
 $FI(4,1)$  ,  $FIJ(1)$  ,  $FIJ(2)$  ,  $FIJ(3)$  ,  $FIJ(4)$  ,  $FIJ(5)$  ,  $FIK(1)$  ,  $FIK(2)$  ,  $FIK(3)$  ,  $FIK(4)$  ,  
 $FIK(5)$  .

Aparte , claro esta de  $D(1)$  .

Entonces, para llegar a la  $D(6)$  , necesitamos antes calcular todas las derivadas marcadas con un asterisco, esto es

$FJ(1,1)$  ,  $FJ(2,1)$  ,  $FJ(3,1)$  ,  $FJ(4,1)$  ,  $F(1,1,1)$  ,  $F(1,2,1)$  ,  $F(2,1,1)$  ,  $F(2,2,1)$  ,  
 $F(3,1,1)$  .

Para ver el orden de concatenacion, que muestran entre si estas derivadas continuemos desarrollandolas segun la formula general, y obtenemos asi, para las

FJ los siguientes:

$$FJ(l, n) = FI(l, n) + \sum_{j=1}^l \sum_{h=1}^j \binom{j-1}{h-1} D(h) \cdot F(j-h, l-j, n+1)$$

$$l=1 \quad n=1$$

$$FJ(1, 1) = FI(1, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FIJ(2)$$

$$l=2 \quad n=1$$

$$FJ(2, 1) = FI(2, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1, 2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(1, 2) +$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FIJ(2)$$

$$l=3 \quad n=1$$

$$FJ(3, 1) = FI(3, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2, 2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1, 1, 2)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(1, 2)$$

$$j=3 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(2, 2) +$$

$$h=2 \quad + 2D(2) \cdot FJ(1, 2)$$

$$h=3 \quad + D(3) \cdot FIJ(2)$$

$$l=4 \quad n=1$$

$$FJ(4, 1) = FI(4, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(3, 2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1, 2, 2)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(2, 2)$$

$$j=3 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(2, 1, 2)$$

$$h=2 \quad + 2D(2) \cdot F(1, 1, 2)$$

$$h=3 \quad + D(3) \cdot FI(1, 2)$$

$$j=4 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(3, 2)$$

$$h=2 \quad + 3D(2) \cdot FJ(2, 2)$$

$$h=3 \quad + 3D(3) \cdot FJ(1, 2)$$

$$h=4 \quad + D(4) \cdot FJJ(2)$$

En estos cuadros, aparecen nuevas FJ, tales como, FJ(1,2), FJ(2,2) y FJ(3,2) las cuales volvemos a desarrollarlas de nuevo, con los siguientes resultados:

$$l=1 \quad n=2$$

$$FJ(1, 2) = FI(1, 2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FIJ(3)$$

$$l=2 \quad n=2$$

$$FJ(2, 2) = FI(2, 2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1, 3)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(1, 3)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FIJ(3)$$

$$l=3 \quad n=2$$

$$FJ(3, 2) = FI(3, 2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2, 3)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1,1,3)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(1,3)$$

$$j=3 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(2,3)$$

$$h=2 \quad + 2D(2) \cdot FJ(1,3)$$

$$h=3 \quad + D(3) \cdot FIJ(3)$$

De nuevo aparecen otras FJ, no calculadas anteriormente; las FJ(1,3) y la FJ(2,3) que desarrolladas proporcionan a su vez:

$$l=1 \quad n=3$$

$$FJ(1,3) = FI(1,3) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FIJ(4)$$

$$l=2 \quad n=3$$

$$FJ(2,3) = FI(2,3) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1,4)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FJ(1,4)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FIJ(4)$$

Repetiendo el desarrollo, con la FJ(1,4) resultará

$$l=1 \quad n=4$$

$$FJ(1,4) = FI(1,4) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FIJ(5)$$

Siguiendo los desarrollos, ahora con las F(1,m,n), resulta

$$l=1 \quad m=1 \quad n=1$$

$$F(1,1,1) = FI(2,1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1,2)$$

$$l=1 \quad m=1 \quad n=2$$

$$F(1, 1, 2) = FI(2, 2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1, 3)$$

$$l=1 \quad m=1 \quad n=3$$

$$F(1, 1, 3) = FI(2, 3) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(1, 4)$$

$$l=1 \quad m=2 \quad n=1$$

$$F(1, 2, 1) = FI(3, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2, 2)$$

$$l=1 \quad m=2 \quad n=2$$

$$F(1, 2, 2) = FI(3, 2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2, 3)$$

$$l=1 \quad m=3 \quad n=1$$

$$F(1, 3, 1) = FI(4, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(3, 2)$$

$$l=2 \quad m=1 \quad n=1$$

$$F(2, 1, 1) = FI(3, 1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2, 2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1, 1, 2)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(1, 2)$$

$$l=2 \quad m=1 \quad n=2$$

$$F(2,1,2) = FI(3,2) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(2,3)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1,1,3)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(1,3)$$

$$l=2 \quad m=2 \quad n=1$$

$$F(2,2,1) = FI(4,1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(3,2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1,2,2)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(2,2)$$

$$l=3 \quad m=1 \quad n=1$$

$$F(3,1,1) = FI(4,1) +$$

$$j=1 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot FI(3,2)$$

$$j=2 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(1,2,2)$$

$$h=2 \quad + D(2) \cdot FI(2,2)$$

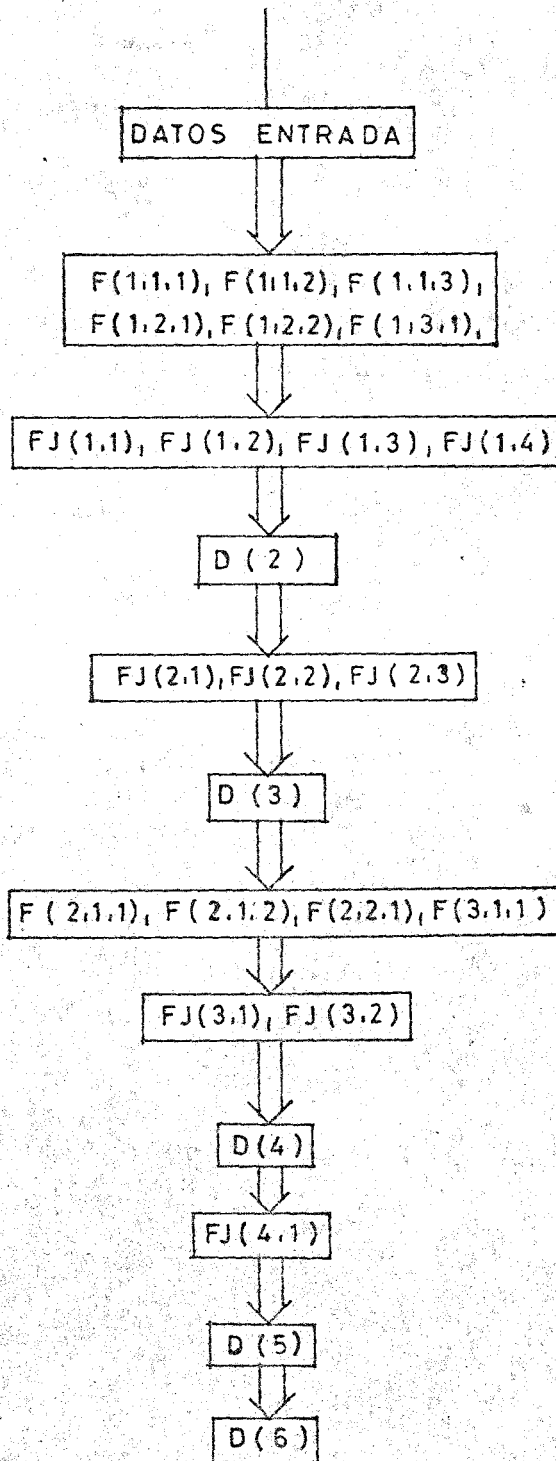
$$j=3 \quad h=1 \quad + D(1) \cdot F(2,1,2)$$

$$h=2 \quad + 2D(2) \cdot F(1,1,1)$$

$$h=3 \quad + D(3) \cdot FI(1,2)$$

4. Diagrama de flujo.

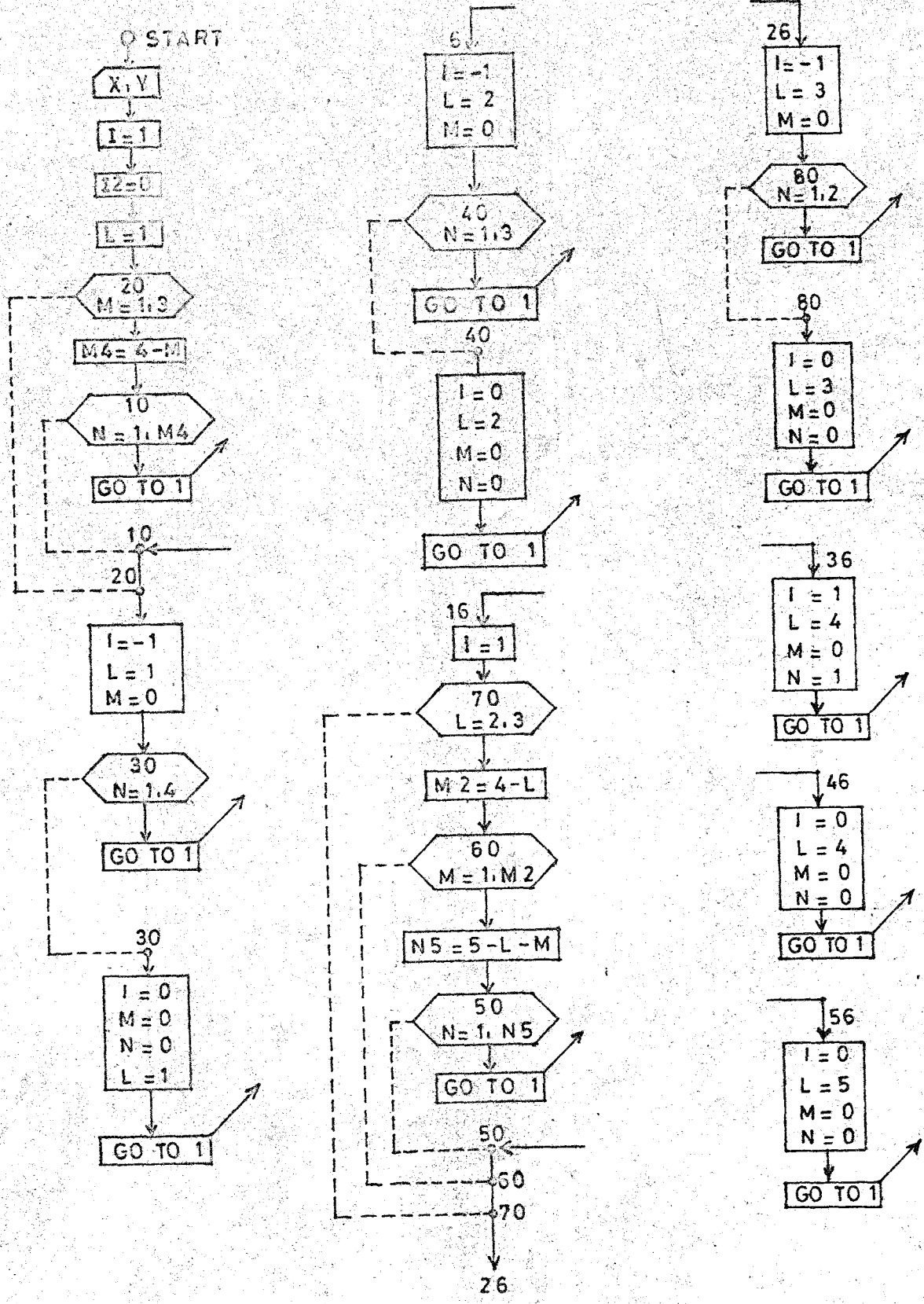
Del examen de estos cuadros, deducimos el siguiente orden de ejecución, y como consecuencia el diagrama adjunto:

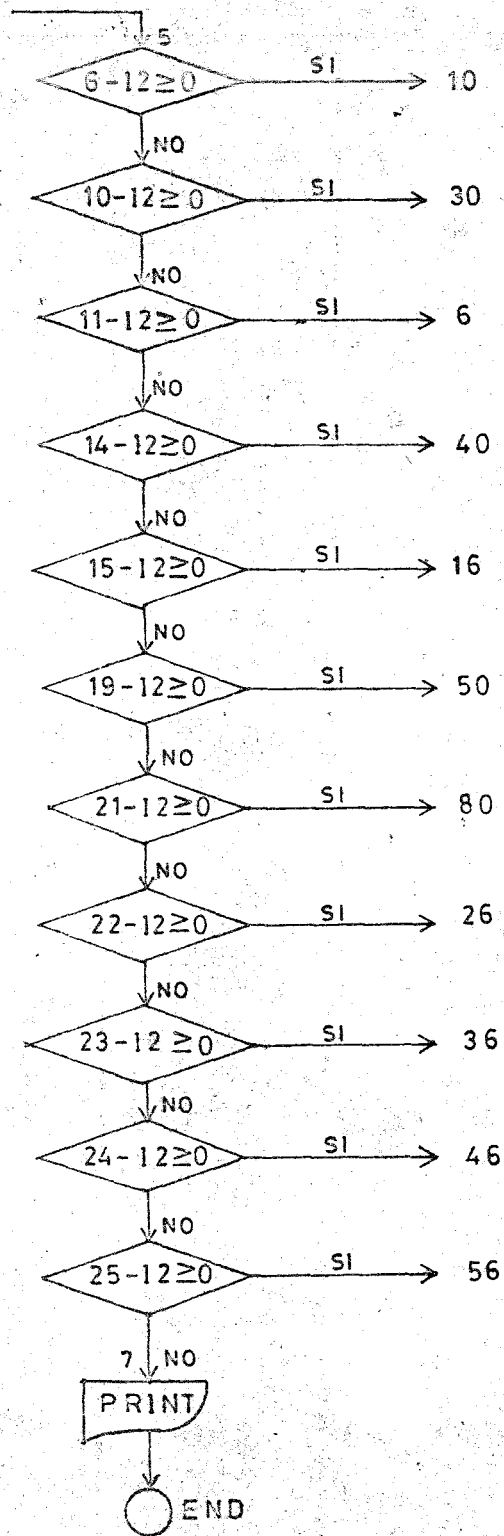


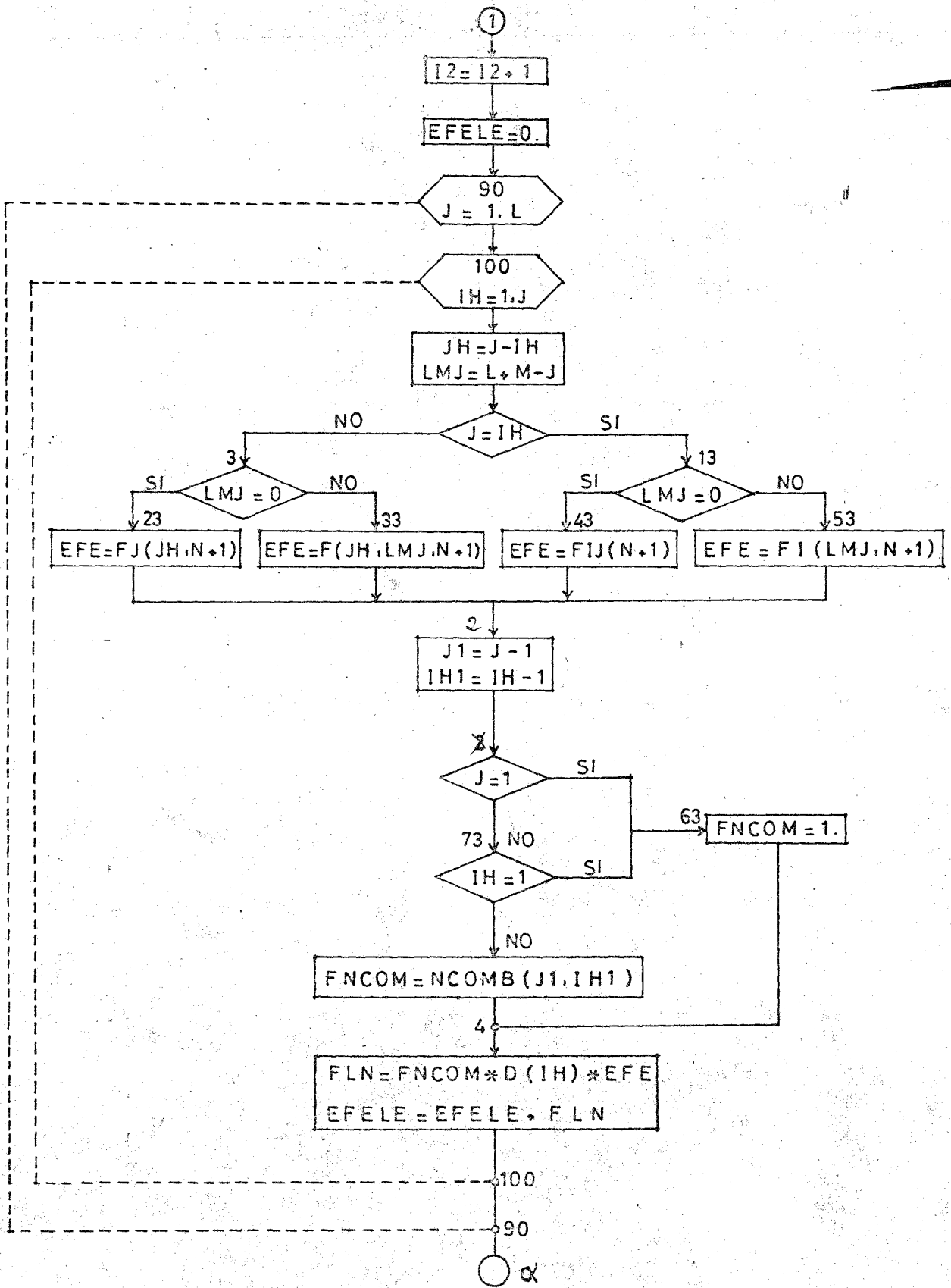
5. Programación FORTRAN. El programa en Fortran, así como su comprobación en un ejemplo sencillo:  $y' = x + y$   $y(0) = 0$

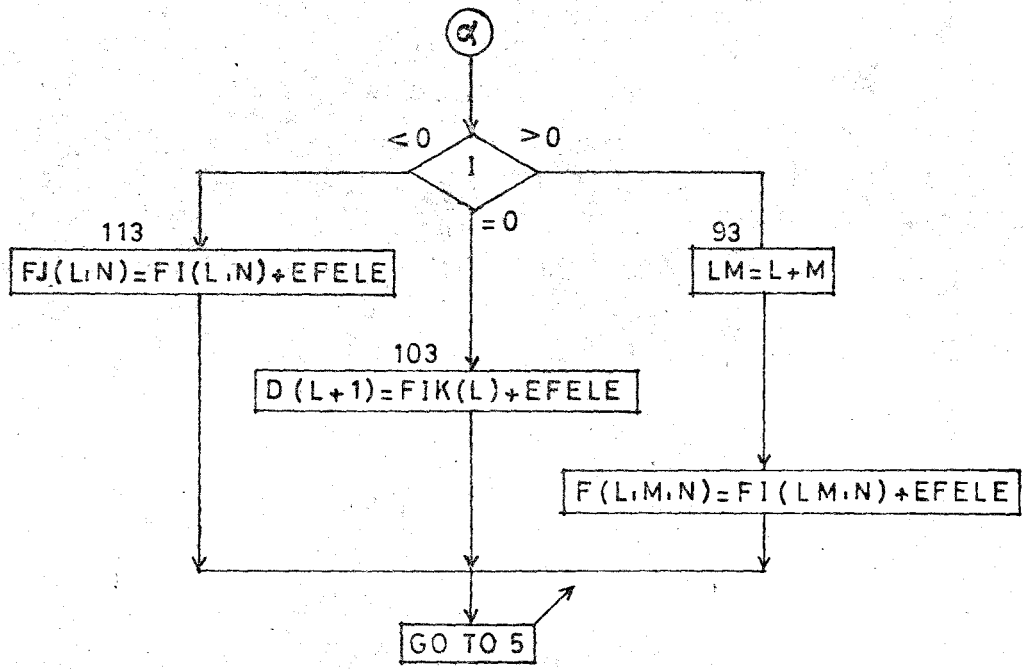
se muestra a continuación.











\*LIST PRINTER  
\*ARITHMETIC TRACE  
\*IF TRACE

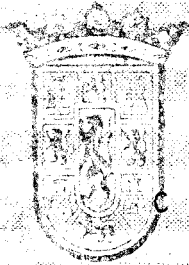
PAGE 1

```
C      CALCULO DERIVADAS SUCESIVAS DE DY#F%X,Y#
C      D%N# SIGNIFICA DERIVADA N-ESIMA DE Y, O N-1 ESIMA DE F%X,Y#
C      F%L,M,N# SIGNIFICA DERIVADA TOTAL L-ESIMA DE LAS M-ESIMA PARCIAL
C      RESPECTO DE X,Y N-ESIMA PARCIAL RESPECTO DE Y
C      FI%M,N# REPRESENTA F%O,M,N#
C      FJ%L,N# REPRESENTA F%L,O,N#
C      FK%L,M# REPRESENTA F%L,M,O#
C      FIJ%N# REPRESENTA F%O,O,N#
C      FIK%M# REPRESENTA F%O,M,O#
C      FJK%L# REPRESENTA F%L,O,O#
C      D%1#F%O,O,O#F%X,Y#FIJK
C      EJEMPLO F%X,Y#X&Y
C      DIMENSION F%3,3,3#,FI%4,4#,FJ%4,4#,FIK%5#,FIJ%5#,D%6#
C      READ 500,X,Y
C      FIJ%1#1.
C      FIJ%2#0.
C      FIJ%3#0.
C      FIJ%4#0.
C      FIJ%5#0.
C      FIK%1#1.
C      FIK%2#0.
C      FIK%3#0.
C      FIK%4#0.
C      FIK%5#0.
C      FI%1,1#0.
C      FI%1,2#0.
C      FI%1,3#0.
C      FI%1,4#0.
C      FI%2,1#0.
C      FI%2,2#0.
C      FI%2,3#0.
C      FI%3,1#0.
C      FI%3,2#0.
C      FI%4,1#0.
C      D%1#X&Y
C      CALCULO DE LAS F%1,1,1#,F%1,1,2#,F%1,1,3#,F%1,2,1#,
C      F%1,2,2#,F%1,3,1#
C      I#1
C      EL SIGNO O NULIDAD DE I SE/ALA EL CARACTER DE F%L,M,N#,FJ%L,N#,O
C      D%L#
C      I2#0
C      L#1
C      DO 20 M#1,3
C      M4#4-M
C      DO 10 N#1,M4
C      GO TO 1
10 CONTINUE
20 CONTINUE
C      CALCULO DE FJ%1,1#,FJ%1,2#,FJ%1,3#,FJ%1,4#
C      I#-1
```

# CAJA PROVINCIAL DE AHORROS

CENTRO DE CALCULO

CORDOBA

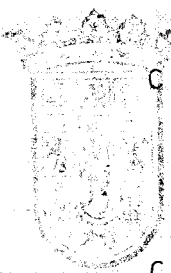


```
L#1
M#0
DO 30 N#1,4
GO TO 1
30 CONTINUE
CALCULO DE D%2
I#0
L#1
M#0
N#0
GO TO 1
C   CALCULO DE FJ%2,1, FJ%2,2, FJ%2,3
6   I#-1
    L#2
    M#0
    DO 40 N#1,3
    GO TO 1
C   40 CONTINUE
    CALCULO DE D%3
    I#0
    L#2
    M#0
    N#0
    GO TO 1
C   CALCULO DE F%2,1,1, F%2,1,2, F%2,2,1, F%3,1,1
16  I#1
    DO 70 L#2,3
    M2#4-L
    DO 60 M#1, M2
    N5#5-L-M
    DO 50 N#1, N5
    GO TO 1
50  CONTINUE
60  CONTINUE
70  CONTINUE
C   CALCULO DE FJ%3,1, FJ%3,2
    I#-1
    L#3
    M#0
    DO 80 N#1,2
    GO TO 1
C   80 CONTINUE
    CALCULO DE D%4
26  I#0
    L#3
    M#0
    N#0
    GO TO 1
C   CALCULO DE FJ%4,1
36  I#-1
    L#4
    M#0
    N#1
```

## CAJA PROVINCIAL DE AHORROS

CENTRO DE CALCULO

CORDOBA



```

C      GO TO 1
      CALCULO DE D%5
46 I#0
      L#4
      M#0
      N#0
      GO TO 1
C      CALCULO DE D%6
56 I#0
      L#5
      M#0
      N#0
C      SUBPROGRAMA PRINCIPAL
1 I2#I2&1
  EFELE#0.
  DO 90 J#1,L
  DO 100 IH#1,J
  JH#J-IH
  LMJ#L&M-J
  IF%JH#3,13,3
3 IF%LMJ#33,23,33
23 EFE#FJ%JH,N&1
  GO TO 2
33 EFE#F%JH,LMJ,N&1
  GO TO 2
13 IF%LMJ#53,43,53
43 EFE#FIJ%N&1
  GO TO 2
53 EFE#FI%LMJ,N&1
2 J1#J-1
  IH1#IH-1
  IF%J1#73,63,73
63 FNCOM#1.
  GO TO 4
73 IF%IH1#83,63,83
83 FNCOM#NCOMB%J1,IH1
4 FLN#FNCOM*D%IH#EFE
  EFELE#EFELE&FLN
100 CONTINUE
90 CONTINUE
  IF%I#113,103,93
113 FJ%L,N#FI%L,N#EFELE
  GO TO 5
103 D%L&1#FIK%L#EFELE
  GO TO 5
93 LM#L&M
  F%L,M,N#FI%LM,N#EFELE
C      DISTRIBUCION SALIDAS SUBPROGRAMA PRINCIPAL
5 IF%6-I2#15,10,10
15 IF%10-I2#25,30,30
25 IF%11-I2#35,6,6
35 IF%14-I2#45,40,40
45 IF%15-I2#55,16,16

```

```

55 IF%19-12#65,50,50
65 IF%21-12#75,80,80
75 IF%22-12#85,26,26
85 IF%23-12#95,36,36
95 IF%24-12#105,46,46
105 IF%25-12#7,56,56
7 PRINT 600,X,Y,%D%I#,I#1,6#
500 FORMAT%2F12.8#
600 FORMAT%34H DERIVADAS SUCESIVAS DE F%X,Y#X&Y//6X,1HX,15X,1HY,14X,4
1HD%1#,11X,4HD%2#,11X,4HD%3#,11X,4HD%4#,11X,4HD%5#,11X,4HD%6#,/8F15
2.8#
END

```

```

00009 10000000-1
00019 00000000RR
00023 0001
00027 0000
00031 0003
00035 0004
00039 0002
00043 0005
00047 0006
00051 0010
00055 0011
00059 0014
00063 0015
00067 0019
00071 0021
00075 0022
00079 0023
00083 0024
00087 0025

```

00097	F	00357	00367	FI	00517	00527	FJ	00677	00687	FIK	00727	00737	FIJ	00777	00787	D	00837
00847	X		00857	Y		00861	I		00865	I2		00869	L		00873	M	
00877	M4		00881	N		00885	M2		00889	N5		00899	EFELE		00903	J	
00907	IH		00911	JH		00915	LMJ		00925	EFE		00929	J1		00933	IH1	
00943	FNCOM		00953	FLN		00957	LM		00962	NCOMB							

```

0500 05802 0020 01704 0010 01668 0001 03048 0030 01844 0006 01984 0040 02088 0016 02228
0070 02452 0060 02416 0050 02380 0080 02592 0026 02628 0036 02732 0046 02848 0056 02952
0090 04160 0100 04124 0003 03284 0013 03514 0033 03428 0023 03352 0002 03718 0053 03650
0043 03582 0073 03890 0063 03858 0004 04004 0083 03958 0113 04264 0103 04438 0093 04578
0005 04772 0015 04852 0025 04932 0035 05012 0045 05092 0055 05172 0065 05252 0075 05332
0085 05412 0095 05492 0105 05572 0007 05652 0600 05842

```

```

06166 CORES USED
19999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION

```

```
*LOCAL ,NFACT,NCOMB
```

```

MAIN 07800 06166 LOADED
NCOMB 13966 00408 LOADED
NFACT 14374 00260 LOADED
03 14634 00510 LOADED

```



-00N  
-00M  
-00L  
-00K  
-00J

DERIVADAS SUCESIVAS DE F%X,Y#X&Y

X  
0.00000000

Y  
0.00000000

D%1#  
0.00000000

D%2#  
1.00000000

D%3#  
1.00000000

D%4#  
1.00000000

D%5#  
1.00000000

D%6#  
1.00000000

Cabe todavía, la posibilidad de que el cálculo de las derivadas parciales, figurantes como datos de entrada, en el programa DERIVA, sea complicado y haga extremadamente difícil su cálculo, a partir de cierto orden. Queda entonces, el recurso de preparar una rutina particular para cada ejemplo; es decir, proceder como en la derivación manual; descomponer la expresión a derivar - supuesta racional - en elementos más sencillos, según las distintas operaciones aritméticas, hasta llegar al eslabón más elemental: la variable  $x$  o  $y$ , respecto de la cual se este derivando, para terminar aplicando a cada eslabón las fórmulas generales de derivación  $n$ -ésima, que recaerán sobre alguna de las tres expresiones siguientes:

$$D^n(A \pm B) = D^n A \pm D^n B$$

$$D^n(A \cdot B) = \sum_{j=0}^n D^j A \cdot D^{n-j} B \quad (\text{Regla de Leibnitz})$$

$$D^n(A/B) = (1/B) \cdot (D^n A - \sum_{j=1}^n D^j B \cdot D^{n-j}(A/B)) \quad (\text{Método iterativo})$$

Es el camino seguido, por Moore, Davidson Jaschke y Shayer, en la confección de la DIFEQ Integration Routine, publicada por la Technical Report, Lockheed Missiles and Space Co., Palo Alto, California. (1964).

E. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CLAVE.

En la resolución de las ecuaciones (31), (32), como en otros muchos métodos, conviene distinguir dos casos, según que la ecuación diferencial (1), sea o no lineal.

i) Ecuaciones lineales.

Aun cuando las ecuaciones de este tipo

$$y' = P_1(x)y + Q_1(x)$$

sean integrables directamente, mediante cuadraturas; la presencia en su solución de exponenciales, pudiera sugerir la utilización del cálculo numérico, y a este objeto, las ecuaciones que proporcionan las cotas  $\bar{y}$  e  $\underline{y}$ , son sencillas, lineales en  $y$ , puesto que así son todas las derivadas sucesivas.

En efecto, se tiene

$$y'' = P_2(x)y + Q_2(x) \quad P_2(x) \equiv P_1^2 + P_1' \quad Q_2(x) = P_1 Q_1 + Q_1'$$

$$y''' = P_3(x)y + Q_3(x) \quad P_3(x) \equiv P_1 P_2 + P_2' \quad Q_3(x) = P_2 Q_1 + Q_2'$$

$$y^{(i+1)} = P_{i+1}(x)y + Q_{i+1}(x) \quad P_{i+1}(x) \equiv P_1 P_i + P_i' \quad Q_{i+1}(x) = P_i Q_1 + Q_i'$$

que proporcionan para ambas cotas, los siguientes valores

$$\bar{y}_1 = \frac{y_0 \left[ 1 + \frac{h}{2} P_1(0) + \frac{h^2}{12} P_2(0) + \frac{h}{2} (Q_1(\bar{1}) + Q_1(0)) - \frac{h^2}{12} [Q_2(\bar{1}) - Q_2(0)] + \frac{h^5}{720} Q_5(\bar{1}) \right]}{1 - \frac{h}{2} P_1(\bar{1}) + \frac{h^2}{12} P_2(\bar{1}) - \frac{h^5}{720} P_5(\bar{1})}$$

$$\underline{y}_1 = \frac{y_0 \left[ 1 + \frac{h}{2} P_1(0) + \frac{h^2}{12} P_2(0) + \frac{h^5}{720} P_5(0) \right] + \frac{h}{2} [Q_1(\underline{1}) + Q_1(0)] - \frac{h^2}{12} [Q_2(\underline{1}) - Q_2(0)] + \frac{h^5}{720} Q_5(0)}{1 - \frac{h}{2} P_1(\underline{1}) + \frac{h^2}{12} P_2(\underline{1})}$$

ecuaciones de fácil programación.

ii) Ecuaciones no-lineales.

En este caso, las ecuaciones (31) y (32), utilizadas para calcular ambas cotas numericas, son en general complicadas, aconsejandose los metodos de iteracion y por consiguiente el uso de un ordenador.

Se sabe, Durand (10) pag. 31, que la ecuacion  $F(y) = 0$ , para resolverla iterativamente, hay que expresarla en la forma

$$y_1 = \varphi(y_1) \Leftrightarrow F(y_1) = 0 \quad (43)$$

y la ecuacion de iteracion, sera

$$y_1^{[n+1]} = \varphi(y_1^{[n]}) \quad (44)$$

convergiendo  $y_1^{[n+1]}$  hacia la solucion  $y_1$ , cuando

$$k = \left| \frac{d\varphi(y_1)}{dy_1} \right| < 1$$

con un error al cabo de iteraciones, dado por

$$e_n = y_1 - y_1^{[n]} = k^n e_0 \quad e_0 = y_1 - y_0 \quad k = \left| \frac{d\varphi}{dy} \right| \quad (45)$$

que puede acotarse facilmente, e incluso hacerse despreciable tomando n suficientemente grande.

En realidad, desde el punto de vista practica, la comprobacion de la condicion anterior  $k < 1$ , es realmente superflua, por cuanto dicha comprobacion es a posteriori, una vez calculado  $\bar{y}_1$ , tan aproximado como se quiera del valor exacto  $y_1$ ; y si dicho modulo fuese mayor que la unidad, la marcha del proceso lo detectaria rapidamente, al no estabilizarse las iteraciones.

Para lo que si podria servir dicha condicion, si acaso, seria para acotar el paso n; problema este aun no resuelto satisfactoriamente.

En nuestro caso, ecuaciones (31) y (32), las citadas condiciones serian

$$\left| \frac{h}{2} \frac{d}{dy} f(x_1, \bar{y}_1) - \frac{h^2}{12} \frac{d^2}{dy^2} f(x_1, \bar{y}_1) + \frac{h^3}{720} \frac{d^3}{dy^3} f(x_1, \bar{y}_1) \right| < 1 \quad (46)$$

$$\left| \frac{h}{2} \frac{d}{dy} f(x_1, \bar{y}_1) - \frac{h^2}{12} \frac{d^2}{dy^2} f(x_1, \bar{y}_1) \right| < 1 \quad (47)$$

Podria caber la duda, puesto que este metodo iterativo, presupone desde el punto de vista geometrico, que la tangente a la curva  $z = \varphi(y)$ , forme con el eje  $y^+$  un angulo menor de  $45^\circ$ , que dicho angulo fuese mayor, y entonces escapara dicha solucion a los metodos iterativos. La unicidad de tal solucion ha sido demostrada por Henriici ( ) pag. 216, mediante el siguiente teorema:

Sea la funcion  $F(y)$  definida para

$$-\infty < y < \infty$$

y supongamos e xista la constante  $K$  tal, que

$$0 \leq K < 1$$

y ademas cumpla

$$|F(y^*) - F(y)| \leq K |y^* - y|$$

con  $y^*$ ,  $y$  arbitrarios. Se verifica entonces, las siguientes conclusiones:

i) La ecuacion  $y=F(y)$  tiene solucion unica. Sea  $y$ .

ii) Para un  $y^{[0]}$  arbitrario, la sucesion

$$y^{[n+1]} = F(y^{[n]}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge hacia  $y$ .

iii) Se verifican las siguientes estimaciones:

$$|y - y^{[n]}| \leq \frac{K}{1-K} |y^{[n]} - y^{[n-1]}| \leq \frac{K^n}{1-K} |y^{[1]} - y^{[0]}|.$$

F. REALIZACION PRACTICA

La gran mayoria de los ejemplos resueltos, han sido realizados con una minicomputadora Compucorp 125 Scientist, utilizando el LEMP como lenguaje, y con los diagramas de flujo que a continuacion se reseñan.

a) Ecuaciones lineales.

