R.4857

LBS00053632

043
47

U N I V E R S I D A D D E S E V I L L A

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Algebra y Fundamentos

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
SECRETARIA
03-5-81
ENTRADA N.º 580

"RAMIFICACION DE VALORACIONES DE SUPERFICIES ALGEBROIDES"

Visto bueno: El director de la tesis

José L. Vicente

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas presentada por FRANCISCO JAVIER HERRERA GOVANTES.

Sevilla, Julio 1981

A Estrella.

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del Prof. José Luis Vicente Córdoba, a quien expreso mi mayor agradecimiento, tanto por sus orientaciones en este trabajo, como por su interés por formarme como matemático. Vaya también mi agradecimiento a mis compañeros de Departamento que, con sus discusiones sobre temas científicos, y, su ayuda en tareas docentes, descargándome de algunas labores, han hecho posible que esta memoria se concluya. Especialmente el apoyo recibido de Ramón Piedra ha sido excepcional.

INDICE

INTRODUCCION.....I

BIBLIOGRAFIA.....XXIV

CAPITULO I.- SERIES DE PUISEUX EN DOS VARIABLES

1.- "Algebraicidad".....1

2.- "Series de Puiseux casi-ordinarias".....9

3.- "Cálculo de raíces".....18

CAPITULO II.- VALORACIONES

1.- "Superficie de Riemann de k((X,Y))".....48

2.- "Ramificación de valoraciones: caso de las funciones de orden.....86

INTRODUCCION

Antes de empezar a escribir un resumen del contenido de la presente memoria, debo dejar bien claro un hecho importante y es que éste es un trabajo abierto, en el sentido de que no resuelve un problema hasta sus últimas consecuencias, acabando una teoría hasta dejarla formalmente perfecta. Por supuesto que en esta memoria se resuelven problemas; pero este trabajo no es sino el comienzo de algo, cuyas bases se establecen, que deja ante sí un campo amplio para futuros desarrollos. Se resuelven unos problemas, pero se plantean otros, de forma explícita o implícita, mayores quizás a los aquí resueltos.

La idea inicial ha partido de una serie de seminarios y lecciones sobre singularidades de superficies a los que he asistido en estos últimos años. Como todo el mundo sabe, el problema fundamental que hay ahora planteado en la teoría de singularidades de superficies es la equisingularidad. Una vez conocido, al menos de manera informal, que se pueden resolver las singularidades de un esquema excelente de dimensión 2 (a través de las notas tomadas por Bennett de las lecciones de Hironaka en el Bowdoin College),la atención se concentra en el estudio fino de las singularidades mismas.

Hay varias tentativas de resolución del problema de la equisingularidad que, o bien producen una clasificación demasiado gruesa, o bien su manejo técnico es extraordinariamente difícil, con lo que su desarrollo no está aún completo. Citemos algunos resultados sobre el tema.

1.- <u>Teoría del tipo dimensional</u>: Esta teoría se debe a Oscar Zariski (véase [ZTD]). En esencia se trata de asignar un número (el tipo

dimensional) a cada punto de una hipersuperficie(cuerpo base algebraicamente cerrado), número que está comprendido entre 0 y la dimensión de la variedad. Considerando un punto concreto de una variedad de dimensión 2 en un espacio de dimensión 3 la teoría del tipo dimensional clasifica este punto en tres tipos:

a) Tipo dimensional cero: el punto es simple.

b) Tipo dimensional uno: el punto es singular y la singularidad es "del tipo curva", es decir, se tiene localmente un lugar singular liso de dimensión 1, permitido en la superficie, y la sección plana genérica de la superficie transversal a él es equisingular a una sección específica.

c) Tipo dimensional 2: el resto de los puntos singulares. Por ejemplo, puntos singulares aislados y puntos singulares de curvas singulares.

2.- El árbol de la singularidad. El árbol de una singularidad fué introducido por Tomás Sánchez(véase [SA]) en su tesis de doctorado. En esencia consiste en tomar un punto singular de una superficie, considerar todos los que van sobre él por explosiones permitidas (con centro de cualquier dimensión), tomar cada uno de éstos, hacer lo mismo con él, y así sucesivamente. Naturalmente, hacen falta unos teoremas de limitación que eviten, entre otras cosas, la presencia de sucesiones infinitas de puntos infinitamente próximos, sin perder la información global. Estos teoremas se conocen sólo en un caso particular, el de las singularidades casi-ordinarias, que se presentan más adelante. El manejo del árbol es en extremo complicado y, por lo que respecta a la equisingularidad, sólo se conocen resultados concluyentes para singularidades casi-ordinarias.

3.- Singularidades casi-ordinarias.- El concepto de singularidad casi-ordinaria es antiguo. Su utilidad en la resolución de singularidades de superficies fué puesta de relieve por Zariski(véase [ZSCO-1] y [ZSCO-2]). En esencia una singularidad de una superficie es casi-

ordinaria cuando existe una proyección plana cuyo lugar crítico reducido tiene un punto doble ordinario en la proyección del punto singular. Abhyankar(véase [ACO]) probó por métodos algebraicos (aunque antes se conocía una demostración puramente topológica, véase [LA]) que esta condición es equivalente a la existencia de una parametrización de Puiseux de un tipo especial: las series de Puiseux casi-ordinarias. J.Lipman(véase [LCO]) introduce en su tesis de doctorado la noción de pares característicos de una singularidad casi-ordinaria y prueba que éstos tienen un sentido geométrico definido. Pero es Luengo (véase [LUCO]) quien da una determinación unívoca y recíproca entre pares característicos y árboles "reducidos" de una singularidad casi-ordinaria, definiendo una reducción del árbol que, según su tesis doctoral, no significa pérdida de información sobre el árbol total.

En la presente memoria se vuelve a introducir la teoría de valoraciones en el estudio de las singularidades de superficies, siempre con la vista puesta en la equisingularidad. La teoría de valoraciones, aplicada al estudio de las singularidades de superficies, ha sido ampliamente utilizada, pero siempre para la resolución de singularidades, nunca para la equisingularidad. Entre los años 1940 a 1960 aproximadamente, las valoraciones jugaron un papel fundamental. Veamos esto brevemente.En 1939,Zariski(véase [ZRSS]) construye los distintos tipos de valoraciones de un cuerpo de funciones algebraicas de dos variables(con cuerpo base de característica cero) y, vía un teorema de uniformización(que afirma que, dada una valoración de un tal cuerpo, existe un modelo proyectivo en el cual el centro de la valoración es liso) y el teorema de compacidad de las superficies de Riemann, prueba el teorema de resolución de singularidades de una superficie, a saber, esencialmente, que todo cuerpo de funciones algebraicas de dos variables posee un modelo proyectivo liso. Más tarde,

([ZU]) este autor prueba el teorema de uniformización de valoraciones de dimensión arbitraria, lo que permite resolver las singularidades de variedades tridimensionales([ZRS3]). La teoría de valoraciones se desarrolla ampliamente en el estudio de la Geometría birracional(véase [ZCB] y [ZCSR]), y hay que mencionar un magnífico trabajo expositorio del tema, hecho por el propio Zariski([ZV]).

Hacia la mitad de la década de los cincuenta, Abhyankar reemprende el estudio de la teoría de valoraciones, dirigido hacia la resolución de singularidades en característica positiva(véanse los distintos trabajos de este autor citados en la bibliografía). Con él consigue la resolución de singularidades de superficies en características distintas de 2,3 y 5, y resultados parciales en variedades tridimensionales. La década de los sesenta acaba con la teoría de valoraciones, desde el punto de vista de la resolución de las singularidades, por obra de Hironaka(véase [HRS]) quien, en un trabajo que cambió radicalmente la Geometría Algebraica, demostró el teorema general de resolución de singularidades para variedades algebraicas de cualquier dimensión, siempre en característica cero, por métodos que no tienen nada que ver con las valoraciones.Desde entonces, no se ha publicado prácticamente nada en cuanto a valoraciones se refiere.

Vamos a empezar ahora a describir el contenido de esta memoria, aunque de una forma un poco heterodoxa, comenzando por el capítulo segundo, que constituye la razón de ser de este trabajo, para comentar luego brevemente, el primero.

La equisingularidad de superficies es una cuestión puntual y su marco es, por consiguiente, el de las superficies algebroides. Se trata pues, de estudiar las valoraciones de las superficies algebroides, como objetivo del capítulo segundo. Para todo el trabajo, el cuerpo base que utilizamos es algebraicamente cerrado y de

característica cero. Por el estudio de las valoraciones de superficies algebroides entendemos la construcción aritmética explícita de ellas y de sus propiedades, no una mera relación de teoremas de existencia y fórmulas de ramificación. Este es el punto clave de nuestro trabajo: las construcciones explícitas.

Una superficie algebroide irreducible(sumergida o no) da lugar a un cuerpo L de funciones meromorfas formales, que es una extensión algebraica finita de un cuerpo de series $K = k((X,Y))$, a la que se puede considerar engendrada por un elemento $z \in L$ entero sobre $R = k[[X,Y]]$ satisfaciendo sobre K una ecuación mínima cuyos coeficientes están en R y que es un polinomio de Weierstrass. La vía de estudio se compone de dos partes:

a) Estudio de las valoraciones de K/k cuyo anillo contiene a R, que son las únicas interesantes pues, al considerar sólo un punto de una variedad nos interesan sólo aquellas valoraciones que dan lugar a subvariedades que pasan por el punto.

b) Estudio de la ramificación a L de estas valoraciones.

La sección 1 del capítulo II está dedicada al punto a); comenzaremos por él.

El problema de la construcción explícita de las valoraciones de K/k radica en el método. Cabría pensar que, ya que se conocen las valoraciones de $k(X,Y)$ desde 1939 (véase [ZRSS]) se podría operar de alguna forma por ampliación de valoraciones en el paso al completado, pero este camino se desecha rápidamente. Como el grado de trascendencia de $k((X,Y))$ sobre $k(X,Y)$ es infinito y, dada una base de trascendencia, la extensión algebraica es asímismo infinita, esa vía no es posible o, cuando menos, salvaje y carente de técnicas. Se trata pues, de crear nuevos métodos, y este ha sido nuestro trabajo.

Sea v una valoración de K/k de anillo (R_v, m_v), de tal forma que $R_v \supset R$. Si el centro de v en R es (0), entonces

$R_v = K$ y la valoración es trivial. Si el centro de v en R es un ideal primo p de altura uno(por tanto p es principal engendrado por una serie f irreducible), el anillo R_p es notheriano, de dimensión 1 e íntegramente cerrado, luego es de valoración discreta. Así, $R_v = R_p$ y el cuerpo residual Δ_v de v es isomorfo al cuerpo de fracciones de R/p, que es el cuerpo de funciones meromorfas formales sobre una curva plana. Así, v es discreta de rango 1 y dimensión infinita. Nos quedan por estudiar las valoraciones centradas en el ideal maximal $M = (X,Y)R$ de R. Uno de los problemas que se presentan en este caso es que, al operar con un cuerpo de grado de trascendencia infinito sobre el cuerpo base, no se tienen teoremas clásicos de limitación del rango y la dimensión de la valoración. Aparece, una vez más, la necesidad de crear nuevas técnicas.

Sea v una valoración de K/k, (R_v, m_v) su anillo y supongamos que $R_v \supset R$, $m_v \cap R = M$. Sea $R' = k[[X]][Y]$, $K' = k((X))(Y)$ su cuerpo de fracciones, v' la restricción de v a K', $(R_{v'}, m_{v'})$ su anillo; se tiene que $R_{v'} \supset R'$. Sean Γ_v y $\Gamma_{v'}$ los grupos de valores respectivos de v y v'. Una idea simple, aunque clave, es que $\Gamma_v = \Gamma_{v'}$. En efecto, toda serie $f \in R$ se puede expresar en la forma

$$f = X^r U(X,Y) P(X,Y)$$

donde $r \in Z_o$, $U(X,Y) \in R$, $U(0,0) \neq 0$ y $P(X,Y)$ es un polinomio de Weierstrass en Y. Así $v(f) = rv(X)+v(P)$, de donde se tiene la igualdad de los grupos postulada.

Sea $\Gamma = \Gamma_v$ y $\Gamma'' \simeq Z$ el grupo de valores de la restricción v'' de v a $k((X))$. La consideración del grupo cociente Γ/Γ'' es muy importante para la construcción que vamos a hacer. Puede que en este grupo cociente haya una clase sin torsión, entonces(véase teorema 1.4,capítulo II), el grupo Γ es isomorfo, como grupo abeliano no necesariamente ordenado, a Z^2. Pero los únicos órdenes posibles

sobre Z^2 (véase teorema 1.6) son

a) Un orden arquimediano. Entonces Z^2 es isomorfo, como grupo ordenado, a un subgrupo de $\mathbb{R}$ de la forma $Z \oplus Z\xi$, $\xi \in R \setminus Q$.

b) El orden lexicográfico. En este caso Z^2 es un grupo discreto de rango 2.

Transplantando el orden de Γ a Z^2 vía los isomorfismos anteriores se tiene que v es, bien una valoración discreta de rango 2, bien una valoración de rango 1 no discreta cuyo grupo de valores (necesariamente contenido en R, salvo isomorfismos) no está contenido en Q.

Supongamos ahora que $\mathrm{Tor}(\Gamma/\Gamma'') = \Gamma/\Gamma''$. Entonces, puesto que se puede considerar $\Gamma = Z$, es fácil ver que se puede sumergir Γ en Q. En esta situación, si existe un entero n tal que $n(\Gamma/\Gamma'') = (0)$, es Γ isomorfo a Z como grupo ordenado, y estamos en el caso de una valoración discreta de rango 1. Si no existe dicho entero n, Γ es un subgrupo de Q no isomorfo a Z y la valoración es no discreta, de rango 1 con grupo de valores contenido en Q.

Estos razonamientos nos indican claramente, qué tipos de valoraciones v de K/k podemos encontrar, cuyo anillo contenga a R y cuyo centro en R sea M. Falta ver que estas valoraciones existen efectivamente, y dar descripciones explícitas de ellas.

Empecemos por las valoraciones discretas de rango 1. Sean $a,b \in Z_+$ tales que $\mathrm{m.c.d}(a,b) = 1$. Asignando a X el grado a y a Y el grado b se tiene, de forma obvia, una función de orden v sobre K, que es una valoración discreta de rango 1 con centro M en R. Esto equivale a considerar sobre $\mathbb{R}^2$ la forma lineal $L(u_1,u_2) = au_1+bu_2$ y operar de la forma siguiente. Para cada serie $f \in R$, se dibuja en $\mathbb{R}_0^2$ su diagrama de Newton. Se considera la recta paralela a la recta $au_1+bu_2 = 0$, situada más a la izquierda, y que pasa por un punto del diagrama de Newton de f. Si esta recta es la

$au_1+bu_2 = r$, entonces $v(f) = r$. El valor de una fracción de K se obtiene por diferencia entre el valor del numerador y el del denominador. No es difícil ver que toda valoración discreta de rango 1 cuyo centro en R es M es de esta forma. En cuanto al cuerpo residual Δ_v de v, es fácil ver cuál es. Un elemento de valor cero en v es una fracción f/g tal que el orden respecto de L del numerador es igual al del denominador. La clase de f/g módulo m_v es igual a la del cociente de las formas iniciales de f y g respecto de L, y este cociente es una función racional en Y^a/X^b, Así pues, el cuerpo residual Δ_v de v no es otra cosa que $k(Y^a/X^b)$. Por tanto, v es de dimensión 1.

Veamos ahora cuáles son y cómo se obtienen las valoraciones discretas de rango 2. Hay de dos tipos:

<u>Tipo 1</u>.- Sea v_1 una valoración discreta de rango 1 de K/k cuyo centro en R sea un ideal primo $p = (f)$ de altura 1, con $f \in R$ irreducible. Su anillo R_{v_1} es igual a R_p y su cuerpo residual Δ_{v_1} es el cuerpo de fracciones de $R/(f)$. Sobre Δ_{v_1} hay una única valoración discreta de rango 1, que notaremos v_2, que viene dada por un desarrollo en serie de Puiseux

$$x = t^n , \qquad y = \psi(t) , \qquad x = X+(f) , \qquad Y = Y+(f),$$

cuyo anillo es el cierre íntegro de $R/(f)$ en Δ_{v_1} y cuyo cuerpo residual es k. La composición de v_1 con v_2 suministra una valoración v de K/k, discreta de rango 2, cuyo anillo contiene a R y cuyo centro en él es M. Esta valoración v se realiza así:

Sea $g/h \in K$; existe un entero único r tal que

$$g/h = f^r.(g'/h') , \quad f \nmid g', \quad f \nmid h'.$$

La clase de g'/h' módulo m_{v_1} es un elemento $g'(x,y)/h'(x,y)$ no nulo en Δ_{v_1}. Así es

$$v(g/h) = (r, v_2(g'(x,y)/h'(x,y))).$$

Además la valoración v es de dimensión cero, pues su cuerpo residual es k.

Tipo 2.- Tomemos ahora una valoración v_1 de K/k, discreta de rango 1, cuyo centro en R sea M. En este caso v_1 es una función de orden dada por una función lineal $L(u_1,u_2) = au_1+bu_2$, $a,b \in Z_+$, $1 = m.c.d(a,b)$ y su cuerpo residual es $\Delta_{v_1} = k(Y^a/X^b)$. Sea v_2 una valoración discreta de rango 1 de Δ_{v_1}/k; sabemos que v_2 es, bien una función de orden con respecto a un polinomio lineal $(Y^a/X^b)-u$, $u \in k$, bien la valoración correspondiente al punto del infinito de la esfera de Riemann de k. Sea $U \in K$ un elemento tal que sea $v_1(U) = 1$; por ejemplo, $U = X^\alpha Y^\beta$ con $\alpha a+\beta b = 1$. La composición de v_1 con v_2 nos da una valoración v de K/k, discreta de rango 2, cuyo centro en R es M, y que se realiza como sigue. Sea $f/g \in K$ tal que $v_1(f/g) = n$; entonces $f/g = U^n(f'/g')$, $v_1(f'/g') = 0$. Así

$$v(f/g) = (v_1(f/g), v_2((f'/g')+m_{v_1}),$$

donde, como siempre, m_{v_1} es el ideal maximal del anillo R_{v_1} de v_1. Por supuesto, el cuerpo residual de v es k, y así v es de dimensión cero.

El punto importante aquí es que todas las valoraciones discretas de rango 2 de K/k cuyo anillo contiene a R y cuyo centro en R es M, son de uno de los dos tipos considerados. Así pues, tenemos una descripción completa y explícita de tales valoraciones.

Vamos ahora a describir las valoraciones no discretas de rango 1 cuyo grupo está contenido en Q. Esta descripción es un poco más complicada, y requiere métodos trascendentes. Esta descripción es, no obstante, la parte más clásica de toda esta sección, toda vez que es una generalización de la correspondiente teoría en el caso de funciones algebraicas.

Hay varios aspectos a considerar en este caso. Supongamos en primer lugar que una tal valoración existe, la designamos por v y sea Δ_v su grupo de valores. Escritos los elementos de Δ_v en su expresión irreducible, sus denominadores no pueden formar un

conjunto acotado(pues si fuera así, Γ_v sería isomorfo a Z). Consideremos el conjunto de los primos que aparecen en las factorizaciones de los denominadores de elementos de Γ_v(escritos en su forma irreducible). En este conjunto hay dos clases: la clase P_1 de aquellos que aparecen con exponentes acotados y la clase P_2 de los que aparecen con exponentes acotados. Si $P_2 = \phi$, entonces P_1 tiene cardinal infinito. No es difícil ver que Γ_v queda determinado por los denominadores de sus elementos (escritos en su expresión irreducible); de hecho Γ_v es el conjunto de los números racionales que, escritos en su expresión irreducible, tienen un denominador de la forma

$$p_1^{n_1} \cdots\cdots p_r^{n_r} q_1^{m_1} \cdots\cdots q_s^{n_s}$$

donde $p_1,\ldots,p_r \in P_1$, $q_1,\ldots,q_s \in P_2$, $m_1,\ldots,m_s$ son enteros no negativos arbitrarios y $n_1,\ldots,n_s$ son enteros no negativos acotados.

El segundo paso a dar en este tema está contenido en la propocición 2.17, y se puede describir de la forma siguiente. Sea G un subgrupo de Q tal que $n(G/Z) \neq (0)$, $n \in Z$. Existe entonces una valoración v de K/k, no única en general, cuyo grupo de valores es G. Desde luego v es de rango 1 y no discreta. La demostración de este hecho se hace por razonamientos tipo Puiseux. El siguiente paso a dar es la construcción efectiva de estas valoraciones, cosa que hacemos en esta introducción de manera puramente informal, haciendo las construcciones rigurosas en la memoria adjunta.

Consideremos el anillo A de las series en la variable t, con coeficientes en k, y cuyos exponentes forman un conjunto bien ordenado de números racionales no negativos. Sea L el cuerpo de fracciones de A; sobre L se puede considerar la función de orden obvia. Sea $\Gamma \subset Q_+$ un conjunto bien ordenado de números racionales tales que, escritos en su expresión irreducible, tienen denominadores no acotados. Sea

$$\zeta = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \in A, \quad a_\gamma \in k\setminus\{0\};$$

la sustitución de X por t e Y por ζ define un homomorfismo inyectivo $\psi : R \longrightarrow A$. La razón de la inyectividad de ψ es clara: la serie ζ no puede anular a ninguna de $M\setminus\{0\}$ porque, hablando grosso modo, a las series de $M\setminus\{0\}$ sólo las anulan las series de Puiseux, y ζ no es una de ellas. Así ψ se extiende a una inyección $\psi' : K \longrightarrow L$ que, compuesta con la función de orden, nos da una valoración de K/k, de rango 1, no discreta y con grupo de valores contenido en Q. Además, la dimensión es cero. Hay que considerar dos puntos aquí:

<u>Punto 1</u>.- Toda valoración v de K/k, no discreta, de rango 1 y con grupo de valores contenido en Q se obtiene de la forma anterior. La demostración de este hecho es técnicamente complicada, pero la línea se puede resumir así. Se considera la complección $\hat{K}_v$ de K respecto de v; esta complección se puede sumergir en L, de forma canónica, y se encuentra que v es la composición de las inmersiones

$$K \longrightarrow \hat{K}_v \longrightarrow L$$

con la función de orden sobre L.

<u>Punto 2</u>.- Sea

$$\zeta = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma$$

como antes y v la valoración correspondiente. Sea $\alpha_1 = \min(\Gamma)$ y $\alpha_i = \min(\Gamma\setminus\{\alpha_1,\ldots,{}_{i-1}\})$, $i\geq 2$; a la sucesión $\{\alpha_i\}$ se le llama sucesión inicial de Γ. Además se verifica que los elementos α_i, escritos en su expresión irreducible, tienen denominadores no acotados. Sea

$$\bar{\zeta} = \sum_{i\geq 1} a_{\alpha_i} t^{\alpha_i};$$

se verifica que la valoración de K/k obtenida componiendo la inmersión $X \longrightarrow t$, $Y \longrightarrow \bar{\zeta}$ con la función de orden sobre L es igual a v. La razón de esto es intuitivamente fácil, aunque técnicamente

complicada. Desde luego, $\{\alpha_i\}$ es una sucesión monótona creciente y, si es divergente, coincide con todo Γ, con lo que no hay nada que probar. Si $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha < \infty$ no pueden ser alcanzados mediante la sustitución, toda vez que lo único que anula a las series de $M\setminus\{0\}$ son las series de Puiseux, y $\bar{\zeta}$ no es una de ellas.

Queda, por último, la descripción de las valoraciones de rango 1 no discretas, con grupo de valores no contenido en Q. En este caso, no es difícil ver que una tal valoración es, esencialmente, la composición con la función de orden, de una sustitución del tipo $X \to t$, $Y \to \psi(t) + t^{\xi}$, donde ψ es una serie de Puiseux en la variable t y $\xi \in R\setminus Q$. Estas valoraciones son, también, de dimensión cero.

Con esto termina la descripción de las valoraciones de K/k cuyo anillo contiene a R. En la sección 2 del capítulo II se estudia la ramificación por paso a una extensión algebraica. Tomemos un polinomio de Weierstrass

$$f(X,Y,Z) = Z^n + a_1(X,Y)Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(X,Y)Z + a_n(X,Y),$$

irreducible y pongamos

$$\square = R/(f) = R[z],$$

donde se han identificado X e Y con sus imágenes canónicas en $\square$ y se ha puesto $z = Z + (f)$. Sea m el ideal maximal de $\square$ y $L = K(z)$ el cuerpo de fracciones de $\square$; entonces L es una extensión algebraica finita de K. Se trata de estudiar la extensión a L de las valoraciones de K/k construidas antes y su ramificación. En la sección 2 del capítulo II, se ha estudiado la ramificación de las funciones de orden de K/k, entendiendo por tales a las valoraciones discretas de rango 1 cuyo centro en R es M. Queda, pues, para futuros trabajos, el estudio de la ramificación de los otros tipos de valoraciones. Pero, adelantamos aquí que, aparte de las funciones de

orden, el otro tipo de valoraciones cuya ramificación puede ser interesante es el de las no discretas de rango 1 con grupo de valores contenido en Q. Esto nos parece así por dos razones:

1) Es bastante intuitivo que una tal valoración no discreta de rango uno con grupo de valores contenido en Q, determine una sucesión de explosiones de puntos cerrados, sucesión a la que va "pegada" la valoración. Así,conocidas estas ampliaciones,se tendría la descripción de las sucesiones infinitas de puntos infinitamente próximos al punto cerrado de Spec(□), que se obtengan por explosiones de puntos cerrados.

2) La ramificación de valoraciones discretas de rango 1 centradas en un ideal primo de altura 1 de R es, esencialmente, la ramificación de ideales por paso al cierre íntegro, teoría bien conocida desde Grothendieck (SGA-IV-2). Las valoraciones discretas de rango 2 equivalen a tomar curvas dentro de la superficie y puntos dentro de esas curvas, cosa que, desde el punto de vista de las singularidades, no parece tener un interés " a priori ". Las valoraciones no discretas de rango 1 con grupo de valores no contenido en Q son valoraciones trascendentes, parásitas en el sentido que es dudosa su influencia en el estudio de las singularidades.

Estas ideas geométricas, no pasan de ser intuiciones, pues la interpretación geométrica de la relación entre valoraciones y singularidades es un campo casi inexplorado. Al autor de esta memoria le ha parecido, no obstante, desde el punto de vista operativo, aprender primero la estructura íntima de las valoraciones para, después, con suficientes datos e información, "hacer la geometría adecuada".

Volviendo a las funciones de orden sobre K, y como se verá más adelante, el estudiar la ramificación de una concreta v equivale a dar un recubrimiento de la superficie S = Spec(□) por una familia algebraica uniparamétrica de curvas planas, recubrimiento del que se

ignora todo salvo sus ecuaciones explícitas. Es al estudio de estas ecuaciones que se ha dirigido la sección final de esta memoria, cuyo contenido pasamos a explicar.

Fijemos $a,b \in Z_+$ con $1 = m.c.d(a,b)$, sean $\alpha,\beta \in Z$ tales que $1 = a\alpha+b\beta$ y consideremos la valoración v de K/k, discreta de rango 1, tal que $v(X) = a$, $v(Y) = b$; se trata de estudiar las ampliaciones de v a L. Para ello empleamos unos artificios del tipo Puiseux.

Sea N el conjunto de monomios en X,Y con exponentes enteros no negativos, $\bar{N}$ el de los monomios en $\bar{X},\bar{Y}$ con exponentes enteros, no negativos para $\bar{Y}$ y arbitrarios para $\bar{X}$. Se tiene una aplicación inyectiva

$$\phi'(a,b,\alpha,\beta):N \longrightarrow \bar{N}$$

definida por la sustitución de X por $\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a}$ e Y por $\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b}$, es decir,

$$\phi'(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = \bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{Y}^{ai+bj}.$$

Como, fijado un entero no negativo n, el conjunto de monomios de $\mathrm{im}\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ que tienen exponente de $\bar{Y}$ igual a n es finito, se tiene un homomorfismo inyectivo local

$$\phi(a,b,\alpha,\beta):R \longrightarrow k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$$

(cuerpo base $k(\bar{X})$), que se extiende a una inmersión

$$\phi(a,b,\alpha,\beta):K \hookrightarrow k(\bar{X})((\bar{Y}))$$

A veces, por razones de cálculo, compondremos esta inmersión con la inclusión natural $k(\bar{X})((\bar{Y})) \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ y a la composición la notaremos con la misma letra. Por supuesto, $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ está definida por

$$\phi(a,b,\alpha,\beta)(g(X,Y)) = g(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a},\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b}) \in k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$$

para cualquier $g(X,Y) \in R$. Con estas notaciones nuestra ecuación $f(X,Y,Z) = 0$ queda transformada en una ecuación

$$0 = \bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^n+\bar{a}_1(\bar{X},\bar{Y})Z^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}(\bar{X},\bar{Y})Z+\bar{a}_n(\bar{X},\bar{Y})$$

que es un polinomio de Weierstrass, no necesariamente irreducible, aunque sin raíces múltiples.

El paso siguiente es por supuesto resolver la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$. Esta resolución conlleva unos cálculos muy laboriosos que en cualquier caso están detallados al máximo en la correspondiente sección. En resumen, se hace lo siguiente. Se amplia el cuerpo base a un cuerpo algebraicamente cerrado, para aplicar el teorema de Puiseux en su forma constructiva, via diagrama de Newton, como ya es clásico. La ampliación del cuerpo base es obvia: se considera $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ como una ecuación en Z, con coeficientes series en $\bar{Y}$ sobre el cuerpo base $k((\bar{X}))^*$ de las seríes de Puiseux en la variable $\bar{X}$ sobre k. En este caso, todas las raíces $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ son series de Puiseux en $\bar{Y}$ con coeficientes en $k((\bar{X}))^*$, de órdenes positivos, por ser $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ un polinomio de Weierstrass. Para cada $i = 1,\ldots,n$ designaremos por q_i al mínimo antero positivo tal que $\zeta_i \in k((\bar{X}))^*[[\bar{Y}^{1/q_i}]]$.

¿Qué ocurre con los coeficientes de una ζ_i fija? Recordando el clásico algoritmo de Newton para el cálculo de la ζ_i sabemos que:

a) El primer coeficiente, ω_{i1} de ζ_i, es algebraico sobre $k(\bar{X})$

b) El segundo, ω_{i2}, es algebraico sobre $k(\bar{X})(\omega_{i1})$, y

c) Así sucesivamente.

Por tanto, escribiendo

$$\zeta_i = \sum_{j\geq 1} \omega_{ij}\bar{Y}^{r_{ij}/q_i}, \quad \omega_{ij} \neq 0,$$

se tiene que $K_i' = k(\bar{X})(\{\omega_{ij}\}_{j=1})$ es una extensión algebraica de $k(\bar{X})$. Es necesario observar que las notaciones que estamos empleando aquí no coinciden exactamente con las empleadas en el texto; la razón es que aquí estamos dando una vista simplificada y general de los desarrollos que, en toda su extensión, requieren notaciones más sofisticadas. El punto importante es que K_i' es una extensión finita

de $k(\bar{X})$ pues, como se sabe por los cálculos con el diagrama de Newton, el número de ecuaciones que hay que resolver para determinar los coeficientes ω_{ij}, y que son de grado superior a 1, es finito. Esto implica, en particular, que, siendo los ω_{ij} series de Puiseux, se puede encontrar un entero p_i(que tomamos mínimo) tal que $\omega_{ij} \in k((\bar{X}^{1/p_i})), \forall j \geq 1$.

Para cada $i=1,..,n$, la inmersión $\phi(a,b,\alpha,\beta):K \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ se puede extender a un diagrama conmutativo de inmersiones

$$K \xhookrightarrow{\phi(a,b,\alpha,\beta)} k((\bar{X}))((\bar{Y}))$$

$$L \xhookrightarrow{\lambda_i} k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\zeta_i)$$

donde $\lambda_i(z) = \zeta_i$. Componiendo λ_i con la función de orden(fraccionario) $\nu_{\bar{Y}}$, respecto de $\bar{Y}$, en $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$, se obtiene una valoración v_i de L/k, que amplía v, pues

$$v_i(X) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a}) = a, \quad v_i(Y) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b}) = b.$$

En esta situación se plantean tres tipos de problemas:

a) ¿ Cuáles de entre las valoraciones v_i son distintas?

b) ¿ Cuál es el índice de ramificación y el grado relativo de cada v_i?

c) ¿ Son las v_i todas las ampliaciones posibles de v a L?

Estudiemos estos problemas por partes, empezando por el a).

Consideremos la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ y factoricémosla sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ y sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$; se tiene

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{f}_1(\bar{X},\bar{Y},Z).....\bar{f}_{h'}(\bar{X},\bar{Y},Z) \quad \text{(Sobre } k((\bar{X}))((\bar{Y}))\text{)}$$

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z).....\bar{g}_h(\bar{X},\bar{Y},Z) \quad \text{(Sobre } k(\bar{X})((\bar{Y}))\text{).}$$

Nótese que estas factorizaciones no coinciden en general, aunque cada $\bar{f}_j$ debe dividir a un $\bar{g}_l$. Es fácil ver que la valoración v_i obtenida por el procedimiento anterior a partir de ζ_i coincide con la v_j obtenida por ζ_j, si ζ_i y ζ_j son conjugadas

sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$, es decir, si ambas son raíces de un mismo factor $\bar{f}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$. La razón de este hecho es que para conjugar ζ_i se toman las raíces p_i-ésimas de 1, digamos $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p_i}\}$, las raíces q_i-ésimas de 1, digamos $\{\delta_1,\ldots,\delta_{q_i}\}$ y se conjuga ζ_i remplazando $\bar{X}^{1/p_i}$ por $\varepsilon_l\bar{X}^{1/p_i}$ e $\bar{Y}^{1/q_i}$ por $\delta_m\bar{Y}^{1/q_i}$, para cualesquiera l,m. Está claro que, por una sustitución de este tipo, el orden en $\bar{Y}$ de una serie de $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$ no puede cambiar. Pero el problema es que puede haber dos raíces ζ_i, ζ_j, no conjugadas sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$, tales que den la misma valoración, es decir, $v_i = v_j$.

El resultado clave, y quizás un poco sorprendente, es que $v_i = v_j$ si y sólo si ζ_i y ζ_j son conjugadas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, es decir, son raíces de un mismo $\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$(véase teorema 2.7,capítulo II). La demostración de este teorema es bastante sofisticada. El problema estriba en que, para aplicar argumentos "tipo Puiseux" a conjugados ζ_i, ζ_j sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, necesitamos previamente saber cómo conjugar sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, y aquí está la idea clave de todo pues, no sólo sirve para demostrar dicho teorema, sino que influye en todo el resto. El detalle está en considerar la mínimo extensión normal K_1 de $k(\bar{X})$ que contiene a la ampliación de $k(\bar{X})$ con todos los coeficientes de todas las ζ_i; se tiene claramente que $[K_1:k(\bar{X})] = p < \infty$. Sea q un entero tal que todas las ζ_i pertenecen a $K_1[[\bar{Y}^{1/q}]]$. Entonces se verifica

a) $K_1((\bar{Y}^{1/q}))$ es una extensión normal finita de $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, de grado $p.q$.

b) $Gal(K_1((\bar{Y}^{1/q}))/k(\bar{X})((\bar{Y}))) \simeq Gal(K_1((\bar{Y}))/k(\bar{X})((\bar{Y}))$ x $Gal(k(\bar{X})((\bar{Y}^{1/q}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))$, bajo un isomorfismo que a cada $\sigma \in Gal(K_1((\bar{Y}^{1/q}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))$ asigna el par

$$(\sigma/_{K_1((\bar{Y}))} , \sigma/_{k(\bar{X})((\bar{Y}^{1/q}))}).$$

Para comprender el sentido de la afirmación b) observemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & k(\bar{X})((\bar{Y}^{1/q})) = k(\bar{X})((Y))(\bar{Y}^{1/q}) \arrow[dr] & \\
k(\bar{X})((\bar{Y})) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & K_1((\bar{Y}^{1/q})) \\
 & K_1((\bar{Y})) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Este nos dice que, para conjugar ζ_i sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ se conjugan los coeficientes por un lado, sobre $k(\bar{X})$, y la $\bar{Y}^{1/q}$ por el otro, sustituyéndola por $\varepsilon\bar{Y}^{1/q}$, donde ε es cualquier raiz q-ésima de 1. Así, dos conjugados ζ_i y ζ_j sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tienen los mismos exponentes en la $\bar{Y}$. Con esta idea como base, y mediante complicados razonamientos tipo Puiseux se logra la demostración del teorema 2.7. Esto responde totalmente a la cuestión a).

Abordemos ahora la cuestión b), que está íntimamente relacionada con la c). Tomemos una raiz fija, digamos ζ_1 de la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ y supongamos que ζ_1 es raiz de $\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$ (que es un factor irreducible de la ecuación anterior sobre el cuerpo $k(\bar{X})((\bar{Y}))$). Escribamos, como antes,

$$\zeta_1 = \sum_{j\geq 1} \omega_{1j}\bar{Y}^{r_{1j}/q_1}, \quad \omega_{1j} \neq 0$$

donde se supondrá que q_1 es el mínimo entero positivo tal que ζ_1 es una serie en $\bar{Y}^{1/q_1}$. Si, digamos $\{q_1,r_1,\ldots,r_t\}$ son los exponentes característicos de ζ_1 como serie de Puiseux en $\bar{Y}$, no es difícil ver que, para todo $i=1,\ldots,t$, existe un elemento $\eta_i \in L$ tal que $v_1(\eta_i) = r_i/q_1$. De aquí se deduce como consecuencia que el índice de ramificación de v_1 respecto de v es q_1.

En cuanto al grado relativo, se hace el siguiente razonamiento. Consideremos a $k(\bar{X})$ como cuerpo base de los anillos locales que vamos a manejar y sea

$$\bar{\mathcal{O}} = k(\bar{X})[[\bar{Y}]][Z]/(\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)) = k(\bar{X})[[\bar{Y},Z]]/(\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)).$$

Como la factorización de un polinomio de Weierstrass se hace siempre mediante polinomios de Weierstrass, los $\bar{g}_i$ son polinomios de Weierstrass. Sea $\bar{m}$ el ideal maximal de $\bar{\mathcal{O}}$, y designemos por $(\mathcal{O}^*,m^*)$ al cierre íntegro de $\bar{\mathcal{O}}$ en su cuerpo de fracciones; se tiene que $\mathcal{O}^*$

es un $\bar{\square}$ - módulo de tipo finito y un anillo de valoración discreta. Sea v^* la valoración correspondiente; como $\bar{\square} = k(\bar{X})[[\bar{Y}]][\zeta_1]$ no es difícil ver que v^* es, de hecho, la función de orden con respecto a $\bar{Y}$ en $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_1)$ y que v^* prolonga v (vía la inmersión $\phi(a,b,\alpha,\beta)$). Sea n_1 el grado de $\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$, e_1 el grado relativo de v^* respecto de v; se ve fácilmente que el índice de ramificación de v^* respecto de v es q_1 y en la proposición 2.9 se prueba que $e_1 q_1 = n_1$ por el procedimiento de establecer que v^* es la única ampliación de v a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_1)$. Usando v_1 como intermedio, se prueba en la proposición 2.10 que el grado relativo de v_1 respecto a v es justamente e_1. Esto responde perfectamente a la cuestión b), dando incluso un procedimiento efectivo de cálculo del grado relativo de v_1 respecto de v: este grado es n_1/q_1.

