N-CATEGORIAS: UN MODELO CATEGORIAL DE LA LOGICA

Memoria presentada por Agustín Riscos Fernández para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Sevilla, octubre de 1984

Director de la Memoria:

Prof. D. Luis Mª Laita de la Rica

VºBº del Director del Departament

José Luis Vicente Córdoba

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS

FACULTAD DE MATEMATICAS

Deseo expresar mi agradecimiento a todos los que me han ayudado durante la realización de este trabajo; deseo citar especialmente a los Profesores Luis Maria Laita de la Rica, por su constante estímulo, y Alejandro Fernández Margarit que, con su existencia, prueba la consistencia de la Teoría de la Amistad.

INDICE

INTRODUCCION

El trabajo que presentamos se inscribe en la rama que puede denominarse Lógica Algebraica.

Desde que G. Boole, en 1847, presenta su traducción de la Lógica de Proposiciones mediante las Algebras que llevan su nombre, queda patente que el Algebra está capacitada para "matematizar" la Lógica, o, de otro modo, que la Lógica Simbólica Formal es susceptible de tratamiento algebraico.

Desde hace ya algunos años, el grupo de Lógica que formamos en nuestro Departamento ha dedicado sus esfuerzos a investigar las relaciones Lógica-Algebra; fruto de estos esfuerzos fué la Tesis del Prof. Fernández Margarit, en la que se introduce en la Teoría de Modelos el proceso algebraico de formación de cocientes.

La búsqueda de estructuras algebraicas que den cuenta de las estructuras lógicas más complejas que el Cálculo de Proposiciones ha sido incesante; citaremos, como más relevantes, las Algebras Monádicas y Poliádicas, introducidas por Halmos (8), y las Algebras Cilíndricas, introducidas por Tarski y Henkin (10), (11). Ambos sistemas tienen, conceptualmente, un desarrollo paralelo: primero se introducen, de forma axiomática, unos operadores (en el primer caso llamados cuantificadores existenciales, y en el segundo, operadores de cilindrificación); se elabora entonces una teoría, exclusivamente algebraica, sobre los efectos que estos operadores tienen sobre las álgebras, y se culmina con unos teoremas, del tipo del de Stone para álgebras de Boole, referidos, en el primer caso, a cierto tipo de Algebras Poliádicas funcionales ("ricas" y "simples"), y, en el segundo, a las Algebras Cilíndricas de Conjuntos.

Estos teoremas de representación, via los trabajos de Rasiowa y Sikorski, son la versión algebraica de los teoremas de Completitud.

El uso de la Teoría de Categorías en el tratamiento de la Lógica, comienza alrededor de 1970. Uno de los primeros fue W. Lawvere (15, 16), que analiza los Fundamentos utilizando funtores adjuntos. En Canadá, fundamentalmente, los trabajos de Lawvere se continúan con Makkai (20), Reyes (20), Kock (13), Wraith (33), Schlomiuck (29), etc.

Las aportaciones de esta escuela pueden esquematizarse:

- Representación de "teorías" y "modelos" por ciertas categorías (llamadas categorías lógicas), y ciertos funtores (llamados funtores lógicos), respectivamente.

- Representación de los cuantificadores por medio de situaciones de adjunción.

- Introducción de los "topos" en Lógica.

Describiremos, brevemente, este último apartado. Los topos (algunos autores escriben "topoi" para el plural) son unas categorías especiales, que son una especie de generalización de la categoría de los conjuntos. Tal como lo describe Goldblatt (5), surgen de buscar la respuesta a la pregunta: ¿cuáles son las características de la categoría de los conjuntos que la hacen tan especial?

Un topos, C, es una categoría cartesiana cerrada (esto es, finitamente completa, con exponenciación), con un subobjeto clasificador.

Un subobjeto clasificador es un objeto Ω de C, junto con una flecha $T:1 \longrightarrow \Omega$ (1 es el terminal), tales que para cada monic $f:a \rightarrowtail d$, existe una única flecha $\chi_f:d \longrightarrow \Omega$ de forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un pullback. χ_f se denomina "carácter" de f.
Esto es una generalización de las funciones características usuales para conjuntos. El diagrama anterior es una copia de la situación:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 = \{0\} \arrow[r, "T"] & 2 = \{0, 1\} \end{tikzcd}$$

donde $T(0) = 1$, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

En un topos C, el conjunto de subobjetos del objeto Ω, Sub(Ω), es casi un álgebra de Boole; cuando lo es, el topos se llama booleano. Este "casi ser", le ha valido a los topos el ser un instrumento algebraico muy bueno para caracterizar las Lógicas no-clásicas, especialmente el Intuicionismo: en los topos no es válida, en general, la fórmula $a \vee \neg a$, que separa el Intuicionismo de la Lógica Clásica. (Ver Golblatt (5)).

Nuestro trabajo se sitúa en un punto intermedio entre las categorías y las álgebras. Como precedente directo, citaremos el trabajo de Laita (14), en el que se interpreta la negación como un funtor contravariante de una categoría en sí misma. Laita hace uso de categorías Λ- y V-completas (es decir, con productos y coproductos infinitos), para tratar, de modo algebraico, los sistemas de Novikov, Hilbert-Ackerman, Lucasiewicz, y otros. Asímismo se consideran unas categorías $(C, \subset)$ de conjuntos, en las que la flecha es la inclusión, y se interpretan las funciones proposicionales como funtores de la categoría de proposiciones en una categoría $(C, \subset)$.

Discutiremos ahora las ideas y conceptos que introducimos en este trabajo. Hemos preferido exponer estas ideas en este Capítulo introductorio, y reservar el resto para un desarrollo exclusivamente técnico.

En el Capítulo I introducimos el primero de los conceptos básicos que presentamos: las N-categorías.

Una N-categoría, C, es una categoría preorden, junto con un funtor $N:C \longrightarrow C$ contravariante, tales que:

(1) C tiene objeto terminal, 1.

(2) C tiene coproductos (finitos), $[-,-]$.

(3) El funtor N^2 equivale naturalmente a la identidad de C, esto es, $N^2a \cong a$, para todo objeto a de C.

(4) $a \longrightarrow b$ es una flecha de C sii $[Na,b] \cong 1$, para cualesquiera a,b de C.

Esta noción es una versión simplificada y mejorada, creemos, de los conceptos de ψ-categoría, y categorías Λ- y V-completas, introducidos, como hemos dicho, en (14).

Frente al tratamiento clásico de las proposiciones mediante álgebras de Boole, las N-categorías presentan las siguientes ventajas:

A) Caracterización más "dinámica", al estar basada en la implicación, y en la consideración de la negación como actuación sobre implicaciones, esto es, acentuando su carácter contravariante: el funtor N actúa sobre una flecha $p \longrightarrow q$ convirtiéndola en una flecha $Nq \longrightarrow Np$.

B) Caracterización de las proposiciones equivalentes: se corresponden con los objetos isomorfos de la categoría.

Recordemos que el tratamiento algebraico mediante álgebras de Boole es incapaz de caracterizar las proposiciones equivalentes: los elementos de estas álgebras se identifican con clases enteras de proposiciones; para llevar a cabo esta identificación, es preciso formar el cociente de las proposiciones por la relación de equivalencia "si y sólo si", para formar la estructura que es conocida con el nombre de Algebra de Tarski-Lindenbaum de las proposiciones.

C) Caracterización completamente algebraica. En efecto, como se ve, las cuatro propiedades definitorias de N-categoría tienen un fuerte significado lógico:

la primera viene a decir que hay un objeto que representa la verdad, o validez (en un sentido que precisaremos más adelante),

la segunda introduce las disyunciones,

la tercera dice que la doble negación afirma, y

la cuarta refleja la afirmación lógica: "de a se deduce b, sii $\neg a \vee b$ es cierto".

Pues bien, después de demostrar una serie de propiedades de las N-categorías, entre las que cabe destacar la distributividad

$$\langle [a,b],[a,c] \rangle \cong [a,\langle b,c \rangle]$$

llegamos a probar, en I.2, que estas cuatro propiedades se pueden caracterizar de forma exclusivamente algebraica. Concretamente, se prueba que, una a una, son equivalentes respectivamente, a las situaciones de adjunción siguientes:

(1') $C \underset{G}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathbb{1}$ donde $\mathbb{1}$ es la categoría de un solo objeto, e I es el único funtor posible.

(2') $C\times C \underset{\Delta}{\overset{F}{\rightleftarrows}} C$ donde Δ es el funtor diagonal

(3') $C \underset{N''}{\overset{N'}{\rightleftarrows}} C^{op} \underset{N'}{\overset{N''}{\rightleftarrows}} C$ donde N' y N'' son el mismo funtor N, pero hecho covariante al tomar la categoría opuesta C^{op}.

(4') $C \underset{[Na,-]}{\overset{\langle a,-\rangle}{\rightleftarrows}} C$ para todo objeto a de C.

Las dos primeras son traducciones obvias de situaciones corrientes en la Teoría de Conjuntos (MacLane (19)).

Recordemos que una situación de adjunción $A \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} B$ es equivalente a que exista una familia de biyecciones

$$\Theta_{a,b}:(Fa,b)_B \cong (a,Gb)_A$$

natural en a y b; pero en el caso de categorías preorden, donde los conjuntos de flechas entre dos objetos son, bien vacíos, bien unitarios, la situación descrita equivale a:

$a \longrightarrow Gb$ es flecha en A sii $Fa \longrightarrow b$ es flecha en B.

En I.3, como test de nuestra definición, probamos que los axiomas y reglas de inferencia de la Lógica Clásica tienen una traducción que es válida en N-categorías.

Es de notar que, si bien la traducción de las fórmulas usuales $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\neg\alpha$ es, claramente, $\langle a,b\rangle$, $[a,b]$, Na, la de la implicación $\alpha \to \beta$ no puede ser $a \longrightarrow b$, pues $a \longrightarrow b$ no es un objeto de C. Para salvar esto, haciendo uso de la propiedad (4) de la definición de N-categoría, a la implicación

$\alpha \to \beta$ le hacemos corresponder el objeto $[Na,b]$, que lo representamos por $a \Longrightarrow b$.

Así, el sentido lógico de la flecha $a \longrightarrow b$ será la inferencia lógica, no la implicación. Tanto esto, como la traducción del Axioma del Tercero Excluído y la Regla Modus Ponens, se aclarará definitivamente en el Capítulo III.

Esta diferenciación entre $\longrightarrow$ y $\Longrightarrow$ es muy útil para la traducción algebraica. Un ejemplo donde esto queda bien patente es la traducción del Axioma IV

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

que cualquiera lee: "si α implica β, y β implica γ, entonces α implica γ", donde podemos notar que, de las cuatro implicaciones que aparecen, la tercera es la única que se lee: "si....entonces....".

En la traducción a N-categorías, esta diferenciación viene impuesta por lo dicho arriba:

$$\langle a \Longrightarrow b, b \Longrightarrow c \rangle \longrightarrow a \Longrightarrow c$$

De hecho, las cuatro implicaciones no "son" exactamente lo mismo: en la fórmula, la primera, segunda y cuarta pueden ser ciertas o falsas, pero la tercera es siempre verdadera.

El Capítulo II está dedicado a profundizar en las propiedades de N-categoría; estas propiedades, aparte el uso que hacemos de ellas en los Capítulos siguientes, nos sirven, fundamentalmente, para introducir de forma natural los conceptos de N-grafo, N-morfismo, y, sobre todo, N-funtor. Los N-funtores jugarán un papel esencial en nuestra definición de valoración semántica, y en el concepto de modelo de una teoría.

Un N-funtor entre dos N-categorías C_N y $C'_{N'}$ es un funtor F que cumple:

a) $F1 \cong 1'$, esto es, la imagen del elemento terminal de C_N es el elemento terminal de $C'_{N'}$.

b) $F[a,b] \cong [Fa,Fb]$, para cualesquiera elementos a y b de C_N.

c) $FN = N'F$

Las igualdades en (a) y (b) hay que entenderlas como isomorfismos, pues tanto el terminal como el coproducto son objetos definidos en una categoría, salvo isomorfismos.

Informalmente, podemos decir que un N-funtor, es un funtor que respeta la validez y la disyunción, y que es intercambiable con la negación.

De entre las propiedades demostradas, destaquemos:

<u>Teorema II.3.1</u>

Sea G_N un N-grafo. Existe una N-categoría C_N y un N-morfismo de grafos $P:G_N \longrightarrow \mathcal{U}C_N$ universales, esto es, para cualquier N-categoría $B_{N'}$, y cualquier N-morfismo de grafos $D:G_N \longrightarrow \mathcal{U}B_{N'}$ existe un único N-funtor $F:C_N \longrightarrow B_{N'}$ tal que $\mathcal{U}F.P = D$

$$\begin{tikzcd} G_N \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "D"'] & \mathcal{U}C_N \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}F"] & C_N \arrow[d, dashed, "F"] \\ & \mathcal{U}B_{N'} & B_{N'} \end{tikzcd}$$

El prefijo $\mathcal{U}$ significa olvidar composiciones e identidades, esto es, $\mathcal{U}$ nos permite pasar de una categoría C al grafo subyacente, $\mathcal{U}C$.

Este resultado es similar al de generación de categorías libres de MacLane, a partir de un grafo. La prueba es constructiva, y merece la pena señalar que el proceso constructivo de MacLane consiste en ir añadiendo al grafo las flechas que le faltan para ser categoría, y el nuestro consiste en ir suprimiendo en el N-grafo las flechas que le sobran para ser N-categoría.

Lema II.4.7

Sean A, B, E N-categorías, B extensión de A, E completa. (La completitud aquí quiere decir que admite coproductos infinitos). Cualquier N-funtor $A \longrightarrow B$ puede extenderse a un N-funtor $B \longrightarrow E$.

Lema II.4.8

Toda N-categoría tiene una extensión completa.

En la demostración de estos lemas, hacemos uso del Lema de Zorn, y de una variante del método de las cortaduras de Dedekind, usado por Jech (12), en cuyo desarrollo aparecen las sub-N-categorías E_p, que tendrán su significación lógica en las teorías con un número finito de axiomas.

Estos lemas justifican, parcialmente, la extensión del Cálculo de Proposiciones al Cálculo Funcional, que haremos en el Capítulo IV, exigiendo que la N-categoría básica sea completa.

En el Capítulo III se desarrolla la interpretación N-categorial del Cálculo de Proposiciones, y de la consistencia y completitud sintácticas. Comenzamos estudiando las sub-N-categorias E_p: Si p es un objeto de una N-categoría C, definimos:

$$E_p = \{ x \mid x \longrightarrow p \text{ es flecha de } C \}$$

y el funtor $N_p : E_p \longrightarrow E_p$ por $N_p x = \langle Nx, p \rangle$.

Probamos que E_p, N_p forman una N-categoría, y que la aplicación $\psi : C \longrightarrow C$ dada por $\psi x = \langle x, p \rangle$ es un N-funtor cuya "imagen" es precisamente E_p, y cuyo "núcleo" es E_{Np}. Probamos también que ψ es una retracción, lo que, de acuerdo con

II.4.6, nos garantiza que si C es completa, entonces E_p es también completa.

Introducimos, dualmente, los conjuntos

$$E'_p = \{ x \mid p \longrightarrow x \text{ es flecha de } C\}$$

y estudiamos las relaciones entre E_p, E_{Np}, E'_p y E'_{Np}.

Estos conjuntos resultan ser un caso particular de los que estudiamos a continuación: Si E es una colección no vacía de objetos de C, definimos:

$$(E) = \bigcup_{p \in [E]} E_p \ ., \quad \text{donde} \quad [E] = \bigcup_n [E]_n \ , \ \text{y}$$

$$[E]_n = \{[p_1,\dots,p_n] \mid p_i \in E,\ i=1,\dots,n\}.$$

Estos conjuntos, por medio de la relación

$$x \sim_E y \quad \text{sii} \quad [\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \in (E)$$

que es de equivalencia, nos permiten formar el conjunto cociente $C/_{(E)}$, que, con la flecha

$$\bar{x} \longrightarrow \bar{y} \quad \text{sii} \quad N[Nx,y] \in (E)$$

y con el funtor $N_E : C/_{(E)} \longrightarrow C/_{(E)}$ dado por $N_E\bar{x} = \overline{Nx}$ es una N-categoría.

Asímismo se prueba que la aplicación natural, que a cada elemento le asocia su clase, es un N-funtor.

Algebraicamente, estos conjuntos generalizan el concepto de ideales de álgebras (los E_p serían los ideales principales). La interpretación lógica es la del conjunto de las proposiciones refutables de una teoría. Justifiquemos esta afirmación:

Según la definición, los elementos de (E) son aquellos que implican coproductos finitos de elementos de E; pues bien, de la misma manera en que los axiomas (y sus conjunciones) de una teoría implican el conjunto de las proposiciones demostrables, podemos decir que los co-axiomas (= falsedades = elementos de

E) (y sus disyunciones), son implicados por las proposiciones refutables.

Así, la relación de equivalencia anterior, viene a medir el grado de refutabilidad según E, pues nos dice que la proposición "$(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$", que equivale a " x ó y, pero no ambos", es refutable.

De la misma forma, para generalizar la situación de C, $x \longrightarrow y$, a la de $C/_{(E)}$, $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$, lo que se pide, en lugar de $[Nx,y] \cong 1$, es que $N[Nx,y] \varepsilon (E)$, esto es, que la negación de $\neg x \vee y$ sea refutable. Nótese que no es preciso que se tenga $[Nx,y] \cong 1$, para que se tenga $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ en $C/_{(E)}$.

Así, la interpretación N-categorial de "un" cálculo de proposiciones, es un par (C,(E)), donde la N-categoría C representa el conjunto de proposiciones, con sus operaciones, y el conjunto (E) describe el conjunto de proposiciones refutables.

Una lógica (C,(E)) será sintácticamente consistente, cuando no se verifique simultáneamente que una proposición y su negación sean refutables. Tal condición equivale (III.3.1) a que el subconjunto (E) sea propio.

Estamos ya en condiciones de justificar la validez del Axioma del Tercero Excluído, y de la Regla de Modus Ponens:

Axioma TE: Si $[a,Na] \varepsilon (E)$, como $1 \cong [a,Na]$ pues la flecha siempre se tiene, tendríamos $1 \varepsilon (E)$, con lo que $(E) = C$, y la lógica (C,(E)) sería inconsistente.

Regla MP: Si $a \not\varepsilon (E)$ y $a \longrightarrow b$ es flecha de C, entonces $b \not\varepsilon (E)$. En efecto, si $b \varepsilon (E)$, sería $a \varepsilon E_b \subset (E)$

Una lógica (C,(E)) será sintácticamente completa, cuando para toda proposición se cumpla que, bien ella, bien su negación (pero no ambas) sean refutables. Tal condición equivale

(III.3.2) a que se tenga: $C/_{(E)} = \{\overline{0} \longrightarrow \overline{1}\}$; en este caso las proposiciones p refutables son las que $p \sim_E 0$, y las demostrables las que $p \sim_E 1$.

Estudiamos, a partir de III.3.3, el caso de las teorías con un número finito de axiomas, que pueden reducirse a uno solo: la conjunción de todos. Por dualidad, este caso se corresponde con $(E) = E_p$ donde p sería la disyunción de todos los co-axiomas. Probamos los resultados siguientes:

- (C,E_p) es consistente sii $p \ncong 1$.
- $(C,(E))$ es consistente sii (C,E_p) es consistente, para todo $p \in (E)$. Esta es una versión dual del teorema de compacidad; en efecto, podemos enunciarlo diciendo: $(C,(E))$ es consistente sii toda parte finitamente (co-)axiomatizada lo es.
- (C,E_p) es completa sii p es un elemento maximal en el orden inducido en C por la relación: $x \leqslant y$ sii $x \longrightarrow y$ en C.

Terminamos el Capítulo con un resultado (III.4) de isomorfía, según el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & E_p \\
& C/E_{Np} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

para N-categorías y N-funtores. ψ es el N-funtor, ya considerado, $\psi x = \langle x,p \rangle$, α el N-funtor (epimorfismo) natural, y β el N-funtor (isomorfismo) definido sobre una clase, por la imagen de ψ sobre un elemento de la clase. Este resultado nos dice, que el conjunto de las clases de proposiciones relacionadas por el grado de refutabilidad según Np, es isomorfo al conjunto obtenido, tomando conjunciones con p.

En el Capítulo IV, caracterizamos N-categorialmente la lógica de las funciones proposicionales de una variable, que hemos llamado silogística, pues constituye un formalismo muy adecuado para tratar el razonamiento silogístico clásico.

En primer lugar, si C es una N-categoría y X un conjunto arbitrario, el conjunto C^X puede dotarse de estructura de N-categoría, definiendo la flecha

$P \longrightarrow Q$ en C^X sii $Px \longrightarrow Qx$ en C, para todo $x \varepsilon X$

y el funtor $N^X : C^X \longrightarrow C^X$ por $N^X Px = NPx \varepsilon C$.

Así, el conjunto X se interpreta como el conjunto de objetos sobre los que trata la teoría (es decir, las constantes), la N-categoría C sigue siendo el conjunto de las proposiciones, y las funciones proposicionales son los elementos de C^X.

A continuación, probamos algunos resultados elementales, como por ejemplo $(Ra(P) \cup \{p\}) = E_p$, que nos conducen a definir un operador, que resultará ser un funtor:

$\exists : C^X \longrightarrow C^X$ por $\exists : P \in C^X \longmapsto \exists P = p = \bigsqcup Ra(P)$

Sobre esta definición hay que hacer varias consideraciones:

(a) Tanto en esta caracterización de las funciones proposicionales de una variable, como en la de varias variables, del Capítulo siguiente, hemos exigido que la categoría de base, C, sea completa, lo que nos permite definir el funtor $\exists$ sin problemas. En realidad, esta exigencia no es necesaria, sino que la hacemos por comodidad; todo puede quedar igual, añadiendo cada vez que aparezca un producto o coproducto infinito, la expresión "si existe": esto es, por ejemplo, lo que hace Leblanc (18), al estudiar las sumas existenciales.

Por otra parte, también puede soslayarse el problema, completando previamente la teoría-categoría, utilizando para ello, los resultados, ya citados, del Capítulo II.

(b) Otra cuestión, relacionada con la anterior, es que nuestra definición se hace por medio de una disyunción (coproducto), en general, infinito. Es claro que, si bien esta interpretación es correcta, la recíproca puede no serlo: no toda disyunción infinita puede interpretarse como un cuantificador existencial. La cuestión está en que, para nosotros, la existencia está equiparada con un coproducto infinito de los elementos del rango de una función proposicional P; a este coproducto infinito es a lo que denominamos $\exists P$. Así, queda como una cuestión formal de notación, el interpretar $\exists P$ como un cuantificador existencial o no.

(c) Los elementos de C pueden considerarse como de C^X, tomándolos como funciones constantes; por esto, podemos decir que $\exists : C^X \longrightarrow C^X$ en lugar de $\exists : C^X \longrightarrow C$.

(d) De nuevo, el carácter dinámico de esta interpretación proviene del carácter funtorial de $\exists$; en efecto, se prueba (IV.2.1) que si $P \longrightarrow Q$ entonces $\exists P \longrightarrow \exists Q$.

Dedicamos los apartados 2 y 3 de este Capítulo, a estudiar las propiedades del funtor $\exists$, introducir el funtor $\forall = N \exists N^X$, y estudiar también sus propiedades.

Introducimos a continuación unos conjuntos, que hemos llamado $\exists$-cerrados, representándolos ((D)),generados como en el Capítulo III, pero con la condición supletoria de que

$$\text{si } P \in ((D)) \quad \text{entonces} \quad \exists P \in ((D)).$$

Probamos entonces unos resultados que relacionan estos conjuntos con los anteriores, y establecen las diferencias entre los conjuntos generados por un subconjunto E en C y en C^X, esto es, considerando los elementos de E como funciones constantes de C^X. De entre estos resultados, cabe destacar (IV.4.7 y IV.4.8):

$((D))$ es propio (resp. maximal) en C^X sii $((D))\cap C$ es propio (resp. maximal) en C

donde la maximalidad se entiende en C^X referida a conjuntos $\exists$-cerrados.

Ahora, diremos que la traducción algebraica de una lógica silogística es un par $(C^X,((D)))$, que nos describe el conjunto de proposiciones y funciones proposicionales, juntamente con las refutables. Así, definiendo

$(C^X,((D)))$ sintácticamente consistente sii $(C,((D))\cap C)$ lo es, y

$(C^X,((D)))$ sintácticamente completa sii $(C,((D))\cap C)$ lo es,

llegamos a probar que

$(C^X,((D)))$ sintácticamente consistente sii $((D))$ es propio, y

$(C^X,((D)))$ sintácticamente completa sii $((D))$ es maximal.

Para ver porqué se hace necesario referir estas nociones al caso proposicional, basta considerar el ejemplo:
no tiene sentido decir que P:"x es múltiplo de 2" sea o no refutable, pero sí lo tiene, decirlo de "$\exists$x(x es múltiplo de 2)", esto es, de $\exists P$.

Estudiamos también, en IV.5.1, el caso de los E_p, llegando a las mismas conclusiones que en el Capítulo III.

Finalizamos este Capítulo, formalizando algunos ejemplos de razonamiento silogístico.

En el Capítulo V se generaliza esta situación al caso de varias variables: para ello, se considera la N-categoría C^{X^I}, donde C y X son como antes, e I es un conjunto de índices.

El proceso de cuantificación múltiple queda ahora: para cada subconjunto J de I tenemos un funtor $\exists(J):C^{X^I}\longrightarrow C^{X^I}$ definido: $\exists(J)P(f) = \bigcup\{P(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\}$.
donde $\sim_J$ es la relación de equivalencia:

$$g \sim_J f \quad \text{sii} \quad g(i) = f(i) \quad \text{para todo } i \notin J$$

Introducimos (V.2.3) los conceptos de soporte e independencia de una función proposicional, que probamos que resultan ser la traducción algebraica de las estancias libres y ligadas de variables en fórmulas.

La familia de funtores $\forall(J)$ se define como

$$\forall(J) = N^{X^I}\,\exists(J)N^{X^I}.$$

Caracterizamos también, funtorialmente, el proceso de sustitución de variables: para cada $\alpha \in X^X$, la aplicación $S_\alpha : C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$ dada por $S_\alpha P(f) = P(\alpha . f)$ resulta ser funtorial. Estudiamos las propiedades de estos funtores $\exists(J)$ y $\forall(J)$, generalizaciones del caso simple, y sus relaciones con las sustituciones.

Las traducciones algebraicas de las nociones sintácticas de consistencia y completitud, son análogas al caso simple; esta analogía se debe ahora a que la caracterización de $\exists$-cerrado se convierte aquí en $\exists(I)$-cerrado, lo que nos basta para conseguir la clausura respecto a todos los $\exists(J)$ y los S_α:

<u>V.3.3 proposición</u>

Sea $D \subset C^{X^I}$ tal que (D) es $\exists(I)$-cerrado. Para todo $P \in ((D))$ se tiene:

(a) $S_\alpha P \in ((D))$ para todo $\alpha \in X^X$.

(b) $\exists(J)P \in ((D))$ para todo $J \subset I$.

El último Capítulo está dedicado a la semántica.Cabe destacar nuestra definición de modelo, que, por un lado, es bastante natural, y por otro, facilita enormemente las caracterizaciones de consistencia y completitud semánticas.

El esquema del estudio de la semántica proposicional el siguiente:

Sea $(C,(E))$ la traducción algebraica de una lógica proposicional, B una N-categoría.

<u>VI.2.1 definición</u>

Una B-valoración, V, es un N-funtor $V:C \longrightarrow B$.

<u>VI.2.2 definición</u>

Sea V una B-valoración. Un elemento $p \in C$ se dice B-verdadero (resp. B-falso) respecto a V, si es $Vp \cong 1$ (resp. $Vp \cong 0$).

<u>VI.2.3 definición</u>

Una lógica $(C,(E))$ se dice semánticamente consistente, si existe una valoración V, tal que

si $p \in E$ entonces $Vp \cong 0$.

Se prueba que, en estas condiciones, es $Vp \cong 0$, para todo $p \in (E)$.

Definimos <u>modelo</u> de $(C,(E))$, como una tal valoración.

Esta definición se justifica por dualidad: un modelo de una teoría es una estructura en la que los axiomas de la teoría son válidos; para nosotros, es una valoración respecto de la que los co-axiomas son falsos. Además, así como los teoremas de la teoría son también válidos en el modelo, en nuestro caso, como hemos dicho, las proposiciones refutables son también falsas.

El teorema de Gödel queda satisfecho por construcción: Una teoría es consistente sii tiene un modelo.

En VI.2.6 vemos que la consistencia semántica equivale a la sintáctica, probando que

$(C,(E))$ es semánticamente consistente sii (E) es propio.

En la prueba de este resultado se utiliza el lema de Zorn para construir el modelo. (La prueba de Henkin, también lo utiliza).

Nuestra definición de completitud semántica es la dual de la habitual: p es demostrable sii es válido en todos los modelos. Para nosotros:

VI.2.7 definición

(C,(E)) es semánticamente completa si se tiene la equivalencia:

p es refutable sii es falso en todos los modelos

Terminamos este apartado, demostrando que (C,(E)) es completo.