Sea esta

$$y' = P_1 y + Q_1 \quad y(0) = y_0 \quad (48)$$

$P_1$  y  $Q_1$  funciones exclusivamente de  $x$ .

La integral general viene dada como se sabe, por

$$y_1 = \frac{y_0 \left[ 1 + \frac{h}{2} P_1(x_0) + \frac{h^2}{12} P_2(x_0) + \frac{h^3}{720} P_3(x_0) (1-\theta) \right] + \frac{h}{2} Q_1(x_0) + \frac{h^2}{12} Q_2(x_0) + \frac{h^3}{720} Q_3(x_0) (1-\theta)}{1 - \frac{h}{2} P_1(x_1) + \frac{h^2}{12} P_2(x_1) - \frac{h^3}{720} P_3(x_1) \theta} + \frac{\frac{h}{2} Q_1(x_1) - \frac{h^2}{12} Q_2(x_1) + \frac{h^3}{720} Q_3(x_1) \theta}{1 - \frac{h}{2} P_1(x_1) + \frac{h^2}{12} P_2(x_1) - \frac{h^3}{720} P_3(x_1) \theta} = \frac{A_0 + A_1}{B_1} \quad (49)$$

obteniendose  $\bar{y}_1$  o  $y_1$  segun el valor que tome el parametro  $\theta \in \{0, 1\}$

El diagrama de flujo, aparece a continuacion, conteniendo los recuadros una RX, indicadora del registro en que se opera. Tambien, se han hecho rutinas, al parecer triviales, como las que calculan  $h^2/12$  y  $h^3/720$ , con el objeto de ahorrar posiciones de memoria, muy escasa por otra parte en estas mini-computadoras.

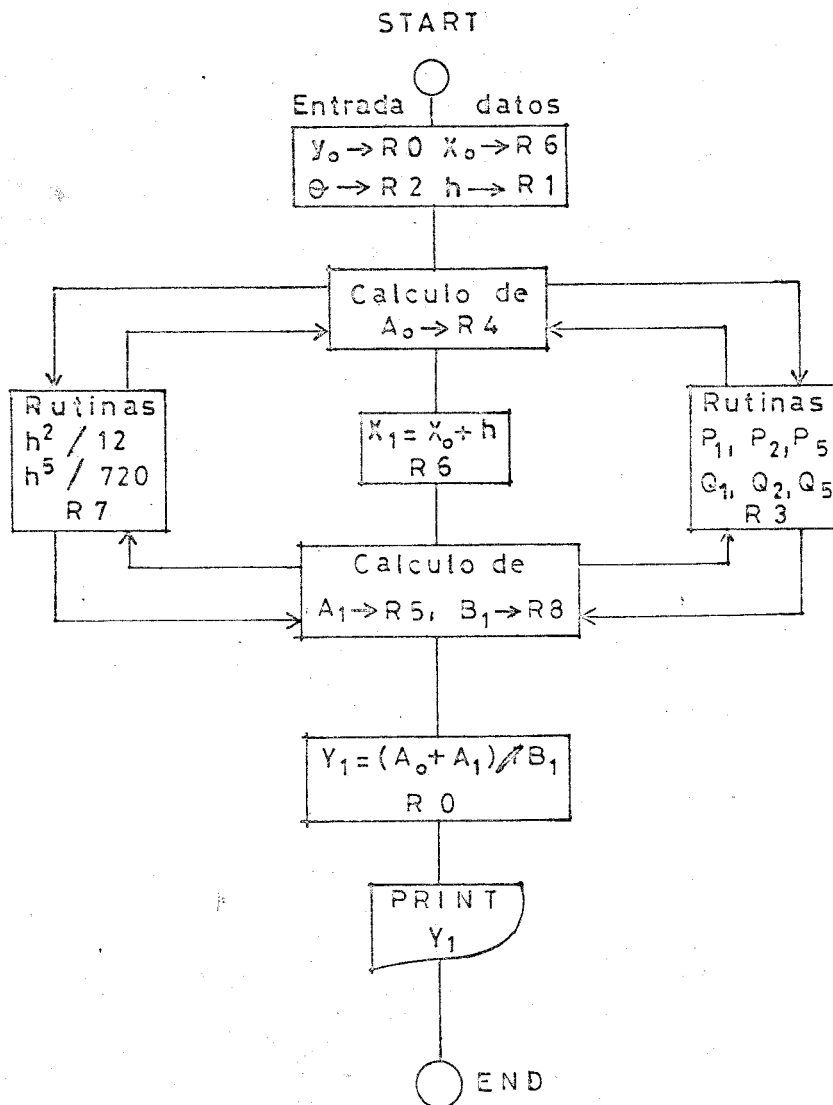


Diagrama de flujo: Ecuaciones lineales.

b. Caso general: ecuaciones no-lineales.

En la mayoría de las veces, las derivadas aparecen encadenadas

$$y' = f_1(x, y), \quad y'' = f_2(x, y, y'), \quad y''' = f_3(x, y, y', y''), \quad y^{(4)} = f_4(x, y, y', y'', y''')$$

$$y^{(5)} = f_5(x, y, y', y'', y''', y^{(4)})$$

con lo que la programación es más sencilla. En caso excepcional se hará uso de la subrutina DERIVA.

La fórmula general, tantas veces citada, poniendo de manifiesto el algoritmo iterativo, vendrá dada por

$$(50) \quad y_1^{[j+1]} = y_0 + \frac{h}{2} f'(0) + \frac{h^2}{12} f''(0) + \frac{h^3}{720} f'''(0)(1-\theta) + \frac{h}{2} f(x_j, y_j^{[j]}) - \frac{h^2}{12} f'(x_j, y_j^{[j]}) + \frac{h^3}{720} \theta f'''(x_j, y_j^{[j]})$$

con  $y_1^{[0]} = y_0$ .

Más brevemente, escribimos

$$y_1^{[j+1]} = A_0 + A_1(j) \quad \text{con}$$

$$A_0 = y_0 + \frac{h}{2} f'(0) + \frac{h^2}{12} f''(0) + \frac{h^3}{720} f'''(0)(1-\theta)$$

$$A_1(j) = \frac{h}{2} f(x_j, y_j^{[j]}) - \frac{h^2}{12} f'(x_j, y_j^{[j]}) + \frac{h^3}{720} \theta f'''(x_j, y_j^{[j]})$$

El diagrama de flujo, va a continuación, y con arreglo a él, se han realizado la mayoría de los ejemplos tratados. En dicho diagrama, la rutina encargada del cálculo de derivadas sucesivas, entra con los registros R-0 y R-6, donde en el inicio se almacenan  $x_0$  e  $y_0$  respectivamente.

La salida se efectúa por los R-1, R-2, R-3, R-4 y R-5 donde se almacenan las derivadas:  $Dy$ ,  $D^2y$ ,  $D^3y$ ,  $D^4y$  y  $D^5y$  en ese orden.

Como solamente se necesitan las derivadas  $y'$ ,  $y''$  e  $y^{(5)}$ , transitoriamente puede disponerse de los registros R-3 y R-4. El paso  $h$ , se almacena en R-7. También como en el caso anterior, deben utilizarse subrutinas para el cálculo de  $h^2/12$  y  $h^3/720$ .

En cuanto a la introducción de los factores  $(1-\theta)$  y  $\theta$ , hay que hacerla manualmente por teclado, previo el Halt correspondiente, ya que no existen más registros donde almacenar dicho parámetro.



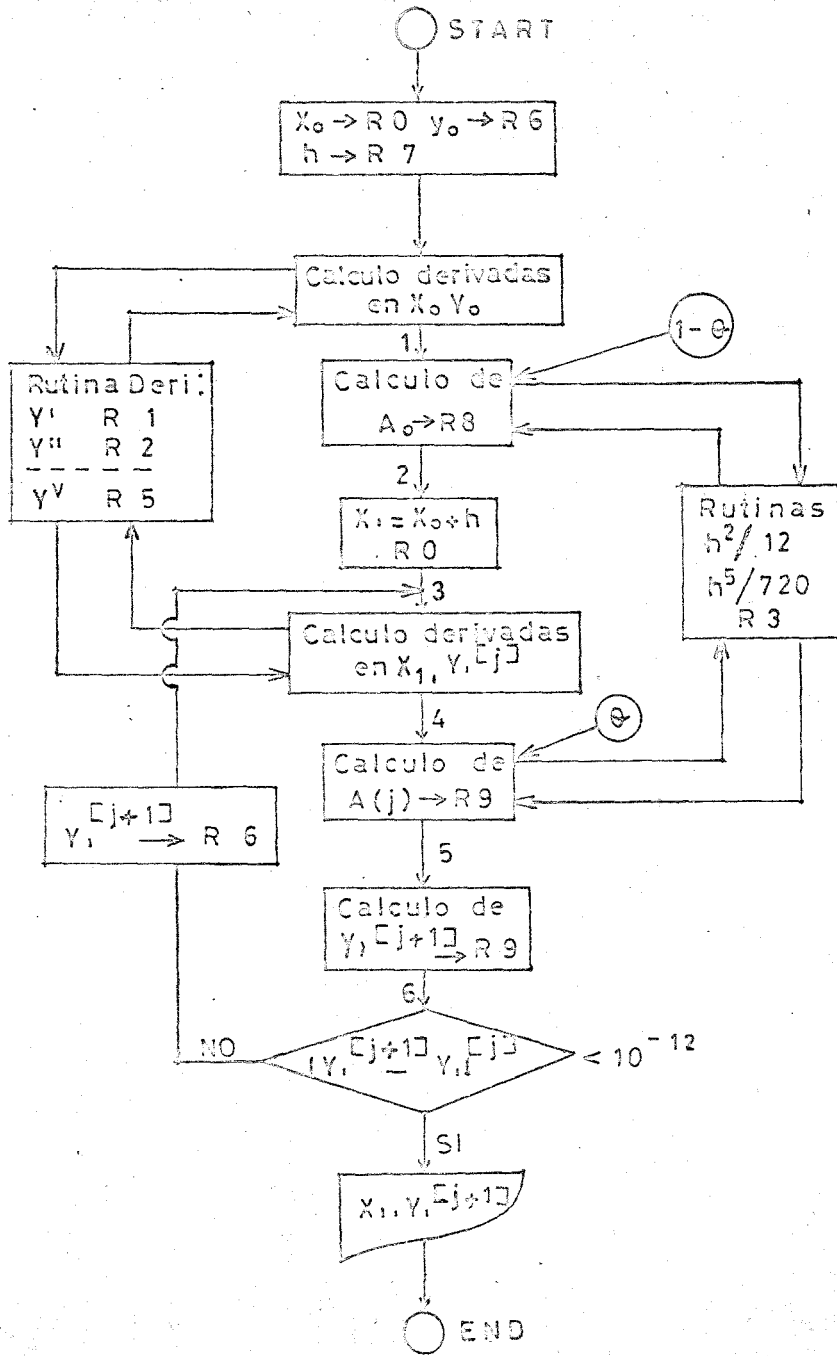


Diagrama de flujo: Ecuaciones no-lineales.

La marcha del calculo seria la siguiente: En (1), calculo de  $A_0$  que se almacena en R8. En (2), calculo de  $x_1 = x_0 + h$ , que se sigue almacenando en R0, puesto que no se va a utilizar mas  $x_0$ . En (4), calculo de  $A(j)$ , con introduccion manual de  $\theta$ , que se almacena en R9. En (5), calculo de  $y_1^{[j+1]}$  almacenado tambien en R9. En (6), test para la detencion de las iteraciones, habiendo tomado como tal, la desigualdad

$$|y_1^{[j+1]} - y_1^{[j]}| < 10^{-12}$$

con lo cual todos los decimales en la salida de la minicomputadora seran exactos. En caso afirmativo se imprimen tanto  $x_1$  como  $y_1^{[j+1]}$ , que ahora sera  $\bar{y}_1$  o  $\underline{y}_1$  segun el valor de  $\theta$ .

En caso negativo, se traspassa el  $y_1^{[j+1]}$  al R6 ( $y_1^{[j]}$ ) y se repite el programa a partir del paso 3.

c) Runge-Kutta.

En cuanto a la programacion del metodo Runge-Kutta, con el diagrama adjunto, encontramos la ventaja de utilizar en todos los programas, las mismas dos primeras tarjetas, con lo cual solo se necesitara en la mayoria de las veces, otra tarjeta mas, en la cual va programada la rutina  $hf(x,y)$ .

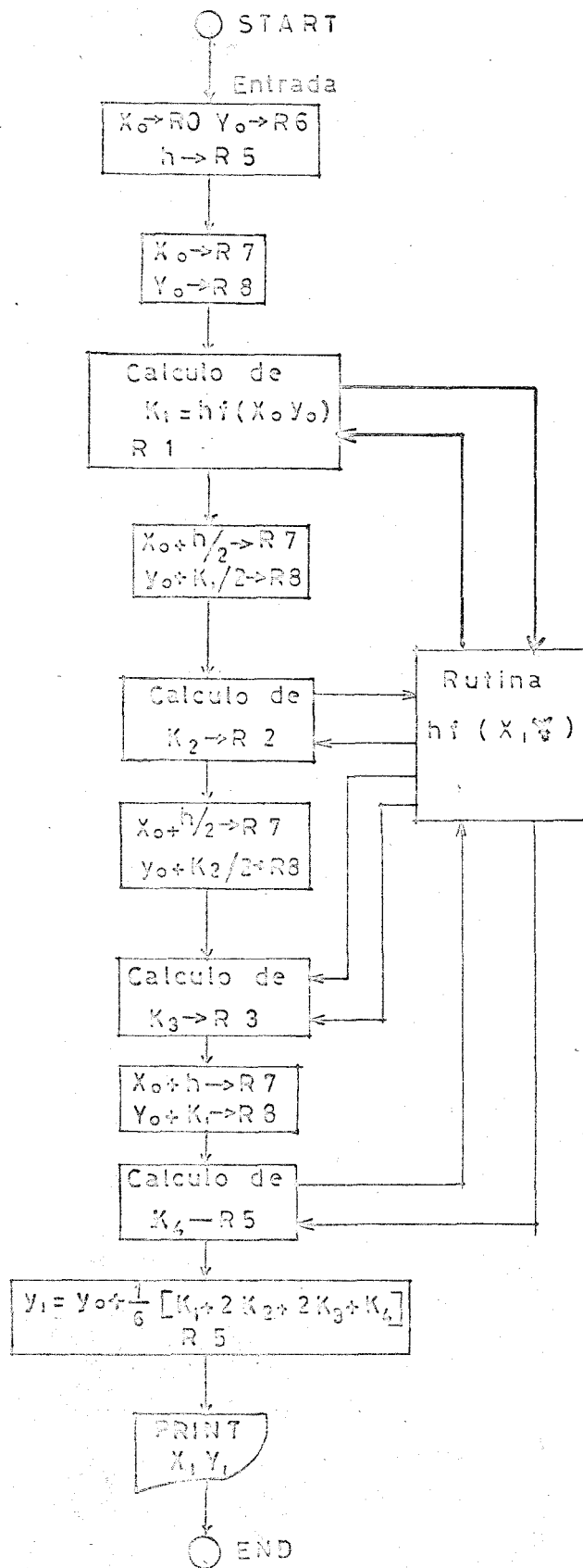


Diagrama de flujo: Runge-Kutta.

## G. ACOTACION DEL PARAMETRO $\theta$ .

### Metodo general.

Puede lograrse una mayor exactitud en el calculo de las  $\tilde{y}$  e  $\underline{y}$ , haciendo como es sabido, intervenir mayores ordenes de derivacion en la formula general. Pero este modus operandi, supone la resolucion de ecuaciones cada vez mas complicadas, por el incremento en el grado, y en el numero de terminos de las mismas.

Intentamos paliar estas dificultades, aparte de la utilizacion de la rutina DERIVA ya citada, mediante la acotacion de los valores del parametro  $\theta$ , mas estrechamente que con las cotas extremales de cero y uno, aunque eso si, utilizando de manera sencilla derivadas de ordenes superiores, esto es, sin que aparezcan estas derivadas en las ecuaciones definidoras del algoritmo ya conocido.

Consideraremos los casos correspondientes a  $m = 1$  y  $m = 2$ .

#### 1. $m = 1$ .

Para acotar el valor  $\theta_1$  de 1 parametro  $\theta$ , que satisfaga a la ecuacion

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [y'_1 + y'_0] - \frac{h^2}{12} y''_0 - \frac{h^2}{12} \theta_1 (y'''_1 - y'''_0)$$

consideremos asu vez, la formula de este tipo correspondiente a  $m = 2$ . Si  $\theta_2$  es el valor de  $\theta$ , que proporciona el valor exacto de  $y_1$  en dicha formula, se tendra la siguiente ecuacion, igualando ambos valores de  $y_1$ .

$$y_0 + \frac{h}{2} [y'_1 + y'_0] - \frac{h^2}{12} [y''_1 - y''_0] + \frac{h^3}{720} \theta_2 (y'''_1 - y'''_0) = y_0 + \frac{h}{2} [y'_1 - y'_0] - \frac{h^3}{12} y''_0 - \frac{h^2}{12} \theta_1 (y'''_1 - y'''_0) \quad (51)$$

Simplificando y despejando  $\theta_1$ , se tiene

$$\theta_1 = \frac{y''_1 - y''_0 - h y''_0 - \frac{h^3}{60} y'''_0 - \frac{h^3}{60} \theta_2 (y'''_1 - y'''_0)}{h (y'''_1 - y'''_0)} \quad (52)$$

Dada la monotoni presupuesta de la  $y$ , y de sus derivadas, se obtienen facilmente dos cotas para  $\theta_1$ , sustituyendo dichas derivadas por los valores extremos correspondientes, asi como  $\theta_2$  por sus extremos cero y uno.

Esto es, se tienen las cotas

$$(53) \quad \bar{\theta}_1 = \frac{\bar{y}_1'' - y_0'' - h y_0''' - \frac{h^3}{60} \bar{y}_1^{(4)}}{h(\bar{y}_1''' - y_0''')} \quad \theta_1 = \frac{y_1'' - y_0'' - h y_0''' - \frac{h^3}{60} y_0^{(4)}}{h(y_1''' - y_0''')} \quad (54)$$

donde

$\bar{y}_1'$  representa el mayor de los números  $\{f(x_1, \bar{y}_1), f(x_1, y_1)\}$

$\bar{y}_1^{(4)}$  " menor "  $\{f^{(4)}(x_1, \bar{y}_1), f^{(4)}(x_1, y_1)\}$

$\bar{y}_1'''$  " menor "  $\{f'''(x_1, \bar{y}_1), f'''(x_1, y_1)\}$

y de manera correlativa para las  $\bar{y}_1'', y_1''$ .

Una vez conseguidas estas cotas, que seguramente serán distintas de las de partida (cero y uno), se sustituyen en el algoritmo (Rutina EDO) utilizándose dos nuevos valores  $\bar{y}_1$  e  $y_1$ , los que a su vez acotarán nuevos valores de  $\theta$ . Así se continúa, hasta conseguir la estabilidad en los resultados numéricos, cosa que por otra parte se consigue tras muy pocas iteraciones.

En el fondo equivale a considerar el caso  $m = 2$ , puesto que utilizamos la quinta derivada, pero con la ventaja de manejar un algoritmo mucho más sencillo, asequible a cualquier computadora de mesa.

2ª.  $m = 2$ .

Con los mismos razonamientos que anteriormente, tendremos para este caso

$$(55) \quad \theta_2 = \frac{42[f'''(1) - f'''(0)] - h^2 f^{(4)}(0) - 42h f^{(4)}(0) - h^3 \theta_2 [f^{(4)}(1) - f^{(4)}(0)]}{42h[f''(1) - f''(0)]}$$

siguiendo una marcha similar a la acotación anterior, y reflejada en la subrutina TMSTI.

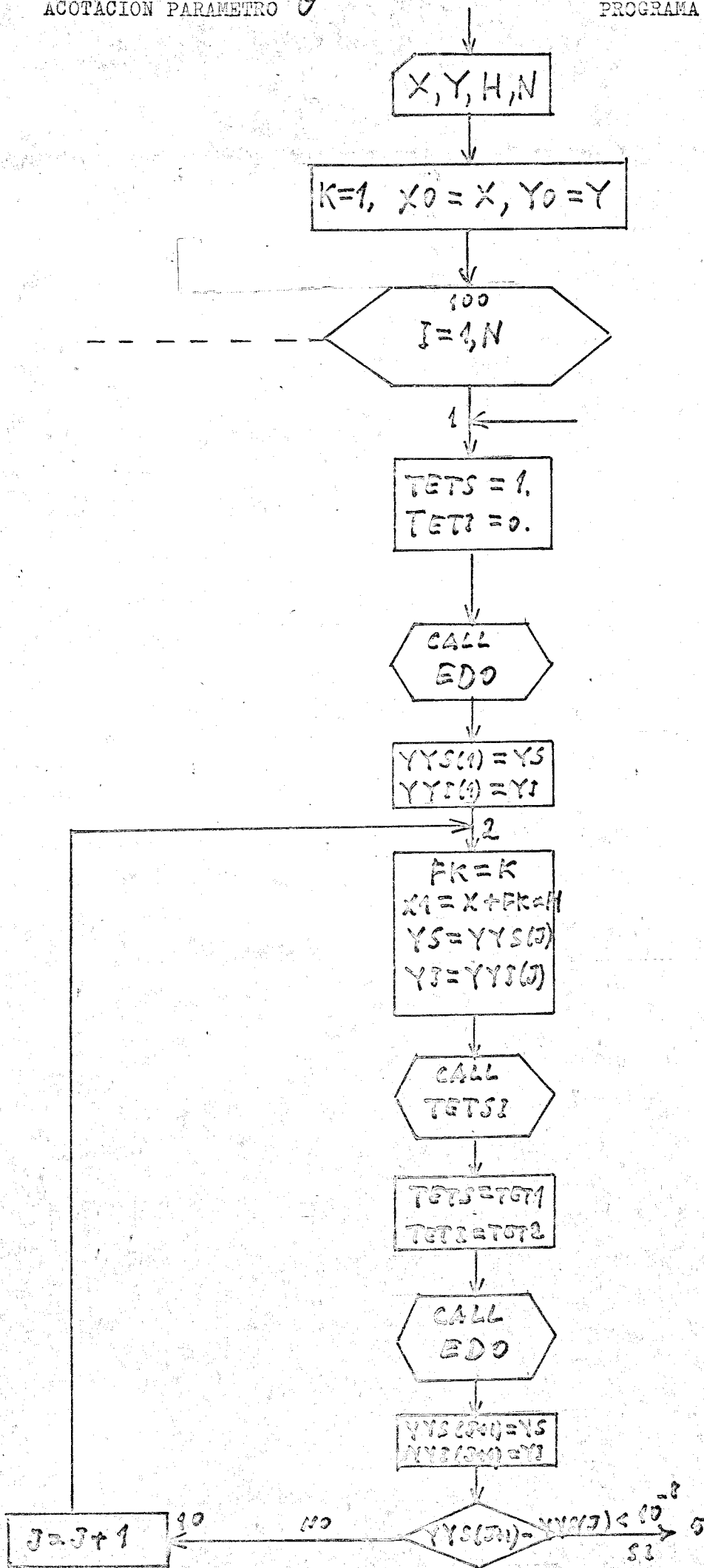


Fig. 1

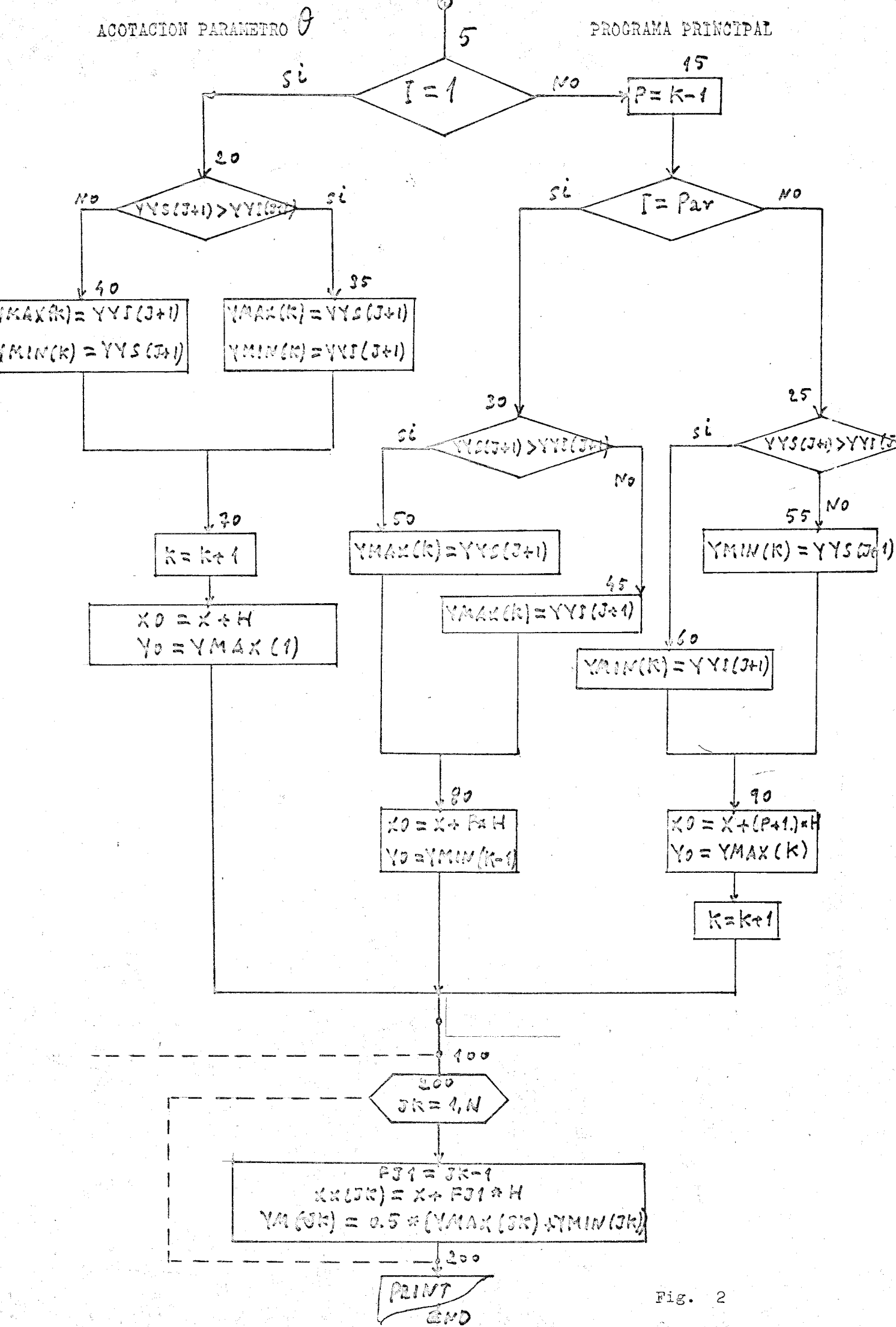


Fig. 2

RUTINA EDO (X<sub>0</sub>, Y<sub>0</sub>, TETS, TETI, H, YS, YI)

RUTINA EDO (X<sub>0</sub>, Y<sub>0</sub>, TETS, TETI, H, YS, YI)

K = 1  
Y = Y<sub>0</sub>

TETA = TETS

CALL DERIVA

$A0 = Y0 + H/2 * D1 + H^2/2 * D2 + H^5/220 * D5 * (1 - TETA)$

X<sub>0</sub> = X<sub>0</sub> + H  
Y<sub>1</sub>(1) = Y<sub>0</sub>  
J = 1

CALL DERIVA

$B = H/2 * D1 - H^2/2 * D2 + H^5/220 * D5 * TETA$

Y<sub>1</sub>(J+1) = A<sub>0</sub> + B

J = J + 1

Y<sub>0</sub> = Y<sub>1</sub>(J+1)      5 NO

$|Y1(J+1) - Y1(J)| < 10^{-12}$

Y<sub>S</sub> = Y<sub>1</sub>(J+1)      NO

TETA = TETS      SI

Y<sub>S</sub> = Y<sub>1</sub>(J+1)  
TETA = TETI  
X<sub>0</sub> = X<sub>0</sub> - H  
Y<sub>0</sub> = Y

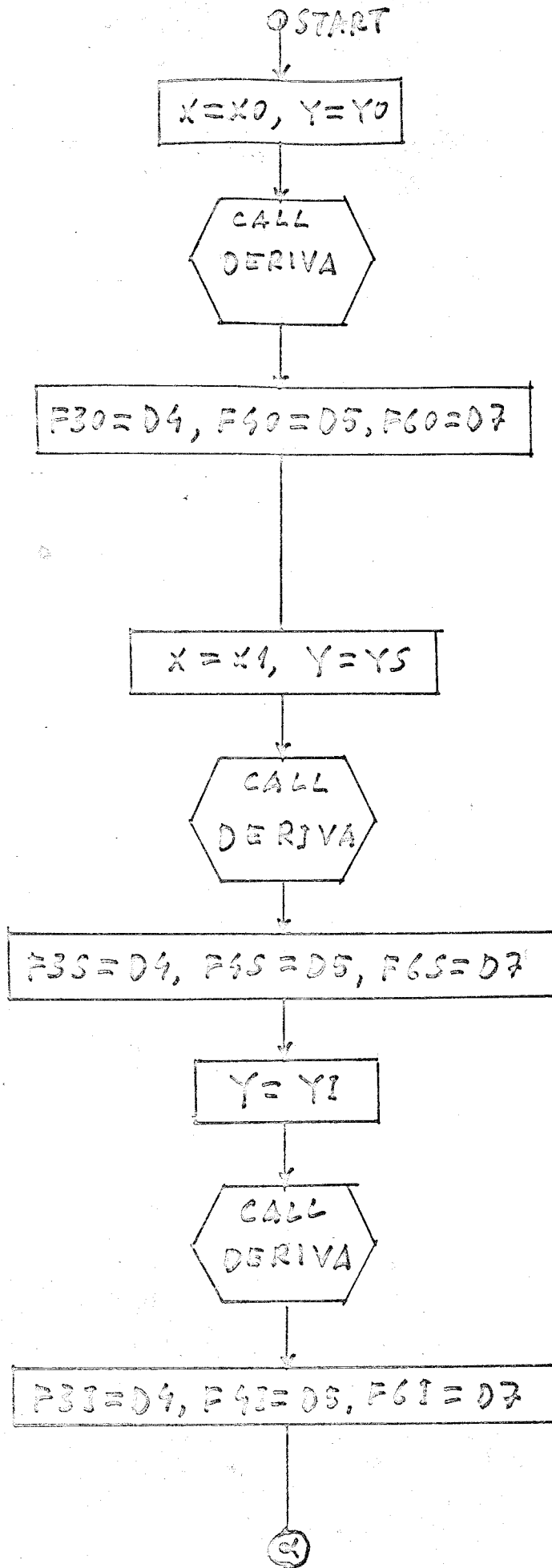
Y<sub>S</sub> > Y<sub>I</sub>      NO

Y<sub>S</sub> = Y<sub>S</sub>  
Y<sub>S</sub> = Y<sub>I</sub>  
Y<sub>I</sub> = Y<sub>S</sub>      SI

RETURN END



RUTINA TETSI ( $X_0, X_1, Y_0, Y_1, H, TET1, TET2$ )



RUTINA TETSI ( $X_0, X_1, Y_0, YS, YI, H, TET1, TET2$ )

2

$$A = -42 = F30 - H^2 * F60 - 62 * H = F90$$

si  $f''(y) > f''(y)$  No

10

$$F53 = 62 = f''(y)$$

$$F13 = 62 = f'''(y)$$

5

$$F53 = 62 = f''(y)$$

$$F13 = 62 = f'''(y)$$

si  $f^{(4)}(0) > 0$  No

25

$$F63S = H^2 * f^{(4)}(0)$$

$$F63I = 0.$$

20

$$F63S = 0.$$

$$F63I = H^3 * f^{(6)}(0)$$

si  $f^{(6)}(y) > f^{(6)}(y)$  No

45

$$F62S = 0.$$

$$F62I = -H^2 * f^{(6)}(y)$$

60

$$F62S = 0.$$

$$F62I = -H^2 * f^{(6)}(y)$$

si  $f^{(6)}(y) > f^{(6)}(y)$  No

35

$$F62S = H^2 * f^{(6)}(y)$$

$$F62I = 0.$$

30

$$F62S = -H^2 * f^{(6)}(y)$$

$$F62I = 0.$$

si  $f^{(4)}(y) > f^{(4)}(y)$  No

60

$$F54 = 62 = H * [f^{(4)}(y) - f^{(4)}(0)]$$

$$F14 = 62 = H * [f^{(4)}(y) - f^{(4)}(0)]$$

55

$$F54 = 62 = H * [f^{(4)}(y) - f^{(4)}(0)]$$

$$F14 = 62 = H * [f^{(4)}(y) - f^{(4)}(0)]$$

65

$$TET1 = (A + F63 + F63S + F62S) / F54$$

$$TET2 = (A + F13 + F63I + F62I) / F14$$

RETURN

END

### H. ACOTACIONES UNILATERALES DEL PARAMETRO $\theta$

#### 1. metodo de tanteos y ensayos previos.

Como complemento a las acotaciones anteriores, y a la vista de una mayor aproximacion, indicada en la obtencion de valores para el inicio, damos nuevos metodos de acotacion, aunque solo sean unilaterales.

Partimos de los siguientes hechos:

#### a) Campo de tangentes $T\theta$ .

La formula

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f'(x_0) + f'(x_1)] - \frac{h^2}{12} (f''(x_1) - f''(x_0)) + \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^5}{720} \theta [f^{(5)}(x_1) - f^{(5)}(x_0)] \equiv \varphi(x, y, \theta) \quad (56)$$

proporciona, como se sabe, para cada valor  $\theta_i$  del parametro  $\theta$ , un solo valor de  $y_1$ . Sea este  $y_1(\theta_i)$ . Su grafica sera una rama de curva que pasa por  $(x_0, y_0)$  y por el punto en cuestion  $(x_1, y_1(\theta_i))$ .

Considerando distintos valores de  $\theta_i$ , tendremos una familia de curvas, todas incidentes con  $(x_0, y_0)$  y tangentes en dicho punto a la recta

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad (57)$$

como se deduce derivando (56).

