UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES DIFERENCIALES CON ARGUMENTOS DESVIADOS EN EL CAMPO COMPLEJO

Visado en Sevilla,

Mayo de 1.974

EL CATEDRATICO DIRECTOR

A. Castro

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta Manuel Heredia Zapata para optar al grado de Doctor en Ciencias, Seccion de Matemáticas.

Sevilla, Mayo de 1.974

M Heredia

Fdo.Manuel Heredia Zapata

Quiero expresar mi agradecimiento a D. Antonio de Castro por su valiosa dirección, su ayuda y su constante estímulo.

INDICE

INTRODUCCION

La teoria de las ecuaciones diferenciales con argumentos desviados es una rama relativamente reciente, pero muy rapidamente desarrollada, de la teoria de las ecuaciones diferenciales.

La primera ecuacion aislada de ese tipo apareció en 1771 en el curso de las investigaciones de Condorcet sobre unas determinadas curvas. Sin embargo, un estudio sistematico de las ecuaciones diferenciales con argumentos desviados no se ha iniciado hasta el presente siglo XX. La investigacion se intensificó extraordinariamente debido al amplio campo de aplicacion, de manera que en las dos últimas decadas se ha elaborado una teoria general casi tan completa como la de las ecuaciones diferenciales ordinarias. No obstante, hay aún grandes lagunas. En lo que respecta a soluciones analíticas y,más generalmente, a un estudio de tales ecuaciones en el campo complejo, apenas se han obtenido resultados. El primer trabajo data de 1894, Leau-(1), y consiste en un teorema de existencia para ciertas ecuaciones funcionales en el campo complejo cuya demostracion fué mejorada por su autor en 1924 (Leau-(2)). Pocos meses después Flamant en su tesis (Flamant-(1)) estudió la ecuacion

(1) $$y'(t) + a(t)y(t/_\sigma) = b(t) \quad , \quad \sigma\varepsilon C$$

insistiendo fundamentalmente en el comportamiento de las soluciones en las singularidades del termino independiente $b(t)$.

Izumi, en 1929, estudió la ecuacion lineal

(2) $$y'(t) + a(t)y(w(t)) = b(t)$$

con las consiguientes generalizaciones a la ecuacion de orden n del mismo tipo. En las hipótesis de ser $a(t)$, $w(t)$ y $b(t)$ holomorfas en una region que contenga al circulo unidad en su interior y siendo $|w(t)|<1$, $w(0) = 0$, Izumi-(1) demostró la existencia de solucion analítica en el circulo unidad abierto. Robinson-(4) y (5), a continuación, demostró que sin nuevas hipótesis para $w(t)$ no era posible mejorar esos resultados pues por ejemplo para la ecuacion

(3) $$y'(t) = a(t)y(t^2)$$

la circunferencia unidad es la frontera natural de las soluciones.

La investigacion relativa a ecuaciones diferenciales funcionales en el campo complejo ha estado mucho tiempo abandonada y solo en los últimos años ha vuelto a trabajarse en dicho campo. A pesar de la enorme cantidad de investigadores con que cuenta la teoria de ecuaciones diferenciales con argumentos desviados y de la copiosa bibliografia sobre el tema, solo unos pocos han tocado y casi de pasada en uno o dos articulos el campo complejo.Entre ellos Martinjuk, Grudo,Grimm y Abdi y todos ellos, en temas muy aislados.

En nuestro trabajo hemos intentado iniciar un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales con argumentos desviados en el campo complejo.

En los dos primeros capítulos estudiamos las ecuaciones lineales de primero y segundo orden respectivamente, obteniendo para ellas soluciones por desarrollo en serie. A pesar de los ejemplos dados por Robinson-(5), el disco unidad no es una frontera natural de las soluciones de la ecuacion (2). Por ejemplo, para la ecuacion

$$y'(t) + a(t)y(w(t)) = 0,$$

en las hipótesis de ser $a(t)$ y $w(t)$ holomorfas en el disco D de centro el origen y radio r y de verificarse en D la condición

$$|w(t)| \leq |t| \tag{4}$$

obtenemos solucion analítica en el disco D (determinada por su valor en el origen).

Nuestro teorema contiene como caso particular al de Izumi y está formulado en una forma más natural y adecuada, ya que en la formulación del teorema de Izumi, aunque se supone $w(t)$ holomorfa en una región que contiene al disco unidad siendo $w(o)=o$, la hipótesis $|w(t)|<1$ solo permite asegurar que se verificará (4) en $|t|<1$, por el Lema de Schwartz y ésta referencia implícita al disco unidad se presta a confusión: ella es la causa del papel falsamente preponderante que tiene dicho disco en los ejemplos dados por Robinson.

En el capítulo tercero estudiamos los sistemas de ecuaciones que llamamos normales, a los que se pueden reducir los sistemas y ecuaciones de ordenes superiores de forma análoga a como ocurria con las ecuaciones diferenciales ordinarias

El método utilizado en los dos primeros capítulos, válido para ecuaciones lineales, és muy útil sobre todo para ecuaciones de primero o segundo orden porque proporciona la expresión cerrada de los coeficientes de la serie solución. Sin embargo, se complica extraordinariamente para las de orden superior y es inservible para ecuaciones no lineales y, por supuesto, para sistemas. Por esa razón, en nuestro trabajo, hemos demostrado el teorema de existencia y unicidad por el método de las aproximaciones sucesivas, más apropiado e igual de potente, como se vé al tratar la prolongacion de soluciones.

En el capítulo IV hemos hecho un estudio detallado del problema de valores iniciales. Hay que hacer notar el hecho de que en el campo complejo el tratamiento de dicho problema difiere notablemente del caso real. Una condición inicial consistente en dar los valores de la solución en un intervalo ya no és adecuada al pasar al campo complejo, donde una función analítica queda determinada por sus valores en un compacto. Se observará el paralelo existente con las ecuaciones diferenciales ordinarias, pues en el campo complejo, apesar de los desvios, el problema de valores iniciales se plantea en un punto y no en un intervalo. No obstante se presentan diferencias importantes, la más interesante de las cuales es que el wronskiano de un sistema fundamental puede anularse y sus ceros son puntos en que, en general, no tiene solución el problema de valores iniciales.

Hemos terminado el trabajo con un estudio del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones lineales de primero y segundo orden en las singularidades aisladas de los coeficientes, estudio que constituye el capítulo V.

CAPITULO I

1. INTRODUCCION.

Si consideramos simultaneamente las dos ecuaciones

(1) $$y'(t) + ay(t) + by(t-w) = 0$$

y

(2) $$y'(t) + ay(t) + by(kt-w) = 0$$

en las que a, b, k y w son constantes, en general complejas, ambas son aparentemente de la misma forma. Hay entre ellas, sin embargo, una seria diferencia.

Si se sustituye una serie de potencias en (1) y se procede por el metodo de los coeficientes indeterminados, no se puede determinar dicha serie debido a que en cada una de las ecuaciones resultantes aparecen como incognitas todos los coeficientes de la serie.

Por ejemplo, desarrollando en el origen, esto es, buscando una solución de la forma

$$(3) \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

siendo
$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n,$$

$$y(t-w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$$

donde
$$d_n = \frac{1}{n!}y^{n)}(-w) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}\sum_{j=0} (-1)^j c_j t^j\right]_{t=w}$$

resultan, al sustituir (3) en (1), las ecuaciones

$$(n+1)c_{n+1} + ac_n + bd_n = 0, \qquad n=0,1,2,...$$

las cuales no permiten en absoluto obtener las c_n.

Para la ecuación (2), en cambio, no sucede igual, ya que existe un punto $t_1 = \frac{w}{k-1}$ tal que $kt_1 - w = t_1$. Entonces, si se desarrolla en un entorno de t_1, sí que pueden obtenerse los coeficientes de la serie fijando arbitrariamente el primero, el termino independiente, como se verá más adelante.

Ambas ecuaciones (1) y (2) son casos particulares de esta otra mas general:

$$(4) \qquad y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(w(t)) = 0$$

que será la que estudiemos en el presente capitulo.

La función $w(t)$, llamada "desvío", era en las dos ecuaciones caso particular de un tipo muy simple y a la vez muy importante: aquel desvio que es el mas general que es una funcion biunivoca, o sea la funcion bilineal

$$(5) \qquad w(t) = \frac{pt+q}{rt+s} \qquad \text{con } p,\ q,\ r \text{ y } s \text{ complejos.}$$

De ahí la analogia entre ambas ecuaciones. La diferencia entre ambas estriba en que el desvio que aparece en (1) es la forma a que se reduce (5), cuando la transformación que representa tiene un punto doble unico, por uncambio de variable homográfico que transforme dicho punto en el del infinito, mientras que el desvio que aparece en (2) tiene dos puntos dobles distintos; uno es t_1 y otro el punto del infinito.

De hecho, cuando el desvio es una función de la forma (5) y tiene dos puntos dobles distintos, puede la ecuación (4) reducirse a una de la forma

$$(6) \qquad y'(t)+a(t)y(t)+b(t)y(kt) = 0, \qquad k\varepsilon C,$$

por un cambio de variable que envie uno de los puntos fijos al origen y el otro al infinito.

En efecto, sean t_1 y t_2 los puntos fijos de la transformación bilineal definida por (5). Hagamos el cambio de variable definido por $u = h(t)$ siendo h la flecha

$$t \longrightarrow h(t) = \frac{\lambda(t-t_1)}{t-t_2}$$

Es claro que si ponemos $W = h_\circ w_\circ h^{-1}$, los puntos dobles de $W(u)$

son el origen y el infinito, luego para algún k es $W(u) = ku$, ya que W sigue siendo una funcion bilineal.

Puesto que $w = h^{-1} \circ W \circ h$, poniendo $Y = y \circ h^{-1}$ resulta

$$y \circ w = Y \circ W \circ h$$

con lo que $y(t)$ se escribe como $Y(u)$, $y(w(t))$ se escribe $Y(ku)$.

Y siendo $(h^{-1})'(u) = \dfrac{\lambda(t_1 - t_2)}{(u - \lambda)^2}$

basta poner

$$A = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{(u - \lambda)^2}(a \circ h^{-1}), \quad B = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{(u - \lambda)^2}(b \circ h^{-1})$$

para que la ecuación (4) se escriba

(6') $\qquad Y'(u) + A(u)Y(u) + B(u)Y(ku) = 0$

Por consiguiente, se hace muy interesante el estudio de la ecuación (6).

Por otra parte se debe considerar el caso en que, siendo el desvio una función bilineal, tiene sus dos puntos fijos confundidos en uno. En ese caso hemos visto que no es viable el método de sustitución de un desarrollo en serie.Notemos sin embargo, que con el cambio $t = \log x$ se reducirá la ecuación

(7) $\qquad y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t-c) = 0 \qquad c \in C$

a una de la forma (6). Debe tenerse presente que entonces se presentan algunos problemas porque (6) y (7) no son del todo equivalentes.

Por ejemplo, si se tiene una ecuación de coeficientes constantes, como (1), con el cambio $t = \log x$ se convierte en una ecuación del tipo (6) en que los coeficientes $a(x)$ y $b(x)$ tienen polos de primer orden en el origen.

Antes de pasar a estudiar la ecuación (6), notemos que la constante k que aparece en el desvio ku, no es otra que el valor de la derivada de la transformacion bilineal (5) en el punto fijo t_1 que ha sido transformado en el origen. En efecto, siendo $ku = W(u) = h \circ w \circ h^{-1}(u)$;

$$k = W'(u) = W'(0) = h'(t_1)w'(t_1)(h^{-1})'(0) = w'(t_1)$$

ya que $h'(t_1) = \dfrac{1}{(h^{-1})'(0)}$.

Además observemos que, siendo t_1 y t_2 los puntos fijos de $w(t)$, si son distintos, es $w'(t_1) = \dfrac{1}{w'(t_2)}$ y si fuese $t_1=t_2$ entonces $w'(t_1) = 1$.

Así pués, se puede conseguir que en (6) sea $|k|<1$ eligiendo convenientemente el punto fijo que se tomará como origen supuesto que no sea $|w'(t_1)|=|w'(t_2)|= 1$. Si eso ocurre, eligiendo cualquiera de los puntos fijos como origen, será $|k| = 1$, y el desvio será un giro.

Dejaremos por ahora el caso de los dos puntos fijos confundidos en uno y estudiaremos la ecuación (6)con $|k|\leq 1$, en el siguiente paragrafo, para a continuación estudiar la ecuacion más general (4).

2. UNA ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN CON DESVIO DE LA FORMA Kt

Consideremos la ecuacion (6) en la que supondremos $|k|\leq 1$.

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(kt) = 0$$

Sean $a(t)$ y $b(t)$ funciones que admiten en un entorno del origen los desarrollos

$$a(t)=\sum_{n\geq 0} a_n t^n \qquad b(t)=\sum_{n\geq 0} b_n t^n$$

de radios de convergencia r_a y r_b respectivamente.

PROPOSICION 1.

La serie $\sum_{n\geq o} c_n t^n$, en la que se puede elegir arbitrariamente c_o y ,conocidos c_o, c_1,...c_n, es

$$c_{n+1}=\frac{-1}{n+1}\sum_{i+j=n}(a_i+b_i k^j)c_j \qquad \text{para } n\geq 0,$$

tiene un radio de convergencia $r_o\geq\min(r_a,r_b)$ y proporciona la única solución analítica de (6) que en el origen toma el valor c_o.

Demostración:

$\forall$ $r<\min(r_a,r_b)$ las series $\sum_{n=o}^{\infty}|a_n|r^n$ y $\sum_{n=o}^{\infty}|b_n|r^n$ son convergentes.Por consiguiente existe una constante real M_1 tal que

$$\left.\begin{aligned}|a_n|r^n &< M_1\\ |b_n|r^n &< M_1\end{aligned}\right\} \quad \text{para cualquier n natural.}$$

Mas aún, $\forall$ 0, existe un número natural N tal que

$$\left.\begin{array}{l} |a_n|r^n < \varepsilon \\ |b_n|r^n < \varepsilon \end{array}\right. \qquad \text{para } n \geq N.$$

Demostraremos que $r_o \geq r$ encontrando un M tal que $\forall$ n sea

$$|c_n|r^n \leq M$$

Si se ha tomado $\varepsilon < 1/2r$ basta poner

$$M = \max_{o \leq i \leq n_o} |c_i|r^i$$

donde n_o es cualquier numero natural tal que sea

$$n_o > N, \qquad n_o > \frac{2Nr(M_1 - \varepsilon) - 1}{1 - 2\varepsilon r}$$

En efecto, si es $n \geq n_o$, supuesto que se verifica $|c_j|r^j \leq M$ para $j \leq n$, entonces tambien $|c_{n+1}|r^{N+1} \leq M$:

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i+j=n} |a_i + b_i k^j|\,|c_j| = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |a_{n-j} + b_{n-j} k^j|\,|c_j| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n-N-1} (|a_{n-j}| + |b_{n-j}|\,|k|^j)\,|c_j| + \sum_{j=n-N}^{n} (|a_{n-j}| + |b_{n-j}|\,|k|^j)|c_j|\right] <$$

$$< \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n-N-1} \left(\frac{\varepsilon}{r^{n-j}} + |k|^j \frac{\varepsilon}{r^{n-j}}\right)\frac{M}{r^j} + \sum_{j=n-N}^{n} \left(\frac{M_1}{r^{n-j}} + |k|^j \frac{M_1}{r^{n-j}}\right)\frac{M}{r^j}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\,\frac{2M}{r^n}(\varepsilon(n-N) + NM_1)$$

ya que $|k| \leq 1$; y por ser $n \geq n_o$, habida cuenta de la eleccion de n_o, resulta

$$2(\varepsilon(n-N) + NM_1) < \frac{n+1}{r}$$

luego $|c_{n+1}|\, r^{n+1} \leq M$.

Esto completa la demostración de la primera parte de la proposición. Demostrar la segunda parte es immediato: si la serie (3) satisface a la ecuación (6), sus coeficientes deben satisfacer las relaciones siguientes,

$$(n+1)c_{n+1} = \sum_{i+j=n} a_i c_j + \sum_{i+j=n}$$

$$(n+1)c_{n+1} + \sum_{i+j=n} a^i c_j + \sum_{i=j=n} b_i c_j k^j = 0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Corolario 1.

i) La única solución analítica de (6) que se anula en el origen es la identicamente nula.

ii) Dos soluciones analiticas de (6) no identicamente nulas se obtienen una de otra multiplicando por una constante y por ello tienen los mismos ceros.

Demostración:

i) es trivial.

ii) si $h(t)$ representa la solucion que se obtiene para $c_o=1$, o sea, $h(0)=1$, la solucion $y(t)$ tal que $y(0)=c_o$ es $y(t)=c_o h(t)$.

Corolario 2.

Si t_o es un punto tal que $|t_o|<\min(r_a,r_b)$ y t_o no es un cero de las soluciones analiticas de (6) no identicamente nulas, entonces, dado $c_o \in C$, existe una única solucion analitica de (6) tal que $y(t_o)=c_o$.

En efecto, es $y(t)= c_o h(t)/h(t_o)$.

Notas :

1) El hecho de ser $|k|\leq 1$ juega un papel fundamental. Por ejemplo, consideremos la ecuacion de coeficientes constantes (2), que como ya sabemos puede escribirse en la forma

$$y'(t) + ay(t)+ by(kt) = 0$$

mediante un cambio que haya mantenido fijo el punto del infinito y haya enviado el punto $w/(k-1)$ al origen.

La serie formal que verifica la ecuacion es una serie de la forma (3) donde

$$c_n = (-1)^n \frac{c_0(a+b)(a+kb)\cdots(a+k^{n-1}b)}{n!}$$

Evidentemente, si $|k|\leq 1$, la serie $\Sigma\, c_n t^n$ tiene radio de convergencia ∞, pero si $|k|>1$ tiene radio cero.

2) Debido al desvio, en general no se tienen soluciones exponenciales. Por ejemplo, para la ecuacion

$$y'(t) = ay(kt)$$

no se pueden determinar soluciones de la forma $y(t) = e^{rt}$. Sin embargo, dichas soluciones sí existen para ecuaciones, como (1), con un desvio de la forma $t-c$.

3) Si $a(t) \equiv 0$ y $b(t)$ tiene solo singularidades aisladas, siendo siempre regular en el origen, la solucion puede prolongarse analiticamente fuera del disco $|t|<r_b$ siempre que $|k|<1$. En efecto tomando un punto sobre la circunferencia $|t|=r_b$, sea t_1, en que sea $b(t)$ regular, se tiene:

$$y'(t) = -b(t)y(kt)$$

que es conocido en un entorno de t_1, ya que $|kt|<|t|$. La solucion no tiene en este caso otras singularidades que las de la forma t_s/k^n, $n=0,1,2,\ldots$, siendo t_s punto singular de $b(t)$.

3. LA ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES Y DESVIOS ANALITICOS

Consideremos nuevamente la ecuacion

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(w(t)) = 0$$

a la que nos seguiremos refiriendo como ecuacion (4).
Ya en el caso de ser $w(t)$ una funcion bilineal hemos visto el papel fundamental que juegan los puntos fijos de la sustitucion $(t, w(t))$. En lo que sigue, supondremos que el origen lo es, o sea $w(0)=0$.

PROPOSICION 2.

Si $a(t)$, $b(t)$ y $w(t)$ admiten desarrollos en serie convergentes en un entorno del origen, siendo $w(0)=0$, entonces, fijado arbitrariamente c_o, se pueden determinar sucesivamente los coeficientes de una serie formal (3) que satisface (4).

PROPOSICION 3.