La cuestión c) tiene ahora una respuesta afirmativa casi automática. Resumamos la situación, cambiando ligeramente las notaciones. Tenemos la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre el cuerpo $k(\bar{X})((\bar{Y}))$,

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)\ldots\ldots\bar{g}_h(\bar{X},\bar{Y},Z)$$

y sean $n_i = \text{grado}(\bar{g}_i)$, $i = 1,\ldots,h$. Designemos por $\{\zeta_{i1},\ldots,\zeta_{in_i}\}$ a las raíces de $\bar{g}_i = 0$ y sea q_i el mínimo entero tal que ζ_{ij} es una serie en $\bar{Y}^{1/q_i}$, $j = 1,..,n_i$. Asociada a cada factor $\bar{g}_i$ tenemos una valoración v_i, que se obtiene componiendo la inmersión λ_i que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\phi(a,b\,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k((\bar{X}))((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, "\lambda_i"] & k((X))((Y))(\zeta_{i1}) \end{tikzcd}$$

con la función de orden, respecto de $\bar{Y}$, en $k((X))((\bar{Y}^{1/q_i}))$. Esta valoración v_i no depende de la particular elección de la raiz del factor $\bar{g}_i$ que tomemos. Más aún, todas las valoraciones v_i, $i=1,..,h$ son distintas, el índice de ramificación de v_i es q_i y, designando por e_i al grado relativo, es $q_i e_i = n_i$. Por tanto,

$$e_1q_1+\dots+e_hq_h = n_1+\dots+n_h = n.$$

Ahora bien, por la fórmula general de ramificación de valoraciones (véase Z-S II, teorema 19, pág55), se deduce que las $\{v_i\}, i=1,..h$ sontodas las ampliaciones posibles de v a L pues esta fórmula establece que la suma de los productos de los índices de ramificación por los grados relativos de todas las ampliaciones posibles, no es superior a n.

Se termina esta sección del capítulo II, y la memoria con un estudio interesante, que es el siguiente. Supongamos que la ecuación de partida $f(X,Y,Z) = 0$ tiene una raiz (y, por tanto, todas) que es una serie de Puiseux en X,Y. Entonces, para cada función de orden v sobre K se verifica que v tiene una única ampliación a L. Desgraciadamente, el recíproco es falso, como se prueba con un ejemplo que damos a continuación. Digo desgraciadamente porque, de haber sido cierto, se tendría un criterio algebraico para una superficie que poseyese una parametrización de Puiseux. No obstante, el recíproco es cierto casi siempre, en el sentido de que lo es en una gran cantidad de casos particulares, que no están detallados por no haberse considerado adecuado un estudio casuístico del tema, que nos habría llevado demasiado lejos en cálculos, con dudoso interés teórico. Vamos, pues, a desarrollar el contraejemplo anunciado

La ecuación

$$Z^4-X^3Y^3Z^3+Y(Y^4-X^5) = 0$$

da lugar a una extensión $L = K(\xi)$, donde ξ es una raiz de ella, tal que la mínima extensión normal de K que contiene a L tiene grupo de Galois igual a S_4. Así pues, L/K no es normal, lo que implica automáticamente que no se puede encontrar un elemento primitivo que sea una serie de Puiseux. Unos cálculos aritméticos hechos en la memoria prueban que la extensión L/K goza de la propiedad

de ampliación única de funciones de orden.

Sin embargo, este ejemplo es un poco engañoso, pues con él se prueba exclusivamente que la condición de ampliación única de funciones de orden, por sí sola, no basta para garantizar existencia de parametrización de Puiseux, al no implicar que la extensión sea normal. Pero una ecuación irreducible cuyas raíces son todas series de Puiseux da lugar a una extensión normal con grupo de Galois abeliano. Luego el recíproco que habría que probar se enunciaría así: Extensión normal con grupo de Galois abeliano más ampliación única de funciones de orden, implica existencia de parametrización de Puiseux. La respuesta a este hecho la ignoro y queda como conjetura final de esta memoria.

Para terminar, vamos a dar un repaso breve al primer capítulo. El motivo de la brevedad es que este primer capítulo no es sino la fundamentación del segundo, desde el punto de vista del cálculo explícito.

La primera sección de este capítulo trata de cálculos algebraicos con series de Puiseux en dos variables. Más concretamente, se trata de, dada una serie de Puiseux en dos variables, calcular el grado de su polinomio mínimo y obtener información sobre su grupo de Galois. El resultado clave de esta sección se describe de la forma siguiente. Sea

$$\xi = \sum_{l=1}^{r} a_l(X,Y)\, X^{i_l/p}\, Y^{j_l/p}$$

donde $a_l(X,Y) \in R\setminus\{0\}$ $i_l, j_l, p \in Z_+$. Entonces ξ es entero sobre R y por tanto su polinomio mínimo tiene todos sus coeficientes en R. Suponiendo que ξ no sea una unidad en $k[\![X^{1/p}, Y^{1/p}]\!]$ este polinomio mínimo es un polinomio de Weierstrass. El problema del cálculo del grado de est polinomio mínimo estriba en lo siguiente. Se tiene que $k((X^{1/p}, Y^{1/p}))$ es una extensión normal de K con grupo de Galois isomorfo a $Z/Zp \times Z/Zp$. De hecho, la conjugación se obtiene

reemplazando $X^{1/p}$ por $\varepsilon X^{1/p}$ e $Y^{1/p}$ por $\delta Y^{1/p}$, donde ε y δ son raíces p-ésimas de la unidad. Bajo la conjugación de este grupo de Galois, pueden coincidir conjugados de ξ, luego no es evidente a priori cual va a ser el grado del polinomio mínimo de ξ sobre K. El problema se resuelve usando el álgebra lineal sobre $Z/Zp \times Z/Zp$, y el cálculo puede ser hecho con un ordenador, en el sentido de que es finito. El resultado principal de esta sección consiste en demostrar que el grado del polinomio mínimo de ξ sobre K es p^2/∇, donde ∇ es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 \cdots\cdots i_r \\ 0 & p & j_1 \cdots\cdots j_r \end{pmatrix}$$

La sección 2 de este capítulo está dedicada al estudio de las series de Puiseux casi-ordinarias. Estas series son justamente las raíces de polinomios de Weierstrass en Z con coeficientes en R tales que el discriminante con respecto a Z es de la forma $X^aY^bU(X,Y)$, donde $U(0,0) \neq 0$ y $a,b \in Z$. En esta sección damos un algoritmo finito para ver cuando una serie de Puiseux es casi-ordinaria. El algoritmo consiste en lo siguiente. Consideremos sobre Z^2 la relación de orden parcial $(a,b) \leq (c,d) \Longleftrightarrow a \leq c$ y $b \leq d$ y escribamos

$$\xi = \sum_{(i,j) \in \Delta(f)} a_{ij} X^{i/p} Y^{j/p}, \quad a_{ij} \in k \setminus \{0\}$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que ξ sea una serie casi-ordinaria son las siguientes:

1) $\Delta(f)$ admite un mínimo (i_1,j_1) para la relación de orden anterior.

2) Sea $\Delta_1'(f)$ el conjunto de los pares $(i,j) \in \Delta(f)$ tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 \\ 0 & p & j_1 \end{pmatrix}$$

es igual al de los de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 & i \\ 0 & p & j_1 & j \end{pmatrix}.$$

Entonces el conjunto $\Delta_1(f) = \Delta(f) \setminus \Delta_1'(f)$ debe tener un mínimo (i_2, j_2).

3) Sea $\Delta_2'(f)$ el conjunto de los elementos $(i,j) \in \Delta_1(f)$ tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 & i_2 \\ 0 & p & j_1 & j_2 \end{pmatrix}$$

es igual al de los de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 & i_2 & i \\ 0 & p & j_1 & j_2 & j \end{pmatrix}.$$

Entonces $\Delta_2(f) = \Delta_1(f) \setminus \Delta_1'(f)$ debe tener un mínimo (i_3, j_3). Siguiendo así sucesivamente, se debe tener un proceso finito, por razones obvias, y así se caracterizan las series casi-ordinarias.

La sección 3 trata de un problema que no detallamos ahora que es el siguiente. Suponiendo que un determinado polinomio de Weierstrass irreducible

$$f(X,Y,Z) = Z^n + a_1(X,Y)Z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(X,Y)Z + a_n(X,Y)$$

tiene una raiz que sea una serie de Puiseux, se plantea un algoritmo para calcular de forma efectiva esta raiz, de manera que en un número finito de pasos se obtengan los términos significativos, es decir, aquellos términos que vayan a determinar el grado del polinomio mínimo. Este cálculo se efectua en esencia operando con la proyección estereográfica del poliedro de Newton de $f(X,Y,Z)$ desde el punto $(0,0,n)$ y considerando lo que son llamados "términos clave" de esta proyección.

BIBLIOGRAFIA

[ACO] Abhyankar,S.S: "On the ramification of algebraic functions" Amer.J.Math. 77(1955) pp 575-592.

[AB 1] Abhyankar,S.S: "On the valuations centered in a local domain" Amer.J.Math. 78(1956) pp.321-348.

[AB 2] Abhyankar,S.S: "Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic p≠0". Ann.of Math. 63 (1956) pp. 491-526. Correcciones Ann. of Nath. 78(1963) pp 202-203.

[AB 3] Abhyankar,S.S: "On the ramification of algebraic functions Part II". Trans.Amer.Math.Soc.89(1958) pp 310-325.

[AB 4] Abhyankar,S.S: "Uniformization in p-cyclic extensions of algebraic surfaces over ground fields of characteristics p" Math.Ann.153(1964) pp 81-96.

[AB 5] Abhyankar,S.S: "Nonsplitting of valuations in extensions of to dimensional regular local domains".Math.Ann.170(1967) pp 87-144.

[CO] Connell,I: "A natural transformation of the Spec functor" Journal of Algebra, 1968.

[GEGA] Grothendieck,A: "Elements de Geometrie Algebr ique Chap IV Etude locale des schemas et des morphismes des schemas,Part I et II". Presses Univ. France 1966 y 1967.

[G-S] Greco,S-Salmon,P: "Topics in m-adic topologies". Ergeb.der Math.Band 58, Springer Verlag 1971.

[HRS] Hironaka,H: "Resolutions of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I and II" Ann.of Math. 79(1964) pp 109-326.

[J I] Jacobson,N: "Basic Algebra I". Freeman, San Francisco. 1974.

[K] Krull,W: "Algerneine Bewertungstheorie". J.Reine Angew.Math. 167(1932) pp 160-196.

[LA] Lipman,J: "Introduction to resolution of singularities".Summer Institute of A.M.S.Arcata 1974. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 29(1975). pp. 187-230.

[LCO] Lipman,J: "Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces". Thesis.Harvard Univ. 1965.

[LUCO] Luengo,I: "Sobre la estructura de las singularidades de las superficies algegroides sumergidas".Tesis.Univ. de Madrid.1979.

[NA] Nagata,M: "Local rings". Interscience,1962.

[SA] Sánchez Giralda,T: "Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas".Tesis.Univ. de Madrid.1976.

[SCH 1] Schilling,O.F.G: "The theory of valuations".Math.Survey nºIV.Amer.Math.Soc.1950.

[SCH 2] Schilling,O.F.G: "A generalization of local class field theory". Amer.J.Math. 60(1938).

[SCH 3] Schilling,O.F.G: "Arithmetic in fields of formal power series in several variables". AnnMath 38(1937) pp 551-576.

[VW] Van der Waerden,B.L: "Modern Algebra I,II".Frederic Ungar, New York,1953.

[Z-AB] Zariski,O-Abhyankar,S.S: "Splitting of valuations in extensions of local domains". Proc.Nat.Acad.Sci.USA 41(1955) pp 84-90.

[ZCB] Zariski,O: "Foundations of a general theory of birrational correspondences". Trans.Amer.Math.Soc. 53(1943) pp 490-542.

[ZCRS] Zariski,O: "The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions". Bull.Amer.Math.Soc. 45(1944) pp 683-691.

[ZRSS] Zariski,O: "The reduction of singularities of an algebraic surface".Ann.of Math. 40(1939) pp 639-689.

[ZRS3] Zariski,O: "Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties". Ann.of Math. 45(1944) pp 472-542.

[ZS I y II] Zariski,O-Samuel,P: "Commutative algebra".Vols I y II Van Nostrand, 1960.

[ZSCO-1] Zariski,O: "La resoluzione delle singolaritá delle superficie algebriche immerse" Nota I e II.Atti. Accad.Naz. Lincei Rend.A.Sci.Fis.Mat.Natur.Serie VIII,Vol 31,fasc 3-4 pp 97-102 e fasc.5 pp 177-180.

[ZSCO-2] Zariski,O: "Exceptional singularities of an algebroid surface and their reduction" Atti.Accad.Naz.Lincei Rend. A.Sci.Fis.Mat.Natur.Serie VIII,Vol 43,fasc 3-4 pp 135-146.

[ZTD] Zariski,O: "Foundations of a general theory of equisingularity on r-dimensinal algebroid end algebraic varities,of embedding dimension r+1".Amer.J.Math. 101(1979) pp 453-514.

[ZV] Zariski,O: "Applicazioni geometriche della teoria delle valutazioni". Rend.Mat. e Appl. Vol 13,fasc.1-2 Roma,1954 pp 1-38.

CAPITULO I

Sección 1 : "Algebraicidad"

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, X e Y indeterminadas formalmente independientes sobre k, $K = k((X,Y))$, $n,m \in Z_+$ fijos a lo largo de esta sección, $L = k((X^{1/n},Y^{1/m})) = K(X^{1/n},Y^{1/m})$. Se tiene que L es una extensión normal finita de K, de grado mn, con grupo de Galois isomorfo a $G_n \times G_m$, donde

$$G_n = \{\varepsilon_1=1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\} \qquad G_m = \{\delta_1=1,\delta_2,\ldots,\delta_m\}$$

son los grupos de raíces n-ésimas y m-ésimas de 1, respectivamente. Entonces

$$Gal(L/K) \simeq (Z/Z_n) \times (Z/Z_m)$$

Consideremos ahora el anillo $R = k[\![X^{1/n},Y^{1/m}]\!]$; cada elemento $f \in R$ se podrá escribir en la forma

$$f = \sum_{(i,j) \in Z_0^2} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}, \quad f_{ij} \in k$$

y si llamamos

$$\Delta(f) = \{(i,j) \in Z_0^2 / f_{ij} \neq 0\}$$

escribiremos de forma abreviada cuando convenga

$$f = \sum_{(i,j) \in \Delta(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}$$

También escribiremos f en lo sucesivo de la forma

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F_{ij}(X,Y) X^{i/n} Y^{j/m}, \quad F_{ij}(X,Y) \in k[\![X,Y]\!]$$

Analogamente al caso anterior, si llamamos

$$\Delta'(f) = \{(i,j)/0=i=n-1, 0=j=m-1, F_{ij}(X,Y) \neq 0\},$$

se podrá escribir abreviadamente

$$f = \sum_{(i,j) \in \Delta'(f)} F_{ij}(X,Y) X^{i/n} Y^{j/m}.$$

Nuestro primer objetivo en esta sección es el estudio de la extensión $K(f) \supset K$, en el caso en que $f \in R$ sea una no unidad verificando o no una de las dos condiciones que exponemos a continuación:

$$[A_1] \qquad \left\{\begin{array}{l} m.c.d(n,\{i/\exists j,\ (i,j) \in \Delta(f)\}) = 1 \\ m.c.d(m,\{j/\exists i,\ (i,j) \in \Delta(f)\}) = 1 \end{array}\right\}$$

$$[A_2] \qquad \left\{\begin{array}{l} m.c.d(n,\{i/\exists j,\ (i,j) \in \Delta'(f)\}) = 1 \\ m.c.d(m,\{j/\exists i,\ (i,j) \in \Delta'(f)\}) = 1 \end{array}\right\}$$

Sea, pues, en esta situación,

$$\Delta'(f) = \{(i_1,j_1),\ldots\ldots,(i_t,j_t)\}$$

y

$$f = \sum_{l=1}^{t} F_{i_l,j_l}(X,Y)X^{i_l/n}Y^{j_l/m},$$

$F_{i_l,j_l}(X,Y) \in k[[X,Y]] - \{0\}$

<u>LEMA 1.1</u>.- $K(f) = K(X^{i_1/n}Y^{j_1/m},\ldots,X^{i_t/n}Y^{j_t/m})$

<u>Demostración</u>.- Claramente $f \in K(X^{i_1/n}Y^{j_1/m},\ldots,X^{i_t/n}Y^{j_t/m})$, de donde si designamos provisionalmente a este cuerpo por K_f, se tiene que $K(f) \subset K_f$. Para demostrar la inclusión contraria es necesario observar, antes que nada, que el grado de $K(f)$ sobre K no depende de los coeficientes $F_{ij}(X,Y)$ en el sentido siguiente: si

$$F'_{i_1,j_1}(X,Y),\ldots\ldots,F'_{i_t,j_t}(X,Y)$$

son series de $k[[X,Y]] - \{0\}$ tales que $F'_{00}(X,Y)$ no es una unidad si $(0,0) \in \Delta'(f)$, entonces, poniendo

$$f' = \sum_{l=1}^{t} F'_{i_l,j_l}(X,y)X^{i_l/n}Y^{j_l/m},$$

se tiene que $[K(f'):K] = [K(f):K]$. Esta observación es fácil de comprobar sin más que tener en cuenta que $[K(f):K]$ es igual al número de conjugados distintos de f sobre K, número que no depende de los coeficientes F_{ij}, siempre que éstos sean no nulos y F_{00}

sea una no unidad. Como, de otro lado, un elemento primitivo de K_f sobre K se selecciona tomando una combinación lineal de $X^{i_1/n}Y^{j_1/m},\ldots\ldots,X^{i_t/n}Y^{j_t/m}$ con coeficientes en K que no satisfagan un número finito de ecuaciones lineales, se pueden elegir series $F'_{i_1,j_1},\ldots,F'_{i_t,j_t}$ como antes, satisfaciendo la condición adicional de que f' sea un elemento primitivo de K_f sobre K. Así

$$[K_f:K] = [K(f'):K] = [K(f):K]$$

y como $K(f)\subset K_f$, se tiene la igualdad y el lema.

<u>Nota 1.2</u>.- Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} n & 0 & i_1 & \ldots\ldots & i_t \\ 0 & m & j_1 & \ldots\ldots & j_t \end{pmatrix}$$

donde $m.c.d(n,i_1,\ldots,i_t) = 1 = m.c.d(m,j_1,\ldots,j_t)$.

Como la primera fila es unimodular, se puede reducir, por trasformaciones elementales, a la forma $(1,0,0,\ldots,0)$. Esto significa que la matriz M puede ser reducida a la forma

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ \alpha & b_o & b_1\ldots\ldots & b_t \end{pmatrix}$$

por transformaciones exclusivamente de columnas, es decir, existe una matriz Q_1 sobre Z, de dimensiones $(t+2)\times(t+2)$, invertible, tal que $MQ_1 = M_1$. De otro lado es claro que

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ 0 & b_o & b_1\ldots & b_t \end{pmatrix}$ y, por consiguiente, si designamos por d al máximo común divisor de los menores de orden 2 de M, es

$$d = m.c.d(b_o,b_1,\ldots,b_t).$$

Como la fila $(b_o,b_1,\ldots,b_t)$ puede ser reducida a $(d,0,\ldots,0)$ por transformaciones elementales, existe una matriz Q_2 sobre Z, invertible, de dimensiones $(t+1)\times(t+1)$ tal que

$$(b_o,b_1,\ldots,b_t)Q_2 = (d,0,\ldots,0)$$

Así, poniendo

$$Q = Q_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right) \text{ es}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} M\, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overbrace{0 \ \ldots\ldots 0}^{t)} \\ 0 & d & 0 \ \ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, por el tipo de transformaciones elementales empleado para pasar de M a M_1, la fila de abajo de M_1 ha de ser unimodular, es decir, que

$$1 = m.c.d(\alpha,b_o,b_1,\ldots,b_t)$$

con lo que

$$1 = m.c.d(\alpha,d)$$

<u>LEMA 1.3</u>.- Sean $u = X^{1/n}Y^{\alpha/m}$, $v = Y^{d/m}$ y supongamos que

$$m.c.d(i_1,\ldots,i_t) = 1 = m.c.d(j_1,\ldots,j_t)$$

se verifica entonces que

$$K(u,v) = K(X^{i_1/n}Y^{j_1/m},\ldots\ldots,X^{i_t/n}Y^{j_t/m})$$

<u>Demostración</u>.- Llamemos K_f, como en el lema 1.1, al cuerpo de la derecha de la anterior igualdad, y sean

$$Q = (a_{i,j})_{\substack{i=1,2,\ldots,t+2 \\ j=1,2,\ldots,t+2}}$$

$$Q^{-1} = (b_{i,j})_{\substack{i=1,2,\ldots,t+2 \\ j=1,2,\ldots,t+2}}$$

donde Q es la misma matriz que en la nota 2.1 y Q^{-1} su inversa; sea asimismo

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots.0 \\ 0 & d & 0\ldots.0 \end{pmatrix} .$$

Se tiene que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} M_2 Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots\ldots 0 \\ \alpha & d & 0\ldots\ldots 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

y de esa igualdad se deduce que

$$(i_1,j_1) = b_{13}(1,\alpha) + b_{23}(0,d)$$
$$\vdots$$
$$(i_t,j_t) = b_{1,t+2}(1,\alpha) + b_{2,t+2}(0,d)$$

lo que nos dice que

$$X^{i_1/n}Y^{j_1/m} = u^{b_{13}}v^{b_{23}} \in K(u,v)$$
$$\vdots$$
$$X^{i_t/n}Y^{j_t/m} = u^{b_{1,t+2}}v^{b_{2,t+2}} \in K(u,v)$$

y así $K_f \subset K(u,v)$

Recíprocamente, como

$$M_2 = \begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \dots i_t \\ 0 & m & j_1 \dots j_t \end{pmatrix} Q$$

es

$$(1,\alpha) = a_{11}(n,0)+a_{21}(0,m)+a_{31}(i_1,j_1)+\dots+a_{t+2,1}(i_t,j_t)$$
$$(0,d) = a_{12}(n,0)+a_{22}(0,m)+a_{32}(i_1,j_1)+\dots+a_{t+2,2}(i_t,j_t)$$

y así

$$X^{1/n}Y^{\alpha/m} = X^{a_{11}}Y^{a_{21}}(X^{i_1/n}Y^{j_1/m})^{a_{31}}\dots(X^{i_t/n}Y^{j_t/m})^{a_{t+2,1}}$$
$$Y^{d/m} = X^{a_{12}}Y^{a_{22}}(X^{i_1/n}Y^{j_1/m})^{a_{32}}\dots(X^{i_t/n}Y^{j_t/m})^{a_{t+2,2}}$$

y ambos segundos miembros pertenecen a K_f lo que prueba el lema.

<u>TEOREMA 1.4</u>.- Sea $f \in k[\![X^{1/n},Y^{1/m}]\!]$ una no unidad, verificando la condición $[A_2]$,

$$f = \sum_{l=1}^{t} F_{i_l,j_l}(X,Y)X^{i_l/n}Y^{j_l/m}$$

donde $F_{i_l,j_l}(X,Y) \in k[\![X,Y]\!] - \{0\}$ y

$$\Delta'(f) = \{(i_1,j_1),\dots(i_t,j_t)\} \subset \{0,1,\dots,n-1\}\times\{0,1,\dots,m-1\}.$$

Sea $d > 0$ el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \dots\dots i_t \\ 0 & m & j_1 \dots\dots j_t \end{pmatrix}$$

Entonces $d|n$, $d|m$ y

$$\left[k((X,Y))(f):k((X,Y))\right] = \frac{n\ m}{d}$$

<u>Demostración</u>.- De acuerdo con los lemas y nota anteriores basta probar que $\left[K(u,v):K\right] = \frac{n\ m}{d}$. Pero como

$$K \subset K(v) \subset K(u,v),$$

basta calcular $\left[K(v):K\right]$, $\left[K(u,v):K(v)\right]$

Observemos en primer lugar que $d|n$ y $d|m$. En efecto, como

$$m.c.d(n,i_1,\ldots,i_t) = 1 = m.c.d(m,j_1,\ldots,j_t)$$

existen enteros $\beta,\beta_1,\ldots,\beta_t$, $\gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_t$ tales que

$$1 = \beta n+\beta_1 i_1+\ldots+\beta_t i_t = \gamma m+\gamma_1 j_1+\ldots+\gamma_t j_t$$

Así

$$m = \beta nm+\beta_1 i_1 m+\ldots+\beta_t i_t m = \beta\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} -\beta_1\begin{vmatrix} 0 & i_1 \\ m & j_1 \end{vmatrix} -\ldots\ldots-\beta_t\begin{vmatrix} 0 & i_t \\ m & j_t \end{vmatrix}$$

$$n = \gamma mn+\gamma_1 j_1 n+\ldots+\gamma_t j_t n = \gamma\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} +\gamma_1\begin{vmatrix} n & i_1 \\ 0 & j_1 \end{vmatrix} +\ldots\ldots+\gamma_t\begin{vmatrix} n & i_t \\ 0 & j_t \end{vmatrix}$$

de donde está claro que $d|n$ y $d|m$

La primera consecuencia obvia que se deduce de este hecho es que $\left[K(v):K\right] = \frac{m}{d}$; queda por ver que $\left[K(u,v):K(v)\right] = n$ y para probar esto último, procedemos de la siguiente forma. Se tiene un diagrama de inclusiones de cuerpos

$$\begin{array}{ccc} k((Y^{d/m}))((X)) & \subset & k((Y^{d/m}))((X))(X^{1/n}Y^{\alpha/m}) \\ \cup & & \cup \\ k((Y^{d/m},X))=K(v) & \subset & k((Y^{d/m},X))(X^{1/n}Y^{\alpha/m}) \end{array}$$

donde $X^{1/n}Y^{\alpha/m}$ verifica la relación

$$U^n - X(Y^{d/m})^{\alpha n/d} = 0$$

con coeficientes en $k((Y^{d/m}))((X))$. Considerando a este cuerpo como el de fracciones de $k((Y^{d/m}))[[X]]$ (que es un D.F.U tomando $k((Y^{d/m}$ como cuerpo base), la ecuación anterior es irreducible en $k((Y^{d/m}))((X))[U]$ por el criterio de Eisenstein. Como

$U^n - X(Y^{d/m})^{\alpha n/d} \in K(v)[U] \subset k((Y^{d/m}))((X))[U]$, ese polinomio será, a fortiori, irreducible sobre $K(v)[U]$ y así es el polinomio mínimo de $X^{1/n}Y^{\alpha/m}$ sobre $K(v)$. Esto prueba que $[K(u,v):K(v)] = n$ y el teorema.

Corolario 1.5.- En la situación del teorema 1.4, las condiciones siguientes son equivalentes

1.5.1.- f es un elemento primitivo de L/K

1.5.2.- $d = 1$

1.5.3.- $\{(i_1+Zn, j_1+Zm),\ldots,(i_t+Zn, j_t+Zm)\}$ generan $(Z/Zn)x(Z/Zm)$ como Z-módulo.

Demostración.- El teorema 1.4 implica de forma inmediata la equivalencia de 1.5.1 y 1.5.2 y la equivalencia de 1.5.2 y 1.5.3 es trivial.

TEOREMA 1.6.- Sea $f \in k[\![X^{1/n}, Y^{1/m}]\!]$ una no unidad,

$$f = \sum_{l=1}^{t} F_{i_l,j_l}(X,Y)X^{i_l/n}Y^{j_l/m},$$

donde $F_{i_l,j_l}(X,Y) \in k[\![X,Y]\!] - \{0\}$ y

$$\Delta'(f) = \{(i_1,j_1),\ldots(i_t,j_t)\} \subset \{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1,\ldots,m-1\}$$

Sea $d > 0$ el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \ldots\ldots i_t \\ 0 & m & j_1 \ldots\ldots j_t \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[k((X,Y))(f):k((X,Y))] = \frac{n\ m}{d}$$

Demostración.- Sean

$d_1 = m.c.d(n, i_1,\ldots,i_t)$, $d_2 = m.c.d(m, j_1,\ldots,j_t)$, $n' = n/d_1, m' = m/d_2$

$i_l' = i_l/d_1$, $1 = l = t$, $j_l' = j_l/d_2$

Podemos escribir

$$f = \sum_{l=1}^{t} F_{i'_l, j'_l}(X,Y) X^{i'_l/n'} Y^{j'_l/m'}$$

donde, en esta forma, f verifica la condición $[A_2]$. Si d' es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n' & o & i'_1 \ldots\ldots i'_t \\ 0 & m' & j'_1 \ldots\ldots j'_t \end{pmatrix}$$

por el teorema 1.4 se tiene que $\left[k((X,Y))(f):k((X,Y))\right] = n'm'/d'$.

Pero, considerando la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \ldots\ldots i_t \\ 0 & m & j_1 \ldots\ldots j_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n'd_1 & 0 & i'_1 d_1 \ldots\ldots i'_t d_1 \\ 0 & m'd_2 & j'_1 d_2 \ldots\ldots j'_t d_2 \end{pmatrix}$$

Se tiene, claramente, que $d = d_1 d_2 d'$. Así

$$\left[k((X,Y))(f):k((X,Y))\right] = \frac{n'm'}{d'} = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{m}{d_2} \cdot \frac{1}{d'} = \frac{nm}{d},$$

como queríamos probar.

Sección 2 : "Series de Puiseux casi-ordinarias"

En esta sección, tras definir una serie casi-ordinaria, exponemos algunos criterios para su caracterización; en particular estudiamos un proces constructivo, que llamamos C.O., base de esta parte.

A lo largo de esta sección, usaremos las siguientes notaciones: Para cada par de enteros $n,m > 0$ se considerará el anillo $R_{n,m} = k[[X^{1/n},Y^{1/m}]]$, y se designará por $L_{n,m}$ a su cuerpo de fracciones. Asimismo se pondrá $R = R_{1,1} = k[[X,Y]]$ y $K = L_{1,1} = k((X,Y))$. Se tiene que $L_{n,m}$ es una extensión galoisiana de K de grado nm. Cada serie $f \in R_{n,m}$ será escrita siempre en una de las formas:

$$(1) \qquad f = \sum_{(i,j) \in \Delta(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}, \quad f_{ij} \in k - \{0\}$$

ó

$$(2) \qquad f = \sum_{(i,j) \in \Delta'(f)} F_{ij}(X,Y) X^{i/n} Y^{j/m}, \quad F_{ij}(X,Y) \in R - \{0\}$$

En estas condiciones se designará por $E(f)$ al subconjunto de $\Delta(f)$ dado por

$$E(f) = \{(i,j) \in \Delta(f) / \ i/n, j/m \in Z_o\}$$

Consideraremos también sobre Q_o^2 la relación de orden parcial $\leq$ dada por

$$(\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \ \text{ y } \ \beta_1 \leq \beta_2$$

Definición 2.1.- Sea $f \in R_{n,m}$ una no unidad. Se dirá que f es casi-ordinaria si, para todo $\sigma \in Gal(L_{n,m}/K)$ tal que $\sigma(f) \neq f$ se verifica que $\sigma(f) - f = M_\sigma u_\sigma$, donde $M_\sigma \in R_{n,m}$ es un monomio y $u_\sigma \in R_{n,m}$ es una unidad. Los monomios distintos que hay en el conjunto $\{M_\sigma / \ \sigma \in Gal(L_{n,m}/K)\}$ se llaman monomios característicos de f.

Observemos que, si f es casi-ordinaria, también lo es

$$f' = f - \sum_{(i,j)\ \varepsilon\ E(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}$$

y recíprocamente. Así pues, para estudiar las series de Puiseux casi-ordinarias, se supondrá, en general, que $E(f) = \emptyset$.

Nota 2.2.- Sea $f \varepsilon R_{n,m}$ una no unidad distinta de cero. La condición necesaria y suficiente para que f sea casi-ordinaria es que, para todo $\sigma,\tau \varepsilon Gal(L_{n,m}/K)$ tales que $\sigma(f) \neq \tau(f)$ se verifique que $\sigma(f) - \tau(f) = M_{(\sigma,\tau)} u_{(\sigma,\tau)}$, donde $M_{(\sigma,\tau)} \varepsilon R_{n,m}$ es un monomio y $u_{(\sigma,\tau)} \varepsilon R_{n,m}$ es una unidad. En efecto, la suficiencia de esta condición es o bvia; veamos que es necesaria. Sean $\sigma,\tau \varepsilon Gal(L_{n,m}/K)$ tales que $\sigma(f) \neq \tau(f)$. Se tiene que $\tau^{-1}\sigma(f) \neq f$ y así

$$\tau^{-1}\sigma(f) - f = M_{\tau^{-1}\sigma} u_{\tau^{-1}\sigma}$$

Por tanto,

$$\sigma(f) - \tau(f) = \tau\ \tau^{-1}\sigma(f) = \tau(M_{\tau^{-1}\sigma})\tau(u_{\tau^{-1}\sigma}) = M_{\tau^{-1}\sigma}\ \xi\ (u_{\tau^{-1}\sigma})$$

donde ξ es una cierta raiz (nm)-ésima de 1. Esto prueba nuestro aserto.

LEMA 2.3.- Sea $f \varepsilon R_{n,m}$ una no unidad distinta de cero y casi-ordinaria. Sean $\{M_1 = X^{\alpha_1} Y^{\beta_1}, \ldots, M_r = X^{\alpha_r} Y^{\beta_r}\}$ los monomios característicos de f. Se verifica

2.3.1.- $(\alpha_l,\beta_l) \not\varepsilon Z_o^2$, $l = 1,\ldots,r$

2.3.2.- El conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_r,\beta_r)\}$ está totalmente ordenado para $\leq$.

2.3.3.- $K(f) = K(M_1,\ldots,M_r)$

Demostración.-

2.3.1 Es trivial

2.3.2 Para $r = 1$ es inmediato; supongamos, pues, que $r > 1$. En este caso, y previa renumeración, bastará probar que $(\alpha_1,\beta_1) < (\alpha_2,\beta_2)$ ó

$(\alpha_2,\beta_2) < (\alpha_1,\beta_1)$. Sean $\sigma,\tau \in Gal(L_{n,m}/K)$ tales que $\sigma(f) - f = M_1u_1$ $\tau(f) - f = M_2u_2$ donde $u_1,u_2 \in R_{n,m}$ son unidades. Como $M_1 \neq M_2$, no puede ser $\sigma(f) = \tau(f)$. Por tanto, $\sigma(f) - \tau(f)$ debe ser igual a un monomio por una unidad. Esto prueba que $(\alpha_1,\beta_1) < (\alpha_2,\beta_2)$ ó $(\alpha_2,\beta_2) < (\alpha_1,\beta_1)$.

2.3.3.- Sea H el subgrupo de $Gal(L_{n,m}/K)$ formado por los automorfismos σ que dejan invariante f, es decir, $H = Gal(L_{n,m}/K(f))$. En estas circunstancias, $K(f)$ es el cuerpo fijo de H y, por la correspondencia de Galois bastará probar que un automorfismo σ deja invariante a f si y sólo si deja invariante a $\{M_1,\ldots,M_r\}$. Es claro que si σ deja invariante a f, entonces deja invariante a $\{M_1,\ldots,M_r\}$. Recíprocamente si σ deja invariante a $\{M_1,\ldots,M_r\}$ entonces $\sigma(f) = f$ pues si $\sigma(f) \neq f$ sería $\sigma(f) - f = M_1u_1$ para algún monomio $M_1 \in R_{n,m}$ y alguna unidad $u_1 \in R_{n,m}$. Esto contradice la hipótesis de que todos los $\{M_1,\ldots,M_r\}$ quedan invariantes por σ.

Definición 2.4.- Sea $f \in R_{n,m}$ una no unidad distinta de cero y casi-ordinaria. Supongamos que $f \notin k[[X,Y]]$ y sean $X^{\alpha_1}Y^{\beta_1},\ldots,$ $X^{\alpha_r}Y^{\beta_r}$ los monomios característicos de f. A los pares $\{(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_r,\beta_r)\}$ de Q_oXQ_o se les llama pares característicos de f.

LEMA 2.5.- Sean $X^{\alpha_1}Y^{\beta_1}$, $X^{\alpha_2}Y^{\beta_2} \in R_{n,m}$ dos monomios tales que los pares (α_1,β_1), (α_2,β_2) no pertenecen a $Z\times Z$. Existe entonces un $\tau \in Gal(L_{n,m}/K)$ tal que $\tau(X^{1}Y^{1}) \neq X^{1}Y^{1}$ y $\tau(X^{2}Y^{2}) \neq X^{2}Y^{2}$.

Demostración.- Sea $H_i = Gal(L_{n,m}/K(X^{\alpha_i}Y^{\beta_i}))$, $i = 1,2$ y supongamos que todo automorfismo que varíe a uno de los dos monomios fija al otro. Si $G = Gal(L_{n,m}/K)$, se verifica entonces

$$G \setminus H_1 \subset H_2$$

Como $(\alpha_1,\beta_1) \in Z\times Z$, $G \setminus H_1 \neq o$. Sea $\tau \in G \setminus H_1$ y sea $h \in H_1$; entonces $\tau h \in G \setminus H_1$ luego $h = \tau^{-1}\tau h \in H_2$. Así $H_2 = G$, lo que contradice la hipótesis de ser $(\alpha_2, \beta_2) \notin Z\times Z$. Esto prueba el lema.

<u>Descripción del proceso C.O.</u> .- Sea

$$f = \sum_{(i,j) \in \Delta(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}, \quad f_{ij} \in k - \{0\}$$

y sea

$$\Delta_o'(f) = \{(i,j) \in \Delta(f) / (i/n, j/m) \in Z_o \times Z_o\}$$

y sea $\Delta_o(f) = \Delta(f) \setminus \Delta_o'(f)$. Si $\Delta_o(f) \neq \emptyset$ se pondrá

$$f_o = \sum_{(i,j) \in \Delta_o(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}$$

y si $\Delta_o(f) = \emptyset$, se pondrá $f_o = 0$.

Entonces, se dirá que "f admite el proceso C.O." si, bien $f_o = 0$, bien se verifica

1) El conjunto

$$\{(i/n, j/m) / (i,j) \in \Delta_o(f)\}$$

posee un mínimo para el orden $\leq$. Designemos por $(i_1,j_1) \in Z_o \times Z_o$ al par tal que (i_1,j_1) sea el mínimo del conjunto anterior. Sea $\Delta_1'(f)$ el conjunto de los elementos $(i,j) \in \Delta_o(f)$ tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \\ 0 & m & j_1 \end{pmatrix}$$

coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 & i \\ 0 & m & j_1 & j \end{pmatrix},$$

pongamos $\Delta_1(f) = \Delta_o(f) \setminus \Delta_1'(f)$ y sea $f_1 = \sum_{(i,j) \in \Delta_1(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}$

si $\Delta_1'(f) \neq \emptyset$ ó $f_1 = 0$ si $\Delta_1'(f) = \emptyset$.

2) Supongamos construidos unos pares $\{(i_1,j_1),\ldots,(i_s,j_s)\}$, unas series $f_1,\ldots,f_s \in R_{n,m}$ y unos subconjuntos $\Delta_1(f),\ldots,\Delta_s(f)$ de $\Delta(f)$ de tal manera que se tenga

2-a) Para cada $l = 1,\ldots,s$, el conjunto

$$\{(i/n,j/m)/(i,j) \in \Delta_{l-1}(f)\}$$

admite un mínimo que es $(i_l/n,j_l/m)$.

2-b) Para cada $l = 1,\ldots,s$, $\Delta_l(f) = \Delta_{l-1}(f) \setminus \Delta_l'(f)$, donde $\Delta_l'(f)$ es el conjunto de los pares $(i,j) \in \Delta_{l-1}(f)$ tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \ldots\ldots i_l \\ 0 & m & j_1 \ldots\ldots j_l \end{pmatrix}$$

coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \ldots\ldots i_l & i \\ 0 & m & j_1 \ldots\ldots j_l & j \end{pmatrix}$$

2-c) $f_l = \overline{\sum_{(i,j)\in\Delta_l(f)} f_{ij} X^{i/n} Y^{j/m}}$ si $\Delta_l(f) \neq \emptyset$ y $f_l = 0$ si $\Delta_l(f) = \emptyset$.

2-d) $f_1,\ldots,f_{s-1}$ son no nulas.

Entonces, o bien $f_s = 0$, o bien el conjunto

$$\{(i/n,j/m)/(i,j) \in \Delta_s(f)\}$$

posee un mínimo, en cuyo caso se puede construir $(i_{s+1},j_{s+1}),\Delta_{s+1}(f)$, f_{s+1}, verificando desde 2-a) hasta 2-d) y continuar el proceso. Observemos que el proceso C.O. es finito pues el número de divisores de nm lo es.

