

27044

118926447

BCA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en Dpto. de Álgebra
de la F. de Matemáticas

de esta Universidad desde el día 24-06-02

UNIVERSIDAD DE SEVILLA 11-07-02

Sevilla 24 de 06 de 2002

EL DIRECTOR DE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA



MÉTODOS EFECTIVOS EN ANILLOS DE OPERADORES DIFERENCIALES Y EN SISTEMAS HIPERGEOMÉTRICOS

Memoria presentada por María Isabel Hartillo Hermoso
para optar al grado de Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

043

390

Vº Bº del Director



Fdo. Francisco Jesús Castro Jiménez
Catedrático de Algebra

La doctoranda



Fdo. María Isabel Hartillo
Hermoso

Sevilla, Junio 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 85 número 43 del libro
correspondiente.
Sevilla, 19 JUN. 2002

El Jefe del Negocio de Tesis

A mi padre, a mi madre,
a mi hermano
y a Elías.

Agradecimientos

Quisiera agradecer, ante todo, a Francisco Castro por su inestimable labor de dirección. No es fácil seguir estudiando un problema cuando todo parece derrumbarse, nadie mejor que él me animó y supo sugerir el camino correcto en los momentos de incertidumbre. Su paciencia y tesón han hecho posible este trabajo.

Debo agradecer a todos los miembros del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, su inestimable apoyo a una "forastera", que en algunos casos (gracias Jesús y José María) ha llegado a ser okupa. En particular, agradezco a Pilar Pisón su paciencia y disponibilidad para escucharme. Especialmente, debo agradecer a José María Ucha, que me ha escuchado, ayudado y aconsejado tanto en lo científico como en lo personal.

Agradezco también a los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, es difícil estar entre dos aguas, sobre todo si sopla levante, su comprensión y ayuda han sido inestimables.

Gracias a Miguel Ángel Olalla y Jesús Soto que me ayudaron con el \LaTeX , sin sus consejos este trabajo no tendría esta apariencia.

Gracias muy especiales a José María Tornero, quien me ha apoyado y escuchado en todo momento. Me dio esperanza, calma y buenas ideas, su generosidad parece no tener límites.

Mi más sincero agradecimiento, por último, a los miembros del tribunal por aceptar asistir a la lectura de mi tesis.

Índice General

Introducción	ix
Resultados originales	xii
Contenidos	xiv
Problemas abiertos	xvi
I Preliminares	1
I-A Anillos de operadores diferenciales	1
I-B Filtraciones	3
I-C Irregularidad y pendientes	6
I-D Más pendientes	8
I-E Ideales iniciales en general	14
I-F Ideales tóricos	17
I-G Generadores del ideal tórico	20
I-G.1 Ideales tóricos homogéneos	23
I-H Complejo de Koszul y Sistemas hipergeométricos	24
I-H.1 Complejo de Koszul	25
I-H.2 Sistemas Hipergeométricos	27
II Sistemas hipergeométricos con codimensión uno	31
II-A Sistemas hipergeométricos especiales	31
II-B Caso general en codimensión uno	36

III	Sistemas hipergeométricos definidos por una fila	45
III-A	Sistemas definidos por una fila sin repetición	45
III-B	Sistemas definidos por una fila con repetición	52
III-C	Sistemas definidos por una fila en general	61
IV	Sistemas hipergeométricos definidos por dos filas	73
IV-A	Ecuaciones de la variedad tórica	74
IV-B	Posibles pendientes	75
IV-C	Triangulaciones regulares	80
IV-D	Triangulaciones y pendientes	82
IV-E	Pendientes en un caso más general	110
	Bibliografía	127

Introducción

El Análisis Algebraico, o teoría de \mathcal{D} -módulos, trata el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en derivadas parciales desde el punto de vista del Álgebra y la Geometría. Esta teoría generaliza la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes holomorfos en una variable real o compleja x .

En nuestro estudio, que describiremos más adelante tanto en los conceptos clásicos (en una variable) como la generalización a sistemas de ecuaciones lineales en derivadas parciales es necesario un fuerte uso del álgebra computacional. Los anillos de operadores diferenciales en los que trabajamos \mathcal{A}_n , \mathcal{D}_n , $\widehat{\mathcal{D}}_n$ son no conmutativos, lo que en general dificulta la aplicación de estos métodos constructivos de cálculo.

Un concepto básico en ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes holomorfos es el de *punto singular regular*. El Teorema de Fuchs [29] nos proporciona un método algorítmico que determina cuando un punto es singular regular.

La generalización de la noción de punto singular regular en sistemas de ecuaciones diferenciales es el *haz irregularidad* de un módulo \mathcal{M} con respecto a una hipersuperficie Y , que notamos $Irr_Y(\mathcal{M})$. Este concepto lo introdujo Z. Mebkhout [39], generalizando un resul-

tado de B. Malgrange [35], que asegura que una ecuación diferencial ordinaria tiene un punto singular regular en $0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si toda solución formal de la ecuación es convergente.

La noción de *pendiente algebraica* de un \mathcal{D} -módulo coherente \mathcal{M} a lo largo de una hipersuperficie lisa Y fue introducida por Y. Laurent bajo el nombre de índice crítico en [31]. En el contexto general del anillo de los operadores microdiferenciales, se consideraban dos filtraciones: la filtración F por el orden de los operadores y la filtración V de Malgrange-Kashiwara a la largo de la hipersuperficie. A partir de ellas se definen las filtraciones intermedias $L_r = pF + qV$ para cualquier número racional $r = p/q \geq 0$. Los índices críticos son los valores de r para los que la variedad característica de \mathcal{M} relativa a L_r no es bihomogénea respecto de las graduaciones inducidas por F y V . Usando operadores 2-microdiferenciales, Y. Laurent probó que sólo hay un número finito de índices críticos. C. Sabbah y F. Castro dieron otra prueba en [44], utilizando el concepto de platificador local de una deformación.

Z. Mebkhout introdujo en [41] el concepto de *pendiente trascendente* de un módulo holónimo, a lo largo de una hipersuperficie Y , como el salto en la filtración de Gevrey del haz irregularidad. Laurent y Mebkhout prueban en [32] que las pendientes algebraicas coinciden con las trascendentes.

En [2] se estudian por primera vez estas nociones desde un punto de vista efectivo: se prueba con métodos elementales que el número de pendientes es finito. Si \mathcal{A}_n es el álgebra de Weyl de orden n , se da un algoritmo de cálculo de pendientes para \mathcal{A}_n -módulos cíclicos \mathcal{A}_n/I , donde I es un ideal a izquierda de \mathcal{A}_n . Lo denominaremos algoritmo ACG. En [47] y [49] J. M. Ucha generaliza estos resultados a un módulo finitamente generado arbitrario. Estos algoritmos han sido implementados en diferentes sistemas: kan (N. Takayama [46]), CLISP (J. M. Ucha [48]), Macaulay2 (A. Leykin, M. Stillman y H. Tsai [34]),...

Gracias a los resultados de [32], el algoritmo ACG proporciona

una manera de comprobar la regularidad de un \mathcal{D} -módulo a lo largo de una hipersuperficie lisa. El algoritmo ACG utiliza el concepto de L_r -base estándar o de Gröbner que necesita, en general, un procedimiento de homogeneización para su cálculo efectivo. Dicha homogeneización ha sido descrita en [14] (ver también [43]) y hace uso del álgebra de Rees. Otra homogeneización ha sido descrita en [2].

Un tipo especial de sistemas de ecuaciones lineales en derivadas parciales son los llamados sistemas hipergeométricos o de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski [24]. El cálculo de pendientes de dichos sistemas usando el algoritmo ACG puede llegar a ser muy costoso.

En [15] se calculan las pendientes de sistemas hipergeométricos definidos por una matriz de una fila,

$$A = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n) \quad i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_n.$$

En este trabajo se determinan todas las pendientes del sistema mediante la restricción respecto de las variables $x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_{n-2} = 0$, y haciendo uso de un teorema de Laurent y Mebkhout [33] sobre la conservación de pendientes por restricción, en este punto (para poder aplicar dicho teorema) parece inevitable la hipótesis $i_1 = 1$. Finalmente el cálculo general queda reducido al de las pendientes del sistema definido por la matriz $(i_1 \ i_{n-1} \ i_n)$, para ello se utiliza un principio que se deduce de [2] y [3], si un módulo no tiene pendientes respecto de una hipersuperficie, entonces su L -variedad característica no depende de L .

Los sistemas hipergeométricos han generado un gran interés científico en los últimos años, desde la obra fundacional de Gelfand, Kapranov y Zelevinski ([24]). Se trata de una familia de objetos susceptibles de ser estudiados desde diversos puntos de vista: algebraico, geométrico, combinatorio, analítico ... Por ejemplo, el estudio de determinados tipos de soluciones de estos sistemas ha sido abordado en numerosos trabajos. Sin pretender ser exhaustivos citemos, además de [43] los trabajos [17] y [18].

Es claro que el estudio de las soluciones de los sistemas hipergeométricos irregulares es un trabajo que deber ser abordado en un futuro próximo.

RESULTADOS ORIGINALES DE ESTA MEMORIA

Los resultados originales más relevantes de esta memoria son:

1. Consideramos un sistema hipergeométrico definido por una matriz A de enteros $(n-1) \times n$. En este caso el ideal tórico que contiene dicho sistema es principal, generado por P . Estudiando el polígono de Newton del generador del ideal tórico $\mathcal{P}(P)$, definimos todas las pendientes del sistema.

En el caso en que el ideal tórico provenga de un semigrupo reducido, obtenemos unos generadores del sistema, tales que sus F -símbolos principales forman una sucesión regular (teoremas II-A.2 y II-B.1). Esto nos permite determinar la variedad característica del sistema. Determinamos el conjunto de hiperplanos coordinados para los que el sistema no tiene pendientes. Fijada un hiperplano coordinado, que describe alguna pendiente de $\mathcal{P}(P)$, calculamos un nuevo conjunto de generadores del sistema, tales que sus L -símbolos principales forman una sucesión regular (donde L es una forma lineal cualquiera no descrita por $\mathcal{P}(P)$), probamos que dicha filtración define la única pendiente del sistema y calculamos la L -variedad característica.

En el caso en que el ideal tórico venga definido por un semigrupo no reducido, demostramos que dicho sistema no tiene pendientes respecto de los hiperplanos coordinados (teorema II-B.2). Haciendo un cambio de variables calculamos las pendientes en el infinito, donde desarrollamos un método similar al del caso reducido (teorema II-B.4).

2. Dada una matriz con una sola fila, con todas sus componen-

tes positivas (semigrupo reducido) y no repetidos calculamos todas las pendientes del sistema asociado. Suponiendo que la matriz está escrita de forma creciente, demostramos que no hay pendientes respecto de las $n - 1$ primeras variables (lema III-A.1). Usando un teorema de [43] vemos que el F -graduado del sistema es el *falso ideal inicial*, así calculamos la F -variedad característica, y determinamos la única pendiente del sistema (teorema III-A.3). Estos resultados generalizan [15].

3. Si A es una matriz con una sola fila, sin elementos repetidos (no necesariamente semigrupo reducido), suponiendo escrita la matriz de forma creciente, hay una única pendiente respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$ si y sólo si hay más de un elemento positivo, y hay una única pendiente respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$ si y sólo si hay más de un elemento negativo en A (teoremas III-C.2 y III-C.4). Si tenemos elementos repetidos, mediante un cambio de variable siempre podemos reducirnos a uno de los casos anteriores.
4. Consideramos A una matriz con dos filas con todos sus elementos positivos o nulos, de rango 2 y tal que todos los binomios del ideal tórico con soporte en tres o menos variables son no homogéneos. Representamos las columnas de A sobre \mathbb{R}^2 y llamamos Γ a la envolvente convexa del origen y las columnas de A , entonces el sistema hipergeométrico asociado sólo tiene pendientes respecto de los vértices de Γ (proposiciones IV-D.1 y IV-E.2).

Si consideramos un vértice j de Γ , el sistema tiene pendientes respecto de $x_j = 0$ si y sólo si el nuevo convexo que se obtiene al quitarle a Γ el vértice j tiene nuevas caras que no contienen al origen (teoremas IV-D.3 y IV-D.5 y proposiciones IV-E.5 y IV-E.7).

CONTENIDOS

En el capítulo "Preliminares" recordamos las nociones básicas de filtraciones para los anillos de operadores diferenciales. Se describen los conceptos de irregularidad, variedad característica y se recuerda un tipo especial de filtraciones, aquéllas que definen las pendientes.

En una segunda parte nos trasladamos al álgebra conmutativa y definimos los ideales tóricos, describimos algunos mecanismos de cálculo de generadores y estudiamos propiedades básicas. Recordamos el Complejo de Koszul y las nociones de sucesión regular, ideal perfecto, anillo Cohen-Macaulay,...

Volviendo al álgebra no conmutativa definimos los sistemas hipergeométricos y los relacionamos con el complejo de Koszul. Damos también un teorema que nos proporciona la regularidad de dichos sistemas. Las referencias básicas para este capítulo son [2], [7], [6], [45] y [43].

En el capítulo "Sistemas hipergeométricos con codimensión uno" se parte de una matriz A , $(n - 1) \times n$, tal que su ideal tórico proviene de un semigrupo reducido. Se tiene así que el ideal tórico es principal, generado por P . Las pendientes del sistema asociado a A se describen en función del polígono de Newton de P , $\mathcal{P}(P)$. Para ello construimos conjuntos de generadores del sistema cuyos L -símbolos principales forman sucesiones regulares, esto nos permite calcular las diferentes L -variedades características.

En el caso en que el ideal tórico no esté definido por un semigrupo reducido, mediante un cambio de variable calculamos las pendientes del sistema en el infinito.

En el capítulo "Sistemas hipergeométricos definidos por una fila" se parte, en primer lugar, de una matriz con todas sus componentes positivas y no repetidas. Si consideramos que la matriz A está escrita de forma creciente, no hay pendientes respecto de $x_j = 0$ con $j < n$. La única pendiente que describe el sistema viene dada precisamente por

el circuito en las variables $n - 1$ y n . Esto generaliza el caso tratado en [15], es de notar que el método descrito aquí es combinatorio y no hace uso, como en [15], de ningún resultado sobre comportamiento de pendientes por restricción.

Si la matriz A tiene componentes de cualquier signo, sin elementos repetidos, suponiendo también que están escritos de forma creciente, no tenemos ninguna pendiente para $x_j = 0$ con $1 < j < n$. Tendremos alguna pendiente para $x_1 = 0$ si hay más de un elemento negativo en A , en este caso el circuito descrito por las variables 1 y 2 nos dan dicha única pendiente. Con respecto a las pendientes respecto de $x_n = 0$, hay un resultado simétrico, si hay más de un elemento positivo, entonces hay una única pendiente que es la dada por el circuito en las variables $n - 1$ y n .

En el caso en que A tenga elementos repetidos, se puede hacer un cambio de variables, que nos permite reducir nuestro cálculo a uno del tipo anterior. En el caso en que A tenga todas sus componentes positivas y la mayor no repetida, calculamos sus pendientes directamente y determinamos sus variedades características.

En el capítulo "Sistemas hipergeométricos definidos por dos filas" partimos de una matriz A con todos los menores 2×2 diferentes de cero, suponemos que el ideal tórico proviene de un semigrupo reducido, lo que nos permite suponer que todos los elementos de A son positivos o nulos. Añadimos una nueva hipótesis, todos los circuitos de A son no homogéneos. Demostramos que las únicas pendientes que puede tener el sistema asociado a A son las descritas por los circuitos de A .

Tomamos la representación de las columnas de A en \mathbb{R}^2 , y llamamos Γ a la envolvente convexa del origen y las columnas de A . Probamos que el sistema sólo puede tener pendientes respecto de las hiper-superficies $x_j = 0$, tales que j es vértice de Γ . Usando triangulaciones regulares de A determinamos la F -variedad característica del sistema.

Para un vértice j de Γ probamos (distinguiendo si el vértice está

sobre algún eje o no) que hay pendientes respecto de $x_j = 0$ si y sólo si hay nuevas caras en el convexo Γ' , que no contengan al origen; donde Γ' es el convexo obtenido al quitar el vértice j de Γ , y además hay tantas pendientes como caras nuevas.

Finalmente, prescindiendo de la hipótesis “todos los menores 2×2 distintos de cero”, y obtenemos unos resultados análogos a los anteriores.

Los resultados de esta memoria se refieren a sistemas hipergeométricos definidos sobre el Álgebra de Weyl \mathcal{A}_n . En el caso formal, i.e. el caso del anillo $\widehat{\mathcal{D}}_n$ (o en el caso convergente, i.e. el caso del anillo \mathcal{D}_n si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbf{k} = \mathbb{C}$), todos los resultados probados siguen siendo válidos sin más que tener en cuenta que la extensión $\mathcal{A}_n \subset \widehat{\mathcal{D}}_n$ (o $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{D}_n$) es plana. Los casos formal y convergente tienen sin embargo resultados propios (ver por ejemplo [4] o [13]).

PROBLEMAS ABIERTOS

Obviamente quedan muchos casos abiertos en el cálculo de pendientes de sistemas hipergeométricos. En particular, en el caso de matrices con 2 filas quedaría por resolver el caso en que todos los circuitos no son homogéneos. Es claro, que quedan muchos otros tipos de sistemas por tratar.

Además, es interesante el cálculo de las L -variedades características de los sistemas hipergeométricos, siguiendo el estudio de A. Adolphson [1] en el caso de la F -variedad característica.

Asimismo el cálculo del Gröbner fan de estos sistemas hipergeométricos irregulares puede aplicarse al estudio de soluciones de tipo Gevrey (continuando los resultados de [43])

En el terreno computacional sería deseable mejores (más eficientes) implementaciones del cálculo de pendientes.

CAPÍTULO I

Preliminares

Dedicaremos estos preliminares a recordar algunas nociones y resultados que serán usados a lo largo de esta memoria.

I-A ANILLOS DE OPERADORES DIFERENCIALES

Sea \mathbf{k} un cuerpo de característica 0 y n un entero mayor o igual que cero. Denotaremos:

- $\mathcal{A}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n]$, el álgebra de Weyl, es decir el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes polinómicos.
- $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}[[x_1, \dots, x_n]][\partial_1, \dots, \partial_n]$, el anillo de operadores diferenciales lineales cuyos coeficientes son series formales en n variables.
- $\mathcal{D}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\{x_1, \dots, x_n\}[\partial_1, \dots, \partial_n]$, el anillo de operadores diferenciales lineales cuyos coeficientes son series convergentes en n variables, con $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

Para simplificar la notación, a partir de ahora, si no hay confusión con \mathbf{k} , el cuerpo base, escribiremos \mathcal{A}_n , $\widehat{\mathcal{D}}_n$ y \mathcal{D}_n respectivamente.

La acción natural de estos anillos sobre f , un polinomio en n variables, una serie formal o una serie convergente dependiendo del anillo que estemos considerando es:

$$x_i \bullet f = x_i f; \quad \partial_i \bullet f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Para mayor brevedad notaremos a partir de ahora \mathcal{R} a cualquiera de los anillos anteriores, y se harán notar las diferencias que surjan.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes polinómicos (o series formales o convergentes, dependiendo del anillo) se puede identificar con un ideal en el álgebra \mathcal{R} . Si \mathcal{N} es un \mathcal{R} -módulo a la izquierda, si $u \in \mathcal{N}$ es una solución del sistema de ecuaciones definido por los operadores P_1, \dots, P_m ,

$$P_1 \bullet u = 0, \dots, P_m \bullet u = 0$$

entonces u también satisface cualquier ecuación de la forma:

$$\sum_{i=1}^m Q_i P_i \bullet u = 0, \quad Q_i \in \mathcal{R}$$

Por lo que el sistema de partida se puede expresar como:

$$P \bullet u = 0, \quad P \in I,$$

con I el ideal a izquierda de \mathcal{R} generado por los operadores P_1, \dots, P_m .

El álgebra de Weyl es isomorfa [20] a la \mathbf{k} -álgebra libre definida por los símbolos $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ módulo el ideal bilátero de relaciones:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [y_i, y_j] = 0, \quad [y_i, x_j] = \delta_{ij},$$

(donde δ_{ij} son los símbolos de Kronecker).

Por lo que todos los anillos que estamos considerando son anillos no conmutativos, si $n > 0$.

Notaremos las n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$. Dado P un operador lo escribiremos indistintamente de cualquiera de las

siguientes formas:

$$P = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} f_\beta \partial^\beta,$$

donde $a_{\alpha, \beta} \in \mathbf{k}$, $f_\beta \in \mathbf{k}[x]$, $\mathbf{k}[[x]]$, $\mathbf{k}\{x\}$.

Definición I-A.1 ■ Definimos el diagrama de Newton de un operador P

$$P = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta,$$

y lo denotaremos $\mathcal{N}(P)$, al subconjunto de \mathbb{N}^{2n} :

$$\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n} \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}.$$

Por convenio $\mathcal{N}(0) = \emptyset$.

I-B FILTRACIONES

En esta sección estudiaremos diferentes filtraciones sobre los anillos anteriormente definidos. Para este tema hemos seguido la referencia [10].

Consideremos una forma lineal $L : \mathbb{Q}^{2n} \rightarrow \mathbb{Q}$ con coeficientes no negativos y cuya restricción L_2 a $0 \times \mathbb{Q}^n$ tiene coeficientes estrictamente positivos. (Esta condición sólo es necesaria en el caso de coeficientes en los anillos de series).

Definición I-B.1 ■ Sea $P = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} f_\beta \partial^\beta \neq 0$ un elemento de \mathcal{R} . Definimos el L_2 -orden de P , como

$$\text{ord}_{L_2}(P) = \max\{L_2(\beta) \mid f_\beta \neq 0\}.$$

El L_2 -orden del operador 0 es $-\infty$.

Es claro que $\text{ord}_{L_2}(PQ) = \text{ord}_{L_2}(P) + \text{ord}_{L_2}(Q)$, para cualesquiera $P, Q \in \mathcal{R}$.

Para $k \in L_2(\mathbb{Q}^n)$ definimos el conjunto:

$$F_k^{L_2}(\mathcal{R}) = F_k^{L_2} = \{P \in \mathcal{R} \mid \text{ord}_{L_2}(P) \leq k\}.$$

La familia $F_*^{L_2}(\mathcal{R})$ es una filtración creciente del anillo \mathcal{R} ya que:

1. $F_k^{L_2} \subset F_{k'}^{L_2}$, con $k, k' \in L_2(\mathbb{Q}^n)$ y $k < k'$.
2. $F_k^{L_2} F_{k'}^{L_2} \subseteq F_{k+k'}^{L_2}$, con $k, k' \in L_2(\mathbb{Q}^n)$.
3. $\bigcup_{k \in L_2(\mathbb{Q}^n)} F_k^{L_2} = \mathcal{R}$.

Al tener definida una filtración sobre \mathcal{R} podemos definir un anillo graduado asociado a dicha filtración. Notamos:

$$F_{<k}^{L_2}(\mathcal{R}) = \{P \in \mathcal{R} \mid \text{ord}_{L_2}(P) < k\}$$

así los elementos de grado k en el anillo vendrán definidos por:

$$\text{gr}_k^{L_2}(\mathcal{R}) = F_k^{L_2}(\mathcal{R}) / F_{<k}^{L_2}(\mathcal{R}),$$

si la forma lineal L_2 tiene coeficientes (w_1, \dots, w_n) , notaremos a las clases de nuestros generadores:

$$\xi_i = \partial_i + F_{<w_i}^{L_2}, \quad x_i = x_i + F_{<0}^{L_2}$$

y al anillo graduado:

$$\text{gr}^{L_2}(\mathcal{R}) = \bigoplus_{k \in L_2(\mathbb{Q}^n)} \text{gr}_k^{L_2}(\mathcal{R}).$$

Definición I-B.2 ■ A la proyección $\sigma_k^{L_2} : F_k^{L_2}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{gr}_k^{L_2}(\mathcal{R})$ la llamaremos función símbolo de orden k relativamente a L_2 .

Dado un elemento $P \in F_k^{L_2}(\mathcal{R}) \setminus F_{<k}^{L_2}(\mathcal{R})$, definimos el L_2 -símbolo principal de P y lo notaremos $\sigma^{L_2}(P)$, a la proyección de P mediante $\sigma_k^{L_2}$.

Así dado

$$P = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} f_\beta \partial^\beta, \quad \sigma^{L_2}(P) = \sum_{L_2(\beta)=k} f_\beta \xi^\beta.$$

Supongamos que los coeficientes de L_2 son estrictamente positivos. El anillo graduado es conmutativo e isomorfo a:

- $\mathbf{k}[\chi, \xi]$ en el caso de $\mathcal{A}_n(\mathbf{k})$.

- $\mathbf{k}[[x]][[\xi]]$, en el caso de $\widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbf{k})$.
- $\mathbf{k}\{x\}[[\xi]]$, en el caso de $\mathcal{D}_n(\mathbf{k})$,

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{R} , notaremos

$$F_{\bullet}^{L_2}(I) = I \cap F_{\bullet}^{L_2}(\mathcal{R}),$$

a la filtración inducida sobre I y

$$\text{gr}^{L_2}(I) = \bigoplus_{k \in L_2(\mathbb{Q}^n)} F_k^{L_2}(I) / F_{<k}^{L_2}(I)$$

al graduado asociado. Se tienen los siguientes resultados:

Proposición I-B.3 ■ $\text{gr}^{L_2}(I)$ es un ideal de $\text{gr}^{L_2}(\mathcal{R})$.

Proposición I-B.4 ■ $\text{gr}^{L_2}(I) = \text{gr}^{L_2}(\mathcal{R}) \cdot \langle \sigma^{L_2}(P) \mid P \in I \rangle$.

Demostración. Usando la proposición I-B.3 y la definición de $\text{gr}^{L_2}(I)$, la inclusión de derecha a izquierda es inmediata.

Si $P \in \text{gr}^{L_2}(I)$, entonces:

$$P = P_1 + \dots + P_r,$$

con cada P_i homogéneo, por tanto $P_i \in \text{gr}_{k_i}^{L_2}(I) = I \cap F_{k_i}^{L_2} / I \cap F_{<k_i}^{L_2}$. Por lo tanto existen $Q_i \in I$, con $\text{ord}^{L_2}(Q_i) = k_i$ y $\sigma^{L_2}(Q_i) = P_i$. Finalmente $P = \sigma^{L_2}(Q_1) + \dots + \sigma^{L_2}(Q_r)$. ■

En el caso en que trabajemos en \mathcal{A}_n podemos tratar al mismo nivel a las variables x y ∂ . La siguiente definición de orden da lugar a la llamada filtración de Bernstein:

Definición I-B.5 ■ Dado $P = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \in \mathcal{A}_n$, llamaremos L -orden de P , y lo notaremos $\text{ord}_L(P)$ al número racional:

$$\text{ord}_L(P) = \max\{L(\alpha, \beta) \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}.$$

El L -orden nos define una nueva filtración, por ello, podemos definir el anillo graduado $\text{gr}^L(\mathcal{A}_n)$. Además definimos el L -símbolo principal de P como la proyección de P en el anillo graduado $\text{gr}^L(\mathcal{A}_n)$:

$$\sigma^L(P) = \sum_{L(\alpha, \beta) = \text{ord}_L(P)} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \xi^\beta \in \mathbf{k}[x, \xi].$$

Si consideramos I un ideal a izquierda de \mathcal{R} , podemos asociarle un objeto geométrico, la L_2 -variedad característica. Sobre \mathcal{A}_n podemos definir además la L -variedad característica.

Definición I-B.6 ■ Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{R} llamaremos L_2 -variedad característica del \mathcal{R} -módulo \mathcal{R}/I al conjunto:

$$Ch^{L_2}(\mathcal{R}/I) = \{(x, \xi) \in \mathbf{k}^{2n} \mid \sigma^{L_2}(P)(x, \xi) = 0, \text{ para todo } P \in I\}.$$

I-C IRREGULARIDAD Y PENDIENTES

En esta sección recordaremos la noción de punto singular regular, de una ecuación diferencial ordinaria y el concepto de pendiente, que nos permite mediante un objeto combinatorio determinar si un punto singular es regular o irregular. Más adelante veremos cómo se generalizan estos conceptos para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales lineales.

En lo que sigue supondremos que el cuerpo base $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Como vimos anteriormente una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes polinómicos es un operador de \mathcal{A}_1 , (el caso \mathcal{D}_1 es análogo) consideremos la ecuación definida por el operador:

$$P = a_m(x)\partial^m + \dots + a_1(x)\partial + a_0(x), \quad a_m(x) \neq 0.$$

El conjunto de raíces de $a_m(x)$ es el lugar singular de la ecuación que define dicho operador. Sea U un dominio simplemente conexo sobre \mathbb{C} disjunto con el conjunto de puntos singulares. Una función f holomorfa sobre U es solución de P si $P \bullet f = 0$. El teorema de Cauchy de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (ver

[29]§12.22) nos asegura que la dimensión del \mathbb{C} -espacio vectorial de soluciones holomorfas sobre U es m .

Los puntos singulares de una ecuación diferencial ordinaria se distinguen entre puntos singulares regulares y puntos singulares irregulares (ver [29] §7.21), esta distinción determina si las soluciones sobre estos puntos tienen un crecimiento moderado.

Existe una forma muy sencilla de determinar si un punto singular es regular o irregular, es el Teorema de Fuchs (ver [29] §15.3).

Teorema I-C.1 ■ Las siguientes condiciones son equivalentes, en un entorno U del origen suficientemente pequeño:

1. $\text{val}(a_m(x)) - \text{val}(a_i(x)) \leq m - i$ para todo $i = 0, \dots, m$, donde, si $a_i(x) = \sum_{j=r}^{r+t} a_{i,j}x^j$, con $a_{i,r} \neq 0$, entonces $\text{val}(a_i(x)) = r$.
2. (Condición de crecimiento moderado) Existe un N tal que para toda solución f holomorfa sobre el recubrimiento universal de U satisface $|x|^N |f(x)| \rightarrow 0$ cuando x tiende al origen con un ángulo fijo $\theta_0 < \arg(x) < \theta_1$.
3. (Extensión logarítmica de series) Toda solución f holomorfa sobre el recubrimiento universal de U se puede expresar como combinación lineal de funciones de la forma:

$$x^\lambda \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x) (\log(x))^i$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $g_i(x)$ funciones holomorfas sobre U .

Definición I-C.2 ■ Dado $P = \sum_{i=0}^m a_i(x)\partial^i$, con $a_m(x) \neq 0$, y $a_m(0) = 0$, diremos que el punto $0 \in \mathbb{C}$ es un punto singular regular de la ecuación $P \cdot f = 0$ si se verifica alguna de las condiciones equivalentes del teorema I-C.1.

El teorema de Fuchs nos da condiciones equivalentes para que el origen sea un punto singular regular. Precisamente la primera con-

dición del teorema nos da una condición meramente combinatoria que podemos estudiar mediante el polígono de Newton de P :

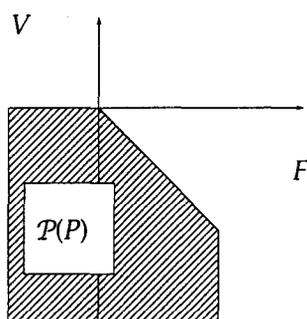
Definición I-C.3 ■ Sea $P \in \mathcal{A}_1$ con $P = \sum_{i=0}^m a_i(x)\partial^i$, definimos el polígono de Newton del operador P , y lo denotaremos $\mathcal{P}(P)$ al conjunto:

$$\mathcal{P}(P) = \Gamma \left(\bigcup_{j=0}^m ((j, j - \text{val}(a_j(x))) + (-\mathbb{N})^2) \right),$$

donde Γ representa la envolvente convexa.

Combinando el Teorema de Fuchs y el concepto que acabamos de definir tenemos que la ecuación diferencial ordinaria definida por el operador P tiene un punto singular irregular en el origen si y sólo si $\mathcal{P}(P)$ tiene alguna pendiente.

Ejemplo I-C.4 ■ Si consideramos el operador $P = x^2\partial + 1$, tendremos que $\mathcal{P}(P)$ es:



Que tiene una pendiente, por lo tanto el origen es un punto singular irregular.

I-D MÁS PENDIENTES

La generalización del concepto de irregularidad a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no es sencillo. Como vimos antes (ver I-A) un sistema se puede identificar con un ideal a izquierda. La noción de módulos regulares holónomos será la generalización de punto

singular regular, este concepto es muy complejo, podemos encontrar reducciones al caso dimensión uno en [7], [9] y [40]. En esta sección notaremos \mathcal{R} a cualquiera de los anillos \mathcal{A}_n , \mathcal{D}_n ó $\widehat{\mathcal{D}}_n$, todos ellos con cuerpo base \mathbb{C} .

Nuestro interés se centra en poder determinar de forma efectiva si un módulo es o no regular en un punto. Es aquí donde tenemos la generalización del concepto de pendiente. El concepto de pendiente para un \mathcal{R} -módulo finitamente generado \mathcal{M} fue introducido por Laurent [31] con el nombre de índice crítico. Laurent considera, en un contexto más general de operadores microdiferenciales, una familia de filtraciones $L_r = pF + qV$, una interpolación entre la filtración por el orden F y la V -filtración de Malgrange-Kashiwara (ver [36] y [30]). Los índices críticos son aquéllos para los que la L_r -variedad característica de \mathcal{M} no es bihomogénea para las filtraciones F y V . Laurent probó que el número de índices críticos es finito, este mismo resultado fue probado por C. Sabbah y F. Castro en [44].

Z. Mebkhout introdujo en [41] la noción de pendiente trascendente de un \mathcal{D} -módulo holónimo \mathcal{M} respecto de una hipersuperficie Y , como el salto en la filtración de Gevrey $\text{Irr}_Y^{(r)}(\mathcal{M})$ del haz irregularidad $\text{Irr}_Y(\mathcal{M})$. Precisamente el haz irregularidad es el complejo de soluciones de \mathcal{M} sobre el cociente Q_Y de las series formales relativamente a Y sobre el haz \mathcal{O} de funciones holomorfas. En una variable compleja x , $\text{Irr}_0(\mathcal{M})$ representa el espacio de las soluciones formales de la ecuación diferencial (i.e. las series formales $f \in \mathbb{C}[[x]]$, $P \bullet f = 0$) que no son convergentes [35]. Finalmente en [32] Laurent y Mebkhout prueban que las pendientes trascendentes de un \mathcal{D} -módulo holónimo son las mismas pendientes que describe Laurent como pendientes algebraicas.

Por lo tanto si somos capaces de encontrar una pendiente algebraica de un módulo respecto de una hipersuperficie, tendremos que dicho módulo es irregular. Ahora describiremos con más detalle las filtraciones que consideraremos, y daremos la definición de pendiente. Las referencias básicas para estos conceptos son [2], [31].