Si en la region $|t|<r_1$ son analiticas $a(t)$, $b(t)$ y $w(t)$, verificandose además para $w(t)$ la condicion

$$|w(t)| \leq |t|$$

en dicha region, entonces la serie obtenida en la proposicion 2 tiene un radio de convergencia $r_o \geq r_1$ y es por tanto la única solucion de (4) analitica en $|t|<r_1$ y tomando en el origen el valor c_o.

Demostracion de la proposicion 2:

Sean $a(t)=\sum_{n\geq o} a_n t^n$, $b(t)=\sum_{n\geq o} b_n t^n$, $w(t)=\sum_{n\geq 1} w_{1n} t^n$.

Pongamos

$$(w(t))^h=\sum_{n\geq h} w_{hn} t^n \qquad \text{para } h\geq 1.$$

Llamando $y(t)$ a la serie formal $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ de la que se pretende determinar los coeficientes,

$$\begin{aligned} y(w(t)) = c_o &+ c_1(w_{11}t+w_{12}t^2+w_{13}t^3+\dots\dots)+\\ &+c_2(w_{22}t^2+w_{23}t^3+\dots\dots)+\\ &+c_3(w_{33}t^3+\dots\dots)+\dots\\ &+\dots\dots \qquad = \end{aligned}$$

$$=c_o+c_1w_{11}t+(c_1w_{12}+c_2w_{22})t^2+\dots\dots =$$

$$=c_o+\sum_{n\geq 1} t^n\left(\sum_{j=1}^{n} c_j w_{jn}\right)$$

Sustituyendo en (4) resulta, identificando coeficientes en ambos miembros de la ecuacion, el sistema

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} c_1+(a_o+b_o)=0\\ 2c_2+c_1(a_o+b_ow_{11})+c_o(a_1+b_1)=0\\ 3c_3+c_2(a_o+b_ow_{22})+c_1(a_1+b_ow_{12}+b_1w_{11})+c_o(a_2+b_2)=0\\ \text{-----------------------------------}\\ (n+1)c_{n+1}+c_n(a_o+b_ow_{nn})+\dots+c_{n-j}(a_j+b_ow_{n-j,n}+\\ \quad +b_1w_{n-j,n-1}+\dots+b_jw_{n-j,n-j})+\dots\dots+c_0(a_n+b_n)=0\\ \text{-----------------------------------} \end{array}\right.$$

y efectivamente, fijado c_o, se pueden despejar sucesivamente los c_n. Conocidos $c_o, c_1,\dots c_n$, es

$$c_{n+1} = \frac{-1}{n+1}\, p_n(c_o, c_1,\dots\dots c_n)$$

Antes de demostrar la proposicion 3 vamos a obtener una expresion cerrada de c_n, para $n\geq 1$, que nos será de utilidad.

Si consideramos separadamente las n+1 primeras ecuaciones del sistema (8) vemos que forman un sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incognitas, que son $c_1, c_2, .. c_{n+1}$, una vez que se dé un valor arbitrario a c_o. La matriz del sistema es triangular, y su determinante es (n+1)!. Despejando c_{n+1} resulta:

$$c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & (a_o+b_o)c_o \\ a_o+b_o w_{11} & 2 & 0 & \ldots & (a_1+b_1)c_o \\ a_1+b_o w_{12}+b_1 w_{11} & a_o+b_o w_{22} & 3 & \ldots & (a_2+b_2)c_o \\ \multicolumn{5}{c}{-----------------------} \\ (a_{n-1}+b_o w_{1n}+..b_{n-1}w_{11}) & \ldots & & & (a_n+b_n)c_o \end{vmatrix}$$

Introduciremos dentro del determinante el factor 1/(n+1)!, dividiendola segunda fila por 2, la tercera por 3 y así sucesivamente hasta la última fila,que quedará dividida por n+1. Pasando, además, la última columna al primer lugar y sacando fuera el factor c_o resulta:

$$(9)\quad c_{n+1}=c_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_o+b_o & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a_1+b_1}{2} & \frac{a_o+b_o w_{11}}{2} & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{a_2+b_2}{3} & \frac{a_1+b_o w_{12}+b_1 w_{11}}{3} & \frac{a_o+b_o w_{22}}{3} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{-----------------------} \\ \frac{a_n+b_n}{n+1} & \frac{a_{n-1}+b_o w_{1n}+..b_{n-1}w_{11}}{n+1} & \ldots\ldots & & \frac{a_o+b_o w_{nn}}{n+1} \end{vmatrix}$$

Daremos tambien los siguientes lemas:

Lema 1.- Sea $\{\Delta_n\}$ una sucesion de determinantes de la forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

donde son nulos los elementos por encima de la diagonal de 1.

Si representamos por M_j el maximo de los valores absolutos de los elementos de la fila j-ésima salvo el 1,entonces

(10) $$|\Delta_n| \leq (1+M_1)(1+M_2)\dots(1+M_{n-1})M_n$$

donde naturalmente $|\Delta_n|$ representa el valor absoluto del determinante Δ_n.

Demostracion:

Por induccion; se verifica $|\Delta_2| \leq M_2(M_1+1)$,además,supuesto cierto (10) para determinantes de orden n y de la forma Δ_n, para todo n menor o igual que k,se tiene para

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 1 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

$$|\Delta_{k+1}| \leq |a_{k+1,k+1}| \text{val.abs.} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \\ \multicolumn{3}{c}{------------} & 1 \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{vmatrix} +$$

$$+\text{val.abs.} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \ldots & & \\ a_{21} & a_{22} & 1 \ldots & & \\ \multicolumn{5}{c}{--------------------} \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots\ldots a_{k-1,k-1} & & 1 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots\ldots a_{k+1,k-1} & & a_{k+1,k} \end{vmatrix} \leq$$

$$\leq M_{k+1}(1+M_1)(1+M_2)\ldots(1+M_{k-1})M_k+(1+M_1)(1+M_2)\ldots(1+M_{k-1})M_{k+1}=$$

$$= (1+M_1)(1+M_2)\ldots(1+M_k)M_{k+1}$$

<u>Lema 2.-</u> Con las mismas notaciones del Lema 1, si $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = 0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta_n|} \leq 1$$

Demostracion:

Por ser $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = 0$, la sucesion de medias geometricas de $(1+M_j)$ converge a 1(notese que los M_j son positivos)y por ser

$$\sqrt[n]{(1+M_1)\ldots\ldots(1+M_{n-1})M_n} < \sqrt[n]{(1+M_1)\ldots\ldots(1+M_{n-1})(1+M_n)}$$

basta aplicar el Lema 1.

<u>Lema 3.-</u> Sea $w(t)$ analítica en el disco $|t|<r_1$,verificando

$$|w(t)|<r_1$$

en dicho disco, y siendo $w(0)=0$. Si se pone

$$(w(t))^h = \sum_{n\geq h} w_{hn} t^n \qquad \text{para } h\geq 1,$$

se verifica $\forall h\geq 1$, $\forall n\geq h$,

$$|w_{hn}| \leq \frac{1}{r^{n-h}} \qquad \text{para todo } r<r_1.$$

Demostracion:

Por el Lema de Schwarz sigue que $|w(t)|\leq|t|$ en el disco $|t|<r_1$ y que solo se verifica la igualdad si $w(t)=kt$, para algún k, con $|k|=1$.

La funcion $f(t) = (w(t))^h$ tambien es analítica en $|t|<r_1$. Si se pone

$$M_h(r) = \sup_{|t|=r} |(w(t))^h|$$

resulta, aplicando las desigualdades de Cauchy a $f(t)$,

$$|w_{hn}|r^n \leq M_h(r) \quad \forall r,\ 0\leq r<r_1,$$

para cualesquiera n y h, con $n\geq h\geq 1$.

Para $|t|=r<r_1$, será $|w(t)|\leq|t|=r$, de donde

$$M_h(r) \leq r^h$$

y sigue el lema.

Demostracion de la proposicion 3:

Sea $r < r_1$

En (9), multipliquemos la primera fila del determinante por r, la segunda por r^2, y así sucesivamente hasta multiplicar la última por r^{n+1}.

Si a continuacion dividimos la segunda columna por r, la tercera por r^2, y así hasta dividir la última, esto es, la $n+1$-ésima por r^n, resulta:

$$
(11)\quad c_{n+1}r^{n+1}=(-1)^{n+1}c_0\begin{vmatrix}
(a_o+b_o)r & 1 & 0 \;\cdots & 0\\
\dfrac{(a_1+b_1)}{2}r^2 & \dfrac{(a_o+b_ow_{11})}{2}r & 1 \;\cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{(a_{j-1}+b_{j-1})}{j}r^j & \left(\dfrac{a_{j-2}+b_ow_{1,j-1}+\dots+b_{j-2}w_{11}}{j}\right)r^{j-1} & \cdots\cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{(a_n+b_n)}{n+1}r^{n+1} & \left(\dfrac{a_{n-1}+b_ow_{1n}+\dots+b_{n-1}w_{11}}{n+1}\right)r^n & \cdots\cdots & \left(\dfrac{a_o+b_ow_{nn}}{n+1}\right)r
\end{vmatrix}
$$

Representando por M_j el maximo del valor absoluto de los elementos de la fila j-ésima salvo el 1, si probamos que M_j tiende a cero cuando j tiende a infinito, aplicando el Lema 2 resultará:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\leq\frac{1}{r}$$

de donde sigue que el radio de convergencia de la serie (3) es mayor o igual que r. Puesto que r es cualquier número real menor que r_1, sigue que será $r_o\geq r_1$.

Todo se reduce, por tanto, a probar que $M_n\to 0$, para $n\to\infty$. Los elementos de la fila n+1-ésima del determinante de (11) son de la forma:

$$(12)\qquad \left(\frac{a_s+\sum_{i=o}^{s}b_iw_{n-s,n-i}}{n+1}\right)r^{s+1}\quad,\ \text{para } s=0,1,\dots,n,$$

donde se han introducido los números $w_{oo}=1$, $w_{oi}=0$ $\forall i$, para que el elemento de la primera columna también se escriba en esa forma correspondiendo a s=n.

Por ser $r<r_1$, existe una constante M tal que:

$$(13)\qquad \text{para todo } n \text{ es}\quad \begin{array}{l}|a_n|r^n\leq M\\ |b_n|r^n\leq M\end{array}$$

ademas, $\forall\varepsilon>0$ existe un N_1 tal que

(14) para $n>N_1$ es
$$|a_n|r^n < \varepsilon$$
$$|b_n|r^n < \varepsilon$$

Tambien se verifica:

(15) para $n\geq h\geq 1$ $\quad |w_{hn}| \leq \dfrac{1}{r^{n-h}}$.

por el Lema 3.

Tomemos un número entero n_o mayor que N_1 y tal que
$$\frac{(N_1+2)Mr}{n_o+1} < \varepsilon$$

Entonces, para cualquier $n>n_o$, los elementos de la fila n+1-sima de la forma (12), verifican las siguientes acotaciones en valor absoluto:

Para $0 \leq s \leq N_1$:
$$\left|\left(\frac{a_s+\sum_{i=0}^{s} b_i w_{n-s,n-i}}{n+1}\right)r^{s+1}\right| \leq \left(\frac{|a_s|+\sum_{i=0}^{s}|b_i||w_{n-s,n-i}|}{n+1}\right)r^{s+1} \leq$$
$$\leq \frac{|a_s|r^{s+1}+\sum_{i=0}^{s}|b_i|r^{s-1-(s-i)}}{n+1} \leq \frac{(s+2)Mr}{n+1} < \varepsilon$$

a causa de la eleccion de n_o y habiendo aplicando (13) y (15).

Para $N_1 < s < n$:
$$\left|\left(\frac{a_s+\sum_{i=0}^{s} b_i w_{n-s,n-i}}{n+1}\right)r^{s+1}\right| \leq \frac{|a_s|r^{s+1}+\sum_{i=0}^{N_1}|b_i|r^{i+1}+\sum_{i=N_1+1}^{s}|b_i|r^{i+1}}{n+1} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon r+(N_1+1)Mr+(s-N_1)\varepsilon r}{n+1} = \frac{(N_1+1)Mr}{n+1} + \frac{\varepsilon r(s+1-N_1)}{n+1} < \varepsilon(1+r)$$

por (13), (14) y (15), por la eleccion de n_o y por ser
$$\frac{s+1-N_1}{n+1} < 1 .$$

Por último, para s=n:

$$\left|\frac{a_n+b_n}{n+1} r^{n+1}\right| < \frac{2\varepsilon r}{n+1} < \varepsilon$$

Así pues,

$$|M_j| < (1+r)\varepsilon, \text{ para } j < n_o,$$

y puesto que $\forall\varepsilon>0$ se puede elegir el n_o conveniente como antes, resulta $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = 0$, c.q.d.

Notas :

1) Los corolarios 1 y 2 de la proposicion 1 del paragrafo anterior se extienden trivialmente refiriendose a la ecuacion (4) en lugar de a la (6) y, por supuesto, en las hipotesis de la proposicion 3. En el corolario 2 deberá sustituirse $\min(r_a,r_b)$ por r_1.

2) Nótese que de (9) se deduce que si a(t) y -b(t) son iguales hasta el orden n, esto es, $a_j+b_j=0$ para $j=o,1,..(n-1)$,con $a_n+b_n\neq 0$, entonces la derivada de las soluciones analiticas tiene en el origen un cero de al menos orden n, pues $c_1=c_2=...=c_n$.

3) La expresion (9) contiene como casos particulares la expresion de los coeficientes de la ecuacion (6) y de la de coeficientes constantes que aparece en la nota 1 posterior a la proposicion 1.

CAPITULO II

1. LA ECUACION LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES Y DESVIOS ANALITICOS.

Pasemos a estudiar ahora una ecuacion lineal de segundo orden con argumentos desviados de la forma

$$y''(t) + a(t)y'(v(t)) + b(t)y(w(t)) = 0 \tag{1}$$

y veremos que se pueden obtener para ella resultados analogos a los conseguidos para la ecuacion de primer orden estudiada en el capitulo anterior.

PROPOSICION 4.

Supongamos que $a(t)$ y $b(t)$ son funciones analíticas en el disco $|t|<\rho$, con desarrollos

(2) $$a(t) = \sum_{n\geq o} a_n t^n, \quad b(t) = \sum_{n\geq o} b_n t^n$$

y que los desvios $v(t)$ y $w(t)$ son igualmente funciones analíticas en dicho disco con desarrollos

(3) $$v(t) = \sum_{n\geq 1} v_{1n} t^n, \quad w(t) = \sum_{n\geq 1} w_{1n} t^n.$$

Se verifica:

i) fijados arbitrariamente los dos números complejos c_o y c_1, quedan determinados por recurrencia los restantes coeficientes c_n, $n\geq 2$, de una serie formal

(4) $$\sum_{n\geq o} c_n t^n$$

que satisface (1).

ii) si $v(t)$ y $w(t)$ verifican, en el disco $|t|<\rho$, las acotaciones $|v(t)|<\rho$, $|w(t)|<\rho$, entonces la serie (4) tiene un radio de convergencia mayor o igual que ρ, representando, por tanto, la única solucion analitica en el disco $|t|<\rho$ de la ecuacion (1) correspondiente a las condiciones iniciales

$$y(0) = c_o$$
$$y'(0) = c_1.$$

Demostracion:

i) En primer lugar, las potencias sucesivas de $v(t)$ y $w(t)$ admiten desarrollos que denotaremos:

$$(v(t))^h = \sum_{n\geq h} v_{hn} t^n \qquad \text{para } h \geq 1.$$
$$(w(t))^h = \sum_{n\geq h} w_{hn} t^n$$

Operando formalmente con la serie (4), a la que representaremos por $y(t)$, se tiene:

$$y(w(t)) = c_o + c_1(w_{11}t+w_{12}t^2+\ldots\ldots)+ \\ + c_2(w_{22}t^2+\ldots\ldots)+ \\ \text{-----------} =$$

$$= c_o+c_1w_{11}t+\ldots+(c_1w_{1n}+c_2w_{2n}+\ldots+c_nw_{nn})t^n+\ldots\ldots =$$

$$= c_o + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j w_{jn} \right) t^n.$$

$$y'(v(t)) = c_1 +2c_2(v_{11}t+v_{12}t^2+\ldots\ldots) + \\ +3c_3(v_{22}t^2+\ldots\ldots) + \\ \text{-----------} =$$

$$= c_1 +2c_2v_{11}t +\ldots(2c_2v_{1n}+\ldots+(n+1)c_{n+1}v_{nn})t^n+\ldots=$$

$$= c_1 + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} (j+1)c_{j+1}v_{jn} \right) t^n.$$

$$a(t)y'(v(t)) = a_oc_1+(a_1c_1+2a_ov_{11}c_2)t+\ldots\ldots+ \\ +t^n(a_nc_1+a_{n-1}(2c_2v_{11})+\ldots \\ \text{-----------} \\ \ldots+a_s\left(\sum_{j=1}^{n-s} (j+1)c_{j+1}v_{j,n-s}\right)+\ldots \\ \text{-----------} \\ \ldots+a_o \sum_{j=1}^{n} (j+1)c_{j+1}v_{jn}) + \ldots\ldots$$

$$b(t)y(w(t)) = b_o c_o + (b_1 c_o + b_o \dot{w}_{11} c_1)t + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + t^n (b_n c_o + b_{n-1} c_1 w_{11} +$$

$$\text{-------}$$

$$+ b_s \sum_{j=1}^{n-s} c_j w_{j,n-s} +$$

$$\text{-------}$$

$$+ b_o \sum_{j=1}^{n} c_j w_{jn}\ ) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sustituyendo en (1) resulta, igualando coeficientes, el sistema:

$$(5)\quad \begin{cases} 2c_2 + a_o c_1 + b_o c_o = 0 \\ 6c_3 + 2a_o v_{11} c_2 + (a_1 + b_o w_{11})c_1 + b_2 c_o = 0 \\ \text{------------------------------} \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)a_o v_{nn} c_{n+1} + \ldots\ldots + c_j\Big(j \sum\limits_{s=j-1}^{n} v_{j-1,s} a_{n-s} + \\ \qquad + \sum\limits_{s=j}^{n} w_{js} b_{n-s}\Big) + \ldots\ldots + c_1 \Big(a_n + \sum\limits_{j=1}^{n} w_{ij} b_{n-j}\Big) + b_n c_o = 0 \\ \text{------------------------------} \end{cases}$$

que permite, fijados c_o y c_1, determinar los restantes coeficientes c_n para $n \geq 2$.

El sistema (5) se puede escribir tambien:

$$(6)\quad \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{2}(a_o c_1 + b_o c_o) \\ \frac{2a_o v_{11}}{6} c_2 + c_3 = -\frac{1}{6}(c_1(a_1 + b_o w_{11}) + b_1 c_o) \\ \text{-----------------------------------} \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big(2 \sum\limits_{s=1}^{n} v_{1s} a_{n-s} + \sum\limits_{s=2}^{n} w_{2s} b_{n-s}\Big)c_2 + \ldots + c_{n+2} = -\frac{(c_1(\ldots) + b_n c_o)}{(n+1)(n+2)} \\ \text{-----------------------------------} \end{cases}$$

y de la misma forma que en el capitulo anterior se obtiene la siguiente expresion cerrada para los coeficientes:

$$(7)\ c_{n+2} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a_o c_1 + b_o c_o) & 1 & 0 \dots & 0 \\ \frac{1}{6}(c_1(a_1 + b_o w_{11}) + b_1 c_o) & \frac{2}{6} a_o v_{11} & 1 \dots & 0 \\ \hdashline \frac{c_1 (a_n + \sum_{j=1}^{n} w_{1j} b_{n-j}) + b_n c_o}{(n+1)(n+2)} & \dots\dots\dots & \dots\dots & \frac{(n+1) a_o v_{nn}}{(n+1)(n+2)} \end{vmatrix}$$

ii) Para demostrar la segunda parte de la proposicion seguiremos la misma linea que en la demostracion de la proposicion 3(I-3, pag. 15 a 18).