La semántica funcional que desarrollamos a continuación, es análoga a la anterior, con la salvedad de que los valores de verdad se definen sólo para fórmulas cerradas, esto es, para elementos de C. Así, una B-valoración para una lógica $(C^{X^I},((D)))$ es un N-funtor $V{:}C \longrightarrow B$, como antes.

Un B-modelo es ahora una B-valoración tal que

$$Vp \cong 0 \quad \text{sii} \quad p \in ((D)) \cap C.$$

La caracterización de la consistencia no se altera, y se obtienen los mismos resultados que en el caso proposicional, pero, para la completitud, necesitamos un criterio de falsedad para fórmulas abiertas. Para ello, probamos primero un resultado dual al teorema del cierre:

VI.3.5 lema

Sea ((D)) un conjunto $\exists(I)$-cerrado de C^{X^I}. Se tiene:

$$P \in ((D)) \quad \text{sii} \quad \exists(I)P \in ((D)), \text{ para todo } P \in C^{X^I}$$

y definimos a continuación

VI.3.6 definición

Un elemento $P \in C^{X^I}$ se dice falso para V, si $V\exists P \cong 0$.

Con este criterio, podemos definir la completitud semántica, por la equivalencia:

P es refutable sii P es falso en todos los modelos

y el proceso continúa como antes, obteniéndose los mismos resultados.

CAPITULO I

N-CATEGORIAS. LOGICA PROPOSICIONAL

1.- N-categorías. Propiedades: distributividad, seudocomplementos.

1.1.- Definición

Una N-categoría, C, es una categoría preorden, junto con un funtor $N: C \longrightarrow C$, contravariante, tales que:

(1) C tiene objeto terminal, 1.

(2) C tiene coproductos finitos, $[-,-]$.

(3) El funtor N^2 equivale naturalmente a la identidad de C, i.e., $N^2 a \cong a$, para todo objeto a.

(4) $a \longrightarrow b$ es una flecha de C sii $[Na,b] \cong 1$, para cualesquiera objetos a y b.

1.2.- Propiedades

1.2.1.- C tiene objeto inicial, 0.

Basta tomar $0 = N1$. En efecto, para cualquier x es $Nx \longrightarrow 1$ luego $N(Nx \longrightarrow 1) = N1 \longrightarrow N^2 x \cong x$

1.2.2.- C tiene productos finitos, $\langle -,- \rangle$.

En efecto, dados a y b, ponemos $\langle a,b \rangle = N[Na,Nb]$, y las proyecciones $\langle a,b \rangle \longrightarrow a$ y $\langle a,b \rangle \longrightarrow b$ las obtenemos de

$N(Na \longrightarrow [Na,Nb])$ y $N(Nb \longrightarrow [Na,Nb])$ respectivamente.

Probemos la universalidad:

Sea c tal que $c \longrightarrow a$ y $c \longrightarrow b$. Tendremos $Na \longrightarrow Nc$ y $Nb \longrightarrow Nc$. Por la universalidad del coproducto será $[Na,Nb] \longrightarrow Nc$, y así

$$N([Na,Nb] \longrightarrow Nc) = N^2c \longrightarrow N[Na,Nb].$$

Teniendo finalmente en cuenta que $N^2c \cong c$, sigue que

$$c \longrightarrow \langle a,b\rangle .$$

1.2.3.- Leyes de De Morgan.

La definición de producto, $\langle a,b\rangle = N[Na,Nb]$, habida cuenta de que estas construcciones universales se definen salvo isomorfismos, es una clara generalización de una de las leyes de De Morgan. La otra se obtiene como consecuencia de esta definición y de las propiedades de N-categoría:

$$N\langle Na,Nb\rangle = N^2[N^2a,N^2b] \cong [a,b].$$

1.3.- Distributividad

1.3.1.- Definición

Diremos que una categoría C, preorden, con productos y coproductos, es distributiva si para cualesquiera objetos a, b, c se cumple:

$$\langle [a,b],[a,c]\rangle = [a,\langle b,c\rangle]$$

1.3.2.- Lema

Una categoría C, preorden, con productos y coproductos, es distributiva sii para cualesquiera a,b,c, la flecha $\langle [a,b],c\rangle \longrightarrow [a,\langle b,c\rangle]$ es una flecha de C.

Demostración

Supongamos C distributiva. Se tiene el diagrama conmutativo (pág. siguiente), que, junto con la condición de distributividad nos da la flecha deseada.

$$\begin{tikzcd}
& \langle [a,b],c\rangle \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[r] & c \arrow[dr] & \\
{[a,b]} & \langle [a,b],[a,c]\rangle \arrow[l] \arrow[rr] & & {[a,c]}
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, supongamos que se tiene

(1) $\langle [a,b],c\rangle \longrightarrow [a,\langle b,c\rangle]$

Cambiando b con c, tendremos:

(2) $\langle [a,c],b\rangle \longrightarrow [a,\langle c,b\rangle]$

y sustituyendo en (1) c por $[a,c]$:

(3) $\langle [a,b],[a,c]\rangle \longrightarrow [a,\langle b,[a,c]\rangle]$.

Consideremos ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[dr] & {[a,\langle [a,c],b\rangle]} \arrow[d, dashed] & \langle [a,c],b\rangle \arrow[l] \arrow[dl, "(2)"] \\
& {[a,\langle c,b\rangle]} &
\end{tikzcd}$$

Se tendrá:

$$\langle [a,b],[a,c]\rangle \xrightarrow{(3)} [a,\langle b,[a,c]\rangle] \cong [a,\langle [a,c],b\rangle] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow [a,\langle c,b\rangle] \cong [a,\langle b,c\rangle]$$

Nos falta ahora la flecha en sentido contrario; esta flecha resulta de la consideración de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[ddr] & {[a,\langle b,c\rangle]} \arrow[dd, dashed] & & \langle b,c\rangle \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr] & & {[a,\langle b,c\rangle]} \arrow[dd, dashed] & a \arrow[l] \arrow[ddl] \\
& & b \arrow[dl] & & c \arrow[dr] & & \\
& {[a,b]} & & & & {[a,c]} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} & \langle [a,b],[a,c]\rangle \arrow[l] \arrow[r] & {[a,c]} \\
& {[a,\langle b,c\rangle]} \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Para ver que una N-categoría es distributiva, necesitamos el

<u>1.3.3.- Lema</u>

En una categoría preorden con coproductos se tiene

$[[a,b],c] \cong [a,[b,c]]$ para cualesquiera a,b,c.

Demostración

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r] \arrow[d] & {[b,c]} \arrow[dd, dashed] & c \arrow[l] \arrow[ddl] \\
{[a,b]} \arrow[dr] & & \\
& {[[a,b],c]} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & {[a,[b,c]]} \arrow[dd, dashed] & {[b,c]} \arrow[l] \arrow[ddl] \\
{[a,b]} \arrow[dr] & & \\
& {[[a,b],c]} &
\end{tikzcd}$$

luego ya tenemos $[a,[b,c]] \longrightarrow [[a,b],c]$.

La flecha en sentido contrario resulta de la consideración de los diagramas conmutativos análogos:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[ddr] & {[a,b]} \arrow[dd, dashed] & b \arrow[l] \arrow[d] \\
& & {[b,c]} \arrow[dl] \\
& {[a,[b,c]]} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r] \arrow[ddr] & {[[a,b],c]} \arrow[dd, dashed] & c \arrow[l] \arrow[d] \\
& & {[b,c]} \arrow[dl] \\
& {[a,[b,c]]} &
\end{tikzcd}$$

1.3.4.- Teorema

Toda N-categoría es distributiva.

Demostración

Se tiene:

$\langle a,c\rangle \longrightarrow a \longrightarrow [a,\langle b,c\rangle]$ y $\langle b,c\rangle \longrightarrow [a,\langle b,c\rangle]$

por la propiedad 1.1.(4):

$[N\langle a,c\rangle,[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$ y $[N\langle b,c\rangle,[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$

por las leyes de De Morgan:

$[[Na,Nc],[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$ y $[[Nb,Nc],[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$

por el lema 1.3.3:

$[Na,[Nc,[a,\langle b,c\rangle]]] \cong 1$ y $[Nb,[Nc,[a,\langle b,c\rangle]]] \cong 1$

por 1.1.(4) se tienen las flechas:

$a \longrightarrow [Nc,[a,\langle b,c\rangle]] \longleftarrow b$

por definición de coproducto:

$[a,b] \longrightarrow [Nc,[a,\langle b,c\rangle]]$

por 1.1.(4):

$[N[a,b],[Nc,[a,\langle b,c\rangle]]] \cong 1$

por el lema 1.3.3:

$[[N[a,b],Nc],[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$

por las leyes de De Morgan:

$[N\langle [a,b],c\rangle,[a,\langle b,c\rangle]] \cong 1$

por 1.1.(4):

$\langle [a,b],c\rangle \longrightarrow [a,\langle b,c\rangle]$

y por el lema 1.3.2 la categoría es distributiva.

1.3.5.- También se cumple la propiedad dual, es decir,

$$\langle a,[b,c]\rangle \cong [\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle]$$

En efecto, de la distributiva se obtiene:

$$[Na,\langle Nb,Nc\rangle] \cong \langle [Na,Nb],[Na,Nc]\rangle$$

y aplicando el funtor N se obtiene:

$$\langle a,[b,c]\rangle \cong [\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle].$$

1.4.- Seudocomplemento

1.4.1.- Definición

Sea C una categoría preorden con productos. Un objeto de C se denomina seudocomplemento de a relativo a b (a y b objetos de C), si es el "mayor" elemento del conjunto

$$\{x \mid \langle a,x\rangle \longrightarrow b\}$$

es decir, c es seudocomplemento de a relativo a b si cumple:

$x \longrightarrow c$ sii $\langle a,x\rangle \longrightarrow b$ para todo objeto x de C.

Naturalmente, el seudocomplemento no tiene porqué existir, pero, si existe, es único (salvo isomorfismos). En efecto, supongamos que c y c' sean dos seudocomplementos de a relativos a b; como siempre se tiene $c \longrightarrow c$, será:

$\langle a,c\rangle \longrightarrow b$ por ser c seudocomplemento, y

$c \longrightarrow c'$ por ser c' seudocomplemento.

De forma análoga se ve que $c' \longrightarrow c$.

1.4.2.- En una N-categoría existen siempre seudocomplementos.

Demostraremos que el seudocomplemento de a relativo a b es, precisamente, $[Na,b]$.

En efecto, deberá cumplirse:

$$x \longrightarrow [Na,b] \quad \text{sii} \quad \langle a,x\rangle \longrightarrow b \quad \text{para todo } x$$

Se tiene:

$\langle a,x\rangle \longrightarrow b$	sii	$[N\langle a,x\rangle,b] \cong 1$	1.1.(4)
$[N\langle a,x\rangle,b] \cong 1$	sii	$[[Na,Nx],b] \cong 1$	ley de De Morgan
$[[Na,Nx],b] \cong 1$	sii	$[[Nx,Na],b] \cong 1$	pues son isomorfos
$[[Nx,Na],b] \cong 1$	sii	$[Nx,[Na,b]] \cong 1$	lema 1.3.3
$[Nx,[Na,b]] \cong 1$	sii	$x \longrightarrow [Na,b]$	1.1.(4)

2.- Caracterización mediante adjunciones

El objetivo de este parágrafo es caracterizar las cuatro propiedades definitorias de N-categorías mediante situaciones de adjunción.

2.1.- Definición

Sean A y B categorías, y F y G funtores $A \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} B$. Se dice que F es adjunto a izquierda de G (o que G es adjunto a derecha de F) si para cualesquiera a de A y b de B hay una biyección

$$\Theta_{a,b} : (Fa,b)_B \cong (a,Gb)_A$$

natural en a y en b. Esta situación se describe simbólicamente por $\dfrac{a \longrightarrow Gb}{Fa \longrightarrow b}$.

En el caso de categorías preorden, los conjuntos de flechas o son vacíos, o tienen una sola flecha, así que la situación de adjunción descrita se traduce en:

$$a \longrightarrow Gb \qquad \text{sii} \qquad Fa \longrightarrow b$$

2.2.- Una categoría C tiene objeto terminal sii se tiene la situación de adjunción $C \underset{G}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathbb{1}$, donde $\mathbb{1}$ es la categoría de un solo objeto, $*$, e I es el único funtor posible.

Demostración

Si se tiene la situación de adjunción, tendremos

$$a \longrightarrow G* \quad \text{sii} \quad * \longrightarrow * \quad \text{para todo } a$$

pero esto, como $* \longrightarrow *$ siempre ocurre, equivale a decir que para todo a hay una flecha $a \longrightarrow G*$, esto es, que $G*$ es terminal.

Recíprocamente, sea 1 el terminal de C. Definiendo G por $G* = 1$, tendremos para todo a

$$a \longrightarrow G* = 1 \quad \text{sii} \quad * \longrightarrow *$$

lo que es obviamente cierto; esto nos proporciona la adjunción deseada.

2.3.- Una categoría C tiene coproductos (finitos) sii se tiene la situación de adjunción $C\times C \underset{\Delta}{\overset{F}{\rightleftarrows}} C$, donde Δ es el funtor diagonal.

Demostración

Si se tiene la adjunción, tendremos para todo a, b, c: $\dfrac{(a,b) \longrightarrow (c,c)}{F(a,b) \longrightarrow c}$ esto es

$$\theta_{(a,b),c}: (F(a,b),c)_C \cong ((a,b),(c,c))_{C\times C}$$

Veamos que F(a,b) es un coproducto de a y b.

Poniendo $c = F(a,b)$ resulta que la flecha

$$\theta_{(a,b),F(a,b)}\ (F(a,b) \longrightarrow F(a,b))$$

es una flecha $(a,b) \longrightarrow (F(a,b),F(a,b))$, lo que nos dice que hay flechas $a \longrightarrow F(a,b)$, y $b \longrightarrow F(a,b)$.

Además, si c es cualquier objeto tal que $a \longrightarrow c$ y $b \longrightarrow c$, se tendrá una flecha en $C\times C$ $(a,b) \longrightarrow (c,c)$; la flecha $\theta^{-1}_{(a,b),c}\ ((a,b) \longrightarrow (c,c))$ es la flecha buscada $F(a,b) \longrightarrow c$.

Recíprocamente, si C tiene coproductos, es fácil comprobar que los funtores $[-,-]$ y Δ son adjuntos, sin más que usar las propiedades de coproducto.

2.4.- Sea C una categoría preorden, $N: C \longrightarrow C$ un funtor contravariante. Podemos considerar el propio N como un funtor covariante $N': C \longrightarrow C^{op}$, o también $N'': C^{op} \longrightarrow C$.

Se tiene que: N^2 equivale naturalmente a la identidad de C sii se dan las adjunciones

$$C \underset{N''}{\overset{N'}{\rightleftarrows}} C^{op} \underset{N'}{\overset{N''}{\rightleftarrows}} C$$

Demostración

Si se dan las adjunciones, tendremos, para todo a y b: $a \longrightarrow N''b$ sii $N'a \xrightarrow{op} b$ y

$a \xrightarrow{op} N'b$ sii $N''a \longrightarrow b$.

Poniendo en la primera $N''b$ por a, y en la segunda $N''a$ por b: $b \longrightarrow N^2b$ para todo b, y $N^2a \longrightarrow a$ para todo a, de donde resulta $N^2a \cong a$, para todo a.

Recíprocamente, supongamos que $N^2a \cong a$, para todo a. Veamos que

$$a \longrightarrow Nb \quad \text{sii} \quad Na \xrightarrow{op} b.$$

Si $a \longrightarrow Nb$, entonces $N(a \longrightarrow Nb) = N^2b \longrightarrow Na$, y como $N^2b \cong b$, será $b \longrightarrow Na$, es decir, $Na \xrightarrow{op} b$.

Si, por otro lado, $Na \xrightarrow{op} b$, entonces $b \longrightarrow Na$, y el resto es análogo.

Veamos la segunda adjunción. Deberá ser

$$a \xrightarrow{op} Nb \quad \text{sii} \quad Na \longrightarrow b$$

Si $a \xrightarrow{op} Nb$, entonces $Nb \longrightarrow a$, luego $N(Nb \longrightarrow a) =$
$= Na \longrightarrow N^2b \cong b$.

Si, por otro lado, $Na \longrightarrow b$, entonces $N(Na \longrightarrow b) =$
$= Nb \longrightarrow N^2a \cong a$, luego $a \xrightarrow{op} Nb$.

2.5.- Sea C una categoría preorden, con coproductos y terminal; $N: C \longrightarrow C$ un funtor contravariante tal que N^2 equivalga naturalmente a la identidad de C. Sabemos, por 1.2.2, que C tiene productos. Se tiene:

C cumple $a \longrightarrow b$ es flecha de C sii $[Na,b] \cong 1$, para cualesquiera a y b

sii

para todo a se tiene la adjunción $C \underset{[Na,-]}{\overset{\langle a,-\rangle}{\rightleftarrows}} C$.

Demostración

Supongamos que se tiene la adjunción. Para todo a,b,c será $b \longrightarrow [Na,c]$ sii $\langle a,b\rangle \longrightarrow c$.

Poniendo b = 1, y teniendo en cuenta que $\langle a,1\rangle \cong a$, queda

$$1 \longrightarrow [Na,c] \quad \text{sii} \quad a \longrightarrow c$$

pero como $[Na,c] \longrightarrow 1$ siempre, pues 1 es terminal, resulta

$$[Na,c] \cong 1 \quad \text{sii} \quad a \longrightarrow c.$$

Recíprocamente, supongamos que se tiene

$$a \longrightarrow b \quad \text{sii} \quad [Na,b] \cong 1$$

y demostremos la adjunción. Habrá que probar que

$$b \longrightarrow [Na,c] \quad \text{sii} \quad \langle a,b\rangle \longrightarrow c.$$

Se tiene:

$b \longrightarrow [Na,c]$ sii $[Nb,[Na,c]] \cong 1$ sii $[[Nb,Na],c] \cong 1$ sii $[N\langle b,a\rangle,c] \cong 1$ sii $\langle b,a\rangle \longrightarrow c$ sii $\langle a,b\rangle \longrightarrow c$.

3.- Axiomas de la Lógica Proposicional en una N-categoría

3.1.- Traducción

Hay muchas axiomatizaciones de la Lógica Clásica. Consideremos, por ejemplo, la de Goldblatt (5).

Axiomas

I	$\alpha \Rightarrow \{\alpha \wedge \alpha\}$
II	$\{\alpha \wedge \beta\} \Rightarrow \{\beta \wedge \alpha\}$
III	$\{\alpha \Rightarrow \beta\} \Rightarrow \{\{\alpha \wedge \gamma\} \Rightarrow \{\beta \wedge \gamma\}\}$
IV	$\{\{\alpha \Rightarrow \beta\} \wedge \{\beta \Rightarrow \gamma\}\} \Rightarrow \{\alpha \Rightarrow \gamma\}$
V	$\beta \Rightarrow \{\alpha \Rightarrow \beta\}$
VI	$\{\alpha \wedge \{\alpha \Rightarrow \beta\}\} \Rightarrow \beta$
VII	$\alpha \Rightarrow \{\alpha \vee \beta\}$

VIII $\{\alpha \vee \beta\} \Rightarrow \{\beta \vee \alpha\}$

IX $\{\{\alpha \Rightarrow \gamma\} \wedge \{\beta \Rightarrow \gamma\}\} \Rightarrow \{\{\alpha \vee \beta\} \Rightarrow \gamma\}$

X $\neg\alpha \Rightarrow \{\alpha \Rightarrow \beta\}$

XI $\{\{\alpha \Rightarrow \beta\} \wedge \{\alpha \Rightarrow \neg\beta\}\} \Rightarrow \neg\alpha$

XII $\alpha \vee \neg\alpha$

Regla de inferencia (Modus Ponens)

De α y $\alpha \Rightarrow \beta$ se infiere β.

Para traducir estas expresiones a expresiones en una N-categoría C, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Sabemos que si α y β son fórmulas, entonces $\alpha\wedge\beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$ y $\alpha \Rightarrow \beta$ también lo son, mientras que si a y b son objetos de C, entonces $\langle a,b\rangle$, $[a,b]$ y Na son objetos, pero $a \longrightarrow b$ es una flecha, no un objeto de C. Vemos así que las flechas de C no pueden ser la traducción de la implicación lógica. Pero, el sentido lógico de la implicación "$\alpha \Rightarrow \beta$" es equivalente al de "$\neg\alpha \vee \beta$", y por esta razón traduciremos $\alpha \Rightarrow \beta$ por el seudocomplemento $[Na,b]$, que será denotado en adelante por $a \Rrightarrow b$.

Con esto, la propiedad 1.1.(4) queda:

$$a \longrightarrow b \text{ es flecha de C} \quad \text{sii} \quad a \Rrightarrow b \cong 1.$$

Así, $a \longrightarrow b$ significará el hecho de que de a se deduce lógicamente b, mientras que $a \Rrightarrow b$ es la implicación usual.

Los axiomas traducidos quedan:

I $a \longrightarrow \langle a,a\rangle$

II $\langle a,b\rangle \longrightarrow \langle b,a\rangle$

III $a \Rrightarrow b \longrightarrow \langle a,c\rangle \Rrightarrow \langle b,c\rangle$

IV $\langle a \Rrightarrow b,\ b \Rrightarrow c\rangle \longrightarrow a \Rrightarrow c$

V $b \longrightarrow a \Rrightarrow b$

VI $\langle a,\ a \Rrightarrow b\rangle \longrightarrow b$

VII $a \longrightarrow [a,b]$

VIII	$[a,b] \longrightarrow [b,a]$
IX	$\langle a \Rightarrow c,\ b \Rightarrow c\rangle \longrightarrow [a,b] \Rightarrow c$
X	$Na \longrightarrow a \Rightarrow b$
XI	$\langle a \Rightarrow b,\ a \Rightarrow Nb\rangle \longrightarrow Na$
XII	$[a,Na] \cong 1$

La traducción de la Regla Modus Ponens:

De $a \cong 1$ y $a \longrightarrow b$ (i.e., $a \Rightarrow b \cong 1$), se obtiene $b \cong 1$

<u>Nota.</u> Las caracterizaciones del axioma XII y de la Regla Modus Ponens son aquí demasiado estrictas. Quedarán plenamente caracterizados cuando hablemos de validez, en el Cap. III.

<u>3.2.- Verificación</u>

Veremos en este apartado que la traducción de los axiomas I a XI son en efecto flechas de C, y que la traducción del axioma XII y de la regla de inferencia son afirmaciones ciertas en C, con la aclaración hecha de la nota anterior.

Notemos que, en I a XI, si sustituimos las flechas $\longrightarrow$ por el seudocomplemento $\Longrightarrow$, lo que hay que probar es que los objetos resultantes son isomorfos al terminal.

Hacemos la prueba por orden, excepto VI y XII que se adelantan, pues se usan para las otras pruebas.

(I) Basta considerar

$$\begin{tikzcd} a & \langle a,a\rangle \arrow[l] \arrow[r] & a \\ & a \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd}$$

(II) Basta considerar

$$\begin{tikzcd} b & \langle b,a\rangle \arrow[l] \arrow[r] & a \\ & \langle a,b\rangle \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, dashed] & \end{tikzcd}$$

(XII) Consecuencia inmediata de 1.1.(4)

(III) Se tiene:

$$b \cong \langle 1,b\rangle \cong \langle [Nc,c],b\rangle \xrightarrow[1.3.2]{} [Nc,\langle c,b\rangle] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [Na,[Nc,\langle c,b\rangle]] \underset{1.3.3}{\cong} [[Na,Nc],\langle c,b\rangle] \cong$$

$\cong [N\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle] \cong [N\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle]$.

Consideramos ahora

$$\begin{tikzcd} Na \arrow[r] \arrow[dr] & {[Na,b]} \arrow[d, dashed] & b \arrow[l] \arrow[dl, "*"] \\ & {[Na,[Nc,\langle c,b\rangle]]} & \end{tikzcd}$$

de donde $[Na,b] \longrightarrow [Na,[Nc,\langle c,b\rangle]] \underset{*}{\cong} [N\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle]$

y, sustituyendo los coproductos por seudocomplementos:

$$a \Rightarrow b \text{ --- } \langle a,c\rangle \Rightarrow \langle b,c\rangle.$$

(*) Las flechas marcadas con * se deducen del razonamiento anterior.

(VI) Por 1.4.2 se tiene $x \longrightarrow [Na,b]$ sii $\langle a,x\rangle \longrightarrow b$.

Tomando $x = [Na,b]$ resulta lo deseado.

(IV) Basta considerar:

$$\begin{tikzcd} & {\langle [Na,b],[Nb,c]\rangle} \arrow[d, "1.3.2"] & \\ Na \arrow[r] \arrow[dr] & {[Na,\langle b,[Nb,c]\rangle]} \arrow[d, dashed] & {\langle b,[Nb,c]\rangle} \arrow[l] \arrow[d, "\text{por VI}"] \\ & {[Na,c]} & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(V) Por definición de coproducto.

(VII) Por definición de coproducto.

(VIII) Basta considerar

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & {[a,b]} \arrow[d, dashed] & b \arrow[l] \arrow[dl] \\ & {[b,a]} & \end{tikzcd}$$

(IX) Se tiene:

$\langle [Na,c],[Nb,c]\rangle \cong \langle [c,Na],[c,Nb]\rangle \cong [c,\langle Na,Nb\rangle] \cong$

$\cong [c, N[a,b]] \cong [N[a,b],c]$

donde, en el segundo paso, hemos hecho uso de la distributividad.

(X) Por definición de coproducto.

(XI) Se tiene:

$\langle [Na,b],[Na,Nb]\rangle \cong [Na,\langle b,Nb\rangle] \cong [Na,0] \cong Na$

donde, en el primer paso, hemos hecho uso de la distributividad.

(Modus Ponens)

Si $a \cong 1$ y $a \longrightarrow b$ entonces $1 \longrightarrow a$ y $a \longrightarrow b$, luego $1 \longrightarrow b$, de donde $b \cong 1$.

CAPITULO II

LA CATEGORIA DE LAS N-CATEGORIAS

1.- Grafos y N-grafos

1.1.- Definición

Un grafo G es un par de conjuntos 0, F (objetos y flechas), junto con un par de funciones $D_0, D_1 \colon F \rightrightarrows 0$. Si $f \in F$, $D_0 f = a$, $D_1 f = b$, escribimos $a \xrightarrow{f} b$.

1.2.- Definición

Dado un grafo $G = (0, F, D_0, D_1)$, se llama grafo opuesto a G, y se designa por G^{op}, el grafo $(0, F, D_0^{op}, D_1^{op})$ donde $D_0^{op} = D_1$, y $D_1^{op} = D_0$.

Así, una situación tal como $b \xrightarrow{f} a$ ocurre en G^{op} sii $a \xrightarrow{f} b$ ocurre en G.

1.3.- Definición

Un morfismo de grafos M, entre los grafos $G=(0,F, D_0, D_1)$ y $G' = (0', F', D_0', D_1')$, es un par de funciones, que designaremos con la misma letra M, $M \colon 0 \longrightarrow 0'$, $M \colon F \longrightarrow F'$, tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "M"] \arrow[d, "D_0"'] & F' \arrow[d, "D_0'"] \\ 0 \arrow[r, "M"'] & 0' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "M"] \arrow[d, "D_1"'] & F' \arrow[d, "D_1'"] \\ 0 \arrow[r, "M"'] & 0' \end{tikzcd}$$

conmuten, es decir, $MD_0 = D'_0M$ y $MD_1 = D'_1M$.

En adelante, diremos simplemente que conmuta

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "M"] \arrow[d, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & F' \arrow[d, shift right, "D'_0"'] \arrow[d, shift left, "D'_1"] \\ O \arrow[r, "M"] & O' \end{tikzcd}$$

Así, M transforma la situación $a \xrightarrow{f} b$ de G en $Ma \xrightarrow{Mf} Mb$ de G'.

Este morfismo recién definido se denomina también morfismo covariante, en contraposición al

1.4.- Definición

Un morfismo contravariante N de grafos G y G', es un morfismo covariante de G en G'^{op}.

Así, debe conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "N"] \arrow[d, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & F' \arrow[d, shift right, "D_0'^{op}"'] \arrow[d, shift left, "D_1'^{op}"] \\ O \arrow[r, "N"] & O' \end{tikzcd}$$

esto es:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "N"] \arrow[d, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & F' \arrow[d, shift right, "D'_1"'] \arrow[d, shift left, "D'_0"] \\ O \arrow[r, "N"] & O' \end{tikzcd}$$

o, lo que es igual, $ND_0 = D'_1N$ y $ND_1 = D'_0N$.

N transforma la situación $a \xrightarrow{f} b$ de G en $Nb \xrightarrow{Nf} Na$ de G'.

1.5.- Definición

Un grafo $G = (O, F, D_0, D_1)$ se dice preorden, si la relación en O dada por

$a \, R \, b$ sii existe $f \in F$ tal que $D_0f = a$ y $D_1f = b$

es preorden (reflexiva y transitiva).