Sea Y la hipersuperficie de \mathbb{C}^n definida por $x_1 = 0$. Consideraremos la forma lineal

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{Q}^2 &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto pa + qb \end{aligned}$$

con $p, q \in \mathbb{N}$ y primos entre sí. Si $L(a, b) = a$, a esta forma la denotaremos F y en el caso $L(a, b) = b$, la denotaremos V . Precisamente por esta notación algunas veces escribiremos, en lugar de L , $L = pF + qV$.

Definición I-D.1 ■ Definimos el L -orden de un operador $P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta$, y lo notaremos $\text{ord}_L(P)$, como

$$\text{ord}_L(P) = \max\{L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(P)\}.$$

Nota I-D.2 ■ En la sección I-B notábamos también L a formas definidas de \mathbb{Q}^{2n} en \mathbb{Q} , las nuevas filtraciones que estamos definiendo con la notación de la sección I-B serían:

$$\hat{L}(\alpha, \beta) = L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = (p + q)|\beta| - q(\beta_2 + \cdots + \beta_n + \alpha_1)$$

en lo sucesivo utilizaremos la notación aquí introducida.

Tenemos definida una filtración $F_\bullet^L(\mathcal{R})$ en \mathcal{R} , por lo que podemos definir un anillo graduado asociado a dicha filtración. Notamos para $k \in \mathbb{Z}$:

$$F_k^L(\mathcal{R}) = F_k^L = \{P \in \mathcal{R} \mid \text{ord}_L(P) \leq k\}$$

los elementos de grado k en el anillo graduado vendrán definidos por:

$$\text{gr}_k^L(\mathcal{R}) = F_k^L / F_{k-1}^L,$$

notaremos a las clases de nuestros generadores:

$$\xi_1 = \partial_1 + F_{p+q-1}^L, \quad x_1 = x_1 + F_{-q-1}^L, \quad \xi_i = \partial_i + F_{p-1}^L, \quad x_i = x_i + F_{-1}^L, \quad i \neq 1.$$

el anillo graduado es:

$$\text{gr}^L(\mathcal{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_k^L(\mathcal{R}).$$

Definición I-D.3 ■ A la proyección $\sigma_k^L : F_k^L(\mathcal{R}) \rightarrow \text{gr}_k^L(\mathcal{R})$ la llamaremos función símbolo de orden k relativamente a L .

Dado un elemento $P \in F_k^L(\mathcal{R}) \setminus F_{k-1}^L(\mathcal{R})$, el L -símbolo principal de P lo notaremos $\sigma^L(P)$, y vendrá dado por:

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \quad \sigma^L(P) = \sum_{L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = k} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \xi^\beta.$$

Por extensión si la forma $L = F$, también llamaremos F a la filtración que define, que en ese caso es la filtración definida por el orden en las parciales ∂_i de los operadores, y de forma análoga para V , que también se denomina filtración de Malgrange-Kashiwara.

Si $L \neq V$ el anillo graduado $\text{gr}^L(\mathcal{R})$ es isomorfo a alguno de los anillos graduados conmutativos siguientes: $\mathbb{C}[x, \xi]$, ó $\mathbb{C}\{x_2, \dots, x_n\}[x_1, \xi]$ ó $\mathbb{C}[[x_2, \dots, x_n]][[x_1, \xi]]$, donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ y el grado del monomio $x^\alpha \xi^\beta$ es $L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1)$.

Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{R} notaremos

$$F_k^L(I) = I \cap F_k^L(\mathcal{R}), \quad \text{gr}^L(I) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_k^L(I) / F_{k-1}^L(I).$$

Definamos qué entendemos por pendiente de un módulo $\mathcal{M} = \mathcal{R}/I$, según [31].

Definición I-D.4 ■ Sea I un ideal a izquierda de \mathcal{R} y sea $L(a, b) = pa + qb$, con $(p, q \in \mathbb{N}$ y primos entre sí) una forma lineal $L \neq F, V$. Diremos que L es una pendiente de $\mathcal{M} = \mathcal{R}/I$ si

$$\sqrt{\text{gr}^L(I)}$$

no es un ideal bihomogéneo respecto de las graduaciones F y V .

Nota I-D.5 ■ Dada una filtración $L = pF + qV$ diremos que tiene pendiente $\frac{-p}{q}$, lo que nos permite ordenar el conjunto de filtraciones definidas respecto de una hipersuperficie, siendo la menor F y la mayor de entre ellas V . En general abusaremos de la notación y hablaremos indistintamente de filtraciones y de las formas lineales que las definen.

Generalicemos también el concepto de polígono de Newton de un operador de \mathcal{R} .

Definición I-D.6 ■ Sea $P \in \mathcal{R}$, llamaremos polígono de Newton de P , y lo denotaremos $\mathcal{P}(P)$:

$$\mathcal{P}(P) = \Gamma \left(\bigcup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(P)} (|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) + (-\mathbb{N})^2 \right)$$

donde Γ representa la envolvente convexa y $\mathcal{N}(P)$ el diagrama de Newton de P (ver I-A.1).

Es inmediato que las definiciones de polígono de Newton $\mathcal{P}(P)$ coinciden en el caso anterior y el anteriormente definido para \mathcal{A}_1 .

Nota I-D.7 ■ Dado un \mathcal{R} -módulo \mathcal{M} finitamente generado, las pendientes de dicho módulo respecto de una hipersuperficie lisa son finitas [31] (ver también [3] y [44]). La gran ventaja que tienen estos invariantes es que se pueden calcular de forma efectiva [2]. En general, la herramienta principal usada en el cálculo de pendientes de un \mathcal{R} -módulo son las bases de Gröbner sobre estos anillos con respecto a órdenes que respeten la L -filtración, donde L es una filtración que va barriendo, de forma ordenada, todas las posibilidades. A este respecto usaremos libremente las nociones y resultados de la teoría de las bases de Gröbner para \mathcal{D} -módulos. En particular usaremos algunos resultados de [9], [10], [11], [12], [13] y [43].

Como antes, podemos definir la L -variedad característica del \mathcal{R} -módulo \mathcal{R}/I .

Definición I-D.8 ■ Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{R} llamaremos L -variedad característica del \mathcal{R} -módulo \mathcal{R}/I al conjunto:

$$Ch^L(\mathcal{R}/I) = \{(x, \xi) \in \mathbf{k}^{2n} \mid \sigma^L(P)(x, \xi) = 0, \text{ para todo } P \in I\}.$$

Dado $\mathcal{M} = \mathcal{R}/I$ un \mathcal{R} -módulo, un resultado clásico (ver [5]) asegura que si $I \neq \mathcal{R}$ se tiene $\dim(Ch^F(\mathcal{M})) \geq n$.

Definición I-D.9 ■ Dado $\mathcal{M} = \mathcal{R}/I$ un \mathcal{R} -módulo, diremos que es holónimo si verifica que o bien es (0) o bien la variedad $Ch^F(\mathcal{M})$ tiene dimensión n .

Cuando estudiamos una variedad característica, para describirla se hace su descomposición como unión de variedades irreducibles. En el caso en que el módulo \mathcal{R}/I sea holónimo, esta descomposición siempre está formada por componentes de dimensión n . Cada una de las componentes son conormales a las proyecciones de estas componentes. Recordamos a continuación la definición de conormal a una variedad lineal.

Notemos $X = \mathbf{k}^n$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) y notemos $T^*X = \mathbf{k}^{2n}$ con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, así mismo tenemos la proyección canónica:

$$\begin{aligned} \pi : \quad T^*X &\longrightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Si consideramos $Y \subset X$ la variedad lineal definida por $(x_1 = x_2 = \dots = x_i = 0)$, entonces $T_Y^*(X)$, es la variedad definida por $(x_1 = x_2 = \dots = x_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0)$

Proposición I-D.10 ■ Si \mathcal{M} es un \mathcal{R} -módulo holónimo y L es una filtración $L \neq V$ entonces

$$Ch^L(\mathcal{M}) = \bigcup_{\alpha} T_{V_{\alpha}}^*(X)$$

donde V_{α} son las proyecciones mediante π de las componentes irreducibles de $Ch^L(\mathcal{M})$ y $T_{V_{\alpha}}^*$ es el conormal a V_{α} en X (ver [20], [31] y

[26]).

Proposición I-D.11 ■ Dados un \mathcal{R} -módulo holónomo \mathcal{R}/I , y una filtración $L \neq F, V$ tales que

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, \dots, x_n\xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(I)}.$$

Entonces L no es pendiente del \mathcal{R} -módulo \mathcal{R}/I .

Demostración. Gracias a las hipótesis, es claro que

$$\begin{aligned} Ch^L(\mathcal{R}/I) \subset T_{x_1=0}^*(X) \cup \dots \cup T_{x_n=0}^*(X) \cup T_{x_1=x_2=0}^*(X) \cup \dots \cup T_{x_{n-1}=x_n=0}^*(X) \cup \\ T_{x_1=x_2=x_3=0}^*(X) \cup \dots \cup T_{x_1=\dots=x_n=0}^*(X). \end{aligned}$$

Por lo que, las componentes en conormales de $Ch^L(\mathcal{R}/I)$ tienen que estar incluidas en alguna de éstas, y todas ellas son bihomogéneas, por lo que L no es pendiente del módulo \mathcal{R}/I . ■

I-E IDEALES INICIALES EN GENERAL

Hasta ahora hemos estudiado filtraciones sobre cualquiera de nuestros anillos, lo que finalmente nos proporcionaba anillos graduados. A partir de esto siempre se pueden definir buenos órdenes que refinan los órdenes que nos inducen dichas filtraciones (siempre que la filtración no sea V).

En general, nos interesa calcular ideales iniciales de ideales a izquierda de \mathcal{R} , para órdenes cualesquiera, que no tienen por qué ser buenos órdenes.

Si tenemos un vector $(u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$ con $u_i + v_i \geq 0$, el orden sobre \mathbb{N}^{2n} que induce este vector (considerándolo vector de peso) no es un buen orden en general, pero la condición $u_i + v_i \geq 0$ nos asegura que respeta la relación de no conmutación del anillo \mathcal{R} . Dado $P \in \mathcal{R}$, con

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta,$$

definimos su orden como

$$\text{ord}_{(u,v)}(P) = \max\{\alpha u + \beta v, |a_{\alpha,\beta} \neq 0\}$$

para que el $\text{ord}_{(u,v)}$ esté siempre definido, necesitamos estar en el álgebra de Weyl. Si $u_i \leq 0$, entonces $\text{ord}_{(u,v)}$ también está definido en \mathcal{D}_n y $\widehat{\mathcal{D}}_n$. Haremos la construcción en el primer caso, aunque si $u_i \leq 0$, se hace de forma análoga.

En el caso en que u_i, v_i sean enteros (para simplificar la notación), $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)$ es el anillo graduado asociado a la filtración

$$F_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) = F_k^{(u,v)} = \{P \in \mathcal{A}_n \mid \text{ord}_{(u,v)}(P) \leq k\}$$

así los elementos de grado k en el anillo vendrán definidos por:

$$\text{gr}_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) = F_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) / F_{k-1}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n),$$

notaremos a las clases de nuestros generadores:

$$\xi_i = \partial_i + F_{v_i-1}^{(u,v)}, \quad u_i + v_i > 0, \quad \partial_i = \partial_i + F_{v_i-1}^{(u,v)}, \quad u_i + v_i = 0, \quad x_i = x_i + F_{u_i-1}^{(u,v)}$$

y al anillo graduado:

$$\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n).$$

El anillo graduado asociado a (u, v) , $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)$, es la \mathbf{k} -álgebra generada por

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\partial_i : u_i + v_i = 0\} \cup \{\xi_i : u_i + v_i > 0\}$$

todas las variables conmutan entre sí salvo la relación $\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$.

Definición I-E.1 ■ A la proyección $\text{in}_{(u,v)}^k : F_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) \rightarrow \text{gr}_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)$ la llamaremos forma inicial de orden k relativamente a (u, v) .

Dado un elemento $P \in F_k^{(u,v)}(\mathcal{A}_n) \setminus F_{k-1}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)$, definimos la forma inicial de P y lo notaremos $\text{in}_{(u,v)}(P)$, a la proyección de P mediante $\text{in}_{(u,v)}$.

Así dado

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta, \quad \text{in}_{(u, v)}(P) = \sum_{\alpha u + \beta v = \text{ord}_{(u, v)}(P)} a_{\alpha, \beta} \prod_{i: u_i + v_i > 0} x_i^{\alpha_i} \xi_i^{\beta_i} \prod_{i: u_i + v_i = 0} x_i^{\alpha_i} \partial_i^{\beta_i}.$$

Definición I-E.2 ■ Dado I un ideal a izquierda de \mathcal{A}_n definimos el ideal inicial de I para el vector $(u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$, con $u_i + v_i \geq 0$, como

$$\text{in}_{(u, v)}(I) = \langle \text{in}_{(u, v)}(P), P \in I \rangle.$$

En general el cálculo de bases de Gröbner que respeten estos órdenes no es inmediato, pero existe una técnica de homogeneización de operadores diferenciales [14] (ver también [43]), que nos permite calcularlas.

A continuación daremos una proposición técnica proveniente de [43], en la que usaremos los conceptos de sucesión regular y complejo de Koszul, que serán definidos más adelante en la sección I-H.

Proposición I-E.3 ■ Sean $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}_n$, $(u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$ con $u_i + v_i > 0$. Si las formas iniciales $\text{in}_{(u, v)}(P_1), \dots, \text{in}_{(u, v)}(P_r)$, forman una sucesión regular en $S = \text{gr}^{(u, v)}(\mathcal{A}_n)$ (como $u_i + v_i > 0$, S es un anillo conmutativo), entonces $\{P_1, \dots, P_r\}$ es una base de Gröbner del ideal $\langle P_1, \dots, P_r \rangle$ con respecto al vector de peso (u, v) .

Demostración. Supongamos que $P \in \langle P_1, \dots, P_r \rangle$, pero no tiene una representación estándar con respecto a $\{P_1, \dots, P_r\}$, es decir:

$$P = Q_1 P_1 + \dots + Q_r P_r$$

de forma que $\max\{\text{ord}_{(u, v)}(Q_i) + \text{ord}_{(u, v)}(P_i), i = 1, \dots, r\} = q$ y $q > \text{ord}_{(u, v)}(P)$, supongamos que sobre el conjunto de expresiones de este tipo q es minimal.

Por lo tanto,

$$\sum_{\text{ord}_{(u, v)}(Q_i) + \text{ord}_{(u, v)}(P_i) = q} \text{in}_{(u, v)}(Q_i) \text{in}_{(u, v)}(P_i) = 0$$

así, el elemento

$$\sum_{\text{ord}_{(u,v)}(Q_i) + \text{ord}_{(u,v)}(P_i) = q} \text{in}_{(u,v)}(Q_i)e_i \in \ker(d_1)$$

donde d_1 es la aplicación del complejo de cadena definido por el complejo de Koszul $K_*(\text{in}_{(u,v)}(P_1), \dots, \text{in}_{(u,v)}(P_r); S)$, usando el teorema I-H.3, tenemos que $\ker(d_1) = \text{Im}(d_2)$, por lo que existen $h_{jk} \in S$ tales que:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{ord}_{(u,v)}(Q_i) + \text{ord}_{(u,v)}(P_i) = q} \text{in}_{(u,v)}(Q_i)e_i &= d_2\left(\sum_{j < k} h_{jk}e_{jk}\right) = \\ &= \sum_{j < k} h_{jk}(\text{in}_{(u,v)}(P_j)e_k - \text{in}_{(u,v)}(P_k)e_j) = \\ &= \sum_i \left(-\sum_{i < j} h_{ij}\text{in}_{(u,v)}(P_j) + \sum_{k < i} h_{ki}\text{in}_{(u,v)}(P_k) \right) e_i. \end{aligned}$$

Así, podemos tomar elementos $\tilde{h}_{ij} \in \mathcal{A}_n$ homogéneos para (u, v) tales que $\text{in}_{(u,v)}(\tilde{h}_{ij}) = h_{ij}$, entonces

$$\text{ord}_{(u,v)}\left(Q_i - \left(-\sum_{i < j} \tilde{h}_{ij}P_j + \sum_{k < i} \tilde{h}_{ki}P_k\right)\right) < \text{ord}_{(u,v)}(Q_i)$$

para aquellos índices i tales que $\text{ord}_{(u,v)}(Q_i) + \text{ord}_{(u,v)}(P_i) = q$. Si ahora sustituimos Q_i por

$$Q_i + \sum_{i < j} \tilde{h}_{ij}P_j - \sum_{k < i} \tilde{h}_{ki}P_k$$

en la expresión inicial, obtenemos una nueva expresión de P que contradice la minimalidad de q . ■

I-F IDEALES TÓRICOS

En esta sección estudiaremos qué entendemos por un ideal tórico. Veremos resultados generales de dichos ideales, la referencia básica para este tema es [45].

Los ideales tóricos son una clase especial de ideales. Sea A una n -upla cualquiera $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in (\mathbb{Z}^d)^n$. Cada vector \mathbf{a}_i podemos identificarlo con el monomio $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$ dentro del anillo de polinomios de Laurent

$\mathbf{k}[\mathbf{t}^{\pm 1}] = \mathbf{k}[t_1, \dots, t_d, t_1^{-1}, \dots, t_d^{-1}]$. Consideremos el homomorfismo de semigrupos:

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{N}^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^d \\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_n \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

El conjunto $\pi(\mathbb{N}^n)$ es el semigrupo:

$$\mathbb{N}A = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}\}.$$

La aplicación π tiene asociado un homomorfismo de álgebras de semigrupos:

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : \mathbf{k}[\partial] &\longrightarrow \mathbf{k}[\mathbf{t}^{\pm 1}] \\ \partial_i &\longmapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{k}[\partial] = \mathbf{k}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ es un anillo de polinomios en las variables $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$.

Definición I-F.1 ■ Sea $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ una n -upla de $(\mathbb{Z}^d)^n$, llamamos ideal tórico asociado a A , y lo denotamos por I_A , al ideal definido por el núcleo del homomorfismo de álgebras de semigrupos $\hat{\pi}$.

En el caso, en que el semigrupo $\mathbb{N}A$ verifique que $(\mathbb{N}A) \cap (-\mathbb{N}A) = 0$ diremos que el semigrupo es reducido (ver [42]). Esta condición equivale a que en el ideal tórico I_A no haya elementos de la forma: $\partial^{\mathbf{u}} - 1$, con $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$.

Lema I-F.2 ■ El ideal tórico I_A está generado como \mathbf{k} -espacio vectorial por el conjunto de binomios:

$$\{\partial^{\mathbf{u}} - \partial^{\mathbf{v}} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n \text{ con } \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})\}.$$

Demostración. Es claro que un binomio $\partial^{\mathbf{u}} - \partial^{\mathbf{v}}$ está en I_A si y sólo si $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})$. Por lo tanto lo que tenemos que probar es que todo polinomio en I_A se puede poner como combinación lineal de binomios.

Sea \prec un orden monomial sobre $\mathbf{k}[\partial]$ (ver capítulo 1 de [45]). Supongamos que $f \in I_A$ y que no se puede escribir como combinación lineal de elementos de la forma anterior. Escojamos de entre los polinomios que verifican esta propiedad, aquel, tal que su forma inicial $\text{in}_{\prec}(f) = \partial^{\mathbf{u}}$ es minimal con respecto a \prec . Evidentemente $f(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) = 0$, en particular, el término $\mathbf{t}^{\pi(\mathbf{u})} = \hat{\pi}(\partial^{\mathbf{u}})$ se cancela en la expresión anterior, es decir, existe otro monomio $\partial^{\mathbf{v}} \prec \partial^{\mathbf{u}}$, tal que $\pi(\mathbf{v}) = \pi(\mathbf{u})$. Si ahora consideramos el polinomio $f' = f - \partial^{\mathbf{u}} + \partial^{\mathbf{v}}$, se tiene $f' \in I_A$, éste no se puede escribir como una combinación de binomios de I_A , y además $\text{in}_{\prec}(f') \prec \text{in}_{\prec}(f)$, lo que contradice la minimalidad de $\text{in}_{\prec}(f)$. ■

A continuación calculamos la dimensión de la variedad tórica $\mathcal{V}(I_A)$. Notaremos por $\mathbb{Q}A$, el subespacio vectorial generado por los elementos de A y $\dim(A)$ a la dimensión de $\mathbb{Q}A$.

Lema I-F.3 ■ La dimensión de Krull del anillo $\mathbf{k}[\partial]/I_A$ es igual a $\dim(A)$.

Demostración. El anillo $\mathbf{k}[\partial]/I_A$ es isomorfo al subanillo $\mathbf{k}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ de $\mathbf{k}[\mathbf{t}^{\pm 1}]$. La dimensión de Krull de este dominio de integridad es el mayor número de monomios $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$ algebraicamente independientes. Pero un conjunto de monomios es algebraicamente independiente si y sólo si sus exponentes son vectores linealmente independientes por el lema I-F.2. ■

Abusaremos de la notación y notaremos, como antes, como π a la extensión de nuestra aplicación, es decir, $\pi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^d$, definida como antes.

Todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ se puede expresar de forma única como $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ con $\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^- \in \mathbb{N}^n$ y con soporte disjunto (entendemos por soporte de un vector al conjunto de índices no nulos de dicho vector). Así:

$$\ker(\pi) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n, \pi(\mathbf{u}^+) = \pi(\mathbf{u}^-)\}.$$

A partir de esto se puede reescribir el lema I-F.2:

Corolario I-F.4 ■

$$I_A = \langle \partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in \ker(\pi) \rangle.$$

Corolario I-F.5 ■ Para todo orden monomial \prec existe un conjunto finito de vectores $\mathcal{G}_\prec \subset \ker(\pi)$ tal que la base de Gröbner reducida de I_A con respecto a \prec es igual a $\{\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in \mathcal{G}_\prec\}$.

Para los conceptos de orden monomial, base de Gröbner en anillos de polinomios, ... ver por ejemplo [21].

Demostración. Por el teorema de la base de Hilbert siempre podemos escoger un conjunto finito de $\ker(\pi)$, tal que sus binomios correspondientes generen I_A . Apliquemos ahora el algoritmo de Buchberger a estos binomios. La operación de reducción mediante el cálculo de S -polinomios respeta la estructura binomial, es decir, cualquier nuevo polinomio obtenido al aplicar el algoritmo cae de nuevo en el conjunto $\{\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in \ker(\pi)\}$. ■

Dentro del ideal tórico y de entre el conjunto de binomios destacaremos un conjunto: los circuitos.

Definición I-F.6 ■ Dado $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$, $\mathbf{u} \neq 0$, diremos que es un circuito si el soporte de \mathbf{u} es minimal respecto de la inclusión y las coordenadas de \mathbf{u} son primas entre sí.

I-G GENERADORES DEL IDEAL TÓRICO

Hemos definido lo que es el ideal tórico asociado a una matriz A , pero aún no tenemos ningún mecanismo que nos proporcione un conjunto finito de generadores de nuestro ideal I_A . Seguiremos teniendo como referencia básica [45].

Recordemos en primer lugar la definición de ideal cociente para un ideal I en el anillo de polinomios $\mathbf{k}[\partial]$ y saturado con respecto a un polinomio f :

$$(I : f) = \{g \in \mathbf{k}[\partial] : fg \in I\}$$

$$(I : f^\infty) = \{g \in \mathbf{k}[\partial] : \text{existe } s \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^s g \in I\}.$$

Por ser $\mathbf{k}[\partial]$ noetheriano, sabemos que existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que $(I : f^\infty) = (I : f^s)$. Además estos ideales serán binomiales si I es binomial y f es un monomio (ver [23]).

Dado $C \subset \ker(\pi)$, notamos:

$$J_C = \langle \partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in C \rangle.$$

Lema I-G.1 ■ Un subconjunto C genera $\ker(\pi)$ como \mathbb{Z} -módulo si y sólo si

$$(J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty) = I_A.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $C = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$ genera $\ker(\pi)$ como \mathbb{Z} -módulo, probaremos por doble inclusión

$$(J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty) = I_A.$$

Sea $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$, con $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$. Puesto que suponemos que C genera $\ker(\pi)$ como \mathbb{Z} -módulo, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{u}_i$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial^{\mathbf{u}^+}}{\partial^{\mathbf{u}^-}} - 1 = \prod_{i=1}^s \left(\frac{\partial^{\mathbf{u}_i^+}}{\partial^{\mathbf{u}_i^-}} \right)^{\alpha_i} - 1.$$

Sin pérdida de generalidad podemos siempre suponer que $\alpha_i \geq 0$, cambiando, si hace falta, \mathbf{u}_i por el generador $-\mathbf{u}_i$.

Reduciendo los denominadores, llegamos a que existe un cierto monomio ∂^β tal que

$$\partial^\beta (\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-}) = \partial^{\mathbf{u}^-} \left(\partial^{\sum \alpha_i \mathbf{u}_i^+} - \partial^{\sum \alpha_i \mathbf{u}_i^-} \right).$$

Nos basta ver que $\partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^+ - \partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^- \in J_C$, para obtener $I_A \subset (J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty)$.

Si suponemos que $\alpha_1 > 0$, podemos considerar

$$\partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^+ - \partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^- = \partial^{(\alpha_1-1)\mathbf{u}_1^+ + \sum_{i=2}^s \alpha_i \mathbf{u}_i^+} \partial \mathbf{u}_1^+ - \partial^{(\alpha_1-1)\mathbf{u}_1^- + \sum_{i=2}^s \alpha_i \mathbf{u}_i^-} \partial \mathbf{u}_1^-.$$

Para simplificar la notación tomemos $w_1^1 = (\alpha_1 - 1)\mathbf{u}_1^+ + \sum_{i=2}^s \alpha_i \mathbf{u}_i^+$ y $w_1^2 = (\alpha_1 - 1)\mathbf{u}_1^- + \sum_{i=2}^s \alpha_i \mathbf{u}_i^-$. Así:

$$\begin{aligned} \partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^+ - \partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^- &= \partial^{w_1^1} \partial \mathbf{u}_1^+ - \partial^{w_1^2} \partial \mathbf{u}_1^- \\ &= \partial^{w_1^1} \partial \mathbf{u}_1^+ - \partial^{w_1^1} \partial \mathbf{u}_1^- + \partial^{w_1^1} \partial \mathbf{u}_1^- - \partial^{w_1^2} \partial \mathbf{u}_1^- \\ &= \partial^{w_1^1} (\partial \mathbf{u}_1^+ - \partial \mathbf{u}_1^-) + \partial \mathbf{u}_1^- (\partial^{w_1^1} - \partial^{w_1^2}). \end{aligned}$$

Evidentemente $\partial \mathbf{u}_1^+ - \partial \mathbf{u}_1^- \in J_C$, así, repitiendo el proceso para $\partial^{w_1^1} \partial \mathbf{u}_1^+ - \partial^{w_1^2} \partial \mathbf{u}_1^-$, en los diferentes α_i hasta hacerlos cero, obtenemos $\partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^+ - \partial \sum \alpha_i \mathbf{u}_i^- \in J_C$.

La otra inclusión es trivial, ya que todos los binomios de J_C están en I_A y haciendo cocientes siguen estándolo.

Supongamos ahora que

$$(J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty) = I_A,$$

sea $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$, entonces existirá un cierto β tal que,

$$\partial^\beta (\partial \mathbf{u}^+ - \partial \mathbf{u}^-) \in J_C.$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} = \beta + \mathbf{u}^+ - \beta - \mathbf{u}^- \in \langle C \rangle$, y así C genera $\ker(\pi)$. ■

Nota I-G.2 ■ Sea $C \subset \ker(\pi)$ tal que genere $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Si consideramos J_C , claramente,

$$J_C \subset I_A \Rightarrow \tilde{I}_A := (J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty) \subset I_A$$

Podemos afirmar bastante más, para todo $\partial \mathbf{u}^+ - \partial \mathbf{u}^- \in I_A$, existe $\mathbf{v} \in \ker(\pi)$, tal que $\partial \mathbf{v}^+ - \partial \mathbf{v}^- \in \tilde{I}_A$, y $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$ con $a \in \mathbb{N}$.

Es decir, cuando consideremos este saturado, estaremos obteniendo un nuevo ideal, a partir del cual se pueden obtener todos los binomios de I_A tomando las componentes primas entre sí.

Nota I-G.3 ■ Si el ideal tórico I_A viene definido a partir de un semigrupo no reducido, y tenemos un conjunto de generadores del semigrupo, como \mathbb{Z} -módulo C , en este caso, no necesitamos saturar. Puesto que esta condición equivale a que en el tórico tenemos elementos de la forma $\partial^u - 1$, con $u \in \mathbb{N}^n$, entonces este elemento nos asegura que todas las variables ∂_i son invertibles módulo J_C . Este resultado es el lema 12.4 de [45].

■ I-G.1 Ideales tóricos homogéneos

Dentro del conjunto formado por los ideales tóricos destacaremos un subconjunto, se trata de aquellos ideales que provienen de n -uplas A que tiene todas sus componentes positivas o nulas. En este caso, los ideales tóricos así definidos son ideales homogéneos para una graduación positiva en todas las variables. Para obtener el vector de peso que hace que nuestro ideal sea homogéneo, nos basta con tomar, para la variable ∂_j , peso $\sum_{i=1}^d a_{ij}$, es decir, sumando las coordenadas del vector \mathbf{a}_j .

En este caso especial tenemos algunos resultados que nos permiten calcular unos generadores del ideal tórico de forma mucho más sencilla. Enunciemos el lema 12.1 de [45]:

Lema I-G.4 ■ Fijado el orden graduado inverso lexicográfico (para la graduación que hace homogéneo al ideal) tal que $\partial_1 > \dots > \partial_n$, sea \mathcal{G} una base de Gröbner reducida de un ideal homogéneo para una graduación positiva en todas las variables $J \subset \mathbf{k}[\partial_1, \dots, \partial_n]$. Entonces el conjunto:

$$\mathcal{G}' = \{f \in \mathcal{G} : \partial_n \text{ no divide a } f\} \cup \{f/\partial_n : f \in \mathcal{G} \text{ y } \partial_n \text{ divide a } f\}$$

es una base de Gröbner de $(J : \partial_n)$.

Una base de Gröbner de $(J : \partial_n^\infty)$ se obtiene dividiendo cada elemento $f \in \mathcal{G}$ por la mayor potencia de ∂_n que divide a f .

El orden monomial usado en el lema anterior tiene sentido cuando el ideal es homogéneo respecto de una graduación positiva. Iterando el proceso n veces respecto de diferentes órdenes graduados lexicográficos inversos podemos calcular:

$$J : (\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n)^\infty = ((\cdots (J : \partial_1^\infty) : \partial_2^\infty) \cdots) : \partial_n^\infty.$$

I-H COMPLEJO DE KOSZUL Y SISTEMAS HIPERGEOMÉTRICOS

Comenzaremos esta sección recordando la definición del complejo de Koszul sobre un anillo conmutativo graduado para un ideal homogéneo y un conjunto de polinomios homogéneos de grados positivos. También vamos a definir en esta sección qué es un sistema hipergeométrico y estudiaremos una condición que nos servirá para calcular ideales iniciales de sistemas hipergeométricos al relacionarlos con un complejo de Koszul.

Antes de definir el complejo de Koszul recordemos qué entendemos por sucesión regular en un anillo conmutativo.

Definición I-H.1 ■ Sea S un anillo conmutativo, M un S -módulo y a_1, \dots, a_r una familia de elementos de S , diremos que a_1, \dots, a_r forman una M -sucesión regular si se verifican:

1. $\forall 1 \leq i \leq r, a_i$ no es un divisor de cero en $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$.
2. $M \neq (a_1, \dots, a_r)M$.

Nota I-H.2 ■ Si tomamos S como S -módulo, simplemente diremos que a_1, \dots, a_r forman una sucesión regular.

■ I-H.1 Complejo de Koszul

Trataremos en esta parte un concepto clásico, el complejo de Koszul, la referencia clásica es [37], esta aplicación es de [43].

Sea S un anillo conmutativo graduado, I un ideal homogéneo y $h_1, \dots, h_r \in S$ polinomios homogéneos de grados positivos. Definimos el complejo de Koszul, que notamos $K_*(h_1, \dots, h_r; S/I)$ como el complejo de S/I -módulos libres:

$$0 \rightarrow K_r(h_1, \dots, h_r; S/I) \xrightarrow{d_r} \dots \xrightarrow{d_2} K_1(h_1, \dots, h_r; S/I) \xrightarrow{d_1} K_0(h_1, \dots, h_r; S/I) \rightarrow 0$$

donde

$$K_p(h_1, \dots, h_r; S/I) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} (S/I)e_{i_1, \dots, i_p} \approx (S/I)^{\binom{r}{p}}$$

definimos d_p en función de la base, como

$$d_p(e_{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \overline{h_{i_k}} e_{i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_p},$$

donde $\overline{h_{i_k}}$ denota la clase del elemento h_{i_k} en el anillo S/I .

Así, por ejemplo, se tiene que

$$d_1\left(\sum_{i=1}^r g_i e_i\right) = \sum_{i=1}^r g_i \overline{h_i}.$$

Denotamos el p -ésimo grupo de homología del complejo de Koszul como $H_p(h_1, \dots, h_r; S/I)$. El primer grupo de homología del complejo de Koszul, $H_1(h_1, \dots, h_r; S/I) = \ker(d_1)/\text{im}(d_2)$, juega un papel singular, como lo muestra el siguiente teorema [37]:

Teorema I-H.3 ■ Si $\overline{h_1}, \dots, \overline{h_r}$ forman una sucesión regular en el anillo cociente S/I , entonces $H_p(h_1, \dots, h_r; S/I) = 0$ para todo $p > 0$ y $H_0(h_1, \dots, h_r; S/I) = S/(I + \langle h_1, \dots, h_r \rangle)$. Recíprocamente si $H_1(h_1, \dots, h_r; S/I) = 0$, entonces $\overline{h_1}, \dots, \overline{h_r}$ forman una sucesión regular en S/I .

Finalizaremos esta sección dando un resultado que más adelante nos será de gran utilidad proveniente de [8].

Teorema I-H.4 ■ Sea $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ un anillo graduado Cohen-Macaulay con S_0 un cuerpo, de dimensión de Krull $\dim(S) = n$ y sean a_1, \dots, a_n elementos de grado estrictamente positivos tales que

$$\sqrt{(a_1, \dots, a_n)} = \bigoplus_{i > 0} S_i.$$

Entonces a_1, \dots, a_n es una sucesión regular en S .

Para poder caracterizar los anillos Cohen-Macaulay usaremos el siguiente resultado que se pueden encontrar en [22], en esta misma referencia podemos encontrar las definiciones básicas de álgebra conmutativa (Cohen-Macaulay, profundidad, codimensión,...) utilizadas aquí.

Proposición I-H.5 ■ Sea S un anillo Cohen-Macaulay. Si $I = (f_1, \dots, f_n)$ es un ideal generado por n elementos en un anillo Cohen-Macaulay tal que $\text{codim}(I) = n$, entonces R/I es un anillo Cohen-Macaulay.

