UNA EXTENSION DE METODOS ALGEBRAICOS

A LA TEORIA DE MODELOS

Memoria presentada por Alejandro Fernández Margarit para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

A. Margarit

Sevilla, Noviembre de 1982

Director de la Memoria:
Prof. D. Luis Mª Laita de la Rica

Luis Mª Laita

VºBº del Director del Departamento

José L. Vicente

José Luis Vicente Córdoba

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS
FACULTAD DE MATEMATICAS

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del Prof. Luis María Laita de la Rica, a quien expreso mi mayor agradecimiento por su constante estímulo durante la realización de la misma. Deseo asimismo, expresar mi agradecimiento a los miembros del Departamento de Algebra y Fundamentos, en particular a los Profesores José Luis Vicente Córdoba, director del mismo, y Agustín Riscos Fernández. La ayuda prestada por José Antonio Alonso Jiménez ha sido decisiva en todas las etapas de la realización de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

La Teoría de Modelos podría describirse en forma muy simplificada como la conjunción del Algebra Universal y de la Teoría de Lenguajes Formales. De esa conjunción surge una metodología propia que constituye hoy día un poderoso instrumento en la investigación de los Fundamentos y en la Matemática, pura o aplicada.

Son muchos los matemáticos que han contribuído al desarrollo de la Teoría de Modelos tal como es hoy, pero si quisiéramos hacer un resumen de ese desarrollo podríamos casi limitarnos a decir que la Teoría de Modelos nació en Europa, en concreto en Alemania y Polonia, y pasó -como otras muchas ciencias- a adquirir su madurez en los Estados Unidos. En América se crearon dos escuelas, llamadas del Este y del Oeste, ubicadas en las Universidades de Yale y de Berkeley respectivamente. La orientación en el Este fué más hacia la aplicación a la elaboración de las Matemáticas, y en el Oeste hacia los Fundamentos, aunque hoy día las dos corrientes se han fundido en una. Las dos personas que fundaron las escuelas fueron respectivamente Abraham Robinson y Alfred Tarski. El presente trabajo parte de algunas de las ideas sugeridas por Robinson pero aplica a esas ideas la metodología contemporánea de la Teoría de Modelos.

Volviendo a nuestra descripción, se ha dicho arriba que la Teoría de Modelos nació en Alemania y Polonia. En concreto lo que algunos lógicos de estos dos países adelantaron en los años 1915-1935 fué determinante del presente estado de la Teoría de Modelos. Como ilustración podemos fijarnos en el trabajo de Löwenheim y Skolem.

En el año 1915 apareció un artículo de Löwenheim con una primera versión de lo que hoy se conoce por el "teorema de Löwenheim-Skolem". En ese mismo trabajo aparece también el estudio del importante problema de la decisión para lógicas de primer orden con predicados de dos o de un argumento.

Como en otras ramas de la Matemática, un avance importante surgió aquí al concentrar la atención en algún punto simple, fuera de la corriente de complejidad creciente.

En efecto, los lógicos creyeron que ya conocían todo acerca de los lenguajes de primer orden, y pasaron a estudiar los de órdenes superiores. Löwenheim y Skolem, por influencia de Schöder, centraron su atención sólo en los lenguajes de primer orden y eso hizo posible el desarrollo posterior de la Teoría de Modelos.

El teorema al que nos hemos referido apareció en el artículo de Löwenheim de 1915 "Uber Möglichkeiten in Relativkalkul" (Math. Ann. 76) y fué posteriormente perfeccionado y extendido por Skolem en cuatro trabajos publicados desde 1920 a 1929, y por la tesis doctoral de Kurt Gödel. El teorema puede enunciarse de dos formas:

1) Si un conjunto T de sentencias de primer orden (una teoría) tiene un modelo, entonces tiene un modelo numerable.

2) Si T tiene un modelo M, entonces tiene un modelo numerable B que es subestructura de M.

Aplicando (1) a la teoría de conjuntos (tomando M=(conjunto de todos los conjuntos, $\in$)) se llega a la paradoja de la existencia de un modelo B numerable en el que la sentencia "existen conjuntos no numerables" es verdadera.

El estudio de estas paradojas influyó en el desarrollo de la Teoría de Modelos; pero lo que es más importante es que en la prueba de Skolem se llega a cierta forma del Teorema de Completud. La demostración de este teorema por Gödel es un hito el la historia de los Fundamentos.

En los Estados Unidos, y bajo la influencia de Tarski y Robinson la Teoría de Modelos adquirió su estructuración propia, similar a la del Algebra. Se definieron estructuras, homomorfismos entre estructuras, subestructuras, diagramas, cadenas, etc. Podríamos situar estos desarrollos en los años 1945-1960.

A partir del año 60 la Teoría de Modelos ha evolucionado suficientemente como para constituir un instrumento de investigación en otras ramas, y en particular en la Teoría de Conjuntos. Haciendo un esquema muy parcial del campo cubierto por la Teoría de Modelos se puede decir que ese campo consta de cuatro áreas: Lógica de primer orden, Algebra y sintaxis, Compacidad, y teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski.

El área de la Lógica de primer orden cubre las funciones de Skolem, interpolaciones, definibilidad, lógica algebraica y lógicas infinitarias y polivalentes. Dentro del Algebra y sintaxis se encuentra el estudio de submodelos, uniones de cadenas, homomorfismos, productos generalizados y reducción, y otros puntos.

El campo de Compacidad cubre las construcciones con constantes, diagramas, tipos, categoricidad, ultraproductos, etc.; y por último el campo de los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski envuelve el estudio de cadenas elementales, el teorema de Łoś-Vaught, el teorema de los dos cardinales, hipótesis de Kurepa, números de Hanf, etc.

El futuro de la Teoría de Modelos es prometedor. En opinión de Chang, el desarrollo futuro puede transcurrir a lo largo de las líneas siguientes:

- Aplicaciones a la teoría de conjuntos, álgebra y análisis.
- Aplicaciones de teoremas de Combinatoria a la Teoría de Modelos.
- Teoría de Modelos de lenguajes no numerables.
- Clasificación de modelos basada en nociones de complejidad diferentes a la cardinalidad.

El trabajo que se presenta a continuación podría encuadrarse dentro del primer punto. Consiste en la utilización de técnicas de la Teoría de Modelos aplicadas al Algebra y en la traducción de ideas algebraicas a la Teoría de Modelos; principalmente, en la definición del cociente en la Teoría de Modelos, utilizando una generalización de los ideales metamatemáticos introducidos por A. Robinson (ver Robinson 1955 y 1963).

Después de esta descripción del desarrollo de la Teoría de Modelos, expondremos alguna$s$ conceptos y métodos de ésta.

Como dijimos al principio, la Teoría de Modelos es la conjunción de sistemas formales y métodos del Algebra Universal. Es decir, es la relación entre conjuntos de fórmulas de un lenguaje de primer orden y las estructuras que lo satisfacen, i.e. sus modelos.

Comenzamos describiendo lo que entendemos por teoría de primer orden.

Una teoría de primer orden T está determinada por los siguientes cinco conjuntos:

(1) Símbolos primitivos, divididos en varias clases: Variables (x,y,z); funciones (f,g); predicados (p,q,r); conectivas ($\neg$, $\vee$); cuantificador ($\exists$); igualador (=) (= es un predicado binario). Las constantes son funciones 0-arias.

(2) Términos: determinados por las reglas:

(a) Las variables son términos, y

(b) Si f es un símbolo de función n-ario y $u_1,\ldots,u_n$ son términos, $fu_1\ldots u_n$ es un término.

(3) Fórmulas: determinadas por las reglas:

(a) Si p es un símbolo de predicado n-ario y $u_1,\ldots,u_n$ son términos, $pu_1\ldots u_n$ es una fórmula. (Las fórmulas obtenidas mediante esta regla se llaman atómicas).

(b) Si u y v son fórmulas, $\neg u$, $u \vee v$ y $\exists xu$ también lo son.

(4) Axiomas: Es un conjunto de fórmulas dividido

en dos clases: lógicos (comunes a todas las teorías) y no lógicos (específicos de cada teoría).

(5) Reglas de inferencia, que determinan cuando una fórmula, la conclusión, es inmediatamente derivable a partir de un conjunto de fórmulas, las premisas.

Los conjuntos (1), (2) y (3) forman el lenguaje, L(T) , de la teoría. Para referirnos a sus elementos usamos las siguientes notaciones: para las fórmulas A, B, C y para los términos a, b, c.

El conjunto de las fórmulas de T se representa por FL(T). Para designar algunos subconjuntos de FL(T) usaremos las siguientes notaciones:

$$At(T) = \{ A \in FL(T): A \text{ es atómica} \} .$$

Supondremos ordenado el conjunto de las variables: z_1, z_2,...

$S_n(T) = \{ A \in FL(T): \text{las variables libres de } A \text{ están en } \{z_1,\dots,z_n\}\}$.

Se definen recursivamente Π_n y Σ_n :

$$\Pi_0 = \Sigma_0 = \{ A \in FL(T): A \text{ es abierta (i.e. sin cuantificadores)}\}$$
$$\Pi_{n+1} = \{ \forall x_1 \dots \forall x_m\ A : A \in \Sigma_n \}$$
$$\Sigma_{n+1} = \{ \exists x_1 \dots \exists x_m\ A : A \in \Pi_n \}.$$

Notaremos por $u_{x_1,\dots,x_n}[a_1,\dots,a_n]$ la expresión obtenida sustituyendo en u las estancias libres de $x_1,\dots,x_n$ por los términos $a_1,\dots,a_n$. Cuando esté claro por el contexto, suprimiremos los subíndices.

Hasta ahora sólo se han usado los tres primeros conjuntos que determinan una teoría. Los otros dos conjuntos se introducen para definir el concepto de teorema. El conjunto de los teoremas de T lo representaremos por Con(T). Escribiremos $T \vdash A$ cuando $A \in Con(T)$ y $T \nvdash A$ en caso contrario.

Entre los teoremas sobre los sistemas formales destacamos el siguiente:

Teorema de la deducción: Si $A_1,\dots,A_n$ son fórmulas cerradas de T y B es una fórmula de T, son equivalentes:

$$T \vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \quad y \quad T + \{A_1,\dots,A_n\} \vdash B.$$

La aplicación del teorema cuando las fórmulas $A_1,\dots,A_n$ no son cerradas suele ir precedida por la aplicación del siguiente:

Teorema de las constantes: Sea T' la teoría obtenida añadiéndole a T nuevas constantes y A una fórmula de T. Si $e_1,\dots,e_n$ es una sucesión de nuevas constantes distintas, son equivalentes:

$$T \vdash A \quad y \quad T' \vdash A[e_1,\dots,e_n].$$

Vamos a describir ahora lo que entendemos por estructura.

Sea L un lenguaje de primer orden. Una L-estructura M consta de:

(1) un conjunto no vacío, $|M|$, llamado universo (cuyos elementos se llaman individuos)

(2) para cada símbolo de función n-aria f, una aplicación $f_M : |M|^n \longrightarrow |M|$; y

(3) para cada símbolo de predicado n-ario p, una relación n-aria $p_M \subset |M|^n$.

Las estructuras permiten interpretar términos y fórmulas de los lenguajes de primer orden. Para ello extendemos el lenguaje añadiendo una nueva constante por cada individuo de M. El lenguaje extendido se denota $L(M)$. Así, se definen:

$$M(\ ): \{\text{términos sin variables de } L(M)\} \longrightarrow |M|.$$

$$M(\ ): S_0(L(M)) \longrightarrow \{V,F\}.$$

mediante las siguientes reglas:

(1) Si a es un nombre, $M(a)$ es el individuo cuyo nombre es a.

(2) $M(fa_1 \dots a_n) = f_M(M(a_1),\dots,M(a_n))$

(3) $M(a = b) = V \longleftrightarrow M(a) = M(b)$

(4) $M(pa_1 \dots a_n) = V \longleftrightarrow p_M(M(a_1),\dots,M(a_n))$

(5) $M(\neg A) = H_\neg (M(A))$

(6) $M(A \vee B) = H_{\vee}(M(A), M(B))$

(7) $M(\exists xA) = V \longleftrightarrow M(A_x[a]) = V$ para algún nombre a de $L(M)$.

Sea $A(x_1,\dots,x_n)$ una fórmula de $L(M)$. Una M-estancia de $A(x_1,\dots,x_n)$ es una fórmula de la forma $A[a_1,\dots,a_n]$ donde $a_1,\dots,a_n$ son nombres de $L(M)$.

Una fórmula A de $L(M)$ es válida en M si para toda M-estancia A' de A, $M(A') = V$. Se indica por $M \models A$.

Un modelo de una teoría T es una $L(T)$-estructura M, tal que $M \models A$, para todo axioma A de T. Se indica por $M \in M(T)$

Si $\Gamma \subset FL(T)$, definimos:

$$\Gamma(M) = \{A' : A' \text{ es una M-estancia de } A \text{, con } A \in \Gamma\} .$$

Un teorema que relaciona los sistemas formales con las estructuras es el siguiente:

<u>Teorema de completitud</u>:Son equivalentes:

A es un teorema de T y A es válida en T.

Otra formulación del teorema es:

Son equivalentes: T es consistente (i.e. $Con(T) \neq FL(T)$) y T tiene modelos.

Este resultado, junto con el

<u>Teorema de compacidad</u>: T tiene modelos si, y sólo si, toda parte finita de T tiene modelos.

son los instrumentos básicos de la Teoría de Modelos.

En Teoría de Modelos existen conceptos análogos a los algebraicos como son: homomorfismos, isomorfismos, subestructuras y cadenas, que definiremos a continuación.

Sean M_1 y M_2 L-estructuras, y $\phi: |M_1| \longrightarrow |M_2|$.

ϕ es un homomorfismo de M_1 en M_2 , $\phi: M_1 \simeq M_2$, si para cualesquiera $a_1,\dots,a_n \in |M|$ es

$$f_{M_2}(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n)) = \phi(f_{M_1}(a_1,\dots,a_n))$$

$$p_{M_1}(a_1,\ldots,a_n) \longrightarrow p_{M_2}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)).$$

ϕ es un isomorfismo de M_1 en M_2, $\phi : M_1 \cong M_2$, si ϕ es biyectiva, y para cualesquiera $a_1,\ldots,a_n \in |M|$ es

$$f_{M_2}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)) = \phi(f_{M_1}(a_1),\ldots,a_n))$$
$$p_{M_1}(a_1,\ldots,a_n) \longleftrightarrow p_{M_2}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$$

M_1 es una subestructura de M_2, $M_1 \subset M_2$, si $|M_1| \subset |M_2|$ y para cualesquiera $a_1,\ldots,a_n \in |M_1|$ es

$$f_{M_2}(a_1,\ldots,a_n) = f_{M_1}(a_1,\ldots,a_n)$$
$$p_{M_2}(a_1,\ldots,a_n) \longleftrightarrow p_{M_1}(a_1,\ldots,a_n).$$

Los homomorfismos y subestructuras son casos especiales de Γ'-morfismos y Γ'-subestructuras.

Sean M_1 y M_2 L-estructuras, $\phi : |M_1| \longrightarrow |M_2|$ y Γ' un conjunto de fórmulas de L. ϕ es un Γ'-morfismo de M_1 en M_2, $\phi : M_1 \simeq_{\Gamma'} M_2$, si $M_2(A^{\phi}) = V$ para toda $A \in \Gamma'(M_1)$ tal que $M_1(A) = V$, donde A^{ϕ} es la fórmula obtenida sustituyendo en A el nombre de cada individuo $\underline{a}$ por el nombre de $\phi(\underline{a})$.

Sean M_1 y M_2 L-estructuras. M_1 es una Γ'-subestructura de M_2, $M_1 \subset_{\Gamma'} M_2$, si $|M_1| \subset |M_2|$ y $M_2(A) = V$ para toda $A \in \Gamma'(M_1)$ tal que $M_1(A) = V$.

Si Γ' es el conjunto de las fórmulas atómicas de L, M_1 y M_2 son L-estructuras y $\phi : |M_1| \longrightarrow |M_2|$; son equivalentes:

$$\phi : M_1 \simeq M_2 \quad \text{y} \quad \phi : M_1 \simeq_{\Gamma'} M_2.$$

Si Γ' es el conjunto de las fórmulas abiertas de L y M_1 y M_2 son L-estructuras tales que $|M_1| \subset |M_2|$, son equivalentes:

$$M_1 \subset M_2 \quad \text{y} \quad M_1 \subset_{\Gamma'} M_2.$$

Sin embargo, utilizando el teorema de Löwenheim-Skolem, se demuestra que los isomorfismos no son caracterizables mediante Γ'-morfismos.

Otra forma de caracterizar los homomorfismos y subestructuras es la construcción de modelos de ciertas teorías, llamadas diagramas, introducidas por L. Henkin y A. Robinson.

Sea M una L-estructura y Γ un conjunto de fórmulas de L. El Γ-diagrama de M, $D_{\Gamma}(M)$, es la teoría de lenguaje $L(M)$ y axiomas las fórmulas $A \in \Gamma(M)$ tales que $M(A) = V$. Cuando Γ es el conjunto de las fórmulas abiertas de L se escribe $D(M)$ en lugar de $D_{\Gamma}(M)$.

Sea M una L-estructura. Entonces

(i) El diagrama positivo de M es

$D^{+}(M) = \{$ fórmulas atómicas sin variables de $L(M)$ válidas en $M\}$

(ii) El diagrama negativo de M es

$D^{-}(M) = \{$ negación de fórmulas atómicas sin variables de $L(M)$ válidas en $M\}$

(iii) El diagrama de M, $\bar{D}(M)$, es la teoría de lenguaje $L(M)$ y axiomas $D^{+}(M) + D^{-}(M)$.

$D(M)$ y $\bar{D}(M)$ son teorías equivalentes.

Sean M_1 y M_2 L-estructuras tales que $|M_1| \subset |M_2|$, Γ un conjunto de fórmulas de L y $M_2(M_1)$ la expansión de M_2 a $L(M_1)$ que asocia a cada nombre a de $L(M_1)$ el individuo de M_2 cuyo nombre por M_1 es a. Son equivalentes:

$$M_1 \subset_{\Gamma} M_2 \qquad \text{y} \qquad M_2(M_1) \text{ es un modelo de } D_{\Gamma}(M_1)$$

Sean M_1 y M_2 dos L-estructuras, $\phi : |M_1| \longrightarrow |M_2|$ Γ un subconjunto de fórmulas de L y $M_2(\phi(M_1))$ la expansión de M_2 a $L(M_1)$ obtenida asignando $\phi(a)$ al nombre de a. Son equivalentes:

$$\phi : M_1 \simeq_{\Gamma} M_2 \qquad \text{y} \qquad M_2(\phi(M_1)) \text{ es modelo de } D_{\Gamma}(M_1).$$

Una sucesión de L-estructuras $M_1, M_2, \ldots$ es una cadena si para cada n $M_n \subset M_{n+1}$. Se define la $\bigcup M_n$ como la estructura de universo $\bigcup |M_n|$ interpretando las funciones y predicados de la forma usual.

Hemos expuesto cómo en la Teoría de Modelos se representan conceptos algebraicos. Existe una construcción algebraica, el cociente, que no ha sido aún representada. La parte central de este trabajo consiste en dar una definición del cociente en Teoría de Modelos y estudiar algunas de sus propiedades.

En Algebra el cociente de una estructura M se construye considerando un subconjunto P de M. La generalización de este procedimiento presenta las siguientes dificultades:

(1) En la teoría de grupos, P debe ser un subgrupo normal de M. Así, no todos los subconjuntos cerrados para la operación de grupo ni todos los subgrupos se utilizan para construir cocientes. En Teoría de Modelos, esto significa que no se deben considerar todas las subestructuras de M ni todas las subestructuras de M que son modelos de una teoría.

(2) En la teoría de anillos, P debe ser un ideal de M. Así, no es necesario que P sea un subanillo de M para construir cocientes. En Teoría de Modelos, esto significa que no hay que utilizar tan sólo subestructuras.

A la vista de esta situación, para definir el cociente de una estructura M no es conveniente referirse de forma directa a un subconjunto de M. Para salvar estas dificultades utilizamos los ideales metamatemáticos (m-ideales), introducidos por A. Robinson, que son un concepto sintáctico.

En la primera parte del parágrafo 1 se definen los m-ideales:

Sea T una teoría y Γ un subconjunto de FL(T). $\Delta \subset \Gamma$ es un m-ideal de Γ sobre T si para cualesquiera $A_1,\dots,A_n$ de Δ y $A \in \Gamma$

$$\text{si } T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \longrightarrow A \quad \text{entonces } A \in \Delta \ .$$

Además, se estudian para los m-ideales conceptos algebraicos usuales como: bases, extensiones,...; así como m-ideales irreducibles, caracterizándolos en el caso de conjuntos disjuntivos.

En la segunda parte se introduce el concepto de cociente:

Sean T una teoría, y M una $L(T)$-estructura. Consideramos $T' = T+D^{+}(M)$ y $\Gamma = At(M)$. Si Δ es un m-ideal de Γ sobre T', la relación

$$a \sim b \longleftrightarrow a=b \in \Delta$$

es de equivalencia. Definimos el cociente de M por Δ, M/Δ, como la $L(T)$-estructura cuyo universo es $|M|/\sim$ y

$$f_{M/\Delta}(a_1/\Delta, \ldots, a_n/\Delta) = (f_M(a_1,\ldots,a_n))/\Delta ,$$
$$p_{M/\Delta}(a_1/\Delta, \ldots, a_n/\Delta) \longleftrightarrow pa_1\ldots a_n \in \Delta .$$

Se prueba que M/Δ es imagen homomorfa de M y que si M' es un modelo de T y $\phi: M \simeq M'$, entonces

$$\ker \phi = \{ A \in At(M) : M'(A^{\phi}) = V \}$$

es un m-ideal de Γ sobre T'. A partir de esto se obtiene el primer teorema de isomorfía:

Si $\phi : M \simeq M'$ es suprayectivo y $M, M' \in M(T)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
|M| \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & |M'| \\
& |M/\ker \phi| \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\phi_1(a) = a/\ker\phi$ y $\phi_2(a/\ker \phi) = \phi(a)$. Además, ϕ_2 es un isomorfismo.

También se prueba que si $\Delta \subset \Delta'$ entonces $M/\Delta \simeq M/\Delta'$ y que los cocientes por m-ideales no se pueden caracterizar mediante teorías.

El parágrafo 2 sirve como "test" para la definición de cociente. Por lo dicho al analizar las dificultades que plantea su definición, consideramos las teorías de anillos conmutativos, grupos y álgebras de Boole.

Teoría de anillos: A cada m-ideal Δ se le asocia un subconjunto $\mathfrak{a}_\Delta$ del anillo M y se prueba que:

* $\mathfrak{a}_\Delta$ es un ideal de M ,
* $M/\Delta \cong M/\mathfrak{a}_\Delta$, donde $M/\mathfrak{a}_\Delta$ es el cociente algebraico usual.

Además, a cada ideal $\mathfrak{a}$ de M se le asocia un m-ideal $\Delta_\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a}_{\Delta_\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Teoría de grupos: A cada m-ideal Δ se le asocia un subconjunto H_Δ del grupo M y se prueba que:

* H_Δ es un subgrupo normal de M ,
* $M/\Delta \cong M/H_\Delta$, donde M/H_Δ es el cociente algebraico usual.

Teoría de álgebras de Boole: A cada m-ideal Δ se le asocian dos subconjuntos I_Δ y F_Δ del álgebra de Boole M y se prueba que:

* I_Δ es un ideal de M , y F_Δ es un filtro de M,
* I_Δ y F_Δ son duales,
* $M/I_\Delta \cong M/\Delta \cong M/F_\Delta$.

Las formalizaciones utilizadas para las teorías anteriores usan símbolos de funciones. Sin embargo, el análisis de las pruebas nos permite concluir que los resultados obtenidos siguen siendo válidos si éstas teorías se formalizan utilizando sólo símbolos de predicados.

Aunque aquí sólo examinamos estas tres teorías, los métodos empleados en las pruebas nos hacen creer que se obtendrían resultados análogos para el cociente en otras teorías (módulos, espacios vectoriales, etc.).

En el parágrafo 3 se estudian algunos problemas de la Teoría de Modelos relacionados con el cociente.

En la primera parte se estudia el problema de la persistencia. Una teoría T es persistente bajo cociente si para todo $M \in M(T)$ y todo $\Delta \in I(T+D^+(M), At(M))$, $M/\Delta \in M(T)$.

Las soluciones del problema de persistencia para otras construcciones de la Teoría de Modelos son:

Teorema de Loś-Tarski: T es persistente bajo subestructuras si, y sólo si, T es equivalente a una teoría cuyos axiomas son fórmulas abiertas.

Teorema de Chang-Loś-Suszko: T es persistente bajo uniones de cadenas si, y sólo si, T es equivalente a una teoría cuyas fórmulas son de Π_2.

Teorema de Lyndon: T es persistente bajo homomorfismos (i.e. la imagen homomorfa de un modelo de T es un modelo de T) si, y sólo si, T es equivalente a una teoría cuyos axiomas son fórmulas positivas.

El conjunto de fórmulas positivas, Pos, se define por las siguientes reglas:

(1) Las fórmulas atómicas son positivas;

(2) Si A, B $\in$ Pos, entonces $A \vee B$, $A \wedge B$, $\exists x A$, $\forall x A \in$ Pos.

En este trabajo hemos probado que:

(1) Si T es equivalente a una teoría cuyos axiomas pertenecen al conjunto

$$\mathrm{Pos} \cup \{ \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B : A_1, \ldots, A_n, B \in \mathrm{At} \}$$

entonces T es persistente bajo cociente.

(2) Si algún axioma de T pertenece a $\neg$Pos, T no es persistente bajo cociente.

Además, hemos estudiado el comportamiento para la persistencia bajo cociente de fórmulas no incluidas en los anteriores conjuntos. Este estudio nos sugiere que la existencia de una caracterización de las teorías persistentes bajo cocientes atendiendo sólo a la forma sintáctica de sus axiomas, si hay alguna, no es tan simple como en los teoremas de persistencia anteriormente enunciados.

En la segunda parte se demuestra el siguiente teorema de finitud:

Teorema: Sean T una teoría y M un modelo de T. Si para toda $M' \subset M$ tal que $M' \in M(T)$ y M' es finitamente generada se tiene que

$$M'/\Delta \in M(T) \quad \text{para todo} \quad \Delta \in I(T+D^{+}(M'), At(M'))$$

entonces

$$M/\Delta \in M(T) \quad \text{para todo} \quad \Delta \in I(T+D^{+}(M), At(M)).$$

Este teorema también está relacionado con el problema de persistencia.

En la tercera parte se estudian relaciones del cociente con otras construcciones de la Teoría de Modelos.

Una de estas construcciones es el ultraproducto que se define como sigue:

Producto de estructuras: Sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia no vacía de L-estructuras. Se define la estructura producto, $\prod_{i\in I} M_i$, por $|\prod_{i\in I} M_i| = \prod_{i\in I} |M_i|$ y

$$(f_{M_i}(a_1,\ldots,a_n))_j = f_{M_j}((a_1)_j,\ldots,(a_n)_j)$$

$$p_{\pi M_i}(a_1,\ldots,a_n) \longleftrightarrow p_{M_j}((a_1)_j,\ldots,(a_n)_j) \quad \text{para todo } j \in I.$$

Ultraproductos: Sea F un ultrafiltro sobre I. La relación

$$a \sim b \longleftrightarrow \{i \in I : a_i = b_i\} \in F$$

es de equivalencia en el $|\prod_{i\in I} M_i|$. Se define el ultraproducto de $\{M_i : i \in I\}$, y se designa por $\prod_{i\in I} M_i/F$, como la L-estructura de universo $|\prod_{i\in I} M_i|/\sim$ y

$$f_{\pi M_i/F}(a_1/F,\ldots,a_n/F) = f_{M_i}(a_1,\ldots,a_n)/F$$

$$p_{\pi M_i/F}(a_1/F,\ldots,a_n/F) \longleftrightarrow \{i \in I : p_{M_i}((a_1)_i,\ldots,(a_n)_i)\} \in F$$

Teorema fundamental de ultraproductos (Loś): Si para todo $i \in I$, $M_i \in M(T)$ y F es un ultrafiltro sobre I; entonces $\prod_{i\in I} M_i/F \in M(T)$.

Hemos demostrado que la construcción de ultraproductos se puede obtener mediante cocientes. Concretamente:

Si F es un ultrafiltro sobre I y para todo $i \in I$, $M_i \in M(T)$; entonces existe un $\Delta_F \in I(T+D^+(\prod_{i\in I} M_i), At(\prod_{i\in I} M_i))$ tal que $\prod_{i\in I} M_i/F \cong \prod_{i\in I} M_i/\Delta_F$.

Además, a cada m-ideal Δ le hemos asociado un filtro F tal que si F es un ultrafiltro, entonces $F_{\Delta_F} = F$.