En un grafo preorden pueden definirse de la forma usual los conceptos de cotas superior e inferior, máximo y mínimo, maximal y minimal, supremo e ínfimo; aunque, naturalmente, no tienen porqué existir. En particular, llamaremos elemento <u>terminal</u> a todo elemento (si es que hay alguno) $1 \varepsilon O$, tal que

para todo $a \varepsilon O$ exista $f \varepsilon F$ tal que $D_0 f = a$ y $D_1 f=1$.

Notemos que no se asegura la unicidad de tal elemento. Análogamente se define elemento <u>inicial</u>.

1.6.- Definición

Un N-grafo, G_N, es un grafo (O, F, D_0, D_1) preorden, junto con un morfismo N contravariante, del grafo en sí mismo, tales que:

(1) En O hay elementos terminales (al menos uno).

(2) Cada dos elementos de O tienen un supremo en O.

(3) $NNa = a$ para todo a de O.

(4) Existe $f \varepsilon F$ tal que $D_o f = a$ y $D_1 f = b$ sii $\sup (Na,b)$ es elemento terminal.

1.7.- Notas

<u>1.7.1.-</u> Un N-grafo tiene elementos iniciales: si 1 es un terminal, N1 es inicial.

<u>1.7.2.-</u> Cada dos elementos de O tienen un ínfimo en O: basta comprobar que $\inf (a,b) = N (\sup (Na,Nb))$.

<u>1.7.3.-</u> Toda categoría C determina un grafo $\mathcal{U}C$ de forma obvia; al pasar a grafo se olvidan las identidades y las composiciones.

Es claro también, que un funtor entre categorías determina un morfismo entre los grafos subyacentes, que será co- o contravariante, según sea el funtor.

De esta forma, toda N-categoría C_N determina un N-grafo, $\mathcal{U}C_N$. Las identidades y composiciones se olvidan, pero no se olvida el orden inducido.

2.- N-morfismos y N-funtores

Definiremos ahora unos morfismos de grafos, entre N-grafos, de forma que "conserven" la estructura.

2.1.- Definición

Un N-morfismo de N-grafos G_N, $G'_{N'}$, es un morfismo M de grafos que cumple:

(1) $M1 = 1'$ esto es, la imagen de un elemento terminal en G_N es elemento terminal en $G'_{N'}$.

(2) $M(\sup(a,b)) = \sup(Ma,Mb)$ para cualesquiera a y b.

(3) $MN = N'M$

2.2.- Propiedades

Si M es un N-morfismo de N-grafos, se tiene:

2.2.1.- $M0 = 0'$ esto es, la imagen de un elemento inicial en G_N es elemento inicial en $G'_{N'}$.

Basta ver que para todo a' de 0' hay una situación $M0 \xrightarrow{f} a'$, lo que es equivalente a $\sup(N'M0, a') = 1'$ y se tiene, en efecto,

$$\sup(N'M0,a') = \sup(MN0,a') = \sup(M1,a') = \sup(1',a') = 1'$$

2.2.2.- $M(\inf(a,b)) = \inf(Ma,Mb)$

En efecto, usando 1.7.2, se tiene:

$$M(\inf(a,b)) = MN(\sup(Na,Nb)) = N'M(\sup(Na,Nb)) =$$
$$= N'(\sup(MNa,MNb)) = N'(\sup(N'Ma,N'Mb)) =$$
$$= \inf(Ma,Mb)$$

El concepto correspondiente al de N-morfismo, para N-categorías, es el de N-funtor.

2.3.- Definición

Un N-funtor entre N-categorías C_N y $C'_{N'}$ es un funtor F que cumple:

(1) $F1 = 1'$ esto es, la imagen del elemento terminal de C_N es el elemento terminal de $C'_{N'}$.

(2) $F[a,b] = [Fa,Fb]$.

(3) $FN = N'F$

De forma análoga a 2.2 se prueba:

2.3.1.- $F0 = 0'$

2.3.2.- $F\langle a,b\rangle = \langle Fa,Fb\rangle$.

2.4.- Notas

Denominaremos $Graf_N$ la categoría cuyos objetos son los N-grafos y flechas los N-morfismos; denominaremos Cat_N la categoría cuyos objetos son las N-categorías y flechas los N-funtores.

Como ya hemos dicho, el paso de Cat_N a $Graf_N$ es claro: grafos y morfismos son los mismos que categorías y funtores, pero olvidando identidades y composiciones.

Vamos a estudiar el problema recíproco: generación de una N-categoría a partir de un N-grafo.

3.- N-categorías libres

El teorema que demostramos en este apartado, es una variante modificada de un resultado de MacLane (19), para N-categorías.

3.1.- Teorema

Sea G_N un N-grafo. Existe una N-categoría C_N y un N-morfismo de grafos $P: G_N \longrightarrow \mathcal{U}C_N$ universales, esto es, para cualquier N-categoría $B_{N'}$ y cualquier N-morfismo de grafos $D: G_N \longrightarrow \mathcal{U}B_{N'}$, existe un único N-funtor F, $F: C_N \longrightarrow B_{N'}$ tal que $\mathcal{U}F.P = D$. (ver diagrama pág. sig.)

$$\begin{tikzcd} G_N \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "D"'] & \mathcal{U}C_N \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}F"] \\ & \mathcal{U}B_{N'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_N \arrow[d, dashed, "F"] \\ B_{N'} \end{tikzcd}$$

Notación

Como se ve, el prefijo N- para categorías y funtores (y para grafos y morfismos), indica exclusivamente el carácter del objeto de que se trata; no se refiere por tanto al "nombre"del funtor (o morfismo) propio de la categoría. Así, decir que F es N-funtor entre las N-categorías C y D, no quiere decir que los funtores contravariantes propios de C y D tengan que denominarse con la letra N.

Por otra parte, siempre que no sea necesario establecer diferencias, usaremos la letra N para referirnos a estos funtores y morfismos.

Demostración de 3.1

La haremos en varios pasos.

A) Construcción de C_N.

objetos de C_N : los objetos de G_N.

flechas de C_N : dados a,b, diremos que $a \longrightarrow b$ en C_N si aRb en G_N, es decir, si en G_N ocurre una situación $a \xrightarrow{f} b$.

La construcción de MacLane no nos sirve, pues no conservaría el carácter preorden que debe tener C_N.

Notemos que, de esta forma, este carácter está asegurado, pues entre dos objetos de C_N hay una única flecha o ninguna.

Mientras el proceso de generación de categorías libres de MacLane "añade" flechas para conseguir identidades y composiciones, lo que hacemos aquí es "suprimir" las fle-- chas sobrantes; no necesitamos añadir nada, pues partimos de un grafo preorden. Ahora las identidades y composiciones nos vienen dadas por la relación R en O:

-- composición: Si $a \longrightarrow b$ y $b \longrightarrow c$ son flechas en C_N, es porque aRb y bRc en O; por la transitividad de R será aRc en O y por tanto $a \longrightarrow c$ en C_N.

-- identidades: Consecuencia de ser R reflexiva. En efecto, es equivalente $a \longrightarrow a$ en C_N con aRa en O.

B) C_N <u>es una N-categoría.</u>

Por ser G_N un N-grafo, tenemos el morfismo contravariante $N: G_N \longrightarrow G_N$. Definimos un funtor, que representaremos con la misma letra N, $N: C_N \longrightarrow C_N$ por:

-- sobre objetos: actúa como el morfismo N

-- sobre flechas: Si $a \longrightarrow b$ es flecha en C_N entonces es aRb en O, esto es, en G_N ocurre una situación $a \xrightarrow{f} b$; por el morfismo N esta situación se transforma en $Nb \xrightarrow{Nf} Na$, lo que nos dice que Nb R Na en O. Esto nos asegura la existencia de la flecha $Nb \longrightarrow Na$ en C_N, y así, definimos

$$N(a \longrightarrow b) = Nb \longrightarrow Na$$

Veamos que N es funtor.

- $N(a \longrightarrow a) = Na \longrightarrow Na$, luego N transforma identidades en identidades.

- $N((b \longrightarrow c).(a \longrightarrow b)) = (N(a \longrightarrow b)).(N(b \longrightarrow c))$

En efecto, se tiene:

$N((b \longrightarrow c).(a \longrightarrow b)) = N(a \longrightarrow c) = Nc \longrightarrow Na$, y también

$(N(a \longrightarrow b)).(N(b \longrightarrow c)) = (Nb \longrightarrow Na).(Nc \longrightarrow Nb) = Nc \longrightarrow Na$

La contravarianza se da por construcción.

Veamos ahora que C_N y N cumplen las propiedades de N-categoría.

-- En C_N hay terminal. En efecto, cualquiera de los terminales de G_N es terminal en C_N; notemos que, en C_N, todos estos terminales resultan isomorfos.

-- En C_N hay coproductos. En efecto, dados a y b, veamos que $[a,b]$ = sup (a,b). Se tiene:

$$a \longrightarrow [a,b] \quad \text{pues } a\ R\ \sup(a,b)$$

$$b \longrightarrow [a,b] \quad \text{pues } b\ R\ \sup(a,b)$$

Sea C tal que $a \longrightarrow c$ y $b \longrightarrow c$. Será aRc y bRc, lo que nos dice que c es cota superior de a y b; por definición de supremo, tendremos sup (a,b) R c, esto es, $[a,b] \longrightarrow c$.

La conmutatividad del diagrama del coproducto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & {[a,b]} \arrow[d, dashed] & b \arrow[l] \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

y la unicidad de la flecha punteada son consecuencias triviales del carácter preorden.

-- Finalmente, NNa = a y $a \longrightarrow b$ sii $[Na,b] \cong 1$ son clara consecuencia del hecho de ser G_N N-grafo.

C) <u>Construcción del N-morfismo $P: G_N \longrightarrow \mathcal{U}C_N$</u>.

-- sobre objetos: tomamos P como la identidad.

-- sobre flechas: si $a \xrightarrow{f} b$ ocurre en G_N, sabemos que es aRb en O, y por tanto $a \longrightarrow b$ es flecha en C_N; así, definimos $Pf = \mathcal{U}(a \longrightarrow b)$.

Es evidente que P es un morfismo de grafos, y que es un N-morfismo, pues las tres propiedades

P1 = 1

P (sup (a,b) = sup (Pa,Pb)

PN = NP

se cumplen por ser P la identidad sobre objetos.

D) <u>Universalidad</u>

Sea B_N, una N-categoría, y sea $D: G_N \longrightarrow \mathcal{U}B_N$, un N-morfismo. Queremos ver que hay un único N-funtor F,

$F: C_N \longrightarrow B_{N'}$, que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_N \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "D"'] & \mathcal{U}C_N \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}F"] \\ & \mathcal{U}B_{N'} \end{tikzcd}$$

D1) Existencia de F

Lo definimos por:

-- sobre objetos: $Fa = Da$

-- sobre flechas: Sea $a \longrightarrow b$ flecha de C_N. Será aRb en O, y por tanto, una situación $a \xrightarrow{f} b$ ocurre en G_N.

El morfismo D transformará esta situación en $Da \xrightarrow{Df} Db$ en $\mathcal{U}B_{N'}$, luego $Da \longrightarrow Db$ es flecha en $B_{N'}$.

Definimos así, $F(a \longrightarrow b) = Da \longrightarrow Db = Fa \longrightarrow Fb$.

De la construcción se deduce fácilmente que F es funtor.

Veamos que es N-funtor. Las tres propiedades se deducirán del hecho de ser D un N-morfismo:

-- $F1 = D1$ que es terminal en $\mathcal{U}B_{N'}$, y por tanto en $B_{N'}$.

-- $F[a,b] = F(\sup(a,b)) = D(\sup(a,b)) = \sup(Da,Db) =$

$= \sup(Fa,Fb) = [Fa,Fb]$.

-- $FN = N'F$ por ser $DN = N'D$.

Veamos ahora que $\mathcal{U}F.P = D$.

-- para objetos: P es la identidad, y $\mathcal{U}F$ es como F; deberá ser entonces $D = F$ que lo es, por construcción.

-- para flechas: Sea $a \xrightarrow{f} b$ en G_N. Se tiene:

$$\mathcal{U}F.P\,(\underbrace{a \xrightarrow{f} b}_{G_N}) = \mathcal{U}F(\mathcal{U}(\underbrace{a \longrightarrow b}_{C_N})) = \mathcal{U}F(\underbrace{a \longrightarrow b}_{B_{N'}}) = \underbrace{Fa \longrightarrow Fb}_{\mathcal{U}B_N}$$

y, por otro lado:

$$D(\underbrace{a \xrightarrow{f} b}_{G_N}) = \underbrace{Da \xrightarrow{Df} Db}_{\mathcal{U}B_{N'}} \underset{*}{=} \underbrace{Da \longrightarrow Db}_{\mathcal{U}B_{N'}} = \underbrace{Fa \longrightarrow Fb}_{\mathcal{U}B_N}$$

(*) podemos quitar el "nombre" de la flecha, pues en $\mathcal{U}B_N$ hay unicidad (por ser preorden).

D2) Unicidad de F

Sea F' otro N-funtor $F' : C_N \longrightarrow B_{N'}$ tal que $D = \mathcal{U}F'.P$. Deberá ser, para objetos:

$Fa = Da = \mathcal{U}F'.Pa = \mathcal{U}F'a = F'a$

y para flechas:

$$\mathcal{U}F'.P\,(a \xrightarrow{f} b) = \mathcal{U}F'(\mathcal{U}(a \longrightarrow b)) = D(a \xrightarrow{f} b) = Fa \longrightarrow Fb =$$
$$= \mathcal{U}F(\mathcal{U}(a \longrightarrow b)$$

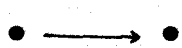
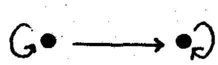
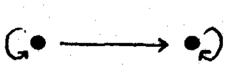
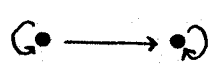
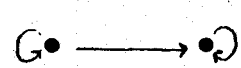
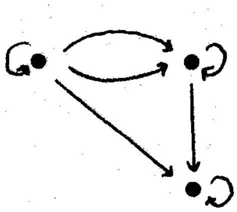
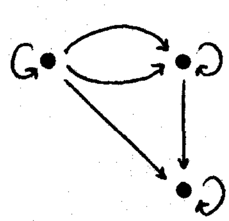
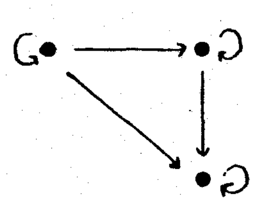
con lo que F' = F.

Esta categoría C_N se llama la N-categoría libre sobre el N-grafo G_N.

Este teorema nos proporciona una biyección

$$\mathrm{Cat}_N\,(C_N\ ,\ B_{N'}) \quad \cong \quad \mathrm{Graf}_N\,(G_N\ ,\ \mathcal{U}B_{N'})$$
$$F \longleftrightarrow D$$

Ejemplos

grafo	categoría libre	N-categoría libre
		el grafo no es N-grafo
		
		

4.- La categoría de las N-categorías

Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son las N-categorías, y cuyos morfismos son los N-funtores entre N-categorías.

4.1.- Definición

Como es usual, diremos que

-- α es un monomorfismo, si se cumple:

$$\text{si} \quad \alpha\beta = \alpha\gamma \quad \text{entonces} \quad \beta = \gamma$$

-- α es un epimorfismo, si se cumple:

$$\text{si} \quad \delta\alpha = \sigma\alpha \quad \text{entonces} \quad \delta = \sigma$$

-- un morfismo $\alpha: C \longrightarrow C$ es una retracción, si $\alpha^2(x)=\alpha(x)$ para todo x de C, esto es, si α es la identidad sobre $\alpha(C)$. En este caso, se dice también que $\alpha(C)$ es una retracción de C.

4.2.- Definición

Diremos que una N-categoría E es inyectiva, cuando para todo $\beta: A \longrightarrow B$ monomorfismo, y para todo $\alpha: A \longrightarrow E$, exista $\gamma: B \longrightarrow E$ tal que $\gamma\beta = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
E & \\
A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, "\beta"] & B \arrow[ul, dashed, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

4.3.- Nota

Usualmente, A es subcategoría de B si los objetos de A son objetos de B, y $(a,b)_A \subset (a,b)_B$.
Ahora, llamaremos subcategoría, simplemente, a lo que podría llamarse sub-N-categoría:

A es subcategoría de B si es subcategoría en el sentido usual, y, además A es N-categoría, con el mismo funtor N o con otro; en este último caso, la inclusión deberá ser N-funtor.

Si A es subcategoría de B, diremos también que B es una extensión de A.

4.4.- Proposición

Si E es una N-categoría inyectiva, entonces E es una retracción de cada extensión B de E.

Demostración

Sea B extensión de E. Pongamos, en la situación de la definición 4.1, $A = E$, $\alpha = id_E$, $\beta : A \rightarrowtail B$ la inclusión (que es un monomorfismo). Por ser E inyectiva, existirá un $\gamma : B \longrightarrow E$ tal que $\gamma\beta = \alpha$

$$\begin{tikzcd} E & \\ A=E \arrow[u, "\alpha=id_E"] \arrow[r, hook, "\beta"] & B \arrow[ul, dashed, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Para cualquier $x \in E$ se tendrá $\gamma\beta(x) = \alpha(x)$, esto es, $\gamma(x) = x$, de donde $\gamma^2(x) = \gamma(x)$, con lo que γ es una retracción.

4.5.- Nota

Recordemos que una categoría A es completa si existe el coproducto de cualquier colección X de objetos de A. Este coproducto se designará por $\coprod X$.

En una N-categoría completa existen también los productos de cualquier colección X: no hay más que aplicar el funtor N. Designaremos el producto por $\prod X$.

4.6.- Proposición

Si E es una retracción de una N-categoría A completa, entonces E es completa.

Demostración

Sea la retracción $\alpha : A \longrightarrow E$. Sea X una colección de objetos de E. El coproducto $\coprod X$ será, desde luego, un objeto de A. Veamos que $\alpha(\coprod X)$ es el coproducto de X en E.

Nótese que, si fuese $\coprod X \in E$, sería $\alpha(\coprod X) = \coprod X$ y, en este caso, el coproducto en A coincidiría con el coproducto en E.

Tendremos que probar

1) para todo $x \in X$, la existencia de la flecha $x \longrightarrow \alpha(\coprod X)$

2) la universalidad.

Lo primero es fácil: por ser $\coprod X$ el coproducto de X en A tenemos para todo x la flecha $x \longrightarrow \coprod X$ en A. Aplicando α a esta flecha tendremos la flecha $\alpha(x) \longrightarrow \alpha(\coprod X)$ en E; pero como $x \in E$, será $\alpha(x) = x$, luego se tiene la flecha de E $x \longrightarrow \alpha(\coprod X)$.

Veamos la universalidad. Sea $y \in E$ tal que para todo $x \in X$ se tenga la flecha $x \longrightarrow y$ en E. Como las flechas de E son de A, y $\coprod X$ es el coproducto en A, por la universalidad de este coproducto tendremos la existencia de una flecha $\coprod X \longrightarrow y$ en A; aplicando α será $\alpha(\coprod X) \longrightarrow \alpha(y)$ en E; y, finalmente, como $y \in E$, es $\alpha(y)=y$ tendremos en E la flecha $\alpha(\coprod X) \longrightarrow y$ como deseábamos.

4.7.- Lema

Sean A, B, E N-categorías, B extensión de A, y E completa. Cualquier N-funtor $\alpha : A \longrightarrow E$ puede extenderse a un N-funtor $B \longrightarrow E$.

--LLamaremos a los funtores propios de cada N-categoría con la misma letra, N, pues no hay lugar a confusión.

Demostración

Consideremos la colección de los pares (C,ψ), donde C es una subcategoría de B, y $\psi : C \longrightarrow E$ es un N-funtor que extiende a α. Esta colección es no vacía, pues contiene al par (A,α).

Además puede ordenarse, definiendo:

$(C,\psi) \leqslant (C',\psi')$ sii C es subcategoría de C' y ψ' extiende a ψ.

Con este orden, se cumple la condición de cadena, pues si $\{(C_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es una familia totalmente ordena da, es fácil ver que $C = \bigcup_{i\varepsilon I} C_i$ es una subcategoría de B, que contiene a A, y, definiendo $\psi : C \longrightarrow E$ por

$$\psi(a) = \psi_i(a) \quad \text{si} \quad a \varepsilon C_i$$

$$\psi(a \longrightarrow b) = \psi_j(a) \longrightarrow \psi_j(b) \quad \text{si} \quad (a \longrightarrow b) \text{ es una flecha de } C_j$$

es claro que ψ es un N-funtor que extiende a los ψ_i.

El lema de Zorn nos proporciona la existencia de un elemento maximal (B', γ) en esta colección.

Para demostrar el lema, bastará ver que $B' = B$. Lo haremos por reducción al absurdo: si $b \varepsilon B \setminus B'$ construiremos un par (B'', Ψ) que va a contradecir el carácter maximal de (B', γ). Lo hacemos en varios pasos.

Paso 1. Construcción de B"

Consideremos el conjunto

$$\{ [\langle b,q \rangle, \langle Nb,p \rangle] \mid q,p \varepsilon B' \}$$

B" va a ser la N-categoría formada por estos objetos, los isomorfos a ellos, y las flechas entre ellos que haya en B.

Veamos que:

P1.1 $B' \subset B''$

P1.2 $B' \neq B''$

P1.3 B" es N-categoría.

P1.1 Sea $z \varepsilon B'$. Veamos que $z = [\langle b,z \rangle, \langle Nb,z \rangle] \varepsilon B''$.
Desde luego, $\langle b,z \rangle \longrightarrow z$ y $\langle Nb,z \rangle \longrightarrow z$.
Veamos la universalidad. Sea x tal que $\langle b,z \rangle \longrightarrow x$ y $\langle Nb,z \rangle \longrightarrow x$; tendremos que probar que $z \longrightarrow x$.

Tendremos por hipótesis y por 1.1.(4):

$[N\langle b,z \rangle, x] \cong 1 \cong [N\langle Nb,z \rangle, x]$

por las leyes de De Morgan:

$[[Nb,Nz],x] \cong 1 \cong [[b,Nz],x]$

por I.1.3.3:

$[Nb,[Nz,x]] \cong 1 \cong [b,[Nz,x]]$

por I.1.1.(4):

$b \longrightarrow [Nz,x] \longleftarrow Nb$

por definición de coproducto:

$[b,Nb] \longrightarrow [Nz,x]$ y como $[b,Nb] \cong 1$, será $[Nz,x] \cong 1$,

esto es, $z \longrightarrow x$.

P1.2 Para ver que $B' \neq B''$ bastará comprobar que $b \in B''$; y, en efecto, notemos que $b \cong [\langle b,1\rangle,\langle Nb,0\rangle]$

P1.3 B'' es N-categoría. Habrá que probar que

P1.3.1 Si $x \in B''$, entonces $Nx \in B''$

P1.3.2 Si $x,y \in B''$, entonces $[x,y] \in B''$

P1.3.1 Pongamos $x = [\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle]$. Veremos que $Nx \in B''$ viendo que $Nx = [\langle b,Nq\rangle,\langle Nb,Np\rangle]$. Se tiene:

$$Nx = N[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong \langle N\langle b,q\rangle,N\langle Nb,p\rangle\rangle \cong \langle [Nb,Nq],[b,Np]\rangle \cong$$

$$\cong [\langle Nb,[b,Np]\rangle,\langle Nq,[b,Np]\rangle] \cong$$

$$\cong [[\langle Nb,b\rangle,\langle Nb,Np\rangle],[\langle Nq,b\rangle,\langle Nq,Np\rangle]] \cong$$

$$\cong [\langle Nb,Np\rangle,[\langle Nq,b\rangle,\langle Nq,Np\rangle]] \cong$$

$$\cong [[\langle Nb,Np\rangle,\langle Nq,b\rangle],\langle Nq,Np\rangle]$$

que será isomorfo a $[\langle b,Nq\rangle,\langle Nb,Np\rangle]$, (que es lo que queremos), si existe la flecha

$$\langle Nq,Np\rangle \longrightarrow [\langle Nb,Np\rangle,\langle Nq,b\rangle]$$

o, lo que es lo mismo, si

$$[N\langle Nq,Np\rangle,[\langle Nb,Np\rangle,\langle Nq,b\rangle]] \cong 1$$

Comprobemos esto:

$$[N\langle Nq,Np\rangle,[\langle Nb,Np\rangle,\langle Nq,b\rangle]] \cong [[q,p],[\langle Nb,Np\rangle,\langle Nq,b\rangle]] \cong$$

$$\cong [\underbrace{[[q,p],\langle Nb,Np\rangle]}_{[q,\underbrace{[p,\langle Nb,Np\rangle]}_{\langle [p,Nb],[p,Np]\rangle \cong \langle [p,Nb],1\rangle \cong [p,Nb]}]},\langle Nq,b\rangle] \cong [[q,[p,Nb]],\langle Nq,b\rangle] \cong$$

$\cong [[p,Nb],\underbrace{[q,\langle Nq,b\rangle]}] \cong [[p,Nb],[q,b]] \cong$

$\langle [q,Nq],[q,b]\rangle \cong [q,b]$

$\cong [[p,q],[b,Nb]] \cong [[p,q],1] \cong 1$

P1.3.2 Si $x,y \in B''$, entonces $[x,y] \in B''$.

Pongamos $x = [\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle]$, $y = [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle]$.

Veremos que $[x,y] \in B''$ viendo que

$$[x,y] \cong [\langle b,[q,q']\rangle,\langle Nb,[p,p']\rangle].$$

En efecto, se tiene:

$$[x,y] \cong [[\langle b,q\rangle,\langle b,q'\rangle],[\langle Nb,p\rangle,\langle Nb,p'\rangle]] \cong$$

$$\cong [\langle b,[q,q']\rangle,\langle Nb,[p,p']\rangle].$$

En ambas demostraciones hemos usado reiteradamente la propiedad distributiva, su dual, y el lema I.1.3.3.

Paso 2. Construcción de Ψ

Consideremos los conjuntos

$$\{ \gamma x \mid x \in B' ,\ x \longrightarrow b \text{ en } B \} = Q$$

$$\{ \gamma y \mid y \in B' ,\ b \longrightarrow y \text{ en } B \} = P$$

y sean $q_0 = \bigsqcup Q$, $p_0 = \bigsqcap P$.

Es claro que, si $x \in Q$, $y \in P$ es $x \longrightarrow y$ en B', con lo que $\gamma x \longrightarrow \gamma y$ en E. Así, se tiene

$$\gamma x \longrightarrow p_0 \qquad \text{y} \qquad q_0 \longrightarrow p_0 \quad \text{en E.}$$

Sea r cualquier objeto de E tal que $q_0 \longrightarrow r \longrightarrow p_0$ (nótese que siempre hay al menos un tal r). Definimos $\Psi : B'' \longrightarrow E$ por

$$\Psi([\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle]) = [\langle r,\gamma q\rangle,\langle Nr,\gamma p\rangle]$$

Tendremos que probar:

P2.1 Ψ está bien definido

P2.2 Ψ extiende a α

P2.3 Ψ es N-funtor, es decir

P2.3.a Ψ es funtor

P2.3.b $\Psi 1 = 1$

P2.3.c $\Psi[x,y] = [\Psi x,\Psi y]$

P2.3.d $\Psi N = N\Psi$

P2.1 ψ está bien definido.

Tenemos que probar que

si $[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle]$ entonces

$[\langle r,\gamma q\rangle,\langle Nr,\gamma p\rangle] \cong [\langle r,\gamma q'\rangle,\langle Nr,\gamma p'\rangle]$

Necesitaremos las siguientes proposiciones

P2.1.1.- proposición

$$[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle] \quad \text{sii}$$

$$\langle b,q\rangle \cong \langle b,q'\rangle \quad \text{y} \quad \langle Nb,p\rangle \cong \langle Nb,p'\rangle .$$

Demostración

La suficiencia es evidente; veamos la necesidad:

De la hipótesis se obtiene, hallando el producto con b:

$\langle[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle],b\rangle \cong \langle[\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle],b\rangle$ de donde

$$[\underbrace{\langle\langle b,q\rangle,b\rangle}_{\langle b,q\rangle},\underbrace{\langle\langle Nb,p\rangle,b\rangle}_{0}] \cong [\underbrace{\langle\langle b,q'\rangle,b\rangle}_{\langle b,q'\rangle},\underbrace{\langle\langle Nb,p'\rangle,b\rangle}_{0}]$$

luego $\langle b,q\rangle \cong \langle b,q'\rangle$.

Análogamente, hallando el producto con Nb, obtendríamos $\langle Nb,p\rangle \cong \langle Nb,p'\rangle$.