Dado un anillo R Cohen-Macaulay, R/I es Cohen-Macaulay si y sólo si $\text{prof}(I) = \text{codim}(I)$, en este caso se dice que I es perfecto. El siguiente resultado de [27] nos proporciona un criterio para determinar si la intersección de ideales perfectos es perfecto.

Proposición I-H.6 ■ Sean P, Q ideales perfectos de un anillo S tales que $\text{codim}(P) = \text{codim}(Q) = n$ y además $P \not\subseteq Q$ y $Q \not\subseteq P$.

- Si $P + Q$ es perfecto y $\text{codim}(P + Q) \leq n + 1$ entonces $P \cap Q$ es perfecto y $\text{codim}(P \cap Q) = n$.
- Si $\text{codim}(P + Q) = n + 1$, entonces $P + Q$ es perfecto si y sólo si $P \cap Q$ es perfecto.

■ I-H.2 Sistemas Hipergeométricos

En esta sección volvemos a tener elementos en anillos no conmutativos, concretamente, a partir de ahora, consideraremos el álgebra de Weyl, $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, para simplificar la notación escribiremos \mathcal{A}_n . La referencia básica de esta sección es [43].

Definición I-H.7 ■ Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de enteros de dimensiones $d \times n$ con rango d , y sea $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{C}^d$, llamamos sistema hipergeométrico (o sistema de Gel'fand, Kapranov y Zelevinski) al sistema definido por el ideal a izquierda

$$H_A(\beta) = I_A + \langle a_{11}x_1\partial_1 + \dots + a_{1n}x_n\partial_n - \beta_1, \dots, a_{d1}x_1\partial_1 + \dots + a_{dn}x_n\partial_n - \beta_d \rangle.$$

$$a_{21}x_1\partial_1 + \dots + a_{2n}x_n\partial_n - \beta_2, \dots, a_{d1}x_1\partial_1 + \dots + a_{dn}x_n\partial_n - \beta_d \rangle.$$

Para simplificar la notación, escribiremos $\theta_i = x_i\partial_i$ y notaremos por $A\theta - \beta$ al ideal a izquierda generado por las filas de A :

$$A\theta - \beta = \langle a_{11}\theta_1 + \dots + a_{1n}\theta_n - \beta_1, \dots, a_{d1}\theta_1 + \dots + a_{dn}\theta_n - \beta_d \rangle$$

$$a_{21}\theta_1 + \dots + a_{2n}\theta_n - \beta_2, \dots, a_{d1}\theta_1 + \dots + a_{dn}\theta_n - \beta_d \rangle$$

y al operador proveniente de la fila i -ésima, lo notaremos:

$$(A\theta - \beta)_i = a_{i1}\theta_1 + \dots + a_{in}\theta_n - \beta_i.$$

El ideal a izquierda $H_A(\beta)$ nos define también un módulo que denotaremos $\mathcal{H}_A(\beta)$:

$$\mathcal{H}_A(\beta) = \mathcal{A}_n / H_A(\beta).$$

Nota I-H.8 ■ Dadas dos matrices A, A' $d \times n$, tales que existe una matriz invertible $Q \in GL_d(\mathbb{Q})$, que verifica $A' = QA$, entonces $I_A = I_{A'}$ y por lo tanto $H_A(\beta) = H_{A'}(Q\beta)$.

Por lo tanto, podemos considerar matrices más sencillas, cambiando después las correspondientes β . Concretamente, al poder mul-

tiplicar a izquierda por matrices invertibles sobre \mathbb{Q} podemos considerar la forma reducida por filas de A , es decir, una matriz con d posiciones pivotaes (una posición pivotal es el único elemento no nulo en su columna).

Además el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$, es holónimo, este resultado, podemos encontrarlo en [24] y en [1] para el caso general.

Nuestro interés se centra en el cálculo de los ideales iniciales de $H_A(\beta)$, para unos ciertos vectores $(u, v) \in \mathbb{Q}^{2n}$, tales que $u_i + v_i > 0$. Intentaremos relacionar $\text{in}_{(u,v)}(H_A(\beta))$, con otro ideal más sencillo, que llamaremos el *falso ideal inicial* (siguiendo la notación de [43]).

Definición I-H.9 ■ Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de enteros de dimensiones $d \times n$ con rango d , y sea $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{C}^d$, llamamos falso ideal inicial del sistema hipergeométrico al ideal a izquierda

$$\begin{aligned} \text{fin}_{(u,v)}(H_A(\beta)) = & \langle \text{in}_v(I_A), \text{in}_{(u,v)}(a_{11}\theta_1 + \dots + a_{1n}\theta_n - \beta_1), \\ & \dots, \text{in}_{(u,v)}(a_{d1}\theta_1 + \dots + a_{dn}\theta_n - \beta_d) \rangle. \end{aligned}$$

Consideramos el álgebra $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)/\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)\text{in}_v(I_A)$, donde por $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)\text{in}_v(I_A)$, entendemos el ideal extendido de $\text{in}_v(I_A)$ sobre el anillo graduado, que por la condición $u + v > 0$, es conmutativo. Tenemos la siguiente sucesión exacta de módulos sobre este álgebra:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^d \left(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)/\text{in}_v(I_A) \right) \cdot e_i \xrightarrow{\bar{d}_i} \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)/\text{in}_v(I_A) \rightarrow \\ \rightarrow \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)/\text{fin}_{(u,v)}(H_A(\beta)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con

$$\bar{d}_i \left(\sum_{j=1}^d P_j e_j \right) = \sum_{j=1}^d P_j \text{in}_{(u,v)}(a_{j1}\theta_1 + \dots + a_{jn}\theta_n - \beta_j).$$

Sabemos por la teoría de anillos graduados e ideales iniciales que

$$\text{gr}^{(u,v)}(I_A) = \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)\text{in}_v(I_A),$$

así la sucesión exacta anterior la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^d \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) e_i \xrightarrow{\bar{d}_1} \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) \rightarrow \\ \rightarrow \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n)/\text{fin}_{(u,v)}(H_A(\beta)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\text{in}_{(u,v)}(a_{j1}\theta_1 + \dots + a_{jn}\theta_n - \beta_j)e_i - \text{in}_{(u,v)}(a_{i1}\theta_1 + \dots + a_{in}\theta_n - \beta_i)e_j$$

está en $\ker(\bar{d}_1)$, podemos extender la sucesión exacta mediante el siguiente complejo de Koszul, que notaremos $K_\bullet^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A))$:

$$\dots \xrightarrow{\bar{d}_2} K_1^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)) \xrightarrow{\bar{d}_1} K_0^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)) \rightarrow 0$$

donde

$$K_p^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d} \text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) e_{i_1, \dots, i_p}$$

y

$$\bar{d}_p(e_{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{r=1}^p (-1)^{r-1} \text{in}_{(u,v)}((A\theta - \beta)_{i_r}) e_{i_1, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_p}$$

Puesto que $u + v > 0$ este complejo de Koszul es sobre un anillo graduado conmutativo y está bien definido ya que todos los elementos son homogéneos respecto del vector de peso (u, v) .

También podemos definir un complejo de Koszul sobre un anillo no conmutativo, a este lo denotaremos $K_\bullet^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)$:

$$\dots \rightarrow K_2^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) \xrightarrow{d_2} K_1^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) \xrightarrow{d_1} K_0^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) \rightarrow 0.$$

donde

$$K_p^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d} \mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A e_{i_1, \dots, i_p}$$

y

$$d_p(e_{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{r=1}^p (-1)^{r-1} (A\theta - \beta)_{i_r} e_{i_1, \dots, \hat{i}_r, \dots, i_p}$$

Definamos a continuación una filtración $\{F_q^{(u,v)} K_\bullet^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)\}$ en el complejo $K_\bullet^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)$, mediante:

$$F_q^{(u,v)} K_\bullet^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d} F_{q - \sum_{k=1}^p c_{i_k}}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A) e_{i_1, \dots, i_p}$$

donde $c_i = \text{ord}_{(u,v)}((A\theta - \beta)_i)$. Claramente se tiene que:

$$K_\bullet^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A)) = \text{gr}^{(u,v)} K_\bullet^\beta(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A).$$

Con todo lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema de [43]:

Teorema I-H.10 ■ Si $H_1(K_\bullet^\beta(\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_n I_A))) = 0$ entonces:

$$\text{in}_{(u,v)}(H_A(\beta)) = \text{fin}_{(u,v)}(H_A(\beta))$$

Nota I-H.11 ■ En general, nos interesa el cálculo de pendientes de los módulos $\mathcal{H}_A(\beta)$, por lo que para simplificar la notación, si tenemos una filtración $L = pF + qV_i$, notaremos

$$\text{fin}_L(H_A(\beta)) = \text{fin}_{(p, \dots, \{p+q\}_i, \dots, p, 0, \dots, \{-q\}_{n+i}, \dots, 0)}(H_A(\beta))$$

$$\text{in}_L(I_A) = \text{in}_{(p, \dots, \{p+q\}_i, \dots, p)}(I_A)$$

A continuación enunciamos un teorema de Hotta [28], que nos da la regularidad de nuestro sistema.

Teorema I-H.12 ■ Sea $A \in \mathbb{Z}^{dn}$ con $\text{rango}(A) = d$. Si el vector $(1, \dots, 1)$ está en el \mathbb{Q} -espacio vectorial definido por las filas de A , entonces $H_A(\beta)$ es holónimo regular para todo $\beta \in \mathbb{C}^d$.

CAPÍTULO II

Sistemas hipergeométricos con codimensión uno

En este capítulo trataremos el caso de un sistema hipergeométrico definido por una matriz $(n - 1) \times n$ de rango $n - 1$. En primer lugar, supondremos que todos los menores $(n - 1) \times (n - 1)$ son distintos de cero y que el ideal tórico proviene de un semigrupo reducido, a continuación veremos que siempre que el semigrupo sea reducido podemos incluir nuestro caso en uno del tipo anterior. También estudiaremos las pendientes de sistemas provenientes de ideales tóricos que provengan de semigrupos no reducidos, en este caso las pendientes estarán en el infinito.

II-A SISTEMAS HIPERGEOMÉTRICOS ESPECIALES

Sea A una matriz $(n - 1) \times n$ de enteros con rango $n - 1$ y tal que todos los menores $(n - 1) \times (n - 1)$ son distintos de cero. Además supondremos que el ideal tórico definido por A proviene de un semigrupo reducido,

es decir, no existen en I_A elementos de la forma $\partial^u - 1$ (o lo que es equivalente no existen elementos en $\ker(\pi)$ con todas las componentes positivas).

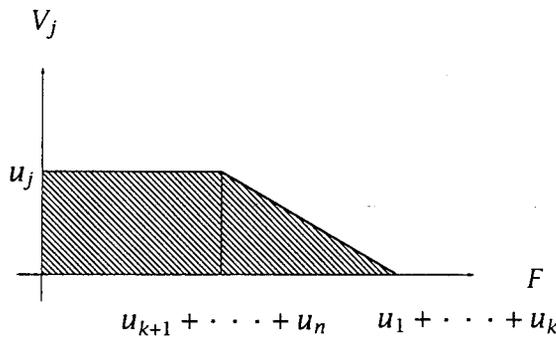
El sistema hipergeométrico en \mathcal{A}_n que vamos a considerar será irregular, es decir, el vector $(1, \dots, 1)$ no está en el \mathbb{Q} -espacio vectorial definido por las filas de A . Puesto que el núcleo definido por las columnas de A tiene dimensión uno, el ideal tórico I_A es principal. Por la condición de irregularidad que estamos suponiendo el generador no puede ser homogéneo para la graduación usual, por lo tanto renombrando las variables siempre podemos suponer que este elemento es de la forma $P = \partial_1^{u_1} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}$, con $u_1 + \cdots + u_k > u_{k+1} + \cdots + u_n$.

El generador del ideal tórico define mediante $\mathcal{P}(P)$ la pendiente:

$$S_j = \frac{u_j}{u_{k+1} + \cdots + u_n - u_1 - \cdots - u_k}$$

respecto de las variables $x_j = 0$, cuando $j = k + 1, \dots, n$ y no tiene pendientes para el resto de las variables.

El diagrama de Newton de P respecto de V_j nos queda:



Proposición II-A.1 ■ Sea A una matriz de enteros $(n-1) \times n$ con todos los menores $(n-1) \times (n-1)$ distintos de cero, y con el ideal tórico I_A generado por $P = \partial_1^{u_1} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}$, con $u_1 + \cdots + u_k > u_{k+1} + \cdots + u_n$. Las únicas pendientes que puede tener $\mathcal{H}_A(\beta)$ son las definidas por el generador.

Demostración. Sea L una filtración cualquiera distinta de la de pendiente:

$$S_j = \frac{u_j}{u_{k+1} + \dots + u_n - u_1 - \dots - u_k}$$

respecto de las variables $x_j = 0$, cuando $j = k + 1, \dots, n$. Distinguiremos dos casos según $\sigma^L(P)$ sea:

$$\sigma^L(P) = \xi_1^{u_1} \dots \xi_k^{u_k}, \quad \text{ó} \quad \sigma^L(P) = -\xi_{k+1}^{u_{k+1}} \dots \xi_n^{u_n}.$$

Supongamos primero que $\sigma^L(P) = \xi_1^{u_1} \dots \xi_k^{u_k}$, se tiene

$$\xi_1 \dots \xi_k \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Tomemos una forma reducida por filas de A de forma que las posiciones pivotaes las ocupen las variables x_2, \dots, x_n , así:

$$\langle a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, a_3 x_3 \xi_3 + b_3 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1 \rangle \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Para ver que L no es pendiente de $H_A(\beta)$, usando la proposición I-D.11, nos basta ver:

$$\langle x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, \dots, x_n \xi_n \rangle \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Consideremos la siguiente sucesión de elementos en $\sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$:

$$\begin{aligned} P_2 &= -a_2 x_2 \xi_1 \dots \xi_k + \xi_1 \xi_3 \dots \xi_k (a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1) \\ &= b_2 x_1 \xi_1^2 \xi_3 \dots \xi_k \\ P_3 &= -a_3 x_3 b_2 x_1 \xi_1^2 \xi_3 \dots \xi_k + b_2 x_1 \xi_1^2 \xi_4 \dots \xi_k (a_3 x_3 \xi_3 + b_3 x_1 \xi_1) \\ &= b_2 b_3 x_1^2 \xi_1^3 \xi_4 \dots \xi_k \\ &\vdots \\ P_{k-1} &= b_2 \dots b_{k-1} x_1^{k-2} \xi_1^{k-1} \xi_k \\ P_k &= -a_k x_k P_{k-1} + b_2 \dots b_{k-1} x_1^{k-2} \xi_1^{k-1} (a_k x_k \xi_k + b_k x_1 \xi_1) \\ &= b_2 \dots b_k x_1^{k-1} \xi_1^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_1 \xi_1 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, usando la forma de nuestros elementos en la forma reducida:

$$\langle x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, \dots, x_n \xi_n \rangle \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

En segundo lugar podría ocurrir que

$$\sigma^L(P) = \xi_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \xi_n^{u_n},$$

en este caso la prueba es análoga, sólo que tomaremos la forma reducida de A con pivotes en las posiciones $x_1, \dots, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n$. ■

Hemos obtenido que sólo puede haber pendientes con respecto a las variables x_{k+1}, \dots, x_n , y para cada una de estas variables tan sólo puede haber una pendiente, veamos que éstas son realmente pendientes de $\mathcal{H}_A(\beta)$.

Teorema II-A.2 ■ Sea A una matriz de enteros $(n-1) \times n$ con todos los menores $(n-1) \times (n-1)$ distintos de cero, y con el ideal tórico I_A generado por $P = \partial_1^{u_1} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}$, con $u_1 + \cdots + u_k > u_{k+1} + \cdots + u_n$. La filtración $L_j = u_j F + (u_1 + \cdots + u_k - u_{k+1} - \cdots - u_n)V$ respecto de $x_j = 0$ con $j > k$ es pendiente de $\mathcal{H}_A(\beta)$.

Demostración. Ya sabemos que no hay pendientes respecto de las k primeras variables.

Puesto que, para el resto de las variables, tan sólo tenemos una pendiente como máximo por variable, supongamos que para $x_{k+1} = 0$ no hubiese pendiente. Entonces, la L -variedad característica $Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta))$ debe ser invariante (gracias a [3] y [31]), para toda L filtración respecto de la variable $x_{k+1} = 0$.

Consideremos el conjunto de elementos:

$$\{\partial_1^{u_1} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}, a_2 x_2 \partial_2 + b_2 x_1 \partial_1 - \beta_1, \dots, a_n x_n \partial_n + b_n x_1 \partial_1 - \beta_{n-1}\}$$

que generan $H_A(\beta)$, si consideremos sus F -símbolos principales obtenemos:

$$\{\xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1\}.$$

Veamos que este conjunto forma una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$, ya que en ese caso, usando la proposición I-E.3, generarán $\text{gr}^F(H_A(\beta))$.

Si logramos probar que la extensión de estos elementos forman una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]$, tendremos que también forman una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x, \xi]$.

Por lo tanto, consideremos el conjunto de elementos:

$$\{\xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1\},$$

en el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Si consideramos la graduación usual en este anillo, i.e. graduado en las ξ_i , nuestros elementos son todos homogéneos y son n elementos en un anillo Cohen-Macaulay que tiene dimensión n , por lo tanto si probamos que

$$\sqrt{\xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1} = \mathfrak{m}$$

donde \mathfrak{m} representa el ideal maximal en el anillo graduado $\mathbb{C}(x)[\xi]$, tendremos el resultado buscado gracias a I-H.4.

Pero ya vimos en la demostración de la proposición II-A.1 que:

$$\mathfrak{m} = \{x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1}$$

por lo tanto, nuestros elementos forman una sucesión regular, y así:

$$\langle \xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1 \rangle = \text{gr}^F(H_A(\beta)).$$

Claramente:

$$\begin{aligned} \langle \xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1 \rangle &\subset \\ &\subset \langle \xi_1 \cdots \xi_k, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n \rangle, \end{aligned}$$

usando de nuevo la prueba de la proposición II-A.1:

$$\begin{aligned} &\langle \xi_1 \cdots \xi_k, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n \rangle \subset \\ &\subset \sqrt{\xi_1^{u_1} \cdots \xi_k^{u_k}, a_2 x_2 \xi_2 + b_2 x_1 \xi_1, \dots, a_n x_n \xi_n + b_n x_1 \xi_1} \subset \\ &\subset \langle \xi_1 \cdots \xi_k, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\text{Ch}^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \cdots \xi_k, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n).$$

Consideremos ahora la L -variedad característica para una filtración L tal que $L > L_{k+1}$. Consideremos el siguiente conjunto de generadores de $H_A(\beta)$:

$$\{\partial_1^{u_1} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}, a'_1 x_1 \partial_1 + b'_1 x_{k+1} \partial_{k+1} - \beta'_1, \dots \\ \dots, a'_{n-1} x_n \partial_n + b'_{n-1} x_{k+1} \partial_{k+1} - \beta'_{n-1}\}$$

cuyos L -símbolos principales son:

$$\{\xi_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \xi_n^{u_n}, a'_1 x_1 \xi_1 + b'_1 x_{k+1} \xi_{k+1}, \dots, a'_{n-1} x_n \xi_n + b'_{n-1} x_{k+1} \xi_{k+1}\}.$$

Igual que antes podemos probar que estos elementos forman una sucesión regular en el anillo graduado $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]$, y por tanto generan $\text{gr}^L(H_A(\beta))$.

Con un razonamiento análogo al anterior obtenemos que:

$$\mathcal{V}(\xi_{k+1} \cdots \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n) = \text{Ch}^L(\mathcal{H}_A(\beta)).$$

Claramente las variedades características cambian, es fácil ver que la componente:

$$T_{\{x_1 = \dots = x_k = 0\}}^*(X) \notin \text{Ch}^F(\mathcal{H}_A(\beta)).$$

■

II-B CASO GENERAL EN CODIMENSIÓN UNO

Sea ahora A una matriz $(n-1) \times n$ de enteros con rango $n-1$ y tal que el ideal tórico proviene de un semigrupo reducido, escribamos nuestra matriz de forma que las primeras $n-1$ columnas tengan rango maximal, y tomemos la forma reducida por filas de A . En el caso en que exista un menor $(n-1) \times (n-1)$ que valga cero, por la forma en que hemos tomado nuestra matriz, este menor tiene forzosamente que contener la columna n -ésima. Llamemos j a la columna que no forma parte de nuestro menor, puesto que el resto de las columnas implicadas tienen

todas las posiciones iguales a cero salvo una, desarrollando nuestro menor obtenemos que el elemento j -ésimo de la columna n -ésima tiene que valer cero.

De esta forma, es claro que si $\mathbf{u} \in \ker \pi$ y tenemos un menor $(n-1) \times (n-1)$ que vale cero, con las primeras $n-1$ columnas de A con rango maximal, entonces $u_j = 0$ donde j es la columna que falta en el menor nulo. Renombremos nuestras variables, de forma que las s primeras sean aquellas que no forman parte del generador del ideal tórico, así:

$$H_A(\beta) = \langle \partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}, a_1 x_1 \partial_1 - \beta_1, \dots, a_s x_s \partial_s - \beta_s, \\ a_{s+1} x_{s+1} \partial_{s+1} + b_{s+1} x_n \partial_n - \beta_{s+1}, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \partial_{n-1} + b_{n-1} x_n \partial_n - \beta_{n-1} \rangle$$

Teorema II-B.1 ■ Sea A una matriz $(n-1) \times n$ de enteros, tal que el ideal tórico proviene de un semigrupo reducido. Ordenemos las variables de forma que el generador del ideal tórico se escriba: $\partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}$ con $u_{s+1} + \cdots + u_k > u_{k+1} + \cdots + u_n$. Entonces $\mathcal{H}_A(\beta)$ sólo tiene las pendientes definidas por las filtraciones $L_j = u_j F + (u_{s+1} + \cdots + u_k - u_{k-1} - \cdots - u_n) V_j$ con $j > k$.

Demostración. En primer lugar debemos ver que éstas son las únicas posibles pendientes que puede tener nuestro módulo. Sea L una filtración distinta de las descritas y tal que:

$$\sigma^L(\partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}) = \xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_k^{u_k}.$$

Ya vimos en la prueba de la proposición II-A.1 que

$$\langle x_{s+1} \xi_{s+1}, \dots, x_n \xi_n \rangle \subset \\ \subset \langle \xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_k^{u_k}, a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n \rangle,$$

claramente:

$$\langle x_1 \xi_1, \dots, x_s \xi_s \rangle \subset \text{gr}^L(H_A(\beta)).$$

Si hubiésemos tomado una filtración L tal que

$$\sigma^L(\partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_k^{u_k} - \partial_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \partial_n^{u_n}) = \xi_{k+1}^{u_{k+1}} \cdots \xi_n^{u_n},$$

el razonamiento es análogo. Por lo tanto, éstas son las únicas posibles pendientes.

Veamos que realmente son pendientes de $\mathcal{H}_A(\beta)$, como antes sólo tenemos una pendiente para cada hiperplano $x_j = 0$, con $j > k$, estudiemos cómo cambia la variedad característica, en primer lugar calculemos $Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta))$.

Usando la prueba del teorema II-A.2 tenemos que

$$\{\xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_k^{u_k}, a_{s+1}x_{s+1}\xi_{s+1} + b_{s+1}x_n\xi_n, \dots, a_{n-1}x_{n-1}\xi_{n-1} + b_{n-1}x_n\xi_n\}$$

forman una sucesión regular en $\mathbb{C}[x_{s+1}, \dots, x_n, \xi_{s+1}, \dots, \xi_n]$, por lo tanto

$$\{\xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_k^{u_k}, x_1\xi_1, \dots, x_s\xi_s,$$

$$a_{s+1}x_{s+1}\xi_{s+1} + b_{s+1}x_n\xi_n, \dots, a_{n-1}x_{n-1}\xi_{n-1} + b_{n-1}x_n\xi_n\}$$

son una sucesión regular en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ y además

$$\langle \xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_k^{u_k}, x_1\xi_1, \dots, x_s\xi_s,$$

$$a_{s+1}x_{s+1}\xi_{s+1} + b_{s+1}x_n\xi_n, \dots, a_{n-1}x_{n-1}\xi_{n-1} + b_{n-1}x_n\xi_n \rangle = \text{gr}^F(H_A(\beta)).$$

Por lo tanto,

$$Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_{s+1} \cdots \xi_k, x_1\xi_1, \dots, x_n\xi_n).$$

Repitiendo el razonamiento y tomando L una filtración $L > L_j$ obtenemos:

$$Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_{k+1} \cdots \xi_n, x_1\xi_1, \dots, x_n\xi_n).$$

Obtenemos por tanto que las variedades características cambian, y por ello necesariamente hay pendientes para $x_j = 0$ con $j > k$. ■

Tratemos ahora el último caso, es decir, cuando el ideal tórico proviene de un semigrupo que no es reducido, por lo tanto reduciendo como hemos hecho en esta sección podemos suponer que las primeras s variables son aquéllas que no forman parte del generador del tórico, por tanto nuestro sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} & (\partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1, a_1 x_1 \partial_1 - \beta_1, \dots, a_s x_s \partial_s - \beta_s, \\ & a_{s+1} x_{s+1} \partial_{s+1} + b_{s+1} x_n \partial_n - \beta_{s+1}, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \partial_{n-1} + b_{n-1} x_n \partial_n - \beta_{n-1}) = H_A(\beta). \end{aligned}$$

Teorema II-B.2 ■ Sea A una matriz $(n-1) \times n$ de enteros, tal que el ideal tórico proviene de un semigrupo no reducido, y tal que las s primeras variables son aquéllas que no aparecen en el generador del ideal tórico. Entonces $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente para $x_j = 0$, con $j = 1, \dots, n$.

Demostración. Es claro que dada $L \neq V$ una filtración cualquiera para todo hiperplano $x_j = 0$, se tiene que:

$$\sigma^L(\partial_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1) = \xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_n^{u_n}.$$

No sólo vamos a ver que L no es pendiente de nuestro sistema, además calcularemos la L -variedad característica. A partir de nuestros generadores, si tomamos los L -símbolos principales obtenemos el conjunto de elementos:

$$\begin{aligned} & \{\xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_n^{u_n}, x_1 \xi_1, \dots, x_s \xi_s, \\ & a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n\} \end{aligned}$$

queremos ver que estos elementos forman una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$, si consideramos su extensión al anillo graduado $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]$, con respecto a la graduación usual, tenemos que nuestros elementos son todos homogéneos y queremos probar que

$$\sqrt{\xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_n^{u_n}, a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n} =$$

$$\langle \xi_{s+1}, \dots, \xi_n \rangle.$$

Claramente,

$$\begin{aligned} & \{ \xi_{s+1} \cdots \xi_n, a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n \} \subset \\ & \subset \sqrt{\xi_{s+1}^{u_{s+1}} \cdots \xi_n^{u_n}, a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n}. \end{aligned}$$

Si consideramos la sucesión de elementos

$$\begin{aligned} P_1 &= -a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} \cdots \xi_n \\ &+ \xi_{s+2} \cdots \xi_n (a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n) \\ &= b_{s+1} x_n \xi_{s+2} \cdots \xi_n^2 \\ P_2 &= -a_{s+2} x_{s+2} b_{s+1} x_n \xi_{s+2} \cdots \xi_n^2 \\ &+ b_{s+1} \xi_{s+3} \cdots \xi_n (a_{s+2} x_{s+2} \xi_{s+2} + b_{s+2} x_n \xi_n) \\ &= b_{s+1} b_{s+2} x_n^2 \xi_{s+3} \cdots \xi_n^3 \\ &\vdots \\ P_{n-s-2} &= b_{s+1} \cdots b_{n-2} x_n^{n-s-2} \xi_{n-1} \xi_n^{n-s-1} \\ P_{n-s-1} &= -a_{n-1} x_{n-1} P_{n-s-2} \\ &+ b_{s+1} \cdots b_{n-2} x_n^{n-s-2} \xi_n^{n-s-1} (a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n) \\ &= b_{s+1} \cdots b_{n-1} x_n^{n-s-1} \xi_n^{n-s}. \end{aligned}$$

Con lo que,

$$x_n \xi_n \in \sqrt{\xi_{s+1} \cdots \xi_n, a_{s+1} x_{s+1} \xi_{s+1} + b_{s+1} x_n \xi_n, \dots, a_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1} + b_{n-1} x_n \xi_n}$$

y así obtenemos el resultado buscado. ■

Nota II-B.3 ■ Si A es una matriz $(n-1) \times n$ de enteros, tal que su ideal tórico proviene de un semigrupo no reducido, y tal que las s primeras variables son las que no aparecen en el generador del ideal tórico, usando la prueba anterior obtenemos, que para toda filtración L :

$$Ch^L(\mathcal{I}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_{s+1} \cdots \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n).$$

Lo que ocurre en este último caso es que las pendientes se encuentran en el infinito. Si hacemos el cambio de variables:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, & x'_2 &= x_2, & \dots, & x'_{s+1} &= -\frac{1}{x_{s+1}}, \\ x'_{s+2} &= x_{s+2}, & \dots, & x'_n &= x_n, \\ \partial_1 &= \partial'_1, & \partial_2 &= \partial'_2, & \dots, & \partial_{s+1} &= x'^2_{s+1} \partial'_{s+1}, \\ \partial_{s+2} &= \partial'_{s+2}, & \dots, & \partial_n &= \partial'_n. \end{aligned}$$

Para simplificar la notación escribimos

$$[\theta']^i = \theta'(\theta' + 1) \cdot \dots \cdot (\theta' + i - 1),$$

nuestro sistema, mediante el cambio anterior nos queda:

$$\begin{aligned} H_A(\beta)' &= (x'^{u_{s+1}}_{s+1} [\theta'_{s+1}]^{u_{s+1}} \partial'^{u_{s+2}}_{s+2} \cdot \dots \cdot \partial'^{u_n}_n - 1, a_1 \theta'_1 - \beta_1, \dots, a_s \theta'_s - \beta_s, \\ &\quad -a_{s+1} \theta'_{s+1} + b_{s+1} \theta'_n - \beta_{s+1}, \dots, a_{n-1} \theta'_{n-1} + b_{n-1} \theta'_n - \beta_{n-1}). \end{aligned}$$

A partir de ahora, y para simplificar la notación obviaremos las primas tras el cambio de variables.

Teorema II-B.4 ■ Sea A una matriz $(n-1) \times n$ de enteros tal que el ideal tórico proviene de un semigrupo no reducido, y tal que el generador de dicho ideal tiene la forma $\partial^{u_{s+1}}_{s+1} \cdot \dots \cdot \partial^{u_n}_n - 1$. Haciendo el cambio de variables antes descrito, tenemos que el nuevo módulo $\mathcal{H}_A(\beta)'$ sólo tiene la pendiente $L_{s+1} = u_{s+1}F + (u_{s+1} + \dots + u_n)V_{s+1}$ respecto de la hipersuperficie $x_{s+1} = 0$.

Demostración. Lo primero que tenemos que probar es que si $L \neq L_{s+1}$, entonces L no es pendiente de nuestro módulo respecto de $x_{s+1} = 0$.

Si desarrollamos la escritura a izquierda del primer elemento,

obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_{s+1}^{u_{s+1}} [\theta_{s+1}]^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1 &= \chi_{s+1}^{2u_{s+1}} \partial_{s+1}^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} + \\ &+ c_1 \chi_{s+1}^{2u_{s+1}-1} \partial_{s+1}^{u_{s+1}-1} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} + \\ &\vdots \\ &+ c_{u_{s+1}-1} \chi_{s+1}^{u_{s+1}+1} \partial_{s+1}^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} \\ &- 1. \end{aligned}$$

Todos ellos apoyados sobre la misma pendiente, por lo que si tomamos una pendiente $L \neq L_{s+1}$, sólo tenemos dos posibilidades:

$$\sigma^L(\chi_{s+1}^{u_{s+1}} [\theta_{s+1}]^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1) = 1$$

ó

$$\sigma^L(\chi_{s+1}^{u_{s+1}} [\theta_{s+1}]^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1) = \chi_{s+1}^{2u_{s+1}} \xi_{s+1}^{u_{s+1}} \xi_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \xi_n^{u_n}.$$

En el primer caso es evidente que L nunca será pendiente de nuestro sistema. En el segundo, podemos, mediante un cambio en nuestra matriz inicial considerar que las posiciones pivotaes están en $\{s+2, \dots, n\}$, es decir, el sistema queda:

$$\begin{aligned} H_A(\beta)' &= (\chi_{s+1}^{u_{s+1}} [\theta_{s+1}]^{u_{s+1}} \partial_{s+2}^{u_{s+2}} \cdots \partial_n^{u_n} - 1, a_1 \theta_1 - \beta_1, \dots, a_s \theta_s - \beta_s, \\ &a'_{s+1} \theta_{s+2} + b'_{s+1} \theta_{s+1} - \beta'_{s+1}, \dots, a'_{n-1} \theta_n + b'_{n-1} \theta_{s+1} - \beta'_{n-1}). \end{aligned}$$

Vamos a ver que

$$\langle \chi_{s+1} \xi_{s+1}, \dots, \chi_n \xi_n \rangle \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

ya tenemos que $\chi_{s+1} \xi_{s+1} \xi_{s+2} \cdots \xi_n \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, consideremos la sucesión de elementos:

$$\begin{aligned} P_1 &= -a'_{s+1} \chi_{s+2} \chi_{s+1} \xi_{s+1} \xi_{s+2} \cdots \xi_n \\ &+ \chi_{s+1} \xi_{s+1} \xi_{s+3} \cdots \xi_n (a'_{s+1} \chi_{s+2} \xi_{s+2} + b'_{s+1} \chi_{s+1} \xi_{s+1}) \\ &= b'_{s+1} \chi_{s+1}^2 \xi_{s+1}^2 \xi_{s+3} \cdots \xi_n \\ P_2 &= -a'_{s+2} \chi_{s+3} b'_{s+1} \chi_{s+1}^2 \xi_{s+1}^2 \xi_{s+3} \cdots \xi_n \\ &+ b'_{s+1} \chi_{s+1}^2 \xi_{s+1}^2 \xi_{s+4} \cdots \xi_n (a'_{s+2} \chi_{s+3} \xi_{s+3} + b'_{s+2} \chi_{s+1} \xi_{s+1}) \\ &= b'_{s+1} b'_{s+2} \chi_{s+1}^3 \xi_{s+1}^3 \xi_{s+4} \cdots \xi_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{n-s-2} &= b'_{s+1} \cdots b'_{n-2} x_{s+1}^{n-s-1} \xi_{s+1}^{n-s-1} \xi_n \\
 P_{n-s-1} &= -a'_{n-1} x_n P_{n-s-2} \\
 &+ b'_{s+1} \cdots b'_{n-1} x_{s+1}^{n-s-1} \xi_{s+1}^{n-s-1} (a'_{n-1} x_n \xi_n + b'_{n-1} x_{s+1} \xi_{s+1}) \\
 &= b'_{s+1} \cdots b'_{n-1} x_{s+1}^{n-s} \xi_{s+1}^{n-s}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto L no es pendiente de nuestro módulo. Queremos ver ahora que realmente es pendiente de nuestro sistema, como tan sólo tenemos una posible pendiente nos basta con ver que la L -variedad característica no queda invariante. Si $L > L_{s+1}$ es claro que

$$Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta)') = \emptyset,$$

mientras que si $L < L_{s+1}$

$$Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta)') = \mathcal{V}(x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n).$$

■

CAPÍTULO III

Sistemas hipergeométricos definidos por una fila

En este capítulo estudiaremos las pendientes de sistemas hipergeométricos definidos por matrices con una única fila. En primer lugar, supondremos que todos los elementos de nuestra matriz son positivos y que no están repetidos, después estudiaremos el caso en que puedan repetirse y acabaremos el capítulo estudiando las pendientes de los sistemas definidos por ideales tóricos provenientes de semigrupos no reducidos.