<u>PROPOSICION 2.6</u>.- Sea $f \in R_{n,m}$ una serie de Puiseux, no unidad.

Entonces f es casi-ordinaria si y sólo si admite el proceso C.O.. Además, si $\{(i_1,j_1),\ldots,(i_s,j_s)\}$ son los pares de $Z\times Z$ que aparecen en el proceso C.O.(siendo f casi-ordinaria), entonces $\{(i_1/n,j_1/m),\ldots,(i_s/n,j_s/m)\}$ son los pares característicos de f.

<u>Demostración</u>.- Supongamos que f es casi-ordinaria, supongamos construida f_o y supongamos que $f_o \neq 0$; está claro que entonces f_o es casi-ordinaria. Sea $\gamma_o = \nu(f_o)$, el orden usual de la serie f_o y sea $(i_1,j_1) \in \Delta_o(f)$ tal que $i_1/n + j_1/m = \gamma_o$. Sea $(i,j) \in \Delta_o(f)$ arbitrario; por el lema 2.5, existe $\tau \in Gal(L_{n,m}/K)$ tal que $\tau(X^{i_1/n}Y^{j_1/m}) \neq X^{i_1/n}Y^{j_1/m}$, $\tau(X^{i/n}Y^{j/m}) \neq X^{i/n}Y^{j/m}$. Como f_o es casi-ordinaria e $i/n + j/m = i_1/n + j_1/m$, debe ser $(i_1/n,j_1/m) = (i/n,j/m)$, de donde se verifica que el conjunto

$$\{(i/n,j/m)/(i,j) \in \Delta_o(f)\}$$

tiene mínimo. Construyamos el conjunto $\Delta_1(f)$ y la serie f_1 como en 1) de la descripción del proceso C.O.

Supongamos construidos unos pares $\{(i_1,j_1),\ldots,(i_s,j_s)\}$ unas series $f_1,\ldots,f_s \in R_{n,m}$ y unos subconjuntos $\Delta_1(f),\ldots,\Delta_s(f)$ de $\Delta(f)$ tales que se verifican (2-a)-(2-d). Sea $H_l = Gal(L_{n,m}/K\{X^{i_u/n}Y^{j_u/m}\}_{u=1,\ldots l})$, $l = 1,\ldots,s$ y supongamos que $f_s \neq 0$. Vamos a probar, en primer lugar, que

$$K(\{X^{i_u/n}Y^{j_u/m}\}_{u=1,\ldots,s}) = K(\{X^{i/n}Y^{j/m}\}_{(i,j) \in \Delta_o(f)\setminus\Delta_s(f)})$$

Desde luego, el cuerpo de la izquierda está contenido en el cuerpo de la derecha; veamos el recíproco. Sea $(i,j) \in \Delta_o(f)\setminus\Delta_s(f)$; existe un l, $1 \leq l \leq s$ tal que el máximo común divisor,d, de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \dots i_l \\ 0 & m & j_1 \dots j_l \end{pmatrix}$$

coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & i_1 \dots i_l & i \\ 0 & m & j_1 \dots j_l & j \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$g_l = \sum_{u=1}^{l} X^{i_u/n} Y^{j_u/m}, \qquad g_l' = g_l + X^{i/n} Y^{j/m}$$

se tiene, por el lema 1.1,

$$K(g_l) = K(X^{i_1/n} Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_l/n} Y^{j_l/m}), \; K(g_l') = K(g_l)(X^{i/n} Y^{j/m}),$$

pero por el teorema 1.6,

$$\left[K(g_l):K\right] = \frac{nm}{d} = \left[K(g_l'):K\right]$$

de donde $X^{i/n} Y^{j/m} \in K(g_l)$, lo que prueba nuestro aserto.

Vamos a probar ahora que, dados (i,j), $(i',j') \in \Delta_s(f)$, existe $\tau \in H_s$ tal que

$$\tau(X^{i/n} Y^{j/m}) \neq X^{i/n} Y^{j/m}, \quad \tau(X^{i'/n} Y^{j'/m}) \neq X^{i'/n} Y^{j'/m}.$$

En efecto, al ser $\Delta_s(f) \neq \emptyset$, no puede ser $H_s = \{1\}$; por tanto debe existir un automorfismo en H_s que mueva a $X^{i/n} Y^{j/m}$. Supongamos que todo automorfismo que mueva a $X^{i/n} Y^{j/m}$ deja igual a $X^{i'/n} Y^{j'/m}$. Entonces, poniendo para cada $l = 1,\dots,s$,

$$K_l = K(X^{i_1/n} Y^{j_1/m}, \dots, X^{i_l/n} Y^{j_l/m}) = K(\{X^{i/n} Y^{j/m}\}_{(i,j) \in \Delta_o(f) \setminus \Delta_l(f)})$$

se verifica que

$$\mathrm{Gal}(L_{n,m}/K_s(X^{i'/n} Y^{j'/m})) \supset \mathrm{Gal}(L_{n,m}/K_s) \setminus \mathrm{Gal}(L_{n,m}/K_s(X^{i/n} Y^{j/m}))$$

y este último no es vacio. Por un razonamiento similar al del lema2.5 se probaría en este caso que

$$\mathrm{Gal}(L_{n,m}/K_s) = \mathrm{Gal}(L_{n,m}/K_s(X^{i'/n} Y^{j'/m}))$$

lo que no es posible. Luego existe el automorfismo τ que postulábamos antes.

Sea $\gamma_s = \nu(f_s)$ el orden usual de la serie f_o y sea $(i_{s+1}, j_{s+1}) \in \Delta_s(f)$ tal que $i_{s+1}/n + j_{s+1}/m = \gamma_s$. Sea ahora $(i,j) \in \Delta_s(f)$ arbitrario; por el razonamiento anterior existe $\tau \in H_s$ tal que $\tau(X^{i_{s+1}/n} Y^{j_{s+1}/m}) \neq X^{i_{s+1}/n} Y^{j_{s+1}/m}$ y tal que $\tau(X^{i/n} Y^{j/m}) \neq X^{i/n} Y^{j/m}$. Como f_o es casi-ordinaria, $\tau \in H_s$ e $i/n + j/m = i_{s+1}/n + j_{s+1}/m$, debe ser $(i_{s+1}, j_{s+1}) = (i/n, j/m)$, de donde se deduce que el conjunto

$$\{(i/n, j/m)/(i,j) \in \Delta_s(f)\}$$

posee un mínimo y el proceso C.O. puede continuar.

Veamos ahora el recíproco; supongamos entonces que f admite el proceso C.O. y veamos que ha de ser casi-ordinaria. Aplicando a f el proceso susodicho, sea r el entero tal que $\Delta_r(f) = \emptyset$ y sean $(i_1/n, j_1/m), \ldots, (i_r/n, j_r/m)$ los mínimos de los conjuntos correspondientes. Usando las notaciones anteriores se tiene que

$$H_o = Gal(L_{n,m}/K) \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \quad H_{r-1} \supset H_r = \{1\}$$

Sea $\tau \in H_o \setminus H_r$; existe l, $0 \leq l \leq r-1$ tal que $\tau \in H_l \setminus H_{l+1}$. Si $l = 0$, está claro que $\tau(f) - f = X^{i_1/n} Y^{j_1/m} u_1(X^{1/n}, Y^{1/m})$ con $u_1(0,0) \neq 0$. Si $l > 0$, entonces $\tau(f) - f = X^{i_l/n} Y^{j_l/m} u_{l+1}(X^{1/n}, Y^{1/m})$ con $u_{l+1}(0,0) \neq 0$. Esto prueba la proposición pues la última afirmación es consecuencia inmediata de toda la demostración.

<u>Nota 2.7</u>.- Conviene hacer notar que, en la demostración del teorema anterior, las $\{f_1, \ldots, f_{r-1}\}$ no son necesariamente casi-ordinarias. Por ejemplo, si

$$f = X^{3/4} Y^{1/4} + XY^{3/4} + X^{5/4} Y^{6/4} + X^{6/4} Y^{5/4}$$

se tiene

a) $(i_1,j_1) = (3,1)$, $\Delta_1'(f) = \{(3,1)\}$, $f_1 = XY^{3/4}+X^{5/4}Y^{6/4}+X^{6/4}Y^{5/4}$

b) $(i_2,j_2) = (4,3)$, $\Delta_2'(f) = \{(4,3),(5,6),(6,5)\}$, $f_2 = 0$,

luego f es casi-ordinaria. En cambio, f_1 no lo es porque, tomando el automorfismo τ correspondiente a $(\sqrt{-1},1)$, se tiene que

$$\tau(f_1) - f_1 = (XY^{3/4}+iX^{5/4}Y^{6/4}+X^{6/4}Y^{5/4})-(XY^{3/4}+X^{5/4}Y^{6/4}+X^{6/4}Y^{5/4})=$$

$$(i-1)X^{5/4}Y^{6/4} - 2X^{6/4}Y^{5/4} = X^{5/4}Y^{5/4}\left[(i-1)Y^{1/4}-2X^{1/4}\right]$$

donde en estas expresiones $i = \sqrt{-1}$.

Sección 3 : "Cálculo de raíces"

Sea

$$\zeta = \sum_{(i,j)\ \varepsilon\ \Delta(\zeta)} \alpha_{ij} X^{i/m} Y^{j/m} \quad , \alpha_{ij}\ \varepsilon\ k \setminus \{0\}$$

una serie de Puiseux no necesariamente casi-ordinaria y sea

$$(1) \qquad f = Z^n + a_1(X,Y)Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(X,Y)Z + a_n(X,Y)$$

su polinomio mínimo sobre $K = k((X,Y))$. Observemos que, por el cambio de variable

$$Z = Z' - 1/n\ a_1(X,Y),$$

se puede anular el término en Z'^{n-1}, con lo cual podemos suponer, desde ahora, que

$$(2) \qquad f = Z^n + a_2(X,Y)Z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(X,Y)Z + a_n(X,Y)$$

Notemos también que, desde el punto de vista de las raíces de f (es decir, ζ y todos sus conjugados) ese cambio se traduce en sustituir ζ por

$$\zeta' = \zeta - \sum_{\substack{(i,j)\ \varepsilon\ \Delta(\zeta) \\ (i/m,j/m)\ \varepsilon\ Z\times Z}} \alpha_{ij} X^{i/m} Y^{j/m}$$

Es decir, usando el polinomio (2) y siendo ζ como en (1) una raiz de ella, se verifica que ζ no tiene parte entera(es decir, monomios cuyos exponentes son enteros)

Nota 3.1.- Vamos a ver que los exponentes de los monomios que intervienen en la expresión (1) de ζ se pueden escribir todos con denominador igual a n. En efecto, siempre podemos escribir a ζ en la forma

$$\zeta = \sum_{l=1}^{t} A_{i_l,j_l}(X,Y) X^{i_l/p} Y^{j_l/q},$$

donde

$$\Delta'(\zeta) = \{(i_1,j_1),\ldots,(i_t,j_t)\}$$

y donde

$$m.c.d(p,i_1,\ldots,i_t) = 1 = m.c.d(q,j_1,\ldots,j_t)$$

Sea d el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1\cdots\cdots i_t \\ 0 & q & j_1\cdots\cdots j_t \end{pmatrix};$$

el teorema 1.4 nos dice entonces que $d|p$, $d|q$ y $n = pq/d$. Escribiendo

$$i_1/p = (i_1 q/d)/(pq/d)$$

$$j_1/q = (j_1 p/d)/(pq/d)$$

está claro que se puede escribir a ζ como una serie en $X^{1/n}, Y^{1/n}$, donde $n = [K(\zeta):K]$.

El objetivo de esta sección es diseñar un algoritmo que permita calcular la serie (1), conocido su polinomio mínimo(2) sobre K. Pese a que las singularidades con desarrollo de Puiseux (en particular las casi-ordinarias) ocupan un puesto relevante en la teoría general de singularidades de superficies, un tal algoritmo no se tiene a mano. El que nosotros vamos a dar aquí es de gran sencillez de aplicación, aunque su justificación teórica lo es algo menos. Supondremos, en todo lo que viene a continuación, que el polinomio (2) es un polinomio en tres variables; si sólo dependiera de dos, Z y otra, todo lo que sigue resultaría un caso particular de la teoría de curvas planas.

<u>Nota 3.2</u>.- Se supondrá, en todo lo que viene a continuación, que ζ es una no unidad. Sea

$$\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$$

el término de ζ de menor grado y, dentro de ellos, de menor exponente de la X. Esto significa que, dibujando en el plano el diagrama de Newton $D(\zeta)$ de ζ sin tener en cuenta los denominadores

(i.e., el monómio $X^{i/n}Y^{j/n}$ se representa por el punto (i,j))

se verifica que:

i) (u_1,v_1) es el punto situado más a la izquierda de todos los que pertenecen a $D(\zeta)$ que están sobre la paralela trazada por él a la recta $y + x = 0$.

ii) Ninguna paralela a $x + y = 0$ que diste del orígen menos que la trazada por (u_1,v_1) contiene puntos del diagrama $D(\zeta)$.

Observemos, en primer lugar, que (u_1,v_1) aparece en el diagrama de Newton $D(f)$ de f. La razón es obvia: al formar el producto de todos los conjugados de ζ (que es igual a $(-1)^n a_n$), aparece en él un término

$$\xi\alpha^n_{u_1,v_1} X^{u_1}Y^{v_1}$$

donde ξ es una raiz de la unidad, que no puede cancelar por razones de mínimo. De otro lado ese es el punto de menor grado y más a la izquierda entre los de menor grado, del nivel cero de $D(f)$.

La recta ρ que une el punto $(0,0,n)$ con el punto $(u_1,v_1,0)$ tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = u_1\lambda \quad y = v_1\lambda \quad z = n-n\lambda.$$

Consideremos ahora el nivel l de $D(f)$, es decir, los puntos de $D(f)$ correspondientes al término

$$a_{n-l}(X,Y)Z^l \quad , \quad 0 \leq l < n$$

Si $\{\zeta_1 = \zeta,\zeta_2,\ldots,\zeta_n\}$ son los conjugados de ζ sobre K, por las relaciones de Cardano, es

$$a_{n-l}(X,Y) = (-1)^{n-l}\sum_{(p_1,\ldots,p_{n-l})\in C_{n,n-l}} \zeta_{p_1}\ldots\zeta_{p_{n-l}}$$

donde $C_{n,n-l}$ representa al conjunto de las combinaciones de n elementos tomados de $n-l$ en $n-l$. Si

$$(u_1(n-l)/n, v_1(n-l)/n) \in Z\times Z$$

entonces

$$P_1 = (u_1(n-1)/n, v_1(n-1)/n)$$

es el punto de menor orden y menor abcisa del nivel 1 de $D(f)$, siempre que el coeficiente correspondiente no sea cero, y está claro que P_1 está sobre la recta ρ. Cualquier otro punto $(u,v,1)$ del nivel 1 de $D(f)$ verifica que, o bien

$$u + v > \frac{(u_1 + v_1)(n-1)}{n}$$

o bien

$$u + v = \frac{(u_1 + v_1)(n-1)}{n} \qquad y \qquad u > \frac{u_1(n-1)}{n}$$

Proyectando el punto $(u,v,1)$ desde el $(0,0,n)$ sobre el plano X,Y se obtiene el punto

$$\left(\frac{u.n}{n-1}, \frac{v.n}{n-1}, 0\right)$$

y, o bien

$$\frac{u\ n}{n-1} + \frac{v\ n}{n-1} = \frac{(u + v)n}{n-1} > u_1 + v_1$$

o bien

$$\frac{u\ n}{n-1} + \frac{v\ n}{n-1} = u_1 + v_1 \qquad y \qquad \frac{u\ n}{n-1} > u_1$$

Esto prueba que el punto $P_o = (u_1, v_1, 0)$ es el punto de menor orden y más a la izquierda(entre los de menor orden) de la proyección $\bar{D}(f)$ de $D(f)$ sobre el plano X,Y, desde el punto $(0,0,n)$.

<u>Nota 3.3</u>.- Sea $d = m.c.d(n, u_1, v_1)$; el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & o & u_1 \\ 0 & n & v_1 \end{pmatrix}$$

es nd, luego

$$\left[K(X^{u_1/n} Y^{v_1/n}) : K\right] = n^2/nd = n/d$$

Sea $n/d = n'$, $u_1/d = u_1'$, $v_1/d = v_1'$, $Gal(K(\zeta)/K) = \{\tau_1=1,\tau_2,\ldots,\tau_n\}$, $\zeta_i = \tau_i(\zeta)$, $i = 1,\ldots,n$, los conjugados de ζ sobre K. En la lista

$$\{\tau_1(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}),\ldots,\tau_n(X^{u_1/n}Y^{v_1/n})\}$$

están los n' conjugados distintos de $X^{u_1/n}Y^{v_1/n}$, cada uno de ellos repetido d veces. Sean $\{\xi_1=1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ las raíces n-ésimas de la unidad en k, $\{\delta_1=1,\delta_2,\ldots,\delta_{n'}\}$ las n'-ésimas. Como para cada $l = 1,\ldots,n$ existen i,j, $1 \leq i,j \leq n$ tales que

$$\tau_l(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}) = \xi_i^{u_1}\xi_j^{v_1}X^{u_1/n}Y^{v_1/n}$$

y como

$$(\xi_i^{u_1}\xi_j^{v_1})^{n'} = \xi_i^{dn'u_1'}\xi_j^{dn'v_1'} = \xi_i^{nu_1'}\xi_j^{nv_1'} = 1$$

está claro que, previa ordenación,

$$\tau_1(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}) = \delta_1X^{u_1/n}Y^{v_1/n},\ldots,\tau_{n'}(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}) = \delta_{n'}X^{u_1/n}Y^{v_1/n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau_{n'(d-1)+1}(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}) = \delta_1X^{u_1/n}Y^{v_1/n},\ldots$$

$$\ldots\ldots,\tau_n(X^{u_1/n}Y^{v_1/n}) = \delta_{n'}X^{u_1/n}Y^{v_1/n}.$$

De otro lado, considerando la expresión (2) de f, sabemos que, cuando

$$\left(\frac{u_1(n-l)}{n},\ \frac{v_1(n-l)}{n}\right) \in Z\times Z\ ,\ 1 \leq l \leq n$$

entonces el punto

$$P_l = \left(\frac{u_1(n-l)}{n},\ \frac{v_1(n-l)}{n},\ l\right)$$

es el de menor orden y más a la izquierda en el nivel l de $D(f)$, siempre que aparezca. Todo otro punto de ese nivel, o cualquier punto si

$$\left(\frac{u_1(n-l)}{n},\ \frac{v_1(n-l)}{n}\right) \notin Z\times Z$$

tiene , o bien abcisa superior a $\frac{u_1(n-1)}{n}$, o bien orden superior a $\frac{(u_1+v_1)(n-1)}{n}$. Pero, ¿cuáles son los niveles l para los que

$$\left(\frac{u_1(n-1)}{n}, \frac{v_1(n-1)}{n}\right) \varepsilon \ ZxZ \ ?$$

Son fáciles de caracterizar. Si esa condición se verifica, deben existir $h_1, h_2 \varepsilon Z$ tales que

$$u_1'(n-1) = n'h_1$$

$$v_1'(n-1) = n'h_2$$

de donde se deduce que $n'|(n-1)$. Recíprocamente, si $n-1 = hn'$, con $h \varepsilon Z$, es

$$\frac{u_1(n-1)}{n} = \frac{u_1'dhn'}{n} = u_1'h \ \varepsilon \ Z$$

$$\frac{v_1(n-1)}{n} = \frac{v_1'dhn'}{n} = v_1'h \ \varepsilon \ Z$$

Por lo cual, los niveles l para los cuales

$$\left(\frac{u_1(n-1)}{n}, \frac{v_1(n-1)}{n}\right) \varepsilon \ ZxZ$$

son $l = n-n', n-2n', \ldots, n-(d-1)n', n-dn' = 0$.

Combinando todo lo que acabamos de ver, vamos a sacar una consecuencia importante. Escribamos ζ en la forma

$$\zeta = \alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + T$$

donde T es una suma de términos tales que, o bien son de orden mayor que $(u_1+v_1)/n$ o bien son del mismo orden y abcisa mayor que u_1/n. Sustituyendo esa expresión de ζ en (2), tenemos

$$0 = (\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + T)^n + a_2(X,Y)(\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + T)^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}(X,Y)(\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + T) + a_n(X,Y)$$

En esa expresión, los términos

$$a_{pn'}(X,Y)(\alpha_{u_1,v_1}X^{u_1/n}Y^{v_1/n}+T)^{n'(d-p)}, \quad p = 1,..,d$$

son tales que

i) Tienen un monomio en

$$X^{pn'u_1/n}Y^{pn'v_1/n}X^{(d-p)n'u_1/n}Y^{(d-p)n'v_1/n} = X^{u_1}Y^{v_1}$$

ii) Todo otro monomio de esa expresión tiene orden mayor que u_1+v_1, u orden igual y exponente de X superior a u_1.

Más aún, en todo otro término

$$a_{n-1}(X,Y)(\alpha_{u_1,v_1}X^{u_1/n}Y^{v_1/n}+T)^{l},$$

todo monomio tiene orden mayor que u_1+v_1, u orden igual a u_1+v_1 y exponente de X superior a u_1. Esto implica que, si $\gamma_{pn'}$, con $1 \leq p \leq d$, es el coeficiente de $X^{pn'u_1/n}Y^{pn'v_1/n}$ en $a_{pn'}(X,Y)$ debe ser

$$\pi(\alpha_{u_1,v_1}) = \alpha^{n'd}_{u_1,v_1}+\gamma_{n'}\alpha^{n'(d-1)}_{u_1,v_1}+\ldots\ldots+\gamma_{n'(d-1)}\alpha^{n'}_{u_1,v_1}+\gamma_{n',d} = 0$$

Pero esa ecuación debe tener como raíces

$$\{\delta_1\alpha_{u_1,v_1},\ldots,\delta_{n'}\alpha_{u_1,v_1}\}$$

cada una de ellas repetida d veces, luego

$$\pi(\lambda) = (\lambda^{n'}-\alpha^{n'}_{u_1,v_1})^{d},$$

y así

$$\gamma_{pn'} = (-1)^{p}\binom{d}{p}, \quad 1 \leq p \leq d$$

Esto prueba, en particular, que los puntos

$$(pn'u_1/n, pn'v_1/n, n-pn')$$

aparecen efectivamente en $D(f)$.

La importancia de estos hechos radica en que representan un algoritmo que nos permite hallar

$$\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$$

sin utilizar más que el diagrama de Newton de f.

Definición 3.4.- Llamaremos el nivel representativo de ζ a la suma

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_{u_i,v_i} X^{u_i/n} Y^{v_i/n}$$

de los términos de ζ que verifican

3.4.1.- $X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$ es el monomio de antes, y si $t > 1$, para todo $i = 2,\ldots,t$, $X^{u_i/n} Y^{v_i/n}$ es el monomio de menor grado y menor exponente de X entre todos los de menor grado, de la serie

$$\zeta - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{u_j,v_j} X^{u_j/n} Y^{v_j/n}$$

3.4.2.- $K(\zeta) = K(X^{u_1/n} Y^{v_1/n},\ldots,X^{u_t/n} Y^{v_t/n})$

3.4.3.- $K(\zeta) > K(X^{u_1/n} Y^{v_1/n},\ldots,X^{u_{t-1}/n} Y^{v_{t-1}/n})$ si $t > 1$

Es obvio que el nivel representativo de ζ está unívocamente determinado y se compone, efectivamente, de un número finito de sumandos.

Nota 3.5.- Sea $d = m.c.d(n,u_1,v_1)$; está claro que el nivel representativo de ζ se reduce al solo término $\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$ si y sólo si $d = 1$. Más generalmente, para formar el nivel representativo de ζ se toma el término $\alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$, se le añade el término de menor grado y de menor abcisa entre los de menor grado de $\zeta - \alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$, digamos $\alpha_{u_2,v_2} X^{u_2/n} Y^{v_2/n}$, se le añade

el término de menor grado y de menor abcisa entre los de menor grado de $\zeta - \alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} - \alpha_{u_2,v_2} X^{u_2/n} Y^{v_2/n}$, y así sucesivamente.

El último término $\alpha_{u_t,v_t} X^{u_t/n} Y^{v_t/n}$ será el primero para el cual el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 \ldots\ldots\ldots u_t \\ 0 & n & v_1 \ldots\ldots\ldots v_t \end{pmatrix}$$

es igual a n. De aquí se deduce que, para todo $i = 1,\ldots,t$, el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 \ldots\ldots\ldots u_i \\ 0 & n & u_1 \ldots\ldots\ldots v_i \end{pmatrix}$$

es divisible por n, cosa que utilizaremos en lo sucesivo.

Vamos a empezar ahora, propiamente, a describir el algoritmo que habíamos anunciado para calcular ζ. La cuestión está en dar un método de cálculo de los sucesivos términos de ζ. Sea $d = m.c.d(n,u_1,v_1)$, $n' = n/d$, $\delta_1=1,\delta_2,\ldots,\delta_{n'}$ las raíces n'-ésimas de 1 (observemos que, puesto que le quitamos ya a ζ los términos enteros, es $n' > 1$ siempre). La lista de conjugados de ζ puede escribirse

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \delta_1\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta_1' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_d &= \delta_1\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta_d' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_{2d} &= \delta_2\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta_{2d}' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_{(n'-1)d+1} &= \delta_{n'}\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta_{(n'-1)d+1}' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

.. ..

$$\zeta_n = \delta_{n'}\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta'_n$$

donde las ζ'_i son series o bien de orden mayor que el de ζ o bien de orden igual al de ζ pero cuyo término de menor orden y menor exponente de X entre los de menor orden tiene abcisa mayor que u_1/n. Como la expresión anterior se va a repetir con mucha frecuencia en lo sucesivo, al término de menor orden y menor exponente de X entre los de menor orden de una serie lo llamaremos término clave de la serie. Así pues, o bien las series ζ'_i tienen mayor orden que el de ζ, o bien tienen igual orden que ζ y su término clave tiene exponente de X mayor que u_1/n.

Efectuemos en (2) el cambio de variable $Z = \alpha_{u_1,v_1} X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + Z_1$. Obtenemos el polinomio

$$f_1 = Z_1^n + a_1^{(1)}(X^{1/n},Y^{1/n})Z_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(1)}(X^{1/n},Y^{1/n})Z_1 + a_n^{(1)}(X^{1/n},Y^{1/n})$$

que pertenece al anillo $k[[X^{1/n},Y^{1/n}]][Z]$. Las raíces de este polinomio quedan de la forma

$$\begin{array}{c}
\zeta'_1 \\
\vdots \\
\zeta'_d \\
(-1+\delta_2)\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta'_{d+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1+\delta_2)\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta'_{2d} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1+\delta_{n'})\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta'_{(n'-1)d+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1+\delta_{n'})\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \zeta'_n
\end{array}$$

Ahora bien, los términos claves de $\zeta'_1,\ldots,\zeta'_d$ tienen los mismos

exponentes ya que $\zeta_1',\ldots,\zeta_d'$ son conjugados de $\zeta-\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n}$; lo que puede variar en estos términos clave son los coeficientes. Esto, bajo el supuesto de que $\zeta_1' \neq 0$ porque si $\zeta_1' \neq 0$, cosa que sabemos si $a_n^{(1)}(X^{1/n},Y^{1/n}) = 0$, es obvio que hemos acabado nuestro algoritmo.

Sea $\alpha X^{u_2/n} Y^{v_2/n}$ el término clave de ζ_1'; se ve fácilmente que el término clave de $a_n^{(1)}(X^{1/n},Y^{1/n})$ debe ser, salvo coeficiente

$$X^{du_2/n} Y^{dv_2/n} X^{(n-d)u_1/n} Y^{(n-d)v_1/n}$$

Como el término clave de $a_n^{(1)}(X^{1/n}Y^{1/n})$ se ve por simple inspección de esta serie, es obvio que u_2 y v_2 son inmediatamente calculables. Se trata ahora de calcular el coeficiente α. Para ello tenemos que hacer una disgresión larga sobre resultados numéricos. Estos resultados que vamos a dar son mucho más generales que los que necesitamos para calcular ese α, pero los vamos a emplear,en toda su generalidad, enseguida.

<u>LEMA 3.6</u>.- Sean

$$A_r = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & n & v_1 & v_2\ldots\ldots\ldots\ldots v_r \end{pmatrix}$$

$$A_{r+1} = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & u_{r+1} \\ 0 & n & v_1 & v_2\ldots\ldots\ldots\ldots v_r & v_{r+1} \end{pmatrix}$$

dos matrices de enteros no negativos($r \geq 1$) tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 en ambas es n. Para todo par de enteros a,b tales que $au_1+bv_1 \in Zn$, $bv_2,\ldots,bv_r \in Zn$(si ha lugar) se verifica que $au_{r+1}+bv_{r+1} \in Zn$.

<u>Demostración</u>.- Al ser el máximo común divisor de los menores de orden 2 de A_r igual a n, se deduce que

$$n = m.c.d(n^2, nu_1, nv_1, nv_2, \ldots, nv_r, u_1v_2, \ldots, u_1v_r)$$

luego que

(3) $1 = m.c.d(n, u_1, v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1v_2/n, u_1v_1/n)$

Sea $\lambda = au_{r+1}+bv_{r+1}$; nótese que si probamos que

$\lambda n \in Zn$, $\lambda u_1 \in Zn$, $\lambda v_1 \in Zn, \ldots, \lambda v_r \in Zn$, $\lambda u_1v_2/n \in Zn, \ldots, \lambda u_1v_r/n \in Zn$

el lema estará probado en virtud de (3).

i) Por hipótesis $au_1+bv_1 \in Zn \Rightarrow au_1u_{r+1}+bv_1u_{r+1} \in Zn \Rightarrow$

$$au_1u_{r+1}+bv_1u_{r+1} - bv_{r+1}u_1+bv_{r+1}u_1 \in Zn \Rightarrow$$

$$u_1\lambda - b\begin{vmatrix} u_1 & u_{r+1} \\ v_1 & v_{r+1} \end{vmatrix} \in Zn \Rightarrow \lambda u_1 \in Zn$$

porque $\begin{vmatrix} u_1 & u_{r+1} \\ v_1 & v_{r+1} \end{vmatrix} \in Zn$

ii) De forma análoga se prueba que $\lambda v_1 \in Zn$

iii) Supongamos que $r > 1$ y sea j, $1 < j \leq r$; se verifica que

$$\lambda v_j = (au_{r+1}+bv_{r+1})v_j = au_{r+1}v_j+bv_jv_{r+1}$$

que pertenece a Zn pues $au_{r+1}v_j \in Zn$ por ser $-u_{r+1}v_j$ un menor de orden dos de A_{r+1} y ser $bv_j \in Zn$ por las hipótesis del lema.

iv) Sigamos suponiendo que $r > 1$ y sea j, $1 < j \leq r$. Pongamos

$au_1+bv_1 = nt_1$, $bv_i = nt_i$, $i = 2, \ldots, n$. De

$$au_1+bv_1 = nt_1$$
$$bv_j = nt_j$$

se deduce que

$$a = n(t_1v_j-t_jv_1)/u_1v_j$$

$$b = nt_ju_1/u_1v_j$$

Pongamos

$$u_1v_{r+1}-v_1u_{r+1} = ns_1$$

$$v_ju_{r+1} = ns_j, \quad j = 2,\ldots,r;$$

en virtud de lo anterior se verifica que

$$= au_{r+1}+bv_{r+1} = (nt_1v_ju_{r+1}-nt_jv_1u_{r+1}+nt_ju_1v_{r+1})/u_1v_j =$$

$$= (nt_1v_ju_{r+1}-nt_jv_1u_{r+1}+nt_j(ns_1+v_1u_{r+1}))/u_1v_j =$$

$$= (nt_1v_ju_{r+1}-nt_jv_1u_{r+1}+n^2t_js_1+nt_jv_1u_{r+1})/u_1v_j =$$

$$= (t_1v_ju_{r+1}+nt_js_1)/(u_1v_j/n) =$$

$$= (t_1ns_j+nt_js_1)/(u_1v_j/n)$$

de donde es claro que $u_1v_j/n \in Zn$, lo que prueba el lema.

<u>LEMA 3.7</u>.- Sean

$$A_r = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & u_2\ldots\ldots\ldots\ldots u_r \\ 0 & n & v_1 & v_2\ldots\ldots\ldots\ldots v_r \end{pmatrix} \qquad r \geq 1$$

$$A_{r+1} = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & u_2\ldots\ldots\ldots\ldots u_r & u_{r+1} \\ 0 & n & v_1 & v_2\ldots\ldots\ldots\ldots v_r & v_{r+1} \end{pmatrix}$$

dos matrices de enteros no negativos tales que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la primera es nd y el de la segunda es nd_1, $d_1|n$. Sea $d = d_1d_1'$. Para cuaquier par de enteros a,b tales que $au_i+bv_i \in Zn$, $i = 1,2,\ldots,r$, se verifica que $(au_{r+1}+bv_{r+1})d_1' \in Zn$.

<u>Demostración</u>.- Operaremos por reducciones sucesivas. Supongamos el lema demostrado bajo la hipótesis adicional de que $d = d_1$ y vamos a ver que este resultado implica el lema en general. En efecto, considerando la matriz

$$A'_{r+1} = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1\ldots\ldots\ldots\ldots u_r & u_{r+1} & d_1' \\ 0 & n & v_1\ldots\ldots\ldots\ldots v_r & v_{r+1} & d_1' \end{pmatrix}$$

se verifica que el máximo común divisor de sus menores de orden 2

es nd. Así pues, para cualquier par $a,b \in Z$ tales que $au_i+bv_i \in Zn$, $i = 1,..,r$, se verifica que $au_{r+1}d_1'+bv_{r+1}d_1' \in Zn$, como queríamos probar. Así pues, de ahora en adelante procederemos a probar el lema bajo la hipótesis adicional de que $d = d_1$.

Supongamos el lema demostrado bajo la hipótesis adicional de que $d = 1$ $(=d_1)$. Tomando las matrices

$$A''_r = \begin{pmatrix} n/d & 0 & u_1/d \ldots\ldots\ldots u_r/d \\ 0 & n/d & v_1/d \ldots\ldots\ldots v_r/d \end{pmatrix}$$

$$A''_{r+1} = \begin{pmatrix} n/d & 0 & u_1/d \ldots\ldots\ldots u_r/d & u_{r+1}/d \\ 0 & n/d & v_1/d \ldots\ldots\ldots v_r/d & v_{r+1}/d \end{pmatrix}$$

se verifica que el máximo común divisor de los menores de orden 2 en ambas es n/d. Así pues, para todo par de enteros a,b tales que

$au_i/d + bv_i/d \in Z(n/d)$, $i = 1,..,r$, se tiene que

$$au_{r+1}/d + bv_{r+1}/d \in Z(n/d)$$

Por tanto, para todos $a,b \in Z$ tales que $au_i+bv_i \in Zn$, $i = 1,..,r$, es $au_i/d + bv_i/d \in Zn$, luego $au_{r+1}/d + bv_{r+1}/d \in Z(n/d)$, y así $au_{r+1} + bv_{r+1} \in Zn$. Luego, supondremos a partir de ahora que $d = d_1 = 1$.

La demostración del lema es ya una consecuencia no demasiado complicada del lema 3.6. Notemos que, efectuando una permutación de los índices $1,2,\ldots,r$ no varían ni las hipótesis del lema, ni el enunciado, luego siempre se puede efectuar una tal permutación sin variar las condiciones del problema. De otro lado, supongamos que $r > 1$ y consideremos las matrices

$$A'''_r = \begin{pmatrix} n & 0 & u_1 \ldots\ldots u_{j-1} & u_j' & u_{j+1} \ldots\ldots u_r \\ 0 & n & v_1 \ldots\ldots v_{j-1} & v_j' & v_{j+1} \ldots\ldots v_r \end{pmatrix}$$

y A''_{r+1} obtenidas añadiéndole a las anteriores A''_r y A''_{r+1} una columna formada por u'_j y v'_j entre las columnas j y $j+1$ y donde

$$\begin{aligned} u'_j &= u_j+\mu u_i \\ v'_j &= v_j+\mu v_i \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq r, \quad i \neq j, \quad \mu \in Z$$

Fácilmente se ve que el máximo común divisor de los menores de orden 2 de A''_r y el de A''_{r+1} es nd. Si suponemos probado que, para cualesquiera $a,b \in Z$ tales que $au_i+bv_i \in Zn$, $i = 1,..,r$, $i \neq j$, $au'_j+bv'_j \in Zn$, se tiene que $au_{r+1}+bv_{r+1} \in Zn$, se verifica entonces que, tomando $a,b \in Z$ tales que $au_i+bv_i \in Zn, i = 1,..,r$ es

$$au'_j+bv'_j = a(u_j+ u_i) + b(v_j+ v_i) =$$

$$=(au_j+bv_j)+ (au_i+bv_i)$$

que pertenecen a Zn. Así $au_{r+1}+bv_{r+1} \in Zn$.

Estos razonamientos prueban que, si $r > 1$, cualquier matriz que se obtenga de la A_r por transformaciones elementales entre las columnas de

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \cdots\cdots u_r \\ v_1 & v_2 \cdots\cdots v_r \end{pmatrix}$$

verifica las condiciones del lema y, más aún, demostrado el lema para ésta se tendrá el lema en general.

Nótese que el lema, para $r = 1$, es una consecuencia trivial del lema 3.6. Si $r > 1$ y $\delta = m.c.d(u_1,u_2,...,u_r)$ por transformaciones entre columnas, se puede reducir A_r a la forma

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \delta & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & n & v'_1 & v'_2 \cdots\cdots\cdots v'_r \end{pmatrix}$$

y la demostración del lema es entonces consecuencia de 3.6.

Con esto acaba nuestra disgresión y volvemos a la situación que teníamos antes del lema 3.6, es decir, a calcular el coeficiente α del término clave de ζ_1'. El monomio $X^{u_2/n}Y^{v_2/n}$ de este término clave lo conocemos, como vimos antes. Sea nd_1 el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & n & v_1 & v_2 \end{pmatrix},$$

$d_1 \backslash d$, $d = d_1 d_1'$, y pongamos $M_1 = X^{u_1/n}Y^{v_1/n}$, $M_2 = X^{u_2/n}Y^{v_2/n}$.

Si es

$$Gal(K(\zeta)/K(M_1)) = \{\tau_1=1,\tau_2,\ldots,\tau_d\}$$

entonces, previa ordenación si preciso fuera, el término clave de ζ_i' es $\alpha\tau_i(M_2)$, $i = 1,2,\ldots,d$. Esto indica que entre los términos

$$\{\alpha\tau_i(M_2)/\ i = 1,2,\ldots,d\}$$

hay d_1' distintos, cada uno de ellos repetido d_1 veces. Pero sea ω una raiz primitiva n-ésima de 1; para cada par $a,b \in Z$, $0 \leq a,b \leq n-1$, designaremos por $\tau_{(a,b)}$ el elemento del grupo $Gal(K(\zeta)/K)$ que corresponde a las raíces (ω^a,ω^b). Se verifica que $\tau_{(a,b)} \in Gal(K(\zeta)/K(M_1))$ si y sólo si $\omega^{au_1+bv_1} = 1$, es decir, si y sólo si $au_1+bv_1 \in Zn$. En estas condiciones, el lema 3.7 nos dice que $(au_2+bv_2)d_1' \in Zn$, esto es, que $\omega^{au_2+bv_2}$ es una raiz d_1'-ésima de 1. Como de éstas hay justamente d_1', si las designamos por $\{\delta_1^{(1)}=1,\delta_2^{(1)},\ldots,\delta_{d_1'}^{(1)}\}$, previa ordenación si hiciese falta, se podrá escribir

$$(4)\qquad \begin{aligned} \zeta_1' &= \alpha\delta_1^{(1)}X^{u_2/n}Y^{v_2/n} + \zeta_1'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta_{d_1}' &= \alpha\delta_1^{(1)}X^{u_2/n}Y^{v_2/n} + \zeta_{d_1}'' \end{aligned}$$

$$
(4)\qquad
\begin{array}{rl}
\zeta'_{d_1+1} & = \alpha\delta_2^{(1)} X^{u_2/n} Y^{v_2/n} + \zeta''_{d_1+1} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\zeta'_{2d_1} & = \alpha\delta_2^{(1)} X^{u_2/n} Y^{v_2/n} + \zeta''_{2d_1} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\zeta'_{(d_1'-1)d_1+1} & = \alpha\delta_{d_1'}^{(1)} X^{u_2/n} Y^{v_2/n} + \zeta''_{(d_1'-1)d_1+1} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\zeta'_d & = \alpha\delta_{d_1'}^{(1)} X^{u_2/n} Y^{v_2/n} + \zeta''_d
\end{array}
$$

Consideremos el término clave de $a^{(1)}_{n-d+d_1'}(X^{1/n}Y^{1/n})$. Desde luego, salvo el signo, $a^{(1)}_{n-d+d_1'}(X^{1/n}Y^{1/n})$ es la suma de los $(n-d+d_1')$- productos de las raíces de f_1. Por tanto, el monomio de su término clave será

$$M = X^{(n-d)u_1/n}\, Y^{(n-d)v_1/n}\, X^{d_1'u_2/n}\, Y^{d_1'v_2/n},$$

siempre que su coeficiente sea distinto de cero. Se trata de ver cuál es el coeficiente $\beta^{(1)}_{n-d+d_1'}$ de M en $a^{(1)}_{n-d+d_1'}(X^{1/n},Y^{1/n})$.