P2.1.2.- proposición

$$[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle] \quad \text{sii}$$

$$[\langle Np,p'\rangle,\langle p,Np'\rangle] \longrightarrow b \longrightarrow N[\langle Nq,q'\rangle,\langle q,Nq'\rangle]$$

Demostración

En efecto, se tiene:

$[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle]$ sii

$\langle b,q\rangle \cong \langle b,q'\rangle$ (*) y $\langle Nb,p\rangle \cong \langle Nb,p'\rangle$ (**)

Notemos que se tiene (*) sii

$\langle b,q\rangle \longrightarrow \langle b,q'\rangle$ y $\langle b,q'\rangle \longrightarrow \langle b,q\rangle$ sii

$[N\langle b,q\rangle,\langle b,q'\rangle] \cong 1 \cong [N\langle b,q'\rangle,\langle b,q\rangle]$ sii

$\langle\langle b,q\rangle,[Nb,Nq']\rangle \cong 0 \cong \langle\langle b,q'\rangle,[Nb,Nq]\rangle$ sii

$$[\underbrace{\langle\langle b,q\rangle,Nb\rangle}_{0},\langle\langle b,q\rangle,Nq'\rangle] \cong 0 \cong [\underbrace{\langle\langle b,q'\rangle,Nb\rangle}_{0},\langle\langle b,q'\rangle,Nq\rangle]$$

sii $\langle\langle b,q\rangle,Nq'\rangle \cong 0 \cong \langle\langle b,q'\rangle,Nq\rangle$ sii

$\langle b,\langle q,Nq'\rangle\rangle \cong 0 \cong \langle b,\langle q',Nq\rangle\rangle$ sii

$[Nb,N\langle q,Nq'\rangle] \cong 1 \cong [Nb,N\langle q',Nq\rangle]$ sii

$b \longrightarrow N\langle q,Nq'\rangle$ y $b \longrightarrow N\langle q',Nq\rangle$ sii

$b \longrightarrow \langle N\langle q,Nq'\rangle,N\langle q',Nq\rangle\rangle$ sii

$b \longrightarrow N[\langle q,Nq'\rangle,\langle q',Nq\rangle]$

que es parte de lo que deseábamos demostrar. El resto de la proposición P2.1.2 es totalmente análogo: obtenemos ahora: (**) sii $[\langle Np,p'\rangle,\langle p,Np'\rangle] \longrightarrow b$

Completemos la demostración de P2.1.

Si $[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] \cong [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle]$ tendremos:

$[\langle Np,p'\rangle,\langle p,Np'\rangle] \longrightarrow b \longrightarrow N[\langle Nq,q'\rangle,\langle q,Nq'\rangle]$

Aplicando γ, y teniendo en cuenta la elección de r:

$\gamma[\langle Np,p'\rangle,\langle p,Np'\rangle] \longrightarrow r \longrightarrow \gamma N[\langle Nq,q'\rangle,\langle q,Nq'\rangle]$

teniendo en cuenta que γ es N-funtor:

$[\langle N\gamma p,\gamma p'\rangle,\langle \gamma p,N\gamma p'\rangle] \longrightarrow r \longrightarrow N[\langle N\gamma q,\gamma q'\rangle,\langle \gamma q,N\gamma q'\rangle]$

por P2.1.2:

$[\langle r,\gamma q\rangle,\langle Nr,\gamma p\rangle] \cong [\langle r,\gamma q'\rangle,\langle Nr,\gamma p'\rangle]$

con lo que Ψ está bien definido.

<u>P2.2</u> Ψ extiende a α

En efecto, si $z \in A \subset B'$, será $\alpha z = \gamma z$, y $z \cong [\langle b,z\rangle,\langle Nb,z\rangle]$; tendremos:

$\Psi z \cong \Psi[\langle b,z\rangle,\langle Nb,z\rangle] = [\langle r,\gamma z\rangle,\langle Nr,\gamma z\rangle] =$

$= [\langle r,\alpha z\rangle,\langle Nr,\alpha z\rangle] \cong \alpha z$

P2.3 Ψ N-funtor.

P2.3.a Ψ es funtor. Aunque hacemos aquí la demostración, ésta es consecuencia de P2.3.b,c,d.

Bastará probar que si $x \longrightarrow y$ en B", entonces es $\Psi x \longrightarrow \Psi y$ en E, y esto es claro: si $x \longrightarrow y$ será $[Nx,y] \cong 1$, luego $\Psi[Nx,y] \cong 1$, de donde $[N\Psi x,\Psi y] \cong 1$, que equivale a $\Psi x \longrightarrow \Psi y$.

P2.3.b $\Psi 1 = 1$.

$\Psi 1 = \Psi[\langle b,1\rangle,\langle Nb,1\rangle] = [\langle r,\gamma 1\rangle,\langle Nr,\gamma 1\rangle] \cong [\langle r,1\rangle,\langle Nr,1\rangle] \cong 1$

P2.3.c $\Psi[x,y] = [\Psi x,\Psi y]$.

Pongamos $x = [\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle]$ y $y = [\langle b,q'\rangle,\langle Nb,p'\rangle]$. Será:

$$\begin{aligned}
\Psi[x,y] &= \Psi[[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle],[\langle b,q'\rangle,\langle Nb\ p'\rangle]] \cong \\
&\cong \Psi[\langle b,[q,q']\rangle,\langle Nb,[p,p']\rangle] = \\
&= [\langle r,\gamma[q,q']\rangle,\langle Nr,\gamma[p,p']\rangle] \cong \\
&\cong [\langle r,[\gamma q,\gamma q']\rangle,\langle Nr,[\gamma p,\gamma p']\rangle] \cong \\
&\cong [[\langle r,\gamma q\rangle,\langle Nr,\gamma p\rangle],[\langle r,\gamma q'\rangle,\langle Nr,\gamma p'\rangle]] = [\Psi x,\Psi y].
\end{aligned}$$

P2.3.d $\Psi N = N\Psi$.

$$\begin{aligned}
\Psi N[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle] &\cong \Psi[\langle b,Nq\rangle,\langle Nb,Np\rangle] = [\langle r,\gamma Nq\rangle,\langle Nr,\gamma Np\rangle] \cong \\
&\cong [\langle r,N\gamma q\rangle,\langle Nr,N\gamma p\rangle] \cong N[\langle r,\gamma q\rangle,\langle Nr,\gamma p\rangle] = \\
&= N\Psi[\langle b,q\rangle,\langle Nb,p\rangle].
\end{aligned}$$

Con lo que termina la demostración.

4.8.- Lema

Toda N-categoría tiene una extensión completa.

Demostración

Usaremos el método de las cortaduras de Dedekind, utilizado por Jech (12).

Sea A una N-categoría. Haremos la demostración en varios pasos.

Paso 1. Construcción de las cortaduras

Consideremos, para cada objeto $p \in A$, el conjunto

$$E_p = \{ x \mid x \longrightarrow p \text{ es flecha de } A \}.$$

Estos conjuntos serán estudiados en detalle, más adelante.

Diremos que un subconjunto no vacío de objetos U es una cortadura en A si se cumple la condición:

$$\text{si } p \in U \text{ entonces } E_p \subset U.$$

Es claro que los conjuntos E_p son cortaduras.

Diremos que una cortadura U es regular si cumple:

si $p \notin U$ entonces existe $q \in E_p$, $q \not\cong 0$, tal que $E_q \cap U = \{\underline{0}\}$ (el subrayado indica "y los isomorfos").

Notemos que $\{\underline{0}\}$ y A son cortaduras regulares. Veamos que los conjuntos E_p son también regulares.

Sea $p \notin E_r$. Tomemos $q = \langle p,Nr\rangle$.

$q \not\cong 0$, pues $\langle p,Nr\rangle \cong 0$ nos lleva a $[Np,r] \cong 1$ que es equivalente a $p \longrightarrow r$, lo que nos dice que $p \in E_r$ en contra de lo supuesto.

Es claro que $q \in E_p$. Veamos que $E_q \cap E_r = \{\underline{0}\}$.

En efecto, $x \in E_q \cap E_r$ nos dice que

$x \longrightarrow q = \langle p,Nr\rangle \longrightarrow Nr$ y $x \longrightarrow r$ de donde

$x \longrightarrow \langle r,Nr\rangle \cong 0$, luego $x \cong 0$.

Veamos ahora que la intersección de una familia arbitraria $\{U_i\}_{i\in I}$ de cortaduras regulares es una cortadura regular.

Que es cortadura es evidente:

si $p \in \bigcap_{i\in I} U_i$ será $p \in U_i$ para todo $i \in I$, luego $E_p \subset U_i$ para todo i, y así $E_p \subset \bigcap_{i\in I} U_i$.

Que es regular:

sea $p \notin \bigcap_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $p \notin U_j$; por lo que existirá $q \in E_p$ tal que $E_q \cap U_j = \{\underline{0}\}$. Así, $E_q \cap \bigcap_{i\in I} U_i = \{\underline{0}\}$

Esta observación nos autoriza a considerar: dada una cortadura no regular U, la intersección de todas los cortaduras regulares que contienen a U será una cortadura regular, que designarumos por $\overline{U}$.

Veamos que $\overline{U}$ se caracteriza por ser $\overline{U} = V$ donde

$$V = \{ p \mid \text{si } q \in E_p,\ q \not\approx 0, \text{ entonces } U \cap E_q \neq \{\underline{0}\} \}$$

Para comprobarlo, probaremos que el conjunto V es una cortadura regular que contiene a U, y está incluido en cualquier otra cortadura regular que contenga a U.

-- V es cortadura:

si $p \in V$ se tiene $E_p \subset V$ pues en caso contrario, existiría un $q \in E_p$ tal que $q \notin V$. Pero si $q \notin V$, entonces existe $r \in E_q$ tal que $U \cap E_r = \{\underline{0}\}$; pero como $p \in V$, al ser $r \in E_q \subset$ $\subset E_p$, deberá ser $U \cap E_r \neq \{\underline{0}\}$.

--Que V es regular es evidente por la construcción.

-- $U \subset V$:

si $p \in U$ será $E_p \subset U$ luego para cualquier $q \in E_p$, $q \not\approx 0$, será $E_q \subset E_p \subset U$, luego $U \cap E_q = E_q \neq \{\underline{0}\}$.

-- V está incluido en cualquier otra cortadura regular U' que contenga a U. Si no fuese así, existiría $p \in V$, $p \notin U'$. De aquí se obtendría la existencia de un $q \in E_p$, $q \not\approx \underline{0}$, tal que $E_q \cap U' = \{\underline{0}\}$ de donde se obtiene $E_q \cap U = \{\underline{0}\}$, lo que es contradictorio con el hecho de ser $p \in V$.

Paso 2.Construcción de la extensión B

Sea B el conjunto de las cortaduras regulares de A. Este conjunto, con la inclusión, es un preorden: en efecto, estableciendo la flecha

$$U \longrightarrow V \qquad \text{sii} \qquad U \subset V$$

B es una categoría preorden.

Definimos la función objeto de un funtor $M: B \longrightarrow B$ por:

$$U \in B \longmapsto MU = \{ p \mid E_p \cap U = \{\underline{0}\} \}$$

Comprobemos que MU es cortadura regular:

-- que es cortadura es evidente: si $p \in MU$ es $E_p \cap U = \{\underline{0}\}$

Así, será $E_p \subset MU$, pues si $q \in E_p$, es $E_q \subset E_p$ luego $E_q \cap U \subset E_p \cap U = \{\underline{0}\}$.

-- que es regular: sea $p \notin MU$. Será $E_p \cap U \neq \{\underline{0}\}$.

Tendremos que ver que existe $q \in E_p$, $q \not\cong 0$, tal que $E_q \cap MU = \{\underline{0}\}$.

Como $E_p \cap U \neq \{\underline{0}\}$, tomemos cualquier $q \in E_p \cap U$, $q \not\cong 0$. Por ser $E_p \cap U$ cortadura regular, será $E_q \subset E_p \cap U$; en particular, $E_q \subset U$.

Sea $r \in E_q \cap MU$. Tendremos que probar que $r \cong 0$.

Se tiene:

-- $r \in E_q \subset U$, luego $E_r \subset U$, y así $E_r \cap U = E_r$

-- $r \in MU$, luego $E_r \cap U = \{\underline{0}\}$

de ambas conclusiones, sigue que $E_r = \{\underline{0}\}$, que es lo mismo que $r \cong 0$.

Para ver que M es un funtor contravariante, habrá que probar que si $U \longrightarrow V$ entonces $MV \longrightarrow MU$, esto es,

si $U \subset V$ entonces $MV \subset MU$, y esto es fácil:

si $p \in MV$ será $E_p \cap V = \{\underline{0}\}$, luego $E_p \cap U = \{\underline{0}\}$ con lo que $p \in MU$.

Paso 3. B con el funtor M es una N-categoría completa

P3.1 En B hay terminal: la cortadura regular A.

P3.2 En B hay coproductos de familias arbitrarias.

Veamos que si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de cortadu ras regulares, es $\coprod\{U_i\}_{i\varepsilon I} = \overline{\bigcup_{i\varepsilon I} U_i}$.

En efecto, es claro que $U_i \longrightarrow \overline{\bigcup_{i\varepsilon I} U_i}$, para cada i. Veamos la universalidad:

si V es una cortadura regular tal que $U_i \longrightarrow V$ para cada i, será $\bigcup_{i\varepsilon I} U_i \longrightarrow V$, pero $\overline{\bigcup_{i\varepsilon I} U_i}$ es la menor cortadura regular que cumple esta condición, así que $\overline{\bigcup_{i\varepsilon I} U_i} \longrightarrow V$.

<u>P3.3</u> $M^2U = U$ para todo $U \varepsilon B$.

Veamos en primer lugar que $U \subset M^2U$.

Sea $p \varepsilon U$; será $E_p \subset U$, luego $E_p \cap U = E_p$.

Sea $q \varepsilon E_p \cap MU$. Será $E_q \subset E_p \cap MU$ luego:

-- $E_q \subset E_p$ de donde $E_q \cap E_p = E_q$ y $E_q \cap U = (E_q \cap E_p) \cap U =$
$= E_q \cap (E_p \cap U) = E_q \cap E_p = E_q$

-- $E_q \subset MU$ de donde $q \varepsilon MU$ y así $E_q \cap U = \{\underline{0}\}$

de ambas conclusiones sigue que $E_q = \{\underline{0}\}$ con lo que $q \cong 0$.

Así, $E_p \cap MU = \{\underline{0}\}$ y $p \varepsilon M^2U$.

Veamos ahora que $M^2U \subset U$.

Si $p \notin U$ sabemos que existe $q \varepsilon E_p$, $q \not\cong 0$, tal que $E_q \cap U = \{\underline{0}\}$. Será $q \varepsilon MU$, de donde $E_q \subset MU$, y así, se tiene $E_q \cap MU = E_q \neq \{\underline{0}\}$.

Como $E_q \cap MU \subset E_p \cap MU$, lo anterior nos dice $E_p \cap MU \neq \{\underline{0}\}$ con lo que $p \notin M^2U$.

<u>P3.4</u> $U \longrightarrow V$ sii el coproducto de MU y V es A, esto es:

$$U \subset V \quad \text{sii} \quad \overline{MU \cup V} = A$$

En efecto:

existe $p \notin \overline{MU \cup V}$ sii

existe $q \varepsilon E_p$, $q \not\cong 0$, tal que $E_q \cap (MU \cup V) = \{\underline{0}\}$ sii

existe $q \in E_p$, $q \not\cong 0$, tal que $E_q \cap MU = \{\underline{0}\}$ y
$$E_q \cap V = \{\underline{0}\}$$
que es equivalente a $U \not\subset V$ puesto que:

$$E_q \cap MU = \{\underline{0}\} \quad \text{sii} \quad q \in M^2U = U \quad \text{y}$$

$$E_q \cap V = \{\underline{0}\} \quad \text{sii} \quad q \notin \overline{V} = V$$

Paso 4. Existe un N-funtor $\alpha : A \longrightarrow B$

Definimos la función objeto por $\alpha p = E_p$. El carácter funtorial proviene del hecho claro de que si $p \longrightarrow q$ en A, entonces es $E_p \subset E_q$ y por tanto $E_p \longrightarrow E_q$ en B.

Para ver que es N-funtor, hay que comprobar:

P4.1 $\alpha 1 = A$

P4.2 $\alpha[p,q] = \overline{E_p \cup E_q}$

P4.3 $\alpha N = M\alpha$

P4.1 es trivial.

P4.2 como $\alpha[p,q] = E_{[p,q]}$ y es claro que $E_p \cup E_q \subset E_{[p,q]}$ (pues $p \longrightarrow [p,q]$ y $q \longrightarrow [p,q]$), tendremos
$$\overline{E_p \cup E_q} \subset E_{[p,q]}.$$
Veamos la inclusión contraria:

sea $r \in E_{[p,q]}$. Para ver que $r \in \overline{E_p \cup E_q}$ hay que probar:

si $s \in E_r$, $s \not\cong 0$, entonces $E_s \cap (E_p \cup E_q) \neq \{\underline{0}\}$

Sea pues, $s \in E_r$, $s \not\cong 0$. Consideremos los elementos $\langle s,p\rangle$, $\langle s,q\rangle$ que, claramente, pertenecen a $E_s \cap (E_p \cup E_q)$.

Si alguno de los dos no fuese isomorfo a 0, el aserto estaría probado.

Veamos que no puede ser $\langle s,p\rangle \cong 0 \cong \langle s,q\rangle$.
Si así fuera, se tendría $[Ns,Np] \cong 1 \cong [Ns,Nq]$, lo que es equivalente a $s \longrightarrow Np$ y $s \longrightarrow Nq$; así, tendríamos
$$s \longrightarrow \langle Np,Nq\rangle \cong N[p,q].$$

Pero $s \in E_r \subset E_{[p,q]}$ nos dice que $s \longrightarrow [p,q]$.

Estas dos conclusiones nos llevan a

$$s \longrightarrow \langle [p,q], N[p,q] \rangle \cong 0 \text{ , luego } s \cong 0$$ contra lo supuesto.

Notemos, antes de probar P4.3, que $E_{\langle p,q\rangle} = E_p \cap E_q$ ya que, si $r \in E_{\langle p,q\rangle}$ entonces $r \longrightarrow \langle p,q\rangle$ $\begin{smallmatrix}\longrightarrow p \\ \searrow q\end{smallmatrix}$, luego $r \in E_p \cap E_q$. Recíprocamente, si $r \in E_p \cap E_q$, será $r \longrightarrow p$ y $r \longrightarrow q$, de donde, por la universalidad del producto, obtenemos $r \longrightarrow \langle p,q\rangle$.

<u>P4.3</u> $\alpha N = M\alpha$.

En efecto, se tiene:

$q \in \alpha Np = E_{Np}$ sii $q \longrightarrow Np$ sii $[Nq,Np] \cong 1$

sii $\langle q,p\rangle \cong 0$ sii $E_{\langle p,q\rangle} = \{\underline{0}\}$ sii

$E_p \cap E_q = \{\underline{0}\}$ sii $q \in \{ q \mid E_q \cap E_p = \{\underline{0}\}\} = ME_p = M\alpha p$

<u>Paso 5</u>

El funtor $\alpha : A \longrightarrow B$, $\alpha p = E_p$, no es inyectivo, pues $\alpha p = \alpha q$, es decir, $E_p = E_q$ nos dice que $p \cong q$, pero no $p = q$. Así, para poder decir que B es una extensión de A, debemos establecer una inyección, que es fácil:

$$p \longmapsto (E_p, p)$$

<u>4.9.- Teorema</u>

Una N-categoría E es inyectiva sii es completa.

<u>Demostración</u>

Sea E completa. Sea $\beta : A \longrightarrow B$ un monomorfismo de N-categorías, y sea α cualquier N-funtor $\alpha : A \longrightarrow E$. Podemos considerar que β es la inclusión, con lo que B es una extensión de A.

Por el lema 4.7 el N-funtor $\alpha : A \longrightarrow E$ puede extenderse a un N-funtor $\gamma : B \longrightarrow E$, y es claro que $\gamma\beta = \alpha$, con lo que E es inyectiva.

Recíprocamente, sea ahora E inyectiva. Por el lema 4.8 E tiene una extensión completa E' ; por la proposición 4.4 E es una retracción de E' ; finalmente, por la proposición 4.6 E es completa.

CAPITULO III

N-CATEGORIAS E_p. N-CATEGORIAS COCIENTE. APLICACIONES LOGICAS

1.- Sub-N-categorías E_p

Sea C una N-categoría, p un objeto de C. Consideremos la subcategoría de C, formada por los objetos

$$\{ x \mid x \longrightarrow p \text{ es flecha de } C \}$$

y las mismas flechas que en C. Pongamos simplemente

$$E_p = \{ x \mid x \longrightarrow p \} .$$

Veamos que E_p es una N-categoría. Definimos $N_p : E_p \longrightarrow E_p$ por $N_p x = \langle Nx, p \rangle \in E_p$ sobre objetos, y sobre flechas

$$N_p (x \longrightarrow y) = (\langle Ny, p \rangle \longrightarrow \langle Nx, p \rangle)$$

que es flecha de C, pues

$$\begin{tikzcd}
Nx & \langle Nx,p \rangle \arrow[l] \arrow[r] & p \\
Ny \arrow[u, "N(x \longrightarrow y)"] & \langle Ny,p \rangle \arrow[l] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Así, N_p es un funtor contravariante de E_p en sí misma.

Veamos que se cumplen las condiciones de N-categoría:

1.1 En E_p hay terminal: p

1.2 En E_p hay coproductos: el mismo que en C. Basta comprobar que si $x,y \in E_p$ entonces $[x,y] \in E_p$, pero esto es claro por la propia definición de coproducto:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dr] & {[x,y]} \arrow[d, dashed] & y \arrow[l] \arrow[dl] \\ & p & \end{tikzcd}$$

1.3 $N_p^2 x \cong x$ para todo $x \in E_p$. En efecto:

$$N_pN_px = N_p\langle Nx,p\rangle = \langle N\langle Nx,p\rangle,p\rangle \cong \langle [N^2x,Np],p\rangle \cong$$
$$\cong \langle [x,Np],p\rangle \cong \langle [x,Np],[x,p]\rangle \cong [x,\langle Np,p\rangle] \cong$$
$$\cong [x,0] \cong x$$

1.4 Finalmente, veamos que

$a \longrightarrow b$ en E_p sii $[N_pa,b] \cong p$ para todo $a,b \in E_p$.

En efecto:

$[N_pa,b] \cong p$ sii $[\langle Na,p\rangle,b] \cong p$ sii

$\langle [Na,b],[p,b]\rangle \cong p$ sii $\langle [Na,b],p\rangle \cong p$ sii

$p \longrightarrow [Na,b]$ en C sii $[Np,[Na,b]] \cong 1$ sii

$[[Np,Na],b] \cong 1$ sii $[N\langle p,a\rangle,b] \cong 1$ sii

$\langle p,a\rangle \longrightarrow b$ en C sii $a \longrightarrow b$ en C sii

$a \longrightarrow b$ en E_p.

1.5 Consideremos la aplicación $\psi : C \longrightarrow C$ dada por:

$$\psi : x \longmapsto \langle x,p\rangle$$

Notemos que se abusa un poco de la notación, pues en realidad, $\langle x,p\rangle$ está definido salvo isomorfismos.

Se tiene:

$\mathrm{Im}\,\psi = E_p$: en efecto, es claro que $\mathrm{Im}\,\psi \subset E_p$; recíprocamente, si $x \in E_p$ es $x \longrightarrow p$ y por tanto $\langle x,p\rangle = x$, con lo que $\psi x = x$.

ψ es un funtor covariante entre las categorías C y E_p. La actuación sobre las flechas viene dada por

$$\psi(x \longrightarrow y) = (\langle x,p\rangle \longrightarrow \langle y,p\rangle)$$

como se ve en

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle x,p\rangle \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\
 & x \arrow[dl] & \langle y,p\rangle \arrow[ll] \arrow[r] & p \\
y & & &
\end{tikzcd}$$

ψ es un N-funtor. Comprobaremos que :

<u>1.5.1</u> $\psi 1 = p$

<u>1.5.2</u> $\psi[a,b] = [\psi a,\psi b]$

<u>1.5.3</u> $\psi N = N_p\psi$

<u>1.5.1</u> $\psi 1 = \langle 1,p\rangle \cong p$

<u>1.5.2</u> Se tiene $\psi[a,b] = \langle [a,b],p\rangle$ y por otro lado

$$[\psi a,\psi b] = [\langle a,p\rangle,\langle b,p\rangle] \cong N\langle N\langle a,p\rangle,N\langle b,p\rangle\rangle \cong$$
$$\cong N\langle [Na,Np],[Nb,Np]\rangle \cong N[\langle Na,Nb\rangle,Np] \cong$$
$$\cong \langle N\langle Na,Nb\rangle,N^2p\rangle \cong \langle [a,b],p\rangle.$$

<u>1.5.3</u> Se tiene $\psi Nx = \langle Nx,p\rangle$ y por otro lado

$$N_p\psi x = N_p\langle x,p\rangle = \langle N\langle x,p\rangle,p\rangle \cong \langle [Nx,Np],p\rangle \cong$$
$$\cong N[N[Nx,Np],Np] \cong N[\langle x,p\rangle,Np] \cong$$
$$= N\langle [x,Np],[p,Np]\rangle \cong N[x,Np] \cong \langle Nx,p\rangle.$$

Se tiene además:

<u>1.5.4</u> ψ es una retracción. En efecto,

$$\psi\psi x = \psi(\langle x,p\rangle) = \langle\langle x,p\rangle,p\rangle \cong \langle x,\langle p,p\rangle\rangle \cong \langle x,p\rangle = \psi x$$

En consecuencia, en virtud de la proposición II.4.6, si C es una categoría completa, E_p también lo es.

<u>1.5.5</u> Pretendemos ahora caracterizar el conjunto

$$\{x \mid \psi x \cong 0\}$$

que viene a ser una especie de "núcleo de ψ".

Se tendrá:

$\psi x \cong 0$ sii $\langle x,p\rangle \cong 0$ sii $N[Nx,Np] \cong 0$

sii $[Nx,Np] \cong 1$ sii $x \longrightarrow Np$.

Así: $\ker \psi = \{x \mid \psi x \cong 0\} = \{x \mid x \longrightarrow Np\} = E_{Np}$.

Es claro que $E_p \cap E_{Np} = \{\underline{0}\}$. Por otra parte, en general será $E_p \cup E_{Np} \neq C$, pues si $p \not\cong 0,1$ es $1 \notin E_p \cup E_{Np}$.

Podemos considerar también los conjuntos duales:

$E'_p = \{x \mid p \longrightarrow x\}$ $\qquad$ $E'_{Np} = \{x \mid Np \longrightarrow x\}$

Se tienen, claramente, las relaciones:

$E'_p = \{x \mid Nx \in E_{Np}\}$ $\qquad$ $E'_{Np} = \{x \mid Nx \in E_p\}$

y, dualmente,

$E_p = \{x \mid Nx \in E'_{Np}\}$ $\qquad$ $E_{Np} = \{x \mid Nx \in E'_p\}$

Además, es un fácil ejercicio, comprobar que:

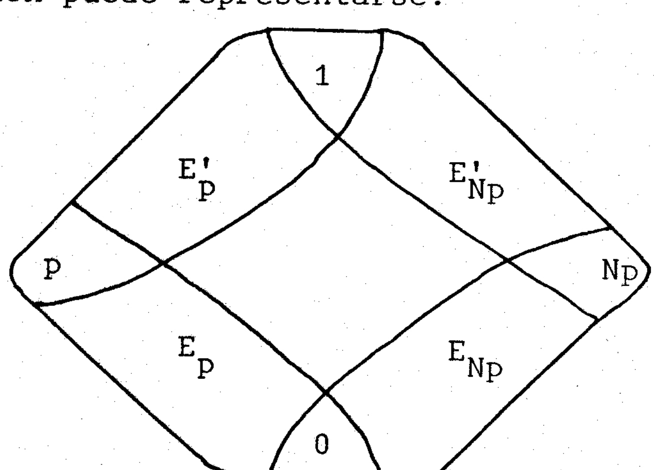
$E_p \cap E_{Np} = \{\underline{0}\}$ $\qquad$ $E_p \cap E'_p = \{\underline{p}\}$

$E_p \cap E'_{Np} = \phi$ si $p \not\cong 1$, es decir, si $E_p \neq C$

$E_{Np} \cap E'_p = \phi$ si $p \not\cong 0$, es decir, si $E_p \neq \{\underline{0}\}$

$E_{Np} \cap E'_{Np} = \{\underline{Np}\}$ $\qquad$ $E'_{Np} \cap E'_p = \{\underline{1}\}$

Esta situación puede representarse:



2.- Subconjuntos (E). Cocientes ${}^{C}/(E)$

Sea E una colección no vacía de objetos de una N-categoría C. Para cada entero $n \geqslant 2$, consideremos:

$$[E]_n = \{[p_1, \dots, p_n] \mid p_i \in E, i=1,\dots,n\}$$

donde no ponemos los corchetes interiores, pues todos los coproductos que se obtendrían serían isomorfos; esto, como se verá, no influye en las consideraciones que siguen.

Pongamos ahora:

$$[E] = \bigcup_{n\geqslant 2} [E]_n \qquad \text{y} \qquad (E) = \bigcup_{p\in[E]} E_p$$

Propiedades de los conjuntos (E)

2.1 $E \subset (E)$

En efecto, sea $x \in E$. Se tiene:

$x \cong [x,x] \in [E]_2 \subset [E]$ de donde $x \in E_{[x,x]} \subset (E)$

2.2 Si $E = \{p\}$ entonces $(E) = E_p$. Trivial.

2.3.a $E \subset \{\underline{0}\}$ sii $(E) = \{\underline{0}\}$. Trivial.