III-A SISTEMAS DEFINIDOS POR UNA FILA SIN REPETICIÓN

En esta sección consideraremos sistemas hipergeométricos definidos por matrices con una sola fila. Supongamos en primer lugar que el ideal tórico que define proviene de un semigrupo reducido, es decir, que todas las componentes de nuestra matriz son positivas. Si hubiese alguna componente igual a cero, podemos considerar la submatriz

que tiene todas las posiciones salvo las que valen cero, ya que define el mismo sistema que la matriz de inicio. Supondremos que el sistema que define nuestra matriz es irregular, es decir, nuestra matriz no es múltiplo escalar de la matriz $(1 \dots 1)$, en esta sección además supondremos que todos los elementos de nuestra matriz son distintos.

Sea la matriz

$$A = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n) \quad \text{con} \quad 0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Sea $\beta \in \mathbb{C}$, definimos el sistema hipergeométrico $H_A(\beta)$ que viene definido por el ideal tórico I_A y el operador $Q = i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \dots + i_n x_n \partial_n - \beta$.

Nuestro ideal tórico contiene los binomios:

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \partial_1^{i_2} - \partial_2^{i_1} \\ C_{1,3} &= \partial_1^{i_3} - \partial_3^{i_1} & C_{2,3} &= \partial_2^{i_3} - \partial_3^{i_2} \\ C_{1,4} &= \partial_1^{i_4} - \partial_4^{i_1} & C_{2,4} &= \partial_2^{i_4} - \partial_4^{i_2} & C_{3,4} &= \partial_3^{i_4} - \partial_4^{i_3} \\ &\vdots & & \vdots & & \vdots & \dots \\ C_{1,n} &= \partial_1^{i_n} - \partial_n^{i_1} & C_{2,n} &= \partial_2^{i_n} - \partial_n^{i_2} & C_{3,n} &= \partial_3^{i_n} - \partial_n^{i_3} & \dots & C_{n-1,n} &= \partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}} \end{aligned}$$

que definen los circuitos de A , siempre que todas las parejas (i_n, i_k) sean primas entre sí.

Lema III-A.1 ■ Sea A una matriz de enteros positivos distintos y $\beta \in \mathbb{C}$, y supongamos que $A = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$, con $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Entonces el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$, con $j < n$.

Demostración. Sea $j < n$ y sea $L \neq V$ una filtración respecto de $x_j = 0$. De entre los generadores descritos anteriormente tomamos $C_{k,n}$ con $k < n$. Si $k = j$ tenemos que $\sigma^F(C_{j,n}) = \xi_j^{i_n}$ por lo tanto $\sigma^L(C_{j,n}) = \xi_j^{i_n}$. Si $k \neq j$ claramente $\sigma^L(C_{k,n}) = \sigma^F(C_{k,n}) = \xi_k^{i_n}$.

Por lo tanto acabamos de obtener que:

$$\{\xi_1^{i_n}, \dots, \xi_{n-1}^{i_n}\} \subset \text{gr}^L(H_A(\beta)) \Rightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Tomando ahora el operador $Q = i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \cdots + i_n x_n \partial_n - \beta$, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma^L(Q) &= \sigma^L(i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \cdots + i_n x_n \partial_n - \beta) = \\ &= i_1 x_1 \xi_1 + i_2 x_2 \xi_2 + \cdots + i_n x_n \xi_n \in \text{gr}^L(H_A(\beta)) \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

lo que implica que L no es pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$. ■

Ahora nos disponemos a estudiar las posibles pendientes de $\mathcal{H}_A(\beta)$ respecto de $x_n = 0$, en primer lugar veremos que sólo hay una posibilidad de pendiente.

Lema III-A.2 ■ Sea A una matriz de enteros positivos distintos y $\beta \in \mathbb{C}$, y supongamos que $A = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$, con $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. La filtración descrita por $\partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}$ respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, es decir, $L_n = i_{n-1}F + (i_n - i_{n-1})V_n$ es la única pendiente que puede tener el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$, respecto de esta hipersuperficie.

Demostración. Sea $L_n = i_{n-1}F + (i_n - i_{n-1})V_n$ que describe la pendiente $\frac{i_{n-1}}{i_{n-1} - i_n}$, consideremos L_1 filtración cualquiera respecto de $x_n = 0$ tal que $L_1 < L_n$.

Si tomamos el conjunto de binomios de $I_A \{C_{1,n}, C_{2,n}, \dots, C_{n-1,n}\}$ obtenemos que

$$\{\xi_1^{i_n}, \xi_2^{i_n}, \dots, \xi_{n-1}^{i_n}\} \subset \text{gr}^{L_1}(H_A(\beta)) \Rightarrow \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))}.$$

Tomando el operador $Q = i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \cdots + i_n x_n \partial_n - \beta$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma^{L_1}(Q) &= \sigma^{L_1}(i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \cdots + i_n x_n \partial_n - \beta) = \\ &= i_1 x_1 \xi_1 + i_2 x_2 \xi_2 + \cdots + i_n x_n \xi_n \in \text{gr}^{L_1}(H_A(\beta)) \subset \sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))}. \end{aligned}$$

Así:

$$\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))},$$

lo que implica que L_1 no es pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$.

Si ahora consideramos una filtración cualquiera, L_2 , respecto de $x_n = 0$, tal que $L_2 > L_n$, $L_2 \neq V$. Nos bastará considerar el conjunto de binomios: $\{C_{1,2}, C_{2,3}, \dots, C_{n-2,n-1}, C_{n-1,n}\}$, ello nos proporciona:

$$\{\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))}.$$

De la misma forma que antes, usando el operador Q , finalmente obtenemos:

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n, x_{n-1}\xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))},$$

por lo que L_2 no es pendiente de nuestro sistema. ■

Teorema III-A.3 ■ Sea A una matriz de enteros positivos distintos y $\beta \in \mathbb{C}$, y supongamos que $A = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$, con $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n$. La filtración descrita por $\partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}$ respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, es decir, $L_n = i_{n-1}F + (i_n - i_{n-1})V_n$ es la única pendiente tiene el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$, con respecto a los hiperplanos coordenados.

Nota III-A.4 ■ El caso $i_1 = 1$ ha sido probado en [15], ciertas ideas de la prueba del teorema III-A.3 han sido inspiradas en este trabajo. Hemos de señalar que el método empleado en [15] utiliza de forma esencial un teorema de Laurent-Mebkhout sobre el comportamiento de las pendientes por restricción y se reduce el caso general al caso $(1 \ i_{n-1} \ i_n)$ con $1 < i_{n-1} < i_n$. Sin embargo, esta reducción no parece inmediata si $i_1 > 1$ y si el semigrupo que define A no es reducido, por lo que el argumento introducido, de tipo combinatorio, aquí sustituye ventajosamente al teorema de Laurent-Mebkhout.

Demostración. Gracias a los lemas anteriores, sabemos que el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$, no tiene ninguna pendiente respecto de las $n - 1$ primeras variables, y que la única posibilidad respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$

es la pendiente L_n . Supongamos que L_n no es pendiente de nuestro sistema, en ese caso la L -variedad característica queda invariante al cambiar de pendiente L respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$.

Calculemos en primer lugar $Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta))$. Si consideramos el conjunto de binomios:

$$\{C_{1,n} = \partial_1^{i_n} - \partial_n^{i_1}, C_{2,n} = \partial_2^{i_n} - \partial_n^{i_2}, \dots, C_{n-1,n} = \partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}\}$$

es claro que el conjunto de exponentes $\{\mathbf{u}_i\} \subset \ker(\pi)$ que definen $C_{i,n}$ en I_A generan como \mathbb{Q} -espacio vectorial a $\ker(\pi)$. Usando la nota I-G.2, si tomamos el saturado respecto de $\partial_1 \cdots \partial_n$ del ideal generado por estos elementos, obtendremos un nuevo ideal \tilde{I}_A , tal que, para todo binomio $\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-}$ de I_A se verifica que siempre existe un binomio $\partial^{\mathbf{v}^+} - \partial^{\mathbf{v}^-}$ de \tilde{I}_A y $a \in \mathbb{N}$ tales que $a\mathbf{u}^+ = \mathbf{v}^+$ y $a\mathbf{u}^- = \mathbf{v}^-$.

Sea

$$J_C = \langle \partial_1^{i_n} - \partial_n^{i_1}, \partial_2^{i_n} - \partial_n^{i_2}, \dots, \partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}} \rangle,$$

puesto que estos generadores están incluidos en I_A , y este ideal es homogéneo respecto del vector (i_1, \dots, i_n) , así también es homogéneo J_C .

Queremos calcular

$$(J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty)$$

para ello usaremos el lema I-G.4. Si estamos interesados en calcular $(J_C : \partial_n^\infty)$ tenemos que calcular una base de Gröbner de J_C para un orden graduado (para la graduación que hace homogéneo a nuestro ideal), inverso lexicográfico de forma que la última variable sea ∂_n . Tomemos por tanto un tal orden de forma que $\partial_1 > \partial_2 > \cdots > \partial_n$, en este caso los monomios líderes de nuestros generadores serán:

$$\underline{\partial_1^{i_n} - \partial_n^{i_1}}, \underline{\partial_2^{i_n} - \partial_n^{i_2}}, \dots, \underline{\partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}}$$

que definen siempre exponentes disjuntos, por lo que este conjunto es una base de Gröbner de J_C para dicho orden. Además como ninguno de estos elementos tiene a ninguna potencia de ∂_n como factor,

estos elementos forman una base de Gröbner de $(J_C : \partial_n^\infty)$. Por lo tanto, acabamos de obtener que $J_C = (J_C : \partial_n^\infty)$.

Calculemos ahora $(J_C : \partial_k^\infty)$ con $k \neq n$. Volvemos a hacer uso del lema I-G.4, ya que J_C es un ideal homogéneo, consideremos un orden graduado lexicográfico inverso, de forma que $\partial_1 > \dots > \partial_{k-1} > \partial_{k+1} > \dots > \partial_n > \partial_k$, obtendremos que los monomios líderes de nuestros generadores son:

$$\underline{\partial_1^{i_1}} - \partial_n^{i_1}, \dots, \underline{\partial_{k-1}^{i_{k-1}}} - \partial_n^{i_{k-1}}, \underline{\partial_k^{i_k}} - \partial_n^{i_k}, \underline{\partial_{k+1}^{i_{k+1}}} - \partial_n^{i_{k+1}}, \dots, \underline{\partial_{n-1}^{i_{n-1}}} - \partial_n^{i_{n-1}}$$

de nuevo estos exponentes son disjuntos, por lo que forman una base de Gröbner de J_C para dicho orden. Ningún elemento de la base es dividido por ∂_k por lo que forman también base de $(J_C : \partial_k^\infty)$. Por lo tanto,

$$J_C = (\dots ((J_C : \partial_1^\infty) : \partial_2^\infty) \dots : \partial_n^\infty) = (J_C : (\partial_1 \dots \partial_n)^\infty).$$

En primer lugar estamos interesados en calcular $\text{in}_F(\tilde{I}_A)$, si consideramos las formas iniciales de los generadores anteriores obtenemos:

$$\{\xi_1^{i_1}, \dots, \xi_{n-1}^{i_{n-1}}\}$$

que siempre forman una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, por lo tanto, gracias a la proposición I-E.3

$$\langle \xi_1^{i_1}, \dots, \xi_{n-1}^{i_{n-1}} \rangle = \text{in}_F(\tilde{I}_A).$$

Puesto que nuestro ideal tórico I_A verifica que dado $\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-} \in I_A$, con $\sigma^F(\partial^{\mathbf{u}^+} - \partial^{\mathbf{u}^-}) = \xi^{\mathbf{u}^+}$, siempre existen $\partial^{\mathbf{v}^+} - \partial^{\mathbf{v}^-} \in \tilde{I}_A$, y $a \in \mathbb{N}$ con $\sigma^F(\partial^{\mathbf{v}^+} - \partial^{\mathbf{v}^-}) = \xi^{\mathbf{v}^+}$ y $a\mathbf{u}^+ = \mathbf{v}^+$, por lo tanto

$$\sqrt{\text{in}_F(\tilde{I}_A)} = \sqrt{\text{in}_F(I_A)} = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle.$$

Nuestro objetivo es probar que se verifica $\text{gr}^F(H_A(\beta)) = \text{fin}_F(H_A(\beta))$ usando el teorema I-H.10, nos basta ver que $\sigma^F(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_n x_n \partial_n - \beta)$

es una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\text{in}_F(I_A)$, pero ver que una sucesión regular lo es sobre este anillo es equivalente a ver que lo es sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$.

Si conseguimos probar que nuestro elemento es una sucesión regular sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ tendremos que también forma una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x, \xi]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$.

El anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ es graduado por ser nuestro ideal $\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ graduado, además es Cohen-Macaulay, ya que $\sqrt{\text{in}_F(I_A)} = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle$ es un ideal generado por $n-1$ elementos y $\text{codim}(\sqrt{\text{in}_F(I_A)}) = n-1$. Aplicando el teorema I-H.4, tenemos claramente que sobre el anillo $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$:

$$\sigma^F(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_n x_n \partial_n - \beta) = i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n = i_n x_n \xi_n,$$

por lo que, ya tenemos que

$$\text{gr}^F(H_A(\beta)) = \text{fin}_F(H_A(\beta)) = (\text{in}_F(I_A), i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Ch}^F(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}\left(\sqrt{(\text{in}_F(I_A), i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n)}\right) = \\ &= \mathcal{V}\left(\sqrt{\sqrt{\text{in}_F(I_A)}, \sqrt{(i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n)}}\right) = \\ &= \mathcal{V}\left(\sqrt{\langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle, \sqrt{(i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n)}}\right) = \\ &= \mathcal{V}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n). \end{aligned}$$

Si ahora consideramos una filtración $L > L_n$ respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, con $L \neq V$, de la misma forma que antes, si tomamos los L -símbolos principales de los mismos generadores de \tilde{I}_A obtenemos el conjunto de elementos

$$\{\xi_1^{i_n}, \dots, \xi_{n-2}^{i_n}, \xi_n^{i_{n-1}}\},$$

que siguen siendo una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, así:

$$\langle \xi_1^{i_n}, \dots, \xi_{n-2}^{i_n}, \xi_n^{i_{n-1}} \rangle = \text{in}_L(\tilde{I}_A),$$

de la misma forma que antes

$$\sqrt{\text{in}_L(\tilde{I}_A)} = \sqrt{\text{in}_L(I_A)} = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n \rangle.$$

Para calcular la L -variedad característica, veamos que el elemento $\sigma^L(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_n x_n \partial_n - \beta)$ es una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_L(I_A)}$, podemos usar el mismo razonamiento que antes ya que nuestro nuevo anillo sigue siendo graduado y Cohen-Macaulay por las mismas razones, además, en este anillo claramente:

$$i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n = x_{n-1} \xi_{n-1}$$

y obtenemos el resultado buscado:

$$\text{gr}^L(H_A(\beta)) = \text{fin}_L(H_A(\beta)) = (\text{in}_L(I_A), i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n).$$

Fácilmente obtenemos que

$$\text{Ch}^L(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n, x_{n-1} \xi_{n-1})$$

por lo que hay cambio en las variedades características y por tanto L_n es pendiente de nuestro módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$. ■

III-B SISTEMAS DEFINIDOS POR UNA FILA CON REPETICIÓN

Consideremos que tenemos la matriz $A = (a \ b \ b)$ con $m.c.d(a, b) = 1$, no suponemos que los elementos sean positivos. En primer lugar, suponemos que ambos tienen el mismo signo, por lo que si $\beta \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$H_A(\beta) = \langle \partial_1^b - \partial_2^a, \partial_2 - \partial_3, ax_1 \partial_1 + bx_2 \partial_2 + bx_3 \partial_3 - \beta \rangle.$$

Si consideramos el cambio de variables:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2 + x_3, \quad x'_3 = x_3$$

se tiene que,

$$\partial_1 = \partial'_1, \quad \partial_2 = \partial'_2, \quad \partial_3 = \partial'_2 + \partial'_3.$$

Así el ideal a izquierda $H_A(\beta)$, se transforma en

$$H_A(\beta)' = \langle \partial_1^b - \partial_2^a, \partial_3, ax_1\partial_1' + bx_2\partial_2' - \beta \rangle.$$

Para simplificar la notación, renombramos las variables y no escribiremos más primas. Si llamamos, por tanto al ideal a izquierda J :

$$J = \langle \partial_1^b - \partial_2^a, \partial_3, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 - \beta \rangle.$$

Tenemos que el módulo \mathcal{A}_3/J no tiene pendientes respecto de la hipersuperficie $x_3 = 0$, ya que,

$$\frac{\mathcal{A}_3}{J} \simeq \frac{\mathcal{A}_3}{H_{(a,b)}(\beta) + \langle \partial_3 \rangle}.$$

Si los signos de a y b son diferentes entonces (suponiendo $a < 0$, si $a > 0$ se hace de forma análoga)

$$H_A(\beta) = \langle \partial_1^b \partial_2^{-a} - 1, \partial_2 - \partial_3, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + bx_3\partial_3 - \beta \rangle.$$

Haciendo el mismo cambio de variables y tras quitar las primas, tenemos:

$$J = \langle \partial_1^b \partial_2^{-a} - 1, \partial_3, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 - \beta \rangle.$$

Tenemos que el módulo \mathcal{A}_3/J no tiene pendientes respecto de la hipersuperficie $x_3 = 0$, ya que,

$$\frac{\mathcal{A}_3}{J} \simeq \frac{\mathcal{A}_3}{H_{(a,b)}(\beta) + \langle \partial_3 \rangle}.$$

Volviendo a considerar sistemas, provenientes de semigrupos reducidos, s consideramos una matriz

$$A = \underbrace{(i_1 \ i_1 \ \dots \ i_1)}_{j_1} \underbrace{(i_2 \ i_2 \ \dots \ i_2)}_{j_2} \dots \underbrace{(i_k \ i_k \ \dots \ i_k)}_{j_k} \underbrace{(i_{k+1} \ i_{k+1} \ \dots \ i_{k+1})}_{j_{k+1}}$$

con $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1}$. Repitiendo el proceso anterior de cambio de variables, podemos considerar un módulo isomorfo, que en este caso sería:

$$\frac{\mathcal{A}_n}{H_{(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{k+1})}(\beta) + \langle \partial_2, \dots, \partial_{j_1}, \partial_{j_1+2}, \dots, \partial_{j_1+j_2}, \dots, \partial_n \rangle}$$

que no tiene pendientes respecto de ninguna hipersuperficie, $x_j = 0$ $j \neq j_1 + \dots + j_k + 1$. Precisamente el índice $j_1 + \dots + j_k + 1$ (siguiendo la notación de nuestros cambios de variables) representa la última variable en juego, en el sistema hipergeométrico dado por la matriz $A' = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{k+1})$, por lo tanto, hay una pendiente respecto de esta hipersuperficie como hemos visto en la sección anterior.

Deshaciendo el cambio de variables, obtenemos que la matriz de inicio tiene pendiente respecto de la hipersuperficie $x_{j_1+\dots+j_k+1} + \dots + x_n = 0$ y no tiene pendientes respecto de las hipersuperficies $x_1 + \dots + x_{j_1} = 0, x_{j_1+1} + \dots + x_{j_1+j_2} = 0, \dots, x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k} = 0$.

Si tenemos una matriz de naturales con elementos repetidos salvo el mayor, podemos repetir el proceso de la sección anterior con pequeñas variaciones, esto nos permite calcular las variedades características, y calcular las pendientes sin el cambio de variables anterior.

Supondremos que nuestra matriz es de la forma:

$$A = (\underbrace{i_1 \ i_1 \ \dots \ i_1}_{j_1} \ \underbrace{i_2 \ i_2 \ \dots \ i_2}_{j_2} \ \dots \ \underbrace{i_k \ i_k \ \dots \ i_k}_{j_k} \ i_{k+1})$$

tal que $i_1 < \dots < i_k < i_{k+1}$ y es de dimensiones $1 \times n$, es decir, $j_1 + \dots + j_k + 1 = n$. Dentro del ideal tórico que define consideremos los siguientes elementos:

$$\begin{matrix} \partial_1^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_1} & \partial_{j_1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_2} & \dots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_k} \\ \\ {}_{j_1-1} \left\{ \begin{matrix} \partial_1 - \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_1 - \partial_{j_1} \end{matrix} \right. & {}_{j_2-1} \left\{ \begin{matrix} \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+2} \\ \vdots \\ \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+j_2} \end{matrix} \right. & \vdots & {}_{j_k-1} \left\{ \begin{matrix} \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_k+2} \\ \vdots \\ \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{n-1} \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

De la misma forma que antes, nuestro módulo no tiene ninguna pendiente respecto de las $n - 1$ primeras variables (no sólo respecto de las hipersuperficies definidas por la suma de las componentes iguales).

Lema III-B.1 ■ Sea A una matriz de enteros positivos definida por una fila tal que el

mayor de entre ellos no está repetido y sea $\beta \in \mathbb{C}$. Si consideramos que en la escritura de A los elementos están de menor a mayor, entonces el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ con $j < n$.

Demostración. Sea $j < n$ y sea $L \neq V$ una filtración respecto de $x_j = 0$. Si tomamos los elementos del ideal tórico que hemos descrito anteriormente, obtenemos que gracias a los no homogéneos

$$\begin{aligned} \sigma^L(\partial_1^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_1}) &= \xi_1^{i_{k+1}}, \quad \sigma^L(\partial_{j_1+1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_2}) = \xi_{j_1+1}^{i_{k+1}}, \quad \dots, \\ \sigma^L(\partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_k}) &= \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\{\xi_1, \xi_{j_1+1}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

Sin embargo, para cualquier elemento homogéneo obtenemos que $\sigma^L(\partial_i - \partial_j) = \xi_i - \xi_j$, pero como nuestros elementos homogéneos siempre tienen alguno de los descritos anteriormente, finalmente obtenemos que:

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Tomando ahora

$$\sigma^L(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_{k+1} x_n \partial_n - \beta) = i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_{k+1} x_n \xi_n$$

obtenemos

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

por lo que L no es pendiente de nuestro sistema. ■

Nos interesaremos ahora por las posibles pendientes del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, ya sabemos por la construcción anterior que nuestro módulo tiene pendientes respecto de esta hipersuperficie, veamos cuál es, sin el cambio y estudiemos también las diferentes variedades características.

Lema III-B.2 ■ Sea A una matriz de enteros positivos definida por una fila tal que el mayor de entre ellos no está repetido y sea $\beta \in \mathbb{C}$. Si consideramos que en la escritura de A los elementos están de menor a mayor, entonces la única posibilidad de pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$ es la pendiente $L_n = i_k F + (i_{k+1} - i_k)V_n$.

Demostración. Sea L_1 filtración respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, tal que $L_1 < L_n$.

Tomando los elementos del ideal tórico antes definidos no homogéneos obtenemos que:

$$\{\xi_1^{i_{k+1}}, \xi_{j_1+1}^{i_{k+1}}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}}\} \subset \text{gr}^{L_1}(H_A(\beta)),$$

de la misma forma que en el lema anterior $\sigma^{L_1}(\partial_i - \partial_j) = \xi_i - \xi_j$, así

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))}$$

Tomando ahora el L_1 -símbolo principal del operador que nos completa es sistema hipergeométrico, obtenemos

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))}$$

así L_1 no es pendiente de nuestro sistema.

Sea ahora L_2 filtración respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$ tal que $L_2 > L_n$, y $L_2 \neq V$, ahora consideraremos el siguiente conjunto de operadores en el ideal tórico:

$$\partial_1^{i_2} - \partial_{j_1+1}^{i_1}, \partial_{j_1+1}^{i_3} - \partial_{j_1+j_2+1}^{i_2}, \dots, \partial_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k-1}}, \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_k}.$$

Además tomemos los elementos

$$\begin{array}{cccc} \partial_1 - \partial_2 & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+2} & \cdots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+2} \\ \partial_1 - \partial_3 & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+3} & \cdots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 - \partial_{j_1} & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+j_2} & \cdots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{n-1} \end{array}$$

Es claro que si consideramos el conjunto de exponentes $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$ que definen todos los binomios antes descritos del ideal tórico, obtenemos que este conjunto es base como \mathbb{Q} -espacio vectorial de $\ker(\pi)$. Llamemos C al conjunto de exponentes y calculemos $(J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty)$. Puesto que nuestro ideal I_A es homogéneo y J_C es un subideal suyo también es homogéneo, por ello podemos usar el lema I-G.4, considerando órdenes adecuados, finalmente:

$$J_C = (U_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty).$$

Si ahora consideramos los L_2 -símbolos principales de los elementos anteriores conseguimos, por una parte:

$$\{\xi_1^{i_2}, \xi_{j_1+1}^{i_3}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k}, \xi_n^{i_k}\} \subset \text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))$$

que claramente forman una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, si a continuación consideramos el elemento $\sigma^{L_2}(\partial_1 - \partial_2) = \xi_1 - \xi_2$, veremos que si unimos este elemento al conjunto anterior obtenemos una sucesión regular, es decir $\xi_1 - \xi_2$ no es divisor de cero sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]/\langle \xi_1^{i_2}, \xi_{j_1+1}^{i_3}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k}, \xi_n^{i_k} \rangle$, pero esto es equivalente a ver que no lo es sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]/\langle \xi_1, \xi_{j_1+1}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}, \xi_n \rangle$, donde claramente $\xi_1 - \xi_2 = -\xi_2$. Si continuamos repitiendo este proceso obtenemos que el siguiente conjunto forma una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$:

$$\{\xi_1^{i_2}, \xi_{j_1+1}^{i_2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k}, \xi_n^{i_k}, \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \dots, \xi_1 - \xi_{j_1}, \xi_{j_1+1} - \xi_{j_1+2}, \dots, \xi_{j_1+1} - \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}\}$$

Para tomar los L_2 -símbolos de los restantes generadores de J_C , tomamos en primer lugar

$$\sigma^{L_2}(\partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+2}) = \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2},$$

que claramente no es divisor de cero en el anillo cociente $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]/I$ donde I es el ideal generado por la sucesión regular que hemos descrito anteriormente.

Si le añadimos a I el elemento $\xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2}$, y ahora consideramos

$$\sigma^{L_2}(\partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+3}) = \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+3},$$

sobre nuestro anillo tenemos claramente que este elemento que no es divisor de cero, iterando el proceso sobre los L_2 -símbolos principales del resto de generadores de J_C obtenemos una sucesión regular y por ello

$$\begin{aligned} \text{in}_{L_2}(J_C) = & \langle \xi_1^{i_2}, \xi_{j_1+1}^{i_2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k}, \xi_n^{i_k}, \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \dots, \xi_1 - \xi_{j_1}, \\ & \xi_{j_1+1} - \xi_{j_1+2}, \dots, \xi_{j_1+1} - \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+2}, \dots \\ & \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-2}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2}, \dots \\ & \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k} \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que $J_C \subset I_A$ pero por la condición sobre los exponente de los binomios de I_A (siempre hay uno en J_C que es múltiplo suyo) tenemos que

$$\sqrt{\text{in}_{L_2}(J_C)} = \sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)} = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}, \xi_n, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k} \rangle.$$

Queremos calcular $\sqrt{\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))}$ para ver que no es bihomogéneo y por tanto L_2 no es pendiente de nuestro sistema, para ello vamos a ver que $\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta)) = \text{fin}_{L_2}(H_A(\beta))$, usando el teorema I-H.10, por lo tanto queremos ver que

$$\begin{aligned} \sigma^{L_2}(i_1(x_1\partial_1 + \dots + x_{j_1}\partial_{j_1}) + \dots + i_{k+1}x_n\partial_n - \beta) = \\ i_1(x_1\xi_1 + \dots + x_{j_1}\xi_{j_1}) + \dots + i_{k+1}x_n\xi_n. \end{aligned}$$

es una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\text{in}_{L_2}(I_A)$, equivalentemente, podemos ver que es sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$.

Vamos a ver que nuestro elemento es sucesión regular sobre el anillo graduado $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$ lo que implicará el resultado buscado. Para ello utilizaremos el teorema I-H.4, es fácil ver que el ideal $\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$ es perfecto (está generado por $n - 1$ elementos y su codimensión es $n - 1$), por lo que reduciendo nuestro elemento en nuestro anillo obtenemos:

$$i_1(x_1 \xi_1 + \dots + x_{j_1} \xi_{j_1}) + \dots +$$

$$i_k(x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k} \xi_{j_1+\dots+j_k}) + i_{k+1} x_n \xi_n =$$

$$(x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k}) \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}$$

y conseguimos el resultado buscado.

Por lo tanto:

$$\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta)) = \langle \text{in}_{L_2}(I_A), \sigma^{L_2}(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_{k+1} x_n \partial_n - \beta) \rangle$$

$$\sqrt{\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))} = \sqrt{\langle \text{in}_{L_2}(I_A), \sqrt{i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_{k+1} x_n \xi_n} \rangle =}$$

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}, \xi_n, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2},$$

$$\dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k}, (x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k}) \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} \rangle$$

que es homogéneo para la filtración F y para V_n . ■

Nota III-B.3 ■ Si A es una matriz de enteros positivos, tal que el mayor de ellos no está repetido, y $\beta \in \mathbb{C}$, seguimos la notación del lema anterior. Usando la demostración del lema anterior acabamos de ver que si consideramos una pendiente $L_2 > L_n$, $L_2 \neq V$, entonces:

$$Ch^{L_2}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}, \xi_n, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2},$$

$$\dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k}, (x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k}) \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1})$$

Teorema III-B.4 ■ Sea A una matriz de enteros positivos definida por una fila tal que el mayor de entre ellos no está repetido y sea $\beta \in \mathbb{C}$. Si consideramos que

en la escritura de A los elementos están de menor a mayor, entonces nuestro módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ tiene una pendiente respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, es $L_n = i_k F + (i_{k+1} - i_k) V_n$.

Demostración. Ya sabemos que el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene pendientes respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ para $j < n$, además en el lema anterior obtuvimos que la única posibilidad de pendiente respecto del hiperplano $x_n = 0$ es la pendiente L_n .

Supongamos por tanto que nuestro sistema no tuviese ninguna pendiente respecto de $x_n = 0$, en este caso la L -variedad característica queda invariante mediante cambio en la pendiente L . Estudiemos la F -variedad característica.

Volviendo a la prueba del lema III-B.2, si consideramos el conjunto de operadores:

$$\begin{array}{ccccccc} \partial_1^{i_2} - \partial_{j_1+1}^{i_1}, & \partial_{j_1+1}^{i_3} - \partial_{j_1+j_2+1}^{i_2}, & \dots, & \partial_{j_1+\dots+j_{k-2}+1}^{i_k} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k-1}}, & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}^{i_{k+1}} - \partial_n^{i_k}. \\ \partial_1 - \partial_2 & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+2} & \dots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+2} \\ \partial_1 - \partial_3 & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+3} & \dots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 - \partial_{j_1} & \partial_{j_1+1} - \partial_{j_1+j_2} & \dots & \partial_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \partial_{n-1} \end{array}$$

ya sabemos que generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, además si llamamos J_C al ideal generado por dichos operadores, también obtuvimos en la prueba anterior que

$$J_C = (J_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty).$$

Consideremos ahora sus F -símbolos principales, obtenemos el siguiente conjunto de elementos:

$$\{\xi_1^{i_2}, \xi_{j_1+1}^{i_3}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}, \xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k}\}$$

que forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ (de forma idéntica a la prueba del lema III-B.2). Además el ideal I que definen estos operadores es un ideal perfecto, ya que está generado por $n - 1$

elementos y tiene codimensión $n - 1$. Este ideal es graduado, para ver que

$$\sigma^F(i_1 x_1 \partial_1 + \dots + i_{k+1} x_n \partial_n - \beta) = i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_{k+1} x_n \xi_n$$

es una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/I$, nos basta ver que es una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{I}$. Veremos que es una sucesión regular en $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{I}$, para lo que nos basta ver que la raíz del ideal generado por este elemento es el ideal maximal del anillo graduado. Nuestro ideal \sqrt{I} sigue siendo perfecto y graduado. Es claro que sobre este anillo:

$$i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_{k+1} x_n \xi_n = x_n \xi_n,$$

con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{gr}^F(H_A(\beta)) &= \langle \text{in}_F(I_A), i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_{k+1} x_n \xi_n \rangle \\ \sqrt{\text{gr}^F(H_A(\beta))} &= \sqrt{\langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n \rangle} = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n \rangle \\ Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(\langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n \xi_n \rangle). \end{aligned}$$

Antes obtuvimos que si tenemos una pendiente L_2 tal que $L_2 > L_n$ y $L_2 \neq V$, entonces:

$$\begin{aligned} Ch^{L_2}(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(\xi_1, \dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}}, \xi_n, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+2}, \\ &\dots, \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} - \xi_{j_1+\dots+j_k}, (x_{j_1+\dots+j_{k-1}+1} + \dots + x_{j_1+\dots+j_k}) \xi_{j_1+\dots+j_{k-1}+1}). \end{aligned}$$

Con lo que es claro que la L -variedad característica no queda invariante. ■

III-C SISTEMAS DEFINIDOS POR UNA FILA EN GENERAL

Acabamos nuestro capítulo de sistemas hipergeométricos definidos por una fila, considerando los sistemas que provienen de ideales tóricos definidos por semigrupos no reducidos, es decir, que la matriz que define dicho ideal tenga algún elemento negativo y alguno positivo. Podremos suponer siempre que nuestra matriz tiene más de dos elementos, ya que este caso (codimensión uno) ya se estudió en el capítulo

anterior. Para estudiar las pendientes en estos casos, en primer lugar supondremos que sólo tenemos un elemento negativo y todos los elementos distintos entre sí.

Sea la matriz

$$A = (-i_1 \ i_2 \ i_3 \ \cdots \ i_n).$$

con $i_j > 0$ e $i_2 < i_3 < \cdots < i_n$. Veamos en primer lugar que no hay ninguna pendiente respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ con $j < n$.

Lema III-C.1 ■ Sea A una matriz $1 \times n$ de enteros con sólo una componente negativa que situamos en primera posición, a continuación ordenamos el resto de las posiciones de forma creciente y suponemos que nuestra matriz no tiene elementos repetidos, sea $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene pendientes respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ con $j < n$.