Para cualquier r tal que $r<\rho$, multipliquemos los dos miembros de (7) por r^{n+1} utilizando el mismo artificio que en la página 15 y obtendremos:

$$(8)\ c_{n+2} r^{n+1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a_o c_1 + b_o c_o) r & 1 & \\ \hdashline \frac{c_1 (a_n + \sum_{j=1}^{n} w_{1j} b_{n-j}) + b_n c_o}{(n+1)(n+2)} r^{n+1} & \dots\dots & \frac{(n+1) a_o v_{nn}}{(n+1)(n+2)} r \end{vmatrix}$$

En este determinante, el elemento de la fila (n+1)-ésima y la columna j-ésima es, para j= 2, 3, ...(n+1):

$$(9)\quad A_{n+1,j}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(j\sum_{s=j-1}^{n} v_{j-1,s}a_{n-s}+\sum_{s=j}^{n} w_{js}b_{n-s}\right)r^{n-j+2}$$

donde se conviene que para $j=n+1$ es $\sum_{s=n+1}^{n} =0$.

Por último, el elemento de la primera columna es:

$$A_{n+1,1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(c_1\left(a_n+\sum_{s=1}^{n} w_{1s}b_{n-s}\right)+b_nc_o\right)r^{n+1}.$$

Entonces, por el Lema 2 (I-3), basta demostrar que, fijado $\varepsilon>0$, para n suficientemente grande es

$$|A_{n+1,j}|<\varepsilon \qquad \text{para } j=1,2,\ldots(n+1).$$

En primer lugar, por ser $r<\rho$, existe una constante M tal que

$$(10)\qquad \begin{array}{l} |a_n|r^n < M \\ |b_n|r^n < M \end{array} \qquad \text{para todo n natural.}$$

Además, $\forall\varepsilon>0$, existe un número natural N_1 tal que

$$(11)\qquad \begin{array}{l} |a_n|r^n < \varepsilon \\ |b_n|r^n < \varepsilon \end{array} \qquad \text{para } n > N_1.$$

Puesto que $r > \rho$, resulta por el Lema 3 (I-3, pag. 14):

$$(12)\qquad \begin{array}{l} |v_{hn}| \leq \dfrac{1}{r^{n-h}} \\ |w_{hn}| \leq \dfrac{1}{r^{n-h}} \end{array} \qquad \text{para } n \geq h \geq 1.$$

Sea n_o un número natural tal que

$$(13)\qquad n_o > N_1+3$$

$$(14)\qquad \frac{(n_o+1+r)(N_1+2)Mr}{(n_o+1)(n_o+2)} < \varepsilon \qquad \text{para } n \geq n_o.$$

Entonces, para $n > n_o$, veremos que

$$|A_{n+1,j}| < \varepsilon(1+r)$$

para $j = 1, 2, \ldots (n+1)$.

Para $j=1$, resulta de (10) y (12):

$$|A_{n+1,1}| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}(|c_1|Mr(n+1)+|c_o|Mr)$$

pero no hay inconveniente en suponer que se ha elegido N_1 mayor que los tres números $|c_o|, |c_1|$, y r, con lo que

$$(n+1)|c_1|+|c_o| < (n+1)N_1+(n+1)=(n+1)(N_1+1)$$

y resulta

$$|A_{n+1,1}| < \varepsilon$$

por (14).

Escribamos ahora (9) en la forma:

$$A_{n+1,j}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(j\sum_{i=o}^{n+1-j} a_i v_{j-1,n-i}+\sum_{i=o}^{n-j} b_i w_{j,n-i})r^{n-j+2}.$$

Por (12) es

$$|A_{n+1,j}|\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}(j\sum_{i=o}^{n+1-j}|a_i|r^{i+1}+\sum_{i=o}^{n-j}|b_i|r^{i+2}).$$

Para $n+1 \geq j \geq n-N_1$, se tiene:

$$|A_{n+1,j}| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}(j(n+2-j)Mr+(n+1-j)Mr^2) \leq$$
$$\leq \frac{(n+1)(N_1+2)Mr+(N_1+1)Mr^2}{(n+1)(n+2)},$$

y por (14) resulta

$$|A_{n+1,j}| < \varepsilon.$$

Por último, para $n-N_1-1 \geq j \geq 2$:

$$|A_{n+1,j}| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(j\sum_{i=0}^{N_1}|a_i|r^{i+1}+j\sum_{i=N_1+1}^{n+1-j} + \sum_{i=o}^{N_1}|b_i|r^{i+2}+\sum_{i=N_1+1}^{n-j}\right)\leq$$

$$\leq \frac{(n-1-N_1)(N_1+1)Mr+(n-1-N_1)^2\varepsilon r+(N_1+1)Mr^2+(n-2-N_1)\varepsilon r^2}{(n+1)(n+2)} \leq$$

$$\leq \frac{(N_1+1)Mr(n-N_1-1+r)}{(n+1)(n+2)} + \varepsilon r\,\frac{(n-1-N_1)(n-1-N_1+r)}{(n+1)(n+2)} .$$

Puesto que se eligió $N_1>r$, la segunda fracción es menor que 1 y por (14) la primera es menor que ε, de donde

$$|A_{n+1,j}| < \varepsilon(1+r).$$

CAPITULO III

1. PRELIMINARES. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

FORMA NORMAL DE UN SISTEMA

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con argumentos desviados:

(1) $y_i'(x)=f_i(x,y_1(w_{i1}(x)),y_2(w_{i2}(x)),\dots y_N(w_{iN}(x)))$

$i=1,2,\dots N$

donde las N^2 funciones $w_{ij}: \mathbf{C}\longrightarrow C$ son conocidas, al igual que las N funciones $f_i: C^{N+1}\longrightarrow C$.

Una solucion del sistema vendrá dada por N funciones $y_i: C \to C$ que satisfagan a (1); el conjunto de las N funciones y_i tambien se llama integral $\{y_i\}_{i=1..N}$ del sistema.

Si $a_1, a_2, .. a_{N+1}$ son números complejos, se dirá que la integral del sistema (1) pasa por el punto $z \epsilon C^{N+1}$ de coordenadas (a_i) si se verifica que $y_i(a_1) = a_{i+1}$ para $i=1,2..N$. Este hecho tambien se enuncia diciendo que $\{y_i\}$ es una solucion de (1) correspondiente a las condiciones iniciales:

$$y_1(a_1) = a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_N(a_1) = a_{N+1}$$

Si todas las $w_{ij}(x)$ fuesen iguales a x, (1) se convertiria en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para tal sistema, elegido un punto $z \epsilon C^{N+1}$, siempre se puede asegurar la existencia de una integral que pase por z sin más que exigir que cada f_i sea holomorfa en algun entorno de z. Dicha integral es única, y las funciones y_i que la definen resultan analiticas en un entorno de la primera componente de z, llamémosla $\underline{a}$ .Para obtener dicha integral basta derivar sucesivamente (1) e ir determinando, conocidos los $y_i(a)$ que son las componentes restantes de z, $y_i'(a)$, $y_i''(a)$,..etc.

Naturalmente, si alguna $w_{ij}(x) \neq x$, en general no puede hacerse nada análogo; aunque se conozcan los valores $y_i(a)$ se ignoran los valores de y_i en $w_{ij}(a)$ necesarios para determinar $y_i'(a)$. Parece por tanto lógico exigir que existan puntos $\underline{a}$ en C con la propiedad de que sea $w_{ij}(a)=a$, para $i,j=1,..N$.
Sea $\underline{a}$ uno de tales puntos. Llamemos α a la variedad de C^{N+1} formada por los puntos que tienen su primera componente igual a $\underline{a}$.
Se verifica el siguiente:

<u>TEOREMA 1:</u> Sea $z \epsilon \alpha$. Supongamos que todas las f_i son holomorfas en algún entorno de z. Si existe algun entorno de a en el que todas las w_{ij} sean holomorfas verificandose además

$$|w_{ij}(x) - a| \leq |x-a| \quad i,j=1,2,..N$$

para todo x de dicho entorno, entonces existe una única integral analitica de (1) que pasa por z.

Otro enunciado equivalente del teorema seria:

Siendo Ω_{ij} la región de analiticidad de w_{ij}, $\Omega_{ij}cC$, con $\Omega=\bigcap_{ij=1}^{N}\Omega_{ij}$ y $G_i cC^{N+1}$ la region de analiticidad de f_i, con $G=\bigcap_{i=1}^{N} G_i$, si existe un $a\varepsilon\Omega$ tal que en algun entorno suyo sea

$$|w_{ij}(x)-a|\leq|x-a| \quad \text{para } i,j=1,..N$$

llamando α a la variedad de C^{N+1} definida por $\pi_1(z)=a$, $z\varepsilon C^{N+1}$, por cada punto $z\varepsilon\alpha\cap G$ pasa una y solo una integral del sistema (1) formada por funciones analiticas.

Demostración:

Probaremos que si el teorema 1 se verifica cuando z es el origen de coordenadas en C^{N+1}, es cierto en general.

En efecto, haciendo la traslación $t=x-a$ en C y poniendo

$$W_{ij}(t)=w_{ij}(t+a)-a$$

$$Y_i(t)=y_i(t+a)-y_i(a)$$

resulta

$$W_{ij}(o)=o, \quad Y_i(o)=o.$$

Definimos además

$$F_i(b_1,b_2,..b_{N+1})=f_i(b_1+a,b_2+y_1(a),\dots,b_{N+1}+y_N(a))$$

Siendo V un entorno de a, decir que $|w_{ij}(x)-a|\leq|x-a|$ para $x\varepsilon V$ equivale a decir que $|W_{ij}(t)|\leq|t|$ para $t\varepsilon V-a$, que es un entorno del origen.

Decir que $\{y_i(x)\}$ constituye una integral de (1) pasando por el punto $(a,y_1(a),..y_N(a))$ C^{N+1} equivale a decir que $\{Y_i(t)\}$ constituye una integral del sistema

(2) $Y_i'(t)=F_i(t, Y_1(W_{i1}(t)),\ldots\ldots Y_N(W_{iN}(t)))$
$i= 1, 2,\ldots N$

pasando por $(o,o,\ldots o)\varepsilon C^{N+1}$, es decir, siendo

(3) $Y_i(o)=o \quad i=1,2,\ldots N$

En efecto:

$Y_i'(t)=y_i'(t+a)=f_i(t+a;y_j(w_{ij}(t+a)) \; j=1,..N)=f_i(t+a;\; Y_j(W_{ij}(t))+y_j(a))_{j=1,..N}$

de donde

$Y_i'(t)=F_i(t;\; Y_j(W_{ij}(t)),j=1\ldots N)$

Por otra parte, decir que $w_{ij}(x)$ es holomorfa en un entorno de a equivale a decir que $W_{ij}(t)$ lo es en un entorno del origen de C, y la holomorfia de $f_i(z)$ en un entorno de $(a,y_1(a),..y_N(a))$ equivale a la de F_i en un entorno de $(0,0,\ldots 0)\varepsilon C^{N+1}$

Con esto queda probada nuestra aserción y visto que no hay perdida de generalidad en suponer $w_{ij}(0)=0$, lo cual se admitirá implicitamente en lo que sigue.

En adelante, nos referiremos a (1) como la <u>forma normal</u> de un sistema de ecuaciones diferenciales con argumentos desviados. Al problema de valores iniciales que resulta para la forma normal del sistema con las condiciones (3),esto es, que la integral pase por el origen de C^{N+1}, se le llamará problema correspondiente a la forma normal del sistema <u>reducida al origen</u>.

Hemos reducido el problema a demostrar que para un sistema normal, el P.V.I. en su forma reducida al origen tiene solución única, supuestas las w_{ij} holomorfas y verificando

$|w_{ij}(x)|\leq|x|$ en un entorno de 0, y las f_i holomorfas en un entorno de $(0,0,\ldots 0)$. El enunciado correcto y la demostración de esta propuesta constituiran el siguiente paragrafo.

2. EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA SISTEMAS NORMALES EN SU FORMA REDUCIDA AL ORIGEN

Consideremos nuevamente el sistema (1):

$$y_i'(x)=f_i(x,\ y_1(w_{i1}(x)),\ldots y_N(w_{iN}(x))\ )$$

$$i=1,\ldots N$$

Suponemos que $w_{ij}(0)=0$ para $i,j=1,\ldots N$, que las N^2 funciones $w_{ij}(x)$ son analiticas en un entorno del origen de C y que existe un $r>0$ tal que se verifica

(4) $$|w_{ij}(x)|\leq r \quad \text{para} \quad |x|\leq r$$

Puede tomarse un r conveniente de manera que el disco $|x|\leq r$ esté incluido en la región de analiticidad de las $w_{ij}(x)$. Entonces, la condición (4) equivale, por el lema de Schwarz, a ser

(5) $$|w_{ij}(x)|\leq|x| \quad \text{para} \quad |x|\leq r$$

Suponemos también que las funciones $f_i(t,u_1,u_2,\ldots u_N)$ son holomorfas en una región que contenga al conjunto Δ de C^{N+1} definido por

$$(t,u_1,\ldots u_N)\in\Delta \iff |t|\leq r_1,\ |u_i|\leq R \quad i=1,\ldots N$$

donde $r_1\geq r$, lo cual no supone perdida de generalidad.

Puesto que Δ es compacto, cada f_i alcanza un maximo en Δ. Sea

$$M = \max_{i=1,..N}\left(\max_{z\varepsilon\Delta} |f_i(z)| \right)$$

y sea $\delta = \min(r,\frac{R}{M})$.

TEOREMA 2:

Existe una única integral analítica de (1) que pasa por el origen; está constituida por N funciones $y_i(x)$, analíticas en el disco $|x|<\delta$ y tales que $y_i(0)=0, i=1,..N$, verificándose además la acotación $|y_i(x)|\leq R$ en el disco $|x|<\delta$

Demostración:

En primer lugar, notemos que de ser las $f_i(t,u_1,..u_N)$ holomorfas en Δ, sigue que las derivadas parciales $\frac{\delta f_i}{\delta u_j}$, $j=1,..N$, i prefijado, son continuas en Δ. Por consiguiente existe una constante real L tal que para $i,j=1,..N$ se verifica

$$\left|\frac{\delta f_i}{\delta u_j}\right| \leq L \text{ en } \Delta .$$

Lema1:
Si $(t, u_1,u_2,..u_N)\varepsilon\Delta$ y $(t,u_1^*,u_2^*,...u_N^*)\varepsilon\Delta$ entonces se verifica

(6) $\forall i, |f_i(t,u_1^*,u_2^*,..u_N^*)-f_i(t,u_1,...u_N)| \leq L \sum_{j=1}^{N} |u_j^*-u_j|$

Para demostrar el lema veamos que si $F(z)$ es una función holomorfa en un dominio cerrado y convexo Ω y si k es el máximo del módulo de $F'(z)$ en Ω, se tiene para z y z* pertenecientes a Ω

$$F(z^*)-F(z) = \int_z^{z^*} F'(t)dt$$

donde la integral puede tomarse a lo largo del segmento rectilineo que une z con z*, contenido totalmente en Ω.

Entonces será

$$|F(z^*)-F(z)| \leq \int_z^{z^*}|F'(t)|\,|dt| \leq k \int_z^{z^*}|dt|$$

la integral $\int_z^{z^*}|dt|$ es, por definición, la longitud del arco a lo largo del que se integra y es inmediato ver que vale $|z^*-z|$, como era de esperar, pues se trata de un segmento.

Así pués

$$|F(z^*)-F(z)| \leq k|z^*-z|$$

Como consecuencia inmediata resultà (6):

$$|f_i(t,u_1^*,u_2^*,\ldots u_N^*)-f_i(t,u_1,u_2^*,\ldots u_N^*)+f_i(t,u_1,u_2^*,\ldots u_N^*)-\cdots$$
$$\cdots+f_i(t,u_1,u_2,\ldots u_{N-1},u_N^*)-f_i(t,u_1,u_2,\ldots u_{N-1},u_N)| \leq$$
$$< \sum_{j=1}^{N} |f_i(t,u_1,\ldots u_{j-1},u_j^*,u_{j+1}^*,\ldots u_N^*)-f_i(t,u_1,\ldots u_{j-1},u_j,u_{j+1}^*,\ldots u_N^*)| \leq$$
$$\leq L \sum_{j=1}^{N} |u_j^*-u_j|$$

con lo que el lema queda probado.

Sea δ_1 un número real positivo cualquiera, con $\delta_1<\delta=\min(r,\frac{R}{M})$

Pasemos ahora a definir N sucesiones de funciones

$$\{y_i^{(s)}(x)\} \quad s=1,2,\ldots.$$

en el disco $|x| \leq \delta_1$ de la siguiente manera:

Ponemos, para $i=1,2,\ldots N$

(7) $\qquad y_i^1(x)\equiv 0$

con lo cual para $|x|\leq\delta_1$ ya quedan definidas.

Y si suponemos conocidos los m primeros elementos de cada sucesión, es decir, dados

$$\{y_i^1(x),\ldots,y_i^m(x)\}_{i=1,\ldots N} \quad \text{en } |x|\leq\delta_1$$

definimos

$$(8)\quad y_i^{m+1}(x)=\int_0^x f_i(t,y_1^m(w_{i1}(t)),\ldots y_N^m(w_{iN}(t))\,)dt$$

para $|x|\leq\delta_1$, donde la integral se supone tomada a lo largo del segmento $[0,x]$.

Debemos probar que la sucesión está bien definida. Para ello veremos que dadas las N funciones $y_1^m(x),\ldots$ $\ldots y_N^m(x)$, si son analiticas en $|x|\leq\delta_1$ (en el sentido de ser analiticas en alguna región que contenga al disco cerrado de radio δ_1 y centro el origen) y además se verifica

$$|y_i^m(x)|\leq R \quad \text{para} \quad |x|\leq\delta_1$$

entonces las funciones definidas por (8) son analiticas en $|x|\leq\delta_1$ (en el mismo sentido anterior) y verifican

$$|y_i^{m+1}(x)|\leq R \quad \text{para} \quad |x|\leq\delta_1$$

Después, bastará tener en cuenta (7).

Cuando t recorre el segmento $[0,x]$, y más en general, cuando t toma valores en el disco $|x|\leq\delta_1$, es

$$|w_{ij}(t)|\leq|t|\leq\delta_1$$

por (5). Por consiguiente

$$|y_j^m(w_{ij}(t))|\leq R \quad \text{para} \quad |t|\leq\delta_1$$

y además $y_j^m(w_{ij}(t))$ está definida y es función ànalitica de t en una cierta región que contiene al disco $|t|\leq\delta_1$, ya que $\delta_1<\delta$ y es $|w_{ij}(t)|\leq|t|$ en todo $|t|\leq\delta$, no solo en $|t|\leq\delta_1$.

Precisando, existe un $\varepsilon>0$ tal que $\delta_1+\varepsilon<\delta$ y en $|t|<\delta_1+\varepsilon$ son analiticas las N^2 funciones $\{y_j^m(w_{ij}(t))\}_{\substack{i=1,\ldots N\\ j=1,\ldots N}}$

Siendo además el punto

(8') $$(t;\ y_j^m(w_{ij}(t))_{j=1,..N})\varepsilon C^{N+1}$$

un punto de la región de analiticidad de f_i cuando $|t|<\delta_1+\varepsilon$. Nótese que no se asegura que el punto esté en Δ ; solo sabemos que no saldrá de la región, que contiene a Δ, donde las f_i son analíticas. Podemos ampliar la definición (8) a la región $|t|<\delta_1+\varepsilon$ y sabemos que la integral de (8) no dependerá del camino siempre que éste no se salga del disco $|t|<\delta_1+\varepsilon$ lo que justifica que haya podido tomarse el segmento radial. La definición (8), ampliada a $|t|<\delta_1+\varepsilon$, proporciona las funciones $\{y_i^{m+1}(x)\}_{i=1..N}$, analiticas en dicha región, con derivadas $f_i(x;\ y_j^m(w_{ij}(x))_{j=1..N})$.