2.3.b $\{\underline{0}\} \subset (E)$ para cualquier E. Trivial.

2.4 $(E) = C$ sii $1 \in (E)$ sii existen objetos $p_1,\dots,p_m \in E$ tales que $[p_1, \dots, p_m] \cong 1$

La primera equivalencia es trivial, y la segunda es muy fácil: $1 \in (E)$ sii existe $p \in [E]$ tal que $1 \in E_p$. Esto nos dice, por un lado, que $1 \longrightarrow p$, esto es $p \cong 1$, y por otro, que existe un n tal que $p \in [E]_n$, de donde se deduce la condición del enunciado.

2.5 Si $x,y \in (E)$ entonces $[x,y] \in (E)$.

En efecto, existirán elementos $p_1,\dots,p_r,q_1,\dots,q_s \in E$ tales que

$$x \longrightarrow [p_1, \dots, p_r] \qquad\qquad y \longrightarrow [q_1, \dots, q_s]$$

con lo que se tendrá:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr] \arrow[d] & & {[x,y]} \arrow[dd, dashed] & & y \arrow[ll] \arrow[d] \\
{[p_1,\dots,p_r]} \arrow[drr] & & & & {[q_1,\dots,q_s]} \arrow[dll] \\
& & {[[p_1,\dots,p_r],[q_1,\dots,q_s]]} & &
\end{tikzcd}$$

$$\cong$$

$$[p_1,\dots,p_r,q_1,\dots,q_s] \;\varepsilon\; [E]_{r+s}$$

de donde $[x,y] \;\varepsilon\; E_{[p_1,\dots,p_r,q_1,\dots,q_s]} \subset (E)$.

2.6 Si $x \;\varepsilon\; (E)$ entonces $E_x \subset (E)$.

Esto es evidente. Notemos que, en particular, nos dice que, si $x \;\varepsilon\; (E)$ y $x \cong y$, entonces $y \;\varepsilon\; (E)$.

Las propiedades 2.5 y 2.6 son las equivalentes a las que, en Algebras de Boole, definen los ideales.

2.7 La relación en C dada por

$$x \sim_E y \qquad \text{sii} \qquad [\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \;\varepsilon\; (E)$$

es de equivalencia. Más adelante veremos una interpretación lógica de esta relación.

En efecto:

-- $x \sim_E x$ pues $[\langle x,Nx\rangle,\langle Nx,x\rangle] \cong [0,0] \cong 0 \;\varepsilon\; (E)$

-- si $x \sim_E y$ entonces $y \sim_E x$ que se deduce trivialmente de la definición de $\sim_E$.

-- si $x \sim_E y$ e $y \sim_E z$ entonces $x \sim_E z$.

En efecto:

de $x \sim_E y$ se obtiene $[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \;\varepsilon\; (E)$

de $y \sim_E z$ se obtiene $[\langle y,Nz\rangle,\langle Ny,z\rangle] \;\varepsilon\; (E)$

Por 2.5, se tiene:

$$[[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle],[\langle y,Nz\rangle,\langle Ny,z\rangle]] \;\varepsilon\; (E)$$

Para ver que $x \sim_E z$ bastará ver que $[\langle x,Nz\rangle,\langle Nx,z\rangle] \;\varepsilon\; (E)$

y para esto, por 2.6, bastará con que se tenga la flecha

(*) $[\langle x,Nz\rangle,\langle Nx,z\rangle] \longrightarrow [[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle],[\langle y,Nz\rangle,\langle Ny,z\rangle]]$

Veamos en primer lugar que se tiene la flecha:

$$\langle x,Nz\rangle \longrightarrow [\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]$$

En efecto:

$$[N\langle x,Nz\rangle,[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]] \cong [[Nx,z],[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]] \cong$$

$$\cong [\underbrace{[[Nx,z],\langle x,Ny\rangle]},\langle y,Nz\rangle] \cong [[z,[Nx,Ny]],\langle y,Nz\rangle] \cong$$

$$[z,\underbrace{[Nx,\langle x,Ny\rangle]}]$$

$$\langle [Nx,x],[Nx,Ny]\rangle \cong \langle 1,[Nx,Ny]\rangle \cong [Nx,Ny]$$

$$\cong [[Nx,Ny],\underbrace{[z,\langle y,Nz\rangle]}] \cong [[Nx,Ny],[z,y]] \cong$$

$$\langle [z,y],[z,Nz]\rangle \cong \langle [z,y],1\rangle \cong [z,y]$$

$$\cong [[Nx,z],[Ny,y]] \cong [[Nx,z],1] \cong 1$$

Análogamente, cambiando x con z, obtendríamos la flecha:

$$\langle Nx,z\rangle \cong \langle z,Nx\rangle \longrightarrow [\langle z,Ny\rangle,\langle y,Nx\rangle] \cong [\langle Nx,y\rangle,\langle Ny,z\rangle]$$

La flecha buscada, (*), viene de la consideración del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\langle x,Nz\rangle \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[\langle x,Nz\rangle,\langle Nx,z\rangle]} \arrow[dd, dashed] & & \langle Nx,z\rangle \arrow[ll] \arrow[dl] \\
& {[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]} \arrow[dr] & & {[\langle Nx,y\rangle,\langle Ny,z\rangle]} \arrow[dl] & \\
& & {[[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle],[\langle Nx,y\rangle,\langle Ny,z\rangle]]} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & & \\
& & {[[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle],[\langle y,Nz\rangle,\langle Ny,z\rangle]]} & &
\end{tikzcd}$$

<u>2.8</u> si $x \cong y$ entonces $x \sim_E y$.

En efecto:

$$[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \cong [\langle x,Nx\rangle,\langle Nx,x\rangle] \cong [0,0] \cong 0 \in (E).$$

<u>2.9</u> si $x \sim_E y$, $z \sim_E w$ entonces se tiene:

$\underline{2.9.a}$ $Nx \sim_E Ny$

$\underline{2.9.b}$ $[x,z] \sim_E [y,w]$

$\underline{2.9.c}$ $\langle x,z\rangle \sim_E \langle y,w\rangle$

En efecto:

$\underline{2.9.a}$ se deduce trivialmente de la definición de $\sim_E$.

$\underline{2.9.b}$ Antes de la demostración propiamente dicha, notemos que si $x \sim_E y$ entonces $[x,a] \sim_E [y,a]$ para todo $a \in C$, pues $[x,a] \sim_E [y,a]$ sii $[\langle [x,a], N[y,a]\rangle, \langle N[x,a],[y,a]\rangle]$ es un elemento de (E), y se tiene:

$$[\langle [x,a],N[y,a]\rangle,\langle N[x,a],[y,a]\rangle] \cong$$

$$\cong [\langle [x,a],\langle Ny,Na\rangle\rangle,\langle\langle Nx,Na\rangle,[y,a]\rangle] \cong$$

$$\cong [[\langle x,\langle Ny,Na\rangle\rangle,\langle a,\langle Ny,Na\rangle\rangle],[\langle\langle Nx,Na\rangle,y\rangle,\langle\langle Nx,Na\rangle, a\rangle]] \cong$$

$$\cong [[\langle x,\langle Ny,Na\rangle\rangle,\langle Ny,\langle a,Na\rangle\rangle],[\langle\langle Nx,Na\rangle,y\rangle, \langle Nx,\langle Na,a\rangle\rangle]] \cong$$

$$\cong [[\langle x,\langle Ny,Na\rangle\rangle,\langle Ny,0\rangle],[\langle\langle Nx,Na\rangle,y\rangle, \langle Nx,0\rangle]] \cong$$

$$\cong [\langle x,\langle Ny,Na\rangle\rangle,\langle\langle Nx,Na\rangle,y\rangle] \cong [\langle\langle x,Ny\rangle,Na\rangle,\langle\langle Nx,y\rangle,Na\rangle] \cong$$

$$\cong \langle [\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle],Na\rangle \in E_{[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle]}$$

y este último conjunto está incluido en (E) puesto que como $x \sim_E y$, se tiene $[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \in (E)$.

Análogamente, puede probarse que si $x \sim_E y$ entonces $[a,x] \sim_E [a,y]$ para todo $a \in C$.

Demostremos ahora 2.9.b: por aplicación reiterada de esta observación previa, se tendrá:

$$[x,z] \sim_E [y,z] \sim_E [y,w]$$

$\underline{2.9.c}$ se deduce fácilmente de 2.8, 2.9.a y 2.9.b, usando las leyes de De Morgan.

$\underline{2.10}$ Puesto que $\sim_E$ es de equivalencia, podemos formar el conjunto cociente $C/_{(E)}$. Vamos a dotarle de estructura de

N-categoría. Lo haremos paso a paso.

$^{C}/_{(E)}$ categoría preorden

Para no trivializar, supondremos que $(E) \neq C$.

Definimos la flecha entre clases:

$\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ sii $N[Nx,y] \in (E)$, esto es, $\langle x,Ny\rangle \in (E)$ definición ésta, que se justificará lógicamente más adelante.

Notemos que la definición no depende de los representantes: en efecto, si $x \sim_E x'$, $y \sim_E y'$ se tendrá $Ny \sim_E Ny'$ de donde $\langle x,Ny\rangle \sim_E \langle x',Ny'\rangle$ lo que nos dice que $\langle x,Ny\rangle \in (E)$ sii $\langle x',Ny'\rangle \in (E)$, pues es claro que (E) es una clase.

El carácter preorden es claro, así como la existencia de identidades. Veamos las composiciones: probaremos que si $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ y $\overline{y} \longrightarrow \overline{z}$ entonces $\overline{x} \longrightarrow \overline{z}$; para ello, habrá que ver que

si $\langle x,Ny\rangle \in (E)$, $\langle y,Nz\rangle \in (E)$, entonces $\langle x,Nz\rangle \in (E)$ y, en efecto: tendremos $[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle] \in (E)$ luego para ver que $\langle x,Nz\rangle \in (E)$ bastará ver que se tiene la flecha

$$\langle x,Nz\rangle \longrightarrow [\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]$$

y esto es fácil:

$$[N\langle x,Nz\rangle,[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]] \cong$$
$$\cong [[Nx,z],[\langle x,Ny\rangle,\langle y,Nz\rangle]] \cong$$
$$\cong [[Nx,\langle x,Ny\rangle],[z,\langle y,Nz\rangle]] \cong$$
$$\cong [\langle [Nx,x],[Nx,Ny]\rangle,\langle [z,y],[z,Nz]\rangle] \cong$$
$$\cong [[Nx,Ny],[z,y]] \cong [[Nx,z],[Ny,y]] \cong 1$$

Definición del funtor N_E

Definimos $N_E \colon \overline{x} \in {}^{C}/_{(E)} \longmapsto \overline{Nx} \in {}^{C}/_{(E)}$

que, por lo visto en 2.9.a, está bien definido.

Para ver que es funtor contravariante, probemos si $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ entonces $\overline{Ny} \longrightarrow \overline{Nx}$

$\overline{Ny} \longrightarrow \overline{Nx}$ sii $\langle Ny,NNx\rangle \in (E)$, pero

$\langle Ny,NNx\rangle \cong \langle Ny,x\rangle \cong \langle x,Ny\rangle$ que pertenece a (E)

sii $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$.

<u>$^C/_{(E)}$ tiene terminal</u>

Es fácil probar que se trata de la clase del 1, esto es $\overline{1} = \{x \mid Nx \in (E)\}$. En efecto:

$\overline{x} \longrightarrow \overline{1}$ sii $\langle x,N1\rangle \in (E)$ pero $\langle x,N1\rangle \cong \langle x,0\rangle \cong 0 \in (E)$

Notemos que $\overline{0} = (E)$ pues

$x \sim_E 0$ sii $[\langle x,N0\rangle,\langle Nx,0\rangle] \in (E)$ sii $x \in (E)$

<u>$^C/_{(E)}$ tiene coproductos</u>

Ponemos $[\overline{x},\overline{y}]_E = \overline{[x,y]}$ que, por lo visto en 2.9.b, está bien definido. Veamos que, efectivamente, se trata de un coproducto. En primer lugar, es claro que $\overline{x} \longrightarrow \overline{[x,y]}$ puesto que

$$\langle x,N[x,y]\rangle \cong \langle x,\langle Nx,Ny\rangle\rangle \cong \langle\langle x,Nx\rangle,Ny\rangle \cong 0 \in (E).$$

Análogamente, se ve que $\overline{y} \longrightarrow \overline{[x,y]}$.

En segundo lugar, comprobemos la universalidad. Sea z tal que $\overline{x} \longrightarrow \overline{z}$, $\overline{y} \longrightarrow \overline{z}$. Será

$\langle x,Nz\rangle \in (E)$, y $\langle y,Nz\rangle \in (E)$ de donde

$[\langle x,Nz\rangle,\langle y,Nz\rangle] \in (E)$, que por distributividad nos da

$\langle [x,y],Nz\rangle \in (E)$ lo que equivale a $\overline{[x,y]} \longrightarrow \overline{z}$.

<u>N_E^2 es la identidad en $^C/_{(E)}$</u>

En efecto: $N_E N_E \overline{x} = N_E \overline{Nx} = \overline{NNx} = \overline{x}$

<u>Propiedad I.1.1.(4)</u>

Hay que probar que se tiene:

$\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ en $^C/_{(E)}$ sii $[N_E \overline{x},\overline{y}]_E = \overline{1}$

Notemos que $[N_E\overline{x},\overline{y}]_E = [\overline{Nx},\overline{y}]_E = \overline{[Nx,y]}$.

Así, $[N_E\overline{x},\overline{y}]_E \cong \overline{1}$ sii $\overline{1} \longrightarrow \overline{[Nx,y]}$ sii $\langle 1,N[Nx,y]\rangle \in (E)$

pero $\langle 1,N[Nx,y]\rangle \cong N[Nx,y] \cong \langle x,Ny\rangle$ que pertenece a (E) sii $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$.

<u>2.11</u> La aplicación $\alpha\colon C \longrightarrow C/(E)$ dada por

$$\alpha : x \in C \longmapsto \overline{x} \in C/(E)$$

es un N-funtor.

En efecto, para ver que es funtor hay que comprobar que si $x \longrightarrow y$ en C entonces $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ en $C/(E)$ y se tiene:

$x \longrightarrow y$ en C sii $[Nx,y] \cong 1$ sii $\langle x,Ny\rangle \cong 0$; así, como $0 \in (E)$, será $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ en $C/(E)$.

Veamos ahora que es N-funtor:

<u>2.11.1</u> $\alpha 1 = \overline{1}$ que es el terminal de $C/(E)$

<u>2.11.2</u> $\alpha[x,y] = \overline{[x,y]} = [\overline{x},\overline{y}]_E = [\alpha x,\alpha y]_E$

<u>2.11.3</u> $\alpha N = N_E\alpha$ pues $\alpha Nx = \overline{Nx} = N_E\overline{x} = N_E\alpha x$

<u>2.12.- Definición</u>

Diremos que (E) es maximal (propio) si no existe ningún subconjunto E' de C tal que $(E) \subsetneq (E') \subsetneq C$.

<u>2.13.- Teorema</u>

(E) es maximal sii $C/(E) = \{\overline{0} \longrightarrow \overline{1}\}$.

<u>Demostración</u>

Notemos previamente que

$x \sim_E 0$ sii $[\langle x,N0\rangle,\langle Nx,0\rangle] \in (E)$ sii $x \in (E)$

$x \sim_E 1$ sii $[\langle x,N1\rangle,\langle Nx,1\rangle] \in (E)$ sii $Nx \in (E)$

Así, el ser $C/(E) = \{\overline{0} \longrightarrow \overline{1}\}$ equivale a que para todo x de C se tenga bien $x \varepsilon (E)$, o bien $Nx \varepsilon (E)$.

Sea pues, ${}^{C}/(E) = \{\bar{0} \longrightarrow \bar{1}\}$, y sea un conjunto E' tal que $(E) \subsetneq (E')$. Tomemos $x \varepsilon (E') \setminus (E)$: como $x \notin (E)$, tendremos $Nx \varepsilon (E) \subset (E')$; pero también es $x \varepsilon (E')$, luego será $1 \cong [x,Nx] \varepsilon (E')$ lo que nos dice que $(E') = C$, y que (E) es maximal.

Recíprocamente, sea (E) maximal. Tomemos un x tal que $x \notin \bar{0}$, es decir, $x \notin (E)$. Consideremos el conjunto $(E \cup \{x\})$. Tendremos:

por ser $x \notin (E)$, será $(E) \subsetneq (E \cup \{x\})$

por ser (E) maximal, será $(E \cup \{x\}) = C$

Así, existen $p_0,p_1,\ldots,p_n \varepsilon E \cup \{x\}$ tales que, poniendo $p = [p_0,p_1,\ldots,p_n]$, es $Nx \varepsilon E_p$. Puede ocurrir:

a) $p_0,p_1,\ldots,p_n \varepsilon E$

Será $Nx \varepsilon (E)$, y por tanto, $x \varepsilon \bar{1}$

b) algún p_i, pongamos p_0, es igual a x.

Se tendrá $Nx \longrightarrow [x,p_1,\ldots,p_n]$ que es equivalente a $[NNx,[x,p_1,\ldots,p_n]] \cong 1$. Pero

$$1 \cong [NNx,[x,p_1,\ldots,p_n]] \cong [x,[x,p_1,\ldots,p_n]] \cong [x,p_1,\ldots,p_n]$$

de donde $Nx \longrightarrow [p_1,\ldots,p_n]$ que nos dice que $Nx \varepsilon (E)$, con lo que $x \varepsilon \bar{1}$ de nuevo.

3. Aplicaciones a la Lógica

Las propiedades de (E), particularmente 2.1 a 2.6, hacen que este conjunto pueda interpretarse como el conjunto de las proposiciones refutables de una teoría. Así, los elementos del conjunto E, que, en cierto sentido, puede decirse que generan (E), pueden llamarse co-axiomas, de la misma forma (dual) en que los axiomas puede decirse que generan el conjunto de las proposiciones demostrables: los axiomas (y sus conjunciones) "implican" las proposiciones demostrables, mientras que los co-axiomas (y sus disyunciones) "son implicados" por las proposiciones refutables.

Bajo esta interpretación, la relación estudiada:

$$x \sim_E y \qquad \text{sii} \qquad [\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \in (E)$$

viene a medir el "grado de refutabilidad" según (E), pues nos dice que dos proposiciones x e y están relacionadas sii la proposición "$(x\wedge\neg y)\vee(y\wedge\neg x)$" es refutable.

Justifiquemos también la definición de flecha en la categoría cociente $C/(E)$:

$$\overline{x} \longrightarrow \overline{y} \qquad \text{sii} \qquad N[Nx,y] \in (E)$$

Recordemos que en C es $x \longrightarrow y$ sii $[Nx,y] \cong 1$; el sentido de $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ es claro: si queremos que la proposición $\neg x\vee y$ sea demostrable, lo que pedimos es que la negación $\neg(\neg x\vee y)$ sea refutable.

Notemos que, si $x \longrightarrow y$, es $[Nx,y] \cong 1$, luego $N[Nx,y] \cong 0 \in (E)$, con lo que se tiene $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$; la generalización ha consistido en que puede tenerse $0 \not\cong N[Nx,y] \in (E)$, es decir, puede tenerse $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ sin que se tenga $x \longrightarrow y$.

Se describen ahora los conceptos de consistencia y completitud de una forma sintáctica; las versiones semánticas serán estudiadas en el Capítulo VI.

Según lo anterior, una interpretación N-categorial de "una" lógica de proposiciones es un par $(C,(E))$, que nos describe el conjunto de proposiciones, juntamente con las refutables.

3.1.- Consistencia

Una lógica $(C,(E))$ será una lógica consistente cuando no se verifique, simultáneamente, que una proposición y su negación sean refutables. Veremos que esto es equiva-- lente a que (E) sea un subconjunto propio de C.

En efecto, si existe p tal que $p \in (E)$ y $Np \in (E)$, será $1 \cong [p,Np] \in (E)$ con lo que $(E) = C$. Recíprocamente, si $(E) = C$, es claro que, para todo p se tiene $p \in (E)$ y $Np \in (E)$.

Podemos ahora traducir con mayor claridad tanto el axioma del tercero excluído como la regla de inferencia Modus Ponens (ver Nota final de I.3.1):

El axioma del tercero excuído:
si $[a,Na] \in (E)$, sería $a \in (E)$ y $Na \in (E)$ con lo que $(E) = C$ y la lógica en cuestión sería inconsistente.

La regla Modus Ponens:
si $a \notin (E)$ y $a \longrightarrow b$ entonces $b \notin (E)$ pues si $b \in (E)$ sería $a \in E_b \subset (E)$, lo que es contradictorio.

3.2.- Completitud

Una lógica $(C,(E))$ será una lógica completa cuando para toda proposición p se tenga que, bien p o bien Np (pero no ambos) sean refutables.

Esto equivale, algebraicamente, a decir que (E) es propio, y que para todo $p \in C$ se tenga $p \in (E)$ o $Np \in (E)$, que es lo mismo que decir $p \sim_E 0$ o $p \sim_E 1$.

Por tanto, una lógica $(C,(E))$ será completa sii

$C/(E) = \{\bar{0} \longrightarrow \bar{1}\}$ sii (E) es maximal.

En este caso, las proposiciones p refutables son las que $p \sim_E 0$, y las demostrables las que $p \sim_E 1$.

3.3.- Caso de los E_p

Un caso interesante es el de las teorías con un número finito de axiomas. Es conocido que pueden reducirse al caso de teorías con un único axioma: la conjunción de todos. Según nuestro punto de vista, dual, estudiaremos el caso de teorías con un número finito de co-axiomas. Así, si E es un conjunto finito, $E = \{c_1,...,c_n\}$ se tendrá

$$(E) = E_p \quad \text{con} \quad p = [c_1,...,c_n]$$

Estudiemos pues, las lógicas (C,E_p).

3.3.1 Una lógica (C,E_p) será consistente sii E_p es propio, lo que ocurrirá sii $p \not\sim 1$.

En virtud de 2.4, resultará

$(C,(E))$ consistente sii (C,E_p) consistente, para todo p de (E).

que es un resultado del tipo del Teorema de Compacidad: Una lógica es consistente sii toda parte finitamente (co-) axiomatizada lo es.

3.3.2 Una lógica (C,E_p) será completa sii $C/E_p = \{\bar{0} \longrightarrow \bar{1}\}$. Vamos a caracterizar estos elementos p.

Para todo $x \in C$ debe ser $x \sim_{E_p} 0$ o $x \sim_{E_p} 1$, es decir, $x \in E_p$ o $Nx \in E_p$. Pero $Nx \in E_p$ equivale a $Nx \longrightarrow p$, que ocurre sii $Np \longrightarrow x$. Así, (ver 1.5.5):

(C,E_p) es completa sii $C = E_p \cup E'_{Np}$

Otra propiedad de estos p es la siguiente:

Sea x tal que $p \longrightarrow x$. Entonces:

-- si $x \longrightarrow p$, será $p \cong x$

-- si $Nx \longrightarrow p$, será $Np \longrightarrow x$ que, junto con $p \longrightarrow x$, nos dice que $1 \cong [Np,p] \longrightarrow x$ esto es, $x \cong 1$.

Vemos así que los únicos elementos implicados por p son sus isomorfos y los isomorfos al terminal; esto viene a decir que p es un elemento maximal en el orden inducido en C por la relación

$$x \leqslant y \quad \text{sii} \quad x \longrightarrow y$$

Los elementos minimales por esta relación son el equivalente de lo que, en Algebras de Boole, se llaman <u>átomos</u>. Podemos así decir, que

(C,E_p) es completa sii p es un co-átomo.

<u>4.- Un teorema de isomorfía</u>

Volvamos a considerar la situación

$$\psi\colon C \longrightarrow E_p$$

donde ψ es el N-funtor $\psi x = \langle x,p\rangle$. (ver 1.5)

Recordemos que el "núcleo" de ψ resultaba ser la N-categoría $E_{Np} = \{x \mid \psi x \cong 0\}$.

Podemos así considerar la N-categoría C/E_{Np} y el N-funtor $\alpha\colon C \longrightarrow C/E_{Np}$ dado por $\alpha x = \overline{x}$.

Es muy fácil comprobar que ψ y α son epimorfismos. Vamos a ver que podemos definir un N-funtor

$$\beta\colon C/E_{Np} \longrightarrow E_p$$

de forma que se cumpla un resultado análogo al primer teorema de isomorfía para estructuras algebraicas y homomorfismos esto es,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & E_p \\ & C/E_{Np} \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

con $\beta\alpha = \psi$ y β isomorfismo (mono y epimorfismo)

En realidad, podría hacerse según el esquema:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \\ C/E_{Np} \arrow[r, "\beta"] & E_p \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

pero la situación es completamente análoga.

Definimos β por

$$\beta : \overline{x} \in C/E_{Np} \longmapsto \psi x \in E_p$$

Nótese que abusamos nuevamente de la notación, pues en realidad, ψx es toda una colección de objetos isomorfos a $\langle x,p \rangle$.

<u>β bien definido</u>

si $x \sim_{E_{Np}} y$ será $[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \in E_{Np}$, luego

$\psi[\langle x,Ny\rangle,\langle Nx,y\rangle] \cong 0$. Por ser ψ N-funtor, se obtiene

$[\langle \psi x,N\psi y\rangle,\langle N\psi x,\psi y\rangle] \cong 0$ de donde

$\langle \psi x,N\psi y\rangle \cong 0 \cong \langle N\psi x,\psi y\rangle$ y, aplicando N

$[N\psi x,\psi y] \cong 1 \cong [\psi x,N\psi y]$ que nos dice que se tienen las flechas $\psi x \longrightarrow \psi y$ y $\psi y \longrightarrow \psi x$ con lo que se tiene $\psi x \cong \psi y$.

<u>β funtor</u>

Hay que probar que si $\overline{x} \longrightarrow \overline{y}$ en C/E_{Np} entonces $\beta\overline{x} \longrightarrow \beta\overline{y}$ en E_p.

Recordemos (2.10) que es

$$\bar{x} \longrightarrow \bar{y} \quad \text{en} \quad {}^{C}/E_{Np} \quad \text{sii} \quad \langle x, Ny\rangle \in E_{Np}$$

y que (1.4)

$$\beta\bar{x} \longrightarrow \beta\bar{y} \quad \text{en } E_p \quad \text{sii} \quad \psi x \longrightarrow \psi y \quad \text{en } E_p \quad \text{sii}$$

$$\text{sii} \quad [N_p\psi x, \psi y] \cong p.$$

Pero se tiene:

$$[N_p\psi x, \psi y] \cong [\langle N\psi x, p\rangle, \psi y] \cong [\langle N\langle x,p\rangle, p\rangle, \langle y,p\rangle] \cong$$

$$\cong [\langle [Nx, Np], p\rangle, \langle y,p\rangle] \cong [\langle Nx,p\rangle, \langle y,p\rangle] \cong \langle [Nx,y], p\rangle$$

Así pues, lo que hay que probar es que

$$\text{si} \quad \langle x, Ny\rangle \in E_{Np} \quad \text{entonces} \quad \langle [Nx,y], p\rangle \cong p$$

y esto es fácil:

$$\text{si} \quad \langle x, Ny\rangle \longrightarrow Np \quad \text{entonces} \quad p \longrightarrow N\langle x, Ny\rangle \cong [Nx, y]$$

que es claramente equivalente a $\langle [Nx,y], p\rangle \cong p$.

<u>β N-funtor</u>

-- $\beta\bar{1} = p$ pues $\beta\bar{1} = \psi 1 = p$

-- $\beta[\bar{x},\bar{y}]_{E_{Np}} = [\beta x, \beta y]$. En efecto, recordando las definiciones de coproducto en ${}^{C}/E_{Np}$ y en E_p, y usando el hecho de que ψ es N-funtor, se tiene:

$$\beta[\bar{x},\bar{y}]_{E_{Np}} = \beta\overline{[x,y]} = \psi[x,y] = [\psi x, \psi y] = [\beta\bar{x}, \beta\bar{y}].$$

-- $\beta N_{E_{Np}} = N_p\beta$. En efecto, recordando las definiciones de $N_{E_{Np}}$ y N_p, y usando de nuevo el hecho de que ψ es N-funtor, se tiene:

$$\beta N_{E_{Np}}\bar{x} = \beta\overline{Nx} = \psi Nx = N_p\psi x = N_p\beta\bar{x}$$

-- $\beta\alpha = \psi$ por construcción.

Veamos ahora que β es isomorfismo.

Que β es epimorfismo es muy fácil de ver. Consideremos:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\psi"] & & \\
C/E_{Np} \arrow[rr, "\beta"] & & E_p \arrow[r, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde B es una N-categoría, y γ,δ son N-funtores tales que $\gamma\beta = \delta\beta$. Se tendrá:

$\gamma\beta\alpha = \delta\beta\alpha$, de donde $\gamma\psi = \delta\psi$ luego $\gamma = \delta$ por ser ψ epimorfismo.