Demostración. Sea L una filtración cualquiera respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, con $L \neq V$. Tenemos en I_A el siguiente conjunto de binomios:

$$\partial_1^{i_n} \partial_n^{i_1} - 1, \partial_2^{i_n} - \partial_n^{i_2}, \partial_3^{i_n} - \partial_n^{i_3}, \dots, \partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}.$$

si consideramos sus L -símbolos principales obtenemos:

$$\{\xi_1^{i_n} \xi_n^{i_1}, \xi_2^{i_n}, \xi_3^{i_n}, \dots, \xi_{n-1}^{i_n}\} \subset \text{gr}^L(H_A(\beta))$$

por lo tanto:

$$\{\xi_1 \xi_n, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si ahora consideramos el elemento de $\text{gr}^L(H_A(\beta))$:

$$\sigma^L(-i_1 x_1 \partial_1 + i_2 x_2 \partial_2 + \cdots + i_n x_n \partial_n - \beta) = -i_1 x_1 \xi_1 + i_2 x_2 \xi_2 + \cdots + i_n x_n \xi_n$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} & \langle \xi_1 \xi_n, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, -i_1 x_1 \xi_1 + i_2 x_2 \xi_2 + \cdots + i_n x_n \xi_n \rangle = \\ & = \langle \xi_1 \xi_n, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, -i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n \rangle \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}. \end{aligned}$$

Si tomamos el elemento de $\sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$,

$$\xi_1(-i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n) = -i_1 x_1 \xi_1^2 + i_n x_n \xi_1 \xi_n \Rightarrow \{x_1 \xi_1, x_n \xi_n\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Por lo tanto L no es pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$. ■

En estos sistemas sólo tenemos una pendiente respecto de los hiperplanos coordenados, la dada por el operador $\partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}}$.

Teorema III-C.2 ■ Sea A una matriz $1 \times n$ de enteros con sólo una componente negativa que situamos en primera posición, a continuación ordenamos el resto de las posiciones de forma creciente y suponemos que nuestra matriz no tiene elementos repetidos, sea $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces el módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ tiene una única pendiente respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, la definida por la filtración $L_n = i_{n-1}F + (i_n - i_{n-1})V_n$.

Demostración. En primer lugar veamos que la única posible pendiente es L_n . Si L_1 es una filtración respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$ tal que $L_1 < L_n$ entonces tomando los mismos operadores en el ideal tórico que en la prueba del lema anterior obtenemos que sus L_1 -símbolos principales son:

$$\{\xi_1^{i_n} \xi_n^{i_1}, \xi_2^{i_n}, \xi_3^{i_n}, \dots, \xi_{n-1}^{i_n}\} \subset \text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))$$

estos elementos forman claramente una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Además los exponentes de los operadores del ideal tórico generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial. El hecho de que halla un exponente $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$ con todas las componentes positivas nos proporciona que $J_C = U_C : (\partial_1 \cdots \partial_n)^\infty$, por lo que no tenemos que saturar. De forma idéntica a las pruebas de las secciones anteriores obtenemos que

$$\langle \xi_1 \xi_n, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1} \rangle = \sqrt{\text{in}_{L_1}(J_A)}.$$

Queremos estudiar $\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))$, para ello usaremos el teorema I-H.10, es decir queremos ver que el elemento

$$-i_1 x_1 \xi_1 + i_2 x_2 \xi_2 + \cdots + i_n x_n \xi_n$$

forma una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\text{in}_{L_1}(I_A)$, veamos que es sucesión regular sobre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$, con lo que obtendremos el resultado buscado. Si probamos que forma una sucesión regular sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$, tendremos que es sucesión regular sobre $\mathbb{C}[x, \xi]/\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$.

El ideal $\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$ es graduado sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Además es un ideal perfecto, ya que está generado por $n - 1$ elementos y tiene codimensión $n - 1$. Por ello, nos basta ver que la raíz del ideal generado por nuestro elemento es el ideal maximal de nuestro anillo graduado, así obtendremos el resultado buscado. Sobre el anillo $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$:

$$-i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n = -i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n$$

$$\xi_1(-i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n) = -i_1 x_1 \xi_1^2, \quad \xi_n(-i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n) = i_n x_n \xi_n^2$$

por lo que

$$\{\xi_1, \xi_n\} \subset \sqrt{\langle -i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n \rangle}$$

ideal maximal sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_1}(I_A)}$.

Acabamos de obtener que

$$\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta)) = \langle \text{in}_{L_1}(I_A), -i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n \rangle$$

lo que implica,

$$\sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))} = \sqrt{\langle \text{in}_{L_1}(I_A), -i_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_n x_n \xi_n \rangle}$$

$$\sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))} = \sqrt{\langle \xi_1 \xi_n, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, -i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n \rangle}$$

$$\sqrt{\text{gr}^{L_1}(H_A(\beta))} = \langle \xi_1 \xi_n, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_1 \xi_1, x_n \xi_n \rangle$$

ideal homogéneo para las filtraciones F y V_n . Además obtenemos que

$$Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_n, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_1 \xi_1, x_n \xi_n).$$

Consideremos ahora una filtración L_2 respecto de la hipersuperficie $x_n = 0$, tal que $L_2 > L_n$ y $L_2 \neq V$, tomemos los elementos dentro del ideal tórico siguientes:

$$\partial_1^{i_{n-1}} \partial_{n-1}^{i_1} - 1, \partial_2^{i_3} - \partial_3^{i_2}, \partial_3^{i_4} - \partial_4^{i_3}, \dots, \partial_{n-2}^{i_{n-1}} - \partial_{n-1}^{i_{n-2}} \partial_{n-1}^{i_n} - \partial_n^{i_{n-1}},$$

los exponentes que nos dan estos binomios generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, y como antes, al tener un elemento en $\ker(\pi)$ con todas sus componentes positivas no necesitamos saturar nuestro ideal respecto de $\partial_1 \cdots \partial_n$. Tomando los L_2 -símbolos principales obtenemos:

$$\{\xi_1^{i_{n-1}} \xi_{n-1}^{i_1}, \xi_2^{i_3}, \dots, \xi_{n-2}^{i_{n-1}}, \xi_n^{i_{n-1}}\}$$

que son una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Lo que nos proporciona,

$$\langle \xi_1 \xi_{n-1}, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n \rangle = \sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}.$$

Como antes, nuestro interés se centra en calcular $\text{gr}^{L_2}(H_A(\beta))$, para ello nos basta ver que $-i_1 x_1 \xi_1 + \cdots + i_n x_n \xi_n$ forma una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\text{in}_{L_2}(I_A)$.

En vez de esta condición podemos ver que es una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$. Si conseguimos probar que es sucesión regular sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$, esto implicará nuestro resultado.

El ideal $\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$ es graduado, además es perfecto por estar generado por $n-1$ elementos y tener codimensión $n-1$. Así para ver que nuestro elemento es una sucesión regular nos basta ver que la raíz del ideal generado por él es el ideal maximal de nuestro anillo graduado. En el anillo $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_{L_2}(I_A)}$

$$-i_1 x_1 \xi_1 + \cdots + i_n x_n \xi_n = -i_1 x_1 \xi_1 + i_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1}$$

$$\xi_1(-i_1 x_1 \xi_1 + i_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1}) = -i_1 x_1 \xi_1^2,$$

$$\xi_{n-1}(-i_1 x_1 \xi_1 + i_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1}) = i_{n-1} x_{n-1} \xi_{n-1}^2.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{gr}^{L_2}(H_A(\beta)) = \langle \mathrm{in}_{L_2}(I_A), -i_1 x_1 \xi_1 + \cdots + i_n x_n \xi_n \rangle$$

y así,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathrm{gr}^{L_2}(H_A(\beta))} &= \sqrt{\langle \mathrm{in}_{L_2}(I_A), \sqrt{\langle -i_1 x_1 \xi_1 + \cdots + i_n x_n \xi_n \rangle} \rangle} \\ \sqrt{\mathrm{gr}^{L_2}(H_A(\beta))} &= \sqrt{\langle \xi_1 \xi_{n-1}, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n, \sqrt{\langle -i_1 x_1 \xi_1 + i_n x_n \xi_n \rangle} \rangle} \\ \sqrt{\mathrm{gr}^{L_2}(H_A(\beta))} &= \langle \xi_1 \xi_{n-1}, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n, x_1 \xi_1, x_{n-1} \xi_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

ideal homogéneo para las filtraciones F y V_n . Además obtenemos que

$$Ch^{L_2}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_{n-1}, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_n, x_1 \xi_1, x_{n-1} \xi_{n-1}).$$

Si L_n no fuese pendiente de nuestro sistema la L -variedad característica permanecería invariante para toda pendiente L , lo que claramente no ocurre. ■

Consideramos ahora matrices sin elementos repetidos, pero de forma que haya más de un elemento de cada signo. Si tuviésemos una matriz con todas las componentes negativas salvo una, multiplicando toda la matriz por -1 obtenemos una del tipo ya estudiado. Supongamos por tanto que nuestra matriz es

$$A = (-j_1 \quad -j_2 \quad \cdots \quad -j_n \quad i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_m)$$

con $j_k > 0$ $i_k > 0$ y además $j_1 > j_2 > \cdots > j_n$ e $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$.

Lema III-C.3 ■ Sea A una matriz $1 \times (m+n)$ de enteros sin términos repetidos ordenados de menor a mayor, sea $\beta \in \mathbb{C}$. El módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ con $1 < j < n+m$.

Demostración. Sea L una filtración cualquiera respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$ con $1 < j < n+m$, y $L \neq V$. Si consideramos el siguiente conjunto de elementos en el ideal tórico:

$$\partial_1^{j_2} - \partial_2^{j_1}, \partial_2^{j_3} - \partial_3^{j_2}, \dots, \partial_{n-1}^{j_n} - \partial_n^{j_{n-1}}, \partial_{n+1}^{i_2} - \partial_{n+2}^{i_1},$$

$$\partial_{n+2}^{i_3} - \partial_{n+3}^{i_2}, \dots, \partial_{n+m-1}^{i_m} - \partial_{n+m}^{i_{m-1}}, \partial_1^{i_m} \partial_{m+n}^{j_1} - 1.$$

Claramente el conjunto de exponentes de los binomios anteriores generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, además hay un exponente con todas sus coordenadas positivas, por lo que no necesitamos saturar respecto del monomio $\partial_1 \cdots \partial_{m+n}$. Llamemos J_C al ideal generado por estos operadores en el anillo $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_{m+n}]$.

Si consideramos sus L -símbolos principales obtenemos el conjunto

$$\{\xi_2^{j_1}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \xi_{n+2}^{i_3}, \dots, \xi_{m+n-1}^{i_m}, \xi_1^{i_m} \xi_{m+n}^{j_1}\}$$

que es una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_{m+n}]$, por lo tanto,

$$\langle \xi_2^{j_1}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \xi_{n+2}^{i_3}, \dots, \xi_{m+n-1}^{i_m}, \xi_1^{i_m} \xi_{m+n}^{j_1} \rangle = \text{in}_L(J_C).$$

Por la propiedad de ser nuestro conjunto de exponentes \mathbb{Q} -base, tenemos que,

$$\langle \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_1 \xi_{m+n} \rangle = \sqrt{\text{in}_L(I_A)}.$$

Nuestro interés se centra en el cálculo de $\text{gr}^L(H_A(\beta))$, para ello veamos que el elemento

$$\begin{aligned} \sigma^L(-j_1 x_1 \partial_1 - \dots - j_n x_n \partial_n + i_1 x_{n+1} \partial_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \partial_{m+n} - \beta) = \\ -j_1 x_1 \xi_1 - \dots - j_n x_n \xi_n + i_1 x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \end{aligned}$$

es una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}, \xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\text{in}_L(I_A)$. Para obtener este resultado nos basta que sea una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m+n}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{m+n}]/\sqrt{\text{in}_L(I_A)}$.

Como anteriormente veremos que nuestro elemento forma una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{m+n})[\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{m+n}]/\sqrt{\text{in}_L(I_A)}$, donde $\sqrt{\text{in}_L(I_A)}$ es un ideal graduado, y perfecto, ya que está generado por $n - 1$ elementos y tiene codimensión $n - 1$. Para ver que nuestro elemento es una sucesión regular nos basta ver que la raíz del ideal que genera es el ideal maximal de nuestro anillo graduado. Sobre el anillo $\mathbb{C}(x)[\bar{\xi}]/\sqrt{\text{in}_L(I_A)}$:

$$-j_1 x_1 \bar{\xi}_1 + \dots + i_m x_{m+n} \bar{\xi}_{m+n} = -j_1 x_1 \bar{\xi}_1 + i_m x_{m+n} \bar{\xi}_{m+n}$$

$$\xi_1(-j_1 x_1 \xi_1 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n}) = -j_1 x_1 \xi_1^2 + i_m x_{m+n} \xi_1 \xi_{m+n} \Rightarrow$$

$$\{x_1 \xi_1, x_{m+n} \xi_{m+n}\} \subset \sqrt{\langle -j_1 x_1 \xi_1 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle}.$$

Así obtenemos el resultado buscado. Esto implica que

$$\text{gr}^L(H_A(\beta)) = (\text{in}_L(I_A), -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n})$$

$$\sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} = \sqrt{\text{in}_L(I_A), \sqrt{\langle -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle}}$$

$$\sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} = \langle \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_1 \xi_{m+n}, x_1 \xi_1, x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle.$$

Este ideal claramente es homogéneo para las filtraciones F y V_j , por lo tanto \dot{L} no es pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$. Además hemos obtenido que, en particular,

$$\text{Ch}^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_1 \xi_{m+n}, x_1 \xi_1, x_{m+n} \xi_{m+n}).$$

■

Vamos a ver ahora que estos módulos tienen pendientes respecto de las hipersuperficies $x_1 = 0$ y $x_{m+n} = 0$.

Teorema III-C.4 ■ Sea A una matriz $1 \times (m+n)$ de enteros sin términos repetidos ordenados de menor a mayor, con más de un término de cada signo, sea $\beta \in \mathbb{C}$. El módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$ tiene una única pendiente respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, la definida por la filtración $L_1 = j_2 F + (j_1 - j_2) V_1$. Nuestro sistema tiene una sólo pendiente respecto de $x_{m+n} = 0$, es la definida por la filtración $L_{m+n} = i_{m-1} F + (i_m - i_{m-1}) V_{m+n}$.

Demostración. Es claro, siguiendo la prueba del lema anterior, que si consideramos una posible pendiente de nuestro sistema respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, de forma que $L' < L_1$, entonces no es pendiente de nuestro módulo y además

$$\text{Ch}^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_1 \xi_{m+n}, x_1 \xi_1, x_{m+n} \xi_{m+n}).$$

Consideremos ahora una filtración L'' respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, tal que $L'' > L_1$ y $L'' \neq V$, en este caso tomamos el conjunto de binomios del ideal tórico:

$$\begin{aligned} & \partial_1^{j_2} - \partial_2^{j_1}, \partial_2^{j_3} - \partial_3^{j_2}, \dots, \partial_{n-1}^{j_n} - \partial_n^{j_{n-1}}, \partial_{n+1}^{i_2} - \partial_{n+2}^{i_1}, \\ & \partial_{n+2}^{i_3} - \partial_{n+3}^{i_2}, \dots, \partial_{n+m-1}^{i_m} - \partial_{n+m}^{i_{m-1}}, \partial_2^{i_m} \partial_{m+n}^{j_2} - 1, \end{aligned}$$

que generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, llamemos J_C al ideal que generan estos operadores. Si tomamos sus L'' -símbolos principales obtenemos el conjunto:

$$\{\xi_1^{j_2}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \dots, \xi_{n+m-1}^{i_m}, \xi_2^{i_m} \xi_{m+n}^{j_2}\}$$

que claramente forman una sucesión regular en el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{m+n}]$, por lo tanto

$$\langle \xi_1^{j_2}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \dots, \xi_{n+m-1}^{i_m}, \xi_2^{i_m} \xi_{m+n}^{j_2} \rangle = \text{in}_{L''}(J_C)$$

como nuestros exponentes generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, obtenemos que:

$$\langle \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m-1}, \xi_2 \xi_{m+n} \rangle = \sqrt{\text{in}_{L''}(J_C)} = \sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}.$$

Para calcular $\text{gr}^{L''}(H_A(\beta))$, veamos que el elemento:

$$\begin{aligned} \sigma^{L''}(-j_1 x_1 \partial_1 - \dots - j_n x_n \partial_n + i_1 x_{n+1} \partial_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \partial_{m+n} - \beta) = \\ -j_1 x_1 \xi_1 - \dots - j_n x_n \xi_n + i_1 x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \end{aligned}$$

es una sucesión regular en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}, \xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\text{in}_{L''}(I_A)$. Para ello nos basta ver que lo es en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}, \xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$.

Es suficiente ver que nuestro elemento es sucesión regular en $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{m+n})[\xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$, donde el ideal $\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$ es graduado y perfecto, por lo que nos basta que nuestro elemento genere un ideal, tal que su raíz sea el ideal maximal del anillo $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$.

En nuestro anillo:

$$-j_1 x_1 \xi_1 - \dots - j_n x_n \xi_n + i_1 x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} =$$

$$= -j_2 x_2 \xi_2 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n}, \quad \xi_2(-j_2 x_2 \xi_2 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n}) = -j_2 x_2 \xi_2^2,$$

$$\xi_{m+n}(-j_2 x_2 \xi_2 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n}) = i_m x_{m+n} \xi_{m+n}^2,$$

por lo tanto

$$\{x_2 \xi_2, x_{m+n} \xi_{m+n}\} \subset \sqrt{\langle -j_2 x_2 \xi_2 + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle}.$$

Así obtenemos,

$$\text{gr}^{L''}(H_A(\beta)) = (\text{in}_{L''}(I_A), -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n})$$

$$\sqrt{\text{gr}^{L''}(H_A(\beta))} = \sqrt{\text{in}_{L''}(I_A), \sqrt{\langle -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle}}$$

$$\sqrt{\text{gr}^{L''}(H_A(\beta))} = \langle \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_2 \xi_{m+n}, x_2 \xi_2, x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle.$$

Este ideal es homogéneo para las filtraciones F y V , por lo que L'' no es pendiente. Además es claro que las L -variedades características sufren cambio al variar la pendiente, por lo que L_1 es pendiente de nuestro sistema. Además hemos visto que si $L'' > L_1$ con $L'' \neq V$,

$$\text{Ch}^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_2 \xi_{m+n}, x_2 \xi_2, x_{m+n} \xi_{m+n}).$$

Estudiemos ahora las pendientes de nuestro módulo respecto de la hipersuperficie $x_{m+n} = 0$. Como antes, si tomamos una filtración $L < L_{m+n}$, usando la prueba del lema anterior, obtenemos que,

$$\text{Ch}^L(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m+n-1}, \xi_1 \xi_{m+n}, x_1 \xi_1, x_{m+n} \xi_{m+n})$$

por lo tanto L no es pendiente de nuestro sistema.

Consideremos ahora una filtración L' respecto de la hipersuperficie $x_{m+n} = 0$, tal que $L' > L_{m+n}$ y $L' \neq V$, tomando el conjunto de elementos del ideal tórico:

$$\partial_1^{j_2} - \partial_2^{j_1}, \partial_2^{j_3} - \partial_3^{j_2}, \dots, \partial_{n-1}^{j_n} - \partial_n^{j_{n-1}}, \partial_{n+1}^{i_2} - \partial_{n+2}^{i_1},$$

$$\partial_{n+2}^{i_3} - \partial_{n+3}^{i_2}, \dots, \partial_{n+m-1}^{i_m} - \partial_{n+m}^{i_{m-1}}, \partial_1^{i_{m-1}} \partial_{m+n-1}^{j_1} - 1,$$

este conjunto de exponentes generan $\ker(\pi)$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, como hay un elemento con todas las componentes positivas no tenemos que saturar. Llamemos J_C al ideal generado por estos elementos.

Si consideramos sus L' -símbolos principales obtenemos el conjunto

$$\{\xi_2^{j_1}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \dots, \xi_{n+m-2}^{i_{m-1}}, \xi_{n+m}^{i_{m-1}}, \xi_1^{i_{m-1}} \xi_{m+n-1}^{j_1}\}$$

que claramente son una sucesión regular sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{m+n}]$, por lo que

$$\langle \xi_2^{j_1}, \xi_3^{j_2}, \dots, \xi_n^{j_{n-1}}, \xi_{n+1}^{i_2}, \dots, \xi_{n+m-2}^{i_{m-1}}, \xi_{n+m}^{i_{m-1}}, \xi_1^{i_{m-1}} \xi_{m+n-1}^{j_1} \rangle = \text{in}_{L'}(J_C)$$

por la condición de generadores de nuestros exponentes,

$$\langle \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m-2}, \xi_{n+m}, \xi_1 \xi_{m+n-1} \rangle = \sqrt{\text{in}_{L'}(J_C)} = \sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}.$$

Para calcular $\text{gr}^{L'}(H_A(\beta))$, veamos que el elemento

$$\begin{aligned} \sigma^{L'}(-j_1 x_1 \partial_1 - \dots - j_n x_n \partial_n + i_1 x_{n+1} \partial_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \partial_{m+n} - \beta) = \\ -j_1 x_1 \xi_1 - \dots - j_n x_n \xi_n + i_1 x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \end{aligned}$$

es una sucesión regular en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}, \xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\text{in}_{L'}(I_A)$. Para ello nos basta ver que lo es en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}, \xi_1, \dots, \xi_{m+n}]/\sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}$.

Es suficiente ver que nuestro elemento es sucesión regular en $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{m+n})(\xi_1, \dots, \xi_{m+n})/\sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}$, donde el ideal $\sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}$ es graduado y perfecto, por lo que nos basta que nuestro elemento genere un ideal tal que su raíz sea el ideal maximal de nuestro anillo graduado.

Así:

$$\begin{aligned} -j_1 x_1 \xi_1 - \dots - j_n x_n \xi_n + i_1 x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} = \\ -j_1 x_1 \xi_1 + i_{m-1} x_{m+n-1} \xi_{m+n-1}, \quad \xi_1(-j_1 x_1 \xi_1 + i_{m-1} x_{m+n-1} \xi_{m+n-1}) = -j_1 x_1 \xi_1^2, \\ \xi_{m+n-1}(-j_1 x_1 \xi_1 + i_{m-1} x_{m+n-1} \xi_{m+n-1}) = i_{m-1} x_{m+n-1} \xi_{m+n-1}^2, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{gr}^{L'}(H_A(\beta)) &= (\text{in}_{L'}(I_A), -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n}) \\ \sqrt{\text{gr}^{L'}(H_A(\beta))} &= \sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}, \sqrt{\langle -j_1 x_1 \xi_1 + \dots + i_m x_{m+n} \xi_{m+n} \rangle} \\ \sqrt{\text{gr}^{L'}(H_A(\beta))} &= \langle \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{m+n-2}, \xi_{m+n} \xi_1 \xi_{m+n-1}, x_1 \xi_1, x_{m+n-1} \xi_{m+n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Este ideal es homogéneo para F y V , por lo que L' no es pendiente del módulo, además,

$$Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{m+n-2}, \xi_{m+n}\xi_1\xi_{m+n-1}, x_1\xi_1, x_{m+n-1}\xi_{m+n-1}).$$

por lo que hay cambio en la L -variedad característica, y L_{m+n} es pendiente de nuestro módulo. ■

Nota III-C.5 ■ Si tenemos una matriz cuyo ideal tórico proviene de un semigrupo no reducido, y con elementos repetidos, utilizando el cambio de variables de III-B podemos reducirlo siempre a uno de los casos anteriores.

CAPÍTULO IV

Sistemas hipergeométricos definidos por dos filas

En este capítulo trataremos el problema del cálculo de pendientes en sistemas hipergeométricos definidos por una matriz de enteros con dos filas. Supondremos que el sistema proviene de un ideal tórico definido por un semigrupo reducido, esto nos proporcionará la ventaja de suponer siempre que todos los elementos de nuestra matriz son positivos o nulos y por lo tanto, que existe una graduación positiva del ideal tórico correspondiente. En general, haremos también dos hipótesis adicionales: (a) todos los menores 2×2 son distintos de cero, y (b) todos los circuitos son no homogéneos.

IV-A ECUACIONES DE LA VARIEDAD TÓRICA

Sea A una matriz de enteros $2 \times n$ con $n > 3$, ya que el caso 2×3 se ha estudiado en el capítulo II.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Podemos identificar cada columna de A con el monomio $t^{a_{1i}}s^{a_{2i}}$ del anillo de polinomios de Laurent $\mathbf{k}[t, s, t^{-1}, s^{-1}]$.

Consideremos el homomorfismo de álgebras de semigrupos:

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbf{k}[t, s, t^{-1}, s^{-1}] \\ x_i &\longmapsto t^{a_{1i}}s^{a_{2i}}. \end{aligned}$$

proveniente del homomorfismo de semigrupos:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{N}^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto (u_1 a_{11} + \cdots + u_n a_{1n}, u_1 a_{21} + \cdots + u_n a_{2n}). \end{aligned}$$

El núcleo de $\hat{\pi}$ es el ideal tórico I_A cuya variedad algebraica asociada $\mathcal{V}(I_A)$ viene dada por la parametrización:

$$x_1 = t^{a_{11}}s^{a_{21}}, x_2 = t^{a_{12}}s^{a_{22}}, \dots, x_n = t^{a_{1n}}s^{a_{2n}}.$$

Buscamos una nueva parametrización de la variedad $\mathcal{V}(I_A)$ de forma que todos los elementos de A sean positivos o nulos. Para ello usamos las ideas de [19]. Representemos sobre \mathbb{R}^2 las columnas de A , si consideramos el cono que definen, como suponemos que el ideal tórico proviene de un semigrupo reducido, la condición $(\mathbb{N}A) \cap (-\mathbb{N}A) = 0$, implica que hay dos columnas que delimitan el cono, que notaremos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, y como \mathbf{a}_i con $i = 3, \dots, n$ a todas las columnas interiores. Para todas ellas existen naturales q_i, r_i, p_i tales que:

$$q_i \mathbf{a}_i = r_i \mathbf{a}_1 + p_i \mathbf{a}_2.$$

Sea $q = m.c.m.\{q_3, \dots, q_n\}$ y $q = q_i m_i$, y reescribamos las expresiones anteriores:

$$q \mathbf{a}_i = m_i r_i \mathbf{a}_1 + m_i p_i \mathbf{a}_2.$$

Esto nos permite tomar una nueva parametrización de nuestra variedad:

$$x_1 = u^q, x_2 = v^q, x_3 = u^{m_3 r_3} v^{m_3 p_3}, \dots, x_n = u^{m_n r_n} v^{m_n p_n}.$$

Por lo tanto a partir de ahora podemos suponer que nuestra matriz tiene todos los elementos naturales y nuestro ideal tórico es graduado para una graduación (en grados positivos) de $\mathbf{k}[\partial]$.

IV-B POSIBLES PENDIENTES

Hasta ahora la única hipótesis adicional que habíamos tomado era que nuestro ideal tórico provenía de un semigrupo reducido, también vamos a suponer, a partir de ahora, no sólo que nuestra matriz tiene rango 2, sino que todos los menores 2×2 son diferentes de cero.

Puesto que estamos suponiendo que todos los menores 2×2 de A son diferentes de cero, esto implica que todos los circuitos tienen tres coordenadas diferentes de cero, y que hay $\binom{n}{3}$ circuitos.

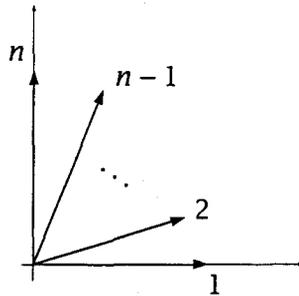
Si cada columna de A representa un punto de \mathbb{R}^2 , el hecho de que todos los menores 2×2 sean distintos de cero se traduce en que no hay dos puntos alineados con el origen de \mathbb{R}^2 .

Nuestro interés se centra en el cálculo de pendientes, por lo que suponemos que el sistema que estamos estudiando es irregular, es decir que el $(1, \dots, 1)$ no está en el \mathbb{Q} -espacio vectorial definido por las filas de A , o equivalentemente que el ideal tórico no es graduado para la graduación usual (ver I-H.12).

Cada circuito C no homogéneo, nos describe una pendiente para alguna variable, concretamente para aquéllas que están en el monomio de menor grado. A partir de ahora añadiremos una nueva hipótesis, supondremos no sólo que el sistema es irregular, sino que todos sus circuitos son no homogéneos, con ello tendremos que las únicas posibles pendientes de nuestro sistema son las descritas por nuestros circuitos (ver IV-B.1).

Si suponemos que todos los circuitos son no homogéneos, la representación de las columnas de A en \mathbb{R}^2 no tiene tres elementos alineados.

Representemos sobre \mathbb{R}^2 los vectores definidos por las columnas de A , esto nos proporciona un nuevo orden, diferente al dado en la sección IV-A, en nuestras columnas:



Puesto que la columna 2, está en el cono engendrado por la columna 1 y cualquier otra columna k eso implica que existen $q_1, q_2, q_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$q_2(a_{12}, a_{22}) = q_1(a_{11}, a_{21}) + q_k(a_{1k}, a_{2k}),$$

con lo que tenemos el circuito:

$$\partial_1^{q_1} \partial_k^{q_k} - \partial_2^{q_2}.$$

Proposición IV-B.1 ■ Dada A una matriz de enteros $2 \times n$ con todos los menores 2×2 distintos de cero y tal que todos sus circuitos son no homogéneos, entonces las únicas posibles pendientes que puede tener el sistema $H_A(\beta)$ asociado son las descritas por los circuitos.

Demostración. Gracias a la hipótesis, que nos da todos los circuitos no homogéneos, cada vez que consideremos una filtración L , que no sea descrita por ninguno de nuestros circuitos, obtendremos que $\sigma^L(C)$ es un monomio para cualquier circuito C .

Hagamos la prueba por inducción sobre el número de columnas n . Supongamos en primer lugar que $n = 4$. Y sea $L \neq V$ una fil-

tracción cualquiera no descrita por ningún circuito. Para ver que L no es pendiente de nuestro sistema nos basta con demostrar usando la proposición I-D.11 que:

$$\{x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, x_3 \xi_3, x_4 \xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Así supongamos que tenemos la numeración dada anteriormente. Entonces los circuitos son de la forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= \partial_1^{q_{1,1}} \partial_4^{q_{4,1}} - \partial_2^{q_{2,1}} \\ C_2 &= \partial_1^{q_{1,2}} \partial_4^{q_{4,2}} - \partial_3^{q_{3,2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos estar, dependiendo de la pendiente L , en una de los siguientes casos:

- $\xi_2, \xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$.

Tomando una forma reducida de A obtenemos los elementos:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{13}x_3\xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$a_{22}x_2\xi_2 + a_{23}x_3\xi_3 + a_{24}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

de forma inmediata $\{x_1 \xi_1, \xi_2, \xi_3, x_4 \xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$.

- $\xi_2, \xi_1 \xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$ (análogamente para $\xi_3, \xi_1 \xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$).

Tomando una forma reducida de A obtenemos el elemento:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{14}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \Rightarrow$$

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{14}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$\xi_1(a_{11}x_1\xi_1 + a_{14}x_4\xi_4) = a_{11}x_1\xi_1^2 + a_{14}x_4\xi_1\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow$$

$$x_1\xi_1 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow \{x_1\xi_1, \xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

- $\xi_1 \xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$.

Tomando el circuito C con soporte en $\{1, 2, 3\}$, podemos obtener $\sigma^L(C) = \xi_2^{q_{2,3}}$ ó $\sigma^L(C) = \xi_1^{q_{1,3}} \xi_3^{q_{3,3}}$, en el primer caso repetimos el razonamiento del apartado anterior.

Si ahora consideramos el circuito C' con soporte en $\{2, 3, 4\}$, y si su L -símbolo principal viniese dado por una variable, es decir $\sigma^L(C') = \xi_3^{q_{3,4}}$, como antes, sería un caso ya estudiado.

Por lo tanto, el único caso no descrito sería si C y C' tuviesen sus L -símbolos principales descritos por dos variables, es decir $\sigma^L(C) = \xi_1^{q_{1,3}} \xi_3^{q_{3,3}}$ y $\sigma^L(C') = \xi_2^{q_{2,4}} \xi_4^{q_{4,4}}$.

Considerando una forma reducida de A obtenemos los elementos

$$\begin{aligned} a_{11}x_1\xi_1 + a_{13}x_3\xi_3 + a_{14}x_4\xi_4 &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \\ a_{21}x_1\xi_1 + a_{22}x_2\xi_2 + a_{24}x_4\xi_4 &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \Rightarrow \\ \xi_1(a_{11}x_1\xi_1 + a_{13}x_3\xi_3 + a_{14}x_4\xi_4) &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \\ x_1\xi_1 &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \Rightarrow \\ \xi_4(a_{21}x_1\xi_1 + a_{22}x_2\xi_2 + a_{24}x_4\xi_4) &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \Rightarrow \\ x_4\xi_4 &\in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}, \Rightarrow \\ \{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} &\subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}. \end{aligned}$$

Supongamos probado el resultado para matrices A con menos de k columnas. Sea por tanto A una matriz $2 \times k$. Y sea $L \neq V$ una filtración no proveniente de ninguno de los circuitos descritos por A .

Supongamos que exista un circuito C tal que $\sigma^L(C) = \xi_i^q$. Tomamos la submatriz A' de A , obtenida eliminando la columna i -ésima de A . Obtenemos que todos los circuitos de A' lo son también de A , además $x_i\xi_i \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, por lo que

$$\sqrt{\text{gr}^L(H_{A'}(\beta))} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

por hipótesis de inducción,

$$\{x_1\xi_1, \dots, x_{i-1}\xi_{i-1}, x_{i+1}\xi_{i+1}, \dots, x_k\xi_k\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_{A'}(\beta))},$$

por lo que, finalmente

$$\{x_1\xi_1, \dots, x_k\xi_k\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Estudiemos el caso, por tanto, en que todos los L -símbolos principales de nuestros circuitos son monomios dependientes de dos variables. Nos basta tomar, siguiendo nuestra notación los siguientes $k - 1$ circuitos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \partial_1^{q_{1,1}} \partial_3^{q_{3,1}} - \partial_2^{q_{2,1}} \\ C_2 &= \partial_1^{q_{1,2}} \partial_4^{q_{4,2}} - \partial_2^{q_{2,2}} \\ &\vdots \\ C_{k-1} &= \partial_1^{q_{1,k-1}} \partial_k^{q_{k,k-1}} - \partial_2^{q_{2,k-1}} \end{aligned}$$

para los que suponemos que:

$$\sigma^L(C_1) = \xi_1^{q_{1,1}} \xi_3^{q_{3,1}}, \quad \sigma^L(C_2) = \xi_1^{q_{1,2}} \xi_4^{q_{4,2}}, \quad \dots, \quad \sigma^L(C_{k-1}) = \xi_1^{q_{1,k-1}} \xi_k^{q_{k,k-1}}.$$

Mediante una forma reducida de A siempre podemos obtener el elemento:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{13}x_3\xi_3 + a_{14}x_4\xi_4 + \dots + a_{1k}x_k\xi_k \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

$$\xi_1(a_{11}x_1\xi_1 + a_{13}x_3\xi_3 + a_{14}x_4\xi_4 + \dots + a_{1k}x_k\xi_k) =$$

$$a_{11}x_1\xi_1^2 + a_{13}x_3\xi_1\xi_3 + a_{14}x_4\xi_1\xi_4 + \dots + a_{1k}x_k\xi_1\xi_k$$

por lo que,

$$x_1\xi_1 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Consideramos ahora la submatriz A' , obtenida al quitarle la primera columna a A . Tenemos que todos los circuitos de A' lo son también de A , y con la condición que acabamos de obtener y con nuestra hipótesis de inducción,

$$\{x_2\xi_2, \dots, x_k\xi_k\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_{A'}(\beta))}$$

por lo tanto,

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, \dots, x_k\xi_k\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

■

IV-C TRIANGULACIONES REGULARES

En esta sección expondremos las ideas de Sturmfels [45], que nos permiten determinar los ideales iniciales de un ideal tórico.