Ahora bién, para $|t|\leq\delta_1$ el punto (8') permanece en la región Δ por lo que para $|x|\leq\delta_1$ y t recorriendo el segmento que une el origen con el punto x, es

$$|f_i(t;\ y_j^m(w_{ij}(t))_{j=1..N})|\leq M$$

de donde

$$|y_i^{m+1}(x)|\leq\int_0^x|f_i(t;\ y_j^m(w_{ij}(t)))||dt|\leq M\int_0^x|dt|\leq M|x|\leq M\delta_1<R$$

para $|x|\leq\delta_1$.

De esta forma se han definido por inducción N sucesiones de funciones analiticas en una región que contenga a $|x|\leq\delta_1$ y uniformemente acotadas por R en el disco $|x|\leq\delta_1$.

Puesto que δ_1 es un número con la sola limitación $0<\delta_1<\delta$, se tienen definidas las N sucesiones $\{y_i^m(x)\}_{m=1,2,..}$ de funciones analíticas en todo el disco $|x|<\delta$, verificando además la acotación $|y_i^m(x)|\leq R$ para $|x|<\delta$.

Para cualquier subindice i, $1\leq i\leq N$, la sucesión $\{y_i^m(x)\}_{m=1,2,..}$ converge uniformente en compactos de la región $|x|<\delta$ hacia una función $y_i(x)$, analitica en $|x|<\delta$.

En efecto, consideremos la serie

$$(9) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} y_i^{m+1}(x)-y_i^m(x)$$

que tiene como sucesión de sumas parciales

$$\sum_{m=1}^{n} y_i^{m+1}(x)-y_i^m(x) = y_i^{n+1}(x)$$

a los elementos de la sucesión $\{y_i^m(x)\}_{m=1,2,..}$

Basta ver que la serie (9) es absolutamente(indistintamente se utilizará la palabra "normalmente") convergente en compactos de $|x|<\delta$, lo cual será cierto si se verifica para los compactos de la forma $|x|\leq\delta_1$, con $0<\delta_1<\delta$.

Ahora bien, en el disco $|x|\leq\delta_1$, siendo $0<\delta_1<\delta$,es para cualquier i con $1\leq i\leq N$

$$(10) \quad |y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|=|y_i^{(2)}(x)|\leq\int_0^x|f_i(s,0,0..0)||ds|\leq M|x|$$

habiendose tomado la integral en (8), como ya dijimos, a lo largo del segmento radial que une el origen con el punto x,y habida cuenta de que si $|s|\leq\delta_1$, es

$$y_i^{(1)}(w_{ij}(s))= 0 = y_i^{(1)}(s)$$

Acotemos el segundo sumando de la serie (9):

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leq\int_0^x|f_i(s;\ y_j^{(2)}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})-f_i(s;y_j^{(1)}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})||ds|$$

POr (6), resulta:

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leq L\int_0^x \sum_{j=1}^{N}(|y_j^{(2)}(w_{ij}(s))-y_j^{(1)}(w_{ij}(s))|)|ds|$$

Pero acabamos de ver que si $|t|\leq\delta_1$, es

$$|y_j^{(2)}(t)-y_j^{(1)}(t)|\leq M|t|$$

Por consiguiente:

$$|y_j^{(2)}(w_{ij}(s))-y_j^{(1)}(w_{ij}(s))|\leq M|w_{ij}(s)|\leq M|s|$$

siempre que sea $|s|<\delta_1$, sin más que tener en cuenta (5).

Utilizando esta desigualdad:

$$(11)\quad |y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leq L\sum_{j=1}^{N}\int_0^x M|s||ds|=\frac{LNM|x|^2}{2!},\ \text{para}\ |x|\leq\delta_1,$$

ya que $s=te^{i\arg(x)}$, $0\leq t\leq|x|$, y es $\int_0^x|s||ds|=\int_0^x t\,dt$.

Las desigualdades (10) y (11) nos permiten suponer que se verificará en general

$$(12)\qquad |y_i^{m+1}(x)-y_i^{m}(x)|\leq\frac{M}{NL}\frac{(NL|x|)^m}{m!},\ \text{para}\ |x|\leq\delta_1.$$

En efecto, supuesta cierta (12) para $m\leq k$, se tiene:

$$|y_i^{k+2}(x)-y_i^{k+1}(x)|\leq\left|\int_0^x(f_i(s;y_j^{k+1}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})-f_i(s;y_j^{k}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N}))ds\right|\leq$$

$$\leq\int_0^x|f_i(s;\ y_j^{k+1}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})-f_i(s;\ y_j^{k}(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})||ds|\leq$$

$$\leq L\sum_{j=1}^{N}\int_0^x|y_j^{k+1}(w_{ij}(s))-y_j^{k}(w_{ij}(s))|\,|ds|$$

donde se ha aplicado (6). Nótese que, por la definición de las $y_i^m(x)$, si $|s|\leq\delta_1$,

$$(s;\ y_j^m(w_{ij}(s))_{j=1,\dots N})\in\Delta\subset C^{N+1}.$$

Por hipótesis de induccion,

$$|y_i^{k+1}(w_{ij}(s))-y_j^k(w_{ij}(s))|\leq\frac{M}{NL}\frac{(NL|w_{ij}(s)|)^k}{k!}$$

ya que $|w_{ij}(s)|\leq|s|\leq\delta_1$.

Por consiguiente,

$$|y_i^{k+2}(x)-y_i^{k+1}(x)|\leq LN\int_o^x\frac{M}{NL}\frac{(NL|s|)^k}{k!}|ds|=\frac{M(NL)^k|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

y la desigualdad (12) vale para cualquier entero m positivo, y cualquier subindice i, $1\leq i\leq N$, en todo $|x|\leq\delta_1$.

La serie

$$\frac{M}{NL}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(NL|x|)^m}{m!}=\frac{M}{NL}(e^{NL|x|}-1)$$

converge normalmente en compactos, en particular en $|x|\leq\delta_1$; además, mayora a la serie de los valores absolutos de los terminos de la serie (9), la cual converge normalmente en $|x|\leq\delta_1$.

Eso es cierto para cualquier δ_1 tal que $0<\delta_1<\delta$ luego (9) converge normalmente en compactos de la region $|x|<\delta$ y su suma es una función analítica en dicha region, a la que llamaremos $y_i(x)$.

La sucesión de sumas parciales $\{y_i^m(x)\}_{m=1,2,..}$ converge uniformemente en compactos de $|x|<\delta$ hacia la misma funcion $y_i(x)$.

La función $y_i(x)$ así definida satisface en $|x|<\delta$ la ecuacion

$$y_i(x)=\int_o^x f_i(s,y_1(w_{i1}(s)),....y_N(w_{iN}(s)))ds$$

En efecto, si $|x|<\delta$, basta considerar el compacto $|t|\leq\delta_1$, con $|x|<\delta_1<\delta$ y pasar al límite en (8) para m tendiendo a infinito, teniendo en cuenta que la convergencia es uniforme sobre el compacto $|t|\leq\delta_1$. (Nótese que no basta que lo sea sobre $[0,x]$). Además, sabemos que $\{y_i^{m\prime}(x)\}$ converge a $y_i'(x)$ uniformemente en compactos de la region $|x|<\delta$.

Pero por la construccion de la sucesion $\{y_i^m(x)\}$ $y_i^m(x)$ es una funcion analitica con derivada $f_i(x;y_j^{m-1}(w_{ij}(x)))_{j=1,..N}$ en $|x|<\delta$, luego

$$y_i'(x)=\lim_m y_i^{m\prime}(x)=\lim_m f_i(x;\ y_j^{m-1}(w_{ij}(x))_{j=1,..N}) = f_i(x;\ y_j(w_{ij}(x))_{j=1,..N})$$

Tambien podriamos haber deducido este resultado de la ecuacion integral anterior, teniendo en cuenta que el integrando es una funcion analítica de s.

Es trivial que $y_i(0) = 0$, así como que $|y_i(x)|\leq R$ para $|x|<\delta$; ambas cosas se deducen de ser $y_i(x)=\lim_m y_i^m(x)$, con $y_i^m(0) = 0$, $|y_i^m(x)|\leq R$.

Queda así probada la existencia de una integral del sistema (1), pasando por el origen, formada por N funciones analíticas en la region $|x|<\delta$, $\{y_i(x)\}_{i=1,..N}$, acotadas por R en dicha region.

Solo quede probar la unicidad de una tal integral.

Sea $\{z_i(x)\}_{i=1,..N}$ otra integral analítica de (1) que pasa por el origen. Entonces existe un $\varepsilon_1>0$, tal que $\varepsilon_1<\delta$ y en $|x|\leq\varepsilon_1$ es $|z_i(x)|\leq R$, siendo $z_i(x)$ analiticas en una region que contenga a $|x|\leq\varepsilon_1$.

Demostraremos que $z_i(x) = y_i(x)$ para $|x|\leq\varepsilon_1$, con lo que resulta $z_i(x) = y_i(x)$ en la intersección de la region de analiticidad de $z_i(x)$ con el disco $|x|<\delta$.

$|z_i(x)-y_i^{m+1}(x)|\leq\int_0^x\left|f_i(s;z_j(w_{ij}(s)))-f_i(s;y_j^m(w_{ij}(s)))\right||ds|$

Si $|x|\leq\varepsilon_1$, resulta de (6):

$|z_i(x)-y_i^{m+1}(x)|\leq L\sum_{j=1}^{N}\int_0^x|z_j(w_{ij}(s))-y_j^m(w_{ij}(s))|\ |ds|$

Ahora bien, es

$$|z_i(x)-y_i^{(2)}(x)|\leq LN\int_0^x R|ds| = LNR|x| \text{ para } |x|\leq\varepsilon_1$$

y, si se supone que en ese disco cerrado es

$$|z_i(x)-y_i^m(x)| \leq \frac{R(NL|x|)^m}{m!},$$

resulta:

$$|z_i(x)-y_i^{m+1}(x)|\leq \frac{R(NL|x|)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Luego para cualquier punto x, con $|x|\leq\varepsilon_1$, si es i un subindice, $1 \leq i \leq N$, y $\underline{m}$ es un entero positivo cualquiera,

$$|z_i(x)-y_i^m(x)|\leq \frac{R(NL|x|)^m}{m!} - \frac{R(NL\varepsilon_1)^m}{m!}.$$

Por consiguiente, $\{y_i^m(x)\}_{m=1,2,..}$ converge puntualmente a $z_i(x)$ en $|x|\leq\varepsilon_1$ y se verifica que $y_i(x)=\lim_n y_i^m(x)=z_i(x)$ en dicho compacto. Con esto queda el teorema 2 totalmente probado, y con él el teorema 1.

3. GENERALIZACIONES DIVERSAS. CASO DE VARIOS DESVIOS PARA CADA INCOGNITA. ECUACIONES Y SISTEMAS DE ORDEN CUALQUIERA.

Si consideramos un sistema de la forma:

$$y_i'(x) = f_i(x; y_1(w_{i1}^1(x)),..y_1(w_{i1}^{k_1}(x)); ...; y_N(w_{iN}^1(x)),..y_N(w_{iN}^{k_N}(x)))$$

$i=1,2,...N$

en que aparecen k_j desvios para la incognita y_j, veremos que lo podemos reducir a uno de la forma (1), pero con M ecuaciones y M incognitas, siendo

$$M = \sum_{j=1}^{N} k_j.$$

Sea:

$$F_j = f_1 \qquad \text{para } 1 \leq j \leq k_1,$$

$$F_j = f_2 \qquad \text{para } k_1+1 \leq j \leq k_2+k_1,$$

$$F_j = f_s \qquad \text{para } \sum_{r=1}^{s-1} k_{r+1} \leq j \leq \sum_{r=1}^{s} k_r,$$

$$F_j = f_N \qquad \text{Para } M-k_N+1 \leq j \leq M$$

Pongamos tambien:

$$W_{js} = w_{i1}^s \quad \text{para} \quad \sum_{r=1}^{i-1} k_r + 1 \leq j \leq \sum_{r=1}^{i} k_r, \quad 1 \leq s \leq k_1,$$

$$W_{j,k_1+s} = w_{i2}^s \quad " \quad " \quad " \quad " , \quad 1 \leq s \leq k_2,$$

$$W_{j,s+\sum_{r=1}^{N-1} k_r} = w_{iN}^s \quad " \quad " \quad " , \quad 1 \leq s \leq k_N.$$

Así hemos definido M funciones F_j, $j=1,2,\ldots M$, y M^2 desvios W_{js}, $s,j=1,2,\ldots M$.

El sistema:

$$Y'_j(x) = F_j(x, Y_1(W_{j1}(x)), \ldots, Y_M(W_{jM}(x)))$$
$$j = 1,2,\ldots M$$

es del tipo de (1).

Por la construccion de las $W_{js}(x)$ y de las F_j resulta:

$$Y'_1(x)=Y'_2(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots=Y'_{k_1}(x)$$

y en general:

$$Y'_{j_1} = Y'_{j_2}$$

para j_1 y j_2 verificando las desigualdades

$$\sum_{s=1}^{r-1} k_s+1 \leq j_i \leq \sum_{s=1}^{r} k_s, \quad i=1,2, \text{ para algún } r, 1\leq r\leq N.$$

Notemos que si $w^s_{ij}(0) = 0$, para $i,j=1,\ldots N, s=1,\ldots k_j$, la solución analítica, si existe, queda determinada por los valores $y_i(0), i=1,\ldots N$. En efecto, así resulta de hacer

$$Y_{j_1}(0) = Y_{j_2}(0) = y_i(0)$$

para cualesquiera números naturales j_1 y j_2 pertenecientes al intervalo de la forma

$$\left[\sum_{r=1}^{i=1} k_r+1, \sum_{r=1}^{i} k_r\right].$$

Esto quiere decir que el número de constantes que determina a la solución analítica de un sistema de primer orden, solo depende del número de incognitas distintas, pero no del número de desvios en que se toma cada incognita.

Cuando se trate de una ecuacion de orden superior al primero, veremos que la solucion analítica, si existe, queda determinada por n constantes a lo más, siendo n el orden de la ecuacion.

TEOREMA 3 :

Dada la ecuacion

$$y^{n)}(x)= F(x,y(w_o(x)),y'(w_1(x)),\ldots,y^{n-1)}(w_{n-1}(x)))$$

donde $w_i(x)$ son funciones analíticas en un entorno del origen con $w_i(0) = 0$ y verificando $|w_i(x)|\leq|x|$ en algun disco de centro el origen y radio $r>0$, si, dados los números complejos b_o, $b_1,\ldots b_{n-1}$, es $F:C^{n+1}\longrightarrow C$ una funcion analítica en un entorno del punto $(0, b_o, b_1,\ldots b_{n-1})\in C^{n+1}$, entonces existe una única función $y:C\longrightarrow \mathbb{C}$, analítica en un entorno del origen, verificando la ecuación y las condiciones

$y(0)=b_o$,

$y'(0)=b_1$

$y^{n-1)}(0)=b_{n-1}$.

Demostracion:

En efecto, basta transformar la ecuación en un sistema normal.

Pongamos:

$$Y_1'(x) = Y_2(x)$$

$$Y_2'(x) = Y_3(x) = Y_1''(x)$$

$$Y_3'(x) = Y_4(x) = Y_1'''(x)$$

$$Y_n'(x) = Y_1^{n)}(x)$$

entonces, llamando $Y_1(x)$ a la función incognita $y(x)$ de la ecuacion, ésta se transforma en el sistema:

$$Y_1'(x) = Y_2(x)$$

$$Y_2'(x) = Y_3(x)$$

$$Y_{n-1}'(x) = Y_n(x)$$

$$Y_n'(x) = F(x, Y_1(w_0(x)), Y_2(w_1(x)), \ldots Y_n(w_{n-1}(x)))$$

con la condicion inicial

$$Y_1(0) = b_0$$

$$Y_2(0) = b_1$$

$$Y_n(0) = b_{n-1},$$

el cual, en las condiciones del teorema 3, tiene solucion única por el teorema 1.

Finalmente, dado un sistema de orden cualquiera y en el que cada incognita o sus derivadas esten tomadas en uno o varios desvios,exceptuando las de mayor orden que lo estarán en uno solo, dicho sistema se puede escribir en forma normal sin más que transformarlo primero en uno de primer orden de la misma forma que se ha hecho para la ecuación de orden n y a continuación transformarlo en uno en que cada incognita se tome en un solo desvio como se hace al principio del apartado. Esto justifica que utilizásemos el término de "forma normal" del sistema al referirnos al sistema (1).

4. PROLONGACION DE SOLUCIONES. ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES.

Recordemos que en el teorema 2, bajo las hipotesis de ser los desvios $w_{ij}(x)$ funciones analíticas en un disco $|x|\leq r$, $r>0$, siendo $w_{ij}(0)=0$ y verificandose en dicho disco la acotación $|w_{ij}(x)| \leq r$, en la suposicion de que la funcion $f_i(x,u_1,\ldots u_N)$, para $i=1,..N$, sea analitica en una region conteniendo al compacto dado por

$$|x|\leq r, \quad |u_j|\leq R, \quad j=1,\ldots N$$

con

$$\max_{\substack{1\leq i\leq N\\ |x|\leq r\\ |u_j|\leq R}} \left|f_i(x;\, u_j\,)_{j=1,..N}\right| = M$$

afirmábamos la existencia y unicidad de solucion analitica correspondiente a la condicion inicial $y_i(0)=0$, $i=1,\ldots.N$, en el disco $|x|<\delta$, siendo δ el menor de los números r y $\frac{R}{M}$, ambos positivos.

Se plantea la cuestion de si, fijado un $r>0$ tal que en $|x|<r$ sean analiticos los desvios y además verifiquen $|w_{ij}(x)|\leq|x|$ $\forall x$ con $|x|<r$, puede conseguirse demostrar la analiticidad de la solucion en el disco $|x|<r$, supuesto que las f_i sean analiticas en una region suficientemente amplia.

a) La respuesta, en general, es negativa. Aún siendo los desvios funciones enteras verificando $|w_{ij}(x)|\leq|x|$ $\forall x\in C$, lo que junto con $w_{ij}(0)=0$ implica que son de la forma

$$w_{ij}(x) = kx, \text{para algun } k\in C, \text{ con } |k|\leq 1,$$

y siendo todo C^{N+1} la region de analiticidad de f_i, en general las soluciones del sistema no serán funciones enteras. Vamos a dar como ejemplo la ecuacion diferencial:

$$y'(x) = F(x,y(w(x)))=k^2+2ky(x)+(y(x))^2$$

siendo $|k|>0$, $k\in C$.

El desvio es $w(x)=x$ y por tanto es funcion entera. Ademas, verifica trivialmente la condicion $|w(x)|\leq|x|$ en todo C.

$F(x,y)$ no depende de $\underline{x}$ y es funcion entera de $\underline{y}$.