Veamos que β es monomorfismo. Consideremos:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
B \arrow[r, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] & C/E_{Np} \arrow[rr, "\beta"] & & E_p
\end{tikzcd}$$

donde B es una N-categoría, y γ,δ N-funtores tales que $\beta\gamma = \beta\delta$.

Para todo $q \varepsilon B$ tendremos $\beta\gamma q = \beta\delta q$; notemos que γq y δq son clases de equivalencia en C/E_{Np}; así, la igualdad $\beta\gamma q = \beta\delta q$ nos dice que, para todo $u \varepsilon \gamma q$, y para todo $v \varepsilon \delta q$ es $\psi u = \psi v$, esto es, $\langle u,p\rangle \cong \langle v,p\rangle$ de donde, en particular, $\langle u,p\rangle \sim_{E_{Np}} \langle v,p\rangle$.

Para ver que $\gamma = \delta$ bastará probar $\gamma q = \delta q$, y para esto, bastará ver que $\overline{u} = \overline{v}$. Veamos esto.

Al ser $\langle u,p\rangle \cong \langle v,p\rangle$ tendremos

$[\langle N\langle u,p\rangle,\langle v,p\rangle\rangle , \langle\langle u,p\rangle ,N\langle v,p\rangle\rangle] \cong 0$ pero

$\langle N\langle u,p\rangle,\langle v,p\rangle\rangle \cong \langle [Nu,Np],\langle v,p\rangle\rangle \cong$

$$\cong [\langle Nu,\langle v,p\rangle\rangle ,\langle Np,\langle v,p\rangle\rangle] \cong \langle\langle Nu,v\rangle ,p\rangle$$

y, análogamente, $\langle\langle u,p\rangle,N\langle v,p\rangle\rangle \cong \langle\langle u,Nv\rangle,p\rangle$

de donde

$0 \cong [\langle\langle Nu,v\rangle,p\rangle,\langle\langle u,Nv\rangle,p\rangle] \cong \langle p,[\langle Nu,v\rangle,\langle u,Nv\rangle]\rangle$

de donde

$1 \cong [Np,N[\langle Nu,v\rangle,\langle u,Nv\rangle]]$ que es equivalente a

$[\langle Nu,v\rangle,\langle u,Nv\rangle] \longrightarrow Np$, es decir,

$[\langle Nu,v\rangle,\langle u,Nv\rangle] \in E_{Np}$ con lo que $\overline{u} = \overline{v}$.

CAPITULO IV

FUNCIONES PROPOSICIONALES DE UNA VARIABLE

CUANTIFICACION SIMPLE

1.- La N-categoría de las funciones proposicionales de una variable

Sea C una N-categoría y X un conjunto arbitrario. Consideremos la colección C^X de las funciones de X en C, que serán designadas, en general, por mayúsculas: P,Q, R,...

Aunque más adelante estudiaremos la interpretación lógica, expondremos aquí una simple idea de nuestra intención:

X se interpretará como el conjunto de los objetos de los que "tratan" las proposiciones de C; las funciones de X en C serán las funciones proposicionales. Por ejemplo:

X es el conjunto de los números naturales

C es la N-categoría formada por las proposiciones de la Aritmética

$P:X \longrightarrow C$ es la función $n \longmapsto$ "n es múltiplo de 2"

<u>1.1</u> Vamos a dotar a C^X de estructura de N-categoría.

Definimos la flecha:

$P \longrightarrow Q$ en C^X sii $Px \longrightarrow Qx$ en C, para todo $x \varepsilon X$

con lo que C^X es una categoría preorden.

El funtor $N^X : C^X \longrightarrow C^X$ lo definimos por su función objeto $P \longmapsto N^X P$, con $N^X P: x \varepsilon X \longmapsto NPx \varepsilon C$.

Para ver que es funtor contravariante, tendremos que ver que si $P \longrightarrow Q$ en C^X entonces $N^X Q \longrightarrow N^X P$ en C^X, y esto es claro:

si $P \longrightarrow Q$ en C^X será $Px \longrightarrow Qx$ en C para todo $x \varepsilon X$,

luego $NQx \longrightarrow NPx$ en C para todo $x \varepsilon X$, esto es,

$N^X Q \longrightarrow N^X P$ en C^X.

Es muy fácil probar que el terminal de C^X es la función $1^X: x \varepsilon X \longmapsto 1 \varepsilon C$;

-- que el coproducto en C^X viene dado por

$[P,Q]^X: x \varepsilon X \longmapsto [Px,Qx] \varepsilon C$, y que

-- $N^X N^X = id_{C^X}$

Demostremos lo que falta para ser N-categoría, que es:

$P \longrightarrow Q$ en C^X sii $[N^X P,Q]^X \cong 1^X$

En efecto:

$P \longrightarrow Q$ en C^X sii $Px \longrightarrow Qx$ para todo $x \varepsilon X$ sii $[NPx,Qx] \cong 1$ para todo $x \varepsilon X$ sii $[N^X P,Q]^X x \cong 1$ para todo $x \varepsilon X$ sii $[N^X P,Q]^X \cong 1^X$.

<u>1.2.- Relaciones de las funciones proposicionales con los E_P</u>

Si P es un predicado, en Lógica se tiene la situación $P(a) \Longrightarrow \exists x\, P(x)$. Pretendemos generalizar esto.

Consideremos los conjuntos E_p. Notemos que no son nunca vacíos, pues $p \in E_p$. Representemos por $P_p(x)$ el predicado "$x \in E_p$", esto es, $x \longrightarrow p$.

Es claro que se tiene $P_p(a) \supset \exists x\, P_p(x)$, situación ésta, parecida a la anterior.

1.2.1.- Proposición

Para todo $p \in C$ se tiene $p = \bigsqcup E_p$, esto es, p es el coproducto de los elementos de E_p, y este coproducto existe aunque la categoría no sea completa.

Demostración

Desde luego se tienen flechas $x \longrightarrow p$ para todo $x \in E_p$, por definición de E_p.

Probemos la universalidad. Sea a un objeto de C, tal que se tengan flechas $x \longrightarrow a$ para todo $x \in E_p$. En particular, como $p \in E_p$, habrá una flecha $p \longrightarrow a$.

Es claro entonces, por el carácter preorden, que

$$(x \longrightarrow a) = (x \longrightarrow p).(p \longrightarrow a)$$

con lo que se tiene la universalidad.

Nota.

En adelante, como indicamos en la introducción de este trabajo, supondremos la categoría C completa.

Notemos que, en particular, esto hace que las categorías E_p sean completas, por ser retracciones de una completa.(II.4.6 y III.1.5.4)

En esta situación, vamos a estudiar las relaciones entre las funciones proposicionales y los E_p.

Sea $P \in C^X$. Consideremos $p = \bigsqcup Ra(P)$. Se tiene:

1.2.2.- Proposición

$$(Ra(P)) \subset E_p$$

Demostración

Recordemos que, si E es un subconjunto de C, (E) es el conjunto de todos los objetos desde los que hay flechas a algún coproducto finito de elementos de E.

Así, si $q \in (Ra(P))$ existen $x_1,\ldots,x_n \in Ra(P)$ tales que $q \longrightarrow [x_1,\ldots,x_n]$.

Pero si $x_1,\ldots,x_n \in Ra(P)$, como $p = \bigsqcup Ra(P)$, se tendrá

$$x_1 \longrightarrow p, \ \ldots \ , x_n \longrightarrow p \quad \text{de donde} \quad [x_1,\ldots,x_n] \longrightarrow p$$

por la universalidad. Finalmente,

$q \longrightarrow [x_1,\ldots,x_n] \longrightarrow p$ de donde $q \in E_p$.

1.2.3.- Proposición

$$(Ra(P) \cup \{p\}) = E_p$$

Demostración

Desde luego $E_p = (\{p\}) \subset (Ra(P) \cup \{p\})$. Veamos la inclusión contraria.

Si $q \in (Ra(P) \cup \{p\})$ existen $x_1,\ldots,x_n \in Ra(P) \cup \{p\}$ tales que $q \longrightarrow [x_1,\ldots,x_n]$. Pueden ocurrir dos cosas:

-- si $x_1,\ldots,x_n \in Ra(P)$, entonces es $q \in (Ra(P)) \subset E_p$

-- si algún x_i fuese p, por ejemplo, $x_1 = p$, tendríamos:

$$q \longrightarrow [p,x_2,\ldots,x_n] \cong [p,[x_2,\ldots,x_n]] \cong p \quad \text{pues}$$

$$[x_2,\ldots,x_n] \longrightarrow p \quad \text{y de aquí, } q \longrightarrow p, \text{ i.e. } q \in E_p.$$

Se tiene así una estrecha relación entre las funciones proposicionales y los E_p: dada $P \in C^X$ se determina $p = \bigsqcup Ra(P)$ y ya tenemos E_p. Debido a esto, una función proposicional P es "casi" un conjunto de generadores de E_p, con $p = \bigsqcup Ra(P)$.

2.- El funtor $\exists$

Vamos a caracterizar ahora un funtor, que interpretará la cuantificación existencial.

Notemos que C puede considerarse como una sub-N-categoría de C^X, pues podemos identificar los elementos de C con las funciones constantes de C^X.

2.1 Definimos la función objeto del funtor $\exists: C^X \longrightarrow C$ por

$$\exists: P \in C^X \longmapsto p = \bigsqcup Ra(P) \in C$$

Para ver el carácter funtorial, bastará ver que

si $P \longrightarrow Q$ en C^X entonces $p \longrightarrow q$ en C, donde

$$p = \bigsqcup Ra(P) \quad y \quad q = \bigsqcup Ra(Q).$$

En efecto:

si $P \longrightarrow Q$ en C^X será $Px \longrightarrow Qx$ en C para todo $x \in X$, luego $Px \longrightarrow q$ para todo $x \in X$, de donde $p \longrightarrow q$ por la universalidad de p.

2.2 Con esta definición, se verifican trivialmente:

$$Px \longrightarrow \exists P \qquad y$$

$$\text{si} \quad P \longrightarrow Q \quad \text{entonces} \quad \exists P \longrightarrow \exists Q.$$

Esto justifica parcialmente el considerar al funtor $\exists$ como una interpretación en N-categorías del símbolo $\exists xp(x)$, pues verifica las dos propiedades fundamentales de éste:

$$p(a) \Rightarrow \exists xp(x) \qquad y$$

$$\text{si} \quad p(x) \Rightarrow q(x) \quad \text{entonces} \quad \exists xp(x) \Rightarrow \exists xq(x)$$

que son, respectivamente, el axioma de sustitución y la regla de distribución.

2.3 Veamos que se verifican también las propiedades que definen al operador existencial en la caracterización axiomática para las álgebras poliádicas (Halmos(8), Leblanc (18)) a saber:

<u>2.3.1</u> $\exists 0 \cong 0$

<u>2.3.2</u> $P \longrightarrow \exists P$

<u>2.3.3</u> $\exists\langle P, \exists Q\rangle \cong \langle \exists P, \exists Q\rangle$

Antes de pasar a la demostración, hagamos unas observaciones:

<u>Observación 1</u>

Debido a la identificación de los elementos de C con las funciones constantes de C^X, las expresiones anteriores tienen sentido. Así, en 2.3.1 el primer miembro sería $\exists 0^X \varepsilon C$;

en 2.3.2, el primer miembro es $P \varepsilon C^X$, y el segundo será

$\exists P \varepsilon C \hookrightarrow C^X$; finalmente,

en 2.3.3, el primer miembro es $\exists\langle P, \exists Q\rangle^X \varepsilon C$, y el segundo $\langle \exists P, \exists Q\rangle \varepsilon C$.

$\exists Q \varepsilon C \hookrightarrow C^X$

<u>Observación 2</u>

$0^X \varepsilon C^X$ es la función $0^X: x \varepsilon X \longmapsto 0 \varepsilon C$; nótese que, en efecto, $N^X 1^X: x \varepsilon X \longmapsto N1^X x = N1 = 0 \varepsilon C$.

<u>Observación 3</u>

$\langle P,Q\rangle^X$ es la función

$\langle P,Q\rangle^X : x \varepsilon X \longmapsto \langle Px,Qx\rangle \varepsilon C$;

nótese que, en efecto, $\langle P,Q\rangle^X = N^X[N^X P,N^X Q]^X$, y ésta actúa

$$N^X[N^X P,N^X Q]^X x = N([N^X P,N^X Q]^X x) = N[N^X Px,N^X Qx] =$$

$$= N[NPx,NQx] \cong \langle Px,Qx\rangle$$

Vamos ahora a demostrar las propiedades anunciadas

<u>Demostración de 2.3.1</u>

$$\exists 0 \equiv \exists 0^X = \bigsqcup Ra(0^X) = \bigsqcup\{0\} = 0$$

Demostración de 2.3.2

Sea $\exists P = p \in C \hookrightarrow C^X$. Lo que hay que probar es que $P \longrightarrow p$ en C^X, esto es, que $Px \longrightarrow px = p$ en C para todo $x \in X$, lo que se tiene por ser $p = \bigsqcup Ra(P)$.

Demostración de 2.3.3

Pongamos $\exists Q = q \in C \hookrightarrow C^X$, $\exists P = p \in C$.

Se tiene:

$\exists\langle P, \exists Q\rangle \cong \exists\langle P,q\rangle^X = \bigsqcup Ra(\langle P,q\rangle^X) = \bigsqcup\{\langle Px,q\rangle \mid x \in X\}$

y, por otro lado, $\langle\exists P, \exists Q\rangle = \langle p,q\rangle$.

Habrá que probar, pues, que $\langle p,q\rangle = \bigsqcup\{\langle Px,q\rangle \mid x \in X\}$.

En efecto, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} p & & \langle p,q\rangle \arrow[ll] \arrow[rr] & & q \\ & Px \arrow[ul] & & & \\ & & \langle Px,q\rangle \arrow[ul] \arrow[uu, dashed] \arrow[uurr] & & \end{tikzcd}$$

con lo que $\langle Px,q\rangle \longrightarrow \langle p,q\rangle$ para todo $x \in X$.

Veamos la universalidad:

sea $r \in C$ tal que $\langle Px,q\rangle \longrightarrow r$ para todo $x \in X$. Se tendrá, también para todo $x \in X$:

$1 \cong [N\langle Px,q\rangle,r] \cong [[NPx,Nq],r] \cong [NPx,[Nq,r]]$ que nos dice que $Px \longrightarrow [Nq,r]$.

Por la universalidad de p, tendremos $p \longrightarrow [Nq,r]$, esto es $1 \cong [Np,[Nq,r]] \cong [[Np,Nq],r] \cong [N\langle p,q\rangle,r]$ que es equivalente a $\langle p,q\rangle \longrightarrow r$, como deseábamos.

Otras propiedades del funtor $\exists$

2.3.4 $\exists 1^X = 1$. Trivial.

2.3.5 si $p \in C$ entonces $p = \exists p$

en efecto, $\exists p = \bigsqcup Ra(p) = \bigsqcup\{p\} = p$

<u>2.3.6</u> $\exists\exists = \exists$

en efecto, sea $P \in C^X$, y sea $p = \exists P$. Se tiene:

$$\exists\exists P = \exists p = p = \exists P$$

<u>2.3.7</u> $\exists N \exists = N \exists$.

en efecto, pongamos $p = \exists P$. Se tiene:

$$\exists N \exists P = \exists Np = Np = N \exists P$$

<u>2.3.8</u> $\exists [P,Q]^X \cong [\exists P, \exists Q]$

en efecto, se tiene:

$$\exists [P,Q]^X = \bigcup Ra([P,Q]^X) = \bigcup \{[Px,Qx] \mid x \in X\}$$

y, para todo $x \in X$ se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Px \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[Px,Qx]} \arrow[dd, dashed, no head] & & Qx \arrow[ll] \arrow[dl] \\
& \exists P \arrow[dr] & & \exists Q \arrow[dl] & \\
& & {[\exists P, \exists Q]} & &
\end{tikzcd}$$

luego $[Px,Qx] \longrightarrow [\exists P, \exists Q]$ para todo $x \in X$; así,

$$\bigcup\{[Px,Qx] \mid x \in X\} \longrightarrow [\exists P, \exists Q] \quad \text{, esto es,}$$

(*) $\qquad \exists [P,Q]^X \longrightarrow [\exists P, \exists Q]$.

Por otra parte:

$P \longrightarrow [P,Q]^X$ y $Q \longrightarrow [P,Q]^X$ en C^X, luego, por el carácter funtorial de $\exists$, se tiene:

$\exists P \longrightarrow \exists [P,Q]^X$ y $\exists Q \longrightarrow \exists [P,Q]^X$ en C, de donde $[\exists P, \exists Q] \longrightarrow \exists [P,Q]^X$. Esta flecha, junto con (*), nos dice

$$\exists [P,Q]^X \cong [\exists P, \exists Q].$$

<u>2.3.9.- Nota</u>

El funtor $\exists$ no es un N-funtor, pues si $P \in C^X$, $p = \exists P$, es $N \exists P = Np$, y $\exists N^X P = \bigcup Ra(N^X P) =$

$= \bigsqcup\{NPx \mid x \in X\}$ que no tienen porqué ser iguales.

Sin embargo, sí se tiene $N\exists P \longrightarrow \exists N^X P$ para todo $P \in C^X$, puesto que:

$Px \longrightarrow p$ para todo $x \in X$, luego $Np \longrightarrow NPx$ para todo $x \in X$ y así $N\exists P = Np \longrightarrow \bigsqcup\{NPx \mid x \in X\} = \exists N^X P$.

3.- El funtor $\forall$

Vamos a caracterizar ahora el cuantificador universal como otro funtor $\forall : C^X \longrightarrow C$, definiéndolo por

$$\forall = N\exists N^X$$

$$\begin{tikzcd} C^X \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, "N^X"'] & C \\ C^X \arrow[r, "\exists"] & C \arrow[u, "N"'] \end{tikzcd}$$

Comprobemos que, efectivamente, es un funtor covariante. Habrá que probar que, si $P \longrightarrow Q$ en C^X, entonces $\forall P \longrightarrow \forall Q$ en C; en efecto:

si $P \longrightarrow Q$ en C^X tendremos $N^X Q \longrightarrow N^X P$ en C^X, luego $\exists N^X Q \longrightarrow \exists N^X P$ en C, de donde $N\exists N^X P \longrightarrow N\exists N^X Q$ en C, como deseábamos.

Este esquema es general en las pruebas de las propiedades que siguen: todas se apoyan en las correspondientes del funtor $\exists$ y utilizan el carácter contravariante de los funtores N y N^X.

Notemos también que seguimos identificando los elementos de C con las funciones constantes de C^X.

Veamos en primer lugar que se cumplen las tres propiedades caracterizadoras del cuantificador $\forall$ (ver 2.3)

3.1 $\forall 1^X = 1$

3.2 $\forall P \longrightarrow P$

3.3 $\forall[P,\forall Q]^X \cong [\forall P, \forall Q]$.

Demostración de 3.1

$$\forall 1^X = N\exists N^X 1^X = N\exists 0^X = N0 = 1$$

Demostración de 3.2

Para todo $x \varepsilon X$ se tendrá:

$NPx \longrightarrow \exists NPx$, de donde $N\exists NPx \quad NNPx \cong Px$, luego

$N\exists N^X Px \longrightarrow Px$ en C, que equivale a $N\exists N^X P \longrightarrow P$ en C^X, esto es, $\forall P \longrightarrow P$ en C^X.

Demostración de 3.3

$$\forall[P,\forall Q]^X = N\exists N^X[P,\forall Q]^X = N\exists \langle N^X P, N^X N\exists N^X Q\rangle^X \cong$$

$$\cong N\exists \langle N^X P, \exists N^X Q\rangle^X \cong N\langle \exists N^X P, \exists N^X Q\rangle^X \cong$$

$$\cong [N\exists N^X P, N\exists N^X Q]^X = [\forall P, \forall Q]$$

Otras propiedades del funtor $\forall$ (duales de las de $\exists$)

3.4 $\forall 0^X = 0$

en efecto, $\forall 0^X = N\exists N^X 0^X = N\exists 1^X = N1 = 0$

3.5 $\forall p \cong p$

en efecto, $\forall p = N\exists N^X p = N\exists Np \cong NNp \cong p$

3.6 $\forall\forall = \forall$

en efecto, $\forall\forall P = \forall P$ (por la anterior).

3.7 $\forall N\forall = N\forall$

en efecto, $\forall N\forall P = N\forall P$, de nuevo por 3.5; notemos que $N\forall P \varepsilon C$.

3.8 $\forall\langle P,Q\rangle^X = \langle\forall P, \forall Q\rangle$

en efecto, $\forall\langle P,Q\rangle^X = N\exists N^X\langle P,Q\rangle^X \cong N\exists[N^X P, N^X Q] \cong$

$= N[\exists N^X P, \exists N^X Q] \cong \langle N\exists N^X P, N\exists N^X Q\rangle = \langle\forall P, \forall Q\rangle$.

Finalmente, utilizando 2.3.5 y 3.5:

3.9 $\quad \exists\forall = \forall \qquad$ y $\qquad \forall\exists = \exists$.

4.- Conjuntos $\exists$-cerrados

Al ser C^X una N-categoría, podemos, dado un conjunto $D \subset C^X$, considerar el conjunto (D), de forma análoga a III.2.

4.1.- Definición

Diremos que (D) es un conjunto $\exists$-cerrado en C^X si cumple: si $P \varepsilon (D)$ entonces $\exists P \varepsilon (D)$.

--Recordemos la identificación de los elementos de C con las funciones constantes de C^X.

Escribiremos ((D)) para indicar que (D) es $\exists$-cerrado.

Veamos las relaciones que hay entre estos conjuntos de C y de C^X. Sea $E \subset C$. Por un lado, podemos formar el conjunto $(E) \subset C$, y, por otro, podemos considerar que $E \subset C \hookrightarrow C^X$ y así, formar el conjunto (E) pero en C^X, no en C. Representemos por $(E)_X$ este conjunto.

Es claro que (E), considerado como subconjunto de C^X es $\exists$-cerrado, pues el funtor $\exists$ es la identidad sobre (E). Veamos que:

4.2.- Proposición

$(E)_X$ es $\exists$-cerrado.

Demostración

Sea $P \varepsilon (E)_X$. Existirán unos elementos $q_1,\ldots,q_n$ de E tales que $P \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]^X$ en C^X.

Aplicando el funtor $\exists$: $\exists P \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]^X$ en C, luego $\exists P \longrightarrow [\exists q_1,\ldots,\exists q_n] \cong [q_1,\ldots,q_n]$ en C de donde

$\exists P \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]$ en C^X con lo que $\exists P \varepsilon (E)_X$.

4.3.- Proposición

Sea $D \subset C^X$ tal que (D) es $\exists$-cerrado. Se tiene: $((D)) = (((D)) \cap C)_X$

Demostración

Desde luego $((D)) \cap C \subset ((D))$, con lo que es claro que $(((D)) \cap C)_X \subset ((D))$. Veamos la inclusión contraria: sea $P \varepsilon ((D))$; será $\exists P \varepsilon ((D))$ y como siempre es $\exists P \varepsilon C$ tendremos $\exists P \varepsilon ((D)) \cap C$. Teniendo en cuenta que $P \longrightarrow \exists P$ deducimos finalmente que $P \varepsilon (((D)) \cap C)_X$.

4.4.- Proposición

Sea $E \subset C$. Se tiene: $(E) = (E)_X \cap C$.

Demostración

Es evidente que $(E) \subset (E)_X \cap C$. Veamos la inclusión contraria:

sea $p \varepsilon (E)_X \cap C$; existirán $q_1,\ldots,q_n \varepsilon E$ tales que $p \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]^X$; aplicando $\exists$ y teniendo en cuenta que $\exists$ es la identidad sobre C, queda:

$p \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]$ en C, lo que equivale a $p \varepsilon (E)$.

En C^X la maximalidad de estos conjuntos se entenderá para $\exists$-cerrados; concretamente:

4.5.- Definición

Diremos que $((D))$ es maximal, si no existe D' de C^X tal que $((D)) \subsetneq ((D')) \subsetneq C^X$.

4.6.- Proposición

Sea $E \subset C$. Se tiene:

(E) es maximal en C sii $(E)_X$ es maximal en C^X.

Demostración

Notemos previamente que $(C)_X = C^X$. En efecto, es obvio que $(C)_X \subset C^X$; por otro lado, si $P \in C^X$, como $P \longrightarrow \exists P$, y $\exists P \in C$, es claro que $P \in (C)_X$. Vamos ahora con la demostración propiamente dicha.

Sea (E) maximal en C, y sea $D \subset C^X$ tal que $(E)_X \subset ((D))$. Tendremos $(E)_X \cap C \subset ((D)) \cap C$. Notemos que:

-- $(E)_X \cap C = (E)$ (por 4.4)

-- $(((D)) \cap C) = (((D)) \cap C)_X \cap C = ((D)) \cap C$ por 4.3 y 4.4.

Así, la inclusión anterior queda:

$$(E) \subset (((D)) \cap C) = ((D)) \cap C.$$

Al ser (E) maximal, resulta $((D)) \cap C = (((D)) \cap C) = C$, luego $C \subset ((D))$, de donde $C^X = (C)_X \subset ((D))$, con lo que $((D)) = C^X$ y $(E)_X$ es maximal en C^X.

Recíprocamente, sea $(E)_X$ maximal en C^X y supongamos $(E) \subset (G)$. Tendremos $(E)_X \subset (G)_X$, lo que obliga a que $(G)_X = C^X$, y así, $(G) = (G)_X \cap C = C^X \cap C = C$, con lo que (E) es maximal en C.

4.7.- Proposición

Sea $D \subset C^X$ tal que (D) es $\exists$-cerrado. Se tiene: $((D))$ es maximal en C^X sii $(((D)) \cap C)$ lo es en C.

Nota De la demostración de 4.6, se deduce que

$$(((D)) \cap C) = ((D)) \cap C$$

lo que permite reformular esta proposición:

$((D))$ es maximal en C^X sii $((D)) \cap C$ lo es en C.

Demostración

Por la proposición 4.6 tenemos, para cualquier subconjunto $E \subset C$:

(E) maximal en C sii $(E)_X$ maximal en C^X.

Tomando aquí $E = ((D)) \cap C$ tendremos:

$(((D)) \cap C)$ maximal en C sii $(((D)) \cap C)_X$ maximal en C^X

que es lo que queríamos, pues $(((D)) \cap C)_X = ((D))$ por la proposición 4.3.

De las propiedades anteriores se deducen dos sencillas consecuencias:

<u>4.8.- Corolario</u>

Sean $E \subset C$ y $D \subset C^X$ tal que (D) es $\exists$-cerrado. Se tiene:

$((D))$ es propio (i.e.,distinto de C^X) sii

$((D)) \cap C$ es propio (i.e., distinto de C)

y además:

(E) es propio sii $(E)_X$ es propio.

<u>4.9.- Corolario</u>

En las mismas hipótesis, se tiene:

$$\exists ((D)) = ((D)) \cap C \quad \text{y} \quad \exists (E)_X = (E).$$

<u>5.- Lógica silogística</u>

De la misma forma en que la traducción algebraica de una lógica proposicional era un par $(C,(E))$, diremos que $(C^X,((D)))$ es la traducción algebraica de una lógica silogística. Esta resulta ser una lógica de proposiciones a la que se han añadido funciones proposicionales (de una variable), y un cuantificador existencial (sobre una variable).

Justificaremos más adelante (en 5.2) el nombre de lógica silogística.

Caracterizaremos ahora las nociones sintácticas de completitud y consistencia silogísticas. Por definición, diremos que

$(C^X, ((D)))$ es consistente sii $(C, ((D)) \cap C)$ lo es, y

$(C^X, ((D)))$ es completa sii $(C, ((D)) \cap C)$ lo es.

Como caso particular, se tiene:

$(C^X, (E)_X)$ es consistente (o completa) sii

$(C, (E))$ es consistente (o completa).

Por otra parte, las propiedades vistas anteriormente nos confirman que una definición equivalente es:

$(C^X, ((D)))$ es consistente sii $((D))$ es propio, y

$(C^X, ((D)))$ es completa sii $((D))$ es maximal.

Justifiquemos el porqué damos este rodeo para llegar, en definitiva, a la misma conclusión formal que en el caso de la lógica proposicional.

El problema es que ahora no tiene sentido decir que P es refutable; considérese el ejemplo de (1): no tiene sentido decir que "x es múltiplo de 2" es refutable, pero sí lo tiene decirlo de "$\exists$x(x es múltiplo de 2", esto es, decirlo de $\exists$P.

Por esta razón, estas características sintácticas de consistencia y completitud en C^X hay que referirlas a las correspondientes de C.

El hecho de que la condición algebraica sea formalmente la misma en el caso de lógicas proposicionales (sobre C) que en el caso de lógicas silogísticas (sobre C^X) se debe, sin duda, a las relaciones (propiedades 4.2 a 4.8), que existen entre los conjuntos (E) de C y los conjuntos $\exists$-cerrados de C^X.