Acabamos este parágrafo demostrando el siguiente resultado

Sean $M' \subset M$ L(T)-estructuras, $\Delta \in I(T+D^+(M), At(M))$ y $\Delta^c = \Delta \cap At(M')$. Entonces $\Delta^c \in I(T+D^+(M'), At(M'))$ y $M'/\Delta^c \subset M/\Delta$.

El parágrafo 4 está dedicado a estudiar los m-ideales con técnicas de Teoría de Modelos.

En la primera parte estudiamos las m-variedades simples. (ver Robinson [1963]).

Sean T una teoría, $M \in M(T)$, $\Gamma \subset S_n(T)$ y $V \subset |M|^n$. V es una m-variedad simple sobre M, $V \in V(T,\Gamma,M)$, si existe un $\Pi \subset \Gamma$ tal que

$$V_M(\Pi) = \{(a_1,\dots,a_n) \in |M|^n : \Pi \subset [a_1,\dots,a_n]_M\} = V$$

donde

$$[a_1,\dots,a_n]_M = \{A \in S_n(T) : M(A[a_1,\dots,a_n]) = V\}$$

es el n-tipo de $a_1,\dots,a_n$ en M.

Demostramos que la aplicación

$$\begin{aligned} V_M : I(T,\Gamma) &\longrightarrow V(T,\Gamma,M) \\ \Delta &\longmapsto V_M(\Delta) \end{aligned}$$

es suprayectiva, y que la aplicación

$$\begin{aligned} I_M : V(T,\Gamma,M) &\longrightarrow I(T,\Gamma) \\ V &\longmapsto I_M(V) \end{aligned}$$

donde $I_M(V) = \{A \in \Gamma : A \in [a_1,\dots,a_n]_M \text{ para todo } (a_1,\dots,a_n) \in V\}$ es inyectiva.

En la segunda parte estudiamos las m-variedades totales.

Sean $T^n = \bigcup_{M \in M(T)} \{(M,a_1,\dots,a_n) : (a_1,\dots,a_n) \in |M|^n\}$ y $V \subset T^n$. V es una m-variedad total, $V \in V(T,\Gamma)$, si existe un $\Pi \subset \Gamma$ tal que

$$V(\Pi) = \{(M,a_1,\dots,a_n) \in T^n : \Pi \subset [a_1,\dots,a_n]_M\} = V$$

Demostramos que las aplicaciones

$$\begin{aligned} V : I(T,\Gamma) &\longrightarrow V(T,\Gamma) \\ \Delta &\longmapsto V(\Delta) \qquad \text{y} \\ I : V(T,\Gamma) &\longrightarrow I(T,\Gamma) \\ V &\longmapsto I(V) \end{aligned}$$

donde $I(V) = \{A \in \Gamma : A \in [a_1,\dots,a_n]_M$ para todo $(M,a_1,\dots,a_n) \in V\}$, son biyectivas y $V^{-1} = I$.

En la tercera parte estudiamos los m-ideales maximales. Demostramos resultados que generalizan el teorema de los ceros de Hilbert en su forma débil:

<u>Lema</u>: Si $\Delta \in I(T,\Gamma)$ es maximal, entonces existen $M \in M(T)$ y $(a_1,\dots,a_n) \in |M|^n$ tales que

$$\Delta = [a_1,\dots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

<u>Teorema</u>: Sean T una teoría modelo completa (i.e. $T+D(M)$ es completa para todo $M \in M(T)$), M un modelo de T y $\Gamma \subset S_n(T+D(M))$ tal que $I(T+D(M),\Gamma)$ satisface la condición de máximo. Si $\Delta \in I(T+D(M),\Gamma)$ es maximal, entonces existen $a_1,\dots,a_n \in |M|$ tales que:

$$\Delta = [a_1,\dots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Terminamos el trabajo planteando algunos problemas que pueden ser una continuación natural de los que hemos resuelto.

BIBLIOGRAFIA

Addison, J.W., Henkin, L., Tarski, A. (editores)

[1965] The theory of Models (North Holland, Amsterdam)

Atiyah, M.F., MacDonald, I.G.

[1973] Introducción al Algebra Conmutativa (Reverté, Barcelona)

Barwise, J. (editor)

[1978] Handbook of Mathematical Logic (North Holland, Amsterdam)

Bell, J.L., Slomson, A.B.

[1969] Models and ultraproducts (North Holland, Amsterdam)

Bell, J., Machover, M.

[1977] A course in Mathematical Logic (North Holland, Amsterdam)

Chang, C.C., Keisler, H.J.

[1973] Model Theory (North Holland, Amsterdam)

Chang, C.C.

[1974] "Model Theory 1945-1971" Proceedings of the Tarski's Symposium (Am. Math. Soc.)

Fernández Margarit, A., Laita, L.M.

[1982] "Robinson's Rings" Alfred Tarski's Room Collection

[19--] "Una introducción del cociente en la Teoría de Modelos" Actas del Congreso de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia (por aparecer)

[19--] "The metamathematics of George Boole and Abraham Robinson, a comparison" Geschichte der Mathematik, Oberwolfach (por aparecer)

Fraenkel, A.A. y otros

[1973] Foundations of Set Theory (2nd. ed.) (North Holland, Amsterdam)

Gratzer, G.

[1968] Universal Algebra (Van Nostrand, New York)

Henkin, L. y otros (editores)

[1974] Proceedings of the Tarski's symposium (Am. Math. Soc.)

Jech, T.

[1978] Set Theory (Academic Press, New York)

Keisler, H.J.

[1971] Model Theory for infinitary Logic (North Holland,Amsterdam)

Kopperman, R.

[1972] Model Theory and its aplications (Allyum and Bacon)

Monk, J.D.

[1976] Mathematical Logic (Springer)

Robinson, A.

[1951] On the metamathematics of Algebra (North Holland, Amsterdam)

[1955] Théorie métamathématique des ideaux (Gauthier-Villars, Paris)

[1956] Complete Theories (North Holland, Amsterdam)

[1963] Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra (North Holland, Amsterdam)

[1979] "On the application of symbolic logic to Algebra" A. Robinson selected papers (3-11)

[1979] "Model Theory as a fromework for Algebra" A.Robinson selected papers (60-83)

Sacks, G.

[1972] Saturated Model Theory (Benjamin)

Saracino, D.H., Weispfenning, V.B.

[1975] Model Theory and Algebra (Springer L.N. n° 498)

Schoenfield, J.R.

[1967] Mathematical Logic (Addison Wesley)

Sikorski, R.

[1964] Boolean Algebras (Springer)

Vaught, R.L.

[1974] "Model Theory before 1945" Proceedings of the Tarski's symposium (Am. Math. Soc.)

Zariski, O., Samuel, P.

[1958] Conmutative Algebra (vol. 1) (Springer Verlag, New York)

§1. $\mathfrak{M}$-IDEALES. LA ESTRUCTURA COCIENTE.

El objetivo de este parágrafo es definir el cociente en Teoría de Modelos. Por las razones expuestas al comienzo del segundo apartado, para construir los cocientes usamos m-ideales. La primera parte está dedicada a la definición y estudio de los m-ideales. En la segunda parte se define el cociente y se demuestra un resultado análogo al primer teorema de isomorfía.

1.1 $\mathfrak{M}$-IDEALES

(A) Definiciones y resultados previos.

Definición 1. Sea T una teoría y $\Gamma \subset FL(T)$. Un subconjunto Δ de Γ diremos que es un m-ideal de Γ sobre T, si para cualesquiera $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$ y $A \in \Gamma$ tales que $T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$, entonces $A \in \Delta$.

Notas 2.

(i) Al conjunto de los m-ideales de Γ sobre T lo notaremos por $I(T,\Gamma)$.

(ii) Si $\Gamma \subset S_0(T)$ (es decir, los elementos de Γ son fórmulas cerradas), entonces $\Delta \in I(T,\Gamma)$ si y sólo si $Con(T+\Delta) \cap \Gamma \subset \Delta$.

Demostración:

($\rightarrow$) Si $A \in Con(T+\Delta) \cap \Gamma$, entonces $A \in Con(T+\Delta)$; y por el teorema de compacidad existen $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$ tales que:

$T + \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash A$, y como las $A_1, \ldots, A_n$ son cerradas

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$.

Ahora bien $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$, $A \in \Gamma$, y $\Delta \in I(T,\Gamma)$ por tanto $A \in \Delta$. En consecuencia $Con(T+\Delta) \cap \Gamma \subset \Delta$.

($\leftarrow$) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$, y $A \in \Gamma$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$, entonces

$T + \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash A$, y por lo tanto

$T + \Delta \vdash A$.

De lo anterior se sigue que $A \in Con(T+\Delta) \cap \Gamma$, así pues $A \in \Delta$; luego $\Delta \in I(T,\Gamma)$.

(iii) Sea $\Gamma \subset FL(T)$. Por cada variable z_j que ocurra libre en alguna fórmula de Γ, sea e_j una nueva constante; sea Q el conjunto de estas nuevas constantes y $T' = T + Q$. Definimos:

$*: FL(T) \longrightarrow FL(T')$ por $*(A) = A^*$, donde A^* es la fór mula $A^* = A_{z_{n_1},\ldots,z_{n_k}}[e_{n_1},\ldots,e_{n_k}]$

donde $z_{n_1},\ldots,z_{n_k}$ son las variables libres de A. Sea

$$\Gamma^* = \{A^* : A \in \Gamma\}$$

se verifican:

a) $\Gamma^* \subset S_0(T')$. Trivial

b) $*$ es una aplicación inyectiva. Trivial

c) $\Delta \in I(T,\Gamma)$ si y sólo si $\Delta^* \in I(T',\Gamma^*)$.

Demostración:

($\rightarrow$) Sean $A_1^*,\ldots,A_n^* \in \Delta^*$ y $A^* \in \Gamma^*$ tales que:

$T' \vdash A_1^* \wedge \ldots \wedge A_n^* \rightarrow A^*$, por el teorema de constantes

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$.

Y como $A_1,\ldots,A_n \in \Delta$, $A \in \Gamma$, y $\Delta \in I(T,\Gamma)$ se tiene que $A \in \Delta$, por lo tanto $A^* \in \Delta^*$.

($\leftarrow$) Análogamente.

(iv) La intersección de m-ideales es un m-ideal.

Demostración:

Sea $\mathcal{C} \subset I(T,\Gamma)$, veamos que $\bigcap \mathcal{C} \in I(T,\Gamma)$. Consideremos el conjunto $\mathcal{C}^* = \{\Delta^* : \Delta \in \mathcal{C}\}$, por (iii-c) $\mathcal{C}^* \subset I(T',\Gamma^*)$.

Sea $A^* \in Con(T'+(\bigcap \mathcal{C}^*)) \cap \Gamma^*$, entonces $A^* \in Con(T'+(\bigcap \mathcal{C}^*))$; por lo tanto, para todo $\Delta^* \in \mathcal{C}^*$, $A^* \in Con(T'+\Delta^*)$. Ahora bien, $\Delta^* \in I(T',\Gamma^*)$ y $A^* \in \Gamma^*$, en consecuencia $A^* \in \bigcap \mathcal{C}^*$, luego $Con(T'+(\bigcap \mathcal{C}^*)) \cap \Gamma^* \subset \bigcap \mathcal{C}^*$, de aquí por (iii-a) y (ii) $\bigcap \mathcal{C}^* \in I(T',\Gamma^*)$. Ahora bien , $\bigcap \mathcal{C}^* = (\bigcap \mathcal{C})^*$, luego por (iii-c) $\bigcap \mathcal{C} \in I(T,\Gamma)$.

(v) Sean $\Delta_1,\ldots,\Delta_n \in I(T,\Gamma)$ notaremos su intersección por $[\Delta_1,\ldots,\Delta_n]$.

Definiciones 3. Sean T una teoría y $\Gamma \subset FL(T)$.

a) Diremos que Γ es contradictorio respecto de T si para cualquier $A \in FL(T)$ existen $A_1,\dots,A_n \in \Gamma$ tales que:

$$T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to A .$$

b) Diremos que Γ es disjuntivo respecto de T, y notaremos $\Gamma \in \underline{V}(T)$, si para cualesquiera $A_1, A_2 \in \Gamma$ existe $A \in \Gamma$ tal que $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$.

c) Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$, diremos que $\Pi \subset \Delta$ es una base de Δ si para cualquier $A \in \Delta$ existen $A_1,\dots,A_n \in \Pi$ tales que

$$T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to A .$$

d) Sea $\Pi \subset \Gamma$, definimos el m-ideal de Γ sobre T generado por Π, y notaremos por $\langle \Pi \rangle$, como la intersección de todos los m-ideales de Γ sobre T que contienen a Π.

Por (2-(iv)) $\langle \Pi \rangle$ es un m-ideal de Γ sobre T.

e) Sean $\Delta_1,\dots,\Delta_n \in I(T,\Gamma)$, definimos su suma por:

$$(\Delta_1,\dots,\Delta_n) = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \right\rangle .$$

f) Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$, diremos que Δ es irreducible si de ser $\Delta = [\Delta_1,\Delta_2]$ con $\Delta_1,\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$, entonces $\Delta = \Delta_1$ o $\Delta = \Delta_2$. Caso contrario diremos que Δ es reducible.

g) Diremos que $I(T,\Gamma)$ satisface la condición de máximo (mínimo) si toda cadena ascendente (descendente) de elementos de $I(T,\Gamma)$ es estacionaria.

<u>Notas 4</u>.

(i) Si Γ es contradictorio respecto de T, entonces existen $A_1,\dots,A_n \in \Gamma$ tales que para toda $A \in FL(T)$

$$T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to A .$$

<u>Demostración</u>:

Sean T' y Γ^* como en (2-(iii)). Se tiene que:

(1) $T' + \Gamma^*$ es inconsistente.

Sea $A \in FL(T)$, como Γ es contradictorio respecto de T existen $B_1,\dots,B_k \in \Gamma$ tales que:

$T \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \to A$, por el teorema de constantes

$T' \vdash B_1^* \wedge \ldots \wedge B_k^* \to A^*$ (¡)

Análogamente como $\neg A \in FL(T)$ y $(\neg A)^*$ es $\neg A^*$ existen

$C_1, \ldots, C_m \in \Gamma$ tales que:

$T' \vdash C_1^* \wedge \ldots \wedge C_m^* \to \neg A^*$ (¡¡)

De (¡) y (¡¡) se tiene que $T' + \Gamma^* \vdash A^*$ y $T' + \Gamma^* \vdash \neg A^*$.

Lo cual prueba (1).

Por el teorema de compacidad de (1) se sigue que existen $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$ tales que $T' + \{A_1^*, \ldots, A_n^*\}$ es inconsistente. Sea $A \in FL(T)$, entonces $A^* \in FL(T')$ y por lo anterior

$T' + \{A_1^*, \ldots, A_n^*\} \vdash A^*$, como las A_i^* son cerradas

$T' \vdash A_1^* \wedge \ldots \wedge A_n^* \to A^*$, y por el teorema de constantes

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$. Lo que prueba (i).

(ii) Si Γ es contradictorio respecto de T y $\Delta \in I(T,\Gamma)$ tal que $\Delta \neq \Gamma$, entonces existe $\Delta_1 \in I(T,\Gamma)$ maximal tal que $\Delta \subset \Delta_1$.

Demostración:

Puesto que Γ es contradictorio respecto de T, por (i) existen $B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$ tales que para toda $A \in FL(T)$

$T \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \to A$. Por tanto

(1) Si $\Delta' \in I(T,\Gamma)$ es tal que $B_1, \ldots, B_m \in \Delta'$, entonces $\Delta' = \Gamma$.

Sean $\mathcal{C} = \{\Delta' \in I(T,\Gamma) : \Delta \subset \Delta'$ y $\Delta' \neq \Gamma\}$ y $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ una cadena se verifican:

(2) $\mathcal{C} \neq \phi$. Pues $\Delta \in \mathcal{C}$.

(3) $\bigcup \mathcal{C}' \in I(T,\Gamma)$.

Si $A_1, \ldots, A_n \in \bigcup \mathcal{C}'$ y $A \in \Gamma$ son tales que:

$$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A .$$

Entonces como existe $\Delta' \in \mathcal{C}'$ tal que $A_1, \ldots, A_n \in \Delta'$, y $\Delta' \in I(T,\Gamma)$ se tiene que $A \in \Delta'$, por tanto $A \in \bigcup \mathcal{C}'$.

Y en consecuencia $\bigcup \mathcal{C}' \in I(T,\Gamma)$. Lo que prueba (3).

(4) $\bigcup \mathcal{C}' \neq \Gamma$.

Pues caso contrario $B_1,\ldots,B_m \in \bigcup \mathcal{C}'$, y por tanto existe $\Delta' \in \mathcal{C}'$ tal que $B_1,\ldots,B_m \in \Delta'$. De aquí por (1) $\Delta' = \Gamma$, lo cual contradice la definición de $\mathcal{C}$.

De (3) y (4) toda cadena de $\mathcal{C}$ tiene una cota superior; de esto y (2) por el lema de Zorn $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, sea Δ_1 un tal elemento. Es claro que Δ_1 es un m-ideal maximal de Γ sobre T y $\Delta \subset \Delta_1$. Lo que prueba (ii).

(iii) Sea $\Pi \subset \Gamma$. Π es una base de $\Delta \in I(T,\Gamma)$ si y sólo si $\langle \Pi \rangle = \Delta$.

<u>Demostración</u>:

($\rightarrow$)

$\subset$ Si Π es una base de $\Delta \in I(T,\Gamma)$, entonces $\Delta \in \{\Delta' \in I(T,\Gamma): \Delta \subset \Delta'\}$. Por tanto $\langle \Pi \rangle \subset \Delta$.

$\supset$ Sea $A \in \Delta$, existen $A_1,\ldots,A_n \in \Pi$ tales que $T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$. Luego para todo $\Delta' \in I(T,\Gamma)$ tal que $\Pi \subset \Delta'$ se tiene que $A \in \Delta'$; y por tanto $A \in \langle \Pi \rangle$.

($\leftarrow$) Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$ y $\Pi \subset \Gamma$. Se verifican:

(1) $\Pi \subset \Delta$ si y sólo si $\Pi^* \subset \Delta^*$. Trivial.

(2) $\langle \Pi \rangle = \Delta$ si y sólo si $\langle \Pi^* \rangle = \Delta^*$.

($\rightarrow$) Sea $B^* \in \langle \Pi^* \rangle$, entonces para todo $\Delta'^* \in I(T',\Gamma^*)$ tal que $\Pi^* \subset \Delta'^*$, $B^* \in \Delta'^*$. Por tanto para todo $\Delta' \in I(T,\Gamma)$ tal que $\Pi \subset \Delta'$, $B \in \Delta'$; en consecuencia como $\langle \Pi \rangle = \Delta$, se tiene que $B \in \Delta$, luego $B^* \in \Delta^*$. Esto es, $\langle \Pi^* \rangle \subset \Delta^*$.

Sea $B^* \in \Delta^*$, entonces $B \in \Delta$ y por tanto $B \in \langle \Pi \rangle$. Así pues para todo $\Delta' \in I(T,\Gamma)$ tal que $\Pi \subset \Delta'$, $B \in \Delta'$. Luego para todo $\Delta'^* \in I(T',\Gamma^*)$ tal que $\Pi^* \subset \Delta'^*$, $B^* \in \Delta'^*$. Por tanto $B^* \in \Pi^*$. Así pues $\Delta^* \subset \langle \Pi^* \rangle$.

Y de ambas inclusiones se tiene la igualdad.

($\leftarrow$) Análogamente.

(3) Π^* es una base de Δ^* si y sólo si $\langle\Pi^*\rangle = \Delta^*$.

($\rightarrow$) Es la parte ($\rightarrow$) de (iii).

($\leftarrow$) Consideremos el conjunto $Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^*$, y probemos que es un m-ideal de T' sobre Γ^* .

Sea $B^* \varepsilon\ Con(T'+(Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^*))\cap\Gamma^*$, por el teorema de compacidad existen $B_1^*,\ldots,B_m^* \varepsilon\ Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^*$ tales que $T' + \{B_1^*,\ldots,B_m^*\} \vdash B^*$, y por tanto

$T' \vdash B_1^*\wedge\ldots\wedge B_m^* \rightarrow B^*$.

Ahora bien $i = 1,\ldots,m$ $B_i^* \varepsilon\ Con(T'+\Pi^*)$, por tanto para cada $i = 1,\ldots,m$ existen $B_1^{i*},\ldots,B_{k_i}^{i*} \varepsilon\ \Pi^*$ tales que

$T' \vdash B_1^{i*}\wedge\ldots\wedge B_{k_i}^{i*} \rightarrow B_i^*$. Por tanto

$T' \vdash B_1^{1*}\wedge\ldots\wedge B_{k_1}^{1*} \wedge \ldots\wedge B_1^{m*}\wedge\ldots\wedge B_{k_m}^{m*} \rightarrow B^*$.

En consecuencia, $B^* \varepsilon\ Con(T'+\Pi^*)$. Y de aquí por (2-(i)) se sigue que $Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^* \varepsilon\ I(T',\Gamma^*)$. De aquí como $\Pi^*\subset Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^*$, entonces $\langle\Pi^*\rangle\subset Con(T'+\Pi^*)\cap\Gamma^*$. Sea $A^* \varepsilon\ \Delta^* = \langle\Pi^*\rangle$, entonces $A^* \varepsilon\ Con(T'+\Pi^*)$. Por lo tanto existen $A_1^*,\ldots,A_n^* \varepsilon\ \Pi^*$ tales que

$T' \vdash A_1^*\wedge\ldots\wedge A_n^* \rightarrow A^*$. Y por tanto Π^* es una base de Δ^*.

Utilizando lo anterior completamos la prueba de (iii).

Sea $A \varepsilon\ \Delta$, y supongamos que $\langle\Pi\rangle = \Delta$, entonces por (2) $\langle\Pi^*\rangle = \Delta^*$, y de aquí por (3) Π^* es una base de Δ^* , como $A^* \varepsilon\ \Delta^*$ existen $A_1^*,\ldots,A_n^* \varepsilon\ \Pi^*$ tales que:

$T' \vdash A_1^*\wedge\ldots\wedge A_n^* \rightarrow A^*$, y por el teorema de constantes

$T \vdash A_1\wedge\ldots\wedge A_n \rightarrow A$.

Y puesto que $A_1,\ldots,A_n \varepsilon\ \Pi$ se tiene que Π es una base de Δ .

(iv) Sea $\Delta \varepsilon\ I(T,\Gamma)$. Δ es irreducible si y sólo si lo es Δ^*.

<u>Demostración</u>:

La prueba es inmediata pues $\Delta = [\Delta_1,\Delta_2]$ si y sólo si $\Delta^* = [\Delta_1^*,\Delta_2^*]$.

(v) $I(T,\Gamma)$ satisface la condición de máximo (mínimo) si y sólo si $I(T,\Gamma^*)$ satisface la condición de máximo (mínimo).

(vi) Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) $I(T,\Gamma)$ satisface la condición de máximo.

b) Todo $\mathcal{C} \subset I(T,\Gamma)$ tiene elemento maximal.

c) Todo $\Delta \in I(T,\Gamma)$ tiene una base finita.

(vii) Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) $I(T,\Gamma)$ satisface la condición de mínimo.

b) Todo $\mathcal{C} \subset I(T,\Gamma)$ tiene elemento minimal.

(viii) Si $I(T,\Gamma)$ satisface la condición de máximo, entonces todo m-ideal de Γ sobre T puede ser descompuesto como intersección finita de m-ideales irreducibles.

Las pruebas de (v)-(viii) se obtienen de forma inmediata con los procedimientos algebraicos habituales.

(B) Extensión y contracción de m-ideales.

En los resultados anteriores hemos utilizado $I(T',\Gamma^*)$ para estudiar $I(T,\Gamma)$. Tratamos aquí de generalizar este procedimiento.

Lema 5. Sea T_2 una extensión de T_1 y $\Gamma \subset FL(T_1) \subset FL(T_2)$. Se verifican:

a) $I(T_2,\Gamma) \subset I(T_1,\Gamma)$

b) Si $I(T_1,\Gamma)$ satisface la condición de máximo, entonces $I(T_2,\Gamma)$ también.

Demostración:

a) Sea $\Delta \in I(T_2,\Gamma)$. Sean $A_1,\ldots,A_n \in \Delta$ y $A \in \Gamma$ tales que $T_1 \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$, como T_2 es una extensión de T_1 $T_2 \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$.

Por tanto $A \in \Delta$; y de aquí se sigue que $\Delta \in I(T_1,\Gamma)$.

b) La prueba es inmediata a partir de a).

<u>Definición 6</u>. Sean $\Gamma \subset \Gamma' \subset FL(T)$, $\Delta \in I(T,\Gamma)$, y $\Delta' \in I(T,\Gamma')$; definimos:

a) el m-ideal extendido de Δ en Γ' , y notaremos Δ^e , como el m-ideal de Γ' sobre T generado por Δ .

b) el m-ideal contraido de Δ' en Γ , por $\Delta'^c = \Delta' \cap \Gamma$.

<u>Notas 7</u>.

En lo que sigue supondremos que estamos en las condiciones de la definición anterior.

(i) Es claro que de ser $\Delta \in I(T,\Gamma)$ no es necesariamente Δ un m-ideal de Γ' sobre T . Tenemos una aplicación

$$e : I(T,\Gamma) \longrightarrow I(T,\Gamma')$$

definida por $e(\Delta) = \Delta^e$. Se verifican:

a) e es inyectiva.

<u>Demostración</u>:

Sean $\Delta_1,\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ con $\Delta_1 \neq \Delta_2$, entonces existe $A \in \Gamma$ tal que $A \in \Delta_1 - \Delta_2$ (o al revés). Probemos que $A \in \Delta_1^e - \Delta_2^e$. En efecto, pues caso contrario $A \in \Delta_2^e = \langle \Delta_2 \rangle$ y por (4-(iii)) existen $A_1,\ldots,A_n \in \Delta_2$ tales que:

$$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A \ .$$

Ahora bien, $A \in \Gamma$ y $\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$, por tanto $A \in \Delta_2$ lo cual está en contradicción con ser $A \in \Delta_1 - \Delta_2$.

b) El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} I(T,\Gamma) & \xrightarrow{e} & I(T,\Gamma') \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & {\scriptstyle *}\downarrow \\ I(T',\Gamma^*) & \xrightarrow{e} & T(T',\Gamma'^*) \end{array}$$

<u>Demostración</u>:

Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$, y probemos que $(\Delta^*)^e = (\Delta^e)^*$.

$\subset$ Sea $A^* \in (\Delta^*)^e = \langle \Delta^* \rangle$, por (4-(iii)) existen $A_1^*,\ldots,A_n^* \in \Delta^*$ tales que:

$T' \vdash A_1^* \wedge \ldots \wedge A_n^* \to A^*$; por el teorema de constantes ,

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$.

Ahora bien, $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$, por tanto $A \in \Delta^e$, y en consecuencia $A^* \in (\Delta^e)^*$.

$\subset$ Sea $A^* \in (\Delta^e)^*$, entonces $A \in \Delta^{e} = \langle \Delta \rangle$; así pues, existen $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$, por lo tanto,

$T' \vdash A_1^* \wedge \ldots \wedge A_n^* \to A^*$.

Ahora bien, $A_1^*, \ldots, A_n^* \in \Delta^*$ y $A^* \in \Gamma'^*$; en consecuencia, $A^* \in \langle \Delta^* \rangle = (\Delta^*)^e$.

(ii) $\Delta'^c \in I(T,\Gamma)$.

Demostración:

Sean $A_1, \ldots, A_n \in \Delta'^c$ y $A \in \Gamma$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$.

Como $A \in \Gamma'$ y $\Delta' \in I(T,\Gamma')$, entonces $A \in \Delta'$. Por tanto, $A \in \Delta' \cap \Gamma = \Delta'^c$. Lo que prueba (ii).

(iii) Por (ii) tenemos definida una aplicación

$$c: I(T,\Gamma') \longrightarrow I(T,\Gamma)$$

por $c(\Delta') = \Delta'^c$. Esta aplicación no es necesariamente inyectiva.

Se verifica que:

a) El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} I(T,\Gamma) \arrow[d, "*"'] & I(T,\Gamma') \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "*"'] \\ I(T',\Gamma^*) & I(T',\Gamma'^*) \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd}$$

Demostración:

Sea $\Delta' \in I(T,\Gamma')$. probemos que $(\Delta'^c)^* = (\Delta'^*)^c$.

$\subset$ Sea $A^* \in (\Delta'^c)^*$, entonces $A \in \Delta'^c = \Delta' \cap \Gamma$; por tanto, $A^* \in (\Delta' \cap \Gamma)^* = \Delta'^* \cap \Gamma^* = (\Delta'^*)^c$.

$\supset$ Análogamente.