Sea I un ideal en $k[\partial_1, \dots, \partial_n]$ y sea \prec un orden monomial, tal que $\text{in}_\prec(I)$ es un ideal monomial. Podemos identificar el conjunto de ceros de $\text{in}_\prec(I)$ con un complejo simplicial.

El complejo inicial $\Delta_\prec(I)$, de I respecto de \prec , es el complejo simplicial sobre el conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$, definido según la siguiente regla: Un subconjunto $F \subset \{1, \dots, n\}$ es cara de $\Delta_\prec(I)$, si no hay ningún polinomio $f \in I$, tal que monomio inicial $\text{in}_\prec(f)$ tiene soporte igual a F . De forma equivalente; $\Delta_\prec(I)$, es el complejo simplicial cuyo ideal de Stanley-Reisner es el radical de $\text{in}_\prec(I)$.

Si consideramos un ideal tórico I_A definido por una matriz A $d \times n$ con columnas $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Si σ es un subconjunto de A , escribiremos $\text{pos}(\sigma)$, para describir el cono generado por σ . Una triangulación de A es una colección Δ de subconjuntos de A , tal que $\{\text{pos}(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$, es el conjunto de conos de un abanico simplicial cuyo soporte es igual a $\text{pos}(A)$.

Identificaremos nuestro conjunto $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, con el conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplo IV-C.1 ■ Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos cuatro triangulaciones:

$$\begin{aligned} \Delta^1 &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} \\ \Delta^2 &= \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\} \\ \Delta^3 &= \{\{1, 3\}, \{3, 4\}\} \\ \Delta^4 &= \{\{1, 4\}\} \end{aligned}$$

Si consideramos $\omega \in \mathbb{R}^n$ un vector genérico, éste define una triangulación Δ_ω , de la siguiente forma: Un subconjunto $\{i_1, \dots, i_r\}$ es cara de Δ_ω si existe un vector $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\begin{cases} \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = \omega_j & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_r\} \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} < \omega_j & \text{si } j \notin \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}$$

Una triangulación Δ de A se dice regular si $\Delta = \Delta_\omega$, para algún $\omega \in \mathbb{R}^d$.

Una triangulación regular Δ_ω se puede construir geoméricamente:

- Usando las coordenadas de ω como alturas, elevamos la configuración de A a una dimensión mayor. Consideramos la nueva configuración $\hat{A} = \{(\mathbf{a}_1, \omega_1), \dots, (\mathbf{a}_n, \omega_n)\} \subset \mathbb{R}^d$.
- Las "caras bajas" del cono $\text{pos}(\hat{A})$ forman un complejo poliedral de dimensión d . (Diremos que una cara es "baja" si su vector normal tiene la última coordenada negativa). Finalmente, la triangulación Δ_ω es la imagen de este complejo mediante la proyección sobre las primeras d coordenadas.

Ejemplo IV-C.2 ■ Si volvemos a nuestro ejemplo IV-C.1, vemos que todas sus triangulaciones son regulares:

$$\Delta^1 = \Delta_{(1,0,0,1)}, \quad \Delta^2 = \Delta_{(1,0,1,1)}, \quad \Delta^3 = \Delta_{(1,1,0,1)}, \quad \Delta^4 = \Delta_{(0,1,1,0)}.$$

Sin embargo existen triangulaciones que no son regulares.

El resultado principal, cuya prueba la encontramos en [45], es el siguiente:

Teorema IV-C.3 ■ Las triangulaciones regulares de A , son los complejos iniciales del ideal tórico I_A . Más concretamente, si $\omega \in \mathbb{R}^d$, representa un orden monomial \prec para I_A , entonces $\Delta_\prec(I_A) = \Delta_\omega$.

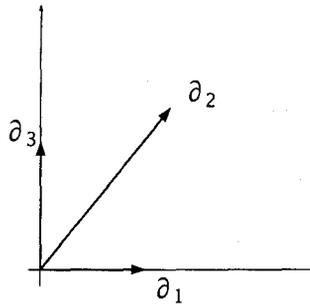
Corolario IV-C.4 ■ Para $\omega \in \mathbb{R}^d$, genérico, el radical del ideal inicial de I_A es igual a

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_\omega(I_A)} &= \langle \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_s} : \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \text{ es no-cara minimal de } \Delta_\omega \rangle \\ &= \bigcap_{\sigma \in \Delta_\omega} \langle \partial_i : i \notin \sigma \rangle. \end{aligned}$$

IV-D TRIANGULACIONES Y PENDIENTES

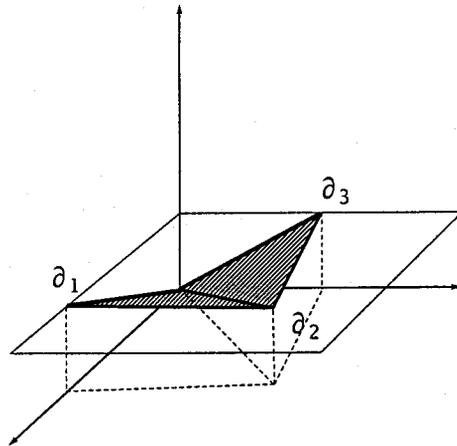
En primer lugar, nos centraremos en un caso ya conocido, el caso de matrices 2×3 , utilizando el hecho de que conocemos el ideal tórico que define (que es principal), y usando los resultados de triangulaciones regulares sobre éstos, obtendremos una condición geométrica sobre la representación de las columnas de A , para determinar el F -símbolo principal de un circuito. A partir de esto encontraremos una condición que nos determinará con respecto a qué hipersuperficies $x_j = 0$, no hay pendientes.

Consideremos una matriz 2×3 , de rango 2, con todos los menores 2×2 distintos de cero. Sabemos que siempre podemos suponer que los elementos de A son positivos, usando nuestra construcción, incluso podemos tomar dos de ellos sobre los ejes coordenados. Supongamos que tenemos una configuración de la forma:



Nuestros puntos no están alineados ya que estamos considerando que el sistema no es regular. Si estamos interesados en calcular $\text{in}_{(1,1,1)}(I_A)$, utilizando las triangulaciones regulares definidas anteriormente, tenemos que considerar el cono generado por los elementos

$\{(a_{11}, 0, 1), (a_{12}, a_{22}, 1), (0, a_{23}, 1)\}$, que por la forma que hemos tomado nuestra configuración nos proporciona, la siguiente figura:

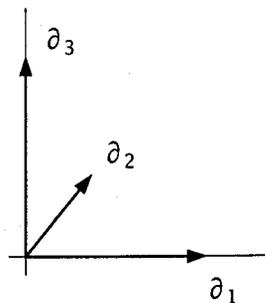


Claramente, sus "caras bajas" son dos, la definida por $\{1, 2\}$ y la definida por $\{2, 3\}$, por lo tanto usando el corolario IV-C.4, obtenemos que, en este caso:

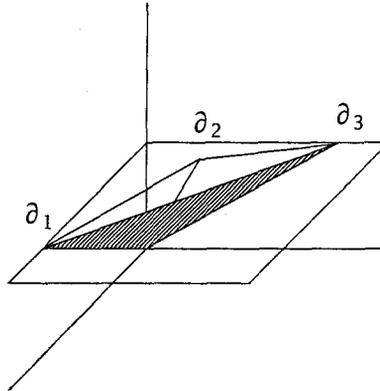
$$\sqrt{\text{in}_{(1,1,1)}(I_A)} = \langle \partial_1 \rangle \cap \langle \partial_3 \rangle = \langle \partial_1 \partial_3 \rangle.$$

Es claro que el ideal tórico está generado por un binomio de la forma $I_A = \langle \partial_1^{q_1} \partial_3^{q_3} - \partial_2^{q_2} \rangle$, acabamos de obtener una configuración sobre \mathbb{R}^2 que nos proporciona la condición $q_1 + q_3 > q_2$.

Si consideramos ahora que nuestra matriz tiene una configuración de la forma:



De la misma forma que antes obtenemos un nuevo cono sobre

\mathbb{R}^3 :

Ahora es claro que sólo tenemos una “cara baja”, la definida por $\{1, 3\}$, por lo que utilizando de nuevo el corolario IV-C.4, en este caso tenemos que

$$\sqrt{\text{in}_{(1,1,1)}(I_A)} = \langle \partial_2 \rangle.$$

Si el ideal tórico está generado por un elemento $I_A = \langle \partial_1^{q_1} \partial_3^{q_3} - \partial_2^{q_2} \rangle$, nuestra configuración implica que $q_2 > q_1 + q_3$.

Por lo tanto acabamos de obtener, un resultado general para ideales tóricos definidos por matrices con dos filas con todos sus menores 2×2 distintos de cero. Si tenemos un circuito definido por columnas $i < j < k$ ordenadas como antes, si el convexo definido por estas columnas y el punto $(0, 0)$, tiene tres caras, entonces este circuito $\partial_i^{q_i} \partial_k^{q_k} - \partial_j^{q_j}$, verifica que: $q_i + q_k < q_j$. Sin embargo, si este convexo tiene cuatro caras, entonces este circuito verifica que $q_i + q_k > q_j$.

A partir de ahora, notaremos Γ , a la envolvente convexa del conjunto formado por las columnas de A y el punto $(0, 0)$. Cambiaremos de nuevo la numeración de las variables, dando los primeros índices a los vértices de Γ , definidos por las columnas de A , siguiendo el mismo orden entre ellos que antes, a continuación numeraremos con un orden arbitrario todas las columnas que quedan en el interior de Γ .

Proposición IV-D.1 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con todos los menores 2×2 distintos de cero, y tal que todos sus circuitos sean no homogéneos para la graduación usual, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ supongamos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el $(0, 0)$, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables, entonces el sistema $H_A(\beta)$ no tiene pendientes respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, con $j > k$.

Demostración. Sea $L \neq V$ una filtración cualquiera, respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, con $j > k$. Puesto que la columna j -ésima es interior a Γ , existen dos vértices consecutivos $r, r + 1$ del convexo de forma que nos proporcionan un circuito:

$$\partial_r^{q_r} \partial_{r+1}^{q_{r+1}} - \partial_j^{q_j}, \quad \text{con } q_j > q_r + q_{r+1}.$$

Por lo tanto

$$\sigma^L(\partial_r^{q_r} \partial_{r+1}^{q_{r+1}} - \partial_j^{q_j}) = \xi_j^{q_j}, \Rightarrow \xi_j \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Notamos A' a la submatriz de A obtenida al quitarle la columna j -ésima. Puesto que L es una filtración respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, la restricción de L al sistema $H_{A'}(\beta)$ es la filtración F . F no es una pendiente definida por ningún circuito, ya que todos son no homogéneos, por lo que usando la prueba de la proposición IV-B.1, tenemos que:

$$\{x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, x_{j+1} \xi_{j+1}, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^F(H_{A'}(\beta))}.$$

Con la condición anterior obtenemos que:

$$\sqrt{\text{gr}^F(H_{A'}(\beta))} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Así:

$$\{x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} \xi_{j+1}, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

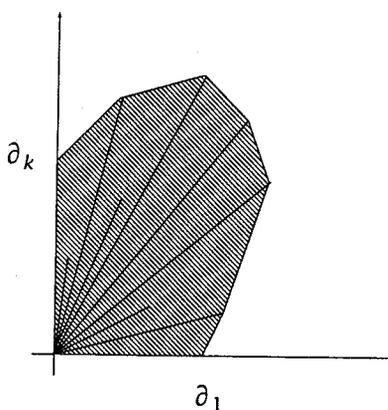
y por lo tanto L no es pendiente del módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$. ■

Ahora nos interesamos por las pendientes de nuestro sistema. Ya sabemos que las columnas interiores a Γ no definen pendientes de nuestro módulo. Para buscar las pendientes veamos en primer lugar cómo es $Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta))$.

Proposición IV-D.2 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con todos los menores 2×2 distintos de cero, y tal que todos sus circuitos sean no homogéneos para la graduación usual, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ supongamos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el $(0, 0)$, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables. Entonces:

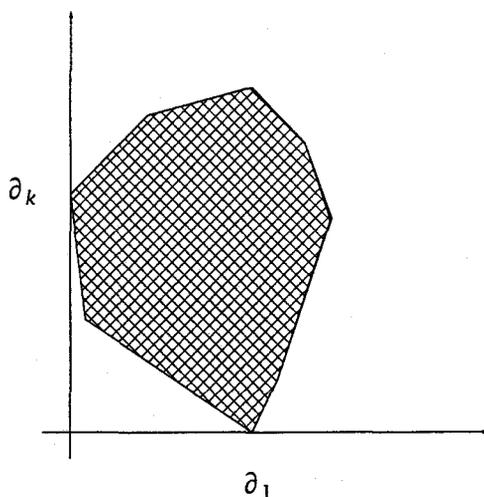
$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = & \mathcal{V}(((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_2, \xi_5, \dots, \xi_n) \cap \\ & \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) + (x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n)) = \\ & \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ & \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k) \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar hemos de calcular $in_{(1, \dots, 1)}(I_A)$, usando las triangulaciones regulares que conocemos, si Γ es de la forma

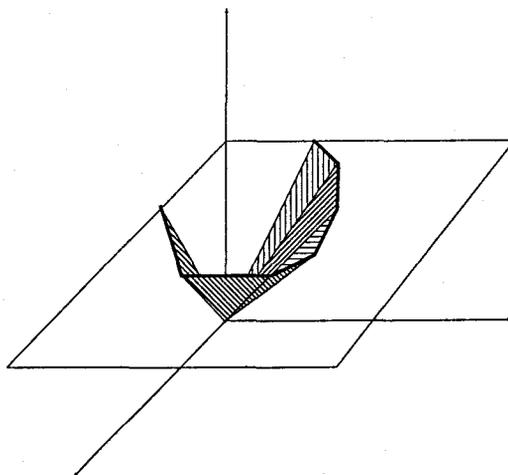


Si queremos calcular Δ_ω , con $\omega = (1, \dots, 1)$, consideraríamos el cono en \mathbb{R}^3 definido por los puntos $(a_{11}, 0, 1), (a_{12}, a_{22}, 1), \dots, (0, a_{2k}, 1), \dots$

$(a_{1n}, a_{2n}, 1)$, todos ellos sobre el mismo plano $z = 1$, cuyo corte nos proporcionaría la figura:



Queremos determinar cuáles serán las “caras bajas” del cono antes definido, la figura anterior nos define todas las caras, y por su situación con respecto al punto $(0, 0, 0)$, nos proporciona que las “caras bajas” son las descritas por:



Esto es, las “caras bajas” corresponden a las caras que no con-

tienen al $(0, 0)$ de Γ . Es decir:

$$\Delta_{(1, \dots, 1)} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}\}.$$

Por lo tanto gracias al corolario IV-C.4 obtenemos que:

$$\sqrt{\text{in}_{(1, \dots, 1)}(I_A)} = (\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Nos interesamos por el cálculo de la F -variedad característica del sistema $H_A(\beta)$, para ello vamos a usar el teorema I-H.10. Queremos demostrar que los elementos dados por las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\text{in}_F(I_A)$. Si formasen una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$, obtendríamos el resultado buscado. Incluso si vemos que son una sucesión regular sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ nos bastaría.

Veamos en primer lugar que el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$, es Cohen-Macaulay, lo que equivale a ver que el ideal $\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ es perfecto, para ello usaremos la proposición I-H.6.

Haremos la prueba por inducción. Es claro, que los ideales (ξ_3, \dots, ξ_n) y $(\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n)$ son perfectos sobre el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, ya que están generados por sucesiones regulares. Además

$$\text{codim}((\xi_3, \dots, \xi_n)) = \text{codim}((\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n)) = n - 2,$$

claramente $(\xi_3, \dots, \xi_n) \not\subseteq (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n)$, y $(\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \not\subseteq (\xi_3, \dots, \xi_n)$. El ideal:

$$(\xi_3, \dots, \xi_n) + (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_n)$$

es evidentemente perfecto, por estar generado por una sucesión regular y tiene codimensión $n-1$ es decir $\text{codim}(\xi_3, \dots, \xi_n) + 1$, por lo tanto: la intersección de estos ideales es perfecto, y además

$$\text{codim}((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n)) = n - 2.$$

Supongamos ahora que el ideal

$$(\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n)$$

es perfecto y de codimensión $n - 2$.

Vamos a probar que

$$(\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n) \cap \\ \cap (\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+3}, \dots, \xi_n).$$

es perfecto y de codimensión $n-2$. Acabamos de ver que la intersección de los j primeros ideales es un ideal perfecto y de codimensión $n - 2$. Igual que antes, $(\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+3}, \dots, \xi_n)$ es perfecto por estar generado por una sucesión regular y su codimensión es $n - 2$. Además

$$\xi_j \notin ((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n)),$$

y

$$\xi_{j+2} \notin (\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+3}, \dots, \xi_n)$$

por lo que estamos en las hipótesis de la proposición I-H.6.

Si estudiamos la suma de estos dos ideales obtenemos:

$$((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n)) + \\ + (\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+3}, \dots, \xi_n) = \\ (\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n).$$

Este ideal es perfecto y su codimensión es $n - 1$, por lo que obtenemos el resultado buscado.

Es claro que el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_F(I_A)}$ es un ideal graduado, acabamos de ver que es Cohen-Macaulay, para ver que los F -símbolos principales de elementos generados por las filas de A forman una sucesión sobre este anillo nos basta ver:

$$\sqrt{(a_{11}x_1\xi_1 + \dots + a_{1n}x_n\xi_n, a_{21}x_1\xi_1 + \dots + a_{2n}x_n\xi_n)} = \mathfrak{m}$$

donde \mathfrak{m} representa el ideal maximal de nuestro anillo graduado, pero precisamente en la prueba de la proposición IV-B.1 obtuvimos que

$$\{x_1\xi_1, \dots, x_n\xi_n\} \subset \sqrt{(A\xi) + \sqrt{\text{in}_F(I_A)}}$$

donde

$$\langle Ax\xi \rangle = \langle a_{11}x_1\xi_1 + \dots + a_{1n}x_n\xi_n, a_{21}x_1\xi_1 + \dots + a_{2n}x_n\xi_n \rangle$$

es claro que $(0, \dots, 0) \in \mathcal{V}\langle Ax\xi \rangle$, por lo que no es el total, y así obtenemos el resultado buscado. Por lo tanto

$$\text{gr}^F(H_A(\beta)) = \text{in}_F(I_A) + \langle Ax\xi \rangle.$$

Para determinar la F -variedad característica:

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{gr}^F(H_A(\beta))} &= \sqrt{\sqrt{\text{in}_F(I_A)} + \sqrt{\langle Ax\xi \rangle}}, \\ \sqrt{\text{gr}^F(H_A(\beta))} &= \sqrt{((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_2, \xi_5, \dots, \xi_n) \cap \\ &\quad \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) + \sqrt{\langle Ax\xi \rangle}}, \\ \sqrt{\text{gr}^F(H_A(\beta))} &= ((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_2, \xi_5, \dots, \xi_n) \cap \\ &\quad \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) + \langle x_1\xi_1, \dots, x_n\xi_n \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto usando el corolario IV-C.4:

$$\begin{aligned} \text{Ch}^F(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(\xi_1\xi_3, \xi_1\xi_4, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_2\xi_4, \xi_2\xi_5, \dots, \xi_2\xi_k, \dots, \\ &\quad \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1\xi_1, \dots, x_k\xi_k). \end{aligned}$$

Centrémonos en el cálculo de pendientes para las hipersuperficies $x_j = 0$ con $j \leq k$. Empecemos con $x_1 = 0$.

Teorema IV-D.3 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con todos los menores 2×2 distintos de cero, y tal que todos sus circuitos sean no homogéneos para la graduación usual, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ supongamos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el $(0, 0)$, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables.

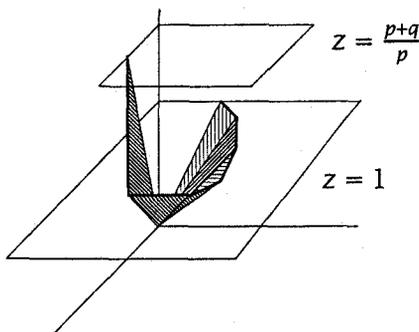
Entonces existe alguna pendiente respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$ si y sólo si existe alguna columna de A que se sitúe entre la primera y la segunda columna (con el orden descrito en la sección IV-B).

En las condiciones anteriores, consideramos el convexo Γ' , envolvente convexa de $(0, 0)$ y todas las columnas de A salvo la primera. Cada cara de Γ' , $\{j, h\}$, que no lo sea de Γ y que no contenga a $(0, 0)$, nos proporciona un circuito que describe una pendiente respecto de $x_1 = 0$. Y no hay más pendientes respecto de $x_1 = 0$.

Demostración. Antes vimos que cuando consideramos la filtración F , esto se correspondía en el ideal tórico con el estudio de $\text{in}_{(1, \dots, 1)}(I_A)$.

Si tenemos una pendiente cualquiera $L = pF + qV$ respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, entonces tenemos que considerar el ideal inicial $\text{in}_{(p+q, p, \dots, p)}(I_A)$. Para estudiar estos ideales iniciales usando triangulaciones regulares, lo que haremos será dejar fijas las coordenadas distintas de 1, es decir, considerar el cono generado por $(a_{1i}, a_{2i}, 1)$ y al punto correspondiente a la primera columna darle altura $\frac{p+q}{q}$.

Supongamos que no existe ninguna columna de A de forma que se sitúe entre las columnas 1 y 2, en este caso dada $L = pF + qV$ filtración respecto de $x_1 = 0$, consideraríamos la triangulación dada por:



Por lo que claramente, para todo $p, q \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\Delta_{(p+q, p, \dots, p)} = \Delta_{(1, \dots, 1)} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}\}.$$

Así tenemos que

$$\sqrt{\text{in}_{(1,\dots,1)}(I_A)} = \sqrt{\text{in}_{(p+q,p,\dots,p)}(I_A)}.$$

Por todo esto, repitiendo la prueba de la proposición IV-D.2, no hay cambio en la L -variedad característica por lo que no hay pendientes respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$.

Supongamos ahora que tenemos un único elemento entre las columnas 1 y 2, al que notaremos j . Lo que implicaría que Γ' tiene a la cara $\{2, j\}$, que no lo es de Γ , y no contiene al $(0, 0)$. Veamos que en este caso nuestro sistema tiene la pendiente para $x_1 = 0$ descrita por el circuito en las variables $\{1, 2, j\}$.

Por nuestras hipótesis esto significa que existe un elemento en el ideal tórico de la forma:

$$\partial_1^{q_1} \partial_2^{q_2} - \partial_j^{q_j}, \quad q_1 + q_2 < q_j.$$

Si suponemos que los elementos de nuestra matriz verifican que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$. Entonces, teniendo en cuenta que:

$$q_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1j} \\ a_{22} & a_{2j} \end{vmatrix} \quad q_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix} \quad q_j = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Es sencillo ver que si consideramos el cono generado por los elementos $(a_{11}, a_{21}, \frac{q_j - q_2}{q_1})$, $(a_{12}, a_{22}, 1)$, \dots , $(a_{1n}, a_{2n}, 1)$, entonces tenemos a $(0, 0, 0)$, $(a_{11}, a_{21}, \frac{q_j - q_2}{q_1})$, $(a_{12}, a_{22}, 1)$ y $(a_{1j}, a_{2j}, 1)$ sobre un mismo plano.

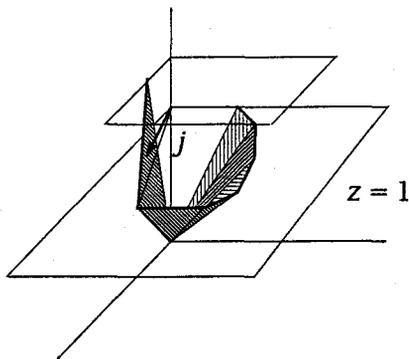
Si la matriz A verificase la condición $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, en ese caso tenemos

$$q_1 = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1j} \\ a_{22} & a_{2j} \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix} \quad q_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y obtenemos que $(0, 0, 0)$, $(a_{11}, a_{21}, \frac{q_j - q_2}{q_1})$, $(a_{12}, a_{22}, 1)$, \dots , $(a_{1n}, a_{2n}, 1)$, están apoyados en un mismo plano.

Si llamamos $L_1 = q_1F + (q_j - q_1 - q_2)V$, filtración respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, es claro que esta filtración restringida al anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, no nos proporciona un ideal monomial. Pero de la misma

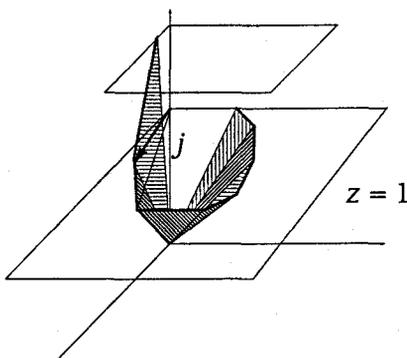
forma que antes es fácil ver que si $L < L_1$, y notamos ω al vector en \mathbb{R}^n , que denota el orden monomial definido por L , tenemos que j es interior al cono definido:



Así obtenemos:

$$\Delta_{\omega} = \Delta_{(1, \dots, 1)} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}\}.$$

Si tomamos ahora $L' > L_1$, y notamos ω' al vector de \mathbb{R}^n que representa la restricción de L' al anillo conmutativo, en este caso tenemos de nuevo un ideal inicial monomial. Si consideramos la triangulación que este orden nos proporciona para el ideal tórico, obtenemos



Es decir

$$\Delta_{\omega'} = \{\{1, j\}, \{j, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}\},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_{\omega'}(I_A)} &= (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \cap \\ &\quad \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Análogamente a la proposición IV-D.2 se prueba que este ideal es perfecto. Queremos estudiar la L' -variedad característica del sistema $H_A(\beta)$, para ello veamos, como en la prueba de IV-D.2, que los elementos dados por las filas de A son una sucesión regular sobre el anillo graduado $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}$, siguiendo la demostración de la proposición IV-B.1, tenemos que

$$\{x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\langle Ax\xi \rangle + \sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}}$$

que generan el ideal maximal del anillo graduado $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_{L'}(I_A)}$, por lo que obtenemos que

$$\text{gr}^{L'}(H_A(\beta)) = \text{in}_{L'}(I_A) + \langle Ax\xi \rangle,$$

repetiendo el proceso de la demostración de la proposición IV-D.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{gr}^{L'}(H_A(\beta))} &= (\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_j \xi_3, \dots, \xi_j \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ &\quad \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k, x_j \xi_j), \\ Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_j \xi_3, \dots, \xi_j \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ &\quad \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k, x_j \xi_j). \end{aligned}$$

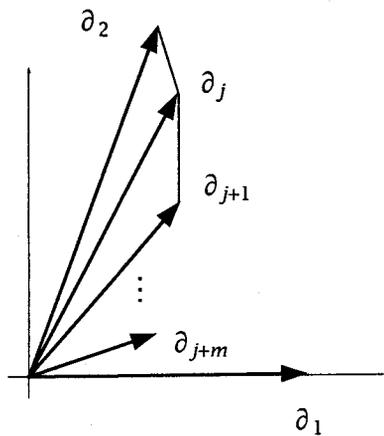
Es evidente que las variedades características han variado con las filtraciones, por lo que L_1 describe una pendiente de nuestro sistema.

Si tuviésemos alguna columna, entre 1 y 2, de forma que fuese interior al convexo Γ' , es claro que toda la prueba anterior es válida, y que por tanto este elemento no proporcionaría ningún cambio en los cálculos de las L -variedades características, por lo que no proporciona ninguna pendiente respecto de $x_1 = 0$.

Supongamos ahora que el convexo Γ' tenga más de una cara no contenida en Γ , que no contenga a $(0, 0)$. Para simplificar la notación consideremos que los vértices de Γ' están numerados de forma consecutiva, siendo j el más cercano a 2 y notemos $j + m$ al último de estos vértices.

Fijada esta notación, nuestro objetivo es probar que dada una cara de Γ' , $\{r, r + 1\}$ que no contenga a $(0, 0)$ y que esté situada entre $(0, 0)$ y 2, entonces, el circuito con soporte en las variables $\{1, r, r + 1\}$ describe una pendiente respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, que es pendiente de nuestro sistema.

Si tenemos la configuración:



En I_A existen elementos de la forma:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \partial_1^{q_{1,1}} \partial_2^{q_{2,1}} - \partial_j^{q_{j,1}}, & q_{j,1} &> q_{1,1} + q_{2,1}, \\
 Q_2 &= \partial_1^{q_{1,2}} \partial_j^{q_{j,2}} - \partial_{j+1}^{q_{j+1,2}}, & q_{j+1,2} &> q_{1,2} + q_{j,2}, \\
 &\vdots \\
 Q_{m+1} &= \partial_1^{q_{1,m+1}} \partial_{j+m-2}^{q_{j+m-2,m+1}} - \partial_{j+m-1}^{q_{j+m-1,m+1}}, & q_{j+m-1,m+1} &> q_{1,m+1} + q_{j+m-2,m+1}.
 \end{aligned}$$

Donde $q_{i,j}$ son naturales que se definen como menores de A , de forma análoga al caso con sólo un nuevo vértice.

A continuación veamos que las pendientes que describen sucesivamente estos elementos respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$,

forman una sucesión creciente.

Dados dos elementos consecutivos de entre los anteriores, eliminando la primera coordenada obtenemos nuevo elemento de $\ker(\pi)$:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{q_{1,r+1}q_{j+r-2,r}}_{j+r-2}, \underbrace{-q_{1,r+1}q_{j+r-1,r} - q_{1,r}q_{j+r-1,r+1}}_{j+r-1}, \underbrace{q_{1,r}q_{j+r,r+1}}_{j+r}, 0, \dots, 0),$$

que nos proporciona un elemento del ideal tórico, que por la forma de la configuración es de la forma:

$$\partial_{j+r-2}^{q_{1,r+1}q_{j+r-2,r}} \partial_{j+r}^{q_{1,r}q_{j+r,r+1}} - \partial_{j+r-1}^{q_{1,r+1}q_{j+r-1,r} + q_{1,r}q_{j+r-1,r+1}},$$

con

$$q_{1,r+1}q_{j+r-1,r} + q_{1,r}q_{j+r-1,r+1} < q_{1,r+1}q_{j+r-2,r} + q_{1,r}q_{j+r,r+1}$$

y esta condición equivale a

$$\frac{q_{1,r}}{q_{1,r} + q_{j+r-2,r} - q_{j+r-1,r}} < \frac{q_{1,r+1}}{q_{1,r+1} + q_{j+r-1,r+1} - q_{j+r,r+1}},$$

es decir, que la pendiente, respecto de $x_1 = 0$ definida por Q_r es menor que la definida por Q_{r+1} .

A partir de ahora, notaremos L_i a la filtración respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, que nos proporciona el operador Q_i , es decir,

$$L_1 = q_{1,1}F + (q_{j,1} - q_{1,1} - q_{2,1})V$$

y

$$L_i = q_{1,i}F + (q_{j+i-1,i} - q_{1,i} - q_{j+i-2,i})V, \quad i \geq 2.$$

También notaremos ω_i a los vectores de \mathbb{R}^n que nos describen la restricción de dichas filtraciones al anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, es decir,

$$\omega_1 = (q_{j,1} - q_{2,1}, q_{1,1}, \dots, q_{1,1}) \quad \text{y} \quad \omega_i = (q_{j+i-1,i} - q_{j+i-2,i}, q_{1,i}, \dots, q_{1,i}) \quad i \geq 2.$$

Nuestro interés se centra en demostrar que las pendientes definidas por las filtraciones L_i son pendientes del sistema hipergeométrico. Para ello estudiaremos las triangulaciones regulares de A . Las diferentes alturas que tomaremos las notaremos:

$$z = \frac{q_{j,1} - q_{2,1}}{q_{1,1}} = h_1, \quad z = \frac{q_{j+i-1,i} - q_{j+i-2,i}}{q_{1,i}} = h_i, \quad i \geq 2.$$

Gracias a la proposición IV-D.2, sabemos que

$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_2, \xi_5, \dots, \xi_n) \cap \\ &\quad \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) + (x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n)) = \\ &\quad \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ &\quad \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k) \end{aligned}$$

y siguiendo la misma idea, que cuando sólo teníamos una columna entre la primera y la segunda, obtenemos que no hay ningún cambio en la variedad característica si no sobrepasamos la altura $z = h_1$.

Si tenemos una filtración L' tal que $L_1 < L' < L_2$, y sea ω' el vector de \mathbb{R}^n que denota este orden sobre el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, en este caso si $i \geq 2$, tenemos que:

$$\text{in}_{\omega'}(\partial_1^{q_{1,i}} \partial_{j+i-2}^{q_{j+i-2,i}} - \partial_{j+i-1}^{q_{j+i-1,i}}) = -\xi_{j+i-1}^{q_{j+i-1,i}}.$$

Por lo tanto, para toda esta familia de filtraciones los puntos correspondientes a las columnas $j + 1, \dots, j + m$ son interiores al cono. Tenemos, por tanto, el mismo ideal perfecto que antes, y los elementos proporcionados por las filas de A son una sucesión regular sobre el anillo.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) &= \mathcal{V}(\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_j \xi_3, \dots, \xi_j \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ &\quad \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k, x_j \xi_j). \end{aligned}$$

Claramente la variedad característica ha cambiado, por lo que L_1 es pendiente de nuestro sistema.

Demostraremos el enunciado por inducción. Supongamos que todas las filtraciones L_p con $p < r$ definen pendientes de nuestro sistema y que si L es una filtración tal que $L_{p-1} < L < L_p$ con $p \leq r$, y ω es el vector que representa dicho orden sobre el anillo conmutativo:

$$\sqrt{\text{in}_{\omega}(I_A)} = (\xi_1 \xi_{j+p-3}, \dots, \xi_1 \xi_j, \xi_1 \xi_2, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_{j+p-2} \xi_{j+p-4}, \dots, \xi_{j+p-2} \xi_j,$$

$$\xi_{j+p-2}\xi_2, \dots, \xi_{j+p-2}\xi_k, \xi_{j+p-3}\xi_{j+p-5}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+p-1}, \dots, \xi_n)$$

y

$$\begin{aligned} Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1\xi_{j+p-3}, \dots, \xi_1\xi_j, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_{j+p-2}\xi_{j+p-4}, \dots \\ \dots, \xi_{j+p-2}\xi_j, \xi_{j+p-2}\xi_2, \dots, \xi_{j+p-2}\xi_k, \xi_{j+p-3}\xi_{j+p-5}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \\ \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+p-1}, \dots, \xi_n, x_1\xi_1, x_2\xi_2, \dots, x_k\xi_k, x_j\xi_j, \dots, x_{j+p-2}\xi_{j+p-2}). \end{aligned}$$

Queremos probar que L_r define una pendiente del sistema hipergeométrico respecto de $x_1 = 0$. Por hipótesis de inducción tenemos que si L' es una filtración tal que $L_{r-1} < L' < L_r$ y ω' es el vector que nos da este orden en el anillo conmutativo, entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_{\omega'}(I_A)} = (\xi_1\xi_{j+r-3}, \dots, \xi_1\xi_j, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_{j+r-2}\xi_{j+r-4}, \dots, \xi_{j+r-2}\xi_j, \\ \xi_{j+r-2}\xi_2, \dots, \xi_{j+r-2}\xi_k, \xi_{j+r-3}\xi_{j+r-5}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+r-1}, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1\xi_{j+r-3}, \dots, \xi_1\xi_j, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_{j+r-2}\xi_{j+r-4}, \dots \\ \dots, \xi_{j+r-2}\xi_j, \xi_{j+r-2}\xi_2, \dots, \xi_{j+r-2}\xi_k, \xi_{j+r-3}\xi_{j+r-5}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \\ \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+r-1}, \dots, \xi_n, x_1\xi_1, x_2\xi_2, \dots, x_k\xi_k, x_j\xi_j, \dots, x_{j+r-2}\xi_{j+r-2}). \end{aligned}$$

Si tomamos la altura z_r ésta nos proporciona un plano que contiene a la vez al origen, a los puntos dados por las columnas 1, $j+r-2$ y $j+r-1$. Si consideramos L'' tal que $L_r < L'' < L_{r+1}$, y notamos ω'' al vector que nos da el orden en el anillo conmutativo, de la misma forma que en la prueba de la proposición IV-D.2 obtendremos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = (\xi_1\xi_{j+r-2}, \xi_1\xi_{j+r-3}, \dots, \xi_1\xi_j, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_{j+r-1}\xi_{j+r-3}, \dots, \xi_{j+r-1}\xi_j, \\ \xi_{j+r-1}\xi_2, \dots, \xi_{j+r-1}\xi_k, \xi_{j+r-2}\xi_{j+r-4}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+p}, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

que es, claramente, un ideal perfecto. Nos basta repetir la prueba de la proposición IV-D.2.

Además los elementos del sistema dados por las filas de A forman una sucesión regular por lo tanto:

$$Ch^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1\xi_{j+r-2}, \xi_1\xi_{j+r-3}, \dots, \xi_1\xi_j, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_1\xi_k, \xi_{j+r-1}\xi_{j+r-3}, \dots$$

$$\dots, \xi_{j+r-1}\xi_j, \xi_{j+r-1}\xi_2, \dots, \xi_{j+r-1}\xi_k, \xi_{j+r-2}\xi_{j+r-4}, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \\ \xi_{k+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+p}, \dots, \xi_n, x_1\xi_1, x_2\xi_2, \dots, x_k\xi_k, x_j\xi_j, \dots, x_{j+p-1}\xi_{j+p-1}).$$

Claramente tenemos de nuevo un cambio en la L -variedad característica, por lo tanto L_r es pendiente de nuestro sistema. ■

Nota IV-D.4 ■ En el teorema anterior hemos estudiado las pendientes del sistema hipergeométrico respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, que corresponde al primer vértice del convexo Γ . Este resultado también nos describe las pendientes del sistema con respecto a la hipersuperficie $x_k = 0$, es decir, el último vértice del convexo Γ . Siguiendo la prueba del resultado anterior, es claro, que si no hay ninguna columna entre la $(k - 1)$ -ésima y la k -ésima, entonces no hay pendientes respecto de la hipersuperficie $x_k = 0$. Si hay alguna columna de esta forma, nos basta tomar el convexo Γ'' formado por las columnas de A , salvo la k -ésima y el origen, cada cara de Γ'' que no contenga al origen y no sea cara de Γ , nos proporciona una pendiente del sistema respecto de $x_k = 0$.

Nos quedan por determinar las pendientes del sistema $H_A(\beta)$ respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$ con $1 < j < k$. En este caso, siempre tendremos pendientes, la mayor diferencia con el caso anterior, será que cada nueva cara no proporciona necesariamente pendientes diferentes.

Teorema IV-D.5 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con todos los menores 2×2 distintos de cero, y tal que todos sus circuitos sean no homogéneos para la graduación usual, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ , supongamos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el $(0, 0)$, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables.

Siempre existen pendientes respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$ con $1 < j < k$. Consideramos el convexo Γ'' , envolvente convexa de $(0, 0)$ y todas las columnas de A salvo la j -ésima. Cada cara de Γ'' , $\{r, h\}$, que

no lo sea de Γ , nos proporciona un circuito que describe una pendiente respecto de $x_j = 0$, y son las únicas.

Demostración. Fijamos a partir de ahora el índice j , $1 < j < k$. Vamos a estudiar las pendientes del sistema $H_A(\beta)$ respecto de $x_j = 0$.

Consideraremos en primer lugar que Γ'' no tiene vértices que no lo sean de Γ , en este caso la única cara de Γ'' que no es cara de Γ es la formada por $\{j-1, j+1\}$. Queremos probar que la pendiente respecto de la variable j -ésima definida por el circuito en $\{j-1, j, j+1\}$, es pendiente de nuestro sistema. Sabemos, gracias a la proposición IV-D.2 que la F -variedad característica viene dada por:

$$Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k).$$

Veamos cómo cambia la variedad característica al variar la filtración respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$.

Por la disposición de dichos vértices tenemos un circuito de la forma:

$$\partial_{j-1}^{q_{j-1}} \partial_{j+1}^{q_{j+1}} - \partial_j^{q_j}, \quad q_{j-1} + q_{j+1} > q_j.$$

Si suponemos que A verifica $a_{1j} a_{2j+1} - a_{1j+1} a_{2j} > 0$, entonces:

$$q_{j-1} = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1j+1} \\ a_{2j} & a_{2j+1} \end{vmatrix} \quad q_j = \begin{vmatrix} a_{1j-1} & a_{1j+1} \\ a_{2j-1} & a_{2j+1} \end{vmatrix} \quad q_{j+1} = \begin{vmatrix} a_{1j-1} & a_{1j} \\ a_{2j-1} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

Si consideramos el cono generado por los elementos

$$(0, 0, 0), (a_{11}, a_{21}, 1), \dots, (a_{1j-1}, a_{2j-1}, 1), (a_{1j}, a_{2j}, \frac{q_{j-1} + q_{j+1}}{q_j}), \\ (a_{1j+1}, a_{2j+1}, 1), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, 1),$$

tenemos que los puntos

$$(0, 0, 0), (a_{1j-1}, a_{2j-1}, 1), (a_{1j}, a_{2j}, \frac{q_{j-1} + q_{j+1}}{q_j}) \text{ y } (a_{1j+1}, a_{2j+1}, 1)$$

están situados sobre un mismo plano.

Si la matriz A verifica $a_{1j}a_{2j+1} - a_{1j+1}a_{2j} < 0$, entonces:

$$q_{j-1} = - \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1j+1} \\ a_{2j} & a_{2j+1} \end{vmatrix} \quad q_j = - \begin{vmatrix} a_{1j-1} & a_{1j+1} \\ a_{2j-1} & a_{2j+1} \end{vmatrix} \quad q_{j+1} = - \begin{vmatrix} a_{1j-1} & a_{1j} \\ a_{2j-1} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

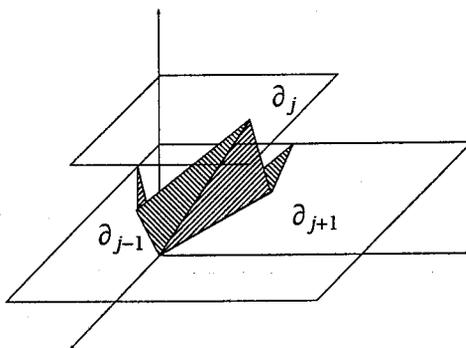
y de nuevo tenemos que si tomamos el cono generado por los mismos elementos, los puntos:

$$(0, 0, 0), (a_{1j-1}, a_{2j-1}, 1), (a_{1j}, a_{2j}, \frac{q_{j-1} + q_{j+1}}{q_j}) \text{ y } (a_{1j+1}, a_{2j+1}, 1)$$

siguen situados sobre un mismo plano.

Si llamamos $L_1 = q_j F + (q_{j-1} + q_{j+1} - q_j) V_j$, filtración respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, es claro que el orden que induce sobre el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, que notaremos mediante el vector ω_1 , no nos proporciona un ideal inicial monomial para el ideal tórico I_A .

Si tomamos una filtración L' tal que $F < L' < L_1$ y llamamos ω' al vector que nos define el orden inducido por dicha filtración sobre el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, nos proporciona la triangulación regular:



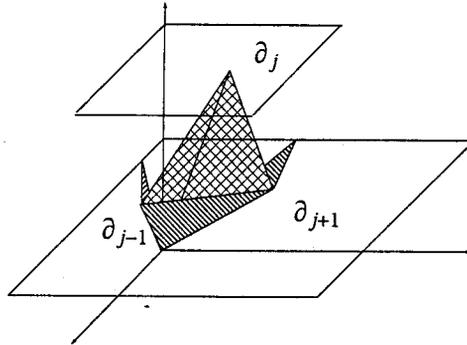
Así:

$$\Delta_{\omega'} = \Delta_{(1, \dots, 1)} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}\}$$

Por lo tanto no hay variaciones en el ideal $\sqrt{\text{in}_{\omega'}(I_A)}$ que es perfecto, y la L' -variedad característica coincide con la F -variedad característica.

Sin embargo, si tomamos una filtración L'' tal que $L_1 < L''$ y denotamos por ω'' al vector de \mathbb{R}^n que representa sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ el

orden inducido por dicha filtración, en este caso volvemos a tener un vector genérico y la triangulación regular sobre I_A :



hemos cuadrículado las "caras" que quedan dentro del cono. Así:

$$\Delta_{\omega''} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{j-2, j-1\}, \{j-1, j+1\}, \{j+1, j+2\}, \dots, \{k-1, k\}\}$$

Por lo tanto $\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)}$ ha variado y ahora es:

$$\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = (\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_{j-1}, \xi_2 \xi_{j+1}, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{j-2} \xi_k, \xi_{j-1} \xi_{j+2}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_j, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

De la misma forma que en la prueba de la proposición IV-D.2, tenemos que éste es un ideal perfecto, y usando la demostración de la proposición IV-B.1 podemos ver que los L'' -símbolos principales de los elementos dados por las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$, por lo tanto:

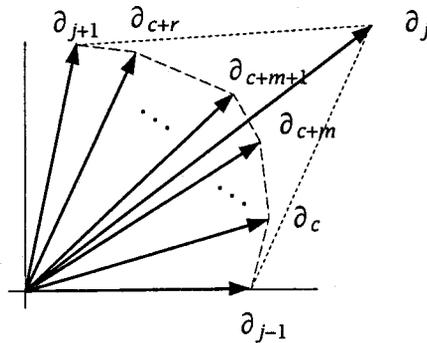
$$\text{gr}^{L''}(H_A(\beta)) = \text{in}_{L''}(I_A) + \langle \sigma^{L''}((A\theta - \beta)_1), \sigma^{L''}((A\theta - \beta)_2) \rangle,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \text{Ch}^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V} & \left(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_{j-1}, \right. \\ & \xi_2 \xi_{j+1}, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{j-2} \xi_k, \xi_{j-1} \xi_{j+2}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_j, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \\ & \left. x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, x_{j+1} \xi_{j+1}, x_k \xi_k \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay cambio en la variedad característica, y L_1 define una pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Supongamos ahora que Γ'' tiene vértices que no lo son del convexo Γ . Numeraremos dichos nuevos vértices, para simplificar la notación, de forma que los nuevos vértices situados entre $j-1$ y j comienzan en c y finalizan en $c+m$, siendo c el más cercano a $j-1$, a continuación numeramos los nuevos vértices situados entre j y $j+1$, desde $c+m+1$ hasta $c+r$. Como se muestra en la siguiente figura:



Esto nos proporciona una serie de circuitos. Los dados por los vértices de Γ'' entre $j-1$ y j :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \partial_{j-1}^{q_{j-1,1}} \partial_j^{q_{j,1}} - \partial_c^{q_{c,1}}, & q_{j-1,1} + q_{j,1} < q_{c,1}, \\
 Q_2 &= \partial_c^{q_{c,2}} \partial_j^{q_{j,2}} - \partial_{c+1}^{q_{c+1,2}}, & q_{c,2} + q_{j,2} < q_{c+1,2}, \\
 &\vdots \\
 Q_{m+1} &= \partial_{c+m-1}^{q_{c+m-1,m+1}} \partial_j^{q_{j,m+1}} - \partial_{c+m}^{q_{c+m,m+1}}, & q_{c+m-1,m+1} + q_{j,m+1} < q_{c+m,m+1}.
 \end{aligned}$$

los vértices de Γ'' entre j y $j+1$:

$$\begin{aligned}
 Q'_1 &= \partial_{j+1}^{q_{j+1,1}} \partial_j^{q'_{j,1}} - \partial_{c+r}^{q_{c+r,1}}, & q_{j+1,1} + q'_{j,1} < q_{c+r,1}, \\
 Q'_2 &= \partial_{c+r}^{q_{c+r,2}} \partial_j^{q'_{j,2}} - \partial_{c+r-1}^{q_{c+r-1,2}}, & q_{c+r,2} + q'_{j,2} < q_{c+r-1,2}, \\
 &\vdots \\
 Q'_{r-m} &= \partial_{c+m+2}^{q_{c+m+2,r-m}} \partial_j^{q'_{j,r-m}} - \partial_{c+m+1}^{q_{c+m+1,r-m}}, & q_{c+m+2,r-m} + q'_{j,r-m} < q_{c+m+1,r-m}.
 \end{aligned}$$

y un circuito:

$$Q''_1 = \partial_{c+m}^{q_{c+m,1}} \partial_{c+m+1}^{q_{c+m+1,1}} - \partial_j^{q''_{j,1}}, \quad q_{c+m,1} + q_{c+m+1,1} > q''_{j,1}.$$

Donde los $q_{i,j}$, $q'_{i,j}$ y $q''_{i,j}$ se pueden obtener como menores de A tal como se hizo, al principio de esta demostración cuando no había nuevos vértices.

Vamos a ver a continuación que las pendientes respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$ que definen los circuitos $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$ están escritas de forma creciente.

Dados dos elementos consecutivos de entre $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$, obtenemos los elementos de $\ker(\pi)$:

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0, q_{j,u}, 0, \dots, 0, q_{c+u-2,u}, -q_{c+u-1,u}, 0, \dots, 0) \\ (0, \dots, 0, q_{j,u+1}, 0, \dots, 0, 0, q_{c+u-1,u+1}, -q_{c+u,u+1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

eliminando la coordenada j -ésima obtenemos:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{q_{j,u+1}q_{c+u-2,u}}_{c+u-2}, \underbrace{-q_{j,u+1}q_{c+u-1,u} - q_{j,u}q_{c+u-1,u+1}}_{c+u-1}, \underbrace{q_{j,u}q_{c+u,u+1}}_{c+u}, 0, \dots, 0)$$

este elemento nos proporciona un elemento del ideal tórico, que gracias a nuestra configuración verifica:

$$\partial_{c+u-2}^{q_{j,u+1}q_{c+u-2,u}} \partial_{c+u}^{q_{j,u}q_{c+u,u+1}} - \partial_{c+u-1}^{q_{j,u+1}q_{c+u-1,u} + q_{j,u}q_{c+u-1,u+1}},$$

$$q_{j,u+1}q_{c+u-1,u} + q_{j,u}q_{c+u-1,u+1} < q_{j,u+1}q_{c+u-2,u} + q_{j,u}q_{c+u,u+1}$$

y esta condición equivale a:

$$\frac{q_{j,u}}{q_{j,u} + q_{c+u-2,u} - q_{c+u-1,u}} < \frac{q_{j,u+1}}{q_{j,u+1} + q_{c+u-1,u+1} - q_{c+u,u+1}}$$

es decir a que la pendiente respecto de $x_j = 0$ definida por Q_u sea menor que la definida, respecto de $x_j = 0$ por Q_{u+1} .

Veamos ahora que además la pendiente respecto de $x_j = 0$ definida por el elemento Q_{m+1} es menor que la definida por Q'_1 . Si consideramos los elementos de $\ker(\pi)$ que los definen obtenemos:

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0, q_{j,m+1}, 0, \dots, 0, q_{c+m-1,m+1}, -q_{c+m,m+1}, 0, \dots, 0) \\ (0, \dots, 0, q''_{j,1}, 0, \dots, 0, 0, -q_{c+m,1}, -q_{c+m+1,1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

eliminando la coordenada j -ésima obtenemos:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{q''_{j,1} q_{c+m-1, m+1}}_{c+m-1}, \underbrace{-q''_{j,1} q_{c+m, m+1} + q_{j, m+1} q_{c+m, 1}}_{c+m}, \underbrace{q_{j, m+1} q_{c+m+1, 1}}_{c+m+1}, 0, \dots, 0).$$

Vector que nos define un elemento del ideal tórico, que gracias a la forma de la configuración, es:

$$\partial_{c+m-1}^{q''_{j,1} q_{c+m-1, m+1}} \partial_{c+m+1}^{q_{j, m+1} q_{c+m+1, 1}} - \partial_{c+m}^{q''_{j,1} q_{c+m, m+1} - q_{j, m+1} q_{c+m, 1}}$$

con

$$q''_{j,1} q_{c+m, m+1} - q_{j, m+1} q_{c+m, 1} < q''_{j,1} q_{c+m-1, m+1} + q_{j, m+1} q_{c+m+1, 1}$$

lo que equivale a

$$\frac{q_{j, m+1}}{q_{j, m+1} + q_{c+m-1, m+1} - q_{c+m, m+1}} < \frac{q''_{j,1}}{q''_{j,1} - q_{c+m, 1} - q_{c+m+1, 1}},$$

es decir, que la pendiente respecto de $x_j = 0$ definida por Q_{m+1} es menor que la definida por Q''_1 .

Con una prueba análoga a la anterior se prueba que las pendientes respecto de $x_j = 0$ definidas por los elementos $\{Q'_1, \dots, Q'_{r-m}\}$ también son crecientes, y que la pendiente respecto de $x_j = 0$ definida por Q'_{r-m} es menor que la definida por Q''_1 .

Nuestro objetivo es demostrar que todas estas pendientes son pendientes del sistema $H_A(\beta)$. La diferencia con el cálculo de pendientes respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$ ó $x_k = 0$, es que no podemos asegurar que las pendientes definidas por los circuitos $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$, sean distintas de las definidas por los circuitos $\{Q'_1, \dots, Q'_{r-m}\}$. Hemos probado que todas las pendientes definidas por los $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$, son diferentes entre sí y menores que la definida por Q''_1 , y de la misma forma las pendientes definidas por los circuitos $\{Q'_1, \dots, Q'_{r-m}\}$ son todas diferentes entre sí y son también menores que la definida por Q''_1 .

Por lo tanto si consideramos el conjunto de todas las filtraciones definidas por $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$, $\{Q'_1, \dots, Q'_{r-m}\}$ y Q''_1 , y las ordenamos de menor a mayor con el orden usual $\{L_1, \dots, L_p\}$ con $F < L_1 < \dots < L_p$, es claro que siempre tendremos que la filtración L_p es la dada por Q''_1 .

Probemos que L_1 es pendiente de $H_A(\beta)$.

Distingamos un primer caso, L_1 filtración definida por Q_1 , menor que la pendiente definida por Q'_1 .

Sabemos por la proposición IV-D.2 que la F -variedad característica es:

$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \chi_1 \xi_1, \dots, \chi_k \xi_k). \end{aligned}$$

Si consideramos una filtración L' tal que $F < L' < L_1$ y llamamos ω' al vector de \mathbb{R}^n que representa este orden en el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, es claro que

$$\begin{aligned} \text{in}_{\omega'}(Q_1) = \xi_c^{q_{c,1}}, \quad \text{in}_{\omega'}(Q_2) = \xi_{c+1}^{q_{c+1,2}}, \dots, \text{in}_{\omega'}(Q_{m+1}) = \xi_{c+m}^{q_{c+m,m+1}}, \\ \text{in}_{\omega'}(Q'_1) = \xi_{c+r}^{q_{c+r,1}}, \quad \text{in}_{\omega'}(Q'_2) = \xi_{c+r-1}^{q_{c+r-1,2}}, \dots, \text{in}_{\omega'}(Q'_{r-m}) = \xi_{c+m+1}^{q_{c+m+1,r-m}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los vértices de Γ'' que no son vértices de Γ son interiores al cono que define esta triangulación regular. Como no hay variación en $\sqrt{\text{in}_{\omega'}(I_A)}$, tampoco hay cambio en la variedad característica, por lo tanto:

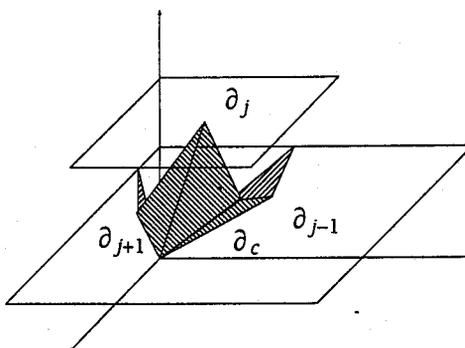
$$\begin{aligned} Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \chi_1 \xi_1, \dots, \chi_k \xi_k). \end{aligned}$$

Sabemos que la filtración L_1 , que nos da Q_1 , al considerar la restricción de este orden sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, su triangulación regular nos sitúa al origen, y a los vértices $j-1$, c y j sobre el mismo plano.

Así, si tomamos una filtración L'' tal que $L_1 < L'' < L_2$, y denotamos por ω'' al vector que representa este orden sobre el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, tenemos que

$$\text{in}_{\omega''}(Q_1) = \xi_{j-1}^{q_{j-1,1}} \xi_j^{q_{j,1}},$$

y todos los demás quedan como antes, la triangulación regular quedaría:



Es decir

$$\Delta_{\omega''} = \{\{1, 2\}, \dots, \{j-2, j-1\}, \{j-1, c\}, \{c, j\}, \{j, j+1\}, \dots, \{k-1, k\}\}$$

por lo tanto

$$\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = (\xi_1 \xi_3, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_c, \xi_1 \xi_j, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \xi_2 \xi_{j-1}, \\ \xi_2 \xi_c, \xi_2 \xi_j, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{c-1}, \xi_{c+1}, \dots, \xi_n)$$

que es un ideal perfecto, como en la prueba de la proposición IV-D.2 y usando la demostración de la proposición IV-B.1 tenemos que los L'' -símbolos principales de los operadores del sistema definidos por las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x)[\xi]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$, por tanto

$$\text{Ch}^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_c, \xi_1 \xi_j, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots \\ \dots, \xi_2 \xi_{j-1}, \xi_2 \xi_c, \xi_2 \xi_j, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{c-1}, \xi_{c+1}, \dots, \xi_n, \\ x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, \dots, x_k \xi_k, x_c \xi_c).$$

La variedad característica ha cambiado por lo que L_1 es pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Si la pendiente L_1 viniese definida por Q'_1 y menor que la pendiente definida por Q_1 , con una prueba análoga a la anterior obtenemos que L_1 es pendiente del sistema.

Supongamos que la pendiente L_1 es la definida por Q_1 y Q'_1 , como Q_2 y Q'_2 definen pendientes mayores que las dadas por Q_1 y Q'_1 , no puede haber ningún otro circuito que la comparta.

Si consideramos una filtración L' tal que $F < L' < L_1$, como antes obtenemos que:

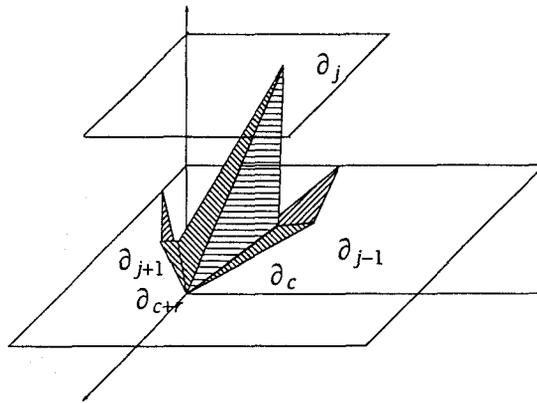
$$Ch^{L'}(\mathcal{F}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k).$$

Por nuestras hipótesis si consideramos la triangulación regular dada por ω_1 , vector que nos da el orden inducido por L_1 sobre $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, tendremos que el origen, y los vértices $j-1, c, j, c+r$ y $j+1$ están situados sobre un mismo plano.

Sea ahora L'' una filtración tal que $L_1 < L'' < L_2$, y denominemos ω'' al vector que nos da este orden sobre el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, en este caso:

$$\text{in}_{\omega''}(Q_1) = \xi_{j-1}^{q_{j-1,1}} \xi_j^{q_{j,1}}, \quad \text{in}_{\omega''}(Q'_1) = \xi_{j+1}^{q_{j+1,1}} \xi_j^{q'_{j,1}}$$

es decir la triangulación regular:



Así

$$\Delta_{\omega''} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{j-2, j-1\}, \{j-1, c\}, \{c, j\}, \{j, c+r\}, \{c+r, j+1\}, \{j+1, j+2\}, \dots, \{k-1, k\}\}$$

por lo tanto,

$$\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = (\xi_1 \xi_3, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_c, \xi_1 \xi_j, \xi_1 \xi_{c+r}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \dots, \xi_{j-1} \xi_j, \\ \xi_{j-1} \xi_{c+r}, \xi_{j-1} \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \xi_c \xi_{c+r}, \xi_c \xi_{j+1}, \dots, \xi_c \xi_k, \xi_j \xi_{j+1}, \dots, \xi_j \xi_k, \\ \xi_{c+r} \xi_{j+2}, \dots, \xi_{c+r} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{c-1}, \xi_{c+1}, \dots, \xi_{c+r-1}, \xi_{c+r+1}, \dots, \xi_n)$$

que es un ideal perfecto. Sabemos, gracias a la prueba de la proposición IV-B.1, que los L'' -símbolos principales de los operadores provenientes de las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)}$, así el ideal graduado para la filtración L'' de $H_A(\beta)$ es el "falso" ideal inicial para esta filtración, así obtenemos que:

$$\text{Ch}^{L''}(H_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_c, \xi_1 \xi_j, \xi_1 \xi_{c+r}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \dots \\ \xi_{j-1} \xi_j, \xi_{j-1} \xi_{c+r}, \xi_{j-1} \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \xi_c \xi_{c+r}, \xi_c \xi_{j+1}, \dots, \xi_c \xi_k, \xi_j \xi_{j+1}, \dots, \xi_j \xi_k, \\ \xi_{c+r} \xi_{j+2}, \dots, \xi_{c+r} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{c-1}, \xi_{c+1}, \dots, \xi_{c+r-1}, \xi_{c+r+1}, \dots, \xi_n \\ x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, x_c \xi_c, x_j \xi_j, x_{c+r} \xi_{c+r}, x_{j+1} \xi_{j+1}, \dots, x_k \xi_k).$$

Por lo tanto ha cambiado la variedad característica, y L_1 es pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Repitiendo este razonamiento para todas las filtraciones L_i , con $i < p$, obtendremos que todas ellas definen pendientes del sistema $H_A(\beta)$, como antes distinguiendo si viene definida por un circuito o por dos. El caso de la filtración L_p , se hace, una vez conocida la L_{p-1} -variedad característica, exactamente como en el caso en que no habian nuevos vértices en Γ'' .

Así obtenemos que todas las pendientes definidas por las caras de Γ'' que no lo son de Γ son pendientes del sistema $H_A(\beta)$. ■

IV-E PENDIENTES EN UN CASO MÁS GENERAL

En esta sección estudiaremos las pendientes de sistemas hipergeométricos $H_A(\beta)$, provenientes de matrices $2 \times n$, con rango 2, pero en este caso no exigiremos que todos los menores 2×2 sean distintos de cero. Seguiremos exigiendo que todos los circuitos sean no homogéneos (ahora los circuitos, si tenemos algún menor 2×2 igual a cero, serán binomios con soporte en dos variables), y también que los binomios del ideal tórico con soporte en 3 variables sean no homogéneos (los antiguos circuitos). También seguiremos suponiendo que el ideal tórico I_A proviene de un semigrupo reducido.

Proposición IV-E.1 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$, con $\text{rango}(A) = 2$, con todos los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables no homogéneos y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Entonces, las únicas pendientes que puede tener el sistema $H_A(\beta)$ son las descritas por los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables.

Demostración. La demostración de esta proposición es muy parecida a la que se hizo en IV-B.1. Es claro que, si todos los menores 2×2 son distintos de cero, ya se probó este resultado en la proposición IV-B.1, por ello supondremos que hay al menos un menor 2×2 igual a cero, lo que implica que hay un circuito con soporte en dos variables.

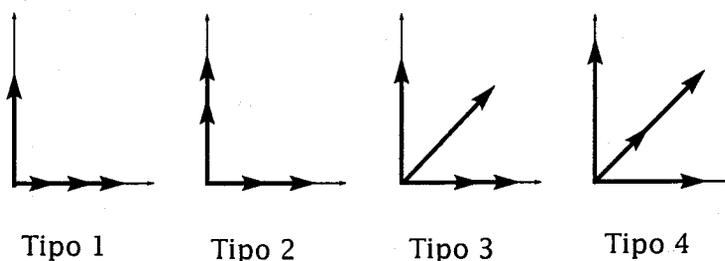
Si consideramos una filtración $L \neq V$, que no sea descrita por ningún binomio de I_A con soporte en tres o menos variables, obtendremos que $\sigma^L(C)$ es un monomio para cualquier binomio C con soporte en tres o menos variables.

Hagamos la prueba por inducción en el número de columnas de A . El primer caso a estudiar es $n = 4$. Sea $L \neq V$ una filtración cualquiera no descrita por ningún binomio con soporte en tres o menos variables. Queremos ver que L no es pendiente del sistema $H_A(\beta)$, para ello nos

basta demostrar que

$$\{x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, x_3 \xi_3, x_4 \xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si representamos las columnas de A sobre \mathbb{R}^2 y numeramos las variables desde el eje X hasta el Y , puesto que A tiene rango 2, siempre tendremos con el orden dado en IV-B, que las columnas 1 y 4 son linealmente independientes. En cualquier caso la representación siempre se puede reducir a uno de estos tipos:



Si estamos en el tipo 1 encontramos que los circuitos son de la forma:

$$C_1 = \partial_1^{q_{1,1}} - \partial_2^{q_{2,1}}, \quad C_2 = \partial_1^{q_{1,2}} - \partial_3^{q_{3,2}}, \quad C_3 = \partial_2^{q_{2,3}} - \partial_3^{q_{3,3}},$$

Por lo tanto en cualquier caso siempre tenemos dos índices i, j con $1 \leq i, j \leq 3$ tal que $\xi_i, \xi_j \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, por la forma de las columnas de nuestra matriz, tenemos los siguientes elementos en el sistema $H_A(\beta)$:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{13}x_3\xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$a_{24}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

así siempre

$$\{x_1 \xi_1, x_2 \xi_2, x_3 \xi_3, x_4 \xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si estamos en el tipo 2 tenemos los siguientes circuitos:

$$C_1 = \partial_1^{q_{1,1}} - \partial_2^{q_{2,1}}, \quad C_2 = \partial_3^{q_{3,2}} - \partial_4^{q_{4,2}}.$$

Por ello siempre tenemos dos índices i, j con $1 \leq i \leq 2$ y $3 \leq j \leq 4$ tales que $\xi_i, \xi_j \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, también tenemos los siguientes elementos:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$a_{23}x_3\xi_3 + a_{24}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

como antes,

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si estamos en el tipo 3 encontramos elementos de la forma:

$$C_1 = \partial_1^{q_{1,1}} - \partial_2^{q_{2,1}}, \quad C_2 = \partial_1^{q_{1,2}}\partial_4^{q_{4,2}} - \partial_3^{q_{3,2}}, \quad C_3 = \partial_2^{q_{2,3}}\partial_4^{q_{4,3}} - \partial_3^{q_{3,3}}.$$

Si tenemos $\xi_i \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, con $1 \leq i \leq 2$ y además $\xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, entonces, tomando posiciones pivotaes en 1 y 4:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{13}x_3\xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$a_{23}x_3\xi_3 + a_{24}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

obteniendo finalmente,

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si suponemos que $\xi_1 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$ y $\xi_2\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$ (de forma análoga para $\{\xi_2, \xi_1\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$), tomando posiciones pivotaes en 1 y 3:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{14}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow a_{12}x_2\xi_2 + a_{14}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

$$a_{12}x_2\xi_2^2 + a_{14}x_4\xi_2\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow \{x_2\xi_2, x_4\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Así:

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si estamos en el tipo 4 tenemos elementos:

$$C_1 = \partial_2^{q_{2,1}} - \partial_3^{q_{3,1}}, \quad C_2 = \partial_1^{q_{1,2}}\partial_4^{q_{4,2}} - \partial_2^{q_{2,2}}, \quad C_3 = \partial_1^{q_{1,3}}\partial_4^{q_{4,3}} - \partial_3^{q_{3,3}}.$$

Si tenemos $\{\xi_2, \xi_3\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, tomando posiciones pivotaes en 1 y 4:

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_2\xi_2 + a_{13}x_3\xi_3 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

$$a_{22}x_2\xi_2 + a_{23}x_3\xi_3 + a_{24}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))},$$

obteniendo finalmente,

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Si suponemos que $\xi_i \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, con $2 \leq i \leq 3$ y $\xi_1\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, tomando posiciones pivotaes en 1 e i :

$$a_{11}x_1\xi_1 + a_{14}x_4\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow a_{11}x_1\xi_1^2 + a_{14}x_4\xi_1\xi_4 \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))} \Rightarrow$$

$$\{x_1\xi_1, x_4\xi_4\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Así:

$$\{x_1\xi_1, x_2\xi_2, x_3\xi_3, x_4\xi_4\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

Supongamos el resultado probado para matrices A con menos de k columnas. Sea por tanto, A una matriz de enteros positivos $2 \times k$, y sea $L \neq V$ una filtración no proveniente de ninguno de sus binomios con soporte en tres o menos variables.