5.1.- Caso de los E_p

En C^X, en general, $E_p = \{ Q \in C^X \mid Q \longrightarrow P \text{ en } C^X\}$ no es un conjunto $\exists$-cerrado; pero si $p \in C \hookrightarrow C^X$, entonces el conjunto $(E_p)_X = \{Q \in C^X \mid Q \longrightarrow p \text{ en } C^X\}$ es $\exists$-cerrado. En efecto,

si $Q \in (E_p)_X$ se tendrá $Q \longrightarrow p$ en C^X; aplicando $\exists$:

$\exists Q \longrightarrow \exists p = p$ en C, luego $\exists Q \longrightarrow p$ en C^X, esto es,

$\exists Q \in (E_p)_X$.

Así, caracterizar las lógicas silogísticas del tipo $(C^X,(E_p)_X)$ sintácticamente consistentes o completas, es equivalente a caracterizar los $p \in C$ tales que $(E_p)_X$ sea propio o maximal.

Como es claro que $(E_p)_X \cap C = E_p$, tendremos:

$(E_p)_X$ propio en C^X sii E_p propio en C sii $p \not\approx 1$

$(E_p)_X$ maximal en C^X sii E_p maximal en C sii p es un co-átomo.

Como vemos, resultan las mismas condiciones (las condiciones son idénticas, no formalmente iguales, como en el caso general visto antes) que para la lógica proposicional. Esto quiere decir que el carácter consistente o completo de una lógica (C,E_p) no se altera al añadir las funciones proposicionales (de una variable) y el cuantificador existencial (simple).

5.2.- Silogismos

Hemos calificado esta lógica como silogística, pues constituye el apoyo formal del razonamiento silogístico clásico. Este puede encontrarse, por ejemplo, en Copi (2). Expondremos aquí un breve resumen.

Se consideran proposiciones de cuatro tipos: universal afirmativa (tipo A), universal negativa (tipo E), particular afirmativa (tipo I) y particular negativa (tipo O).

Por ejemplo:

tipo A: Todos los soldados son valientes

tipo E: Ningún soldado es valiente

tipo I: Algunos soldados son valientes

tipo O: Algunos soldados no son valientes

Un silogismo es un conjunto de tres proposiciones de estos tipos, las dos primeras llamadas premisas, y la tercera, conclusión. El razonamiento silogístico se apoya en un conjunto de reglas que garantizan que la conclusión sea válida siempre que lo sean las premisas.

Se obtienen así unos esquemas de razonamiento, que se conocen con nombres latinos, y cuyas vocales corresponden a los tipos de las proposiciones que los constituyen: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, etc.

Veamos que los cuatro tipos de expresiones consideradas corresponden a expresiones en una N-categoría C^X, y que los razonamientos silogísticos se traducen en propiedades ciertas en una lógica $(C^X, \langle\langle D \rangle\rangle)$.

Las formalizaciones correspondientes son:

tipo A: $P \Longrightarrow Q$

tipo E: $P \Longrightarrow N^X Q$

tipo I: $\exists \langle P,Q\rangle^X$

tipo O: $\exists \langle P,N^X Q\rangle^X$

La demostración de las reglas de validez sería larga y tediosa, y no es ésa nuestra intención. Nos contentaremos con ver el desarrollo de unos ejemplos, pues queremos únicamente justificar el nombre de lógica silogística.

Ejemplo 1

La formalización de un silogismo tipo AAA, como:

Todos los franceses son rubios

Todos los parisinos son franceses

luego, Todos los parisinos son rubios

en una lógica consistente y completa $(C^X, \langle\langle D\rangle\rangle)$ sería:

si $F \Longrightarrow R$ y $P \Longrightarrow F$ son demostrables, entonces $P \Longrightarrow R$ es demostrable

donde P, R, y F tienen el significado obvio.

Habida cuenta de que $\langle\langle D\rangle\rangle$ representa el conjunto de las proposiciones refutables, el esquema sería:

si $N^X(F \Longrightarrow R) \in \langle\langle D\rangle\rangle$ y $N^X(P \Longrightarrow F) \in \langle\langle D\rangle\rangle$, entonces

$$N^X(P \Longrightarrow R) \in \langle\langle D\rangle\rangle$$

Veamos que esto es cierto en C^X. Se tendrá:

$[N^X(F \Longrightarrow R), N^X(P \Longrightarrow F)]^X \in \langle\langle D\rangle\rangle$ por III.2.5

y también

$\langle F \Longrightarrow R, P \Longrightarrow F\rangle^X \longrightarrow P \Longrightarrow R$ por I.3.2, ax. IV

de donde

$$N^X(P \Longrightarrow R) \longrightarrow N^X\langle F \Longrightarrow R, P \Longrightarrow F\rangle^X \cong [N^X(F \Longrightarrow R), N^X(P \Longrightarrow F)]^X$$

luego, $N^X(P \Longrightarrow R) \in ((D))$ por III.2.6

Ejemplo 2

Veamos ahora un caso del tipo IAI, donde aparece una particular:

Algunos algebristas son ricos

Todo algebrista es matemático

luego, Algunos matemáticos son ricos

la formalización ahora será:

si $\exists\langle A,R\rangle^X$ y $A \Longrightarrow M$ son demostrables, entonces $\exists\langle M,R\rangle^X$ es demostrable, esto es,

si $N^X\exists\langle A,R\rangle^X \in ((D))$ y $N^X(A \Longrightarrow M) \in ((D))$, entonces $N^X\exists\langle M,R\rangle^X \in ((D))$

Veamos que esto es cierto en C^X. Se tendrá:

si $N^X\exists\langle A,R\rangle^X \in ((D))$ entonces $\exists\langle A,R\rangle^X \notin ((D))$ pues en caso contrario sería $1^X \in ((D))$ y $((D))$ no sería propio. En consecuencia, $\langle A,R\rangle^X \notin ((D))$ pues caso contrario sería $\exists\langle A,R\rangle^X \in ((D))$ por ser $((D))$ $\exists$-cerrado.

Veamos que también $\langle M,R\rangle^X \notin ((D))$.

Recordando la definición de flecha en el cociente, resulta que al ser $N^X(A \Longrightarrow M) \in ((D))$ se tiene $\overline{A} \longrightarrow \overline{M}$ en el cociente $C^X/_{((D))}$. Consideremos el diagrama (pág. sig.): del que se obtiene la flecha $\langle\overline{A},\overline{R}\rangle_D \longrightarrow \langle\overline{M},\overline{R}\rangle_D$ en $C^X/_{((D))}$.

Así, si fuese $\langle M,R\rangle^X \in ((D))$ sería $\langle\overline{M},\overline{R}\rangle_D = \overline{0}$, y, por la flecha anterior $\langle\overline{A},\overline{R}\rangle_D = \overline{0}$, esto es, $\langle A,R\rangle^X \in ((D))$, lo que es contradictorio.

Por tanto, $\exists\langle M,R\rangle^X \notin ((D))$, puesto que

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle \bar{A},\bar{R}\rangle_D \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \arrow[ddrr] & & \\
 & \bar{A} \arrow[dl] & & & \\
\bar{M} & & \langle \bar{M},\bar{R}\rangle_D \arrow[ll] \arrow[rr] & & \bar{R}
\end{tikzcd}$$

$\langle M,R\rangle^X \longrightarrow \exists\langle M,R\rangle^X$ en C^X, y, finalmente,

$N^X \exists\langle M,R\rangle^X \in ((D))$ como deseábamos.

Ejemplo 3

Veamos, por último, un caso de silogismo no válido:

Algunos matemáticos son ricos

Todo algebrista es matemático

luego, Algunos algebristas son ricos

cuya formalización sería:

si $\exists\langle M,R\rangle^X$ y $A \Longrightarrow M$ son demostrables, entonces

$\exists\langle A,R\rangle^X$ es demostrable, esto es,

si $N^X\exists\langle M,R\rangle^X \in ((D))$ y $N^X(A \Longrightarrow M) \in ((D))$ entonces

$N^X\exists\langle A,R\rangle^X \in ((D))$.

Como antes, llegaríamos ahora a $\langle M,R\rangle^X \notin ((D))$, esto es, $\langle \bar{M},\bar{R}\rangle_D = \bar{1}$ en $C^X/((D))$, y a que $\bar{A} \longrightarrow \bar{M}$ en $C^X/((D))$. Esto nos permite únicamente deducir que

$$\langle \bar{A},\bar{R}\rangle_D \longrightarrow \langle \bar{M},\bar{R}\rangle_D = 1 \quad \text{en} \quad C^X/((D))$$

lo que, desde luego, no nos proporciona información alguna sobre $\langle \bar{A},\bar{R}\rangle_D$.

CAPITULO V

FUNCIONES PROPOSICIONALES DE VARIAS VARIABLES

CUANTIFICACION MULTIPLE

Antes de nada, veamos la

1.0.- Proposición

Si C es completa, entonces C^X es completa.

Demostración

Sea $D \subset C^X$, y sea $P \in C^X$ definido por

$Px = \bigsqcup\{Qx \mid Q \in D\}$ para cada $x \in X$.

Veamos que, en C^X, es $P = \bigsqcup D$.

Si $Q \in D$ será, evidentemente, $Qx \longrightarrow Px$ para todo $x \in X$, luego $Q \longrightarrow P$ en C^X. Veamos la universalidad: sea $R \in C^X$ tal que $Q \longrightarrow R$ para todo $Q \in D$, esto es, $Qx \longrightarrow Rx$ para todo $x \in X$. Por la construcción, será $Px \longrightarrow Rx$ para todo $x \in X$, luego $P \longrightarrow R$ en C^X.

1.- Funciones proposicionales de varias variables

Sean X, e I conjuntos no vacíos, C una N-categoría completa. Nuestra idea es ahora interpretar X como los objetos de que tratan las proposiciones de C, I como un conjunto de índices, y $C^{(X^I)}$, o, simplemente, C^{X^I} como las funciones proposicionales.

Veamos un ejemplo:

X el conjunto de los números naturales

C las proposiciones de la Aritmética

i,j dos elementos fijos de I

$P:X^I \longrightarrow C$ la función dada por:

$f \in X^I \longmapsto P(f) =$ " $f(i) \leqslant f(j)$"

1.1.- Observación

El tratamiento habitual del cuantificador $\exists$ es considerarlo como un operador de un álgebra de Boole en sí misma, que cumple ciertas propiedades. Con este enfoque, para obtener los teoremas de representación, se hace preciso caracterizar algebraicamente las llamadas "constantes" del lenguaje, como unos endomorfismos booleanos que cumplen ciertas condiciones. (Ver p.e. Leblanc(18)).

Este problema es irrelevante en nuestra interpretación: las constantes son los elementos de X, y las variables tienen el sentido habitual en Matemáticas, que es el de un símbolo que varía sobre las constantes; este papel lo juegan aquí las funciones (sus valores) de X^I.

1.2.- Observación

Como se ve en el ejemplo anterior, para definir la función P, sólo necesitamos conocer los valores de las funciones de X^I en el subconjunto $J = \{i,j\} \subset I$.

Este ejemplo es general, en el sentido de que las funciones $P \in C^{X^I}$ que tienen más interés son precisamente aquéllas que quedan caracterizadas conociendo sólo los valores de las funciones de X^I en un subconjunto finito J de I. Estas funciones se corresponden con las funciones proposicionales de un número finito de variables.

Aunque precisaremos esto dentro de un momento, decimos que J es un <u>soporte</u> de P (la palabra soporte se debe a Halmos), y escribimos, abusando de la notación, $P \in C^{X^J}$.

En general, aunque no sea preciso para las demostraciones, supondremos I infinito (para tener suficientes constantes y variables), y las funciones que consideraremos serán todas de soporte finito.

<u>1.2'.- Nota</u>

Sea $J \subset I$. La relación en X^I

$$f \sim_J g \quad \text{sii} \quad f(i) = g(i) \text{ para todo } i \not\in J$$

es trivialmente de equivalencia.

Precisemos ahora los conceptos de la observación 1.2 anterior.

<u>1.3.- Definición</u>

Sea $J \subset I$, $P \in C^{X^I}$. Diremos que P es <u>independiente</u> de J si se cumple:

$$\text{si } f \sim_J g \quad \text{entonces} \quad P(f) \cong P(g).$$

Diremos que J es un <u>soporte</u> de P, si P es independiente de $I \setminus J$. Así, J es un soporte de P sii se cumple:

$$\text{si } f \sim_{I \setminus J} g \text{ entonces } P(f) \cong P(g)$$

lo que equivale a:

$$\text{si } f_{|J} = g_{|J} \text{ entonces } P(f) \cong P(g)$$

Con esto, el abuso de notación anterior, se aclara: Escribir $P \in C^{X^J}$ significa que $P \in C^{X^I}$ y que J es un soporte de P; por tanto no debe entenderse C^{X^J} como una categoría.

2.- Cuantificación múltiple. El funtor $\exists(J)$

2.1 Para cada $J \subset I$ definimos un funtor $\exists(J): C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$, o mejor, $\exists(J): C^{X^I} \longrightarrow C^{X^{I \setminus J}}$, como veremos, de la siguiente forma:

si $f \in X^I$ definimos $\exists(J)P(f) = \bigsqcup \{P(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\}$.

Veamos el carácter funtorial. Habrá que ver que:

si $P \longrightarrow Q$ en C^{X^I} entonces $\exists(J)P \longrightarrow \exists(J)Q$ en C^{X^I}

o, lo que es lo mismo:

si $P(f) \longrightarrow Q(f)$ en C para toda $f \in X^I$, entonces

$\exists(J)P(f) \longrightarrow \exists(J)Q(f)$ en C, para toda $f \in X^I$

y esto es claro:

sea $f \in X^I$; si $P(g) \longrightarrow Q(g)$ en C para toda $g \in X^I$, en particular será $P(g) \longrightarrow Q(g)$ en C para toda $g \in X^I$, $g \sim_J f$

luego se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Q(g) \arrow[dr] & \\ P(g) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bigsqcup\{Q(h) \mid h \in X^I,\ h \sim_J f\} \end{tikzcd}$$

para toda $g \in X^I$, $g \sim_J f$. En consecuencia:

$$\bigsqcup\{P(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\} \longrightarrow \bigsqcup\{Q(h) \mid h \in X^I,\ h \sim_J f\}$$

esto es: $\exists(J)P(f) \longrightarrow \exists(J)Q(f)$

como deseábamos.

<u>2.2</u> Veamos ahora que $\exists(J)P \in C^{I \setminus J}$, es decir, que $\exists(J)P$ es independiente de J. Deberá cumplirse:

$$\text{si} \quad f \sim_J g \qquad \text{entonces} \quad \exists(J)P(f) \cong \exists(J)P(g)$$

y, en efecto, es claro que para todo $h \in X^I$ es $h \sim_J f$ sii $h \sim_J g$, y así:

$$\exists(J)P(f) = \bigsqcup\{P(h) \mid h \in X^I,\ h \sim_J f\} =$$

$$= \bigsqcup\{P(h) \mid h \in X^I,\ h \sim_J g\} = \exists(J)P(g)$$

<u>2.3.- Proposición</u>

$$P \in C^{X^{I \setminus J}} \qquad \text{sii} \quad \exists(J)P \cong P$$

<u>Demostración</u>

Por lo visto antes, si $\exists(J)P \cong P$, como $\exists(J)P \in C^{X^{I \setminus J}}$, es claro que $P \in C^{X^{I \setminus J}}$.

Recíprocamente, sea $P \in C^{X^{I \setminus J}}$; será:

$$P(f) \cong P(g) \quad \text{si} \quad f \sim_J g$$

Para todo $f \in X^I$ se tendrá:

$$\exists(J)P(f) = \bigsqcup\{P(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\} \cong \bigsqcup\{P(f)\} = P(f).$$

La traducción lógica de esta proposición:

$$P \in C^{X^{I \setminus J}} \qquad \text{sii} \qquad \exists(J)P \cong P$$

y de su análoga:

$$P \in C^{X^J} \qquad \text{sii} \qquad \exists(I \setminus J)P \cong P$$

es la siguiente:

P es independiente de J sii las variables "subindicadas" por J no tienen estancias libres en P sii las estancias en P de las variables subindicadas por J son todas ligadas, y, análogamente:

J es un soporte de P sii las variables con estancias libres en P están todas subindicadas por J.

Esto viene a traducir el conocido hecho de que la cuantificación de variables que no tienen estancias libres en una fórmula, no produce alteración en la fórmula, o mejor, la transforma en una equivalente.

2.4.- El funtor $\forall(J)$

De forma análoga al caso simple, definimos, para cada $J \subset I$ un funtor $\forall(J): C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$ por

$\forall(J) = N^{X^I} \exists(J) N^{X^I}$, cuyo carácter funtorial es evidente. Otra caracterización de $\forall(J)$ es:

$$\forall(J)P(f) = N^{X^I}\exists(J)N^{X^I}P(f) = N^{X^I}\bigsqcup\{NP(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\} \cong$$
$$\cong \prod\{P(g) \mid g \in X^I,\ g \sim_J f\}.$$

2.5 Antes de ver propiedades de estos funtores, veamos la traducción algebraica del proceso de sustitución de variables.

2.5.1 Para cada $\alpha \in X^X$, definimos un funtor $S_\alpha : C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$ por $P \longmapsto S_\alpha P$ donde $S_\alpha P \in C^{X^I}$ está dada por

$$f \in X^I \longmapsto S_\alpha P(f) = P(\alpha.f)$$

Veamos el carácter funtorial. Hay que probar que

si $P \longrightarrow Q$ en C^{X^I} entonces $S_\alpha P \longrightarrow S_\alpha Q$ en C^{X^I}.

En efecto:

si $P \longrightarrow Q$ en C^{X^I}, será $P(f) \longrightarrow Q(f)$ en C para todo $f \in X^I$, luego, en particular, $P(\alpha.f) \longrightarrow Q(\alpha.f)$ en C para todo $f \in X^I$, que es lo mismo que $S_\alpha P(f) \longrightarrow S_\alpha Q(f)$ para todo $f \in X^I$, esto es, $S_\alpha P \longrightarrow S_\alpha Q$ en C^{X^I}.

Tenemos así dos familias de funtores:

para cada $J \subset I$, un funtor $\exists(J): C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$,

y para cada $\alpha \in X^X$, otro $S_\alpha : C^{X^I} \longrightarrow C^{X^I}$

Veamos cómo se comportan las composiciones:

$$\exists(J)S_\alpha P(f) = \bigsqcup\{S_\alpha P(g) \mid g \sim_J f\} = \bigsqcup\{P(\alpha.g) \mid g \sim_J f\}$$

$$S_\alpha \exists(J)P(f) = \exists(J)P(\alpha.f) = \bigsqcup\{P(g) \mid g \sim_J \alpha.f\}$$

Como se ve, en general, serán distintos. Examinemos el siguiente

<u>Ejemplo 1</u>

Sean $i,j \in I$, $f \in X^I$ tal que $f(i) = x$, $f(j)=y$, $\alpha \in X^X$ tal que $\alpha(x) = z$, $\alpha(y) = t$, y la identidad en el resto de X. Consideremos $J= \{j\}$, C correspondiente a las proposiciones de la Aritmética, y $P \in C^{X^I}$ la función dada por $g \in C^{X^I} \longmapsto P(g) = "g(i) < g(j)"$.

Así, $P(f) = x < y$.

Calculemos:

$$\begin{aligned}\exists(J)S_\alpha P(f) &= \bigsqcup\{P(\alpha.g) \mid g \sim_j f\} = \\ &= \bigsqcup\{\alpha.g(i) < \alpha.g(j) \mid g \sim_j f\} = \\ &= \bigsqcup\{z < \alpha.g(j) \mid g \in X^I\} = \exists a(z < a)\end{aligned}$$

(Recordemos que $\exists(J)P$ es independiente de J).

Por otra parte:

$$\begin{aligned}S_\alpha \exists(J)P(f) &= \bigsqcup\{P(g) \mid g \sim_j \alpha.f\} = \\ &= \bigsqcup\{g(i) < g(j) \mid g \sim_j \alpha.f\} = \\ &= \bigsqcup\{z < g(j) \mid g \in X^I\} = \exists b(z < b)\end{aligned}$$

La traducción lógica de esta situación sería:

Si A es la fórmula $x < y$, tendremos:

$\exists t\, A_{x,y}[z,t] = \exists t(z < t)$

$(\exists y(x < y))_{x,y}[z,t] = \exists y(z < y)$

Notemos que, en este segundo caso, la y no se sustituye pues no tiene estancias libres.

En este ejemplo, las dos fórmulas que hemos obtenido son iguales; de todos modos, notemos la enorme importancia del rango de α, en el primer caso. Esto quedará ahora de manifiesto.

Ejemplo 2

En la misma situación del ejemplo 1, pero ahora $\alpha \in X^X$ definida $\alpha(z) = x$ para todo $z \in X$. Tendremos:

$$\begin{aligned}\exists(j)S_\alpha P(f) &= \bigsqcup\{P(\alpha.g) \mid g \sim_j f\} = \\ &= \bigsqcup\{\alpha.g(i) < \alpha.g(j) \mid g \sim_j f\} = \\ &= \bigsqcup\{x < x \mid g \in X^I\} = \exists a(x < x)\end{aligned}$$

y, por otra parte:

$$\begin{aligned}S_\alpha \exists(j)P(f) &= \bigsqcup\{P(g) \mid g \sim_j \alpha.f\} = \\ &= \bigsqcup\{g(i) < g(j) \mid g \sim_j \alpha.f\} = \\ &= \bigsqcup\{x < g(j) \mid g \in X^I\} = \exists b(x < b)\end{aligned}$$

La traducción lógica de esta situación sería:

Si A es la fórmula $x < y$, tendremos:

$\exists y\, A_y[x] = \exists y(x < x)$

$(\exists y(x < y))_y[x] = \exists y(x < y)$

Notemos de nuevo que, en este segundo caso, la y no se sustituye pues no tiene estancias libres.

En este ejemplo las dos fórmulas que hemos obtenido son muy diferentes; de hecho, una es obviamente falsa, y la otra expresa una propiedad claramente cierta para los números naturales.

2.6.- Propiedades

Sean $K,J \subset I$.

2.6.1 $P \longrightarrow \exists(J)P$ en C^{X^I}

en efecto, para toda $f \in X^I$ se tiene, evidentemente:

$$P(f) \longrightarrow \sqcup\{P(g) \mid g \sim_J f\} = \exists(J)P(f)$$

2.6.2 $\exists(J)0 \cong 0$

(Escribiremos 0 en lugar de 0^{X^I}; haremos lo mismo con 1^{X^I}, N^{X^I}, $\langle -,- \rangle^{X^I}$, etc., siempre que no haya lugar a confusión)

en efecto, $\exists(J)0(f) = \sqcup\{0(g) \mid g \sim_J f\} \cong \sqcup\{0 \mid g \sim_J f\} \cong 0$

2.6.3 $\exists(J)\langle P, \exists(J)Q\rangle \cong \langle \exists(J)P, \exists(J)Q\rangle$

Probemos que, para toda $f \in X^I$, es:

$$\exists(J)\langle P, \exists(J)Q\rangle(f) \cong \langle \exists(J)P, \exists(J)Q\rangle(f).$$

El primer miembro es:

$$\exists(J)\langle P, \exists(J)Q\rangle(f) = \sqcup\{\langle P, \exists(J)Q\rangle(g) \mid g \sim_J f\} =$$

$$= \sqcup\{\langle P(g), \exists(J)Q(g)\rangle \mid g \sim_J f\}$$

y el segundo:

$$\langle \exists(J)P, \exists(J)Q\rangle(f) = \langle \exists(J)P(f), \exists(J)Q(f)\rangle$$

Notemos que, si es $g \sim_J f$, se tiene $\exists(J)Q(f) \cong \exists(J)Q(g)$.

Bastará probar que $\langle \exists(J)P(f), \exists(J)Q(f)\rangle$ es el coproducto de la familia $\{\langle P(g), \exists(J)Q(f)\rangle \mid g \sim_J f\}$.

Consideremos el diagrama (pág. sig.)

que nos proporciona flechas en C^{X^I}

$$\langle P(g), \exists(J)Q(f)\rangle \longrightarrow \langle \exists(J)P(f), \exists(J)Q(f)\rangle$$

para cada $g \in X^I$, $g \sim_J f$;

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \langle P(g),\ \exists(J)Q(f)\rangle \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \arrow[ddrr] & & \\
 & P(g) \arrow[dl] & & & \\
\exists(J)P(f) & & \langle \exists(J)P(f),\ \exists(J)Q(f)\rangle \arrow[ll] \arrow[rr] & & \exists(J)Q(f)
\end{tikzcd}$$

---

se obtiene entonces la flecha

$$\bigsqcup\{\langle P(g),\ \exists(J)Q(f)\rangle \mid g \sim_J f\} \longrightarrow \langle \exists(J)P(f),\ \exists(J)Q(f)\rangle$$

Veamos finalmente la universalidad:

Sea $R \in C^{X^I}$ tal que $\langle P(g),\ \exists(J)Q(f)\rangle \longrightarrow R$ para toda $g \in X^I$, $g \sim_J f$. Tendremos:

$$1 \cong [N\langle P(g),\ \exists(J)Q(f)\rangle, R] \cong [[NP(g), N\,\exists(J)Q(f)], R] \cong$$
$$\cong [NP(g), [N\,\exists(J)Q(f), R]]$$

con lo que tenemos la flecha

$$P(g) \longrightarrow [N\,\exists(J)Q(f), R]$$

Al ser esto válido para toda $g \in X^I$, $g \sim_J f$, tendremos:

$$\exists(J)P(f) = \bigsqcup\{P(g) \mid g \sim_J f\} \longrightarrow [N\,\exists(J)Q(f), R]$$

que es equivalente a:

$$1 \cong [N\,\exists(J)P(f), [N\,\exists(J)Q(f), R]] \cong$$
$$\cong [[N\,\exists(J)P(f), N\,\exists(J)Q(f)], R] \cong$$
$$\cong [N\langle \exists(J)P(f),\ \exists(J)Q(f)\rangle, R]$$

lo que nos dice que $\langle \exists(J)P(f),\ \exists(J)Q(f)\rangle \longrightarrow R$ como queríamos demostrar.

Como vemos, estas propiedades se demuestran de forma análoga a las correspondientes para la cuantificación simple. Lo mismo ocurre con las siguientes:

<u>2.6.4</u> $\exists(J)1 \cong 1$

<u>2.6.5</u> $\exists(J) N \exists(J) = N \exists(J)$

<u>2.6.6</u> $\exists(J)[P,Q] = [\exists(J)P, \exists(J)Q]$

Veamos otras propiedades de otro tipo.

<u>2.6.7</u> Estudiemos los casos extremos $\exists(\phi)$ y $\exists(I)$. Como, dada $f \varepsilon X^I$, es $g \sim_\phi f$ sii $g = f$, resulta claramente, que $\exists(\phi)$ es la identidad.

Por otra parte, será $g \sim_I f$ para toda $g \varepsilon X^I$,

luego $\exists(I)P(f) = \bigsqcup\{P(g) \mid g \varepsilon X^I\} = \bigsqcup Ra(P)$

que nos da la misma definición que usábamos en el caso de la cuantificación simple.

<u>2.6.8</u> La regla de introducción del $\exists$ en Lógica nos dice (Schoenfield, (28))

si $p \longrightarrow q$ y x no es libre en q, entonces $\exists xp \longrightarrow q$.

Nuestra versión es:

si $P \longrightarrow Q$ en C^{X^I} y $Q \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$, entonces

$$\exists(J)P \longrightarrow Q \text{ en } C^{X^I}.$$

En efecto:

Si $P \longrightarrow Q$ en C^{X^I} será, por el carácter funtorial de $\exists(J)$:

$\exists(J)P \longrightarrow \exists(J)Q$ en C^{X^I}; pero por ser $Q \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$ es

$\exists(J)Q \cong Q$, luego $\exists(J)P \longrightarrow Q$ en C^{X^I}.

<u>2.6.9</u> $\exists(J) \exists(K) = \exists(J \cup K)$

En efecto:

$$\begin{aligned} \exists(J)\exists(K)P(f) &= \bigsqcup\{\exists(K)P(g) \mid g \sim_J f\} = \\ &= \bigsqcup\{\bigsqcup\{P(h) \mid h \sim_K g\} \mid g \sim_J f\} = \quad (*) \\ &= \bigsqcup\{P(h) \mid h \sim_{J \cup K} f\} = \exists(J \cup K)P(f) \end{aligned}$$

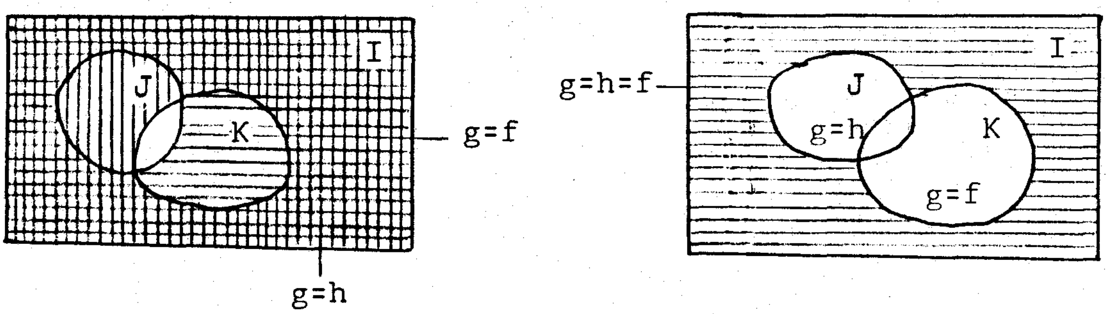
donde el isomorfismo (*) se tiene por lo siguiente:

Es claro que si g y h son funciones tales que

$g \sim_J f$ y $h \sim_J g$, entonces $h \sim_{J \cup K} f$.