En efecto, se tiene

$$y_1' = \frac{\varphi_1'}{1 - \varphi_1'} = \frac{\frac{1}{2} [f'(x_1) + f'(x_0)] + \frac{h}{2} D_x f'(x_1) + \dots}{1 - \frac{h}{2} D_y f'(x_1) + \dots} \quad \forall \theta_i \quad (58)$$

y tomando limites, cuando  $x \rightarrow x_0$ , o lo que es igual  $h \rightarrow 0$  resulta

$$\lim y_1' = f(x_0, y_0).$$

Si ahora nos situamos en la hipotesis, de que todas estas ramas sean monotonas, es decir, con sus derivadas todas del mismo signo, en el intervalo considerado - en caso contrario, se reduciria el paso  $h$  - su grafica tendra la forma de la fig. 1, por ej. donde todas las ramas serian tangentes a la PT.

Ademas existira una rama, la correspondiente a  $\theta = \theta_1$ , tal que se verifique

$$y(\theta_1) = y_1$$

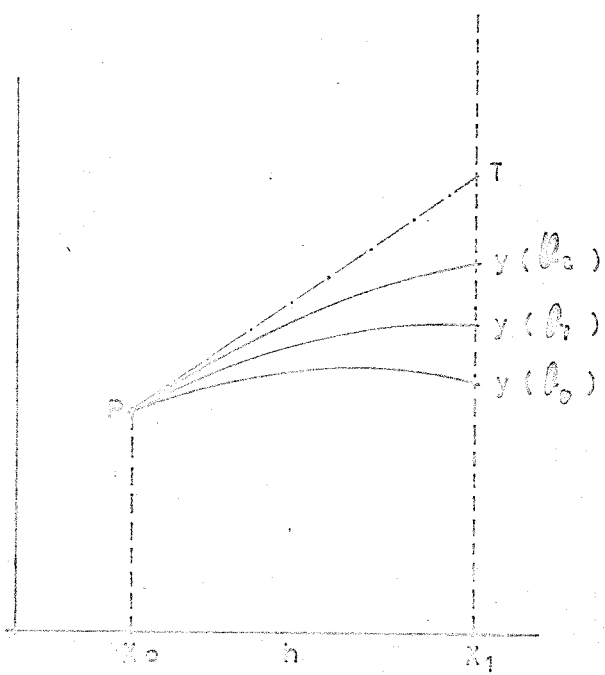


Fig. 1

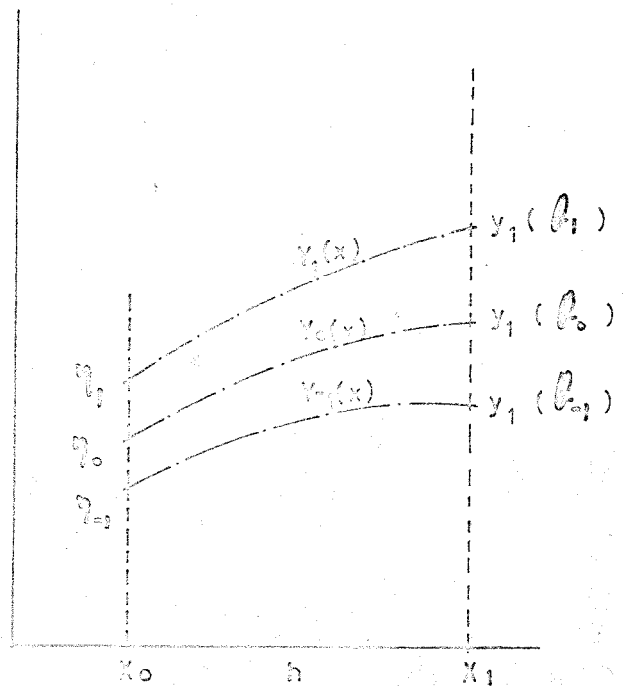


Fig. 2

siendo  $y_1$ , la integral exacta de la EDO en cuestion.

Entonces, sobre la recta  $x = x_1$ , tenemos en el intervalo  $[y_1, y_2]$  un conjunto de puntos

$$\{(x_i, y(\theta_i))\}$$

en cada uno de los cuales, las curvas de esta familia tendran sus tangentes con pendientes

$$y'(\theta_i)$$

ya calculadas. A este campo de tangentes sobre cada paralela al eje y, lo designamos por  $T\theta$ .

b). Campo de tangentes  $Ty$ .

Por cada uno de los puntos anteriores  $(x_1, y_1(\theta_i))$ , segun los teoremas existenciales, pasa una curva integral, solucion de la

$$y' = f(x, y) \quad (59)$$

pero con constantes iniciales diferentes.

Asi, por el punto  $(x_1, y_1(\theta_i))$  pasa una solucion de (59) con  $y(x_0) = \eta_i$  y en general, por el punto  $(x_1, y_1(\theta_i))$  pasa una solucion de (59) con  $y(x_0) = \eta_i$

cuya disposicion viene reflejada en la fig. 2).

A su vez, cada una de estas curvas integrales, notadas  $Y_i(x)$ , tendra en los puntos tantas veces citados  $(x_1, y_1(\theta_i))$ , su tangente de pendiente

$$f(x_1, y_1(\theta_i))$$

Tenemos pues, un segundo campo de tangentes, llamemosle  $Ty$ , superpuesto al anterior

c.) Angulos de las tangentes  $T\theta$  y  $Ty$ .

Superpuestos los dos campos anteriores, tenemos la fig. 3, donde aparecen los angulos formados por cada dos tangentes, una de cada campo.

Veamos ahora, el signo de estos angulos en los puntos extremos del intervalo  $[y_1, y_2]$ , correspondientes como se sabe, a los valores tambien extremos de  $\theta$ .

En un punto generico, las ecuaciones que definen dicho punto, perteneciente bien a una rama aproximante, o bien a una curva integral, seran las siguientes

$$(60) \quad y_1(\theta_i) = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1(\theta_i)) + f(x_0, y_0)] - \dots + \frac{h^5}{720} \theta_i [f''''(x_1, y_1(\theta_i)) - f''''(x_0, y_0)]$$

$$(61) \quad Y_{1i}(x_i) = \eta_i + \frac{h}{2} [f(x_1, Y_{1i}(x_i)) + f(x_0, \eta_i)] - \dots + \frac{h^5}{720} \alpha_i [f''''(x_1, Y_{1i}(x_i)) - f''''(x_0, \eta_i)]$$

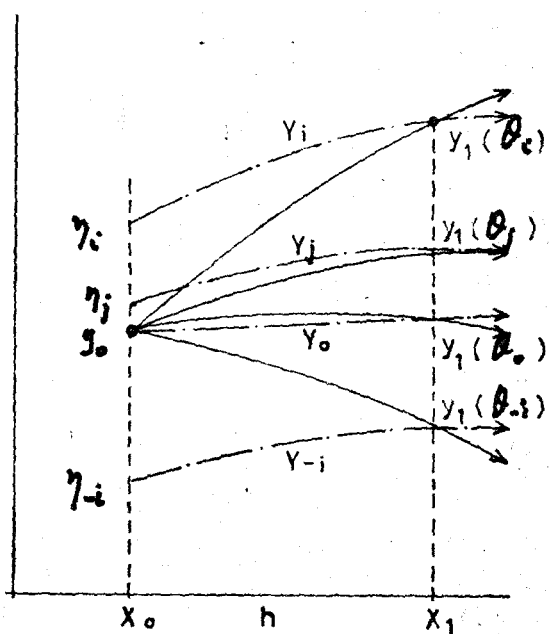


Fig. 3

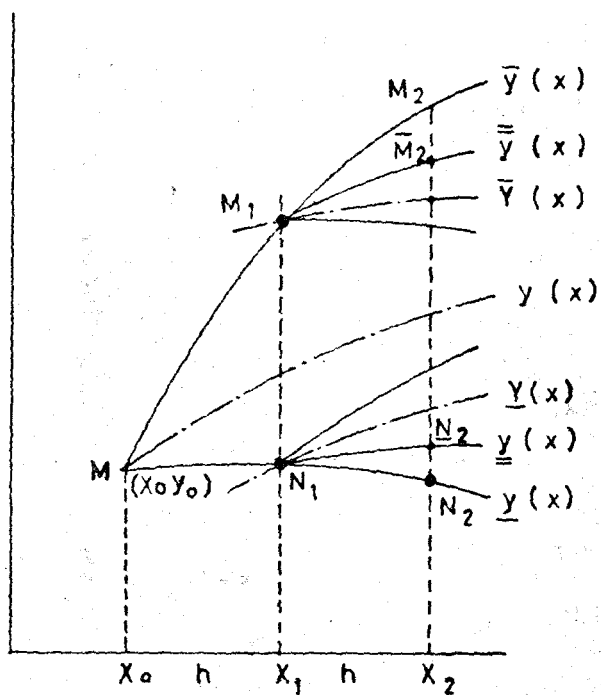


Fig. 4

Derivando, para tener las pendientes de dichas tangentes, tendremos

(62)

$$y'_i(\theta_i) = \frac{\varphi'_x}{1 - \varphi'_y}$$

(63)

$$Y'_{ii}(\alpha_i) = \frac{\phi'_x}{1 - \phi'_y}$$

poniendo

$$y_i(\theta_i) = \varphi(x, y)$$

$$Y_{ii}(\alpha_i) = \phi(x, y)$$

con lo que resulta

$$\varphi'_x = \frac{1}{2} [f(x_1, y_1(\theta_i)) + f(x_0, y_0)] + h F_1(y_1, \theta_i, h)$$

$$\varphi'_y = h F_2(y_1, \theta_i, h)$$

$$\phi'_x = \frac{1}{2} [f(x_1, Y_{ii}(\alpha_i)) + f(x_0, \eta_i)] + h G_1(Y_{ii}, \alpha_i, h)$$

$$\phi'_y = h G_2(Y_{ii}, \alpha_i, h)$$

Por otra parte la tangente del ángulo buscado, vendrá dada por

$$\operatorname{tg} \Psi_i = \frac{Y'_{ii} - y'_i}{1 + Y'_{ii} y'_i} \quad (64)$$

y sustituyendo valores

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Psi_i &= \frac{\frac{\phi'_x}{1 - \phi'_y} - \frac{\varphi'_x}{1 - \varphi'_y}}{1 - \frac{\phi'_x \cdot \varphi'_y}{(1 - \phi'_y) \cdot (1 - \varphi'_y)}} = \frac{\phi'_x - \varphi'_x + \varphi'_x \phi'_y - \varphi'_y \phi'_x}{1 - \varphi'_y - \phi'_y + \varphi'_y \phi'_y - \varphi'_x \phi'_x} \\ &= \frac{\frac{1}{2} [f(x_1, Y_{ii}) + f(x_0, \eta_i)] - \frac{1}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0)] + h [G_2 \varphi'_x - F_2 \phi'_x]}{1 - \frac{1}{4} [f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0)] \cdot [f(x_1, Y_{ii}) + f(x_0, \eta_i)] + h^2 F_2 G_2 - h [F_2 + G_2] + h \Delta} \end{aligned}$$

Y para valores suficientemente pequeños de  $h$ , el signo de  $\operatorname{tg} \Psi_i$ , será el mismo que el de la expresión

$$S = \frac{2 [f(x_1, Y_{ii}) - f(x_1, y_1) + f(x_0, \eta_i) - f(x_0, y_0)]}{4 - [f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0)] \cdot [f(x_1, Y_{ii}) + f(x_0, \eta_i)]} \quad (65)$$

Desarrollando en serie, las  $f(x, y)$  y teniendo en cuenta que  $Y_{1i} = y_1$ , el signo de  $S$ , será el de

$$S = \frac{2[\eta_i - y_0] D_y f(x_0, y_0)}{4 - \{f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0)\}^2 - [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)][\eta_i - y_0] D_y f(x_0, y_0)}$$

y para las situaciones extremas:  $y_i = \bar{y}_i$  e  $y_i = \underline{y}_i$ , se tiene

$$\bar{S} = \frac{2[\bar{\eta}_i - y_0] D_y f(x_0, y_0)}{4 - \{A + \varepsilon\}^2 - [\bar{\eta}_i - y_0] D_y f(x_0, y_0) (A + \varepsilon)} \quad (66)$$

$$\underline{S} = \frac{2[\underline{\eta}_i - y_0] D_y f(x_0, y_0)}{4 - \{A\}^2 - [\underline{\eta}_i - y_0] D_y f(x_0, y_0) A} \quad (67)$$

$$A = f(x_1, y_1) + f(x_0, y_0) \quad \varepsilon = (\bar{y}_1 - y_1) D_y f(x_1, y_1)$$

y cada la pequeñez de  $\bar{y}_i - y_i$ , del orden de  $n^5/720$  como es sabido, los signos de

$\bar{y}_i$  y  $\underline{S}$ , dependen entonces del signo de  $(\bar{\eta}_i - y_0)$  y  $(\underline{\eta}_i - y_0)$

Por otra parte, la unicidad de las curvas integrales para cada punto del plano, implica, que las curvas integrales no se corten, y si los valores  $\eta_i$ , tienen la ordenación

$$\eta_i < \dots < y_1 < \dots < \bar{\eta}_j$$

los correspondientes  $y_i(\theta_i)$

guardan también la misma ordenación, esto es se verifica

$$\underline{y}_i(\theta_i) < \dots < y_i(\theta_i) < \dots < \bar{y}_j(\theta_j)$$

con lo que los ángulos formados por ambas tangentes, en los puntos extremos

$\bar{y}_i$  e  $\underline{y}_i$ , variaran de signo según lo hagan

$$\underline{\eta}_i - y_0 \quad \text{y} \quad \bar{\eta}_j - y_0$$



que son de signo contrario. Entonces los angulos formados por las tangentes de ambos campos, en los puntos extremos del intervalo  $[\bar{y}_1, \underline{y}_1]$ , son de signo contrario.

Por otra parte, supuesta la continuidad de

$$(Y'_1 - y'_1) / (1 + Y'_1 y'_1)$$

tendremos que en algun punto del intervalo en cuestion, sea, el correspondiente a  $\theta = \xi$ , ambas tangentes coincidirán, sin que esto quiera decir, que dicho punto  $y_1(\xi)$  sea el  $y_1$ , solución de la EDO. Solamente una buena aproximación unilateral, tanto mejor cuanto mayor número de derivadas intervengan en el algoritmo utilizado.

d). Cálculo de  $y_1(\xi)$ .

El cálculo de este valor aproximado, llamémosle  $\tilde{y}_1$ , puede hacerse resolviendo la ecuación en  $y(\theta_i)$

$$\frac{\varphi'_x}{1 - \varphi'_y} - f(x_1, y) = 0 \quad (68)$$

una vez particularizada la  $x = x_1$ . Esta ecuación por contener al parámetro  $\theta_i$  en forma explícita, implica para su resolución un método de tanteo y ensayo consecutivo, apto para un ordenador sobre todo.

En esencia, consiste en calcular las pendientes de las tangentes a la familia de curvas aproximantes, en los puntos previamente calculados por el algoritmo del método (Rutina EDO), y compararlas con las pendientes dadas por  $f(x, y)$ . El cambio de signo oportuno, en la diferencia  $Y' - y'$ , dará la señal para la próxima iteración.

Es claro, que al ser unilateral, la acotación vendrá dada por

$$|e| = |\bar{y}_1 - \tilde{y}_1| < M_2 \times \{|\bar{y}_1 - \bar{y}_1|, |\tilde{y}_1 - \underline{y}_1|\}$$

Una realización práctica de lo expuesto, puede verse en el ejemplo nº 2.

ii. Metodo de la ecuacion diferencial.

Hemos visto, como el procedimiento anterior resulta sumamente enojoso, si no se tiene un ordenador a mano, por las muchas utilizaciones del algoritmo clave.

Intentamos facilitar la tarea, enfocando el problema desde otro punto de vista. Supuesta la fig 3, en lugar de considerar un determinado valor de  $\theta_i$ , y por consiguiente tratar con una sola aproximante  $y(\theta_i)$ , planteamos el problema de calcular el parametro  $\theta_c$ , cuya rama representativa sea tangente a una solucion integral de la EDO. Evidentemente, como se vió anteriormente, para cada x, existe una solucion integral, lo cual equivale a considerar este particular parametro, como funcion de x.

Entonces, para poner de manifiesto, este parametro, la conocida ecuacion del metodo, la escribimos asi

$$y = \varphi(x, y) + \varepsilon(x) \cdot g(x, y) \cdot \theta(x) \quad (69)$$

donde

$$\varphi(x, y) \equiv y_0 + \frac{h}{2} [f(x, y) + f(x_0, y_0)] - \frac{h^2}{12} [f'(x, y) - f'(x_0, y_0)] + \frac{h^5}{720} f^{(iv)}(x_0, y_0)$$

$$\varepsilon(x) \equiv \frac{h^5}{720} = \frac{(x-x_0)^5}{720}$$

$$g(x, y) \equiv f''(x, y) - f''(x_0, y_0)$$

La derivada, toma ahora la forma

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi'_x + \varepsilon' g \theta + \varepsilon g'_x \theta + \varepsilon g \theta' + \varphi'_y y' + \varepsilon \theta g'_y y' \quad (70)$$

de donde despejando  $y'$ , pendiente de la tangente a la rama  $\theta_c$ , resulta

$$y' = \frac{\varphi'_x + \theta [\varepsilon g'_x + g \varepsilon'] + g \varepsilon \theta'}{1 - \varphi'_y - \varepsilon \theta g'_y} \quad (71)$$

Por otra parte, la pendiente de la curva integral, viene dada por

$$y' = f(x, y)$$

con lo que tenemos la ecuación

$$f(x, y) = \frac{\varphi'_x + \theta [\varepsilon g'_x + \varepsilon' g] + \varepsilon g \theta'}{1 - \varphi'_y - \varepsilon \theta g'_y} \quad (72)$$

en la que nos encontramos con dos funciones incógnitas:

$$y(x), \theta(x).$$

Por otra parte, se sabe - pag - que

$$y_1(\theta) = \underline{y}_1 + a \varepsilon \theta \quad (73)$$

con

$$a = \frac{f''(x, y) - f''(x_0, y_0)}{1 - \frac{h}{2} D_y f(x, y) + \frac{h^2}{12} D_y^2 f(x, y)} \quad \varepsilon = \frac{h^5}{720}$$

Sustituyendo, entonces (73) en (72), y desarrollando en serie de Taylor tendremos

$$f(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) = \frac{\varphi'_x(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) + \theta [\varepsilon g'_x(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) + \varepsilon' g(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta)] + g(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) \varepsilon \theta'}{1 - \varphi'_y(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) - g'_y(x, \underline{y} + a \varepsilon \theta) \varepsilon \theta}$$

Desarrollando y simplificando la notación, se tiene finalmente

$$F(\theta, x) \equiv f(1 - \varphi'_y) - \varphi'_x + \theta [a \varepsilon D_y f(1 - \varphi'_y) - \varepsilon f(a \varphi''_{xy} + g'_y) - a \varepsilon \varphi''_{xy} - \varepsilon g' - \varepsilon' g] = \varepsilon_2 \theta' \quad (74)$$

ecuación diferencial en  $\theta$ , seguramente más difícil de resolver que la primitiva.

Si ahora - Elsgoltz: Ecuaciones diferenciales, pag. 235 -  $\varepsilon g$ , es suficientemente pequeño, y se cumple además

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} < 0$$

se puede sustituir, la solución de la ecuación (74), por la solución de la llamada ecuación degenerada

$$F(x, 0) = 0 \quad (75)$$

Con estas hipótesis, y particularizando para  $x = x_1$ , se tiene finalmente

$$Q = \frac{f(x_1, y_1) [1 - \varphi'_y(x_1, y_1)] - \varphi'_x(x_1, y_1)}{\varepsilon f(x_1, y_1) [a \varphi''_{yy} + g'_y] + a \varepsilon \varphi''_{xy} + \varepsilon g'_x + \varepsilon'_y - a \varepsilon D_y f(x_1, y_1) (1 - \varphi'_y)} \quad (76)$$

Una aplicación práctica del mismo, puede verse en el citado ejemplo nº 2.

## SEGUNDA PARTE

### PROLONGACION DE SOLUCIONES

Cuando el intervalo de integracion de la EDO, sea superior al paso  $h$  escogido, surge espontaneamente la division del  $(a, b)$ , en subintervalos de longitud  $h$ , asi como la aplicacion reiterada de los algoritmos (31), (32) tomando como puntos pivotaes, los  $x_n = a + nh$ .

Es claro, que si las iteraciones son muy numerosas, o las ecuaciones definidoras de los algoritmos, son de las llamadas mal acondicionadas o simplemente, se esté trabajando en los topes de la aproximacion permitida por la minicomputadora utilizada, habra que tener en cuenta los errores de redondeo.

Puede aplicarse todo lo dicho respecto de los errores globales de truncamiento y estabilidad-D, pero el hecho de venir la integral solucion encuadrada entre los valores  $\bar{y}$  e  $\underline{y}$ , permite enfocar la cuestion, desde otro punto de vista, con una mayor seguridad, dado que las cotas proporcionadas por la funcion de Lipschitz, son muy generosas.

#### 1. Enunciado de la cuestion.

Dado un intervalo  $(a, b)$  de amplitud  $b-a = 2h$ , junto con los algoritmos conocidos, construidos utilizando un determinado numero de derivadas, se trata de encontrar las condiciones necesarias, para que el valor  $y_2$ , obtenido aplicando reiteradamente los algoritmos anteriores, en los puntos  $x_0$  y  $x_1$ , nos permita encontrar para  $x_2 = x + 2h$ , una solucion aproximada mas conveniente que, la obtenida por la aplicacion directa del mismo algoritmo a partir del punto  $x_0$ , con un solo paso de longitud  $2h$ .

Hipotesis de partida: las mismas que sirvieron para la obtencion de las formulas esto es, monotonia de  $y$ , y de sus derivadas en el intervalo considerado.

Sea para ello,  $y(x)$  la curva integral -solucion exacta- que pasa por  $(x_0, y_0)$ ;  $\bar{y}(x)$  e  $\underline{y}(x)$ , las curvas aproximantes super y subintegrales respectivamente que pasa por dicho punto inicial.

De otra manera, estas curvas son tales, que dichos valores verifican

$$\bar{y}(x_1) > y(x_1) > \underline{y}(x_1)$$

A priori, no puede saberse, si estos valores son debidos a uno u otro de los algoritmos (31), (32), sino que se tendrá

$$\bar{y}_1 = \text{Max} \{ y(\theta=1), y(\theta=0) \}$$

$$\underline{y}_1 = \text{min} \{ y(\theta=1), y(\theta=0) \}$$

con

$$y(\theta=1) = y_0 + \frac{x-x_0}{2} [f(x,y) + f(x_0,y_0)] - \frac{(x-x_0)^2}{2} [f'(x,y) - f'(x_0,y_0)] + \frac{(x-x_0)^5}{720} f^{(iv)}(x,y) \quad (77)$$

$$y(\theta=0) = y_0 + \frac{x-x_0}{2} [f(x,y) + f(x_0,y_0)] - \frac{(x-x_0)^2}{2} [f'(x,y) - f'(x_0,y_0)] + \frac{(x-x_0)^5}{720} f^{(iv)}(x_0,y_0)$$

Representemos graficamente dichas funciones, como en la fig. 4; bipartamos el intervalo  $(x_0, x_2)$  de longitud  $2h$ , por el punto  $x_1 = x_0 + h$ , y consideremos los puntos  $M_1$  y  $N_1$ , correspondientes a los valores  $\bar{y}(x_1)$  e  $\underline{y}(x_1)$ .

A partir de ellos, repetimos el proceso algoritmico, para calcular los  $\bar{y}_2$  e  $\underline{y}_2$ , correspondientes a  $x_2 = x_0 + 2h$ , representados en la fig. por  $\bar{M}_2$  y  $\underline{N}_2$ . Este proceso, equivale a considerar las curvas integrales  $\bar{Y}(x)$  e  $\underline{Y}(x)$ , que segun los teoremas existenciales pasan por  $M_1$  y  $N_1$  respectivamente, y respecto de ellas las super y subintegrales correspondientes  $\bar{y}(x)$  e  $\underline{y}(x)$ .

De esta manera, la solucion numerica aproximada, proporcionada por  $\bar{y}(x)$  para  $x = x_2$ , será la ordenada de  $M_2$ , y la proporcionada por  $\underline{y}(x)$  para el mismo valor  $x_2$ , la ordenada de  $\underline{N}_2$ .

Lo mismo puede repetirse, respecto de los puntos  $N_2$  y  $\underline{M}_2$ , y las funciones  $\underline{y}(x)$  e  $\bar{y}(x)$ .

Entonces, de las posiciones relativas de uno y otro punto, esto es, segun sea

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \geq 0$$

asi resultara, que la iteracion del algoritmo en cuestion, aproximara mas o menos que la simple aplicacion de la formula para  $x = x_2$ , en un solo paso.

Esta ordenacion de ambas parejas de puntos, sera la misma que la

ofrecida por las tangentes a las curvas  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{\bar{y}}(x)$  ( $\underline{y}(x)$ ,  $\underline{\underline{y}}(x)$ ) en el punto comun  $M_1 (N_1)$ , tomando claro está,  $h$  suficientemente pequeño.

En resumen

$$\text{signo} [\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2] = \text{signo} [\bar{y}'_1 - \bar{\bar{y}}'_1] \quad (78)$$

$$\text{signo} [\underline{y}_2 - \underline{\underline{y}}_2] = \text{signo} [\underline{y}'_1 - \underline{\underline{y}}'_1]$$

Ahora bien, como la consecucion del punto  $M_2 (N_2)$ , puede conseguirse bien con  $y(\theta=1)$ , o bien con  $y(\theta=0)$ , y dentro de estas variantes, al punto  $\bar{M}_2(N_2)$  se puede llegar, con  $\bar{y}_2(\theta=1)$  o con  $\bar{\bar{y}}_2(\theta=0)$  ( $\underline{y}_2(\theta=1)$ ,  $\underline{\underline{y}}_2(\theta=0)$ ), hemos detallado por separado, cada una de estas cuatro alternativas.

## 2. Aproximacion por el algoritmo super( $\bar{y}$ )

Situacion nº 1.

Curva  $\bar{y}(x)$ , obtenida con  $\theta = 1$ .

Curva  $\bar{\bar{y}}(x)$ , correspondiente al parametro  $\theta = 0$ .

Las ecuaciones de dichas curvas, seran

$$\bar{y}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{2} [f(x, \bar{y}(x)) + f(x_0, y_0)] - \frac{(x-x_0)^2}{12} [f'(x, \bar{y}(x)) - f'(x_0, y_0)] + \frac{(x-x_0)^5}{720} f^{(5)}(x, \bar{y}(x))$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = y_0 + \frac{x-x_1}{2} [f(x, \bar{\bar{y}}(x)) + f(x_1, \bar{\bar{y}}_1)] - \frac{(x-x_1)^2}{12} [f'(x, \bar{\bar{y}}(x)) - f'(x_1, \bar{\bar{y}}_1)] + \frac{(x-x_1)^5}{720} f^{(5)}(x, \bar{\bar{y}}(x))$$

con lo que resultara, para  $\bar{y}'_1$  e  $\bar{\bar{y}}'_1$  ( $x=x_1$ )

$$\begin{aligned} \bar{y}'_1 &= \frac{1}{2} [f(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [f'(x_1, \bar{\bar{y}}_1) - f'(x_0, y_0)] + \frac{h^3}{144} f^{(3)}(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + \frac{h}{2} f'(x_1, \bar{\bar{y}}_1) - \\ &- \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_1, \bar{\bar{y}}_1) \quad (79) \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{y}}'_1 = \frac{1}{2} [f(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + f(x_1, \bar{\bar{y}}_1)] = f(x_1, \bar{\bar{y}}_1) \quad (80)$$

ya que

$$\bar{y}_1 = \bar{\bar{y}}_1$$

Entonces, restando miembro a miembro (79) y (80), sale

$$\begin{aligned} \bar{y}'_1 - \bar{\bar{y}}'_1 &= \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) - f(x_1, \bar{\bar{y}}_1)] + \frac{h}{6} [f'(x_0, y_0) + 2f'(x_1, \bar{\bar{y}}_1)] - \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{\bar{y}}_1) \\ &+ \frac{h^3}{144} f^{(3)}(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_1, \bar{\bar{y}}_1) = K_1 \quad (81) \end{aligned}$$

llegandose asi, a la conclusion, de que si la iteracion en los puntos pivotaes  $x_1 = x + h$ , aproxima mas que la simple aplicacion de la formula, se verifica

$$K_1 > 0 \quad (82)$$

2ª. Situacion.

Curva  $\bar{y}(x)$ , correspondiente a  $\theta = 1$ .

Curva  $\bar{\bar{y}}(x)$ , obtenida de la general tomando  $\bar{y}_1$  como valor inicial y  $\theta = 0$ .

Sus ecuaciones seran

$$\bar{y}(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{2} [f(x, \bar{y}(x)) + f(x_0, y_0)] - \frac{(x-x_0)^2}{12} [f'(x, \bar{y}(x)) - f'(x_0, y_0)] + \frac{(x-x_0)^5}{720} f^{(iv)}(x, \bar{y}(x))$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = \bar{y}_1 + \frac{(x-x_1)}{2} [f(x, \bar{\bar{y}}(x)) + f(x_1, \bar{y}_1)] - \frac{(x-x_1)^2}{12} [f'(x, \bar{\bar{y}}(x)) - f'(x_1, \bar{y}_1)] + \frac{(x-x_1)^5}{720} f^{(iv)}(x, \bar{\bar{y}}(x))$$

Y los valores de sus derivadas, en el punto  $x = x_1$ , vendran dados, por

$$\begin{aligned} \bar{y}'_1 &= \frac{1}{2} [f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [f'(x_1, \bar{y}_1) - f'(x_0, y_0)] + \frac{h^4}{144} f^{(iv)}(x_1, \bar{y}_1) + \frac{h}{2} f'(x_1, \bar{y}_1) - \\ &- \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{y}_1) + \frac{h^5}{720} f^{(v)}(x_1, \bar{y}_1) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\bar{\bar{y}}'_1 = \frac{1}{2} [f(x_1, \bar{\bar{y}}_1) + f(x_1, \bar{y}_1)] = f(x_1, \bar{y}_1) \quad (83)$$

coincidentes con los de la situacion anterior, y por tanto sacaremos la misma conclusion.

Situacion nº 3.

Curva  $\bar{y}(x)$ ;  $\theta = 0$

Curva  $\bar{\bar{y}}(x)$ ;  $\theta = 1$ .

Ecuaciones respectivas:

$$\bar{y}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{2} [f(x, \bar{y}(x)) + f(x_0, y_0)] - \frac{(x-x_0)^2}{12} [f'(x, \bar{y}(x)) - f'(x_0, y_0)] + \frac{(x-x_0)^5}{720} f^{(iv)}(x_0, y_0)$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = \bar{y}_1 + \frac{(x-x_1)}{2} [f(x, \bar{\bar{y}}(x)) + f(x_1, \bar{y}_1)] - \frac{(x-x_1)^2}{12} [f'(x, \bar{\bar{y}}(x)) - f'(x_1, \bar{y}_1)] + \frac{(x-x_1)^5}{720} f^{(iv)}(x, \bar{\bar{y}}(x))$$

Sus derivadas en el punto  $x_1$  : (84) y (85)

$$\bar{y}'_1 = \frac{1}{2} [f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [f'(x_1, \bar{y}_1) - f'(x_0, y_0)] + \frac{h^4}{144} f^{(iv)}(x_0, y_0) + \frac{h}{2} f'(x_1, \bar{y}_1) - \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{y}_1)$$

$$\bar{\bar{y}}'_1 = f(x_1, \bar{y}_1) = f(x_1, \bar{y}_1)$$



asi como su diferencia:

$$\bar{y}'_1 - \bar{y}'_1 = \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) - f(x_1, \bar{y}_1)] + \frac{h}{6} [f'(x_0, y_0) + 2f'(x_1, \bar{y}_1)] - \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{y}_1) + \frac{h^4}{144} f^{(4)}(x_0, y_0) = K_0$$

con lo que, si la situacion, desde el punto de vista de la aproximacion, es ventajosa, se verifica

$$K_0 > 0$$

Situacion n° 4.

Curva  $\bar{y}(x)$ ;  $\theta = 0$

Curva  $\bar{y}(x)$ ;  $\theta = 0$ .

Operando como anteriormente, se llegaria a la misma conclusion de la situacion n°

La reciproca, esto es,

$$K_1 (K_0) > 0 \Rightarrow \bar{y}_2 - \bar{y}_2 > 0$$

se demostraria por reduccion al absurdo. Entonces, podemos establecer la

Proposicion n° 3. La utilizacion del algoritmo super ( $\bar{y}$ ), de manera reiterada en los puntos correspondientes a  $x_0, y, x_1 = x_0 + h$ , mejora la aproximacion final, en el punto  $(x_2, \bar{y}_2)$ , cuando

$$\begin{aligned} K_0 > 0 & \text{ si } \bar{y}(x) = y(\theta = 0) \\ K_1 > 0 & \text{ si } \bar{y}(x) = y(\theta = 1) \end{aligned} \tag{86}$$

### 3. APROXIMACION POR EL ALGORITMO SUB. ( $\underline{y}$ )

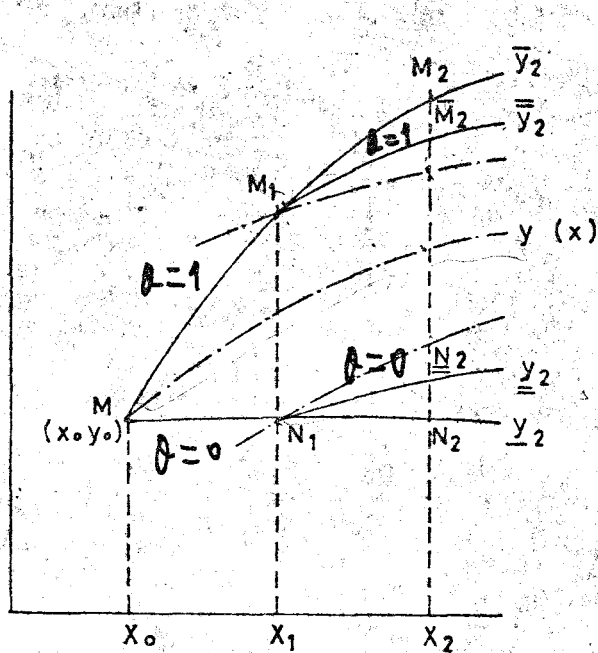
Considerando las curvas subintegrales, caben de la misma manera que con las superintegrales, cuatro situaciones en la iteracion de este algoritmo en los puntos  $x_0$  y  $x_1$ .

Situacion 1.