Sean $\sigma_i \in Z\,[x_1,x_2,\ldots,x_d]$,$i = 1,2,\ldots,d$ las funciones simétricas elementales en d variables y sea

$$\beta = (-1+\delta_2)^d \ldots\ldots (-1+\delta_{n'})^d.$$

Se verifica que

$$\beta^{(1)}_{n-d+d_1'} = (-1)^{n-d+d_1'}\beta\alpha^{d_1'}\sigma_{d_1'}(\delta_1^{(1)},\ldots,\delta_1^{(1)},\delta_2^{(1)},\ldots,\delta_2^{(1)},\delta_{d_1'}^{(1)},\ldots,\delta_{d_1'}^{(1)}$$

Pongamos

$$\gamma = \sigma_{d_1'}(\delta_1^{(1)},\ldots,\delta_1^{(1)},\delta_2^{(1)},\ldots,\delta_2^{(1)},\ldots,\delta_{d_1'}^{(1)},\ldots,\delta_{d_1'}^{(1)});$$

se trata de probar que $\gamma \neq 0$. Pero es fácil ver que $(-1)^{d_1'}\gamma$ es el coeficiente de $\lambda^{d-d_1'}$ en la ecuación

$$(\lambda^{d_1'}-1)^{d_1} = 0$$

luego

$$\gamma = (-1)^{d_1'+1}\binom{d_1}{1} = (-1)^{d_1'+1} d_1 \neq 0$$

Ahora bien, por simple inspección de $a^{(1)}_{n-d+d_1'}(X^{1/n},Y^{1/n})$ obtenemos $\beta^{(1)}_{n-d+d_1'}$, luego

$$\beta^{(1)}_{n-d+d_1'} = (-1)^{n-d+1}\beta d_1 \alpha^{d_1'}$$

de donde

$$\alpha^{d_1'} = \beta^{(1)}_{n-d+d_1'}/(-1)^{n-d+1}\beta d_1$$

Esta relación permite determinar α unívocamente salvo producto por raíces d_1'-ésimas de 1, lo que resuelve el problema de determinar los coeficientes de los términos clave de $\zeta_1',\ldots,\zeta_d'$ en virtud de (4). Sea α_2 una determinación de α.

En esta situación, y habiendo calculado los términos clave de $\zeta'_1,\ldots,\zeta'_d$, hallemos los siguientes. Pero esto es fácil por un razonamiento tipo Galois. Escribamos $Gal(K(\zeta)/K) = G$ en la forma

$$G = \{\tau_{11}=1,\tau_{12},\ldots,\tau_{1d},\tau_{21},\tau_{22},\ldots,\tau_{2d},\ldots,\tau_{n'1},\ldots,\tau_{n'd}\}$$

donde, para cada $i = 1,2,\ldots,n'$ es $\{\tau_{i1},\tau_{i2},\ldots,\tau_{id}\}$ el conjunto de automorfismos que transforman M_1 en $\delta_i M_1$. Está claro que

$$\{\tau_{i1},\tau_{i2},\ldots,\tau_{id}\} = \tau_{i1}Gal(K(\zeta)/K(M_1))$$

es la clase adjunta de uno de ellos módulo $Gal(K(\zeta)/K(M_1))$. Así pues, para cada $i = 1,2,\ldots,n'$ es

$$\{\tau_{i1}(\alpha_2 M_2),\tau_{i2}(\alpha_2 M_2),\ldots,\tau_{id}(\alpha_2 M_2)\} =$$

$$\{\tau_{i1}(\alpha_2\delta_1^{(1)}M_2),\ldots,\tau_{i1}(\alpha_2\delta_1^{(1)}M_2,\tau_{i1}(\alpha_2\delta_2^{(1)}M_2),\ldots,\tau_{i1}(\alpha_2\delta_2^{(1)}M_2,\ldots$$

$$\ldots\ldots,\tau_{i1}(\alpha_2\delta_{d_1'}^{(1)}M_2),\ldots,\tau_{i1}(\alpha_2\delta_{d_1'}^{(1)}M_2)\}.$$

Esto termina de forma práctica los términos clave de $\{\zeta'_{d+1},\ldots,\zeta'_n\}$. Para ello basta elegir, para cada $i = 2,\ldots,n'$ un automorfismo τ_i'

que transforme M_1 en $\delta_i M_1$ y escribir las listas

$$\{\tau_i'(\delta_1^{(1)}\alpha_2 M_2),\ldots,\tau_i'(\delta_1^{(1)}\alpha_2 M_2),\ldots,\tau_i'(\delta_{d'}^{(1)}\alpha_2 M_2),\ldots,\tau_i'(\delta_{d'}^{(1)}\alpha_2 M_2)\}.$$

Vamos a detallar un poco más la lista

$$\{\tau(\alpha_1 M_1+\alpha_2 M_2)/\ \tau \in Gal(K(\zeta)/K)\}.$$

En esa lista hay n/d_1 elementos distintos, cada uno de ellos repetido d_1 veces. Sea $n\bar{d}_1$ el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_2 \\ 0 & n & v_2 \end{pmatrix};$$

se verifica que $d_1|\bar{d}_1$ y se escribirá $\bar{d}_1 = d_1\bar{d}_1'$.

<u>LEMA 3.8</u>.- Se verifican las siguientes propiedades:

<u>3.8.1</u>.- d_1' divide a $n/\bar{d}_1$ y $\bar{d}_1'$ divide a n/d.

<u>3.8.2</u>.- $d_1' = [K(M_2):K(M_1)\cap K(M_2)]$

<u>3.8.3</u>.- $\bar{d}_1' = [K(M_1):K(M_1)\cap K(M_2)]$

<u>Demostración</u>.- Probando que $\bar{d}_1'$ divide a n/d se tiene la primera afirmación ya que, al ser $\bar{d}_1 = d_1\bar{d}_1'$ es $\bar{d}_1/\bar{d}_1' = d/d_1'$ luego $\bar{d}_1 d_1' = d\bar{d}_1'$, de donde

$$(n/\bar{d}_1)/d_1' = n/\bar{d}_1 d_1' = n/d\bar{d}_1' = (n/d)/\bar{d}_1' \in Z$$

luego d_1' divide a $n/\bar{d}_1$. Probemos entonces que $\bar{d}_1'$ divide a n/d.

Poniendo $u_1v_2-u_2v_1 = hnd_1$, $h \in Z$, como

$$m.c.d(n^2,nu_1,nv_1) = nd = nd_1d_1'$$

$$m.c.d(n^2,nu_2,nv_2) = n\bar{d}_1 = nd_1\bar{d}_1'$$

es

$$m.c.d(nd_1d_1',\bar{d}_1'd_1n,nd_1h) = nd_1$$

de donde se tiene que

$$1 = m.c.d(d_1', \bar{d}_1', h)$$

A la vista de esta igualdad, para probar lo que deseamos, basta demostrar que $(n/d)d_1' \in Z\bar{d}_1'$ y $(n/d)h \in Z\bar{d}_1'$. Pero

$$(n/d)d_1' = (n/d_1d_1')d_1' = n/d_1 = n/(\bar{d}_1/\bar{d}_1') = (n/\bar{d}_1)\bar{d}_1' \in Z\bar{d}_1'$$

y de $u_1v_2-u_2v_1 = hnd_1$ se deduce que

$$(u_1/d)(v_2/d_1) - (u_2/d_1)(v_1/d) = h(n/d)$$

lo que implica que $h(n/d) \in Z\bar{d}_1'$ ya que u_1/d, $v_1/d \in Z$ y u_2/d_1, $v_2/d_1 \in Z\bar{d}_1'$ pues $\bar{d}_1' = d_1\bar{d}_1'$ divide a u_2 y v_2. Esto prueba el primer apartado.

<u>3.8.2</u>.- Pongamos $K' = K(M_1) \cap K(M_2)$; se trata de probar que $d_1' = [K(M_2):K']$. Para ello, como $K(M_2) \supset K$ es una extensión cíclica, de grado $n/\bar{d}_1$, engendrada por M_2 que satisface la ecuación pura irreducible

$$M_2^{n/\bar{d}_1} - X^{u_2/\bar{d}_1}Y^{v_2/\bar{d}_1} = 0$$

basta probar que d_1' es el mínimo entero positivo tal que $M_2^{d_1'} \in K'$. Para probar esto, hagamos una observación previa. Sean $(a_1,b_1),\ldots,(a_r,b_r),(a,b) \in Z\times Z$. Diremos que (a,b) es combinación lineal de $(a_1,b_1),\ldots,(a_r,b_r)$ módulo n si existen enteros $\lambda_1,\ldots,\lambda_r,h_1,h_2$ tales que

$$(a,b) = \lambda_1(a_1,b_1)+\ldots+\lambda_r(a_r,b_r)+(h_1n,h_2n)$$

o, de forma equivalente, tales que

$$a = a_1\lambda_1+\ldots+a_r\lambda_r+nh_1$$

$$b = b_1\lambda_1+\ldots+b_r\lambda_r+nh_2.$$

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius para sistemas diofánticos

se tiene que (a,b) es combinación lineal de $\{(a_1,b_1),\ldots$ $\ldots,(a_r,b_r)\}$ módulo n si y sólo si el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & a_1\ldots\ldots a_r \\ 0 & n & b_1\ldots\ldots b_r \end{pmatrix}$$

coincide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & a_1\ldots\ldots a_r & a \\ 0 & n & b_1\ldots\ldots b_r & b \end{pmatrix}$$

Usando esta observación está claro que, como el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 \\ 0 & n & v_1 \end{pmatrix}$$

es nd, y el de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 & u_2d_1' \\ 0 & n & v_1 & v_2d_1' \end{pmatrix}$$

es también nd, entonces (u_2,d_1',v_2d_1') es combinación lineal de (u_1,v_1) módulo n, lo que implica que $M_2^{d_1'} \varepsilon K(M_1)$ y así $M_2^{d_1'} \varepsilon K'$.

Recíprocamente, si $M_2^{\lambda} \varepsilon K'$ es $M_2^{\lambda} \varepsilon K(M_1)$ luego $(u_2\lambda,v_2\lambda)$ es combinación lineal de (u_1,v_1) módulo n,lo que implica que $d_1'|\lambda$. En efecto, si se pone

$$nd_1h_1 = nu_2, \quad nd_1h_2 = nv_2, \quad nd_1h_3 = u_1v_2-u_2v_1$$

se tiene que

$$1 = m.c.d(h_1,h_2,h_3,d)$$

Así, se verifican

$$nd_1h_1\lambda = nu_2\lambda, \quad nd_1h_2\lambda = nv_2\lambda, \quad nd_1h_3\lambda = (u_1v_2-u_2v_1)\lambda$$

de donde

$$nd|nd_1h_1\lambda, \quad nd|nd_1h_2\lambda, \quad nd|nd_1h_3\lambda$$

luego

$$d_1'|d, \quad d_1'|h_1\lambda, \quad d_1'|h_2\lambda, \quad d_1'|h_3\lambda$$

lo que implica que $d_1'|\lambda$. Esto prueba 3.8.2

<u>3.8.3</u>.- Este resultado es ya trivial pues

$$d\bar{d}_1' = \bar{d}_1 d_1' = \left[K(\zeta):K'\right].$$

Una vez probado el resultado anterior, es bastante sencillo escribir la lista

$$\{\tau(\alpha_1 M_1+\alpha_2 M_2)/\ \tau \in Gal(K(\zeta)/K)\}$$

Para cada $i = 1,2..,n' = n/d$ supongamos elegido un $\tau_i' \in Gal(K(\zeta)/K)$ tal que $\tau_i'(M_1) = \delta_i M_1$. Entonces $\tau_i'(M_2)=\gamma_i M_2$ donde γ_i es una raiz $(n/\bar{d}_1)$-ésima de 1 $(\gamma_1=1)$ y

$$\{\tau_i'(\alpha_2\delta_1^{(1)}M_2),\ldots,\tau_i'(\alpha_2\delta_1^{(1)}M_2),\tau_i'(\alpha_2\delta_2^{(1)}M_2),\ldots,\tau_i'(\alpha_2\delta_{d_1'}^{(1)}M_2),\ldots$$

$$\ldots,\tau_i'(\alpha_2\delta_{d_1'}^{(1)}M_2)\} =$$

$$=\{\alpha_2\gamma_i\delta_1^{(1)}M_2,\ldots,\alpha_2\gamma_i\delta_1^{(1)}M_2,\alpha_2\delta_i\gamma_2^{(1)}M_2,\ldots,\alpha_2\gamma_i\delta_2^{(1)},\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\alpha_2\gamma_i\delta_{d_1'}^{(1)}M_2,\ldots,\alpha_2\gamma_i\delta_{d_1'}^{(1)}M_2\}.$$

Para cada entero m se designará por G_m al grupo de las raíces m-ésimas de 1. Con esa notación se tiene que $G_{d_1'} \subset G_{n/\bar{d}_1}$ y la aplicación

$$\psi : G_{n/d} \longrightarrow G_{n/\bar{d}_1} / G_{d_1'}$$

dada por

$$\psi(\delta_i) = \gamma_i G_{d_1'} = (\tau_i'(M_2)/M_2)G_{d_1'}$$

es un homomorfismo de grupos. Como ψ es claramente suprayectivo su núcleo consta de $\bar{d}_1'$ elementos(lema 3.8) y es, por tanto,

el conjunto de raíces $\bar{d}_1'$-ésimas de 1. Esto describe completamente la lista

$$\{\tau(\alpha_1 M_1+\alpha_2 M_2)/\ \tau \in Gal(K(\zeta)/K)\}$$

Para concluir esta sección terminando de describir completamente nuestro algoritmo nos falta un paso fundamental. Como pasa con todo algoritmo para construcción de series, tenemos que probar que, si funciona para construir r términos, funciona también para construir $r+1$ y esto es lo que vamos a probar desde aquí hasta el final de la sección.

Naturalmente, una vez que hemos calculado los dos primeros términos de ζ efectuamos en f_1 el cambio de variable $Z_1 = \alpha_2 X^{u_2/n} Y^{v_2/n} + Z_2$, procedemos de forma análoga a como hicímos con f_1, y así sucesivamente. La descripción del caso general que vamos a efectuar ahora no es sino una traducción casi literal del cálculo del segundo término de ζ.

La situación general es como sigue. Conocemos los r primeros términos de ζ, $r \geq 2$, a saber

$$\zeta = \alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \ldots + \alpha_r X^{u_r/n} Y^{v_r/n} + \zeta'$$

donde ζ' es la suma de los términos desconocidos. Disponemos también de una ecuación

$$f_r = Z_r^n + a_1^{(r)}(X^{1/n},Y^{1/n})Z_r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(r)}(X^{1/n},Y^{1/n})Z_r + a_n^{(r)}(X^{1/n},Y^{1/n}) =$$

cuyas raíces son del tipo

$$\zeta_1^{(r-1)},\ldots,\zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)},\alpha_{d_{r-1}+1}^{(r-1)} M_{d_{r-1}+1} + T_{d_{r-1}+1} + \zeta_{d_{r-1}+1}^{(r-1)},\ldots$$

$$\ldots,\alpha_n^{(r-1)} M_n + T_n + \zeta_n^{(r-1)}.$$

donde nd_{r-1} es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1 \ldots\ldots u_r \\ 0 & n & v_1 \ldots\ldots v_r \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\zeta_1^{(r-1)} = \zeta', \ldots\ldots, \zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)}, \zeta_{d_{r-1}+1}^{(r-1)}, \ldots\ldots, \zeta_n^{(r-1)}\} = \\ \quad = \{\tau(\zeta') \mid \tau \in Gal(K(\zeta)/K)\} \end{array}\right\} \quad (5)$$

y donde $\alpha_i^{(r-1)} \in k$, $i = d_{r-1}+1, \ldots, n$, M_i son monomios,

$$\alpha_i^{(r-1)} M_i + T_i$$

son términos conocidos y $\alpha_i^{(r-1)} M_i$ es el término clave de

$$\alpha_i^{(r-1)} M_i + T_i + \zeta_i^{(r-1)}.$$

Además, los $\zeta_1^{(r-1)}, \ldots\ldots, \zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)}$ verifican la condición siguiente: Tomando los n conjugados de ζ, $\{\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ se verifica que entre ellos hay exactamente d_{r-1} cuya suma de r primeros términos es

$$\alpha_1 X^{u_1/n} Y^{v_1/n} + \ldots\ldots + \alpha_r X^{u_r/n} Y^{v_r/n}.$$

Pues bien, suponiendo que los $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ están ordenados de forma que esos conjugados son $\zeta_1 = \zeta, \ldots, \zeta_{d_{r-1}}$ se verifica que

$$\zeta_i^{(r-1)} = \zeta_i - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j X^{u_j/n} Y^{v_j/n}, \quad i = 1, \ldots, d_{r-1}$$

Observemos que, por (5), los monomios de los términos clave de todos los $\zeta_i^{(r-1)}$, $i = 1, \ldots, n$ son los mismos. Así pues el cálculo de este monomio, digamos $N_{r+1} = X^{u_{r+1}} Y^{v_{r+1}}$, es inmediato pues $N_{r+1}^{d_r} \cdot \prod_{i=d_{r-1}+1}^{n} M_i$ tiene que ser el monomio del término clave de $a_n^{(r)}(X^{1/n}, Y^{1/n})$, siempre que éste sea no nulo. Como siempre, el problema es calcular el coeficiente de M en

cada uno de los $\{\zeta_1^{(r-1)},\ldots,\zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)}\}$

Sea nd_r el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 & u_1\ldots\ldots u_r & u_{r+1} \\ 0 & n & v_1\ldots\ldots v_r & v_{r+1} \end{pmatrix};$$

naturalmente $d_r | d_{r-1}$ y se podrá escribir $d_{r-1} = d_r d'_r$. Designemos por N_i el monomio $X^{u_i/n} Y^{v_i/n}$, $i = 1,\ldots,r+1$. Puesto que $\left[K(\zeta):K(N_1,\ldots,N_r,N_{r+1})\right] = d_r$ y $\left[K(N_1,\ldots,N_{r+1}):K(N_1,\ldots,N_r)\right] = d'_r$

y como

$$\{\zeta_1^{(r-1)}=\zeta',\ldots,\zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)}\} = \{\tau(\zeta')/\tau \in Gal(K(\zeta)/K(N_1,\ldots,N_r))\}$$

en la lista

$$\{\tau(N_{r+1})/\ \tau \in Gal(K(\zeta)/K(N_1,\ldots,N_r))\}$$

hay d'_r elementos distintos, cada uno de ellos repetido d_r veces. De otro lado, sea ω una raiz n-ésima de 1. Para cada τ $\tau \in Gal(K(\zeta)/K(N_1,\ldots,N_r))$ existen un par de enteros a,b, $0 \leq a,b \leq n-1$ tales que τ se corresponde con el par (ω^a,ω^b). En este caso, debe ser $au_i+bv_i \in Zn, \forall i = 1,\ldots,r$ luego, por el lema 3.7, es $(au_{r+1}+bv_{r+1})d'_r \in Zn$. Por tnto, para todo τ, $\tau \in Gal(K(\zeta)/K(N_1,\ldots,N_r))$, debe ser $\tau(N_{r+1}) = \delta N_{r+1}$ con $\delta^{d'_r}=1$. Este hecho, junto con lo anterior, implica que si $\{\delta_1^{(r)},\ldots,\delta_{d'_r}^{(r)}\}$ son las raíces d'_r-ésimas de 1, se verifica que

$$\{\tau(N_{r+1})/\ \tau \in Gal(K(\zeta)/K(N_1,\ldots,N_r))\} =$$

$$= \{\delta_1^{(r)}N_{r+1},\ldots,\delta_1^{(r)}N_{r+1},\ldots,\delta_{d'_r}^{(r)}N_{r+1},\ldots,\delta_{d'_r}^{(r)}N_{r+1}\}.$$

Designemos por α al coeficiente de N_{r+1} en $\zeta_1^{(r-1)}$; cambiando

el orden si preciso fuera se puede escribir

$$\zeta_1^{(r-1)} = \alpha\delta_1^{(r)}N_{r+1}+\zeta_1^{(r)}$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_{d_r}^{(r-1)} = \alpha\delta_1^{(r)}N_{r+1}+\zeta_{d_r}^{(r)}$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_{(d'_r-1)d_r+1}^{(r-1)} = \alpha\delta_{d'_r}^{(r)}N_{r+1}+\zeta_{(d'_r-1)d_r+1}^{(r)}$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_{d_{r-1}}^{(r-1)} = \alpha\delta_{d'_r}^{(r)}N_{r+1}+\delta_{d_{r-1}}^{(r)}$$

Ahora se considera el término clave de $a^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}(X^{1/n},Y^{1/n})$ y razonemos como en el caso del cálculo de α_2. Salvo signo, $a^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}(X^{1/n}Y^{1/n})$ es la suma de los $(d-d_{r-1}+d'_r)$ productos de las raíces de f_r. Por tanto, el monomio de su término clave será(supuesto el coeficiente distinto de cero)

$$M = N_{r+1}^{d_{r-1}} \prod_{i=d_{r-1}+1}^{n} M_i .$$

Se trata de ver cúal es el coeficiente $\beta^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}$ de M en $a^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}(X^{1/n},Y^{1/n})$. Sean $\sigma_i \in Z[x_1,\ldots,x_{d_{r-1}}]$, $i = 1,\ldots,d_{r-1}$ las funciones elementales en d_{r-1} variables y sea

$$\beta = \prod_{i=d_{r-1}+1}^{n} \alpha_i^{(r-1)}$$

Se verifica que

$$\beta^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r} = (-1)^{n-d_{r-1}+d'_r}\beta\alpha^{d'_r}\sigma_{d'_r}(\delta_1^{(r)},\ldots,\delta_1^{(r)},\ldots,\delta_{d'_r}^{(r)},\ldots,\delta_{d'_r}^{(r)});$$

designemos por γ al último factor de ese producto. Fácilmente

se ve que $(-1)^{d'_r}\gamma$ es el coeficiente de $\lambda^{d_{r-1}-d'_r}$ en la ecuación

$$(\lambda^{d'_r} - 1)^{d_r} = 0$$

o sea

$$\gamma = (-1)^{d'_r+1} d_r \neq 0.$$

Como por simple inspección de $a^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}(X^{1/n}Y^{1/n})$ se obtiene $\beta^{(r)}_{n-d_{r-1}+d'_r}$, lo anterior permite determinar α salvo producto por raíces d'_r-ésimas de 1, que es justamente lo que necesitábamos. El cálculo de los términos clave de $\{\zeta^{(r-1)}_{d_{r-1}+1},\ldots,\zeta^{(r-1)}_n\}$ se hace ya trivialmente por el mismo procedimiento que en el caso del segundo término.

<u>Observación 3.9</u>.- El nivel representativo de ζ se alcanza en el paso en que $d_{r-1} = 1$. Para los términos siguientes es $d'_t = 1$ y los coeficientes α se determinan por una ecuación de primer grado.

Como ilustración de todo lo anterior, veamos un ejemplo. Sea

$$f = Z^4-2XY^3(1+Y)^2Z^2-4X^2Y^6(1+Y)Z+X^2Y^6 \quad (1+Y)^4-XY^3 =$$

$$= Z^4+(-2XY^3-4XY^4-2XY^5)Z^2+(-4X^2Y^6-4X^2Y^7)Z+(X^2Y^6+4X^2Y^7+6X^2Y^8+$$

$$+4X^2Y^9+X^2Y^{10}-X^3Y^9),$$

cuyo discriminante es

$$D = -64X^7Y^{21}\left[(1+Y)^4+XY^3\right].$$

Por el teorema de Abhyankar f tiene como raíces series de Puiseux casi-ordinarias, que vamos a calcular. Sean éstas, $\zeta=\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$; el primer monomio de ζ es fácil de calcular y es $N_1 = X^{2/4}Y^{6/4}$. La recta del espacio que une los puntos $(0,0,4)$ y $(2,6,0)$ tiene como ecuaciones

$$x = 2\lambda \quad , \quad y = 6\lambda \quad , \quad z = 4 - 4\lambda$$

a la que pertenece el punto $(1,3,2)$ correspondiente al monomio XY^3Z^2, por tanto, los coeficientes de N_1 en ζ son las raíces de la ecuación

$$0 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$$

Así, podemos escribir

$$\zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4} + \zeta_1'$$

$$\zeta_2 = X^{2/4}Y^{6/4} + \zeta_2'$$

$$\zeta_3 = -X^{2/4}Y^{6/4} + \zeta_3'$$

$$\zeta_4 = -X^{2/4}Y^{6/4} + \zeta_4'$$

Haciendo el cambio $Z = X^{2/4}Y^{6/4}+Z_1$ se obtiene el polinomio

$$f_1 = Z_1^4+4X^{2/4}Y^{6/4}Z_1^3+(4XY^{12/4}-4XY^{16/4}-2XY^{20/4})Z_1^2+$$

$$(-8X^{6/4}Y^{22/4}-4X^{6/4}Y^{26/4}-4X^{8/4}Y^{24/4}-4X^{8/4}Y^{28/4})Z_1+$$

$$(4X^{8/4}Y^{32/4}+4X^{8/4}Y^{36/4}+X^{8/4}Y^{40/4}-4X^{10/4}Y^{30/4}-4X^{10/4}Y^{34/4}+$$

$$-X^{12/4}Y^{36/4})$$

cuyas raíces son

$$\{\zeta_1',\zeta_2',-2X^{2/4}Y^{6/4}+\zeta_3',-2X^{2/4}Y^{6/4}+\zeta_4'\}$$

El monomio N_2 del término clave de ζ_1' está dado por

$$N_2^2.XY^{12/4} = X^{8/4}Y^{32/4}$$

luego

$$N_2 = X^{2/4}Y^{10/4}.$$

Usando las notaciones anteriores y considerando la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

se tiene que $d = d_1 = 2$, $d_1' = 1$. Considerando el término clave

del coeficiente de Z_1 se tiene que $\beta = 4$ y

$$-8 = (-1)^{4-2+1}.4.\alpha.(-1)^{1+1}.2$$

luego $\alpha = 1$. Así se tienen:

$$\zeta_1' = X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_1''$$

$$\zeta_2' = X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_2''.$$

Designemos por $\psi_{(\omega,\omega')}$ al automorfismo de $Gal(K(\zeta)/K)$ correspondiente al par de raíces de la unidad (ω,ω'). Como

$$Gal(K(\zeta)/K) = \{\psi_{(1,1)},\psi_{(1,-1)},\psi_{(1,i)},\psi_{(1,-i)}\}$$

y

$$Gal(K(\zeta)/K(N_1)) = \{\psi_{(1,1)},\psi_{(1,-1)}\}$$

la única clase del cociente distinta de la unidad es la que contiene a $\psi_{(1,i)}$. Así

$$\zeta_3' = -X^{2/4}Y^{6/4}-X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_3''$$

$$\zeta_4' = -X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_4''$$

Haciendo en f_1 el cambio $Z_1 = X^{2/4}Y^{10/4}+Z_2$ se obtiene el polinomio

$$f_2 = Z_2^4+(4X^{2/4}Y^{6/4}+4X^{2/4}Y^{10/4})Z_2^3+(4XY^{12/4}+8XY^{16/4}+4XY^{20/4})Z_2^2$$
$$+(-4X^{8/4}Y^{24/4}-4X^{8/4}Y^{28/4})Z_2+(-4X^{10/4}Y^{30/4}-8X^{10/4}Y^{34/4}-$$
$$-4X^{10/4}Y^{38/4}-X^{12/4}Y^{36/4}),$$

cuyas raíces son

$$\{\zeta_1'',\zeta_2'',-2X^{2/4}Y^{6/4}-2X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_3'',-2X^{2/4}Y^{6/4}-2X^{2/4}Y^{10/4}+\zeta_4''\}$$

El monomio clave N_3 de ζ_1'' viene dado por

$$N_3^2.XY^{12/4} = X^{10/4}Y^{30/4}$$

luego

$$N_3 = X^{3/4}Y^{9/4}$$

Considerando ahora la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

se tiene que $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_2' = 2$. Fijándonos en el término clave del término independiente, se tiene que $\beta = 4$ y

$$-4 = (-1)^{4-2+2}.4.\alpha^2(-1)^{2+1}.1$$

de donde $\alpha^2 = 1$ luego $\alpha = \pm 1$. Así

$$\zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}+X^{3/4}Y^{9/4}+ \zeta_1''$$

$$\zeta_2 = X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}-X^{3/4}Y^{9/4}+ \zeta_2''$$

y aplicando $\psi_{(1,i)}$ se obtiene que

$$\zeta_3 = -X^{2/4}Y^{6/4}-X^{2/4}Y^{10/4}+iX^{3/4}Y^{9/4}+ \zeta_3''$$

$$\zeta_4 = -X^{2/4}Y^{6/4}-X^{2/4}Y^{10/4}-iX^{3/4}Y^{9/4}+ \zeta_4''$$

Haciendo el cambio de variable $Z_2 = X^{3/4}Y^{9/4}+Z_3$ en f_2 se obtiene el polinomio

$$f_3 = Z_3^4+(4X^{2/4}Y^{6/4}+4X^{2/4}Y^{9/4}+4X^{3/4}Y^{9/4})Z_3^3+$$
$$(4XY^{12/4}+8XY^{16/4}+4XY^{20/4}+12X^{5/4}Y^{15/4}+12X^{5/4}Y^{19/4}+6X^{6/4}Y^{18/4})Z_3^2+$$
$$(8X^{8/4}Y^{24/4}+8X^{8/4}Y^{28/4}+8X^{7/4}Y^{21/4}+16X^{7/4}Y^{25/4}+8X^{7/4}Y^{29/4}+$$
$$+4X^{9/4}Y^{27/4})Z_3$$

Como ese polinomio no tiene término independiente, eso indica que nuestro algoritmo ha terminado y que

$$\zeta = X^{2/4}Y^{6/4}+X^{2/4}Y^{10/4}+X^{3/4}Y^{9/4}$$

y todos sus conjugados son las raíces de f.

CAPITULO II

Sección 1: "Superficie de Riemann de $k((X,Y))$"

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, X e Y variables formalmente independientes sobre k, $K = k((X,Y))$, $R = k[[X,Y]]$. En esta sección nuestro objetivo es calcular explícitamente el conjunto Σ de las valoraciones v de K/k tales que su anillo R_v contenga a R.

Hay que hacer notar dos observaciones preliminares. La primera es relativa a la notación y es que, sin explicitarla previamente, usaremos la terminología clásica de valoraciones, tal como puede encontrarse, por ejemplo, en (ZS II). La segunda es que muchos de los resultados aquí expuestos son válidos también cuando la característica de k es positiva. Siempre que podamos reseñaremos explícitamente los puntos en que hagamos uso de la hipótesis de característica cero.

Para el cálculo de nuestro conjunto Σ hacemos una primera clasificación, que resultará bastante grosera, atendiendo al centro de la valoración en el anillo R. Este centro puede ser el ideal (0), un ideal primo de altura uno o el ideal maximal M de R. Veremos que la mayor parte de los elementos de Σ tienen centro este ideal maximal.

PROPOSICION 1.1. La única valoración de Σ con centro el ideal (0) es la valoración trivial.

Demostración.- En efecto, si $v \in \Sigma$ es tal que $m_v \cap R = (0)$, entonces $R_v \supset R_{(0)} = K$ y por lo tanto $R_v = K$ y v es la valoración trivial.

Sea I el conjunto de los ideales primos de R de

altura uno. Cualquier $p \in I$ será de la forma $p = (f)$ con $f \in R$ irreducible. El siguiente teorema nos dice cómo son los elementos de Σ con centro un ideal de I.

TEOREMA 1.2. Para cualquier $v \in \Sigma$ con centro en R un ideal $p \in I$ es $R_v = R_p$, v es discreta de rango uno y, si $p = (f)$ con $f \in R$ irreducible, el cuerpo residual de la valoración es el cuerpo de funciones meromorfas formales sobre la curva algebroide plana de ecuación $f = 0$. Además, para culquier $g/h \in K$ existen enteros r y s tales que $v(g/h) = r-s$.

Demostración.- Sea $v \in \Sigma$ tal que $m_v \cap R = p$ con $p \in I$; entonces $R_v \supset R_p$ y como R_p es local, noetheriano, de dimensión uno e íntegramente cerrado, es un anillo de valoración discreta de rango uno y de ahí que se tenga $R_v = R_p$.

Si tenemos ahora $f \in R$ irreducible tal que $p = (f)$, el cuerpo residual ∇_v de v será entonces $R_p/pR_p \simeq Q(R/p) \simeq Q(R/(f))$ donde con $Q(-)$ indicamos el cuerpo de fracciones. Así ∇_v es el cuerpo de funciones meromorfas formales que postulamos en el enunciado del teorema.

Por último, la realización de la valoración se efectua, si es $g/h \in K$ con $h \neq 0$, de la siguiente forma:

Existen enteros r y s, así como elementos g_1 y $h_1 \in R$ tales que

$$g = g_1 f^r, \quad h = h_1 f^s, \text{ donde } f \nmid g_1,\ f \nmid h_1.$$

Entonces se tendrá

$$v(g/h) = r-s$$

y con ello concluimos el teorema.

Con estas dos proposiciones quedan descritas todas las valoraciones de Σ con centro en R distinto del ideal maximal M. Nos quedan aun el grueso de ellas que estarán en el último caso antes citado. Para realizar su estudio, nos ceñiremos a

un anillo más pequeño que R y demostraremos que en dicho anillo el grupo de valores permanece el mismo.

Sea $R' = k[[X]][Y] \subset R$, $K' = k((X))(Y)$ su cuerpo de fracciones. A partir de ahora todas las valoraciones v consideradas serán centradas en el ideal maximal M de R.

<u>LEMA 1.3</u>. Sea $v \in \Sigma$, v' su restricción a K', Γ el grupo de valores de v, Γ' el de v'. Se verifica que $\Gamma = \Gamma'$.

<u>Demostración</u>.- Puesto que es $R_v \supset R$, se tiene también $R_{v'} \supset R'$. Como K y K' son los cuerpos de fracciones de R y R' respectivamente, para demostrar la igualdad de los grupos de valores bastará probar que $v(R \setminus \{0\}) \subset v(R' \setminus \{0\})$, ya que al ser v' restricción de v se tiene $\Gamma' \subset \Gamma$.

Sea $f \in R \setminus \{0\}$; siempre podemos escribir

$$f(X,Y) = X^r g(X,Y), \quad r \geq 0, \quad g(0,Y) \neq 0$$

y supongamos que $n = \nu(g(o,Y))$, donde ν representa el orden usual. Por el Teorema Preparatorio de Weierstrass se puede expresar

$$f(X,Y) = X^r U(X,Y)\, h(X,Y)$$

donde $U(0,0) \neq 0$ y $h(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X)$. Como $U(X,Y)$ es invertible en R, lo es en R_v y por tanto $v(U(X,Y)) = 0$ y así se tiene

$$v(f) = r\, v(X) + v(h)$$

y de aquí la igualdad del grupo de valores.

Siguiendo en la situación del Lema 1.3, sea $R'' = k[[X]]$ $K'' = k((X))$ y sea v'' la restricción de v a K''. Se tendrá también $R'' \supset R_{v''}$ y como R'' es un anillo de valoración discreta de rango uno, o bien v'' es la valoración trivial, lo que no es posible por tener X valor positivo, o bien $R'' = R_{v''}$ y v'' es por tanto discreta de rango uno. Si es Γ'' el grupo de valores de v'', se tendrá que, como grupos ordenados, Γ'' y Z son isomorfos. Por ello, usaremos Z o Γ'' indistintamente.

Puesto que $\Gamma = \Gamma'$, en cuanto a grupo de valores se refiere, las posibilidades de valoraciones de K/k centradas en el ideal maximal M de R son las mismas que las valoraciones de K'/k y éstas son las que estudiaremos a continuación. Para ello juega un papel fundamental el grupo cociente Γ/Γ''. El primer resultado al respecto es el siguiente:

<u>TEOREMA 1.4</u>. Si en Γ/Γ'' existe una clase sin torsión, entonces $\Gamma \simeq Z^2$ como grupos abelianos no ordenados.

<u>Demostración</u>.- Designemos por $Tor(\Gamma/\Gamma'')$ al conjunto de los elementos de torsión de Γ/Γ''.

Por hipótesis, debe existir un $w \in R'$ tal que $v'(w) + \Gamma'' \notin Tor(\Gamma/\Gamma'')$. Sea $K_1 = K''(w)$; K' es una extensión finita de K_1 y w será trascendente sobre K''.

Llamemos v_1 a la restricción de v a K_1; tomando un polinomio $f \in K''[w]$,

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i w^i \ , \ a_i \in K''$$

En la expresión de f no puede haber dos sumandos con el mismo valor pues, si existiesen dos índices i, j ; $0 \leq i < j \leq n$ tales que $v'(a_i w^i) = v'(a_j w^j)$, se tendría

$$v''(a_i) + i\, v_1(w) = v''(a_j) + j\, v_1(w)$$

y de aquí

$$(i-j)\, v(w) = v''(a_j) - v''(a_i)$$

luego es $v(w) + \Gamma'' \in Tor(\Gamma/\Gamma'')$

en contradicción con la hipótesis.

Por este hecho, se obtiene que

$$(1) \qquad v_1(f) = \min_{0 \leq i \leq n} \{v''(a_i) + i\, v_1(w)\}$$

y por consiguiente

$$\Gamma_1 = Z + Z\, v(w)$$

Como por otro lado es $Z \cap Z\, v(w) = 0$, por ser $v(w)$ sin torsión,

la suma obtenida es directa.

Sea ahora $n = [K' : K_1]$; cualquier elemento $\gamma \in K'$ verificará una ecuación algebraica

$$(2) \qquad \gamma^m + b_1\gamma^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + b_{m-1}\gamma + b_m = 0$$

con $m \leq n$. Es claro que en (2) debe haber dos sumandos distintos con valores iguales. Llamando $b_0 = 1$, existirán i,j; $0 \leq i < j \leq n$ tales que

$$v'(b_i\gamma^{m-i}) = v'(b_j\gamma^{m-j})$$

por tanto

$$v_1(b_i) + (m-i)\, v'(\gamma) = v_1(b_j) + (m-j)\, v'(\gamma)$$

de donde

$$(j-i)\, v'(\gamma) = v_1(b_j) - v_1(b_i)$$

lo que implica que $v'(\gamma) \in \frac{1}{n}\Gamma_1$. Así se tiene $\Gamma' \subset \frac{1}{n}\Gamma_1$. Sea t el menor entero tal que $\Gamma' \subset \frac{1}{t}\Gamma_1$. Como $\frac{1}{t}(1,0) \in \Gamma'$ y $\frac{1}{t}(0,1) \in \Gamma'$ se tendrá $\Gamma' = \frac{1}{t} Z^2 \simeq Z^2$, como queríamos probar.