Por otro lado, si $h \sim_{J \cup K} f$ veamos que existe una función g que cumple $g \sim_J f$, tal que $g \sim_K h$. Esta g puede ser:

$$g \begin{cases} = h = f & \text{fuera de } J \cup K \\ = f & \text{en } K \setminus (J \cap K) \\ = h & \text{en } J \setminus (J \cap K) \\ \text{arbitraria} & \text{en } J \cap K \end{cases}$$



Dos consecuencias de ésta propiedad son:

2.6.10 $\exists(J)\,\exists(K) = \exists(K)\,\exists(J)$

2.6.11 $\exists(J)\,\exists(J) = \exists(J)$

Las propiedades de los funtores $\forall(J)$ son duales a éstas, y análogas al caso simple; las reseñamos a continuación, demostrando sólo aquéllas que ofrecen alguna particularidad interesante.

2.6.1' $\forall(J)P \longrightarrow P$

2.6.2' $\forall(J)[P, \forall(J)Q] \cong [\forall(J)P, \forall(J)Q]$

2.6.3' $\forall(J)1 \cong 1$

2.6.4' $\forall(J)0 \cong 0$

2.6.5' $\forall(J)N\,\forall(J) = N\,\forall(J)$

Esta propiedad tiene ahora una lectura diferente de la del caso simple. Allí, definíamos $\forall = N \exists N^X$, y ahora hemos definido $\forall(J) = N^{X^I} \exists(J) N^{X^I}$.

Notemos que la aplicación del funtor N (N^{X^I}) no modifica los soportes, es decir, si $P \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$ entonces es claro que $NP \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$.

Así, el funtor $\forall(J)$ verificará las propiedades correspondientes a 2.2 y 2.3, esto es:

$$\forall(J)P \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$$

$$\forall(J)P \cong P \qquad \text{sii} \qquad P \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$$

Con esto, la propiedad 2.6.5' es ya fácil de probar:

$\forall(J)N\forall(J)P \cong N\forall(J)P$ para cualquier $P \varepsilon C^{X^{I}}$ puesto que $N\forall(J)P \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$.

<u>2.6.6'</u> $\forall(J)\langle P,Q\rangle \cong \langle\forall(J)P, \forall(J)Q\rangle$

<u>2.6.7'</u> $\forall(\phi)$ es la identidad, y $\forall(I)$ coincide con el caso simple.

<u>2.6.8'</u> La versión dual de 2.6.8 es la siguiente:

La regla de introducción del $\forall$ en Lógica (Schoenfield,(28)) nos dice que si $p \longrightarrow q$ y x no es libre en p, entonces $p \longrightarrow \forall xq$. Nuestra versión es:

Si $P \longrightarrow Q$ en $C^{X^{I}}$ y $P \varepsilon C^{X^{I \setminus J}}$, entonces $P \longrightarrow \forall(J)Q$ en $C^{X^{I}}$, que se deduce de 2.6.8 sin más que tener en cuenta de nuevo que N no modifica los soportes.

<u>2.6.9'</u> $\forall(J)\forall(K) = \forall(J \cup K)$

<u>2.6.10'</u> $\forall(J)\forall(K) = \forall(K)\forall(J)$

<u>2.6.11'</u> $\forall(J)\forall(J) = \forall(J)$

Añadamos finalmente una en que se mezclan $\exists$ y $\forall$:

<u>2.6.12'</u> $N\exists(K)\forall(J) = \forall(K)\exists(J)N$

en efecto:

$$N\exists(K)\forall(J) = N\exists(K)N\exists(J)N = \forall(K)\exists(J)N$$

3.- Conjuntos $\exists$-cerrados en C^{X^I}

3.1 Dado un conjunto $D \subset C^{X^I}$, consideremos el conjunto (D) construido como en ocasiones anteriores.

Como sabemos, $\exists(I)$ actúa en C^{X^I} de forma análoga a como actúa $\exists$ en C^X; para simplificar la notación, pondremos $\exists$ en lugar de $\exists(I)$.

3.2.- Definición

Diremos que un conjunto (D) es $\exists$-cerrado en C^{X^I} si cumple la condición: si $P \in (D)$ entonces $\exists P \in (D)$ y escribiremos ((D)) para indicar que (D) es $\exists$-cerrado.

Como vemos, esta definición es exactamente igual a la de conjunto $\exists$-cerrado en C^X.

A primera vista, puede parecer esta definición algo incompleta: así como en el caso de C^X se exige la clausura respecto del funtor $\exists$, parece que en el caso actual de C^{X^I} debe exigirse la clausura respecto de los funtores S_α y $\exists(J)$ para todos los $\alpha \in X^X$ y los $J \subset I$ (no olvidemos que la traducción lógica de ((D)) es el conjunto de las proposiciones refutables).

Veamos que esto no es necesario.

3.3.- Proposición

Sea $D \subset C^{X^I}$ tal que (D) es $\exists$-cerrado. Para todo $P \in$ ((D)) se tiene:

3.3.1 $S_\alpha P \in$ ((D)) para todo $\alpha \in X^X$

3.3.2 $\exists(J)P \in$ ((D)) para todo $J \subset I$.

Demostración

3.3.1 Se tiene:

$P \longrightarrow \exists(I)P$ por 2.6.1

$S_\alpha P \longrightarrow S_\alpha \exists(I)P$ por el carácter funtorial de S_α

$\exists(I)P(f) = \exists(I)P(\alpha.f)$ para toda $f \varepsilon X^I$ y todo $\alpha \varepsilon X^X$ por ser $\exists(I)P = \bigsqcup Ra(P)$ una función constante

de donde $S_\alpha P \longrightarrow S_\alpha \exists(I)P \cong \exists(I)P$ en C^{X^I}, y de aquí, por las propiedades de $(\!(D)\!)$ sigue que $S_\alpha P \varepsilon (\!(D)\!)$ pues $\exists(I)P \varepsilon (\!(D)\!)$ y $S_\alpha P \varepsilon E_{\exists(I)P} \subset (\!(D)\!)$.

<u>3.3.2</u> Se tiene:

$\exists(J)P \longrightarrow \exists(I)\exists(J)P$ por 2.6.1

$\exists(I)\exists(J) = \exists(I \cup J) = \exists(I)$ por 2.6.9

de donde $\exists(J)P \longrightarrow \exists(I)P$, y, por la misma razón anterior $\exists(J)P \varepsilon (\!(D)\!)$.

Reducido así este caso al anterior, se tienen automáticamente las mismas propiedades, que no repetiremos.

<u>4.- Cálculo Funcional</u>

Así como la traducción algebraica de una lógica proposicional es un par $(C,(E))$, y de una lógica silogística un par $(C^X,(\!(D)\!))$, resulta que un par $(C^{X^I},(\!(D)\!))$ es la traducción de un cálculo funcional de primer orden.

Debido a las analogías observadas, las caracterizaciones de la consistencia y completitud sintácticas son:

$(C^{X^I},(\!(D)\!))$ es consistente (resp. completo) sii

$(C,(\!(D)\!) \cap C)$ es consistente (resp. completo) sii

$(\!(D)\!)$ es propio (resp. maximal).

Dedicaremos el último capítulo de este trabajo a las nociones semánticas de consistencia y completitud.

CAPITULO VI

SEMANTICA

1.- Notas

1.1 Las lógicas $(C^X, ((D)))$ pueden considerarse como un caso particular de las lógicas $(C^{X^I}, ((D)))$, cuando I es un conjunto con un solo elemento.

1.2 El cociente construido, en el caso de una N-categoría C, $C/_{(E)}$ (Cap. III), puede extenderse, sin modificaciones, a los casos $C^X/_{((D))}$ y $C^{X^I}/_{((D))}$, puesto que en la construcción del cociente no intervienen los cuantificadores, esto es, no interviene el carácter $\exists$-cerrado de $((D))$.

El hecho de que la aplicación canónica, que a cada elemento de C^{X^I} le asocia su clase en $C^{X^I}/_{((D))}$ sea un N-funtor (prop. III.2.11), nos permite trasladar propiedades de C^{X^I} al cociente $C^{X^I}/_{((D))}$; en particular las que se refieran a existencias de flechas o a isomorfismos.

En consecuencia, estudiaremos los conceptos de consistencia y completitud semánticas sólo para lógicas $(C,(E))$ y lógicas $(C^{X^I},\langle\langle D\rangle\rangle)$.

2.- Semántica proposicional

Consideremos un par $(C,(E))$, traducción algebraica de una lógica proposicional. Recordemos que (E) representa el conjunto de proposiciones refutables. Sea B una N-categoría que no sea trivial, esto es, que tenga más de un objeto. Para los resultados que siguen no necesitamos mas que los elementos inicial y final de B; sin embargo, no es preciso restringirse a categorías $B \neq \{0 \longrightarrow 1\}$.

2.1.- Definición

Una B-valoración, V, es un N-funtor $V:C \longrightarrow B$. Consecuencias inmediatas de la definición, son:

$$V1 \cong 1 \qquad V\langle p,q\rangle \cong \langle Vp,Vq\rangle$$

$$VNp \cong NVp \qquad V[p,q] \cong [Vp,Vq]$$

$$V(p \Longrightarrow q) = Vp \Longrightarrow Vq$$

donde, naturalmente, las operaciones que aparecen en el primer miembro son operaciones en C, y las del segundo, lo son en B.

2.2.- Definición

Sea V una B-valoración. Un elemento $p \in C$ se dice B-verdadero (resp. B-falso) respecto a V, si es $Vp \cong 1$ (resp. $Vp \cong 0$).

En lo que sigue, si no hay lugar a confusión, suprimiremos el prefijo B-.

2.3.- Definición

Una lógica $(C,(E))$ se dice semánticamente consistente si existe una valoración V, tal que

$$\text{si} \quad p \in E \quad \text{entonces} \quad Vp \cong 0$$

Esta es una versión dual de lo que es un modelo de una teoría (estructura en la que los axiomas de la teoría son válidos); es una valoración respecto de la que los coaxiomas son falsos. Por esta razón, una tal valoración será llamada un modelo (un B-modelo) de $(C,(E))$.

2.4.- Proposición

Si V es un modelo de $(C,(E))$, entonces es

$$Vp \cong 0 \quad \text{para todo} \quad p \in (E)$$

Demostración

Sea $p \in (E)$; existen elementos $q_1,\ldots,q_n \in E$ tales que $p \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n]$.

Por el carácter funtorial de V tendremos:

$Vp \longrightarrow V[q_1,\ldots,q_n] \cong [Vq_1,\ldots,Vq_n] \cong [0,\ldots,0] \cong 0$

y, como siempre es $0 \longrightarrow Vp$, será $Vp \cong 0$.

2.5.- Proposición

Si V es un modelo de $(C,(E))$, entonces la aplicación $\overline{V} : C/_{(E)} \longrightarrow B$ dada por $\overline{V}\overline{p} = Vp$ es un N-funtor.

Demostración

Veamos en primer lugar que está bien definida.

Si $p \sim_E q$ tendremos que probar que $Vp \cong Vq$.

En efecto, si $p \sim_E q$ será $[\langle p,Nq\rangle,\langle Np,q\rangle] \in (E)$;

por la proposición anterior $V[\langle p,Nq\rangle,\langle Np,q\rangle] \cong 0$ de donde

$[\langle Vp,NVq\rangle,\langle NVp,Vq\rangle] \cong 0$ lo que ocurre sii

$\langle Vp,NVq\rangle \cong 0 \cong \langle NVp,Vq\rangle$ sii $[NVp,Vq] \cong 1 \cong [Vp,NVq]$

sii $Vp \longrightarrow Vq$ en B, y, $Vq \longrightarrow Vp$ en B, de donde $Vp \cong Vq$.

Probemos ahora el carácter funtorial.

Si $\overline{p} \longrightarrow \overline{q}$ en $C/_{(E)}$ tenemos que probar que $Vp \longrightarrow Vq$ en B.
En efecto, si $\overline{p} \longrightarrow \overline{q}$ será $\langle p,Nq\rangle \varepsilon$ (E), luego se tendrá $\langle Vp,NVq\rangle \cong 0$, de donde $N\langle Vp,NVq\rangle \cong 1$, esto es, $[NVp,Vq] \cong 1$, que es equivalente a $Vp \longrightarrow Vq$ en B.

Finalmente, las características de N-funtor son triviales a partir de la construcción.

2.6.- Teorema

Una lógica (C,(E)) es semánticamente consistente sii (E) es propio.

Demostración

El teorema directo es fácil:sea (C,(E)) semánticamente consistente, y sea V un modelo de (C,(E)).
Como $V1 \cong 1 \ncong 0$, es claro que $1 \notin (E)$, y por tanto (E) es propio.

Recíprocamente, sea (E) propio. Tendremos que construir un modelo de (C,(E)).
Veamos que existe un $E' \subset C$, de forma que $(E) \subset (E')$ y (E') sea maximal (propio)..

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{H} = \{(D) \mid (E) \subset (D),\ (D) \neq C\}$$

$\mathcal{H}$ es no vacío, pues $(E) \varepsilon \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ es inductivo, pues si (D_α) es una familia totalmente ordenada por la inclusión, veamos que $\bigcup_\alpha (D_\alpha) \varepsilon \mathcal{H}$. Notemos que $(\bigcup_\alpha (D_\alpha)) = \bigcup_\alpha (D_\alpha)$. Pongamos $(D) = \bigcup_\alpha (D_\alpha)$.
Es claro que $(D_\alpha) \subset (D)$ para cualquier α , y que $(E) \subset (D)$.
Veamos que $(D) \neq C$. Si fuese $(D) = C$, sería $1 \varepsilon (D)$, y así habría un α tal que $1 \varepsilon (D_\alpha)$, esto es, $(D_\alpha) = C$, lo que es

contradictorio.

Por el lema de Zorn, H tiene elementos maximales.

Volvamos al punto inicial. Al ser (E') maximal (y propio) se tiene que, para cualquier $p \varepsilon C$ es

$p \varepsilon (E')$ o $Np \varepsilon (E')$ (una sola de las dos).

Definimos pues la aplicación $V: C \longrightarrow B$ por

$Vp = 0$ si $p \varepsilon (E')$

$Vp = 1$ si $Np \varepsilon (E')$

Desde luego, esta V verifica $Vp \cong 0$ si $p \varepsilon (E)$.

Sólo nos queda probar que V es N-funtor.

Veamos el carácter funtorial: sea una flecha $p \longrightarrow q$ en C.

-- si $q \varepsilon (E')$ será $p \varepsilon E_q \subset (E')$ luego

$Vp = Vq = 0$, y así $V(p \longrightarrow q) = (0 \longrightarrow 0)$

-- si $q \notin (E')$ será $Nq \varepsilon (E')$, con lo que $Vq = 1$

y así $V(p \longrightarrow q) = (Vp \longrightarrow 1)$

Veamos que V es N-funtor:

-- $V1 = 1$ pues $1 \notin (E')$ al ser (E') propio.

-- $V[p,q] \cong [Vp,Vq]$. En efecto,

--si $p \notin (E')$ ó $q \notin (E')$ será $[p,q] \notin (E')$

pues $p,q \varepsilon E_{[p,q]}$; por tanto,

$V[p,q] = 1 \cong [Vp,Vq]$ pues $Vp = 1$ ó $Vq = 1$

--si $p \varepsilon (E')$ y $q \varepsilon (E')$ será $[p,q] \varepsilon (E')$

pues existen $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_m \varepsilon E'$ tales

que $p \longrightarrow [p_1,\ldots,p_n]$ $q \longrightarrow [q_1,\ldots,q_m]$

de donde $[p,q] \longrightarrow [p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_m]$;

así: $V[p,q] = 0 \cong [0,0] \cong [Vp,Vq]$

-- $VN = NV$. En efecto,

--si $p \varepsilon (E')$ es $NNp \varepsilon (E')$ y así,

$VNp = 1$, y $NVp \cong N0 \cong 1$

--si $p \notin (E')$ es $Np \varepsilon (E')$ y así,

$VNp = 0$, y $NVp \cong N1 \cong 0$

Vemos así como, en el caso proposicional, coinciden los conceptos de consistencia semántica y sintáctica.

2.7.- Definición

Una lógica $(C,(E))$ se dice semánticamente completa si se verifica la equivalencia:

p es refutable (esto es, $p \in (E)$) sii p es falso en todos los modelos de $(C,(E))$

para todo $p \in C$.

Esta es una versión dual de la completitud habitual: p es demostrable sii p es verdadero

2.8.- Teorema

El cálculo de proposiciones es semánticamente completo, es decir, $(C,(E))$ es semánticamente completo.

Demostración

Desde luego, si p es refutable, esto es, si $p \in (E)$, para cualquier modelo de $(C,(E))$ es $Vp = 0$, y, por tanto p es falso en todos los modelos de $(C,(E))$.

Recíprocamente, sea p falso en todos los modelos de $(C,(E))$.

Si fuese $(E \cup \{Np\}) \neq C$, la lógica proposicional dada por $(C,(E \cup \{Np\}))$ sería consistente y por tanto tendría un modelo V: $\quad Vq = 0$ para todo $q \in (E \cup \{Np\})$.

Pero como $(E) \subset (E \cup \{Np\})$, este V es un modelo de $(C,(E))$, y se tiene la contradicción:

$VNp = 0$ pues $Np \in (E \cup \{Np\})$

$VNp \cong NVp \cong N0 \cong 1$ pues $Vp = 0$ ya que p es falso respecto a V.

Así, deberá ser $(E \cup \{Np\}) = C$, y, en particular, se tiene $p \in (E \cup \{Np\})$, lo que nos dice que existen elementos $q_1, \ldots, q_n, q_{n+1} \in E \cup \{Np\}$ tales que $p \longrightarrow [q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}]$ en C.

Si $q_1,\ldots,q_n,q_{n+1} \in E$, tendríamos $p \in (E)$ como deseamos. Si no, pongamos $q_{n+1} = Np$, y tenemos:

$p \longrightarrow [q_1,\ldots,q_n,Np] \cong [[q_1,\ldots,q_n],Np]$;pongamos, por simplificar, $p \longrightarrow [q,Np]$ con $q \in (E)$. Se tendrá:

$$p \longrightarrow [q,Np] \quad \text{sii} \quad 1 \cong [Np,[q,Np]] = [[Np,Np],q] \cong [Np,q]$$

sii $p \longrightarrow q$ lo que nos dice que $p \in E_q \subset (E)$.

3.- Semántica funcional

Consideremos un par $(C^{X^I},((D)))$, traducción algebraica de un cálculo funcional. Sea, como antes, B una N-categoría no trivial.

3.1.- Definición

Una B-valoración, V, es un N-funtor $V:C \longrightarrow B$. Nótese que sólo definimos V para los elementos de C, que vienen a jugar el papel de las fórmulas cerradas.

3.2.- Definición

Un B-modelo de $(C^{X^I},((D)))$ es una B-valoración V tal que $Vp = 0$ si $p \in ((D)) \cap C$.

De nuevo, en lo sucesivo, suprimiremos el prefijo B-.

3,3.- Definición

Una lógica $(C^{X^I},((D)))$ se dice semánticamente consistente si tiene un modelo.

3.4.- Teorema

Una lógica $(C^{X^I},((D)))$ es semánticamente consistente sii $((D))$ es propio.

Demostración

La demostración se apoya en la correspondiente al caso proposicional.

En efecto, notemos que si $V:C \longrightarrow B$ es un modelo de $(C^{X^I}, ((D)))$, entonces V es también un modelo de la lógica proposicional $(C, ((D)) \cap C)$, y recíprocamente.

Así, se tiene:

$(C^{X^I}, ((D)))$ semánticamente consistente sii

$(C, ((D)) \cap C)$ semánticamente consistente sii

$((D)) \cap C$ es propio sii $((D))$ es propio (IV.4.8)

Vemos de nuevo como, para estas lógicas, coinciden los conceptos de consistencia sintáctica y semántica.

Antes de hablar de completitud semántica, necesitamos tener un concepto de falsedad para los elementos de C^{X^I} que no sean las funciones constantes (esto es, elementos de C). La definición que daremos se basa en el lema que veremos a continuación, que es un resultado dual del llamado teorema del cierre (Schoenfield (28)):

> Una fórmula A es teorema sii su cierre lo es. El cierre de una fórmula A es
>
> $$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A$$
>
> donde $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres que aparecen en A.

<u>3.5.- Lema</u>

Sea $((D))$ un conjunto $\exists$-cerrado de C^{X^I}. Para todo $P \in C^{X^I}$ se tiene:

$$P \in ((D)) \quad \text{sii} \quad \exists P \in ((D))$$

<u>Demostración</u>

Si $P \in ((D))$ entonces $\exists P \in ((D))$ por el carácter $\exists$-cerrado de $((D))$.

Si $\exists P \varepsilon ((D))$, como $P \longrightarrow \exists P$ (V.2.6.1)

será $P \varepsilon E_{\exists P} \subset ((D))$.

Recordemos que $\exists$ representa aquí a $\exists(I)$.

3.6.- Definición

Un elemento $P \varepsilon C^{X^I}$ se dice falso para V si $V\exists P \doteq 0$.

3.7.- Definición

Una lógica $(C^{X^I}, ((D)))$ se dice semánticamente completa si se verifica la equivalencia:

P es refutable sii P es falso en todos los modelos de $(C^{X^I}, ((D)))$,

para todo $P \varepsilon C^{X^I}$.

3.8.- Teorema

El cálculo funcional (y, por la nota 1.1, la lógica silogística) de primer orden, es semánticamente completo.

Demostración

Si $P \varepsilon ((D))$ será $\exists P \varepsilon ((D)) \cap C$, luego para todo modelo V se tendrá $V\exists P = 0$, es decir, P es falso respecto a V, como deseábamos.

Recíprocamente, sea $P \varepsilon C^{X^I}$, falso para todos los modelos de $(C^{X^I}, ((D)))$.

Consideremos el conjunto $A = \{((D)) \cap C\} \cup \{N\exists P\}$.

Veamos que debe ser $(A)_{X^I} = C^{X^I}$. En efecto, si no fuese así, la lógica $(C^{X^I}, (A)_{X^I})$ sería semánticamente consistente, y tendría un modelo V; este V sería también modelo de $(C^{X^I}, ((D)))$, puesto que como $((D)) \cap C \subset A$, será

$((D)) = (((D)) \cap C)_{X^I} \subset (A)_{X^I}$ (IV.4.3)

y tendríamos $Vq \simeq 0$ para todo $q \in (A)_{X^I} \cap C = (A)$, lo que nos llevaría a la contradicción:

$$VN\exists P \simeq 0 \quad \text{pues} \quad N\exists P \in (A)$$

$$VN\exists P \simeq 1 \quad \text{pues} \quad V\exists P \simeq 0 \text{ por hipótesis, y}$$

$$\text{así} \quad VN\exists P \simeq NV\exists P \simeq N0 \simeq 1$$

Así pues, se tiene $(A)_{X^I} = C^{X^I}$ y por tanto

$$\exists P \in (A)_{X^I} \cap C = (A)$$

lo que nos dice que existen $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1} \in A$ tales que

$$\exists P \longrightarrow [q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}] \quad \text{en } C.$$

Si $q_1, \ldots, q_{n+1} \in ((D)) \cap C$, tendremos $\exists P \in ((D)) \cap C \subset ((D))$

y, por el lema anterior, $P \in ((D))$.

Si no, pongamos $q_{n+1} = N\exists P$, $[q_1, \ldots, q_n] = q$; tendremos:

$\exists P \longrightarrow [q_1, \ldots, q_n, N\exists P] \simeq [q, N\exists P]$ que es equivalente a:

$1 \simeq [N\exists P, [q, N\exists P]]$. Pero se tiene:

$1 \simeq [N\exists P, [q, N\exists P]] \simeq [[N\exists P, N\exists P], q] \simeq [N\exists P, q]$ lo que equivale a $\exists P \longrightarrow q$ en C, luego $\exists P \longrightarrow q$ en C^{X^I}, y así $\exists P \in E_q \subset ((D))$. De nuevo por el lema anterior, se tendrá $P \in ((D))$.

BIBLIOGRAFIA

(1) BARNES, D.W., MACK, J.M. "Una Introducción algebraica a la Logica Matemâtica". Eunibar, 1978

(2) COPI, I.M. "Introducción a la Lôgica". Eudeba, 1962

(3) CRAIG, W. "Logic in Algebraic Form". Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 72. North-Holland, 1974

(4) FOURMAN, M.P. "The Logic of Topoi". Handbook of Mathematical Logic. North Holland, 1977

(5) GOLDBLATT, R. "Topoi. The categorial Analysis of Logic" Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland, 1979

(6) GRATZER, G. "Lattice Theory". W.H. Freeman and Company, 1971

(7) HALMOS, P.R. "Lectures on Boolean Algebras". Van Nostrand Company,1963

(8) HALMOS, P.R. "Algebraic Logic". Chelsea Publishing Company, 1962

(9) HENKIN, L. "Notes for lectures on the theory of cylindric algebras". Notas mimeografiadas de las conferencias que impartió en Sevilla, 1982

(10) HENKIN, L., MONK, J.D., TARSKI, A. "Cylindric Algebras" Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 64. North Holland, 1971

(11) HENKIN, L., MONK, J.D., TARSKI, A. "Cylindric Set Algebras". Lecture Notes in Mathematics, 883. Springer-Verlag, 1981

(12) JECH, T. "Set Theory". Academic Press, 1978

(13) KOCK, A., REYES, G.E. "Doctrines in Categorical Logic" Handbook of Mathematical Logic. North Holland, 1977

(14) LAITA, L.M. "Un estudio de la Lógica Algebraica desde el punto de vista de la Teoría de Categorías". Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XVII, nº1, 1976

(15) LAWVERE, F.W. "Adjointness in Foundations". Dialectica, vol. 23, nº3/4, 1969

(16) LAWVERE, F.W. "The Category of Categories as a Foundation for Mathematics". Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. Springer-Verlag, 1966

(16') LAWVERE, F.W. "Functorial Semantics of Algebraic Theories". Nat. Acad. Sci. Proc. 869,872, 1964

(17) LEBLANC, H. "Truth-value semantics for a Logic of Existence". Notre Dame Journal of Formal Logic, vol XII, nº2, 1971

(18) LEBLANC, L. "Introduction á la Logique Algébrique". Université de Montréal. Departement de Mathématiques, 1964

(19) MACLANE, S. "Categories for the Working Mathematician" Springer-Verlag, 1971

(20) MAKKAI, M., REYES, G.E. "First Order Categorical Logic"

Lecture Notes in Mathematics, 611. Springer-Verlag,1977

(20') MAKKAI, M., REYES, G.E. "Model Theoretic Methods in the Theory of Topoi and Related Categories". Logic&Methodology. Univ. of California, Berkeley, 1975

(21) MYCIELSKI, J. "An essay about Old Model Theory". Reports on Mathematical Logic, 14, 1982

(22) PINTER, C.C. "Algebraic Logic with Generalized Quantifiers". Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XVI, nº4, 1975

(23) PINTER, C.C. "A simple Algebra of First-Order Logic" Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. XIV, nº3,1973

(24) RASIOWA, H. "An algebraic approach to Non-Classical Logics". Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. North Holland, 1974

(25) RASIOWA, H., SIKORSKI, R. "The Mathematics of Metamathematics". Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963

(26) RIEGER, L. "Algebraic Methods of Matematical Logic". Academic Press, 1967

(27) RISCOS, A., LAITA, L.M. "Conectivas y Funtores Adjuntos". Actas del II Congreso de Teoría y Metodología de la Ciencia, Oviedo, 1983

(28) SCHOENFIELD, J. "Mathematical Logic". Addison Wesley Publishing Company, 1967

(29) SCHLOMIUK, D.I. "Logique des Topos". Les Presses de l'Université de Montréal, Canada, 1977

(30) SIKORSKI, R. "Boolean Algebras". Springer-Verlag, 1964

(31) VOLGER, H. "Completeness Theorem for Logical Categories". Lecture Notes in Mathematics , 445, Springer-Verlag, 1975

(32) VOLGER, H. "Logical Categories, Semantical Categories and Topoi". Lecture Notes in Mathematics, 445, Springer-Verlag, 1975

(33) WRAITH, G.C. "Lectures on Elementary Topoi". Lecture Notes in Mathematics, 445, Springer-Verlag, 1975

...IDAD ...

FACULTAD DE CIENCIAS MATE...

...unido el Tribunal integrado por lo...
...ía de la fecha, para juzgar la ...
D. Agustín Riscos Fernández
Titula: "N-Categóricas: Un modelo categorial de la lógica"

...le otorgarle la calificación de Sobresaliente Cum laude

Sevilla, 1 de Diciembre 1984

El Vocal,　　　　El Vocal,

El Secretario,

El ...