(iv) Se verifican:

a) $\Delta = \Delta^{ec}$, y por lo tanto c es suprayectiva;

b) $\Delta'^{ce} \subset \Delta'$; c) $\Delta^{e} = \Delta^{ece}$; d) $\Delta'^{c} = \Delta'^{cec}$.

Demostración:

a)

$\subset$ Sea $A \varepsilon \Delta$, entonces $A \varepsilon \Delta^{e}$; ahora bien, $A \varepsilon \Gamma$, por tanto $A \varepsilon \Delta^{e} \cap \Gamma = \Delta^{ec}$.

$\supset$ Sea $A \varepsilon \Delta^{ec} = \Delta^{e} \cap \Gamma$, entonces $A \varepsilon \Delta^{e} = \langle \Delta \rangle$; y por tanto, existen $A_1,\ldots,A_n \varepsilon \Delta$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$.

De aquí, como $\Delta \varepsilon I(T,\Gamma)$ y $A \varepsilon \Gamma$, $A \varepsilon \Delta$.

b) Sea $A \varepsilon \Delta'^{ce} = \langle \Delta'^{c} \rangle$; por tanto, existen $A_1,\ldots,A_n \varepsilon \Delta'^{c} = \Delta' \cap \Gamma$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$.

Ahora bien, $\Delta' \varepsilon I(T,\Gamma')$; por tanto, $A \varepsilon \Delta'$.

c) y d) Son consecuencias triviales de a).

(v) Sean:

$$C = \{\Delta'^{c} : \Delta' \varepsilon I(T,\Gamma')\} \quad \text{y}$$

$$E = \{\Delta^{e} : \Delta \varepsilon I(T,\Gamma)\}$$

Por (iv-a) $C = I(T,\Gamma)$. Además se verifican:

a) $\Delta' \varepsilon E$ si y sólo si $\Delta' = \Delta'^{ce}$.

Demostración:

($\to$) Si $\Delta' \varepsilon E$, existe $\Delta \varepsilon I(T,\Gamma)$ tal que $\Delta^{e} = \Delta'$; y por (iv-c), $\Delta' = \Delta^{e} = \Delta^{ece} = \Delta'^{ce}$.

($\leftarrow$) Si $\Delta' = \Delta'^{ce}$, entonces Δ' es la extensión de Δ'^{c} .

b) La aplicación $\phi : C \longrightarrow E$ definida por $\phi(\Delta) = \Delta^{e}$ es biyectiva.

Demostración:

Es claramente una aplicación suprayectiva, y puesto que $\phi(\Delta) = e(\Delta)$ por (i-a) es inyectiva.

(vi) Si $I(T,\Gamma')$ satisface la condición de máximo, entonces la satisface $I(T,\Gamma)$.

Demostración:

Si $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$ es una cadena en $I(T,\Gamma)$ no estacionaria, entonces por (i-a) $\Delta_1^e \subset \Delta_2^e \subset \ldots \subset \Delta_n^e \subset \ldots$ es una cadena en $I(T,\Gamma')$ no estacionaria.

Análogamente se obtiene.

(vii) Si $I(T,\Gamma')$ satisface la condición de mínimo, entonces la satisface $I(T,\Gamma)$.

(C) m-ideales de conjuntos disjuntivos.

A lo largo de este apartado salvo especificación expresa de lo contrario supondremos que $\Gamma \in \underline{V}(T)$.

Teorema 8. Sean $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in I(T,\Gamma)$. Severifican:

a) $[(\Delta_1,\Delta_2),(\Delta_1,\Delta_3)] = (\Delta_1,[\Delta_2,\Delta_3])$.

b) $([\Delta_1,\Delta_2],[\Delta_1,\Delta_3]) = [\Delta_1,(\Delta_2,\Delta_3)]$.

Demostración:

a)

$\subset$ Sea $A \in [(\Delta_1,\Delta_2),(\Delta_1,\Delta_3)]$, entonces existen $A_1^1,\ldots,A_n^1 \in \Delta_1$, $A_1^2,\ldots,A_m^2 \in \Delta_2$, y $A_1^3,\ldots,A_k^3 \in \Delta_3$ tales que

$$T \vdash A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \wedge A_1^2 \wedge \ldots \wedge A_m^2 \to A$$

$$T \vdash A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \wedge A_1^3 \wedge \ldots \wedge A_k^3 \to A$$

Por tanto

$$T \vdash (A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \wedge A_1^2 \wedge \ldots \wedge A_m^2) \vee (A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \wedge A_1^3 \wedge \ldots \wedge A_k^3) \to A$$

$$T \vdash (A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1) \wedge ((A_1^2 \wedge \ldots \wedge A_m^2) \vee (A_1^3 \wedge \ldots \wedge A_k^3)) \to A$$

$$T \vdash (A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1) \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{m,k} (A_i^2 \vee A_j^3) \to A$$

Ahora bien $\Gamma \in \underline{V}(T)$ por tanto para cada $A_i \vee A_j$ existe $B_{ij} \in \Gamma$ tal que:

$$T \vdash A_i \vee A_j \longleftrightarrow B_{ij}$$

Por tanto

$$T \vdash A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{m,k} B_{ij} \to A .$$

Ahora bien,

$T \vdash A_i \to B_{ij} \qquad i = 1,\ldots,m$

$T \vdash A_j \to B_{ij} \qquad j = 1,\ldots,k$

En consecuencia, $B_{ij} \in [\Delta_2,\Delta_3]$. Por tanto, $A \in (\Delta_1,[\Delta_2,\Delta_3])$.

$\supset$ (Sin usar la hipótesis de ser $\Gamma \in \underline{V}(T)$).

Sea $A \in (\Delta_1,[\Delta_2,\Delta_3])$, existen $A_1,\ldots,A_n \in \Delta_1$, y $B_1,\ldots,B_k \in \Delta_2,\Delta_3$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \to A$.

Por tanto, $A \in (\Delta_1,\Delta_2)$ y $A \in (\Delta_1,\Delta_3)$; en consecuencia, $A \in [(\Delta_1,\Delta_2),(\Delta_1,\Delta_3)]$.

b)

$\subset$ (Sin usar la hipótesis de ser $\Gamma \in \underline{V}(T)$).

Sea $A \in ([\Delta_1,\Delta_2],[\Delta_1,\Delta_3])$, existen $A_1,\ldots,A_n \in [\Delta_1,\Delta_2]$ y $B_1,\ldots,B_k \in [\Delta_1,\Delta_3]$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \to A$.

Ahora bien, $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_k \in \Delta_1$, por tanto $A \in \Delta_1$.

Y como $A_1,\ldots,A_n \in \Delta_2$, y $B_1,\ldots,B_k \in \Delta_3$, entonces $A \in (\Delta_2,\Delta_3)$. En consecuencia, $A \in [\Delta_1,(\Delta_2,\Delta_3)]$.

$\supset$ Sea $A \in [\Delta_1,(\Delta_2,\Delta_3)]$, entonces $A \in \Delta_1$ y $A \in (\Delta_2,\Delta_3)$; por tanto, existen $A^2_1,\ldots,A^2_m \in \Delta_2$, y $A^3_1,\ldots,A^3_k \in \Delta_3$ tales que

$T \vdash A^2_1 \wedge \ldots \wedge A^2_m \wedge A^3_1 \wedge \ldots \wedge A^3_k \to A$.

Por tanto

$T \vdash (A \vee (A^2_1 \wedge \ldots \wedge A^2_m \wedge A^3_1 \wedge \ldots \wedge A^3_k)) \to A$

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} (A \vee A^2_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} (A \vee A^3_j) \to A \ .$$

Ahora bien como $\Gamma \in \underline{V}(T)$ existen $B_i, C_j \in \Gamma$ tales que:

$T \vdash A \vee A^2_i \longleftrightarrow B_i \qquad i = 1,\ldots,m$

$T \vdash A \vee A^3_j \longleftrightarrow C_j \qquad j = 1,\ldots,k$

Por tanto

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} C_j \to A \ .$$

Y puesto que $B_i \in [\Delta_1,\Delta_2]$, y $C_j \in [\Delta_1,\Delta_3]$ se tiene que

$A \in ([\Delta_1,\Delta_2],[\Delta_1,\Delta_3])$.

Lema 9. Sean Π_1 , Π_2 bases de Δ_1, $\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$; y sea

$\Pi = \{A_{ij} \in \Gamma$: existen $A_i^1 \in \Pi_1$ y $A_j^2 \in \Pi_2$ / $T \vdash A_i^1 \vee A_j^2 \longleftrightarrow A_{ij}\}$

Π es una base de $[\Delta_1,\Delta_2]$.

Demostración:

Como $T \vdash A_i^1 \to A_{ij}$ y $T \vdash A_j^2 \to A_{ij}$, se tiene que $A_{ij} \in [\Delta_1,\Delta_2]$, por tanto $\Pi \subset [\Delta_1,\Delta_2]$.

Sea $A \in [\Delta_1,\Delta_2]$, entonces existen $A_1^1,\ldots,A_n^1 \in \Pi_1$ y $A_1^2,\ldots,A_k^2 \in \Pi_2$ tales que

$T \vdash A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1 \to A$ y

$T \vdash A_1^2 \wedge \ldots \wedge A_k^2 \to A$ por tanto

$T \vdash (A_1^1 \wedge \ldots \wedge A_n^1) \vee (A_1^2 \wedge \ldots \wedge A_k^2) \to A$.

$$T \vdash \bigwedge_{i,j=1}^{n,k} (A_i^1 \vee A_j^2) \to A$$

$$T \vdash \bigwedge_{i,j=1}^{n,k} A_{ij} \to A$$

Luego $A \in \langle \Pi \rangle$, en consecuencia $[\Delta_1,\Delta_2] \subset \langle \Pi \rangle$; y por tanto $[\Delta_1,\Delta_2] = \langle \Pi \rangle$. De lo anterior y (4-(iii)) Π es una base de $[\Delta_1,\Delta_2]$.

Teorema 10. (Caracterización de m-ideales irreducibles)

Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$. Las condiciones siguientes son equivalentes :

a) Δ es irreducible

b) Para cualesquiera $A \in \Delta$ y $A_1,A_2 \in \Gamma$ tales que

$$T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A ,$$

entonces $A_1 \in \Delta$ o $A_2 \in \Delta$.

Demostración:

a) $\to$ b)

Supongamos lo contrario, esto es, existen $A \in \Delta$ y $A_1,A_2 \in \Gamma$ tales que $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$ y $A_1,A_2 \notin \Delta$; sean

$\Delta_1 = \langle \Delta, A_1 \rangle \quad \Delta_2 = \langle \Delta, A_2 \rangle$. Se verifican

(1) $\Delta \neq \Delta_1$, Δ_2 .

(2) $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2]$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
[\Delta_1, \Delta_2] &= [(\Delta, \langle A_1 \rangle), (\Delta, \langle A_2 \rangle)] && \text{pues } \langle \Delta, A_1 \rangle = (\Delta, \langle A_1 \rangle) \\
&= (\Delta, [\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle]) && \text{teorema 8-a.} \\
&= \langle \Delta, A \rangle && \text{lema 9.} \\
&= \Delta && \text{pues } A \in \Delta .
\end{aligned}
$$

De (1) y (2) se sigue que Δ es reducible, lo cual está en contradicción con a).

b) $\rightarrow$ a)

Supongamos que Δ es reducible, entonces existen Δ_1, $\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ tales que $\Delta \neq \Delta_1$, Δ_2 y $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2]$.

Sean $A_1 \in \Delta_1 - \Delta$ y $A_2 \in \Delta_2 - \Delta$; existe $A \in \Gamma$ tal que

$T \vdash A \longleftrightarrow A_1 \vee A_2$, por tanto

$T \vdash A_1 \rightarrow A$ y $T \vdash A_2 \rightarrow A$.

En consecuencia, $A \in [\Delta_1, \Delta_2] = \Delta$. Lo cual es contrario a la hipótesis.

1.2 LA ESTRUCTURA COCIENTE.

(A) Construcción de la estructura cociente.

El paso al cociente es en álgebra un importante procedimiento de trabajo. Nuestro propósito aquí es dar una definición de cociente utilizando métodos de la Teoría de Modelos.

En las situaciones algebraicas conocidas, para definir un cociente de una estructura M se considera un subconjunto P de M. Desde nuestro punto de vista dicha consideración presenta dos problemas.

1) P es el universo de una subestructura de M, pero sin embargo no todas las subestructuras de M son consideradas; ni tan siquiera las subestructuras que son modelos de una cierta teoría. Esta es la situación por ejemplo en la Teoría de Grupos.

2) P no es el universo de ninguna subestructura de M. Este es el caso en la Teoría de Anillos.

Por todo ello, nuestro proceso de construcción del cociente tiene que hacer uso de objetos que no hagan referencia directa a ningún subconjunto de M. Nuestra elección ha sido los m-ideales de $At(M)$ sobre una teoría que contiene al $D^+(M)$.

Notas 1. (Definición de la estructura cociente)

Sea T una teoría de primer orden y M una $L(T)$-estrctura, notaremos por: $T' = T + D^+(M)$ y $\Gamma = At(M)$.

Sea $\Delta \in I(T',\Gamma)$ definimos la estructura cociente de M por Δ, y notaremos M/Δ, como sigue:

Universo de la estructura $|M/\Delta|$.

Para ello definimos en $|M|$ la siguiente relación. Sean $a, b \in |M|$. $\quad a \sim b \longleftrightarrow a = b \in \Delta$.

Se verifica que:

(i) $\sim$ es una relación de equivalencia.

($a \sim a$). En efecto pues, $T' \vdash a = a$.

($a \sim b \to b \sim a$). En efecto, puesto que

$T' \vdash a = b \to b = a$.

Ahora bien $a \sim b$, por tanto $a = b \in \Delta$. En consecuencia como $\Delta \in I(T',\Gamma)$, $b = a \in \Delta$. Por tanto $b \sim a$.

($a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c$). En efecto

$T' \vdash a = b \wedge b = c \to a = c$.

Y puesto que $a \sim b$ y $b \sim c$; se tiene que $a = b, b = a \in \Delta$. En consecuencia como $\Delta \in I(T',\Gamma)$, se sigue que $a = c \in \Delta$. Por tanto $a \sim c$.

Definimos $|M/\Delta| = |M|/\sim$. A la clase de equivalencia de un individuo a de M la notaremos por a/Δ .

Interpretación predicados y funciones de $L(T)$: $p_{M/\Delta}$ y $f_{M/\Delta}$.

Sean $a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta \in |M/\Delta|$, p y f símbolos de predicado y función n-arios de $L(T)$ respectivamente. Definimos:

$$p_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) \longleftrightarrow pa_1\ldots a_n \in \Delta ;$$

$$f_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) = f_M(a_1,\ldots,a_n)/\Delta .$$

Se verifica que:

(ii) Las definiciones de la interpretación de símbolos de predicados y funciones no dependen de los representantes de clase elegidos.

Demostración:

Supongamos que $a_1 \sim b_1,\ldots, a_n \sim b_n$; entonces

$$a_1 = b_1,\ldots, a_n = b_n \in \Delta \qquad (1)$$

Predicados: Como

$$T' \vdash a_1 = b_1 \wedge\ldots\wedge a_n = b_n \wedge pa_1\ldots a_n \to pb_1\ldots b_n \qquad (2)$$

Se tiene que;

$p_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) \to pa_1\ldots a_n \in \Delta$ (def. de cociente)

$\rightarrow pb_1 \ldots b_n \in \Delta$ (por (1) ; (2), y $\Delta \in I(T',\Gamma)$)

$\rightarrow p_{M/\Delta}(b_1/\Delta,\ldots,b_n/\Delta)$ (def. de cociente)

Funciones: Existen $a, b \in |M|$ tales que:

$fa_1 \ldots a_n = a$, $fb_1 \ldots b_n = b \in D^+(M)$. Además

$T' \vdash a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n \rightarrow fa_1 \ldots a_n = fb_1 \ldots b_n$

Por tanto $fa_1 \ldots a_n = fb_1 \ldots b_n \in \Delta$. Y puesto que:

$T' \vdash fa_1 \ldots a_n = fb_1 \ldots b_n \rightarrow a = b$

Se tiene que $a = b \in \Delta$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
f_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) &= f_M(a_1,\ldots,a_n)/\Delta && \text{(def. de cociente)}\\
&= a/\Delta && (fa_1 \ldots a_n = a \in D^+(M))\\
&= b/\Delta && (\text{pues } a = b \in \Delta)\\
&= f_M(b_1,\ldots,b_n)/\Delta\\
&= f_{M/\Delta}(b_1/\Delta,\ldots,b_n/\Delta) .
\end{aligned}
$$

Con todo lo anterior hemos definido M/Δ como una $L(T)$-estructura.

(B) Primer Teorema de Isomorfía.

Notas 2.

(i) Sea $\Delta \in I(T',\Gamma)$. La aplicación $\phi : |M| \longrightarrow |M/\Delta|$ definida por $\phi(a) = a/\Delta$ es un homomorfismo suprayectivo.

Demostración:

Sean $a_1,\ldots,a_n \in |M|$.

Predicados: Sea p un símbolo de predicado n-ario de $L(T)$.

$$
\begin{aligned}
p_M(a_1,\ldots,a_n) &\rightarrow pa_1 \ldots a_n \in D^+(M)\\
&\rightarrow pa_1 \ldots a_n \in \Delta && (\text{pues } D^+(M) \subset \Delta)\\
&\rightarrow p_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) && \text{(def. de cociente)}\\
&\rightarrow p_{M/\Delta}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)) && (\text{def. de } \phi)
\end{aligned}
$$

Funciones: Sea f un símbolo de función n-ario de $L(T)$.

$$
\begin{aligned}
\phi(f_M(a_1,\ldots,a_n)) &= f_M(a_1,\ldots,a_n)/\Delta && (\text{def. de } \phi)\\
&= f_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) && \text{(def. de cociente)}
\end{aligned}
$$

$$= f_{M/\Delta}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)) \qquad \text{(def. de } \phi)$$

(ii) Si $M, M' \varepsilon M(T)$ y $\phi: M \simeq M'$, entonces

$$\mathrm{Ker}\phi = \{A \varepsilon At(M): M'(A^{\phi}) = V\} \varepsilon I(T',\Gamma).$$

<u>Demostración</u>:

Sean $A_1,\ldots,A_n \varepsilon \mathrm{Ker}\phi$ y $A \varepsilon \Gamma$ tales que:

$T' \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$.

Como $M'(\phi(M)) \varepsilon M(T')$ se tiene que:

$M'(\phi(M))(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A) = V \quad (1)$

Ahora bien $i = 1,\ldots,n$ $M'(\phi(M))(A_i) = M'(A_i^{\phi}) = V$. Y por (1)

$M'(A^{\phi}) = M'(\phi(M))(A) = V$. Por tanto $A \varepsilon \mathrm{Ker}\phi$.

<u>Teorema 3</u>. (Primer teorema de isomorfía)

Sean $M, M' \varepsilon M(T)$ y $\phi: M \simeq M'$ suprayectivo. El diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{|M|} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & {|M'|} \\
& {|M/\mathrm{Ker}\phi|} \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde: $\phi_1: |M| \longrightarrow |M/\mathrm{Ker}\phi|$ definido por $\phi_1(a) = a/\mathrm{Ker}\phi$

$\phi_2: |M/\mathrm{Ker}\phi| \longrightarrow |M'|$ definido por $\phi_2(a/\mathrm{Ker}\phi)=\phi(a)$

Además ϕ_1 es un homomorfismo suprayectivo y ϕ_2 es un isomorfismo.

<u>Demostración</u>:

Por (2-(ii)) $\mathrm{Ker}\phi \varepsilon I(T',\Gamma)$. Y por (2-(i)) ϕ_1 es un homomorfismo suptayectivo. Además:

(1) ϕ_2 esta bien definida

En efecto, si $a/\mathrm{Ker}\phi = b/\mathrm{Ker}\phi$, entonces $a = b \varepsilon \mathrm{Ker}\phi$.

Por tanto $M'((a=b)^{\phi}) = V$, en consecuencia $\phi(a) = \phi(b)$

Sean $a_1/\mathrm{ker}\phi,\ldots,a_n/\mathrm{ker}\phi \varepsilon |M/\mathrm{Ker}\phi|$. Se verifican:

(2)

$p_{M/\mathrm{Ker}\phi}(a_1/\mathrm{ker}\phi,\ldots,a_n/\mathrm{Ker}\phi) \longleftrightarrow pa_1\ldots a_n \varepsilon \mathrm{Ker}\phi$

$\leftrightarrow M'((pa_1 \ldots a_n)^\phi)$ (def. de $Ker\phi$)

$\leftrightarrow p_{M'}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$

$\leftrightarrow p_{M'}(\phi_2(a_1/Ker\phi),\ldots,\phi_2(a_n/Ker\phi))$ (def. de ϕ_2)

(3)

$\phi_2(f_{M/Ker\phi}(a_1/Ker\phi,\ldots,a_n/Ker\phi) =$

$= \phi_2(f_M(a_1,\ldots,a_n)/Ker\phi)$ (def. de cociente)

$= \phi(f_M(a_1,\ldots,a_n))$ (def. de ϕ_2)

$= f_{M'}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$ (ϕ es homomorfismo)

$= f_{M'}(\phi_2(a_1/Ker\phi),\ldots,\phi_2(a_n/Ker\phi))$ (def. de ϕ_2)

De (1), (2) y (3) se sigue que ϕ_2 es un isomorfismo.

Notas 4.

(i) Si $M \in M(T)$ y $\Gamma \neq \Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces existen $M' \in M(T)$ y $\phi : M \simeq M'$ tales que $\Delta \subset Ker\phi$.

Demostración:

Consideremos le teoría $T' + \Delta$. Se verifica:

(1) $T' + \Delta$ es consistente.

En efecto, pues caso contrario para toda fórmula $A \in L(M)$ $T' + \Delta \vdash A$. Y por tanto para toda $A \in \Gamma$, $T' + \Delta \vdash A$. Y puesto que $\Delta \in I(T',\Gamma)$ se sigue que $A \in \Delta$; así pues, $\Delta = \Gamma$. Lo cual es contrario a la hipótesis de ser $\Gamma \neq \Delta$.

Sea pues $M^* \in M(T' + \Delta)$. Sea $M' = M^*|_L$, se verifican:

(2) $M' \in M(T)$. Trivial

(3) La aplicación $\phi : |M| \longrightarrow |M'|$ definida por: $\phi(a) = M^*(a)$ es un homomorfismo.

En efecto, sean $a_1,\ldots,a_n \in |M|$,

$p_M(a_1,\ldots,a_n) \rightarrow pa_1 \ldots a_n \in D^+(M)$

$\rightarrow pa_1 \ldots a_n \in \Delta$ (pues $D^+(M) \subset \Delta$)

$\rightarrow M^*(pa_1 \ldots a_n) = V$ ($M^* \in M(T' + \Delta)$)

$\rightarrow p_{M'}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$

$\phi(f_M(a_1,\ldots,a_n)) = \phi(M(fa_1 \ldots a_n))$

$= M^*(fa_1 \ldots a_n)$ (def. de ϕ)

$= f_{M^*}(M^*(a_1),\ldots,M^*(a_n))$

$= f_{M'}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$ (def. de ϕ)

(4) $\Delta \subset \mathrm{Ker}\phi$.

Sea $A \in \Delta$, como $M^* \in M(T' + \Delta)$, entonces $M^*(A) = V$.

Ahora bien $M^*(A) = M'(A^{\phi})$. Por tanto $A \in \mathrm{Ker}\phi$.

De (2), (3) y (4) se sigue (i)

(ii) Deseamos encontrar situaciones en las cuales $\Delta = \mathrm{Ker}\phi$. Esto se verifica si:

(1) Δ es maximal.

En efecto; sea $A \in \Gamma - \Delta$, existe un modelo de $T' + \Delta + \neg A$, pues $T' + \Delta \nvdash A$. Sean $M^* \in M(T' + \Delta + A)$, y $M' = M^*|_L$. Definamos ϕ como en (i-3), entonces $\Delta \subset \mathrm{Ker}\phi$. Ahora bien, puesto que $A \notin \mathrm{Ker}\phi$ y Δ es maximal, se tiene que $\Delta = \mathrm{Ker}\phi$.

(2) $\Gamma \in \underline{V}(T')$ y Δ es irreducible.

Sea $\neg(\Gamma - \Delta) = \{\neg A : A \in \Gamma - \Delta\}$, y consideremos la teoría $T^* = T' + \Delta + \neg(\Gamma - \Delta)$. Se tiene que T^* es consistente. En efecto, pues en caso contrario existen $B_1,\ldots,B_n \in \neg(\Gamma - \Delta)$ tales que:

$T' + \Delta \vdash \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n$.

Ahora bien B_j es $\neg A_j$, con $A_j \in \Gamma - \Delta$. Por tanto

$T' + \Delta \vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

Como $\Gamma \in \underline{V}(T')$ existe $A \in \Gamma$ tal que:

$T' \vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n \leftrightarrow A$. Por tanto

$T' + \Delta \vdash A$.

Asi pues $A \in \Delta$. Ahora bien Δ es irreducible, por tanto existe $j = 1,\ldots,n$ tal que $A_j \in \Delta$. Lo cual esta en contradicción con ser $A_j \in \Gamma - \Delta$. Por tanto T^* es consistente. Sean $M^* \in M(T^*)$, y $M' = M^*|_L$. Definimos ϕ como en (i-3). Por tanto $\Delta \subset \mathrm{Ker}\phi$.

Supongamos que $A \notin \Delta$, entonces $M^*(A) = F$. Por tanto, $M'(A^{\phi}) = F$; en consecuencia $A \notin \mathrm{Ker}\phi$. Lo que prueba (2).

Notas 5.

(i) Sean $\Delta, \Delta' \in I(T', \Gamma)$ tales que $\Delta \overset{\bullet}{\subset} \Delta'$, entonces $M/\Delta \approx M/\Delta'$.

Demostración:

Definimos: $\phi : |M/\Delta| \longrightarrow |M/\Delta'|$, por $\phi(a/\Delta) = a/\Delta'$.

se verifican:

(1) ϕ está bien definida.

$$\begin{aligned} a/\Delta = b/\Delta &\rightarrow a = b \in \Delta \\ &\rightarrow a = b \in \Delta' \\ &\rightarrow a/\Delta' = b/\Delta' \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \phi(f_{M/\Delta}(a_1/\Delta, \ldots, a_n/\Delta)) &= \phi(f_M(a_1, \ldots, a_n)/\Delta) \quad (\text{def. de } f_{M/\Delta}) \\ &= f_M(a_1, \ldots, a_n)/\Delta' \quad (\text{def. de } \phi) \\ &= f_{M/\Delta'}(a_1/\Delta', \ldots, a_n/\Delta') \\ &= f_{M/\Delta'}(\phi(a_1/\Delta), \ldots, \phi(a_n/\Delta)) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} p_{M/\Delta}(a_1/\Delta, \ldots, a_n/\Delta) &\rightarrow pa_1 \ldots a_n \in \Delta \\ &\rightarrow pa_1 \ldots a_n \in \Delta' \\ &\rightarrow p_{M/\Delta'}(a_1/\Delta', \ldots, a_n/\Delta') \\ &\rightarrow p_{M/\Delta'}(\phi(a_1/\Delta), \ldots, \phi(a_n/\Delta)) \end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) se sigue que ϕ es un homomorfismo lo que prueba (i).

(ii) Como para todo $\Delta \in I(T', \Gamma)$, $\mathrm{card}(M/\Delta) \leqslant \mathrm{card}(M)$. No existe ninguna teoría T^* tal que:

$$M^* \in M(T^*) \longleftrightarrow \text{existe } \Delta \in I(T', \Gamma) \text{ tal que } M^* \cong M/\Delta .$$

Esto es, no es posible caracterizar los cocientes de una L-estructura como los modelos de una teoría. Se tiene pues una situación similar al caso de los isomorfismos.

§ 2. $\mathfrak{m}$-IDEALES Y COCIENTES EN ALGUNAS TEORIAS ALGEBRAICAS.

Este parágrafo sirve de "test" de la definición de cociente. Lo estudiamos para anillos conmutativos, grupos y álgebras de Boole. En la primera teoría los m-ideales se "traducen" a ideales algebraicos; en la segunda, a subgrupos normales; y en la tercera, a ideales y filtros. Se demuestra que en los tres casos los cocientes definidos y los cocientes algebraicos son isomorfos.

2.1 $\mathfrak{M}$-IDEALES DE LA TEORIA DE ANILLOS CONMUTATIVOS.

(A) Traducción de m-ideales.

Notas 1.

La teoría de anillos conmutativos con elemento unidad, T, es la teoría cuyo lenguaje consta de dos funciones binarias: $+$, $\cdot$; y dos constantes: 0 , 1 . Sus axiomas son:

A1	$x+(y+z)=(x+y)+z$	A5	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
A2	$0 + x = x$	A6	$x\cdot(y+z)=x\cdot y + x\cdot z$
A3	$\exists y(y+x = 0)$	A7	$x\cdot y = y\cdot x$
A4	$x + y = y + x$	A8	$x\cdot 1 = x$

Sean $M \in M(T)$, $T' = T + D^{+}(M)$ y $\Gamma = At(M)$. Notaremos por $I(M)$ al conjunto de los ideales de M.