Una vez probado el isomorfismo existente entre Γ y Z^2, si conocemos los órdenes posibles sobre Z^2 compatibles con la estructura de grupo abeliano, mediante un isomorfismo ordenado, trasladamos este orden a Γ y por consiguiente tendremos una descripción completa, en cuanto a grupo de valores, de las valoraciones posibles en el caso en que $(\Gamma/\Gamma'') \setminus \mathrm{Tor}(\Gamma/\Gamma'') \neq \Phi$. Los siguientes resultados nos dicen exactamente los órdenes posibles sobre Z^2.

<u>LEMA 1.5</u>. Sea una relación de orden $\leq$ sobre Z^2 compatible con la estructura de grupo y sea H un subgrupo aislado de Z^2 distinto de $\{(0,0)\}$ En estas condiciones, existe una recta del plano real r tal que $H = r \cap Z^2$. Además, el subconjunto H_+ de los elementos positivos de H tiene un mínimo que es uno de los generadores de $r \cap Z^2$ como grupo cíclico.

Demostración.- Veamos en primer lugar que los puntos de H están todos sobre una recta. Supongamos lo contrario, sean (a,b) y (c,d) dos puntos de H tales que $bc-ad \neq 0$. Tomemos ahora un punto arbitrario $(x,y) \in Z^2$. Llamando

$$u = ay-bx$$

$$v = cy-dx$$

se tiene la igualdad

$$(bc-ad).(x,y) = v.(a,b)-u(c,d).$$

Por tanto, $(bc-ad).(x,y) \in H$. Pero al ser H un subgrupo aislado esto implica que el punto $(x,y) \in H$ y en consecuencia H sería todo Z^2, en contradicción con ser un subgrupo aislado. Así se tiene la existencia de una recta r tal que $H \subset r$.

Recíprocamente, sea $\alpha \in Z^2 \cap r$ un generador de este grupo cíclico; como H es notrivial, existirá un $n \in Z$ tal que $n\alpha \in H$ y por ser subgrupo aislado, es $\alpha \in H$. Con ello se tiene probado el lema pues obviamente uno de los dos generadores de $H = r \cap Z^2$ es mínimo entre los positivos.

TEOREMA 1.6. Dada una relación de orden $\leq$ sobre Z^2 compatible con la estructura de grupo abeliano, el grupo ordenado $(Z^2, \leq)$ es isomorfo, preservando el orden, bien a (Z^2, α) donde α representa el orden lexicográfico, bien a un subgrupo ordenado de $\mathbb{R}$ de la forma $Z \oplus Z\xi$ con $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus Q_+$

Demostración.- Supongamos que el orden $\leq$ que tenemos es arquimediano sobre Z^2. Existirá entonces una inmersión de grupos ordenados $\Psi:(Z^2, =) \hookrightarrow \mathbb{R}$. Como siempre podemos elegir una base de Z^2 de forma que los dos elementos de dicha base sean positivos

para ese orden, supongamos que $(1,0) > (0,0)$ y $(0,1) > (0,0)$.

Sean $\Psi(1,0) = \lambda$, $\Psi(0,1) = \mu$ donde λ y μ son positivos por ser Ψ un homomorfismo ordenado. Se tendrá que, para cualquier $(n,m) \in Z^2$ es $\Psi(n,m) = n\lambda + m\mu$.

Restringiéndonos a su imagen, Ψ se convierte en un isomorfismo de grupos ordenados:

$$\Psi : (Z^2, \leq) \longrightarrow Z\lambda \oplus Z\mu$$

Componiendo este isomorfismo con el isomorfismo de grupos ordenados

$$\phi : Z\lambda \oplus Z\mu \longrightarrow Z \oplus Z\xi \quad , \quad \xi = \frac{\mu}{\lambda}$$

que lleva $n\lambda + m\mu$ sobre $n + m\xi$, obtenemos que

$$(Z^2, \leq) \simeq (Z \oplus Z\xi, \leq)$$

donde $\xi \in \mathbb{R} \setminus Q$, pues de lo contrario, si $\xi = \frac{r}{q} \in 0$, tendríamos $\phi \circ \Psi(-r,q) = 0$.

Supongamos ahora que nuestro orden $\leq$ no es arquimediano. Esto nos dice que existe un subgrupo aislado H de Z^2 distinto del $\{(0,0)\}$, pues ha de ser de rango estrictamente mayor que uno.

Tomemos un plano con un sistema de coordenadas ortogonales e identifiquemos Z^2 con los puntos de coordenadas enteras. Por el lema 1.5, H está contenido en el conjunto de coordenadas enteras de una recta $ax-by = 0$, con (a,b) mínimo entre los positivos que pertenecen a H. Por ser este (a,b) mínimo y ser H un subgrupo aislado, ha de ser el $m.c.d(a,b) = 1$.

Podemos imponer que el punto $(-b,a)$ sea positivo para el orden $\leq$ sin que ello suponga restricción alguna, pues de no ser positivo razonaríamos con $(b,-a)$.

Consideremos la región del plano

$$S_1 = \{(x,y) \in Z^2 / \ y \geq \frac{b}{a} x \ , \ y \geq -\frac{a}{b} x\}$$

y sea $(x,y) \in S_1$. Entonces los números $u = by + ax$, $v = ay-bx$

son enteros no negativos y podemos obtener fácilmente que

$$(a^2 + b^2)\,(x,y) = u.(a,b) + v.(-b,a)$$

luego $(a^2 + b^2)\,(x,y) \geq 0$ y por ser H un subgrupo aislado, también es positivo el punto (x,y).

Sea ahora la región

$$S_2 = \{(x,y) \in Z^2 / \; y \geq \frac{b}{a}x - \; y < -\frac{a}{b}x\}$$

y supongamos que existe $(c,d) \in S_2$ tal que $(c,d) < (0,0)$. Por pertenecer a S_2, es $d \geq \frac{b}{a}c$ y $d < -\frac{a}{b}c$, por lo tanto

(1) $ad-bc \geq 0$

(2) $bd-ac < 0$

Sea $n > 0$ tal que

(3) $n(a^2 + b^2) + bd + ac = 0$

y consideremos la suma

$$n\,(a,b) + (c,d) = (na + c, nb + d)$$

Se tiene entonces

$$\frac{b}{a}(na + c) = nb + \frac{bc}{a} \overset{(1)}{\leq} nb + d$$

$$-\frac{a}{b}(na + c) = \frac{-na - ac}{b} \overset{(3)}{\leq} nb + d$$

y por consiguiente $(na + c, nb + d) \in S_1$, luego es un elemento positivo; pero en este caso $(0,0) < (-c,-d) < n\,(a,b)$ y por ser H un subgrupo aislado tendría que ser $(-c,-d) \in H$ en contradicción con el lema 1.5.

Estas consideraciones nos llevan a que la región S_2 también es positiva, con lo que el orden en Z^2 sería:

$$(4) \quad (x,y) \geq (0,0) \iff \begin{cases} ay-bx > 0 \\ \text{ó} \\ ay-bx = 0 \;\; . \; y \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Por otro lado, vimos que había de ser $m.c.d.(a,b) = 1$, luego existen $\alpha,\beta \in Z$ tales que $\alpha a + \beta b = 1$. Así (a,b) y (α,β) constituyen una base de Z^2.

Consideremos el isomorfismo $\eta: Z^2 \longrightarrow Z^2$ definido por

$$\eta(a,b) = (0,1) \quad y \quad \eta(\alpha,\beta) = (1,0)$$

Este isomorfismo preserva el orden pues, para cualquier (x,y) podemos poner

$$(x,y) = (\alpha x + \beta y)\,(a,b) + (ay - bx)\,(-\beta,\alpha)$$

luego

$$\eta(x,y) = (\alpha x + \beta y)\,(0,1) + (ay - bx)\,(1,0) =$$
$$=(ay - bx, x + y)$$

Si $ay - bx = 0$, es $a(\alpha x + \beta y) = x$, luego el signo de x y el de $\alpha x + \beta y$ coinciden. Llamando $(x',y') = \eta(x,y)$, obtenemos de (4)

$$(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' > 0 \\ \text{ó} \\ x' = 0 \quad e \quad y' \geq 0 \end{cases}$$

probando con ello que $(Z^2,\leq)$, cuando el orden $\leq$ no es arquimediano, es isomorfo, como grupo totalmente ordenado, a (Z^2,α), es decir, a Z^2 con el orden lexicográfico, terminando la demostración del teorema.

Como consecuencia inmediata de este teorema se tiene la siguiente

<u>PROPOSICIÓN 1.7</u>. Sea $v \in \Sigma$, cuyo centro en R es el ideal maximal M de R, v'' su restricción a $K'' = k((X))$, Γ y Γ'' los grupos de valores de v y v'' respectivamente. Si $\Gamma/\Gamma'' \setminus \mathrm{Tor}(\Gamma/\Gamma'') \neq$ entonces, o bien v es discreta de rango dos, o bien v es no discreta de rango uno, con grupo de valores $\Gamma \subset R$, y $\Gamma \not\subset Q$.

Veamos ahora qué ocurre con las valoraciones de Σ centradas en el ideal M, cuando $\mathrm{Tor}(\Gamma/\Gamma'') = \Gamma/\Gamma''$.

<u>LEMA 1.8</u>. Sea G un grupo abeliano totalmente ordenado que contiene a Z como subgrupo ordenado y tal que $\mathrm{Tor}(G/Z) = G/Z$. Existe entonces una inmersión ordenada $\psi: G \hookrightarrow Q$.

Demostración.- Si $Tor(G/Z) = G/Z$, para cualquier $a \in G$ ha de existir un entero n_a tal que $n_a \cdot a = x_a \in Z$. Definiendo la correspondencia $\psi: G \longrightarrow Q$ mediante $\psi(a) = \frac{x_a}{n_a}$, es claro que ψ es una inmersión de G en Q como se postula en enunciado.

Definición 1.9.- Sea G un grupo abeliano tal que $Tor(G) = G$; se dirá que G posee una cota uniforme de torsión si existe $n \in Z_+$ tal que $nG = (0)$.

PROPOSICION 1.10. Sea $v \in \Sigma$, con centro en R el ideal maximal M, v'' su restricción a $K'' = k((X))$, Γ y Γ'' los grupos de valores de v y v'' respectivamente. Si $Tor(\Gamma/\Gamma'') = \Gamma/\Gamma''$, entonces v es de rango uno con grupo de valores contenido en Q. Además, v es discreta si y sólo si Γ/Γ'' posee una cota uniforme de torsión.

Demostración.- Identifiquemos Γ'' con Z; a la vista del lema 1.8 hay que comprobar solamente la última afirmación. Sea $n > 0$ la cota uniforme de torsión de Γ/Γ''. Construyendo la inmersión del lema 1.8 $\psi: \Gamma \hookrightarrow Q$, se tiene que $im\psi \subset \frac{1}{n} Z$, luego $\Gamma \simeq Z$ como grupos ordenados y por tanto v es discreta.

Recíprocamente, sea $\Gamma \subset Q$ y $\Gamma \overset{\psi}{\simeq} Z$ como grupos ordenados. Si $\psi(\frac{a}{n}) = 1$, con $n > 0$, entonces Γ es el grupo cíclico engendrado por $\frac{a}{n}$ y así $n\Gamma \subset Z$.

Con las proposiciones 1,7 y 1.10 tenemos el espectro completo de las posibles valoraciones de Σ cuyo centro en R es el ideal maximal. Nos falta comprobar si existen realmente todos esos tipos de valoraciones. Nuestra labor será comprobar tal existencia y, si es posible, construir explícitamente tales valoraciones. Por razones técnicas empezaremos por las valoraciones discretas de rango uno.

Nota 1.11.- Antes de empezar nuestra construcción observemos lo

siguiente : Si tenemos una función $\psi : R\setminus\{0\} \longrightarrow G$, donde G es un grupo abeliano totalmente ordenado, verificándose

$$\psi(fg) = \psi(f) + \psi(g)$$

$$\psi(f + g) \geq \text{mín}\ \{ \psi(f), \psi(g)\} \qquad f,g \in R$$

entonces ψ admite una extensión y sólo una a una valoración v de K/k cuyo grupo de valores sea G, poniendo $v(\frac{f}{g}) = \psi(f) - \psi(g)$ Una tal aplicación ψ se llama una función de orden sobre R.

Para construir las valoraciones discretas de rango uno empezaremos por un ejemplo, que resultará ser tan general, que abarcará todas las valoraciones susodichas.

Cada serie $f \in R$, $f \neq 0$ será escrita en la forma

$$f = \sum_{(\alpha,\beta) \in Z_0^2} f_{\alpha,\beta}\ X^{\alpha}Y^{\beta}, \qquad f_{\alpha,\beta} \in k$$

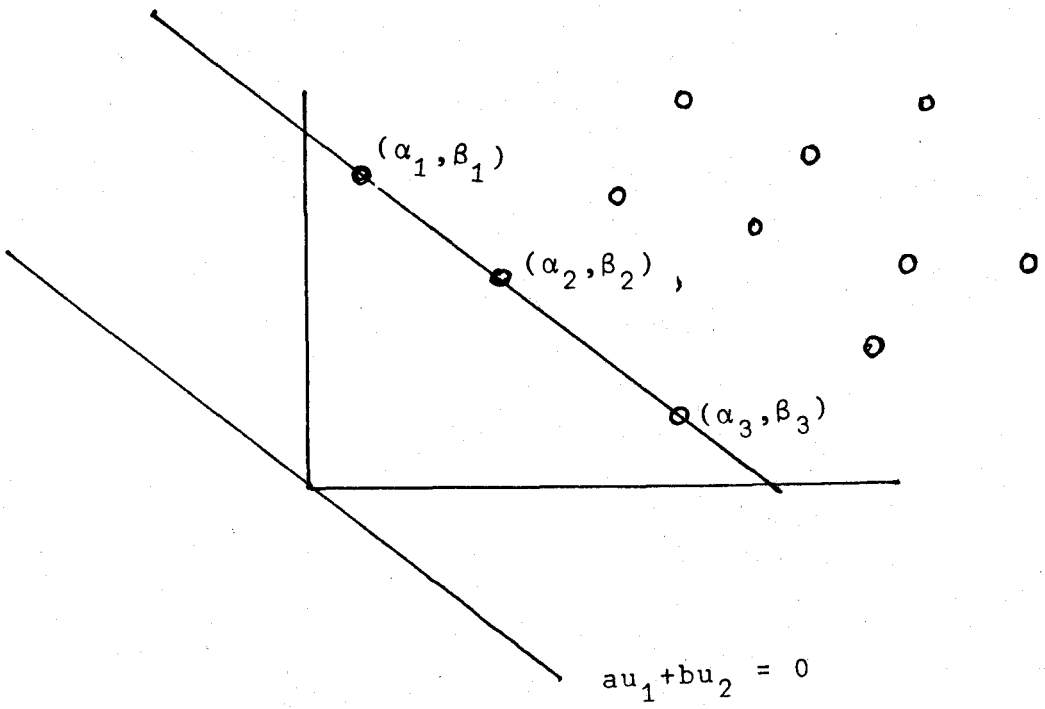
y se designará por $E(f)$ al conjunto

$$E(f) = \{(\alpha,\beta) \in Z_0^2 / \ f_{\alpha,\beta} \neq 0\}$$

Sea $L = au_1 + bu_2$ una forma lineal en las variables u_1 y u_2 con coeficientes $a,b \in Z_+$. Asociada a L hay una función de orden $\nu_L : R\ \{0\} \longrightarrow Z$ definida

$$\nu_L(f) = \text{mín}\ \{L(\alpha,\beta) / \ (\alpha,\beta) \in E(f)\}$$

Geométricamente, este proceso lo pode mos interpretar de la siguiente forma. Consideremos un plano con un sistema de coordenadas ortogonales $\{u_1, u_2\}$. Dentro de él representaremos los elemtos del conjunto $E(f)$ asignando a cada $(\alpha,\beta) \in E(f)$ el punto de coordenadas enteras (α,β), resultando una nube de puntos. Tomando en ese plano la recta $au_1 + bu_2 = 0$ y desplazándola paralelamente a sí misma hasta que toque el primer punto de la nube (α,β) de $E(f)$, se tiene que $\nu_L(f) = L(\alpha,\beta)$, como se puede observar en la figura siguiente donde solo están dibujados los puntos de $E(f)$ y las rectas que pasan por el orígen y la que toca al primer punto de $E(f)$:



Si $f \in R\setminus\{0\}$, llamaremos forma de grado λ respecto de L y la representaremos por $f_{\lambda,L}$ al polinomio

$$f_{\lambda,L} = \sum_{(\alpha,\beta)\in E(f),\ L(\alpha,\beta)=\lambda} f_{\alpha,\beta}\, X^{\alpha}Y^{\beta}$$

si hay algún (α,β), de lo contrario se pondría $f_{\lambda,L} = 0$. Si $\nu_L(f) = \lambda_0$, a $f_{\lambda_0,L}$, que siempre es distinta de cero, se la llama forma inicial de f respecto a L. Es claro que ν_L verifica las condiciones de una función de orden sobre R, es decir

$$\nu_L(fg) = \nu_L(f) + \nu_L(g)$$
$$\nu_L(f+g) \geq \text{mín}\,\{\nu_L(f),\nu_L(g)\}$$

y por lo tanto ν_L se extiende unívocamente a una valoración

$$v_L : K^* = K\setminus\{0\} \longrightarrow Z$$

Hay que hacer notar que, en general, Z no es el grupo de valores de v_L, sino $Z\cdot d$, donde $d = \text{m.c.d}(a,b)$. Pero, componiendo v_L con el isomorfismo ordenado que lleva $d\,n$ sobre n, se obtiene la misma valoración y es por ello que podemos considerar desde el principio que el $\text{m.c.d}(a,b)$ es uno, sin que ello suponga restricción alguna.

Está claro que $v_L \in \Sigma$ y que $m_{v_L} \cap R = M$. Calculemos ahora el cuerpo residual de la valoración, al que designa-

remos por ∇_{v_L}.

Sea $\bar{R} = k\left[\frac{Y^a}{X^b}\right]$, $\bar{K} = k(\frac{Y^a}{X^b}) = k(\frac{X^b}{Y^a})$ y sea el k-homomorfismo $\psi: \bar{R} \longrightarrow \nabla_{v_L}$ dado por la sustitución

$$\psi(\frac{Y^a}{X^b}) = \frac{Y^a}{X^b} + m_{v_L}$$

donde $\frac{Y^a}{X^b} + m_{v_L} \neq 0$ pues $v_L(\frac{Y^a}{X^b}) = 0$. Se verifica que ψ es inyectivo pues si se tiene un polinomio no nulo de $\bar{R}$

$$P(\frac{Y^a}{X^b}) = \alpha_0(\frac{Y^a}{X^b})^n + \alpha_1(\frac{Y^a}{X^b})^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}(\frac{Y^a}{X^b}) + \alpha_n \neq 0$$

es

$$\psi(P) = \frac{\alpha_0 Y^{na} + \alpha_1 X^b Y^{(n-1)a} + \ldots + \alpha_{n-1} X^{(n-1)b} Y^a + \alpha_n X^{nb}}{X^{nb}} + m_{v_L}$$

que es distinto de cero, pues numerador y denominador son formas de grado nab, respecto de L, y distintas de cero.

Por ser ψ inyectivo se le puede ampliar a una inyección, designada con la misma letra $\psi: \bar{K} \longrightarrow \nabla_{v_L}$; se trata ahora de ver que ψ es sobreyectiva, con lo que terminaremos el cálculo de ∇_{v_L}. Observemos, en primer lugar, lo siguiente:

Sean f y g pertenecientes a $R \setminus \{0\}$ y sean

$$f = f_{r,L} + f_{r+1,L} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g = g_{s,L} + g_{s+1,L} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

las respectivas descomposiciones de f y g en suma de formas. Se puede ver fácilmente que, si $r \geq s$, es

$$\frac{f}{g} + m_{v_L} = \frac{f_{r,L}}{g_{s,L}} + m_{v_L}$$

Sea ahora $r = s$, de tal forma que $\frac{f}{g} + m_{v_L} \neq 0$. Si $X^\alpha Y^\beta$ es un

monomio tal que $a\alpha + b\beta = r$, se tiene que

$$\frac{f_{r,L}}{X^{\alpha}Y^{\beta}} \quad y \quad \frac{g_{r,L}}{X^{\alpha}Y^{\beta}}$$

son polinomios en $\frac{Y^a}{X^b}$ o en $\frac{X^b}{Y^a}$. En efecto, dado un monomio $X^{\alpha'}Y^{\beta'}$ tal que $a\alpha' + b\beta' = r$, es

$$a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) = 0$$

con lo que, al ser a y b primos relativos, ha de ser $\beta' - \beta = \lambda a$, $\alpha' - \alpha = -\lambda b$, luego

$$\frac{X^{\alpha'}Y^{\beta'}}{X^{\alpha}Y^{\beta}} = \left(\frac{Y^a}{X^b}\right)^{\lambda}$$

que es un monomio en $\frac{Y^a}{X^b}$ si $\lambda > 0$ ó en $\frac{X^b}{Y^a}$ si $\lambda < 0$, lo que prueba que nuestro ψ es sobreyectivo. Así hemos probado que

$$\nabla_{v_L} \simeq k\left(\frac{Y^a}{X^b}\right)$$

Veamos ahora que, dada una valoración v de K/k discreta de rango uno, tal que $R_v \supset R$ y $m_v \cap R = M$, es la valoración asociada a alguna función lineal de orden ν_L de las que hemos descrito. En efecto, sea v una tal valoración; pongamos $v(X) = a$, $v(Y) = b$ y sea $u \in m_v$ un elemento de valor uno para v. Existen entonces u_1^* y u_2^* pertenecientes a $R_v \setminus m_v$ tales que podemos expresar

$$X = u^a u_1^*$$
$$Y = u^b u_2^*$$

Sea $L = a u_1 + b u_2$ y consideremos la valoración asociada a ν_L, v_L y sea

$$f = f_{r,L} + f_{r+1,L} + \dots\dots\dots\dots, \quad f \in R \setminus \{0\}$$

la descomposición de f en suma de formas respecto a L, con $f_{r,L} \neq 0$ Se tiene que

$$f(u^a u_1^*, u^b u_2^*) = u^r f_{r,L}(u_1^*, u_2^*) + u^{r+1} f_{r+1,L}(u_1^*, u_2^*) + \dots\dots$$

que pertenece a (u^r) pero no a (u^{r+1}) ya que $f_r(u_1^*,u_2^*) \neq 0$ por ser X e Y formalmente independientes sobre k. Así $r = v(f) = v_L(f)$ y por tanto $v = v_L$.

Se tiene con ello probado el siguiente

TEOREMA 1.12. Supongamos cada $f \in R \setminus \{0\}$ escrita en la forma

$$f = \sum_{(\alpha,\beta) \in Z_0^2} f_{\alpha,\beta} X^\alpha Y^\beta$$

y sea

$$E(f) = \{(\alpha,\beta) \in Z_0^2 / \ f_{\alpha,\beta} \neq 0 \}$$

Sea $v: K \setminus \{0\} \longrightarrow Z$ una aplicación. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1.12.1.- v es una valoración de K/k cuyo anillo contiene a R, cuyo centro en R es M y discreta de rango uno.

1.12.2.- Existe una forma lineal $L = au_1 + bu_2$, $a,b \in Z_+$ tal que, designando por ν_L a la aplicación de $R \setminus \{0\}$ en Z definida por

$$\nu_L(f) = \min \{L(\alpha,\beta) / \ (\alpha,\beta) \in E(f)\}$$

es $v(\frac{f}{g}) = \nu_L(f) - \nu_L(g)$, $\frac{f}{g} \in K^*$. En este caso, el cuerpo residual ∇_L de la valoración es una extensión trascendente de k, concretamente $k(\frac{Y^a}{X^b})$.

Este teorema deja perfectamente caracterizadas las valoraciones de Σ con centro el ideal maximal M de R, discretas de rango uno. Por razones técnicas, seguiremos el estudio de las valoraciones centradas en M con las valoraciones discretas de rango dos. Empezamos con un resultado técnico.

LEMA 1.13.(Lipman) Sea $\square$ un dominio de integridad local noetheriano y completo, con k como cuerpo de coeficientes, y sea $\bar{K}$ el cuerpo de fracciones de $\square$. Para toda valoración v de $\bar{K}/k$, discreta de rango uno, se verifica que $R_v \supset \square$.

Demostración.- Para este lema se necesita específicamente la hipótesis de característica cero para k, indispensable para afirmar que toda unidad de $\square$ tiene una raíz n-ésima en $\square$, para cualquier entero n.

Sea m el ideal maximal de $\square$, y sea $x \in m$; entonces $1 + x \in \square \setminus m$ y, a fortiori, $1 + x \neq 0$. Sea $v(1 + x) = r \in Z$; para cada entero $n > 0$ existe $y_n \in \square \setminus m$ tal que $(y_n)^n = 1 + x$. Esto implica que, para cada $n > 0$, r es divisible por n y por lo tanto $r = 0$. Así $1 + x \in R_v$, lo que nos dice que $m \subset R_v$. Tomemos ahora $x \in m \setminus \{0\}$ y sea $y \in \square$ un elemento arbitrario. Para cada entero $n > 0$ se verifica que $y^n x \in m$, es decir, que $n\, v(y) + v(x) = 0$, luego $v(y) = 0$, ya que $v(x) = 0$. En consecuencia se tendrá $\square \subset R_v$, como queríamos probar.

Nota 1.14.- Vamos a construir dos casos de valoración discreta de rango dos, componiendo valoraciones de rango uno y demostraremos que cualquier valoración discreta de rango dos de Σ con centro el ideal maximal M de R está comprendida en uno de los dos casos.

Sea v_1 una valoración discreta de rango uno perteneciente a Σ, cuyo centro en R sea un ideal primo p de altura uno; podemos considerar que p está engendrado por un polinomio de Weirstrass irreducible

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X)$$

El cuerpo residual de v_1, según vimos en el teorema 1.2, es el cuerpo de fracciones $\bar{K}$ de $\square = R/(f)$. Sea ahora una valoración v_2 discreta de rango uno de $\bar{K}/k$; por el lema 1.13 $R_{v_2} \supset \square$, luego $R_{v_2} \supset \overline{\square}$, cierre íntegro de $\square$ en $\bar{K}$. Como $\overline{\square}$ es un anillo de valoración discreta de rango uno, es $R_{v_2} = \overline{\square}$. La valoración v_2 puede entonces realizarse así:

Si $x = X + (f)$, $y = Y + (f)$ y

$$x = t^n$$

$$y = \psi(t)$$

son unas paramétricas de Puiseux de la curva plana $\mathrm{Spec}(\square)$, para cada $g(x,y)/h(x,y) \in \bar{K}\setminus\{0\}$ es

$$v_2(g(x,y)/h(x,y)) = \nu(g(t^n,\psi(t)) - \nu(h(t^n,\psi(t))$$

Por otra parte, sabemos también como se realiza v_1: Si $g(X,Y)/h(X,Y) \in K\setminus\{0\}$ se puede escribir de manera única

$$\frac{g(X,Y)}{h(X,Y)} = f(X,Y)^r \frac{g'(X,Y)}{h'(X,Y)},\ f\nmid g',\ f\nmid h',\ r \in Z$$

y así

$$v_1(g(X,Y)/h(X,Y)) = r.$$

Sea entonces $v: K^* = K\setminus\{0\} \longrightarrow Z\times Z$ dada por la regla siguiente, sea

$$0 \neq \frac{g(X,Y)}{h(X,Y)} = f(X,Y)^r \frac{g'(X,Y)}{h'(X,Y)},\ f\nmid g',\ f\nmid h',\ r \in Z$$

entonces

$$v(g/h) = (r, v_2(g'(x,y)/h'(x,y)))$$

Esta expresión coincide con

$$(v_1(g(X,Y)/h(X,Y)), v_2(g(x,y)/h(x,y)))$$

y de ahí que sea fácil comprobar que, así definida, v es una valoración de K/k con grupo de valores $Z\times Z$ y por consiguiente v es discreta de rango dos.

Designemos por $\leq$ al orden lexicográfico sobre Z^2. Si $g(X,Y) \in R$, $g(X,Y) = f(X,Y)^r g'(X,Y)$, $r \geq 0$, $f\nmid g'$, se tendrá:

Si $r > 0$, $v(g(X,Y)) = (r, v_2(g'(x,y))) > (0,0)$

Si $r = 0$, $v(g(X,Y)) = (0, \nu(g'(t^n,\psi(t))) \geq (0,0)$

Luego $R_v \supset R$. Como $v(X) = (0,n)$ y $v(Y) = (0,\nu(\psi(t)))$, si $f \neq Y$ ó $v(Y) = (1,0)$ si $f = Y$, entonces el centro de v en R es el ideal maximal M.

Sea

$$\eta_1 : R_{v_1} \longrightarrow R_{v_1}/m_{v_1} = \bar{K}$$

el homomorfismo natural; se tiene que $R_v = \eta_1^{-1}(R_{v_2})$, $m_v = \eta_1^{-1}(m_{v_2})$, luego la aplicación canónica

$$R_v/m_v \longrightarrow R_{v_2}/m_{v_2} = k$$

que lleva $\alpha + m_v$ sobre $(\alpha + m_{v_1}) + m_{v_2}$ es un isomorfismo y por lo tanto $R_v/m_v = k$ y v es de dimensión cero.

Respecto a esta construcción hecha hay que hacer una advertencia importante. Toda ella depende de la elección de un generador de m_{v_1} como ideal de R_{v_1}, que en este caso hemos supuesto es f. Veamos qué pasa cuando se cambia de generador.

Sea $m_{v_1} = \zeta R_{v_1}$; existen entonces series $p_1(X,Y)$, $p_2(X,Y) \in R \setminus p$ tales que $\zeta = f \frac{p_1}{p_2}$. Sea $n = v_2(p_1(x,y)/p_2(x,y))$ y sea $\frac{g}{h} \in K \setminus \{0\}$; existe un único entero r tal que

$$\frac{g}{h} = f^r \frac{g'}{h'} = \zeta^r \frac{g''}{h''} = f^r \frac{p_1^r}{p_2^r} \frac{g''}{h''}$$

luego

$$\frac{g'}{h'} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^r \frac{g''}{h''}$$

Sea $v' : K^* \longrightarrow Z \times Z$ la aplicación definida por

$$v'\left(\frac{g}{h}\right) = (r, v_2(g''/h''));$$

se tiene que

$$v'\left(\frac{g}{h}\right) = (r, v_2((g'/h')(p_2^r/p_1^r))) =$$

$$(r, v_2(g'/h')) + (0, -rn)$$

Así, llamando $\delta : Z \times Z \longrightarrow Z \times Z$ a la aplicación definida por

$$\delta(x,y) = (x, y - xn)$$

se tiene que $v' = \delta v$. Pero δ es un isomorfismo de grupos abe-

lianos y se ve fácilmente que δ es un isomorfismo ordenado. En efecto, sea $(x,y) > (0,0)$. Si $x > 0$, entonces $\delta(x,y) = (x,y-nx) > (0,0)$ y si $x = 0$, entonces es $y > 0$ y $\delta(x,y) = (0,y) > (0,0)$. Así las valoraciones v y v' coinciden.

Veamos ahora el otro tipo de valoración discreta de rango dos. Consideremos ahora una valoración $v_1 \in \Sigma$ discreta de rango uno, cuyo centro en R sea el ideal maximal M. Sea $v_1(X) = a$, $v_1(Y) = b$, $m.c.d(a,b) = 1$ y sea $L = au_1 + bu_2$ la forma lineal correspondiente.

Sea $u \in K$ un elemento fijo de valor uno para v_1, por ejemplo, $u = X^{\alpha}Y^{\beta}$ con $\alpha a + \beta b = 1$. Si $f/g \in K^*$ es tal que $v_1(f/g) = n$ entonces $f/g = u^n (f'/g')$, donde $v_1(f'/g') = 0$.

Sea ahora $v_2:(R_{v_1}/m_{v_1})^* \longrightarrow Z$ una valoración no trivial del cuerpo residual de v_1, discreta de rango uno y dimensión cero (Podíamos considerar que $R_{v_1}/m_{v_1} = k(\frac{Y^a}{X^b})$).

Por último, sea

$$v: K^* \longrightarrow ZxZ$$

la aplicación definida por

$$v(f/g) = (n, v_2(f'/g')) = (v_1(f/g), v_2((f'/g')+m_{v_1}))$$

Así definida es fácil de comprobar que v es una valoración de K^*/k. Veamos que v no depende de la elección de u.

Sea $w \in K$ otro elemento de valor uno para v_1; entonces existe $\zeta \in K$, $v_1(\zeta) = 0$, tal que $u = w\zeta$. Sea $r = v_2(\zeta+m_{v_1})$ finito. Si $f/g \in K^*$, $v(f/g) = n$, es

$$\frac{f}{g} = u^n \frac{f'}{g'} = w^n \frac{f''}{g''} = w^n \zeta^n \frac{f'}{g'}$$

de donde

$$\frac{f''}{g''} = \zeta^n \frac{f'}{g'}$$

Sea ahora $v': K^* \longrightarrow ZxZ$ la aplicación definida

$$v'(f/g) = (v_1(f/g), v_2((f''/g'') + m_{v_1}))$$

entonces

$$v'(f/g) = (n, nr + v_2((f'/g') + m_{v_1})) = v(f/g) + (0, nr)$$

Así, llamando $\Psi: Z\times Z \longrightarrow Z\times Z$ a la aplicación definida por

$$\Psi(x,y) = (x, y + nr)$$

se tiene que $v' = \Psi.v$. Analógamente el caso anterior se ve que es un isomorfismo de grupos abelianos totalmente ordenados, con lo que v no depende de la elección de u.

En los dos casos de valoración discreta de rango dos que hemos estudiado, hemos obtenido tales valoraciones como composición de dos valoraciones discretas de rango uno. Veamos ahora lo que avanzamos al comienzo de la nota, es decir, que toda valoración de rango dos, discreta y con centro el ideal M, se enmarca en uno de los dos casos vistos.

Sea pues v una valoración de Σ discreta de rango dos. Se verifica entonces que $\mathrm{Spec}(R_v) = \{(0), p, m_v\}$ con $(0) < p < m_v$. Sea $\Gamma_1 = (0)\times Z$ el subgrupo aislado no trivial de $\Gamma = Z\times Z$. Si $\psi: \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Gamma_1$ es el homomorfismo natural, la composición

$$\begin{tikzcd} K^* \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_1"'] & \Gamma \arrow[d, "\psi"] \\ & \Gamma/\Gamma_1 \end{tikzcd}$$

es una valoración no trivial, discreta de rango uno cuyo anillo contiene a R_v y es, por tanto, $R_{v_1} = (R_v)_p$; en este caso además $m_{v_1} = p$. De otro lado, sea $\nabla_{v_1} = R_{v_1}/m_{v_1}$ el cuerpo residual de v_1. Para todo $w \in R_{v_1} \setminus m_{v_1}$ es $v(w) = 0$, luego $v(w) \in \Gamma_1$. Así puede establecerse una correspondencia

$$v_2: (\nabla_{v_1})^* \longrightarrow \Gamma_1$$

dada por

$$v_2(w + m_{v_1}) = v(w)$$

correspondencia que fácilmente se comprueba es una valoración; veremos que es una aplicación sobreyectiva. Se tiene que

$$\Gamma_1 = \Gamma \setminus (v(p \setminus \{0\}) \cup (- v(p \setminus \{0\}))$$

luego dado $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_1 > 0$ existe $w \in R_v \setminus p$ ($\Longrightarrow w \in R_{v_1} \setminus m_{v_1}$) tal que $v(w) = \gamma_1$. Como $m_v \supset m_{v_1}$ existe $\beta \in m_v \setminus m_{v_1}$ con $v_1(\beta) = 0$. Así v_2 es sobre y Γ_1 es, por tanto, su grupo de valores.

Consideremos los homomorfismos naturales

$$R_{v_1} \xrightarrow{\mathcal{P}_1} R_{v_1}/m_{v_1} \quad , \quad R_v \xrightarrow{\mathcal{P}} R_v/m_v$$

$$R_{v_2} \xrightarrow{\mathcal{P}_2} R_{v_2}/m_{v_2}$$

Como $R_{v_1} \supset R_v$ y $m_{v_1} \subset m_v$ es $\mathcal{P}_1^{-1}(R_{v_2}) = R_v$ y $\mathcal{P}_1^{-1}(m_{v_2}) = m_v$ y así se tiene

$$R_{v_2}/m_{v_2} = (R_v/m_{v_1})/(m_v/m_{v_1}) \simeq R_v/m_v$$

Identificando estos dos cuerpos vía ese isomorfismo se tiene que $\mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$ en el sentido de composición de lugares.

Con esta nota se ha probado el siguiente

<u>TEOREMA 1.15</u>. Las valoraciones de Σ, discretas de rango dos son justamente las compuestas de valoraciones discretas de rango uno v_1 de K/k con valoraciones (necesariamente discretas de rango uno) del cuerpo residual de v_1. Hay dos tipos de valoraciones discretas de rngo dos en Σ que se realizan así:

<u>1.15.1</u>.- Sea $f \in R$ un polinomio de Weirstrass en Y irreducible, $\square = R/(f) = k[[x]][y]$, $x = X + (f)$, $y = Y + (f)$ y sean $x = t^n$, $y = \psi(t)$ unas paramétricas de Puiseux de la curva plana $\mathrm{Spec}(\square)$. Si $g/h \in K \setminus \{0\}$, escribiendo

$$\frac{g}{h} = f^r \frac{g'}{h'} \quad , \quad r \in Z, \quad f \nmid g' \quad , \quad f \nmid h'$$

se pondrá

$$v(g/h) = (r, \nu(g'(t^n, \psi(t))) - \nu(h'(t^n, \psi(t))))$$

1.15.2.- Sean $a, b \in Z_+$ tales que $m.c.d(a,b) = 1$ y sea v_1 la valoración de K/k discreta de rango uno determinada por a y b, como en la nota anterior. Sean $\alpha, \beta \in Z$ tales que $\alpha a + \beta b = 1$. Sea v_2 una valoración de $k(\frac{Y^a}{X^b})/k$. Para cada $g/h \in K \setminus \{0\}$ se pondrá

$$g/h = (X^\alpha Y^\beta)^r (g'/h') \qquad r = v_1(g/h)$$

y entonces se pondrá

$$v(g/h) = (v_1(g/h), v_2(g'/h' + m_{v_1})).$$

Vamos a estudiar ahora las valoraciones de K/k no discretas, de rango uno, con grupo de valores contenido en Q. Este estudio es una generalización de la teoría clásica(véase, por ejemplo, [Sch 1] y [Sch 2]) y se hace via complecciones.

Sea Γ un subsemigrupo de $\mathbb{R}_0$ conteniendo al cero, y designemos por $R(\Gamma)$ al conjunto de las partes de Γ sobre las cuales el orden de $\mathbb{R}$ induce una buena ordenación(le llamaremos abreviadamente partes bien ordenadas de Γ). Para cada $\Gamma' \in R(\Gamma)$ se designará por $A_{\Gamma'}$ al conjunto de las aplicaciones $f: \Gamma \longrightarrow k$ tales que $f(\gamma) = 0$, para cualquier $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$. Como es inmediato de comprobar, cada $A_{\Gamma'}$ es un grupo abeliano, cuyos elementos se llaman series de potencias generalizadas con exponentes en Γ' y coeficientes en k.

Sea $A(\Gamma) = \bigcup_{\Gamma' \in R(\Gamma)} A_{\Gamma'}$ y vamos a dotar a $A(\Gamma)$ de una estructura de anillo. La estructura de grupo abeliano no ofrece problemas. Si $f, f' \in A(\Gamma)$, se pondrá, para todo $\gamma \in \Gamma$, $(f+f')(\gamma) = f(\gamma) + f'(\gamma)$. Naturalmente, si $f \in A_{\Gamma'}$, $f' \in A_{\Gamma''}$, entonces $f+f' \in A_{\Gamma' \cup \Gamma''}$ y es obvio que $\Gamma' \cup \Gamma'' \in R(\Gamma)$. La estructura multiplicativa de $A(\Gamma)$ es, en cambio, menos evidente. Necesi-

tamos un lema técnico

LEMA 1.16.- Sean A y B subconjuntos bien ordenados de $\mathbb{R}_0$. Entonces $A + B$ es un subconjunto bien ordenado de $\mathbb{R}_0$. Más aún, si $x \in A + B$, los conjuntos

$$\{a \in A / \exists\, b \in B,\ a+b = x\},\ \{b \in B / \exists\, a \in A,\ a+b = x\}$$

son finitos.