Puesto que suponemos que nuestra matriz tiene algún menor 2×2 igual a cero podemos suponer que tenemos un circuito C tal que $\sigma^L(C) = \xi_i^q$. Si tomamos la submatriz de A , que llamaremos A' resultante de eliminar la columna i -ésima de A . Es claro que todos los binomios de $I_{A'}$ también lo son de I_A , puesto que $x_i\xi_i \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, los elementos generados por las filas de A' también están incluidos en $\sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$, por lo que, con la hipótesis de inducción,

$$\{x_1\xi_1, \dots, x_{i-1}\xi_{i-1}, x_{i+1}\xi_{i+1}, \dots, x_k\xi_k\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_{A'}(\beta))}$$

por lo tanto,

$$\{x_1\xi_1, \dots, x_k\xi_k\} \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}.$$

■

Representamos todas las columnas de A sobre \mathbb{R}^2 , puesto que $\text{rango}(A) = 2$, si consideramos el convexo Γ envolvente convexa de todas las columnas de A y del origen, tenemos que Γ siempre es un polígono. Siguiendo la notación anterior numeraremos como las k primeras variables aquéllas que son vértices de Γ distintos del origen y tanto sobre el eje X como sobre el Y sólo numeramos un vértice por eje (en cada caso el más exterior). Éstas son las únicas variables que nos pueden proporcionar pendientes del sistema $H_A(\beta)$.

Proposición IV-E.2 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con $\text{rango}(A) = 2$, y tal que todos los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables son no homogéneos, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ , suponemos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el origen y no incluidos los vértices sobre los ejes coordenados que sean interiores a alguna cara, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables. Entonces, el sistema $H_A(\beta)$ no tiene pendientes respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$, con $j > k$.

Demostración. Sea L una pendiente cualquiera, $L \neq V$ respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, con $j > k$. Podemos distinguir dos casos: que la columna j -ésima sea interior al convexo Γ y existan dos vértices consecutivos r y $r + 1$ de Γ , tal que j esté en el interior de su cono o un segundo caso en que exista un vértice de Γ , linealmente dependiente con la columna j -ésima.

En el primer caso, tenemos un binomio:

$$\partial_r^{q_r} \partial_{r+1}^{q_{r+1}} - \partial_j^{q_j}, \quad \text{con } q_j > q_r + q_{r+1}$$

y en el segundo caso un circuito:

$$\partial_r^{q_r} - \partial_j^{q_j}, \quad \text{con } q_j > q_r.$$

En cualquiera de los casos obtenemos que

$$\xi_j \in \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

Notamos A' a la submatriz de A obtenida al eliminar la columna j -ésima. Puesto que L es $L = pF + qV_j$, al restringir L al sistema $H_{A'}(\beta)$ obtenemos la filtración F . F no es ninguna pendiente definida por ningún binomio de I_A con soporte en tres o menos variables, usando la proposición IV-E.1 obtenemos que:

$$\{x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, x_{j+1} \xi_{j+1}, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^F(H_{A'}(\beta))}$$

y así:

$$\{x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} \xi_{j+1}, \dots, x_n \xi_n\} \subset \sqrt{\text{gr}^L(H_A(\beta))}$$

y L no es pendiente del sistema $H_A(\beta)$. ■

Nos centramos ahora en el cálculo de las pendientes respecto de las hipersuperficies $x_j = 0$, con $j \leq k$.

Nota IV-E.3 ■ Consideramos la hipersuperficie $x_j = 0$, con $j \leq k$ y tal que la columna j -ésima no es linealmente dependiente con ninguna otra columna. Si estamos interesados en calcular las pendientes del sistema $H_A(\beta)$, respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, usamos los teoremas IV-D.3 y IV-D.5.

Si $1 < j < k$, al quitar la columna j -ésima en el convexo Γ'' no podemos encontrar vértices nuevos que sean linealmente dependientes por lo que la prueba completa de IV-D.5 es válida.

Si tratamos de calcular las pendientes respecto de $x_1 = 0$, puede ocurrir que los últimos nuevos vértices de Γ' sean linealmente dependientes, como en la numeración que hemos tomado en Γ , sólo tenemos en cuenta el vértice (de entre estos) más exterior, que define la última cara que no contiene al origen, que no es cara de Γ . Revisando la prueba del teorema IV-D.3 es claro que esta cara nos define la última pendiente respecto de $x_1 = 0$.

Proposición IV-E.4 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con $\text{rango}(A) = 2$, y tal que todos los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables sean no

homogéneos para la graduación usual, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ , supongamos que este convexo tiene $k+1$ vértices, incluido el $(0, 0)$, enumeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables. Entonces:

$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = & \mathcal{V}(((\xi_3, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_4, \dots, \xi_n) \cap (\xi_1, \xi_2, \xi_5, \dots, \xi_n) \cap \\ & \dots \cap (\xi_1, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) + (x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n)) = \\ & \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ & \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k). \end{aligned}$$

Demostración. Ver la demostración de la proposición IV-D.2, donde no se usa que todos los menores 2×2 sean diferentes de cero, salvo por la suposición de que no hay caras del cono en \mathbb{R}^3 apoyadas sobre el plano $y = 0$ ó $x = 0$, pero en esos casos estas caras tienen vector normal con última componente igual a cero, por lo que no son "caras bajas". ■

Supongamos ahora que la primera columna es linealmente dependiente con alguna otra, de entre éstas nos quedamos con la más cercana a la representación en \mathbb{R}^2 de la primera columna, que siempre nos proporcionará una pendiente para la hipersuperficie $x_1 = 0$.

Proposición IV-E.5 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con $\text{rango}(A) = 2$, y tal que todos los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables sean no homogéneos, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ , supongamos que este convexo tiene $k+1$ vértices, incluido el origen y no incluidos los vértices sobre los ejes coordenados que sean interiores a alguna cara, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables. Supongamos que hay columnas linealmente dependientes con la primera columna de A . Numeremos los vértices sobre el eje x , siendo 1 el más exterior, y $k+1$ el más cercano a éste. Llamemos Γ' al convexo formado por las columnas de A salvo

la primera, entonces el sistema $H_A(\beta)$ tendrá una pendiente por cada cara de Γ' que no contenga al vértice $k + 1$ y no sea cara de Γ . Además el vértice $k + 1$ define una pendiente de $H_A(\beta)$ respecto de $x_1 = 0$.

Demostración. Estamos suponiendo por tanto que la matriz A verifica que el menor 2×2 formado por las columnas 1 y $k + 1$ es cero. Es claro que si llamamos Γ' al convexo formado por todas las columnas de A salvo la primera, $k + 1$ es vértice de Γ' , y además ningún otro vértice apoyado sobre el eje x será vértice de Γ' .

Supongamos en primer lugar que el único vértice de Γ' que no es de Γ es $k + 1$. Sabemos por la proposición IV-E.4, que

$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k). \end{aligned}$$

Suponemos que la primera columna y la $k + 1$ -ésima son linealmente dependientes, por construcción tenemos que la primera columna es $(a_{11}, 0)$, por lo tanto la $k + 1$ -ésima es $(a_{1k+1}, 0)$, con $a_{11} > a_{1k+1}$, por ser la primera columna la más exterior. Esto implica que existe un elemento en el ideal tórico de la forma:

$$\partial_1^{a_{1k+1}} - \partial_{k+1}^{a_{11}}.$$

Si llamamos L_1 a la filtración respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, $L_1 = a_{1k+1}F + (a_{11} - a_{1k+1})V_1$, es claro que esta filtración restringida al anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ no nos proporciona un ideal inicial monomial para I_A . Si L' es una filtración respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, tal que $F < L' < L_1$, y notamos ω' al vector de \mathbb{R}^n que representa este orden en el anillo conmutativo, entonces $\Delta_{\omega'}$ es la misma triangulación que teníamos para $(1, \dots, 1)$. Entonces es claro, que la L' variedad característica queda invariante:

$$Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots,$$

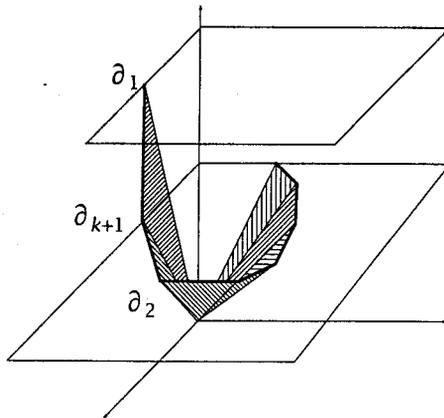
$$\dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1\xi_1, \dots, x_k\xi_k).$$

Si tomásemos el cono definido por los elementos

$$(a_{11}, 0, \frac{a_{11}}{a_{1k+1}}), (a_{12}, a_{22}, 1), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, 1),$$

tenemos que el origen y los puntos $(a_{11}, 0, \frac{a_{11}}{a_{1k+1}})$ y $(a_{1k+1}, 0, 1)$ están alineados.

Si ahora consideramos una filtración L'' tal que $L_1 < L''$, y notamos ω'' al vector de \mathbb{R}^n que representa sobre el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$ este orden, obtenemos la triangulación regular:



Por lo tanto,

$$\Delta_{\omega''} = \{\{k + 1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k - 1, k\}\},$$

así:

$$\sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = (\xi_{k+1}\xi_3, \xi_{k+1}\xi_4, \dots, \xi_{k+1}\xi_k, \xi_2\xi_4, \xi_2\xi_5, \dots, \xi_2\xi_k, \dots, \xi_{k-2}\xi_k, \xi_1, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n).$$

Este ideal es perfecto, podemos verlo con una prueba análoga a la dada en la proposición IV-D.2.

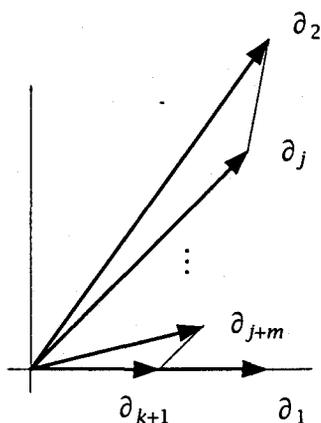
Es fácil ver, como en pruebas anteriores, que los L'' -símbolos principales de los elementos provenientes de las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$, así obtenemos que

$$Ch^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_{k+1}\xi_3, \xi_{k+1}\xi_4, \dots, \xi_{k+1}\xi_k, \xi_2\xi_4, \xi_2\xi_5, \dots, \xi_2\xi_k,$$

$$\dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_1, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n, x_2 \xi_2, \dots, x_k \xi_k, x_{k+1} \xi_{k+1}).$$

La variedad característica ha cambiado por lo que L_1 define una pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Supongamos ahora que estamos en el caso general. Numeremos los vértices de Γ' entre 2 y $k+1$, siendo el más cercano a 2 el j -ésimo y el más cercano a $k+1$ el $j+m$ -ésimo:



Nuestro objetivo es probar que cada una de las caras de Γ' , que no es cara de Γ y no contiene al vértice $k+1$, nos proporciona una pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Por cómo hemos tomado la configuración existen elementos de la forma:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_1^{q_{1,1}} \partial_2^{q_{2,1}} - \partial_j^{q_{j,1}}, & q_{j,1} &> q_{1,1} + q_{2,1}, \\ Q_2 &= \partial_1^{q_{1,2}} \partial_j^{q_{j,2}} - \partial_{j+1}^{q_{j+1,2}}, & q_{j+1,2} &> q_{1,2} + q_{j,2}, \\ & \vdots \\ Q_{m+1} &= \partial_1^{q_{1,m+1}} \partial_{j+m-2}^{q_{j+m-2,m+1}} - \partial_{j+m-1}^{q_{j+m-1,m+1}}, & q_{j+m-1,m+1} &> q_{1,m+1} + q_{j+m-2,m+1} \\ Q_{m+2} &= \partial_1^{a_{1k+1}} - \partial_{k+1}^{a_{k+1}}, & a_{11} &> a_{1k+1}. \end{aligned}$$

A continuación vemos que las pendientes que describen sucesivamente estos elementos respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, forman una sucesión creciente. Ya se vio, en la demostración del teorema IV-D.3 que las pendientes descritas por $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$, formaban

una sucesión creciente veamos que la pendiente definida por Q_{m+2} es mayor que la definida por Q_{m+1} . Los elementos Q_{m+1} y Q_{m+2} , nos proporcionan los siguientes elementos de $\ker(\pi)$:

$$\begin{aligned} & (q_{1,m+1}, 0, \dots, 0, 0, q_{j+m-1,m+1}, -q_{j+m,m+1}, 0, \dots, 0) \\ & (a_{1k+1}, 0, \dots, 0, -a_{11}, 0, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

eliminando la primera coordenada obtenemos:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{q_{1,m+1}a_{11}}_{k+1}, 0, \dots, 0, \underbrace{a_{1k+1}q_{j+m-1,m+1}}_{j+m-1}, \underbrace{-a_{1k+1}q_{j+m,m+1}}_{j+m}, 0, \dots, 0)$$

este elemento nos proporciona un elemento del ideal tórico, que por cómo es la configuración verifica:

$$\partial_{k+1}^{q_{1,m+1}a_{11}} \partial_{j+m-1}^{a_{1k+1}q_{j+m-1,m+1}} - \partial_{j+m}^{a_{1k+1}q_{j+m,m+1}},$$

con

$$a_{1k+1}q_{j+m,m+1} < q_{1,m+1}a_{11} + a_{1k+1}q_{j+m-1,m+1}$$

y esta condición equivale a:

$$\frac{a_{1k+1}}{a_{1k+1} - a_{11}} > \frac{q_{1,m+1}}{q_{1,m+1} + q_{j+m-1,m+1} - q_{j+m,m+1}}$$

es decir, la pendiente respecto de $x_1 = 0$, definida por Q_{m+2} es mayor que la definida por Q_{m+1} .

Para ver que todos estos elementos dan pendientes respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, del sistema $H_A(\beta)$, para las primeras $m+1$ caras de Γ' tenemos que repetir la prueba del teorema IV-D.3, para ver que Q_{m+2} define una pendiente del sistema respecto de $x_1 = 0$, nos remitimos a la primera parte de esta demostración. ■

Nota IV-E.6 ■ Usando la proposición anterior podemos calcular las pendientes del sistema $H_A(\beta)$ respecto de la hipersuperficie $x_k = 0$. Si la columna k -ésima no es linealmente dependiente con ninguna otra, ya se estudió en la sección anterior. En caso de que haya alguna linealmente dependiente, nos basta, como antes, considerar el convexo Γ'' formado por

todas las columnas de A salvo la k -ésima, y cada cara de Γ'' que no lo sea de Γ , y no contenga al vértice $k + 1$ nos da una pendiente del sistema respecto de $x_k = 0$, además el vértice $k + 1$ nos proporciona un circuito, que nos define la mayor pendiente del sistema respecto de $x_k = 0$.

Nos queda por determinar las pendientes del sistema $H_A(\beta)$, para la hipersuperficie $x_j = 0$, con $1 < j < k$.

Proposición IV-E.7 ■ Sea A una matriz de enteros positivos $2 \times n$ con $\text{rango}(A) = 2$, y tal que todos los binomios de I_A con soporte en tres o menos variables sean no homogéneos, y sea $\beta \in \mathbb{C}^2$. Consideramos el convexo Γ , supongamos que este convexo tiene $k + 1$ vértices, incluido el origen y no incluidos los vértices sobre los ejes coordenados que sean interiores a alguna cara, numeremos los vértices provenientes de las columnas de A como las k primeras variables. Sea $1 < j < k$ y supongamos que hay columnas linealmente dependientes con la columna j -ésima de A . Llamemos Γ'' al convexo formado por las columnas de A salvo la j -ésima, entonces el sistema $H_A(\beta)$ tendrá una pendiente por cada cara de Γ'' que no sea cara de Γ y no contenga una columna linealmente dependiente con j . Si tenemos un vértice $k + 1$ de Γ'' linealmente dependiente de j entonces define una pendiente de $H_A(\beta)$ respecto de $x_j = 0$.

Demostración. Fijaremos el índice j , con $1 < j < k$. Si tenemos que el convexo Γ'' no tiene ningún vértice linealmente dependiente con j , entonces repitiendo la prueba del teorema IV-D.5 tenemos que cada cara de Γ'' que no sea cara de Γ nos proporciona una pendiente del sistema $H_A(\beta)$ respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$.

Por lo tanto supondremos que Γ'' tiene un vértice linealmente dependiente con j al que llamaremos $k + 1$. En primer lugar, supondremos que éste es el único vértice de Γ'' que no es vértice de Γ y probaremos que nos proporciona una pendiente de $H_A(\beta)$ respecto de

la hipersuperficie $x_j = 0$. Sabemos por la proposición IV-E.4 que:

$$\begin{aligned} Ch^F(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k). \end{aligned}$$

Por hipótesis, si la columna j -ésima es (a_{1j}, a_{2j}) , entonces la columna $k+1$ -ésima (a_{1k+1}, a_{2k+1}) verifica que $a_{1j} = \frac{q_1}{q_2} a_{1k+1}$ y $a_{2j} = \frac{q_1}{q_2} a_{2k+1}$ con $\frac{q_1}{q_2} > 1$, lo que nos proporciona el elemento en el ideal tórico:

$$\partial_j^{q_2} - \partial_{k+1}^{q_1}, \quad \text{con } q_1 > q_2.$$

Si consideremos el cono definido por los elementos

$$(0, 0, 0), \quad (a_{1j}, a_{2j}, \frac{q_1}{q_2}), \quad (a_{1k+1}, a_{2k+1}, 1), (a_{11}, a_{21}, 1), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, 1)$$

tenemos que el origen, y los puntos $(a_{1j}, a_{2j}, \frac{q_1}{q_2})$ y $(a_{1k+1}, a_{2k+1}, 1)$ están alineados.

Llamamos $L_1 = q_2 F + (q_1 - q_2) V_1$ a la filtración definida respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, el orden que define dicha filtración sobre el anillo $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, no nos proporciona un ideal monomial para el ideal inicial del ideal tórico I_A .

Si consideramos una filtración respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, L' tal que $F < L' < L_1$ y notamos ω' al vector que representa dicho orden sobre el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, obtenemos que la triangulación regular no cambia, por lo que,

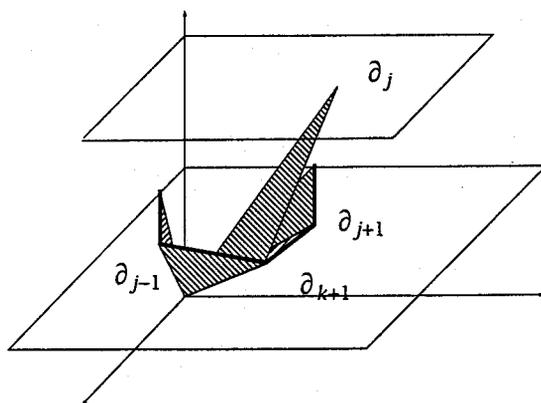
$$\Delta_{(1, \dots, 1)} = \Delta_{\omega'} = \{\{1, 2\}, \dots, \{j-1, j\}, \dots, \{k-1, k\}\},$$

así

$$\begin{aligned} Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \xi_2 \xi_5, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \\ \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_k \xi_k). \end{aligned}$$

Si ahora consideramos una filtración L'' respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, tal que $L_1 < L'' \neq V$, y denotamos ω'' al vector que

representa dicho orden en el anillo conmutativo $\mathbb{C}[\xi]$, entonces obtenemos la siguiente triangulación regular:



donde el punto j -ésimo es interior al cono, por ello

$$\Delta_{\omega''} = \{\{1, 2\}, \dots, \{j-2, j-1\}, \{j-1, k+1\}, \{k+1, j+1\}, \dots, \{k-1, k\}\}.$$

Así

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_{\omega''}(I_A)} = & (\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_{k+1}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \\ & \xi_2 \xi_{j-1}, \xi_2 \xi_{k+1}, \xi_2 \xi_{j+1}, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{j-2} \xi_k, \xi_{j-1} \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \xi_{k+1} \xi_{j+2}, \\ & \dots, \xi_{k+1} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \xi_j, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

De la misma forma que en la prueba de la proposición IV-D.2, tenemos que éste es un ideal perfecto, y usando la demostración de la proposición IV-B.1 podemos ver que los L'' -símbolos principales de los elementos dados por las filas de A forman una sucesión regular sobre el anillo $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\xi_1, \dots, \xi_n]/\sqrt{\text{in}_{L''}(I_A)}$, por lo tanto:

$$\text{gr}^{L''}(H_A(\beta)) = \text{in}_{L''}(I_A) + \langle \sigma^{L''}((A\theta - \beta)_1), \sigma^{L''}((A\theta - \beta)_2) \rangle,$$

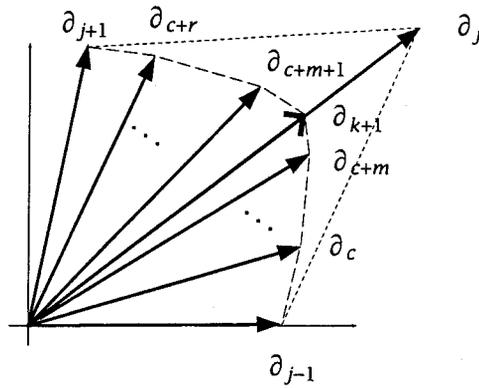
lo que implica que

$$\begin{aligned} \text{Ch}^{L''}(\mathcal{H}_A(\beta)) = & \mathcal{V}(\xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_4, \dots, \xi_1 \xi_{j-1}, \xi_1 \xi_{k+1}, \xi_1 \xi_{j+1}, \dots, \xi_1 \xi_k, \xi_2 \xi_4, \dots, \\ & \xi_2 \xi_{j-1}, \xi_2 \xi_{k+1}, \xi_2 \xi_{j+1}, \dots, \xi_2 \xi_k, \dots, \xi_{j-2} \xi_k, \xi_{j-1} \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j-1} \xi_k, \dots, \xi_{k-2} \xi_k, \end{aligned}$$

$$\xi_j, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n, x_1 \xi_1, \dots, x_{j-1} \xi_{j-1}, x_{j+1} \xi_{j+1}, x_k \xi_k, x_{k+1} \xi_{k+1}).$$

Por lo tanto, hay cambio en la variedad característica, y L_1 define una pendiente del sistema $H_A(\beta)$.

Consideremos ahora el caso general, es decir, Γ'' tiene más de un vértice que no lo es de Γ y uno de ellos es linealmente dependiente con j , los numeramos de la siguiente forma:



Esto nos proporciona una serie de binomios con soporte en tres variables. Los dados por los vértices de Γ'' entre $j-1$ y $k+1$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_{j-1}^{q_{j-1,1}} \partial_j^{q_{j,1}} - \partial_c^{q_{c,1}}, & q_{j-1,1} + q_{j,1} < q_{c,1}, \\ Q_2 &= \partial_c^{q_{c,2}} \partial_j^{q_{j,2}} - \partial_{c+1}^{q_{c+1,2}}, & q_{c,2} + q_{j,2} < q_{c+1,2}, \\ & \vdots \\ Q_{m+1} &= \partial_{c+m-1}^{q_{c+m-1,m+1}} \partial_j^{q_{j,m+1}} - \partial_{c+m}^{q_{c+m,m+1}}, & q_{c+m-1,m+1} + q_{j,m+1} < q_{c+m,m+1}. \end{aligned}$$

los vértices de Γ'' entre $k+1$ y $j+1$:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \partial_{j+1}^{q_{j+1,1}} \partial_j^{q'_{j,1}} - \partial_{c+r}^{q_{c+r,1}}, & q_{j+1,1} + q'_{j,1} < q_{c+r,1}, \\ Q'_2 &= \partial_{c+r}^{q_{c+r,2}} \partial_j^{q'_{j,2}} - \partial_{c+r-1}^{q_{c+r-1,2}}, & q_{c+r,2} + q'_{j,2} < q_{c+r-1,2}, \\ & \vdots \\ Q'_{r-m} &= \partial_{c+m+2}^{q_{c+m+2,r-m}} \partial_j^{q'_{j,r-m}} - \partial_{c+m+1}^{q_{c+m+1,r-m}}, & q_{c+m+2,r-m} + q'_{j,r-m} < q_{c+m+1,r-m}. \end{aligned}$$

y un circuito:

$$Q''_1 = \partial_j^{q''_{j,1}} - \partial_{k+1}^{q_{k+1,1}}, \quad q_{k+1,1} > q''_{j,1}.$$

Vimos en la prueba del teorema IV-D.5 que las pendientes respecto de la hipersuperficie que definen los elementos $\{Q_1, \dots, Q_{m+1}\}$ forman una sucesión creciente, así como las pendientes definidas por los elementos $\{Q'_1, \dots, Q'_{r-m}\}$. Veamos ahora que la pendiente respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$ definida por el circuito Q''_1 es mayor que la que define Q_{m+1} .

Los elementos del ideal tórico, Q_{m+1} y Q''_1 nos proporcionan los elementos de $\ker(\pi)$ siguientes:

$$\begin{aligned} &(0, \dots, q_{j,m+1}, \dots, 0, 0, \dots, 0, q_{c+m-1,m+1}, -q_{c+m,m+1}, \dots, 0) \\ &(0, \dots, q''_{j,1}, \dots, -q_{k+1,1}, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

eliminando la coordenada j -ésima obtenemos:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{q_{k+1,1} q_{j,m+1}}_{k+1}, 0, \dots, 0, \underbrace{q''_{j,1} q_{c+m-1,m+1}}_{c+m-1}, \underbrace{-q''_{j,1} q_{c+m,m+1}}_{c+m}, 0, \dots, 0).$$

Vector que nos define un elemento del ideal tórico, que gracias a la forma de la configuración, es:

$$\partial_{k+1}^{q_{k+1,1} q_{j,m+1}} \partial_{c+m-1}^{q''_{j,1} q_{c+m-1,m+1}} - \partial_{c+m}^{q''_{j,1} q_{c+m,m+1}}$$

con

$$q''_{j,1} q_{c+m,m+1} < q''_{j,1} q_{c+m-1,m+1} + q_{k+1,1} q_{j,m+1}$$

lo que equivale a

$$\frac{q_{j,m+1}}{q_{j,m+1} + q_{c+m-1,m+1} - q_{c+m,m+1}} < \frac{q''_{j,1}}{q''_{j,1} - q_{k+1,1}},$$

es decir, que la pendiente respecto de $x_j = 0$ definida por Q_{m+1} es menor que la definida por Q''_1 . De forma análoga podemos ver que la pendiente respecto $x_j = 0$ definida por Q'_{r-m} es menor que la definida por Q''_1 .

Queremos ver que todos estos elementos dan pendientes respecto de la hipersuperficie $x_j = 0$, del sistema $H_A(\beta)$, para las caras de Γ'' que no contienen al vértice $k + 1$ tenemos que repetir la prueba

del teorema IV-D.5, para ver que Q_1'' define una pendiente del sistema respecto de $x_j = 0$, nos remitimos a la primera parte de esta demostración. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Adolphson. *Hypergeometric functions and rings generated by monomials*. Duke Math. J., **73** no. 2,(1994) 269–290.
- [2] A. Assi, F. J. Castro-Jiménez y J.M. Granger. *How to calculate the slopes of a \mathcal{D} -module*. Compositio Math., **104** no. 2 (1996) 107-123.
- [3] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez y J.M. Granger. *The Gröbner fan of an A_n -module*. J. Pure Appl. Algebra. **150** no. 1 (2000), 27–39.
- [4] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez y J.M. Granger. *The analytic standard fan of a \mathcal{D} -module*. Effective methods in algebraic geometry. J. Pure Appl. Algebra. **164** no. 1-2, (2001), 3–21.
- [5] I. N. Bernstein. *analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*. Funkcional. Anal. i Priložen. **6** (1972), no. 4, 26–40.
- [6] J. E. Björk. *Rings of differential operators*. North-Holland, (1979).
- [7] A. Borel et al. *Algebraic \mathcal{D} -modules*. Perspective in Math. Volume 2. Academic Press, Boston, (1987).
- [8] N. Bourbaki. *Algèbre Commutative*. Mason, New York, (1983).
- [9] J. Briançon y P. Maisonobe. *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*. Enseign. Math. (2) **30** no. 1-2, (1984), 7–38.
- [10] F. J. Castro-Jiménez. *Théorème de division pour les opérateurs différentiels et calcul des multiplicités*. Volumen de Thèse de 3^{eme}

- cycle, Paris, (1984).
- [11] F. J. Castro. *Calcul de la dimension et des multiplicités d'un \mathcal{D} -module monogène*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** no. 14, (1986), 487–490.
- [12] F. J. Castro. *Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels*. Géométrie algébrique et applications III (La Rábida, 1984), Travaux en cours **24**, Hermann, Paris, (1987), 1–19.
- [13] F. J. Castro-Jiménez y J.M. Granger. *Explicit calculation in rings of differential operators*. Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, **35**, (1997).
- [14] F.J. Castro-Jiménez y L. Narváez Macarro. *Homogenising differential operators*. Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, **36**, (1997).
- [15] F.J. Castro-Jiménez y N. Takayama. *Slopes of a hypergeometric System Associated to a Monomial Curve*. math.AG/010746, (2001).
- [16] F. J. Castro-Jiménez y N. Takayama. *GKZ hypergeometric slopes associated to monomial curves. Integral representations and twisted cohomology in the theory of differential equations* (Kyoto, 2001). Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku **1212** (2001), 79–94.
- [17] E. Cattani, A. Dickenstein y B. Sturmfels. *Rational hypergeometric functions*. Compositio Math. **128** no. 2, (2001), 217–240.
- [18] E. Cattani, C. D'Andrea y A. Dickenstein. *The A-hypergeometric system associated with a monomial curve*. Duke Math. J. **99** no. 2, (1999), 179–207.
- [19] L. Coudurier y M. Morales. *Classification des Courbes Toriques dans l'Espace Projectif, Module de Rao et Liaison*. J. Algebra **211**, no. 2, (1999), 524–548.
- [20] S. C. Coutinho. *A primer of Algebraic D-modules*. London Mathematical Society Student Texts 33, Cambridge University Press,

- Cambridge (1995).
- [21] D. Cox, J. Little y D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer, New York, (1991).
- [22] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. (1995).
- [23] D. Eisenbud y B. Sturmfels. *Binomial ideals*. Duke Math. J., **84**no. 1, (1996), 1–45.
- [24] I. M. Gel'fand, A. V. Zelevinski y M. M. Kapranov. *Hypergeometric functions and toric varieties*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **23**no. 2, (1989), 12–26; traducción en Funct. Anal. Appl. **23** no.2, (1989), 94–106.
- [25] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov y A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [26] J. M. Granger y P. Maisonobe. *A basic course of differential modules*. Élément de la theorie des systèmes différentiels \mathcal{D} -modules cohérents et holonomes. Travaux en Cours, 45, Hermann, Paris, (1993), 103–168.
- [27] M. Hochster y J.A. Eagon. *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*. Amer. J. Math. **93** (1971) 1020–1058.
- [28] R. Hotta. *Equivariant D -modules*. Proceedings of ICPAM Spring School in Wuhan, editado por P. Torasso. Travaux en Cours, Hermann, Paris, por aparecer, math.RT/9805021. (1991).
- [29] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York. (1956).
- [30] M. Kashiwara. *B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions*. Invent. Math. **38** no. 1, (1976/77), 33–53.

- [31] Y. Laurent. *Polygône de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4^{ème} série, **20** no.3, (1987), 391-441.
- [32] Y. Laurent y Z. Mebkhout. *Pentes algébriques et pentes analytiques d'un \mathcal{D} -module*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** no. 1, (1999), 39-69.
- [33] Y. Laurent y Z. Mebkhout. *Image inverse d'un \mathcal{D} -module et polygône de Newton*. Prépublication de l'Institut Fourier n° 514 (2000).
- [34] A. Leykin, M. Stillman y H. Tsai. *The D -module package for Macaulay 2*. <http://www.math.umn.edu/leykin/>.
- [35] B. Malgrange. *Sur les points singuliers des équations différentielles*. Enseignement Math.(2), **20** (1974), 147-176.
- [36] B. Malgrange. *Le poynône de Bernstein d'une singularité isolée*. Lecture Notes in Math. 459, Springer-Verlag, (1975), 98-119.
- [37] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, (1986).
- [38] Z. Mebkhout. *Local cohomology of analitic spaces*. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12**, (1977), 247-256.
- [39] Z. Mebkhout. *Remarques sur l'irrégularité des \mathcal{D}_X -modules holonomes*. C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **303** no. 16, (1986), 803-806.
- [40] Z. Mebkhout. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérent*. Travaux en cours, 35 Hermann, Paris (1989).
- [41] Z. Mebkhout. *Le théorème de positivité de l'irregularité pour le \mathcal{D} -modules*. Grothendieck Festschrift III, Progress in Math., vol 88 (1990) 84-131.

- [42] J. C. Rosales y P. A. García-Sánchez. *Finitely generated commutative monoids*. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, (1999).
- [43] M. Saito, B. Sturmfels y N. Takayama. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*. Algorithms and Computations in Mathematics, **6** Springer, (2000).
- [44] C. Sabbah. *Proximité évanescence I, la structure polaire d'un \mathcal{D} -module* Apéndice en colaboración con F. Castro, Compositio Math. **62**, (1987) 283–328.
- [45] B. Sturmfels. *Gröbner bases and Convex Polytopes*. University Lecture Notes, **8**. American Mathematical Society, Providence, (1996).
- [46] N. Takayama. **Kan**: a system for computation in Algebraic Analysis. Source code available for Unix computers from 'ftp.math.kobe-u.ac.jp', (1991).
- [47] J. M. Ucha-Enríquez. *Métodos constructivos en álgebras de operadores diferenciales*. Tesis Doctoral, Junio 1999.
- [48] J. M. Ucha. *Matrices de operadores diferenciales*. Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones. EAMA'99, Sevilla.
- [49] J. M. Ucha-Enríquez. *Computation of the slopes of a \mathcal{D} -module of type \mathcal{D}'/N* . Ring Theory and algebraic geometry. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **221**, Dekker, New York, (2001), 311–324.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. María Isabel Castillo Herueta
titulada Métodos espectros en anillos de operadores diferenciales
y en formas hipergeométricas

acordó otorgarle la distinción de Sobresaliente cum laude por
unanimidad del Tribunal

Sevilla, 15 de septiembre

2002

El Vocal,

El Vocal

El Vocal,

Antonio Fariñas

E. Briob

P. L. L.

El Presidente

El Secretario,

El Decorado,

Tras el cual

[Signature]

[Signature]