Notas 2.

Deseamos establecer alguna relación entre $I(T',\Gamma)$ e $I(M)$. Sea $\Delta \subset \Gamma$, definimos:

$$\mathfrak{A}_{\Delta} = \{a \in |M| : \ a = 0 \in \Delta\} .$$ Se verifica que:

(i) Si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $\mathfrak{A}_{\Delta} \in I(M)$.

Demostración:

(1) Si $a,b \in \mathfrak{A}_{\Delta}$, entonces $a - b \in \mathfrak{A}_{\Delta}$.

En efecto, como $a,b \in |M|$, entonces existe $c \in |M|$ tal que $a = b+c \in D^{+}(M)$. Además:

$T' \vdash a = b+c \wedge a = 0 \wedge b = 0 \rightarrow c = 0$. Por tanto,

$T' \vdash a = 0 \wedge b = 0 \rightarrow c = 0$.

Como $a,b \in \mathfrak{A}_{\Delta}$, se tiene que $a = 0, b = 0 \in \Delta$. Y puesto que $\Delta \in I(T',\Gamma)$, se sigue que $c = 0 \in \Delta$. Así pues, $c \in \mathfrak{A}_{\Delta}$.

(2) Si $a \in |M|$ y $b \in \mathfrak{A}_{\Delta}$, entonces $a\cdot b \in \mathfrak{A}_{\Delta}$.

En efecto, como $a,b \in |M|$, existe $c \in |M|$ tal que $a\cdot b = c \in D^{+}(M)$. Por tanto:

$T' \vdash b = 0 \rightarrow c = 0$.

Ahora bien, $b = 0 \in \Delta$ y $\Delta \in I(T',\Gamma)$; en consecuencia $c = 0 \in \Delta$. Por tanto $c \in \mathfrak{A}_\Delta$, así pues $a \cdot b \in \mathfrak{A}_\Delta$.

De (1) y (2) se sigue (i).

Sea $P \subset |M|$, definimos:

$$\Delta_P = \{a = 0 \in \Gamma:\ a \in P\}$$. Se verifica:

(ii) Si $\mathfrak{A} \in I(M)$, entonces $a \in \mathfrak{A}$ si y sólo si $a = 0 \in \langle \Delta_{\mathfrak{A}} \rangle$.

Demostración:

($\rightarrow$) Trivial a partir de la definición.

($\leftarrow$) Consideremos $M/\mathfrak{A}$. Se tiene que:

$M/\mathfrak{A} \in M(T)$ pues es un anillo

$M/\mathfrak{A} \in M(D^+(M))$ pues es imagen homomorfa de M

$M/\mathfrak{A} \in M(\{b = 0:\ b \in \mathfrak{A}\})$

Por tanto, $M/\mathfrak{A} \in M(T' + D^+(M) + \Delta_{\mathfrak{A}})$. Como además, si $a \notin \mathfrak{A}$ $M/\mathfrak{A}\,(a = 0) = F$; se tiene que:

$T' + D^+(M) + \Delta \nvdash a = 0$.

Por tanto $a = 0 \notin \langle \Delta_{\mathfrak{A}} \rangle$.

En (i) hemos probado que: si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $\mathfrak{A}_\Delta \in I(M)$. A $\mathfrak{A}_\Delta$ lo llamaremos ideal traducido de Δ .

Notas 3.

En la presente situación, tenemos en la teoría de anillos definidas dos construcciones del cociente: la algebraica, y para $\Delta \in I(T',\Gamma)$ anteriormente hemos definido M/Δ . La relación entre estas dos construcciones viene dada por:

(i) Si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $M/\Delta \cong M/\mathfrak{A}_\Delta$.

Demostración:

Sea $\phi: |M/\Delta| \longrightarrow |M|/\mathfrak{A}_\Delta$. Definida por:

$$\phi(a/\Delta) = a + \mathfrak{A}_\Delta$$. Se verifican:

(1) ϕ está bien definida y es inyectiva.

Sean $a,b \in |M|$, existe $c \in |M|$ tal que $a + c = b \in D^+(M)$.
Además:

$$a/\Delta = b/\Delta \leftrightarrow a \sim b$$
$$\leftrightarrow a = b \in \Delta \quad (\text{def. de } \sim)$$
$$\leftrightarrow c = 0 \in \Delta \quad \begin{pmatrix}(\rightarrow) & T' \vdash a+c=b \wedge a=b \rightarrow c=0\\ (\leftarrow) & T' \vdash a+c=b \wedge c=0 \rightarrow a=b\end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow c \in \mathfrak{a}_\Delta \quad (\text{def. de } \mathfrak{a}_\Delta)$$
$$\leftrightarrow a + \mathfrak{a}_\Delta = b + \mathfrak{a}_\Delta \quad (\text{pues } a+c = b \in D^+(M)$$

La parte $(\rightarrow)$ prueba que ϕ está bien definida, y la $(\leftarrow)$ que es inyectiva.

(2) ϕ es suprayectiva. Trivial.

(3)

$$\phi(a/\Delta + b/\Delta) = \phi((a+b)/\Delta) \quad (\text{def. de } +_{M/\Delta})$$
$$= (a+b) + \mathfrak{a}_\Delta \quad (\text{def. de } \phi)$$
$$= (a + \mathfrak{a}_\Delta) + (b + \mathfrak{a}_\Delta).$$
$$\phi(a/\Delta \cdot b/\Delta) = \phi((a\cdot b)/\Delta) \quad (\text{def. de } \cdot_{M/\Delta})$$
$$= (a\cdot b) + \mathfrak{a}_\Delta \quad (\text{def. de } \phi)$$
$$= (a + \mathfrak{a}_\Delta) \cdot (b + \mathfrak{a}_\Delta)$$

De (1), (2) y (3) se sigue que ϕ es un isomorfismo. Lo que prueba (i).

(ii) Sean $\Delta, \Delta' \in I(T',\Gamma)$. Si $\mathfrak{a}_\Delta = \mathfrak{a}_{\Delta'}$, entonces $\Delta = \Delta'$.

<u>Demostración</u>:

Por (i)

$$M/\Delta \cong M/\mathfrak{a}_\Delta = M/\mathfrak{a}_{\Delta'} \cong M/\Delta' \qquad (1)$$

Si $A \in \Delta$, entonces $M/\Delta(A) = V$; y por (1) $M/\Delta'(A) = V$. Por tanto, $A \in \Delta'$. Análogamente se prueba la otra inclusión.

(iii) Para todo $\Delta \in I(T',\Gamma)$, $\Delta = \langle \Delta_{\mathfrak{a}_\Delta} \rangle$.
Esto es una reformulación de (ii).

(B) <u>m-ideales de la teoría de dominios de integridad</u>.

Notas 4.

La teoría de dominios de integridad, T_1 , es:

$$T_1 = T + \{x\cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0\}.$$

Si $M \varepsilon M(T)$, notaremos por $T_1' = T_1 + D^+(M)$, y $\Gamma = At(M)$. Así , $T_1' = T' + \{x\cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0\}$. Se verifican:

(i) $I(T_1',\Gamma) \subset I(T',\Gamma)$.

En efecto, pues T_1' es una extensión de T' .

(ii) Para cualquier fórmula $A \varepsilon At(M)$ existe $c = 0 \varepsilon At(M)$ tal que $T' \vdash A \longleftrightarrow c = 0$.

Demostración:

Caso 1. A es $a = 0$. Trivial

Caso 2. A es $a = b$.

Existe $c \varepsilon |M|$ tal que $a+c = b \varepsilon D^+(M)$; además:

$T' \vdash a = b \longleftrightarrow a+c = b \wedge c = 0$. Por tanto,

$T' \vdash a = b \longleftrightarrow c = 0$.

Caso 3. A es $a_1+a_2 = a_3$.

Existe $c_1 \varepsilon |M|$ tal que $a_1+a_2 = c_1 \varepsilon D^+(M)$; además:

$T' \vdash a_1+a_2 = a_3 \longleftrightarrow a_1+a_2 = c_1 \wedge c_1 = a_3$

Ahora bien, existe $c \varepsilon |M|$ tal que $c_1+c = a_3 \varepsilon D^+(M)$. Y

$T' \vdash a_1+a_2 = c_1 \wedge c_1 = a_3 \longleftrightarrow a_1+a_2=c_1 \wedge c_1+c=a_3 \wedge c=0$.

$T' \vdash a_1+a_2 = a_3 \longleftrightarrow a_1+a_2 = c_1 \wedge c_1+c = a_3 \wedge c = 0$

$T' \vdash a_1+a_2 = a_3 \longleftrightarrow c = 0$.

Caso 4. A es $a_1\cdot a_2 = a_3$.

Existe $c_1 \varepsilon |M|$ tal que $a_1\cdot a_2 = c_1 \varepsilon D^+(M)$; además:

$T' \vdash a_1\cdot a_2 = a_3 \longleftrightarrow a_1\cdot a_2 = c_1 \wedge c_1 = a_3$.

Ahora bien, existe $c \varepsilon |M|$ tal que $c_1+c = a_3 \varepsilon D^+(M)$. Y

$T' \vdash a_1\cdot a_2 = a_3 \longleftrightarrow a_1\cdot a_2 = c_1 \wedge c_1+c = a_3 \wedge c = 0$

$T' \vdash a_1\cdot a_2 = a_3 \longleftrightarrow c = 0$

Lo que prueba (ii).

(iii) $\Gamma \varepsilon \underline{V}(T_1')$.

Demostración:

Veamos primero que se verifica la siguiente condición:

(1) Sean $a = 0$, $b = 0 \in At(M)$, existe $c = 0 \in At(M)$ tal que $T_1' \vdash a = 0 \vee b = 0 \longleftrightarrow c = 0$.

En efecto, existe $c \in |M|$ tal que $a \cdot b = c \in D^+(M)$. Y

$T_1' \vdash a \cdot b = 0 \longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. Por tanto

$T_1' \vdash c = 0 \longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Lo que prueba (1).

Sean $A_1, A_2 \in At(M)$. Por (ii) existen $a_1 = 0, a_2 = 0 \in At(M)$ tales que:

$T_1' \vdash A_1 \longleftrightarrow a_1 = 0$; $T_1' \vdash A_2 \longleftrightarrow a_2 = 0$.

Por (1) existe $c = 0 \in At(M)$ tal que:

$T_1' \vdash a_1 = 0 \vee a_2 = 0 \longleftrightarrow c = 0$. Por tanto

$T_1' \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow c = 0$.

De lo cual se sigue que: $\Gamma \in \underline{V}(T_1')$.

Lema 5. Si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $\Delta \in I(T_1',\Gamma)$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{a}_\Delta} = \mathfrak{a}_\Delta$.

Demostración:

($\leftarrow$) Sea $b \in |M|$ tal que $b \notin \mathfrak{a}_\Delta$. Probemos que:

(1) $T_1' + \{a = 0 \in At(M): a \in \mathfrak{a}_\Delta\} \nvdash b = 0$.

Sea $\mathcal{C} = \{ \mathfrak{b} \in I(M): \mathfrak{a}_\Delta \subset \mathfrak{b}$ y para todo $n \geqslant 0$ $b^n \notin \mathfrak{b} \}$.

Se tiene que:

$\mathcal{C} \neq \phi$. Pues $\mathfrak{a}_\Delta \in \mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es una cadena, entonces $\bigcup \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$. Trivial.

De lo anterior por el lema de Zorn $\mathcal{C}$ tiene elementos maximales. Sea $\mathfrak{p}$ un tal elemento. Se verifica que:

$\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

En efecto, sean $a_1, a_2 \in |M|$ tales que $a_1, a_2 \notin \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p} \subsetneq (\mathfrak{p}, a_1)$, $(\mathfrak{p}, a_2)$; de lo cual por el carácter maximal de $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{C}$ se tiene que: existen $n_1, n_2 > 0$ tales que $b^{n_1} = p_1 + r_1 \cdot a_1$; $b^{n_2} = p_2 + r_2 \cdot a_2$. Con $p_1, p_2 \in \mathfrak{p}$ y

$r_1, r_2 \in |M|$. Por tanto:

$b^{n_1+n_2} = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot r_2 \cdot a_2 + p_2 \cdot r_1 \cdot a_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot a_1 \cdot a_2$.

Como $p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot r_2 \cdot a_2 + p_2 \cdot r_1 \cdot a_1 \in \mathfrak{p}$, se tiene que:

$b^{n_1+n_2} = p + r_1 \cdot r_2 \cdot a_1 \cdot a_2$, con $p \in \mathfrak{p}$.

Ahora bien, $b^{n_1+n_2} \notin \mathfrak{p}$. Por tanto $a_1 \cdot a_2 \notin \mathfrak{p}$. Lo que prueba que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Consideremos $M/\mathfrak{p}$. Se verifica que:

$M/\mathfrak{p} \in M(T_1)$ pues $\mathfrak{p}$ es un ideal primo

$M/\mathfrak{p} \in M(D^+(M))$ pues es imagen homomorfa de M

$M/\mathfrak{p} \in M(\{a = 0 \in At(M): a \in \mathfrak{A}_\Delta\})$ pues $\mathfrak{A}_\Delta \subset \mathfrak{p}$.

Como además $M/\mathfrak{p}\ (b = 0) = F$, entonces

$T_1' + \{a = 0 \in At(M): a \in \mathfrak{A}_\Delta\} \nvdash b = 0$.

Lo que prueba (1). Y por tanto $b = 0$ no pertenece al m-ideal de Γ sobre T_1' generado por $\{a = 0 : a \in \mathfrak{A}_\Delta\}$.

Sean $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$ y $A \in \Gamma$ tales que:

$T_1' \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$.

Por (4-(ii)) existen $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0, c = 0 \in \Gamma$ tales que:

$T' \vdash a_i = 0 \longleftrightarrow A_i \quad i = 1, \ldots, n$

$T' \vdash c = 0 \longleftrightarrow A$.

Por tanto,

$T_1' \vdash a_1 = 0 \wedge \ldots \wedge a_n = 0 \rightarrow c = 0$.

Ahora bien, de $A_i \in \Delta$ y $T' \vdash a_i = 0 \longleftrightarrow A_i$, se obtiene que: $a_i = 0 \in \Delta$. Por tanto

$T_1' + \Delta \vdash c = 0$.

Ahora bien, por (3-(iii)) en $I(T', \Gamma)$

$$\Delta = \langle \Delta_{\mathfrak{A}_\Delta} \rangle = \langle \{a = 0 : a \in \mathfrak{A}_\Delta\} \rangle .$$ Por tanto

$T_1' + \{a = 0 : a \in \mathfrak{A}_\Delta\} \vdash c = 0$.

De lo anterior por (1) se sigue que: $c \in \mathfrak{A}_\Delta$. Y por tanto $c = 0 \in \Delta$. Ahora bien,

$T' \vdash c = 0 \longleftrightarrow A$

Por tanto $A \varepsilon \Delta$. Lo que prueba que $\Delta \varepsilon I(T_1', \Gamma)$.

($\rightarrow$) Siempre se tiene que $\mathfrak{A}_\Delta \subset \sqrt{\mathfrak{A}_\Delta}$. Probemos la inclusión contraria. Sea $a \varepsilon \sqrt{\mathfrak{A}_\Delta}$, entonces existe $n > 0$ tal que $a^n \varepsilon \mathfrak{A}_\Delta$. Por tanto $a^n = 0 \varepsilon \Delta$. Ahora bien,

$T_1' \vdash a^n = 0 \rightarrow a = 0.$

Así pues $a = 0 \varepsilon \Delta$ y por tanto, $a \varepsilon \mathfrak{A}_\Delta$.

<u>Teorema 6</u>. Sea $\Delta \varepsilon I(T_1', \Gamma)$. Son equivalentes:

(a) Δ es irreducible.

(b) $\mathfrak{A}_\Delta$ es un ideal primo.

<u>Demostración</u>:

(a) $\rightarrow$ (b). Sean $a_1, a_2 \varepsilon |M|$ tales que $a_1 \cdot a_2 \varepsilon \mathfrak{A}_\Delta$, entonces $a_1 \cdot a_2 = 0 \varepsilon \Delta$. Además,

$T_1' \vdash a_1 \cdot a_2 = 0 \longleftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 0$

Ahora bien, Δ es irreducible y por (4-(iii)) $\Gamma \varepsilon \underline{V}(T_1')$. Por tanto, $a_1 = 0 \varepsilon \Delta$ o $a_2 = 0 \varepsilon \Delta$. Así pues, $a_1 \varepsilon \mathfrak{A}_\Delta$ o $a_2 \varepsilon \mathfrak{A}_\Delta$. Lo que prueba que $\mathfrak{A}_\Delta$ es un ideal primo.

(b) $\rightarrow$ (a). Si $\mathfrak{A}_\Delta$ es un ideal primo, entonces $\sqrt{\mathfrak{A}_\Delta} = \mathfrak{A}_\Delta$; y por el lema 5. $\Delta \varepsilon I(T_1', \Gamma)$. Sean $A \varepsilon \Delta$ y $A_1, A_2 \varepsilon \Gamma$ tales que:

$T_1' \vdash A \longleftrightarrow A_1 \vee A_2$.

Por (4-(ii)), existen $a = 0, a_1 = 0, a_2 = 0 \varepsilon \Gamma$ tales que:

$T_1' \vdash A \longleftrightarrow a = 0$, $T_1' \vdash A_1 \longleftrightarrow a_1 = 0$ y

$T_1' \vdash A_2 \longleftrightarrow a_2 = 0$. Por tanto,

$T_1' \vdash a = 0 \longleftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 0$.

Como $\mathfrak{A}_\Delta$ es un ideal primo, $M/\mathfrak{A}_\Delta \varepsilon M(T_1')$. Y por tanto:

$M/\Delta \quad (a = 0 \longleftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 0) = V \quad (M/\mathfrak{A}_\Delta \cong M/\Delta)$

Ahora bien, $A \varepsilon \Delta$, entonces $a = 0 \varepsilon \Delta$; y por tanto $M/\Delta \quad (a = 0) = V$. Así pues, $M/\Delta \quad (a_1 = 0 \vee a_2 = 0) = V$. En consecuencia $M/\Delta \quad (a_1 = 0) = V$ o $M/\Delta \quad (a_2 = 0) = V$. Luego $a_1 = 0 \varepsilon \Delta$ o $a_2 = 0 \varepsilon \Delta$. Por tanto $A_1 \varepsilon \Delta$ o $A_2 \varepsilon \Delta$.

Lo que prueba que Δ es irreducible.

(C) Caracterización de m-ideales.

Notas 7.

El problema que se plantea aquí, es estudiar si existen procedimientos para caracterizar los ideales primarios de un anillo M . Para ello, tratemos de precisar lo que entendemos por caracterizar m-ideales.

Así, podemos suponer resuelto el problema de caracterizar los ideales $\mathfrak{A}$ de un anillo M tales que $\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$; pues por el lema 5. son los ideales traducidos de los m-ideales sobre T_1', donde T_1 es la teoría de dominios de integridad. También, el de los ideales primos, pues un ideal $\mathfrak{A}$ de M es primo si y sólo si $M/\mathfrak{A}$ es un dominio de integridad.

Ante esta situación se presentan dos definiciones alternativas de caracterización.

a) Sean T una teoría, $\Gamma \subset FL(T)$; diremos que $\mathcal{C} \subset I(T,\Gamma)$ es caracterizable si existe una extensión T' de T tal que $\mathcal{C} = I(T',\Gamma)$.

b) Sean T una teoría, $M \in M(T)$ y $\Gamma = At(M)$; diremos que $\mathcal{C} \subset I(T + D^+(M),\Gamma)$ es caracterizable si existe una extensión T' de T tal que: $\Delta \in \mathcal{C}$ si y sólo si $M/\Delta \in M(T')$.

Para un estudio del problema de la caracterización de m-ideales en una situación general la definición dada en b) no es adecuada; sin embargo, esta definición permite la utilización de procedimientos de la teoría de modelos para su resolución, y así podemos dar respuesta al problema de caracterizar los ideales primarios de un anillo M . Pues se verifica que:

(i) Los ideales primarios de un anillo M no son caracterizables (en el sentido definido en b)).

Demostración:

Sabemos que, si $\mathfrak{A}$ es un ideal de M , entonces

$$\mathfrak{A} \text{ es primario } \longleftrightarrow \begin{cases} M/\mathfrak{A} \text{ es un anillo distinto del cero} \\ \text{Todo divisor de cero en } M/\mathfrak{A} \text{ es} \\ \text{nilpotente.} \end{cases}$$

En el lenguaje de la teoría de anillos las dos condiciones anteriores quedan:

$\mathfrak{A}$ es primario si y sólo si $M/\mathfrak{A}$ es modelo de la teoría T^* cuyos axiomas son:

los de la teoría de anillos ($M/\mathfrak{A}$ es un anillo)

$\exists x \exists y (x \neq y)$ ($M/\mathfrak{A}$ no es el anillo cero)

$x \cdot y = 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (x = 0 \vee x^2 = 0 \vee \ldots \vee x^n = 0 \vee \ldots)$

(todo divisor de cero es nilpotente).

Sin embargo, el último axioma no es una fórmula de un lenguaje de primer orden (la parte derecha de la implicación es una expresión de longitud infinita). Lo que sigue prueba que no existe ninguna teoría en el lenguaje de la teoría de anillos tal que sus modelos sean los de T^*. Sea T' una tal teoría; y consideremos el anillo de los números enteros Z , para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el anillo $Z/(2^n)$. Como Z es un dominio de integridad;para todo $n > 0$, (2^n) es un ideal primario. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $Z/(2^n)$ es un modelo de T' . Sea F un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, un tal ultrafiltro existe pues $\mathbb{N}$ es infinito, y consideremos el ultraproducto:

$$M = \prod_{n \in \mathbb{N}} Z/(2^n) \Big/ F$$

Consideremos $(2,2,\ldots,2,\ldots)/F, (0,2,2^2,\ldots,2^{n-1},\ldots)/F \in |M|$

Se verifican:

(1) $(0,2,\ldots,2^{n-1},\ldots)/F \neq (0,0,0,\ldots,0,\ldots)/F$

En efecto,pues:

$$\{k \in \mathbb{N}: ((0,2,2^2,\ldots,2^{n-1},\ldots))_k = 0\} = \{0,1\};$$

que es finito, y por tanto no pertenece a F.

(2) $((2,2,2,\ldots,2,\ldots)/F)\cdot((0,2,2^2,\ldots,2^{n-1},\ldots)/F) =$

$$(0,0,0,\ldots,0,\ldots)/F .$$

(3) Para todo $k \in \mathbb{N}$: $((2,2,\ldots,2,\ldots))^k/F \neq (0,0,\ldots,0,\ldots)/F$.

$$((2,2,2,\ldots,2,\ldots)/F)^k = (2^k,2^k,2^k,\ldots,2^k,\ldots)/F.$$

Y puesto que,

$$\{n \in \mathbb{N}: \ ((2^k,2^k,\ldots 2^k,\ldots))_n = 0\} = \{1,2,\ldots,k\}$$

es finito, no pertenece a F ; y por tanto

$$((2,2,2,\ldots,2,\ldots))^k/F \neq (0,0,0,\ldots,0,\ldots)/F$$

De (1), (2) y (3) se sigue que M no es modelo de T' , lo cual está en contradicción conel teorema fundamental de ultraproductos. Así pues,la teoría T' no puede existir, y por tanto los ideales primarios no son caracterizables.

2.2 $\mathfrak{M}$-IDEALES DE LA TEORIA DE GRUPOS.

(A) Traducción de m-ideales.

Notas 1.

La teoría de grupos, T; es la teoría cuyo lenguaje consta de: una constante, 0 ; y un símbolo de función binaria, + . Y sus axiomas son: A1, A2 y A3 de la teoría de anillos.

Sea $M \in M(T)$, y consideremos: $T' = T + D^{+}(M)$ y $\Gamma = At(M)$. Deseamos establecer alguna relación entre $I(T',\Gamma)$ y $S(M)$, conjunto de los subgrupos de M .

Notas 2.

Sea $\Delta \in I(T',\Gamma)$, definimos:

$H_\Delta = \{a \in |M|: \; a = 0 \in \Delta\}$. Se verifica que:

(i) $H_\Delta \in S(M)$. Más aún, $H_\Delta \trianglelefteq M$.

Demostración:

Se verifican:

(1) $0_M \in H_\Delta$, ya que $0 = 0 \in D^{+}(M)$.

(2) Sean $a,b \in H_\Delta$, entonces $a = 0, b = 0 \in \Delta$. Además, existe $c \in |M|$ tal que $a+b = c \in D^{+}(M)$. Y puesto que:

$T' \vdash a = 0 \wedge b = 0 \wedge a+b = c \rightarrow c = 0$,

$c = 0 \in \Delta$. Por tanto, $c \in H_\Delta$.

(3) Si $a \in H_\Delta$, existe $c \in |M|$ tal que $a+c = 0 \in D^{+}(M)$. Además,

$T' \vdash a = 0 \wedge a+c = 0 \rightarrow c = 0$.

Por tanto, $c = 0 \in \Delta$, y en consecuencia, $c \in H_\Delta$.

De (1) , (2) y (3) se sigue que $H_\Delta \in S(M)$.

Probemos ahora que $H_\Delta \trianglelefteq M$. Sea $a \in |M|$, si $c \in a+H_\Delta+(-a)$, entonces existen $b \in H_\Delta$ y $a',d \in |M|$ tales que:

$$a+a' = 0 \text{ , } d+a' = c \text{ , } a+b = d \in D^{+}(M).$$

Ahora bien, si $b \in H_\Delta$, entonces $b = 0 \in \Delta$. Como además,

$$T' \vdash a+b = d \wedge b = 0 \rightarrow a = d ;$$

por tanto, $a = d \in \Delta$. Y puesto que:

$$T' \vdash a = d \wedge d+a' = c \wedge a+a' = 0 \rightarrow c = 0 ,$$

$c = 0 \in \Delta$. Por tanto $c \in H_\Delta$. Lo anterior prueba que:

$$a + H_\Delta + (-a) \subset H_\Delta ,$$

y por tanto, H_Δ es un subgrupo normal de M .

Puesto que, si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $H_\Delta \trianglelefteq M$; tenemos definidas dos construcciones de cociente: la algebraica M/H_Δ , y M/Δ . La relación entre estas dos estructuras viene dada por:

(ii) Si $M \in M(T)$ y $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $M/\Delta \cong M/H_\Delta$.

Demostración:

Consideremos $\phi\colon |M/\Delta| \longrightarrow |M|/H_\Delta$. Definida por:

$$\phi(a/\Delta) = a + H_\Delta .$$ Se verifican:

(1) ϕ está bien definida y es inyectiva.

En efecto, existe $c \in |M|$ tal que $a+c = b \in D^+(M)$. Además;

$$\begin{aligned} a/\Delta = b/\Delta &\leftrightarrow a \sim b \\ &\leftrightarrow a = b \in \Delta . \\ &\leftrightarrow c = 0 \in \Delta \quad \begin{pmatrix} (\rightarrow)\ T' \vdash a+c=b \wedge a=b \rightarrow c=0 \\ (\leftarrow)\ T' \vdash a+c=b \wedge c=0 \rightarrow a=b \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow c \in H_\Delta \quad (\text{def. de } H_\Delta) \\ &\leftrightarrow a + H_\Delta = b + H_\Delta \quad (\text{pues } a+c=b \in D^+(M)). \end{aligned}$$

(2) ϕ es suprayectiva. Trivial.

(3)

$$\begin{aligned} \phi(a/\Delta + b/\Delta) &= \phi((a+b)/\Delta) \quad (\text{def. de } +_{M/\Delta}) \\ &= (a+b) + H_\Delta \quad (\text{def. de } \phi) \\ &= (a + H_\Delta) + (b + H_\Delta) \\ &= \phi(a/\Delta) + \phi(b/\Delta) . \end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) se sigue que ϕ es un isomorfismo. Lo que prueba (ii).

(iii) Sean $\Delta,\Delta' \in I(T',\Gamma)$ tales que $H_\Delta = H_{\Delta'}$, entonces

$\Delta = \Delta'$

Demostración:

Por (ii):

$$M/\Delta \cong M/H_{\Delta} = M/H_{\Delta'} \cong M/\Delta' .$$

Y de aquí se sigue el resultado.

Notas 3.

Sea $H \in S(M)$ definimos:

$$\Delta_H = \{a = 0 \in At(M): \ a \in H\} . \text{ Se verifica:}$$

(i) Si $\Delta \in I(T',\Gamma)$, entonces $\Delta = \langle\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\}\rangle$.

Demostración:

Como $\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\} \subset \Delta$, entonces

$$\langle\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\}\rangle \subset \Delta.$$

Sea $a = b \in \Delta$. Existe $c \in |M|$ tal que $a+c = b \in D^+(M)$. Y

$T' \vdash a = b \wedge a+c = b \rightarrow c = 0$. Por tanto

$T' \vdash a = b \rightarrow c = 0$.

En consecuencia, $c = 0 \in \Delta$. Como además:

$T' \vdash a+c = b \wedge c = 0 \rightarrow a = b$.

Se tiene que, $a = b \in \langle\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\}\rangle$.

Sea $a+b = c \in \Delta$. Existe $c_1 \in |M|$ tal que $a+b = c_1 \in D^+(M)$.

$T' \vdash a+b = c \rightarrow a+b = c_1 \wedge c = c_1$,

$T' \vdash a+b = c \rightarrow c = c_1$.

Por tanto, $c = c_1 \in \Delta$. Y en consecuencia:

$c = c_1 \in \langle\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\}\rangle$. Como además,

$T' \vdash a+b = c_1 \wedge c = c_1 \rightarrow a+b = c$;

se sigue que: $a+b = c \in \langle\{a = 0: \ a = 0 \in \Delta\}\rangle$.

(ii) Si $H \in S(M)$, entonces $H_{\langle\Delta_H\rangle}$ es el menor subgrupo normal de M que contiene a H .

Demostración:

Por (2-(i)) $H_{\langle\Delta_H\rangle}$ es un subgrupo normal de M. Además, si $a \in H$, entonces $a = 0 \in \Delta_H$; por tanto $a \in H_{\langle\Delta_H\rangle}$.

Sea $G \trianglelefteq M$ tal que $H \subset G$. Sea $\Delta = \langle\{a = 0:\ a \in G\}\rangle$.
Puesto que, $M/G \in M(T' + \{a = 0:\ a \in G\})$; se tiene que:

(1) si $c \notin G$, entonces $T' + \{a = 0:\ a \in G\} \nvdash c = 0$.

Sea $a \in H_{\langle \Delta_H \rangle}$, entonces $a = 0 \in \Delta_H$. Por tanto,

$T' + \{b = 0:\ b \in H\} \vdash a = 0$. Luego

$T' + \{b = 0:\ b \in G\} \vdash a = 0$.

Por tanto $a = 0 \in \Delta$. Y por (1) $a \in G$. En consecuencia
$H_{\langle \Delta_H \rangle} \subset G$.

Notas 4.

El problema que tratamos de estudiar aquí es determinar los subgrupos de un grupo M , mediante los m-ideales de $At(M)$ sobre una cierta teoría. Más concretamente, nuestro propósito consiste en encontrar una teoría T^* tal que: si M es un grupo, entonces;

(1) Si $\Delta \in I(T^* + D^+(M), At(M))$, entonces $H_\Delta \in S(M)$;

y (2) si $H \in S(M)$, entonces existe $\Delta \in I(T^* + D^+(M), At(M))$ tal que $H_\Delta = H$.

Para ello tengamos presente la siguiente consideración: si se ha de verificar (1) , entonces la fórmula;

$$x = 0 \wedge y = 0 \wedge x+z * y \rightarrow z = 0 ,$$

tiene que ser un axioma de T^* .

Sin embargo, la teoría cuyo único axioma es la fórmula anterior no consigue resolver el problema.

Para ello consideremos el siguiente ejemplo: sea S_3 el grupo de las biyecciones de un conjunto de tres elementos. Donde $0_{S_3} = I$ (I es la aplicación identidad) , y representaremos a los elementos de S_3 de la forma habitual.

Si se tiene (2), entonces existe $\Delta \in I(T^* + D^+(S_3), At(S_3))$ tal que $H_\Delta = \{I , (12)\}$. Por tanto $0 = I, 0 = (12) \in \Delta$. Así pues $\langle\{0 = I , 0 = (12)\}\rangle \subset \Delta$. Ahora bien se verifica que:

(i) $H_{\langle 0=I, 0=(12)\rangle} = |S_3|$.

Demostración:

Probaremos que $(23) = 0 \,\varepsilon \langle\{0 = I \ , \ 0 = (12)\}\rangle$. Análogamente se prueba para los demás individuos de S_3 . En efecto,

$T^* + D^+(S_3) \vdash I+(13) = (13)$, por tanto,

$T^* + D^+(S_3) + \{0 = I \ , \ 0 = (12)\} \vdash (12)+(13) = (13)$,

$T^* + D^+(S_3) \vdash (12)+(13) = (123)$;

$T^* + D^+(S_3) + \{0 = I \ , \ 0 = (12)\} \vdash (13) = (123)$,

$T^* + D^+(S_3) \vdash (13)+(123) = (23)$,

$T^* + D^+(S_3) \vdash (13)+(13) = I$

$T^* + D^+(S_3) + \{0 = I \ , \ 0 = (12)\} \vdash (23) = I$,

$T^* + D^+(S_3) + \{0 = I \ , \ 0 = (12)\} \vdash (23) = 0$.

Por tanto, $(23) = 0 \,\varepsilon \langle\{0 = I \ , \ 0 = (12)\}\rangle$. Lo que prueba (i).

De (i), se sigue que no existe ningún m-ideal de $At(S_3)$ sobre $T^* + D^+(S_3)$ tal que $H_\Delta = \{I \ , \ (12)\}$. Así mismo, de la prueba de (i) se obtiene que esto no es debido al axioma de T^*, sino al lenguaje de primer orden en el cual está formalizada la teoría de grupos. Ello nos permite resolver el problema mediante el siguiente procedimiento: consideremos la teoría de grupos, T; formalizada sobre un lenguaje que consta de: una constante, 0 ; y un predicado 3-ario, s (leeremos sxyz como "la suma de x e y es z "). Sea T^* la teoría con lenguaje L(T) y axioma:

$$x = 0 \wedge y = 0 \wedge szyx \rightarrow z = 0 .$$

Sean M un grupo, $T' = T^* + D^+(M)$ y $\Gamma = At(M)$. Se verifican:

(ii) Si $\Delta \,\varepsilon\, I(T',\Gamma)$, entonces $H_\Delta \,\varepsilon\, S(M)$.

Demostración:

Sean $a,b \,\varepsilon\, H_\Delta$. Existe $c \,\varepsilon\, |M|$ tal que $scab \,\varepsilon\, D^+(M)$. Además:

$T' \vdash a = 0 \wedge b = 0 \wedge scab \rightarrow c = 0$. Por tanto

$T' \vdash a = 0 \wedge b = 0 \rightarrow c = 0$.

Ahora bien, $a = 0, b = 0 \,\varepsilon\, \Delta$; por tanto $c = 0 \,\varepsilon\, \Delta$, en consecuencia $c \,\varepsilon\, H_\Delta$. Y de aquí, $H_\Delta \,\varepsilon\, S(M)$. Lo que prueba (ii).

(iii) Si $H \varepsilon S(M)$, entonces existe $\Delta \varepsilon I(T',\Gamma)$ tal que $H_\Delta = H$.

Demostración:

Sea $\Delta = \langle\{a = 0: a \varepsilon H\}\rangle$. Se verifica que:

Si $b \notin H$, entonces $T' + \{a = 0: a \varepsilon H\} \nvdash b = 0$.

En $|M|$ definimos la siguiente relación:

$$a \sim b \longleftrightarrow a,b \varepsilon H \text{ o } a = b \varepsilon D^+(M) .$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Denotaremos por $a/\sim$ a la clase de equivalencia de un individuo a de M.

Definimos una L(T)-estructura $M/\sim$ por:

$|M/\sim| = |M|/\sim$.

$0_{M/\sim} = 0_M/\sim$.

Sean $a,b,c \varepsilon |M|$, definimos $s_{M/\sim}(a/\sim,b/\sim,c/\sim)$ por:

si $a,b,c \notin H$, $s_M(a,b,c)$

si alguno pertenece a H (por ejemplo si $b \varepsilon H$ y $a,c \notin H$) , $s_M(a,0,c)$

Es claro que: $M/\sim \varepsilon M(\{a = 0: a \varepsilon H\})$

$M/\sim \varepsilon M(T')$ pues $H \varepsilon S(M)$.

Además, si $b \notin H$, entonces $M/\sim(b = 0) = F$. Por tanto,

$T' + \{a = 0: a \varepsilon H\} \nvdash b = 0$.

En consecuencia, $H_\Delta = \{a \varepsilon |M|: a \varepsilon \Delta\} = H$. Lo que prueba (iii).

2.3 $\mathfrak{M}$-IDEALES DE LA TEORIA DE ALGEBRAS DE BOOLE.

Notas 1.

La teoría de álgebras de Boole, T; es la teoría cuyo lenguaje consta de: dos funciones binarias; $+$, $\cdot$; una función 1-aria $-$; y dos constantes; 0 , 1 . Sus axiomas son:

A1	$x+y = y+x$	A1'	$x\cdot y = y\cdot x$
A2	$x+(y+z) = (x+y)+z$	A2'	$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
A3	$(x\cdot y)+ y = y$	A3'	$(x+y)\cdot y = y$
A4	$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$	A4'	$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$
A5	$x\cdot(-x) = 0$	A5'	$x+(-x) = 1$

Sean $M \in M(T)$, $T' = T + D^+(M)$ y $\Gamma = At(M)$. Notaremos por $I(M)$ al conjunto de los ideales de M ; y por $F(M)$ al conjunto de los filtros de M .

Notas 2.

Deseamos establecer alguna relación entre $I(M)$ y $F(M)$, y $I(T',\Gamma)$. Sea $\Delta \in I(T',\Gamma)$, definimos:

$$I_\Delta = \{a \in |M|: \ a = 0 \in \Delta\} \quad , y$$

$$F_\Delta = \{a \in |M|: \ a = 1 \in \Delta\} \quad . \text{ Se verifican:}$$

(i) $I_\Delta \in I(M)$.

Demostración:

Sean $a,b \in |M|$. Se tiene que:

(1) existe $c \in |M|$ tal que $a+b = c \in D^+(M)$,

(2) $T' \vdash c = 0 \longleftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} c \in I_\Delta &\longleftrightarrow c = 0 \in \Delta \\ &\longleftrightarrow a = 0, b = 0 \in \Delta \quad \text{(por (1) y (2))} \\ &\longleftrightarrow a,b \in I_\Delta \end{aligned}$$

Lo que prueba (i).

(ii) $F_\Delta \in F(M)$.

Demostración:

Sean $a,b \in |M|$ tales que $a,b \in F_\Delta$, entonces $a = 1, b = 1 \in \Delta$. Ahora bien, existe $c \in |M|$ tal que $a \cdot b = c \in D^+(M)$; además:

$$T' \vdash a = 1 \wedge b = 1 \wedge a \cdot b = c \rightarrow c = 1 .$$

Por tanto, $c = 1 \in \Delta$; en consecuencia $c \in F_\Delta$.

Sean $a,b \in |M|$ tales que $a \in F_\Delta$, y $a \cdot b = a \in D^+(M)$; entonces $a = 1 \in \Delta$. Y puesto que,

$$T' \vdash a = 1 \wedge a \cdot b = 1 \rightarrow b = 1 ,$$

$b = 1 \in \Delta$. Por tanto, $b \in F_\Delta$.

De lo anterior se sigue que F_Δ es un filtro sobre M . Lo que prueba (ii).

(iii) I_Δ y F_Δ son uno dual del otro.

Demostración.

Esto es, se trata de probar que:

(1) $I_\Delta = \{-a \in |M| : a \in F_\Delta\}$, y

(2) $F_\Delta = \{-a \in |M| : a \in I_\Delta\}$.

(1)

$\subset$ Sea $b \in I_\Delta$, entonces $b = 0 \in \Delta$. Puesto que,

$$T' \vdash b = 0 \rightarrow -b = 1 ,$$

$-b = 1 \in \Delta$. Por tanto, $-b \in F_\Delta$. Ahora bien,

$T' \vdash -(-b) = b$. Luego,

$$b \in \{-a \in |M| : a \in F_\Delta\} .$$

$\supset$ Sea $a \in F_\Delta$, entonces $a = 1 \in \Delta$. Ahora bien,

$T' \vdash a = 1 \rightarrow -a = -1$. Y puesto que,

$T' \vdash -1 = 0$. Se sigue que,

$$T' \vdash a = 1 \rightarrow -a = 0 .$$

Por tanto, $-a = 0 \in \Delta$; y en consecuencia $-a \in I_\Delta$.

(2) Análogamente.

Notas 3.

En las álgebras de Boole tenemos definidos dos cocientes algebraicos: si $I \in I(M)$, M/I ; y si $F \in F(M)$, M/F. Y además

M/Δ con $\Delta \varepsilon I(T',\Gamma)$. La relación entre estas construcciones viene dada por:

(i) Si $M \varepsilon M(T)$ y $\Delta \varepsilon I(T',\Gamma)$. Se verifican:

(a) $M/I_\Delta \cong M/\Delta$; y (b) $M/F_\Delta \cong M/\Delta$.

Demostración:

(a) Notaremos por a/I_Δ a la clase de $a \varepsilon |M|$ en M/I_Δ .

Probemos que: $a/I_\Delta = b/I_\Delta$ si y sólo si $a/\Delta = b/\Delta$.

Para ello tengamos presente que se verifican:

(1) $T' \vdash a+b = 0 \longleftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$; y

(2) $T' \vdash a\cdot(-b) = 0 \wedge (-a)\cdot b = 0 \longleftrightarrow a = b$.

$$\begin{aligned} a/I_\Delta = b/I_\Delta &\longleftrightarrow (a\cdot(-b))+((-a)\cdot b) \varepsilon I_\Delta \\ &\longleftrightarrow (a\cdot(-b))+((-a)\cdot b) = 0 \varepsilon \Delta \\ &\longleftrightarrow a\cdot(-b) = 0,(-a)\cdot b = 0 \varepsilon \Delta \text{ (por (1))} \\ &\longleftrightarrow a = b \varepsilon \Delta \text{ (por (2))} \\ &\longleftrightarrow a/\Delta = b/\Delta . \end{aligned}$$

Definimos: $\phi: |M/\Delta| \longrightarrow |M/I_\Delta|$, por $(a/\Delta) = a/I_\Delta$. Es fácil probar que ϕ es un isomorfismo. Lo que prueba (a).

(b) Notaremos por a/F_Δ a la clase de $a \varepsilon |M|$ en M/F_Δ .

Probemos que: $a/F_\Delta = b/F_\Delta$ si y sólo si $a/\Delta = b/\Delta$.

($\rightarrow$) Si $a/F_\Delta = b/F_\Delta$, entonces existe $c \varepsilon F_\Delta$ tal que $a\cdot c = b\cdot c \varepsilon D^+(M)$. Ahora bien, si $c \varepsilon F_\Delta$, entonces $c=1 \varepsilon \Delta$. Y de aquí: $T' + \Delta \vdash c = 1$, $T' + \Delta \vdash a\cdot c = b\cdot c$. Por tanto,

$T' + \Delta \vdash a\cdot 1 = b\cdot 1$. Y puesto que,

$T' + \Delta \vdash a\cdot 1 = a$, y $T' \vdash b\cdot 1 = b$. Se sigue que: $T' + \Delta \vdash a = b$. Por tanto, $a = b \varepsilon \Delta$; en consecuencia $a/\Delta = b/\Delta$.

($\leftarrow$) Si $a/\Delta = b/\Delta$, entonces $a = b \varepsilon \Delta$. Y puesto que:

$T' \vdash a = b \rightarrow a+(-b) = 1 \wedge (-a)+b = 1$;

se sigue que, $a+(-b) = 1,(-a)+b = 1 \varepsilon \Delta$. Además, existen $a_1,a_2 \varepsilon |M|$ tales que $a+(-b) = a_1,(-a)+b = a_2 \varepsilon D^+(M)$. Por tanto, $a_1 = 1,a_2 = 1 \varepsilon \Delta$; en consecuencia, $a_1,a_2 \varepsilon F_\Delta$.

Así mismo, existe $b_1 \varepsilon |M|$ tal que $a_1 \cdot a_2 = b_1 \varepsilon D^+(M)$, de aquí se sigue que, $b_1 = 1 \varepsilon \Delta$, y por tanto $b_1 \varepsilon F_\Delta$. Y además:

$$\begin{aligned}
a\cdot b_1 &= a\cdot(a_1\cdot a_2)\\
&= a\cdot((a+(-b))\cdot((-a)+b))\\
&= ((a\cdot a)+(a\cdot(-b)))\cdot((-a)+b)\\
&= (a+(a\cdot(-b)))\cdot((-a)+b)\\
&= a\cdot(-a) + a\cdot b + a\cdot(-b)\cdot(-a) + a\cdot(-b)\cdot b\\
&= 0 + a\cdot b + 0\cdot b + a\cdot 0\\
&= a\cdot b\ .
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que,

$$b\cdot b_1 = a\cdot b$$

Por tanto,existe $b_1 \varepsilon F_\Delta$ tal que $a\cdot b_1 = b\cdot b_1$. En consecuencia $a/F_\Delta = b/F_\Delta$.

Definimos: $\phi\colon M/\Delta \longrightarrow M/F_\Delta$, por $\phi(a/\Delta) = a/F_\Delta$. Es fácil probar que ϕ es un isomorfismo. Lo que prueba (b).

§3. PROBLEMAS DE LA TEORIA DE MODELOS RELATIVOS AL COCIENTE.

El primer problema que estudiamos es el de la persistencia. Demostramos condiciones necesarias y condiciones suficientes para la persistencia bajo cociente. El segundo, es el de la finitud; es decir, la extensión de propiedades de los submodelos finitamente generados al total. Finalmente, relacionamos la construcción de ultraproductos con la de cocientes demostrando que a cada ultrafiltro F le corresponde un m-ideal Δ_F tal que el ultraproducto mediante F es isomorfo al cociente mediante Δ_F y terminamos estudiando el comportamiento de subestructuras bajo cocientes.

3.1 PERSISTENCIA BAJO COCIENTE.

Lema 1. Si T es persistente bajo homomorfismo, entonces T espersistente bajo cociente.

Demostración:

En efecto, sean $M \varepsilon M(T)$ y $\Delta \varepsilon I(T+D^{+}(M),At(M))$. Sabemos que la aplicación: $\phi: |M| \longrightarrow |M/\Delta|$, definida por $\phi(a)=a/\Delta$ es un homomorfismo suprayectivo; y puesto que, T es persistente bajo homomorfismo: $M/\Delta \varepsilon M(T)$. Por tanto, T es persistente bajo cociente.

Por el lema anterior y el teorema de persistencia bajo homomorfismo de Lyndon, se tiene que:

Corolario 2. Si T es equivalente a una teoría cuyos axiomas son fórmulas positivas, entonces T es persistente bajo cociente.

Lema 3. Sean $A_1,\ldots,A_n,B$ fórmulas atómicas. Si

$$T \vdash \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B ,$$

entonces para todo $M \varepsilon M(T)$, y todo $\Delta \varepsilon I(T+D^{+}(M),At(M))$

$$M/\Delta \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B.$$

Demostración:

Sea $\neg A_1[a_1/\Delta,\ldots,a_k/\Delta] \vee \ldots \neg A_n[a_1/\Delta,\ldots,a_k/\Delta] \vee B[a_1/\Delta,\ldots,a_k/\Delta]$ cualquier M/Δ-estancia de $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B$, tal que:

$$M/\Delta(A_i[a_1/\Delta,\ldots,a_k/\Delta]) = V \quad , i=1,\ldots,n ,$$

entonces $A_i[a_1,\ldots a_k] \varepsilon \Delta$; y puesto que,

$$T+D^{+}(M) \vdash \neg A_1[a_1,\ldots,a_k] \vee \ldots \vee \neg A_n[a_1,\ldots,a_k] \vee B[a_1,\ldots,a_k] ,$$

esto es,

$$T+D^{+}(M) \vdash A_1[a_1,\ldots,a_k] \wedge \ldots \wedge A_n[a_1,\ldots,a_k] \rightarrow B[a_1,\ldots,a_k]$$

$B[a_1,\ldots,a_k] \varepsilon \Delta$. Así pues,

$$M/\Delta(B[a_1/\Delta,\ldots,a_k/\Delta]) = V .$$

Por tanto, $M/\Delta \models \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B$. Lo que prueba el lema.

Como consecuencia inmediata de los lemas anteriores se tiene:

Teorema 4. Si T es equivalente a una teoría cuyos axiomas pertenecen al conjunto:

$$Pos(T) \cup \{ \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B : \; A_i, B \text{ atómicas}\} ,$$

entonces T es persistente bajo cociente.

Lema 5. Si existe $A \in \neg Pos(T)$ tal que $T \vdash A$, entonces T no es persistente bajo cociente.

Demostración:

Sea $M \in M(T)$. Realizamos la prueba por inducción sobre la longitud de A.

Caso a. A es $\neg B$, con B atómica. Sea

$$\Delta = \langle \{B[a_1,\dots,a_k] : \; a_1,\dots,a_k \in |M|\} \rangle .$$

Y consideremos M/Δ. Se tiene que: $M/\Delta \models B$. Por tanto, $M/\Delta \not\models A$; luego, $M/\Delta \notin M(T)$.

Caso b. A es $\neg(B \vee C)$.

Entonces A es equivalente a $\neg B \wedge \neg C$. Por hipótesis de inducción, existe $\Delta \in I(T+D^{+}(M),At(M))$ tal que $M/\Delta \models B$. En consecuencia, $M/\Delta \not\models \neg B \wedge \neg C$. Luego, $M/\Delta \notin M(T)$.

Caso c. A es $\neg(B \wedge C)$.

Como $B \wedge C$ es positiva; se tiene que, $B \wedge C$ es conjunción o disyunción de fórmulas atómicas. Descomponemos B y C en sus componentes atómicas. Sea

$$\Delta = \langle \{pa_1 \dots a_n : \; a_1,\dots a_n \in |M| \text{ y } px_1 \dots x_n \text{ ocurre en } B \text{ o } C\} \rangle$$

Se tiene que, $M/\Delta \models B \wedge C$; por tanto $M/\Delta \notin M(T)$.

Caso d. A es $\neg \exists x B(y_1,\dots,y_n,x)$.

Si B es atómica. Sea $a \in |M|$, y consideremos:

$$\Delta = \langle \{B[a_1,\dots,a_n,a] : \; a_1,\dots,a_n \in |M|\} \rangle .$$

Es claro que, $M/\Delta \models \exists x B$; y por tanto $M/\Delta \notin M(T)$.

Si B no es atómica la construcción de Δ se realiza de forma similar a los casos (b) y (c).

Caso e, A es $\neg\forall x B(y_1,\ldots y_k,x)$.

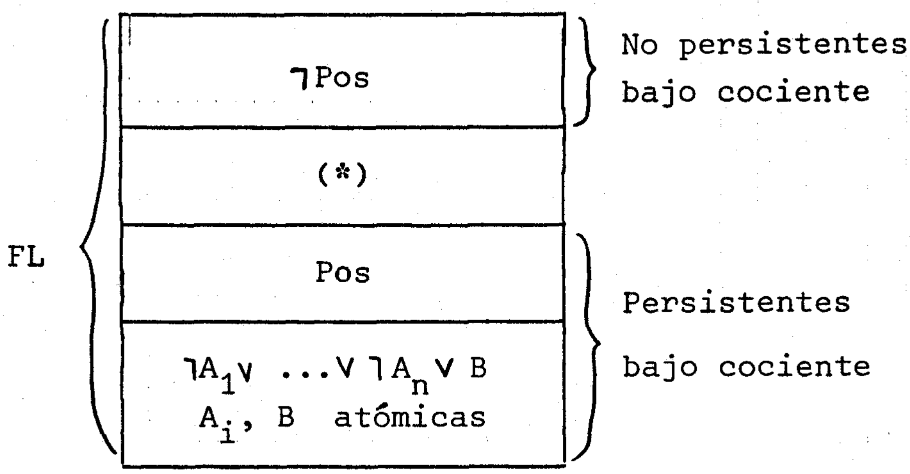
Entonces A es equivalente a $\exists x \neg B(y_1,\ldots,y_k,x)$. Sea

$\Delta = \langle \{B[a_1,\ldots,a_k,a]: \ a_1,\ldots,a_k,a \in |M|\}\rangle$.

Es claro que, $M/\Delta \models \forall xB$; y por tanto, $M/\Delta \notin M(T)$.

Notas 6.

Para un lenguaje de primer orden L , la persistencia bajo cociente de las fórmulas de L queda gráficamente:



Trataremos de analizar aquí cuál es la situación de las fórmulas que en la figura anterior no están en los conjuntos de fórmulas persistentes ni en las de fórmulas no persistentes (zona marcada con (*))

(i) Consideremos el caso de la teoría de dominios de integridad, T_1 . Se tiene que:

(1) el conjunto de los números enteros, Z ; es un dominio de integridad;

(2) existe $\Delta \in I(T_1+D^+(Z),At(Z))$ tal que $\mathfrak{a}_\Delta = Z6$. Pues $\sqrt{Z6} = Z6$ (ver §2) , y $Z/\Delta \cong Z/Z6$.

Por (2),como $Z/Z6$ no es un dominio de integridad; tampoco lo es Z/Δ . En consecuencia, la teoría de dominios de integridad no es persistente bajo cocientes. Puesto que, la teoría de anillos sí es persistente bajo cociente (sus axiomas son fórmulas positivas), debe de ser la presencia del axioma:

$$x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0 \ ,$$

la que introduzca la no persistencia bajo cociente.

Trataremos de analizar el carácter para la persistencia bajo cociente de las fórmulas del tipo:

$$px \rightarrow qx \vee rx \ ,$$

donde p , q y r son predicados 1-arios. Esta fórmula tiene una forma sintáctica idéntica al axioma de la teoría de dominios de integridad anteriormente descrito.

En primer lugar, debe quedar claro que la fórmula : $px \rightarrow qx \vee rx$ ($\neg px \vee qx \vee rx$) pertenece a la zona marcada con (*).

(ii) $px \rightarrow qx \vee rx$ es no persistente bajo cociente

<u>Demostración</u>:

Consideremos la siguiente estructura, M ; donde:

$|M| = \{a , b , c\}$. Y la interpretación de los predicados:

$p_M = \{a , b\}$; $q_M = \{a\}$; $r_M = \{b\}$.

Es claro que $M \models px \rightarrow qx \vee rx$. Consideremos $I(\{px \rightarrow qx \vee rx\}+D^+(M),At(M))$. Sea $\Delta = \{pc\}$. Se verifican:

(1) $qc \notin \Delta$.

En efecto, sea $\phi: |M| \longrightarrow |M|$ definido por:

$$\phi(a) = a \ ; \ \phi(b) = b \ ; \ \phi(c) = b \ .$$

Se tiene que: $\phi: M \simeq M$. Además:

$$M(\phi(M)) \models px \rightarrow qx \vee rx \ .$$

Ahora bien, $M(\phi(M))(qc) = F$. Por tanto,

$$\{px \rightarrow qx \vee rx\} + D^+(M) + \{pc\} \not\models qc \ .$$

En consecuencia, $qc \notin \Delta$. Lo que prueba (1).

(2) $rc \notin \Delta$.

La prueba es análoga.

Consideremos M/Δ , y la M/Δ-estancia:

$$pc/\Delta \rightarrow qc/\Delta \vee rc/\Delta \quad . \text{ Se tiene que:}$$

$M/\Delta(pc/\Delta) = V$; $M/\Delta(qc/\Delta) = M/\Delta(rc/\Delta) = F$. Por tanto,

$$M/\Delta(pc/\Delta \rightarrow qc/\Delta \vee rc/\Delta) = F$$. Así pues,

$$M/\Delta \not\models px \rightarrow qx \vee rx .$$

Lo que prueba (ii).

(iii)

Sin embargo, la situación no es tansimple; pues puede ocurrir que la fórmula anterior, en presencia de otros axiomas, sí sea persistente bajo cociente.

Para ello, consideremos el lenguaje de primer orden L, con los siguientes símbolos de predicados; $\leqslant$, predicado binario; p , q , r , predicados 1-arios. Y la teoría T con lenguaje L , cuyos axiomas son:

A1
$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant x \\ x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y \\ x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z \\ x \leqslant y \vee x = y \end{array}\right\} \text{orden total}$$

A2 $x_1 = x_2 \vee y = x_1 \vee y = x_2$ (a lo más dos individuos)

A3 $x \leqslant y \wedge px \wedge rx \wedge py \rightarrow ry$

A4 $x \leqslant y \wedge py \wedge qy \wedge px \rightarrow qx$

A5 $\exists xpx$; A6 $\exists xqx$; A7 $\exists xrx$.

Por la forma de sus axiomas se tiene que T es persistente bajo cociente.

Sea $T_1 = T + \{px \rightarrow qx \vee rx\}$. Salvo isomorfismo los modelos de T_1 son:

Modelos con un sólo individuo.

M_1 donde: $|M_1| = \{a\}$ $\leqslant_{M_1} = \{(a,a)\}$

$$p_{M_1} = q_{M_1} = r_{M_1} = \{a\} .$$

Modelos con dos individuos.

Para todos estos modelos tomaremos $\{a , b\}$ como su universo, $\{(a,a) , (a,b) , (b,b)\}$ como la interpretación de $\leqslant$, y escribiremos p en lugar de p_{M_i}.

M_2 donde: $p = q = r = \{a\}$.

M_3 donde: $p = q = r = \{b\}$.

M_4 donde: $p = q = \{a\}$; $r = \{b\}$.

M_5 donde: $p = r = \{a\}$; $q = \{b\}$.

M_6 donde: $p = q = \{b\}$; $r = \{a\}$.

M_7 donde: $p = r = \{b\}$; $q = \{a\}$.

M_8 donde: $p = \{a , b\}$; $q = \{a\}$;
$r = \{b\}$

M_9 donde: $p = \{a\}$; $q = \{b\}$;
$r = \{a , b\}$.

M_{10} donde: $p = q = \{a\}$; $r = \{a , b\}$.

M_{11} donde: $p = \{b\}$; $q = \{a\}$;
$r = \{a , b\}$.

M_{12} donde: $p = q = \{b\}$; $r = \{a , b\}$.

M_{13} donde: $p = \{b\}$; $r = \{a\}$;
$q = \{a , b\}$.

M_{14} donde: $p = \{a\}$; $r = \{b\}$;
$q = \{a , b\}$.

M_{15} donde: $p = r = \{a\}$; $q = \{a , b\}$.

M_{16} donde: $p = r = \{b\}$; $q = \{a , b\}$.

M_{17} donde: $p = r = \{a , b\}$; $q = \{a\}$.

M_{18} donde $p = q = \{a , b\}$; $r = \{b\}$.

M_{19} donde: $p = \{a\}$; $q = r = \{a , b\}$.

M_{20} donde: $p = \{b\}$; $q = r = \{a , b\}$.

M_{21} donde: $p = q = r = \{a , b\}$.

Se verifican:

(1) T_1 es persistente bajo cociente.

En efecto, sea M un modelo de T_1:

Si M tiene un único individuo.

Entonces M es isomorfo a M_1 ; y puesto que,

$p_{M_1} = q_{M_1} = r_{M_1} = \{a\}$, M_1 es persistente bajo cociente,

esto es, para todo $\Delta \in I(T_1+D^+(M_1),At(M_1))$

$$M_1/\Delta \models px \rightarrow qx \vee rx \ .$$

Si M tiene más de un individuo.

Si deseamos encontrar $\Delta \in I(T_1+D^+(M),At(M))$ tal que:

$$M/\Delta \not\models px \rightarrow qx \vee rx \ ,$$

entonces debe existir $c \in |M|$ tal que $pc, qc, rc \notin D^+(M)$.

Por tanto, M debe ser isomorfo a M_2 o M_3 .

En M_2 consideremos: $\Delta = \langle\{pb\}\rangle$. Como

$$T_1 + D^+(M_2) + \{pb\} \vdash a \lneq b \wedge ra \wedge pa \wedge pb \ .$$

Se tiene que,

$$T_1 + D^+(M_2) + \{pb\} \vdash rb \ .$$

Por tanto, $rb \in \langle\{pb\}\rangle$. Y en consecuencia, $M_2/\Delta \in M(T_1)$.

En M_3 consideremos: $\Delta = \langle\{pa\}\rangle$. Como

$$T_1 + D^+(M_3) + \{pa\} \vdash a \lneq b \wedge qb \wedge pb \wedge pa \ .$$

Se tiene que,

$$T_1 + D^+(M_3) + \{pa\} \vdash qa \ .$$

Por tanto, $qa \in \langle\{pa\}\rangle$. Y en consecuencia, $M_3/\Delta \in M(T_1)$.

De lo anterior se sigue que T_1 es persistente bajo cociente. Lo que prueba (1).

(2) $T \not\vdash qx \vee rx$.

En efecto, pues $M_2 \in M(T)$.

(3) $T \not\vdash px \rightarrow qx$.

En efecto, pues $M_5 \in M(T)$.

(4) $T \nvdash px \rightarrow rx$.

En efecto, pues $M_4 \in M(T)$.

(5) Al suprimir en T_1 cualquier axioma de T , la teoría resultante no es persistente bajo cociente.

Suprimimos A1 ; $T_1' = T_1 - A1$.

Sea M la estructura: $|M| = \{a , b\}$; $\leqslant_M = \phi$;

$p_M = q_M = r_M = \{a\}$. Se tiene que $M \in M(T_1')$. Sea $\Delta = \langle\{pb\}\rangle$.

(a) Sea M' la estructura: $|M'| = \{a , b\}$; $\leqslant_{M'} = \phi$

$p_{M'} = \{a , b\}$; $q_{M'} = \{a\}$; $r_{M'} = \{a , b\}$; y

$\psi: |M| \longrightarrow |M'|$ la identidad . Se tiene que:

ψ es un homomorfismo, y $M' \in M(T_1')$. Por tanto,

$T_1' + D^+(M) + \{pb\} \nvdash qb$.

(b) Sea M'' la estructura: $|M''| = \{a , b\}$; $\leqslant_{M''} = \phi$

$p_{M''} = q_{M''} = \{a , b\}$; $r_{M''} = \{a\}$; y $\psi: |M| \longrightarrow |M''|$ la identidad . Se tiene que:

ψ es un homomorfismo, y $M'' \in M(T_1')$. Por tanto,

$T_1' + D^+(M) + pb \nvdash rb$.

De (a) y (b) se tiene que $qb, rb \notin \Delta$; por tanto,

$$M/\Delta(pb/\Delta \rightarrow qb/\Delta \vee rb/\Delta) = F .$$

En consecuencia, $M/\Delta \nvDash px \rightarrow qx \vee rx$. Esto es, $M/\Delta \notin M(T_1')$.

Suprimimos A2 ; $T_2' = T_1 - A2$.

Sea M la estructura: $|M| = \{a , b , c\}$; $p_M = q_M = \{a\}$

$r_M = \{c\}$; $\leqslant_M = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\}$. Se tiene que: $M \in M(T_2')$. Sea $\Delta = \langle\{pb\}\rangle$.

(a) Sea M' la estructura: $|M'| = |M|$; $r_{M'} = r_M$;

$p_{M'} = q_{M'} = \{a , b\}$; $\leqslant_{M'} = \leqslant_M$; y $\psi: |M| \longrightarrow |M'|$ la identidad . Se tiene que:

ψ es un homomorfismo, y $M' \in M(T_2')$. Por tanto,

$T_2' + D^+(M) + \{pb\} \nvdash rb$

(b) Sea M'' la estructura: $|M''| = |M|$; $p_{M''} = \{a , b\}$;

$q_{M''} = \{a\}$; $r_{M''} = \{b , c\}$; $\leqslant_{M''} = \leqslant_M$; y

ϕ: $|M| \longrightarrow |M''|$ la identidad . Se tiene que:

ϕ es un homomorfismo, y $M'' \in M(T_2')$. Por tanto,

$T_2' + D^+(M) + pb \nvdash qb$.

De (a) y (b) se tiene que $qb, rb \notin \Delta^*$; por tanto,

$$M/\Delta(pb/\Delta \rightarrow qb/\Delta \vee rb/\Delta) = F .$$

En consecuencia, $M/\Delta \nvDash px \rightarrow qx \vee rx$. Así pues, $M/\Delta \notin M(T_2')$.

Suprimimos A3 ; $T_3' = T_1 - A3$.

Para ello,consideremos las siguientes estructuras:

M , $|M| = \{a , b\}$; $p_M = q_M = r_M = \{a\}$.

M', $|M'| = \{a , b\}$; $p_{M'} = q_{M'} = \{a , b\}$; $r_{M'} = \{a\}$.

M'', $|M''| = \{a , b\}$; $p_{M''} = r_{M''} = \{a , b\}$; $q_{M''} = \{a\}$.

Se tiene que: $M, M', M'' \in M(T_3')$; y la identidad de M en M', y de M en M'' son homomorfismos. Por tanto,

$T_3' + D^+(M) + pb \nvdash rb$, y

$T_3' + D^+(M) + pb \nvdash qb$.

Por tanto, $rb, qb \notin \Delta = \langle\{pb\}\rangle$. Luego, $M/\Delta \notin M(T_3')$.

Suprimimos A4 ; $T_4' = T_1 - A4$.

Consideremos las estructuras:

M , $|M| = \{a , b\}$; $p_M = q_M = r_M = \{b\}$.

M', $|M'| = \{a , b\}$; $p_{M'} = q_{M'} = \{a , b\}$; $r_{M'} = \{b\}$.

M'', $|M''| = \{a , b\}$; $p_{M''} = r_{M''} = \{a , b\}$; $q_{M''} = \{b\}$.

El resto es análogo al caso anterior.

Suprimimos A5 ; $T_5' = T_1 - A5$.

Consideremos las estructuras:

M , $|M| = \{a , b\}$; $p_M = \phi$; $q_M = r_M = \{a\}$.

M', $|M'| = \{a , b\}$; $p_{M'} = \{b\}$; $q_{M'} = \{a , b\}$;

$r_{M'} = \{a\}$.

M'', $|M''| = \{a , b\}$; $p_{M''} = \{b\}$; $q_{M''} = \{a\}$;

$r_{M''} = \{a , b\}$.

El resto es análogo al caso anterior.

Suprimimos A6 ; $T_6' = T_1 - A6$.

Consideremos las estructuras:

M , $|M| = \{a , b\}$; $p_M = r_M = \{b\}$; $q_M = \phi$.

M', $|M'| = \{a , b\}$; $p_{M'} = r_{M'} = \{a , b\}$; $q_{M'} = \phi$.

M'', $|M''| = \{a , b\}$; $p_{M''} = \{a , b\}$; $r_{M''} = \{b\}$;

$q_{M''} = \{a\}$.

Tomar $\Delta = \langle \{pa\} \rangle$. Y razomar como en los casos anteriores.

Suprimimos A7 ; $T_7' = T_1 - A7$.

Consideremos las estructuras:

M , $|M| = \{a , b\}$; $p_M = q_M = \{a\}$; $r_M = \phi$.

M', $|M'| = \{a , b\}$; $p_{M'} = q_{M'} = \{a , b\}$; $r_{M'} = \phi$.

M'', $M'' = \{a , b\}$; $p_{M''} = \{a , b\}$; $q_{M''} = \{a\}$;

$r_{M''} = \{b\}$.

El resto es análogo.

(iv)

Todo esto nos sugiere que la estructura sintáctica de los axiomas de una teoría no parece suficiente para decidir si es persistente bajo cociente.

3.2 RESULTADOS DE FINITUD SOBRE EL COCIENTE.

Notas 1.

A lo largo de este apartado deseamos probar el siguiente:

Teorema. Sean T una teoría y M un modelo de T. Si para toda $M' \subset M$ tal que $M' \in M(T)$ y M' es finitamente generada se tiene que $M'/\Delta' \in M(T)$ para todo $\Delta' \in I(T+D^+(M'),At(M'))$, entonces $M/\Delta \in M(T)$ para todo $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$.

Para su demostración no se puede usar de forma directa el teorema de compacidad, pues si $M/\Delta \notin M(T)$ no tiene por qué ser $T + D^+(M) + \Delta$ inconsistente.

Para la prueba del teorema parece imprescindible precisar algunos conceptos, como por ejemplo: en qué condiciones podemos hablar de subestructuras de M finitamente generadas que son modelos de T. Parece necesario suponer que:

(*) Si $M', M'' \subset M$ son tales que $M', M'' \in M(T)$ y $|M'| \cap |M''| \neq \phi$, entonces $M' \cap M'' \in M(T)$.

Donde $M' \cap M''$ es la subestructura de M con universo $|M'| \cap |M''|$.

En las condiciones de (*), se verifican:

Lema A. Si $\{M_i,\ i \in I\}$ es una familia de subestructuras de M que son modelos de T, tales que $\bigcap_{i \in I} |M_i| \neq \phi$, entonces $\bigcap_{i \in I} M_i \in M(T)$.

Lema B. T es persistente bajo uniones de cadenas.

Por el lema A., si $P \subset |M|$, podemos definir la menor subestructura de M que es modelo de T, y contiene a P.

Por el lema B. y el teorema de Chang-Łoś-Suszko, T es equivalente a una teoría cuyos axiomas son fórmulas de Π_2, es decir; sus axiomas son fórmulas del tipo:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_k \; A(y_1,\ldots,y_n) \;,$$

con $A(y_1,\ldots,y_n)$ abierta.

<u>Demostración del teorema</u>:

Supongamos que existe $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$ tal que $M/\Delta \notin M(T)$, entonces existe un axioma B de T que no es válido en M/Δ . Ahora bien, B es de la forma

$$\exists x_1 \ldots \exists x_k \; A(y_1,\ldots,y_n)$$

con $A(y_1,\ldots,y_n)$ abierta; por tanto, existen $a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta \in |M/\Delta|$ tales que:

$$M/\Delta(\exists x_1 \ldots \exists x_k \; A[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta]) = F \;.$$

Sea M' la menor subestructura de M que es modelo T, y contiene a $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Sea $\Delta' = \Delta \cap At(M')$. Se verifica que: $\Delta' \in I(T+D^+(M),At(M'))$, y por tanto $\Delta' \in I(T+D^+(M'),At(M'))$.

Deseamos probar que:

(0) $$M'/\Delta'(\exists x_1 \ldots \exists x_k \; A[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta']) = F \;;$$

lo cual estaría en contradicción con la hipótesis de ser M'/Δ' modelo de T , pues M' es finitamente generado.

En lo que sigue supondremos que M, M' , Δ y Δ' están construidos con las consideraciones hechas anteriormente.

Se verifican:

(1) Si $A(y_1,\ldots,y_n)$ es abierta, entonces

$$M/\Delta(A\; a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta\;) = M'/\Delta'(A\; a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'\;)$$

<u>Caso a</u>. A es atómica.

$$\begin{aligned} M/\Delta(A[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta]) = V &\longleftrightarrow A[a_1,\ldots,a_n] \in \Delta \\ &\longleftrightarrow A[a_1,\ldots,a_n] \in \Delta' \\ &\longleftrightarrow M'/\Delta'(A[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=V \end{aligned}$$

<u>Caso b</u>. A es $\neg B$

$$M/\Delta(A[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta])=V \longleftrightarrow M/\Delta(B[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta])=F$$

$$\longleftrightarrow M'/\Delta'(B[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=F$$
$$\longleftrightarrow M'/\Delta'(A[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=V.$$

Caso c. A es $B \vee C$

$$M/\Delta(A[a_1/\Delta,\ldots a_n/\Delta])=V \longleftrightarrow \begin{cases} M/\Delta(B[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta])=V & \text{o} \\ M/\Delta(C[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta])=V \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow \begin{cases} M'/\Delta'(B[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=V & \text{o} \\ M'/\Delta'(C[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=V \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow M'/\Delta'(A[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=V$$

Lo que prueba (1).

(2) Si A es $\exists xB$ con B abierta, entonces

$$M/\Delta(\exists xB[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta])=F \rightarrow M'/\Delta'(\exists xB[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta'])=F.$$

En efecto,

$$M/\Delta(\exists xB[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta]) = F \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{ para todo } a/\Delta \in |M/\Delta| \quad M/\Delta(B[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta,a/\Delta]) = F$$
$$\rightarrow \text{ para todo } a \in |M'| \quad M/\Delta(B[a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta,a/\Delta]) = F$$
$$\rightarrow \text{ para todo } a/\Delta'\varepsilon|M'/\Delta'|, M'/\Delta'(B[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta',a/\Delta'])=F$$
$$\rightarrow M'/\Delta'(\exists xB[a_1/\Delta',\ldots,a_n/\Delta']) = F$$

Lo que prueba (2).

De (1) y (2) se obtiene (0), lo que pruebe el teorema.

Notas 2.

A lo largo de estas notas pretendemos probar los lemas A y B.

(i) Extensiones de lenguajes de primer orden.

Sea L un lenguaje de primer orden, y q un predicado 1-ario que no ocurre en L. Denotamos por L_q al lenguaje obtenido de L añadiéndole q como un nuevo símbolo de predicado.

Definimos de FL en FL_q una aplicación por:

(1) si A es atómica, A_q es A

(2) si A es $\neg B$, A_q es $\neg B_q$

(3) si A es $B \vee C$, A_q es $B_q \vee C_q$

(4) si A es $\exists xB$, A_q es $\exists x(qx \wedge B_q)$

A la fórmula A_q la llamaremos fórmula traducida de A a L_q.

Es fácil comprobar que:

$(\forall xB)_q$ es $\forall x(qx \to B_q)$, y por tanto:

$(\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\ fy_1 \ldots y_n = x)_q$ es

$\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x(\ qy_1 \to \ldots \to qy_n \to (qx \wedge fy_1 \ldots y_n = x))$.

Sean $M' \subset M$ L-estructuras, definimos una expansión de M a L_q, que notaremos $M(M')_q$, por:

si $a \in |M|$, $q_{M(M')_q}(a) \leftrightarrow a \in |M'|$. Se verifica que:

(a) Si $A \in FL(M')$ cerrada, $M'(A) = V \leftrightarrow M(M')_q(A_q) = V$

En efecto, por inducción sobre la longitud de A.

I) A es atómica, entonces A_q es A. Además, como es cerrada no tiene estancias de símbolos de variables; y puesto que $M' \subset M$, $M'(A) = M(A)$. Ahora bien, $A \in FL(M)$, y $M(M')_q$ es una expansión de M, por tanto $M(A) = M(M')_q(A)$. En consecuencia, $M'(A) = M(M')_q(A) = M(M')_q(A_q)$.

II) A es $\neg B$

$$\begin{aligned} M'(A) = V &\leftrightarrow M'(B) = F \\ &\leftrightarrow M(M')_q(B_q) = F \quad \text{(hipótesis inducción)} \\ &\leftrightarrow M(M')_q(A_q) = V \quad (\neg B_q \text{ es } A_q) \end{aligned}$$

III) A es $B \vee C$,

$$\begin{aligned} M'(A) = F &\leftrightarrow M'(B) = M'(C) = F \\ &\leftrightarrow M(M')_q(B_q) = M(M')(C_q) = F \\ &\leftrightarrow M(M')_q(A_q) = F. \end{aligned}$$

IV) A es $\exists xB$, entonces A_q es $\exists x(qx \wedge B_q)$. Además;

$$\begin{aligned} M'(A) = V &\leftrightarrow \text{existe } a \in |M'| \text{ tal que } M'(B_x[a]) = V \\ &\leftrightarrow \text{existe } a \in |M'| \text{ tal que } M(M')_q((B_x[a])_q) = V \\ &\leftrightarrow \text{existe } a \in |M'| \text{ tal que } M(M')_q(qa \wedge B_{q\,x}[a]) = V \\ &\leftrightarrow \text{existe } a \in |M(M')_q|,, \ M(M')_q(qa \wedge B_{q\,x}[a]) = V \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \quad M(M')_q(\exists x(qx \wedge B_q)) = V$$
$$\leftrightarrow \quad M(M')_q(A_q) = V$$

Lo que prueba (a).

Sea T una teoría con lenguaje L_*. Definimos:

$$T_q = \{A_q: \text{ A es axioma de T}\} + \{\exists xqx\}.$$

Sea $M \varepsilon M(T_q)$. Se verifican:

(b) $\{a \varepsilon |M|: q_M(a)\}$ es el universo de una subestructura de M_L , que notaremos $M(q)$.

En efecto, sean $a_1,\ldots,a_n \varepsilon \{a \varepsilon |M|: q_M(a)\}$ y f un símbolo de función n-aria de L. Probemos que:

$$f_{M|L}(a_1,\ldots,a_n) \varepsilon \{a \varepsilon |M|: q_M(a)\} .$$

Como, $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\ fx_1 \ldots x_n = y$. Lo podemos tomar como axioma; y por tanto,

$T_q \vdash (\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\ fx_1 \ldots x_n = y)_q$. Así pues,

$M(\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y(qx_1 \rightarrow \ldots \rightarrow qx_n \rightarrow (qy \wedge fx_1 \ldots x_n = y))) = V$

Por tanto,

$M(\exists y(qa_1 \rightarrow \ldots \rightarrow qa_n \rightarrow (qy \wedge fa_1 \ldots a_n = y))) = v$

Y puesto que, $M(qa_j) = V$, $j=1,\ldots,n$;

$M(\exists y(qy \wedge fa_1 \ldots a_n = y)) = V$.

Sea $b \varepsilon |M|$ tal que $M(fa_1 \ldots a_n = b) = V$. Como este individuo es único, se tiene que:

$M(qb \wedge fa_1 \ldots a_n = b) = V$, por tanto $M(qb) = V$. En consecuencia, $M(fa_1 \ldots a_n) \varepsilon \{a \varepsilon |M|: q_M(a)\}$. Lo que prueba (b).

<u>Nota</u>: Téngase presente que, $\{a \varepsilon |M|: q_M(a)\} \neq \phi$. Pues al ser $\exists xqx$ axioma de T_q y $M \varepsilon M(T_q)$, $M(\exists xqx) = V$.

(c) $M(q) \varepsilon M(T)$.

En efecto; por (b), $M(q) \subset M_{|L}$. Además, $M_{|L}(M(q))_q = M$.
El resultado se sigue de (a)

(ii) Trataremos aquí de probar el lema A.

Sea T una teoría verificando (*) (véase nota 1) . Sea

$M \in M(T)$ y $\{M_i\ ,\ i \in I\}$ una familia de subestructuras de M que son modelos de T tales que $\bigcap_{i\in I} |M_i| \neq \phi$. Sea $M' = \bigcap_{i\in I} M_i$

Se verifican:

(a) $T' = D(M) + T + T_q + \{qa,\ \neg qb\colon a \in |M'|,\ b \in |M|-|M'|\}$, es consistente.

En efecto, sea:

$T'' = D(M) + T + T_q + \{qa_1,\ldots,qa_n,\neg qb_1,\ldots,\neg qb_m\}$. Veamos que T'' es consistente.

Si $b_k \notin |M'|$, existe $M_k \in \{M_i\ ,\ i \in I\}$ tal que $b_k \notin |M_k|$.

Por tanto, $b_1,\ldots,b_m \notin |M_1| \bigcap \ldots \bigcap |M_m|$.

Sea $M^m = M_1 \bigcap \ldots \bigcap M_m$, como T satisface (*) $M^m \in M(T)$.

Además $M^m \subset M$; consideremos $M(M^m)_q$. $M(M^m)_q$ es modelo de T'' . En efecto, sea A axioma de T'' ;

Si $A \in D(M)$, $M(M^m)_q(A) = M(A) = V$.

Si $A \in T$, $M(M^m)_q(A) = M(A) = V$, pues $M \in M(T)$.

Si $A \in T_q$, A es B_q con $B \in T$, y puesto que $M^m \in M(T)$, $M^m(B) = V$, de aquí por (i-(a)) $M(M^m)_q(B_q) = V$.

Si A es qa , entonces como $a \in |M'|$, $a \in |M^m|$; y por tanto $M(M^m)_q(qa) = V$.

Si A es $\neg qb$, entonces como $b \notin |M^m|$ se tiene que $M(M^m)_q(qb) = F$; luego, $M(M^m)_q(\neg qb) = V$.

Esto prueba que $M(M^m)_q \in M(T'')$; y por tanto, T'' es consistente. De lo anterior por el teorema de compacidad T' es consistente. Lo que prueba (a).

(b) Sea $M^* \in M(T')$, y $\bar{\bar{M}} = M^*|_L$. Para todo $M_i \in \{M_i\ ,\ i\in I\}$ $M_i \bigcap \bar{\bar{M}}(q) = M'$.

En efecto, sea $\bar{\bar{M}} = M^*|_L$; puesto que, M , M_i , $\bar{\bar{M}}(q) \subset \bar{\bar{M}}$, para probar que: $M_i \bigcap \bar{\bar{M}}(q) = M'$; basta probar que: $|M_i| \bigcap |\bar{\bar{M}}(q)| = |M'|$.

$\supset$ Sea $a \in |M'|$, entonces:

$a \in |M_i|$, pues $M' = \bigcap_{i \in I} M_i$

$a \in |\bar{M}(q)|$, pues $qa \in T'$; luego $\bar{M}(qa) = M^*(qa) = V$.

$\subset$ Sea $a \in |M_i| \cap |\bar{M}(q)|$, entonces:

$a \in |M_i|$, por tanto, $a \in |M|$. Ahora bien, como $a \in |\bar{M}(q)|$;
luego, $\bar{M}(qa) = V$. Así pues, $a \notin |M|-|M'|$. Por tanto $a \in |M'|$.
Lo que prueba (b).

(c) Prueba del lema A.

Deseamos probar que: $M' \in M(T)$. Para ello, por (b) basta demostrar que, $M_i, \bar{M}(q) \in M(T)$. Ahora bien, por hipótesis $M_i \in M(T)$; y puesto que, $\bar{M} \in M(T_q)$ por (i-(c)) $\bar{M}(q) \in M(T)$.

(iii) Trataremos de probar aquí el lema B.

Sea T una teoría verificando (*) (véase nota 1). Sea $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$, una cadena de modelos de T; y M' la unión de la cadena. Se verifican:

(a) Existe una extensión M de M' que es modelo de T.

En efecto, sea $T' = T + D(M')$. Veamos que T' es consistente. Sea $T'' = T + \{A_1,\dots,A_n\colon A_i \in D(M')\}$. Existe k_i $i=1,\dots,n$ tal que $A_i \in D(M_{k_i})$, sea $m=\max(k_i, i=1,\dots,n)$, entonces $A_i \in D(M_m)$. Y puesto que, $M_m \in M(T)$ se tieneque, $M_m \in M(T + \{A_1,\dots,A_n\})$, esto es, $M_m \in M(T'')$. Por tanto, T'' es consistente; y de aquí por el teorema de compacidad se sigue que T' es consistente. Sea $M^* \in M(T')$, entonces $M = M^*|_L$ es modelo de T y una extensión de M'.

(b) $T_1 = D(M) + T + T_q + \{qa,\ qb\colon a \in |M'| \text{ y } b \in |M|-|M'|\}$ es consistente.

En efecto, sea

$T_1' = D(M) + T + T_q + \{qa_1,\dots,qa_n,\ qb_1,\dots,\ qb_m\}$. Veamos que T_1' es consistente.

Como $a_i \in |M'|$ $i=1,\dots,n$; existen $k_1,\dots,k_n$ tales que

$a_i \in |M_{k_i}|$. Sea $k=\max(k_1,\ldots,k_n)$, entonces $a_i \in |M_k|$ $i=1,\ldots,n$; y $M_k \subset M$. Consideremos $M(M_k)_q$. Se tiene que $M(M_k)_q \in M(T_1')$. En efecto, sea $A \in T_1'$;

Si $A \in D(M)$, $M(M_k)_q(A) = M(A) = V$.

Si $A \in T$, $M(M_k)_q(A) = M(A) = V$,pues $M \in M(T)$

Si $A \in T_q$, entonces A es B_q con $B \in T$; por tanto; $M(M_k)_q(A) = M_k(B)$ (por (i-(a)); y puesto que,$M_k \in M(T)$ $M(M_k)_q(A) = V$.

Si A es qa , entonces $a \in |M_k|$; y por tanto, $M(M_k)_q(qa) = V$.

Si A es $\neg qb$, entonces $M(M_k)_q(\neg qb) = V$, pues $b \notin |M_k|$.

Esto prueba que $M(M_k)_q \in M(T_1')$. Por tanto T_1' es consistente. De aquí por el teorema de compacidad se tiene que T_1 es consistente. Lo que prueba (b).

(c) Sean $M^* \in M(T_1)$, $\bar{M} = M^*|_L$ y $\bar{\bar{M}} = M^*|_{L_q}$. Se tienen:

(1) $M \subset \bar{M}$. Trivial, pues $M^* \in M(D(M))$.

(2) $\bar{\bar{M}}(q) \in M(T)$. Trivial, pues $\bar{\bar{M}} \in M(T_q)$ y (i-(c)).

(3) $|M| \cap |\bar{\bar{M}}(q)| \neq \phi$. Si $a \in |M'|$, entonces $a \in |M|$ y $a \in |\bar{\bar{M}}(q)|$.

(4) $M' = M \cap \bar{\bar{M}}(q)$. Como $M', M, \bar{\bar{M}}(q) \subset \bar{M}$, basta probar que: $|M'| = |M| \cap |\bar{\bar{M}}(q)|$. Por el razonamiento hecho en (3), $|M'| \subset |M| \cap |\bar{\bar{M}}(q)|$. Sea $a \in |M| \cap |\bar{\bar{M}}(q)|$, entonces $a \in |M|$ y $a \in |\bar{\bar{M}}(q)|$. Supongamos que $a \notin |M'|$, entonces $a \in |M|-|M'|$ y por tanto $\neg qa \in T_1$; luego, $M^*(\neg qa) = V$. Así pues, $M^*(qa) = F$; por tanto, $\bar{\bar{M}}(qa) = F$; luego, $a \notin |\bar{\bar{M}}(q)|$,lo cual es una contradicción. Lo que prueba (4).

(d) Prueba del lema B.

Como $\bar{M} \in M(T)$, y T verifica (*) por (1), (2) y (3) de (c) se tiene que: $M \cap \bar{\bar{M}}(q) \in M(T)$, y de aquí y (c-(4)) $M' \in M(T)$ Lo que prueba el lema B.

3.3 RELACION ENTRE EL COCIENTE Y ALGUNAS CONSTRUCCIONES DE LA TEORIA DE MODELOS.

(A) Ultraproductos.

Notas 1.

A lo largo de esta sección $\{M_i \; , \; i \in I\}$ será una familia de modelos de una teoría T, y $M = \prod_{i \in I} M_i$. Pretendemos demostrar que los ultraproductos de M se pueden construir mediante cocientes.

Teorema 2. Si F es un ultrafiltro sobre I, entonces existe $\Delta \in I(T+D^+(M), At(M))$ tal que: $M/F \cong M/\Delta$.

Demostración:

Sea $\phi: |M| \longrightarrow |M/F|$ la aplicación definida por:

$\phi(a) = a/F$. Es claro que ϕ es un homomorfismo. Sea

$$\Delta = \{A \in At(M): \; M/F(A^{\phi}) = V\} \text{. Puesto que,}$$

(1) $M/F \in M(D^+(M))$ (pues ϕ es un homomorfismo) y

(2) $M/F \in M(T)$ (teorema fundamental de ultraproductos),

se tiene que: $\Delta \in I(T+D^+(M), At(M))$.

Consideremos: M/Δ. Sea

$$\psi: |M/\Delta| \longrightarrow |M/F| \quad \text{definida por:}$$

$$\psi(a/\Delta) = a/F \text{. Se verifican:}$$

(3) ψ está bien definida y es inyectiva.

$$\begin{aligned} a/\Delta = b/\Delta &\longleftrightarrow a = b \in \Delta \\ &\longleftrightarrow M/F((a = b)^{\phi}) = V \\ &\longleftrightarrow \{i \in I: \; a_i = b_i\} \in F \\ &\longleftrightarrow a/F = b/F \text{.} \end{aligned}$$

(4) ψ es suprayectiva. Trivial.

(5)

$$\begin{aligned} \psi(f_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta)) &= \psi(f_M(a_1,\ldots,a_n)/\Delta) \quad \text{(def. de } f_{M/\Delta}) \\ &= f_M(a_1,\ldots,a_n)/F \quad \text{(def, de } \psi) \\ &= f_{M/F}(a_1/F,\ldots,a_n/F) \end{aligned}$$

$$= f_{M/F}(\psi(a_1/\Delta),\ldots,\psi(a_n/\Delta)).$$

(6)
$$\begin{aligned} p_{M/\Delta}(a_1/\Delta,\ldots,a_n/\Delta) &\longleftrightarrow pa_1\ldots a_n \in \Delta \\ &\longleftrightarrow M/F((pa_1\ldots a_n)^{\phi}) = V \\ &\longleftrightarrow p_{M/F}(a_1/F,\ldots,a_n/F) \\ &\longleftrightarrow p_{M/F}(\psi(a_1/\Delta),\ldots,\psi(a_n/\Delta)) . \end{aligned}$$

De (3), (4), (5) y (6) se sigue que ψ es un isomorfismo. Lo que prueba el teorema.

Notas 3.

(i) Si $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$, entonces no tiene por qué existir F ultrafiltro sobre I tal que: $M/F \cong M/\Delta$.

En efecto, supongamos que T es la teoría de los conjuntos con al menos dos elementos (esto es, la teoría con el axioma $\exists x \exists y(x \neq y)$). Existen elementos de $I(T+D^+(M),At(M))$ tales que M/Δ tiene un único individuo, y por tanto no puede ser isomorfo a ningún ultraproducto de M.

(ii) En el teorema 1 , a un ultrafiltro F sobre I le hemos asociado un elemento Δ de $I(T+D^+(M),At(M))$, que notaremos Δ_F . Pretendemos describir aquí un proceso en sentido contrario. Para ello supondremos que:para todo $i \in I$ $card(M_i) \geq 2$.

Sea $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$, definimos:

$$\Delta^* = Con(T + D^+(M) + \Delta) \cap \Sigma_0(M) .$$

Si $A \in \Delta^*$, sea: $J_A = \{i \in I: M_i(A^{\pi_i}) = V\}$, donde π_i es la proyección de M en M_i . Sea

$$F_\Delta = \{J_A: A \in \Delta^*\} .$$ Se verifican:

(1) F_Δ es un filtro sobre I .

Sean $P \in F$ y $Q \subset I$, tales que $P \subset Q$.

Entonces existe $A \in \Delta^*$ tal que $J_A = P$. Sea B la fórmula

$a \overline{=} b$ con $a,b \in |M|$ y tales que $a_i = b_i \longleftrightarrow i \in Q$

Se tiene que: $A \vee B \in \Delta^*$. Además:

$$J_{A \vee B} = \{i \in I: M_i((A \vee B)^{\pi_i}) = V\} = Q \; .$$

Por tanto, $Q \in F_\Delta$.

Sean $P,Q \in F$, entonces existen $A,B \in \Delta^*$ tales que:

$J_A = P$ y $J_B = Q$. Además: $A \wedge B \in \Delta^*$, y

$$J_{A \wedge B} = \{i \in I: M_i((A \wedge B)^{\pi_i}) = V\} = P \cap Q \; .$$

Por tanto, $P \cap Q \in F$.

De lo anterior se sigue (1).

(2) Si F es un ultrafiltro sobre I, entonces $F_{\Delta_F} = F$.

Probemos que: $F \subset F_{\Delta_F}$.

Sea $P \in F$. Consideremos la fórmula $a = b$, con $a,b \in |M|$ donde $a_i = b_i \longleftrightarrow i \in P$. Se tiene que:

$M/F(a = b) = V$. Por tanto, $a = b \in \Delta_F$. Así,

$$J_{a=b} = \{i \in I: a_i = b_i\} = P \; . \text{ Luego, } P \in F_{\Delta_F} \; .$$

Además, $\phi \notin F_{\Delta_F}$. En efecto, sea $A \in \Delta^*$. Existen $A_1,\ldots,A_n \in \Delta \cup D^+(M)$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$.

Sean $P_i = J_{A_i}$ $i=1,\ldots,n$; $P_i \in F$. Como F es un ultrafiltro $P = J_{A_1} \cap \ldots \cap J_{A_n} \in F$. Por tanto, P es no vacío.

Sea $j \in P$, se tiene que:

$$M_j(A_k{}^{j}) = V \quad k=1,\ldots,n \; .$$

Además, $M_j(\pi_j(M)) \in M(T)$. Por tanto,

$$M_j((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A)^{\pi_j}) = V \; .$$

En consecuencia, $M_j(A^{\pi_j}) = V$, por tanto $j \in J_A$. Así, $J_A \neq \phi$.

Tenemos que: $F \subset F_{\Delta_F}$, $\phi \notin F_{\Delta_F}$, y por (1) F_{Δ_F} es un filtro. Por tanto, $F = F_{\Delta_F}$.

(B) Subestructuras.

Notas 4.

(i) Sean $M' \subset M$ L(T)-estructuras. Si $\Delta \varepsilon I(T+D^+(M),At(M))$ sea $\Delta^c = \Delta \cap At(M')$. Se tiene que:

(ii) $\Delta^c \varepsilon I(T+D^+(M'),At(M'))$.

En efecto, $\Delta^c \varepsilon I(T+D^+(M),At(M'))$ por contracción . Y puesto que, $T+D^+(M)$ es una extensión de $T+D^+(M')$, se tiene el resultado.

Lema 5. Si $M' \subset M$, son L(T)-estructuras, y $\Delta \varepsilon I(T+D^+(M),At(M))$, entonces $M'/\Delta^c \subset M/\Delta$.

Demostración:

Sea ϕ: $|M'/\Delta^c| \longrightarrow |M/\Delta|$, definida por $\phi(a/\Delta^c) = a/\Delta$.

Se tiene que:

(1) ϕ está bien definida y es inyectiva.

$$\begin{aligned} a/\Delta^c = b/\Delta^c &\longleftrightarrow a = b \ \varepsilon\ \Delta^c \\ &\longleftrightarrow a = b \ \varepsilon\ \Delta \\ &\longleftrightarrow a/\Delta = b/\Delta \ . \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \phi(f_{M/\Delta^c}(a_1/\Delta^c,\dots,a_n/\Delta^c)) &= \phi(f_M(a_1,\dots,a_n)/\Delta^c) \\ &= f_M(a_1,\dots,a_n)/\Delta \\ &= f_{M/\Delta}(\phi(a_1/\Delta^c),\dots,\phi(a_n/\Delta^c)) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} p_{M/\Delta^c}(a_1/\Delta^c,\dots,a_n/\Delta^c) &\longleftrightarrow pa_1\dots a_n \ \varepsilon\ \Delta^c \\ &\longleftrightarrow pa_1\dots a_n \ \varepsilon\ \Delta \\ &\longleftrightarrow p_{M/\Delta}(\phi(a_1/\Delta^c),\dots,\phi(a_n/\Delta^c)) \end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) se sigue el lema.

§4. ESTUDIO DE $\mathfrak{m}$-IDEALES CON TECNICAS DE LA TEORIA DE MODELOS.

En este parágrafo estudiamos las m-variedades y las aplicaciones entre los conjuntos de m-variedades y de m-ideales. También estudiamos una generalización del teorema de los ceros de Hilbert en su forma débil.

4.1 $\mathfrak{M}$-VARIEDADES SIMPLES.

Notas 1.

A lo largo de este apartado cosideraremos $I(T,\Gamma)$ donde Γ es un subconjunto de $S_n(T)$.

Sean $M \in M(T)$ y $a_1,\dots,a_n \in |M|$, definimos el n-tipo de $a_1,\dots,a_n$ en M , $[a_1,\dots a_n]_M$, por:

$$[a_1,\dots,a_n]_M = \{A \in S_n(T): \ M(A[a_1,\dots,a_n]) = V\}.$$

Definición 2. Sean $\Pi \subset \Gamma$, y $M \in M(T)$. Definimos la m-variedad simple de Π en M , $V_M(\Pi)$, por:

$$V_M(\Pi) = \{(a_1,\dots,a_n) \in |M|^n: \ \Pi \subset [a_1,\dots,a_n]_M\}.$$

Notas 3.

(i) Sea $V \subset |M|^n$, diremos que V es una m-variedad simple sobre M si existe $\Pi \subset \Gamma$ tal que: $V_M(\Pi) = V$.

Al conjunto de las m-variedades simples sobre M lo notaremos por: $V(T,\Gamma,M)$.

(ii) Si $V \in V(T,\Gamma,M)$, entonces existe $\Delta \in I(T,\Gamma)$ tal que: $V_M(\Delta) = V$. Esto es, toda m-variedad simple es la m-variedad de un m-ideal.

Demostración:

Sean $\Pi \subset \Gamma$, y $\Delta \in I(T,\Gamma)$ tales que: $V = V_M(\Pi)$ y $\Delta = \langle \Pi \rangle$.

Probemos que $V_M(\Delta) = V$.

$\subset$ Sea $(a_1,\dots,a_n) \in V_M(\Delta)$, entonces $\Delta \subset [a_1,\dots,a_n]_M$.
Ahora bien, $\Pi \subset \Delta$; por tanto, $(a_1,\dots,a_n) \in V_M(\Pi) = V$.

$\supset$ Sea $(a_1,\dots,a_n) \in V$, entonces $\Pi \subset [a_1,\dots a_n]_M$. Si $A \in \Delta$, entonces existen $A_1,\dots,A_k \in \Pi$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow A$.

Ahora bien, $M \in M(T)$ y $A_j \in [a_1,\dots,a_n]_M$, $j=1,\dots,k$;

por tanto $A \in [a_1,\dots,a_n]_M$. En consecuencia,

$\Delta \subset [a_1,\dots,a_n]_M$; luego, $(a_1,\dots,a_n) \in V_M(\Delta)$.

Lo que prueba que $V_M(\Delta) = V$, de lo cual se sigue (i).

<u>Definición 4</u>. Sea $V \in V(T,\Gamma,M)$. Definimos:

$$I_M(V) = \{A \in \Gamma:\ A \in [a_1,\dots,a_n]_M \text{ para todo } (a_1,\dots,a_n) \in V\}.$$

Se verifica que:

<u>Lema 5</u>. Para toda $V \in V(T,\Gamma,M)$, $I_M(V) \in I(T,\Gamma)$.

<u>Demostración</u>:

Sean $A \in \Gamma$ y $A_1,\dots,A_k \in I_M(V)$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_k \to A$.

Sea $(a_1,\dots,a_n) \in V$. Como $M \in M(T)$, se tiene que:

$M((A_1 \wedge \dots \wedge A_k \to A)[a_1,\dots,a_n]) = V$.

Ahora bien, $A_j \in [a_1,\dots,a_n]_M$, $j=1,\dots,k$; por tanto,

$A \in [a_1,\dots,a_n]_M$. En consecuencia, $A \in I_M(V)$. Lo que prueba el lema.

<u>Notas 6</u>.

Tenemos definidas las siguientes aplicaciones:

$$V_M\colon I(T,\Gamma) \longrightarrow V(T,\Gamma,M)$$
$$I_M\colon V(T,\Gamma,M) \longrightarrow I(T,\Gamma) .$$

Se verifican:

(i) Sean $\Delta,\Delta' \in I(T,\Gamma)$. Si $\Delta \subset \Delta'$, entonces $V_M(\Delta') \subset V_M(\Delta)$.

En efecto; si $(a_1,\dots,a_n) \in V_M(\Delta')$, entonces

$\Delta' \subset [a_1,\dots,a_n]_M$. Por tanto, $\Delta \subset [a_1,\dots,a_n]_M$; y de aquí

$(a_1,\dots,a_n) \in V_M(\Delta)$. Lo que prueba (i).

Análogamente se prueba que:

(ii) Sean $V,V' \in V(T,\Gamma,M)$. Si $V \subset V'$, entonces $I_M(V') \subset I_M(V)$.

(iii) Para todo $\Delta \in I(T,\Gamma)$, $\Delta \subset I_M(V_M(\Delta))$.

En efecto, sean $A \varepsilon \Delta$ y $(a_1,\dots,a_n) \varepsilon V_M(\Delta)$ cualesquiera. Como $\Delta \subset [a_1,\dots,a_n]_M$, entonces $A \varepsilon [a_1,\dots,a_n]_M$. Por tanto, $A \varepsilon I_M(V_M(A))$.

(iv) Para todo $V \varepsilon V(T,\Gamma,M)$, $V_M(I_M(V)) = V$.

En efecto; sea $V \varepsilon V(T,\Gamma,M)$, por (3-(ii)) existe un m-ideal Δ tal que $V_M(\Delta) = V$; además $\Delta \subset I_M(V)$, y de aquí por (i) $V_M(I_M(V)) \subset V_M(\Delta) = V$. Para la otra inclusión; si $(a_1,\dots,a_n) \varepsilon V$, entonces $I_M(V) \subset [a_1,\dots,a_n]_M$; por tanto, $(a_1,\dots,a_n) \varepsilon V_M(I_M(V))$.

(v) De (iv) se tiene que I_M es inyectiva y V_M suprayectiva.

<u>Lema 7</u>. Sean $V_1,V_2 \varepsilon V(T,\Gamma,M)$. Se verifican:

a) $V_1 \cap V_2 \varepsilon V(T,\Gamma,M)$;

b) si $\Gamma \varepsilon \underline{V}(T)$, entonces $V_1 \cup V_2 \varepsilon V(T,\Gamma,M)$.

<u>Demostración</u>:

Por (3-(ii)) existen $\Delta_1,\Delta_2 \varepsilon I(T,\Gamma)$ tales que: $V_M(\Delta_1)=V_1$, y $V_M(\Delta_2) = V_2$.

a) Se obtiene sindificultad que: $V_M(\langle \Delta_1 \cup \Delta_2 \rangle) = V_1 \cap V_2$. Y de aquí se sigue a).

b) Para ello, veamos que $V_1 \cup V_2 = V_M([\Delta_1,\Delta_2])$. Es claro que: $V_1 \cup V_2 \subset V_M([\Delta_1,\Delta_2])$.

Supongamos que $(a_1,\dots,a_n) \not\varepsilon V_1 \cup V_2$, entonces $\Delta_1,\Delta_2 \not\subset [a_1,\dots,a_n]_M$; por tanto, existen $A_1 \varepsilon \Delta_1$ y $A_2 \varepsilon \Delta_2$ tales que: $A_1,A_2 \not\varepsilon [a_1,\dots,a_n]_M$. Ahora bien, como $\Gamma \varepsilon \underline{V}(T)$ existe $A \varepsilon \Gamma$ tal que: $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$; por tanto, $A \not\varepsilon [a_1,\dots,a_n]_M$. Así pues, $[\Delta_1,\Delta_2] \not\subset [a_1,\dots,a_n]_M$; luego, $(a_1,\dots,a_n) \not\varepsilon V_M([\Delta_1,\Delta_2])$.

<u>Notas 7</u>. (m-variedades irreducibles)

(i) <u>Definición</u>: Sea $V \varepsilon V(T,\Gamma,M)$, diremos que V es irreducible si de ser $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1, V_2 \in V(T,\Gamma,M)$, entonces $V = V_1$ o $V = V_2$.

Se verifican;

(ii) Sea $V \in V(T,\Gamma,M)$. Si $\Gamma \in \underline{V}(T)$ son equivalentes:

a) V es irreducible ;

b) $I_M(V)$ es irreducible .

Demostración:

a) $\to$ b) . Sea $I_M(V) = [\Delta_1,\Delta_2]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= V_M(I_M(V)) \qquad \text{(por 5-(iv))} \\ &= V_M([\Delta_1,\Delta_2]) \\ &= V_M(\Delta_1) \cup V_M(\Delta_2) \qquad \text{(véase 6-(ii))}. \end{aligned}$$

Como V es irreducible, $V = V_M(\Delta_1)$ o $V = V_M(\Delta_2)$. Supongamos que $V = V_M(\Delta_1)$. Por (5-(iii)) $\Delta_1 \subset I_M(V_M(\Delta_1)) = I_M(V)$. Ahora bien, $I_M(V) \subset \Delta_1$; por tanto, $\Delta_1 = I_M(V)$.

b) $\to$ a) . Supongamos que V es reducible, entonces existen $V_1, V_2 \in V(T,\Gamma,M)$ tales que $V = V_1 \cup V_2$ y $V \neq V_1, V_2$. Como I_M es inyectiva, $I_M(V_1), I_M(V_2) \neq I_M(V)$. Por (5-(ii)) $I_M(V) \subset I_M(V_1), I_M(V_2)$; por tanto,existen $A_1, A_2 \in \Gamma$ tales que $A_1 \in I_M(V_1) - I_M(V)$ y $A_2 \in I_M(V_2) - I_M(V)$. Y puesto que $\Gamma \in \underline{V}(T)$, existe $A \in \Gamma$ tal que: $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$; por tanto, $A \in I_M(V)$. Tenemos pues que:

$A_1, A_2 \notin I_M(V)$, $A \in I_M(V)$ y $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$; lo cual está en contradicción con el hecho de ser $I_M(V)$ irreducible.

(iii) Suppongamos que $\Gamma \in \underline{V}(T)$. Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$, con $\Delta \neq \Gamma$; si Δ es irreducible, entonces existe $M \in M(T)$ tal que $\Delta = I_M(V_M(\Delta))$.

Demostración:

Sean $e_1,\ldots,e_n$ nuevas constantes y

$$T' = T + \{e_1,\ldots,e_n\} + \{A[e_1,\ldots,e_n] : A \in \Delta\} + \{\neg B[e_1,\ldots,e_n] : B \in \Gamma - \Delta\}.$$

Se verifica que:

(1) T' es consistente.

En efecto pues caso contrario existirian: $A_1[e_1,\ldots,e_n]$, $A_2[e_1,\ldots,e_n],\ldots,$ $A_k[e_1,\ldots,e_n]$, $B_1[e_1,\ldots,e_n],\ldots,$ $B_m[e_1,\ldots,e_n]$; con $A_i \in \Delta$, y $B_j \in \Gamma-\Delta$, tales que:

$$T+\{e_1,\ldots,e_n\} \vdash \neg A_1[e_1,\ldots,e_n] \vee \ldots \vee \neg A_k[e_1,\ldots,e_n] \vee \neg\neg B_1[e_1,\ldots,e_n] \vee \ldots \vee \neg\neg B_m[e_1,\ldots,e_n]$$

Por tanto,

$$T+\{e_1,\ldots,e_n\} \vdash \neg(A_1[e_1,\ldots,e_n] \wedge \ldots \wedge A_k[e_1,\ldots,e_n]) \vee B_1[e_1,\ldots,e_n] \vee \ldots \vee B_m[e_1,\ldots,e_n]$$

Esto es,

$$T+\{e_1,\ldots,e_n\} \vdash A_1[e_1,\ldots,e_n] \wedge \ldots \wedge A_k[e_1,\ldots,e_n] \rightarrow B_1[e_1,\ldots,e_n] \vee \ldots \vee B_m[e_1,\ldots,e_n]$$

Ahora bien, como $\Gamma \in \underline{V}(T)$ existe $B \in \Gamma$ tal que:

$T \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m \longleftrightarrow B$ (*) . Por tanto,

$$T+\{e_1,\ldots,e_n\} \vdash A_1[e_1,\ldots,e_n] \wedge \ldots \wedge A_k[e_1,\ldots,e_n] \rightarrow B[e_1,\ldots,e_n]$$

De aquí, por el teorema de constantes

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$.

Ahora bien, $A_i \in \Delta$ y $\Delta \in I(T,\Gamma)$; enconsecuencia, $B \in \Delta$. Como por hipótesis Δ es irreducible, por (*) existe $j=1,\ldots,m$ tal que $B_j \in \Delta$, lo cual es contrario al hecho de ser $B_j \in \Gamma-\Delta$. Lo que prueba (1).

Sean $M^* \in M(T')$, y $a_i = M^*(e_i)$ $i=1,\ldots,n$. Se tiene que: $M^*|_L \in M(T)$; $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$; y si $B \in \Gamma-\Delta$, entonces

$$\begin{aligned} M(B\ a_1,\ldots,a_n) &= M^*(B\ a_1,\ldots,a_n) \\ &= M^*(B\ e_1,\ldots,e_n) = F \end{aligned}$$

Por tanto, $B \notin$ $a_1,\ldots,a_{n\ M}$; así pues, Δ $a_1,\ldots,a_{n\ M}$. Como por (5-(iii)) Δ $I_M(V_M(\Delta))$, y $(a_1,\ldots,a_n) \in V_M(\Delta)$ se tiene que $\Delta = I_M(V_M(\Delta))$. Lo que prueba (iii).

(iv) La prueba del resultado anterior se basa en la obtención de un modelo M de T y un punto $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$ tal que:

si $B \not\in \Delta$, $M(B[a_1,\dots,a_n]) = F$.

Veamos que en la situación anterior se tiene que:

(1) Si $A \in \Gamma$ es tal que $M(A\ a_1,\dots,a_n\ ) = V$, entonces para todo $(b_1,\dots,b_n) \in V_M(\Delta)$ $M(A[b_1,\dots,b_n]) = V$.

En efecto, si $M(A[a_1,\dots,a_n]) = V$, entonces $A \in \Delta$. Si $(b_1,\dots,b_n) \in V_M(\Delta)$, $\Delta \subset [b_1,\dots,b_n]_M$; por tanto, $A \in [b_1,\dots,b_n]_M$. En consecuencia, $M(A[b_1,\dots,b_n]) = V$.

Lo anterior se refleja en la siguiente:

Definición: (punto general)

Sean $V \in V(T,\Gamma,M)$, y $(a_1,\dots a_n) \in |M|^n$. Diremos que $(a_1,\dots,a_n)$ es un punto general de V si para todo $A \in \Gamma$ tal que $A \in [a_1,\dots,a_n]_M$, entonces $A \in I_M(V)$

Se verifica que:

(v) Sea $\Delta \in I(T,\Gamma)$. Si $\Gamma \in \underline{V}(T)$ son equivalentes:

a) Δ es irreducible

b) Existe $M \in M(T)$ y $V \in V(T,\Gamma,M)$ tales que $I_M(V)=\Delta$ y V posee un punto general.

Demostración:

a) $\rightarrow$ b) . Se sigue de (iii).

b) $\rightarrow$ a) . Supongamos que Δ es reducible, entonces existen $\Delta_1,\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ tales que $\Delta = [\Delta_1,\Delta_2]$ y $\Delta \neq \Delta_1,\Delta_2$. Sean $A_1,A_2 \in \Gamma$ tales que $A_1 \in \Delta_1-\Delta$ y $A_2 \in \Delta_2-\Delta$. Sean $M \in M(T)$ y $V \in V(T,\Gamma,M)$ como en la hipótesis de b); y $(a_1,\dots,a_n)\in V$ un punto general de V. Se tiene que:

$$M(A_1\ a_1,\dots,a_n\ ) = M(A_2\ a_1,\dots,a_n\ ) = F$$

Ahora bien, existe $A \in \Gamma$ tal que $T \vdash A_1 \vee A_2 \longleftrightarrow A$; por tanto, $A \in [\Delta_1,\Delta_2] = \Delta$. Sin embargo,

$$M(A[a_1,\dots,a_n]) = F$$

Lo cual es una contradicción. Y de aquí se sigue el resultado.

4.2 $\mathfrak{M}$-VARIEDADES TOTALES.

Notas 1.

En este apartado se extienden, en cierto sentido, los conceptos introducidos en el anterior. Para ello, para cada $M \varepsilon M(T)$ consideramos el conjunto:

$$P_n M = \{(M, a_1, \ldots, a_n): \quad (a_1, \ldots, a_n) \varepsilon |M|^n\}.$$

Y la clase: $\bigcup_{M \varepsilon M(T)} P_n M = T^n$.

Definición 2. Si $\Pi \subset \Gamma$ definimos la m-variedad de Π, $V(\Pi)$, por:

$$V(\Pi) = \{(M, a_1, \ldots, a_n) \varepsilon T^n: \quad \Pi \subset [a_1, \ldots, a_n]_M\}.$$

Notas 3.

(i) Sea V una subclase de T^n, diremos que V es una m-variedad si existe $\Pi \subset \Gamma$ tal que $V(\Pi) = V$. Al conjunto de las m-variedades lo notaremos por $V(T,\Gamma)$.

De forma análoga al apartado anterior se prueba que:

(ii) Si $V \varepsilon V(T,\Gamma)$, entonces existe $\Delta \varepsilon I(T,\Gamma)$ tal que $V(\Delta) = V$. Más aún, $V(\Pi) = V(\langle \Pi \rangle)$.

Definición 4. Sea $V \varepsilon V(T,\Gamma)$. Definimos:

$$I(V) = \{A \varepsilon \Gamma: \quad A \varepsilon [a_1, \ldots, a_n]_M \text{ para todo } (M, a_1, \ldots, a_n) \varepsilon V\}.$$

Se verifica que:

Lema 4. Para todo $V \varepsilon V(T,\Gamma)$, $I(V) \varepsilon I(T,\Gamma)$.

La prueba es análoga a la del lema 4 del apartado anterior.

Notas 5.

Tenemos definidas dos aplicaciones

$$I : V(T,\Gamma) \longrightarrow I(T,\Gamma)$$
$$V : I(T,\Gamma) \longrightarrow V(T,\Gamma)$$

Se tiene que:

(i) Sean $\Delta, \Delta' \in I(T,\Gamma)$. Si $\Delta \subset \Delta'$, entonces $V(\Delta') \subset V(\Delta)$.

(ii) Sean $V, V' \in V(T,\Gamma)$. Si $V \subset V'$, entonces $I(V') \subset I(V)$.

(iii) Para todo $\Delta \in I(T,\Gamma)$, $\Delta \subset I(V(\Delta))$.

(iv) Para todo $V \in V(T,\Gamma)$, $V(I(V)) = V$.

Las pruebas de estos resultados son análogas a sus correspondientes del apartado anterior. Además se verifica que:

(v) V es inyectiva.

En efecto, sean $\Delta_1, \Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ tales que $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Existe $A \in \Delta_1 - \Delta_2$; sea:

$T' = T + \{e_1, \ldots, e_n\} + \{B[e_1, \ldots e_n] : B \in \Delta_2\} + \{\neg A[e_1, \ldots, e_n]\}$.