Demostración.- Se apoya en un hecho simple pero importante: una parte de R no está bien ordenada si y sólo si se puede construir una sucesión de elementos de ella que sea monótona estrictamente decreciente.

Supongamos que $A+B$ no fuese bien ordenado, y sea

$$a_1+b_1 > a_2+b_2 > \ldots\ldots\ldots\ldots > a_n+b_n > \ldots\ldots\ldots$$

una sucesión monótona decreciente de elementos de $A + B$, $a_n \in A$, $b_n \in B$, $n > 0$. Sea $a_{n_1} = \min \{a_n\}$ y para cada $i \geq 1$ sea

$a_{n_{i+1}} = \min\limits_{n > n_i} \{a_n\}$; se tiene así una subsucesión monótona decreciente

$$a_{n_1}+b_{n_1} > a_{n_2}+b_{n_2} > \ldots\ldots\ldots\ldots > a_{n_i}+b_{n_i} > \ldots\ldots$$

en la que

$$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq a_{n_i} \leq \ldots$$

lo que obliga a que

$$b_{n_1} > b_{n_2} > \ldots\ldots\ldots\ldots > b_{n_i} > \ldots\ldots$$

lo cual significaría que en B se puede encontrar una sucesión monótona decreciente, lo que contradice la hipótesis.

El segundo aserto del lema es así mismo fácil de probar. Sea $x \in A + B$ y probemos que el conjunto

$$C = \{a \in A / \exists\, b \in B,\ a+b = x\}$$

es finito, con lo que se habrá probado la finitud del otro conjunto por simetría.

Si C fuese infinito, se podría encontrar una sucesión monótona creciente, lo que implicaría encontrar en B una sucesión monótonadecreciente, en contradicción con las hipótesis hechas sobre B. Esto concluye la demostración del lema.

La estructura de anillo sobre $A(\Gamma)$ se define así: Si $f,g \in A(\Gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ se pondrá

$$(fg)(\gamma) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} f(\gamma')g(\gamma'')$$

Nótese que, por el lema anterior, esta definición tiene perfecto sentido al ser la suma de soporte finito. Esto define una multiplicación sobre $A(\Gamma)$, quedando dotado éste de una estructura de anillo.

Para las series de $A(\Gamma)$ se usará là notación siguiente: Si $\Gamma' \in R(\Gamma)$ y $f \in A_{\Gamma'}$, para todo $\gamma \in \Gamma'$ se pondrá $f_\gamma = f(\gamma)$ y se escribirá

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma'} f_\gamma t^\gamma,$$

donde t es una indeterminada. De esta forma, se toma de nuevo la notación clásica de las series. Si $f \in A_{\Gamma'}$, $f \neq 0$, se llamará orden de f, y se representará por $\nu(f)$ al número

$$\nu(f) = \text{mín}\,\{\gamma \in \Gamma' / f_\gamma \neq 0\}$$

Si $\gamma_0 = \nu(f)$, al elemento $f_{\gamma_0} \in k$ se le llamará coeficiente inicial de f y a $f_{\gamma_0} t^{\gamma_0}$ se le llamará forma inicial de f. Es claro que $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$ y que $\nu(f+g) = \text{mín}\{\nu(f),\nu(g)\}$. Como $A(\Gamma)$ es un dominio de integridad, ν se extiende a una valoración de su cuerpo de fracciones $L(\Gamma)$, a la que se llamará función de orden sobre $L(\Gamma)$. En este caso, $A(\Gamma)$ es el anillo de ν y por tanto es local. Las unidades son quellos elementos $f \in A(\Gamma)$ tales que $f(0) \neq 0$.

Sea ahora G un subgrupo aditivo de Q, que contenga a Z y tal que G/Z no posea una cota uniforme de torsión. Entonces, escribiendo todos los elementos de G en su expresión irredu-

cible, se tendrían para ellos denominadores no acotados. Observemos además que:

1) Si G contiene a un número racional $a = \alpha/\beta$ con $m.c.d(\alpha,\beta) = 1$, entonces G contiene a $1/\beta$. En efecto, de $1 = m\alpha+n\beta$ se deduce que

$$\frac{1}{\beta} = ma + n$$

2) Si G contiene a dos números racionles $a_1 = \alpha_1/\beta_1$, $a_2=\alpha_2/\beta_2$ con $1 = m.c.d(\alpha_i,\beta_i)$, $i = 1,2$, y si $1 = m.c.d(\beta_1,\beta_2)$ entonces G contiene a $1/\beta_1\beta_2$. En efecto

$$a_1+a_2 = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\beta_1\beta_2}$$

y $1 = m.c.d(\alpha_1\beta_2 +\alpha_2\beta_1,\beta_1\beta_2)$, luego por 1) se tiene la conclusión.

Estas dos observaciones permiten describir G de forma explícita, en función de los denominadores de sus elementos. Consideremos todos los elementos de G escritos en su expresión irreducible, y consideremos asimismo todos los primos que aparecen en todas las descomposiciones factoriales de todos los denominadores. Dentro de esos primos hay dos clases: la clase P_1 de aquellos que aparecen con exponente acotado y la clase P_2 de los que aparecen con exponente no acotado. Si $P_2 = \phi$, entonces $card(P_1) = \aleph_0$ .Con esto queda ya claro que G se compone de todos los números racionales que, escritos en su expresión irreducible, tienen un denominador de la forma

$$p_1^{n_1}.....p_r^{n_r}.q_1^{m_1}.....q_s^{m_s}$$

donde $p_1,.....p_r \in P_1$ y $q_1,.....q_s \in P_2$, $m_1,.....,m_s$ son enteros no negativos arbitrarios y $n_1,.....n_r$ son enteros no negativos acotados. En particular, G está unívocamente determinado por la sucesión de los denominadores positivos de sus elementos, escritos éstos en su expresión irreducible.

PROPOSICION 1.17.- Sea G un subgrupo del grupo aditivo de Q, que contenga a Z y tal que G/Z no posea una cota uniforme de torsión. Existe una valoración v de K/k cuyo anillo contiene a R y que tiene a G como grupo de valores (a fortiori, el centro de v en R es el ideal maximal M).

Demostración.- Tomemos todos los elementos de G de la forma $1/p^r$, donde $p \in Z_+$ es primo y $r \geq 0$. Los denominadores de estos elementos forman una sucesión monótona creciente de enteros positivos, a la que denotaremos por $\{\delta_n\}$, $n > 0$, con $\delta_1 = 1$.

Vamos a construir una sucesión $\{a_n\}_{n>0}$ de enteros positivos que verifique unas propiedades especiales. Se pondrá $a_1 = 1$, $a_2 = \delta_2^2 + 1$ y $\pi_2 = Y-X$. Sea $n \geq 2$ un entero y supongamos construidos unos números $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in Z_+$ y unos polinomios $\pi_2(X,Y), \ldots\ldots, \pi_n(X,Y) \in k((X))[Y]$ que verifiquen:

A) Para cada $i = 2, \ldots\ldots, n$, es $a_i/\delta_i > (a_{i-1}/\delta_{i-1}) + 1$ y en este caso, a fortiori, $a_i > a_{i-1}$.

B) $m.c.d(a_i, \delta_i) = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

C) Para cada $i = 2, \ldots, n$, poniendo $\zeta_i = \sum_{j=1}^{i} t^{a_j/\delta_j}$ es $\nu(\pi_i(t, \zeta_i)) = a_i/\delta_i$.

D) Sea $g_i = \text{grado}(\pi_i(X,Y))$, $i = 2, \ldots\ldots, n$. Para cada $i = 2, \ldots, n$ y para cada l, $1 \leq l \leq g_i$, se verifica que

$$\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l} \pi_i(X,Y)\right]_{X=t, Y=\zeta_i} \neq 0$$

y si $2 \leq i \leq n-1$, siempre que lo haya, su orden es mayor que $a_i/\delta_i - l(a_{i+1}/\delta_{i+1})$.

Construyamos ahora un entero a_{n+1} y un polinomio $\pi_{n+1}(X,Y)$ que verifiquen análogas condiciones anteriores. Para ello tomemos el polinomio $\pi_n(X,Y)$; para él se verifica

i) $\nu(\pi_n(t, \zeta_n)) = a_n/\delta_n$

ii) $\forall\, l = 1,\dots,g_n$ $(g_n = \text{grado}\,(\pi_n))$ es

$$\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\,\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,\,Y=\zeta_n} \neq 0$$

Sea $q > 0$ un entero tal que

$$\frac{\delta^q_{n+1}+1}{\delta_{n+1}} > \frac{a_n}{\delta_n} + 1 \qquad , \qquad \frac{\delta^q_{n+1}+1}{\delta_{n+1}} > \frac{a_n}{\delta_n} - \nu\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\,\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,\,Y=\zeta_n}$$

y pongamos $a_{n+1} = \delta^2_{n+1} + 1$; está claro que se verifican las condiciones A) y B) anteriores. Más aún, para cada $l = 1,\dots, g_n$,

$$\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\,\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,\,=\zeta_n} > \frac{a_n}{\delta_n} - \frac{a_{n+1}}{\delta_{n+1}} \geq \frac{a_n}{\delta_n} - l\frac{a_{n+1}}{\delta_{n+1}}.$$

Sea $\nabla = \text{m.c.m}(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n,\delta_{n+1})$ y sea $b_i = \dfrac{a_i\nabla}{\delta_i}$, $i = 1,\dots,n+1$;

se verifica que $\dfrac{b_1}{\nabla}, \dots\dots \dfrac{b_n}{\nabla}, \dfrac{b_{n+1}}{\nabla}$ son las fracciones

$$\frac{a_1}{\delta_1}, \frac{a_2}{\delta_2}, \dots\dots, \frac{a_n}{\delta_n}, \frac{a_{n+1}}{\delta_{n+1}}$$

reducidas a su mínimo común denominador. Entonces

$$1 = \text{m.c.d}(\nabla,\, b_1,b_2,\dots\dots,b_n,b_{n+1}),$$

y como δ_{n+1} es una potencia de un primo p, éste debe dividir a

$$\text{m.c.d}(\nabla,b_1,b_2,\dots\dots,b_n).$$

Sea $\zeta_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} t^{a_j/\delta_j} = \sum_{j=1}^{n+1} t^{b_j/\nabla}$; por razonamientos elementales tipo Puiseux bien conocidos en teoría de curvas planas sabemos que el polinomio mínimo de ζ_{n+1} sobre $k((t))$ tiene grado ∇ y que existe un polinomio

$$\pi_{n+1}(X,Y) = \alpha_{n+1,0}(X)+\alpha_{n+1,1}(X)Y+\dots\alpha_{n+1,\nabla-1}(X)Y^{\nabla-1}$$

en $k((X))[Y]$ tal que $\nu(\pi_{n+1}(t,\zeta_{n+1})) = b_{n+1}/\nabla = a_{n+1}/\delta_{n+1}$. Más aún, la condición de ser de grado ∇ el polinomio mínimo de ζ_{n+1} sobre $k((t))$ y ser $g_{n+1} = \text{grado}(\pi_{n+1}(X,Y)) < \nabla$ implican que,

para todo $l = 1,\ldots,g_{n+1}$ es

$$\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\pi_{n+1}(X,Y)\right]_{X=t,Y=\zeta_{n+1}} \neq 0$$

con lo que la construcción que nos proponíamos está hecha.

Sea ahora $\Gamma = Q_0$, $A(\Gamma) = \bigcup_{\Gamma' \in R(\Gamma)} A_{\Gamma'}$ el correspondiente anillo de series de potencias generalizadas, $L(\Gamma)$ su cuerpo de fracciones. Sea $\zeta \in A(\Gamma)$

$$\zeta = \sum_{n>0} t^{a_n/\delta_n}$$

y $\psi: R \longrightarrow A(\Gamma)$ el k-homomorfismo de sustitución definido por $\psi(X) = t$, $\psi(Y) = \zeta$. Obsérvese que tiene sentido hablar de este k-homomorfismo por la razón siguiente. Sea fijado un número racional $\rho \in Q_+$; obviamente el número de monomios en X,Y, con exponentes enteros, de grado menor que ρ es finito. De otro lado, si r = parte entera(ρ), en el conjunto $\Gamma'+\overset{r)}{\ldots}+\Gamma'$, donde $\Gamma' = \{a_n/\delta_n\}_{n>0}$, hay sólo un número finito de términos, por ser Γ' una sucesión monótona divergente. Esto prueba que, para cualquier $f(X,Y) \in R$, el número de términos de $f(t,\zeta)$ de grado menor que ρ es finito, lo que significa, no sólo que la sustitución $f(t,\zeta)$ tiene sentido sino que $f(t,\zeta) \in A(\Gamma)$ al tener bien ordenado el conjunto de exponentes(todo conjunto de números racionales positivos verificando la propiedad de que sólo hay un número finito de elementos dél conjunto , menores que un número racional dado, está bien ordenado y, más concretamente, es una sucesión monótona creciente).

Más aún, se verifica que ψ es inyectivo. En efecto, si no lo fuera, se podría encontrar un polinomio de Weierstrass

$$P(X,Y) = Y^n+C_1(X)Y^{n-1}+\ldots\ldots+C_{n-1}(X)Y+C_n(X) \in k[[X]][Y]$$

irreducible tal que $P(t,\zeta) = 0$. Pero todas las raices de $P(t,Y)$ están en el cuerpo $k((t))^*$ de las series de Puiseux , el cual,

a su vez, está contenido en $L(\Gamma)$, y ζ no es una serie de Puiseux por ser $\{\delta_n\}_{n>0}$ una sucesión divergente. Esto significaría que $P(X,Y)$ tendría en $L(\Gamma)$ más de n raices, lo que no es posible. Así ψ es inyectivo y se extiende, por tanto, a un homomorfismo, designado con la misma letra, $\psi: K \longrightarrow L(\Gamma)$. La composición de este homomorfismo con la función de orden sobre $L(\Gamma)$ da una valoración v de K/k y vamos a probar que su grupo de valores Γ_v es igual a G.

Sea $p \in Z_+$ un primo y $r \in Z_+$ tal que p^r sea el denominador de un elemento de G escrito en su expresión irreducible; existe un entero $n > 1$ tal que $\delta_n = p^r$. Sea, como antes, $\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} t^{a_j/\delta_j}$, $\zeta'_n = \zeta - \zeta_n$, $(\nu(\zeta'_n) = a_{n+1}/\delta_{n+1})$ y consideremos el polinomio $\pi_n(X,Y)$ construido con anterioridad, $g_n = \text{grado}(\pi_n)$.

La fórmula de Taylor nos permite escribir

$$\pi_n(t,\zeta) = \pi_n(t,\zeta_n) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial Y}\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,Y=\zeta_n} .\zeta'_n + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{g_n!}\left[\frac{\partial^{g_n}}{\partial Y^{g_n}}\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,Y=\zeta_n} .\zeta'^{\,g_n}_n$$

En esta expresión se verifica que $\nu(\pi_n(t,\zeta_n)) = a_n/\delta_n$ y, para cada $l = 1,\ldots,g_n$,

$$\nu\left(\left[\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\pi_n(X,Y)\right]_{X=t,Y=\zeta_n} .\zeta'^{\,l}_n\right) > \frac{a_n}{\delta_n} - l\frac{a_{n+1}}{\delta_{n+1}} + l\frac{a_{n+1}}{\delta_{n+1}} = \frac{a_n}{\delta_n} .$$

Esto prueba que $\nu(\pi_n(t,\zeta)) = a_n/\delta_n$, luego que $a_n/\delta_n \in \Gamma_v$. Como existen $\alpha,\beta \in Z$ tales que $1 = \alpha a_n + \beta\delta_n$ es $1/\delta_n = \alpha(\frac{a_n}{\delta_n}) + \beta \in \Gamma_v$.

Esto prueba que $1/p^r \in \Gamma_v$.

Sea ahora $n \in Z_+$ un denominador de un elemento de G escrito en su expresión irreducible, y sea $n = p_1^{r_1}\ldots\ldots p_s^{r_s}$ su descomposición factorial. Como

$$\frac{1}{p_1^{r_1}}+\dots\dots+\frac{1}{p_s^{r_s}}=\frac{p_2^{r_2}\dots p_s^{r_s}+\dots+p_1^{r_1}\dots p_{s-1}^{r_{s-1}}}{p_1^{r_1}\dots\dots p_s^{r_s}}\quad\varepsilon\ \Gamma_v$$

y el miembro de la derecha es expresión irreducible, se tiene que $1/n\ \varepsilon\ \Gamma_v$. Esto prueba que $G\subset\Gamma_v$ y como la inclusión contraria es trivial, se tiene la igualdad y por tanto la proposición.

NOTA 1.18.- La proposición anterior establece que existe una valoración v de K/k cuyo grupo de valores coincide con G, pero no su unicidad. El hecho es que esta valoración no es única, en general, como veremos en el ejemplo siguiente. Sea G el conjunto de los números racionales que admiten una expresión cuyo denominador es una potencia de 2. De manera semejante a la anterior, construimos dos series ζ y ξ cuyos dos primeros términos son, respectivamente, $t+t^{5/2}$ y $t+t^{7/2}$. En la valoración determinada por ζ, el elemento $\frac{Y-X}{X^3}$ tiene valor negativo, mientras que en la determinada por ξ tiene valor positivo.

Para realizar un estudio más detallado de las valoraciones de K/k no discretas de rango uno tenemos que profundizar algo más en el estudio de las partes bien ordenadas de Q_0 y en del anillo $A(Q_0)$. Vamos a comenzar estudiando las sustituciones como posibles homomorfismos de R en $A(Q_0)$.

Sea $\zeta\ \varepsilon\ A(Q_0)$, y sea

$$\Gamma(\zeta)=\{x\ \varepsilon\ Q_0/\ \zeta(x)\neq 0\};$$

a este conjunto le llamaremos soporte de ζ. El soporte de cualquier elemento de $A(Q_0)$ es, por definición, una parte bien ordenada de Q_0 y a su mínimo es lo que hemos llamado antes el orden de ζ. Supongamos que $\Gamma(\zeta)\neq\emptyset$; llamaremos denominadores de ζ a los denominadores de los elementos de $\Gamma(\zeta)$, escritos en su expresión irreducible. Se dirá que ζ tiene denominadores acotados(resp. no acotados) si el conjunto de los denominadores de ζ es un subconjunto

acotado(resp. no acotado) de Z_+.

LEMA 1.19.- Sea $\zeta \in A(Q_0)$ de orden positivo y denominadores no acotados. Existe un único k-homomorfismo $\psi: R \longrightarrow A$ tal que $\psi(X) = t$, $\psi(Y) = \zeta = \sum_{\gamma \in \Gamma(\zeta)} \zeta(\gamma)\, t^{\gamma}$ .Más aún, este homomorfismo ψ es necesariamente inyectivo.

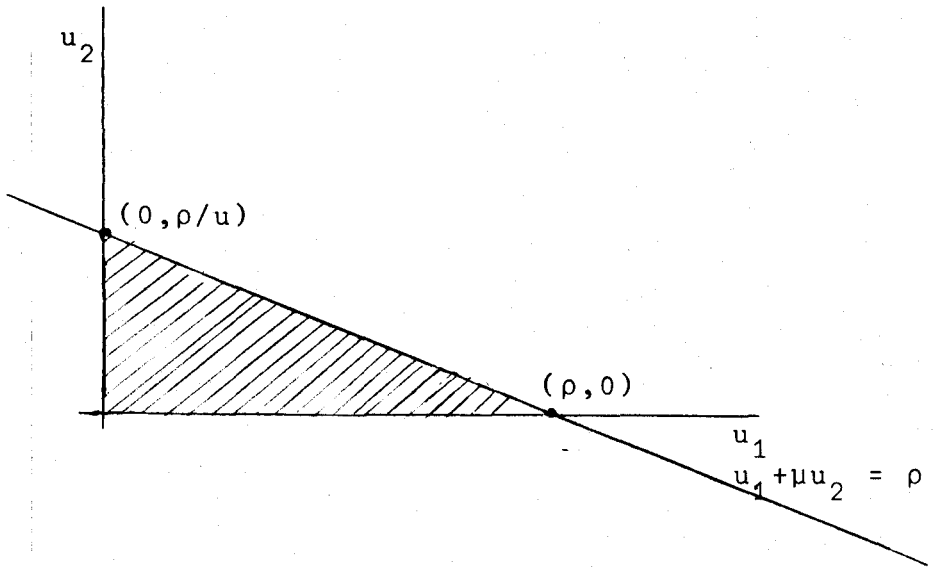
Demostración.- La línea de la demostración está descrita en la de la proposición 1.17. Consideraremos tres puntos:

Punto 1.- Sean $\Gamma_1,\ldots\ldots,\Gamma_n$ subconjuntos bien ordenados de Q_0; entonces $\Gamma_1+\ldots\ldots+\Gamma_n$ es un subconjunto bien ordenado de Q_0 por el lema 1.16 . Sea $\gamma \in \Gamma_1+\ldots+\Gamma_n$; para cada $i = 1,\ldots\ldots,n$ se designará por $\pi_i(\gamma)$ al conjunto

$$\pi_i(\gamma) = \{x_i \in \Gamma_i / \exists\, x_j \in \Gamma_j,\ j = 1,..,n,\ j \neq i, \gamma=\sum_{j=1}^{n} x_j\}$$

Se verifica, de nuevo por el lema 1.16, que para cada $i = 1,\ldots,n$, el conjunto $\pi_i(\gamma)$ es finito.

Sea $\rho \in Q_+$, arbitrario pero fijo, y sea $0 < \mu=\nu(\zeta)$; es trivial ver que el número de monomios $X^{\alpha}Y^{\beta} \in R$ tales que $\alpha+\mu\beta = \rho$ es finito, pues es igual al número de puntos de coordenadas enteras comprendido en la región rayada de la figura.



Fijando un monomio de esos, $X^{\alpha}Y^{\beta}$, y efectuando la sustitución, se tiene que

$$\Gamma(t^{\alpha}\zeta^{\beta}) \subset \{\alpha\} + \Gamma(\zeta) + \ldots\ldots\ldots + \Gamma(\zeta)$$

Así pues, $\Gamma(t^{\alpha}\zeta^{\beta})$ es un conjunto bien ordenado de Q_+, y el número de descomposiciones de ρ como suma de α más β elementos de $\Gamma(\zeta)$ es finito.

Estos razonamientos prueban que la sustitución de X por t e Y por ζ en una serie de R tiene sentido, pues para obtener la forma de grado ρ del sustituido, hay que sumar sólo un número finito de términos.

Punto 2.- Este apartado consiste en demostrar que, al efectuar la sustitución de X por t e Y por ζ en una serie de R, no nos salimos de $A(Q_0)$, es decir, que obtenemos siempre una serie con exponentes ordenados. El problema de demostrar esto es, casi exclusivamente, reformularlo en términos más precisos.

Sea, para cada $i > 0$, $\Gamma_i = \Gamma(\zeta) + \overset{i)}{\ldots\ldots} + \Gamma(\zeta)$, $\bar{\Gamma} = \bigcup_{i>0} \Gamma_i$; para probar el enunciado anterior bastará demostrar que

$$\Gamma^* = (\bar{\Gamma} + Z_+) \cup Z_+$$

es una parte bien ordenada de Q_0 pues resulta evidente que, para cualquier no unidad $f \in R$, es $\Gamma(f(t,\zeta)) \subset (\bar{\Gamma} + Z_0) \cup Z_+$. Pero, en virtud del lema 1.16, para probar que Γ^* está bien ordenado, basta ver que lo está $\bar{\Gamma}$ y, para demostrar esto último, basta probar que $\bar{\Gamma}$ no puede contener a una sucesión monótona decreciente.

Sea $\{\alpha_n\}_{n>0}$ una sucesión de elementos de $\bar{\Gamma}$; se pueden presentar dos casos:

Caso 1.- Existe un entero N tal que, para todo $n > 0$, es $\alpha_n \in \Gamma_1 \cup \ldots\ldots \cup \Gamma_N$. Entonces, por el lema 1.16, cada Γ_i, $i = 1,\ldots,N$ está bien ordenado, luego $\Gamma_1 \cup \ldots\ldots \cup \Gamma_N$ lo está, y así la sucesión no puede ser monótona decreciente.

Caso 2.- No existe el entero anterior. Esto quiere decir que, para todo entero positivo i, existe un término α_{n_i} de la sucesión que no pertenece a $\Gamma_1 \cup \ldots\ldots \cup \Gamma_i$. En otras palabras, para cada entero i,

existe un α_{n_i} que es suma de más de i términos de $\Gamma(\zeta)$. Así $\{\alpha_n\}_{n>0}$ tiene una subsucesión $\{\alpha_{n_i}\}_{i>0}$ que es no acotada, pues Mín $\Gamma(\zeta) > 0$, luego $\{\alpha_n\}$ no puede ser monótona decreciente.

Punto 3.- Queda por probar que ψ es inyectivo. Si no lo fuese, existiría un polinomio de Weierstrass irreducible

$$P(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots\ldots + a_n(X) \in k[[X]][Y]$$

tal que $P(t,\zeta) = 0$. En la demostración de 1.17 hemos visto que esto no puede ocurrir, pues las raíces de $P(X,Y)$ son series de Puiseux, el cuerpo de fracciones L de A contiene a $k((X))^*$ y sin embargo ζ no es una serie de Puiseux.

COROLARIO 1.20.- Sea $\zeta \in A(Q_0)$ con soporte finito, de orden positivo y con denominadores no acotados. Designando por $\Psi : K \longrightarrow L(Q_0)$ a la ampliación del homomorfismo de la proposición anterior, se tiene que la composición de Ψ con la función de orden es una valoración v de K/k, de rango uno, con grupo de valores contenido en Q.

Sean ζ, Ψ, v como en el enunciado del corolario 1.20. Definamos, recurrentemente, una sucesión de elementos de $\Gamma(\zeta)$ poniendo

$$\alpha_1 = \text{mín}\{\Gamma(\zeta)\}, \ldots, \alpha_n = \text{mín}\{\Gamma(\zeta) \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}\}, \forall n > 1$$

Escribiremos $\Gamma = \Gamma(\zeta)$ y designaremos por $\bar{\Gamma}$ a esa sucesión $\{\alpha_n\}_{n>0}$ a la que se llamará sucesión inicial de Γ. Sea

$$\bar{\zeta} = \sum_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \zeta(\gamma)\, t^{\gamma} \quad , \quad \zeta' = \zeta - \bar{\zeta} \ ;$$

se tiene que $\bar{\zeta}$ es de soporte infinito.

PROPOSICION 1.21.- Se verifican las siguientes propiedades:

1.21.1.- $\bar{\zeta}$ tiene denominadores no acotados .

1.21.2.- La valoración $\bar{v}$ de K/k que se obtiene componiendo la sustitución de X por t e Y por $\bar{\zeta}$ con la función de orden, coincide con v.

Demostración.- Probemos el primer apartado. Podemos considerar dos casos para $\bar{\Gamma}$:

Caso 1.- $\bar{\Gamma}$ es no acotado

Entonces, si $\gamma \in \Gamma$, existe un $N > 0$ tal que $\gamma < \alpha_N$ con lo que, por construcción, $\gamma \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1}\}$. Así $\Gamma = \bar{\Gamma}$ y $\bar{\zeta}$ tiene denominadores no acotados.

Caso 2.- $\bar{\Gamma}$ es acotado

En este caso la conclusión de que $\bar{\zeta}$ tiene denominadores no acotados es clara. En efecto, $\bar{\Gamma}$ es una sucesión monótona creciente y, de poderse reducir todos sus términos a un común denominador, sería divergente.

Esto prueba el primer apartado; vamos a demostrar el segundo, que también es fácil. Se trata de probar que, para toda serie $f(X,Y) \in R$ se verifica que

$$\nu(f(t,\zeta)) = \nu(f(t,\bar{\zeta}))$$

Este aserto es evidente si $f \in R \setminus M$; así podemos suponer que $f \in M$, $f \neq 0$. Como siempre, y en virtud del teorema preparatorio de Weierstra se podrá escribir

$$f(X,Y) = U(X,Y)\, X^r\, P(X,Y)$$

donde $U(X,Y) \in R \setminus M$, $r \geq 0$ y

$$P(X,Y) = Y^p + a_1(X)Y^{p-1} + \ldots\ldots + a_{p-1}(X)Y + a_p(X),$$

$a_i(X) \in k[\![X]\!]$, $\nu(a_i) > 0$, $\forall i$. Bastará probar, pues, que

$$\nu(P(t,\zeta)) = \nu(P(t,\bar{\zeta})).$$

Sean $\{\psi_1(X^{1/n}),\ldots\ldots,\psi_p(X^{1/n})\}$ las raíces del polinomio $P(X,Y)$ en el anillo $k[\![X]\!]^*$ de las series de Puiseux enteras; entonces

$$P(X,Y) = \prod_{i=1}^{p} (Y - \psi_i(X^{1/n}))$$

y por consiguiente

$$P(t,\bar{\zeta}) = \prod_{i=1}^{p} (\bar{\zeta} - \psi_i(t^{1/n}))$$

y como $\bar{\zeta}$ tiene denominadores no acotados es evidente que no todo término de $\bar{\zeta}$ puede cancelar en esas diferencias. Como cualquier exponente de $\zeta - \bar{\zeta}$ es mayor que cualquiera de $\bar{\zeta}$ está claro que

$$\nu(P(t,\bar{\zeta})) = \nu(P(t,\zeta))$$

lo que acaba la proposición.

PROPOSICION 1.22.- Sea v una valoración de K/k suyo anillo contiene a R y cuyo centro en R es M; las condiciones siguientes son equivalentes:

1.22.1.- v es no discreta, de rango uno, con grupo de valores contenido en Q.

1.22.2.- Existe una serie generalizada $\zeta = \sum_{n>0} a_n \cdot t^{\alpha_n}$ donde $a_n \in k \setminus \{0\}, \forall n$, y $\{\alpha_n\}_{n>0}$ es una sucesión monótona creciente de números racionales positivos con denominadores, en su expresión irreducible, no acotados, tal que v es la composición de la sustitución de X por t e Y por ζ con la función de orden sobre $L(Q_0)$.

Demostración.- La implicación 1.22.2 $\Longrightarrow$ 1.22.1 está contenida casi íntegra en el corolario 1.20; falta demostrar que v es no discreta y para probarlo basta demostrar que los denominadores de los elementos del grupo de valores de v son no acotados.

Sea q, bien una potencia arbitrariamente grande de un primo que divida(la potencia) a un denominador de un α_n en su expresión irreducible, bien un primo arbitrariamente grande que divida a un denominador de un α_n en su expresión irreducible. Sea α_{N+1} el mínimo exponente con denominador(en su expresión irreducible) divisible por q y sea $P(X,Y)$ el polinomio mínimo de $\zeta' = \sum_{n=1}^{N} a_n X^{\alpha_n}$ sobre $k[[X]]$. Designando por $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_r$ a los conjugados de ζ' se tiene que

$$P(X,Y) = \prod_{i=1}^{r} (Y - \zeta'_i)$$

Sea $\zeta_1' = \zeta$; en $P(X,\zeta)$ hay exactamente un factor de orden α_{N+1} y los órdenes de los restantes factores dependen sólo de $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$. Así q divide al denominador del orden de $P(X,\alpha)$ y esto prueba nuestro aserto.

La demostración de que 1.22.1 $\Longrightarrow$ 1.22.2 es fácil teniendo en cuenta que v es necesariamente de dimensión cero. Se puede sumergir K en la complección $\hat{K}$ de K con respecto a la valoración v. Si Γ es la parte no negativa del grupo de valores de v, se tiene que $\hat{K} = L(\Gamma)$. Supongamos que $v(X) = 1$, cosa que siempre se puede hacer, y sea $\zeta \in L(\Gamma)$, $\nu(\zeta) > 0$, la serie correspondiente a Y. Por 1.21 nos podemos quedar con la serie inicial de ζ para definir v. Esto prueba la proposición.

Para terminar esta sección, vamos a estudiar las valoraciones v de K/k cuyo anillo contenga a R y sean no discretas de rango uno, con grupo de valores no contenido en Q. Es evidente que se puede suponer siempre $v(X) = 1$.

Sea Γ_v el grupo de valores de v y Γ el cono positivo de Γ_v. Sabemos que $L(\Gamma)$ es la complección de K con respecto a la valoración v. Tomando las inmersiones naturales

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K \arrow[d, hook] \\ A(\Gamma) \arrow[r, hook] & L(\Gamma) \end{tikzcd}$$

se tiene que v es la composición de $K \hookrightarrow L(\Gamma)$ con la función de orden sobre $L(\Gamma)$. Vamos a averiguar de qué tipo es la serie correspondiente a Y en la inmersión anterior, a la que denotaremos por $\zeta(t)$ (se supone $X = t$, como es usual).

Es claro que la serie $\zeta(t)$ no puede tener todos sus exponentes racionales pues, si los tuviese, v sería una valoración discreta de rango uno en el caso de exponentes con denominadores

acotados, o una valoración con grupo de valores contenido en Q, no discreta en el caso de exponentes con denominador no acotado. Así pues, se puede suponer que $\zeta(t)$ es de la forma

$$\zeta(t) = \bar{\zeta}(t) + t^{\eta}\zeta_1(t)$$

donde $\bar{\zeta}(t)$ es una serie con exponentes racionales todos menores que η, $\eta \in R \setminus Q$ y $\zeta_1(t) \in A(\Gamma)$ es una unidad. Por un razonamiento similar al hecho en la proposición 1.21, apartado 2, y teniendo en cuenta que tiene que haber elementos en R con valor no racional, se tiene que $\bar{\zeta}(t)$ debe tener todos sus exponentes con denominadores acotados, es decir, $\bar{\zeta}(t)$ debe ser una serie de Puiseux. Sea

$$f(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X)$$

el polinomio mínimo de $\bar{\zeta}(t)$, $t = X$; se tiene que $f(X,Y) \in R$ es un polinomio de Weierstrass.

Sea $g(X,Y) \in R$; existe un entero $r \geq 0$ tal que $g(X,Y) = X^r g''(X,Y)$ donde $g''(0,Y) \neq 0$. Así

$$g(X,Y) = X^r g'(X,Y)U(X,Y)$$

donde $g'(X,Y) \in R$ es un polinomio de Weierstrass y $U(X,Y) \in R$ es tal que $U(0,0) \neq 0$. Por el algoritmo de la división de polinomios se puede escribir

$$g'(X,Y) = \sum_{i=0}^{s} g_i(X,Y)f(X,Y)^i$$

donde los $g_i(X,Y)$ son polinomios de Weierstrass, de grado estrictamente menor que n. Así

$$g(X,Y) = X^r U(X,Y) \sum_{i=0}^{s} g_i(X,Y)f(X,Y)^i,$$

con lo que

$$v(g) = r + v\left(\sum_{i=0}^{s} g_i(X,Y)f(X,Y)^i\right)$$

Pero, según lo anterior, $v(g_i(X,Y)) = \rho_i \in Z_+.(1/n)$, $i = 0,1,\ldots,s$.

Además, como

$$f(t,\zeta) = f(t,\bar{\zeta}) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial Y}\right]_{X=t,Y=\bar{\zeta}} t^{\eta}\zeta_1(t) + \ldots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial Y^n}\right]_{X=t,Y=\bar{\zeta}} t^{n\eta}\zeta_1(t)^n$$

y $f(t,\bar{\zeta}) = 0$ es

$$\nu(f(t,\zeta)) \geq \min_{1=i=n} \{\nu(\left[\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}\right]_{X=t,Y=\bar{\zeta}}) + i\eta\}$$

Pero

$$\nu(\left[\frac{\partial^i f}{\partial Y^i}\right]_{X=t,Y=\bar{\zeta}}) = \sigma_i \in Z.1/n,$$

luego es claro que, para $i \neq j$, es

$$\sigma_i + i\eta \neq \sigma_j + j\eta$$

luego

$$\xi = \nu(f(t,\zeta)) = \min_{1\leq i\leq n} \{\sigma_i + i\eta\}$$

y, por supuesto, $\xi \notin Q$. Por el mismo razonamiento,

$$v(\sum_{i=0}^{s} g_i(X,Y)f(X,Y)^i) = \min_{o\leq i\leq s} \{\rho_i + i\xi\}$$

y así

$$v(g) = r + \min_{0\leq i\leq s} \{\rho_i + i\xi\}$$

Esto describe completamente v.

Sección 2 : "Ramificación de valoraciones: Caso de las funciones de orden"

Sean, como en la sección anterior, $R = k[[X,Y]]$, $M = (X,Y)R$, $K = k((X,Y))$. Sea L una extensión finita de K. En esta sección se trata de estudiar la ramificación de las valoraciones de L/k que son extensión de valoraciones discretas de rango uno de K/k, cuyo centro en R es M. Como estas valoraciones son funciones de orden respecto de una cierta forma lineal, las llamaremos genéricamente "funciones de orden", y de ahí el título de la sección. Como siempre, dedicaremos especial atención a los cálculos explícitos, que constituyen el centro de interés de todo nuestro trabajo. Vamos a realizar, en la primera parte de esta sección, unos cálculos algebraicos, que luego aplicaremos al estudio de la ramificación de las valoraciones.

Sean $a,b \in Z_+$ tales que $m.c.d(a,b) = 1$ y sean $\alpha,\beta \in Z$ tales que $\alpha a+\beta b = 1$. Sean $\bar{X},\bar{Y}$ nuevas variables y vamos a construir un k-homomorfismo local

$$\phi'(a,b,\alpha,\beta):R \longrightarrow k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$$

que nos será especialmente útil en lo sucesivo. Sea N el conjunto de todos los monomios en X,Y con exponentes enteros no negativos y $\bar{N}$ el conjunto de todos los monomios en $\bar{X},\bar{Y}$ con exponentes enteros arbitrarios para $\bar{X}$ y enteros no negativos para $\bar{Y}$. Sea

$$\phi'(a,b,\alpha,\beta):N \longrightarrow \bar{N}$$

la aplicación definida por

$$\phi'(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = (\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a)^i(\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)^j = \bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{Y}^{ai+bj}$$

LEMA 2.1.- La aplicación $\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ verifica las siguientes propiedades

2.1.1.- El único monomio de $\mathrm{im}\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ que no depende de $\bar{Y}$ es

$1 = \phi'(a,b,\alpha,\beta)(1)$.

2.1.2.- $\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ es inyectiva.

2.1.3.- El conjunto de los monomios de $\mathrm{im}\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ que tienen un exponente de $\bar{Y}$ fijo es finito.

Demostración.-

2.1.1.- Es una consecuencia trivial de la definición dada de $\phi'(a,b,\alpha,\beta)$ y del hecho de que $a > 0$ y $b > 0$.

2.1.2.- Sean $X^iY^j, X^{i'}Y^{j'} \in N$ tales que $\phi'(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = \phi'(a,b,\alpha,\beta)(X^{i'}Y^{j'})$; entonces

$$\bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{Y}^{ai+bj} = \bar{X}^{\beta i'+\alpha j'}\bar{Y}^{ai'+bj'}$$

de donde

$$-\beta(i-i')+\alpha(j-j') = 0$$

$$a(i-i')+b(j-j') = 0$$

Pero como

$$\begin{vmatrix} -\beta & \alpha \\ a & b \end{vmatrix} = -\beta b-\alpha a = -1$$

ese sistema tiene solución trivial únicamente, es decir, $i-i' = 0$, $j-j' = 0$, lo que prueba la inyectividad de $\phi'(a,b,\alpha,\beta)$.

2.1.3.- Es inmediato, pues si $c \in Z_o$ es un entero fijo, el conjunto de los pares $(i,j) \in Z_o^2$ tales que $ai+bj = c$ es finito.