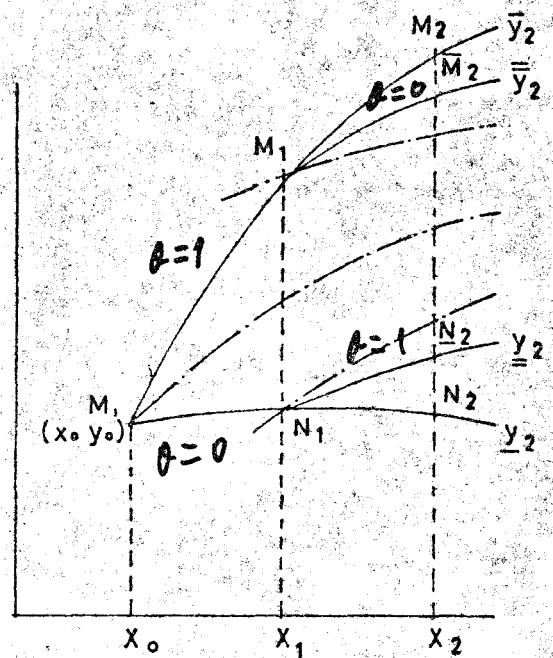
Caracterizada por  $\underline{y}(x) = y(\theta \neq 0)$   
 $\underline{y}(x) = y(\theta = 0)$

Situacion 2.

Caracterizada por  $\underline{y}(x) = y(\theta = 0)$   
 $\underline{y}(x) = y(\theta = 1)$

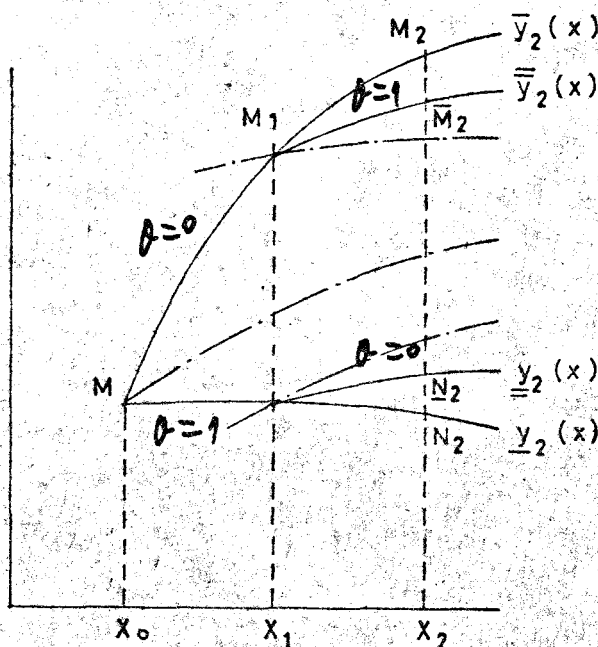


1ª SITUACION.

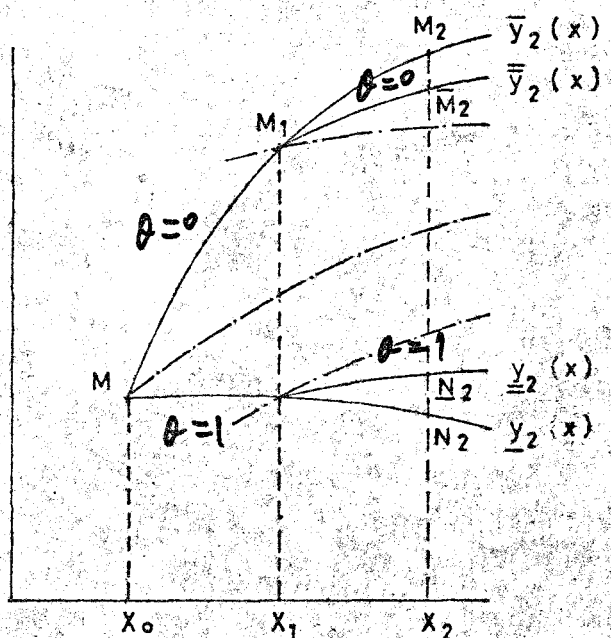


2ª SITUACION.

Aproximacion por el algoritmo Sup. y sub.



3ª SITUACION.



4ª SITUACION.

Situacion 2.

Caracterizada por  $\underline{y}(x) = y(\theta = 1)$

$$\underline{y}(x) = y(\theta = 0)$$

Situacion n° 4.

Caracterizada por  $\underline{y}(x) = y(\theta = 1)$

$$\underline{y}(x) = y(\theta = 0)$$

El test, decisivo para una mejor aproximacion, mediante este algoritmo, vimos era

$$\underline{y}_2 - \underline{y}_1 > 0 \quad \text{equivalente a} \quad \underline{y}' - \underline{y}' > 0$$

El calculo de estas derivadas, proporciona el caso favorable mediante la aproximacion sub, cuando

Situacion 1)

$$H_0 = \underline{y}'_1 - \underline{y}'_0 = \frac{1}{2} [f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [2f'(x_1, y_1) + f'(x_0, y_0)] + \frac{h^2}{12} f''(x_1, y_1) - \frac{h^4}{144} f^{(4)}(x_0, y_0) > 0$$

Situacion 2.

$$H_0 > 0$$

Situacion 3.

$$H_1 = \underline{y}'_1 - \underline{y}'_0 = \frac{1}{2} [f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [2f'(x_1, y_1) + f'(x_0, y_0)] + \frac{h^2}{12} f''(x_1, y_1) - \frac{h^4}{144} f^{(4)}(x_0, y_0) - \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_1, y_1) > 0$$

Situación 4.

$$H_1 > 0$$

4. Aproximacion conjunta: super y sub.

Combinando cada curva superintegral, con las posibles subintegrales se llega a las siguientes situaciones y condiciones de mejor aproximacion.

Situacion n° 1.

$$\begin{array}{ll} \bar{y}(x) = y(\theta=1) & \bar{\bar{y}}(x) = y(\theta=1) \\ \underline{y}(x) = y(\theta=0) & \underline{\underline{y}}(x) = y(\theta=0) \end{array}$$

Condicion requerida

$$K_1 > 0$$

$$H_0 > 0$$

Situacion 2.

$$\begin{array}{ll} \bar{y}(x) = y(\theta=1) & \bar{\bar{y}}(x) = y(\theta=1) \\ \underline{y}(x) = y(\theta=0) & \underline{\underline{y}}(x) = y(\theta=0) \end{array}$$

$$K_1 > 0$$

$$H_0 > 0$$

Situacion 3.

$$\begin{array}{ll} \bar{y}(x) = y(\theta=1) & \bar{\bar{y}}(x) = y(\theta=0) \\ \underline{y}(x) = y(\theta=0) & \underline{\underline{y}}(x) = y(\theta=0) \end{array}$$

$$K_1 > 0$$

$$H_0 > 0$$

Situacion 4.

$$\begin{array}{ll} \bar{y}(x) = y(\theta=1) & \bar{\bar{y}}(x) = y(\theta=0) \\ \underline{y}(x) = y(\theta=0) & \underline{\underline{y}}(x) = y(\theta=1) \end{array}$$

$$K_1 > 0$$

$$H_0 > 0$$

Situacion 5.

$$\begin{array}{ll} \bar{y}(x) = y(\theta=0) & \bar{\bar{y}}(x) = y(\theta=0) \\ \underline{y}(x) = y(\theta=1) & \underline{\underline{y}}(x) = y(\theta=0) \end{array}$$

$$K_0 > 0$$

$$H_1 > 0$$

Situacion 6.

$$\bar{y}(x) = y(\theta=0)$$

$$\bar{y}(x) = y(\theta=0)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$K_0 > 0$$

$$H_1 > 0$$

Situacion 7.

$$\bar{y}(x) = y(\theta=0)$$

$$\bar{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=0)$$

$$K_0 > 0$$

$$H_1 > 0$$

Situacion 8.

$$\bar{y}(x) = y(\theta=0)$$

$$\bar{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$\underline{y}(x) = y(\theta=1)$$

$$K_0 > 0$$

$$H_1 > 0$$

resumen/. Este cuadro de las ocho situaciones, puede resumirse en las dos siguientes:

Si  $\bar{y}_1 = y_1(\theta=1)$

se mejora la aproximacion de  $y(x_2)$ , realizandola en dos pasos, cuando se verifique simultaneamente

$$K_1 > 0$$

$$H_0 > 0$$

Si por el contrario, es  $\bar{y}_1 = y_1(\theta=0)$

la condiciones a verificar para tal fin, son

$$K_0 > 0$$

$$H_1 > 0$$

teniendo estas constantes, los valores:

$$K_0 = \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) - f(x_1, \bar{y}_1)] + \frac{h}{6} [f'(x_0, y_0) + 2f'(x_1, \bar{y}_1)] - \frac{h^2}{12} f''(x_1, \bar{y}_1) + \frac{h^3}{144} f'''(x_0, y_0)$$

$$K_1 = K_0 + \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_1, \bar{y}_1) \quad (87)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} [f(x_1, \underline{y}_1) - f(x_0, y_0)] - \frac{h}{6} [2f'(x_1, \underline{y}_1) + f'(x_0, y_0)] + \frac{h^2}{12} f''(x_1, \underline{y}_1) - \frac{h^3}{144} f'''(x_0, y_0)$$

$$H_1 = H_0 - \frac{h^5}{720} f^{(5)}(x_1, \underline{y}_1)$$

## 2. PROLONGACION IRREGULAR DE SOLUCIONES.

Dada la continuidad de las raices de una ecuacion algebraica, respecto de sus coeficientes, y siendo supuesto en nuestro caso, que los coeficientes de las ecuaciones que proporcionan los super y subvalores, sean funciones tambien continuas de  $x_n, y$ , parece presumible, que si en el inicio, el supervalor  $\bar{y}$  se obtiene dando al parametro  $\theta$ , el valor uno por ej, los restantes supervalores  $\bar{y}$ , obtenidos iterando el procedimiento en los puntos pivotaes correspondientes, debieran resultar tambien con el mismo valor de  $\theta$ .

Esta igualdad, en los valores del citado parametro, se observa en la mayoria de los ejemplos propuestos y en los intervalos considerados, sin embargo en el ejemplo n° 9, que trata de la resolucion de la EDO

$$y' = -2xy^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

se observa, como en la quinta iteracion, y a partir de ella

$$\underline{y}(0.5) = 0.800 \ 000 \ 0263$$

Valor exacto  $y_E(0.5) = 0.8$

$$\bar{y}(0.5) = 0.800 \ 000 \ 1961$$

deja de estar encajada, la solucion exacta entre ambos valores super y sub, pudiendose interpretar como una falla del metodo.

Un analisis mas detallado, muestra como la realidad es, que en dicho quinto paso, el supervalor  $\bar{y}$ , no se consigue, como los anteriores, con  $\theta = 1$ , sino con  $\theta = 0$ , segun se observa en la grafica adjunta, que muestra claramente dicha irregularidad a partir del segundo paso.

Esto nos enseña, la imposibilidad de definir  $\bar{y}$  o  $\underline{y}$ , asociandoles un determinado y constante valor de  $\theta$ , recurriendo por dicho motivo a la determinacion del max o min del conjunto

$$\{y(\theta=0), y(\theta=1)\}$$

De aqui, la minuciosidad con que se trataron las distintas situaciones del parrafo anterior.

En su consecuencia, salvo los casos en que a priori, pueda colegirse la estabilidad del parametro  $\theta$ , a lo largo de una curva sup o subintegral, habra que tener en cuenta esta eventualidad y utilizar un ordenador como elemento mas idoneo y rapido.



3. ESTUDIO DEL ERROR

Error global de truncamiento. Primer caso.  $\theta \in \{0, 1\}$

Esta claro, que si se toma como valor aproximado de  $y(x)$ , la media aritmetica  $\tilde{y}$  de los sup y subvalores, esto es

$$\tilde{y} = \frac{\bar{y} + \underline{y}}{2}$$

el error

$$e_n = y(x_n) - \tilde{y}_n$$

venara acotado por

$$|e_n| < \frac{\bar{y}_n - \underline{y}_n}{2} \tag{88}$$

sin mas complicaciones.

Ahora bien, si lo que sepretende, es encontrar a priori, una determinada amplitud del paso  $h$ , para conseguir una aproximacion prefijada, puede intentarse una formula recurrente, en la cual si las cotas son favorables, aplicar los metodos de Henrici, Hurewicz, etc.

A este efecto, supongamos que  $\bar{y}$ , esté calculado sobre la base de que  $\theta_1 \in \{0, 1\}$ ,  $\theta$  y  $\underline{y}$ , mediante el complementario  $1 - \theta_1$ , se tiene entonces

$$(89) \quad \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{h}{2} [f(\bar{u}) + f(\bar{u}+1)] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u}+1) - f'(\bar{u})] + \frac{h^5}{720} f''''(\bar{u}) + \frac{h^5}{720} \theta_1 [f''''(\bar{u}+1) - f''''(\bar{u})]$$

$$(90) \quad \underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{2} [f(\underline{u}) + f(\underline{u}+1)] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{u}+1) - f'(\underline{u})] + \frac{h^5}{720} f''''(\underline{u}) + \frac{h^5}{720} (1 - \theta_1) [f''''(\underline{u}+1) - f''''(\underline{u})]$$

de donde, restando miembro a miembro

$$d_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} [f(\bar{u}) - f(\underline{u}) + f(\bar{u}+1) - f(\underline{u}+1)] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u}+1) - f'(\underline{u}+1) - (f'(\bar{u}) - f'(\underline{u}))] + \frac{h^5}{720} [f''''(\bar{u}) - f''''(\underline{u})] - \frac{h^5}{720} [f''''(\bar{u}+1) - f''''(\underline{u}+1)] + \frac{h^5}{720} \theta_1 [f''''(\bar{u}+1) + f''''(\underline{u}+1) - f''''(\bar{u}) - f''''(\underline{u})]$$

Desarrollando en serie, los terminos encerrados en los parentesis y considerando solamente los terminos lineales, se tendrá

$$d_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} [d_n D_y f(\underline{u}) + d_{n+1} D_y f(\underline{u+1})] - \frac{h^2}{12} [d_{n+1} D_y f'(\underline{u+1}) - d_n D_y f'(\underline{u})] + \\ + \frac{h^5}{720} [d_n D_y f''(\underline{u})] + \frac{h^5}{720} \theta_1 (\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n) D_y f''(\bar{m}) - \frac{h^5}{720} (1-\theta_1) (\underline{y}_{n+1} - \underline{y}_n) D_y f''(\underline{u})$$

de donde despejando  $d_{n+1}$

$$d_{n+1} = \frac{[1 + \frac{h}{2} D_y f(\underline{u}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(\underline{u}) + \frac{h^5}{720} D_y f''(\underline{u})]}{1 - \frac{h}{2} D_y f(\underline{u+1}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(\underline{u+1})} \cdot d_n + \\ + \frac{h^5}{720} \frac{\theta_1 (\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n) D_y f''(\bar{m}) - (1-\theta_1) (\underline{y}_{n+1} - \underline{y}_n) D_y f''(\underline{u})}{1 - \frac{h}{2} D_y f(\underline{u+1}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(\underline{u+1})} = \\ = A_n d_n + B_n \quad (91)$$

Si ahora, A y B son cotas respectivas de  $A_n$  y  $B_n$ , tales que se tenga

$$|d_{n+1}| \leq A |d_n| + B$$

y si ademas, A es de la forma

$$A = 1 + \delta$$

$\delta$  suficientemente pequeño

se llega finalmente a la siguiente formula, Henrici pag. 18

$$|d_{n+1}| \leq e^{n\delta} |d_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B$$

que permite acotar h, para una aproximacion prefijada  $\epsilon$  de  $d_{n+1}$ .

En efecto, poniendo

$$e^{n\delta} |d_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B < \epsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\delta} \ln \frac{\delta \epsilon + B}{\delta |d_0| + B}$$

y como en el inicio, es  $d_0 = 0$ , resulta

$$n < \frac{1}{\delta} \ln \left[ 1 + \frac{\delta \epsilon}{B} \right]. \quad (92)$$

Segundo caso:  $\theta \in \{\bar{\theta}_1, \underline{\theta}_1\}$ .

Si ahora el parametro  $\theta$ , toma los valores  $\bar{\theta}_1$  o  $\underline{\theta}_1$ , distintos de los  $\{0,1\}$  anteriores - caso conocido por acotacion del parametro - se tendra una vez estabilizados dichos valores

$$\bar{\theta}_1 = \underline{\theta}_1 + \Delta \theta_1$$

asi como

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{h}{2} [f(\bar{u}_{n+1}) + f(\bar{u}_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u}_{n+1}) - f'(\bar{u}_n)] + \frac{h^5}{720} f''''(\bar{u}_n) + \frac{h^5}{720} [\bar{\theta}_1 + \Delta \theta_1] [f''''(\bar{u}_{n+1}) - f''''(\bar{u}_n)]$$

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{2} [f(\underline{u}_{n+1}) + f(\underline{u}_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{u}_{n+1}) - f'(\underline{u}_n)] + \frac{h^5}{720} f''''(\underline{u}_n) + \frac{h^5}{720} \underline{\theta}_1 [f''''(\underline{u}_{n+1}) - f''''(\underline{u}_n)]$$

$$d_{n+1} = \bar{y}_{n+1} - \underline{y}_{n+1} = d_n + \frac{h}{2} [f(\bar{u}_{n+1}) - f(\underline{u}_{n+1}) + f(\bar{u}_n) - f(\underline{u}_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u}_{n+1}) - f'(\underline{u}_{n+1}) - (f'(\bar{u}_n) - f'(\underline{u}_n))] + \frac{h^5}{720} [f''''(\bar{u}_n) - f''''(\underline{u}_n)] + \frac{h^5}{720} \Delta \theta_1 [f''''(\bar{u}_{n+1}) - f''''(\bar{u}_n)] + \frac{h^5}{720} \underline{\theta}_1 [f''''(\bar{u}_{n+1}) - f''''(\underline{u}_{n+1}) - (f''''(\bar{u}_n) - f''''(\underline{u}_n))]$$

Desarrollando en serie los parentesis, y limitandolos en los terminos lineales se saca como anteriormente:

(93)

$$d_{n+1} = \frac{[1 + \frac{h}{2} D_3 f(\underline{u}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\underline{u}) + \frac{h^5}{720} D_3 f''''(\underline{u})(1 - \underline{\theta}_1)] d_n + \frac{h^5}{720} \Delta \theta_1 D_3 f''''(\bar{u})(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n)}{1 - \frac{h}{2} D_3 f(\underline{u}_{n+1}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\underline{u}_{n+1}) - \frac{h^5}{720} \underline{\theta}_1 D_3 f''''(\underline{u}_{n+1})}$$

formula analogo a la (91), con la presencia del factor  $\Delta \theta_1$ .

#### 4. FORMULAS DE PASOS MÚLTIPLES.

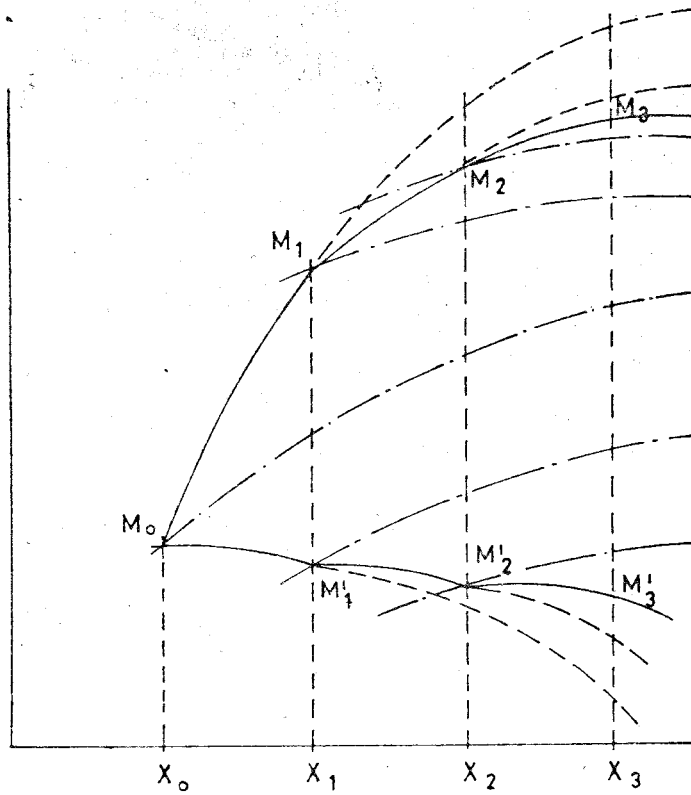
En todo lo que sigue, nos colocamos en el supuesto que hemos llamado de prolongación regular, o sea cuando los sup y subvalores, se presentan como consecuencia de los mismos valores del parámetro  $\theta$ .

Con estas hipótesis, a partir del punto inicial  $M_0(x_0, y_0)$  y mediante los algoritmos super y sub, se obtienen los puntos  $M_1$  y  $M'_1$ , representantes de  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ , respectivamente. Luego, a partir de estos valores, con la misma técnica se obtienen los puntos  $M_2$  y  $M'_2$ ... etc

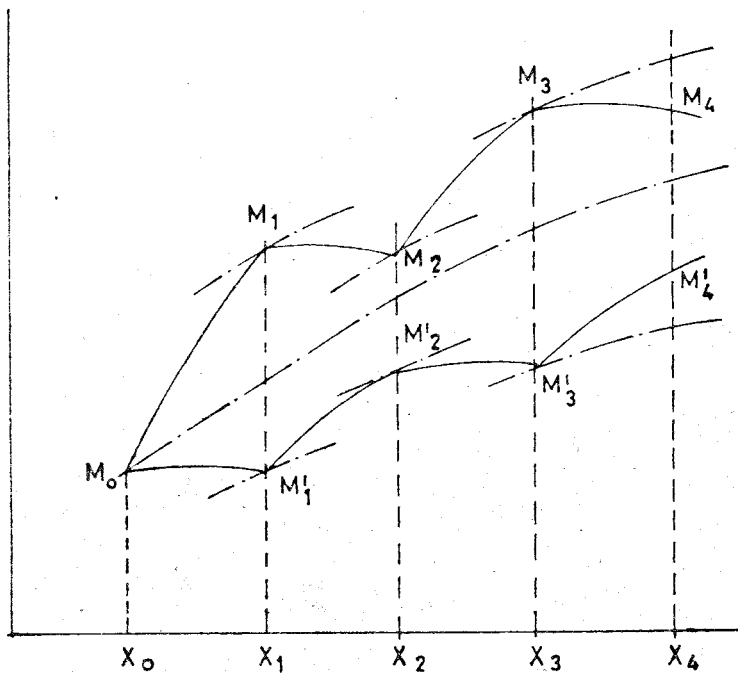
Procediendo así, se tiene la seguridad de que la solución exacta está comprendida entre ambos puntos, aunque eso sí, con un error global de truncamiento cada vez mayor, valorado este último por la diferencia entre ambos valores (sup y sub).

Puede mejorarse este error, siguiendo diversos caminos en el sentido literal de la palabra. Por ejemplo, partiendo del punto inicial  $M_0$ , utilizando los algoritmos sup y sub, se llegaría a los  $M_1$  y  $M'_1$ , representantes de  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ . A partir de estos puntos, y aplicando ahora los algoritmos anteriores pero en sentido inverso, esto es, partir de  $M_1$  con el sub y de  $M'_1$  con el sup, para llegar a los  $M_2$  y  $M'_2$ , desde donde se repetiría el proceso.

De esta manera, se iría dibujando una especie de dientes de sierra, de los cuales, se tomarían por ejemplo, los correspondientes a los puntos con subíndices pares, para aprovechar la presunta mejor aproximación lograda por estos puntos; los cuales podrán encajar o no, a la curva integral exacta, en cuyo caso afirmativo entraríamos de lleno en las fórmulas correctoras.



Prolongacion de soluciones. Maximo error.



Prolongacion de soluciones: Diente de sierra.

### 5. ALGORITMO DEL DIENTE DE SIERRA

En la deducción de este algoritmo, caben dos alternativas, conducentes por otra parte a la misma fórmula; según se considere los supra o infra valores,  $\bar{y}$  e  $\underline{y}$  (con subíndices pares) originados por  $\theta = 1$  y  $\theta = 0$ , o bien, por la situación contraria:  $\theta = 0$  y  $\theta = 1$ .

En todos los casos, las situaciones a las cuales se pueden llegar, con este algoritmo, serían las dibujadas en la fig. 5 y de las cuales para que este proceso de acotación en diente de sierra, sea eficiente solo interesan, las marcadas con I y IV, que son las únicas que acotan el valor exacto  $y_{n+2}$ .

De otra manera, para que la solución exacta este acotada, entre  $\bar{y}_{n+2}$  e  $\underline{y}_{n+2}$ , es preciso la igualdad de signo, entre las expresiones siguientes:

$$\bar{e}_{n+2} = \bar{y}_{n+2} - y_{n+2} \tag{94}$$

$$e_{n+2} = \underline{y}_{n+2} - y_{n+2}$$

esto es, que ambos errores  $\bar{e}_{n+2}$  y  $e_{n+2}$ , sean simultáneamente positivos o negativos.

Se trata entonces, de encontrar una fórmula recurrente que relacione las  $e$  de subíndice par.

Sea en primer lugar el caso

$$A). \quad \bar{y}_j = y(\theta=1) \quad \underline{y}_j = y(\theta=0) \quad j=2k+1 \quad k \in N$$

Suponiendo  $n$  par, se tendrá para el caso general, del superdiente de sierra

$$\theta=1 \quad \bar{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{2} [f(\overline{n+1}) + f(\underline{n})] - \frac{h^2}{12} [f'(\overline{n+1}) - f'(\underline{n})] + \frac{h^5}{720} f''''(\overline{n+1})$$

$$\theta=0 \quad \underline{y}_{n+2} = \bar{y}_{n+1} + \frac{h}{2} [f(\underline{n+2}) + f(\overline{n+1})] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{n+2}) - f'(\overline{n+1})] + \frac{h^5}{720} f''''(\underline{n+2})$$

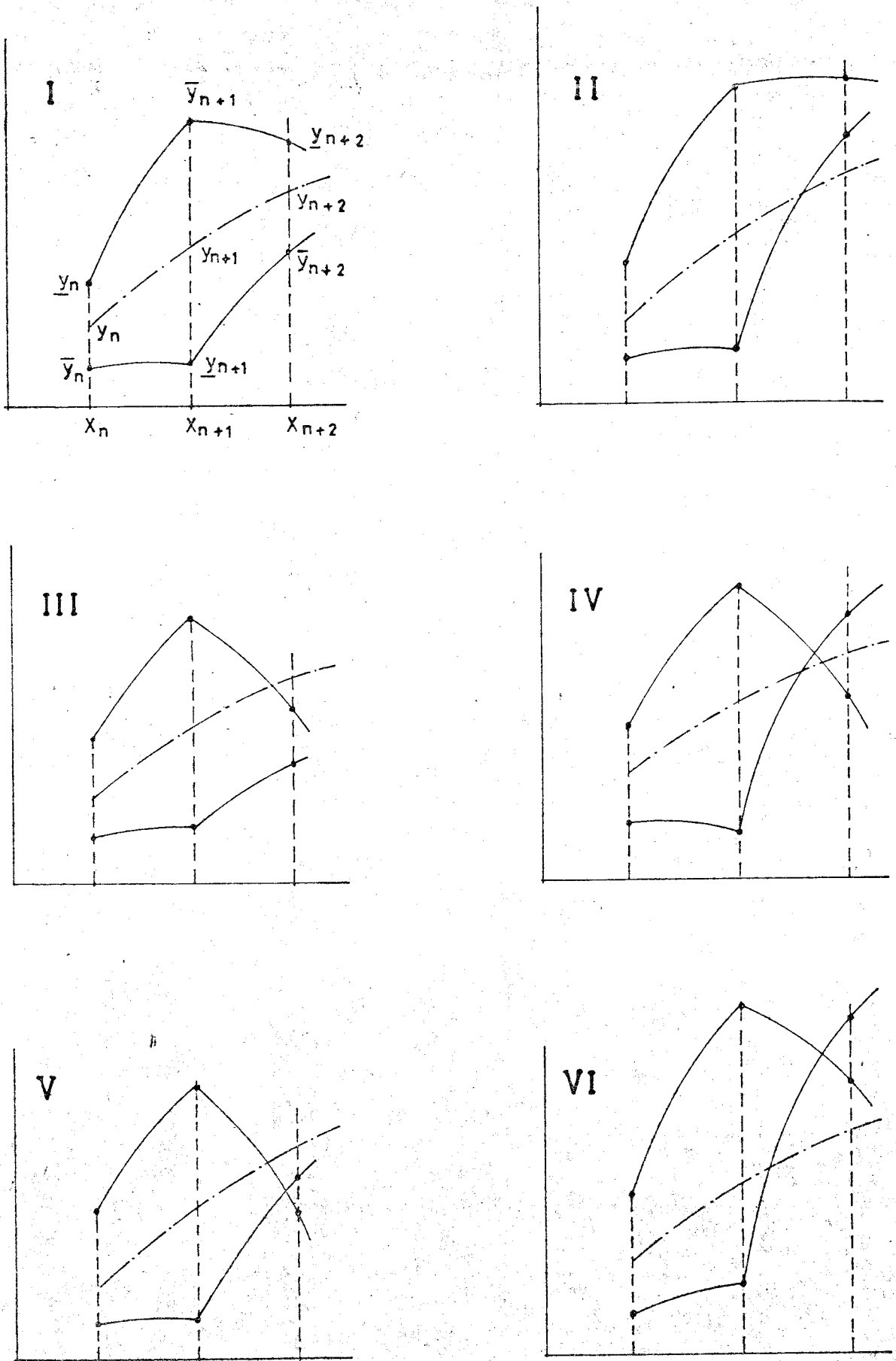


Fig. 5

Algoritmo diente de sierra. Distintas situaciones.

Despejando  $\bar{y}_{n+1}$  en la ultima, y sumandola con la  $\bar{y}_{n+1}$  de la primera ecuacion, tenemos, despejando  $\bar{y}_{n+2}$

$$(95) \quad \underline{y}_{n+2} = 2\bar{y}_{n+1} - \underline{y}_n + \frac{h}{2} [f(\underline{n+2}) - f(\underline{n})] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{n+2}) + f'(\underline{n}) - 2f'(\underline{n+1})]$$

ecuacion simplificada, por cuanto carece del termino en  $n^5$ , y de la correspondiente  $f^{IV}$ , y entra en la categoria de las multipasos, por la presencia en ella de los valores  $\bar{y}_{n+1}$ ,  $\bar{y}_n$  e  $\underline{y}_{n+2}$ .

B. Repitiendo el razonamiento anterior, para el subdiente de sierra correspondiente, nos encontramos con esta otra ecuacion menos simplificada que la anterior (95)

$$(96) \quad \bar{y}_{n+2} = 2\underline{y}_{n+1} - \bar{y}_n + \frac{h}{2} [f(\bar{n+2}) - f(\bar{n})] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{n+2}) + f'(\bar{n}) - 2f'(\bar{n+1})] + \frac{h^5}{720} [f^{IV}(\bar{n+2}) - f^{IV}(\bar{n})].$$

C. ) Considerando en la curva integral exacta, los valores  $y_{n+2}$  e  $y_{n+1}$ , correspondientes a  $\theta = \theta_2$  y  $\theta = \theta_1$ , se tiene

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2} [f(\underline{n+2}) + f(\underline{n+1})] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{n+2}) - f'(\underline{n+1})] + \frac{h^5}{720} f^{IV}(\underline{n+1}) + \frac{h^5}{720} \theta_2 [f^{IV}(\underline{n+2}) - f^{IV}(\underline{n+1})]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(\underline{n+1}) + f(\underline{n})] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{n+1}) - f'(\underline{n})] + \frac{h^5}{720} f^{IV}(\underline{n}) + \frac{h^5}{720} \theta_1 [f^{IV}(\underline{n+1}) - f^{IV}(\underline{n})].$$

que con los mismos artificios anteriores, proporcionan

$$(97) \quad y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + \frac{h}{2} [f(\underline{n+2}) - f(\underline{n})] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{n+2}) + f'(\underline{n}) - 2f'(\underline{n+1})] + \frac{h^5}{720} [f^{IV}(\underline{n+2}) \cdot \theta_2 + f^{IV}(\underline{n+1}) (1 - \theta_1 - \theta_2) - f^{IV}(\underline{n}) (1 - \theta_1)]$$



6. FORMULAS DE LOS ERRORES.

Los errores  $\bar{e}_{n+2}$  y  $e_{n+2}$ , vendran expresados, por

$$(98) \quad \bar{e}_{n+2} = y_{n+2} - \bar{y}_{n+2} = 2 e_{n+1} - \bar{e}_n + \frac{h}{2} [f(\underline{u+2}) - f(\bar{u+2}) - f(\underline{u}) + f(\bar{u})] -$$

$$- \frac{h^2}{12} [f'(\underline{u+2}) + f'(\underline{u}) - 2f'(\bar{u+1}) - f'(\bar{u+2}) - f'(\bar{u}) + 2f'(\underline{u+1})] + \frac{h^5}{720} [f^{(iv)}(\underline{u+2}) \theta_2$$

$$(1 - \theta_1 - \theta_2) f^{(iv)}(\underline{u+1}) - (1 - \theta_1) f^{(iv)}(\underline{u}) - f^{(iv)}(\bar{u+2}) + f^{(iv)}(\bar{u})]$$

$$(99) \quad e_{n+2} = y_{n+2} - y_{n+2} = 2 \bar{e}_{n+1} - e_n + \frac{h}{2} [f(\underline{u+2}) - f(\bar{u+2}) + f(\underline{u}) - f(\bar{u})] -$$

$$- \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u+2}) + f'(\bar{u}) - 2f'(\underline{u+1}) - f'(\underline{u+2}) - f'(\underline{u}) + 2f'(\bar{u+1})] + \frac{h^5}{720} [-f^{(iv)}(\underline{u+2}) \theta_2 -$$

$$- (1 - \theta_1 - \theta_2) f^{(iv)}(\underline{u+1}) + (1 - \theta_1) f^{(iv)}(\underline{u})]$$

Tomando  $h$  suficientemente pequeño, para que los cuadrados de los  $e$  sean despreciables, y desarrollando en serie las funciones de los parentesis, se tiene despejando los errores  $n+2$

$$(100) \quad \bar{e}_{n+2} = \frac{[2 + \frac{h^2}{6} D_3 f'(\underline{u+1})] e_{n+1} - [1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\bar{u}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\bar{u}) + \frac{h^5}{720} D_3 f^{(iv)}(\bar{u})] \bar{e}_n}{1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\bar{u+2}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\bar{u+2}) - \frac{h^5}{720} D_3 f^{(iv)}(\bar{u+2})} +$$

$$\frac{h^5}{720} \frac{[f^{(iv)}(\underline{u+2}) (\theta_2 - 1) + \theta_1 f^{(iv)}(\underline{u}) + (1 - \theta_1 - \theta_2) f^{(iv)}(\underline{u+1})]}{1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\bar{u+2}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\bar{u+2}) - \frac{h^5}{720} D_3 f^{(iv)}(\bar{u+2})}$$

$$(101) \quad e_{n+2} = \frac{[2 + \frac{h^2}{6} D_3 f'(\bar{u+1})] \bar{e}_{n+1} - [1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\underline{u}) + \frac{h^2}{12} f'(\underline{u})] e_n}{1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\underline{u+2}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\underline{u+2})} +$$

$$\frac{h^5}{720} \frac{[-f^{(iv)}(\underline{u+2}) \theta_2 + f^{(iv)}(\underline{u}) (1 - \theta_1) - f^{(iv)}(\underline{u+1}) (1 - \theta_1 - \theta_2)]}{1 - \frac{h}{2} D_3 f'(\underline{u+2}) + \frac{h^2}{12} D_3 f'(\underline{u+2})}$$

Nos queda expresar los errores  $e_{n+1}$ , en función de los  $e_n$ . Para ello de las conocidas formulas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(u_{n+1}) + f(u_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(u_{n+1}) - f'(u_n)] + \frac{h^5}{720} f''''(u) + \frac{h^5}{720} \theta_1 [f''''(u_{n+1}) - f''''(u_n)]$$

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \frac{h}{2} [f(\underline{u}_{n+1}) + f(\underline{u}_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(\underline{u}_{n+1}) - f'(\underline{u}_n)] + \frac{h^5}{720} f''''(\underline{u})$$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{h}{2} [f(\bar{u}_{n+1}) + f(\bar{u}_n)] - \frac{h^2}{12} [f'(\bar{u}_{n+1}) - f'(\bar{u}_n)] + \frac{h^5}{720} f''''(\bar{u}_{n+1})$$

deducimos con los artificios de siempre

$$(102) \quad \underline{e}_{n+1} = \frac{[1 + \frac{h}{2} D_y f(\bar{u}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(\bar{u}) + \frac{h^5}{720} D_y f''''(\bar{u})] \bar{e}_n + \frac{h^5}{720} \theta_1 [f''''(u_{n+1}) - f''''(u_n)]}{1 - \frac{h}{2} D_y f(u_{n+1}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(u_{n+1})}$$

$$(103) \quad \bar{e}_{n+1} = \frac{[1 + \frac{h}{2} D_y f(u) + \frac{h^2}{12} D_y f'(u)] \bar{e}_n + \frac{h^5}{720} (1 - \theta_1) [f''''(u_{n+1}) - f''''(u_n)]}{1 - \frac{h}{2} D_y f(\bar{u}_{n+1}) + \frac{h^2}{12} D_y f'(\bar{u}_{n+1}) - \frac{h^5}{720} D_y f''''(\bar{u}_{n+1})}$$

sustituyendo estos valores de los  $e_{n+1}$ , en las expresiones correspondientes de los  $e_{n+2}$ , así como teniendo en cuenta, que estos errores del orden de  $h^5/720$ , para  $h$  suficientemente pequeño, permite acabar los desarrollos en serie de los parentesis en los terminos lineales en  $h$ , se tendran las siguientes expresiones para los errores de subindice par:

$$(104) \quad \bar{e}_{n+2} = [1 + \frac{h}{2} (D_y f(\bar{u}) + 2D_y f(u_{n+1}) + D_y f(\bar{u}_{n+2}))] \bar{e}_n + \frac{h^5}{720} [(1 + \theta_1 - \theta_2) f''''(u_{n+1}) - (1 - \theta_2) f''''(u_{n+2})] = \bar{A}_n \bar{e}_n + \bar{B}_n$$

$$(105) \quad \underline{e}_{n+2} = [1 + \frac{h}{2} (D_y f(u) + 2D_y f(\bar{u}_{n+1}) + D_y f(u_{n+2}))] \underline{e}_n + \frac{h^5}{720} [(1 - \theta_1 + \theta_2) f''''(u_{n+1}) - \theta_2 f''''(u_{n+2})] = \underline{A}_n \underline{e}_n + \underline{B}_n$$

Se llega así, a la conclusión de que la igualdad de signo entre  $\bar{e}_{n+2}$  y  $e_{n+2}$  equivale a la misma igualdad, entre

$$\bar{A}_n \bar{e}_n + \bar{B}_n \quad \text{y} \quad \underline{A}_n \underline{e}_n + \underline{B}_n$$

desde  $n=0$ .

Como en el inicio  $e_0 = 0$ , efectuando las iteraciones anteriores, se tiene para los errores (variando  $n$ ), las siguientes formulaciones

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{B}_0 \\ \bar{e}_2 &= \bar{A}_2 \bar{B}_0 + \bar{B}_2 \\ \bar{e}_3 &= \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{B}_0 + \bar{A}_3 \bar{B}_2 + \bar{B}_3 \\ &\dots \\ \bar{e}_{n+2} &= \bar{A}_n \bar{A}_{n-2} \dots \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{B}_0 + \bar{A}_n \bar{A}_{n-2} \dots \bar{A}_3 \bar{B}_2 + \dots + \bar{A}_n \bar{B}_{n-2} + \bar{B}_n \end{aligned}$$

(106)

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= \underline{B}_0 \\ \underline{e}_2 &= \underline{A}_2 \underline{B}_0 + \underline{B}_2 \\ \underline{e}_3 &= \underline{A}_3 \underline{A}_2 \underline{B}_0 + \underline{A}_3 \underline{B}_2 + \underline{B}_3 \\ &\dots \\ \underline{e}_{n+2} &= \underline{A}_n \underline{A}_{n-2} \dots \underline{A}_3 \underline{A}_2 \underline{B}_0 + \underline{A}_n \underline{A}_{n-2} \dots \underline{A}_3 \underline{B}_2 + \dots + \underline{A}_n \underline{B}_{n-2} + \underline{B}_n \end{aligned}$$

de cuyo signo a priori, nada puede decidirse, puesto que como es lógico, depende de la especial configuración de las  $f(x,y)$

Lo que sí puede colegirse, es que si en el intervalo considerado las  $\bar{A}_i$  y  $\underline{A}_i$  son positivas; cualquiera que sea el signo COMUN de las  $B_i$ , los  $e_i$  tienen también el mismo signo (el de  $B_i$ ), y el algoritmo diente de sierra es eficiente.

Si por el contrario, las  $A_i$  son negativas, cualquiera que sea el signo COMUN de las  $B_i$ , tendremos para las  $e_i$ , una suma alternada, con lo que el carácter de isosignalidad requeriría un análisis más detallado.

## 2. Investigacion del signo de los $e_1$ .

La investigacion del signo respecto de las  $A$ , es relativamente facil, puesto que siendo:

$$\bar{A}_n = 1 + \frac{h}{2} [D_1 f(\bar{u}) + 2D_2 f(\bar{u}+1) + D_3 f(\bar{u}+2)]$$

$$A_n = 1 + \frac{h}{2} [D_1 f(u) + 2D_2 f(u+1) + D_3 f(u+2)]$$

su calculo, y por consiguiente su signo, son obvios, dado el conocimiento previo de todos sus componentes.

No es asi, la investigacion del signo de  $B$ . Al no conocerse ningun elemento suyo, y si solamente, cotas de los mismos, se estará en un terreno muy resbaladizo, de no siempre posible solucion.

Puede ayudarnos el hecho, de que la anulacion de una  $B_n$ ; la  $\bar{B}_n$  por ej. tiene lugar cuando

$$(107) \quad \frac{1 + B_1 - B_2}{1 - B_2} = \frac{f^{iv}(u+2)}{f^{iv}(u+1)}$$

y si hemos utilizado la acotacion del parametro  $h$ , tendremos para el primer miembro, un intervalo  $(R_1, R_2)$  de acotacion.

De la misma manera, al cumplirse con las  $f^{iv}$ , la limitacion

$$f^{iv}(\bar{u}+1) > f^{iv}(u+1) > f^{iv}(u+2)$$

o su inversa, tendremos tambien elementos de juicio para acotar el segundo miembro de (107). Entonces, se tiene o bien

$$\frac{f^{iv}(\bar{u}+2)}{f^{iv}(\bar{u}+1)} < \frac{f^{iv}(u+2)}{f^{iv}(u+1)} < \frac{f^{iv}(u+2)}{f^{iv}(u+1)}$$

o la inversa. En todo caso queda determinado otro intervalo  $(S_1, S_2)$  de acotacion que segun su posicion relativa respecto del otro  $(R_1, R_2)$ , permitiran o no decidir en lo relativo al signo de  $B$ .

3. Error global de  $\tilde{y}_{n+2}$ .

En los casos en que la solución exacta, venga encajada entre los valores de ambas (sup y sub) aproximante, o de otra manera cuando el algoritmo diente de sierra sea eficiente, la cota del error es inmediata:

$$|\varepsilon_{n+2}| = |y_{n+2} - \tilde{y}_{n+2}| < \left| \frac{\bar{y}_{n+2} - \underline{y}_{n+2}}{2} \right|$$

En los demás casos, cuando las dos  $\bar{y}$  e  $\underline{y}$ , aproximen unilateralmente a la solución exacta, habra que acotar las  $e_{n+2}$  anteriores.

Dichas cotas, son factibles, puesto que las B-unicas que pueden presentar problemas- cada el caracter monotono presupuesto en las  $f^{iv}$ , asi como el conocimiento de los sup y sub valores -  $\bar{y}$  e  $\underline{y}$  - permiten hallar para cada  $e_{n+2}$ , dos E, tales que

$$\underline{E}_1 < \underline{e}_{n+2} < \underline{E}_2$$

$$\bar{E}_1 < \bar{e}_{n+2} < \bar{E}_2$$

De esta manera, se tiene entonces

$$\varepsilon_{n+2} = y_{n+2} - \tilde{y}_{n+2} = \frac{y_{n+2} - \bar{y}_{n+2} + y_{n+2} - \underline{y}_{n+2}}{2} = \frac{\bar{e}_{n+2} - \underline{e}_{n+2}}{2}$$

y como consecuencia

$$(108) \quad \frac{\bar{E}_1 - \underline{E}_2}{2} < \varepsilon_{n+2} < \frac{\bar{E}_2 - \underline{E}_1}{2}$$

TERCERA PARTE

RESULTADOS NUMERICOS

1. Soluciones iniciales. Como ya se indicó en el prologo, hemos seleccionado una coleccion de ejemplos, sacados de los libros y autores a nuestro alcance, lo que permite contrastar el metodo propuesto, asi como el prtido que puede sacarsele a una minicomputadora, ya que el agobio de tiempo con que nos desenvolvemos, hizo imposible la programacion en Fortran de todos ellos, como hubiera sido nuestro deseo.

Ejemplo nº 1. Tomado del Collatz.

EDO a considerar:  $y' = y - (2x/y)$  con  $y(0) = 1$  y  $h = 0.1$

Solucion exacta, a efectos de comprobacion:  $y = \sqrt{1+2x}$

Calculo derivadas

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

$$y'' = 2y' - \frac{2+y'^2}{y}$$

$$y''' = \frac{2y'^2 - 3y'y''}{y} + 2y''$$

$$y^{iv} = 2y''' + \frac{6y'y'' - 3y''^2 - 4y'y'''}{y}$$

$$y^v = 2y^{iv} + \frac{8y'y'' + 6y''^2 - 10y''y''' - 5y'y^{iv}}{y}$$

todas facilmente programables.

Como excepcion, utilizaremos el caso  $m=1$ .

La ecuacion clave- en funcion del parametro  $\theta$  -será la siguiente

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (y'_0 + y'_1) - \frac{h^3}{12} y''_0 - \frac{h^3}{12} \theta (y'''_1 - y'''_0)$$

y sustituyendo valores:

$$a=0 \quad \underline{y}_1 = 1 + \frac{h}{2} (y'_1 + 1) - \frac{h^3}{4}$$

$$a=1 \quad \bar{y}_1 = 1 + \frac{h}{2} (\bar{y}'_1 + 1) - \frac{h^3}{4} \bar{y}'''_1$$

ecuaciones, que tras unas pocas iteraciones, proporcionan los siguientes valores

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}_1 = 1.095390351 \\ \underline{y}_1 = 1.095487529 \end{array} \right\} \bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_1 + \underline{y}_1}{2} = 1.095438940$$

$$y_E = \text{valor exacto} = 1.095445115$$

El error  $e_1$  vendrá acotado por

$$e_1 = y_1 - \tilde{y}_1 \leq \bar{y}_1 - \underline{y}_1 = 9.7179 (10^{-5})$$

y su modulo, por

$$|e_1| < \frac{\bar{y}_1 - \underline{y}_1}{2} = 4.85895 (10^{-5})$$

El valor exacto del error  $e_1$ , será

$$e_1 = y_1 - \bar{y}_1 = \sqrt{1+2x} - \tilde{y}_1 = 6.1750103 (10^{-6})$$

lo que permite contrastar las cotas anteriores.

Sea ahora el caso  $m = 2$ .

Las ecuaciones, que proporcionan  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$ , son

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} y'_0 + \frac{h^2}{12} y''_0 + \frac{h^3}{240} y'''_0 - \frac{h^2}{12} \bar{y}''_1 + \frac{h}{2} \bar{y}'_1$$

$$\underline{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} y'_0 + \frac{h^2}{12} y''_0 + \frac{h^3}{240} y'''_0 - \frac{h^2}{12} \underline{y}''_1 + \frac{h}{2} \underline{y}'_1$$

que tras unas pocas iteraciones, proporcionan:

$$\bar{y}_1 = 1.095445638$$

$$\underline{y}_1 = 1.095444773$$

asi como para la media aritmetica:

$$\tilde{y}_1 = 1.095445205$$

con una acotación del error dada por

$$y_1 - \tilde{y}_1 < \bar{y}_1 - y_1 = 8.65(10^{-7})$$

y exactamente dado por

$$y_1 - \tilde{y}_1 = \sqrt{1+2x} - \frac{\bar{y}_1 + y_1}{2} = 5.6(10^{-8})$$

Acotación de  $\theta$ . Considerando el caso  $m = 1$ , la fórmula (xx)

$$\theta_1 = \frac{y_1'' - y_0'' - h y_0''' - \frac{h^3}{60} y_0^{(4)} - \frac{h^3}{60} \theta_2 (y_1^{(4)} - y_0^{(4)})}{h(y_1''' - y_0''')}$$

proporciona, tomando en consideración las cotas de  $y_1''$ ,  $y_1'''$ ,  $y_1^{(4)}$ , las siguientes cotas para el parámetro  $\theta$ .

$$\bar{\theta} = 0.568887$$

$$\underline{\theta} = 0.559988$$

que sustituidos en la ecuación clave ( ), proporcionan los nuevos valores

$$\bar{y}_1 = 1.095445638$$

$$\underline{y}_1 = 1.095444774$$

$$\tilde{y}_1 = 1.095445115$$

los que a su vez, mediante la ( ), vuelven a proporcionar las mismas cotas para  $\theta$ , estabilizándose así las iteraciones.

La cota del error, es ahora

$$e_1 < \bar{y}_1 - y_1 = 8.64(10^{-7})$$

valores que comparados con los anteriores:  $\tilde{y}_1 = 1.095438940$ ;  $e_1 < 4.85895(10^{-5})$

muestran la ganancia conseguida, sin necesidad de utilizar el algoritmo  $m = 2$ .

En el caso  $m = 2$ , la fórmula a acotar, sería

$$\theta = \frac{32[y_1^{(4)} - y_0^{(4)} - h y_0^{(5)}] - h^3 y_1^{(5)} - h^3 y_0^{(5)}(1-\theta)}{32h(y_1^{(3)} - y_0^{(3)})}$$



proporcionando tras el calculo de las nuevas derivadas  $y^{(3)}$  e  $y^{(4)}$ , las siguientes cotas para el parametro

$$\bar{\theta} = 0.595\ 467\ 1317$$

$$\underline{\theta} = 0.624\ 706\ 8064$$

los que proporcionan- formula ( ) -los nuevos valores

$$\bar{y}_1 = 1.095\ 445\ 124$$

$$y_1 = 1.095\ 445\ 098$$

$$\bar{y}_1 = 1.095\ 445\ 111 \quad y_2 = 1.095\ 445\ 115$$

$$e_1 < 2.6 (10^{-8})$$

que al utilizarlos de nuevo, para la acotacion de  $\theta$ , reproducen los mismos valores quedando estabilizadas las iteraciones.

Metodo de Runge-Kutta.

La formula mas conocida del mismo

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

con  $k_1 = h f(x_n, y_n)$ ,  $k_2 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ ,  $k_3 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$$k_4 = h f(x_{n+1}, y_n + k_3)$$

proporciona ( V. programa en el apendice )

$$y = 1.095\ 445\ 531$$

que aunque tiene muchas cifras exactas, no da ninguna acotacion sobre el error.

Sin embargo, Lotkin ( ) suministra la siguiente cota, mas precisa que la de Bieberbach

$$|E| \leq \frac{73}{720} \cdot M L^5 h^5$$

con el significado para M y L, de

$$|f(x, y)| \leq M$$

$$|f_{x^{(i)}y^{(j)}}| \leq L / M^{j-1}$$

$$i + j \leq 4$$

de ejecucion molesta, por cuanto no son de facil programacion.

En nuestro caso se tendria:

que la cota  $M$ , teniendo en cuenta el carácter de serie alternada con que se desarrolla  $y_1$ , por la fórmula de Taylor, pudiera ser

$$f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} < 1.1 - \frac{0.2}{1.1} \simeq 0.91 = M$$

ya que

$$1 < y_1 < 1.1$$

y para la otra cota  $l$ , tendríamos

$$|f'_{x,y_0}| = 2y^{-1} \leq \frac{L}{M^{-1}} \Rightarrow L > 2(1.1)^{-1}(0.91)^{-1} = 1.996$$

$$|f'_{x,y}| = 1 + 2xy^{-2} \leq \frac{L}{1} \Rightarrow L > 1 + 2(0.1)(1.1)^{-2} = 1.16$$

$$|f''_{x,y}| = 2y^{-2} \leq \frac{L^2}{1} \Rightarrow L > \sqrt{2(1.1)^{-2}} = 1.28$$

$$|f''_{x,y^2}| = 4xy^{-3} \leq \frac{L^2}{M} \Rightarrow L > \sqrt{4(0.1)(1.1)^{-3}(0.91)} = 0.5229$$

$$|f''_{x,y}| = 4y^{-3} \leq \frac{L^3}{M} \Rightarrow L > \sqrt[3]{4(1.1)^{-3}(0.91)} = 1.39$$

$$|f''_{x,y^3}| = 12xy^{-4} \leq \frac{L^3}{M^2} \Rightarrow L > \sqrt[3]{12(0.1)(1.1)^{-4}(0.91)^2} = 0.878$$

$$|f''_{x,y^3}| = 12y^{-4} \leq \frac{L^4}{M^2} \Rightarrow L > \sqrt[4]{12(1.1)^{-4}(0.91)^2} = 1.619$$

$$|f''_{x,y^3}| = 48xy^{-5} \leq \frac{L^4}{M^3} \Rightarrow L > \sqrt[4]{48(0.1)(1.1)^{-5}(0.91)^3} = 1.22$$

lo que da para  $L = \max \{1.99, 1.16, 1.28, 0.52, 1.39, 0.878, 1.619, 1.22\} = 2$

y la cota del error

$$|E| \leq \frac{2^3}{3!} M \cdot L^4 h^5 = 1.57(10^{-5})$$

Se tienen pues, 5 cifras decimales exactas con el Runge-Kutta.

El método de Taylor proporciona por otra parte,

$$y_1 = 1 + 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3!}(2) - \frac{0.1^4}{4!}(15) + \frac{0.1^5}{5!}(105) - \frac{0.1^6}{6!}(945) + \frac{0.1^7}{7!}(10395) = 1.095445143$$

con

$$|E| < \frac{0.1^8}{8!}(135135) = 3.35(10^{-8})$$

necesitándose en este caso del cálculo

de la 8ª derivada, para asegurarse la séptima decimal exacta.

Ejemplo nº 2) Tomado del Collatz.

$$y' = x + y \quad y(0) = 0 \quad h = 0.1$$

Solucion exacta:  $y_0 = 0^{x-1}$

y para  $x = 0.1$   $y_1 = 0.005 170 918 075$

En este caso, al ser lineal, las ecuaciones que proporcionan  $\bar{y}_1$  e  $\underline{y}_1$  son lineales y no hace falta recurrir a procesos iterativos.

Se tiene, para las derivadas:

$$y' = x + y$$

$$y'' = y''' = \dots = y^{(n)} = \dots = 1 + x + y$$

La ecuacion general, será

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{720} y_0^{(3)} (1-\theta) + \frac{h}{2} y'_1 + \frac{h^2}{12} y''_1 + \frac{h^3}{720} y_1^{(3)} \theta$$

que proporciona directamente

$$y = \frac{y_0 + \frac{h}{2} [y'_0 + x_0] + \frac{h^2}{12} [y''_0 - x_0 - 1] + \frac{h^3}{720} [y_0^{(3)} (1-\theta) + x_0 (2+\theta)]}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^3}{720} \theta}$$

y para  $\theta = 0$ , da

$$\bar{y}_1 = 0.005 170 918 860$$

y para  $\theta = 1$ ,

$$\underline{y}_1 = 0.005 170 917 523$$

$$\bar{y}_1 = 0.005 170 918 091$$

$$e_1 < 7.5(10^{-10})$$

El valor exacto del error, es

$$e_1 = 1.6(10^{-11})$$

El Runge-Kutta, proporciona

$$y_1 = 0.005 170 873 933$$

y la cota del error-Lotkin

$$|E| < 1.019(10^{-7})$$

Dada la facilidad con que se calculan las derivadas sucesivas -todas iguales- se impone el acotamiento del parametro.

Se tiene entonces

$$\theta = \frac{42 y_1^{(4)} - 42 y_0^{(4)} - 42 y_1^{(3)} h - h^2 y_1^{(3)} \theta_2 - h^2 y_0^{(3)} (1 - \theta_2)}{42 h (y_1^{(4)} - y_0^{(4)})}$$

que para  $\theta = 0$ , proporciona

$$\bar{\theta} = 0.489\ 404\ 244$$

y para  $\theta = 1$ ,

$$\underline{\theta} = 0.489\ 164\ 996$$

los que a su vez, conducen a los

$$\bar{y}_1 = 0.005\ 170\ 918\ 075$$

$$\underline{y}_1 = 0.005\ 170\ 918\ 075$$

coincidentes ambos con la solución exacta, hasta ese orden decimal.

Acotación unilateral del parámetro  $\theta$ . Aun cuando ante la rotundidad anterior,

las acotaciones unilaterales no tienen nada que hacer; pudiera no obstante interesar

vista la imposibilidad de obtener la sexta y séptima derivadas, necesarias en el algoritmo anterior y completarlas con el esquema  $m = 1$ .

Como ejemplo del método, seguimos con la misma ecuación diferencial, dada la facilidad de sus derivadas, y no haber programado los cálculos siguientes, sino que han sido tecleados manualmente, en una Computador 320G Scientific. Siguiendo con la notación establecida en , tenemos:

$$y_2 = y_0 + \frac{h}{2} [2x_0 + h + y_1 + y_0] - \frac{h^2}{12} [h + y_1 - y_0] + \frac{h^3}{720} [x_0 + y_0 + 1]$$

$$y_2' = x_0 \left[ 1 + \frac{h^2}{144} \right] + y_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{144} \right] + y_1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{h}{6} \right] + h - \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{144}$$

$$y_2'' = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12}$$

$$y_2''' = 0$$

$$y_2^{(4)} = \frac{3-h}{6}$$

$$g = h + y_1 - y_0$$

$$g_x = g_y = 1$$

$$f = x_0 + h + y_1$$

$$f_y = 1$$

$$y(2) = \frac{x_0 \left( h + \frac{h^2}{144} \right) + y_0 \left[ 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{720} (1-0) \right] + \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{720} + \frac{h^3}{720} \theta}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^3}{720} \theta}$$

$$y'(a) = \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{144} + y_1(0) \cdot \frac{3-h}{6} + \frac{h^5}{720} \cdot \left[1 + \frac{5}{h}(h + y_1 - y_0)\right]}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^5}{720}}$$

La tabla de resultados, es la siguiente

$\theta$	$y(\theta)$	$y'(\theta)$	$y' = x_0 + h + y_1$	$y'(\theta) - y'$
0.3	5.170 917 724 (-3)	1.051 708 951(-1)	1.051 709 177(-1)	-
0.4	5.170 917 938 (-3)	1.051 709 097(-1)	1.051 709 179(-1)	-
0.5	5.170 918 092 (-3)	1.051 709 192(-1)	1.051 709 180(-1)	+

que muestra como

$$0.4 < \theta < 0.5$$

De nuevo tenemos

0.47	5.170 918 046 (-3)	1.051 709 164(-1)	1.051 709 180(-1)	-
0.48	5.170 918 061 (-3)	1.051 709 173(-1)	1.051 709 180(-1)	-
0.49	5.170 918 076 (-3)	1.051 709 183(-1)	1.051 709 180(-1)	+

con lo que

$$0.48 < \theta < 0.49$$

Repetiendo el proceso

0.486	5.170 918 070(-3)	1.051 709 179(-1)	1.051 709 180(-1)	-
0.487	5.170 918 072(-3)	1.051 709 180(-1)	1.051 709 180(-1)	0
0.488	5.170 918 073(-3)	1.051 709 181(-1)	1.051 709 180(-1)	+

Resultando así la cota

$$\theta = 0.487$$

y el valor correspondiente

$$y(0.487) = 5.170 918 072 (-3)$$

cuando el valor exacto, es como se sabe

$$y_E = 5.170 918 075 (-3)$$

Aproximación unilateral de  $\bar{y}$ . (Segundo método).

A los datos suministrados en el método anterior, hay que añadir los siguientes:

$$g' = 1 + h + x_0 + y_1^2$$

$$\underline{y}_1 = \frac{(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{720})y_0 + (h + \frac{h^2}{240})x_0 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{12} + \frac{h^4}{720}}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12}}$$

$$a = \frac{h + \underline{y}_1 - y_0}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12}}$$

de los que se obtiene finalmente, según la fórmula ( ), pag.

$$D = \frac{(x_0 + h + \underline{y}_1) \cdot \frac{12 - 6h + h^2}{12} - \underline{y}_1 \cdot \frac{3-h}{6} - x_0 \cdot (1 + \frac{h^2}{144}) - y_0 \cdot \frac{32 + 3(1-h^2)}{144} - \frac{144 - 36h + h^3}{144} \cdot h}{\frac{h^3}{720} [1 + 2x_0 + 2y_0 + (h + \underline{y}_1 - y_0) (1 + \frac{h}{4} + \frac{6-2h}{12-6h+h^2})]}$$

y efectuando los cálculos correspondientes, resulta

$$\underline{y}_1 = 5.170917923 (10^{-3}) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{y}_1} < 0$$

$$D = 0.6795082224$$

con el valor de  $y_1$ , dado por

$$y_1 = \underline{y}_1 + a \cdot D = 5.170918059 (10^{-3})$$

Ejemplo nº 3. Utilizado por Hamming, Ralston, Milne, Babouska, etc.

$$y' = -y \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion exacta:  $y = e^{-x} \quad y(0.1) = 9.048\ 374\ 180 (10^{-1})$

Las derivadas sucesivas, vienen dadas por

$$y^{(n)} = (-1)^n y$$

con lo que su programacion seria sencillisima.

A pesar de su caracter lineal, y poderse encontrar las cotas por division, es preferible el metodo iterativo. Los resultados son

$$\underline{y}_1 = 9.048\ 374\ 173 (10^{-1})$$

$$\bar{y}_1 = 9.048\ 374\ 186 (10^{-1})$$

$$\tilde{y} = 9.048\ 374\ 179 (10^{-1})$$

$$e \approx 1.0 (10^{-10})$$

$$e < 1.3 (10^{-9})$$

Lo facilmente que se obtienen sus derivadas, incita a acotar el parametro  $\theta$ , obteniendose, tras la aplicacion de la formula

$$\theta = \frac{42 [y_1^{(4)} - y_0^{(4)} - 4y_0^{(3)}] - 4^3 y_1^{(3)} \theta - 4^3 y_0^{(3)} (1-\theta)}{42 h (y_1^{(5)} - y_0^{(5)})}$$

las siguientes cotas:

$$\bar{\theta} = 0.510\ 833\ 990$$

$$\underline{\theta} = 0.510\ 595\ 752$$

que proporcionan ambas, el mismo valor para su y correspondiente:

$$y(\bar{\theta}) = 0.904\ 837\ 418\ 0$$

$$y(\underline{\theta}) = 0.904\ 837\ 418\ 0$$

coincidente con el valor exacto para esa aproximacion.

El Runge-Kutta, da el siguiente valor:

$$y = 0.904\ 837\ 5000$$

con una cota de Lotkin, para el erro de

$$|E| < 1.01 (10^{-6})$$

Ejemplo nº 4. Tomado de Kuntzmann.

$$y' = y - 1.5 e^{-0.5x}$$

$$y(0.4) \approx 0.818\ 730\ 7530 \quad h = 0.1$$

Solucion exacta:  $y = e^{-0.5x}$

$$y(0.5) = 0.778\ 800\ 7830$$

Aun cuando no sea un ejemplo de ecuacion algebraica, su resolucio n puede enfocarse desarrollando en serie la trascendente, lo suficiente para cubrir las necesidades del calculo, y como la minicomputadora utilizada , proporciona la funcion exponenci con once decimales exactos; no variamos el modus operandi, haciendo uso de su caract lineal para calcular y , mediante una division.

Se tiene entonces, para sus derivadas:

$$y' = y - 1.5 e^{-0.5x}$$

$$y'' = y - \frac{3}{4} e^{-0.5x}$$

$$y''' = y - \frac{33}{32} e^{-0.5x}$$

que sustituidas en la ecuacion general, dan lugar a

$$y = \frac{y_0 \left[ 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{720} (1-\theta) \right] + \left[ -\frac{3h}{4} - \frac{3h^2}{48} - \frac{33}{32} \cdot \frac{h^3}{720} (1-\theta) \right] e^{-0.5x_0}}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^3}{720} \theta} + \frac{\left[ -\frac{3h}{4} + \frac{3}{48} h^2 - \frac{33}{32} \cdot \frac{h^3}{720} \theta \right] e^{-0.5x_1}}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^3}{720} \theta}$$

con

$$\bar{y} = 0.778\ 800\ 7830 \quad \text{para } \theta = 0$$

$$\underline{y} = 0.778\ 800\ 7830 \quad \text{para } \theta = 1$$

coincidentes como se vé, con el valor exacto  $y_E$  .

El runge -Kutta , proporciona

$$y = 0.778\ 800\ 7574$$

con un error de Lotkin

$$|E| < 9.12 (10^{-7})$$



Ejemplo nº 5. Tomado de Levy and Baggot.

$$y' = y + x^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion exacta:  $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2 \quad y(0.1) = 1.105\ 512\ 754$

Derivadas

$$y'' = y' + 2x$$

$$y^{(3)} = y^{(4)} = \dots = y^{(i)} = y'' + 2$$

que junto a la ecuacion general, proporcionan

$$\bar{y}_1 = 1.105\ 512\ 756$$

$$\underline{y}_1 = 1.105\ 512\ 751$$

$$\tilde{y}_1 = 1.105\ 512\ 753$$

$$e_1 = 1.(10^{-9})$$

$$e_1 < 5.(10^{-9})$$

El Runge Kutta, da

$$y = 1.105\ 512\ 708 \quad |E| < 1.12(10^{-6})$$

Ejemplo nº 6. Tomado de McCalla.

$$y' = x^2 y \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion exacta :

$$y = e^{(x^3/3)} \quad y(0.1) = 1.000\ 333\ 388$$

Derivadas:

$$y'' = (2x + x^4) y = A_2 y \quad y''' = (40x + 80x^4 + 20x^2 + x^{10}) y = A_5 y$$

Solucion general

$$y_1 = \frac{[1 + \frac{h}{2} x_0^2 + \frac{h^2}{12} A_2(0) + \frac{h^5}{720} A_5(0)(1-\theta)] y_0}{1 - \frac{h}{2} x_1^2 + \frac{h^2}{12} A_2(1) - \frac{h^5}{720} A_5(1)\theta}$$

que proporciona:

$$\underline{y}_1 = 1.000\ 333\ 361$$

$$\bar{y}_1 = 1.000\ 333\ 444$$

$$\tilde{y}_1 = 1.000\ 333\ 402$$

$$e_1 = -1.4(10^{-8})$$

$$e_1 < 8.3(10^{-8})$$

El Runge-Kutta, da :  $y = 1.000333\ 385$  con  $|E| < 1.6(10^{-5})$

Ejemplo nº 7. Tomado de Levy and Baggot.

$$y' = y - (y/x) \quad y(2) = 2 \quad h = 0.2$$

Solucion analitica:

$$y = (x/2) + (2/x) \quad y(0.2) = 2.009 \ 090 \ 909$$

Derivadas:

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \quad ; \quad y'' = \frac{2y-x}{x^2} \quad ; \quad y''' = 60 \cdot \frac{x-2y}{x^5}$$

Su caracter lineal, permite expresar

$$y = \frac{y_0 \left[ 1 - \frac{h}{2x_0} + \frac{h^2}{6x_0^2} - \frac{h^3}{6x_0^3} (1-\theta) + h - \frac{h^2}{12x_0} + \frac{h^3}{12x_0^2} (1-\theta) + \frac{h^4}{12x_1} + \frac{h^5\theta}{12x_1^2} \right]}{1 + \frac{h}{2x_1} + \frac{h^2}{6x_1^2} + \frac{h^3\theta}{6x_1^3}}$$

con los siguientes valores:

$$\bar{y}_1 = 2.009 \ 091 \ 206$$

$$\underline{y}_1 = 2.009 \ 088 \ 921$$

$$\tilde{y} = 2.009 \ 090 \ 063$$

$$e_1 = 8.37(10^{-7})$$

$$e_1 < 2.28(10^{-6})$$

El Runge-Kutta, proporciona:

$$y_1 = 2.009 \ 090 \ 909 \quad |E| < 1.6(10^{-5})$$

Ejemplo nº 8. Tomado de Henrici.

$$y' = -16xy \quad y(-0.75) = 0.002 \ 215 \ 9242 \quad h = 0.03125$$

Solucion exacta:

$$y = 2 \cdot \pi \cdot e^{-8x^2} \quad y(-0.73875) = 3.199 \ 060 \ 155 (10^{-3})$$

Derivadas:

$$y'' = -16(y + xy') \quad y''' = -16(4y'' + xy''')$$

con las soluciones siguientes:

$$\bar{y}_1 = 3.199 \ 060 \ 928 (10^{-3})$$

$$\underline{y}_1 = 3.199 \ 059 \ 203 (10^{-3})$$

$$\tilde{y}_1 = 3.199 \ 060 \ 065 (10^{-3})$$

$$e_1 = 9(10^{-11})$$

$$e_1 < 1.72(10^{-9})$$

El Runge-Kutta, da

$$y_1 = 3.198 \ 928 \ 171 (10^{-3}) \quad \text{con } |E| < 6.5(10^{-4})$$

Ejemplo nº 9. Tomado de Kuntzmann.

$$y' = -2xy^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion analitica:

$$y = 1/(1 + x^2) \quad y(0.1) = 0.990\ 099\ 0099$$

La tabla de derivadas proporciona:

$$y' = -2xy^2; \quad y'' = -2y^2 - 4xyy'; \quad y''' = -8yy' - 4xy'^2 - 4xyy''$$

$$y^{IV} = -12y'^2 - 12yy'' - 12xy'y'' - 4xyy'''$$

$$y^V = -48y'y'' - 16yy''' - 16xy'y''' - 12xy''^2 - 4xyy^{IV}$$

las cuales pueden calcularse mediante las oportunas subrutinas.

La formula general, proporciona

$$\underline{y}_1 = 0.990\ 099\ 4856$$

$$\bar{y}_1 = 0.990\ 098\ 5898$$

$$\tilde{y}_1 = 0.990\ 099\ 0377$$

$$e_1 = 2.8(10^{-8})$$

$$e_1 < 8.966(10^{-7})$$

El Runge-Kutta proporciona

$$y_1 = 0.990\ 099\ 0372$$

con un error Lotkin  $|E| < 2(10^{-6})$

Ejemplo nº 10. Tomado de Mikhlin.

$$y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0 \quad h = 0.1$$

Desconozco la solucion exacta.

Se tiene la siguiente tabla de derivadas de facil programacion.

$$y' = x^2 + y^2; \quad y'' = 2x + 2yy'; \quad y''' = 2 + 2yy'' + 2y'^2$$

$$y^{IV} = 2yy''' + 6y'y''; \quad y^V = 2yy^{IV} + 8y'y''' + 6y''^2$$

que junto al programa Standard operativo, proporciona los siguientes valores:

$$\bar{y}_1 = 3.333\ 388\ 896 (10^{-4})$$

$$\underline{y}_1 = 3.333\ 333\ 332 (10^{-4})$$

$$\tilde{y}_1 = 3.333\ 361\ 114 (10^{-4})$$

$$e_1 < 5.55(10^{-4})$$

El Runge-Kutta, da

$$y = 3.334\ 897\ 35\ (10^{-3}) \quad \text{con } E < 2.(10^{-4})$$

Ejemplo nº 11. Tomado de R.L.Moore.

$$y' = y^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion analitica:

$$y = 1/(1-x) \quad y(0.1) = 1.111\ 111\ 111 \dots$$

Derivadas:

$$y' = y^2 \quad y'' = 2y^3 \quad \dots \quad y^{(n)} = n!y^{n+1}$$

con los siguientes valores:

$$y = 1.111\ 110\ 418$$

$$y = 1.111\ 112\ 060$$

$$y = 1.111\ 111\ 239$$

Con la acotacion parametrica, se llega a

$$y = 1.111\ 111\ 120$$

$$y = 1.111\ 111\ 096$$

$$y = 1.111\ 111\ 108$$

$$e = 3.(10^{-9})$$

$$e < 2.4(10^{-8})$$

El Runge-Kutta, da

$$y = 1.111\ 110\ 490 \quad \text{con } E < 1.2(10^{-4})$$

Ejemplo nº 12. Tomado de H.T. Davis

$$y' = xy(y-2) \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion analitica:

$$y = \frac{2}{(1 + e^{x^2})}$$

$$y(0.1) = 0.995\ 000\ 0416$$

Derivadas:

$$y'' = 2xy'(y-1) + y(y-2)$$

$$y''' = 2xy''(y-1) + 8y'''(xy' + y-1) + 6y''(4y' + xy'')$$

La programación de la fórmula general, viene muy ajustada, teniéndose entonces que suministrar algunos datos manualmente. No obstante, con cuatro o cinco iteraciones se obtienen los siguientes resultados

$$\bar{y}_1 = 0.995\ 000\ 0625$$

$$\underline{y}_1 = 0.995\ 000\ 0208$$

$$\tilde{y}_1 = 0.995\ 000\ 0416$$

$$e_1 = 0$$

$$e_1 < 4.175(10^{-8})$$

El Runge-Kutta, da

$$y_1 = 0.995\ 000\ 0520 \quad \text{con } |E| < 1.2(10^{-4})$$

Ejemplo nº 13. Tomado de Bellman.

$$y' = -y - y^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solución exacta:

$$y = 1/(2e^x - 1) \quad y(0.1) = 8.262\ 128\ 682 (10^{-1})$$

Tabla de derivadas:

$$y'' = -1 - 2y y'$$

$$y^{IV} = -6y' y''' - 6y''^2 - 2y y^{IV}$$

Valores obtenidos:

$$\bar{y}_1 = 8.262\ 166\ 859 (10^{-1})$$

$$\underline{y}_1 = 8.262\ 103\ 871 (10^{-1})$$

$$\tilde{y}_1 = 8.262\ 135\ 365 (10^{-1})$$

$$e_1 = 6.683(10^{-7})$$

$$e_1 < 6.29(10^{-6})$$

El Runge-Kutta, proporciona

$$y_1 = 8.262\ 161\ 534 (10^{-1}) \quad \text{con } |E| < 3.2(10^{-5})$$

Ejemplo nº 14. Tomado de Lambert.

$$y' = e^{10(x-y)} \quad y(0) = 0.1 \quad h = 0.01$$

Solucion teorica:

$$e^{10x} - e^{10y} = 1 - e \quad y(0.1) = 1.037\ 960\ 515$$

Tabla de derivadas

$$y'' = 10 y' (1 - y')$$

$$y''' = 10 y'' (1 - 2 y')$$

$$y^{iv} = 10 [y''' - 2 y' y'' - 2 y''^2]$$

$$y^v = 10 y^{iv} (1 - 2 y') - 50 y'' y'''$$

El programa general, proporciona

$$y = 1.037\ 960\ 515 (10^{-1})$$

$$y = 1.037\ 960\ 515 (10^{-1})$$

coincidentes con el valor exacto.

El Runge-Kutta, da

$$y = ~~1.037\ 960\ 515 (10^{-1})~~ 1.037\ 960\ 518 (10^{-1})$$

con un  $E < 1.014 (10^{-2})$ . (Lambert pagina 129)

Ejemplo nº 15. Tomado de Lambert.

$$y' = 4xy^{\frac{1}{2}} \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

Solucion analitica:

$$y = (1 + x^2)^2 \quad y(0.1) = 1.020\ 100\ 000$$

Tabla de derivadas:

$$y'' = 4(1 + 3x^2)$$

$$y^{iv} = 24$$

$$y''' = 24x$$

$$y^v = 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = \underline{y}_1 = y_e$$

El programa general, produce

$$\bar{y}_1 = \underline{y}_1 = \tilde{y}_1 = 1.020\ 099\ 999$$

El Runge-Kutta da  $y = 1.020\ 099\ 916$  con  $E < 4.05 (10^{-3})$

Ejemplo nº 16. Tomado de Milne.

$$y' = x^2 - y^2 \quad y(-1) = 0 \quad h = 0.1$$

Desconozco la solución analítica.

Tabla de derivadas

$$y'' = 2x - 2yy'$$

$$y''' = 2 - 2yy'' - 2y'^2$$

$$y^{(4)} = -2yy''' - 6y'y''$$

$$y^{(5)} = -2yy^{(4)} - 6y''^2 - 8y'y'''$$

La fórmula general, proporciona

$$y(-0.9) = 9.004\ 781\ 767 (10^{-2})$$

$$\bar{y}(-0.9) = 9.004\ 791\ 638 (10^{-2})$$

$$\tilde{y}(-0.9) = 9.004\ 786\ 702 (10^{-2})$$

$$e_4 < 9.87 (10^{-8})$$

El Runge Kutta, da

$$y(-0.9) = 9.004\ 735\ 746 (10^{-2})$$

con  $E < 2.1 (10^{-5})$

Ejemplo nº 17. Tomado de Lapidus and J. Seinfeld

$$y' = 1 - y^2 \quad y(0) = 0 \quad h = 0.125$$

Solución analítica:

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad y(0.125) = 1.243\ 530\ 017 (10^{-1})$$

Tabla de derivadas:

$$y'' = -2yy'$$

$$y''' = -2[yy'' + y'^2]$$

$$y^{(4)} = -2[yy''' + 3y'y'']$$

$$y^{(5)} = -2[yy^{(4)} + 4y'y''' + 3y''^2]$$

La formula general, proporciona

$$\underline{y}_1 = 1.243529411 (10^{-1})$$

$$\bar{y}_1 = 1.243530267 (10^{-1})$$

$$\tilde{y}_1 = 1.243529839 (10^{-1})$$

$$e_1 = 1.78 (10^{-8})$$

$$e_1 < 8.56 (10^{-8})$$

El Runge Kutta, da

$$y_1 = 1.243527655 (10^{-1}) \quad \text{con} \quad |E| < 6.4 (10^{-5}).$$



## 2. Prolongacion de soluciones.

Una vez conseguida la primera solucion  $y_1$ , correspondiente a la  $x_1$ , la simple repeticion del algoritmo, esto es, ocupar con la pareja  $(x_1, y_1)$ , la posicion de la antigua  $(x_0, y_0)$  en el método empleado, pareceria dar las sucesivas soluciones.

Con tan sencillo programa, hemos prolongado los ejemplos nº: 1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16 y 17, comprobandose con las soluciones exactas, las respectivas acotaciones; pero en el ejemplo nº 9 -asi como en el nº 3 -puede verse como los valores de  $y_5$ ,  $y_{13}$  e  $y_{14}$  no quedan acotados por los sub y super valores respectivos, tal como se indicó en el nº 2 de la segunda parte.

Este comportamiento nos dice, que si en este ejemplo la irregularidad surgió en los primeros pasos, no quiere decir que en los demas ejemplos, no se encuentren otras irregularidades en pasos mas adelantados.

Para evitar estas inconveniencias, no veo por ahora otra solucion, que la confeccion de un programa que arregle tales situaciones, seleccionando de los cuatro valores proporcionados por las cotas extremas del parametro, los dos extremos que si acotaran, la solucion exacta.

A tal fin, el programa :ACOTACION PARAMETRO TETA, cuyo diagrama de flujo viene a continuacion, muestra como toma para  $\bar{y}$ , el maximo valor ( $YMAX(K)$ ), y para  $\underline{y}$ , el minimo ( $YMIN(K)$ ), de los suministrados por la pareja de valores que toma el parametro  $\theta$ , previamente acotado por la rutina TETSI.

Simultaneamente, actuan las rutinas EDO - encargada de la resolucio de las ecuaciones portadoras de  $\dot{y}$  e  $\underline{y} - x_i$  y DERIVA, proporcionadora de las derivadas que figuran en tales ecuaciones.

Un ejemplo resuelto con estas indicatrices - el famos nº 3- se inserta a continuacion, utilizando en su programacion el FORTRAN, visto la insuficiencia para ello de la minicomputadora que utilizamos. En dicho ejemplo se observa como era de esperar, la regularizacion de los valores de  $y_n$ .

Ejemplo nº 1. (Collatz)

$y' = y - 2x/y$        $y(0) = 1$        $h = 0.1$

Solucion exacta:

$y = 2x + 1$

$y = y(\theta = 0)$

$y = y(\theta = 1)$

		1.0000000000	00.				
		0.0000000000	00A				
1.095445638	00A	1.095445115	00.	1.095444774	00A		
1.0000000000	-01A	1.0000000000	-01A	1.0000000000	-01A		
1.183216751	00A	1.183215956	00.	1.183215430	00A		
2.0000000000	-01A	2.0000000000	-01A	2.0000000000	-01A		
1.264912061	00A	1.264911064	00.	1.264910397	00A		
3.0000000000	-01A	3.0000000000	-01A	3.0000000000	-01A		
1.341641979	00A	1.341640786	00.	1.341639985	00A		
4.0000000000	-01A	4.0000000000	-01A	4.0000000000	-01A		
1.414214968	00A	1.414213562	00.	1.414212615	00A		
5.0000000000	-01A	5.0000000000	-01A	5.0000000000	-01A		
1.483241348	00A	1.483239697	00.	1.483238584	00A		
6.0000000000	-01A	6.0000000000	-01A	6.0000000000	-01A		
1.549195277	00A	1.549193338	00.	1.549192030	00A		
7.0000000000	-01A	7.0000000000	-01A	7.0000000000	-01A		
1.612453829	00A	1.612451549	00.	1.612450010	00A		
8.0000000000	-01A	8.0000000000	-01A	8.0000000000	-01A		
1.673322739	00A	1.673320053	00.	1.673318238	00A		
9.0000000000	-01A	9.0000000000	-01A	9.0000000000	-01A		
1.732053980	00A	1.732050807	00.	1.732048664	00A		
1.0000000000	00A	1.0000000000	00A	1.0000000000	00A		
1.788858135	00A	1.788854381	00.	1.788851846	00A		
1.1000000000	00A	1.1000000000	00A	1.1000000000	00A		
1.843913340	00A	1.843908891	00.	1.843905886	00A		
1.2000000000	00A	1.2000000000	00A	1.2000000000	00A		
1.897371877	00A	1.897366596	00.	1.897363027	00A		
1.3000000000	00A	1.3000000000	00A	1.3000000000	00A		
1.949365147	00A	1.949358868	00.	1.949354626	00A		
1.4000000000	00A	1.4000000000	00A	1.4000000000	00A		
2.000007475	00A	2.0000000000	00.	1.999994949	00A		
1.5000000000	00A	1.5000000000	00A	1.5000000000	00A		
2.049399064	00A	2.049390153	00.	2.049384132	00A		
1.6000000000	00A	1.6000000000	00A	1.6000000000	00A		
2.097628330	00A	2.097617696	00.	2.097610511	00A		
1.7000000000	00A	1.7000000000	00A	1.7000000000	00A		
2.144773761	00A	2.144761058	00.	2.144752476	00A		
1.8000000000	00A	1.8000000000	00A	1.8000000000	00A		
2.190905418	00A	2.190890230	00.	2.190879967	00A		
1.9000000000	00A	1.9000000000	00A	1.9000000000	00A		
2.236086154	00A	2.236067977	00.	2.236055695	00A		
2.0000000000	00A	2.0000000000	00A	2.0000000000	00A		

$$y' = x + y \quad y(0) = 0 \quad h = 0.1 \quad y = e^x - x - 1$$

5.170918860	-03A	1.369296701	00A	8.682494176	00A	y <sub>2</sub>
5.170917323	-03A	1.369296635	00A	8.682493753	00A	
1.000000000	-01.	1.300000000	00.	2.500000000	00.	x <sub>2</sub>
5.170918075	-03.	1.369296667	00.	8.682493960	00.	y <sub>2</sub>
2.140275989	-02A	1.655200007	00A	9.863738283	00A	
2.140275649	-02A	1.655199928	00A	9.863737796	00A	
2.000000000	-01.	1.400000000	00.	2.600000000	00.	
2.140275816	-02.	1.655199966	00.	9.863738035	00.	
4.985881045	-02A	1.981689118	00A	1.117973200	01A	
4.985880482	-02A	1.981689024	00A	1.117973145	01A	
3.000000000	-01.	1.500000000	00.	2.700000000	00.	
4.985880757	-02.	1.981689070	00.	1.117973172	01.	
9.182470187	-02A	2.353032480	00A	1.264464709	01A	
9.182469358	-02A	2.353032370	00A	1.264464645	01A	
4.000000000	-01.	1.600000000	00.	2.800000000	00.	
9.182469764	-02.	2.353032424	00.	1.264464677	01.	
1.487212765	-01A	2.773947457	00A	1.427414574	01A	
1.487212650	-01A	2.773947328	00A	1.427414501	01A	
5.000000000	-01.	1.700000000	00.	2.900000000	00.	
1.487212707	-01.	2.773947391	00.	1.427414536	01.	
2.221188081	-01A	3.249647541	00A	1.608553735	01A	
2.221187929	-01A	3.249647390	00A	1.608553651	01A	
6.000000000	-01.	1.800000000	00.	3.000000000	00.	
2.221188003	-01.	3.249647464	00.	1.608553692	01.	
3.137527174	-01A	3.785894532	00A	1.809795176	01A	
3.137526978	-01A	3.785894355	00A	1.809795081	01A	
7.000000000	-01.	1.900000000	00.	3.100000000	00.	
3.137527074	-01.	3.785894442	00.	1.809795128	01.	
4.255409411	-01A	4.389056203	00A	2.033253075	01A	
4.255409163	-01A	4.389055998	00A	2.033252966	01A	
8.000000000	-01.	2.000000000	00.	3.200000000	00.	
4.255409284	-01.	4.389056098	00.	2.033253019	01.	
5.596031268	-01A	5.066170034	00A	2.281263955	01A	
5.596030960	-01A	5.066169795	00A	2.281263831	01A	
9.000000000	-01.	2.100000000	00.	3.300000000	00.	
5.596031111	-01.	5.066169912	00.	2.281263892	01.	
7.182818477	-01A	5.825013640	00A	2.556410077	01A	
7.182818099	-01A	5.825013364	00A	2.556409935	01A	
1.000000000	00.	2.200000000	00.	3.400000000	00.	
7.182818284	-01.	5.825013499	00.	2.556410004	01.	
9.041660474	-01A	6.674182617	00A	2.861545278	01A	
9.041660014	-01A	6.674182298	00A	2.861545116	01A	
1.100000000	00.	2.300000000	00.	3.500000000	00.	
9.041660239	-01.	6.674182454	00.	2.861545195	01.	
1.120116951	00A	7.623176568	00A	3.199823537	01A	
1.120116895	00A	7.623176200	00A	3.199823354	01A	
1.200000000	00.	2.400000000	00.	3.600000000	00.	
		7.623176380	00.	3.199823444	01.	

$y' = -y$      $y(0) = 1$      $h = 0.1$

$\theta = 0$

Sol. exacta:  $y_E = e^{-x}$

$\theta = 1$

0.048374173	-01A
1.000000000	-01.
8.187307519	-01A
2.000000000	-01.
7.408182191	-01A
3.000000000	-01.
5.703200441	-01A
4.000000000	-01.
6.065306575	-01A
5.000000000	-01.
4.88116337	-01A
6.000000000	-01.
9.65853013	-01A
7.000000000	-01.
4.93289615	-01A
8.000000000	-01.
0.65696571	-01A
9.000000000	-01.
6.78794385	-01A
3.000000000	00.
3.28710810	-01A
1.000000000	00.
0.11942093	-01A
2.000000000	00.
7.25317905	-01A
3.000000000	00.
4.65969614	-01A
4.000000000	00.
2.31301577	-01A
5.000000000	00.
0.18965157	-01A
6.000000000	00.
8.26835218	-01A
7.000000000	00.
6.52988861	-01A
8.000000000	00.
4.95686172	-01A
9.000000000	00.
3.53352813	-01A
0.000000000	00.
2.24564264	-01A
1.000000000	00.
1.08031566	-01A
2.000000000	00.
0.02588420	-01A
3.000000000	00.
0.71795174	-02A
4.000000000	00.
2.08499716	-02A
5.000000000	00.

9.048374180	-01.
1.000000000	-01A
8.187307530	-01.
2.000000000	-01A
7.408182206	-01.
3.000000000	-01A
6.703200460	-01.
4.000000000	-01A
6.065306597	-01.
5.000000000	-01A
5.488116360	-01.
6.000000000	-01A
4.965853037	-01.
7.000000000	-01A
4.493289641	-01.
8.000000000	-01A
4.065696597	-01.
9.000000000	-01A
3.678794411	-01.
1.000000000	00A
3.328710836	-01.
1.100000000	00A
3.011942119	-01.
1.200000000	00A
2.725317930	-01.
1.300000000	00A
2.465969639	-01.
1.400000000	00A
2.231301601	-01.
1.500000000	00A
2.018965179	-01.
1.600000000	00A
1.826835240	-01.
1.700000000	00A
1.652988882	-01.
1.800000000	00A
1.495686192	-01.
1.900000000	00A
1.353352832	-01.
2.000000000	00A
1.224564282	-01.
2.100000000	00A
1.108031583	-01.
2.200000000	00A
1.002588437	-01.
2.300000000	00A
9.071795328	-02.
2.400000000	00A
8.208499862	-02.
2.500000000	00A

9.048374186	-01A
1.000000000	-01.
8.187307541	-01A
2.000000000	-01.
7.408182221	-01A
3.000000000	-01.
6.703200478	-01A
4.000000000	-01.
6.065306617	-01A
5.000000000	-01.
5.488116383	-01A
6.000000000	-01.
4.965853061	-01A
7.000000000	-01.
4.493289665	-01A
8.000000000	-01.
4.065696622	-01A
9.000000000	-01.
3.678794436	-01A
1.000000000	00.
3.328710861	-01A
1.100000000	00.
3.011942143	-01A
1.200000000	00.
2.725317954	-01A
1.300000000	00.
2.465969662	-01A
1.400000000	00.
2.231301624	-01A
1.500000000	00.
2.018965201	-01A
1.600000000	00.
1.826835261	-01A
1.700000000	00.
1.652988902	-01A
1.800000000	00.
1.495686211	-01A
1.900000000	00.
1.353352850	-01A
2.000000000	00.
1.224564300	-01A
2.100000000	00.
1.108031600	-01A
2.200000000	00.
1.002588452	-01A
2.300000000	00.
9.071795477	-02A
2.400000000	00.
8.208500001	-02A
2.500000000	00.

Problema nº 3. Resuelto con acotacion del parametro  $\theta$ .

$y' = -x$     $y(0) = 1$     $n = 0.1$    Sol. exacta    $y = e^{-x}$

9.048374180	-01A	1.826835240	-01A	3.688316740	-02A
9.048374180	-01A	1.826835240	-01A	3.688316740	-02A
1.000000000	-01.	1.700000000	00.	3.300000000	00.
8.187307530	-01A	1.652988882	-01A	3.337326996	-02A
8.187307530	-01A	1.652988882	-01A	3.337326996	-02A
2.000000000	-01.	1.800000000	00.	3.400000000	00.
7.408182206	-01A	1.495686192	-01A	3.019738342	-02A
7.408182206	-01A	1.495686192	-01A	3.019738342	-02A
3.000000000	-01.	1.900000000	00.	3.500000000	00.
6.703200460	-01A	1.353352832	-01A	2.732372244	-02A
6.703200460	-01A	1.353352832	-01A	2.732372244	-02A
4.000000000	-01.	2.000000000	00.	3.600000000	00.
6.065306597	-01A	1.224564282	-01A	2.472352647	-02A
6.065306597	-01A	1.224564282	-01A	2.472352647	-02A
5.000000000	-01.	2.100000000	00.	2.472352647	-02A
5.488116360	-01A	1.108031583	-01A	3.700000000	00.
5.488116360	-01A	1.108031583	-01A	2.237077185	-02A
6.000000000	-01.	2.200000000	00.	2.237077185	-02A
4.965853037	-01A	1.002588437	-01A	3.800000000	00.
4.965853037	-01A	1.002588437	-01A	2.024191144	-02A
7.000000000	-01.	2.300000000	00.	2.024191144	-02A
4.493289641	-01A	9.071795328	-02A	3.900000000	00.
4.493289641	-01A	9.071795328	-02A	1.831563888	-02A
8.000000000	-01.	2.400000000	00.	1.831563888	-02A
4.065696597	-01A	8.208499862	-02A	4.000000000	00.
4.065696597	-01A	8.208499862	-02A	1.657267540	-02A
9.000000000	-01.	2.500000000	00.	1.657267540	-02A
3.678794411	-01A	7.427357821	-02A	4.100000000	00.
3.678794411	-01A	7.427357821	-02A	1.499557682	-02A
1.000000000	00.	2.600000000	00.	1.499557682	-02A
3.328710836	-01A	6.720551274	-02A	4.200000000	00.
3.328710836	-01A	6.720551274	-02A	1.356855901	-02A
1.100000000	00.	2.700000000	00.	1.356855900	-02A
3.011942119	-01A	6.081006262	-02A	4.300000000	00.
3.011942119	-01A	6.081006262	-02A	1.227733989	-02A
1.200000000	00.	2.800000000	00.	1.227733989	-02A
2.725317930	-01A	5.502322005	-02A	4.400000000	00.
2.725317930	-01A	5.502322005	-02A	1.110899652	-02A
1.300000000	00.	2.900000000	00.	1.110899652	-02A
2.465969639	-01A	4.978706836	-02A	4.500000000	00.
2.465969639	-01A	4.978706836	-02A	1.005183572	-02A
1.400000000	00.	3.000000000	00.	1.005183572	-02A
2.231301601	-01A	4.504920239	-02A	4.600000000	00.
2.231301601	-01A	4.504920239	-02A	9.095277075	-03A
1.500000000	00.	3.100000000	00.	9.095277075	-03A
2.018965179	-01A	4.076220397	-02A	4.700000000	00.
2.018965179	-01A	4.076220397	-02A	8.229747019	-03A
1.600000000	00.	3.200000000	00.	8.229747019	-03A
				4.800000000	00.

Ejemplos nº 1,2 y 3. Metodo de Runge-Kutta.

$y' = y - 2x/y$   $y(0) = 1$

$y' = x + y$   $y(0) = 0$

$y' = -y$   $y(0) = 1$

•095445531	00A	5•170833333	-03A	9•048375000	-01A
•000000000	-01•	1•000000000	-01•	1•000000000	-01•
•183216745	00A	2•140257085	-02A	8•187309014	-01A
•000000000	-01•	2•000000000	-01•	2•000000000	-01•
•264912228	00A	4•985849706	-02A	7•408184220	-01A
•000000000	-01•	3•000000000	-01•	3•000000000	-01•
•341642353	00A	9•182424008	-02A	6•703202889	-01A
•000000000	-01•	4•000000000	-01•	4•000000000	-01•
•414215577	00A	1•487206385	-01A	6•065309344	-01A
•000000000	-01•	5•000000000	-01•	5•000000000	-01•
•483242222	00A	2•221179620	-01A	5•488119343	-01A
•000000000	-01•	6•000000000	-01•	6•000000000	-01•
•549196452	00A	3•137516265	-01A	4•965856186	-01A
•000000000	-01•	7•000000000	-01•	7•000000000	-01•
•612455349	00A	4•255395632	-01A	4•493292897	-01A
•000000000	-01•	8•000000000	-01•	8•000000000	-01•
•673324659	00A	5•596014137	-01A	4•065699912	-01A
•000000000	-01•	9•000000000	-01•	9•000000000	-01•
•732056365	00A	7•182797441	-01A	3•678797744	-01A
•000000000	00•	1•000000000	00•	1•000000000	00•
•788861067	00A	9•041634900	-01A	3•328714153	-01A
•100000000	00•	1•100000000	00•	1•100000000	00•
•843916918	00A	1•120113867	00A	3•011945393	-01A
•200000000	00•	1•200000000	00•	1•200000000	00•
•897376221	00A	1•369293010	00A	2•725321139	-01A
•300000000	00•	1•300000000	00•	1•300000000	00•
•949370403	00A	1•655195613	00A	2•465972766	-01A
•400000000	00•	1•400000000	00•	1•400000000	00•
•000013816	00A	1•981683915	00A	2•231304633	-01A
•500000000	00•	1•500000000	00•	1•500000000	00•
•049406702	00A	2•353026347	00A	2•018968106	-01A
•600000000	00•	1•600000000	00•	1•600000000	00•
•097637519	00A	2•773940256	00A	1•826838053	-01A
•700000000	00•	1•700000000	00•	1•700000000	00•
•144784810	00A	3•249639114	00A	1•652991577	-01A
•800000000	00•	1•800000000	00•	1•800000000	00•
•190918696	00A	3•785884701	00A	1•495688766	-01A
•900000000	00•	1•900000000	00•	1•900000000	00•
•236102107	00A	4•389044767	00A	1•353355284	-01A
•000000000	00•	2•000000000	00•	2•000000000	00•

$$y' = y - 1.5e^{-0.5x}$$

$$y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

$$\text{Sol. exacta: } y = e^{-0.5x}$$

$\theta = 0$

$Y_E$

$\theta = 1$

9.512294244	-01A	9.512294245	-01.	9.512294245	-01A
1.000000000	-01.	1.000000000	-01A	1.000000000	-01.
9.048374180	-01A	9.048374180	-01.	9.048374180	-01A
2.000000000	-01.	2.000000000	-01A	2.000000000	-01.
8.607079763	-01A	8.607079764	-01.	8.607079764	-01A
3.000000000	-01.	3.000000000	-01A	3.000000000	-01.
8.187307530	-01A	8.187307530	-01.	8.187307531	-01A
4.000000000	-01.	4.000000000	-01A	4.000000000	-01.
7.788007830	-01A	7.788007830	-01.	7.788007831	-01A
5.000000000	-01.	5.000000000	-01A	5.000000000	-01.
7.408182206	-01A	7.408182206	-01.	7.408182207	-01A
6.000000000	-01.	6.000000000	-01A	6.000000000	-01.
7.046880896	-01A	7.046880897	-01.	7.046880898	-01A
7.000000000	-01.	7.000000000	-01A	7.000000000	-01.
6.703200459	-01A	6.703200460	-01.	6.703200461	-01A
8.000000000	-01.	8.000000000	-01A	8.000000000	-01.
6.376281514	-01A	6.376281516	-01.	6.376281517	-01A
9.000000000	-01.	9.000000000	-01A	9.000000000	-01.
6.065306595	-01A	6.065306597	-01.	6.065306598	-01A
1.000000000	00.	1.000000000	00A	1.000000000	00.
5.769498101	-01A	5.769498103	-01.	5.769498105	-01A
1.100000000	00.	1.100000000	00A	1.100000000	00.
5.488116358	-01A	5.488116360	-01.	5.488116362	-01A
1.200000000	00.	1.200000000	00A	1.200000000	00.
5.220457765	-01A	5.220457767	-01.	5.220457769	-01A
1.300000000	00.	1.300000000	00A	1.300000000	00.
4.965853035	-01A	4.965853037	-01.	4.965853040	-01A
1.400000000	00.	1.400000000	00A	1.400000000	00.
4.723665524	-01A	4.723665527	-01.	4.723665530	-01A
1.500000000	00.	1.500000000	00A	1.500000000	00.
4.493289637	-01A	4.493289641	-01.	4.493289644	-01A
1.600000000	00.	1.600000000	00A	1.600000000	00.
4.274149315	-01A	4.274149319	-01.	4.274149323	-01A
1.700000000	00.	1.700000000	00A	1.700000000	00.
4.065696593	-01A	4.065696597	-01.	4.065696601	-01A
1.800000000	00.	1.800000000	00A	1.800000000	00.
3.867410229	-01A	3.867410234	-01.	3.867410238	-01A
1.900000000	00.	1.900000000	00A	1.900000000	00.
3.678794406	-01A	3.678794411	-01.	3.678794416	-01A
2.000000000	00.	2.000000000	00A	2.000000000	00.
3.499377485	-01A	3.499377491	-01.	3.499377496	-01A
2.100000000	00.	2.100000000	00A	2.100000000	00.
3.328710830	-01A	3.328710836	-01.	3.328710843	-01A
2.200000000	00.	2.200000000	00A	2.200000000	00.
3.166367686	-01A	3.166367693	-01.	3.166367700	-01A
2.300000000	00.	2.300000000	00A	2.300000000	00.
3.011942111	-01A	3.011942119	-01.	3.011942126	-01A
2.400000000	00.	2.400000000	00A	2.400000000	00.

$$y' = y - 1.5 e^{-0.5x}$$

$$y(0) = 1 \quad n = 0.1$$

$$\text{Sol. exacta: } y = e^{-0.5x}$$

Empleo del algoritmo diente de sierra.

 $\theta = 0$ 

9.512294244	-01A
1.000000000	-01.
9.048374180	-01A
2.000000000	-01.
8.607079764	-01A
3.000000000	-01.
8.187307530	-01A
4.000000000	-01.
7.788007830	-01A
5.000000000	-01.
7.408182206	-01A
6.000000000	-01.
7.046880897	-01A
7.000000000	-01.
6.703200460	-01A
8.000000000	-01.
6.376281516	-01A
9.000000000	-01.
6.065306596	-01A
1.000000000	00.
5.769498103	-01A
1.100000000	00.
5.488116360	-01A
1.200000000	00.
5.220457767	-01A
1.300000000	00.
4.965853037	-01A
1.400000000	00.
4.723665527	-01A
1.500000000	00.
4.493289640	-01A
1.600000000	00.
4.274149319	-01A
1.700000000	00.
4.065696596	-01A
1.800000000	00.
3.867410233	-01A
1.900000000	00.
3.678794411	-01A
2.000000000	00.
3.499377490	-01A
2.100000000	00.
3.328710836	-01A
2.200000000	00.
3.166367692	-01A
2.300000000	00.
3.011942118	-01A
2.400000000	00.

 $Y_E$ 

9.512294245	-01.
1.000000000	-01A
9.048374180	-01.
2.000000000	-01A
8.607079764	-01.
3.000000000	-01A
8.187307530	-01.
4.000000000	-01A
7.788007830	-01.
5.000000000	-01A
7.408182206	-01.
6.000000000	-01A
7.046880897	-01.
7.000000000	-01A
6.703200460	-01.
8.000000000	-01A
6.376281516	-01.
9.000000000	-01A
6.065306597	-01.
1.000000000	00A
5.769498103	-01.
1.100000000	00A
5.488116360	-01.
1.200000000	00A
5.220457767	-01.
1.300000000	00A
4.965853037	-01.
1.400000000	00A
4.723665527	-01.
1.500000000	00A
4.493289641	-01.
1.600000000	00A
4.274149319	-01.
1.700000000	00A
4.065696597	-01.
1.800000000	00A
3.867410234	-01.
1.900000000	00A
3.678794411	-01.
2.000000000	00A
3.499377491	-01.
2.100000000	00A
3.328710836	-01.
2.200000000	00A
3.166367693	-01.
2.300000000	00A
3.011942119	-01.
2.400000000	00A

 $\theta = 1$ 

9.512294245	-01A
1.000000000	-01.
9.048374180	-01A
2.000000000	-01.
8.607079764	-01A
3.000000000	-01.
8.187307530	-01A
4.000000000	-01.
7.788007830	-01A
5.000000000	-01.
7.408182206	-01A
6.000000000	-01.
7.046880897	-01A
7.000000000	-01.
6.703200460	-01A
8.000000000	-01.
6.376281516	-01A
9.000000000	-01.
6.065306597	-01A
1.000000000	00.
5.769498103	-01A
1.100000000	00.
5.488116361	-01A
1.200000000	00.
5.220457767	-01A
1.300000000	00.
4.965853038	-01A
1.400000000	00.
4.723665527	-01A
1.500000000	00.
4.493289641	-01A
1.600000000	00.
4.274149319	-01A
1.700000000	00.
4.065696597	-01A
1.800000000	00.
3.867410234	-01A
1.900000000	00.
3.678794411	-01A
2.000000000	00.
3.499377491	-01A
2.100000000	00.
3.328710837	-01A
2.200000000	00.
3.166367694	-01A
2.300000000	00.
3.011942119	-01A
2.400000000	00.



Ejemplo nº 5. Levy and Baggott

$y' = y + x^2$      $y(0) = 1$      $h = 0.1$     Sol. exacta:  $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$

1ª columna: ( = 1) exacto	2ª columna: Y( = 0) X	3ª Columna: Y - Runge-Kutta X
• 105512756    00A	1•105512751    00A	1•105512708    00A
• 105512754    00•	1•000000000    -01•	1•000000000    -01•
• 000000000    -01•	1•224208269    00A	1•224208151    00A
• 224208279    00A	2•000000000    -01•	2•000000000    -01•
• 224208274    00•	1•359576414    00A	1•359576184    00A
• 000000000    -01•	3•000000000    -01•	3•000000000    -01•
• 359576431    00A	1•515474080    00A	1•515473694    00A
• 359576422    00•	4•000000000    -01•	4•000000000    -01•
• 000000000    -01•	1•696163795    00A	1•696163200    00A
• 515474105    00A	5•000000000    -01•	5•000000000    -01•
• 515474092    00•	1•906356378    00A	1•906355514    00A
• 000000000    -01•	6•000000000    -01•	6•000000000    -01•
• 696163829    00A	2•151258093    00A	2•151256887    00A
• 696163812    00•	7•000000000    -01•	7•000000000    -01•
• 000000000    -01•	2•436622749    00A	2•436621117    00A
• 906356424    00A	8•000000000    -01•	8•000000000    -01•
• 906356401    00•	2•768809288    00A	2•768807132    00A
• 000000000    -01•	9•000000000    -01•	9•000000000    -01•
• 151258152    00A	3•154845429    00A	3•154842636    00A
• 151258122    00•	1•000000000    00•	1•000000000    00•
• 000000000    -01•	3•602498004    00A	3•602494440    00A
• 436622823    00A	1•100000000    00•	1•100000000    00•
• 436622785    00•	4•120350686    00A	4•120346199    00A
• 000000000    -01•	1•200000000    00•	1•200000000    00•
• 768809380    00A	4•717889905    00A	4•717884317    00A
• 768809333    00•	1•300000000    00•	1•300000000    00•
• 000000000    -01•	5•405599784    00A	5•405592892    00A
• 154845543    00A	1•400000000    00•	1•400000000    00•
• 154845485    00•	6•195067073    00A	6•195058643    00A
• 000000000    00•	1•500000000    00•	1•500000000    00•
• 602498142    00A	7•099097111    00A	7•099086873    00A
• 602498071    00•	1•600000000    00•	1•600000000    00•
• 100000000    00•	8•131841985    00A	8•131829631    00A
• 120350853    00A	1•700000000    00•	1•700000000    00•
• 120350768    00•	9•308942171    00A	9•308927346    00A
• 200000000    00•	1•800000000    00•	1•800000000    00•
• 717890104    00A	1•064768306    01A	1•064766536    01A
• 717890002    00•	1•900000000    00•	1•900000000    00•
• 300000000    00•	1•216716799    01A	1•216714695    01A
• 405600021    00A	2•000000000    00•	2•000000000    00•
• 405599900    00•	1•388850938    01A	1•388848448    01A
• 400000000    00•	2•100000000    00•	2•100000000    00•
• 195067354    00A	1•583504009    01A	1•583501072    01A
• 195067211    00•	2•200000000    00•	2•200000000    00•
• 500000000    00•	1•803254689    01A	1•803251237    01A
• 099097441    00A	2•300000000    00•	2•300000000    00•
• 099097273    00•	2•050952860    01A	2•050948813    01A
• 600000000    00•	2•400000000    00•	2•400000000    00•

$y' = x^2 y$     $y(0) = 1$     $h = 0.1$    Sol. exacta:  $y = e^{x^3/3}$

0.000333361	00A	1.000333388	00.	1.000333444	00A
0.000000000	-01.	1.000000000	-01A	1.000000000	-01.
0.002670196	00A	1.002670225	00.	1.002670366	00A
0.000000000	-01.	2.000000000	-01A	2.000000000	-01.
0.009040617	00A	1.009040621	00.	1.009040881	00A
0.000000000	-01.	3.000000000	-01A	3.000000000	-01.
0.021562558	00A	1.021562515	00.	1.021562934	00A
0.000000000	-01.	4.000000000	-01A	4.000000000	-01.
0.042547013	00A	1.042546905	00.	1.042547535	00A
0.000000000	-01.	5.000000000	-01A	5.000000000	-01.
0.074655527	00A	1.074655344	00.	1.074656253	00A
0.000000000	-01.	6.000000000	-01A	6.000000000	-01.
0.121126025	00A	1.121125771	00.	1.121127050	00A
0.000000000	-01.	7.000000000	-01A	7.000000000	-01.
0.186095610	00A	1.186095318	00.	1.186097084	00A
0.000000000	-01.	8.000000000	-01A	8.000000000	-01.
0.275068857	00A	1.275068624	00.	1.275071022	00A
0.000000000	-01.	9.000000000	-01A	9.000000000	-01.
0.395612369	00A	1.395612425	00.	1.395615625	00A
0.000000000	00.	1.000000000	00A	1.000000000	00.
0.558410087	00A	1.558410928	00.	1.558415134	00A
0.100000000	00.	1.100000000	00A	1.100000000	00.
0.778905899	00A	1.778908546	00.	1.778914098	00A
0.200000000	00.	1.200000000	00A	1.200000000	00.
0.079921720	00A	2.079928115	00.	2.079936134	00A
0.300000000	00.	1.300000000	00A	1.300000000	00.
0.495929742	00A	2.495943132	00.	2.495958432	00A
0.400000000	00.	1.400000000	00A	1.400000000	00.
0.080192751	00A	3.080216848	00.	3.080259649	00A
0.500000000	00.	1.500000000	00A	1.500000000	00.
0.916997024	00A	3.917028510	00.	3.917178480	00A
0.600000000	00.	1.600000000	00A	1.600000000	00.
0.143161857	00A	5.143154805	00.	5.143710475	00A
0.700000000	00.	1.700000000	00A	1.700000000	00.
0.986919049	00A	6.986641718	00.	6.988685930	00A
0.800000000	00.	1.800000000	00A	1.800000000	00.
0.840299296	00A	9.838795876	00.	9.846185269	00A
0.900000000	00.	1.900000000	00A	1.900000000	00.
0.439828688	01A	1.439191609	01.	1.441828884	01A
0.000000000	00.	2.000000000	00A	2.000000000	00.
0.193587744	01A	2.191124553	01.	2.200492808	01A
0.100000000	00.	2.100000000	00A	2.100000000	00.
0.488164192	01A	3.479011634	01.	3.512412342	01A
0.200000000	00.	2.200000000	00A	2.200000000	00.
0.805874107	01A	5.772363259	01.	5.892911953	01A
0.300000000	00.	2.300000000	00A	2.300000000	00.
0.015106663	02A	1.002833821	02.	1.047303722	02A
0.400000000	00.	2.400000000	00A	2.400000000	00.
0.873336928	02A	1.827891555	02.	1.997688633	02A
0.500000000	00.	2.500000000	00A	2.500000000	00.

$$y' = 1 - y/x$$

$$y(2) = 2$$

$$h = 0.1$$

$$\text{Solucion exacta: } y = x/2 + 2/x$$

 $\theta = 0$  $Y_E$  $\theta = 1$ 

$\theta = 0$	$Y_E$	$\theta = 1$
2.002380945	00A	2.002380952
2.100000000	00.	2.100000000
2.009090897	00A	2.009090909
2.200000000	00.	2.200000000
2.019565202	00A	2.019565217
2.300000000	00.	2.300000000
2.033333316	00A	2.033333333
2.400000000	00.	2.400000000
2.049999982	00A	2.050000000
2.500000000	00.	2.500000000
2.069230750	00A	2.069230769
2.600000000	00.	2.600000000
2.090740721	00A	2.090740740
2.700000000	00.	2.700000000
2.114285694	00A	2.114285714
2.800000000	00.	2.800000000
2.139655152	00A	2.139655172
2.900000000	00.	2.900000000
2.166666647	00A	2.166666666
3.000000000	00.	3.000000000
2.195161271	00A	2.195161290
3.100000000	00.	3.100000000
2.224999981	00A	2.225000000
3.200000000	00.	3.200000000
2.256060587	00A	2.256060606
3.300000000	00.	3.300000000
2.288235275	00A	2.288235294
3.400000000	00.	3.400000000
2.321428553	00A	2.321428571
3.500000000	00.	3.500000000
2.355555538	00A	2.355555555
3.600000000	00.	3.600000000
2.390540523	00A	2.390540540
3.700000000	00.	3.700000000
2.426315772	00A	2.426315789
3.800000000	00.	3.800000000
2.462820496	00A	2.462820512
3.900000000	00.	3.900000000
2.499999983	00A	2.500000000
4.000000000	00.	4.000000000
2.537804862	00A	2.537804878
4.100000000	00.	4.100000000
2.576190460	00A	2.576190476
4.200000000	00.	4.200000000
2.615116263	00A	2.615116279
4.300000000	00.	4.300000000
2.654545439	00A	2.654545454
4.400000000	00.	4.400000000
2.694444429	00A	2.694444444
4.500000000	00.	4.500000000

$y' = y - 1.5e^{-0.5}$   
 $y(0) = 1 \quad h = 0.1$

$y' = x^2 y$   
 $y(0) = 1 \quad h = 0.1$

$y' = 1 - y/x$   
 $y(2) = 2 \quad h = 0.1$

9.512293932	-01.
1.000000000	-01A
9.048373537	-01.
2.000000000	-01A
8.607078770	-01.
3.000000000	-01A
8.187306163	-01.
4.000000000	-01A
7.788006062	-01.
5.000000000	-01A
7.408180009	-01.
6.000000000	-01A
7.046878237	-01.
7.000000000	-01A
6.703197300	-01.
8.000000000	-01A
6.376277813	-01.
9.000000000	-01A
6.065302305	-01.
1.000000000	00A
5.769493171	-01.
1.100000000	00A
5.488110729	-01.
1.200000000	00A
5.220451372	-01.
1.300000000	00A
4.965845806	-01.
1.400000000	00A
4.723657380	-01.
1.500000000	00A
4.493280489	-01.
1.600000000	00A
4.274139064	-01.
1.700000000	00A
4.065685130	-01.
1.800000000	00A
3.867397434	-01.
1.900000000	00A
3.678780144	-01.
2.000000000	00A
3.499361608	-01.
2.100000000	00A
3.328693174	-01.
2.200000000	00A
3.166348069	-01.
2.300000000	00A
3.011920331	-01.
2.400000000	00A

1.002503496	00A
2.000000000	-01.
1.008204494	00A
3.000000000	-01.
1.019203701	00A
4.000000000	-01.
1.037421757	00A
5.000000000	-01.
1.065049755	00A
6.000000000	-01.
1.104714509	00A
7.000000000	-01.
1.159711168	00A
8.000000000	-01.
1.234335012	00A
9.000000000	-01.
1.334364274	00A
1.000000000	00.
1.467778510	00A
1.100000000	00.
1.645851828	00A
1.200000000	00.
1.884854105	00A
1.300000000	00.
2.208757838	00A
1.400000000	00.
2.653643205	00A
1.500000000	00.
3.275034962	00A
1.600000000	00.
4.160421535	00A
1.700000000	00.
5.451166084	00A
1.800000000	00.
7.381896627	00A
1.900000000	00.
1.035335181	01A
2.000000000	00.
1.507119020	01A
2.100000000	00.
2.281899506	01A
2.200000000	00.
3.601345344	01A
2.300000000	00.
5.937387988	01A
2.400000000	00.
1.024791930	02A
2.500000000	00.

2.002380952	00A
2.100000000	00.
2.009090909	00A
2.200000000	00.
2.019565217	00A
2.300000000	00.
2.033333333	00A
2.400000000	00.
2.049999999	00A
2.500000000	00.
2.069230769	00A
2.600000000	00.
2.090740740	00A
2.700000000	00.
2.114285714	00A
2.800000000	00.
2.139655172	00A
2.900000000	00.
2.166666666	00A
3.000000000	00.
2.195161290	00A
3.100000000	00.
2.224999999	00A
3.200000000	00.
2.256060606	00A
3.300000000	00.
2.288235294	00A
3.400000000	00.
2.321428571	00A
3.500000000	00.
2.355555555	00A
3.600000000	00.
2.390540540	00A
3.700000000	00.
2.426315789	00A
3.800000000	00.
2.462820512	00A
3.900000000	00.
2.499999999	00A
4.000000000	00.
2.537804878	00A
4.100000000	00.
2.576190476	00A
4.200000000	00.
2.615116279	00A
4.300000000	00.
2.654545454	00A
4.400000000	00.

$$y' = -\ln xy \quad y(-0.75) = 0.0022159242 \quad h = 0.03125 \quad \text{Solucion exacta: } y = 2 \cdot \pi \cdot e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$Q = 0$$

$$y_E$$

$$Q = 1$$

3.199060928	-03A	3.199060155	-03.	3.199059203	-03A
7.187500000	-01.	-7.187500000	-01.	-7.187500000	-01.
4.546783506	-03A	4.546781250	-03.	4.546778570	-03A
6.875000000	-01.	-6.875000000	-01.	-6.875000000	-01.
6.362095492	-03A	6.362090798	-03.	6.362085350	-03A
6.562500000	-01.	-6.562500000	-01.	-6.562500000	-01.
8.764158584	-03A	8.764150246	-03.	8.764140748	-03A
6.250000000	-01.	-6.250000000	-01.	-6.250000000	-01.
1.188596381	-02A	1.188595041	-02.	1.188593538	-02A
5.937500000	-01.	-5.937500000	-01.	-5.937500000	-01.
1.586984594	-02A	1.586982591	-02.	1.586980376	-02A
5.625000000	-01.	-5.625000000	-01.	-5.625000000	-01.
2.086052089	-02A	2.086049262	-02.	2.086046174	-02A
5.312500000	-01.	-5.312500000	-01.	-5.312500000	-01.
2.699552126	-02A	2.699548325	-02.	2.699544215	-02A
5.000000000	-01.	-5.000000000	-01.	-5.000000000	-01.
3.439318695	-02A	3.439313791	-02.	3.439308536	-02A
4.687500000	-01.	-4.687500000	-01.	-4.687500000	-01.
4.313872045	-02A	4.313865941	-02.	4.313859451	-02A
4.375000000	-01.	-4.375000000	-01.	-4.375000000	-01.
5.326920766	-02A	5.326913406	-02.	5.326905629	-02A
4.062500000	-01.	-4.062500000	-01.	-4.062500000	-01.
6.475888417	-02A	6.475879783	-02.	6.475870700	-02A
3.750000000	-01.	-3.750000000	-01.	-3.750000000	-01.
7.750623164	-02A	7.750613272	-02.	7.750602893	-02A
3.437500000	-01.	-3.437500000	-01.	-3.437500000	-01.
9.132465382	-02A	9.132454269	-02.	9.132442613	-02A
3.125000000	-01.	-3.125000000	-01.	-3.125000000	-01.
1.059384458	-01A	1.059383228	-01.	1.059381936	-01A
2.812500000	-01.	-2.812500000	-01.	-2.812500000	-01.
1.209854967	-01A	1.209853622	-01.	1.209852203	-01A
2.500000000	-01.	-2.500000000	-01.	-2.500000000	-01.
1.360276453	-01A	1.360274991	-01.	1.360273443	-01A
2.187500000	-01.	-2.187500000	-01.	-2.187500000	-01.
1.505688740	-01A	1.505687160	-01.	1.505685476	-01A
1.875000000	-01.	-1.875000000	-01.	-1.875000000	-01.
1.640806546	-01A	1.640804842	-01.	1.640803015	-01A
1.562500000	-01.	-1.562500000	-01.	-1.562500000	-01.
1.760328467	-01A	1.760326633	-01.	1.760324657	-01A
1.250000000	-01.	-1.250000000	-01.	-1.250000000	-01.
1.859277434	-01A	1.859275469	-01.	1.859273342	-01A
9.375000000	-02.	-9.375000000	-02.	-9.375000000	-02.
1.933342678	-01A	1.933340584	-01.	1.933338314	-01A
6.250000000	-02.	-6.250000000	-02.	-6.250000000	-02.
1.979190646	-01A	1.979188434	-01.	1.979186038	-01A
3.125000000	-02.	-3.125000000	-02.	-3.125000000	-02.
1.994713708	-01A	1.994711402	-01.	1.994708907	-01A
0.000000000	00.	0.000000000	00.	0.000000000	00.

Ejemplo nº 9.

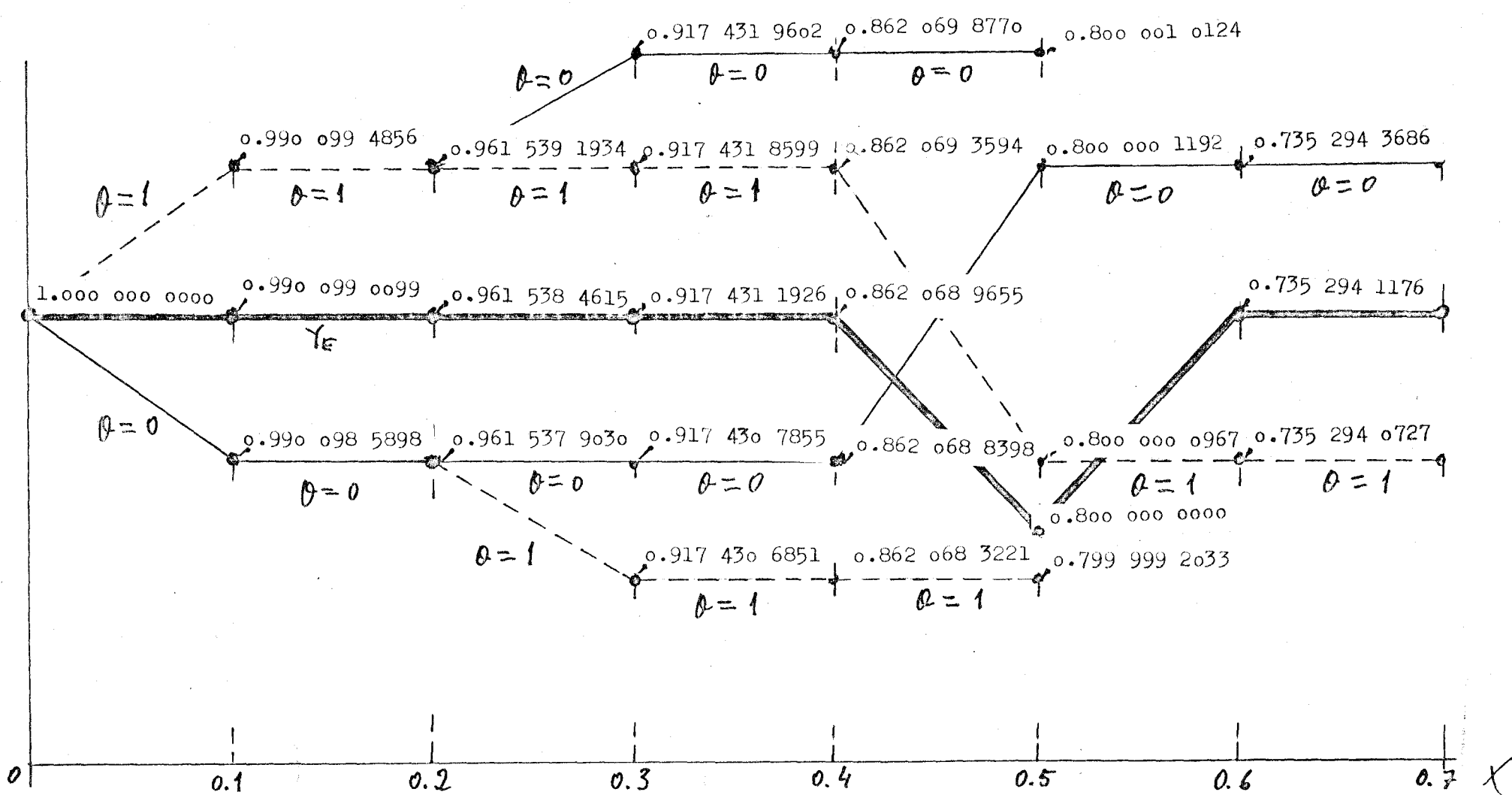
$y' = -2xy^2$ ,  $y(0) = 1$

$y = 1/(1+x^2)$

$\theta = 1$

$\theta = 0$

9.900994856	-01A	9.900985898	-01A	9.900990099	-01A
1.000000000	-01.	1.000000000	-01.	1.000000000	-01A
9.615391934	-01A	9.615379030	-01A	9.615384615	-01.
2.000000000	-01.	2.000000000	-01.	2.000000000	-01A
9.174318599	-01A	9.174307855	-01A	9.174311926	-01.
3.000000000	-01.	3.000000000	-01.	3.000000000	-01A
8.620693594	-01A	8.620688398	-01A	8.620689655	-01.
4.000000000	-01.	4.000000000	-01.	4.000000000	-01A
8.000000967	-01A	8.000001192	-01A	8.000000000	-01.
5.000000000	-01.	5.000000000	-01.	5.000000000	-01A
7.352940127	-01A	7.352943686	-01A	7.352941176	-01.
6.000000000	-01.	6.000000000	-01.	6.000000000	-01A
6.711407513	-01A	6.711412165	-01A	6.711409395	-01.
7.000000000	-01.	7.000000000	-01.	7.000000000	-01A
6.097559108	-01A	6.097563366	-01A	6.097560975	-01.
8.000000000	-01.	8.000000000	-01.	8.000000000	-01A
5.524860436	-01A	5.524863656	-01A	5.524861878	-01.
9.000000000	-01.	9.000000000	-01.	9.000000000	-01A
4.999999074	-01A	5.000001178	-01A	5.000000000	-01.
1.000000000	00.	1.000000000	00.	1.000000000	00A
4.524886399	-01A	4.524887576	-01A	4.524886877	-01.
1.100000000	00.	1.100000000	-00.	1.100000000	00A
4.098360502	-01A	4.098361014	-01A	4.098360655	-01.
1.200000000	00.	1.200000000	00.	1.200000000	00A
3.717472174	-01A	3.717472257	-01A	3.717472118	-01.
1.300000000	00.	1.300000000	00.	1.300000000	00A
3.378378551	-01A	3.378378385	-01A	3.378378378	-01.
1.400000000	00.	1.400000000	00.	1.400000000	00A
3.076923304	-01A	3.076923012	-01A	3.076923076	-01.
1.500000000	00.	1.500000000	00.	1.500000000	00A
2.808989007	-01A	2.808988667	-01A	2.808988764	-01.
1.600000000	00.	1.600000000	00.	1.600000000	00A
2.570694323	-01A	2.570693980	-01A	2.570694087	-01.
1.700000000	00.	1.700000000	00.	1.700000000	00A
2.358490783	-01A	2.358490462	-01A	2.358490566	-01.
1.800000000	00.	1.800000000	00.	1.800000000	00A
2.169197590	-01A	2.169197302	-01A	2.169197396	-01.
1.900000000	00.	1.900000000	00.	1.900000000	00A
2.000000168	-01A	1.999999916	-01A	2.000000000	-01.
2.000000000	00.	2.000000000	00.	2.000000000	00A
1.848428980	-01A	1.848428764	-01A	1.848428835	-01.
2.100000000	00.	2.100000000	00.	2.100000000	00A
1.712328890	-01A	1.712328707	-01A	1.712328767	-01.
2.200000000	00.	2.200000000	00.	2.200000000	00A
1.589825224	-01A	1.589825069	-01A	1.589825119	-01.
2.300000000	00.	2.300000000	00.	2.300000000	00A
1.479290029	-01A	1.479289899	-01A	1.479289940	-01.
2.400000000	00.	2.400000000	00.	2.400000000	00A
1.379310419	-01A	1.379310311	-01A	1.379310344	-01.
				2.500000000	00A

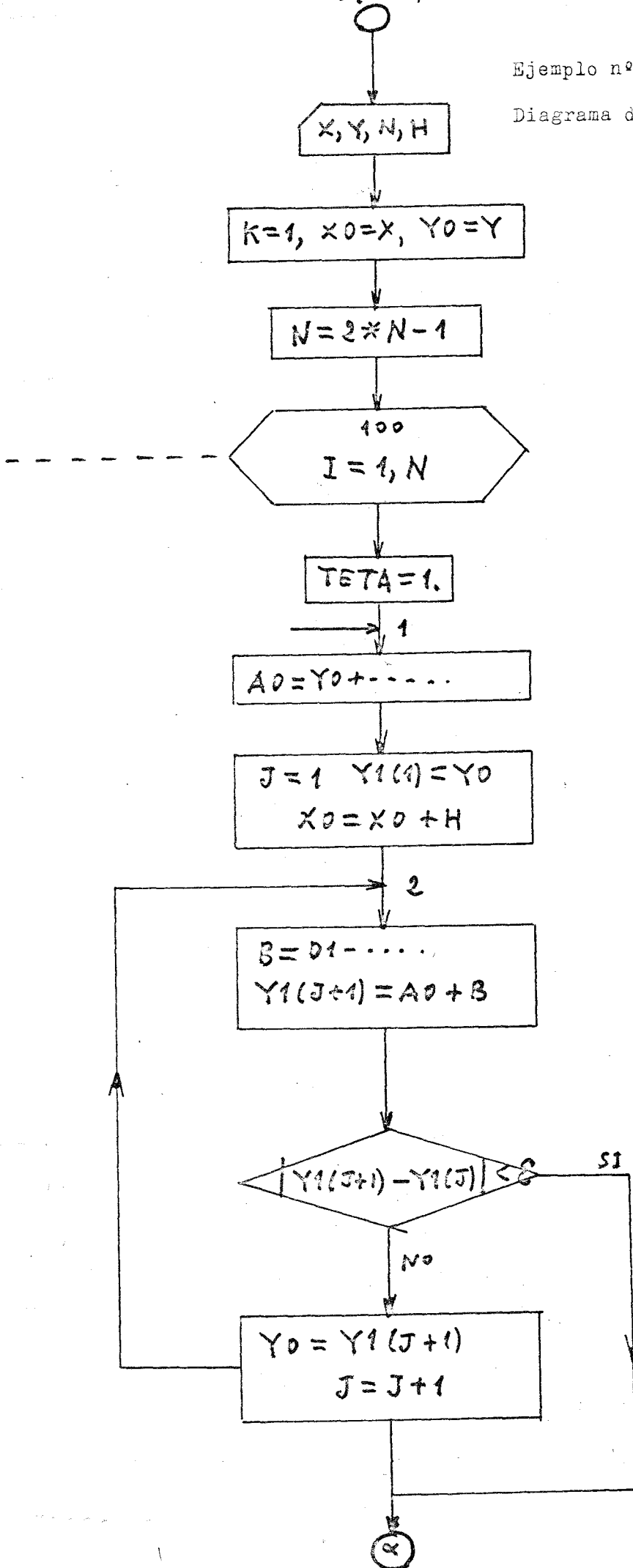


Grafica que muestra el comportamiento de las prolongaciones del ejemplo n° 9 , con una irregularidad en el paso 2-3 ,asi como su posicion relativa,respecto de la solucion exacta  $Y_e$  . Escala imaginaria.

START

Ejemplo nº 9.  $y' = -2xy^2$

Diagrama de flujo.





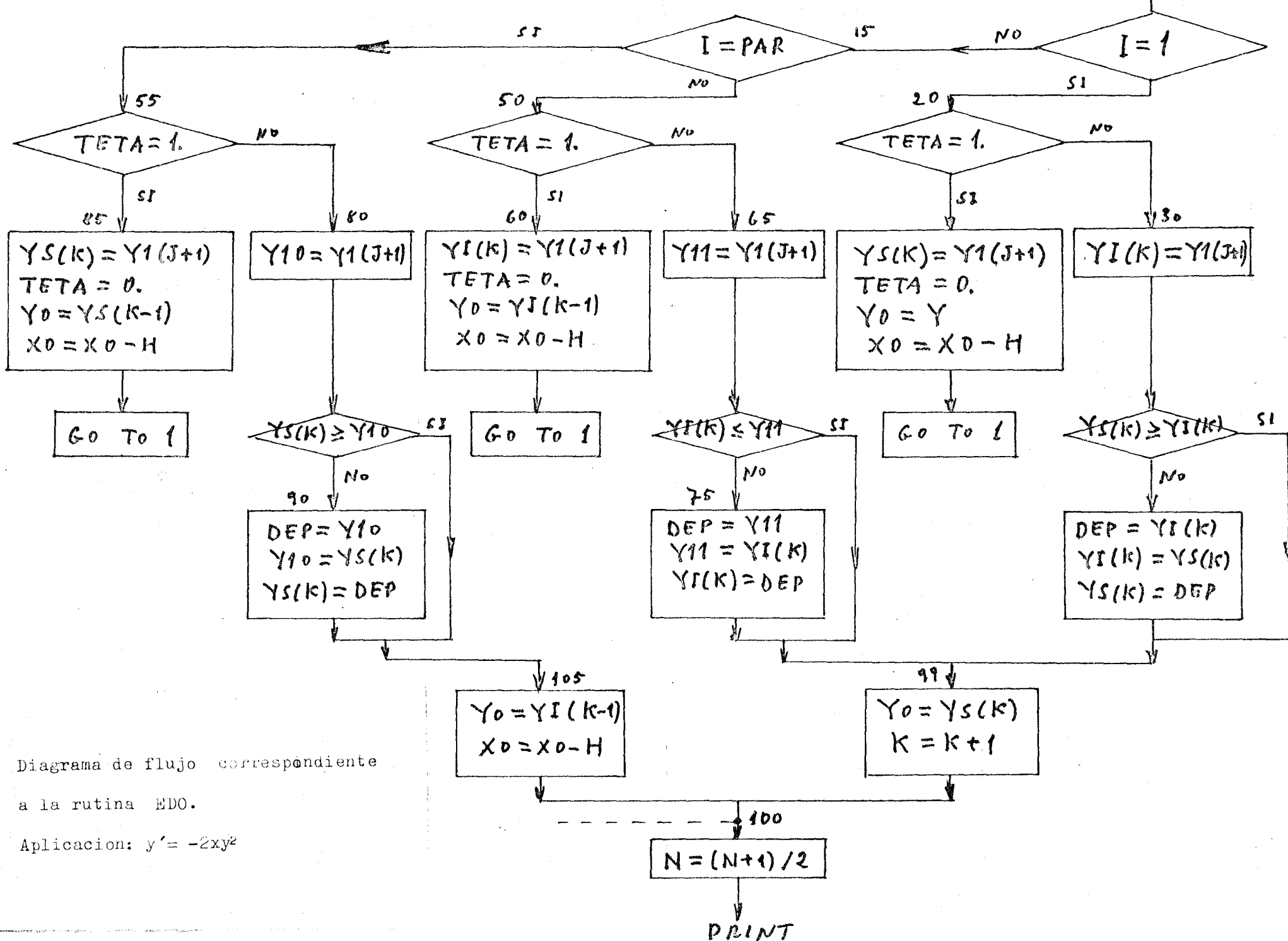


Diagrama de flujo correspondiente a la rutina EDO.

Aplicacion:  $y' = -2xy^2$

ED - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```

C          RESOLUCION DE LA EDO DY=-2.*X*Y*Y
C          VALORES INICIALES X=0,Y=1
C
C          READ(5,600)X,Y,H,N
C          H SIGNIFICA EL PASO DE LA INTEGRACION,N EL NUMERO DE PASOS
C          DIMENSION Y1(99),Y11(20),Y10(20),YS(20),YI(20),YY(20),YM(20),XX(20
1)
N=2*N-1
K=1
X0=X
Y0=Y
DO 100 I=1,N
C          TETA ES UN PARAMETRO QUE TOMA VALORES EXTREMOS 0 Y 1
C          TETA=1.
1  A0=Y0+D1(X0,Y0,H)+D2(X0,Y0,H)+D5(X0,Y0,H)*(1.-TETA)
   J=1
   Y1(1)=Y0
   X0=X0+H
2  B=D1(X0,Y0,H)-D2(X0,Y0,H)+D5(X0,Y0,H)*TETA
   Y1(J+1)=A0+B
   IF(ABS(Y1(J+1)-Y1(J))-1.E-8)10,10,5
5  Y0=Y1(J+1)
   J=J+1
   GO TO 2
10 IF(I-1)15,20,15
20 IF(TETA-1.)30,25,30
25 YS(K)=Y1(J+1)
   TETA=0.
   X0=X0-H
   Y0=Y
   GO TO 1
30 YI(K)=Y1(J+1)
   IF (YS(K)-YI(K))40,99,99
40 DEP=YI(K)
   YI(K)=YS(K)
   YS(K)=DEP
C          YS Y YI REPRESENTAN SUPER Y SUBVALORES DE LA SOLUCION Y(X)
C          GO TO 99
15 IF(I-I/2*2)50,55,50
55 IF(TETA-1.)80,85,80
85 YS(K)=Y1(J+1)
   TETA=0.
   Y0=YS(K-1)
   X0=X0-H
   GO TO 1
80 Y10=Y1(J+1)
   IF(YS(K)-Y10)90,105,105
90 DEP=Y10
   Y10=YS(K)
   YS(K)=DEP
105 Y0=YI(K-1)
   X0=X0-H
   GO TO 100
50 IF(TETA-1.)65,60,65
60 YI(K)=Y1(J+1)

```

ED - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
TETA=0.
Y0=YI(K-1)
X0=X0-H
GO TO 1
65 Y11=Y1(J+1)
IF(YI(K)-Y11)99,75,75
75 DEP=Y11
Y11=YI(K)
YI(K)=DEP
99 Y0=YS(K)
K=K+1
100 CONTINUE
X0=X+H
N=(N+1)/2
DO 200 L=1,N
YY(L)=1./(1.+X0*X0)
C YY(L) REPRESENTA LA SOLUCION EXACTA DE LA EDO
X0=X0+H
200 CONTINUE
DO 300 M=1,N
YM(M)=.5*(YS(M)+YI(M))
C YM(M) SIGNIFICA LA MEDIA ARITMETICA DE Y5 E YI
300 CONTINUE
XX(1)=X+H
C CALCULO VALORES VARIABLE INDEPENDIENTE XX
DO 400 JK=2,N
XX(JK)=XX(JK-1)+H
400 CONTINUE
WRITE(6,500)(XX(II),YI(II),YY(II),YS(II),YM(II),II=1,N)
500 FORMAT(/ /40X,44HRESOLUCION NUMERICA ECUACION DY/DX=-2*X*Y*Y//3X,1H
1X,7X,5HYI(X),7X,5HYY(X),7X,5HYS(X),7X,5HYM(X),/(1X,F6.2,4F12.7))
600 FORMAT(F7.2,F12.7,F8.6,I3)
STOP
END
```

```
FUNCTION D1(X,Y,Z)
D1=-X*Z*Y*Y
RETURN
END
```

```
FUNCTION D2(X,Y,Z)
D2=-Y*Y*Z*Z*(1.-4.*X*X*Y)/6.
RETURN
END
```

```
FUNCTION D5(X,Y,Z)
D5=(X*Y**4*(-3.+16.*X**2*Y*(1.-X*X*Y))*Z**5)/3.
RETURN
END
```

RESOLUCION NUMERICA ECUACION  $DY/DX = -2 * X * Y$ 

X	YI(X)	YY(X)	YS(X)	YM(X)
0.10	0.9900986	0.9900990	0.9900995	0.9900990
0.20	0.9615379	0.9615385	0.9615392	0.9615385
0.30	0.9174307	0.9174312	0.9174319	0.9174313
0.40	0.8620683	0.8620690	0.8620699	0.8620691
0.50	0.7999992	0.8000000	0.8000010	0.8000001
0.60	0.7352933	0.7352941	0.7352951	0.7352942
0.70	0.6711401	0.6711410	0.6711418	0.6711410
0.80	0.6097554	0.6097561	0.6097568	0.6097561
0.90	0.5524856	0.5524862	0.5524868	0.5524862
1.00	0.4999995	0.5000000	0.5000005	0.5000000
1.10	0.4524883	0.4524887	0.4524892	0.4524887
1.20	0.4098357	0.4098361	0.4098365	0.4098361
1.30	0.3717469	0.3717472	0.3717476	0.3717472
1.40	0.3378376	0.3378379	0.3378382	0.3378379
1.50	0.3076921	0.3076923	0.3076926	0.3076923
1.60	0.2808987	0.2808989	0.2808991	0.2808989
1.70	0.2570693	0.2570694	0.2570696	0.2570694
1.80	0.2358489	0.2358491	0.2358492	0.2358491
1.90	0.2169196	0.2169198	0.2169199	0.2169198
2.00	0.1999999	0.2000000	0.2000001	0.2000000

\$IBSYS

Ejemplo nº 10. Mikhlín.

$$y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0$$

$Q = 0$

3.333333332	-04A
1.000000000	-01.
2.666861119	-03A
2.000000000	-01.
9.003451524	-03A
3.000000000	-01.
2.135933924	-02A
4.000000000	-01.
4.179107777	-02A
5.000000000	-01.
7.244775260	-02A
6.000000000	-01.
1.156596826	-01A
7.000000000	-01.
1.740799911	-01A
8.000000000	-01.
2.509062267	-01A
9.000000000	-01.
3.502310430	-01A
1.000000000	00.
4.776155160	-01A
1.100000000	00.
6.410736628	-01A
1.200000000	00.
8.528731316	-01A
1.300000000	00.
1.133095321	00A
1.400000000	00.
1.517395995	00A
1.500000000	00.
2.076231305	00A
1.600000000	00.
2.971783686	00A
1.700000000	00.
4.678302128	00A
1.800000000	00.

Runge- Kutta

3.333348958	-04A
1.000000000	-01.
2.666875369	-03A
2.000000000	-01.
9.003498131	-03A
3.000000000	-01.
2.135944732	-02A
4.000000000	-01.
4.179128847	-02A
5.000000000	-01.
7.244812484	-02A
6.000000000	-01.
1.156603048	-01A
7.000000000	-01.
1.740810040	-01A
8.000000000	-01.
2.509078685	-01A
9.000000000	-01.
3.502337418	-01A
1.000000000	00.
4.776200911	-01A
1.100000000	00.
6.410817979	-01A
1.200000000	00.
8.528886038	-01A
1.300000000	00.
1.133127647	00A
1.400000000	00.
1.517473413	00A
1.500000000	00.
2.076460833	00A
1.600000000	00.
2.972764897	00A
1.700000000	00.
4.686651004	00A
1.800000000	00.

$Q = 1$

3.333388896	-04A
1.000000000	-01.
2.666883393	-03A
2.000000000	-01.
9.003502116	-03A
3.000000000	-01.
2.135943147	-02A
4.000000000	-01.
4.179122960	-02A
5.000000000	-01.
7.244799238	-02A
6.000000000	-01.
1.156600602	-01A
7.000000000	-01.
1.740806001	-01A
8.000000000	-01.
2.509072520	-01A
9.000000000	-01.
3.502328705	-01A
1.000000000	00.
4.776190068	-01A
1.100000000	00.
6.410809069	-01A
1.200000000	00.
8.528897720	-01A
1.300000000	00.
1.133138839	00A
1.400000000	00.
1.517531508	00A
1.500000000	00.
2.076773909	00A
1.600000000	00.
2.975025190	00A
1.700000000	00.
4.719822754	00A
1.800000000	00.

$y' = y^2$      $y(0) = 1$      $h = 0.05$     Solucion exacta:  $y = 1/(1-x)$

Runge-Kutta

1.052631589	00A	2.000002608	00A	1.052631563	00A
1.052631578	00.	2.000000000	00.	5.000000000	-02.
1.052631569	00A	1.999997875	00A	1.111111071	00A
5.000000000	-02.	5.000000000	-01.	1.000000000	-01.
1.111111137	00A	2.222227338	00A	1.176470513	00A
1.111111111	00.	2.222222222	00.	1.500000000	-01.
1.111111085	00A	2.222218212	00A	1.249999871	00A
1.000000000	-01.	5.500000000	-01.	2.000000000	-01.
1.176470638	00A	2.500010754	00A	1.333333123	00A
1.176470588	00.	2.500000000	00.	2.500000000	-01.
1.176470538	00A	2.499991904	00A	1.428571092	00A
1.500000000	-01.	6.000000000	-01.	3.000000000	-01.
1.250000088	00A	2.857167682	00A	1.538461001	00A
1.250000000	00.	2.857142857	00.	3.500000000	-01.
1.249999910	00A	2.857125056	00A	1.666665801	00A
2.000000000	-01.	6.500000000	-01.	4.000000000	-01.
1.333333482	00A	3.333398350	00A	1.818180399	00A
1.333333333	00.	3.333333333	00.	4.500000000	-01.
1.333333180	00A	3.333289439	00A	1.999997607	00A
2.500000000	-01.	7.000000000	-01.	5.000000000	-01.
1.428571688	00A	4.000203288	00A	2.222218026	00A
1.428571428	00.	4.000000000	00.	5.500000000	-01.
1.428571180	00A	3.999873348	00A	2.499992246	00A
3.000000000	-01.	7.500000000	-01.	6.000000000	-01.
1.538461987	00A	5.000826828	00A	2.857127490	00A
1.538461538	00.	5.000000000	00.	6.500000000	-01.
1.538461130	00A	4.999541897	00A	3.333299869	00A
5.500000000	-01.	8.000000000	-01.	7.000000000	-01.
6.66667449	00A	6.671823725	00A	3.999916949	00A
6.666666666	00.	6.666666666	00.	7.500000000	-01.
6.66665981	00A	6.664309333	00A	4.999750820	00A
8.000000000	-01.	8.500000000	-01.	8.000000000	-01.
8.18183218	00A	1.007398080	01A	6.665661718	00A
8.18181818	00.	1.000000000	01.	8.500000000	-01.
8.18180632	00A	9.977381052	00A	9.993196615	00A
5.000000000	-01.	9.000000000	-01.	9.000000000	-01.
		OVERFLOW...	...	1.985801590	01A
				9.500000000	-01.
				1.639833954	02A
				1.000000000	00.
				2.020342426	12A
				1.050000000	00.
				OVERFLOW...	..

$$y' = -y - y^2$$

$$y(0) = 1 \quad h = 0.1$$

$$\text{Solucion exacta: } y = 1/(2e^x - 1)$$

 $\bar{Y} \quad \beta = 1$  $Y_e$ 

Runge-Kutta

8.262166859 -01A  
 5.930987935 -01A  
 5.883376042 -01A  
 5.041255176 -01A  
 1.352702955 -01A  
 5.781840811 -01A  
 5.303077710 -01A  
 2.897666778 -01A  
 2.551558678 -01A  
 2.254015664 -01A  
 1.996689355 -01A  
 1.772990783 -01A  
 1.577650034 -01A  
 1.406402102 -01A  
 1.255758638 -01A  
 1.122839390 -01A  
 1.005245855 -01A  
 9.009653042 -02A  
 8.082969568 -02A  
 7.257945703 -02A  
 6.522213107 -02A  
 5.865139433 -02A  
 5.277541592 -02A

8.262128682 -01.  
 1.000000000 -01A  
 6.930941063 -01.  
 2.000000000 -01A  
 5.883330213 -01.  
 3.000000000 -01A  
 5.041213444 -01.  
 4.000000000 -01A  
 4.352665983 -01.  
 5.000000000 -01A  
 3.781808411 -01.  
 6.000000000 -01A  
 3.303049418 -01.  
 7.000000000 -01A  
 2.897642077 -01.  
 8.000000000 -01A  
 2.551537079 -01.  
 9.000000000 -01A  
 2.253996735 -01.  
 1.000000000 00A

8.262161534 -01A  
 1.000000000 -01.  
 6.930983909 -01A  
 2.000000000 -01.  
 5.883374213 -01A  
 3.000000000 -01.  
 5.041255176 -01A  
 4.000000000 -01.  
 4.352704249 -01A  
 5.000000000 -01.  
 3.781842950 -01A  
 6.000000000 -01.  
 3.303080366 -01A  
 7.000000000 -01.  
 2.897669718 -01A  
 8.000000000 -01.  
 2.551561745 -01A  
 9.000000000 -01.  
 2.254018751 -01A  
 1.000000000 00.

 $\bar{Y} \quad \beta = 0$ 

8.262103871 -01A  
 5.930913012 -01A  
 5.883304593 -01A  
 5.041191406 -01A  
 1.352647380 -01A  
 5.781792768 -01A  
 5.303036239 -01A  
 2.897630925 -01A  
 2.551527595 -01A  
 2.253988626 -01A  
 1.996665757 -01A  
 1.772970119 -01A  
 1.577631884 -01A  
 1.406386114 -01A  
 1.255744518 -01A  
 1.122826889 -01A  
 1.005234765 -01A  
 9.009554456 -02A  
 8.082881781 -02A  
 7.257867408 -02A  
 6.522143179 -02A  
 5.865076898 -02A  
 5.277485604 -02A

1.996672725 -01.  
 1.100000000 00A  
 1.772976134 -01.  
 1.200000000 00A  
 1.577637098 -01.  
 1.300000000 00A  
 1.406390652 -01.  
 1.400000000 00A  
 1.255748480 -01.  
 1.500000000 00A  
 1.122830359 -01.  
 1.600000000 00A  
 1.005237813 -01.  
 1.700000000 00A  
 9.009581296 -02.  
 1.800000000 00A  
 8.082905466 -02.  
 1.900000000 00A  
 7.257888349 -02.  
 2.000000000 00A  
 6.522161727 -02.  
 2.100000000 00A  
 5.865093351 -02.  
 2.200000000 00A  
 5.277500221 -02.  
 2.300000000 00A

1.996692394 -01A  
 1.100000000 00.  
 1.772993727 -01A  
 1.200000000 00.  
 1.577652857 -01A  
 1.300000000 00.  
 1.406404786 -01A  
 1.400000000 00.  
 1.255761175 -01A  
 1.500000000 00.  
 1.122841777 -01A  
 1.600000000 00.  
 1.005248095 -01A  
 1.700000000 00.  
 9.009673989 -02A  
 1.800000000 00.  
 8.082989119 -02A  
 1.900000000 00.  
 7.257963919 -02A  
 2.000000000 00.  
 6.522230054 -02A  
 2.100000000 00.  
 5.865155180 -02A  
 2.200000000 00.  
 5.277556210 -02A  
 2.300000000 00.

$$y' = -y - y^2 \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1 \quad \text{Sol. exacta: } y = 1/(2e^x - 1)$$

resuelto con el algoritmo diente de sierra.

$x_n$	$\theta = 1$	$Y_E$	$\theta = 0$
0.1	8.262166859 -01A	8.262128682 -01A	8.262103871 -01
0.2	6.930961999 -01A	6.930941063 -01A	6.930938947 -01
0.3	5.883355389 -01A	5.883330213 -01A	5.883325245 -01
0.4	5.041232624 -01A	5.041213444 -01A	5.041213957 -01
0.5	4.352684375 -01A	4.352665983 -01A	4.352665960 -01
0.6	3.781823632 -01A	3.781808411 -01A	3.781809946 -01
0.7	3.303063228 -01A	3.303049418 -01A	3.303050721 -01
0.8	2.897653880 -01A	2.897642077 -01A	2.897643823 -01
0.9	2.551547625 -01A	2.551537079 -01A	2.551538648 -01
1.0	2.254005901 -01A	2.253996735 -01A	2.253998388 -01
1.1	1.996680889 -01A	1.996672725 -01A	1.996674223 -01
1.2	1.772983305 -01A	1.772976134 -01A	1.772977597 -01
1.3	1.577643491 -01A	1.577637098 -01A	1.577638427 -01
1.4	1.406396308 -01A	1.406390652 -01A	1.406391908 -01
1.5	1.255753533 -01A	1.255748480 -01A	1.255749623 -01
1.6	1.122834855 -01A	1.122830359 -01A	1.122831424 -01
1.7	1.005241838 -01A	1.005237813 -01A	1.005238782 -01
1.8	9.009617252 -02A	9.009581296 -02A	9.009590244 -02
1.9	8.082937733 -02A	8.082905466 -02A	8.082913615 -02
2.0	7.257917265 -02A	7.257888349 -02A	7.257895845 -02
2.1	6.522187728 -02A	6.522161727 -02A	6.522168558 -02
2.2	5.865116711 -02A	5.865093351 -02A	5.865099619 -02
2.3	5.277521260 -02A	5.277500221 -02A	5.277505935 -02
2.4	4.751436021 -02A	4.751417080 -02A	4.751422316 -02
2.5	4.279925137 -02A	4.279908054 -02A	4.279912830 -02
2.6	3.856927651 -02A	3.856912247 -02A	3.856916618 -02
2.7	3.477130239 -02A	3.477116329 -02A	3.477120319 -02
2.8	3.135861267 -02A	3.135848709 -02A	3.135852358 -02
2.9	2.829002453 -02A	2.828991102 -02A	2.828994434 -02
3.0	2.552914485 -02A	2.552904227 -02A	2.552907273 -02
3.1	2.304374302 -02A	2.304365022 -02A	2.304367804 -02
3.2	2.080521747 -02A	2.080513353 -02A	2.080515896 -02
3.3	1.878814136 -02A	1.878806538 -02A	1.878808860 -02
3.4	1.696987267 -02A	1.696980390 -02A	1.696982513 -02
3.5	1.533021931 -02A	1.533015702 -02A	1.533017641 -02
3.6	1.385114934 -02A	1.385109293 -02A	1.385111065 -02
3.7	1.251654022 -02A	1.251648911 -02A	1.251650529 -02
3.8	1.131196036 -02A	1.131191405 -02A	1.131192884 -02
3.9	1.022447876 -02A	1.022443679 -02A	1.022445030 -02
4.0	9.242498270 -03A	9.242460226 -03A	9.242472568 -03
4.1	8.355609307 -03A	8.355574815 -03A	8.355586087 -03
4.2			



$$y' = e^{\ln(x-y)}$$

$$y(0) = 0.1$$

$$h = 0.01$$

$$\text{Solucion exacta: } y = 1/\ln(e^{\ln x} + e - 1)$$

$$Q = 0$$

$$1/\epsilon$$

$$Q = 1$$

1.037960515	-01A	1.037960514	-01.	1.037960515	-01A
1.000000000	-02.	1.000000000	-02.	1.000000000	-02.
1.078302294	-01A	1.078302292	-01.	1.078302294	-01A
2.000000000	-02.	2.000000000	-02.	2.000000000	-02.
1.121071724	-01A	1.121071722	-01.	1.121071724	-01A
3.000000000	-02.	3.000000000	-02.	3.000000000	-02.
1.166304125	-01A	1.166304122	-01.	1.166304125	-01A
4.000000000	-02.	4.000000000	-02.	4.000000000	-02.
1.214023063	-01A	1.214023060	-01.	1.214023064	-01A
5.000000000	-02.	5.000000000	-02.	5.000000000	-02.
1.264239895	-01A	1.264239892	-01.	1.264239895	-01A
6.000000000	-02.	6.000000000	-02.	6.000000000	-02.
1.316953539	-01A	1.316953536	-01.	1.316953539	-01A
7.000000000	-02.	7.000000000	-02.	7.000000000	-02.
1.372150497	-01A	1.372150495	-01.	1.372150497	-01A
8.000000000	-02.	8.000000000	-02.	8.000000000	-02.
1.429805124	-01A	1.429805123	-01.	1.429805124	-01A
9.000000000	-02.	9.000000000	-02.	9.000000000	-02.
1.489880125	-01A	1.489880125	-01.	1.489880126	-01A
1.000000000	-01.	1.000000000	-01.	1.000000000	-01.
1.552327276	-01A	1.552327277	-01.	1.552327277	-01A
1.100000000	-01.	1.100000000	-01.	1.100000000	-01.
1.617088321	-01A	1.617088323	-01.	1.617088321	-01A
1.200000000	-01.	1.200000000	-01.	1.200000000	-01.
1.684096022	-01A	1.684096025	-01.	1.684096022	-01A
1.300000000	-01.	1.300000000	-01.	1.300000000	-01.
1.753275325	-01A	1.753275329	-01.	1.753275325	-01A
1.400000000	-01.	1.400000000	-01.	1.400000000	-01.
1.824544593	-01A	1.824544598	-01.	1.824544593	-01A
1.500000000	-01.	1.500000000	-01.	1.500000000	-01.
1.897816874	-01A	1.897816879	-01.	1.897816874	-01A
1.600000000	-01.	1.600000000	-01.	1.600000000	-01.
1.973001162	-01A	1.973001168	-01.	1.973001162	-01A
1.700000000	-01.	1.700000000	-01.	1.700000000	-01.
2.050003622	-01A	2.050003628	-01.	2.050003622	-01A
1.800000000	-01.	1.800000000	-01.	1.800000000	-01.
2.128728751	-01A	2.128728757	-01.	2.128728751	-01A
1.900000000	-01.	1.900000000	-01.	1.900000000	-01.
2.209080448	-01A	2.209080454	-01.	2.209080448	-01A
2.000000000	-01.	2.000000000	-01.	2.000000000	-01.
2.290962985	-01A	2.290962991	-01.	2.290962985	-01A
2.100000000	-01.	2.100000000	-01.	2.100000000	-01.
2.374281863	-01A	2.374281869	-01.	2.374281864	-01A
2.200000000	-01.	2.200000000	-01.	2.200000000	-01.
2.458944550	-01A	2.458944555	-01.	2.458944551	-01A
2.300000000	-01.	2.300000000	-01.	2.300000000	-01.
2.544861098	-01A	2.544861102	-01.	2.544861098	-01A
2.400000000	-01.	2.400000000	-01.	2.400000000	-01.

$y' = 4xy$   $1/2$   $y(0) = 1$   $h = 0.1$

Runge-Kutta

Solucion exacta:

$y = (1+x)^2$

$y = \bar{y}$

1.020099916	00A	1.020100000	00.	1.020099999	00.
1.000000000	-01.	1.000000000	-01A	1.000000000	-01A
1.081599664	00A	1.081600000	00.	1.081599999	00.
2.000000000	-01.	2.000000000	-01A	2.000000000	-01A
1.188099236	00A	1.188100000	00.	1.188099999	00.
3.000000000	-01.	3.000000000	-01A	3.000000000	-01A
1.345598601	00A	1.345600000	00.	1.345599999	00.
4.000000000	-01.	4.000000000	-01A	4.000000000	-01A
1.562497697	00A	1.562500000	00.	1.562499999	00.
5.000000000	-01.	5.000000000	-01A	5.000000000	-01A
1.849596435	00A	1.849600000	00.	1.849599999	00.
6.000000000	-01.	6.000000000	-01A	6.000000000	-01A
2.220094713	00A	2.220100000	00.	2.220099999	00.
7.000000000	-01.	7.000000000	-01A	7.000000000	-01A
2.689592427	00A	2.689600000	00.	2.689599999	00.
8.000000000	-01.	8.000000000	-01A	8.000000000	-01A
3.276089490	00A	3.276100000	00.	3.276099999	00.
9.000000000	-01.	9.000000000	-01A	9.000000000	-01A
3.999985830	00A	4.000000000	00.	3.999999999	00.
1.000000000	00.	1.000000000	00A	1.000000000	00A
4.884081399	00A	4.884100000	00.	4.884099999	00.
1.100000000	00.	1.100000000	00A	1.100000000	00A
5.953576162	00A	5.953600000	00.	5.953599999	00.
1.200000000	00.	1.200000000	00A	1.200000000	00A
7.236070103	00A	7.236100000	00.	7.236099999	00.
1.300000000	00.	1.300000000	00A	1.300000000	00A
8.761563213	00A	8.761600000	00.	8.761599999	00.
1.400000000	00.	1.400000000	00A	1.400000000	00A
1.056245549	01A	1.056250000	01.	1.056249999	01.
1.500000000	00.	1.500000000	00A	1.500000000	00A
1.267354694	01A	1.267360000	01.	1.267359999	01.
1.600000000	00.	1.600000000	00A	1.600000000	00A
1.513203758	01A	1.513210000	01.	1.513209999	01.
1.700000000	00.	1.700000000	00A	1.700000000	00A
1.797752741	01A	1.797760000	01.	1.797759999	01.
1.800000000	00.	1.800000000	00A	1.800000000	00A
2.125201644	01A	2.125210000	01.	2.125209999	01.
1.900000000	00.	1.900000000	00A	1.900000000	00A
2.499990469	01A	2.500000000	01.	2.499999999	01.
2.000000000	00.	2.000000000	00A	2.000000000	00A

$$y' = x^2 - y^2 \quad y(-1) = 0 \quad h = 0.1$$

 $Q = 0$ 

9.004791638	-02A
9.000000000	-01.
1.607278879	-01A
8.000000000	-01.
2.134839641	-01A
7.000000000	-01.
2.503698664	-01A
6.000000000	-01.
2.737768247	-01A
5.000000000	-01.
2.862235010	-01A
4.000000000	-01.
2.902148811	-01A
3.000000000	-01.
2.881616402	-01A
2.000000000	-01.
2.823450519	-01A
1.000000000	-01.
2.749118267	-01A
0.000000000	00.
2.678852852	-01A
1.000000000	-01.
2.631820077	-01A
2.000000000	-01.
2.626255325	-01A
3.000000000	-01.
2.679505426	-01A
4.000000000	-01.
2.807924370	-01A
5.000000000	-01.
3.026586456	-01A
6.000000000	-01.
3.348800337	-01A
7.000000000	-01.
3.785437286	-01A
8.000000000	-01.
4.344129018	-01A
9.000000000	-01.
5.028441520	-01A
1.000000000	00.
5.837180296	-01A
1.100000000	00.
6.764010608	-01A
1.200000000	00.
7.797561769	-01A
1.300000000	00.
8.922113743	-01A
1.400000000	00.

Runge-Kutta

9.004735746	-02A
-9.000000000	-01.
1.607268839	-01A
-8.000000000	-01.
2.134826503	-01A
-7.000000000	-01.
2.503683695	-01A
-6.000000000	-01.
2.737752476	-01A
-5.000000000	-01.
2.862219183	-01A
-4.000000000	-01.
2.902133415	-01A
-3.000000000	-01.
2.881601709	-01A
-2.000000000	-01.
2.823436639	-01A
-1.000000000	-01.
2.749105192	-01A
0.000000000	00.
2.678840493	-01A
1.000000000	-01.
2.631808293	-01A
2.000000000	-01.
2.626243944	-01A
3.000000000	-01.
2.679494276	-01A
4.000000000	-01.
2.807913306	-01A
5.000000000	-01.
3.026575400	-01A
6.000000000	-01.
3.348789332	-01A
7.000000000	-01.
3.785426551	-01A
8.000000000	-01.
4.344118994	-01A
9.000000000	-01.
5.028432877	-01A
1.000000000	00.
5.837173878	-01A
1.100000000	00.
6.764007281	-01A
1.200000000	00.
7.797562189	-01A
1.300000000	00.
8.922118074	-01A
1.400000000	00.

 $Q = 1$ 

9.004781767	-02A
-9.000000000	-01.
1.607278037	-01A
-8.000000000	-01.
2.134839593	-01A
-7.000000000	-01.
2.503699599	-01A
-6.000000000	-01.
2.737770055	-01A
-5.000000000	-01.
2.862237446	-01A
-4.000000000	-01.
2.902151614	-01A
-3.000000000	-01.
2.881619346	-01A
-2.000000000	-01.
2.823453435	-01A
-1.000000000	-01.
2.749121032	-01A
0.000000000	00.
2.678855380	-01A
1.000000000	-01.
2.631822306	-01A
2.000000000	-01.
2.626257210	-01A
3.000000000	-01.
2.679506944	-01A
4.000000000	-01.
2.807925532	-01A
5.000000000	-01.
3.026587317	-01A
6.000000000	-01.
3.348801018	-01A
7.000000000	-01.
3.785437971	-01A
8.000000000	-01.
4.344129942	-01A
9.000000000	-01.
5.028442907	-01A
1.000000000	00.
5.837182285	-01A
1.100000000	00.
6.764013167	-01A
1.200000000	00.
7.797564657	-01A
1.300000000	00.
8.922116556	-01A
1.400000000	00.

$$y' = 1 - y^2 \quad y(0) = 0 \quad h = 0.125 \quad \text{Solucion exacta: } y = (e^{2x} - 1) / (e^{2x} + 1)$$

 $\theta = 1$ 

1.243529411	-01A
1.250000000	-01.
2.449184856	-01A
2.500000000	-01.
3.583571035	-01A
3.750000000	-01.
4.621167883	-01A
5.000000000	-01.
5.545993413	-01A
6.250000000	-01.
6.351486118	-01A
7.500000000	-01.
7.039053334	-01A
8.750000000	-01.
7.615939619	-01A
1.000000000	00.
8.093009437	-01A
1.125000000	00.
8.482835651	-01A
1.250000000	00.
8.798266602	-01A
1.375000000	00.
9.051482360	-01A
1.500000000	00.
9.253462195	-01A
1.625000000	00.
9.413755382	-01A
1.750000000	00.
9.540452615	-01A
1.875000000	00.
9.640275812	-01A
2.000000000	00.
9.718727460	-01A
2.125000000	00.
9.780261136	-01A
2.250000000	00.
9.828450269	-01A
2.375000000	00.
9.866142951	-01A
2.500000000	00.
9.895597451	-01A
2.625000000	00.
9.918597209	-01A
2.750000000	00.

 $Y_F$ 

1.243530017	-01.
1.250000000	-01A
2.449186624	-01.
2.500000000	-01A
3.583573983	-01.
3.750000000	-01A
4.621171572	-01.
5.000000000	-01A
5.545997223	-01.
6.250000000	-01A
6.351489523	-01.
7.500000000	-01A
7.039056039	-01.
8.750000000	-01A
7.615941559	-01.
1.000000000	00A
8.093010702	-01.
1.125000000	00A
8.482836399	-01.
1.250000000	00A
8.798266996	-01.
1.375000000	00A
9.051482536	-01.
1.500000000	00A
9.253462253	-01.
1.625000000	00A
9.413755384	-01.
1.750000000	00A
9.540452601	-01.
1.875000000	00A
9.640275800	-01.
2.000000000	00A
9.718727459	-01.
2.125000000	00A
9.780261147	-01.
2.250000000	00A
9.828450291	-01.
2.375000000	00A
9.866142981	-01.
2.500000000	00A
9.895597486	-01.
2.625000000	00A
9.918597245	-01.
2.750000000	00A

 $\theta = 0$ 

1.243530267	-01A
1.250000000	-01.
2.449187847	-01A
2.500000000	-01.
3.583576425	-01A
3.750000000	-01.
4.621174955	-01A
5.000000000	-01.
5.546000968	-01A
6.250000000	-01.
6.351493046	-01A
7.500000000	-01.
7.039058950	-01A
8.750000000	-01.
7.615943713	-01A
1.000000000	00.
8.093012139	-01A
1.125000000	00.
8.482837262	-01A
1.250000000	00.
8.798267451	-01A
1.375000000	00.
9.051482733	-01A
1.500000000	00.
9.253462304	-01A
1.625000000	00.
9.413755367	-01A
1.750000000	00.
9.540452562	-01A
1.875000000	00.
9.640275763	-01A
2.000000000	00.
9.718727434	-01A
2.125000000	00.
9.780261138	-01A
2.250000000	00.
9.828450297	-01A
2.375000000	00.
9.866142999	-01A
2.500000000	00.
9.895597511	-01A
2.625000000	00.
9.918597275	-01A
2.750000000	00.

Metodo de Runge-Kutta.

Ejemplos nº 8, 14 y 17.

3.194753948	-03A	1.037960518	-01A		
7.187500000	-01.	1.000000000	-02.		
4.540508097	-03A	1.078302301	-01A		
6.875000000	-01.	2.000000000	-02.		
6.353140369	-03A	1.121071736	-01A	1.243527458	-01A
6.562500000	-01.	3.000000000	-02.	1.250000000	-01.
8.751630351	-03A	1.166304142	-01A	2.449181073	-01A
6.250000000	-01.	4.000000000	-02.	2.500000000	-01.
1.186876718	-02A	1.214023086	-01A	3.583564549	-01A
5.937500000	-01.	5.000000000	-02.	3.750000000	-01.
1.584667113	-02A	1.264239924	-01A	4.621157212	-01A
5.625000000	-01.	6.000000000	-02.	5.000000000	-01.
2.082984179	-02A	1.316953574	-01A	5.545977137	-01A
5.312500000	-01.	7.000000000	-02.	6.250000000	-01.
2.695560808	-02A	1.372150539	-01A	6.351463479	-01A
5.000000000	-01.	8.000000000	-02.	7.500000000	-01.
3.434213661	-02A	1.429805173	-01A	7.039024491	-01A
4.687500000	-01.	9.000000000	-02.	8.750000000	-01.
4.307450746	-02A	1.489880182	-01A	7.615905570	-01A
4.375000000	-01.	1.000000000	-01.	1.000000000	00.
5.318975676	-02A	1.552327340	-01A	8.092971721	-01A
4.062500000	-01.	1.100000000	-01.	1.125000000	00.
6.466216422	-02A	1.617088392	-01A	8.482796003	-01A
3.750000000	-01.	1.200000000	-01.	1.250000000	00.
7.739036809	-02A	1.684096099	-01A	8.798226669	-01A
3.437500000	-01.	1.300000000	-01.	1.375000000	00.
9.118805451	-02A	1.753275408	-01A	9.051443523	-01A
3.125000000	-01.	1.400000000	-01.	1.500000000	00.
1.057799325	-01A	1.824544682	-01A	9.253425494	-01A
2.812500000	-01.	1.500000000	-01.	1.625000000	00.
1.208044328	-01A	1.897816968	-01A	9.413721509	-01A
2.500000000	-01.	1.600000000	-01.	1.750000000	00.
1.358240478	-01A	1.973001260	-01A	9.540421960	-01A
2.187500000	-01.	1.700000000	-01.	1.875000000	00.
1.503435000	-01A	2.050003724	-01A	9.640248517	-01A
1.875000000	-01.	1.800000000	-01.	2.000000000	00.
1.638350489	-01A	2.128728855	-01A	9.718703487	-01A
1.562500000	-01.	1.900000000	-01.	2.125000000	00.
1.757693452	-01A	2.209080554	-01A	9.780240321	-01A
1.250000000	-01.	2.000000000	-01.	2.250000000	00.
1.856494255	-01A	2.290963093	-01A	9.828432374	-01A
9.375000000	-02.	2.100000000	-01.	2.375000000	00.
1.930448570	-01A	2.374281972	-01A	9.866127693	-01A
6.250000000	-02.	2.200000000	-01.	2.500000000	00.
1.976227835	-01A	2.458944659	-01A	9.895584535	-01A
3.125000000	-02.	2.300000000	-01.	2.625000000	00.
1.991727582	-01A	2.544861205	-01A	9.918586342	-01A
0.000000000	00.	2.400000000	-01.	2.750000000	00.

## BIBLIOGRAFIA

1. Beckett and Hurt. Numerical Calculation and Algorithms. Mc Graw Hill. 1967
2. Booth . Numerical Methods. Butterworks Scientifics Publication .1955
3. Mc Calla. Introduction to numerical methods and Fortram programming. John Wiley. 1967
4. Ceschino et J. Kuntzmann. Problemes differentiels de conditions initiales. Dunod. 1963
5. Collatz L. The Nueemral Treatment of Differential Equations. Springer.1966
6. Conte S. Elementary Numerical Analysis. Mc Graw Hill. 1965
7. Mc Cracken. Numerical Methods and Fortram Programming. John Wiley.1966
8. Cunningham .Analyse non linear. Dunod. 1963
9. Cheney. Introduction to approximation Theory. Mc Graw Hill.1966
10. Durand . Solutions numeriques des equations algebramiques. Masson et Cie.1960
11. Esgoltz L. Ecuaciones diferenciales y calculo variacional. Edit Mir. Moscú. 1969
12. Girard J. Traitement des equations differentielles sur calculateurs electro-niques. Gauthier - Villars. 1968
13. Greenspan D. Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations. Proceedings of Advanced Symposium. John Wiley.1966
14. Halanay A. Differential Equations Stability. Academic Press. 1966
15. Handscomb D.C. Numerical Aproximation Methods. Pergamon Press.1966
16. Henrici P. Elements of Numerical Analysis. John Wiley.1964
17. Henrici P. Discrete variable methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley. 1962
18. Hildebrand F. Introduction to Numerical Analysis. Mc Graw Hill.1956
19. Householder A. Principles of Numerical Analysis. Mc Graw Hill. 1953
20. Hamming. Numerical Methods for Scientist and Engineers. Mc Graw Hill.1962
21. Hurewicz W. Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Ed. RIALP. 1966
22. Ince .Ordinary differential Equations. Dover Publication. 1956
23. James Smith. metodos numericos aplicados a la computacion digital. Intercontinental Textbook Company. Mexico. 1970

24. Kunz K. Numerical Analysis. Mc Graw Hill. 1957
25. Korganoff A. Methodes de calcul numerique. Dunod. 1961
26. Lambert J.D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley. 1973
27. Lapidus . Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Academic Press. 1971
28. Levy and Lessman. Finite Difference Equations. Mc Millan Company. 1961
29. Levy and Baggott. Numerical Solution of Differential Equations. Dover. 1950
30. Lectures Notes in Mathematics. Conference on the Numerical Solution of Equations Differential. Springer Verlag. 1969
31. Legras J. Resolution pratique des equations differentielles. Dunod . 1954
32. Legras . Precis d'analyse numerique. Dunod. 1963
33. Lotkin. On the Accuracy of Runge-Kuttas Method. Mathematical Tables and other aids to Computation. V. 35 July 1951
34. Milne W.E. Numerical Solution of Differential Equations . John Wiley. 1953
35. Milne W.E. Numerical Calculus. Princenton University Press. 1949
36. Mikhlin K.L. Appoximate Methods for Solution of differential and integral equations. American Elseviern Publishing. 1967
37. Mineur H. Techniques de calcul numerique. Masson. 1952
38. Murray F.J. Existence Theorems for Ordinary Differential Equations. Universit Press. 1954
39. Ortega J.M. Numerical Analysis. Academic Press. 1972
40. Organick E.I. A Fortran Primer. Addison Wesley. 1962
41. Pelletier P. Techniques numeriques appliquees au calcul scientifique. Masson 1971
42. Pennington R.H. Introductory computer methods and numerical analysis. Mc Millan Company. 1966
43. Pontriguine L. Equations differentielles ordinaires. Mir Moscú. 1969
44. Rall L.S. (Editor) . Error in Digital Computational. John Wiley. 1965
45. Ralston A. A First Course in Numerical Analysis. Mc Graw Hill. 1965

46. Ralston Wilf. Mathematical Methods for Digital Computer. John Wiley. 1967
47. Reid W.T. Ordinary Differential Equations . John Wiley. 1971
48. Richardson. An introduction to the calculus of finite differences. Van Nostran. 1954
49. Salvadori M.G. Numerical Methods in Fortran. Prentice-Hall. 1964
50. Stiefeld E.L. An introduction to numerical Mathematics. Academic Press. 1963
51. Steffensen J.F. Interpolation. Chelsea Publishing Company. 1965
52. Wilf H.S. Mathematics for the Physical Sciences. John Wiley. 1962
53. Wilkinson J.H. Rounding Errors in Algebraic Processes. Her Majesty Stationer office . 1963
54. Willers F.A. Practical Analysis. Dover. 1947



Se terminó esta Tesis Doctoral sobre  
la RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS, el día 8 de  
Noviembre de 1.973. Fué Director de  
la misma D. Antonio Castro Brczezicki.  
Autor: Miguel Sánchez López.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D. MIGUEL SANCHEZ LOPEZ

titulada "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales  
de orden n-ésimo"

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente  
cum laude

Sevilla, tres de Julio 1.978

El Vocal,

*N. Costo*

El Presidente.

*S. Sotomayor*

El Vocal,

*M. J. S.*

El Secretario.

*[Signature]*

El Vocal,

*[Signature]*

El Doctorado.

*[Signature]*



\* 5 0 1 1 2 7 2 5 4 \*