(1) T' es consistente

Pues caso contrario, existirian $A_1[e_1, \ldots, e_n], \ldots,$ $A_k[e_1, \ldots, e_n]$ con $A_i \in \Delta_2$ tales que:

$$T + \{e_1, \ldots, e_n\} \vdash A_1[e_1, \ldots, e_n] \wedge \ldots \wedge A_k[e_1, \ldots, e_n] \rightarrow$$
$$\rightarrow A[e_1, \ldots, e_n]$$

Y por el teorema de constantes

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow A$.

Por tanto, $A \in \Delta_2$. Contradicción con ser $A \in \Delta_1 - \Delta_2$. Lo que prueba (1).

Sean $M^* \in M(T')$, y $a_i = M^*(e_i)$. Se tiene que: $M = M^*|_L$ es modelo de T , y $(M, a_1, \ldots, a_n) \notin V(\Delta_1)$. Ahora bien, como $(M, a_1, \ldots, a_n) \in V(\Delta_2)$; se sigue que $V(\Delta_1) \neq V(\Delta_2)$. Lo que prueba (v).

(vi) Para todo $\Delta \in I(T,\Gamma)$, $\Delta = I(V(\Delta))$.

Por (iv) $V(\Delta) = V(I(V(\Delta)))$, y como V es inyectiva $\Delta = I(V(\Delta))$.

(vii) De todo lo anterior se tiene que V e I son aplicaciones biyectivas, cada una inversa de la otra.

De forma análoga al lema 7 del apartado anterior se obtiene:

<u>Lema 6</u>. Sean $V_1,V_2 \in V(T,\Gamma)$. Si $\Delta_1,\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ son tales que $V(\Delta_1) = V_1$, y $V(\Delta_2) = V_2$ se verifica que:

a) $V_1 \cap V_2 \in V(T,\Gamma)$. Más aún, $V(\langle\Delta_1 \cup \Delta_2\rangle) = V_1 \cap V_2$.

b) Si $\Gamma \in \underline{V}(T)$, $V_1 \cup V_2 \in V(T,\Gamma)$. Más aún, $V([\Delta_1,\Delta_2]) = V_1 \cup V_2$.

<u>Notas 7</u>. (m-variedades totales irreducibles)

(i) <u>Definición</u>: Sea $V \in V(T,\Gamma)$. Diremos que V es irreducible si de ser $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1,V_2 \in V(T,\Gamma)$, entonces $V = V_1$ o $V = V_2$.

Se verifica que:

(ii) Sea $V \in V(T,\Gamma)$. Si $\Gamma \in \underline{V}(T)$, son equivalentes

a) V es irreducible

b) $I(V)$ es irreducible

<u>Demostración</u>:

a) → b). Si $I(V) = [\Delta_1,\Delta_2]$, entonces

$V = V(I(V)) = V([\Delta_1,\Delta_2]) = V(\Delta_1) \cup V(\Delta_2)$.

Ahora bien, V es irreducible; por tanto, $V = V(\Delta_1)$ o $V = V(\Delta_2)$. En consecuencia, $I(V) = I(V(\Delta_1)) = \Delta_1$ o $I(V) = I(V(\Delta_2)) = \Delta_2$.

b) → a). Sea $V = V_1 \cup V_2$. Existen $\Delta_1,\Delta_2 \in I(T,\Gamma)$ tales que $I(V_1) = \Delta_1$ e $I(V_2) = \Delta_2$. Por tanto,

$$I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V(\Delta_1) \cup V(\Delta_2)) = I(V([\Delta_1,\Delta_2])) = [\Delta_1,\Delta_2].$$

Y puesto que, $I(V)$ es irreducible, $I(V) = \Delta_1$ o $I(V) = \Delta_2$; por tanto, $V = V_1$ o $V = V_2$.

(iii) <u>Definición.</u> (punto general)

Sean $V \in V(T,\Gamma)$, y $(M,a_1,\ldots,a_n) \in V$. Diremos que $(M,a_1,\ldots,a_n)$ es un punto general de V si para todo $A \in \Gamma$ tal que $A \in [a_1,\ldots,a_n]_M$, entonces $A \in I(V)$.

Se verifica que:

(iv) Sea $V \in V(T,\Gamma)$. Si $\Gamma \in \underline{V}(T)$, son equivalentes

a) V es irreducible

b) V tiene un punto general.

Demostración:

a) $\rightarrow$ b). La prueba es similar a la de a) $\rightarrow$ b) en el resultado análogo del apartado anterior.

b) $\rightarrow$ a) Sea $V = V_1 \cup V_2$. Sea $(M,a_1,\ldots a_n) \in V$ un punto general de V . Supongamos que $(M,a_1,\ldots,a_n) \in V_1$. Como $V_1 \subset V$ se tiene que $I(V) \subset I(V_1)$.

Sea $A \in I(V_1)$, entonces $A \in [a_1,\ldots,a_n]_M$; por tanto, $A \in I(V)$. Así pues, $I(V) = I(V_1)$ y como I es inyectiva $V = V_1$. Lo que pueba que V es irreducible.

4.3 $\mathfrak{M}$-IDEALES MAXIMALES.

Notas 1.

(i) Sea $M \in M(T)$. Para todo $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$, $\Gamma \cap [a_1,\ldots,a_n]_M \in I(T,\Gamma)$

Demostración:

Sean $A_1,\ldots A_k \in \Gamma \cap [a_1,\ldots,a_n]_M$ y $A \in \Gamma$ tales que:

$T \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow A$,

entonces $A \in [a_1,\ldots,a_n]_M$. Lo que prueba (i).

(ii) Si $\Gamma = S_n(T)$, entonces para todo $M \in M(T)$ y todo $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$ los m-ideales $[a_1,\ldots,a_n]_M$ son maximales.

Demostración:

Sean $M \in M(T)$, $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$, y $\Delta \in I(T,\Gamma)$ tales que $[a_1,\ldots,a_n]_M \subsetneq \Delta$. Si $A \in \Delta$ es tal que $A \notin [a_1,\ldots,a_n]_M$, entonces $\neg A \in [a_1,\ldots,a_n]_M$. Por tanto, $A, \neg A \in \Delta$. Así pues $\Delta = \Gamma$. Lo que prueba que $[a_1,\ldots,a_n]_M$ es maximal.

Lema 2. Si $\Delta \in I(T,\Gamma)$ es maximal, entonces existen $M \in M(T)$ y $(a_1,\ldots,a_n) \in |M|^n$ tales que:

$$\Delta = [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Demostración:

Como $\Delta \neq \Gamma$, $V(\Delta) \neq V(\Gamma)$; además, $\Delta \subset \Gamma$, así pues $V(\Gamma) \subset V(\Delta)$. Por tanto, existe $(M,a_1,\ldots,a_n) \in T^n$ tal que

(1) $(M,a_1,\ldots,a_n) \in V(\Delta)$; (2) $(M,a_1,\ldots,a_n) \notin V(\Gamma)$.

Por (1) $\Delta \subset [a_1,\ldots,a_n]_M$; luego, $\Delta \subset [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma$.

Por (2) $[a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma \neq \Gamma$.

Y puesto que, Δ es maximal se tiene que:

$$\Delta = [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Notas 3.

(i) El resultado anterior es, en alguna manera, una generalización del teorema de los ceros de Hilbert en su forma débil. sin embargo, tiene el inconveniente de que el modelo M de T tal que $\Delta = [a_1,\ldots a_n]_M \cap \Gamma$, para un m-ideal maximal Δ, depende de Δ . Deseamos buscar condiciones bajo las cuales éste modelo sea único.

(ii) (Teorías modelo-completas)

Una teoría T diremos que es modelo-completa si para todo $M \in M(T)$, la teoría $T + D(M)$ es completa.

Sean $M_1 \subset M_2$ L(T)-estructuras. Diremos que M_2 es una extensión elemental de M_1 , $M_1 \prec M_2$, si $M_1 \subset_{FL(T)} M_2$.

Se verifica que:

(a) Sea T una teoría, son equivalentes:

a-1) T es modelo completa

a-2) Si $M_1 \subset M_2$ son modelos de T , entonces $M_1 \prec M_2$.

(iii) Sean T una teoría modelo-completa, $M \in M(T)$, y $A \in S_n(T)$ tales que: existen $M' \in M(T)$, y $b_1,\ldots,b_n \in |M'|$ con $M \subset M'$ y $M'(A[b_1,\ldots,b_n]) = V$, entonces existen $a_1,\ldots,a_n \in |M|$ tales que $M(A[a_1,\ldots,a_n]) = V$.

Demostración:

De ser $M'(A[b_1,\ldots,b_n]) = V$ se tiene que:

$$M'(\exists z_1 \ldots \exists z_n A) = V .$$

Ahora bien, como $M \prec M'$, $M(\exists z_1 \ldots \exists z_n A) = V$. Por tanto, existen $a_1,\ldots,a_n \in |M|$ tales que:

$$M(A[a_1,\ldots,a_n]) = V .$$

Lo que prueba (iii).

Sean T una teoría modelo-completa , $M \in M(T)$, y $\Gamma \subset S_n(T + D(M))$. Se verifica:

Teorema 4. Si $I(T+D(M),\Gamma)$ satisface la condición de máximo y $\Delta \in I(T+D(M),\Gamma)$ es maximal, entonces existen $a_1,\ldots,a_n \in |M|$

tales que:

$$\Delta = [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Demostración:

Sean $A_1,\ldots,A_k \in \Gamma$ los generadores de Δ . Por el lema 2 existen $M' \in M(T + D(M))$ y $b_1,\ldots,b_n \in |M'|$ tales que:

$$\Delta = [b_1,\ldots,b_n]_{M'} \cap \Gamma .$$

Sea $B \in \Gamma-\Delta$, entonces $M'(B[b_1,\ldots,b_n]) = F$; por tanto,

$$M'((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)[b_1,\ldots,b_n]) = V .$$

De aquí, como $M' \in M(T+D(M))$, es decir, $M' \in M(T)$ y $M \subset M'$, por (3-(iii)) se tiene que existen $a_1,\ldots,a_n \in |M|$ tales que:

$$M((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)[a_1,\ldots,a_n]) = V .$$

Por tanto, $A_1,\ldots,A_k \in [a_1,\ldots,a_n]_M$. Luego,

$$\Delta \subset [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Además, $B \notin [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma$. Como Δ es maximal

$$\Delta = [a_1,\ldots,a_n]_M \cap \Gamma .$$

Lo que prueba el teorema.

Problemas.

(A) Problemas Relativos al Cociente.

A.1 El problema de la persistencia.

Este problema consiste en determinar un conjunto Π de fórmulas de L tal que:

Problema 1. Sea T una teoría con lenguaje L . T es persistente bajo cociente si, y sólo si, T es equivalente a una teoría cuyos axiomas no lógicos son fórmulas de Π.

En 3.1 se ha discutido este problema estableciendo que si los axiomas de T pertenecen al conjunto

$$\mathrm{Pos} \cup \{\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B \; : \; A_1,\ldots,A_n,B \in At\} ,$$

entonces T es persistente bajo cociente.

La recíproca de ésta condición se estudia en las Notas 6 de 3.1 . Se analiza el comportamiento de la persistencia bajo cociente de la fórmula: $px \rightarrow qx \vee rx$, estableciéndose que:

(a) La teoría cuyo único axioma no lógico es $px \rightarrow qx \vee rx$ no es persistente bajo cociente.

Sin embargo, existen extensiones de esta teoría que son persistentes bajo cociente. Como ejemplo, estudiamos una teoría T tal que:

(b) T es persistente bajo cociente.

(c) $T + \{px \rightarrow qx \vee rx\}$ es persistente bajo cociente.

(d) $T \nvdash qx \vee rx$; $T \nvdash px \rightarrow qx$; $T \nvdash px \rightarrow rx$;
$T \nvdash px \rightarrow qx \vee rx$.

(e) Ninguna de las teorías que se obtienen de $T+\{px \rightarrow qx \vee rx\}$ suprimiendo uno de los axiomas de T es persistente bajo cociente.

Estudiando más detalladamente este ejemplo observamos que la teoría T no es completa (tiene modelos finitos de distinto cardinal) ni es modelo-completa (M_1 es una subestructura de M_2 y no es subestructura elemental). Tampoco lo son $T + \{px \to qx \vee rx\}$, ni ninguna de las teorías que se obtienen de ésta suprimiéndole uno de los axiomas de T; y todas ellas, excepto T_2', tiene un número finito de modelos salvo isomorfismos. Sería interesante determinar qué propiedades tiene T respecto a la fórmula $px \to qx \vee rx$, de las que carecen las que se obtienen de ella suprimiendo uno de sus axiomas y expliquen porqué dejan de ser persistentes bajo cociente al añadirle $px \to qx \vee rx$.

A.2 Problemas del cociente relativos a subestructuras.

a) En 3.3 se ha analizado la conexión de algunas construcciones de la teoría de modelos y el cociente, probándose que:

(1) Si $M' \subset M$ y $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$, entonces la contracción, Δ^c, de Δ a $I(T+D^+(M'),At(M'))$ verifica que: $M'/\Delta^c \subset M/\Delta$.

La situación para el caso contrario, esto es, si $\Delta \in I(T+D^+(M'),At(M'))$, no satisface una propiedad análoga; pues si Δ^e es la extensión de Δ a $I(T+D^+(M),At(M))$ no se tiene que: $M'/\Delta \subset M/\Delta^e$, como prueba el siguiente ejemplo:

Sea T la teoría de órdenes parciales con cadenas a lo más de tres elementos, esto es, el lenguaje de T tiene un único símbolo de predicado binario, $<$; y axiomas:

$$x < y \wedge y < x \to x = y$$

$$x < y \wedge y < z \to x < z$$

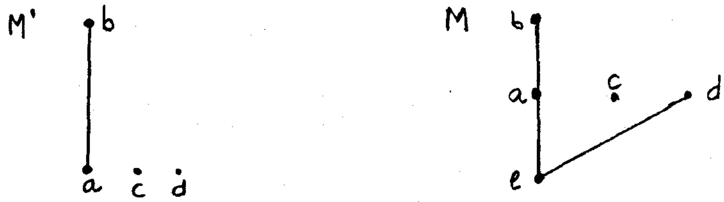
$$x < y \wedge y < z \wedge z < v \rightarrow z = v \,.$$

Sean M' y M las estructuras:

$|M'| = \{a , b , c , d\}$; $<_{M'} = \{(a,b)\}$.

$|M| = \{a , b , c , d , t\}$; $<_M = \{(t,a),(a,b),(t,b),(t,d)\}$

Gráficamente:



Es claro que: $M' \subset M$.

Sean $\Delta \in I(T{+}D^+(M'),At(M'))$ el m-ideal generado por $\{b < c\}$, y Δ^e el m-ideal extendido de Δ a $I(T{+}D^+(M),At(M))$.

Se tiene que:

M'/Δ es la estructura:

$a/\Delta = \{a\}$; $b/\Delta = \{b\}$; $c/\Delta = \{c\}$ y $d/\Delta = \{d\}$

$<_{M'/\Delta} = \{(a/\Delta,b/\Delta),(b/\Delta,c/\Delta),(a/\Delta,c/\Delta)\}$.

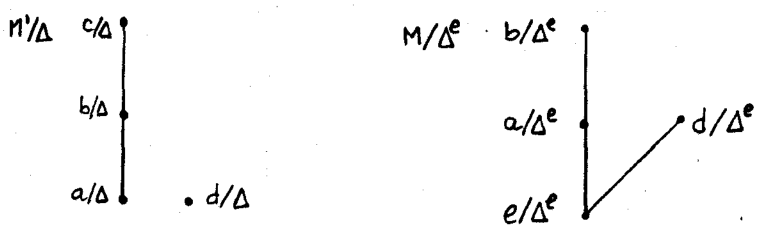
M/Δ^e es la estructura:

$a/\Delta^e = \{a\}$; $b/\Delta^e = c/\Delta^e = \{b , c\}$; $d/\Delta^e = \{d\}$;

y $t/\Delta^e = \{t\}$.

$<_{M/\Delta^e} = \{(t/\Delta^e,a/\Delta^e),(a/\Delta^e,b/\Delta^e),(t/\Delta^e,b/\Delta^e),(t/\Delta^e,d/\Delta^e)\}$

Gráficamente:



Y es claro que M'/Δ no es una subestructura de M/Δ^e.

Ante esta situación el problema que se plantea es:

<u>Problema 2</u>. Bajo qué condiciones sobre los axiomas de una teoría T se verifica que: si $M' \subset M$ son modelos de T, entonces para todo $\Delta \in I(T{+}D^+(M'),At(M'))$ $M'/\Delta \subset M/\Delta^e$.

b) Otro concepto importante en Algebra, es la existencia de una sucesión de subestructuras verificando su cociente alguna propiedad adicional. Por ejemplo, en Algebra se dice que un grupo G es resoluble si existe una sucesión:

$$H_0 = \{0\} \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G ,$$

tal que: H_k/H_{k-1} es abeliano para todo $k=1,\ldots,n$.

En nuestra situación esto se enunciaría así:

Sea $\{A_1,\ldots,A_n\} \subset FL(T)$, diremos que un modelo M de T resuelve a $\{A_1,\ldots,A_n\}$ si existen $\Delta_1 \subset \ldots \subset \Delta_n$ cOn $\Delta_i \in I(T+D^+(M),At(M))$ tales que: $M/\Delta_i \models A_i$.

El problema que se plantea es:

<u>Proplema 3</u>. Si para todo $M' \subset M$, con $M' \in M(T)$ y M' finitamente generado, se tiene que M' resuelve a $\{A_1,\ldots,A_n\}$, entonces M resuelve a $\{A_1,\ldots,A_n\}$.

El problema anterior en el caso de ser T la teoría de grupos y $A_i \equiv x+y = y+x$ para todo $i=1,\ldots,n$; se sabe que tiene una solución afirmativa.

(B) <u>El Problema del estudio de m-ideales por medio de técnicas de la Teoría de Modelos</u>.

En <u>4.3</u> hemos probado unos resultados que en cierto sentido extienden la forma débil de los ceros de Hilbert. Para proseguir en esta línea de estudio, como por ejemplo enunciar y probar un resultado similar al teorema de los ceros de Hilbert en su forma fuerte, parece imprescindible precisar algunos conceptos.

a) <u>El concepto de radical</u>.

Sean T la teoría de anillos, T_1 la de dominios de integridad y $M \in M(T)$. Recordemos que en <u>2.1</u> se probó que:

si $\Delta \subset At(M)$, entonces $\Delta \in I(T_1+D^+(M),At(M))$ si, y solo si, $\mathfrak{a}_\Delta = \sqrt{\mathfrak{a}_\Delta}$.

Así pues, podemos definir el radical de un m-ideal de la teoría de anillos como sigue:

Sea $\Delta \in I(T+D^+(M),At(M))$, definimos su radical, Δ , como el m-ideal generado por Δ en $I(T_1+D^+(M),At(M))$.

Nos podríamos preguntar qué propiedades satisface T_1 respecto de T , generalizables a nuestro lenguaje, que permitan definir el concepto de radical. A este respecto sabemos que: si $M \in M(T)$, entonces $At(M) \in \underline{V}(T_1+D^+(M))$. Y se plantea el siguiente problema:

<u>Problema 4</u>. T_1 es la menor extensión de T tal que para todo $M \in M(T)$, $At(M) \in \underline{V}(T_1+D^+(M))$.

b) <u>Sobre el conjunto Γ</u> .

En Algebra los resultados, que se desean generalizar, se obtienen acerca del conjunto de los polinomios con coeficientes en un cuerpo. Es posible generalizar el concepto de polinomio a un lenguaje de primer orden. Para ello, consideremos el polinomio:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 ,$$

y formalicemos la teoría de anillos en un lenguaje sin símbolos de funciones de aridad mayor de cero. Así, consideramos un lenguaje con dos predicados 3-arios, s , p ; y dos constantes, 0 , 1 . En este lenguaje el polinomio anterior queda representado por la fórmula:

$$\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_{n-1} \exists z_1 \ldots \exists z_n \exists w_1 \ldots \exists w_n (p_n x y_1 \wedge \ldots \wedge p_2 x y_{n-1} \wedge p a_n y_1 z_1 \wedge \ldots \wedge p a_1 x z_n \wedge s z_1 z_2 w_1 \wedge \ldots \wedge s z_{n-1} a_0 w_n)$$

La estructura de la fórmula anterior nos permite dar una generalización del concepto de polinomio (ver Robinson, [1963]), como sigue:

Polinomios: Sea $A(x_1,\ldots,x_n,y)$ una fórmula de un lenguaje de primer orden L, diremos que $A(x_1,\ldots,x_n,y)$ es un polinomio en n variables sobre una teoría T, $A \in P_n(T)$, si se verifican:

(1) $T \vdash \exists y\, A(x_1,\ldots,x_n,y)$ (condición de existencia)

(2) $T \vdash A(x_1,\ldots,x_n,y) \wedge A(x_1,\ldots,x_n,y') \to y = y'$

(3) $A(x_1,\ldots,x_n,y)$ es equivalente en T a una fórmude la forma:

$$\exists z_1 \ldots \exists z_m\, B(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n,y) ,$$

donde B es conjunción de fórmulas atómicas.

Si $1 \leqslant n$, entonces $P_n(T) \neq \phi$. En efecto,pues la fórmula:

$$x_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_i = y \wedge \ldots \wedge x_n = x_n ;$$

pertenece a $P_n(T)$. Si $n = 0$, entonces $P_n(T)$ puede ser vacío, Sin embargo, si T es la teoría de anillos, la fórmula $y = 0$ pertenece a $P_0(T)$; por tanto, $P_0(T) \neq \phi$ (esto se tiene siempre que el lenguaje de T contenga algún símbolo de función).

A partir de la definición de polinomio podemos construir la estructura polinómica de T, $M_n(T)$, en n variables como sigue: Consideremos el conjunto $P_n(T)$, y sobre él definimos la siguiente relación:

$$A_1,A_2 \in P_n(T) \;;\; A_1 \sim A_2 \quad \longleftrightarrow \quad T \vdash A_1 \longleftrightarrow A_2 .$$

Se tiene que:

(i) $\sim$ es de equivalencia.

Universo: $|M_n(T)| = P_n(T)/\sim$.

Interpretación de predicados y funciones $p_{M_n(T)}$ y $f_{M_n(T)}$

Predicados: Sean p un símbolo de predicado k-ario de L , y $a_1,\ldots,a_k \in |M_n(T)|$:

$$p_{M_n(T)}(a_1,\ldots,a_k) \longleftrightarrow$$

$$T \vdash A_1(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(x_1,\ldots,x_n,y_k) \rightarrow py_1\ldots y_k .$$

Donde $A_1 \in a_1$,..., $A_k \in a_k$.

Se comprueba fácilmente que la definición anterior no depende del representante de clase elegido.

Funciones:

Si e es unsímbolo de constante de L , definimos $M_n(T)(e) = a$, donde a es la clase del polinomio:

$$x_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = x_n \wedge y = e .$$

Sean f un símbolo de función k-ario de L , y $a_1,\ldots,a_k$ elementos de $M_n(T)$. Para definir $f_{M_n(T)}(a_1,\ldots,a_k)$, consideremos el siguiente razonamiento:

Sea L' el lenguaje obtenido de L añadiéndole un nuevo símbolo de predicado (k+1)-ario , p_f . Sea T_1 la extensión de T a L' añadiéndole las fórmulas:

$$p_f z_1\ldots z_k z \longleftrightarrow fz_1\ldots z_k = z$$
$$\exists z\ p_f z_1\ldots z_k z$$
$$p_f z_1\ldots z_k z \wedge p_f z_1\ldots z_k z' \rightarrow z = z'$$

como nuevos axiomas no lógicos. Las dos últimas fórmulas indican que $p_f z_1\ldots z_k z \in P_k(T')$.

Con esta idea se tiene que:

$$f_{M_n(T)}(a_1,\ldots,a_k) = a \longleftrightarrow p_{f_{M_n(T)}}(a_1,\ldots,a_n,a),$$

que por la definición dada para la interpretación de predicados se tiene si, y sólo si:

$$T_1 \vdash A_1(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(x_1,\ldots,x_n,y_k) \wedge A(x_1,\ldots,x_n,y) \to$$
$$\to p_f y_1 \ldots y_k y \ .$$

Y por tanto, $a = A(x_1,\ldots,x_n,y)/\sim$. Así pues, hay que encontrar $A(x_1,\ldots,x_n,y) \in P_n(T)$ tal que .

$$(*)\ T \vdash A_1(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(x_1,\ldots,x_n,y_k) \wedge A(x_1,\ldots,x_n,y) \to$$
$$\to fy_1\ldots y_k = y \ .$$

Sea $A(x_1,\ldots,x_n,y)$ la fórmula

$$\exists y_1 \ldots \exists y_k (A_1(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(x_1,\ldots,x_n,y_k) \wedge fy_1..y_k = y)$$

Veamos que se verifica (*). Sea:

$$T' = T + \{e_1,\ldots,e_n,e'_1,\ldots,e'_k,e\} \ ,$$

probar (*) es equivalente a probar:

$$(i)\ T' \vdash A_1(e_1,\ldots,e_n,e'_1) \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,e'_k) \wedge$$
$$\wedge \exists y_1 \ldots \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge$$
$$\wedge fy_1\ldots y_k = e) \to fe'_1\ldots e'_k = e$$

Sea: $T'' = T' + \{A_1(e_1,\ldots,e_n,e'_1),\ldots,A_k(e_1,\ldots,e_n,e'_k),$
$\exists y_1 .. \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge fy_1..y_k = e)\}$

probar (i) es equivalente a probar

$$(ii)\quad T'' \vdash fe'_1\ldots e'_k = e \ .$$

Sea e''_1 una nueva constante y

$$T''_1 = T'' + \{e''_1\} + \{\exists y_2 .. \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,e''_1) \wedge \ldots \wedge$$
$$\wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge fe''_1 y_2\ldots y_k = e)\}$$

T''_1 es una extensión conservativa de T''. Además

$$T''_1 \vdash A_1(e_1,..,e_n,e''_1)$$
$$T''_1 \vdash A_1(e_1,\ldots,e_n,e'_1) \wedge A_1(e_1,\ldots,e_n,e''_1) \to e'_1 = e''_1$$
$$T''_1 \vdash e' = e''_1$$

Por tanto,

$$T'' \vdash \exists y_2 .. \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,e_1') \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge \wedge fe_1' y_2 \ldots y_k = e)$$

Tomando ahora

$$T_2'' = T'' + \{e_2''\} + \{ \exists y_3 \ldots \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,e_1') \wedge \wedge A_2(e_1,\ldots,e_n,e_2'') \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge fe_1' e_2'' .. y_k = e)\}$$

Al igual que para T_1'' se prueba que:

$$T_2'' \vdash e_2' = e_2'' \quad .$$

Y por tanto,

$$T'' \vdash \exists y_3 \ldots \exists y_k (A_1(e_1,\ldots,e_n,e_1') \wedge A_2(e_1,\ldots,e_n,e_2') \wedge \ldots \wedge \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,y_k) \wedge fe_1' e_2' \ldots y_k = e)$$

Siguiendo este procedimiento, obtendríamos que:

$$T'' \vdash A_1(e_1,\ldots,e_n,e_1') \wedge \ldots \wedge A_k(e_1,\ldots,e_n,e_k') \wedge fe_1' \ldots e_k' = e$$

Y por tanto,

$$T'' \vdash fe_1' \ldots e_k' = e \ .$$

Lo que prueba (¡¡).

Por un procedimiento análogo se prueba que:

* Si $A'(x_1,\ldots,x_n,y) \in P_n(T)$ es tal que

$$T \vdash A_1(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge A_k(x_1,\ldots,x_n,y_k) \wedge A'(x_1,\ldots,x_n,y) \rightarrow \rightarrow fy_1 \ldots y_n = y \quad ,$$

entonces $T \vdash A \longleftrightarrow A'$

* Las condiciones de existencia y unicidad ((1) y (2) de la definición de polinomio)

Y es fácil concluir que de ser $A_1,\ldots,A_k$ polinomios sobre T , entonces A es un polinomio sobre T .

Asimismo se prueba fácilmente que la definición no depen-

depende de los representantes de clase elegidos.

Vemos que la generalización del concepto de polinomio es adecuada pues se verifica que: Si T es la teoría de anillos, entonces

(i) $P_0(T) \cong Z$

(ii) Si $M \in M(T)$, $P_n(T+D(M)) \cong M[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$

Despues de las precisiones anteriores sobre el radical y el conjunto Γ creemos que: si T es una teoría modelo-completa, $M \in M(T)$, y $\Gamma = P_n(T+D(M))$; entonces se pueden obtener generalizaciones de resultados algebraicos como el teorema de los ceros de Hilbert en su forma fuerte.

UNIVERSIDAD DE

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Alejandro Fernández Margarit titulada "Una extensión de Métodos Algebraicos a la Teoría de Modelos".

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "cum laude"

Sevilla, 21 de Enero 1.983

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,
El Presidente,	El Secretario,	El Doctorando,