Como consecuencia de este lema se deduce que, tomando una serie arbitraria $f(X,Y) \in R$ tiene sentido efectuar la sustitución $f(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a, \bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)$, y esta nueva serie pertenece a $k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$. Así, poniendo

$$\phi(a,b,\alpha,\beta)(f(X,Y)) = f(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a, \bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)$$

se tiene que $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ es un k-homomorfismo, por supuesto local, e inyectivo por 2.1.2. Veamos ahora qué efecto produce sobre él el cambio de α y β. Sean $\alpha',\beta' \in Z$ tales que $\alpha'a+\beta'b = 1$ y sea $X^iY^j \in N$.

Se tiene que

$$\phi(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = \bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{Y}^{ai+bj}$$

$$\phi(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = \bar{X}^{-\beta' i+\alpha' j}\bar{Y}^{ai+bj}$$

Ahora bien, de $1 = a\alpha+b\beta = a\alpha'+b\beta'$ se deduce que $(\alpha'-\alpha)a = (\beta-\beta')b$, luego existe $\lambda \in Z$ tal que $\beta-\beta' = \lambda a$ y, por tanto, $\alpha'-\alpha = \lambda b$. Consideremos el $k(\bar{X})$-automorfismo ψ de $k(\bar{X})$ $\bar{Y}$ dado por $\psi(\bar{Y}) = \bar{X}^{\lambda}\bar{Y}$. Se tiene que

$$\psi\phi(a,b,\alpha,\beta)(X^iY^j) = \psi(\bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{Y}^{ai+bj}) = \bar{X}^{-\beta i+\alpha j}\bar{X}^{\lambda(ai+bj)}\bar{Y}^{ai+bj} =$$

$$= \bar{X}^{(-\beta+\lambda a)i+(\alpha+\lambda b)j} = \bar{X}^{-\beta' i+\alpha' j}\bar{Y}^{ai+bj} = \phi(a,b,\alpha',\beta')(X^iY^j).$$

Esto prueba que $\phi(a,b,\alpha',\beta') = \psi\phi(a,b,\alpha,\beta)$.

Obsérvese que la inyectividad de $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ le permite ser ampliado a un homomorfismo de cuerpos, designado por la misma notación

$$\phi(a,b,\alpha,\beta):K \longrightarrow k(\bar{X})((\bar{Y})).$$

Esto termina la descripción de las propiedades elementales de $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ que necesitamos.

Nuestro objetivo inmediato, en este momento, va a ser el realizar unos cálculos algebraicos, que explicamos a continuación. Partimos de la ecuación

$$f(X,Y,Z) = Z^n+a_1(X,Y)Z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(X,Y)Z+a_n(X,Y) = 0$$

irreducible sobre K, donde $a_i(X,Y) \in M$; se pondrá

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^n+\bar{a}_1(\bar{X},\bar{Y})Z^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}(\bar{X},\bar{Y})Z+\bar{a}_n(\bar{X},\bar{Y})$$

donde

$$\bar{a}_i(\bar{X},\bar{Y}) = \phi(a,b,\alpha,\beta)(a_i(X,Y)) = a_i(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a},\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b}).$$

Nuestro objetivo va a ser resolver la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$, haciendo un estudio exhaustivo de las soluciones. Las propiedades elementales de esta ecuación están resumidas en el

<u>LEMA 2.2</u>.- Se verifican las siguientes propiedades:

2.2.1.- $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ es un polinomio de Weierstrass con coeficientes en $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$ (el cuerpo base es $k(\bar{X})$).

2.2.2.- El polinomio $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ no es necesariamente irreducible.

2.2.3.- La ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ no posee raíces múltiples.

Demostración.- El apartado 2.2.1 es muy fácil de comprobar. En efecto, sabemos que $\bar{a}_i(\bar{X},\bar{Y}) \in k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$, $\forall i=1,\ldots,n$, y como $a_i(X,Y)$ es un elemento de M es, necesariamente, $\bar{a}_i(\bar{X},\bar{Y}) \in \bar{Y}.k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$.

Para demostrar el apartado 2.2.2 basta un ejemplo. Sea $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Un cálculo sencillo convencerá al lector de que existen series en $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$ cuyos primeros términos se detallan:

$$\psi_1 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}} - \frac{\bar{Y}^6}{\bar{X}^2} - \frac{\bar{Y}^{10}}{\bar{X}^3} - 2\frac{\bar{Y}^{14}}{\bar{X}^4} + (\text{términos de grado superior})$$

$$\psi_2 = \frac{\bar{Y}^6}{\bar{X}^2} - \frac{\bar{Y}^{10}}{\bar{X}^3} - 2\frac{\bar{Y}^{14}}{\bar{X}^4} + (\text{términos de grado superior})$$

tales que

$$(Z - \psi_1)(Z - \psi_2) = Z^2 - \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}} Z + \frac{\bar{Y}^8}{\bar{X}^3}$$

y, sin embargo, se tiene

$$-\frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}} = \phi(2,3,-1,1)(-X) \qquad \frac{\bar{Y}^8}{\bar{X}^3} = \phi(2,3,-1,1)(XY^2)$$

y la serie $Z^2-XZ+XY^2$ es irreducible sobre R por el criterio de Eisenstein.

La demostración de 2.2.3 es también fácil. Como $f(X,Y,Z)$ es irreducible en $K[Z]$, su discriminante $D(X,Y)$ es distinto de cero. En virtud de la inyectividad de $\phi(a,b,\alpha,\beta)$, es

$$0 \neq \bar{D}(\bar{X},\bar{Y}) = \phi(a,b,\alpha,\beta)(D(X,Y))$$

y $\bar{D}(\bar{X},\bar{Y})$ es el discriminante de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$. Esto acaba el lema.

Un procedimiento grosero de resolver la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ consiste en ampliar el cuerpo base a las series de

Puiseux en la variable $\bar{X}$ y resolverla ahí. Aunque para nuestros estudios **necesitamos** algo más que esta resolución, vamos a comentarla con detalle, por ser la única forma de escribir explícitamente las raíces de la ecuación, cosa que, desde el punto de vista del cálculo numérico, es imprescindible. Este estudio se hace en la nota siguiente.

Nota 2.3.- El cuerpo base $k(\bar{X})$ puede ser sumergido en el cuerpo de series $k((\bar{X}))$ y éste en el de Puiseux $k((\bar{X}))^*$. Así, la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ puede ser considerada como una ecuación sobre $k((\bar{X}))^*((\bar{Y})$ que, según es bien conocido por algoritmos explícitos, tiene todas sus raíces en el cuerpo de series de Puiseux $k((\bar{X}))^*((\bar{Y}))^*$. El algoritmo de resolución de esta ecuación es ya clásico y se obtiene vía el diagrama de Newton. No vamos a reproducirlo aquí, pero interesa hacer unas cuantas observaciones, que nos permitirán ver la forma de las raíces, con vistas a desarrollos siguientes.

El polinomio $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) \in k((\bar{X}))^* [\![\bar{Y}]\!] [Z]$ es de Weierstrass, por tanto la factorización sobre $k((\bar{X}))^* [\![\bar{Y}]\!]$ se hace mediante polinomios de Weirstrass. Esto nos indica que una raiz arbitraria ψ de él es de la forma

$$\psi = \sum_{i\geq 1} \omega_i \bar{Y}^{r_i/q} \qquad \omega_i \in k((\bar{X}))^* \setminus 0,$$

donde el conjunto de índices de la suma puede ser finito o infinito, y donde $q, r_i \in Z_+$, $r_1 < r_2 < \ldots\ldots$ y $m.c.d(q,r_1,r_2,\ldots\ldots) = 1$. O sea, toda raiz tiene orden positivo(fraccionario) en $\bar{Y}$. Vamos a ver la forma de los coeficientes ω_i.

Recordemos cómo se efectúa el algoritmo que permite calcular ψ. En este algoritmo hay dos puntos claves:

a) Elección de segmentos admisibles en diagramas de Newton, segmentos cuyas pendientes nos determinan los valores r_i/q.

b) Resolución de ecuaciones algebraicas con coeficientes series de Puiseux en $\bar{X}$, que nos determinan los coeficientes ω_i. Ahora bien, de estas ecuaciones algebraicas, la primera tiene coeficientes en $k((\bar{X}))$, luego la raiz ω_1 elegida pertenecerá a un cuerpo de la forma $k((\bar{X}^{1/p_1}))$. La segunda ecuación que nos da ω_2, tendrá coeficientes en $k((\bar{X}^{1/p_1}))$, luego ω_2 pertenecerá a un cuerpo de la forma $k((\bar{X}^{1/p_2}))$, y así sucesivamente. Como ψ no es una raiz múltiple de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ por 2.2.3 , es bien conocido que el número de ecuaciones de grado superior a uno que hay que resolver para calcular los ω_i es finito. Así pues, existe un entero positivo p tal que $\omega_i \in k((X^{1/p}))$, para todo i, y ψ se puede escribir, entonces, de la forma

$$\psi = \sum_{i\geq 1} \omega_i(\bar{X}^{1/p})\bar{Y}^{r_i/q} \quad , \qquad \omega_i(\bar{X}^{1/p}) \in k((\bar{X}^{1/p}))\setminus 0$$

Esto prueba, además, que el factor irreducible de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k((\bar{X}))^*[\![\bar{Y}]\!]$ del cual es raiz ψ tiene sus coeficientes en $k((\bar{X}^{1/p}))[\![\bar{Y}]\!]$.

Los coeficientes ω_i verifican además una condición adicional y es que todos son algebraicos sobre $k(\bar{X})$ y engendran, sobre él, una extensión algegraica finita. La razón es bien obvia. Como $\bar{a}_i(\bar{X},\bar{Y}) \in k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$ la primera ecuación que hay que resolver, para calcular ω_1, tiene coeficientes en $k(\bar{X})$. La segunda, para calcular ω_2, tiene sus coeficientes en la ampliación de $k(\bar{X})$ con ω_1, y así sucesivamente. Como solo hay que resolver un número finito de ecuaciones de grado superior a uno, el aserto queda claro.

Volvamos a considerar las raíces de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ como series de Puiseux en $\bar{Y}$ con coeficientes en $k((\bar{X}))^*$. Un punto importante es determinar sus conjugados sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$, lo que nos dará automáticamente los factores irreducibles de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Para ello haremos unas consideraciones previas.

Es bien conocido que el cuerpo $k((\bar{X}^{1/p}))$, es algebraico sobre $k((\bar{X}))$ de grado p. De aquí se deduce que $k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}))$ es algebraico sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ de grado p. En efecto, si $\eta \in k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}))$, se puede escribir

$$\eta = \sum_{j \geq r} c_j(\bar{X}^{1/p})\bar{Y}^j \ , \ r \in Z, \ c_j(\bar{X}^{1/p}) \in k((\bar{X}^{1/p})),$$

$c_r(X^{1/p}) \neq 0$. Pero, para cada j, es

$$c_j(\bar{X}^{1/p}) = \sum_{l=0}^{p-1} c_{jl}(\bar{X})\bar{X}^{l/p}, \quad c_{jl}(\bar{X}) \in k((\bar{X})),$$

luego

$$\eta = \sum_{l=0}^{p-1}(\sum_{j \geq r} c_{jl}(\bar{X})\bar{Y}^j)\bar{X}^{l/p},$$

que pertenece a $k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\bar{X}^{1/p})$. Esto prueba que $k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}))= k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\bar{X}^{1/p})$, que es algebraico de grado p sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$.

Ahora bien, es claro que, si $q \in Z_+$, entonces $k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}^{1/q})) = k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}))(\bar{Y}^{1/q})$, que es algebraico de grado q sobre $k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}))$. Así, $k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}^{1/q}))$ es algebraico sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ de grado pq.

Nos interesa ahora estudiar el grado, sobre $k((X))((Y))$, de un elemento $\eta(\bar{X}^{1/p},\bar{Y}^{1/q}) \in k((\bar{X}^{1/p}))[\![\bar{Y}^{1/q}]\!]$ tal que $\eta(\bar{X}^{1/p},0) = 0$. Estos elementos se pueden tratar de forma completamente análoga a las series de Puiseux en dos variables que estudiabamos en la sección 1 del capítulo I, toda vez que el permitir exponentes negativos para la $\bar{X}$ no influye en aquellos razonamientos,y que calculamos polinomios mínimos y conjugados sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Es decir, un elemento η como antes se puede escribir en la forma

$$\eta = \sum_{l=1}^{r} b_l(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}^{i_l/p}\bar{Y}^{j_l/q},$$

con $b_l(\bar{X},\bar{Y}) \in k((\bar{X}))((\bar{Y}))\setminus\{0\}$ y $0 \leq i_l < p$, $0 \leq j_l < q$, y todos los pares (i_l,j_l) distintos entre sí; en esta situación, los razona-

mientos hechos en el capítulo I se aplican sin variación. En particular, si Δ es el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} p & 0 & i_1 \cdots\cdots i_r \\ 0 & q & j_1 \cdots\cdots j_r \end{pmatrix},$$

entonces $\left[k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\eta):k((\bar{X}))((\bar{Y}))\right] = pq/\Delta$.

Por aplicación de las técnicas desarrolladas en el capítulo I es fácil ya calcular los conjugados sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ de las raíces de la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$. Teniendo estos conjugados, se tienen los factores irreducibles de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre el cuerpo $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Clasifiquemos las raíces en tandas de conjugados sobre dicho cuerpo. Cada tanda de conjugados da orígen a un factor irreducible de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$, que es un polinomio de Weirstrass

$$\bar{f}_i(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^{m_i}+b_{i,1}(\bar{X},\bar{Y})Z^{m_i-1}+\ldots+b_{i,m_i}(\bar{X},\bar{Y}),\ i = 1,\ldots,h'$$

donde $b_{i,j}(\bar{X},\bar{Y}) \in k((\bar{X}))\ \bar{Y}$, $b_{i,j}(\bar{X},0) = 0$. Así pues, la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ es

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{f}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)\ldots\ldots\ldots\bar{f}_{h'}(\bar{X},\bar{Y},Z).$$

Una última observación, dentro de esta nota, es que la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ es distinta, en general, de la factorización sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ debido, principalmente, a la existencia de funciones algebraicas en $k((\bar{X}))$ sobre $k(\bar{X})$. Consideremos el ejemplo siguiente. Sea $a = 1$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y la ecuación

$$0 = f(X,Y,Z) = Z^2 - X^3Y^2(X+Y),$$

que es irreducible sobre K por el criterio de Eísenstein. La ecuación transformada por $\phi(1,1,1,0)$ es

$$0 = Z^2 - \bar{X}^2\bar{Y}^6(1+\bar{X}).$$

Puesto que $\sqrt{1+\bar{X}} \notin k(\bar{X})$, esta ecuación es irreducible sobre el cuerpo $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. En cambio, si llamamos $\psi(\bar{X}) \in k[\![\bar{X}]\!]$ a la serie tal que $\psi(\bar{X})^2 = 1+\bar{X}$, sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ tenemos

$$Z^2 - \bar{X}^2\bar{Y}^6(1+\bar{X}) = (Z - \bar{X}\bar{Y}^3\psi)(Z + \bar{X}\bar{Y}\psi).$$

Esto prueba, en particular, que raíces conjugadas sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ son conjugadas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, pero no al revés.

Para nuestros desarrollos posteriores necesitamos un estudio más fino de las raíces de la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$. Sobre todo, necesitamos estudiar los conjugados de una de ellas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, cosa que haremos en la nota siguiente, para terminar esta primera parte dedicada a cálculos algebraicos.

<u>Nota 2.4</u>.- Sea

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z).\bar{g}_2(\bar{X},\bar{Y},Z)....\bar{g}_h(\bar{X},\bar{Y},Z)$$

la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$,

donde cada $\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z)$, $i = 1,2,..h$ es un polinomio de Weierstrass

$$\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^{m_i}+c_{i1}(\bar{X},\bar{Y})Z^{m_i-1}+....+c_{im_i}(\bar{X},\bar{Y}).$$

Designaremos por $\{\zeta_{i1},...,\zeta_{im_i}\}$ a las raíces de $\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$, que supondremos pertenecen todas a un cuerpo $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$, donde se elegirán, en general, los denominadores p_i, q_i mínimos. Se escribirá, asimismo,

$$\zeta_{ij} = \sum_{l=1} \omega_{i,j,l}(\bar{X}^{1/p_i})\bar{Y}^{r_l/q_i}, \omega_{ijl}(\bar{X}^{1/p_i}) \in k((\bar{X}^{1/p_i}))\setminus 0$$

Por un razonamiento similar a uno hecho en la nota anterior se deduce que, dada una raiz ζ_{ij} de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$, la ampliación de $k(\bar{X})$ con los coeficientes $\{\omega_{i,j,l}\}_{l=1}$ de ζ_{ij} es finita sobre $k(\bar{X})$ y por tanto la ampliación $k(\bar{X})(\{\omega_{i,j,l}\})$ con

todos los coeficientes de todas las raíces ζ_{ij} es también finita sobre $k(\bar{X})$; sea K_1 la mínima ampliación normal de $k(\bar{X})$ que la contiene.

Vamos a probar que $K_1((\bar{Y}))$ es una extensión normal finita de $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ y que $[K_1((\bar{Y})):k(\bar{X})((\bar{Y}))] = [K_1:k(\bar{X})]$. Sea $p = [K_1:k(\bar{X})]$ y sea $\theta \in K_1$ tal que $K_1 = k(\bar{X})(\theta)$; entonces los elementos $\{1,\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{p-1}\}$ constituyen una base del espacio vectorial K_1 sobre $k(\bar{X})$. Sea $\eta \in K_1((\bar{Y}))$,

$$\eta = \sum_{i\geq r}(\alpha_{io}+\alpha_{i1}\theta+\ldots+\alpha_{i,p-1}\theta^{p-1})\bar{Y}^i, \quad r \in Z, \quad \alpha_{ij} \in k(\bar{X});$$

está claro que η se puede escribir en la forma

$$\eta = \sum_{i\geq r}\alpha_{io}\bar{Y}^i+\theta\sum_{i=r}\alpha_{i1}\bar{Y}^i+\ldots+\theta^{p-1}\sum_{i=r}\alpha_{i,p-1}\bar{Y}^i,$$

lo que prueba que $\{1,\theta,\ldots,\theta^{p-1}\}$ es un sistema de generadores de $K_1((\bar{Y}))$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Como la independencia lineal está clara, se verifica que $K_1((\bar{Y}))$ es una extensión finita de $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, de grado p, y θ es un elemento primitivo de ella. El polinomio mínimo de θ sobre $k(\bar{X})$ es, pues, el polinomio mínimo de $\theta \in K_1((\bar{Y}))$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ y, como K_1 contiene a todas sus raíces, es claro que $K_1((\bar{Y}))/k(\bar{X})((\bar{Y}))$ es normal.

De otro lado sabemos que existe un entero positivo q (que podemos tomar mínimo) tal que todas las raíces ζ_{ij} pertenecen a $K_1((\bar{Y}^{1/q})) = K_1((\bar{Y}))(\bar{Y}^{1/q})$. Pero $K_1((\bar{Y}^{1/q}))$ es una extensión normal finita de grado q de $K_1((\bar{Y}))$. Como el polinomio mínimo $\bar{Y}^{1/q}$ sobre $K_1((\bar{Y}))$ es $Z^q - \bar{Y}$, que tiene todos sus coeficientes en $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, y es irreducible por el criterio de Eisenstein, se deduce:

a) $K_1((\bar{Y}^{1/q}))$ es una extensión normal finita de $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, de grado igual a pq.

b) $Gal(K_1((\bar{Y}^{1/q}))/k(\bar{X})((\bar{Y}))) \simeq Gal(K_1((\bar{Y}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))\times Gal(k(\bar{X})((\bar{Y}^{1/q}))$ $/k(\bar{X})((\bar{Y})))$ bajo un isomorfismo que a cada $\sigma \in Gal(K_1((\bar{Y}^{1/q}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))$ asigna el par

$$(\sigma/_{K_1((\bar{Y}))}, \sigma/_{k(X)((\bar{Y}^{1/q}))})$$

Así se tiene, en particular, los hechos siguientes:

2.4.1.- Para obtener los conjugados sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ de cada raiz ζ_{ij} (considerada cono serie en $\bar{Y}^{1/q}$ con coeficientes en K_1) basta conjugar por un lado los coeficientes y por el otro $\bar{Y}^{1/q}$, todo ello sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$.

2.4.2.- Si dos raíces son conjugadas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tienen exactamente los mismos exponentes de $\bar{Y}$ y, expresándolas como series en $\bar{Y}$ y $\omega\bar{Y}$ (donde ω es la raiz de la unidad que determina la conjugación de $\bar{Y}^{1/q}$), los coeficientes son conjugados sobre $k(\bar{X})$.

Con esto termina lo que consideramos como primera parte de esta sección, a saber, los preliminares algebraicos que nos permitirán abordar el problema de la ramificación de valoraciones. Vamos ahora a entrar en el estudio de las valoraciones, que es el objeto primordial de nuestro estudio.

El punto de partida será una valoración v de K/k, discreta de rango uno, cuyo centro en R es M, es decir, una función de orden, como indicábamos al principio. Sean $v(X) = a$, $v(Y) = b$, con $m.c.d(a,b) = 1$ y sean $\alpha,\beta \in Z$ tales que $\alpha a+\beta b = 1$. Sea L una extensión finita de K y vamos a estudiar, en primer lugar, las ampliaciones a L de la valoración v. Sea $z \in L$ un elemento primitivo de L/k; es un hecho claro que siempre se puede elegir z de tal forma que sea entero sobre R. En este caso, el polinomio mínimo de z sobre K,

$$f(X,Y,Z) = Z^n+a_1(X,Y)Z^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}(X,Y)Z+a_n(X,Y)$$

tiene todos sus coeficientes en R por ser éste íntegramente cerrado. Supongamos que $a_n(X,Y)$ fuese una unidad en R y sea $a \in k$ una raiz no nula de la ecuación

$$a^n+a_1(0,0)a^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(0,0)a+a_n(0,0) = 0$$

Entonces, el elemento $z' = z-a$ es entero sobre R y su polinomio mínimo sobre K es

$$f'(X,Y,Z') = Z'^n+a_1'(X,Y)Z'^{n-1}+\ldots+a_{n-1}'(X,Y)Z'+a_n'(X,Y),$$

donde $f'(X,Y,Z-a) = f(X,Y,Z)$. En este caso, $a_n'(0,0) = f(0,0,a) = 0$ y así $a_n'(X,Y)$ es una no unidad en R. Supondremos pues, desde el principio, que $a_n(X,Y)$ es no unidad en R. Por el teorema preparatorio de Weierstrass, ningún otro $a_i(X,Y)$ puede ser una unidad en R, con lo que $f(X,Y,Z)$ es un polinomio de Weierstrass. Estamos ya en la situación algebraica de comienzos de la nota y podemos aplicar a nuestro problema los cálculos algebraicos hechos.

Designamos también por $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ a la composición de la inmersión $\phi(a,b,\alpha,\beta):K \hookrightarrow k(\bar{X})((\bar{Y}))$ con la inclusión natural en $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Sea ξ_{i1} una raiz de la ecuación $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)=0$, donde $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)=\prod_{i=1}^{h'}\bar{f}_i(\bar{X},\bar{Y},Z)$, sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$, y veamos que la inmersión $\phi(a,b,\alpha,\beta):K \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ se puede ampliar a una inmersión $\lambda_i:K(z) \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\xi_{i1})$. En efecto, $\phi(a,b,\alpha,\beta)$ se puede ampliar a una inmersión $\Phi':K[Z] \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))Z$ por el procedimiento de poner, para cada $\sum e_jZ^j \in K[Z]$

$$\Phi'(\sum e_jZ^j) = \sum \phi(a,b,\alpha,\beta)(e_j)Z^j.$$

Como $\Phi'(f(X,Y,Z)) = \bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$, la imagen mediante Φ' del ideal (f) está contenida en el ideal $(\bar{f}_i)$. Esto implica que se puede construir un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K[Z] & \xrightarrow{\Phi'} & k((\bar{X}))((\bar{Y}))[Z] \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu_i \\ K[Z]/(f) & \xrightarrow{\lambda'_i} & k((\bar{X}))((\bar{Y}))[Z]/(\bar{f}_i) \end{array}$$

donde μ y μ_i don los homomorfismos naturales, y $\lambda_i'[(\sum e_j Z^j)+(f)] = \Phi'(\sum e_j Z^j)+(\bar{f}_i)$. Pero sabemos que $L \simeq K[Z] \simeq K[Z]/(f)$ bajo un isomorfismo que lleva z sobre $Z+(f)$ y que $k((\bar{X}))((\bar{Y}))[Z]/(\bar{f}_i) \simeq k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\xi_{i1})$, bajo un isomorfismo que lleva $Z+(\bar{f}_i)$ sobre ξ_{i1}. Componiendo λ_i' con estos isomorfismos se tiene una inmersión $\lambda_i : L \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\xi_{i1})$ que hace conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "\phi(a,b,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k((\bar{X}))((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, hook, "\lambda_i"] & k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\xi_{i1}) \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones naturales, es decir, λ_i prolonga $\phi(a,b,\alpha,\beta)$. Nótese que $\lambda_i(z) = \xi_{i1}$ y que la imagen de λ_i está contenida en $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\xi_{i1})$. Así pues, a veces, escribiremos $\lambda_i : L \hookrightarrow k(\bar{X})((\bar{Y}))(\xi_{i1})$.

Sea v_i' la valoración canónica de $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$ sobre $k((\bar{X}^{1/p_i}))$, es decir, aquella cuyo anillo es $k((\bar{X}^{1/p_i}))[[\bar{Y}^{1/q_i}]]$; esta valoración hace corresponder a cada elemento de $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$ su orden(fraccionario) en $\bar{Y}$. Considerando a λ_i como una inmersión de L en $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$, se compone con v_i' dándonos una aplicación

$$v_i : L \setminus \{0\} \longrightarrow Z.(1/q_i)$$

que es una valoración de L/k discreta de rango uno. La restricción de v_i a K es discreta de rango uno(luego su anillo contiene a R) y como

$$v_i(X) = v_i'(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a}) = a$$

$$v_i(Y) = v_i'(\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b}) = b,$$

es $v_i/_K = v$, por construcción de estas valoraciones discretas. Así,

v_i es una amplicación de v a L que se realiza así: Si $\eta \in L$,

$$\eta = \rho_o(X,Y)+\rho_1(X,Y)z+\ldots\ldots+\rho_{n-1}(X,Y)z^{n-1},$$

es

$$v_i(\eta) = v_i'\left[\rho_o(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a,\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)+\rho_1(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a,\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)\xi_{i1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\rho_{n-1}(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^a,\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^b)\xi_{i1}^{n-1}\right].$$

Veamos ahora algunos resultados clave sobre las valoraciones v_i. Veremos, en primer lugar, que v_i no depende de la raiz elegida, es decir, que v_i no varía al sustituir ξ_{i1} por una conjugada sobre $K((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Esto requiere unas precisiones previas. Supongamos elegida otra raiz ξ_{ij}, conjugada con ξ_{i1} sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ y sea $\lambda_{ij}:L \hookrightarrow k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\xi_{ij})$ la inmersión correspondiente, construida de forma análoga a la λ_i (obsérvese que $\lambda_{i1}=\lambda_i$). Se tiene la siguiente

<u>PROPOSICION 2.5</u>.- $v_i'\lambda_{ij} = v_i$.

<u>Demostración</u>.- Sea $\sigma_{ij}\in Gal(k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i})))$ tal que $\sigma_{ij}(\xi_{i1}) = \xi_{ij}$. Si $\eta \in L$, $\eta = \rho_o+\rho_1 z+\ldots+\rho_{n-1}z^{n-1}$, es $\sigma_{ij}\lambda_i(\eta) = \sigma_{ij}(\sum_{l=0}^{n-1} \phi(a,b,\alpha,\beta)(\rho_l)\xi_{i1}^l) = \sum_{l=0}^{n-1} \phi(a,b,\alpha,\beta)\xi_{ij}^l = \lambda_{ij}(\eta)$, luego $\sigma_{ij}\lambda_i = \lambda_{ij}$. Así, $v_i'\lambda_{ij} = v_i'\sigma_{ij}\lambda_i$ y, para probar lo que queremos, basta ver que $v_i'\sigma_{ij} = v_i'$. Pero esto es trivial, pues un elemento de $k((\bar{X}^{1/p_i}))((\bar{Y}^{1/q_i}))$ no cambia de orden al sustituir $\bar{X}^{1/p_i}$ por $\gamma\bar{X}^{1/p_i}$ e $\bar{Y}^{1/q_i}$ por $\delta\bar{Y}^{1/q_i}$, donde γ es una raiz p_i-ésima de 1 y δ es una raiz q_i-ésima de 1. Esto prueba la proposición.

Ya hemos visto, al final de la nota 2.3, que la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ no coincide, en general, con

la factorización sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Puede ocurrir que varios factores de la segunda factorización me den un factor irrecucible sobre la segunda. Este hecho, desde el punto de vista de las valoraciones v_i tiene unas repercusiones fundamentales, que estudiaremos en un teorema a continuación. Antes, necesitamos un lema previo, cuya demostración es muy fácil.

LEMA 2.6.- $k(\bar{X})[\bar{Y}] \subset \phi(a,b,\alpha,\beta)(K)$.

Demostración.- Nótese, antes que nada, que $X^{-b}Y^{a}$ es el único monomio tal que $\phi(a,b,\alpha,\beta)(X^{-b}Y^{a}) = \bar{X}$ y $X^{\alpha}Y^{\beta}$ es el único monomio tal que $\phi(a,b,\alpha,\beta)(X^{\alpha}Y^{\beta}) = \bar{Y}$. Con esta observación, la demostración es ya trivial. Si $\bar{\eta} \in k(\bar{X})[\bar{Y}]$,

$$\bar{\eta} = \eta_o(\bar{X})+\eta_1(\bar{X})\bar{Y}+\ldots+\eta_t(\bar{X})\bar{Y}^t,$$

se verifica que

$$\eta(X,Y) = \eta_o(X^{-b}Y^{a})+\eta_1(X^{-b}Y^{a})(X^{\alpha}Y^{\beta})+\ldots+\eta_t(X^{-b}Y^{a})(X^{\alpha}Y^{\beta})^t$$

pertenece a $k(X,Y)$ y $\phi(a,b,\alpha,\beta)(\eta) = \bar{\eta}$. Esto termina el lema.

TEOREMA 2.7.- Sean i,j dos enteros, $1 \leq i,j \leq h$; las condiciones siguientes son equivalentes:

2.7.1.- $v_i = v_j$.

2.7.2.- ζ_{i1} y ζ_{j1} son conjugados sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$.

Demostración.- Supondremos que $i \neq j$, pues en el caso igual no hay nada que probar. A lo largo de toda la demostración haremos un uso intensivo de la nota 2.4, aún sin mencionarla explícitamente.

Vamos a probar primero que 2.7.1 $\Rightarrow$ 2.7.2; lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que ζ_{i1} y ζ_{j1} no son conjugadas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$; existirá , entonces, un entero positivo t tal que

$$\zeta'_{i1} = \sum_{l=1}^{t} \omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i} \quad \text{y} \quad \zeta'_{j1} = \sum_{l=1}^{t} \omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j}$$

no sean conjugadas sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Además, por existir dos elementos

ζ_{i1} y ζ_{j1}, no conjugados sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ implica que el polinomio mínimo de ζ_{i1} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tiene grado estrictamente menor que n. Como el polinomio mínimo $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ de ζ'_{i1} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tiene grado menor o igual que el polinomio mínimo de ζ_{i1}, se tiene entonces que

$$m = \text{grado } (\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)) < n.$$

De otro lado, de la forma de ζ'_{i1}, se deduce que $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ pertenece a $k(\bar{X})[\bar{Y}][Z]$, luego, por el lema 2.6, existe $P(X,Y,Z) \in K[Z]$ tal que $P(\bar{X}^{-\beta}\bar{Y}^{a},\bar{X}^{\alpha}\bar{Y}^{b},Z) = \bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)$.

Supongamos elegido el entero mínimo t siguiendo la condición de no ser conjugados ζ'_{i1} y ζ'_{j1}, y consideremos la factorización de $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $K_1((Y^{1/q}))$ (véase nota 2.4), que será de la forma

$$\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \prod_{c=1}^{m} (Z-\zeta'_{i1c})$$

donde $\{\zeta'_{i11}=\zeta'_{i1},\zeta'_{i12},\ldots\ldots,\zeta'_{i1,m}\}$ son los conjugados de ζ'_{i1} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Como $m < n$ está claro que $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1}) \neq 0$ y $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1}) \neq 0$.

Consideremos ahora dos casos:

a) $t = 1$

En este caso, para todo $c = 1,\ldots m$ es $\nu_{\bar{Y}}(\zeta_{j1}-\zeta'_{i1c}) = \min\{s_1/q_j, r_1/q_i\}$. En cambio, $\nu_{\bar{Y}}(\zeta_{i1}-\zeta'_{i11}) \geq r_2/q_i$ mientras que $\nu_{\bar{Y}}(\zeta_{i1}-\zeta'_{i1c}) = r_1/q_i$, para todo $c = 2,\ldots m$. Esto prueba que el $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1})) < \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1}))$ y, por tanto, que $v_i \neq v_j$.

b) $t > 1$

Como en el caso anterior, se trata de comparar $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1}$ con $\nu_{\bar{Y}}(P(X,Y,\zeta_{j1}))$. Sea m' el grado del polinomio mínimo de $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}$ y sea $m'' = m/m'$. Los factores lineales que aparecen en la descomposición de $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ se pueden dividir en m' grupos,

cada grupo conteniendo m'' polinomios $Z-\zeta'_{i1c}$ que tengan iguales las sumas de los $t-1$ primeros sumandos de ζ'_{i1c}.

Sea $P_1(Z)$ el producto de los polinomios del grupo que tenga la suma de los $t-1$ primeros términos igual a $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j}$ y $P_2(Z)$ el correspondiente a $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}$. Entonces $\nu_{\bar{Y}}(P_1(\zeta_{j1})) = m'' \times \min\{s_t/q_j, r_t/q_i\}$ y $\nu_{\bar{Y}}(P_2(\zeta_{i1})) \geq r_{t+1}/q_i + (m''-1)r_t/q_i$. Sea C el conjunto de los productos de los términos correspondientes a cada grupo; C tiene m' elementos, y cada uno de ellos es un polinomio de grado m''. Entonces es claro que existe una biyección de $C \setminus P_1(Z)$ sobre $C \setminus P_2(Z)$ tal que términos correspondientes $Q_1(Z)$ y $Q_2(Z)$ verifiquen que $\nu_{\bar{Y}}(Q_1(\zeta_{j1})) = \nu_{\bar{Y}}(Q_2(\zeta_{i1}))$. Esto prueba que $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1})) < \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1}))$ y, por tanto, que $v_i \neq v_j$.

Para demostrar el recíproco basta probar que, si $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z) \in k(\bar{X})((\bar{Y}))[Z]$ es un polinomio irreducible de grado $m < n$, es $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1})) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1}))$. Sean $\{\mu_1,\ldots,\mu_m\} \in k((\bar{X}))^*((\bar{Y}))^*$ las raíces de $\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ y escribamos

$$\mu_c = \sum_{l\geq 1}\mu_{cl}\bar{Y}^{u_l/q'} \qquad c = 1,\ldots m. \ , \quad \mu_{cl} \neq 0$$

donde los coeficientes μ_{cl} son algebraicos sobre $k(\bar{X})$ y q' es el mínimo denominador tal que $\mu_c \in k((\bar{X}))^*((\bar{Y}^{1/q'}))$. Sea K'_1 la mínima extensión normal de $k(\bar{X})$ que contiene a K_1 y a todos los coeficientes μ_{cl}, y sea $q'' = m.c.m(q,q')$; con la extensión $K'_1((\bar{Y}^{1/q''}))$ se puede operar de forma análoga a como hicimos en la nota 2.4 con $K_1((\bar{Y}^{1/q}))$.

El ser conjugados ζ_{i1} y ζ_{j1} implica que existe un

$\sigma \in Gal(K_1'((\bar{Y}^{1/q''}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))$ tal que $\sigma(\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}) = \sigma(\omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j})$; en particular, $r_l/q_i = s_l/q_j, \forall\, l \geq 1$. Si $r_1/q_i \neq u_1/q'$ entonces es claro que $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1})) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1})) = m \times \min\{r_1/q_i, u_1/q'\}$. Si $r_1/q_i = u_1/q'$ pero no existe $\sigma \in Gal(K_1'((\bar{Y}^{1/q''}))/k(\bar{X})((\bar{Y})))$ tal que $\sigma(\omega_{i11}\bar{Y}^{r_1/q_i}) = \mu_{11}\bar{Y}^{u_1/q'}$ entonces $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1})) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1})) = m.r_1/q_i$.

Supongamos que existe un entero $t > 1$ tal que $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}$ y $\sum_{l=1}^{t-1}\mu_{1l}\bar{Y}^{u_l/q'}$ son conjugados sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ y $\sum_{l=1}^{t}\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}$ y $\sum_{l=1}^{t}\mu_{1l}\bar{Y}^{u_l/q'}$ no lo son. De aquí se deduce que $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j}$ y $\sum_{l=1}^{t-1}\mu_{1l}\bar{Y}^{u_l/q'}$ son conjugados sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ mientras que $\sum_{l=1}^{t}\omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j}$ y $\sum_{l=1}^{t}\mu_{1l}\bar{Y}^{u_l/q'}$ no lo son. El razonamiento a seguir ahora es parecido el hecho en la demostración directa. Dividimos los factores lineales $(Z-\mu_c)$, $c=1,\ldots,m$ en m'' grupos, cada uno de los cuales tiene m' factores, que son todos aquellos que tienen igual la suma de los $t-1$ términos primeros. Sea $P_1(Z)$ el producto de todos los factores del grupo tal que la suma de los $t-1$ primeros términos es igual a $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{i1l}\bar{Y}^{r_l/q_i}$ y $P_2(Z)$ el correspondiente a $\sum_{l=1}^{t-1}\omega_{j1l}\bar{Y}^{s_l/q_j}$. Entonces

$$\nu_{\bar{Y}}(P_1(\zeta_{i1})) = m' \times \min\{r_t/q_i, u_t/q'\} = m' \times \min\{s_t/q_j, u_t/q'\} = \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\zeta_{j1})).$$

Sea C el conjunto de los productos de los términos correspondientes a cada grupo. Existe una biyección de $C \setminus P_1(Z)$ sobre $C \setminus P_2(Z)$

tal que términos correspondientes $Q_1(Z)$ y $Q_2(Z)$ verifican que $\nu_{\bar{Y}}(Q_1(\zeta_{i1})) = \nu_{\bar{Y}}(Q_2(\zeta_{j1}))$. Así $\nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{i1})) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},\zeta_{j1}))$ y esto concluye la demostración del teorema.

Nuestro estudio va a proseguir en dos direcciones. En primer lugar se trata de probar que las valoraciones v_i construidas hasta el momento son todas las ampliaciones posibles de v a L. En segundo lugar se trata de hacer cálculos explícitos sobre índices de ramificación y grados relativos de las valoraciones v_i. Estos dos problemas, veremos que se interconectan de tal forma que es imposible separarlos. Estudiémoslos, pues, en conjunto.