La solución analítica de la ecuacion que se anula en el origen viene dada por la serie $y(x)= \sum_{n=1}^{\infty} k^{n+1}x^n$, la cual tiene radio de convergencia $\frac{1}{|k|}$.

b) Si se verificase la condicion más restrictiva

$$|w_{ij}(x)| < |x| \quad \text{en el disco } |x| < r,$$

entonces la solucion sí seria prolongable a todo el disco. En efecto, el teorema 2, supuesto como hemos dicho que f_i son analíticas en una region suficientemente amplia(basta que como funcion de x sea analitica en una region que contenga a $|x|\leq r$,y sea analitica en y_j $\forall j$ en un entorno de 0) proporciona una region $|x|<\delta$ en que la existencia y unicidad de solucion analitica está asegurada,con $\delta\leq r$. Supongamos $\delta<r$. Para cada x con$|x|=\delta$, existe un $\varepsilon>0$ tal que en el disco $D(x,\varepsilon)$ de centro x y radio ε es $y_i(x)$ analitica para $1 \leq i \leq N$. Ello resulta de que por ser

$$|w_{ij}(t)|<|t| \text{ para } |t|\leq\delta<r,$$

es

$$|w_{ij}(x)|<|x| = \delta$$

y existe un entorno de x tal que para los puntos z del entorno es $|w_{ij}(z)|<\delta$. No hay inconveniente en tomar dicho entorno en forma de disco de centro x y radio ε; será $\varepsilon>0,\delta+\varepsilon\leq r$.

Para $t\varepsilon D(x,\varepsilon)$ estará $(t;\ y_j(w_{ij}(t))_{j=1,..N}$ en la region de analiticidad de f_i y será

$$y_i'(t) = f_i(y;\ y_j(w_{ij}(t)))_{j=1,..N}$$

Por tanto $y_i(t)$ es analitica en $D(x,\varepsilon)$.

Los diversos discos así construidos $D(x,\varepsilon)$,donde x recorre la circunferencia $|x|=\delta$, junto con el disco $|x|<\delta$

recubren el compacto $|x|\leq\delta$, así como al disco $|x|<\delta+\varepsilon_1$, para $\varepsilon_1>0$ suficientemente pequeño.

Por consiguiente existe $\delta_1=\delta+\varepsilon_1$ tal que $\delta<\delta_1\leq r$ y hemos prolongado la solucion analitica hasta el disco $|x|<\delta_1$. Si δ_1 es menor que r el proceso puede repetirse. Así se prolonga la solucion a todo $|x|<r$.

Notese que es condicion necesaria y suficiente para que la funcion $w(x)$, analitica en el origen, verifique la condicion $|w(x)|<|x|$ en algun entorno del origen, que sea $|w'(0)|<1$.

c) Aunque solamente se verifique $|w_{ij}(x)|\leq|x|$, $i,j=1,..N$, es decir, aunque algún desvio sea un giro(de la forma $w(x)=kx$ con $|k|=1$), demostraremos que si las funciones $f_i(x,u_1,..u_N)$ son funciones <u>lineales</u> en las variables $u_1,...u_N$ y analiticas en x en una region que contenga al disco $|x|<r$ en el que los desvios son analiticos y verifican la condicion antes citada $|w_{ij}(x)|\leq|x|$, entonces la solucion sí es prolongable a todo el disco $|x|<r$.

<u>Nota</u>: cuando tanto los desvios como las funciones f_i sean funciones enteras de x(los desvios son por tanto y debido a la acotacion que verifican, de la forma $w(x)=kx$, $|k|\leq1$, y en alguno se verifica la igualdad,o estariamos en el caso anterior) la solucion viene dada por funciones enteras si el sistema es <u>lineal</u> .

El apartado c) es consecuencia del teorema que sigue:

TEOREMA 4:

Dado el sistema:

$$y_i'(x)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)y_j(w_{ij}(x))+b_i(x)$$

$- = 1,..N.$

Supongamos que las funciones $a_{ij}(x)$ y $b_i(x)$ son analiticas en el disco $|x|<r_1$ y que las funciones $w_{ij}(x)$ son analiticas en el disco $|x|<r_2$, verificando en él las desigualdades $|w_{ij}(x)|\leq|x|$ y siendo, por ello, $w_{ij}(0) = 0$. Sea $r=\min(r_1,r_2)$

Entonces existe una y solo una solucion del sistema verificando la condicion

$$y_i(0)=0,\quad i=1,..N$$

y analitica en el disco $|x|<r$.

Demostración:

Pongamos:

$$f_i(x,u_1,..u_N) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)u_j + b_i(x)$$

si $\delta_1<r$, escribiremos

$$L(\delta_1) = \max_{\substack{|x|\leq\delta_1 \\ i,j=1,..N}} |a_{ij}(x)|$$

Si $u_1,u_2,..u_N,u_1^*,u_2^*,..u_N^*$, son números complejos cualesquiera se verifica uniformemente en x, en el disco $|x|\leq\delta_1$, la condición:

$$(13)\quad |f_i(x,u_1^*,..u_N^*)-f_i(x,u_1,..u_N)|\leq L(\delta_1)\sum_{j=1}^{N}|u_j^*-u_j|,\quad i=1,..N$$

Las formulas

$$(14)\qquad \begin{aligned} y_i^{(1)}(x) &= 0 \quad \text{si } |x|<r \\ y_i^{n+1}(x) &= \int_0^x f_i(t; y_j^n(w_{ij}(t))_{j=1,..N})\,dt \quad \text{si } |x|<r, \text{para } n\geq 1, \end{aligned}$$

para $i=1,..N$, definen N sucesiones $\{y_i^n(x)\}_{n=1,2,...}$ de funciones analiticas en la region $|x|<r$. La integral no depende del camino si este nó se sale de dicha region, por lo que pue de tomarse el segmento radial $|o,x|$.

La serie

$$\sum_{n\geq 1} y_i^{n+1}(x)-y_i^n(x)$$

converge normalmente en compactos de $|x|<r$, puesto que converge normalmente en los compactos de la forma $|x|\leq\delta_1<r$.

En efecto, si es $m(\delta_1)=\max_{\substack{|x|\leq\delta_1 \\ i=1,..N}}|b_i(x)|$

utilizando (13) y el hecho de ser $|w_{ij}(x)|\leq|x|$, resulta para $|x|\leq\delta_1$,

$$|y_i^{n+1}(x)-y_i^n(x)|\leq\frac{m(\delta_1)}{NL(\delta_1)}\ \frac{(NL(\delta_1)|x|)^n}{n!}$$

Por tanto, la sucesion $\{y_i^n(x)\}_{n\geq 1}$, converge uniformemente en compactos de $|x|<r$ hacia una funcion $y_i(x)$ que será analitica en dicha region.

Las funciones $y_i(x)$, $i=1,..N$, constituyen una solucion del sistema. Por tanto, la solución que proporciona el teorema 2, cuyas hipotesis se verifican en nuestro caso, es prolongable a todo el disco $|x|<r$ y coincide con la $\{y_i(x)\}_{i=1,..N}$ obtenida.

CAPITULO IV

1. PRELIMINARES. PROBLEMA DE VALORES INICIALES EN EL ORIGEN.

Dado un abierto D del plano complejo C, se representará por H(D) el espacio vectorial de las funciones holomorfas en D, sobre el cuerpo C.

Consideremos la ecuación diferencial funcional lineal:

(1) $\quad y^{n)}(t)+a_1(t)y^{n-1)}(v_1(t))+\ldots+a_n(t)y(v_n(t)) = 0,$

con $a_i(t) \in H(D)$, $v_i(t) \in \dot{H}(D)$, para $i=1,2,\ldots.n$.

El problema de valores iniciales correspondiente a la ecuacion (1) se formula de la siguiente forma:

Dadas las constantes $c_o, c_1, \ldots. c_{n-1}$, complejas, y el punto $\underline{a}$ perteneciente a D, encontrar una funcion y(t) regular en $\underline{a}$ tal que

$$y(a) = c_o$$
$$y'(a) = c_1$$
$$\text{--------}$$
$$y^{n-1)}(a) = c_{n-1}$$

verificando además la ecuacion (1) en un entorno de $\underline{a}$, y cuando exista, ver si está determinada de manera única.

Cuando el punto $\underline{a}$ es un punto fijo de las funciones $v_i(t)$, esto es, cuando se verifiquen las igualdades

$$v_i(a) = a, \text{ para } i=1,2,\ldots n,$$

el problema de valores iniciales queda resuelto por el teorema 3 del capitulo anterior (III-1, Teorema 3), aplicado a la ecuación (1), lo cual nos proporciona el criterio necesario.

El caso en que a no es punto fijo de los desvios será estudiado posteriormente, en el paragrafo 3. Por ahora nos restringiremos al caso en que a es punto fijo de $v_i(t)$, $\forall i$, haciendo por comodidad a=0, lo cual no supone perdida de generalidad, como sabemos.

A lo largo del capitulo manejaremos para simplificar la ecuación lineal de segundo orden

(2) $$y''(t) + a(t)y'(v(t)) + b(t)y(w(t)) = 0$$

aunque la mayor parte de lo que sigue es facilmente generalizable a la ecuacion de orden n dada por (1).

Consideraremos el disco $D \subset C$ definido por

$$D \equiv |t| < r.$$

En lo que sigue supondremos que $a(t)$, $b(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ son funciones pertenecientes a $H(D)$ y que se verifica

(3) $$v(o) = w(o) = 0.$$

Representaremos por $H_1(D)$ el subconjunto de $H(D)$ formado por las funciones que satisfacen en D a la ecuacion (2).

El problema de valores iniciales para la ecuación (2) en el origen pasa ahora a enunciarse en la forma siguiente:

Dadas las constantes complejas c_o, c_1, encontrar una funcion $y(t)$ de $H_1(D)$ que verifique las condiciones

(4) $$\begin{aligned} y(o) &= c_o \\ y'(o) &= c_1 \end{aligned}$$

Las condiciones (4) y en general, las condiciones del mismo tipo que antes escribimos para la ecuacion de orden n, son las que se llaman "con diciones iniciales"

Por la proposición 4, apartado ii) (II-1,pag2o) sabemos que si

$$(5)\qquad \begin{aligned} &|v(t)| < r \quad y \\ &|w(t)| < r \quad \text{en } D, \end{aligned}$$

entonces el problema de valores iniciales (2),(4), tiene solución única en D.

Puesto que sabemos que, por el Lema de Schwartz, de (3) y (5) sigue

$$(6)\qquad \begin{aligned} &|v(t)| \leq |t| \\ &|w(t)| \leq |t| \end{aligned} \qquad \text{para } t\varepsilon D,$$

diremos en este caso que el origen es punto fijo "atractivo" de los desvios v(t) y w(t) en el disco D.

Si, por el contrario, no se verificase (6) en ningún disco de centro el origen D, por pequeño que fuese su radio, el origen seria punto fijo que se diria " no atractivo". Analogamente se definiria el concepto de atractivo o no atractivo para otro punto fijo distinto del origen.

Nuestra anterior afirmación puede ahora formularse así:

PROPOSICION 5

Es condición suficiente para que el problema de valores iniciales formado por la ecuacion (2) con las condiciones iniciales (4) tenga solucion única en $H_1(D)$, que el origen sea punto fijo atractivo de los desvios $v(t)$ y $w(t)$, en D.

Corolario

Sea el origen punto fijo atractivo de los desvios.
La única funcion de $H_1(D)$ que verifica

$$y(o) = y'(o) = 0$$

es la función identicamente nula.

Demostracion:

En efecto, si $y(t) \equiv 0$, entonces $y(t)$ satisface (2) y es una funcion de $H_1(D)$ que verifica $y(o) = y'(o) = o$. Por la proposición 5 es la única.

Si el origen es punto fijo no atractivo, en general el problema de valores iniciales no tiene solución (aparte de la trivial, esto es, la funcion identicamente nula correspondiente a $y(o) = y'(o) = o$, la cual siempre es admitida)

En todo lo que sigue en este capitulo, salvo mención expresa en contrario, supondremos que el origen es punto fijo atractivo de los desvios $v(t)$ y $w(t)$ en todo el disco D, es decir, que se verifica (6), con lo que el problema de valores iniciales en el origen tiene solucion única por la proposición 5. Este resultado se utilizará continuamente sin mencionarlo explicitamente.

A continuación pasaremos a estudiar el conjunto $H_1(D)$, para posteriormente plantear y resolver el problema de valores iniciales en otro punto de D distinto del origen.

PROPOSICION 6

$H_1(D)$ es subespacio vectorial de $H(D)$ sobre el mismo cuerpo C.

Demostracion:

Dadas dos funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ pertenecientes a $H_1(D)$, es immediato comprobar que, siendo c_1 y c_2 dos números complejos, la función

$$z(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

que pertenece a $H(D)$, satisface (2):

$$z''(t) + a(t)z'(v(t)) + b(t)z(w(t)) = c_1y_1''(t) + c_2y_2''(t) +$$
$$+ a(t)(\ c_1y_1'(v(t)) + c_2y_2'(v(t))\ ) + b(t)(c_1y_1(w(t)) + c_2y_2(w(t)) = 0$$

puesto que y_1 e y_2 satisfacen (2).

Dadas dos funciones de $H(D)$, u_1, u_2, su Wronskiano se representará

$$W(u_1(t),u_2(t)) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}$$

y sabemos que considerado como funcion de t, es $W(t)\varepsilon H(D)$.

PROPOSICION 7

Es condicion necesaria y suficiente para que dos funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ de $H_1(D)$ sean linealmente dependientes, que sea

$$(7) \qquad W(y_1(o),y_2(o)) = \begin{vmatrix} y_1(o) & y_2(o) \\ y_1'(o) & y_2'(o) \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración:

Si son $y_1(t)$ e $y_2(t)$ linealmente dependientes, es

$$W(\, y_1(t),\, y_2(t)) \equiv 0,$$

y se verifica (7), lo que demuestra la necesidad.

Probemos que la condicion es suficiente. Supuesto cierto (7), debe ocurrir uno y solo uno de los tres siguientes casos:

1) $y_1(o) = y_1'(o) = 0.$

Entonces, por el corolario a la proposicion 5, es

$$y_1(t) \equiv 0.$$

2) $y_1(o) \neq 0.$

Construyamos en este caso la funcion $z(t)$ definida por

$$z(t) = y_2(t) - \frac{y_2^{\bullet}(o)}{y_1(o)} y_1(t)$$

Por la proposicion 6, es z(t) perteneciente a $H_1(D)$ y trivialmente se verifica que $z(o) = 0$.

Además, por (7) es $z'(o) = 0$, de donde $z(t) \equiv o$.

3) $y_1'(o) \neq 0$.

En este caso, el razonamiento es análogo. Deberá utilizarse la función

$$y_2(t) - \frac{y_2'(o)}{y_1'(o)} y_1(t).$$

Puesto que en los tres casos posibles y_1 e y_2 son linealmente dependientes, la proposicion queda demostrada en los dos sentidos.

PROPOSICION 8

Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ dos funciones de $H_1(D)$ tales que

$$(8) \qquad W(y_1(o),y_2(o)) = \begin{vmatrix} y_1(o) & y_2(o) \\ y_1'(o) & y_2'(o) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces cualquier funcion de $H_1(D)$ es expresable en la forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

donde c_1 y c_2 son constantes complejas.

Demostración:

Sea $y(t) \varepsilon H_1(D)$

Supongamos que $y(o) = p$, $y'(o) = q$.

Si pueden elegirse c_1 y c_2 tales que sea

$$(9) \qquad \begin{cases} c_1 y_1(o) + c_2 y_2(o) = p \\ c_1 y_1'(o) + c_2 y_2'(o) = q \end{cases}$$

entonces la función

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

perteneciente a $H_1(D)$, coincide con $y(t)$ en el disco D, ya que la diferencia de ambas, por (9) y el corolario de la proposición 5, es idénticamente nula en D.

Ahora bién, por (8), c_1 y c_2 están univocamente determinadas en el sistema (9). Esto completa la demostración.

TEOREMA 5 :

El espacio vectorial $H_1(D)$ tiene dimensión 2. Una base de dicho espacio viene dada por cualquier par de funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ de $H_1(D)$ que verifiquen (8).

Demostración:

El teorema resulta immediatamente a partir de las proposiciones (7) y (8).

2. SISTEMAS FUNDAMENTALES DE SOLUCIONES:

Definición.-

Se llama sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2) en el disco D a un par de funciones y_1, y_2, pertenecientes a $H_1(D)$ y verificando (8).

Según la definicion, un sistema fundamental de soluciones constituye una base de $H_1(D)$, por el teorema 5.

PROPOSICION 9.

El problema de valores iniciales dado por la ecuacion (2) con las condiciones (4) admite un conjunto infinito de sistemas fundamentales de soluciones en D.

Demostracion:

En efecto, puesto que hay infinitas cuaternas de números a, b, c, d, tales que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

y las condiciones

$$y_1(o) = a, \quad y_1'(o) = c$$

$$y_2(o) = b, \quad y_2'(o) = d,$$

determinan entonces el sistema fundamental $y_1(t)$, $y_2(t)$, lo que prueba la proposicion.

Sabemos ademas, por la proposicion 7, que es condicion necesaria y suficiente para que dos funciones de $H_1(D)$ sean linealmente dependientes, que su wronskiano sea nulo en el origen. Como vimos entonces, la necesidad de la condicion es trivial.

A continuacion damos una nueva demostracion de la suficiencia de dicha condicion, mas elegante que la que se dió en la proposicion 7:

Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ dos funciones de $H_1(D)$ que verifican (7).
Sea $u_1(t)$, $u_2(t)$ un sistema fundamental de soluciones de (2) en D. Por definicion, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ pertenecen a $H_1(D)$ y se verifica

(10) $$W(\, u_1(o),\, u_2(o)) \neq 0.$$

Por la proposicion 8, será:

$$y_1(t) = c_{11}u_1(t) + c_{12}u_2(t)$$

$$y_2(t) = c_{21}u_1(t) + c_{22}u_2(t)$$

Ahora bien, por (7):

$$W(y_1(o),y_2(o)) = \begin{vmatrix} c_{11}u_1(o)+c_{12}u_2(o) & c_{21}u_1(o)+c_{22}u_2(o) \\ c_{11}u_1(o)+c_{12}u_2(o) & c_{21}u_1(o)+c_{22}u_2(o) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1(o) & u_1'(o) \\ u_2(o) & u_2'(o) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} W(u_1(o),u_2(o)) = 0.$$

y por (10) queda

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Consideremos la identidad

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 v_2(t) \equiv 0 \quad \text{para } t\varepsilon D,$$

de la que sigue

$$\alpha_1(c_{11}u_1(t)+c_{12}u_2(t)) + \alpha_2(c_{21}u_1(t)+c_{22}u_2(t)) \equiv 0,$$

esto es,

$$(\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{21})u_1(t) + (\alpha_1 c_{12}+\alpha_2 c_{22})u_2(t) \equiv 0.$$

Pero u_1 y u_2 son linealmente independientes, como sigue de (10) y de la necesidad de la condicion cuya suficiencia estamos demostrando.

Por consiguiente

$$\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{21} = 0$$

$$\alpha_1 c_{12} + \alpha_2 c_{22} = 0$$

Por (11) este sistema tiene soluciones α_1, α_2, distintas de la trivial, de donde la dependencia lineal de $y_1(t)$, $y_2(t)$. De la proposicion 7 resulta el siguiente

Corolario a la proposicion 7:

Dos funciones cualesquiera de $H_1(D)$ que sean linealmente independientes, constituyen un sistema fundamental de soluciones de (2), y por consiguiente, una base del espacio vectorial $H_1(D)$.

Para terminar este parágrafo, diremos que, siendo $y_1(t)$, $y_2(t)$ un sistema fundamental de soluciones de (2), a la expresion

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1,c_2 \text{ pertenecientes a } C,$$

bajo cuya forma se pueden expresar todas las funciones de $H_1(D)$, se le llama solucion general de la ecuacion (2)en D.

3. PROBLEMA DE VALORES INICIALES EN UN PUNTO CUALQUIERA. CEROS DEL WRONSKIANO.

En este paragrafo estudiaremos el problema de valores iniciales en un punto cualquiera a del disco D.

Proposicion del problema:

Dados el punto $a\varepsilon D$ y las constantes $k_1,k_2\varepsilon C$, encontrar una funcion de $H_1(D)$ que verifique las condiciones iniciales:

$$(12)\qquad \begin{aligned} y(a) &= k_1 \\ y'(a) &= k_2 \end{aligned}$$

y ver si está determinada de manera única, cuando exista.

Veremos que el problema así planteado no siempre tiene solucion, que en ocasiones la tiene pero no es única, e incluso que, a veces, un determinado problema de valores iniciales admite como solucion a <u>todas</u> las funciones de $H_1(D)$. Naturalmente, nos conviene aislar estos casos patológicos, de manera que distinguiremos dos tipos de puntos en D:

a) aquellos puntos de D en que el problema de valores iniciales correspondiente a (12) tiene solucion única para cualesquiera k_1 y k_2.

b) aquellos otros puntos en que para determinados valores de k_1 y k_2 la solucion no sea única o incluso no exista.

<u>Definicion</u> :

Un punto $a\varepsilon D$ se dirá <u>punto regular</u> de la ecuacion (2) en D si para cualesquiera $k_1,k_2\varepsilon C$, el problema de valores iniciales dado por la ecuacion (2) y las condiciones iniciales (12) tiene solucion única en $H_1(D)$.

Si un punto de D no es regular, entonces se dirá que es un <u>punto singular</u> de la ecuacion (2) en D.

Vamos a estudiar, de momento, los puntos regulares.

PROPOSICION 10:

El conjunto de los ceros del wronskiano

$$W(y_1(t), y_2(t))$$

de un sistema fundamental $y_1(t)$, $y_2(t)$, de soluciones de (2), al que representaremos por T verifica:

i) T es independiente de la eleccion en $H_1(D)$ del sistema fundamental y_1, y_2.

ii) T está formado por puntos aislados, y en cualquier compacto de D solo hay un número finito de ellos.

Demostracion:

i) Sea z_1, z_2, otro sistema fundamental de soluciones de (2)

Entonces se tienen las expresiones

$$z_1(t) = a_{11}y_1(t) + a_{21}y_2(t)$$

$$z_2(t) = a_{12}y_1(t) + a_{22}y_2(t)$$

de donde

$$(13) \qquad W(z_1(t), z_2(t)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} W(y_1(t), y_2(t))$$

y, puesto que esta igualdad es cierta para todo t del disco D, en particular lo es en t = 0. Ahora bien

$$W(z_1(o),z_2(o)) \neq 0$$

$$W(y_1(o),y_2(o)) \neq 0$$

por la definicion de sistema fundamental, luego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

y el apartado i) resulta de (13).

ii) es immediato, ya que para cualquier par de funciones z_1,z_2 de $H(D)$ es $W(z_1,z_2)$ una funcion analitica de t, la cual no es identicamente nula si z_1 y z_2 forman un sistema fundamental de soluciones, por (8).

PROPOSICION 11

Es condicion necesaria y suficiente para que el punto $a\varepsilon D$ sea punto regular de la ecuacion (2), que

$$(14) \qquad W(y_1(a),y_2(a)) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} \neq 0,$$

para algún sistema fundamental de soluciones de (2), y_1,y_2.

Demostracion:

Sea $y_1(t)$, $y_2(t)$ un sistema fundamental y sea $W(y_1,y_2)(t)$ su wronskiano, que sabemos es una funcion analitica en D.

Por la proposicion 10, los ceros de $W(y_1,y_2)$ en D solo dependen de la ecuacion (2), siendo independientes del par y_1,y_2 de funciones que constituyen el sistema fundamental.

Pues bien, sea a un punto de D que no sea cero del wronskiano de algun sistema fundamental, o lo que es igual, que no sea cero del wronskiano de ningun sistema fundamental.

Puesto que sabemos que las funciones de $H_1(d)$ son las de la forma:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

donde $c_1,c_2 \in C$, todo se reduce a probar que pueden elegirse c_1 y c_2 de manera que sea

$$(15) \qquad \begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= k_1 \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) &= k_2 \end{aligned}$$

Para cualquier par de valores k_1 y k_2, se pueden determinar, por (14), c_1 y c_2 de manera única, lo que prueba que a es regular y con ello la suficiencia de la condicion (14).

Para probar la necesidad notemos que si a es regular, debe tener solucion única el problema de valores iniciales correspondiente a las condiciones

$$(16) \qquad y(a) = 0, \qquad y'(a) = 0.$$

Entonces el sistema

$$(17)\qquad \begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0 \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = 0 \end{cases}$$

no debe tener soluciones distintas de la trivial

$$c_1 = c_2 = 0$$

ya que la solucion

$$y(t) \equiv 0$$

satisface (16) y debe ser la única funcion de $H_1(D)$ que satisface dichas condiciones.

Por consiguiente, el determinante de la matriz del sistema (17) es no nulo y resulta (14).

Como consecuencia, resulta la caracterizacion de los puntos singulares de la ecuacion (2) en D: Son precisamente los ceros del wronskiano de un sistema fundamental cualquiera.

Por ello, resulta del mayor interés tratar de caracterizar los ceros del wronskiano de un sistema fundamental. Ya sabemos, por la proposicion 10, que dichos puntos quedan determinados por la ecuacion (2) y no dependen del sistema fundamental considerado. Demostraremos ahora la siguiente proposicion:

PROPOSICION 12:

Es condicion necesaria y suficiente para que el punto $a\varepsilon D$ sea un cero de $W(y_1(t),y_2(t))$, siendo y_1,y_2 un sistema fundamental de (2), que exista alguna funcion de $H_1(D)$, no identicamente nula, con un cero multiple en a.

Demostracion:

En efecto, el hecho de ser

$$W(y_1(a),y_2(a)) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0$$

equivale a que el sistema (17) tenga solucion distinta de la trivial, es decir a que existan c_1 y c_2, no nulas ambas, tales que la funcion

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

que no es identicamente nula, tenga en a un cero de, al menos, segundo orden.

<u>Corolario:</u>

Si la única funcion de $H_1(D)$ que tiene ceros múltiples en D es la identicamente nula, entonces todos los puntos de D son regulares.

4. PUNTOS SINGULARES DE LA ECUACION.

Dado el sistema fundamental $y_1(t)$, $y_2(t)$, de soluciones de (2), sabemos que los puntos singulares de la ecuacion (2) son los ceros de la funcion

$$W(y_1(t),y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Por consiguiente, en cualquier compacto de D solo puede haber un número finito de puntos singulares, por la proposicion 10, ii).

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las funciones de $H_1(D)$ en dichos puntos.

Sea $a \varepsilon D$ tal que

$$W(y_1(a),y_2(a)) = 0. \tag{18}$$

Pongamos

$$A = (y_1(a), y_1'(a))$$

$$A = (y_2(a), y_2'(a))$$

A y B son dos elementos de R^2 y, como es usual, se dirá que uno de ellos, por ejemplo A, es el elemento nulo, o simplemente el vector nulo o todavia $A \equiv 0$, si es $A = (0, 0)$.

En un punto a singular, al verificarse (18), pueden darse los siguientes casos:

1) $A \equiv 0$, $B \equiv 0$.

En este caso todas las funciones $y(t)$ de $H_1(D)$ tienen en a un cero de segundo orden, por lo menos.

En efecto, una funcion de $H_1(D)$ se escribe siempre

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

por la proposicion 8, y entonces es $y(a) = y'(a) = 0$.

Como consecuencia, el problema de valores iniciales correspondiente a las condiciones

$$y(a) = k_1$$

$$y'(a) = k_2$$

no tiene solucion mas que si $k_1 = k_2 = 0$ y en este caso admite como solucion a cualquier funcion de $H_1(D)$.

2) $A \not\equiv 0$, $B \equiv 0$. (Analogamente a lo que sigue en el caso en que fuera $A \equiv 0$, $B \not\equiv 0$).

Llamemos P al elemento de R^2 de componentes k_1, k_2. El problema de valores iniciales tiene solucion si, y solamente si, $P = kA$ para alguna constante $k \in C$.

Si eso se verifica, admite infinitas soluciones que son precisamente las de la familia

$$y(t) = ky_1(t) + \lambda y_2(t)$$

siendo λ un elemento cualquiera de C y k la constante antes mencionada.

En particular, el problema correspondiente a las condiciones homogéneas

$$(19)\qquad \begin{aligned} y(a) &= 0 \\ y'(a) &= 0 \end{aligned}$$

tiene las infinitas soluciones dadas por

$$y(t) = \lambda y_2(t).$$

3) $A \not\equiv 0$, $B \not\equiv 0$.

Puesto que se verifica (18) debe ser $B = kA$, para algún k distinto de 0.

Como antes, el problema de valores iniciales tiene solucion si, y solo si, se verifica $P = k^*A$, para alguna constante $k^* \varepsilon C$. Cuando eso sucede las soluciones al P.V.I. considerado son las funciones dadas por

$$(20)\qquad y(t) = \lambda y_1(t) + \frac{\lambda - k^*}{k} y_2(t)$$

siendo λ arbitrario, k y k^* los dados.

En efecto, en este caso el sistema (15) se escribe

$$(c_1 + c_2 k) A = k^* A$$

y, tomando $c_1 = \lambda$, por ser $k \neq 0$, sigue (20).

En particular tiene solucion el problema de valores iniciales homogeneo (19). Admite las infinitas funciones de la familia obtenida haciendo $k^* = 0$ en(20).

Hemos visto la forma de las funciones de $H_1(D)$ que, no siendo identicamente nulas, tienen en a ceros multiples, cuya existencia conociamos por la proposicion 12.

El estudio realizado y las familias de soluciones obtenidas en funcion de $y_1(t)$, $y_2(t)$, son independientes de y_1, y_2. Si se considera otro sistema fundamental z_1, z_2, se obtendran las mismas familias de funciones, aunque tendrán una expresión distinta.

5. PROBLEMAS DE LIMITES.

El problema que hasta ahora se ha intentado resolver daba como condiciones "accesorias" a la ecuacion (2) el valor de la funcion incognita y de su derivada en un punto de D.

Pues bien, analogamente a como sucede en ecuaciones diferenciales ordinarias se plantea un nuevo problema cuando se cambian las condiciones accesorias que hemos llamado "iniciales" por las consistentes en dar el valor de la funcion incognita en dos puntos distintos de D. La proposicion del problema, que ahora se llamará "de límites" en lugar de problema de valores iniciales, es la siguiente:

Dados dos puntos a,bεD y las constantes $k_1, k_2 \varepsilon C$, encotrar una funcion y(t) de $H_1(D)$ tal que :

$$(20) \qquad \begin{aligned} y(a) &= k_1 \\ y(b) &= k_2 \end{aligned}$$

Las condiciones (20) se llaman condiciones de limites.

Más generalmente, consideraremos condiciones del tipo:

$$(21) \qquad \begin{aligned} hy(a) + h'y'(a) &= A \\ ky(b) + k'y'(b) &= B \end{aligned}$$

donde h,h',k,k',A y B son constantes tales que h y h' no son a la vez nulas, así como tampoco lo son a la vez k y k'. El problema de limites que estudiaremos es el consistente en encontrar una funcion de $H_1(D)$ que verifique (21).

Los problemas de este tipo, en ecuaciones lineales, se estudian conociendo un sistema fundamental de soluciones de la ecuacion considerada. Así lo haremos aquí para la ecuacion (2), aunque el método es facilmente generalizable a la ecuacion (1).

Sea $y_1(t)$, $y_2(t)$ un sistema fundamental de (2) en D y constuyamos las funciones

$$\begin{aligned} F_i(t) &= hy_i(t) + h'y_i'(t) \\ G_i(t) &= ky_i(t) + k'y_i'(t) \end{aligned} \qquad i = 1, 2.$$

las cuales son Holomorfas en D.

PROPOSICION 13:

Para que exista una única funcion $y(t)$ de $H_1(D)$ que verifique (21) es condicion necesaria y suficiente que sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) \\ G_1(b) & G_2(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostracion:

Si la funcion

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

verifica (21), eso quiere decir que es

$$hc_1y_1(a) + hc_2y_2(a) + h'c_1y_1'(a) + h'c_2y_2'(a) = A$$

$$kc_1y_1(b) + kc_2y_2(b) + k'c_1y_1'(b) + k'c_2y_2'(b) = B$$

o, lo que es igual,

$$(22) \qquad \begin{aligned} c_1F_1(a) + c_2F_2(a) &= A \\ c_1G_1(b) + c_2G_2(b) &= B \end{aligned}$$

Para cada par de constantes A, B, existirá una única solucion c_1, c_2 de (22) si, y solo si, $\Delta \neq 0$.

La proposicion sigue ahora de la proposicion 8.

<u>Definicion</u>. Lamaremos problema'homogéneo'de limites al correspondiente a la condicion:

$$(23) \quad \begin{aligned} hy(a) + h'y'(a) &= 0 \\ ky(b) + k'y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

Resulta immediatamente la

PROPOSICION 14:

Para que existan soluciones no triviales del problema homogéneo de límites, esto es, para que haya funciones de $H_1(D)$ no identicamente nulas y verificando (23), es condicion necesaria y suficiente que sea $\Delta = 0$.

<u>Corolario</u> (Teorema de Alternativa)

Es condicion necesaria y suficiente para que el problema de límites correspondiente a la ecuacion (2) con las condiciones (21) tenga solucion única en $H_1(D)$, que el problema homogéneo correspondiente a las condiciones (23) no tenga solucion distinta de la trivial dada por la funcion identicamente nula en D.

PROPOSICION 15:

Para el problema de límites dado por la ecuacion (2) con las condiciones (21), si vale el teorema de existencia, vale tambien el de unicidad y reciprocamente.

Demostracion:

Si el problema no homogéneo admitiese dos soluciones distintas y, y^*, el homogéneo admitiria la solucion no trivial

$$y - y^*$$

Reciprocamente, si la solucion debe ser única, puesto que la funcion identicamente nula satisface (2) y las condiciones (21) y es la única, resulta $\Delta \neq 0$.

6. ECUACION CORRESPONDIENTE A UN SISTEMA FUNDAMENTAL DADO.

Sea $y_1(t)$, $y_2(t)$ un sistema fundamental de soluciones de (2) en D. Se verifica

$$(24) \quad \begin{aligned} y_1''(t) + a(t)y_1'(v(t)) + b(t)y_1(w(t)) &= 0 \\ y_2''(t) + a(t)y_2'(v(t)) + b(t)y_2(w(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por $y_2(w(t))$ la primera ecuacion de (24), la segunda por $y_1(w(t))$ y restando ambas, se obtiene:

$$(25) \quad \begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) \\ y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \end{vmatrix} + a(t) \begin{vmatrix} y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \\ y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \end{vmatrix} = 0$$

De igual forma, multiplicando la primera ecuacion de (24) por $y_2'(v(t))$ y la segunda por $y_1'(v(t))$ y restando, resulta:

$$\begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) \\ y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \end{vmatrix} - b(t) \begin{vmatrix} y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \\ y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$(26) \quad \begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) \\ y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \end{vmatrix} - b(t) \begin{vmatrix} y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \\ y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \end{vmatrix} = 0$$

Para cualesquiera dos funciones u_1, u_2 de $H(D)$, junto con el wronskiano de u_1, u_2, consideraremos el determinante

$$(27) \qquad T(u_1(t),u_2(t)) = \begin{vmatrix} u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) \\ u_1(w(y)) & u_2(w(y)) \end{vmatrix}$$

Como funcion de t, es $T(t)\varepsilon H(D)$.

PROPOSICION 16:

Siendo y_1,y_2 un sistema fundamental de soluciones de (2), se verifica:

i) $T(y_1(o),y_2(o)) \neq 0$.

ii) El conjunto de los ceros de $T(y_1(t),y_2(t))$ está determinado por la ecuacion (2) y es independiente del sistema fundamental elegido en $H_1(D)$.

iii) El conjunto de los ceros de $T(y_1(t),y_2(t))$ es discreto.

Demostracion:

i) En efecto, es $T(u_1(o),u_2(o)) = W(u_1(o),u_2(o))$ para cualquier par de funciones de $H(D)$.

ii) Si z_1, z_2 es otro sistema fundamental, $T(z_1(t), z_2(t))$ tiene los mismos ceros que $T(y_1(t), y_2(t))$, ya que poniendo

$$z_1(t) = c_{11}y_1(t) + c_{12}y_2(t)$$

$$z_2(t) = c_{21}y_1(t) + c_{22}y_2(t)$$

resulta:

$$T(z_1(t),\ z_2(t)) =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}y_1'(v(t)) + c_{12}y_2'(v(t)) & c_{21}y_1'(v(t)) + c_{22}y_2'(v(t)) \\ c_{11}y_1(w(t)) + c_{12}y_2(w(t)) & c_{21}y_1(w(t)) + c_{22}y_2(w(t)) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1'(v(t)) & y_2'(v(t)) \\ y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} T(y_1(t), y_2(t))$$

y por i) resulta

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

iii) Es consecuencia de ser $T(t) \in H(D)$ y de que, por i), es

$$T(t) \not\equiv 0.$$

<u>Nota</u>: i), iii) valen para cualquier par de funciones u_1, u_2

de $H(D)$ con $W(u_1(o),u_2(o)) \neq 0$. •

PROPOSICION 17:

Sean $v(t)$, $w(t)$ dos funciones de $H(D)$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} |v(t)| \leq |t| \\ |w(t)| \leq |t| \end{array}\right. \quad \text{en } D.$$

Entonces cualquier par de funciones u_1, u_2, de $H(D)$ tales que

$$W(u_1(o),u_2(o)) \neq 0$$

determina una única ecuacion de la forma (2) de la que u_1,u_2 es un sistema fundamental.

Demostracion:

Consideremos la ecuacion

$$(28) \quad \Delta(u_1,u_2,y) = \begin{vmatrix} u_1(w(t)) & u_2(w(t)) & y(w(t)) \\ u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) & y'(v(t)) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$$

la cual evidentemente se satisface tanto para $y = u_1$ como para $y = u_2$, siendo determinada por dichas funciones.

Desarrollando el determinante, (28) se escribe:

$$y''(t)\begin{vmatrix} u_1(w(t)) & u_2(w(t)) \\ u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) \end{vmatrix} - y'(v(t))\begin{vmatrix} u_1(w(t)) & u_2(w(t)) \\ u_1''(t) & u_2''(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ y(w(t))\begin{vmatrix} u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) \\ u_1''(t) & u_2''(t) \end{vmatrix} = 0$$

O sea

$$y''(t)T(u_1(t),u_2(t)) - y'(v(t)) \begin{vmatrix} u_1''(t) & u_2''(t) \\ u_1(w(t)) & u_2(w(t)) \end{vmatrix} +$$

$$+y(w(t)) \begin{vmatrix} u_1''(t) & u_2''(t) \\ u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) \end{vmatrix} = 0.$$

Puesto que $W(u_1(o),u_2(o)) \neq 0$, por la proposicion 16 (Nota), el conjunto de los ceros de $T(u_1(t),u_2(t))$ es discreto y en cada compacto de D solo hay un número finito.

En un entorno de cero es $T(t) \neq 0$. Por ello, en un entorno de cero las funciones

$$A(t) = \frac{- \begin{vmatrix} u_1''(t) & u_2''(t) \\ u_1(w(t)) & u_2(w(t)) \end{vmatrix}}{T(u_1(t),u_2(t))}$$

$$B(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1''(t) & u_2''(t) \\ u_1'(v(t)) & u_2'(v(t)) \end{vmatrix}}{T(u_1(t),u_2(t))}$$

son analíticas. Además en cada compacto de D solo tienen un número finito de polos.

La ecuacion

(29) $\qquad y''(t) + A(t)y'(v(t)) + B(t)y(w(t)) = 0,$

planteada en el entorno de cero mencionado, admite como sistema fundamental a u_1, u_2 y, por ello, todas sus soluciones pertenecen a $H(D)$.

La ecuacion (29) está univocamente determinada por u_1, u_2, como lo demuestran (25) y (26): si otra ecuacion como (2) admite u_1, u_2 como sistema fundamental, en un entorno del origen, que puede tomarse compacto, coinciden los coeficientes de (2) y de (29), que coinciden por ello en toda su region de analiticidad.

Para finalizar el capitulo veremos un ejemplo. Consideremos la ecuacion lineal de segundo orden

$$y''(t) + \frac{\cos t}{\cos t^2 + (t^2 - \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} t^2} \left\{ (\frac{\pi}{2} - t^2) y'(t^2) + y(t^2) \right\} = 0$$

cuyos coeficientes son regulares en el origen. Los desvios tienen el origen como punto atractivo en todo el disco unidad, siendo, por supuesto, regulares en el origen ya que son funciones enteras. Conocemos dos soluciones particulares de la ecuacion dada, regulares en el origen y linealmente independientes, que son

$$y_1(t) = \cos t$$

$$y_2(t) = t - {}^{\pi}/_2$$

Por consiguiente y_1, y_2 constituyen un sistema fundamental de la ecuacion, y todas las demas soluciones resultan ser funciones enteras, ya que lo son y_1, y_2 y la solucion general es combinacion lineal de ellas.

Observese que, sin embargo, el wronskiano del sistema fundamental tiene ceros, a pesar de que la ecuacion se verifica en todo el plano **C** salvo en los polos de los coeficientes. Resultados de este tipo nunca se presentan en ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPITULO V

1. INTRODUCCION.

En el presente capitulo, estudiaremos el comportamiento de las soluciones de una ecuacion lineal de primer orden tal como

(1) $$y'(t) + a(t)y(v(t)) = 0$$

en el entorno de una singularidad aislada de $a(t)$ y el de las soluciones de la ecuacion lineal de segundo orden

(2) $y''(t) + a(t)y'(v(t)) + b(t)y(w(t)) = 0$

en el entorno de un punto singular aislado de uno al menos de los coeficientes $a(t)$, $b(t)$.

Interesa ahora hacer algunas puntualizaciones. Por ejemplo, para la ecuacion (2):

Sea t_o uno de tales puntos. Si fuese t_o punto fijo de los desvios $v(t)$ y $w(t)$, atractivo en algun disco de centro t_o, podria tomarse dicho punto como origen. Si t_o no fuese punto fijo de los desvios, o aún siendolo, no fuese atractivo, supondremos siempre que existe un punto t_1, punto fijo de los desvios y tal que en el disco centrado en t_1 con radio $|t_1-t_o|$ se verifican las hipotesis de la proposicion 4 y de su apartado ii).(II-1,pag2o). Tomando t_1 como origen, t_o será la singularidad de los coeficientes más proxima al origen.

De igual forma, para (1), sea t_o un punto singular aislado de $a(t)$. Si el propio t_o no es punto fijo de $v(t)$, atractivo en algun disco de centro t_o, se supondrá que existe un t_1, punto fijo de $v(t)$, tal que en el disco centrado en t_1 con radio $|t_1-t_o|$ son analiticas $v(t)$ y $a(t)$ y además es t_1 punto fijo atractivo de $v(t)$ en dicho disco.

Así pues, vamos a estudiar los siguientes dos casos fundamentales:

1) El origen es punto singular aislado de algún coeficiente de la ecuacion.

2) t_o es la singularidad de $a(t)$, $b(t)$ o de ambos, más proxima al origen.

En ambos casos $v(t)$ y $w(t)$ se suponen analiticas en un disco abierto D, de centro el origen, verificando en D las condiciones:

$$
(3) \qquad \begin{aligned} |v(t)| &\leq |t| \\ |w(t)| &\leq |t| \end{aligned}
$$

En 1) estudiaremos el caso en que la singularidad de los coeficientes en el origen es un polo.

En el caso 2) supondremos $t_o \varepsilon D$ y que en (3) se verifican las desigualdades estrictas, lo que por el Lema de Schwartz equivale a que se descarta el caso en que $v(t)$ o $w(t)$ es un giro.

2. ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN. SINGULARIDADES EN EL ORIGEN.

En este paragrafo vamos a estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuacion (1) en el entorno del origen supuesto éste un punto singular de $a(t)$.

Como es usual, nos interesa saber si las soluciones serán uniformes, con lo cual nos asegurariamos que la posible singularidad que presentarian en el origen seria un polo o esencial a lo más. En general no ocurre así. Como veremos, en la mayoria de los casos, se presentan soluciones multiformes.

En primer lugar, buscaremos soluciones que tengan en el origen una singularidad del tipo de la que tiene la funcion z^{α}, para algún α real o complejo. Si α resultase entero negativo, la singularidad se reducirá a un polo y la solucion será uniforme.

Puesto que deberemos manejar la serie

$$(4) \qquad z^{\alpha} \sum_{n\geq 0} c_n z^n , \quad \alpha\varepsilon C,$$

y sustituir en ella el desarrollo de $v(t)$ en el origen dado por

$$(5) \qquad v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n} t^n$$

nos interesa obtener $(v(t))^{\alpha}$.

Para ello deberemos conocer el primer coeficiente no nulo de (5), sea v_{1j}. Dividiendo (5) por t^j resulta:

$$\frac{v(t)}{t^j} = v_{1j} + (v_{1,j+1}t + v_{1,j+2}t^2 + \ldots) = v_{1j} + g(t)$$

donde g(t) es regular en el origen y se anula en el.

Ahora bien, el desarrollo de la serie binomica es:

$$(\lambda+x)^{\mu} = \sum_{n\geq 0} \binom{\mu}{n} \lambda^{\mu-n} x^{n} \quad , \; \forall \mu \in \mathbb{C}, \; \lambda \neq 0, |x|<|\lambda| .$$

Debe cuidarse elegir la misma determinacion de $\log\lambda$ en todos los coeficientes.

La serie g(t) es sustituible en la serie que desarrolla

$$(v_{1j} + x)^{\alpha}$$

pues, en un cierto entorno de cero, será $|g(t)| < |v_{1j}|$.

Por consiguiente

$$\left(\frac{v(t)}{t^{j}}\right)^{\alpha} = (v_{1j} + g(t))^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} v_{1j}^{\alpha-n} (g(t))^{n} =$$

$$= v_{1j}^{\alpha} + \alpha v_{1j}^{\alpha} \left(\frac{v_{1,j+1}}{v_{1j}} t + \dots\dots\dots\dots \right) +$$

$$\binom{\alpha}{2} v_{1j}^{\alpha} \left(\frac{v_{1,j+1}}{v_{1j}} t + \dots\dots\dots \right)^{2} + \dots =$$

$$= v_{1j}^{\alpha} + \alpha v_{1j}^{\alpha-1} v_{1,j+1} t + \dots\dots\dots$$

En definitiva se obtiene una serie de la forma:

$$\left(\frac{v(t)}{t^{j}} \right)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha n} t^{n}$$

donde

$$u_{\alpha o} = u_{1j}^{\ \alpha} = \left(\frac{v^{j)}(o)}{j!} \right)^{\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$(6) \qquad (v(t))^{\alpha} = t^{j\alpha} \sum_{n \geq o} u_{\alpha n} t^{n}.$$

Esa es la expresion que resulta cuando j es el orden de la primera derivada de v(t) no nula en el origen. El caso más simple es cuando $v'(o) \neq 0$. Entonces resulta:

$$(7) \qquad (v(t))^{\alpha} = t^{\alpha} \sum_{n \geq 0} v_{\alpha n} t^{n},$$

donde

$$(8) \qquad v_{\alpha 0} = v_{11}^{\ \alpha} = (v'(o))^{\alpha}.$$

PROPOSICION 18

Dada la ecuacion (1), supongamos que la funcion desvio v(t) tiene no nula la derivada en el origen, esto es $v'(o) \neq 0$. Se verifica que si la ecuacion (1) admite en un entorno del origen una solucion de la forma

$$(9) \qquad y(t) = t^{\alpha} \phi(t)$$

siendo $\phi(t)$ regular en el origen y no identicamente nula y α complejo, entonces $a(t)$ tiene a lo sumo un polo de primer orden en el origen.

Demostracion:

Supuesto que la solucion admite un desarrollo tal como (4) convergente en un entorno del origen, se tiene:

$$y(v(t)) = (v(t))^{\alpha} \sum_{n\geq o} c_n (v(t))^n$$

Puesto que no se han impuesto condiciones a α, no hay perdida de generalidad en suponer $c_o \neq 0$, por lo que de (7) y (8) resulta que puede ponerse

(10) $$y(v(t)) = t^{\alpha}\psi(t),$$

con $\psi(t)$ regular en el origen y $\psi(o) \neq 0$.

Además

(11) $$y'(t) = \alpha c_o t^{\alpha-1} + (\alpha+1)c_1 t^{\alpha} + \dots\dots\dots =$$

$$= t^{\alpha-1}(\alpha c_o + (\alpha+1)c_1 t + \dots\dots\dots)$$

Por consiguiente, sigue de (10) y (11) que

$$a(t) = \frac{-y'(t)}{y(v(t))}$$

tiene, a lo sumo, un polo de primer orden en el origen.

<u>Notas</u>:

1) El hecho de ser $v'(o) \neq 0$, juega un papel fundamental en

el resultado obtenido. Si fuese $j>1$ el orden de la primera derivada de $v(t)$ no nula en el origen, en las mismas hipotesis de la proposicion puede tener $a(t)$ un punto de ramificacion en el origen de la misma forma que la funcion $1/z^{(j-1)\alpha+1}$ como puede verse utilizando (6) en lugar de (7) y reconstruyendo la demostracion anterior.

2) Si $\alpha \neq 0$, puede afirmarse que $a(t)$ tendrá, con seguridad, un polo de primer orden en 0.

Veamos a continuacion que efectivamente aparecen soluciones de la forma (9).

PROPOSICION 19 :

Consideremos la ecuacion (1) en la que suponemos que $v'(o) = v_{11} \neq 0$. Si $a(t)$ tiene un polo de primer orden en el origen, con residuo a_o, entonces (1) admite soluciones de la forma (9) para todos aquellos valores de $\alpha\varepsilon C$, soluciones de la ecuacion

(12) $$\phi(\alpha) = \alpha + a_o v_{11}^{\alpha} = 0$$

tales que $\alpha+n$ no sea solucion de (12) para $n\varepsilon N$ y que hagan convergente la serie

$$\phi(t) = \sum_{n\geq o} c_n t^n$$

en que fijado c_o, los restantes c_n, $n\geq 1$, están determinados por c_o y por α.

Demostracion:

Supongamos

$$(13) \qquad a(t) = \frac{1}{t}\,(a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots)$$

y representemos por $y(t)$ la serie (4). Entonces

$$y(v(t)) = (v(t))^{\alpha} \sum_{n \geq o} c_n (v(t))^n .$$

Como de costumbre, representamos

$$(14) \qquad (v(t))^h = \sum_{n \geq h} v_{hn} t^n , \text{ para } h \geq 1.$$

Resulta:

$$\sum_{n \geq o} c_n (v(t))^n = c_o + c_1 (v_{11} t + v_{12} t^2 + \ldots\ldots\ldots) +$$
$$+ c_2 (v_{22} t^2 + v_{23} t^3 + \ldots.) + \ldots =$$
$$= c_o + c_1 v_{11} t + (c_1 v_{12} + c_2 v_{22}) t^2 + \ldots. +$$
$$+ (c_1 v_{1n} + c_2 v_{2n} + \ldots. + c_n v_{nn}) t^n + \ldots..$$

lo que, junto con (7), nos permite poner

$$(15) \qquad y(v(t)) = t^{\alpha} (v_{\alpha o} + v_{\alpha 1} t + \ldots + v_{\alpha n} t^n + \ldots.)(c_o + \ldots + \sum_{j=1}^{n} c_j v_{jn} t^n + \ldots) =$$
$$= t^{\alpha} \sum_{n \geq o} p_n t^n$$

donde, por abreviar, se ha hecho

$$p_n = v_{\alpha n} c_o + v_{\alpha, n-1} c_1 v_{11} + \ldots + v_{\alpha o} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_{jn} \right)$$

siendo, por tanto, p_n un polinomio en c_o, $c_1, \dots . c_n$.

Sustituyendo (11), (13) y (15) en la ecuacion (1), resulta, igualando coeficientes,

$$
(16) \quad \begin{cases}
\alpha c_o + a_o v_{\alpha o} c_o = 0 \\
(\alpha+1)c_1 + (v_{\alpha 1} c_o + v_{\alpha o} c_1 v_{11}) a_o + v_{\alpha o} c_o a_1 = 0 \\
\text{-----------------------------------} \\
(\alpha+n)c_n + a_o v_{\alpha o} v_{nn} c_n + q_n(c_o, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0 \\
\text{-----------------------------------}
\end{cases}
$$

donde q_n es un polinomio en c_o, $c_1, \dots, c_{n-1}$.

Vemos que el coeficiente de c_n es $(\alpha+n)+a_o v_{11}^{\alpha+n}$, esto es, $\Phi(\alpha+n)$, ya que $v_{\alpha o} = v_{11}^{\alpha}$ por (8) y $v_{nn} = v_{11}^{n}$ por (14) de donde, siendo α solucion de $\Phi(\alpha) = 0$, puede elegirse arbitrariamente c_o y si $\alpha+n$ no es raiz de $\Phi(\alpha)$ para n natural, se determinan sucesivamente los c_n, $n \geq 1$, en el sistema (16).

Notas :

1) El espacio de soluciones en el entorno del origen ya no es un espacio vectorial de dos dimensiones, sino que, en general será de infinitas dimensiones, pues soluciones de la forma (9) correspondientes a distintos valores de α, son linealmente independientes y la ecuacion (12) tiene, en general, infinitas soluciones complejas.

2) De hecho, no todas las soluciones singulares tienen que

ser representables en la forma (9). Incluso para el caso en que a(t) tiene en el origen un polo de primer orden, pueden tambien presentarse soluciones de la forma

$$y(t) = \frac{c_{-k}}{t^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{t} + \phi(t)+\psi(t)\log t$$

donde $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son regualres en el origen y k es un cierto entero. Aese fin, véase el articulo de Izumi-(1), pag 14, en el cual, sin embargo, no se hace mencion de las soluciones de la forma (9), las cuales acabamos de probar que existen. Nada hace pensar que las singularidades que presenten las soluciones deban necesariamente poder clasificarse en esos dos tipos, puntos de ramificacion t^α o singularidad logaritmica. Incluso parece posible que se presenten soluciones teniendo en el origen una singularidad no aislada. La naturaleza del desvio tiene tanta influencia en esta cuestión, que impide tratarla con toda generalidad.

A continuacion damos un ejemplo en el que se presentan efectivamente soluciones de la forma (9).

Ejemplo

Sea la ecuacion

(17) $$ty'(t) = y({}^{t}/_{e})$$

la cual corresponde al caso en que $a(t) = -\frac{1}{t}$, $v(t) = \frac{t}{e}$.

En este caso $\Phi(\alpha) = \alpha - \frac{1}{e^\alpha}$.

La ecuacion

$$\Phi(\alpha) = 0$$

tiene una raiz real en el intervalo $(o,1)$, ya que $\Phi(\alpha)$ es continua en $[0,1]$, $\Phi(0) = -1 < o$, $\Phi(1) = \frac{e-1}{e} > o$.

Sea α_o esa raiz. Entonces la funcion

$$y(t) = \alpha_o t^{\alpha_o}$$

es de la forma (9) y es solucion de (7).

Nótese que α_o no será racional, ya que ni siquiera es algebraico.(Teorema de Hermite-Lindeman, Lang-(1),pag. 585).

3. ECUACION LINEAL DE SEGUNDO ORDEN. SINGULARIDADES EN EL ORIGEN.

Pasemos ahora a considerar la ecuacion (2). Puesto que buscamos soluciones de la forma (9), supondremos de momento que, por analogia con las ecuaciones diferenciales ordinarias, $a(t)$ tiene a lo sumo un polo de primer orden en el origen y $b(t)$ lo tiene a lo sumo de segundo orden.

PROPOSICION 20:

Sean

$$(18)\qquad \begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{t} \sum_{n\geq o} a_n t^n \\ b(t) &= \frac{1}{t^2} \sum_{n\geq o} b_n t^n \end{aligned}$$

válidos en un entorno perforado del origen. Supongamos que

$$(19)\qquad \begin{aligned} v'(o) &= v_{11} \neq 0 \\ w'(o) &= w_{11} \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuacion (2) admite soluciones de la forma (9) para todos aquellos valores de $\alpha \varepsilon C$, que satisfacen a la ecuacion:

$$(20)\qquad \phi(\alpha) = \alpha(\alpha+1) + a_o(\alpha+1)v_{11}^{\alpha} + b_o w_{11}^{\alpha+1} = 0$$

y tales que $\phi(\alpha+n)$ no vuelve a anularse para n natural y hacen convergente la serie

$$\phi(t) = \sum_{n\geq 1} c_n t^n$$

en que, fijado c_1, los restantes c_n quedan determinados por α y c_1.

Demostracion:

En primer lugar, así como v(t) admite el desarrollo (5) y sus potencias sucesivas el (14) junto con el (7) para la de exponente α, se tiene para w(t):

(21) $$(w(t))^h = \sum_{n\geq h} w_{hn} t^n \text{ , para } h\geq 1,$$

donde $w_{nn} = w_{11}^{\ n}$, trivialmente,

(22) $$(w(t))^\alpha = t^\alpha \sum_{n\geq o} w_{\alpha n} t^n \ ,$$

donde $w_{\alpha o} = w_{11}^{\ \alpha}$, habiendose conseguido (22) de la misma forma que se obtuvo (7).

Del mismo modo que se determinó $y(v(t))$ en la expresión (15) cuando era $y(t)$ de la forma (4), si ahora ponemos

(23) $$y(t) = t^\alpha \sum_{n\geq 1} c_n t^n$$

donde se supone $c_1 \neq 0$, resultará

(24) $$y(w(t)) = t^\alpha \sum_{n\geq 1} p_{wn} t^n$$

donde p_{wn} es un polinomio en $c_1, c_2, \ldots c_n$, de la forma:

(25) $$p_{wn} = \sum_{s=1}^{n} w_{\alpha,n-s} \left(\sum_{j=1}^{s} c_j w_{jn} \right).$$

Efectuando el producto $b(t)y(w(t))$ resulta de (18) y (24)

(26) $$b(t)y(w(t)) = t^{\alpha-2} \sum_{n\geq 1} q_{wn}(c_1, c_2, \ldots c_n) t^n$$

habiendo puesto

$$q_{wn} = b_o p_{wn} + b_1 p_{w,n-1} + \ldots + b_{n-1} p_{w1} \ .$$

Análogamente, de (23), se obtiene, para $y'(t)$:

$$y'(t) = t^{\alpha} \sum_{n\geq o} (\alpha+n+1)c_{n+1}t^n$$

Por ello

$$y'(v(t)) = (v(t))^{\alpha} \sum_{n\geq 1} (\alpha+n)c_n(v(t))^{n-1}$$

Pero es

$$\sum_{n\geq 1} (\alpha+n)c_n(v(t))^{n-1} = (\alpha+1)c_1+(\alpha+2)c_2(v_{11}t+v_{12}t^2+\ldots)+$$

$$+(\alpha+3)c_3(v_{22}t^2+\ldots)+\ldots=$$

$$= (\alpha+1)c_1 + (\alpha+2)c_2v_{11}t + \ldots\ldots+$$

$$+\left[(\alpha+2)c_2v_{1n}+\ldots+(\alpha+n+1)c_{n+1}v_{nn}\right]t^n+\ldots$$

De ello, junto con (22), resulta:

$$y'(v(t)) = t^{\alpha} (v_{\alpha o}+v_{\alpha 1}t+\ldots)(c_1(\alpha+1)+\ldots+t^n \sum_{s=1}^{n} (\alpha+s+1)c_{s+1}v_{sn}+\ldots)=$$

$$= t^{\alpha}(c_1(\alpha+1)v_{\alpha o} + \ldots.).$$

Tenemos entonces para $y'(v(t))$ un desarrollo similar a (24):

(27) $$y'(v(t)) = t^{\alpha} \sum_{n\geq o} p_{vn}t^n$$

donde p_{vn} es un polinomio de la forma

$$p_{vo}=(\alpha+1)c_1v_{\alpha o}$$

$$p_{vn}=(\alpha+1)c_1v_{\alpha n} + \sum_{j=1}^{n} v_{\alpha,n-j}\left[\sum_{s=1}^{j} (\alpha+s+1)c_{s+1}v_{sn}\right],\ \text{para } n\geq 1,$$

o sea, p_{vn} es un polinomio en $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$.

Efectuando el producto $a(t)y'(v(t))$ resulta, de (18) y (27):

$$(29)\qquad a(t)y'(v(t)) = t^{\alpha-2}\sum_{n\geq 1} q_{vn}(c_1,c_2,..,c_n)t^n$$

habiendo puesto

$$q_{vn} = a_{n-1}p_{vo}+a_{n-2}p_{v1}+....+a_o p_{v,n-1}.$$

Por ultimo, es

$$(30)\qquad y''(t) = t^{\alpha-2}\sum_{n\geq 1}(\alpha-1+n)(\alpha+n)c_n t^n .$$

De (26),(29)y (30) sustituidos en (2), se obtienen las ecuaciones:

$$(31)\quad \begin{cases} (\alpha+1)c_1 + a_o(\alpha+1)v_{\alpha o}c_1 + b_o w_{\alpha o}w_{11}c_1 = 0 \\ \text{---------------------------} \\ (\alpha+n-1)(\alpha+n)c_n + q_{vn}(c_1,..,c_n) + q_{wn}(c_1,...,c_n) = 0, n\geq 1 \\ \text{---------------------------} \end{cases}$$

El coeficiente de c_n en q_{vn} es

$$a_o v_{\alpha o}(\alpha+n)v_{n-1,n-1} = a_o(\alpha+n)v_{11}{}^{\alpha+n-1}$$

y en q_{wn} es

$$b_o w_{\alpha o} w_{nn} = b_o w_{11}{}^{\alpha+n}$$

luego la ecuacion general de (31) queda:

$$\left[(\alpha+n-1)(\alpha+n)+a_o(\alpha+n)v_{11}{}^{\alpha+n-1}+b_o w_{11}{}^{\alpha+n}\right]c_n+P_n(c_1,..c_{n-1})= 0 \qquad n>1$$

donde P_n es un polinomio en $c_1,c_2,..,c_{n-1}$.

Si consideramos la funcion

$$\Phi(\alpha) = \alpha(\alpha+1) + a_o(\alpha+1)v_{11}{}^{\alpha} + b_o w_{11}{}^{\alpha+1} ,$$

entonces (31) puede escribirse en la forma:

$$\Phi(\alpha)c_1 = 0$$

$$\Phi(\alpha+n)c_{n+1} + P_{n+1}(c_1,\ldots,c_n) = 0, \text{ para } n\geq 1.$$

lo que completa la demostracion.

Notas:

1) En general, la ecuacion $\Phi(\alpha) = 0$ tendrá infinitas soluciones complejas distribuidas en bandas curvilineas, de tal forma que si es α una de ellas, $\alpha+n$, para n grande, queda a la derecha de dichas bandas y no puede, por tanto, ser otra solucion. Un estudio detallado de los ceros de sumas exponenciales puede encontrarse en el articulo de Langer-(1). Para algunos casos más simples(cuando los coeficientes en los exponentes son reales) en el libro de Bellman y Cooke -(1), capitulo 12.

2) En el caso particular de que $v_{11} = w_{11} = 1$, en cuyo caso es facil ver que $v(t) = t = w(t)$, pues de lo contrario no seria 0 punto fijo atractivo de los desvios, resulta ser $\Phi(\alpha)$ un polinomio de segundo grado, la ecuacion indicial de la ecuacion diferencial ordinaria en que se convierte (2).

3) Debido a la extraordinaria complicacion de la expresion de los coeficientes, no se puede estudiar la convergencia de la serie obtenida en forma general. Dicho estudio deberá hacerse

en cada caso particular.

Veremos que, más generalmente, pueden obtenerse soluciones de la forma (9) cuando a(t) tiene en el origen un polo de orden cualquiera p, teniendo b(t) un polo de orden a lo sumo una unidad superior, p+1.

PROPOSICION 21:

Consideremos la ecuacion (2) y supongamos

$$v'(o) = v_{11} \neq 0, \quad w'(o) = w_{11} \neq 0.$$

Si a(t) tiene en el origen un polo de orden p y b(t) tiene en el origen un polo de orden, a lo sumo, p+1, admitiendo a(t) y b(t) los desarrollos:

$$(32) \qquad \begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{t^p} \sum_{n \geq o} a_n t^n \\ b(t) &= \frac{1}{t^{p+1}} \sum_{n \geq o} b_n t^n \end{aligned}$$

en un entorno perforado del origen, entonces la ecuacion(2) admite soluciones de la forma (9) para aquellos valores de ceros de la funcion

$$(33) \qquad \phi^*(\alpha) = (\alpha+1) a_o v_{11}^{\alpha} + b_o w_{11}^{\alpha+1} ,$$

tales que α+n no vuelva a ser cero de la funcion (33) para n natural y que hagan convergente la serie

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 1} c_n t^n$$

en la que fijado c_1, los restantes c_n quedan determinados en la que fijado c_1, los restantes c_n quedan determinados por α y c_1.

Demostracion:

Totalmente análoga a la de la proposicion anterior.

En lugar de (31) se obtendrá que debe ser:

$$(34)\quad \begin{aligned} & q_{vn}(c_1,\ldots,c_n) + q_{wn}(c_1,\ldots,c_n) = 0, \text{para } n=1,2,\ldots,p-1. \\ & (\alpha-p+n)(\alpha-p+n+1)c_{n+1-p}+q_{vn}+q_{wn} = 0 \ , \text{ para } n\geq p. \end{aligned}$$

ecuaciones que, con ayuda de $\Phi^*(\alpha)$ pueden escribirse:

$$\Phi^*(\alpha)c_1 = 0$$

$$\Phi^*(\alpha+n)c_{n+1}+P_n(c_1,c_2,\ldots,c_n) = 0, \ n\geq 1,$$

donde P_n es un polinomio en $c_1,\ldots,c_n$.

La proposicion siguiente nos permite asegurar que en determinados casos que dependen fundamentalmente de los desvios $v(t)$ y $w(t)$, solo se presentan soluciones de la forma (9) cuando $a(t)$ y $b(t)$ tienen en el origen singularidades que sean a lo sumo polos de ordenes p y $p+1$ respectivamente para algun p natural.

PROPOSICION 22:

Sea $v'(o) = v_{11} \neq 0$, $w'(o) = w_{11} \neq 0$,

y supongamos que (2) admite dos soluciones singulares de la forma (9) dadas por

$$y_1(t) = t^{\alpha}\phi_1(t), \quad y_2(t) = t^{\beta}\phi_2(t) \qquad \alpha,\beta\varepsilon C$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son regulares en el origen, no identicamente nulas. Se verifica:

i) Si el determinante

$$T(y_1(t),y_2(t)) = \begin{vmatrix} y'_1(v(t)) & y'_2(v(t)) \\ y_1(w(t)) & y_2(w(t)) \end{vmatrix}$$

no es identicamente nulo, entonces a(t) tiene en el origen a lo sumo un polo y b(t) un polo de orden una unidad superior.

ii) Si α y β pueden elegirse tales que

$$(\alpha+1)k^{\alpha}-(\beta+1)k^{\beta} \neq 0$$

donde se ha puesto $k={}^{v}11/w_{11}$, entonces el polo de a(t) es a lo sumo de primer orden y el de b(t), por tanto, a lo sumo de segundo orden.

Demostracion:

Puesto que y_1, y_2 verifican (2) resulta

$$y''_1(t)+a(t)y'_1(v(t)) + b(t)y_1(w(t)) = 0$$

$$y''_2(t)+a(t)y'_2(v(t)) + b(t)y_2(w(t)) = 0$$

y por el mismo artificio que en IV-6 se obtienen para a(t) y b(t) las siguientes expresiones como se obtuvieron IV-6-(25) y IV-6-(26):

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{y_1(w(t))\, y_2''(t) - y_1''(t) y_2(w(t))}{y_1'(v(t))\, y_2(w(t)) - y_1(w(t))\, y_2'(v(t))} \\[2ex]
b(t) &= \frac{y_2''(t) y_1'(v(t)) - y_1''(t) y_2'(v(t))}{y_1'(v(t))\, y_2(w(t)) - y_1(w(t))\, y_2'(v(t))}
\end{aligned}
$$

Si el denominador no es identicamente nulo, basta notar que la diferencia de grado entre denominador y numerador es un entero en $a(t)$ y el entero siguiente en $b(t)$. Eso prueba i).

En las dos expresiones (35) el denominador es, como hemos visto, $T(y_1(t), y_2(t))$. Supongamos que

$$y_1(t) = t^{\alpha} \sum_{n\geq 1} c_n t^n \quad , \; c_1 \neq 0,$$

$$y_2(t) = t^{\beta} \sum_{n\geq 1} d_n t^n \quad , \; d_1 \neq 0.$$

Entonces

$$T(y_1(t), y_2(t)) = t^{\alpha+\beta+1} \left[c_1 d_1 \left(v_{11}{}^{\alpha} w_{11}{}^{\beta+1} (\alpha+1) - (\beta+1) v_{11}^{\alpha} w_{11}{}^{\beta+1} \right) + [t] \right]$$

de donde el primer coeficiente de $T(y_1(t), y_2(t))$ solo puede anularse si se anula

$$(\alpha+1) v_{11}{}^{\alpha} w_{11}{}^{\beta+1} - (\beta+1) v_{11}^{\alpha} w_{11}^{\beta+1} = w_{11}{}^{\alpha+\beta+1} \left((\alpha+1) k^{\alpha} - (\beta+1) k^{\beta} \right).$$

Este hecho, junto con (35), prueba el apartado ii).

Corolario.-

Si la ecuacion(2), con $v'(o)\neq 0, w'(o)\neq 0$, admite dos soluciones singulares de la forma (9):

$$y_1(t) = t^{\alpha}\phi_1(t) \;, \; y_2(t) = t^{\beta}\phi_2(t)$$

para algún par de números reales distintos α y β, entonces $a(t)$ tiene a lo sumo, un polo de primer orden en el origen y $b(t)$ lo tiene a lo sumo de segundo orden.

Demostracion:

Para cualquier k complejo, la expresion

$$(\alpha+1)k^{\alpha} - (\beta+1)k^{\beta} \quad , \; \alpha,\beta\varepsilon R,$$

solo se anula si es $\alpha = \beta$, ya que

$$|(\alpha+1)k^{\alpha}-(\beta+1)k^{\beta}| \geq |Re((\alpha+1)k^{\alpha}-(\beta+1)k^{\beta})| =$$

$$=|(\alpha+1)e^{\alpha\log|k|}-(\beta+1)e^{\beta\log|k|}|$$

y la funcion

$$(x+1)e^{x\log|k|}$$

es estrictamente creciente en todo el eje real.

4. SINGULARIDADES EN PUNTOS DISTINTOS DEL ORIGEN

Para estudiar el caso 2) que citabamos en la introduccion del capitulo, consideremos la ecuacion (1)

Como ya dijimos, se supondrá $v(t)$ analítica en el disco abierto D, de centro el origen, teniendo a 0 como punto fijo atractivo en dicho disco y descartando además la posibilidad de que $v(t)$ sea un giro, lo que equivale a poner

(36) $$|v(t)|<|t| \text{ para } t\varepsilon D-\{o\},\ v(o) = 0.$$

Sea $t_o \varepsilon D$ la singularidad de $a(t)$ más proxima al origen. El teorema de existencia y unicidad proporciona entonces una única solucion de (1) analitica en el disco centrado en el origen y de radio $|t_o|$ determinada por su valor en el origen.

Veremos ahora que la solucion puede prolongarse a un disco perforado centrado en t_o.

Puesto que $a(t)$ tiene en t_o una singularidad aislada, en un entorno perforado de t_o es regular en cada punto.

Por ser $|v(t_o)|<|t_o|$, existe un disco D_1 de centro t_o tal que

$$|v(t)|<|t_o|,\ \forall t\varepsilon D_1,$$

luego en D_1 la funcion $y(v(t))$ es analítica. Puede haberse elegido D_1 de tal forma que en $D_1-\{t_o\}$ sea $a(t)$ regular.

Elegido un camino cerrado γ en D_1 que rodee t_o, la imagen por v de dicho camino, $v(\gamma)$, no sale de la region de analiticidad de $y(t)$. Prolongando la solucion mediante la ecuacion (1) a lo largo de un tal camino, la funcion $y'(t)$ resulta ser analitica en $D_1-\{t_o\}$, y uniforme si, y solo si, lo es $a(t)$.

Con esto queda establecida la siguiente proposicion:

PROPOSICION 23:

Si $a(t)$ tiene en $t_o \varepsilon D$ una singularidad aislada y es analítica en el disco $|t|<|t_o|$ entonces, es condicion necesaria y suficiente para que la derivada de una solucion analítica de (1) tenga un punto de ramificacion en t_o, que lo tenga $a(t)$.

PROPOSICION 24:

Si $a(t)$ tiene en t_o un polo de orden p y es analitica en $|t|<|t_o|$, entonces la derivada de cualquier solucion analítica de (1) tiene en t_o un polo del mismo orden a lo sumo.

Demostracion:

Por la proposicion 23 $y'(t)$ es uniforme en un entorno de t_o y solo puede tener, en el caso de ser singular en t_o, un polo o una singularidad esencial. Puesto que se verifica la ecuacion (1) en un entorno de t_o, y la funcion $y(v(t))$ es analitica en t_o, pudiendo anularse en él, $y'(t)$ tiene, a lo sumo, un polo del mismo orden que $a(t)$ en t_o.

Corolario.

Si $a(t)$ tiene en t_o un polo de orden p y es analítica en $|t|<|t_o|$, entonces toda solucion de (1) que tenga una singularidad en t_o puede expresarse en la forma:

$$y(t) = \frac{a_{-p+1}}{(t-t_o)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{t-t_o} + \psi(t) + k\log(t-t_o)$$

en un entorno de t_o, siendo k y a_{-s}, para s=1,..,p-1,constantes y $\psi(t)$ analitica en t_o.

Demostracion:

Es consecuencia de que y'(t) deba tener, a lo sumo, un polo de orden p en t_o.

Nota:

No puede precisarse, en cambio, el tipo de singularidad que tendrá y(t) en el caso de ser a(t) multiforme en t_o. Solo se tiene en ese caso la proposicion 23.

Análogamente, en hipótesis similares para los dos coeficientes a(t) y b(t) y para los dos desvios v(t) y w(t), se obtienen iguales resultados para la ecuacion (2).

BIBLIOGRAFIA

Abdi,W.H.

(1)-"A Bibasic functional equation"

Lect.Notes,243, 324-327 (1971)

Alfords,L.V.

(1)"Complex Analysis",Mc.Graw-Hill,New York (1953)

Bellman,R and Cooke,K.

(1) "Differential-Difference equations",

Academic Press, (1963)

Brand,L.

(1) "Differential and difference equations"

John Wiley and Sons,Inc. (1966)

Cartan,H.

(1) "Théorie élémentaire des fonctions analytiques

d'une ou plusieurs variables complexes"

Hermann, Paris (1961)

(2) "Calculo diferencial",Omega,Barcelona (1972)

Coddington,E.and Levinson,N.

(1) " Theory of Ordinary Differential equations"

Mc.Graw-Hill,New York (1955)

El'Sgol'ts,L.E.

(1) "Qualitative Methods in Mathematical Analysis" Trans.Math.Monographs,vol 12, A.M.S. (1964)

(2) "Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments" Holden-Day, San Francisco (1966)

El'Sgol'ts,L.E. and Norkin,S.B.

(1) "Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments" Academic Press, N.Y. (1973)

Flamant,P.

(1) "Sur une équation différentielle fonctionnelle linéaire",Rend.Circ.Mat.Palermo,48,135-208(1924)

(2) "Sur une equation differentielle fonctionnelle" C.R.Acad.Sci.Paris,178,60-62 (1924)

(3) "Sur la forme des solutions d'une equation differentielle fonctionnelle" C.R.Acad.Sci.Paris,178,1595-1597 (1924)

Franklin,J.

(1) "On the existence of solutions of Functional Differential Equations" Proc.Amer.Math.Soc.5,3, (1954) 363-396

Grudo,E.I.

(1) "On the analytic theory of differential equations with deviating arguments" Diff. Eq.5,4 (1969) 700-711

Hartman

(1) "Ordinary Differential Equations", Wiley,(1964)

Izumi,S.

(1) "On the theory of the linear functional differential equations", Tohoku Math.(1) 30, 10-18 (1929)

Lang, S.

(1) "Algebra", Addison Wesley, (1965)

Langer, R. E.

(1) "On the zeros of exponential Sums and Integrals" Bull.Amer.Math.Soc,vol <u>37</u> (1931) 213-239.

Leau

(1) "Sur les equations fonctionnelles", Comptes rendus Hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences, t.119 (2e semestre 1894) pp 901-902.

(2) "Sur l'emploi des certaines fonctions majorantes dans les theoremes d'existence".
Ibidem,t.178 (1er semestre 1924) 453-458.

Markushevich

(1) "Teoria de las funciones analiticas",2 tomos, Mir, Moscú, (1970)

Myskis, A.D.

(1) "General theory of differential equations with a retarded argument"
Amer.Math.Soc.Transl.(1) <u>4</u> (1962) 207-267.

Norkin, S. B.

(1) "Differential equations of the second order with retarded argument"
Transl. of Math. Monographs, vol 31, A.M.S. (1972)

Robinson, L. B.

(1) "A singular solution of a functional equation"
Bull.Amer.Math.Soc. 40, 661 (1934)

(2) "Sur une équation aux différences melées"
C.R.Acad.Sci.Paris 201, 1319 (1935)

(3) "Une pseudo-fonction et l'equation d'Izumi",
Bull.Soc.Math.France, 64, 66-70 (1936)

(4) "Complément a un étude sur l'equation fonctionnelle d'Izumi", Ibidem, 64 , 213-215 (1936)

(5) "On the equation of Izumi having a singular solution holomorphic except at the origin and a lacunary general solution",
Tohoku Math.J. (1) 43 310-313 (1937)

Rothe, R.

(1) "Matematica Superior", tercer tomo, Labor (1960)

Sansone, G.

(1) "Equazioni differenziali nel campo reale", 2 vol,
Zanichelli, Bologna (1956)

Tricomi, F.

(1) "Instituzioni di analisi superiore", 2ª edicion,
Cedam, Pádova (1970)

(2) "Equazioni differenziali", 4ª edicion,

Boringhieri (1967)

Valiron, G.

(1) "Sur les solutions d'une equation differentielle fonctionnelle"

Bull.Soc.Math.France, 54, 53-68 (1926)

(2) "Theorie des fonctions", Masson, Paris (1955)

101127246

FMA C 043/246

159

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo fir
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctor
D. Manuel Heredia Zapata
titulada ECUACIONES DIFERENCIALES CON ARGU-
MENTOS DESVIADOS EN EL CAMPO COMPLEJO

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente
cum laude

Sevilla, ocho de Julio 1.97

El Vocal, El Vocal, El Voca

El Presidente, El Secretario, El

A. Castro M Heredia