Estudiaremos una valoración en concreto, por ejemplo v_1, pues el estudio de las demás es paralelo a este caso. Para ello usaremos las notaciones que hemos introducido con anterioridad. Consideremos la raiz ζ_{11} de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$, como serie de Puiseux en la variable $\bar{Y}$ con coeficientes algebraicos sobre $k(\bar{X})$ y sea, como siempre, p_1 el mínimo entero tal que todos los coeficientes de ζ_{11} pertenecen a $k((\bar{X}^{1/p_1}))$ y sea q_1 el mínimo entero tal que ζ_{11} es una serie en $\bar{Y}^{1/q_1}$. Como siempre, escribiremos

$$\zeta_{11}=\sum_{l\geq 1}\omega_{11l}(\bar{X}^{1/p_1})\bar{Y}^{r_l/q_1}, \quad \omega_{11l}(\bar{X}^{1/p_1}) \in k((\bar{X}^{1/p_1}))\setminus\{0\}$$

Desde luego está claro que existe un elemento $\omega_1 \in L$ tal que $v_1(\omega_1) = r_1/q_1$; dicho elemento es, por ejemplo, $\omega_1 = z$. Sea $t \geq 1$ un entero y supongamos probado que, para todo l, $1 \leq l \leq t$ existe un elemento $\omega_l \in L$ tal que $v_1(\omega_l) = r_l/q_l$. Consideremos el elemento

$$\zeta'_{11} = \sum_{l=1}^{t}\omega_{11l}(\bar{X}^{1/p_1})\bar{Y}^{r_l/q_1} \in k((\bar{X}^{1/p_1}))((\bar{Y}^{1/q_1}));$$

ese elemento es claramente algebraico sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Sea

$$\bar{P}(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^s+\bar{d}_1(\bar{X},\bar{Y})Z^{s-1}+\ldots+\bar{d}_{s-1}(\bar{X},\bar{Y})Z+\bar{d}_s(\bar{X},\bar{Y})$$

el polinomio mínimo de ζ'_{11} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Por los resultados obtenidos en la nota 2.4 y la forma de ζ'_{11} se tiene que $\bar{d}_i(\bar{X},\bar{Y}) \in k(\bar{X})[\bar{Y}]$, $\forall i = 1,..,s$. Por el lema 2.6 existen unas $\{d_i(X,Y)\}_{i=1,..,s} \in K$ tales que

$$\phi(a,b,\alpha,\beta)(d_i(X,Y)) = \bar{d}_i(\bar{X},\bar{Y}),\ i = 1,...,s.$$

Sea

$$P(X,Y,Z) = Z^s+d_1(X,Y)Z^{s-1}+....+d_{s-1}(X,Y)Z+d_s(X,Y)$$

y consideremos el elemento $\omega'_{t+1} = P(X,Y,z) \in L$; vamos a estudiar el valor de ω'_{t+1} por v_1.

Sean $\{\zeta'_{111}=\zeta'_{11},...,\zeta'_{11c}\}$ los conjugados diferentes de ζ'_{11} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$; se tiene que

$$P(X,Y,Z) = \prod_{i=1}^{c}(Z-\zeta'_{11i}).$$

Así,

$$v_1(\omega'_{t+1}) = \nu_{\bar{Y}}(\prod_{i=1}^{c}(\zeta_{11}-\zeta'_{11i}))$$

y, en esta situación, se tiene

a) $\nu_{\bar{Y}}(\zeta_{11}-\zeta'_{111}) = r_{t+1}/q_1$

b) Para todo $i = 2,...,c$, $\nu_{\bar{Y}}(\zeta_{11}-\zeta'_{11i})$ es de la forma r_{l_i}/q_1, donde $1 \leq l_i \leq t$.

Por tanto, se tiene que

$$v_1(\omega'_{t+1}) = (r_{t+1}+\sum_{i=2}^{c} r_{l_i})/q_1$$

Consideremos el elemento $\prod_{i=2}^{c}\omega_{l_i} \in L$; entonces $\omega_{t+1} = \omega'_{t+1}/\prod_{i=2}^{c}\omega_{l_i} \in L$; en consecuencia

$$v_1(\omega_{t+1}) = v_1(\omega'_{t+1})-v_1(\prod_{i=2}^{c}\omega_{l_i}) = (r_{t+1}+{}^{c}_{i=2}\ r_{l_i})/q_1 - \sum_{i=2}^{c} r_{l_i}/q_1 =$$
$$= r_{t+1}/q_1.$$

Esto prueba que, para todo $l \geq 1$ existe un elemento $\omega_l \in L$ tal que $v_1(\omega_l) = r_l/q_1$.

Sea t un entero tal que $m.c.d(q_1,r_1,\ldots,r_t) = 1$ y sean $\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_t \in Z$ tales que $1 = \alpha_o q_1+\alpha_1 r_1+\ldots+\alpha_t r_t$. Sea

$$\omega = (X^{\alpha}Y^{\beta})^{\alpha_o} \prod_{l=1}^{t} \omega_l^{\alpha_l} \in L;$$

se tiene que

$$v_1(\omega) = v_{\bar{Y}}(\bar{Y}^{\alpha_o}) + \sum_{l=1}^{t} \alpha_l v_1(\omega_l) = \alpha_o + \sum_{l=1}^{t} \alpha_l r_l/q_1 = 1/q_1.$$

Como, de otro lado, es claro que $v_1(L\setminus\{0\}) \subset Z.(1/q_1)$, es $v_1(L\setminus\{0\}) = Z.(1/q_1)$, con lo que se ha probado el

<u>TEOREMA 2.8</u>.- Para cada valoración v_i, el índice de ramificación de v_i es q_i, donde q_i es el mínimo entero positivo tal que ζ_{i1} es una serie de Puiseux en $\bar{Y}^{1/q_i}$.

Continuemos con el estudio de la valoración v_1. Sea

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z).\bar{g}_2(\bar{X},\bar{Y},Z).\ldots.\bar{g}_h(\bar{X},\bar{Y},Z)$$

la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, donde supondremos que ζ_{11} es raiz de $\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$ y, desde luego, $\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z) \in k(\bar{X})[[\bar{Y}]][Z]$ y son polinomios de Weierstrass.

Una de las primeras cuestiones que se pueden formular a priori es si existe siempre un elemento ω de valor $1/q_1$ y que sea primitivo. La respuesta negativa nos la da el siguiente ejemplo: Sea $a = 1$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y sea $f(X,Y,Z)$ el polinomio mínimo, sobre K, de la serie de Puiseux

$$z = XY^{2/6}+X^{3/2}Y^{5/6}$$

El grado de $f(X,Y,Z)$ es 18 pues el máximo común divisor de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

es 1. La sustitución $X \to \bar{Y}$, $Y \to \bar{X}\bar{Y}$ nos permite tomar

$$\zeta_{11} = \bar{X}^{2/6}\bar{Y}^{8/6}+\bar{X}^{5/6}\bar{Y}^{9/6}.$$

El polinomio mínimo de $\bar{X}^{2/6}\bar{Y}^{8/6}$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ es $Z^3-\bar{X}\bar{Y}^4$ y, poniendo $\bar{\omega}' = \zeta_{11}^3-\bar{X}\bar{Y}^4$ se tiene que

$$\bar{\omega}' = 3\bar{X}^{9/6}\bar{Y}^{25/6}+3\bar{X}^{12/6}\bar{Y}^{26/6}+\bar{X}^{15/6}\bar{Y}^{27/6}$$

De otro lado, se tiene que llamando $\omega' = z^3-X^3Y$, este elemento va sobre $\bar{\omega}'$ en la inmersión. Así, $v(\omega') = 25/6$. Pongamos $\omega = \omega'/X^4$; entonces $v(\omega) = 1/6$y

$$\omega = 3Y^{9/6}+3Y^{12/6}/X^{2/6}+Y^{15/6}/X^{4/6}$$

Ahora bien, el polinomio mínimo de ω sobre K tiene grado igual a 6 porque el máximo común divisor de los menores de orden 2 de

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

es 6. Así ω no puede ser un elemento primitivo de L/K y, obviamente, ningún otro elemento de valor$1/6$ puede serlo. Este ejemplo también prueba, que un tal ω no es necesariamente entero sobre R.

Hecho este inciso, consideremos el diagrama conmutativo de inmersiones

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "\phi(a,b,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k((\bar{X}))((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, hook, "\lambda_1"] & k((\bar{X}))((\bar{Y}))(\zeta_{11}) \end{tikzcd} ;$$

puesto que $\phi(a,b,\alpha,\beta)(K)\subset k(\bar{X})$se puede restringir al diagrama siguiente, donde las inmersiones las notamos igual

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "\phi(a,b,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k(\bar{X})((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, hook, "\lambda_1"] & k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11}) \end{tikzcd}$$

Por consideraciones anteriores sabemos que el polinomio mínimo $\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)$ de ζ_{11} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ pertenece a $k(\bar{X})[[\bar{Y}]][Z]$ y es un polinomio de Weierstrass. Así, de hecho, $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ es el cuerpo de fracciones del anillo local completo

$$\bar{\mathfrak{U}} = k(\bar{X})[[\bar{Y}]][Z]/(\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)) \simeq k(\bar{X})[[\bar{Y},Z]]/(\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z))$$

Este es un dominio de integridad local notheriano completo de dimensión 1 con ideal maximal $\bar{M} = (\bar{Y}, \zeta_{11})$, donde se ha identificado $\bar{Y}$ con su imagen canónica en $\bar{\square}$.

Sea $\square^*$ el cierre íntegro de $\bar{\square}$ en $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$; es un hecho bien conocido que $\square^*$ es un $\bar{\square}$-módulo de tipo finito. Recordemos brevemente la demostración de este hecho. Sea $n_i = gr(\bar{g}_i)$ $i=1,..,h$, sean $\{\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots, \zeta_{1n_1}\}$ los conjugados de ζ_{11} sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ y sea $K' = k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1n_1})$ la mínima extensión normal de $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ que contiene a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$. Sean, por otra parte $\{\sigma_1 = id, \ldots, \sigma_{n_1}\}$ los $k(\bar{X})((\bar{Y}))$- homomorfismos de $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ en K', $\sigma_i(\zeta_{11}) = \zeta_{1i}$ y sea Δ_1 el discriminante de $\bar{g}_1(\bar{X}, \bar{Y}, Z)$. Sea también $\rho \in \square^*$, $\rho = \rho_o + \rho_1 \zeta_{11} + \ldots + \rho_{n_1-1} \zeta_{11}^{n_1-1}$, $\rho_i \in k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Poniendo $\rho^i = \sigma_i(\rho)$, $i = 1, \ldots, n_1$ se tiene el sistema

$$\begin{array}{l} \rho = \rho^1 = \rho_o + \rho_1 \zeta_{11} + \ldots + \rho_{n_1-1} \zeta_{11}^{n_1-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho^{n_1} = \rho_o + \rho_1 \zeta_{1n_1} + \ldots + \rho_{n_1-1} \zeta_{1n_1}^{n_1-1} \end{array}$$

Como ρ es entero sobre $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$ y éste es íntegramente cerrado, el polinomio mínimo de ρ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tiene todos sus coeficientes en $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$. En particular, los conjugados de ρ son enteros sobre $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$ y así lo son todos los ρ^i, $i = 1, \ldots, n_1$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta_{11} \cdots \zeta_{11}^{n_1-1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \zeta_{1n_1} \cdots \zeta_{1n_1}^{n_1-1} \end{vmatrix}^2 = \Delta_1 \neq 0$$

la regla de Cramer nos permite escribir, para todo $j = 0, 1, \ldots, n_1-1$

$$\Delta_1 \rho_j = \begin{vmatrix} 1 & \zeta_{11} \cdots \zeta_{11}^{j-1} & \rho^1 & \zeta_{11}^{j+1} \cdots\cdots \zeta_{11}^{n_1-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \zeta_{1n_1} \cdots \zeta_{1n_1}^{j-1} & \rho^{n_1} & \zeta_{1n_1}^{j+1} \cdots\cdots \zeta_{1n_1}^{n_1-1} \end{vmatrix}$$

Como todos los términos de este último determinante son enteros sobre $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$, lo es el propio determinante. Así, $\Delta_1\rho_j \in k(\bar{X})((\bar{Y}))$ es entero sobre $k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$ y, al ser éste íntegramente cerrado, es $\Delta_1\rho_j \in k(\bar{X})[[\bar{Y}]]$, $\forall j = 0,1,\ldots,n_1-1$. Esto implica que $\square^*$ está contenido en el $\bar{\square}$-submódulo de $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ engendrado por $\{1/\Delta_1, \zeta_{11}/\Delta_1, \ldots, \zeta_{11}^{n_1-1}/\Delta_1\}$ y, por ser $\bar{\square}$ noetheriano, $\square^*$ es un $\bar{\square}$-módulo de tipo finito.

En estas condiciones es bien conocido que $\square^*$ es un dominio de integridad local completo de dimensión 1(ZA-II,Th 15,Pg276 y Cor.2,Pg283). Como $\square^*$ es íntegramente cerrado, es un anillo de valoración discreta de rango 1; sea v^* la valoración de anillo $\square^*$ y sea M^* el ideal maximal de $\square^*$.

Hay diversos métodos para ver que v^* es igual a la función de orden $\nu_{\bar{Y}}$ es decir, que v^* es la valoración que a todo elemento de $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ le hace corresponder su orden(fraccionario) com serie en $\bar{Y}$. El más cómodo en nuestra situación consiste en ver que $\square^*$ es justamente el conjunto de los elementos de $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ que, expresados como series en $\bar{Y}^{1/q_1}$ tienen orden no negativo. Que un tal elemento pertenece a $\square^*$ es consecuencia de de la forma de calcular los conjugados y de las relaciones de Cardano; veamos el recíproco. Sea $\eta \in k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ un elemento cuyo orden, como serie en $\bar{Y}^{1/q_1}$, sea negativo,

$$\eta = \sum_{l \geq s} \eta_l \bar{Y}^{l/q_1} \qquad , s < 0, \quad \eta_s \neq 0$$

Fácilmente se ve que, si r es el grado de su polinomio mínimo sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, entonces $r.(s/q_1) \in Z$. Como todos los conjugados de η sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tienen orden en $\bar{Y}$ igual a s/q_1 (nota 2.4) y el producto de todos ellos debe pertenecer a $k(\bar{X})((\bar{Y}))$, se tiene que $r.(s/q_1) \in Z$ y el término independiente del polinomio mínimo de η sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tiene orden $r.(s/q_1) < 0$. Si η fuese entero sobre

$\bar{\square}$, lo sería sobre $k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$ y como $k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$ es íntegramente cerrado, el polinomio mínimo de η sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ tendría sus coeficientes en $k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$. Como esto no ocurre, η no es entero sobre $\bar{\square}$, lo que prueba nuestro aserto.

Sea $\bar{v}$ la función de orden en $\bar{Y}$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$; está claro que v^* prolonga $\bar{v}$ a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$. Como en el teorema 2.8 encontramos un elemento $\omega \in L$ de valor $1/q_1$, está claro que el índice de ramificación de v^* con respecto a $\bar{v}$ es q_1. Sea e_1 el grado relativo de v^* respecto de $\bar{v}$; se tiene la

<u>PROPOSICION 2.9</u>.- V^* es la única ampliación de $\bar{v}$ a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$. En particular $q_1e_1 = n_1$.

<u>Demostración</u>.- La segunda afirmación es consecuencia trivial de la primera y de la fórmula de la ramificación de valoraciones(ZA-II, Th 20,Pg 60). Demostremos entonces la primera afirmación. Sea

$$\bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^{n_1}+\bar{g}_{11}(\bar{X},\bar{Y})Z^{n_1-1}+\ldots+\bar{g}_{1n_1-1}(\bar{X},\bar{Y})Z+\bar{g}_{1n_1}(\bar{X},\bar{Y})$$

y consideremos el diagrama de Newton de este polinomio. En él hay un único segmento admisible Σ que contiene a los puntos

$$\{(0,n_1),(t_{i_1},n_1-1),\ldots,(t_{i_s},n_1-i_s)\}\ ,\ s \geq 1$$

con $0 < t_{i_1} < \ldots < t_{i_s} \leq n_1$ y $t_{i_l} = \nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i_l})$. En esta situación Σ tiene como ecuación

$$q_1x+r_1y-q_1n_1 = 0$$

y, para todo otro punto, si existe, de la forma (t_i,n_1-i), $t_i=\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i})$ $i \neq i_l$, $l = 1,\ldots,s$, es

$$q_1t_i+r_1(n_1-i)-r_1n_1 > 0$$

Sea v^{**} una ampliación arbitraria de $\bar{v}$ a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ vamos a buscar todos los valores posibles de $v^{**}(\zeta_{11})$. Para ello consideramos la igualdad

$$0 = \zeta_{11}^{n_1}+\bar{g}_{11}(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^{n_1-1}+\ldots\ldots+\bar{g}_{1n_1-1}(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}+\bar{g}_{1n_1}(\bar{X},\bar{Y});$$

para que esta igualdad sea posible es claro que debe haber, al menos, dos sumandos con valor mínimo entre todos ellos. Los valores de los sumandos son

$$n_1 v^{**}(\zeta_{11}), \nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{11})+(n_1-1)v^{**}(\zeta_{11}), \ldots, \nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1n_1-1})+v^{**}(\zeta_{11}), \nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1n_1})$$

y se trata de encontrar todas las posibilidades de al menos dos valores iguales y mínimos. Pongamos $\bar{g}_{10}(\bar{X},\bar{Y}) = 1$, luego el valor del primer sumando se puede escribir en la forma $\nu_{\bar{Y}}(g_{10})+n_1 v^{**}(\zeta_{11})$. Encontrar dos términos de valor mínimo es, pues, encontrar dos índices i,j $0 \leq i < j \leq n_1$ tales que

$$\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i})+(n_1-i)v^{**}(\zeta_{11}) = \nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{ij})+(n_j-j)v^{**}(\zeta_{11}) = u_o$$

y tales que, para todo otro índice $1 \neq i,j$ sea

$$\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{11})+(n_1-1)v^{**}(\zeta_{11}) \geq u_o.$$

Dibujando en el plano todos los puntos $\{(\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i}),n_1-i)\}$ $i=0,1,..,n_1$ se trata de encontrar todas las posibles rectas del tipo $x+v^{**}(\zeta_{11}) = u_o$ que contengan al menos2puntos de los anteriores y tales que para todo punto $(\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i}),n_1-i)$ de ellas sea

$$\nu_{\bar{Y}}(\bar{g}_{1i})+v^{**}(\zeta_{11})(n_1-i) \geq u_o.$$

Pero en virtud de las consideraciones hechas sobre el diagrama de Newton de $\bar{g}_1$ sólo hay una posibilidad, la recta

$$x+(r_1/q_1)y = n_1/q_1.$$

Así pues, sólo hay un valor posible $v^{**}(\zeta_{11})$, que es $r_1/q_1 > 0$. Esto prueba que, si (R^{**},M^{**}) es el anillo de v^{**}, es $\zeta_{11} \in M^{**}$. Ahora bien, como todo elemento $\eta \in \bar{\square}$ es de la forma

$$\eta_0(\bar{X},\bar{Y})+\eta_1(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}+\ldots+\eta_{n_1-1}(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^{n_1-1}$$

con $\eta_i(\bar{X},\bar{Y}) \in k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!]$, como v^{**} prolonga $\bar{v}$(lo que implica que $k(\bar{X})[\![\bar{Y}]\!] \subset R^{**}$) y como $\zeta_{11} \in M^{**}$, es $\bar{\square} \subset R^{**}$ y, por tanto $M^{**} \cap \bar{\square} = \bar{M}$. Esto implica que $R^{**} \supset \square^*$ y como éste último es un

anillo de valoración discreta de rango 1, debe ser $R^{**} = \square^*$ y así, $v^{**} = v^*$. Esto prueba la proposición.

Vamos a estudiar ahora cómo es el cuerpo residual de la valoración v^*. Como $\square^* \cap k(\bar{X})[[\bar{Y}]] = (\bar{Y})$, existe una inmersión canónica $k(\bar{X}) \hookrightarrow \Delta^* = \square^*/M^*$, ya que $\bar{\Delta} = k(\bar{X})$ es el cuerpo residual de la valoración $\bar{v}$. Más aún, es bien conocido que Δ^* es una extensión algebraica finita de $\bar{\Delta}$. Por el teorema de estructura de los anillos locales completos, existe un subcuerpo $L^* \subset \square^*$ que va biyectivamente sobre Δ^* por la aplicación canónica $\square^* \longrightarrow \Delta^*$. De otro lado, observemos un hecho claro. Sea $\eta \in k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ y escribamos

$$\eta = \eta_o(\bar{X},\bar{Y})+\eta_1(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}+\ldots+\eta_{n_1-1}(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^{n_1-1}, \quad \eta_i(\bar{X},\bar{Y}) \in k(\bar{X})((\bar{Y}))$$

Sabemos que los coeficientes de η_{11} son algebraicos sobre $k(\bar{X})$ y engendran sobre él una extensión finita. Como los coeficientes de η son funciones polinómicas de los de ζ_{11} con coeficientes en $k(\bar{X})$ resulta que, en cualquier caso, los coeficientes de cualquier elemento de $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ están todos contenidos en el cuerpo $k(\bar{X})(\{\omega_{111l}\}_{l\geq 1})$ que, repetimos, es una extensión algebraica finita de $k(\bar{X})$.

Consideremos la aplicación $\psi' : \square^* \longrightarrow k(\bar{X})(\{\omega_{111l}\}_{l=1})$ que a cada elemento $\eta(\bar{X},\bar{Y}^{1/q_1}) \in \square^*$ hace corresponder su término independiente $\eta(\bar{X},0)$; esta notación tiene sentido puesto que sabemos que los elementos de $\square^*$ tienen orden no negativo en $\bar{Y}$. También esta aplicación ψ' es una $k(\bar{X})$- aplicación y, por último, es claramente un homomorfismo de anillos cuyo núcleo es justamente M^*. Así se tiene una aplicación inyectiva

$$\psi : \Delta^* = \square^*/M^* \hookrightarrow k(\bar{X})(\{\omega_{111l}\}_{l\geq 1})$$

que permite identificar Δ^* con un subcuerpo de $k(\bar{X})(\{\omega_{111l}\}_{l\geq 1})$. Esta identificación se hace, en la práctica, asociando a la clase de

de un elemento de $\square^*$, módulo M^* el coeficiente de su término independiente en $\bar{Y}^{1/q_1}$.

Se trata ahora de volver a nuestra valoración v_1. Ya sabemos que el índice de ramificación de v_1 con respecto a v es q_1 e igual al índice de ramificación de v^* con respecto a $\bar{v}$. Pero se tiene además la

PROPOSICION 2.10.- El grado relativo de v_1 respecto de v es igual a e_1, esto es, al grado relativo de v^* respecto de $\bar{v}$.

Demostración.- Consideremos el diagrama conmutativo de inmersiones que usábamos antes

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "\phi(a,b,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k(\bar{X})((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, hook, "\lambda_1"] & k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11}) \end{tikzcd}$$

y sea $\bar{K} = \phi(a,b,\alpha,\beta)(K)$; está claro que $\lambda_1(L) = \bar{K}(\zeta_{11})$ y que $\bar{K}(\zeta_{11}):\bar{K} = n$. Sea $v' = v.(\phi(a,b,\alpha,\beta)_{/\bar{K}})^{-1}$, $v'' = v_1.(\lambda_{1/\bar{K}(\zeta_{11})})^{-1}$; se trata de calcular el grado relativo de v'' respecto de v'.

Es claro que v'' hace corresponder a cada elemento de $\bar{K}(\zeta_{11})$ su orden como serie en $\bar{Y}^{1/q_1}$. Esto significa que v^* es una amplicación a $k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_{11})$ de v''. Así pues, el cuerpo residual de v'' es un subcuerpo del de v^*. Esta identificación se hace como sigue. Sea (R'',M'') el anillo de la valoración v''; está claro que R'' * y M^* $R'' = M''$. Así, se tiene una inmersión canónica

$$\Delta'' = R''/M'' \hookrightarrow \square^*/M^* = \Delta^*$$

que a la clase de un elemento $\eta' \in R''$ le hace corresponder $\eta'+M^*$. Basta entonces, para demostrar la proposición, el probar que, dado un elemento $\eta \in \square^*$ existe un elemento $\eta' \in R''$ tal que $\eta'+M^* = \eta+M^*$. Sea, pues, dado $\eta \in \square^*$, escrito como en la página anterior. Observemos que las series $\eta_i(\bar{X},\bar{Y})$ pueden tener orden negativo pero ζ_{11} siempre tiene orden positivo. Además, notemos un

hecho que es fundamental para nuestro razonamiento. Tomando un término $\eta_i(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^i$ éste no es sino el procucto de dos series en $\bar{Y}^{1/q_1}$. Si nos interesan sólo los términos de este procucto de un grado inferior o igual a uno determinado(cero en nuestro caso), los coeficientes de esos términos no dependen sino de los coeficientes de $\eta_i(\bar{X},\bar{Y})$ hasta un grado fijo. Esto quiere decir que existe un entero s_i tal que, llamando $\eta_i'(\bar{X},\bar{Y})$ a la suma de los s_i 1os términos de $\eta_i(\bar{X},\bar{Y})$ los coeficientes de $\eta_i(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^i$ hasta el grado cero son exactamente los mismos que los de $\eta_i'(\bar{X},\bar{Y})$ hasta el grado cero. Pongamos

$$\eta' = \eta_o'(\bar{X},\bar{Y})+\eta_1'(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}+\dots+\eta_{n_1-1}'(\bar{X},\bar{Y})\zeta_{11}^{n_1-1};$$

entonces η',considerada como serie en $\bar{Y}^{1/q_1}$ tiene exactamente los mismos coeficientes, hasta el grado cero, que η. Por tanto, los coeficientes de los términos eventuales de η' de grado negativo son nulos y el coeficiente del término de grado 0 de η' es el mismo que el de η. Así pues $\eta'+M^* = \eta+M^*$. Como los $\eta_i'(\bar{X},\bar{Y})$ son funciones racionales en $\bar{Y}$ con coeficientes en $k(\bar{X})$, el lema 2.6 nos dice que $\eta_i'(\bar{X},\bar{Y}) \in \bar{K}$ luego $\eta' \in \bar{K}(\zeta_{11})$, lo que termina de probar la proposición.

Como lo hecho para v_1 es válido para cualquier ampliación v_i de v a L, llegamos a un resultado clave en esta sección, que vamos a enunciar y demostrar propiamente. Tenemos, de un lado, la factorización de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$,

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = \bar{g}_1(\bar{X},\bar{Y},Z)\dots\dots\bar{g}_h(\bar{X},\bar{Y},Z)$$

y para cada $i = 1,\dots,h$, elijamos una raiz $\zeta_i \in K_1((\bar{Y}^{1/q}))$ (véase nota 2.4) de $\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$. Se tiene así, un diagrama conmutativo de inmersiones, para cada $i = 1,\dots,h$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "\phi(a,b,\alpha,\beta)"] \arrow[d, hook] & k(\bar{X})((\bar{Y})) \arrow[d, hook] \\
L \arrow[r, hook, "\lambda_i"] & k(\bar{X})((\bar{Y}))(\zeta_i)
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda_i(z) = \zeta_i$. Así se tienen las valoraciones v_i que resultan de componer λ_i con la función de orden respecto de $\bar{Y}$ y sabemos por el teorema 2.7 que las valoraciones v_i no dependen de la raiz ζ_i elegida de $\bar{g}_i(\bar{X},\bar{Y},Z)$ y que todas son distintas entre sí. Con esto se tiene el

TEOREMA 2.11.- Las valoraciones $\{v_1,v_2,..,v_h\}$ son todas las ampliaciones distintas de v a L.

Demostración.- Sea q_i el índice de ramificación de v_i respecto de v, e_i el grado relativo; por la proposición 2.9 y por la 2.10 se tiene que $q_ie_i = n_i$, $i = 1,..,h$. Por consiguiente, se tiene

$$q_1e_1+....+q_he_h = n_1+...+n_h = n = L:K .$$

Este hecho, junto con la fórmula general de ramificación de valoraciones(véase,por ejemplo, Zariski-Samuel II, teorema 19, pág 55), implica que $\{v_1,...,v_h\}$ son todas las ampliaciones de v a L.

Como última cuestión de esta sección estudiaremos la relación entre la ampliación de valoraciones y las superficies que admiten un desarrollo en serie de Puiseux. Partimos para ello de una situación como la siguiente. Sea $f(X,Y,Z) \in k[[X,Y]][Z]$ un polinomio de Weirstrass irreducible tal que todas sus raices son series de Puiseux en $X^{1/p},Y^{1/p}$(por tanto son todas conjugadas sobre K). Sea $\square = k[[X,Y,Z]]/(f)$, M el ideal maximal de $\square$, $n = \text{grado}(f)$ y L el cuerpo de fracciones de $\square$. Entonces L es una extensión algebraica finita de K de grado n.

Sea $v:K\setminus\{0\} \longrightarrow Z$ una valoración discreta de rango 1(por tanto su anillo contiene a $k[[X,Y]]$) y cuyo centro en $k[[X,Y]]$ sea el ideal maximal $m = (X,Y)$. Sea $v(X) = a$, $v(Y) = b$, tales que $m.c.d(a,b) = 1$, y sean $\alpha,\beta \in Z$ tales que $a\alpha+b\beta = 1$. Por las razones expuestas al principio de esta sección existe un diagrama conmu-

tativo de inmersiones

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi(a,b,\alpha,\beta)} & k((\bar{X}))((\bar{Y})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k((X^{1/p},Y^{1/p})) & \xrightarrow{\phi'(a,b,\alpha,\beta)} & k((\bar{X}^{1/p}))((\bar{Y}^{1/p})) \end{array}$$

correspondiente a las sustituciones $\phi'(a,b,\alpha,\beta)(X^{i/p}Y^{j/p}) =$

$= \bar{X}^{(-\beta i+\alpha j)/p}\bar{Y}^{(ai+bj)/p}$ y ϕ.

Sea

$$\zeta = c_1(X,Y)X^{i_1/p}Y^{j_1/p}+\ldots+c_r(X,Y)X^{i_r/p}Y^{j_r/p}, c_i(X,Y)\in k[[X,Y]]$$

una raiz de $f(X,Y,Z) = 0$ donde $0 \leq i_1 < p, 0 \leq j_1 < p$. En esta situación se tiene que

$$\bar{\zeta} = \bar{c}_1(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}^{(-\beta i_1+\alpha j_1)/p}\bar{Y}^{(ai_1+bj_1)/p}+\ldots\ldots+$$

$$\ldots+\bar{c}_r(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}^{(-\beta i_r+\alpha j_r)/p}\bar{Y}^{(ai_r+bj_r)/p}$$

donde $\bar{c}_i(\bar{X},\bar{Y}) = \phi(a,b,\alpha,\beta)(c_i(X,Y))$ es una raiz de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$, teniendo esta última ecuación el significado que se le ha dado anteriormente.

Vamos a calcular el grado del polinomio mínimo de $\bar{\zeta}$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$. Sea δ el máximo común divisor de los menores de orden dos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & i_1\ldots\ldots\ldots i_r \\ 0 & p & j_1\ldots\ldots\ldots j_r \end{pmatrix}$$

y δ' el de los menores de orden dos de la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} p & 0 & -\beta i_1+\alpha j_1\ldots\ldots\ldots -\beta i_r+\alpha j_r \\ 0 & p & ai_1+bj_1\ \ldots\ldots\ldots ai_r+bj_r \end{pmatrix}$$

Los menores de orden dos de A son(salvo signo)

$p^2, pj_1,\ldots,pj_r, pi_1, pi_2,\ldots,pi_r, \{i_lj_{l'} - i_{l'}j_l\}_{1\leq l<l'\leq r}$.

Los menores cruzados de A' son

$i_lj_{l'}(-\beta b-\alpha a)+i_{l'}j_l(\alpha a+\beta b) = -i_lj_{l'}+i_{l'}j_l$

Por tanto, los menores de orden dos de A' son (salvo signo)

$p^2, pai_1+pbj_1, \ldots, pai_r+pbj_r, -p\beta i_1+p\alpha j_1, \ldots -p\beta i_r+p\alpha j_r, \{i_1j_1, - i_1,j_1\}$

De aquí se deduce fácilmente que $\delta|\delta'$; veamos que, recíprocamente, $\delta'|\delta$. Desde luego δ' divide a los menores cruzados de A, luego por esa parte no hay problema. Sea l un entero $1=l=r$; se tiene que

$$pj_l = (pai_l+pbj_l)+a(-p\beta i_l+p\alpha j_l)$$

$$pi_l = (pai_l+pbj_l) -b(-p\beta i_l+p\alpha j_l)$$

de donde se deduce que $\delta'|pj_l$ y $\delta'|pi_l$. Así pues $\delta' = \delta$ y el grado del polinomio mínimo de $\bar{\zeta}$ sobre $k((\bar{X}))((\bar{Y}))$ es igual a $n = p^2/\delta$. Como $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) \in k((\bar{X}))[[\bar{Y}]][Z]$ es un polinomio de Weierstrass que admite a $\bar{\zeta}$ como raiz, entonces es el polinomio mínimo de $\bar{\zeta}$ sobre $k((X))((Y))$. Esto implica, en particular, que $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ es irreducible sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ y así, por todo lo anterior, v tiene una única ampliación a L. Esto prueba la

<u>PROPOSICION 2.12</u>.- En la situación anterior, cualquier función de orden sobre K admite una única ampliación a L.

El recíproco de la proposición anterior no es cierto, como vamos a ver con el ejemplo que sigue.

<u>Ejemplo 2.13</u>.- Sea la superficie algebroide de ecuación

$$0 = f(X,Y,Z) = Z^4-X^3Y^3Z^3+Y(Y^4-X^5);$$

pongamos

$$\square = k[[X,Y,Z]]/(f) = k[[X,Y]][z]$$

donde se han identificado X e Y con sus imágenes canónicas en y se ha designado por z a la clase de Z módulo (f). Sea m el ideal maximal de $\square$ y pongamos, como de costumbre, $K = k((X,Y))$, $L = K(z)$, que es el cuerpo de fracciones de .

Sean $a,b \in Z_+$ tales que $1 = m.c.d(a,b)$ y sean $\alpha,\beta \in Z$ tales que $1 = \alpha a+\beta b$, elegidos de tal forma que $\alpha > 0$ y $\beta < 0$. Se tiene que

$$\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^4-\bar{X}^{-3\beta+3\alpha}\bar{Y}^{3a+3b}Z^3+\bar{X}^{5\alpha}\bar{Y}^{5b}-\bar{X}^{-5\beta+\alpha}\bar{Y}^{5a+b}$$

y se trata de ver que, para cualquiera valores a,b,α,β como antes, este polinomio es irreducible sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Para este estudio nos vemos obligados a considerar tres casos:

Caso 1.- $5b = 5a+b$

En este caso, $4b = 5a$ y la única solución posible de esta ecuación, con las condiciones anteriores, es $a = 4, b = 5$. Tomemos $\alpha = 4$, $\beta = -3$; se tiene, entonces, la ecuación

$$0 = \bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = Z^4-\bar{X}^{21}\bar{Y}^{27}Z^3+(\bar{X}^{20}-\bar{X}^{19})\bar{Y}^{25}.$$

Las cuatro raíces de esta ecuación son del tipo

$$\zeta_1 = \eta_1\bar{X}^{19/4}\bar{Y}^{25/4}+\zeta_1'$$
$$\zeta_2 = \eta_2\bar{X}^{19/4}\bar{Y}^{25/4}+\zeta_2'$$
$$\zeta_3 = \eta_3\bar{X}^{19/4}\bar{Y}^{25/4}+\zeta_3' \qquad \nu_{\bar{Y}}(\zeta_i') > 25/4 \ , \ i = 1,2,3,4$$
$$\zeta_4 = \eta_4\bar{X}^{19/4}\bar{Y}^{25/4}+\zeta_4'$$

donde $\{\eta_i\}_{i=1,2,3,4}$ son las cuatro raíces cuartas distintas de $1-\bar{X}$. Con estas expresiones es ya más que obvio que $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ es irreducible sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$.

Caso 2.- $5b < 5a+b$

En este caso el único segmento admisible del diagrama de Newton de $\bar{f}$ es el que une los puntos $(0,4)$ y $(5b,0)$. En efecto, la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es $4x+5by = 20b$. Considerando los puntos $(3a+3b,3)$ y $(5a+b,0)$, es

i) $4(3a+3b)+15b = 12a+27b > 20b$

ii) $4(5a+b) > 4.5b = 20b$,

lo que prueba nuestro aserto. Así, las raíces de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ son de la forma

$$\zeta_1 = \eta_1\bar{X}^{5\alpha/4}\bar{Y}^{5b/4}+\zeta_1'$$
$$\zeta_2 = \eta_2\bar{X}^{5\alpha/4}Y^{5b/4}+\zeta_2'$$
$$\zeta_3 = \eta_3\bar{X}^{5\alpha/4}\bar{Y}^{5b/4}+\zeta_3'$$
$$\zeta_4 = \zeta_4\bar{X}^{5\alpha/4}\bar{Y}^{5b/4}+\zeta_4'$$

donde $\{\eta_i\}_{i=1,2,3,4}$ representa en este caso las cuatro raíces cuartas de la -1. Si b es impar, de la expresión de las raíces anteriores se ve claro que $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ es irreducible sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Si b es par, α debe ser impar por la relación $1 = a\alpha+b\beta$ y ocurre exactamente lo mismo.

Caso 3.- $5a+b < 5b$

En este caso, el único segmento admisible del diagrama de newton de $\bar{f}$ es el que une los puntos $(0,4)$ y $(5a+b,0)$. En efecto, la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es $4x+(5a+b)y = 4(5a+b)$. Considerando los puntos $(3a+3b,3)$ y $(5b,0)$, es

i) $4(3a+b)+(5a+b)3 = 27a+15b > 20a+4b$

ii $4.5b > 4(5a+b)$;

lo que prueba nuestro aserto. Así, las raíces de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z) = 0$ son de la forma

$$\zeta_1 = \bar{X}^{(-5\beta+\alpha)/4}\bar{Y}^{(5a+b)/4}+\zeta_1'$$

$$\zeta_2 = -\bar{X}^{(-5\beta+\alpha)/4}\bar{Y}^{(5a+b)/4}+\zeta_2'$$

$$\zeta_3 = \sqrt{-1}\bar{X}^{(-5\beta+\alpha)/4}\bar{Y}^{(5a+b)/4}+\zeta_3'$$

$$\zeta_4 = -\sqrt{-1}\bar{X}^{(-5\beta+\alpha)/4}\bar{Y}^{(5a+b)/4}+\zeta_4'$$

Si $5a+b$ es impar, de la expresión de las raíces se ve claro que $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ es irreducible sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$. Si $5a+b$ es par, veamos que $-5\beta+\alpha$ es impar, con lo que nuestro razonamiento queda terminado por analogía con el caso 2. En efecto, si fuese

$$5a+b = 2c$$

$$-5\beta+\alpha = 2d$$

sería

$$5a\beta+\beta b = 2c\beta$$

$$-5a\beta+\alpha a = 2da$$

luego

$$1 = \alpha a+\beta b = 2(c\beta+da),$$

lo que no es posible.

Estos razonamientos prueban que toda valoración discreta de rango 1 de K/k cuyo centro en $R = k[[X,Y]]$ sea $M = (X,Y)R$, tiene una ampliación y sólo una a L. Resta por probar que L no puede estar engendrado sobre K por una serie de Puiseux. Para ello basta probar que L no es una extensión normal de K, pues las extensiones de K por series de Puiseux son normales, como ya vimos en la sección 1 del capítulo I.

Nótese que la irreducibilidad de $\bar{f}(\bar{X},\bar{Y},Z)$ sobre $k(\bar{X})((\bar{Y}))$ para cualquier valoración implica la de $f(X,Y,Z)$ sobre K. Así pues, se tiene una ecuación cuártica irreducible cuya resolvente cúbica es

$$g(X,Y,Z) = Z^3-4Y(Y^4-X^5)Z-X^3Y^4(Y^4-X^5),$$

la cual es, a su vez, irreducible, por el criterio de Eisestein. El discriminante de $g(X,Y,Z)$ es

$$D(g) = Y^3(Y^4-X^5)^2\left[256(Y^4-X^5)-27X^6Y^5\right]$$

y, evidentemente $D(g) \notin K$. Así el grupo de Galois de g sobre K es S_3, luego el de f es S_4 lo que implica, automáticamente, que L no es normal sobre K.

Naturalmente, este contraejemplo no es definitivo. Lo único que prueba es que la condición de ampliación única para funciones de orden, por sí sola, no implica desarrollo en serie de Puiseux. Pero una ecuación irreducible cuyas raíces son series de Puiseux da lugar a una extensión normal con grupo de Galois abeliano. El recíproco que habría que probar sería: Extensión normal con grupo de Galois abeliano más ampliación única de funciones de orden, ¿implica desarrollos en serie de Puiseux? La respuesta la ignoramos, aunque, por los estudios realizados hasta el momento, parece ser afirmativa. Termina, pues, esta memoria con una conjetura.

...MATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes, en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Francisco J. Herrera Govantes titulada "Ramificación de valoraciones de superficies Algebraicas"

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente Cum laude

Sevilla, 13 de Julio 1.981

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorando,