

21512

LBS 1003528

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
BIBLIOTECA

043  
125

Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología

# Esquemas del máximo en la Aritmética

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología  
178 84 del Boro  
24 FEB  
Sevilla.

El Jefe del Negociado de Teoría

Memoria presentada por

Mario de Jesús Pérez Jiménez

para optar al grado de

Doctor en Matemáticas

por la Universidad de Sevilla

Mario de Jesús Pérez Jiménez

Sevilla, marzo de 1992

Vº. Bº. El Director de la Memoria

Alejandro Fernández Margarit

A la memoria de mi madre  
y a mis hijos,  
María y David.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento:

- A todos los profesores del Departamento de Álgebra, Computación Geometría y Topología de esta Universidad, que, desde el primer día, me han acogido con una cordialidad exquisita.
- En particular, a los profesores José A. Alonso Jiménez y Joaquín Borrego Díaz por sus análisis críticos.
- Especialmente, al profesor Alejandro Fernández Margarit, cuya dirección tenaz y dinámica ha convertido este trabajo en una experiencia fascinante.
- Al profesor Petr Hájek, de la Universidad de Praga, por sus observaciones acerca de la conjetura de Friedman.
- Al profesor C. Dimitracopoulos, de la Universidad de Creta, por sus múltiples sugerencias sobre diversas partes del trabajo, en especial las relativas a las estructuras maximales  $\Sigma_n$ -definibles.
- A mi hermano Antonio, que ha tenido una participación determinante en mi formación matemática.
- Y a Queta, mi mujer, por su apoyo y estímulo.

# Contenido

Introducción . . . . .	i
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 La teoría $P^-$ . . . . .	1
1.2 La jerarquía $\Sigma_n, \Pi_n$ . . . . .	2
1.3 Las teorías $IF, LG, BF, SF$ . . . . .	4
1.4 Subestructuras . . . . .	7
1.5 Elementos $\Sigma_n$ -definibles . . . . .	9
1.6 Codificación de conjuntos finitos . . . . .	10
1.7 Validez parcial . . . . .	11
1.8 Otros resultados . . . . .	12
<b>2 Esquemas del máximo</b>	<b>13</b>
2.1 Las teorías $F^*\Gamma, F\Gamma$ y $M\Gamma$ . . . . .	13
2.2 Relaciones entre los esquemas de inducción, colección y colección fuerte . . . . .	18
2.3 Relaciones entre los esquemas del máximo y de inducción para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ . . . . .	24
2.4 Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección fuerte para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ . . . . .	31

2.5	El axioma de regularidad . . . . .	39
2.6	Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ . . . . .	43
2.7	Relaciones de los esquemas del máximo con los esquemas de inducción, colección y colección fuerte, para $\forall_n$ . . . . .	51
2.8	Consideraciones finales . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Sobre una conjetura de Friedman</b>	<b>56</b>
3.1	Introducción . . . . .	56
3.2	Las teorías $F\Delta_{n+1}, F^*\Delta_{n+1}, M\Delta_{n+1}$ . . . . .	61
3.3	Relaciones entre los esquemas del máximo, inducción, colección y colección fuerte para $\Delta_{n+1}$ . . . . .	65
3.4	Reducción de la conjetura de Friedman . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Estructuras <math>\Sigma_n</math>-definibles</b>	<b>72</b>
4.1	Estructuras maximales $\Sigma_n$ -definibles . . . . .	72
4.2	La estructura $I_n^*(\mathcal{A}; a)$ . . . . .	75
4.3	Las estructuras $J_n(\mathcal{A}; a)$ y $J_n^*(\mathcal{A}; a)$ . . . . .	81
4.4	$\Sigma_n$ -definibilidad en $K_n(\mathcal{A})$ . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Teoremas splitting</b>	<b>102</b>
5.1	Splitting en $F^*\Sigma_n$ . . . . .	102
5.2	Otros teoremas splitting en fragmentos de la aritmética . . .	109
	<b>Apéndice</b>	<b>111</b>
	<b>Índice de notaciones</b>	<b>120</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>122</b>

# Introducción

La Aritmética de Peano, **PA**, es la teoría de primer orden cuyos axiomas no lógicos son, básicamente, de dos tipos:

- los que corresponden a la parte no negativa de los anillos ordenados discretos (**P<sup>-</sup>**),
- y un esquema de axiomas de **inducción I**:

$$\{\forall \vec{y}(\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{y})) \rightarrow \forall x\varphi(x, \vec{y})) : \varphi \in \text{Form}(\mathbf{L})\}$$

Es decir, un axioma de inducción, **I<sub>φ</sub>**, para cada fórmula  $\varphi \in \text{Form}(\mathbf{L})$ .

En la anterior descripción de **PA**, el esquema de axiomas de inducción puede ser sustituido por otros esquemas alternativos. Entre éstos hay que resaltar los esquemas clásicos de minimización, colección y colección fuerte, que provienen de ciertos procesos en el estudio de conjuntos recursivos y recursivamente enumerables. Dichos esquemas traducen las siguientes propiedades:

1. Todo conjunto definible no vacío posee elemento mínimo (esquema de axiomas de **minimización L**).
2. La imagen de un conjunto acotado por una función definible es un conjunto acotado (esquema de axiomas de **colección B**).
3. Si una función parcial definible tiene dominio acotado, entonces existe una acotación uniforme de todas las imágenes de los subconjuntos del dominio (esquema de **colección fuerte S**).

y corresponden, en la teoría de la recursión, a los procesos de  $\mu$ -recursión o minimización (esquema **L**) y de alternancia entre cuantificadores acotados y no acotados (esquemas **B** y **S**).

En 1977, J. Paris y L. Kirby [25] establecen las relaciones fundamentales entre los esquemas clásicos **I**, **B** y **L** (ver teorema 1.3.13). A principios de la década de los 80, P. Hájek [13] obtuvo las relaciones de estos esquemas con el de colección fuerte, por ello, el diagrama de Paris-Kirby puede expresarse en función de los esquemas de colección y de colección fuerte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{III}_n & \iff & \text{I}\Sigma_n & \iff & \text{S}\Sigma_n & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \text{B}\Sigma_{n+1} & \iff & \text{B}\Pi_n \\
 & & & & \uparrow & & \\
 \text{III}_{n+1} & \iff & \text{I}\Sigma_{n+1} & \iff & \text{S}\Sigma_{n+1} & \iff & \text{S}\Pi_n
 \end{array}$$

El estudio de los modelos de  $\mathbf{P}^-$  se realiza a través del análisis de sus extensiones. Debido a las propiedades del predicado  $<$ , dado un modelo  $\mathfrak{A}$  de  $\mathbf{P}^-$  existen, básicamente, tres tipos de extensiones,  $\mathfrak{B}$ , de  $\mathfrak{A}$ :

1. Extensiones finales:  $A$  es un segmento inicial de  $B$  (en la terminología de Smoryński [27], cada elemento de  $B - A$  es  $A$ -infinito).
2. Extensiones cofinales:  $\mathfrak{A}$  es una subestructura cofinal de  $\mathfrak{B}$  (cada elemento de  $B - A$  es  $A$ -finito).
3. Extensiones mixtas:  $\mathfrak{B}$  no es una extensión final ni cofinal de  $\mathfrak{A}$  ( $B - A$  contiene elementos  $A$ -finitos y  $A$ -infinitos).

Dado un modelo no estándar de  $\mathbf{PA}$ , ¿existe una extensión cofinal, final o mixta que, además, sea propia y elemental (por tanto, modelo de  $\mathbf{PA}$ )?. En los tres casos, la respuesta es afirmativa.

Utilizando un argumento similar al empleado por T. Skolem, en 1934, para dar el primer ejemplo de modelo no estándar, se prueba:

1. la existencia de tales extensiones mixtas, para modelos no estándar de  $\mathbf{PA}$ ;
2. la existencia de extensiones cofinales, propias y elementales, para modelos no estándar de  $\mathbf{P}^-$  : es obvio que  $\mathbf{N}$  carece de extensiones cofinales propias que sean modelos de  $\mathbf{P}^-$ . Este resultado fue generalizado por M. Rabin para modelos no estándar de  $\mathbf{PA}$ .

Los teoremas “splitting” establecen que una extensión mixta se descompone en una parte final y otra cofinal, que, además, es elemental.

El estudio de las extensiones finales ha tenido un lugar preferente en la teoría de modelos de la Aritmética, lo cual se debe, en gran medida, al hecho de que cualquier modelo no estándar de  $\mathbf{PA}$  es una extensión final y propia del modelo estándar  $\mathbf{N}$ .

En 1961, R. Mac Dowell y E. Specker prueban que todo modelo no estándar de  $\mathbf{PA}$  posee una extensión final, propia y elemental. Al igual que T. Skolem, hicieron la construcción de la extensión mediante ultraproductos.

En 1976, H. Gaifman [11] plantea la siguiente cuestión: si  $T$  es una extensión completa de  $\mathbf{PA}$  sobre un lenguaje arbitrario  $\mathbf{L}$  ¿cada modelo de  $T$  tiene una extensión final, propia y elemental?.

En 1980, G. Mills [22] responde negativamente a esa pregunta proporcionando una extensión completa  $T$  de  $\mathbf{PA}$  sobre un lenguaje de cardinal  $\aleph_1$  que posee modelos que carecen de tales extensiones.

En 1977, J. Paris y L. Kirby [25] refinan el teorema de Mac Dowell–Specker estableciendo una correlación entre fragmentos de la Aritmética y la existencia de extensiones finales, propias,  $n$ -elementales:

*Sea  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_0$  numerable y  $n \geq 2$ . Entonces  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$  si y sólo si  $\mathfrak{A}$  posee una extensión final, propia y  $n$ -elemental, que es modelo de  $\mathbf{I}\Sigma_0$ .*

En consecuencia, para cada modelo,  $\mathfrak{A}$ , de  $\mathbf{I}\Sigma_0$ ,  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  si y sólo si posee una extensión final, propia y elemental.

A diferencia de la prueba de R. Mac Dowell y E. Specker, la prueba del refinamiento de Paris y Kirby utiliza de forma explícita la numerabilidad

del modelo. No obstante, como sugirió A.J. Wilkie, era presumible que dicho resultado fuese válido para modelos arbitrarios.

En 1986, P.G. Clote [3] demuestra que la hipótesis de numerabilidad es superflua en el refinamiento de Paris y Kirby del teorema de Mac Dowell-Specker, utilizando, para ello, elementos de la teoría de la recursión formalizada.

El objetivo fundamental de esta memoria es el estudio de unos nuevos esquemas de axiomas, que denominaremos esquemas del **máximo**, desde los siguientes puntos de vista:

1. Relaciones con los esquemas clásicos de inducción, minimización, colección y colección fuerte, para los conjuntos de fórmulas  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$  (capítulo 2).
2. Aplicaciones de los esquemas del máximo:
  - (a) a la obtención de nuevas pruebas de resultados conocidos ( $\mathbf{S}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ ,  $\mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_{n+1}) \Leftrightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}, \dots$ ) (capítulos 2 y 3);
  - (b) al análisis de una conjetura de Friedman ( $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \Rightarrow \mathbf{L}\Delta_{n+1}$ ) (capítulo 3);
  - (c) a la obtención de estructuras maximales  $\Sigma_n$ -definibles, es decir, subestructuras propias,  $\mathfrak{B}$ , de  $\mathfrak{A}$  tales que  $K_n(\mathfrak{A}; B) = \mathfrak{B}$ ; que, además, son segmentos iniciales (capítulo 4);
  - (d) al estudio de la  $\Sigma_n$ -definibilidad en  $K_n(\mathfrak{A})$  (capítulo 4).
  - (e) para establecer teoremas "splitting" en ciertos fragmentos de la Aritmética (capítulo 5).

La introducción de estos esquemas tiene por finalidad analizar el comportamiento del crecimiento de funciones definibles (recordemos que en  $\mathbf{I}\Sigma_0$ , toda función definible está acotada por un polinomio y, por tanto, la función exponencial no es definible).

A continuación, hacemos una breve exposición de los resultados más interesantes obtenidos en los distintos capítulos del presente trabajo.

## Capítulo 2 : Esquemas del máximo.

Los esquemas del máximo **F**, **F\*** y **M**, que introducimos en este capítulo, traducen las siguientes propiedades:

1. Si el dominio de una función definible es no vacío, entonces el rango posee elemento máximo (esquema **F\***).
2. Si el dominio de una función definible está acotado, entonces también lo está el rango (esquema **F**).
3. Todo conjunto definible no vacío y acotado, posee elemento máximo (esquema **M**).

Las relaciones fundamentales entre estos esquemas y los esquemas clásicos (**I**, **L**, **B**, **S**) quedan resumidas en la siguiente figura.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbf{S}\Pi_n & \Leftrightarrow & \mathbf{F}\Pi_n & \Leftrightarrow & \mathbf{F}^*\Pi_n & \Rightarrow & \mathbf{B}\Pi_n & \Rightarrow & \mathbf{M}\Pi_n & \Leftrightarrow & \mathbf{I}\Pi_n \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 \mathbf{S}\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} & \Rightarrow & \mathbf{B}\Sigma_{n+1} & \Leftarrow & \mathbf{M}\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \\
 \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathbf{S}\Pi_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}\Pi_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} & \Rightarrow & \mathbf{B}\Pi_{n+1} & \Rightarrow & \mathbf{M}\Pi_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{I}\Pi_{n+1}
 \end{array}$$

En ella, hemos considerado oportuno cambiar el orden de colocación de los esquemas, respecto de la figura 6, especialmente para resaltar la equivalencia entre **S**, **F**, y **F\***.

El gran número de relaciones que se iban obteniendo entre los esquemas del máximo y los clásicos motivaron la necesidad de buscar un sistema de exposición diferente al de ir probando secuencialmente un teorema tras otro. En esta línea, pensamos en una configuración gráfica inicial de los esquemas

(figura 1) que, gradualmente, iríamos rellenando con las implicaciones deducidas en cada paso, hasta determinar completamente todas las posibles relaciones entre los esquemas considerados (figura 6).

Si bien el objetivo inicial del capítulo 2 era el estudio de las relaciones entre los distintos esquemas para los conjuntos de fórmulas  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$ , pronto hubo que analizar también el comportamiento de dichos esquemas respecto del conjunto  $\Lambda_n$  de fórmulas que son conjunción de una  $\Sigma_n$  y de una  $\Pi_n$ . Todo ello debido a la necesidad, en determinadas pruebas, de hacer funcional una fórmula  $\varphi(x, y)$ ,  $\Sigma_n$  ó  $\Pi_n$ , lo cual puede lograrse mediante un proceso de minimización ( $\psi(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge \forall z < y \neg \varphi(x, z)$ ), siempre que se opere en una teoría adecuada ( $\mathbf{B}\Sigma_n$ , si  $n > 0$ ). Al final (figura 6) se observa que los esquemas  $\mathbf{E}\Lambda_{n+1}$  son equivalentes a  $\mathbf{E}\Pi_{n+1}$ , siendo  $\mathbf{E}$  cualquiera de los esquemas considerados. Lo cual ratifica que su estudio, debido a necesidades impuestas por las pruebas, no aporta sustancialmente nada nuevo.

La equivalencia entre los fragmentos  $\mathbf{M}\Gamma$  e  $\mathbf{I}\Gamma$

- para  $\Gamma = \Pi_n$ , se obtiene directamente a través del esquema de minimización  $\mathbf{L}\Sigma_n$  (2.3.2);
- para  $\Gamma = \Sigma_n$ , se obtiene utilizando el esquema de colección  $\mathbf{B}\Sigma_n$  como paso intermedio (2.3.3 y 2.3.4).

Por otra parte, la equivalencia entre  $\mathbf{F}^*\Gamma$  y  $\mathbf{F}\Gamma + \mathbf{M}\Gamma$ , para los conjuntos de fórmulas considerados, era previsible (si una función definible tiene dominio acotado no vacío, entonces del esquema  $\mathbf{F}$  resulta que el rango está acotado y, como es no vacío, del esquema  $\mathbf{M}$  resulta que posee elemento máximo). No obstante, la dificultad para probar este resultado radica en conseguir que las fórmulas que se manejan tengan una determinada complejidad. Pues bien

- para  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n$  la prueba es directa ( 2.4.1 y 2.4.4).
- para el conjunto  $\Gamma = \vee_n$ , fórmulas que son disjunción de una  $\Sigma_n$  y de una  $\Pi_n$ , se da una prueba, utilizando la codificación de conjuntos finitos 2.7.3.

La equivalencia entre  $\mathbf{F}^*\Gamma$  y  $\mathbf{F}\Gamma$ , para  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n$ , se deduce de las relaciones establecidas anteriormente y de la implicación  $\mathbf{F}\Lambda_n \implies \mathbf{S}\Sigma_n$  (2.4.3).

En la sección 6 del capítulo 2, los resultados fundamentales son:

$$\mathbf{F}\Pi_{n+1} \models \mathbf{B}\Pi_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}\Pi_{n+1} \iff \mathbf{F}\Sigma_{n+2}$$

Para establecer la implicación  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{B}\Pi_{n+1}$ , utilizamos el axioma de regularidad  $\mathbf{R}\Gamma$  (la unión de un número finito de conjuntos finitos es finita), y probamos que  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{R}\Pi_n$  (2.6.3). Entonces, la implicación se sigue de un resultado de Mills y Paris [23] ( $\mathbf{R}\Pi_n \iff \mathbf{B}\Pi_{n+1}$ ).

Utilizando propiedades de las estructuras  $K_n(\mathcal{A}; a)$  e  $I_n(\mathcal{A}; a)$  (teoremas 1.5.2 y 1.5.3), hallamos un modelo de  $\mathbf{B}\Pi_{n+1}$  que no lo es de  $\mathbf{F}\Pi_{n+1}$  (la estructura  $I_{n+2}(\mathcal{A}; a)$ , con  $\mathcal{A} \models \mathbf{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ ).

Para establecer la equivalencia  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \iff \mathbf{F}\Sigma_{n+2}$  nos apoyamos nuevamente en el esquema de colección fuerte, probando que  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Sigma_{n+1}$  (2.6.4), para lo cual utilizamos un teorema de Mills y Paris (2.5.3).

Terminamos el capítulo 2 probando que los esquemas  $\mathbf{E}\Lambda_n$  son equivalentes a los correspondientes esquemas relativos a  $\vee_n$ . En consecuencia, en la figura 6 podemos intercambiar dichos conjuntos de fórmulas.

### Capítulo 3 : Conjetura de Friedman.

Del teorema 1.3.13 de Paris-Kirby y del teorema 2.2.1 se deduce que los fragmentos  $\mathbf{L}\Gamma$  e  $\mathbf{I}\Gamma$  son equivalentes para los conjuntos de fórmulas  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n, \vee_n$ . Por ello, no hemos considerado necesario incluir el esquema de minimización  $\mathbf{L}\Gamma$  en la figura inicial (figura 1), que hemos rellenado en pasos sucesivos en el capítulo 2.

La situación cambia radicalmente para  $\Gamma = \Delta_{n+1}$  ya que, si bien del teorema de R. Gandy 3.1.2 y del teorema de P. Hájek 3.1.3 resulta que  $\mathbf{L}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ , no se sabe si la implicación recíproca es o no cierta, aunque H. Friedman [13] conjetura que sí.

En el capítulo 3 se prueba la equivalencia entre  $\mathbf{M}\Delta_{n+1}$  y  $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$  utilizando

para ello el esquema de colección  $B\Sigma_{n+1}$  como paso intermedio, y se obtienen las siguientes relaciones entre los esquemas del máximo y los esquemas clásicos para  $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 S\Pi_n & \Rightarrow & B\Pi_n & \Rightarrow & L\Pi_n & \Leftrightarrow & M\Pi_n & \Leftrightarrow & \text{III}_n & \Leftarrow & S\Pi_n \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\
 S\Delta_{n+1} & \Rightarrow & B\Delta_{n+1} & \Leftrightarrow & L\Delta_{n+1} & \Leftrightarrow & M\Delta_{n+1} & \Rightarrow & \text{I}\Delta_{n+1} & \Leftarrow & S\Delta_{n+1} \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\
 S\Sigma_{n+1} & \Rightarrow & B\Sigma_{n+1} & \Leftarrow & L\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & M\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & \text{I}\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & S\Sigma_{n+1}
 \end{array}$$

Como se puede observar en la figura anterior, el diagrama no está cerrado completamente. Existen dos implicaciones abiertas

$$\text{III}_n \xrightarrow{?} \text{I}\Delta_{n+1} \xrightarrow{?} M\Delta_{n+1}$$

entre las cuales hay una cierta correlación.

En la última sección de dicho capítulo, se prueba una reducción de la conjetura de Friedman, comunicada personalmente por P. Hájek, utilizando el esquema del máximo  $M\Delta_{n+1}$ . Esta reducción permite expresar la conjetura de Friedman en los siguientes términos:

*En la teoría  $\text{I}\Delta_{n+1}$ , el conjunto de fórmulas  $\Delta_{n+1}$  es cerrado bajo cuantificación acotada.*

#### Capítulo 4 : Estructuras $\Sigma_n$ -definibles.

Antes de probar que  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{F}\Sigma_{n+2}$ , nos planteamos la posibilidad de que dicha implicación fuese falsa. Para ello, intentamos encontrar un modelo de  $\mathbf{F}\Pi_{n+1}$  que no fuese modelo de  $\mathbf{F}\Sigma_{n+2}$ . Bajo esta perspectiva, introducimos la estructura  $J_n(\mathcal{A}; a)$ , asociada a una estructura,  $\mathcal{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_n$ , y un elemento,  $a$ , de su universo. Un elemento de  $A$  pertenece a  $J_n(\mathcal{A}; a)$  si está acotado superiormente por el máximo de una función  $\Pi_n$ -definible, con

parámetros que verifican unas ciertas condiciones de tipo recurrente. Si bien, bajo ciertas hipótesis, dicha estructura es modelo de  $\mathbf{F}\Pi_{n+1}$  (concretamente, probamos que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_{n+2}$ , entonces  $J_{n+2}(\mathfrak{A}; a)$  es modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+3}$  y, por tanto, de  $\mathbf{F}\Pi_{n+1}$ ), no pudimos probar, porque era imposible, que no fuese modelo de  $\mathbf{F}\Sigma_{n+2}$  (recordemos que  $\mathbf{B}\Sigma_{n+3} \implies \mathbf{F}\Sigma_{n+2}$ , ver figura 7). No obstante, nos encontramos con una sorpresa: los elementos de  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  eran los únicos de  $A$  que son  $\Sigma_n$ -definibles con parámetros en  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ . Este descubrimiento nos sugirió el estudio de subestructuras propias de una estructura  $\mathfrak{A}$  que verificasen la propiedad anterior (y que denominamos estructura maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ ). El teorema de Friedman 1.8.1, nos permitió demostrar que si  $\mathfrak{A}$  es un modelo numerable no estándar de  $\mathbf{PA}$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  es una subestructura propia, maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ . Además, es un segmento inicial y contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$ . En tal situación, parecía lógico analizar la estructura  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ , similar a  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ , pero relativa a funciones  $\Sigma_n$ -definibles. Así probamos que  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  verifica propiedades análogas de maximalidad  $\Sigma_n$ -definible.

En el estudio de este tipo de estructuras probamos que:

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$  es una extensión no estándar  $n$ -elemental de  $\mathbf{N}$ , entonces  $\mathbf{N}$  es una estructura maximal  $\Sigma_n$ -definible [ consecuencia del ejemplo 4.1.2 ].
2. Si  $\mathfrak{A}$  es una estructura y  $a \in A$  son tales que  $K_n(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ , entonces  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  es maximal  $\Sigma_n$ -definible [ ejemplo 4.1.4 ].
3. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  no es maximal  $\Sigma_n$ -definible [ teorema 4.1.6 ].

Así pues, si una estructura  $\mathfrak{A}$  posee elementos que no son  $\Sigma_n$ -definibles, entonces la estructura  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  es maximal en  $\mathfrak{A}$ , pero no es, en general, un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$ .

En esta situación, nos preguntamos:

A. ¿Existen subestructuras de  $\mathfrak{A}$  maximales  $\Sigma_n$ -definibles que sean segmentos iniciales de  $\mathfrak{A}$  y contengan a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$ ?

B. En caso afirmativo, ¿existe la menor de tales estructuras?

De la observación 3 hecha anteriormente, se sigue que la estructura  $I_n(\mathfrak{A}; a)$  no resuelve, en general, la cuestión A. En cambio, si  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  son subestructuras propias de  $\mathfrak{A}$  (en particular, si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  es numerable no estándar), entonces dichas estructuras responden afirmativamente a esta cuestión.

La búsqueda de una estructura que diera una respuesta positiva a la cuestión B, nos llevó a introducir la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; X)$ , con  $X \subseteq A$ . Dicha estructura se construye recurrentemente: en el paso 0 consideramos  $I_n(\mathfrak{A}; X)$  y en el paso  $k + 1$  el  $n$ -segmento inicial de  $\mathfrak{A}$  determinado por el conjunto de elementos  $\Sigma_n$ -definibles con parámetros en el conjunto construido en el paso  $k$ .

En 4.2.12 probamos que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  es numerable no estándar y  $a \in A$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es un segmento inicial que contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  y es maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ . Más aún, en 4.2.13 probamos que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es la menor de tales subestructuras. De esta forma, damos una respuesta afirmativa a la cuestión B.

Con posterioridad al estudio de  $I_n^*(\mathfrak{A}; X)$ , observamos que P. Hájek y P. Pudlák [15] introducen dicha estructura sin parámetro inicial, y la notan  $H^n(\mathfrak{A})$ . Además, prueban que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  es no estándar, entonces  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+2}$ . Consecuentemente, si añadimos la condición  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ , entonces la estructura  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$  proporciona un nuevo ejemplo de modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+2}$  que no lo es de  $\mathbf{I}\Sigma_{n+2}$ . No obstante, y a diferencia del ejemplo clásico de Paris y Kirby, dicha estructura satisface, además, la propiedad de maximalidad  $\Sigma_n$ -definible anteriormente descrita. En la sección 3 del capítulo 4, estudiamos varias cuestiones relativas a la  $\Sigma_n$ -definibilidad en  $K_n(\mathfrak{A})$ . En primer lugar, probamos que para modelos no estándar de  $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ , las estructuras  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  e  $I_{n+1}(\mathfrak{A})$  no son  $\Sigma_{n+1}$ -definibles. Para ello, usando fórmulas especiales, utilizamos la caracteriza-

ción de Hájek y Pudlák ([15], lema 1.36 del capítulo 4) de los elementos de  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  en modelos de  $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ , y probamos que  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  está acotado superiormente en  $\mathfrak{A}$ . Por tanto, de la  $\Sigma_{n+1}$ -definibilidad de  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$ , se seguiría que  $\mathfrak{A} \neq \mathbf{M}\Sigma_{n+1}$ .

Finalmente, se generalizan unos resultados de H. Lessan ([19], teorema 3.1.17, apartados (i), (ii)) relativos a la caracterización de  $K_n(\mathfrak{A})$  en términos de  $\Sigma_{n+1}$ -definibilidad entre los modelos de la teoría

$$\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A})) = \{\sigma \in (\Sigma_{n+2} \cup \Pi_{n+2}) \cap \text{Sent}(\mathbf{L}) : K_n(\mathfrak{A}) \models \sigma\}$$

Para ello, se introducen, de manera natural, los conceptos de equivalencia  $n$ -elemental entre estructuras ( $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$  si para cada  $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{x}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{x})$ ) y de teorías  $n$ -completas (una teoría consistente  $T$  es  $n$ -completa si para cada  $\sigma \in \Pi_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L}) : T \vdash \sigma$  ó  $T \vdash \neg\sigma$ ), analizando algunas de sus propiedades elementales.

Las caracterizaciones de  $K_n(\mathfrak{A})$  que damos son las siguientes:

- Es el único modelo de la teoría  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  en el que el conjunto  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible (4.4.12).
- Es el único modelo,  $\mathfrak{B}$ , de la teoría  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  tal que  $K_n(\mathfrak{B})$  es cofinal en  $\mathfrak{B}$  (4.4.13).

## Capítulo 5 : Teoremas “splitting”.

En 1972, Gaifman [10] prueba que:

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  y  $\mathfrak{B}$  es una extensión 0-elemental cofinal de  $\mathfrak{A}$  que es modelo de  $\mathbf{P}^-$ , entonces  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ .
2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  y  $\mathfrak{B}$  es una extensión cofinal de  $\mathfrak{A}$  que es modelo de  $\mathbf{P}^-$ , entonces

$$\mathfrak{A} \prec_0 \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B} \models \mathbf{PA} \iff \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$$

de donde se deducen dos resultados interesantes:

3. Todo modelo no estándar de  $\mathbf{PA}$ , tiene una extensión cofinal, propia y elemental (resultado de M. Rabin).
4. Si  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son modelos de  $\mathbf{PA}$ , tales que  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ , entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{C} \subset_e \mathfrak{B}$ . Además,  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$  (teorema “splitting” de Gaifman).

Por tanto, en modelos de  $\mathbf{PA}$ , toda extensión puede considerarse como el resultado de una extensión cofinal seguido de una extensión final. Más aún, la parte cofinal es elemental.

De esta forma, el análisis de las extensiones mixtas se reduce al de las extensiones finales y cofinales.

El desarrollo del capítulo 5 se enmarca dentro del estudio de extensiones finales y cofinales de ciertos fragmentos de la Aritmética.

Siguiendo la línea de J. Paris [24], para demostrar que todo modelo de  $\mathbf{I}\Sigma_n$  posee una extensión cofinal  $(n + 1)$ -elemental que es modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , aportamos un teorema “splitting” (5.1.7) para los esquemas del máximo  $\mathbf{F}^*\Sigma_n$ :

*Si  $\mathfrak{A}$  es una estructura, entonces toda extensión  $(n + 1)$ -elemental que sea modelo de  $\mathbf{F}^*\Sigma_n$  es, así mismo, modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ . Además, coincide con la extensión  $n$ -elemental final de una extensión  $(n + 1)$ -elemental cofinal de  $\mathfrak{A}$ .*

A fin de establecer este resultado, obtenemos, previamente, condiciones suficientes para que una extensión cofinal  $n$ -elemental de un modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_n$  sea  $(n + 1)$ -elemental. Con ello es posible, en ciertos casos, refinar la cota  $n$ -elemental de la parte cofinal correspondiente. Con lo cual se obtiene una mejora del teorema 5.0.14 de J. Paris, ya que  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{B}\Pi_n \implies \mathbf{F}^*\Sigma_n$  (ver figura 7).

Así mismo, en el capítulo 5 obtenemos:

- la versión en  $F^*\Sigma_n$  de un resultado de Gaifman [10], relativo a estructuras mutuamente cofinales (5.1.11).
- teoremas “splitting” para otros fragmentos de la Aritmética ( $I\Sigma_0$ ,  $I\Sigma_0 + \exp$ ,  $I\Sigma_1$  y  $B\Sigma_1$ ) (5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 y 5.2.4).

## Problemas.

No queremos terminar sin enunciar, de forma explícita, una serie de cuestiones que, o bien son continuaciones naturales de las técnicas introducidas en el presente trabajo [ 1 ], o bien han quedado aquí sin respuesta [ 2, 3 y 4 ].

1. En el estudio de las relaciones entre los esquemas del máximo y los esquemas clásicos hemos considerado como teoría base  $I\Sigma_0$  y como jerarquía de fórmulas  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$ . Quedarían pendientes el estudio de estas relaciones:
  - Tomando como base una teoría más débil, por ejemplo  $P^-$ , y respecto de la jerarquía de fórmulas acotadas  $E_n$  y  $U_n$  ([16], pág.4).
  - Para la jerarquía  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$ , pero relativa a fórmulas sin parámetros (en una línea similar a la seguida por R. Kaye [16] con los fragmentos clásicos).
  - Considerando los esquemas  $F$  y  $F^*$ -relativos a funciones totales.
2. El análisis de las implicaciones

$$III_n \stackrel{?}{\implies} I\Delta_{n+1} \stackrel{?}{\implies} M\Delta_{n+1}$$

teniendo presente que de la respuesta afirmativa a una de ellas, se sigue la respuesta negativa a la otra. En cambio, de la respuesta negativa de una de ellas no podemos sacar ninguna conclusión acerca de la otra. (Recordemos que la solución de la conjetura de Friedman [13], resuelve dichas implicaciones).

3. ¿Qué relaciones de inclusión existen entre las estructuras  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ ? Puesto que las dos son segmentos iniciales de  $\mathfrak{A}$ , debe existir una relación entre ellas, y, teniendo presente que  $\mathbf{F}^*\Pi_n \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$ , parece que debe verificarse  $J_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; a)$ . Más aún, nuestra conjetura es que  $J_n^*(\mathfrak{A}; a) = J_n(\mathfrak{A}; a)$ , para modelos de  $\mathbf{F}^*\Pi_n$ .
4. En 4.2.4 y la nota que le sigue, hemos probado que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  e  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ , lo cual sitúa completamente la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  en el diagrama de Paris-Kirby. Así mismo, hemos probado en 4.3.9 que  $J_n(\mathfrak{A}; a), J_n^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ . La cuestión pendiente es : ¿cuál es la ubicación exacta de las estructuras  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  en el diagrama de Paris-Kirby?.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 La teoría $P^-$

El lenguaje  $L$  de la Aritmética es un lenguaje de primer orden con igualdad, que consta de los siguientes símbolos no lógicos: un símbolo de constante ( $0$ ), uno de función 1-aria ( $S$ ), dos de funciones binarias ( $+$ ,  $\cdot$ ) y un predicado binario ( $<$ ).

Notaremos

$x \leq y$	para significar	$x < y \vee x = y$
$\exists x \leq t \varphi(x)$	para significar	$\exists x(x \leq t \wedge \varphi(x))$
$\forall x \leq t \varphi(x)$	para significar	$\forall x(x \leq t \rightarrow \varphi(x))$

siendo  $t$  un término en el que no ocurre  $x$  y  $\varphi(x)$  una fórmula del lenguaje  $L$  de la Aritmética.

Notaremos por  $\text{Form}(L)$  al conjunto de todas las fórmulas del lenguaje  $L$  y  $\text{Sent}(L)$  al conjunto de todas las fórmulas cerradas.

$P^-$  es la  $L$ -teoría de primer orden cuyos modelos son la parte no-negativa de los anillos ordenados discretos (ver [17], sección 1 del capítulo 2).

Notaremos  $\mathbb{N}$ , modelo estándar, a la  $L$ -estructura cuyo universo es el conjunto  $\omega$  de los números naturales, con las interpretaciones usuales de los símbolos no lógicos de  $L$ .

## 1.2 La jerarquía $\Sigma_n, \Pi_n$

### 1.2.1 Definición.

1. El conjunto de las fórmulas acotadas,  $\Delta_0$ , es el menor conjunto  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$  tal que

$$(a) \varphi \text{ abierta} \implies \varphi \in \Gamma$$

$$(b) \varphi \in \Gamma, \psi \in \Gamma \implies \varphi \vee \psi \in \Gamma, \neg\varphi \in \Gamma$$

$$(c) \varphi \in \Gamma \implies \exists x \leq t\varphi(x) \in \Gamma, \forall x \leq t\varphi(x) \in \Gamma$$

2. Las jerarquías de fórmulas  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$  se definen como sigue:

$$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$$

$$\Sigma_{n+1} = \Pi_n \cup \{\exists \vec{x}\varphi(\vec{x}, \vec{y}) : \varphi \in \Pi_n\}$$

$$\Pi_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\forall \vec{x}\varphi(\vec{x}, \vec{y}) : \varphi \in \Sigma_n\}$$

3. Los conjuntos de fórmulas  $\Lambda_n$  y  $\forall_n$  se definen como sigue:

$$\Lambda_n = \{\varphi \wedge \psi : \varphi \in \Sigma_n, \psi \in \Pi_n\}$$

$$\forall_n = \{\varphi \vee \psi : \varphi \in \Sigma_n, \psi \in \Pi_n\}$$

4. Diremos que una fórmula pertenece a  $\Delta_{n+1}$  si es equivalente a una fórmula  $\Sigma_{n+1}$  y a una fórmula  $\Pi_{n+1}$ .

### 1.2.2 Definición. Sea $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ .

1. Si  $T$  es una teoría, entonces

$$\Gamma(T) = \{\varphi : \text{Existe } \psi \in \Gamma \text{ tal que } T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$$

2. Si  $\mathfrak{A}$  es una estructura, entonces

$$\Gamma(\mathfrak{A}) = \{\varphi : \text{Existe } \psi \in \Gamma \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi\}$$

**1.2.3 Notación :** Si una estructura  $\mathfrak{A}$  es modelo de una teoría  $T$ , entonces notaremos  $\mathfrak{A} \models T$ . Caso contrario, notaremos  $\mathfrak{A} \not\models T$ .

Si  $T$  y  $T'$  son dos teorías tales que todo modelo de  $T$  es modelo de  $T'$ , entonces notaremos  $T \Rightarrow T'$ .

Si  $T \Rightarrow T'$  y existe un modelo de  $T'$  que no es modelo de  $T$ , entonces notaremos  $T \not\Rightarrow T'$ .

### Notas

1. Toda fórmula es equivalente a una  $\Sigma_n$  o a una  $\Pi_n$ .
2. Se verifica que :

$$\Sigma_n, \Pi_n \subseteq \wedge_n \subseteq \Sigma_{n+1}, \Pi_{n+1} \quad \text{y} \quad \Sigma_n, \Pi_n \subseteq \vee_n \subseteq \Sigma_{n+1}, \Pi_{n+1}$$

$$\Sigma_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+1} \quad \text{y} \quad \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Pi_{n+1}$$

3. La negación de una fórmula  $\Sigma_n$  (respectivamente,  $\Pi_n$ ) es  $\Pi_n$  (respectivamente,  $\Sigma_n$ ).
4. En el siguiente diagrama representamos las propiedades de cierre de los conjuntos de fórmulas  $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$  ( $n > 0$ ), bajo distintas conectivas y cuantificadores.

	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\exists_{\leq}$	$\forall_{\leq}$	$\exists$	$\forall$
$\Sigma_n$	sí	sí	no	sí	sí*	sí	no
$\Pi_n$	sí	sí	no	sí*	sí	no	sí
$\Delta_n$	sí	sí	sí	sí*	sí*	no	no

Los resultados marcados con \* se verifican en la teoría  $\mathbf{B}\Sigma_n$  (ver teorema 1.3.12).

## 1.3 Las teorías $\Pi$ , $\text{L}\Gamma$ , $\text{B}\Gamma$ , $\text{S}\Gamma$

### 1.3.1 Definición. (Esquema de axiomas de inducción)

Si  $\varphi(x, \vec{y}) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{I}_\varphi(\vec{y})$  es la fórmula

$$\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{y})) \rightarrow \forall x\varphi(x, \vec{y})$$

$\text{I}_\varphi$  es el cierre de  $\text{I}_\varphi(\vec{y})$ .

### 1.3.2 Definición. (Esquema de axiomas de minimización)

Si  $\varphi(x, \vec{y}) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{L}_\varphi(\vec{y})$  es la fórmula

$$\exists x\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \exists x(\varphi(x, \vec{y}) \wedge \forall z < x \neg\varphi(z, \vec{y}))$$

$\text{L}_\varphi$  es el cierre de  $\text{L}_\varphi(\vec{y})$ .

### 1.3.3 Notación : Notaremos $x = (\mu z)\varphi(z, \vec{y})$ para designar la fórmula

$$\varphi(x, \vec{y}) \wedge \forall z < x \neg\varphi(z, \vec{y})$$

### 1.3.4 Definición. (Esquema de axiomas de colección)

Si  $\varphi(x, y, \vec{z}) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{B}_\varphi(\vec{z}, t)$  es la fórmula

$$\forall x \leq t \exists y \varphi(x, y, \vec{z}) \rightarrow \exists u \forall x \leq t \exists y \leq u \varphi(x, y, \vec{z})$$

$\text{B}_\varphi$  es el cierre de  $\text{B}_\varphi(\vec{z}, t)$ .

### 1.3.5 Definición. (Esquema de axiomas de colección fuerte)

Si  $\varphi(x, y, \vec{z}) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{S}_\varphi(\vec{z}, t)$  es la fórmula

$$\exists u \forall x \leq t (\exists y \varphi(x, y, \vec{z}) \rightarrow \exists y \leq u \varphi(x, y, \vec{z}))$$

$\text{S}_\varphi$  es el cierre de  $\text{S}_\varphi(\vec{z}, t)$ .

### 1.3.6 Definición. La Aritmética de Peano, $\text{PA}$ , , tiene como conjunto de axiomas no lógicos $\text{P}^- + \{\text{I}_\varphi : \varphi \in \text{Form}(\mathbf{L})\}$ .

**1.3.7 Definición.** Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Gamma &= \mathbf{P}^- + \{\mathbf{I}_\varphi : \varphi \in \Gamma\} \\ \mathbf{L}\Gamma &= \mathbf{P}^- + \{\mathbf{L}_\varphi : \varphi \in \Gamma\} \\ \mathbf{B}\Gamma &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{B}_\varphi : \varphi \in \Gamma\} \\ \mathbf{S}\Gamma &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{S}_\varphi : \varphi \in \Gamma\} \end{aligned}$$

**Nota**

Las correspondientes teorías relativas a  $\Delta_n$  se definirán posteriormente de forma explícita.

**1.3.8 Lema.** Si  $\mathbf{E}$  es uno de los esquemas  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\mathbf{E}\Gamma_2 \implies \mathbf{E}\Gamma_1$ .

**1.3.9 Lema.** La teoría  $\mathbf{I}\Sigma_0$  es  $\Pi_1$ -axiomatizable y, si  $n \geq 1$ , entonces las teorías  $\mathbf{I}\Sigma_n$  y  $\mathbf{B}\Sigma_n$  son  $\Pi_{n+2}$ -axiomatizables.

**1.3.10 Definición.**

$$\mathbf{I}\Delta_n = \mathbf{P}^- + \{\forall \vec{u}[\forall x(\varphi(x, \vec{u}) \leftrightarrow \psi(x, \vec{u})) \rightarrow \mathbf{I}_\varphi(x, \vec{u})] : \varphi \in \Sigma_n, \psi \in \Pi_n\}$$

$$\mathbf{B}\Delta_n = \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall \vec{u}, t[\forall x, y(\varphi(x, y, \vec{u}) \leftrightarrow \psi(x, y, \vec{u})) \rightarrow \mathbf{B}_\varphi(\vec{u}, t)] : \varphi \in \Sigma_n, \psi \in \Pi_n\}$$

Análogamente se definen las teorías  $\mathbf{L}\Delta_n$  y  $\mathbf{S}\Delta_n$ .

**1.3.11 Teorema.** (de la función par) ([13], sección 2 del capítulo 5)

Si definimos  $\langle x, y \rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$ , entonces  $\mathbf{I}\Sigma_0$  prueba

1.  $\forall z \exists x, y (\langle x, y \rangle = z)$ .
2.  $\forall x, y, u, v (\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \leftrightarrow x = u \wedge y = v)$ .
3.  $\forall x, y (\text{máx}\{x, y\} \leq \langle x, y \rangle)$ .

Si  $\langle x, y \rangle = z$ , entonces notaremos  $(z)_0 = x$  y  $(z)_1 = y$ .

La función par se extiende de manera natural a  $n$ -tuplas ( $n > 2$ ), como sigue:  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle \rangle$ .

Esta nueva función verifica propiedades análogas a las de la función par del teorema anterior.

Usando estas funciones, resulta que en  $I\Sigma_0$ , es posible contraer cuantificadores, es decir, toda fórmula  $\Sigma_n$  es equivalente a una fórmula del tipo

$$\exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

donde  $Q$  es  $\forall$  ó  $\exists$  según  $n$  sea par o impar, respectivamente, y  $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$ .

Un resultado análogo resultado es válido para fórmulas  $\Pi_n$ .

**1.3.12 Teorema.** ([25], lema 3)

Si  $n > 0$ , entonces

1.  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n$  y  $t(\vec{y})$  es un término  $\implies \forall x \leq t(\vec{y}) \varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n(\mathbf{B}\Pi_{n-1})$
2.  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Pi_n$  y  $t(\vec{y})$  es un término  $\implies \exists x \leq t(\vec{y}) \varphi(x, \vec{y}) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Pi_{n-1})$

Las relaciones entre las teorías  $\Pi\Gamma$ ,  $\mathbf{L}\Gamma$  y  $\mathbf{B}\Gamma$ , para  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n$ , fueron establecidas en 1977 por J. Paris y L. Kirby en [25] y se resume en el siguiente teorema.

**1.3.13 Teorema.** (Paris-Kirby [25], teorema A)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{I}\Sigma_n & \iff & \mathbf{I}\Pi_n & \iff & \mathbf{L}\Sigma_n & \iff & \mathbf{L}\Pi_n \\
 & & \uparrow & & & & \\
 \mathbf{B}\Sigma_{n+1} & \iff & \mathbf{B}\Pi_n & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 \mathbf{I}\Sigma_{n+1} & & & & & & 
 \end{array}$$

Los modelos que prueban que las implicaciones verticales son estrictas, se introducen en la sección 1.5 (ver teoremas 1.5.2 y 1.5.3).

## 1.4 Subestructuras

Las estructuras serán designadas por letras góticas ( $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ ) y sus universos por las letras latinas mayúsculas correspondientes ( $A, B, \dots$ ). Si  $a_1, \dots, a_n \in A$ , entonces notaremos  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ .

### 1.4.1 Definición. (Subestructura $\Gamma$ -elemental)

Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  estructuras y  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ .

1. Diremos que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura  $\Gamma$ -elemental de  $\mathfrak{B}$ , y notaremos  $\mathfrak{A} \prec_{\Gamma} \mathfrak{B}$ , si

(a)  $A \subseteq B$

(b) Para toda  $\varphi(\vec{x}) \in \Gamma$  y  $\vec{a} \in A$  se verifica que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a})$$

2. Diremos que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura de  $\mathfrak{B}$  (o bien, que  $\mathfrak{B}$  es una extensión de  $\mathfrak{A}$ ), y notaremos  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ , si  $\mathfrak{A}$  es una subestructura  $\Gamma$ -elemental de  $\mathfrak{B}$ , donde  $\Gamma$  el conjunto de las fórmulas atómicas de  $\mathbf{L}$ .

Si  $\Gamma = \Sigma_n$ , entonces notaremos  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$  en lugar de  $\mathfrak{A} \prec_{\Sigma_n} \mathfrak{B}$  y diremos que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura  $n$ -elemental de  $\mathfrak{B}$ .

1.4.2 Lema. Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  estructuras tales que  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C} \prec_n \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ . Entonces  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{C}$ .

1.4.3 Definición. Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  estructuras tales que  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ .

1. Diremos que  $I \subseteq B$  es un segmento inicial de  $B$  si

$$\forall a \in I \forall b \in B (b < a \implies b \in I)$$

Si, además,  $\emptyset \neq I \neq B$ , entonces diremos que  $I$  es un segmento inicial propio de  $B$ .

2. Diremos que  $\mathfrak{B}$  es una extensión final de  $\mathfrak{A}$ , y notaremos  $\mathfrak{A} \subset_e \mathfrak{B}$ , si  $A$  es un segmento inicial de  $B$ .

3. Diremos que  $\mathfrak{B}$  es una extensión cofinal de  $\mathfrak{A}$ , y notaremos  $\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{B}$ , si

$$\forall b \in B \exists a \in A (b < a)$$

4. La estructura

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \{x \in B : \exists y \in A (\mathfrak{B} \models x < y)\}$$

se denomina segmento inicial de  $\mathfrak{B}$  determinado por  $\mathfrak{A}$ .

1.4.4 Notación : Si  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{A} \subset_e \mathfrak{B}$ , entonces notaremos  $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}$ . Si  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{B}$ , entonces notaremos  $\mathfrak{A} \prec_n^c \mathfrak{B}$ .

1.4.5 Teorema. (Test de Tarski-Vaught)

Sean  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  L-estructuras tales que  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$  y  $n > 0$ . Las condiciones siguientes son equivalentes

1.  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$

2. Para cada  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Pi_{n-1}$  y cada  $\vec{a} \in A$  se verifica que

$$\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, \vec{a}) \implies \exists c \in A : \mathfrak{B} \models \varphi(c, \vec{a})$$

1.4.6 Teorema. ([17], proposición 10.5)

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  e  $I$  un segmento inicial propio de  $A$ , cerrado bajo las operaciones  $\{+, \cdot\}$ . Si  $I \prec_n \mathfrak{A}$ , entonces  $I \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

## 1.5 Elementos $\Sigma_n$ -definibles

**1.5.1 Definición.** Sean  $\mathfrak{A}$  una  $L$ -estructura y  $X \subseteq A$ .

1. Si  $\varphi(x, \vec{y}) \in \text{Form}(L)$  y  $\vec{a}, b \in A$  son tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b, \vec{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{a}) \rightarrow x = b)$$

entonces diremos que  $b$  es definible en  $\mathfrak{A}$  con parámetros  $\vec{a}$ , y notaremos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{a}) \rightsquigarrow b.$$

2.  $K_n(\mathfrak{A}; X) = \{b \in A : \text{Existen } \varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n \text{ y } \vec{a} \in X \text{ tal que}$

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{a}) \rightsquigarrow b\}$$

3.  $I_n(\mathfrak{A}; X) = \{b \in A : \text{Existe } c \in K_n(\mathfrak{A}; X) \text{ tal que } \mathfrak{A} \models b \leq c\}$   
 $= \mathcal{J}(K_n(\mathfrak{A}; X); \mathfrak{A})$ .

Notaremos  $K_n(\mathfrak{A}; \emptyset) = K_n(\mathfrak{A})$  e  $I_n(\mathfrak{A}; \emptyset) = I_n(\mathfrak{A})$ .

**1.5.2 Teorema.** ([17], capítulo 10)

Si  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_n$  y  $X \subseteq A$ , entonces

1.  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ .

2.  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \models \text{I}\Sigma_n$ .

3.  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \prec_n \mathfrak{A}$ .

4.  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \models \text{B}\Sigma_{n+1}$ .

**1.5.3 Teorema.** ([17], capítulo 10)

Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  y  $X$  es un subconjunto finito de  $A$ , entonces

1.  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \neq \omega \implies K_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \not\models \text{B}\Sigma_{n+1}$ .

2.  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \neq \omega \implies I_{n+1}(\mathfrak{A}; X) \not\models \text{I}\Sigma_{n+1}$ .

## 1.6 Codificación de conjuntos finitos

En [12], Gaifman y Dimitracopoulos proporcionan una fórmula  $\eta(x, y, z) \in \Delta_0$  que representa el grafo de la función exponencial y tal que la mayor parte de las propiedades “usuales” de dicha función se pueden probar en  $\mathbf{I}\Sigma_0$ . En cambio, la fórmula cerrada  $\mathbf{exp} \equiv \forall x, y \exists z \eta(x, y, z)$  no se puede probar en  $\mathbf{I}\Sigma_0$ , es decir, en  $\mathbf{I}\Sigma_0$ ,  $\eta(x, y, z)$  no define una función total.

Además, prueban que el teorema de Matijasevič acerca de la representación diofántica de conjuntos recursivamente enumerables se puede probar en la teoría  $\mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp}$ . Es decir :

### 1.6.1 Teorema. (Gaifman-Dimitracopoulos)

Si  $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_1$ , entonces existe un polinomio  $p(\vec{x}, \vec{y})$  con coeficientes en  $\mathbf{Z}$  tal que

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp} \vdash \forall \vec{x} (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y} (p(\vec{x}, \vec{y}) = 0))$$

### 1.6.2 Definición. $x \in t$ es la fórmula $\exists y, v \leq t (y < 2^x \wedge t = y + 2^x + 2^{x+1} \cdot x)$ .

Es decir:  $x \in t$  expresa que  $2^x$  aparece en el desarrollo de  $t$  en base 2.

### 1.6.3 Teorema. ([7], proposición 1.3)

1. Para cada  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_0$  se verifica:

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp} \vdash \forall z, \vec{y} \exists t < 2^z \forall x < z (\varphi(x, \vec{y}) \leftrightarrow x \in t)$$

2. Para cada  $n > 0$  y  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$ , se verifica:

$$\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \forall z, \vec{y} \exists t < 2^z \forall x < z (\varphi(x, \vec{y}) \leftrightarrow x \in t)$$

### Esquema de la demostración

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp}$ ,  $a \in A$ ,  $\vec{b} \in A$  y  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_0$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall x < a (x \in 2^a - 1)$$

Luego,  $\mathfrak{A} \models \forall x < a(\varphi(x, \vec{b}) \rightarrow x \in 2^a - 1)$ .

Por tanto, existe  $c \in A$  tal que

$$c = \min\{t \in A : \mathfrak{A} \models t < 2^a \wedge \forall x < a(\varphi(x, \vec{b}) \rightarrow x \in t)\}$$

Este elemento satisface las condiciones exigidas.

2. La prueba es análoga a la de (1), basta observar que  $\mathbf{I}\Sigma_n \vdash \mathbf{exp}$  y que si  $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n$ , entonces la fórmula  $\forall x < r(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow x \in t)$  es  $\Pi_n$ .

#### 1.6.4 Corolario. ([7], corolario 1.4)

Se verifica:

1. Para cada  $\varphi(x, y, z, \vec{u}) \in \Sigma_0$  :

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp} \vdash \forall z, \vec{u}, v \exists t < 2^v \forall x, y (< x, y > < v \rightarrow (\varphi(x, y, z, \vec{u}) \leftrightarrow < x, y > \in t))$$

2. Para cada  $n > 0$  y  $\varphi(x, y, z, \vec{u}) \in \Sigma_n, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$  :

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \mathbf{exp} \vdash \forall z, \vec{u}, v \exists t < 2^v \forall x, y (< x, y > < v \rightarrow (\varphi(x, y, z, \vec{u}) \leftrightarrow < x, y > \in t))$$

## 1.7 Validez parcial

Considerando una de las aritmetizaciones usuales de la sintaxis, podemos asociar a cada fórmula,  $\varphi(\vec{x})$ , un número natural,  $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner$ , denominado número de Gödel de dicha fórmula, A veces, identificaremos una fórmula con su número de Gödel.

#### 1.7.1 Teorema. ([17], teorema 9.13)

Existe una fórmula  $V_0(x, \vec{y}) \in \Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_1)$  tal que, para cada  $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$  se verifica

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall \vec{y} (V_0(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \vec{y}) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}))$$

#### 1.7.2 Teorema. ([17], teorema 9.14)

Para cada  $n > 0$  existen fórmulas  $V_n(x, \vec{y}) \in \Sigma_n(\mathbf{I}\Sigma_1)$  y  $V^n(x, \vec{y}) \in \Pi_n(\mathbf{I}\Sigma_1)$  tales que :

1. Si  $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$ , entonces

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall \vec{y} (V_n(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, [\vec{y}] ) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}))$$

2. Si  $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n$ , entonces

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall \vec{y} (V^n(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, [\vec{y}] ) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}))$$

Para la definición de la función  $[y_1, \dots, y_n] = z$ , que codifica sucesiones, ver la sección 1 del capítulo 9 de [17].  $[y_1, \dots, y_n] = z$

Las fórmulas  $V_n(x, \vec{y})$  y  $V^n(x, \vec{y})$ , a veces, se notan por  $\text{Sat}_{\Sigma_n}(x, \vec{y})$  y  $\text{Sat}_{\Pi_n}(x, \vec{y})$ , respectivamente.

**1.7.3 Corolario.** ([17], teorema 9.15)

Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$ , entonces para cada  $n \geq 1$ , la fórmula  $\neg V_n(x, [x])$  es  $\Pi_n(\mathfrak{A})$  pero no  $\Sigma_n(\mathfrak{A})$  (es decir, las jerarquías  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$  no colapsan).

## 1.8 Otros resultados

**1.8.1 Teorema.** (H. Friedman) ([17], teorema 9.15)

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  numerable no-estándar,  $a \in A$  y  $n \in \omega$ . Existe un segmento inicial propio  $\mathfrak{B}$  de  $\mathfrak{A}$  tal que

$$a \in B \quad , \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}$$

**1.8.2 Teorema.** (P.G. Clote) ([2], proposición 3)

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  y  $\mathfrak{B}$  un segmento inicial propio de  $\mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ .

# Capítulo 2

## Esquemas del máximo

### 2.1 Las teorías $F^*\Gamma$ , $F\Gamma$ y $M\Gamma$

En lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, todas las fórmulas que se consideren las supondremos con parámetros aunque no los explicitemos.

**2.1.1 Definición.** Si  $\theta(x, y) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{FUN}(\theta(x, y), z)$  es la fórmula

$$\forall x \leq z \forall y_1, y_2 (\theta(x, y_1) \wedge \theta(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$$

Es decir, la fórmula  $\text{FUN}(\theta(x, y), z)$  expresa que  $\theta(x, y)$  es funcional en la primera variable, para elementos  $x \leq z$ .

**2.1.2 Definición.** Sean  $\mathfrak{A}$  una  $\mathbf{L}$ -estructura,  $a \in A$  y  $\theta(x, y) \in \Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ . Diremos que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{A}$  una  $\Gamma$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $a + 1$ , si

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \wedge \exists x \leq a \exists y \theta(x, y)$$

**2.1.3 Definición.** Si  $\theta(x, y) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $F_\theta^*(z)$  es la fórmula:

$$\text{FUN}(\theta(x, y), z) \wedge \exists x \leq z \exists y \theta(x, y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists m(\exists x \leq z \theta(x, m) \wedge \forall x \leq z \forall y(\theta(x, y) \rightarrow y \leq m))$$

$\mathbf{F}_\theta^*$  es el cierre de  $\mathbf{F}_\theta^*(z)$ .

Es decir, la fórmula  $\mathbf{F}_\theta^*$  traduce la siguiente propiedad: si  $\theta(x, y)$  define una aplicación en un subconjunto no vacío de  $z + 1$ , entonces el rango de  $\theta(x, y)$  posee elemento máximo (que, obviamente, es único). En tal situación, notaremos  $m = (\max y)_{x \leq z} \theta(x, y)$ .

**2.1.4 Definición.** Si  $\theta(x, y) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\mathbf{F}_\theta(z)$  es la fórmula:

$$\text{FUN}(\theta(x, y), z) \rightarrow (\exists t \forall x \leq z \forall y(\theta(x, y) \rightarrow y \leq t))$$

$\mathbf{F}_\theta$  es el cierre de  $\mathbf{F}_\theta(z)$ .

Es decir, la fórmula  $\mathbf{F}_\theta$  traduce la siguiente propiedad: si  $\theta(x, y)$  define una aplicación en un subconjunto de  $z + 1$ , entonces el rango de  $\theta(x, y)$  está acotado superiormente. En tal situación, diremos que  $t$  es una cota superior de los  $y$  tales que  $\theta(x, y)$ , con  $x \leq z$ .

**2.1.5 Definición.** Si  $\varphi(x) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\mathbf{M}_\varphi(z)$  es la fórmula:

$$\exists x \leq z \varphi(x) \rightarrow \exists m \leq z (\varphi(m) \wedge \forall x \leq z (\varphi(x) \rightarrow x \leq m))$$

$\mathbf{M}_\varphi$  es el cierre de  $\mathbf{M}_\varphi(z)$ .

Es decir, la fórmula  $\mathbf{M}_\varphi$  traduce la siguiente propiedad: todo subconjunto no vacío y acotado superiormente posee elemento máximo (que, obviamente, es único). En tal situación, notaremos  $m = (\max x)_{x \leq z} \varphi(x)$ .

**2.1.6 Definición.** Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*\Gamma &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{F}_\theta^* : \theta \in \Gamma\} \\ \mathbf{F}\Gamma &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{F}_\theta : \theta \in \Gamma\} \\ \mathbf{M}\Gamma &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{M}_\varphi : \varphi \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Los esquemas de axiomas introducidos en 2.1.6 los denominaremos esquemas del máximo.

En las siguientes secciones del presente capítulo, estableceremos las relaciones que existen entre los esquemas del máximo y los esquemas de inducción, colección y colección fuerte, para los conjuntos de fórmulas  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$ ,  $\Lambda_n$  y  $\forall_n$ . Las relaciones que se vayan obteniendo se presentarán en distintas figuras (desde la figura 1 a la figura 7), partiendo de una figura base (figura 1) que se irá completando en pasos sucesivos. Con el fin de distinguir en cada figura los resultados nuevos, respecto de la figura anterior, notaremos  $\overset{\bullet}{\iff}$  para indicar que el símbolo  $\iff$  se establece por primera vez, y  $\overset{\bullet}{\impliedby}$  para indicar que sólo la implicación  $\impliedby$  es novedad en la figura (análogamente procederemos con los restantes símbolos metalógicos).

Si bien, las relaciones se prueban con toda la generalidad posible, en las figuras sólo mostraremos las relaciones para los primeros niveles de la jerarquía  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$ ,  $\Lambda_n$ ,  $\forall_n$ . Salvo para el caso  $n = 0$ , que presenta particularidades especiales, en todas las figuras es posible sustituir 1 por  $n$  y 2 por  $n + 1$  ( $n > 0$ ), de manera que las relaciones descritas en estas siguen siendo válidas.

A continuación, proporcionamos unos primeros ejemplos de estructuras que son modelos de esquemas del máximo y de estructuras que no lo son.

**2.1.7 Ejemplo.** Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$ , entonces para cada  $n \in \omega$  :  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$ .

- Sean  $\theta(x, y) \in \Sigma_n$  y  $a \in A$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \wedge \exists x \leq a \exists y \theta(x, y)$$

Consideremos la fórmula

$$\varphi(x, y) \equiv \theta(x, y) \vee (\neg \exists t \theta(x, t) \wedge y = 0)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\varphi(x, y), a) \wedge \forall x \leq a \exists y \varphi(x, y)$$

Luego  $\mathfrak{A} \models \exists t \forall x \leq a \exists y \leq t \varphi(x, y)$ , por tanto

$$\mathfrak{A} \models \exists t \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq t)$$

Sea  $p \in A$  tal que

$$p = \min\{t : \mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq t)\}$$

Veamos que  $\mathfrak{A} \models p = (\max)_{x \leq a} \theta(x, y)$ . En efecto :

1.  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p)$ . Trivial.

2.  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \theta(x, p)$

Caso contrario,  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \neg \theta(x, p)$  y  $p \neq 0$ .

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p - 1)$$

lo que contradice la definición de  $p$ .

**2.1.8 Ejemplo.** Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ , entonces

$$K_n(\mathfrak{A}, a) \not\models \text{F}\Lambda_n$$

- Consideremos la  $\Lambda_n$ -fórmula

$$\theta(u, v, w) \equiv V_n(u, [v, w]) \wedge \forall x (V_n(u, [x, w]) \rightarrow x = v)$$

Es decir, si  $b \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $\varphi(x, w) \in \Sigma_n$  define  $b$  en  $(\mathfrak{A}; a)$ , entonces  $\theta$  asigna a  $\ulcorner \varphi(x, y) \urcorner$  el elemento que define,  $b$ .

Obviamente  $K_n(\mathfrak{A}; a) \models \text{FUN}(\theta(u, v, a), a)$ . Teniendo presente que el rango de la aplicación  $\theta(u, v, a)$  es  $K_n(\mathfrak{A}; a)$ , deducimos que dicha  $\Lambda_n$ -aplicación no está acotada superiormente.

**2.1.9 Ejemplo.** Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  no estándar,  $a \in A - \omega$  y  $n > 0$ , entonces  $K_n(\mathfrak{A}, a) \not\models \text{M}\Sigma_{n+2}$ .

- Consideremos la  $\wedge_n$ -fórmula

$$\theta(t, z) \equiv V_n(t, z) \wedge \forall u (V_n(t, u) \rightarrow u = z)$$

y la  $\Sigma_{n+2}$ -fórmula

$$\psi(x) \equiv \exists y \forall z \forall t < x (\theta(t, z) \rightarrow z \leq y)$$

Entonces la fórmula  $\psi(x)$  define  $\omega$  en  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  [ Es decir, para cada  $b \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  se verifica que  $K_n(\mathfrak{A}; a) \models \psi(b) \iff b \in \omega$  ]. En consecuencia,  $\omega$  es un subconjunto no vacío de  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  acotado superiormente que carece de elemento máximo.

(La complejidad de la fórmula que define  $\omega$  en  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  puede mejorarse. Ver Mc Aloon [20], sección 3, pág.260)

**2.1.10 Ejemplo.** Sean  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  no estándar,  $a \in A - \omega$  y  $n > 0$ , tales que  $I_n(\mathfrak{A}, a) \neq \omega$ . Se verifica que  $I_n(\mathfrak{A}, a) \not\models \text{M}\Sigma_n$ .

- Lessan ([19], observación a la proposición 3.1.13) prueba que, en las hipótesis del ejemplo, existen  $\varphi(x, u) \in \Sigma_n$  y  $b \in I_n(\mathfrak{A}, a)$  tales que  $\varphi(x, b)$  define  $\omega$  en  $I_n(\mathfrak{A}, a)$ . Por tanto,  $\omega$  es un subconjunto no vacío de  $I_n(\mathfrak{A}; a)$  acotado superiormente que carece de elemento máximo.

## 2.2 Relaciones entre los esquemas de inducción, colección y colección fuerte

Las relaciones que se establecen entre los esquemas de inducción, colección y colección fuerte son las indicadas en la siguiente figura.

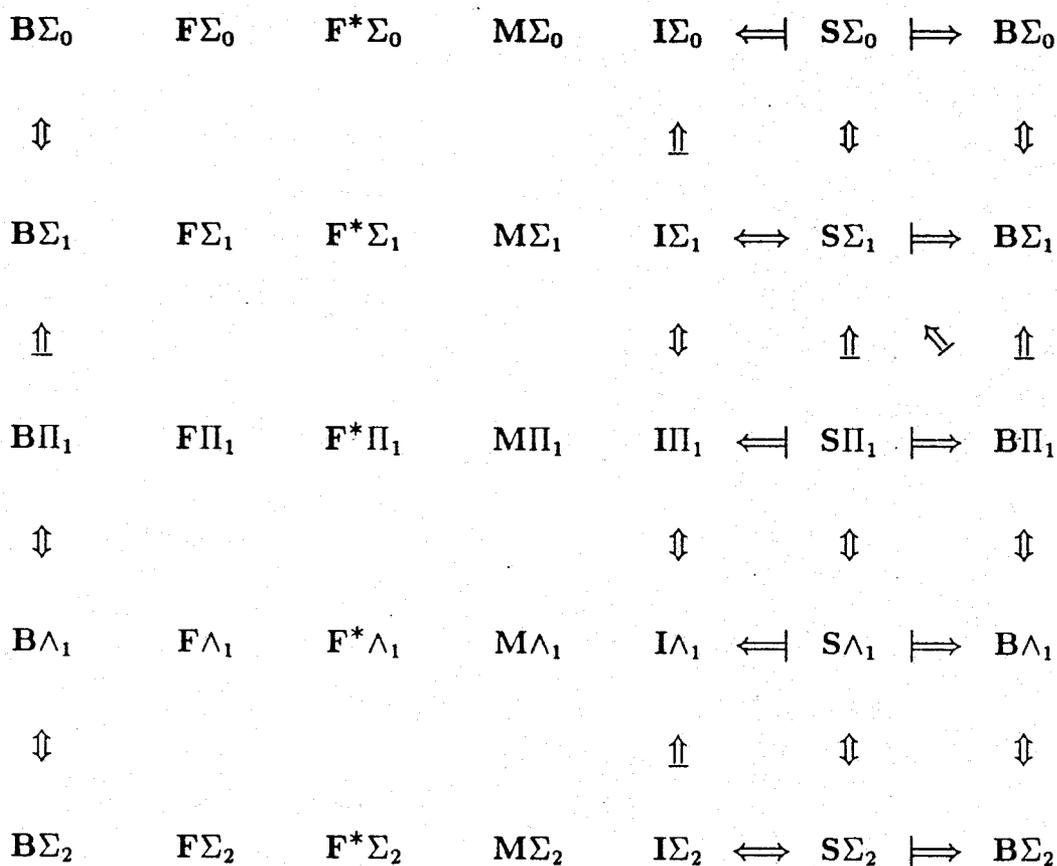


Figura 1

Los resultados que permiten establecer las relaciones que aparecen en la figura 1 son los siguientes:

- 1.a) El teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.
- 1.b) Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $S\Gamma \Rightarrow B\Gamma$ .

$$1.c) \mathbf{S}\Pi_n \iff \mathbf{S}\Sigma_{n+1}.$$

$$1.d) \mathbf{B}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Pi_n.$$

$$1.e) \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{S}\Sigma_{n+1}.$$

$$1.f) \mathbf{I}\Pi_n \iff \mathbf{I}\Lambda_n.$$

$$1.g) \mathbf{B}\Sigma_0 \not\equiv \mathbf{S}\Sigma_0.$$

$$1.h) \mathbf{S}\Sigma_0 \implies \mathbf{I}\Sigma_0.$$

$$1.i) \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \not\equiv \mathbf{S}\Sigma_{n+1}.$$

$$1.j) \mathbf{B}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Sigma_{n+1}.$$

$$1.k) \mathbf{S}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Sigma_{n+1}.$$

$$1.l) \mathbf{S}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{I}\Pi_{n+1}.$$

$$1.m) \mathbf{S}\Lambda_{n+1} \implies \mathbf{I}\Lambda_{n+1}.$$

El apartado 1.b es consecuencia inmediata de las definiciones de  $\mathbf{S}\Gamma$  y de  $\mathbf{B}\Gamma$ . El apartado 1.c se obtiene mediante una contracción de cuantificadores. El apartado 1.d resulta de considerar la fórmula lógicamente válida

$$\forall x \leq z \exists v (\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, v))$$

observando que si  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ , entonces la fórmula siguiente es  $\Pi_{n+1}$ .

$$\theta(x, v) \equiv \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, v)$$

La implicación  $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{S}\Sigma_{n+1}$  del apartado 1.e, resulta aplicando el teorema 1.6.3 a la  $\Sigma_{n+1}$ -fórmula  $\exists y \varphi(x, y)$ , donde  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ , observando que si  $n > 0$ , entonces la fórmula  $x \in t \rightarrow \varphi(x, y)$  es  $\Pi_n$  y que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_n$ . En el caso  $n = 0$ , dicha fórmula es  $\Sigma_1$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ .

P. Hájek ([13], lema 13 del teorema 2.7) establece la implicación recíproca de 1.e, directamente por inducción sobre  $n$ .

Teniendo presente 1.c y usando el resultado  $\mathbf{I}\Sigma_n \iff \mathbf{M}\Sigma_n \iff \mathbf{M}\Pi_n$  (que

será probado en 2.3.2 y 2.3.8), damos a continuación una prueba alternativa de  $S\Sigma_{n+1} \implies I\Sigma_{n+1}$ , utilizando esquemas del máximo. La prueba se obtiene como consecuencia de los siguientes asertos

- **Aserto 1** :  $M\Pi_n + S\Pi_n \implies M\Sigma_{n+1}$ .

- **Aserto 2** :  $S\Pi_n \implies M\Pi_n$ .

### Prueba del aserto 1

Sean  $\mathfrak{A} \models M\Pi_n + S\Pi_n$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ ,  $\psi(x, y) \in \Pi_n$  y  $a \in A$  tales que  $\varphi(x) \equiv \exists y \psi(x, y)$  y  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models S\Pi_n$  existe  $q \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \psi(x, y) \rightarrow \exists y \leq q \psi(x, y)) \quad (*)$$

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \leq q \psi(x, y)$$

Ahora bien  $\exists y \leq t \psi(x, y) \in \Pi_n(\mathfrak{A})$ , ya que

- si  $n = 0$ , el resultado es trivial.
- si  $n > 0$ , entonces de los teoremas 2.3.5, 2.3.8 y de  $\mathfrak{A} \models M\Pi_n$  se sigue que  $\mathfrak{A} \models B\Sigma_n$ .

Por tanto, existe  $m \in A$  tal que  $m = (\max x)_{x \leq a} (\exists y \leq q \psi(x, y))$ . Luego, de (\*) deducimos que  $m = (\max x)_{x \leq a} (\exists y \psi(x, y))$ .

Es decir,  $m = (\max x)_{x \leq a} \varphi(x)$ .

□

### Prueba del aserto 2

Basta tener presente que

$$S\Pi_n \xrightarrow{1.c} S\Sigma_{n+1} \xrightarrow{1.b} B\Sigma_{n+1} \xrightarrow{1.3.13} I\Sigma_n \xrightarrow{2.3.2} M\Pi_n$$

□

A continuación, vamos a probar el resultado 1.f.

**2.2.1 Teorema.**  $\mathbf{I}\Sigma_n \iff \mathbf{L}\Lambda_n \iff \mathbf{L}\mathbf{V}_n \iff \mathbf{I}\Lambda_n \iff \mathbf{I}\mathbf{V}_n$ .

**Demostración:**

Para  $n = 0$ , el teorema es obvio. Supongamos que  $n > 0$ .

$$\boxed{\mathbf{I}\Sigma_n \iff \mathbf{L}\Lambda_n}$$

Obviamente  $\mathbf{L}\Lambda_n \implies \mathbf{L}\Sigma_n \implies \mathbf{I}\Sigma_n$ . Veamos que  $\mathbf{I}\Sigma_n \implies \mathbf{L}\Lambda_n$ .

Para ello, sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  y  $\psi(x) \in \Lambda_n$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$ .

Si  $c \in A$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(c)$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq c \psi(x)$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  ( $n > 0$ ) y  $\psi(x) \in \Lambda_n$ , del teorema 1.6.3 resulta que existe  $t_0 < 2^{c+1}$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x < c + 1 (\psi(x) \leftrightarrow x \in t_0) \quad (*)$$

Por tanto :  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq c (x \in t_0)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq c \psi(x)$ .

Teniendo presente que  $x \leq r \wedge x \in t \in \Sigma_1(\mathbf{I}\Sigma_1)$  y que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ , existe  $d \in A$  tal que  $d = (\mu x)(x \leq c \wedge x \in t_0)$ .

Luego, de (\*) deducimos que  $\mathfrak{A} \models d = (\mu x)\psi(x)$ .

$$\boxed{\mathbf{I}\Sigma_n \iff \mathbf{L}\mathbf{V}_n}$$

La prueba es análoga a la anterior.

$$\boxed{\mathbf{L}\mathbf{V}_n \iff \mathbf{I}\Lambda_n}$$

La prueba de  $\mathbf{L}\mathbf{V}_n \implies \mathbf{I}\Lambda_n$  es similar a la de Paris y Kirby de  $\mathbf{L}\Sigma_n \implies \mathbf{I}\Pi_n$  en ([25]), basta tener presente que

$$\varphi(x) \in \Lambda_n \implies \neg\varphi(x) \in \mathbf{V}_n$$

$$\boxed{\mathbf{L}\Lambda_n \iff \mathbf{I}\mathbf{V}_n}$$

La prueba es análoga a la anterior.

□

**Prueba de 1.g) :**  $\mathbf{B}\Sigma_0 \not\equiv \mathbf{S}\Sigma_0$

Caso contrario resultaría que

$$\mathbf{B}\Sigma_0 \xrightarrow{\text{hip.}} \mathbf{S}\Sigma_0 \xrightarrow{1.c} \mathbf{S}\Sigma_1 \xrightarrow{1.e} \mathbf{I}\Sigma_1$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

**Prueba de 1.h) :**  $S\Sigma_0 \stackrel{!}{\Rightarrow} I\Sigma_0$

Por una parte

$$S\Sigma_0 \xrightarrow{1.c} S\Sigma_1 \xrightarrow{1.e} I\Sigma_1 \xrightarrow{1.3.g} I\Sigma_0$$

Por otra parte, si  $I\Sigma_0 \Rightarrow S\Sigma_0$ , entonces

$$I\Sigma_0 \xrightarrow{hip.} S\Sigma_0 \xrightarrow{1.c} S\Sigma_1 \xrightarrow{1.e} I\Sigma_1$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

**Prueba de 1.i) :**  $B\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow S\Sigma_{n+1}$

Caso contrario resultaría que

$$B\Sigma_{n+1} \xrightarrow{hip.} S\Sigma_{n+1} \xrightarrow{1.e} I\Sigma_{n+1}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

**Prueba de 1.j) :**  $B\Pi_{n+1} \stackrel{!}{\Rightarrow} S\Sigma_{n+1}$

Por una parte

$$B\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.d} S\Pi_n \xrightarrow{1.c} S\Sigma_{n+1}$$

Por otra parte, si  $S\Sigma_{n+1} \Rightarrow B\Pi_{n+1}$ , entonces

$$I\Sigma_{n+1} \xrightarrow{1.e} S\Sigma_{n+1} \xrightarrow{hip.} B\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.a} B\Sigma_{n+2}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

**Prueba de 1.k) :**  $S\Pi_{n+1} \stackrel{!}{\Rightarrow} S\Sigma_{n+1}$

Por una parte

$$S\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.b} B\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.j} S\Sigma_{n+1}$$

Por otra parte, si  $S\Sigma_{n+1} \Rightarrow S\Pi_{n+1}$ , entonces

$$I\Sigma_{n+1} \xrightarrow{1.e} S\Sigma_{n+1} \xrightarrow{hip.} S\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.b} B\Pi_{n+1} \xrightarrow{1.a} B\Sigma_{n+2}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

**Prueba de 1.l) :**  $S\Pi_{n+1} \iff \text{III}_{n+1}$

Basta tener presente que

$$\begin{array}{ccc} \text{I}\Sigma_{n+1} & \stackrel{1.e}{\iff} & \text{S}\Sigma_{n+1} \\ \text{I}\Sigma_{n+1} & \stackrel{1.a}{\iff} & \text{III}_{n+1} \\ \text{S}\Pi_{n+1} & \stackrel{1.k}{\iff} & \text{S}\Sigma_{n+1} \end{array}$$

□

**Prueba de 1.m) :**  $S\Lambda_{n+1} \iff \text{I}\Lambda_{n+1}$

En primer lugar, observemos que  $S\Pi_{n+1} \iff S\Lambda_{n+1} \iff S\Sigma_{n+2}$ , ya que

$$S\Sigma_{n+2} \stackrel{1.3.g}{\iff} S\Lambda_{n+1} \stackrel{1.3.g}{\iff} S\Pi_{n+1} \iff S\Sigma_{n+2}$$

Luego 1.m se deduce de

$$\begin{array}{ccc} S\Pi_{n+1} & \stackrel{1.c}{\iff} & S\Lambda_{n+1} \\ \text{III}_{n+1} & \stackrel{1.f}{\iff} & \text{I}\Lambda_{n+1} \\ S\Pi_{n+1} & \stackrel{1.l}{\iff} & \text{III}_{n+1} \end{array}$$

□

## 2.3 Relaciones entre los esquemas del máximo y de inducción para $\Sigma_n$ , $\Pi_n$ , $\Lambda_n$

Las primeras relaciones que se establecen son las siguientes:

$$\begin{array}{cccccccc}
 B\Sigma_0 & F\Sigma_0 & \overset{\bullet}{\longleftarrow} & F^*\Sigma_0 & \overset{\bullet}{\Longrightarrow} & M\Sigma_0 & \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} & I\Sigma_0 & \longleftarrow & S\Sigma_0 & \Longrightarrow & B\Sigma_0 \\
 \Downarrow & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 B\Sigma_1 & F\Sigma_1 & \overset{\bullet}{\longleftarrow} & F^*\Sigma_1 & \overset{\bullet}{\Longrightarrow} & M\Sigma_1 & \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} & I\Sigma_1 & \longleftrightarrow & S\Sigma_1 & \Longrightarrow & B\Sigma_1 \\
 \Uparrow & & & & & \Downarrow^\bullet & & \Downarrow & & \Uparrow & \Downarrow & \Uparrow \\
 B\Pi_1 & F\Pi_1 & \overset{\bullet}{\longleftarrow} & F^*\Pi_1 & \overset{\bullet}{\Longrightarrow} & M\Pi_1 & \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} & I\Pi_1 & \longleftarrow & S\Pi_1 & \Longrightarrow & B\Pi_1 \\
 \Downarrow & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow^\bullet & & \Downarrow^\bullet & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 B\Lambda_1 & F\Lambda_1 & \overset{\bullet}{\longleftarrow} & F^*\Lambda_1 & \overset{\bullet}{\Longrightarrow} & M\Lambda_1 & \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} & I\Lambda_1 & \longleftarrow & S\Lambda_1 & \Longrightarrow & B\Lambda_1 \\
 \Downarrow & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow^\bullet & & \Uparrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 B\Sigma_2 & F\Sigma_2 & \overset{\bullet}{\longleftarrow} & F^*\Sigma_2 & \overset{\bullet}{\Longrightarrow} & M\Sigma_2 & \overset{\bullet}{\longleftrightarrow} & I\Sigma_2 & \longleftrightarrow & S\Sigma_2 & \Longrightarrow & B\Sigma_2
 \end{array}$$

Figura 2

Las nuevas relaciones que aparecen en la figura 2 son :

- 2.a) Para cada  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$  se verifica  $F^*\Gamma \Longrightarrow F\Gamma$  (2.3.1).
- 2.b) Si E designa uno de los esquemas del máximo y  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$  entonces  $E\Gamma_2 \Longrightarrow E\Gamma_1$  (2.3.1).
- 2.c) Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ , entonces  $F^*\Gamma \Longrightarrow M\Gamma$  (2.3.1).

2.d) Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ , entonces  $M\Gamma \iff \Pi\Gamma$  (2.3.2, 2.3.5 y 2.3.6).

2.e)  $M\Sigma_1 \implies M\Sigma_0$  (2.3.7).

2.f)  $M\Sigma_n \iff M\Pi_n \iff M\Lambda_n$  (2.3.8).

2.g)  $M\Sigma_{n+2} \implies M\Lambda_{n+1}$  (2.3.9).

Seguidamente, vamos a probar dichas relaciones.

**2.3.1 Teorema.** *Se verifica:*

1. Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $F^*\Gamma \implies F\Gamma$ .
2. Si  $E$  designa uno de los esquemas del máximo y  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $E\Gamma_2 \implies E\Gamma_1$ .
3. Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ , entonces  $F^*\Gamma \implies M\Gamma$ .

**Demostración:**

De las definiciones correspondientes, se deduce inmediatamente 1 y 2. Probemos 3 para  $\Gamma = \Sigma_n$  (en los restantes casos, la prueba es análoga).

Para ello, sean  $\mathfrak{A} \models F^*\Sigma_n$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_n$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ .

Sea  $c \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models c \leq a \wedge \varphi(c)$ .

Consideremos la  $\Sigma_n$ -fórmula

$$\theta(x, y) \equiv x = y \wedge \varphi(x)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \wedge \exists x \leq a \exists y \theta(x, y)$$

Puesto que  $\mathfrak{A} \models F^*\Sigma_n$  deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$$

Luego  $p \leq a$  y, además,  $\mathfrak{A} \models \varphi(p) \wedge \forall x \leq a (\varphi(x) \rightarrow x \leq p)$ .

Es decir:  $\mathfrak{A} \models M\Sigma_n$ .

□

### 2.3.2 Teorema. $\text{M}\Pi_n \iff \text{L}\Sigma_n$ .

**Demostración:**

$$\boxed{\text{M}\Pi_n \implies \text{L}\Sigma_n}$$

Sean  $\mathfrak{A} \models \text{M}\Pi_n$ , y  $\psi(x) \in \Sigma_n$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$ . Sea  $a \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ . Consideremos la  $\Pi_n$ -fórmula  $\varphi(x) \equiv \forall t < x \neg \psi(t)$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \varphi(0)$  y  $\mathfrak{A} \models \text{M}\Pi_n$ , existe  $p \in A$  tal que  $p \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models \varphi(p) \wedge \forall x \leq a (\varphi(x) \rightarrow x \leq p)$$

Entonces

- $\mathfrak{A} \models \forall t < p \neg \psi(t)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \varphi(p)$ .
- $\mathfrak{A} \models \psi(p)$  ya que, caso contrario, resultaría que  $\mathfrak{A} \models \varphi(p+1)$ .

Por tanto,  $\mathfrak{A} \models \text{L}\Sigma_n$ .

$$\boxed{\text{L}\Sigma_n \implies \text{M}\Pi_n}$$

Sean  $\mathfrak{A} \models \text{L}\Sigma_n$ ,  $\varphi(x) \in \Pi_n$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ .

Si  $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ , entonces es obvio que  $\mathfrak{A} \models a = (\max x)_{x \leq a} \varphi(x)$ .

Si  $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a)$ , entonces consideramos la fórmula

$$\psi(t, z) \equiv t \leq z \wedge \forall x \leq z (t \leq x \rightarrow \neg \varphi(x))$$

(es decir, la fórmula  $\psi(t, z)$  indica que en todos los puntos del intervalo cerrado de extremos  $t$  y  $z$  se verifica  $\neg \varphi(x)$ ).

Se verifica que  $\psi(t, z) \in \Sigma_n(\mathfrak{A})$ , ya que para  $n = 0$  el resultado es obvio y si  $n > 0$ , entonces  $\text{I}\Sigma_n \implies \text{B}\Sigma_n$  y  $\psi(t, z) \in \Sigma_n(\text{B}\Sigma_n)$ .

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \exists t \psi(t, a)$  [ basta considerar  $t = a$  ] deducimos que existe  $q \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models q = (\mu t) \psi(t, a)$ .

Ahora bien,  $q \neq 0$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ . Por tanto,  $q - 1 = (\max x)_{x \leq a} \varphi(x)$ .

□

**2.3.3 Lema.**  $M\Sigma_{n+1} + B\Sigma_{n+1} \iff I\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

$$\boxed{M\Sigma_{n+1} + B\Sigma_{n+1} \implies I\Sigma_{n+1}}$$

Por el teorema 1.3.13, basta demostrar que  $M\Sigma_{n+1} + B\Sigma_{n+1} \implies L\Pi_{n+1}$ .

La prueba de este resultado es análoga a la de  $M\Pi_n \implies L\Sigma_n$  en 2.3.2 .

Basta tener presente que si  $\psi(x) \in \Pi_{n+1}$ , entonces

$$\varphi(x) \equiv \forall t < x \neg \psi(t) \in \Sigma_{n+1}(B\Sigma_{n+1})$$

$$\boxed{I\Sigma_{n+1} \implies M\Sigma_{n+1} + B\Sigma_{n+1}}$$

Por el teorema 1.3.13, basta demostrar que  $L\Pi_{n+1} \implies M\Sigma_{n+1}$ . La prueba

de este resultado es análoga a la de  $L\Sigma_n \implies M\Pi_n$  en 2.3.2 . Basta tener

presente que si  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ , entonces

$$\psi(t, z) \equiv t \leq z \wedge \forall x \leq z (t \leq x \rightarrow \neg \varphi(x)) \in \Pi_{n+1}$$

□

**2.3.4 Lema.**  $M\Sigma_{n+1} \implies B\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

Por inducción sobre  $n$ .

$$\boxed{n = 0}$$

Sean  $\mathfrak{A} \models M\Sigma_1$  ,  $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \varphi(x, y)$ .

Consideremos la  $\Sigma_1$ -fórmula:

$$\psi(w) \equiv \exists t \forall x \leq w \exists y \leq t \varphi(x, y)$$

Se verifica que  $\mathfrak{A} \models \psi(0)$ , luego  $\mathfrak{A} \models \exists w \leq a \psi(w)$ . Por tanto, existe  $p \in A$  tal que  $p \leq a$  y  $p = (\max w)_{w \leq a} \psi(w)$ .

Basta probar que  $p = a$ . Para ello, sea  $t_0$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq p \exists y \leq t_0 \varphi(x, y)$$

- Supongamos que  $p \neq a$ . Entonces  $p + 1 \leq a$ , luego existe  $y_0 \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(p + 1, y_0)$ . Por tanto, si  $t_1 = \max \{t_0, y_0\}$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq p + 1 \exists y \leq t_1 \varphi(x, y)$$

Es decir,  $\mathfrak{A} \models \psi(p + 1)$ . Lo cual contradice la definición de  $p$ .

$n \rightarrow n + 1$

Supongamos que  $M\Sigma_{n+1} \implies B\Sigma_{n+1}$ .

La prueba de  $M\Sigma_{n+2} \implies B\Pi_{n+1}$  es análoga a la anterior, basta observar que

$$\begin{cases} \varphi(x, y) \in \Pi_{n+1} \implies \psi(w) \in \Sigma_{n+2}(B\Sigma_{n+1}) \\ M\Sigma_{n+2} \implies M\Sigma_{n+1} \implies B\Sigma_{n+1} \end{cases}$$

□

**2.3.5 Teorema.**  $M\Sigma_n \iff I\Sigma_n$

**Demostración:**

El teorema es cierto para  $n = 0$ , ya que

$$M\Sigma_0 \xleftrightarrow{2.3.2} L\Sigma_0 \xleftrightarrow{1.3.13} I\Sigma_0$$

Si  $n > 0$ , entonces

$$I\Sigma_n \xleftrightarrow{2.3.3} M\Sigma_n + B\Sigma_n \xleftrightarrow{2.3.4} M\Sigma_n$$

□

**2.3.6 Teorema.**  $M\Lambda_n \iff L\Lambda_n$ .

**Demostración:**

El teorema es inmediato para  $n = 0$ . Supongamos que  $n > 0$ .

$M\Lambda_n \implies L\Lambda_n$

Se verifica

$$\begin{aligned} M\Lambda_n &\implies M\Sigma_n \quad [ \Sigma_n \subseteq \Lambda_n ] \\ &\implies I\Sigma_n \quad [ 2.3.5 ] \\ &\implies L\Lambda_n \quad [ 2.2.1 ] \end{aligned}$$

$$\boxed{L\Lambda_n \implies M\Lambda_n}$$

Sean  $\mathfrak{A} \models L\Lambda_n$ ,  $\varphi(x) \in \Lambda_n$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models L\Lambda_n \vdash I\Sigma_n$  y  $n > 0$ , del teorema 1.6.3 deducimos que existe  $t_0 < 2^{a+1}$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x < a + 1 (\varphi(x) \leftrightarrow x \in t_0)$$

Por tanto:  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a (x \in t_0)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ .

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models L\Lambda_n$  y que

$$L\Lambda_n \xrightarrow{2.2.1} I\Sigma_n \xrightarrow{2.3.5} M\Sigma_n \xrightarrow{n>0} M\Sigma_1$$

deducimos que existe  $p \in A$  tal que  $p \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models p \in t_0 \wedge \forall x \leq a (x \in t_0 \rightarrow x \leq p)$$

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \varphi(p) \wedge \forall x \leq a (\varphi(x) \rightarrow x \leq p)$$

□

**2.3.7 Teorema.**  $M\Sigma_1 \vdash M\Sigma_0$ .

**Demostración:**

Basta tener presente que

$$\begin{array}{ccc} M\Sigma_0 & \xleftrightarrow{2.3.5} & I\Sigma_0 \\ M\Sigma_1 & \xleftrightarrow{2.3.5} & I\Sigma_1 \\ I\Sigma_1 & \xrightarrow{1.3.13} & I\Sigma_0 \end{array}$$

□

**2.3.8 Teorema.**  $M\Sigma_n \iff M\Pi_n \iff M\Lambda_n$ .

**Demostración:**

Es consecuencia de los teoremas 2.3.2, 2.3.5, 2.3.6, 2.2.1 y del teorema de Paris-Kirby 1.3.13.

□

**2.3.9 Teorema.**  $M\Sigma_{n+2} \vdash M\Lambda_{n+1}$ .

**Demostración:**

Por una parte

$$\begin{aligned} M\Sigma_{n+2} &\Rightarrow I\Sigma_{n+2} \quad [ 2.3.5 ] \\ &\Rightarrow I\Lambda_{n+1} \quad [ \text{fig.1} ] \\ &\Rightarrow M\Lambda_{n+1} \quad [ 2.3.5 \text{ y } 2.2.1 ] \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $M\Lambda_{n+1} \Rightarrow M\Sigma_{n+2}$ , entonces

$$\begin{aligned} I\Sigma_{n+1} &\Rightarrow I\Lambda_{n+1} \quad [ \text{fig.1} ] \\ &\Rightarrow M\Lambda_{n+1} \quad [ 2.3.5 \text{ y } 2.2.1 ] \\ &\Rightarrow M\Sigma_{n+2} \quad [ \text{hip.} ] \\ &\Rightarrow I\Sigma_{n+2} \quad [ 2.3.5 ] \end{aligned}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

## 2.4 Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección fuerte para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$

Las primeras relaciones que establecemos en la presente sección, son las indicadas en la siguiente figura

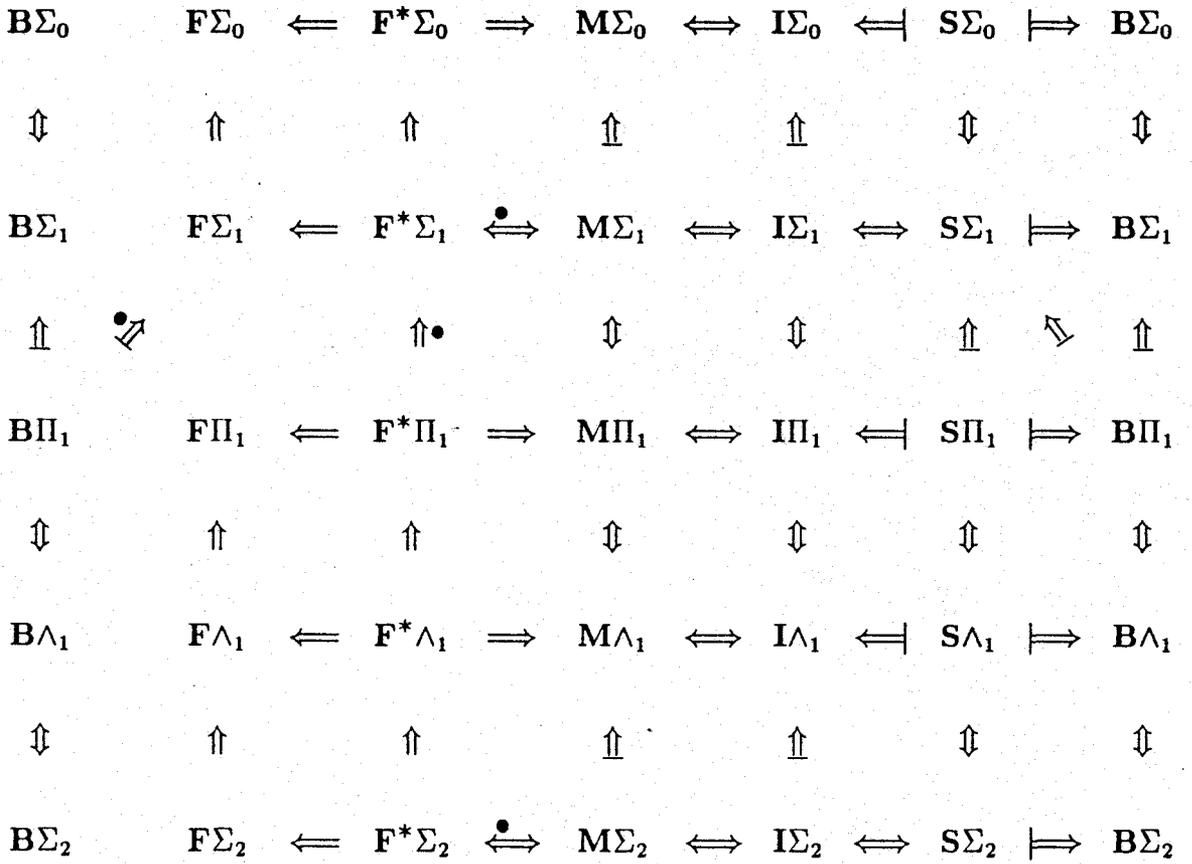


Figura 3

Los resultados que permiten obtener la figura 3, a partir de la figura 2, son los siguientes:

3.a)  $M\Sigma_{n+1} \Rightarrow F^*\Sigma_{n+1}$ .

3.b)  $B\Pi_{n+1} \Rrightarrow F\Sigma_{n+1}$ .

$$3.c) \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}.$$

Dichos resultados se deducen de los siguientes teoremas

$$2.4.1 \text{ Teorema. } \mathbf{F}^*\Sigma_n \iff \mathbf{F}\Sigma_n + \mathbf{M}\Sigma_n$$

$$2.4.2 \text{ Teorema. Si } \Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L}), \text{ entonces } \mathbf{S}\Gamma \Rightarrow \mathbf{F}\Gamma.$$

Veamos que los resultados citados se deducen de estos teoremas.

$$\text{Prueba de 3.a) : } \mathbf{M}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Sigma_{n+1} &\Rightarrow \mathbf{M}\Sigma_{n+1} + \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig. 2}] \\ &\Rightarrow \mathbf{M}\Sigma_{n+1} + \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \quad [2.4.2] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [2.4.1] \end{aligned}$$

□

$$\text{Prueba de 3.b) : } \mathbf{B}\Pi_{n+1} \iff \mathbf{F}\Sigma_{n+1}.$$

Por una parte

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Pi_{n+1} &\Rightarrow \mathbf{M}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig.2}] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [3.a] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig.2}] \end{aligned}$$

Por otra parte,  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1}$  ya que, caso contrario

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Sigma_{n+1} &\Rightarrow \mathbf{M}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig.2}] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [3.a] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig.2}] \\ &\Rightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1} \quad [\text{hipót.}] \\ &\Rightarrow \mathbf{B}\Sigma_{n+2} \quad [1.3.13] \end{aligned}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

$$\text{Prueba de 3.c) : } \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}.$$

Basta tener presente que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} &\Rightarrow \mathbf{M}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig. 2}] \\ &\Rightarrow \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [3.a] \end{aligned}$$

□

Finalmente, vamos a demostrar los teoremas 2.4.1 y 2.4.2.

**Prueba del teorema 2.4.1 :**  $F^*\Sigma_n \iff F\Sigma_n + M\Sigma_n$

$$\boxed{F^*\Sigma_n \implies F\Sigma_n + M\Sigma_n}$$

Resulta inmediatamente de la figura 2.

$$\boxed{F\Sigma_n + M\Sigma_n \implies F^*\Sigma_n}$$

Sean  $\mathfrak{A} \models F\Sigma_n + M\Sigma_n$ ,  $\theta(x, y) \in \Sigma_n$  y  $a \in A$  tales que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{A}$  una  $\Sigma_n$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $a + 1$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models F\Sigma_n$  existe  $c \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq c)$$

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \leq c \theta(x, y)$$

Consideremos la  $\Sigma_n$ -fórmula

$$\varphi(y, z) \equiv \exists x \leq z \theta(x, y)$$

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models M\Sigma_n$  y que  $\mathfrak{A} \models \exists y \leq c \varphi(y, a)$  deducimos que existe  $p \in A$  tal que  $p \leq c$  y  $\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{y \leq c} \varphi(y, a)$ .

Veamos que  $\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$ . En efecto:

- $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \theta(x, p)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \varphi(p, a)$ .
- Sean  $d, e \in A$  son tales que  $d \leq a$  y  $\mathfrak{A} \models \theta(d, e)$ . Entonces  $\mathfrak{A} \models e \leq c \wedge \varphi(e, a)$ . Por tanto  $e \leq p$ .

□

**Prueba del teorema 2.4.2 :** Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $S\Gamma \implies F\Gamma$ .

Sean  $\mathfrak{A} \models S\Gamma$ ,  $\theta(x, y) \in \Gamma$  y  $a \in A$  tales que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{A}$  una  $\Gamma$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $a + 1$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models S\Gamma$  deducimos que existe  $q \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \theta(x, y) \rightarrow \exists y \leq q \theta(x, y))$$

Por tanto, si  $c \leq a, d \in A$  verifican que  $\mathfrak{A} \models \theta(c, d)$ , entonces existe  $e \leq q$  tal que  $\mathfrak{A} \models \theta(c, e)$ . Luego  $d = e \leq q$ . Es decir :

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq q)$$

□

A continuación, se establecen nuevas relaciones entre los esquemas del máximo y de colección fuerte.

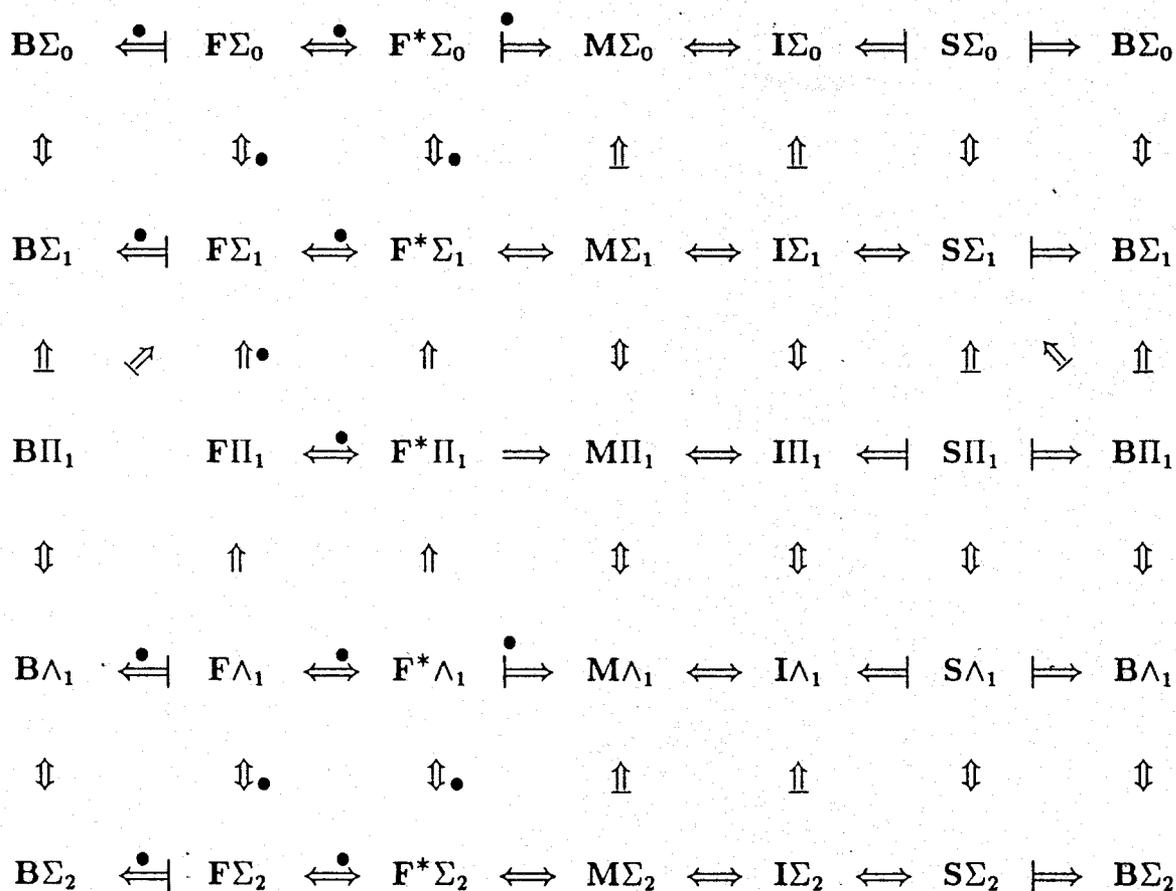


Figura 4

La figura 4 se deduce de la figura 3, a partir de los siguientes resultados

4.a)  $F\Lambda_n \Rightarrow F\Sigma_{n+1}$ .

4.b) Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ , entonces  $\mathbf{F}\Gamma \implies \mathbf{F}^*\Gamma$ .

4.c)  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$ .

4.d)  $\mathbf{F}^*\Lambda_n \implies \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}$ .

4.e)  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \vdash \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

4.f)  $\mathbf{F}\Lambda_n \vdash \mathbf{B}\Lambda_n$ .

4.g)  $\mathbf{M}\Lambda_n \not\vdash \mathbf{F}^*\Lambda_n$ .

Estos resultados se obtienen de los siguientes teoremas:

**2.4.3 Teorema.**  $\mathbf{F}\Lambda_n \implies \mathbf{S}\Sigma_{n+1}$ .

**2.4.4 Teorema.**  $\mathbf{F}^*\Pi_n \iff \mathbf{F}\Pi_n + \mathbf{M}\Pi_n$ .

Veamos que los resultados citados son consecuencias de estos teoremas.

**Prueba de 4.a) :**  $\mathbf{F}\Lambda_n \implies \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$ .

Basta tener presente que

$$\mathbf{F}\Lambda_n \xrightarrow{2.4.3} \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.3} \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$$

□

**Prueba de 4.b) :** Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ , entonces  $\mathbf{F}\Gamma \implies \mathbf{F}^*\Gamma$ .

Se verifica

$$\bullet \mathbf{F}\Lambda_n \xrightarrow{2.4.3} \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.3} \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.3} \mathbf{F}^*\Lambda_n \quad (4.b.1)$$

$$\bullet \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.3} \mathbf{F}\Lambda_n \xrightarrow{4.b.1} \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad (4.b.2)$$

• Finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\Pi_{n+1} &\implies \mathbf{F}\Pi_{n+1} + \mathbf{F}\Lambda_n \\ &\implies \mathbf{F}\Pi_{n+1} + \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \quad [4.a] \\ &\implies \mathbf{F}\Pi_{n+1} + \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [4.b.2] \\ &\implies \mathbf{F}\Pi_{n+1} + \mathbf{M}\Pi_{n+1} \quad [fig.3] \\ &\implies \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \quad [2.4.4] \end{aligned}$$

□

Prueba de 4.c) :  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$ .

$$\mathbf{F}\Pi_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{F}\wedge_n \xrightarrow{4.b.2} \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$$

□

Prueba de 4.d) :  $\mathbf{F}^*\wedge_n \implies \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}$ .

$$\mathbf{F}^*\wedge_n \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{F}\wedge_n \xrightarrow{4.b.1} \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}$$

□

Prueba de 4.e) :  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \rightrightarrows \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

Por una parte

$$\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{F}\wedge_n \xrightarrow{2.4.3} \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$$

Por otra parte, si  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$ , entonces resultaría que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Sigma_{n+1} &\implies \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \quad [\text{hip.}] \\ &\implies \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [4.b.2] \\ &\implies \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \quad [\text{fig.3}] \end{aligned}$$

lo cual contradice el teorema 1.3.13 de Paris-Kirby.

□

Prueba de 4.f) :  $\mathbf{F}\wedge_n \rightrightarrows \mathbf{B}\wedge_n$ .

Basta tener presente que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\wedge_n &\xrightarrow{4.a} \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{F}\wedge_n \\ \mathbf{B}\wedge_n &\xleftrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \\ \mathbf{F}\Sigma_{n+1} &\rightrightarrows \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \quad [4.e] \end{aligned}$$

□

Prueba de 4.g) :  $\mathbf{M}\wedge_n \not\Rightarrow \mathbf{F}^*\wedge_n$ .

Caso contrario, resultaría que

$$\begin{aligned} M\Lambda_n &\implies F^*\Lambda_n \quad [ \text{hip.} ] \\ &\implies F^*\Sigma_{n+1} \quad [ 4.d ] \\ &\implies M\Sigma_{n+1} \quad [ \text{fig.3} ] \end{aligned}$$

lo que contradice a la figura 3.

□

Probemos seguidamente los teoremas 2.4.3 y 2.4.4.

**Prueba del teorema 2.4.3 :**  $F\Lambda_n \implies S\Sigma_{n+1}$ .

Este teorema es consecuencia del siguiente aserto:

**Aserto 3 :**  $F\Lambda_n + I\Sigma_n \implies S\Sigma_{n+1}$ .

En efecto: Por inducción sobre  $n$ .

$n = 0$

$$F\Lambda_0 \implies F\Lambda_0 + I\Sigma_0 \xrightarrow{As.3} S\Sigma_1$$

$n \rightarrow n+1$

Supongamos que  $F\Lambda_n \implies S\Sigma_{n+1}$ . Entonces

$$\begin{aligned} F\Lambda_{n+1} &\xrightarrow{fig.3} F\Lambda_n \implies S\Sigma_{n+1} \quad [ \text{hipót. ind.} ] \\ &\implies I\Sigma_{n+1} \quad [ \text{fig.3} ] \end{aligned}$$

Por tanto

$$F\Lambda_{n+1} \implies F\Lambda_{n+1} + I\Sigma_{n+1} \xrightarrow{As.3} S\Sigma_{n+2}$$

□

**Prueba del Aserto 3 :**  $F\Lambda_n + I\Sigma_n \implies S\Sigma_{n+1}$ .

Sean  $\mathfrak{A} \models F\Lambda_n + I\Sigma_n$ ,  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$  y  $a \in A$ .

- Si  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y \neg \varphi(x, y)$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists y \leq 0 \varphi(x, y))$$

- Supongamos que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \varphi(x, y)$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models I\Sigma_n$  y  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ , deducimos que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y (y = (\mu v) \varphi(x, v))$$

Consideremos la fórmula

$$\theta(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge \forall v < y \neg \varphi(x, v)$$

Entonces  $\theta(x, y) \in \wedge_n(\mathfrak{A})$ , ya que para  $n = 0$  el resultado es obvio, y si  $n > 0$ , entonces  $\mathbf{I}\Sigma_n \implies \mathbf{B}\Sigma_n$ .

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \varphi(x, y)$ , se tiene que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{A}$  una  $\wedge_n$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $a + 1$ . Luego como  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}\wedge_n$ , deducimos que existe  $q \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq q)$$

Veamos finalmente que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists y \leq q \varphi(x, y))$$

Para ello, sea  $d \leq a$  tal que  $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(d, y)$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_n$  y  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ , existe  $b \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \theta(d, b)$ . Entonces  $b \leq q$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi(d, b)$ . Es decir,  $\mathfrak{A} \models \exists y \leq q \varphi(d, y)$ .

□

**Prueba del teorema 2.4.4 :**  $\mathbf{F}^*\Pi_n \iff \mathbf{F}\Pi_n + \mathbf{M}\Pi_n$ .

De la figura 3 resulta que  $\mathbf{F}^*\Pi_n \implies \mathbf{F}\Pi_n + \mathbf{M}\Pi_n$ .

La demostración de  $\mathbf{F}\Pi_n + \mathbf{M}\Pi_n \implies \mathbf{F}^*\Pi_n$  es análoga a la de  $\mathbf{F}\Sigma_n + \mathbf{M}\Sigma_n \implies \mathbf{F}^*\Sigma_n$  (teorema 2.4.1). Basta tener presente, siguiendo dicha prueba, que si  $\theta(x, y) \in \Pi_n$ , entonces

$$\varphi(y, z) \equiv \exists x \leq z \theta(x, y) \in \Pi_n(\mathfrak{A})$$

(pues para  $n = 0$  el resultado es obvio y si  $n > 0$ , entonces basta observar que  $\mathbf{M}\Pi_n \xrightarrow{\text{fig.3}} \mathbf{B}\Sigma_n$ ).

□

## 2.5 El axioma de regularidad

Para completar las relaciones que faltan en la figura 4, vamos a utilizar el esquema de axiomas de regularidad (G. Mills y J. Paris [23], página 275).

**2.5.1 Definición.** Si  $\varphi(x, y) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\mathbf{R}_\varphi(z)$  es la fórmula

$$\forall t \exists y > t \exists x \leq z \varphi(x, y) \rightarrow \exists x \leq z \forall t \exists y > t \varphi(x, y)$$

$\mathbf{R}_\varphi$  es el cierre de  $\mathbf{R}_\varphi(z)$ .

Es decir, el esquema de axiomas  $\mathbf{R}_\varphi$  traduce la siguiente propiedad: si el dominio de una relación está acotado y el rango no, entonces existe, al menos, un elemento del dominio que está relacionado con un conjunto no acotado de elementos. Dicho con otras palabras, si una unión finita de conjuntos es no acotada, entonces, al menos uno de esos conjuntos es no acotado (o, equivalentemente, la unión de un número finito de conjuntos finitos es finita).

**2.5.2 Definición.** Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces

$$\mathbf{R}\Gamma = \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\mathbf{R}_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

**2.5.3 Teorema.** (Mills–Paris ([23], teorema 1)

Para cada  $\varphi(y, z) \in \Pi_n$  existe  $\psi(u) \in \Pi_n$  tal que

1.  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall y < w \exists z \varphi(y, z) \rightarrow \exists u > w \psi(u)$
2.  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \vdash \forall y \exists z \varphi(y, z) \leftrightarrow \forall t \exists u > t \psi(u)$

**Esquema de la prueba**

Si  $n > 0$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall y \exists z \varphi(y, z) \leftrightarrow \forall y \exists z \varphi_1(y, z) \leftrightarrow \forall t \exists y > t \exists z \varphi_1(y, z)$$

siendo  $\varphi_1(y, z) \equiv y < z \wedge \forall u < y \exists v < z \varphi(u, v)$ . Si  $\lambda(y, z, w) \in \Sigma_{n-1}$  es tal que  $\varphi_1(y, z) \equiv \forall w \lambda(y, z, w)$ , entonces se considera la  $\Pi_n$ -fórmula

$$\begin{aligned} \psi(t) \equiv \exists t_0, t_1 \leq t \{ & t = \langle t_0, t_1 \rangle \wedge t_0, t_1 \text{ codifican aplicaciones} \wedge 0 \in \text{dom}(t_0) \wedge \\ & \forall s, u \in \text{dom}(t_0) (s < u \rightarrow t_0(s) \in \text{dom}(t_0) \wedge t_0(s) \leq u) \wedge \\ & \text{dom}(t_1) = \{ \langle x, z \rangle : x \in \text{dom}(t_0) \wedge z < t_0(x) \} \wedge \\ & \forall \langle x, z \rangle > [ \langle x, z \rangle \in \text{dom}(t_1) \rightarrow (\neg \lambda(x, z, t_1(\langle x, z \rangle))) \wedge \\ & \wedge \forall u < t_1(\langle x, z \rangle) \lambda(x, z, u) ] \} \end{aligned}$$

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ , dado  $c \in A$  se prueba que existe  $p \in A$  tal que:

$$\forall u [ (\exists t < p \psi(t) \wedge \exists x \in \text{dom}(t_0) (x \geq u)) \vee u > c ]$$

de donde se concluye que

$$\mathfrak{A} \models \forall y < c \exists z \varphi(y, z) \rightarrow \exists u > c \psi(u)$$

Para establecer la implicación recíproca de (2), se prueba que si  $c \in A$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists t (\psi(t) \wedge \exists x \in \text{dom}(t_0) (c \leq x))$$

El caso  $n = 0$  tiene la ventaja de que la negación de una  $\Pi_0$ -fórmula es una  $\Pi_0$ -fórmula, pero, en cambio, tiene la desventaja de no poder utilizar la función exponencial, ya que  $\mathfrak{A}$  no tiene porqué ser modelo de  $\mathbf{I}\Sigma_1$ . Para más detalles relativos a la fórmula  $\psi(u)$  correspondiente a este caso, ver [23], página 274.

□

#### 2.5.4 Teorema.

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+2} \iff \mathbf{R}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{R}\Pi_n \iff \mathbf{B}\Pi_{n+1}$$

#### Esquema de la prueba

El teorema es consecuencia inmediata de los siguientes resultados:

1.  $\mathbf{B}\Sigma_{n+2} \implies \mathbf{R}\Sigma_{n+1}$

## 2. $\mathbf{R}\Pi_n \implies \mathbf{B}\Pi_{n+1}$

Para probar (1), basta tener presente que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ ,  $\varphi(x, y)$  y  $a \in A$  son tales que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists t \forall y > t \neg \varphi(x, y)$$

entonces existe  $c \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists t \leq c \forall y > t \neg \varphi(x, y)$$

Luego

$$\mathfrak{A} \models \forall y > c \neg \exists x \leq a \varphi(x, y)$$

Para probar (2) se demuestra en primer lugar que  $\mathbf{R}\Pi_0 \implies \mathbf{I}\Sigma_1$ .

- Para ello, si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{R}\Pi_0$ ,  $\varphi(x, y) \in \Pi_0$  y  $a \in A$  son tales que  $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(a, y)$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists w \forall u \geq w [\exists y < u \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y < u + 1 \varphi(x, y)]$$

Luego existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y \leq p \varphi(x, y))$$

de donde resulta que existe  $q \in A$  tal que

$$q = \min\{x : \mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi(x, y)\}$$

utilizando que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_0$ .

Finalmente  $\mathbf{R}\Pi_n \implies \mathbf{B}\Pi_{n+1}$  se demuestra por inducción sobre  $n$ .

$n = 0$

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{R}\Pi_0$ ,  $\varphi(x, y, z) \in \Sigma_0$  y  $a \in A$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \forall z \varphi(x, y, z)$$

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ , del teorema de Mills-Paris deducimos que existe  $\psi(x, t) \in \Pi_0$  tal que

$$1. \mathfrak{A} \models \forall y < w \exists z \neg \varphi(x, y, z) \rightarrow \exists u > w \psi(x, u)$$

$$2. \mathfrak{A} \models \forall y \exists z \neg \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \forall t \exists u > t \psi(x, u)$$

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{R}\Pi_0$  y  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists t \forall u > t \neg \psi(x, u)$ , deducimos que existe  $q \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall u > q \forall x \leq a \neg \psi(x, u)$$

Entonces se verifica

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \leq q + 1 \forall z \varphi(x, y, z)$$

$$\boxed{n > 0 \text{ y } \forall k < n : \mathbf{R}\Pi_k \implies \mathbf{B}\Pi_{k+1}}$$

Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{R}\Pi_n$ , entonces se prueba que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_{n+1}$  razonando como en el caso  $n = 0$ , observando que, por hipótesis de inducción, se verifica  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

□

## 2.6 Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$

Las nuevas relaciones que se establecen entre los esquemas del máximo y los esquemas de colección, aparecen en la siguiente figura.

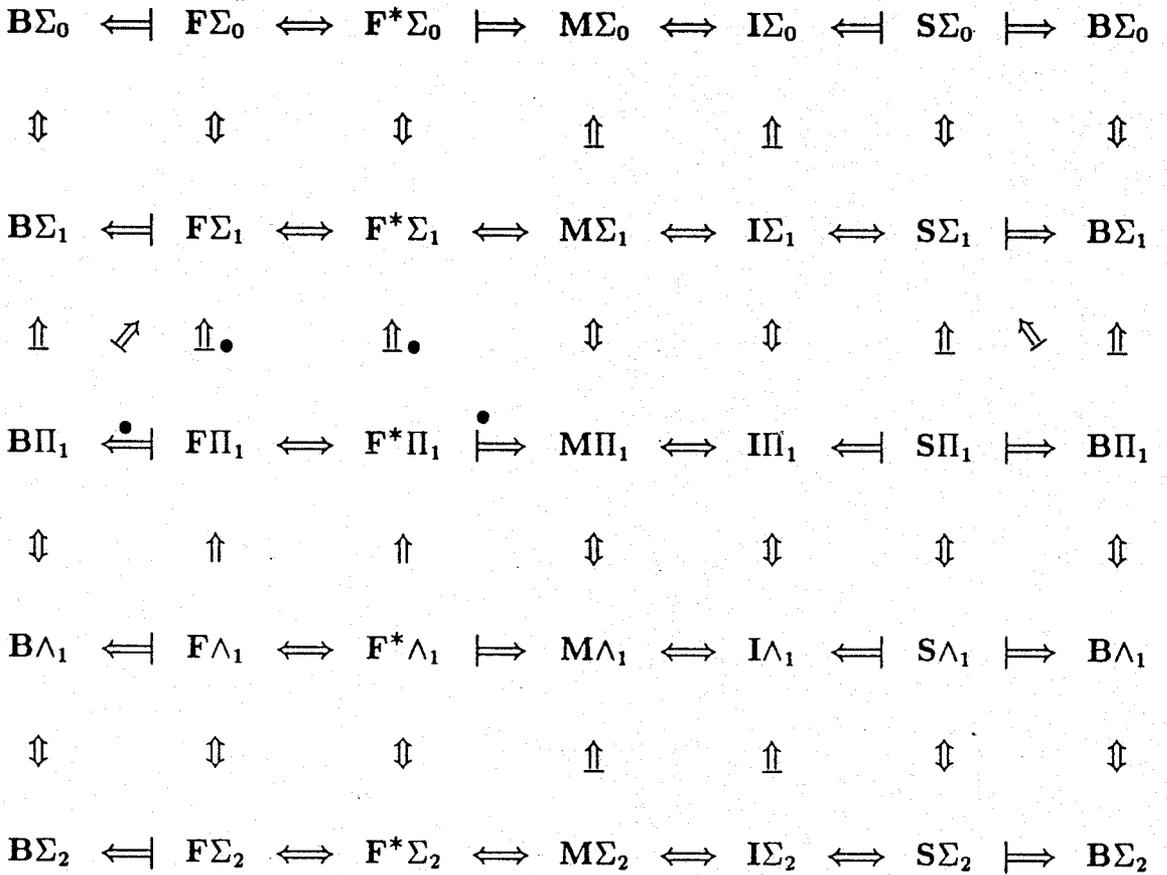


Figura 5

Los resultados que permiten obtener la figura 5 a partir de la figura 4, son los siguientes

5.a)  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1}$ .

5.b)  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}\Pi_{n+1}$ .

$$5.c) \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}^*\Pi_{n+1}.$$

$$5.d) \mathbf{M}\Pi_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}^*\Pi_{n+1}.$$

Dichos resultados se deducen de los siguientes teoremas

$$2.6.1 \text{ Teorema. } \mathbf{F}\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1}$$

2.6.2 Teorema. Si  $\mathcal{A} \models \mathbf{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ , entonces

$$I_{n+1}(\mathcal{A}; a) \not\models \mathbf{F}\Pi_n$$

Veamos que los resultados citados son consecuencias de estos teoremas.

$$\text{Prueba de 5.a) : } \mathbf{F}\Pi_{n+1} \Leftrightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1}.$$

Por una parte, el teorema 2.6.1 afirma que  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \Rightarrow \mathbf{B}\Pi_{n+1}$ .

Por otra parte, del teorema 2.6.2 resulta que si  $\mathcal{A} \models \mathbf{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ , entonces  $I_{n+2}(\mathcal{A}; a) \not\models \mathbf{F}\Pi_{n+1}$ . Puesto que  $I_{n+2}(\mathcal{A}; a) \models \mathbf{B}\Pi_{n+1}$  (teorema 1.5.2), deducimos que  $\mathbf{B}\Pi_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}\Pi_{n+1}$ .

□

$$\text{Prueba de 5.b) : } \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}\Pi_{n+1}.$$

Caso contrario, resultaría que

$$\mathbf{B}\Pi_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.4}} \mathbf{F}\Sigma_{n+1} \xrightarrow{\text{hip.}} \mathbf{F}\Pi_{n+1}$$

lo cual contradice el resultado 5.a.

□

$$\text{Prueba de 5.c) : } \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \not\Rightarrow \mathbf{F}^*\Pi_{n+1}.$$

Basta tener presente que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{F}\Sigma_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \quad [ \text{fig.4} ] \\ \mathbf{F}\Pi_{n+1} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \quad [ \text{fig.4} ] \\ \mathbf{F}\Sigma_{n+1} & \not\Rightarrow & \mathbf{F}\Pi_{n+1} \quad [ 5.b ] \end{array}$$

□

**Prueba de 5.d) :**  $M\Pi_{n+1} \not\Rightarrow F^*\Pi_{n+1}$ .

Caso contrario resultaría que

$$F^*\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.4} M\Pi_{n+1} \xrightarrow{hip.} F^*\Pi_{n+1}$$

lo cual contradice el resultado 5.c.

□

A continuación, vamos a demostrar los teoremas 2.6.1 y 2.6.2.

**Prueba del teorema 2.6.1 :**  $F\Pi_{n+1} \Rightarrow B\Pi_{n+1}$

Teniendo presente que  $R\Pi_n \Rightarrow B\Pi_{n+1}$  (teorema 2.5.4), la prueba del teorema se reduce al siguiente lema.

**2.6.3 Lema.**  $F\Pi_{n+1} \Rightarrow R\Pi_n$

**Prueba del lema 2.6.3**

Sean  $\mathfrak{A} \models F\Pi_{n+1}$ ,  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$  y  $a \in A$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists t \forall y \geq t \neg \varphi(x, y)$$

Consideremos la  $\Pi_{n+1}$ -fórmula

$$\theta(x, t) \equiv (\forall y \neg \varphi(x, y) \wedge t = 0) \vee (t \neq 0 \wedge \forall y \geq t \neg \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, t - 1))$$

La fórmula  $\theta(x, t)$  asocia a  $x$  el elemento

- $t = 0$ , si  $\forall y \neg \varphi(x, y)$ .
- el menor  $t \neq 0$  tal que  $\forall y \geq t \neg \varphi(x, y)$ , caso contrario.

Veamos que  $\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, t), a)$ . Para ello, sean  $b \leq a, c_1, c_2 \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \theta(b, c_1) \wedge \theta(b, c_2)$ .

- Si  $\mathfrak{A} \models \forall y \neg \varphi(b, y)$ , entonces  $c_1 = 0 = c_2$ .

- Si  $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(b, y)$ , entonces existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall y \geq t_0 \neg \varphi(b, y)$$

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \text{F}\Pi_{n+1}$ ,  $\text{F}\Pi_{n+1} \xrightarrow{\text{fig.4}} \text{III}_{n+1}$  y  $\text{L}\Pi_{n+1} \iff \text{III}_{n+1}$  (teorema 1.3.13), resulta que existe  $d \in A$  tal que

$$d = \min\{t > 0 : \mathfrak{A} \models \forall y \geq t \neg \varphi(b, y)\}$$

Entonces deducimos que

$$d > 0 \wedge \mathfrak{A} \models \forall y \geq d \neg \varphi(b, d) \wedge \mathfrak{A} \models \varphi(b, d - 1)$$

Por tanto:  $c_1 = d = c_2$ .

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \text{F}\Pi_{n+1}$  deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall t (\theta(x, t) \rightarrow t \leq p)$$

Veamos que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\varphi(x, y) \rightarrow y \leq p)$ . En efecto:

- Sean  $b \leq a, c \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \varphi(b, c)$ . Entonces resulta que

$$\mathfrak{A} \models \exists t > 0 \forall y \geq t \neg \varphi(b, y)$$

Por tanto, existe  $t_0 \in A$  tal que

$$t_0 = \min\{t > 0 : \mathfrak{A} \models \forall y \geq t \neg \varphi(b, y)\}$$

Entonces  $\mathfrak{A} \models \varphi(b, t_0 - 1)$ . Luego  $\mathfrak{A} \models \theta(b, t_0)$ . Por tanto  $t_0 \leq p$ .

Ahora bien, por definición de  $t_0$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b, c) \implies c \leq t_0 - 1$$

En consecuencia:  $c \leq p$ .

Así pues, hemos probado que

$$\mathfrak{A} \models [\forall x \leq a \exists t \forall y \geq t \neg \varphi(x, y)] \rightarrow [\exists t \forall x \leq a \forall y (\varphi(x, y) \rightarrow y \leq t)]$$

Es decir

$$\mathfrak{A} \models \forall t \exists y \geq t \exists x \leq a \varphi(x, y) \rightarrow \exists x \leq a \forall t \exists y \geq t \varphi(x, y)$$

□

**Prueba del teorema 2.6.2 :** Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ , entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\models \text{F}\Pi_n$ .

Sean  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  no estándar y  $a \in A - \omega$ . Notemos

$$K_{n+1} = K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \quad \text{e} \quad I_{n+1} = I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$$

Se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{n+1} \models \text{I}\Sigma_n \quad [1.5.2 - (2)] \\ K_{n+1} \not\models \text{B}\Pi_n \quad [1.5.3 - (1) \text{ y } 1.3.13] \\ I_{n+1} \models \text{B}\Pi_n \quad [1.5.2 - (4) \text{ y } 1.3.13] \end{array} \right.$$

Ahora bien

$$[K_{n+1} \not\models \text{B}\Pi_n \text{ y } \text{F}\Pi_n \implies \text{B}\Pi_n] \implies K_{n+1} \not\models \text{F}\Pi_n$$

Por tanto, existen  $\theta(x, y) \in \Pi_n$  y  $b \in K_{n+1}$  tales que

$$K_{n+1} \models \text{FUN}(\theta(x, y), b) \quad \text{y} \quad K_{n+1} \models \forall t \exists x \leq b \exists y > t \theta(x, y)$$

Veamos que  $I_{n+1} \models \text{FUN}(\theta(x, y), b)$

- Caso contrario, existen  $d \leq b, c_1, c_2 \in I_{n+2}$  tales que

$$I_{n+1} \models \theta(d, c_1) \wedge \theta(d, c_2) \wedge c_1 \neq c_2$$

Sea  $e \in K_{n+1}$  tal que  $e \geq \max\{c_1, c_2\}$ . Entonces

$$I_{n+1} \models \exists x \leq b \exists y_1, y_2 \leq e [\theta(x, y_1) \wedge \theta(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2]$$

Ahora bien

$$\left. \begin{array}{l} K_{n+1} \prec_{n+1} \mathfrak{A} \\ I_{n+1} \prec_n \mathfrak{A} \\ K_{n+1} \subset I_{n+1} \subset \mathfrak{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{1.4.2} K_{n+1} \prec_n I_{n+1}$$

Por tanto, teniendo presente que

$$\exists x \leq z \exists y_1, y_2 \leq t [\theta(x, y_1) \wedge \theta(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2] \in \Pi_n(I_{n+1}) \cap \Pi_n(K_{n+1})$$

resultaría que

$$K_{n+1} \models \exists x \leq b \exists y_1, y_2 \leq e [\theta(x, y_1) \wedge \theta(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2]$$

lo cual contradice que  $K_{n+1} \models \text{FUN}(\theta(x, y), b)$ .

Finalmente, deducimos que  $I_{n+1} \models \forall t \exists x \leq b \exists y > t \theta(x, y)$ , ya que  $K_{n+1}$  es una subestructura cofinal  $n$ -elemental de  $I_{n+1}$ .

En consecuencia,  $I_{n+1} \not\models \text{F}\Pi_n$ . □

Finalmente, completamos la figura 5

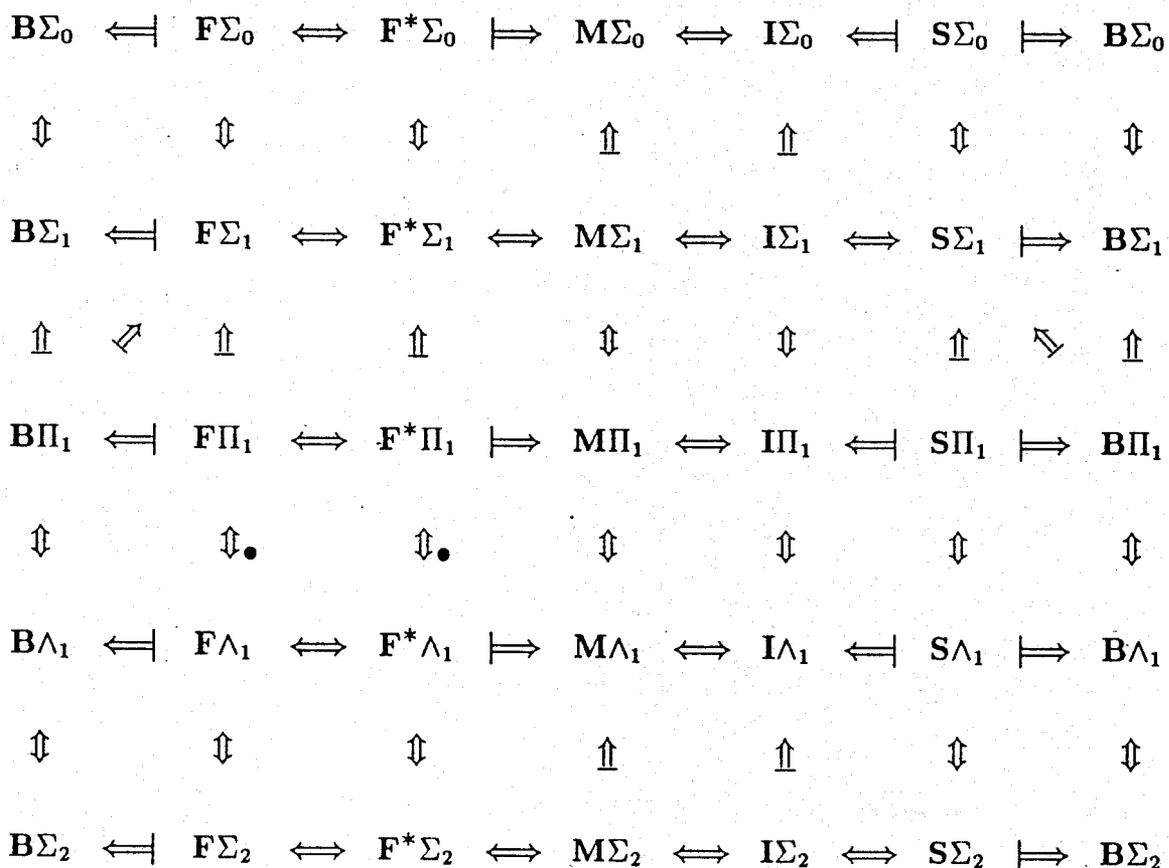


Figura 6

Los resultados que permiten obtener la figura 6 a partir de la figura 5, son los siguientes :

$$6.a) \mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}\wedge_{n+1}.$$

$$6.b) \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}^*\wedge_{n+1}.$$

Dichos resultados se deducen del siguiente teorema:

$$2.6.4 \text{ Teorema. } \mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Pi_{n+1}.$$

En efecto :

$$\text{Prueba de 6.a) : } \mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}\wedge_{n+1}.$$

Se verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\Pi_{n+1} &\implies \mathbf{S}\Pi_{n+1} \quad [ 2.6.4 ] \\ &\implies \mathbf{I}\Sigma_{n+2} \quad [ \text{fig.5} ] \\ &\implies \mathbf{F}\wedge_{n+1} \quad [ \text{fig.5} ] \end{aligned}$$

□

$$\text{Prueba de 6.b) : } \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \implies \mathbf{F}^*\wedge_{n+1}.$$

Basta tener presente que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\Pi_{n+1} &\iff \mathbf{F}^*\Pi_{n+1} \quad [ \text{fig.5} ] \\ \mathbf{F}\wedge_{n+1} &\iff \mathbf{F}^*\wedge_{n+1} \quad [ \text{fig.5} ] \\ \mathbf{F}\Pi_{n+1} &\implies \mathbf{F}\wedge_{n+1} \quad [ 6.a ] \end{aligned}$$

□

$$\text{Prueba del teorema 2.6.4 : } \mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{S}\Pi_{n+1}.$$

Sean  $\mathcal{A} \models \mathbf{F}\Pi_{n+1}$ ,  $\varphi(x, y, z) \in \Sigma_n$  y  $a \in A$ . Puesto que  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , del teorema de Mills-Paris (2.5.3), deducimos que existe  $\psi(x, u) \in \Pi_n$  tal que

$$1. \mathcal{A} \models \forall y < w \exists z \neg \varphi(x, y, z) \rightarrow \exists u > w \psi(x, u)$$

$$2. \mathfrak{A} \models \forall y \exists z \neg \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \forall t \exists u > t \psi(x, u)$$

Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \exists y \forall z \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \exists t \forall u > t \neg \psi(x, u)$$

Consideremos la  $\Pi_{n+1}$ -fórmula

$$\theta(x, t) \equiv \forall u > t \neg \psi(x, u) \wedge \psi(x, t)$$

Es decir,  $t$  es el menor elemento  $v$  tal que  $\forall u > v \neg \psi(x, u)$ .

Veamos que  $\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, t), a)$ .

- Sean  $b \leq a, c_1, c_2 \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \theta(b, c_1) \wedge \theta(b, c_2)$ .

Si  $c_1 < c_2$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \theta(b, c_2) \implies \exists d \leq c_2 : d > c_1 \text{ y } \mathfrak{A} \models \psi(b, d)$$

lo que contradice que  $\mathfrak{A} \models \theta(b, c_1)$ .

Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}\Pi_{n+1}$ , deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall t (\theta(x, t) \rightarrow t \leq p)$$

Veamos, finalmente, que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\exists y \forall z \varphi(x, y, z) \rightarrow \exists y \leq p+1 \forall z \varphi(x, y, z))$$

- Caso contrario, existe  $b \leq a$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \exists y \forall z \varphi(b, y, z) \wedge \forall y \leq p+1 \exists z \neg \varphi(b, y, z)$$

Por una parte

$$\mathfrak{A} \models \exists y \forall z \varphi(b, y, z) \implies \mathfrak{A} \models \exists t \forall u > t \neg \psi(b, u)$$

Puesto que  $\forall u > t \neg \psi(b, u) \in \Pi_{n+1}$  y  $\mathbf{F}\Pi_{n+1} \implies \mathbf{L}\Pi_{n+1}$  resulta que existe  $t_0 \in A$  tal que

$$t_0 = \min\{t : \mathfrak{A} \models \forall u > t \neg \psi(b, u)\}$$

Es decir:  $\mathfrak{A} \models \theta(b, t_0)$ . Luego  $t_0 \leq p$ , ya que  $b \leq a$ . Luego si  $c \in A$  verifica  $\mathfrak{A} \models \theta(b, c)$  entonces  $c \leq t_0 \leq p$ .

Por otra parte, del teorema de Mills-Paris (2.5.3), resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall y > p \exists z \neg \varphi(b, y, z) \implies \mathfrak{A} \models \exists u > p \psi(b, u)$$

lo que es una contradicción.

□

## 2.7 Relaciones de los esquemas del máximo con los esquemas de inducción, colección y colección fuerte, para $\forall_n$

En las secciones anteriores, los esquemas relativos al conjunto de fórmulas  $\Lambda_n$  se han introducido ante la necesidad de considerar ciertas fórmulas  $\Lambda_n$ , generalmente del tipo  $\varphi(x) \wedge \forall y < x \neg \varphi(y)$ , asociada a una fórmula  $\Sigma_n$  o  $\Pi_n$  ( $\varphi(x)$ ).

En esta sección se trata de probar que en la figura 6, podemos sustituir el conjunto de fórmulas  $\Lambda_n$  por el conjunto de fórmulas  $\forall_n$ . Para ello es suficiente probar que  $\mathbf{E}\Lambda_n \iff \mathbf{E}\forall_n$ , siendo  $\mathbf{E}$  cualquiera de los esquemas  $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{M}$ .

Observemos en primer lugar que, del teorema 2.2.1, resulta  $\mathbf{I}\Lambda_n \iff \mathbf{I}\forall_n$ .

La validez de la relación  $\mathbf{E}\Lambda_n \iff \mathbf{E}\forall_n$  para los esquemas  $\mathbf{B}, \mathbf{S}, \mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ , se deduce del siguiente lema.

**2.7.1 Lema.** Sea  $\Gamma = \Lambda_n, \forall_n$  y  $\mathbf{E} = \mathbf{B}, \mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*$ .

1.  $\mathbf{E}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{E}\Gamma \implies \mathbf{E}\Pi_n$ .

2.  $\mathbf{E}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{E}\Gamma \iff \mathbf{E}\Pi_n$ .

**Demostración:**

El apartado 1 es consecuencia inmediata del teorema 2.3.1-(2).

El apartado 2 es consecuencia del apartado 1 y de

$$E\Sigma_{n+1} \iff E\Pi_n \quad [ \text{fig.6} ]$$

□

Finalmente, veamos que  $M\Lambda_n \iff MV_n$ .

**2.7.2 Teorema.**  $M\Lambda_n \iff MV_n$ .

**Demostración:**

Por una parte se verifica

$$\begin{aligned} MV_n &\implies M\Sigma_n \quad [ \Sigma_n \subseteq V_n ] \\ &\implies I\Sigma_n \quad [ \text{fig.6} ] \\ &\implies L\Lambda_n \quad [ 2.2.1 ] \\ &\implies M\Lambda_n \quad [ 2.3.6 ] \end{aligned}$$

Por otra parte, se prueba que  $LV_n \implies MV_n$  (\*), de forma análoga a la prueba de  $L\Lambda_n \implies M\Lambda_n$  (ver teorema 2.3.6). Por tanto

$$\begin{aligned} M\Lambda_n &\implies L\Lambda_n \quad [ 2.3.6 ] \\ &\implies LV_n \quad [ 2.2.1 ] \\ &\implies MV_n \quad [ * ] \end{aligned}$$

□

Terminamos la presente sección, dando una prueba directa de

$$F^*\Gamma \iff F\Gamma + M\Gamma$$

para  $\Gamma = V_n$  (Análogamente vale para  $\Gamma = \Lambda_n$ ).

**2.7.3 Teorema.**  $F^*V_{n+1} \iff FV_{n+1} + MV_{n+1}$

**Demostración:**

Obviamente  $F^*V_{n+1} \implies FV_{n+1}$ . La prueba de  $F^*V_{n+1} \implies MV_{n+1}$  es análoga a la de  $F^*\Sigma_n \implies M\Sigma_n$  (teorema 2.3.1-(3)).

Veamos, a continuación, que  $FV_{n+1} + MV_{n+1} \implies F^*V_{n+1}$ . Para ello, sean  $\mathfrak{A} \models FV_{n+1} + MV_{n+1}$ ,  $\theta(x, y) \in V_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{A}$  una  $V_{n+1}$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $a + 1$ .

Puesto que  $\mathfrak{A} \models FV_{n+1}$  existe  $c \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq c) \quad (*)$$

Por tanto,  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \leq c \theta(x, y)$ .

Como  $MV_{n+1} \implies M\Sigma_{n+1} \implies I\Sigma_{n+1}$ , del corolario 2.3.1 deducimos que existe  $t_0 < 2^{<a+1, c+1>}$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x, y (< x, y > < a + 1, c + 1 > \rightarrow (\theta(x, y) \leftrightarrow < x, y > \in t_0))$$

Entonces  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \leq c < x, y > \in t_0$ .

Ahora bien,  $\exists x \leq z < x, y > \in t$  es una fórmula  $\Sigma_1(I\Sigma_1)$  y  $\mathfrak{A} \models M\Sigma_1$ .

Luego, existe  $p \in A$  tal que  $p = (\max y)_{y \leq c} (\exists x \leq a < x, y > \in t_0)$ .

Por tanto, de (\*) concluimos que  $\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$ .

□

## 2.8 Consideraciones finales

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores de este capítulo, pueden resumirse en el siguiente teorema.

**2.8.1 Teorema.** *Se verifica:*

1. Si  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$ , entonces

$$(a) \mathbf{F}\Gamma \iff \mathbf{F}^*\Gamma \iff \mathbf{S}\Gamma$$

$$(b) \mathbf{M}\Gamma \iff \mathbf{I}\Gamma$$

2. Si  $\Gamma = \Sigma_0, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$ , entonces

$$(a) \mathbf{F}\Gamma \implies \mathbf{I}\Gamma.$$

$$(b) \mathbf{S}\Gamma \implies \mathbf{M}\Gamma.$$

3.  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{S}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{M}\Sigma_{n+1}$ .

### Notas

1. Sabemos que si  $n > 0$ , entonces toda función total  $\Sigma_n$ -definible es  $\Pi_n$ -definible

- En efecto: si  $\theta(x, y)$  es una  $\Sigma_n$ -función total, entonces la  $\Pi_n$ -fórmula

$$\psi(x, y) \equiv \forall z(\theta(x, z) \rightarrow z = y)$$

define la misma función que  $\theta(x, y)$ .

Pues bien, teniendo presente que  $\mathbf{F}\Sigma_{n+1} \not\iff \mathbf{F}\Pi_{n+1}$  deducimos que existen funciones parciales  $\Pi_n$ -definibles que no son  $\Sigma_n$ -definibles.

2. En [7], C. Dimitracopoulos y J. Paris establecen que el esquema  $\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  es equivalente a los esquemas del palomar (**PigeonHole Principle**)  $\mathbf{PHP}_i \forall_{n+1}$ . Pues bien, en el presente trabajo se prueba que

$$\mathbf{I}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{F}\forall_n \iff \mathbf{F}^*\forall_n \iff \mathbf{F}^*\wedge_n \iff \mathbf{F}\wedge_n$$

Finalmente, resumimos en una nueva figura, las relaciones obtenidas en este capítulo para los esquemas de axiomas considerados, relativos a  $\Sigma_n$  y  $\Pi_n$ .

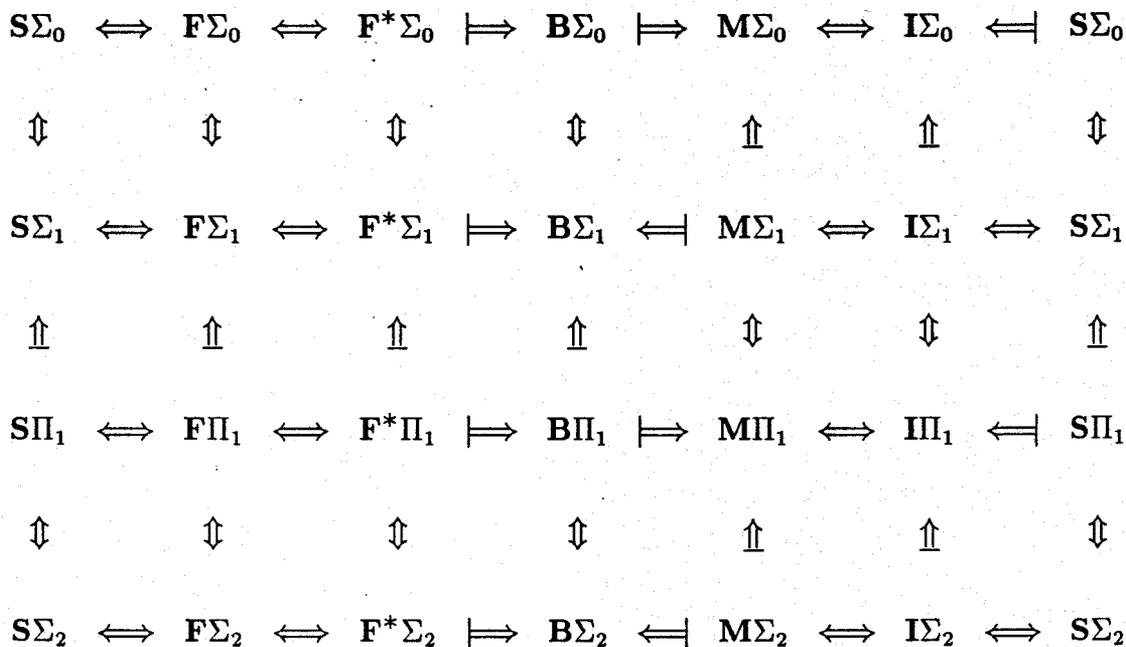


Figura 7

En esta figura:

- Hemos prescindido de los esquemas relativos a  $\Lambda_n$  que, recordémoslo, fueron introducidos por necesidades técnicas.
- Hemos cambiado el orden de los esquemas, a fin de resaltar la equivalencia entre  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$ .

# Capítulo 3

## Sobre una conjetura de Friedman

### 3.1 Introducción

En el capítulo anterior se ha probado que los fragmentos  $\mathbf{M}\Gamma$ ,  $\mathbf{I}\Gamma$  y  $\mathbf{L}\Gamma$  son equivalentes para los conjuntos de fórmulas  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$ .

Definiendo la teoría  $\mathbf{M}\Delta_{n+1}$  de manera “natural”, es decir,

$$\mathbf{M}\Delta_{n+1} = \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall z[\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \mathbf{M}_\varphi(z)] : \varphi \in \Sigma_{n+1}, \psi \in \Pi_{n+1}\}$$

nos preguntamos si las relaciones anteriores son, así mismo, válidas para  $\Gamma = \Delta_{n+1}$ .

Pues bien, por una parte, teniendo presente los resultados de R. Gandy ( $\mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ ) y de P. Hájek ( $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ ), se deduce que  $\mathbf{L}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}$ .

Por otra parte, Friedman conjetura ([13]) que  $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}$ .

Además, en el presente capítulo probaremos que  $\mathbf{M}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ . En consecuencia:

1. Los fragmentos  $\mathbf{M}\Gamma$  y  $\mathbf{L}\Gamma$  coinciden para los conjuntos de fórmulas  $\Gamma = \Sigma_n, \Pi_n, \forall_n, \wedge_n$  y  $\Delta_n$ .

2. Se verifica que  $M\Delta_{n+1} \implies I\Delta_{n+1}$ .
3. Mediante esquemas del máximo, la citada conjetura de Friedman puede expresarse así :  $I\Delta_{n+1} \implies M\Delta_{n+1}$ .
4. Admitiendo dicha conjetura, podemos responder afirmativamente a la cuestión planteada, es decir, los fragmentos  $M\Delta_{n+1}$  e  $I\Delta_{n+1}$  son equivalentes.

## Resultados previos

Para establecer los resultados de R. Gandy y de P. Hájek necesitamos el siguiente lema:

**3.1.1 Lema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_n$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi_1(y, x) \in \Pi_n$ ,  $\varphi_2(y, x) \in \Sigma_n$  tales que

- $\varphi(x) \equiv \exists y \varphi_1(y, x)$
- $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \varphi_2(y, x))$

En tal situación, se verifica:

1.  $\mathfrak{A} \models \forall z \exists t \forall x \leq z (\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \leq t \varphi_1(y, x))$
2.  $\mathfrak{A} \models \forall z \exists t \forall x \leq z (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \leq t \varphi_2(y, x))$

### Demostración:

Se verifica que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \exists y (\varphi_2(y, x) \rightarrow \varphi_1(y, x))$$

Por tanto, si  $a \in A$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y (\varphi_2(y, x) \rightarrow \varphi_1(y, x))$$

Teniendo presente que la fórmula  $\varphi_2(y, x) \rightarrow \varphi_1(y, x)$  es  $\Pi_n$ , deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \leq p (\varphi_2(y, x) \rightarrow \varphi_1(y, x))$$

Entonces resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \leq p \varphi_1(y, x))$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \leq p \varphi_2(y, x))$$

□

**3.1.2 Teorema.** (*R. Gandy*) ([13], teorema 2b.19)

$$\mathbf{L}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$$

**Demostración:**

$$\boxed{\mathbf{L}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{B}\Sigma_{n+1}}$$

(La idea de la prueba es de J. Paris, comunicada a P. Hájek).

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Delta_{n+1}$ ,  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ ,  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \varphi(x, y)$ .

Consideremos el conjunto

$$C = \{x \leq a : \mathfrak{A} \models \exists v (v = (\mu w) \varphi(x, w) \wedge \forall z \leq a (z \geq x \rightarrow \exists y \leq v \varphi(z, y)))\}$$

Entonces  $C$  está definido por una  $\Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ -fórmula. Además

$$C = \{x \leq a : \mathfrak{A} \models \forall v (\varphi(x, v) \rightarrow \forall z \leq a (z \geq x \rightarrow \exists y \leq v \varphi(z, y)))\}$$

Luego el conjunto  $C$  también está definido por una  $\Pi_{n+1}(\mathfrak{A})$ -fórmula.

Por tanto, existe  $m = \min(C)$ .

Si  $p \in A$  es tal que

$$\mathfrak{A} \models p = (\mu w) \varphi(m, w) \wedge \forall z \leq a (z \geq m \rightarrow \exists y \leq p \varphi(z, y))$$

entonces resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \leq p \varphi(x, y)$$

$$\boxed{\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{L}\Delta_{n+1}}$$

(La idea de la prueba es una variante de la de Paris-Kirby de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_n$ )

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi_1(y, x) \in \Pi_n$  y  $\varphi_2(y, x) \in \Sigma_n$  tales que

- $\varphi(x) \equiv \exists y \varphi_1(y, x)$
- $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \varphi_2(y, x))$
- $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$

Sea  $a \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ . Del lema 3.1.1 deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \leq p \varphi_1(y, x))$$

Consideremos la  $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ -fórmula

$$\psi(x, t) \equiv \exists y \leq t \varphi_1(y, x)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi_1(y, a) \implies \mathfrak{A} \models \exists x \leq a \psi(x, p)$$

Por tanto, existe  $m \in A$  tal que  $m \leq a$  y  $m = (\mu x) \psi(x, p)$ .

Luego

$$\mathfrak{A} \models \psi(m, p) \implies \mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi_1(y, m) \implies \mathfrak{A} \models \varphi(m)$$

Además, si  $c < m$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \neg \psi(c, p) \implies \mathfrak{A} \models \neg \exists y \leq p \varphi_1(y, c) \implies \mathfrak{A} \models \neg \varphi(c)$$

□

**3.1.3 Teorema.** (P. Hájek) ([13], lema 10 de la sección 2)

$$\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Delta_{n+1}$$

**Demostración:**

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi_1(y, x) \in \Pi_n$  y  $\varphi_2(y, x) \in \Sigma_n$  tales que

- $\varphi(x) \equiv \exists y \varphi_1(y, x)$
- $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \varphi_2(y, x))$
- $\mathfrak{A} \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$

Supongamos que existiera  $a \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \neg \varphi(a)$ . Del lema 3.1.1 deducimos que existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \leq p \varphi_1(y, x))$$

Consideremos la  $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ -fórmula

$$\psi(x, t) \equiv x \leq u \wedge \exists y \leq t \varphi_1(y, x)$$

Se verifica que  $\psi(x, t) \in \Pi_n(\mathfrak{A})$  y

- $\mathfrak{A} \models \psi(0, p)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \varphi(0) \implies \mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi_1(y, 0)$
- $\mathfrak{A} \models \neg \psi(a, p)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \neg \varphi(a) \implies \mathfrak{A} \models \neg \exists y \leq p \varphi_1(y, a)$

Por tanto, teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  y que  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Pi_n$ , deducimos que existe  $q \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \psi(q, p) \wedge \neg \psi(q+1, p)$$

Luego  $q \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi_1(q, y) \wedge \neg \exists y \leq p \varphi_1(q+1, y)$$

Es decir

$$\mathfrak{A} \models \varphi(q) \wedge \neg \varphi(q+1)$$

lo que contradice el supuesto inicial. □

## 3.2 Las teorías $\mathbf{F}\Delta_{n+1}$ , $\mathbf{F}^*\Delta_{n+1}$ , $\mathbf{M}\Delta_{n+1}$

### 3.2.1 Definición.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\Delta_{n+1} &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall z[\forall x, y(\theta_1(x, y) \leftrightarrow \theta_2(x, y)) \rightarrow \mathbf{F}_{\theta_1}(z)] : \theta_1 \in \Sigma_{n+1}, \theta_2 \in \Pi_{n+1}\} \\ \mathbf{F}^*\Delta_{n+1} &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall z[\forall x, y(\theta_1(x, y) \leftrightarrow \theta_2(x, y)) \rightarrow \mathbf{F}_{\theta_1}^*(z)] : \theta_1 \in \Sigma_{n+1}, \theta_2 \in \Pi_{n+1}\} \\ \mathbf{M}\Delta_{n+1} &= \mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall z[\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \mathbf{M}_\varphi(z)] : \varphi \in \Sigma_{n+1}, \psi \in \Pi_{n+1}\}\end{aligned}$$

### Nota

Si bien en las definiciones anteriores se han utilizado los esquemas relativos a las fórmulas  $\Sigma_n$ , podríamos igualmente haber considerados los esquemas correspondientes a las fórmulas  $\Pi_n$ .

Es decir, si, por ejemplo, notamos  $\mathbf{F}_1\Delta_{n+1}$  a la teoría

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \{\forall z[\forall x, y(\theta_1(x, y) \leftrightarrow \theta_2(x, y)) \rightarrow \mathbf{F}_{\theta_2}(z)] : \theta_1 \in \Sigma_{n+1}, \theta_2 \in \Pi_{n+1}\}$$

entonces se verifica que  $\mathbf{F}_1\Delta_{n+1} \iff \mathbf{F}\Delta_{n+1}$ .

Un resultado análogo se verifica para las restantes teorías.

Seguidamente, enunciamos para  $\Delta_{n+1}$  un lema similar al 2.7.1.

**3.2.2 Lema.** *Si designamos por  $\mathbf{E}$  uno de los esquemas  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$ ,  $\mathbf{M}$ , entonces se verifica que*

1.  $\mathbf{E}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{E}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{E}\Pi_n$ .
2. Si  $\mathbf{E}\Sigma_{n+1} \iff \mathbf{E}\Pi_n$ , entonces  $\mathbf{E}\Pi_n \iff \mathbf{E}\Delta_{n+1}$ .

### Demostración:

La prueba del lema es consecuencia inmediata de las definiciones correspondientes.

□

**3.2.3 Lema.**  $S\Delta_{n+1} \iff F\Delta_{n+1} \iff F^*\Delta_{n+1} \iff S\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

La prueba es consecuencia inmediata del lema anterior y de la figura 7. □

**3.2.4 Teorema.**  $M\Delta_{n+1} \iff B\Sigma_{n+1}$

**Demostración:**

$$\boxed{M\Delta_{n+1} \implies B\Sigma_{n+1}}$$

(La idea de la prueba es una variante de la demostración de Paris de  $L\Delta_{n+1} \implies B\Sigma_{n+1}$ ).

Sean  $\mathfrak{A} \models M\Delta_{n+1}$ ,  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ ,  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \varphi(x, y)$ .

Consideremos la fórmula

$$\psi(x, t) \equiv x \leq t \wedge \exists v (v = (\mu w)\varphi(x, w) \wedge \forall z \leq x \exists y \leq v \varphi(z, y))$$

Resulta que  $\psi(x, t) \in \Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$  ya que

- Si  $n = 0$  el resultado es obvio.
- Si  $n > 0$ , entonces  $\psi(x, t) \in \Sigma_{n+1}(B\Sigma_n)$  y  $M\Delta_{n+1} \implies M\Sigma_n \implies I\Sigma_n \implies B\Sigma_n$ .

Consideremos la  $\Pi_{n+1}(\mathfrak{A})$ -fórmula

$$\delta(x, t) \equiv x \leq t \wedge \forall v (\varphi(x, v) \rightarrow \forall z \leq x \exists y \leq v \varphi(z, y))$$

Veamos que  $\mathfrak{A} \models \forall x (\psi(x, a) \leftrightarrow \delta(x, a))$

- Si  $b \in A$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(b, a)$ , entonces  $b \leq a$ . Sea  $c \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models c = (\mu w)\varphi(b, w) \wedge \forall z \leq b \exists y \leq c \varphi(z, y)$$

Si  $d \in A$  verifica  $\mathfrak{A} \models \varphi(b, d)$ , entonces  $c \leq d$ . Luego

$$\mathfrak{A} \models \forall z \leq b \exists y \leq d \varphi(z, y)$$

Es decir,  $\mathfrak{A} \models \delta(b, a)$ .

- Si  $b \in A$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \delta(b, a)$ , entonces  $b \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models \forall v(\varphi(b, v) \rightarrow \forall z \leq b \exists y \leq c \varphi(z, y))$$

Pero  $b \leq a \implies \mathfrak{A} \models \exists y \varphi(b, y)$ . Puesto que  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$  y  $\mathbf{M}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_n \implies \mathbf{L}\Pi_n$ , deducimos que existe  $e \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models e = (\mu w)\varphi(b, w)$ . Además  $\mathfrak{A} \models \forall z \leq b \exists y \leq e \varphi(z, y)$ . Por tanto  $\mathfrak{A} \models \psi(b, a)$ .

Ahora bien  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \psi(x, a)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \psi(0, a)$ .

Por tanto, teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{M}\Delta_{n+1}$ , deducimos que existe  $m \in A$  tal que  $m \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models \psi(m, a) \wedge \forall x \leq a (\psi(x, a) \rightarrow x \leq m)$$

Luego existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(m, p) \wedge \forall w < p \neg \varphi(m, w) \wedge \forall z \leq m \exists y \leq p \varphi(z, y)$$

Veamos que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \exists y \leq p \varphi(x, y)$ .

- Caso contrario,  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \forall y \leq p \neg \varphi(x, y)$ .

Teniendo presente que la fórmula

$$x \leq t \wedge \forall y \leq r \neg \varphi(x, y)$$

es  $\Sigma_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ , deducimos que existe  $\alpha \in A$  tal que

$$\alpha = \min\{x \leq a : \mathfrak{A} \models \forall y \leq p \neg \varphi(x, y)\}$$

Entonces  $\alpha \leq a$  y  $\alpha > m$ . Además

$$x < \alpha \implies \mathfrak{A} \models \exists y \leq p \varphi(x, y)$$

Sea  $e \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models e = (\min y)\varphi(\alpha, y)$  Entonces se verifica que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq \alpha \exists y \leq e \varphi(x, y)$$

Es decir,  $\mathfrak{A} \models \psi(\alpha, a)$ , lo que es una contradicción.

$$\boxed{\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{M}\Delta_{n+1}}$$

(La idea de la prueba es similar a la de Paris–Kirby de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_n$ )

Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$ ,  $\varphi_1(y, x) \in \Pi_n$ ,  $\varphi_2(y, x) \in \Sigma_n$  y  $a \in A$  tales que

- $\varphi(x) \equiv \exists y \varphi_1(y, x)$
- $\mathfrak{A} \models \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \forall y \varphi_2(y, x))$
- $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$

Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Pi_n$ , del lema 3.1.1 resulta que existe  $c \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a (\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \leq c \varphi_1(y, x))$$

Consideremos la  $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ -fórmula

$$\psi(x, v) \equiv \exists y \leq v \varphi_1(y, x)$$

Entonces se verifica

- $\psi(x, v) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n) \implies \psi(x, v) \in \Pi_n(\mathfrak{A})$ .
- $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x) \implies \mathfrak{A} \models \exists x \leq a \psi(x, c)$
- $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , ya que de la figura 7 resulta que  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} \implies \mathbf{M}\Pi_n$ .

Por tanto, existe  $m \in A$  tal que  $m \leq a$  y

$$\mathfrak{A} \models \psi(m, c) \wedge \forall w \leq a (\psi(w, c) \rightarrow w \leq m)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq c \varphi_1(y, m) \implies \mathfrak{A} \models \varphi(m)$$

Además, si  $d \leq a$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(d)$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists y \leq c \varphi_1(y, d)$$

Luego  $\mathfrak{A} \models \psi(d, c)$  y, por tanto,  $d \leq m$ .

□

**3.2.5 Corolario.**  $M\Delta_{n+1} \implies I\Delta_{n+1}$

**Demostración:**

Basta tener presente que

$$M\Delta_{n+1} \xrightarrow{3.2.4} B\Sigma_{n+1} \xrightarrow{3.1.3} I\Delta_{n+1}$$

□

**3.2.6 Corolario.**  $M\Delta_{n+1} \iff B\Delta_{n+1}$

**Demostración:**

Del lema 3.2.2 resulta  $B\Sigma_{n+1} \iff B\Delta_{n+1}$  (\*), ya que

$$B\Sigma_{n+1} \implies B\Delta_{n+1} \implies B\Pi_n$$

Por tanto :  $M\Delta_{n+1} \xrightarrow{3.2.4} B\Sigma_{n+1} \xleftarrow{*} B\Delta_{n+1}$ .

□

### 3.3 Relaciones entre los esquemas del máximo, inducción , colección y colección fuerte para $\Delta_{n+1}$

En esta sección, se trata de añadir al diagrama obtenido en el capítulo anterior (Figura 7), una nueva fila que corresponda a los esquemas relativos a  $\Delta_{n+1}$ . Por razones obvias, tenemos que añadir una nueva columna relativa al esquema de minimización **L**.

El lema 3.2.3 nos permite suprimir de dicha figura las columnas relativas a los esquemas **F** y **F\***.

A partir de la figura 7, las primeras relaciones que obtenemos se deducen del

- Lema 3.2.2.

- Teorema 3.1.2 de R. Gandy ( $L\Delta_{n+1} \iff B\Sigma_{n+1}$ ).
- Teorema 3.2.4 ( $M\Delta_{n+1} \iff B\Sigma_{n+1}$ ).
- Corolario 3.2.5 ( $M\Delta_{n+1} \implies I\Delta_{n+1}$ ).
- Corolario 3.2.6 ( $M\Delta_{n+1} \iff B\Delta_{n+1}$ ).

y las presentamos en la siguiente figura.

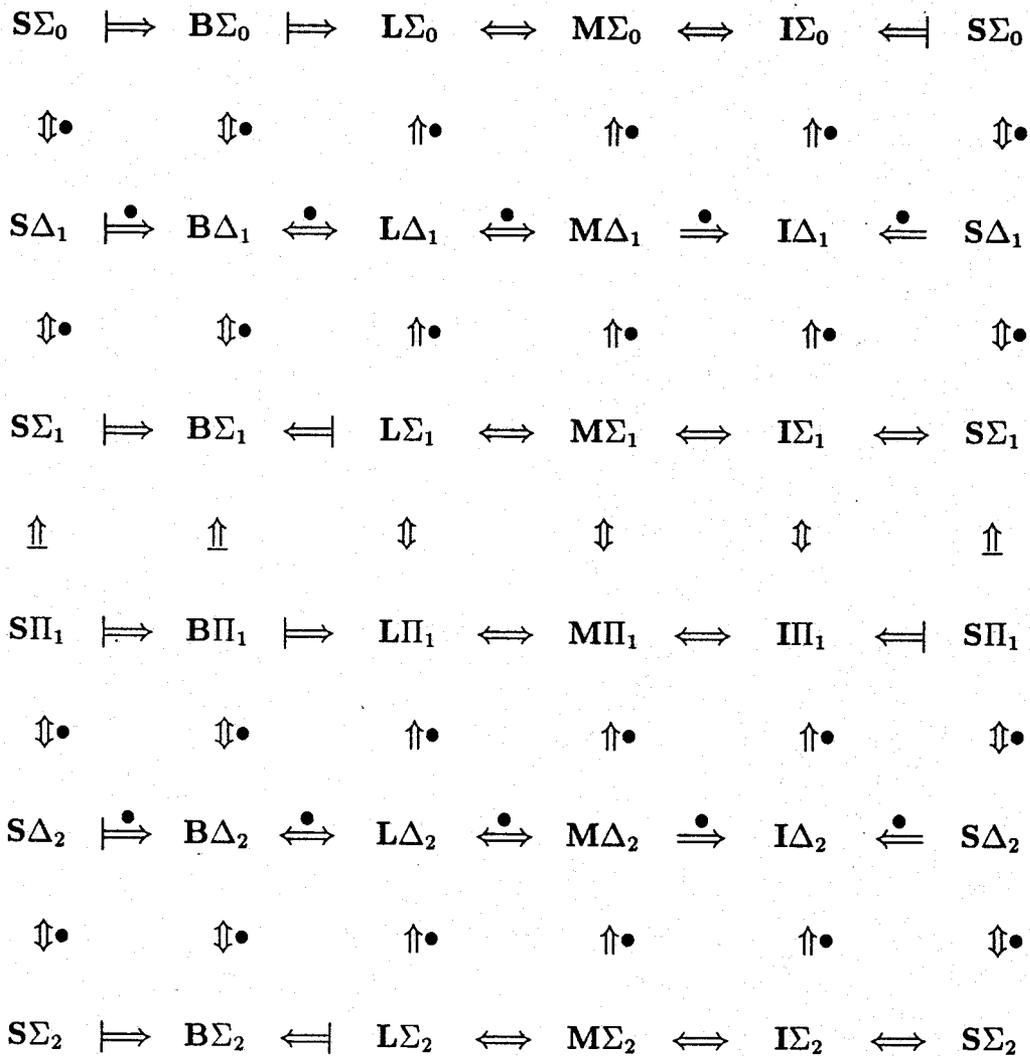


Figura 8

En donde

- La relación  $S\Delta_{n+1} \Rightarrow I\Delta_{n+1}$  se obtiene así

$$S\Delta_{n+1} \xrightarrow{3.2.2-(2)} S\Sigma_{n+1} \xrightarrow{fig.7} I\Sigma_{n+1} \xrightarrow{3.2.2-(1)} I\Delta_{n+1}$$

- La relación  $S\Delta_{n+1} \Vdash B\Delta_{n+1}$  resulta de observar que

$$S\Pi_n \iff S\Delta_{n+1} \quad [ 3.2.2 - (2) ]$$

$$B\Pi_n \iff B\Delta_{n+1} \quad [ 3.2.2 - (2) ]$$

$$S\Sigma_n \Vdash B\Pi_n \quad [ fig.7 ]$$

A continuación, completamos la figura 8 con los siguientes resultados.

$$8.a) \quad M\Pi_n \not\Rightarrow M\Delta_{n+1}.$$

$$8.b) \quad L\Pi_n \not\Rightarrow L\Delta_{n+1}.$$

$$8.c) \quad L\Delta_{n+1} \not\Rightarrow L\Sigma_{n+1}.$$

$$8.d) \quad M\Delta_{n+1} \not\Rightarrow M\Sigma_{n+1}.$$

$$8.e) \quad I\Delta_{n+1} \not\Rightarrow I\Sigma_{n+1}.$$

Los resultados 8.a y 8.b son ciertos ya que, caso contrario, a partir de la figura 8 resultaría que  $I\Sigma_n \Rightarrow B\Sigma_{n+1}$ .

Los resultados 8.c, 8.d y 8.e son ciertos ya que, caso contrario, a partir de la figura 8 resultaría que  $B\Sigma_{n+1} \Rightarrow I\Sigma_{n+1}$ .

Estos resultados se resumen en la figura 9 de la página siguiente.

Analizando la figura 9, observamos que únicamente quedan dos relaciones por conocer

$$I\Pi_n \stackrel{?}{\Rightarrow} I\Delta_{n+1} \stackrel{?}{\Rightarrow} M\Delta_{n+1}$$

Obsérvese que si admitimos la conjetura de Friedman ( $I\Delta_{n+1} \Rightarrow M\Delta_{n+1}$ ), entonces la primera interrogación tiene una respuesta negativa y la segunda, obviamente, una respuesta positiva. Más aún, la respuesta afirmativa a una

de las cuestiones implica la respuesta negativa de la otra. En cambio, la respuesta negativa a una de ellas no permite afirmar nada acerca de la otra.

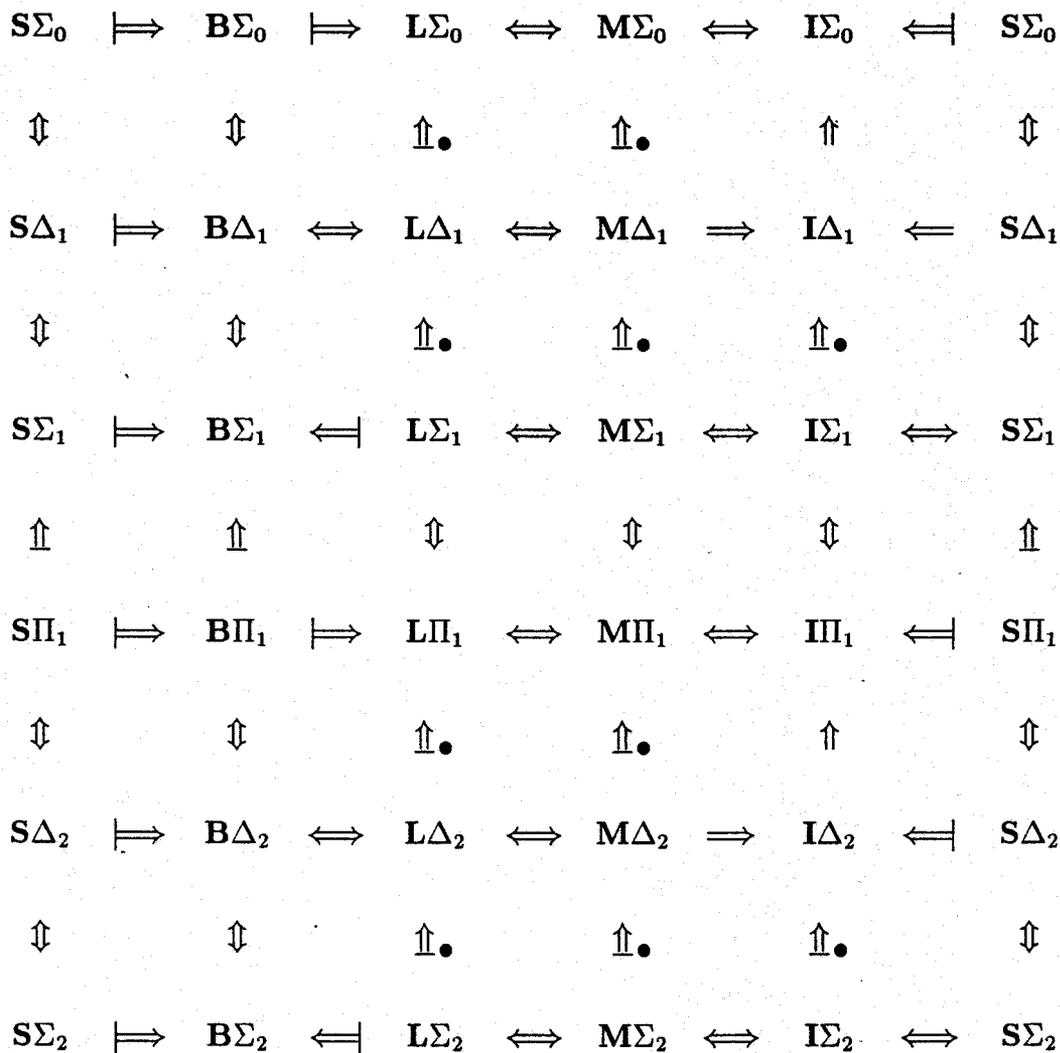


Figura 9

## 3.4 Reducción de la conjetura de Friedman

Siguiendo la notación de P. Hájek ([13]), introducimos a continuación los conjuntos de fórmulas  $\Sigma_0(\Gamma)$ , siendo  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ .

### 3.4.1 Definición.

Si  $\sigma \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\Sigma_0(\sigma)$  es el conjunto de fórmulas obtenidas de  $\sigma$  y de fórmulas atómicas, mediante conectivos lógicos y cuantificadores acotados.

Si  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\Sigma_0(\Gamma) = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \Sigma_0(\sigma)$ .

### 3.4.2 Definición. La teoría $\mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_n)$ es

$$\mathbf{P}^- + \{[\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x) \rightarrow ((\delta(0) \wedge \forall x(\delta(x) \rightarrow \delta(x+1))) \rightarrow \forall x\delta(x)))] : \\ \varphi \in \Sigma_n, \psi \in \Pi_n, \delta \in \Sigma_0(\varphi)\}$$

Según P. Hájek, las teorías  $\mathbf{L}\Delta_{n+1}$  e  $\mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_{n+1})$  son equivalentes (comunicación personal [14]). En consecuencia, la conjetura de Friedman es equivalente a  $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_{n+1})$  (es decir, equivale a afirmar que en  $\mathbf{I}\Delta_{n+1}$ , el conjunto de fórmulas  $\Delta_{n+1}$  es cerrado bajo cuantificación acotada). En la presente sección se trata de probar el resultado de Hájek utilizando los esquemas del máximo.

**3.4.3 Lema.** *En  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , toda  $\Sigma_0(\Delta_{n+1})$ -fórmula es equivalente a una  $\Delta_{n+1}$ -fórmula (es decir, en  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  el conjunto de fórmulas  $\Delta_{n+1}$  es cerrado bajo cuantificación acotada)*

### Demostración:

Basta tener presente que si  $\varphi_1(x) \in \Sigma_{n+1}$  y  $\varphi_2(x) \in \Pi_{n+1}$ , entonces

$$\forall x < y \varphi_1(x) \in \Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1}) \quad \text{y} \quad \exists x < y \varphi_2(x) \in \Pi_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n+1})$$

□

**3.4.4 Teorema.**  $M\Delta_{n+1} \iff I\Sigma_0(\Delta_{n+1})$

**Demostración:**

$$\boxed{M\Delta_{n+1} \implies I\Sigma_0(\Delta_{n+1})}$$

Basta tener presente el lema anterior y que

$$\begin{aligned} M\Delta_{n+1} &\implies B\Sigma_{n+1} \quad [ 3.2.4 ] \\ &\implies I\Delta_{n+1} \quad [ 3.1.3 ] \end{aligned}$$

$$\boxed{I\Sigma_0(\Delta_{n+1}) \implies M\Delta_{n+1}}$$

Caso contrario, existe  $\mathfrak{A} \models I\Sigma_0(\Delta_{n+1}) + \neg M\Delta_{n+1}$ .

Sean  $\varphi(x) \in \Delta_{n+1}(\mathfrak{A})$  y  $a \in A$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x) \wedge \forall m (\varphi(m) \rightarrow \exists x \leq a (x > m \wedge \varphi(x)))$$

Consideremos la  $\Sigma_0(\Delta_{n+1})$ -fórmula

$$\psi(y, z) \equiv \exists x \leq z (x \geq y \wedge \varphi(x))$$

Se verifica

1.  $\mathfrak{A} \models \psi(0, a)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \varphi(x)$ .
2.  $\mathfrak{A} \models \forall x < a (\psi(x) \rightarrow \psi(x + 1))$ , ya que si  $c < a$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(c)$ , entonces
  - O bien  $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$ , en cuyo caso existe  $d \leq a$  tal que  $d > c$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi(d)$ .
  - O bien  $\mathfrak{A} \models \neg \varphi(c)$ , en cuyo caso, teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \psi(c)$ , existe  $e \leq a$  tal que  $e > c$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi(e)$ .

En ambos casos, concluimos que  $\mathfrak{A} \models \psi(c + 1)$ .

Por tanto, resulta que  $\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \psi(x)$ . En particular  $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ .

Es decir  $\mathfrak{A} \models a = (\max x)_{x \leq a} \varphi(x)$ .

□

**3.4.5 Corolario.** *La conjetura de Friedman es equivalente a*

$$\mathbf{I}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_{n+1})$$

**Demostración:**

Basta tener presente que  $\mathbf{M}\Delta_{n+1} \iff \mathbf{I}\Sigma_0(\Delta_{n+1})$  y que la conjetura de Friedman es equivalente a  $\mathbf{I}\Delta_{n+1} \implies \mathbf{M}\Delta_{n+1}$ .

□

# Capítulo 4

## Estructuras $\Sigma_n$ -definibles

### 4.1 Estructuras maximales $\Sigma_n$ -definibles

**4.1.1 Definición.** Si  $\mathfrak{A}$  es una estructura y  $X \subseteq A$ , entonces diremos que  $X$  es un conjunto maximal  $\Sigma_n$ -definible, si  $K_n(\mathfrak{A}; X) = X$  y  $X \neq A$ .

Es decir, si los únicos elementos de  $A$ ,  $\Sigma_n$ -definibles con parámetros en  $X$ , son los del conjunto  $X$ .

**4.1.2 Ejemplo.** Si  $n \geq 1$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$ , entonces  $K_n(\mathfrak{A}; \omega) = \omega \iff \mathbb{N} \prec_n \mathfrak{A}$ .

$\boxed{\implies}$  Supongamos que  $K_n(\mathfrak{A}; \omega) = \omega$  y sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_{n-1}$  y  $p \in \omega$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x, p)$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n-1}$ , existe  $b \in A$  tal que

$$b = \min\{x : \mathfrak{A} \models \varphi(x, p)\}$$

Consideremos la fórmula  $\psi(x, u) \equiv \varphi(x, u) \wedge \forall y < x \neg \varphi(y, u)$ . Entonces  $\psi(x, u) \in \Sigma_n(\mathbf{B}\Sigma_{n-1})$ , ya que si  $n = 1$  la fórmula es  $\Sigma_0$  y si  $n > 1$ , entonces la fórmula es  $\Sigma_n(\mathbf{B}\Sigma_{n-1})$  e  $\mathbf{I}\Sigma_{n-1} \xrightarrow{1.3.13} \mathbf{B}\Sigma_{n-1}$ . Por tanto, se verifica que  $\mathfrak{A} \models \psi(x, p) \rightsquigarrow b$ . Es decir,  $b \in K_n(\mathfrak{A}; \omega)$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Supongamos que  $\mathbf{N} \prec_n \mathfrak{A}$  y sea  $c \in K_n(\mathfrak{A}; \omega)$ . Entonces existen  $\psi(x, u) \in \Sigma_n$  y  $q \in \omega$  tales que  $\mathfrak{A} \models \psi(x, q) \rightsquigarrow c$ . Por tanto,  $\mathbf{N} \models \exists x \psi(x, q)$ . Si  $r \in \omega$  es tal que  $\mathbf{N} \models \psi(r, q)$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \psi(r, q)$ . Luego  $c = r \in \omega$ .

**4.1.3 Ejemplo.** Existe  $\mathfrak{A} \models \mathbf{PA}$  tal que  $K_0(\mathfrak{A}; \omega) \neq \omega$ .

Del primer teorema de incompletitud de Gödel deducimos que existe una  $\Pi_1$ -fórmula cerrada  $\sigma$  tal que

$$\mathbf{PA} \not\models \sigma \quad \text{y} \quad \mathbf{PA} \not\models \neg \sigma$$

Sea  $\varphi(x) \in \Sigma_0$  tal que  $\sigma \equiv \forall x \varphi(x)$ . Puesto que la teoría  $\mathbf{PA} + \exists x \neg \varphi(x)$  es consistente, existe un modelo  $\mathfrak{A}$  de dicha teoría. Sea  $a \in A$  tal que

$$a = \min\{x : \mathfrak{A} \models \neg \varphi(x)\}$$

Si  $\psi(x) \equiv \neg \varphi(x) \wedge \forall y < x \varphi(y)$ , entonces  $a \in K_0(\mathfrak{A})$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \psi(x) \rightsquigarrow a$ . Veamos que  $a \notin \omega$ .

- Caso contrario :  $a \in \omega$ . Entonces

$$\mathbf{N} \models \psi(a) \implies \mathbf{N} \models \exists x \neg \varphi(x) \implies \mathbf{PA} \vdash \exists x \neg \varphi(x)$$

**4.1.4 Ejemplo.** Si  $\mathfrak{A}$  es una estructura y  $a \in A$ , entonces

$$K_n(\mathfrak{A}; K_n(\mathfrak{A}; a)) = K_n(\mathfrak{A}; a)$$

Si  $b \in K_n(\mathfrak{A}; K_n(\mathfrak{A}; a))$ , entonces existen  $\varphi(x, \vec{u}) \in \Sigma_n$  y  $\vec{c} \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  tales que  $\mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{c}) \rightsquigarrow b$ . Si  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_p)$ , entonces existen  $\psi_i(x, v)$  ( $1 \leq i \leq p$ ) tales que para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) se verifica que  $\mathfrak{A} \models \psi_i(x, a) \rightsquigarrow c_i$ . Consideremos la  $\Sigma_n$ -fórmula

$$\theta(x, v) \equiv \exists u_1, \dots, u_p (\varphi(x, \vec{u}) \wedge \bigwedge_{i=1}^p \psi_i(u_i, v))$$

Entonces  $\mathfrak{A} \models \theta(x, a) \rightsquigarrow b$ . Por tanto :  $b \in K_n(\mathfrak{A}; a)$ .

El ejemplo 4.1.4 proporciona subestructuras de  $\mathfrak{A}$  maximales  $\Sigma_n$ -definibles que, en general, no serán segmentos iniciales de  $\mathfrak{A}$ . Entonces, parece natural preguntarse si  $I_n(\mathfrak{A}; a)$  es una estructura maximal  $\Sigma_n$ -definible de  $\mathfrak{A}$ . Seguidamente damos una condición suficiente para que la respuesta sea negativa. Para ello, establecemos previamente el siguiente lema.

**4.1.5 Lema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+1} \mathfrak{A}$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ . Teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar, de 1.5.2-(4) y 1.5.3-(2) resulta que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  e  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\models \neg\mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ . En particular  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ . Por tanto, del teorema 1.8.2 de Clote resultaría que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ .

□

**4.1.6 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \neq K_{n+1}(\mathfrak{A}; I_{n+1}(\mathfrak{A}; a))$ .

**Demostración:**

Por el teorema 1.5.2 resulta que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ . Por tanto, si  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) = K_{n+1}(\mathfrak{A}; I_{n+1}(\mathfrak{A}; a))$ , entonces que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ . Lo cual contradice el lema 4.1.5.

□

## 4.2 La estructura $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$

En esta sección, proporcionamos un primer ejemplo de subestructura que es maximal  $\Sigma_n$ -definible en una estructura  $\mathfrak{A}$  y, además, es un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$ .

**4.2.1 Definición.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-, X \subseteq A$  y  $n \in \omega$ . Para cada  $k \in \omega$  definimos  $S_k^n(\mathfrak{A}; X)$  y  $S_k^n(\mathfrak{A})$  como sigue:

$$S_0^n(\mathfrak{A}; X) = I_n(\mathfrak{A}; X) \quad , \quad S_{k+1}^n(\mathfrak{A}; X) = I_n(\mathfrak{A}; S_k^n(\mathfrak{A}; X))$$

$$S_0^n(\mathfrak{A}) = I_n(\mathfrak{A}) \quad S_{k+1}^n(\mathfrak{A}) = I_n(\mathfrak{A}; S_k^n(\mathfrak{A}))$$

Obviamente se verifica que, para cada  $n, k \in \omega$  :  $S_k^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a)$ . Cuando no haya lugar a confusión, suprimiremos el superíndice  $n$ .

**4.2.2 Definición.** La estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; X)$  es  $\bigcup_{k \in \omega} S_k^n(\mathfrak{A}; X)$

### Nota

P. Hájek y P. Pudlák ([15], definición 1.3.2 del capítulo 4) introducen la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A})$  con la notación  $H^n(\mathfrak{A})$ .

En el estudio de la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  analizamos, básicamente, las siguientes cuestiones:

1. Relación con la estructura  $\mathfrak{A}$  (4.2.3).
2. Condiciones para que sea modelo de un fragmento de la Aritmética (4.2.4).
3. Relaciones con  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  e  $I_n(\mathfrak{A}; a)$ , optimizando los resultados en ciertos casos (4.2.5, 4.2.6 y 4.2.7).
4. Condiciones para que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  sea la menor estructura maximal  $\Sigma_n$ -definible (4.2.12) que es segmento inicial y contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  (4.2.13).

**4.2.3 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$  y  $a \in A$ . Entonces

1.  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq_e \mathfrak{A}$ .
2. Si  $n > 0$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n-1}$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e \mathfrak{A}$ .

**Demostración:**

1. Sean  $b_1, b_2 \in I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  y  $k \in \omega$  tales que  $b_1, b_2 \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ . Entonces existen  $\vec{c}_1, \vec{c}_2 \in S_k(\mathfrak{A}; a)$  y  $d_1 \in K_n(\mathfrak{A}; \vec{c}_1), d_2 \in K_n(\mathfrak{A}; \vec{c}_2)$  tales que  $b_1 \leq d_1$  y  $b_2 \leq d_2$ . Si  $\vec{c} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ , entonces  $d_1 + d_2, d_1 \cdot d_2$  y  $1 + d_1 \in K_n(\mathfrak{A}; \vec{c})$ . Ahora bien

$$b_1 + b_2 \leq d_1 + d_2, \quad b_1 \cdot b_2 \leq d_1 \cdot d_2, \quad b_1 + 1 \leq d_1 + 1$$

Por tanto :

$$b_1 + b_2, \quad b_1 \cdot b_2, \quad b_1 + 1 \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$$

2. Sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_{n-1}$  y  $b \in I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x, b)$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{L}\Pi_{n-1}$ , existe  $c \in A$  tal que  $c = (\mu x) \varphi(x, b)$ .

Consideremos la  $\Sigma_n(\mathbf{B}\Sigma_{n-1})$ -fórmula

$$\psi(x, u) \equiv \varphi(x, u) \wedge \forall y < x \neg \varphi(y, u)$$

Entonces  $\mathfrak{A} \models \psi(x, b) \rightsquigarrow c$ . Luego  $c \in K_n(\mathfrak{A}; b)$ . Por tanto

$$b \in S_k(\mathfrak{A}; a) \implies c \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq I_n^*(\mathfrak{A}; a)$$

Del test de Tarski-Vaught concluimos que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e \mathfrak{A}$ .

□

**4.2.4 Corolario.** Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces

1.  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{I}\Sigma_n$ .
2.  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A} \implies I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ .

### Demostración:

Basta tener presente que del teorema 4.2.3 resulta  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1}^e \mathfrak{A}$ . Por tanto, si  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ , entonces del teorema 1.8.2 de Clote deducimos que  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ . □

### Nota

P. Hájek y P. Pudlák ([15], teorema 1.3.3 del capítulo 4) prueban que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  es no estándar, entonces  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+2}$ .

Por tanto, del corolario 4.2.4 deducimos que si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ ,  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  es no estándar e  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{A}$ , entonces  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$  e  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}) \not\models \mathbf{I}\Sigma_{n+2}$ , propiedad que verifica la estructura  $I_{n+1}(\mathfrak{A})$ , pero, a diferencia de ésta,  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A})$  es, además, maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ .

**4.2.5 Corolario.** Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \quad \text{e} \quad I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$$

### Demostración:

Basta tener presente que

1.  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n \implies K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A} \quad \text{e} \quad I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A}$ .
  2.  $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ .
  3.  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \subset \mathfrak{A}$ .
- 

A continuación, se trata de probar que los resultados obtenidos en el corolario 4.2.5 son óptimos en ciertos casos.

**4.2.6 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+1} I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

**Demostración:**

Caso contrario, resultaría que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ .

□

**4.2.7 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  y  $a \in A$  tales que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+2} I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+2} I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ . Entonces, teniendo presente que

- $I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \text{B}\Sigma_{n+1}$  (4.2.4-(2)).
- $\text{B}\Sigma_{n+1}$  es  $\Pi_{n+3}$ -axiomatizable.

concluimos que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \text{B}\Sigma_{n+1}$ . Lo cual contradice el apartado 1 del teorema 1.5.3.

□

A continuación, se obtienen condiciones suficientes para que la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  sea maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$  (teorema 4.2.12).

**4.2.8 Teorema.** Si  $\mathfrak{A} \models \text{P}^-$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_n(\mathfrak{A}; I_n^*(\mathfrak{A}; a)) = I_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n(\mathfrak{A}; I_n^*(\mathfrak{A}; a))$$

**Demostración:**

Se verifica

$$\begin{aligned} b \in K_n(\mathfrak{A}; I_n^*(\mathfrak{A}; a)) &\implies \exists k \in \omega : b \in K_n(\mathfrak{A}; S_k(\mathfrak{A}; a)) \\ &\implies \exists k \in \omega \exists \vec{c} \in S_k(\mathfrak{A}; a) : b \in K_n(\mathfrak{A}; \vec{c}) \\ &\implies \exists k \in \omega : b \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \\ &\implies b \in I_n^*(\mathfrak{A}; a) \end{aligned}$$

□

**4.2.9 Lema.** Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{P}^-$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \prec_n^c \mathfrak{B}$ . Se verifica

$$I_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n^*(\mathfrak{B}; a)$$

**Demostración:**

Probemos por inducción sobre  $k$  que  $S_k(\mathfrak{A}; a) = S_k(\mathfrak{B}; a)$ .

$k = 0$

- $S_0(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_0(\mathfrak{B}; a)$ .

Si  $b \in S_0(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existe  $c \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  tal que  $b \leq c$ . Entonces  $c \in K_n(\mathfrak{B}; a)$  [ pues  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$  ] y, por tanto,  $b \in S_0(\mathfrak{B}; a)$ .

- $S_0(\mathfrak{B}; a) \subseteq S_0(\mathfrak{A}; a)$ .

Si  $b \in S_0(\mathfrak{B}; a)$ , entonces existe  $c \in K_n(\mathfrak{B}; a)$  tal que  $b \leq c$ . Sea  $\varphi(x, u) \in \Sigma_n$  tal que  $\mathfrak{B} \models \varphi(x, a) \rightsquigarrow c$ . Entonces  $\mathfrak{A} \models \varphi(x, a) \rightsquigarrow c$ , ya que  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ . Luego  $c \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  y, por tanto,  $b \in S_0(\mathfrak{A}; a)$ .

$k \rightarrow k+1$

- $S_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_{k+1}(\mathfrak{B}; a)$ .

Si  $b \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existen  $\vec{c} \in S_k(\mathfrak{A}; a)$ ,  $d \in K_n(\mathfrak{A}; \vec{c})$  tales que  $b \leq d$ . Sea  $\varphi(x, \vec{u}) \in \Sigma_n$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{c}) \rightsquigarrow d$ . Entonces

$$\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \implies \mathfrak{B} \models \varphi(x, \vec{c}) \rightsquigarrow d$$

Luego  $d \in K_n(\mathfrak{B}; \vec{c})$ . Teniendo presente que por hipótesis de inducción  $\vec{c} \in S_k(\mathfrak{A}; a) = S_k(\mathfrak{B}; a)$ , concluimos que  $b \in S_{k+1}(\mathfrak{B}; a)$ .

- $S_{k+1}(\mathfrak{B}; a) \subseteq S_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ .

La prueba es análoga a la anterior.

□

**4.2.10 Corolario.** Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{P}^-$  y  $a \in A$ , entonces

$$I_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n^*(I_n^*(\mathfrak{A}; a); a)$$

**Demostración:**

Basta tener presente que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A}$  y aplicar el lema 4.2.9.

□

**4.2.11 Teorema.** *Sea  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  numerable no estándar y  $a \in A$ . Para cada  $n \in \omega$  se verifica que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ .*

**Demostración:**

Por el teorema de Friedman (1.8.1), existe una  $\mathbf{L}$ -estructura  $\mathfrak{B}$  tal que

$$a \in B, \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} \prec_n^e \mathfrak{A}$$

Del lema 4.2.9, deducimos que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n^*(\mathfrak{B}; a)$ . En consecuencia

$$I_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n^*(\mathfrak{B}; a) \subset_e \mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$$

□

**4.2.12 Teorema.** *Si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  es numerable no estándar y  $a \in A$ , entonces la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$  que, además, es un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$ .*

**Demostración:**

Es consecuencia inmediata de los teoremas 4.2.8 y 4.2.11.

□

Acabamos de ver que si  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  es numerable no estándar y  $a \in A$ , entonces la estructura  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$  que, además, es un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$  y contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$ . A continuación, vamos a probar que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es la menor estructura que satisface dichas condiciones.

**4.2.13 Teorema.** *Sean  $\mathfrak{A} \models \text{P}^-$  y  $a \in A$  tales que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ . Entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es la menor estructura maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$  que es un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$  y contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$ .*

### **Demostración:**

Sea  $\mathfrak{B}$  un segmento inicial de  $\mathfrak{A}$  que contiene a  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  y tal que es maximal  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ . Para probar que  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq B$ , basta ver que para cada  $k \in \omega$  :  $S_k(\mathfrak{A}; a) \subseteq B$ . Veámoslo por inducción.

Para  $k = 0$  es obvio, ya que  $K_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq B$  y, por tanto

$$S_0(\mathfrak{A}; a) = I_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq B$$

Si  $S_k(\mathfrak{A}; a) \subseteq B$  y  $b \in S_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existen  $\bar{c} \in S_k(\mathfrak{A}; a)$  y  $d \in K_n(\mathfrak{A}; \bar{c})$  tales que  $b \leq d$ . Luego  $d \in K_n(\mathfrak{A}; B) = \mathfrak{B}$  y, por tanto,  $b \in B$ .

□

### **4.3 Las estructuras $J_n(\mathfrak{A}; a)$ y $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$**

Como indicábamos en la introducción de esta memoria, la búsqueda de un modelo de  $\mathbf{F}\Pi_{n+1}$  que no lo fuese de  $\mathbf{F}\Sigma_{n+2}$  nos condujo al estudio de la estructura  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ . Los elementos de  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  son los de  $A$  que están acotados superiormente por el máximo de una función  $\Pi_n$ -definible con unos ciertos parámetros y un cierto dominio no vacío. Describiremos la estructura mediante un proceso recurrente: en el paso 0, únicamente admitimos al elemento  $a$  como parámetro y como dominio. En el paso  $k + 1$ , los parámetros y el dominio pueden ser elementos cualesquiera del conjunto construido en el paso  $k$ .

La estructura  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  se construye mediante un proceso similar al de  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ , considerando funciones  $\Sigma_n$ -definibles en lugar de  $\Pi_n$ -definibles.

En el estudio de las estructuras  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  analizamos, básicamente, las siguientes cuestiones:

1. Relaciones con las estructuras  $\mathfrak{A}$  e  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$  (4.3.6 y 4.3.8).
2. Condiciones para dichas estructuras sean modelos de un fragmento de la Aritmética (4.3.9).

3. Relaciones con  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  e  $I_n(\mathfrak{A}; a)$ , optimizando los resultados en ciertos casos (4.3.10, 4.3.11 y 4.3.12).
4. Condiciones para que sean maximales  $\Sigma_n$ -definibles en  $\mathfrak{A}$  (4.3.17).

En muchos casos, omitiremos las pruebas de los resultados correspondientes para  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ , por ser similares a las de  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ .

**4.3.1 Notación :** Si  $\varphi(x, y, \vec{u}) \in \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces notaremos  $\varphi(x, y, \vec{u}) \in \text{FUN}(v)$  para designar que  $\varphi(x, y, \vec{u})$  es una aplicación con dominio no vacío, contenido en  $v$ . Es decir:

$$\varphi(x, y, \vec{u}) \in \text{FUN}(v) \equiv \text{FUN}(\varphi(x, y, \vec{u}), v) \wedge \exists x \leq v \exists y \varphi(x, y, \vec{u})$$

Sean  $\mathfrak{A}$  una estructura,  $a, \vec{b} \in A$  y  $\varphi(x, y, \vec{b}) \in \text{FUN}(a)$ . Entonces notaremos

$$[\varphi, a, \vec{b}] = \{c \in A : c \leq (\max y)_{x \leq a} \varphi(x, y, \vec{b})\}$$

**4.3.2 Definición.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$ ,  $a \in A$ ,  $y n \in \omega$ . Para cada  $k \in \omega$  definimos  $cl_k^n(\mathfrak{A}; a)$  como sigue:

$$\begin{aligned} cl_0^n(\mathfrak{A}; a) &= \bigcup_{\varphi \in \Pi_n} [\varphi, a, a] \\ cl_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a) &= \bigcup \{[\varphi, c, \vec{d}] : c, \vec{d} \in cl_k^n(\mathfrak{A}; a), \varphi(x, y, \vec{u}) \in \Pi_n\} \end{aligned}$$

Obviamente se verifica que, para cada  $n, k \in \omega$  :  $cl_k^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq cl_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a)$ . Cuando no haya lugar a confusión, suprimiremos el superíndice  $n$ .

**4.3.3 Definición.** La estructura  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  es  $\bigcup_{k \in \omega} cl_k^n(\mathfrak{A}; a)$

**4.3.4 Definición.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$ ,  $a \in A$ ,  $y n \in \omega$ . Para cada  $k \in \omega$  definimos  $cl_k^{*n}(\mathfrak{A}; a)$  como sigue:

$$\begin{aligned} cl_0^{*n}(\mathfrak{A}; a) &= \bigcup_{\varphi \in \Sigma_n} [\varphi, a, a] \\ cl_{k+1}^{*n}(\mathfrak{A}; a) &= \bigcup \{[\varphi, c, \vec{d}] : c, \vec{d} \in cl_k^{*n}(\mathfrak{A}; a), \varphi(x, y, \vec{u}) \in \Sigma_n\} \end{aligned}$$

Obviamente se verifica que, para cada  $n, k \in \omega$  :  $cl_k^{*n}(\mathfrak{A}; a) \subseteq cl_{k+1}^{*n}(\mathfrak{A}; a)$ . Cuando no haya lugar a confusión, suprimiremos el superíndice  $n$ .

**4.3.5 Definición.** La estructura  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es  $\bigcup_{k \in \omega} cl_k^{*n}(\mathfrak{A}; a)$

**Notas**

1. A continuación veremos que, como se ha afirmado anteriormente,  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  son subestructuras de  $\mathfrak{A}$ .

Sean  $b_1, b_2 \in J_n(\mathfrak{A}; a)$ . Si  $k \in \omega$  es tal que  $b_1, b_2 \in cl_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existen  $\varphi_1(x, y, \vec{u}) \in \Pi_n$ ,  $\varphi_2(x, y, \vec{v}) \in \Pi_n$ ,  $c_1, c_2, \vec{d}_1, \vec{d}_2 \in cl_k(\mathfrak{A}; a)$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\varphi_1(x, y, \vec{d}_1), c_1) \wedge \exists x \leq c_1 \exists y \varphi(x, y, \vec{d}_1) \wedge b_1 \leq (\max y)_{x \leq c_1} \varphi(x, y, \vec{d}_1)$$

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\varphi_2(x, y, \vec{d}_2), c_2) \wedge \exists x \leq c_2 \exists y \varphi(x, y, \vec{d}_2) \wedge b_2 \leq (\max y)_{x \leq c_2} \varphi(x, y, \vec{d}_2)$$

Podemos suponer que  $c_1 = c_2$  ya que

- si  $c_1 \leq c_2$  entonces basta considerar la fórmula

$$\psi(x, y, c_1, \vec{d}_1) \equiv (x \leq c_1 \wedge \varphi_1(x, y, \vec{d}_1)) \vee (x > c_1 \wedge y = 0)$$

en lugar de la fórmula  $\varphi_1(x, y, \vec{u})$ .

Así mismo, podemos suponer que  $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$ .

Supongamos, pues, que  $c_1 = c_2 = c$  y  $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$ .

Si  $m_1 = (\max y)_{x \leq c} \varphi(x, y, \vec{d}) \geq (\max y)_{x \leq c} \varphi(x, y, \vec{d})$ , entonces consideramos la  $\Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_n)$ -fórmula

$$\theta(x, y, \vec{u}) \equiv \exists t \leq y (\varphi_1(x, t, \vec{u}) \wedge y = t^2 + 1)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c) \wedge m_1^2 + 1 = (\max y)_{x \leq c} \theta(x, y, \vec{d})$$

Por tanto

$$b_1 + b_2 \leq m_1 + m_2 \leq 2m_1 \leq m_1^2 + 1$$

$$b_1 \cdot b_2 \leq m_1 \cdot m_1 \leq m_1^2 + 1$$

$$b_1 + 1 \leq m_1 + 1 \leq m_1^2 + 1$$

Es decir:  $b_1 + b_2, b_1 \cdot b_2, b_1 + 1 \in cl_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; a)$ .

La prueba para  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  es similar.

2. De las definiciones anteriores resulta inmediatamente que

(a) Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_n$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

(b) Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ .

Seguidamente, vamos a estudiar otras relaciones entre  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ ,  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  y las estructuras  $\mathfrak{A}$  e  $I_n^*(\mathfrak{A}; a)$ .

#### 4.3.6 Teorema.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_n$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e \mathfrak{A}$ .

2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e \mathfrak{A}$ .

#### Demostración:

1. Si  $n = 0$ , entonces  $J_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq_e \mathfrak{A}$ . Por tanto,  $J_n(\mathfrak{A}; a) \prec_0^e \mathfrak{A}$ .  
Supongamos que  $n > 0$  y sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_{n-1}$  y  $b \in J_n(\mathfrak{A}; a)$  tales que  $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x, b)$ . Sea  $k \in \omega$  tal que  $b \in \text{cl}_k(\mathfrak{A}; a)$ .

Teniendo presente que  $\mathbf{F}\Pi_n \implies \mathbf{L}\Pi_n$ , deducimos que existe  $c \in A$  tal que  $c = (\mu x)\varphi(x, b)$ .

Consideremos la  $\Pi_n$ -fórmula

$$\theta(x, y, u) \equiv \varphi(y, u) \wedge \forall t < y \neg \varphi(t, u)$$

Entonces

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, b), a) \wedge c = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y, b)$$

Es decir:  $c \in \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi(c, b)$ .

□

### 4.3.7 Teorema.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$  y  $a \in A$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq I_{n+2}^*(\mathfrak{A}; a)$ .
2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n^*(\mathfrak{A}; a) \subseteq I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

#### Demostración:

1. Veamos que  $S_0^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq \text{cl}_0^n(\mathfrak{A}; a)$ .

- Si  $n > 0$  y  $b \in S_0^n(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existe  $c \in K_n(\mathfrak{A}; a)$  tal que  $b \leq c$ . Sea  $\varphi(y, u) \in \Sigma_n$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(y, a) \rightsquigarrow c$ . Entonces la  $\Pi_n$ -fórmula

$$\psi(y, u) \equiv \forall z (z \neq y \rightarrow \neg \varphi(z, u))$$

verifica que  $\mathfrak{A} \models \psi(y, a) \rightsquigarrow c$ . Pues bien, si consideramos la  $\Pi_n$ -aplicación  $\theta(x, y, u) \equiv \psi(y, u)$ , entonces resulta que  $\mathfrak{A} \models c = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y, a)$ . Por tanto  $b \in \text{cl}_0^n(\mathfrak{A}; a)$ .

- Si  $n = 0$ , entonces el razonamiento es análogo. Basta considerar en este caso  $\theta(x, y, u) \equiv \varphi(y, u)$ .

De manera análoga se prueba que  $S_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq \text{cl}_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a)$ .

Veamos que  $J_n(\mathfrak{A}; a) \subseteq I_{n+2}^*(\mathfrak{A}; a)$ , probando, por inducción sobre  $k$ , que  $\text{cl}_k^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_k^{n+2}(\mathfrak{A}; a)$ .

$k = 0$

Si  $b \in \text{cl}_0^n(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existe  $\varphi(x, y, u) \in \Pi_n$  tal que  $b \in [\varphi, a, a]$ . Consideremos la  $\Pi_{n+1}$ -fórmula

$$\psi(m, u) \equiv \exists x \leq u \varphi(x, m, u) \wedge \forall x \leq u \forall y (\varphi(x, y, u) \rightarrow y \leq m)$$

Si  $c = (\max y)_{x \leq a} \varphi(x, y, a)$ , entonces resulta que  $\mathfrak{A} \models \psi(m, a) \rightsquigarrow c$ . Luego  $c \in K_{n+2}(\mathfrak{A}; a)$  [ y, en general, no podemos asegurar que  $c \in K_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ , ya que un elemento  $\Pi_n$ -definible no tiene porqué ser  $\Sigma_n$ -definible ]. Por tanto,  $b \in I_{n+2}^*(\mathfrak{A}; a) = S_0^{n+2}(\mathfrak{A}; a)$ .

$k \rightarrow k+1$

Supongamos que  $\text{cl}_k^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_k^{n+2}(\mathfrak{A}; a)$ .

Si  $b \in \text{cl}_{k+1}^n(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existen  $\varphi(x, y, \vec{u}) \in \Pi_n$ ,  $c, \vec{d} \in \text{cl}_k^n(\mathfrak{A}; a)$  tales que  $b \in [\varphi, c, \vec{d}]$ . Consideremos la  $\Pi_{n+1}$ -fórmula

$$\psi(m, v, \vec{u}) \equiv \exists x \leq v \varphi(x, m, \vec{u}) \wedge \forall x \leq v \forall y (\varphi(x, y, \vec{u}) \rightarrow y \leq m)$$

Si  $e = (\max y)_{x \leq c} \varphi(x, y, \vec{d})$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \psi(m, c, \vec{d}) \rightsquigarrow e$ . Luego  $e \in K_{n+2}(\mathfrak{A}; c, \vec{d})$ . Por tanto,  $b \in S_{k+1}^{n+2}(\mathfrak{A}; a)$ , ya que  $c, \vec{d} \in \text{cl}_k^n(\mathfrak{A}; a) \subseteq S_k^{n+2}(\mathfrak{A}; a)$ , por hipótesis de inducción.

2. La prueba es similar a la anterior. Basta observar, por ejemplo en el caso  $k = 0$ , que si  $\varphi(x, y, u) \in \Sigma_n$ , entonces la fórmula

$$\psi(m, u) \equiv \exists x \leq u \varphi(x, m, u) \wedge \forall x \leq u \forall y (\varphi(x, y, u) \rightarrow y \leq m)$$

es  $\Sigma_{n+1}$  y, en consecuencia,  $c \in K_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ .

□

#### 4.3.8 Corolario.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$  y  $a \in A$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e J_n(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e I_{n+2}^*$ .
2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces  $I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e J_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n^e I_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

#### Demostración:

1. Basta aplicar el lema 1.4.2, teniendo presente que:

$$I_n^*(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A} \quad \text{y} \quad I_{n+2}^*(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+2} \mathfrak{A} \quad [4.2.3]$$

$$J_n(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A} \quad [4.3.6]$$

$$I_n^*(\mathfrak{A}; a) \subset J_n(\mathfrak{A}; a) \subset I_{n+2}^*(\mathfrak{A}; a) \subset \mathfrak{A}$$

□

A continuación, establecemos condiciones suficientes para que las estructuras  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ ,  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  sean modelos de ciertos fragmentos de la Aritmética.

#### 4.3.9 Teorema.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces

$$J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$$

2. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$ . Entonces

(a)  $J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ .

(b)  $J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A} \implies J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+2}$ .

#### Demostración:

1. Si  $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$ , entonces basta aplicar el teorema 1.8.2 de Clote, teniendo presente que

- $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es un segmento inicial propio de  $\mathfrak{A}$ .
- $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$  [ 4.3.6 ].
- $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_{n+1}$  y  $\mathbf{F}^* \Pi_{n+1} \implies \mathbf{I}\Sigma_n$ .

□

Las relaciones entre  $J_n(\mathfrak{A}; a)$ ,  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  y las estructuras de elementos  $\Sigma_n$ -definibles  $K_n(\mathfrak{A}; a)$  e  $I_n(\mathfrak{A}; a)$  resultan del siguiente teorema.

#### 4.3.10 Teorema.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \quad e \quad I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$$

2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a) \quad e \quad I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$$

**Demostración:**

1. Por una parte:

$$\left. \begin{array}{l} K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A} [ 1.5.2 - (1) ] \\ J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A} [ 4.3.6 - (1) ] \\ K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset \mathfrak{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{1.4.2} K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$$

Por otra parte:

$$\left. \begin{array}{l} I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A} [ 1.5.2 - (3) ] \\ J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A} [ 4.3.6 - (1) ] \\ K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \subset \mathfrak{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{1.4.2} I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_n \mathfrak{A}$$

□

Veamos que, en ciertos casos, los resultados obtenidos en el teorema anterior son óptimos.

**4.3.11 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  y  $a \in A$  tales que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar. Entonces

$$K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+2} J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \quad \text{y} \quad K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+2} J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$$

**Demostración:**

Supongamos que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+2} J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ . Entonces, teniendo presente que

- $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \text{B}\Sigma_{n+1}$  [ corolario 4.3.9 ]
- $\text{B}\Sigma_{n+1}$  es  $\Pi_{n+3}$ -axiomatizable [ lema 1.3.9 ]

deducimos que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \text{B}\Sigma_{n+1}$ . Lo cual contradice que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \neq \omega$  (teorema 1.5.3-(1)).

De manera similar, se prueba que  $K_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+2} J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

□

#### 4.3.12 Teorema.

1. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar.  
Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+1} J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ .
2. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$  tales que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$  es no estándar.  
Entonces  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \not\prec_{n+1} J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a)$ .

#### Demostración:

1. Caso contrario resultaría que  $I_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1} \mathfrak{A}$ . Lo cual contradice el lema 4.1.5.

□

A continuación, se obtienen condiciones suficientes para que las estructuras  $J_n(\mathfrak{A}; a)$  y  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$  sean maximales  $\Sigma_n$ -definibles en  $\mathfrak{A}$ .

#### 4.3.13 Teorema.

1. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Pi_n$  y  $a \in A$ . Si existe  $k \in \omega$  tal que  $X \subseteq \text{cl}_k(\mathfrak{A}; a)$ , entonces  $K_n(\mathfrak{A}; X) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; a)$ .
2. Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$  y  $a \in A$ . Si existe  $k \in \omega$  tal que  $X \subseteq \text{cl}_k^*(\mathfrak{A}; a)$ , entonces  $K_n(\mathfrak{A}; X) \subseteq J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ .

#### Demostración:

1. Supongamos que  $n > 0$ .

- Si  $b \in K_n(\mathfrak{A}; X)$ , entonces existen  $\varphi(x, \vec{u}) \in \Sigma_n$  y  $\vec{c} \in X \subseteq \text{cl}_k(\mathfrak{A}; a)$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b, \vec{c}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{c}) \rightarrow x = b)$$

Entonces, la  $\Pi_n$ -fórmula

$$\psi(x, \vec{u}) \equiv \forall y(y \neq x \rightarrow \neg \varphi(y, \vec{u}))$$

tambien define en  $\mathfrak{A}$  el elemento  $b$  con parámetro  $\vec{c}$ .

Consideremos la  $\Pi_n$ -fórmula  $\theta(x, y, \vec{u}) \equiv \psi(y, \vec{u})$ . Obviamente

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{c}), a) \wedge b = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y, \vec{c})$$

Luego  $b \in \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq J_n(\mathfrak{A}; X)$ .

En el caso  $n = 0$ , el razonamiento es análogo al anterior. Basta considerar  $\theta(x, y, \vec{u}) \equiv \varphi(x, \vec{u})$ .

□

#### 4.3.14 Teorema.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_n(\mathfrak{A}; J_n(\mathfrak{A}; a)) = J_n(\mathfrak{A}; a) = I_n(\mathfrak{A}; J_n(\mathfrak{A}; a))$$

2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y  $a \in A$ , entonces

$$K_n(\mathfrak{A}; J_n^*(\mathfrak{A}; a)) = J_n^*(\mathfrak{A}; a) = I_n(\mathfrak{A}; J_n^*(\mathfrak{A}; a))$$

#### Demostración:

1. Si  $b \in K_n(\mathfrak{A}; J_n(\mathfrak{A}; a))$ , entonces existe  $k \in \omega$  tal que  $b \in K_n(\mathfrak{A}; \text{cl}_k(\mathfrak{A}; a))$ .

Por tanto, del teorema 4.3.13-(1), resulta que  $b \in J_n(\mathfrak{A}; a)$ .

□

**4.3.15 Lema.**

1. Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^e \mathfrak{B}$ . Entonces

$$J_n(\mathfrak{A}; a) = J_n(\mathfrak{B}; a)$$

2. Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}$ . Entonces

$$J_n^*(\mathfrak{A}; a) = J_n^*(\mathfrak{B}; a)$$

**Demostración:**

1. Probemos por inducción sobre  $k$  que  $\text{cl}_k(\mathfrak{A}; a) = \text{cl}_k(\mathfrak{B}; a)$ .

$$\boxed{k = 0}$$

- $\text{cl}_0(\mathfrak{A}; a) \subseteq \text{cl}_0(\mathfrak{B}; a)$ .

Si  $b \in \text{cl}_0(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existe  $\theta(x, y) \in \Pi_n$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \wedge \exists x \leq a \exists y \theta(x, y) \wedge b \leq (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$$

Ahora bien, de la relación  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \implies \mathfrak{B} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a)$$

Por otra parte, de  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^e \mathfrak{B}$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \theta(x, y) \iff \mathfrak{B} \models \exists x \leq a \exists y \theta(x, y)$$

En consecuencia, si  $p \in A$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y) \implies \mathfrak{B} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$$

Por tanto  $b \in \text{cl}_0(\mathfrak{B}; a)$ .

- $\text{cl}_0(\mathfrak{B}; a) \subseteq \text{cl}_0(\mathfrak{A}; a)$ .

Si  $b \in \text{cl}_0(\mathfrak{B}; a)$ , entonces existe  $\theta(x, y) \in \Pi_n$  tal que

$$\mathfrak{B} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \wedge \exists x \leq a \exists y \theta(x, y) \wedge b \leq (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$$

Ahora bien, por una parte

$$\mathfrak{B} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a) \implies \mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a)$$

ya que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$ .

Por otra parte

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \exists y \theta(x, y) \iff \mathfrak{B} \models \exists x \leq a \exists y \theta(x, y)$$

ya que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^e \mathfrak{B}$ .

Sea  $p \in B$  tal que  $\mathfrak{B} \models p = (\max y)_{x \leq a} \theta(x, y)$ . Si  $c \leq a$  es tal que  $\mathfrak{B} \models \theta(c, p)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \exists y \theta(c, y)$ . Luego  $\mathfrak{A} \models \exists y \theta(c, y)$ , ya que  $c \in A$ . Por tanto, si  $q \in A$  es tal que  $\mathfrak{A} \models \theta(c, q)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \theta(c, q)$  y, por tanto,  $p = q$ . Es decir:  $\mathfrak{A} \models \exists x \leq a \theta(x, p)$ .

Puesto que  $\mathfrak{B} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p)$ , resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p)$$

Luego  $b \in \text{cl}_0(\mathfrak{A}; a)$ .

$k \rightarrow k+1$

Supongamos que  $\text{cl}_k(\mathfrak{A}; a) = \text{cl}_k(\mathfrak{B}; a)$  y veamos que  $\text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a) = \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{B}; a)$ .

- $\text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a) \subseteq \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{B}; a)$ .

Si  $b \in \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ , entonces existen  $\theta(x, y, \vec{u}) \in \Pi_n$ ,  $c, \vec{d} \in \text{cl}_k(\mathfrak{A}; a) = \text{cl}_k(\mathfrak{B}; a)$  tales que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c) \wedge \exists x \leq c \exists y \theta(x, y, \vec{d}) \wedge b \leq (\max y)_{x \leq c} \theta(x, y, \vec{d})$$

Ahora bien, de la relación  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c) \implies \mathfrak{B} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c)$$

Por otra parte, de  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^e \mathfrak{B}$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq c \exists y \theta(x, y, \vec{d}) \iff \mathfrak{B} \models \exists x \leq c \exists y \theta(x, y, \vec{d})$$

En consecuencia, si  $p \in A$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models p = (\max y)_{x \leq c} \theta(x, y, \vec{d}) \implies \mathfrak{B} \models p = (\max y)_{x \leq c} \theta(x, y, \vec{d})$$

Por tanto  $b \in \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{B}; a)$ .

- $\text{cl}_{k+1}(\mathfrak{B}; a) \subseteq \text{cl}_{k+1}(\mathfrak{A}; a)$ .

Prueba análoga a la anterior.

2. Siguiendo la prueba de 1, basta tener presente que si  $\theta(x, y) \in \Sigma_n$ , entonces es suficiente la condición  $\mathfrak{A} \prec_n^e \mathfrak{B}$  para que se verifique

$$\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c) \iff \mathfrak{B} \models \text{FUN}(\theta(x, y, \vec{d}), c)$$

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq c \exists y \theta(x, y, \vec{d}) \iff \mathfrak{B} \models \exists x \leq c \exists y \theta(x, y, \vec{d})$$

□

#### 4.3.16 Corolario.

1. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n(\mathfrak{A}; a) = J_n(J_{n+1}(\mathfrak{A}; a); a)$ .
2. Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces  $J_n^*(\mathfrak{A}; a) = J_n^*(J_{n+1}^*(\mathfrak{A}; a); a)$ .

#### Demostración:

1. Del corolario 4.3.9, resulta que  $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{B} \Sigma_{n+2}$ . Ahora bien,  $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \models \mathbf{F}^* \Pi_n$ , ya que  $\mathbf{B} \Sigma_{n+2} \implies \mathbf{F}^* \Sigma_{n+1} \implies \mathbf{F}^* \Pi_n$  [ figura 7 ]. Por tanto, teniendo presente que  $J_{n+1}(\mathfrak{A}; a) \prec_{n+1}^e \mathfrak{A}$ , que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}^* \Pi_n$  y que  $a \in J_{n+1}(\mathfrak{A}; a)$ , del lema 4.3.15 deducimos que

$$J_n(\mathfrak{A}; a) = J_n(J_{n+1}(\mathfrak{A}; a); a)$$

□

**4.3.17 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \text{PA}$  numerable no-estándar y  $a \in A$ . Para cada  $n \in \omega$  se verifica

$$J_n(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A} \text{ y } J_n^*(\mathfrak{A}; a) \neq \mathfrak{A}$$

**Demostración:**

Por el teorema de Friedman (1.8.1), existe una  $L$ -estructura  $\mathfrak{B}$  tal que

$$a \in B, \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} \prec_{n+1}^e \mathfrak{A}$$

Del lema 4.3.15, deducimos que  $J_n(\mathfrak{A}; a) = J_n(\mathfrak{B}; a)$ . En consecuencia

$$J_n(\mathfrak{A}; a) = J_n(\mathfrak{B}; a) \subset_e \mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$$

Un razonamiento análogo es válido para la estructura  $J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ . □

## 4.4 $\Sigma_n$ -definibilidad en $K_n(\mathfrak{A})$

En esta sección se pretende

- Obtener condiciones suficientes para que la estructura  $K_n(\mathfrak{A})$  no sea  $\Sigma_n$ -definible en  $\mathfrak{A}$ .
- Caracterizar  $K_n(\mathfrak{A})$  en términos de  $\Sigma_n$ -definibilidad, entre los modelos de la teoría  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  (generalizando unos resultados de Lessan [19], teorema 3.1.17).

**4.4.1 Definición.** Diremos que una fórmula  $\varphi(x, \vec{u})$  es especial si

$$\text{I}\Sigma_0 \vdash \forall \vec{u} (\varphi(x, \vec{u}) \wedge \varphi(y, \vec{u}) \rightarrow x = y)$$

Es decir, si en cada modelo de  $\text{I}\Sigma_0$  existe, a lo sumo, un elemento que satisface  $\varphi(x, \vec{u})$ , considerando  $\vec{u}$  como parámetro de la fórmula.

P. Hájek y P. Pudlák ([15], lema 1.3.6 del capítulo 4) prueban que si  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_{n+1}$  y  $a \in A$ , entonces  $a \in K_{n+1}(\mathfrak{A})$  si y sólo si existe una fórmula especial  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(x) \leftrightarrow a$ .

**4.4.2 Teorema.** Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$  es no estándar, entonces las estructuras  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  e  $I_{n+1}(\mathfrak{A})$  no son  $\Sigma_{n+1}$ -definibles en  $\mathfrak{A}$ .

**Demostración:**

Para probar que  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  no es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{A}$ , veamos en primer lugar que está acotada superiormente en  $\mathfrak{A}$ .

Para ello, consideremos la fórmula

$$\theta(x, y) \equiv \text{“}x \text{ es una } \Sigma_{n+1}\text{-fórmula especial e } y \text{ satisface } x\text{”}$$

Para explicitar la fórmula  $\theta(x, y)$ , notemos  $F_{\Pi_n}(x, y)$  la  $\Delta_1(\mathbf{I}\Sigma_1)$ -aplicación que asocia a cada  $\Sigma_{n+1}$ -fórmula su “parte”  $\Pi_n$ . Es decir

$$F_{\Pi_n}(x, y) \equiv \text{form}_{\Sigma_{n+1}}(x) \wedge \exists s \{ \text{formseq}_{\Sigma_{n+1}}(s^\cap[x]) \wedge y = [s]_0 \}$$

(para más detalles acerca de los elementos que aparecen en la definición anterior, ver Kaye [17], capítulo 9).

Entonces

$$\begin{aligned} \theta(x, y) \equiv & V_{n+1}(x, y) \wedge \exists z \{ F_{\Pi_n}(x, z) \wedge \exists t, u (V^n(z; [y, t]) \wedge u = \langle y, t \rangle \wedge \\ & \wedge \forall v < u \neg V^n(z, [(v)_0, (v)_1])) \} \end{aligned}$$

Si  $a \in A - \omega$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \text{FUN}(\theta(x, y), a)$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{F}\Sigma_{n+1}$ , existe  $p \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq a \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p)$$

Veamos que  $p$  es una cota superior de  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  en  $\mathfrak{A}$ . En efecto:

- Si  $b \in K_{n+1}(\mathfrak{A})$ , existe una fórmula especial  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(x) \rightsquigarrow b$ . Sea  $e = \ulcorner \varphi(x) \urcorner \in \omega$ . Entonces  $\mathfrak{A} \models \theta(e, b)$  y, por tanto  $b \leq p$ .

Hemos probado que  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$ , está acotado superiormente en  $\mathfrak{A}$ . Teniendo presente que carece de elemento máximo, si  $K_{n+1}(\mathfrak{A})$  fuese  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{A}$ , resultaría que  $\mathfrak{A} \not\models \mathbf{M}\Sigma_{n+1}$ , lo cual contradice que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1}$ .

Análogamente, se prueba que  $I_{n+1}(\mathfrak{A})$  no es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{A}$ . □

Para caracterizar  $K_n(\mathfrak{A})$  en términos de  $\Sigma_n$ -definibilidad, entre los modelos de la teoría  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$ , vamos a introducir unos conceptos previos.

### Estructuras $n$ -elementalmente equivalentes

**4.4.3 Definición.** Diremos que dos estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son  $n$ -elementalmente equivalentes, y notaremos  $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ , si para cada  $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n$  se verifica

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{x}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{x})$$

**4.4.4 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  estructuras. Son equivalentes

1.  $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ .
2. Para cada  $\sigma \in (\Sigma_n \cup \Pi_n) \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$  :  $\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{B} \models \sigma$ .

#### Demostración:

Si  $\sigma \in \Sigma_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \neg\sigma \iff \mathfrak{B} \models \neg\sigma$ .

Si  $\varphi(\vec{x}) \in \Pi_n$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{x}) \xleftrightarrow{T.\text{cierre}} \mathfrak{A} \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x}) \xleftrightarrow{\text{hip.}} \mathfrak{B} \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x}) \xleftrightarrow{T.\text{cierre}} \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{x})$$

□

### Teorías $n$ -completas

**4.4.5 Definición.** Una teoría consistente  $T$  diremos que es  $n$ -completa si para cada  $\sigma \in \Pi_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$  se verifica que  $T \vdash \sigma$  ó  $T \vdash \neg\sigma$ .

**4.4.6 Teorema.** Sea  $T$  una teoría consistente. Son equivalentes

1.  $T$  es  $n$ -completa.
2. Para cada  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$  :  $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$  Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$  y  $\sigma \in \Pi_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$ . Si  $T \not\vdash \sigma$ , entonces  $T \vdash \neg\sigma$ . Luego del teorema de la validez resulta que  $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ . Por tanto

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff T \vdash \sigma$$

Análogamente se prueba que  $\mathfrak{B} \models \sigma \iff T \vdash \sigma$ . Luego

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{B} \models \sigma$$

Un razonamiento análogo prueba que si  $\theta \in \Sigma_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$ , entonces

$$\mathfrak{A} \models \theta \iff \mathfrak{B} \models \theta$$

$\Leftarrow$  Sea  $\sigma \in \Pi_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$ . Puesto que  $T$  es consistente, existe  $\mathfrak{A} \models T$ . Por tanto

- Si  $\mathfrak{A} \models \sigma$ , entonces para cada  $\mathfrak{B} \models T$  se verifica  $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ . Luego  $\mathfrak{B} \models \sigma$ . Del teorema de completitud resulta que  $T \vdash \sigma$ .
- Si  $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ , entonces para cada  $\mathfrak{B} \models T$  se verifica  $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ . Luego  $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$ .

□

La teoría  $\text{Th}_n(\mathfrak{A})$

**4.4.7 Definición.** Si  $\mathfrak{A}$  es un estructura, entonces  $\text{Th}_n(\mathfrak{A})$  es la teoría cuyos axiomas no lógicos son

$$\{\sigma \in (\Sigma_n \cup \Pi_n) \cap \text{Sent}(\mathbf{L}) : \mathfrak{A} \models \sigma\}$$

Obsérvese que la teoría  $\text{Th}_n(\mathfrak{A})$  es  $n$ -completa ya que es consistente  $[\mathfrak{A} \models \text{Th}_n(\mathfrak{A})]$  y, además, si  $\sigma \in \Pi_n \cap \text{Sent}(\mathbf{L})$ , entonces  $\text{Th}_n(\mathfrak{A}) \vdash \sigma$  ó  $\text{Th}_n(\mathfrak{A}) \vdash \neg\sigma$ , ya que o bien  $\sigma$  o bien  $\neg\sigma$  es una axioma de dicha teoría.

Así pues, teniendo presente que la teoría  $\text{Th}_n(\mathfrak{A})$  es  $n$ -completa, resulta que

$$\mathfrak{B} \models \text{Th}_n(\mathfrak{A}) \iff \mathfrak{B} \equiv_n \mathfrak{A}$$

A continuación, vamos a caracterizar  $K_n(\mathfrak{A})$  en términos de  $\Sigma_n$ -definibilidad, entre los modelos de la teoría  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$ .

**4.4.8 Teorema.** *Sea  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_1 + \text{I}\Sigma_{n-1}$  ( $n > 0$ ) tal que  $K_n(\mathfrak{A})$  es cofinal en  $\mathfrak{A}$ . Entonces  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{A}$ .*

**Demostración:**

Consideremos la fórmula

$$\theta(x, y) \equiv \text{“}x \text{ es una } \Sigma_n\text{-fórmula especial e } y \text{ satisface } x\text{”}$$

Sea  $F_{\Pi_{n-1}}(x, y)$  la  $\Delta_1(\text{I}\Sigma_1)$ -aplicación que asocia a cada  $\Sigma_n$ -fórmula su “parte”  $\Pi_{n-1}$ .

Entonces

$$\theta(x, y) \equiv V_n(x, y) \wedge \exists z \{ F_{\Pi_{n-1}}(x, z) \wedge \exists t, u (V^{n-1}(z; [y, t]) \wedge u = \langle y, t \rangle \wedge \wedge \forall v < u \neg V^{n-1}(z, [(v)_0, (v)_1])) \}$$

Obviamente  $\theta(x, y) \in \Sigma_n(\mathfrak{A})$ .

Veamos que la  $\Sigma_{n+1}(\mathfrak{A})$ -fórmula  $\psi(x) \equiv \exists y \forall z \forall t < x (\theta(t, z) \rightarrow z \leq y)$  define  $\omega$  en  $\mathfrak{A}$ .

- Sea  $p \in \omega$ . Si  $p = 0$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \psi(0)$ . Supongamos que  $p > 0$  y para cada  $t < p$  notamos  $z_t$  al único elemento  $z \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \theta(t, z)$ , si existe, y 0 en caso contrario. Entonces  $a = \max\{z_0, \dots, z_{p-1}\}$  verifica que

$$\mathfrak{A} \models \forall z \forall t < p (\theta(t, z) \rightarrow z \leq a)$$

Es decir :  $\mathfrak{A} \models \psi(p)$ .

- Sea  $p \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(p)$ . Sea  $a \in A$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall z \forall t < p (\theta(t, z) \rightarrow z \leq a)$$

Si  $p \in A - \omega$ , entonces de la cofinalidad de  $K_n(\mathfrak{A})$  en  $\mathfrak{A}$  deducimos que existe  $b \in K_n(\mathfrak{A})$  tal que  $a < b$ . Sean  $\delta(x) \in \Sigma_n$  una fórmula

especial tal que  $\mathfrak{A} \models \delta(x) \rightsquigarrow b$ , y  $e = \ulcorner \delta(x) \urcorner \in \omega$ . Entonces  $e < p$ . Luego  $\mathfrak{A} \models \theta(e, b)$  y, por tanto,  $b \leq a$ , lo cual es una contradicción.

□

**4.4.9 Corolario.** Sean  $n > 0$  y  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_{n+1}$  no estándar. Entonces  $K_n(\mathfrak{A})$  no es cofinal en  $\mathfrak{A}$ .

**Demostración:**

Caso contrario, del teorema 4.4.8 resultaría que  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{A}$ . En consecuencia  $\mathfrak{A} \not\models \text{M}\Sigma_{n+1}$ , lo cual es una contradicción.

□

**4.4.10 Corolario.** Sean  $n > 1$  y  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_{n-1}$ . Entonces  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $K_n(\mathfrak{A})$ .

**Demostración:**

Basta aplicar el teorema 4.4.8, teniendo presente que, en las hipótesis del corolario, se verifica  $K_n(K_n(\mathfrak{A})) = K_n(\mathfrak{A})$  y que  $K_n(\mathfrak{A}) \models \text{I}\Sigma_{n-1} + \text{I}\Sigma_1$ .

□

**4.4.11 Teorema.** Sean  $n > 0$ ,  $\mathfrak{A} \models \text{I}\Sigma_{n-1}$  y  $\mathfrak{B} \equiv_{n+1} K_n(\mathfrak{A})$ . Si  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$  define  $\omega$  en  $\mathfrak{B}$ , entonces  $\varphi(x)$  define  $\omega$  en  $K_n(\mathfrak{A})$ .

**Demostración:**

Sea  $p \in \omega$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \varphi(p)$ . Identificando  $p \in \omega$  con el término  $S^p 0$ , resulta que  $\varphi(p)$  es una  $\Sigma_{n+1}$ -fórmula cerrada y, por tanto,  $K_n(\mathfrak{A}) \models \varphi(p)$ . Supongamos ahora que  $p \in K_n(\mathfrak{A})$  es tal que  $K_n(\mathfrak{A}) \models \varphi(p)$ . Sea  $\theta(x) \in \Sigma_n$  tal que  $\mathfrak{A} \models \theta(x) \rightsquigarrow p$ . Entonces  $K_n(\mathfrak{A}) \models \theta(x) \rightsquigarrow p$ , ya que  $K_n(\mathfrak{A}) \prec_n \mathfrak{A}$ . Consideremos la  $\Sigma_{n+1}$ -fórmula

$$\delta(x) \equiv \varphi(x) \wedge \theta(x) \wedge \forall y(\theta(y) \rightarrow y = x)$$

Entonces

$$K_n(\mathfrak{A}) \models \delta(p) \implies K_n(\mathfrak{A}) \models \exists x \delta(x) \implies \mathfrak{B} \models \exists x \delta(x)$$

Sea  $q \in B$  tal que  $\mathfrak{B} \models \delta(q)$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \varphi(q)$  y, por tanto,  $q \in \omega$ . Finalmente, observemos que

$$q \in \omega \wedge \mathfrak{B} \models \theta(q) \implies K_n(\mathfrak{A}) \models \theta(q)$$

Por tanto :  $p = q \in \omega$ . □

**4.4.12 Teorema.** Sean  $n > 1$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$ . Salvo isomorfismos,  $K_n(\mathfrak{A})$  es el único modelo de  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  en el que  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible.

**Demostración:**

Del corolario 4.4.10 resulta que  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $K_n(\mathfrak{A})$ . Sea  $\mathfrak{B} \models \text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  tal que  $\omega$  es  $\Sigma_{n+1}$ -definible en  $\mathfrak{B}$ . Si  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$  define  $\omega$  en  $\mathfrak{B}$ , del teorema 4.4.11 resulta que  $\varphi(x)$  define  $\omega$  en  $K_n(\mathfrak{A})$ . Por tanto

$$K_n(\mathfrak{A}) \models \forall y \exists x [\varphi(x) \wedge V_n(x, y) \wedge \forall z (V_n(x, z) \rightarrow z = y)]$$

Puesto que  $\mathfrak{B} \equiv_{n+2} K_n(\mathfrak{A})$  resulta que

$$\mathfrak{B} \models \forall y \exists x [\varphi(x) \wedge V_n(x, y) \wedge \forall z (V_n(x, z) \rightarrow z = y)]$$

Definimos la aplicación  $\Phi_1 : K_n(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{B}$  como sigue

- Sean  $c \in K_n(\mathfrak{A})$  y  $\theta(x) \in \Sigma_n$  tales que  $\mathfrak{A} \models \theta(x) \rightsquigarrow b$ . Teniendo presente que  $K_n(\mathfrak{A}) \prec_n \mathfrak{A}$ , se verifica

$$K_n(\mathfrak{A}) \models \exists x \theta(x) \wedge \forall x, y (\theta(x) \wedge \theta(y) \rightarrow x = y)$$

Luego

$$\mathfrak{B} \equiv_n K_n(\mathfrak{A}) \implies \mathfrak{B} \models \exists x \theta(x) \wedge \forall x, y (\theta(x) \wedge \theta(y) \rightarrow x = y)$$

Si  $b \in B$  es tal que  $\mathfrak{B} \models \theta(x) \rightsquigarrow b$ , entonces definimos  $\Phi_1(c) = b$ .

Definimos la aplicación  $\Phi_2 : \mathfrak{B} \rightarrow K_n(\mathfrak{A})$  como sigue

- Sean  $b \in \mathfrak{B}$  y  $p \in \mathfrak{B}$  tales que

$$\mathfrak{B} \models \varphi(p) \wedge V_n(p, b) \wedge \forall y (V_n(p, y) \rightarrow y = b)$$

Pero  $p \in \omega$ , ya que  $\varphi(x)$  define  $\omega$  en  $\mathfrak{B}$ . Luego

$$\mathfrak{B} \models \exists y V_n(p, y) \wedge \forall z, t (V_n(p, z) \wedge V_n(p, t) \rightarrow z = t)$$

Teniendo presente que  $\mathfrak{B} \equiv_n K_n(\mathfrak{A})$  deducimos que

$$K_n(\mathfrak{A}) \models \exists y V_n(p, y) \wedge \forall z, t (V_n(p, z) \wedge V_n(p, t) \rightarrow z = t)$$

Si  $c \in K_n(\mathfrak{A})$  es tal que

$$K_n(\mathfrak{A}) \models V_n(p, c) \wedge \forall z, t (V_n(p, z) \wedge V_n(p, t) \rightarrow z = c)$$

definimos  $\Phi_2(b) = c$ .

Entonces,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son aplicaciones biyectivas, una la inversa de la otra y ambas son isomorfismos. Es decir :  $\mathfrak{B} \cong K_n(\mathfrak{A})$ .  $\square$

**4.4.13 Teorema.** Sean  $n > 1$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$ . Salvo isomorfismos,  $K_n(\mathfrak{A})$  es el único modelo,  $\mathfrak{B}$ , de  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  tal que  $K_n(\mathfrak{B})$  es cofinal en  $\mathfrak{B}$ .

**Demostración:**

En primer lugar, observemos que  $K_n(\mathfrak{A})$  es un modelo de  $\text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  tal que  $K_n(K_n(\mathfrak{A}))$  es cofinal en  $K_n(\mathfrak{A})$ , ya que, en las hipótesis del teorema se verifica  $K_n(K_n(\mathfrak{A})) = K_n(\mathfrak{A})$ .

Sea  $\mathfrak{B} \models \text{Th}_{n+2}(K_n(\mathfrak{A}))$  tal que  $K_n(\mathfrak{B})$  es cofinal en  $\mathfrak{B}$ .

Por una parte,  $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$ , ya que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_{n-1}$  y  $\mathfrak{B} \equiv_{n+1} K_n(\mathfrak{A})$ . Luego, del teorema 4.4.8 resulta que existe  $\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}$  tal que  $\varphi(x)$  define  $\omega$  en  $\mathfrak{B}$ . Por tanto,  $\varphi(x)$  define  $\omega$  en  $K_n(\mathfrak{A})$  [ teor.4.4.11 ]. Razonando como en el teorema 4.4.12, concluimos que  $\mathfrak{B} \cong K_n(\mathfrak{A})$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Teoremas splitting

J. Paris ([24]) prueba que las teorías  $\mathbf{I}\Sigma_n$  y  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  poseen las mismas  $\Pi_{n+2}$ -sentencias verdaderas (resultado obtenido, independientemente, por H. Friedman). Como consecuencia, establece que todo modelo de  $\mathbf{I}\Sigma_n$  posee una extensión cofinal  $(n + 1)$ -elemental que es modelo de  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ , para lo cual establece el siguiente teorema “splitting”.

**5.0.14 Teorema.** Sean  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_n$   $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  tales que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$ . Entonces existe una única estructura,  $\mathfrak{C} = \mathfrak{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ , tal que  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  y, además,  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{B}$ .

En el presente capítulo, se trata de establecer unos teoremas “splitting” para  $\mathbf{F}^*\Sigma_n$  y para otros fragmentos de la Aritmética.

### 5.1 Splitting en $\mathbf{F}^*\Sigma_n$

**5.1.1 Definición.** Si  $\mathfrak{A}$  es una  $\mathbf{L}$ -estructura y  $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathbf{L})$ , entonces  $\Gamma[\mathfrak{A}]$  es el conjunto de las fórmulas cerradas de  $\Gamma$  que son válidas en  $\mathfrak{A}$ .

**5.1.2 Lema.**  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \models \Pi_{n+1}[\mathfrak{B}]$

**Demostración:**

Sean  $\sigma \in \Pi_{n+1}[\mathfrak{B}]$  y  $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$  tales que  $\sigma \equiv \forall \vec{x} \varphi(\vec{x})$ . Si  $\vec{a} \in A$ , entonces

$\mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a})$ . Luego  $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$ , ya que  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$  y  $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n$ . En consecuencia:  
 $\mathfrak{A} \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x})$ .

□

**5.1.3 Corolario.** Si  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_n$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$ .

**Demostración:**

Basta tener presente el teorema anterior y que la teoría  $\mathbf{B}\Sigma_n$  es  $\Pi_{n+2}$ -axiomatizable.

□

A continuación, se establecen condiciones suficientes para que una extensión cofinal  $n$ -elemental de una estructura sea  $(n+1)$ -elemental.

**5.1.4 Teorema.** Sean  $n > 1$ ,  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$ , y  $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}$  tales que  $\mathfrak{A} \prec_n^c \mathfrak{B}$ .  
 Se verifica que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathfrak{B}$

**Demostración:**

Sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ ,  $\psi(x, y, z) \in \Sigma_{n-1}$  y  $a \in A$  tales que

$$\varphi(x, y) \equiv \forall z \psi(x, y, z) \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \models \exists x \forall z \psi(x, a, z)$$

Puesto que  $\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{B}$ , existe  $b \in A$  tal que  $\mathfrak{B} \models \exists x < b \forall z \psi(x, a, z)$ .

Es decir :

$$\mathfrak{B} \models \forall t \exists x < b \forall z < t \psi(x, a, z)$$

Ahora bien

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \forall t \exists x < b \forall z < t \psi(x, a, z) \\ \forall t \exists x < u \forall z < t \psi(x, y, z) \in \Pi_n(\mathbf{B}\Sigma_{n-1}) \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}, \mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1} \\ \mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}, a \in A, b \in A \end{array} \right\} \implies \mathfrak{A} \models \forall t \exists x < b \forall z < t \psi(x, a, z)$$

Por otra parte, teniendo presente que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_n$  y que  $\neg\psi(x, y, z) \in \Pi_{n-1}$  resulta que

$$\mathfrak{A} \models \forall x < b \exists z \neg\psi(x, a, z) \rightarrow \exists t \forall x < b \exists z < t \neg\psi(x, a, z)$$

Luego

$$\mathfrak{A} \models \forall t \exists x < b \forall z < t \psi(x, a, z) \rightarrow \exists x < b \forall z \psi(x, a, z)$$

Es decir

$$\mathfrak{A} \models \exists x < b \forall z \psi(x, a, z)$$

Sea  $c \in A$  tal que  $c < b$  y  $\mathfrak{A} \models \forall z \psi(c, a, z)$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \forall z \psi(c, a, z)$  y, por tanto,  $\mathfrak{B} \models \varphi(c, a)$ .

Del test de Tarski-Vaught, concluimos que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$ . □

**5.1.5 Teorema.** Si  $\mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_0$ , entonces  $\mathfrak{A} \prec_2^c \mathfrak{B}$ .

**Demostración:**

La prueba es análoga a la del teorema anterior. □

**5.1.6 Teorema.**  $\mathfrak{A} \prec_0^c \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{B}$ .

**Demostración:**

Sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_0$  y  $a \in A$  tales que  $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, a)$ . Puesto que  $\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{B}$ , existe  $b \in A$  tal que  $\mathfrak{B} \models \exists x < b \varphi(x, a)$ .

Teniendo presente que la fórmula  $\exists x < t \varphi(x, y)$  es  $\Sigma_0$  resulta que  $\mathfrak{A} \models \exists x < b \varphi(x, a)$ . Por tanto, si  $c \in A$  es tal que  $c < b$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi(c, a)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \varphi(c, a)$ . □

**5.1.7 Teorema.** (Teorema “splitting” en  $\mathbf{F}^*\Sigma_n$ )

Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  estructuras tales que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$ . Existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathfrak{C} \prec_n^c \mathfrak{B}$ .

Además, si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

Consideremos  $\mathfrak{C} = \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$  el segmento inicial de  $\mathfrak{B}$  determinado por  $\mathfrak{A}$ .

$$\boxed{\mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathfrak{B}) \prec_n^e \mathfrak{B}}$$

Si  $n = 0$  el resultado es obvio ya que

$$\mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathfrak{B}) \subset_e \mathfrak{B} \implies \mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathfrak{B}) \prec_0 \mathfrak{B}$$

Supongamos que  $n > 0$ . Sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_{n-1}$  y  $a \in \mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathfrak{B})$  tales que  $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a, y)$ . Se verifica

$$a \in \mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathfrak{B}) \implies \exists b \in A : \mathfrak{B} \models a \leq b$$

Consideremos la  $\Sigma_n(\mathbf{B}\Sigma_{n-1})$ -fórmula  $\theta(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge \forall t < y \neg \varphi(x, t)$ .

Entonces

- $\theta(x, y) \in \Sigma_n(\mathfrak{B})$  ya que  $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y  $\mathbf{F}^* \Sigma_n \implies \mathbf{B}\Sigma_n$ .
- $\theta(x, y) \in \Sigma_n(\mathcal{A})$  ya que  $[\mathcal{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \text{ y } \mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}] \implies [\mathcal{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n-1}]$ .

Por otra parte

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a, y) \\ \varphi(x, y) \in \Pi_{n-1} \\ \mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n \implies \mathfrak{B} \models \mathbf{L}\Pi_{n-1} \end{array} \right\} \implies \mathfrak{B} \models \exists y \theta(a, y) \implies \mathfrak{B} \models \exists x \leq b \exists y \theta(x, y)$$

Teniendo presente que  $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n$  y que  $\theta(x, y)$  define sobre  $\mathfrak{B}$  una  $\Sigma_n$ -aplicación en un subconjunto no vacío de  $b+1$ , deducimos que existe  $q \in B$  tal que  $\mathfrak{B} \models q = (\max y)_{x \leq b} \theta(x, y)$ .

Consideremos la  $\Sigma_{n+1}(\mathbf{B}\Sigma_{n-1})$ -fórmula

$$\psi(m, z) \equiv \exists x \leq z \theta(x, m) \wedge \forall x \leq z \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq m)$$

Puesto que  $\mathfrak{B} \models \exists m \psi(m, b)$ ,  $\mathcal{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$  y  $b \in A$  resulta que  $\mathcal{A} \models \exists m \psi(m, b)$ .

Si  $p \in A$  es tal que  $\mathcal{A} \models \psi(p, b)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \psi(p, b)$ .

Es decir

$$\mathfrak{B} \models \exists x \leq b \theta(x, p) \wedge \forall x \leq b \forall y (\theta(x, y) \rightarrow y \leq p)$$

Por tanto

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \exists y \theta(a, y) \\ a \leq b \end{array} \right\} \implies \mathfrak{B} \models \exists y \leq p \theta(a, y)$$

Luego, si  $c \in B$  tal que  $c \leq p$  y  $\mathfrak{B} \models \theta(a, c)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \varphi(a, c)$ .

La prueba concluye a partir del test de Tarski-Vaught, observando que

$$(c \in B, p \in A, c \leq p) \implies c \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$$

$$\boxed{\mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})}$$

Sean  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$  y  $a \in \mathfrak{A}$  tales que  $\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \models \exists y \varphi(a, y)$ . Sea  $b \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$  tal que  $\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \models \varphi(a, b)$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a, b)$ , ya que  $\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \prec_n \mathfrak{B}$  y  $\varphi(x, y) \in \Pi_n$ . Luego  $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a, y)$  y, por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \exists y \varphi(a, y) \\ \exists y \varphi(x, y) \in \Sigma_{n+1} \\ \mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B} \\ a \in A \end{array} \right\} \implies \mathfrak{A} \models \exists y \varphi(a, y)$$

Si  $c \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(a, c)$ , entonces  $\mathfrak{B} \models \varphi(a, c)$ , ya que  $\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ . Luego

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{B} \models \varphi(a, c) \\ \varphi(x, y) \in \Pi_n \\ \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \prec_n \mathfrak{B} \\ a, c \in A \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \end{array} \right\} \implies \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \models \varphi(a, c)$$

$$\boxed{\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \neq \mathfrak{B} \implies \mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}}$$

Se deduce del teorema 1.4.6, observando que

1.  $\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$  es un segmento inicial propio de  $\mathfrak{B}$  cerrado bajo  $\{+, \cdot\}$ .
2.  $\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) \prec_n^c \mathfrak{B}$ .
3.  $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^* \Sigma_n \implies \mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_n$ .

□

**5.1.8 Corolario.** Si  $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^*\Sigma_0$ , entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_2^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$ . Además, si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ .

**Demostración:**

Del teorema 5.1.7, resulta que existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_0$ . Luego, del corolario 5.1.3 resulta que  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_0$  y del teorema 5.1.4 concluimos que  $\mathfrak{A} \prec_2 \mathfrak{C}$ .

□

**5.1.9 Corolario.** Sean  $n > 0$  y  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  estructuras tales que

- $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{B}$
- $\mathfrak{B} \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$  y  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$

Entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_{n+2}^c \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{B}$ . Además, si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

Del teorema 5.1.7 resulta que existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que

$$\mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{B} \quad \text{y} \quad \mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_n$$

Por tanto

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \prec_{n+1}^c \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \\ \mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_n \end{array} \right\} \xrightarrow{5.1.4} \mathfrak{A} \prec_{n+2} \mathfrak{B}$$

□

Finalmente, vamos a ver en los esquemas  $\mathbf{F}^*\Sigma_n$  la versión de un resultado de H. Gaifman ([10]: Si  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$  son modelos de  $\mathbf{PA}$  tales que  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son subestructuras de  $\mathfrak{D}$  mutuamente cofinales, entonces  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  poseen una extensión elemental común que es subestructura de  $\mathfrak{D}$ )

**5.1.10 Definición.** Sean  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$  estructuras tales que  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ . Diremos que  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son subestructuras de  $\mathfrak{D}$  mutuamente cofinales si

1.  $\forall x \in A \exists y \in B : \mathfrak{D} \models x \leq y$ .
2.  $\forall z \in B \exists t \in A : \mathfrak{D} \models z \leq t$ .

**5.1.11 Corolario.** Sean  $n > 0$  y  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$  estructuras tales que

- $\mathfrak{A} \prec_{n+1} \mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{B} \prec_{n+1} \mathfrak{D}$ .
- $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son mutuamente cofinales en  $\mathfrak{D}$ .
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$  y  $\mathfrak{D} \models \mathbf{F}^*\Sigma_n$ .

Entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que

$$\mathfrak{A} \prec_{n+2}^c \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{D} \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \prec_{n+2}^c \mathfrak{C} \prec_n^e \mathfrak{D}$$

Además, si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{D}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$ .

**Demostración:**

Del corolario 5.1.9 resulta que existen estructuras  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$  tales que

$$\mathfrak{A} \prec_{n+2}^c \mathfrak{C}_1 \prec_n^e \mathfrak{D} \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \prec_{n+2}^c \mathfrak{C}_2 \prec_n^e \mathfrak{D}$$

Además

$$\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{D} \implies \mathfrak{C}_1 \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathfrak{C}_2 \neq \mathfrak{D} \implies \mathfrak{C}_2 \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1}$$

Como  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son mutuamente cofinales en  $\mathfrak{D}$ , resulta que  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ .

□

## 5.2 Otros teoremas splitting en fragmentos de la aritmética

### 5.2.1 Teorema. (Splitting en $\mathbf{I}\Sigma_0$ )

Si  $\mathcal{A} \prec_0 \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \models \mathbf{I}\Sigma_0$ , entonces existe una única estructura  $\mathcal{C}$  tal que

$$\mathcal{A} \prec_1^c \mathcal{C} \prec_0^c \mathcal{B}$$

Además, si  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$  y  $\mathcal{A} \prec_2^c \mathcal{C}$ .

#### Demostración:

Consideremos  $\mathcal{C} = \mathcal{J}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ . Entonces  $\mathcal{C} \subset_c \mathcal{B} \implies \mathcal{C} \prec_0 \mathcal{B}$ . Ahora bien

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \prec_0 \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \prec_0 \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \end{array} \right\} \implies \mathcal{A} \prec_0 \mathcal{C} \implies \mathcal{A} \prec_1 \mathcal{C} \quad [ \mathcal{A} \subset_c \mathcal{C} ]$$

Si  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{C}$  es un segmento propio de  $\mathcal{B}$ , cerrado bajo  $\{+, \cdot\}$ , tal que  $\mathcal{C} \prec_0 \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \models \mathbf{I}\Sigma_0$ . Luego  $\mathcal{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ . Supongamos que  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ . Entonces  $\mathcal{A} \models \mathbf{B}\Sigma_0$ , ya que  $\mathcal{A} \prec_1 \mathcal{C}$  y  $\mathcal{C} \models \mathbf{B}\Sigma_0$ . Como, además,  $\mathcal{A} \subset_c \mathcal{C}$ , por 5.1.4 deducimos que  $\mathcal{A} \prec_2^c \mathcal{C}$ . □

### 5.2.2 Teorema. (Splitting en $\mathbf{I}\Sigma_0 + \text{exp}$ )

Si  $\mathcal{A} \models \mathbf{I}\Sigma_0 + \text{exp}$ ,  $\mathcal{B} \models \mathbf{I}\Sigma_0 + \text{exp}$  y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , entonces existe una única estructura  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{A} \prec_1^c \mathcal{C} \prec_0^c \mathcal{B}$ .

Además, si  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$  y  $\mathcal{A} \prec_2^c \mathcal{C}$ .

#### Demostración:

Teniendo presente el teorema 5.2.1, basta probar que  $\mathcal{A} \prec_0 \mathcal{B}$ . Para ello, sean  $\varphi(\vec{x}) \in \Sigma_0$  y  $\vec{a} \in A$  tales que  $\mathcal{A} \models \varphi(\vec{a})$ . Por el teorema 1.6.1 de Gaifman–Dimitracopoulos, existe un polinomio  $p(\vec{x}, \vec{y})$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  tal que

$$\mathbf{I}\Sigma_0 + \text{exp} \vdash \forall \vec{x} (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y} (p(\vec{x}, \vec{y}) = 0))$$

Luego

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \implies \mathfrak{A} \models \exists \vec{y}(p(\vec{a}, \vec{y}) = 0) \implies \mathfrak{B} \models \exists \vec{y}(p(\vec{a}, \vec{y}) = 0) \implies \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a})$$

Si  $\psi(\vec{x}) \in \Sigma_0$  y  $\vec{a} \in A$  son tales que  $\mathfrak{B} \models \psi(\vec{a})$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})$ , ya que, caso contrario,  $\mathfrak{A} \models \neg\psi(\vec{a}) \implies \mathfrak{B} \models \neg\psi(\vec{a})$ .

□

### 5.2.3 Teorema. (Splitting en $\mathbf{I}\Sigma_1$ )

Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_1$ ,  $\mathfrak{B} \models \mathbf{I}\Sigma_0 + \exp$  y  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ , entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_2^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$ .

Además, si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ .

**Demostración:**

Del teorema 5.2.2, resulta que existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que  $\mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$  y si  $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{B}$ , entonces  $\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ .

Ahora bien

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{I}\Sigma_1 \implies \mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{5.1.4} \mathfrak{A} \prec_2 \mathfrak{C}$$

□

### 5.2.4 Teorema. (Splitting en $\mathbf{B}\Sigma_1$ )

Si  $\mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_1$ ,  $\mathfrak{B} \models \mathbf{B}\Sigma_1$  y  $\mathfrak{A} \prec_0 \mathfrak{B}$ , entonces existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que

$$\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \prec_2^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$$

**Demostración:**

Del teorema 5.2.3, resulta que existe una única estructura  $\mathfrak{C}$  tal que

$$\mathfrak{C} \models \mathbf{B}\Sigma_1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{C} \prec_0^e \mathfrak{B}$$

Ahora bien

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \prec_1^c \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \models \mathbf{B}\Sigma_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{5.1.4} \mathfrak{A} \prec_2 \mathfrak{C}$$

□

# Apéndice

Relaciones entre los esquemas de inducción, colección y colección fuerte para  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$ ,  $\Lambda_n$

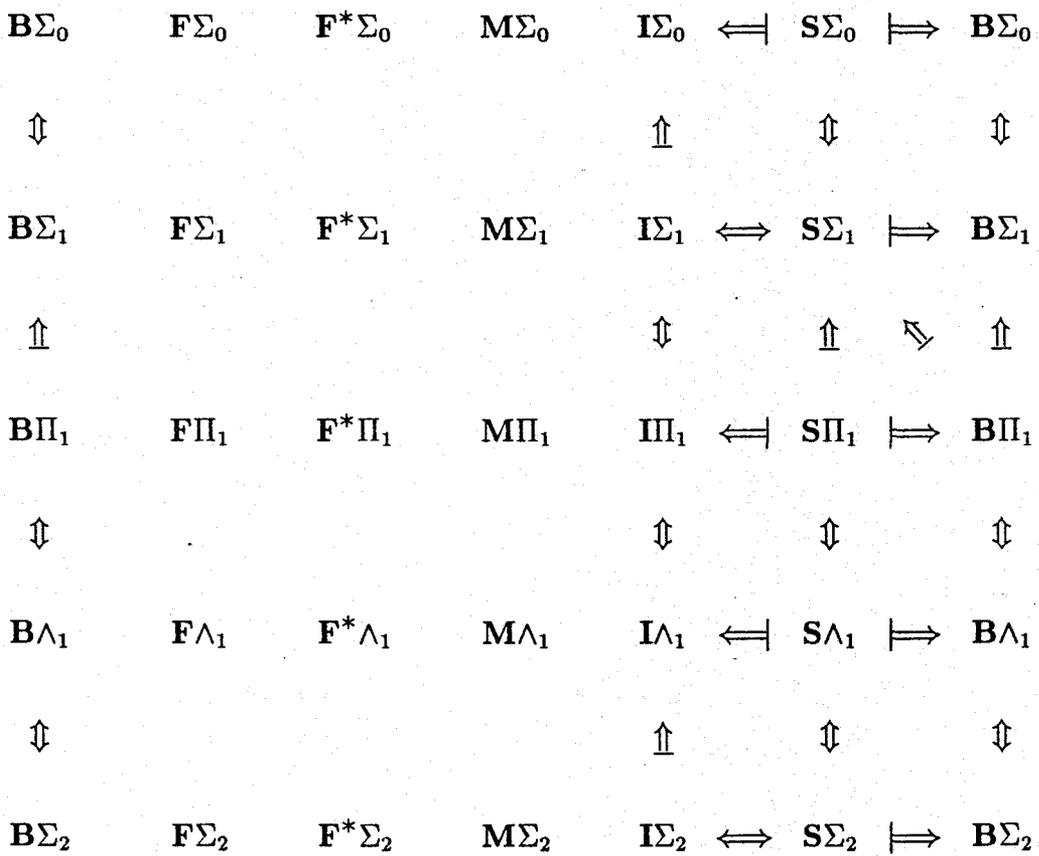


Figura 1

## Relaciones entre los esquemas del máximo y de inducción para $\Sigma_n$ , $\Pi_n$ , $\Lambda_n$

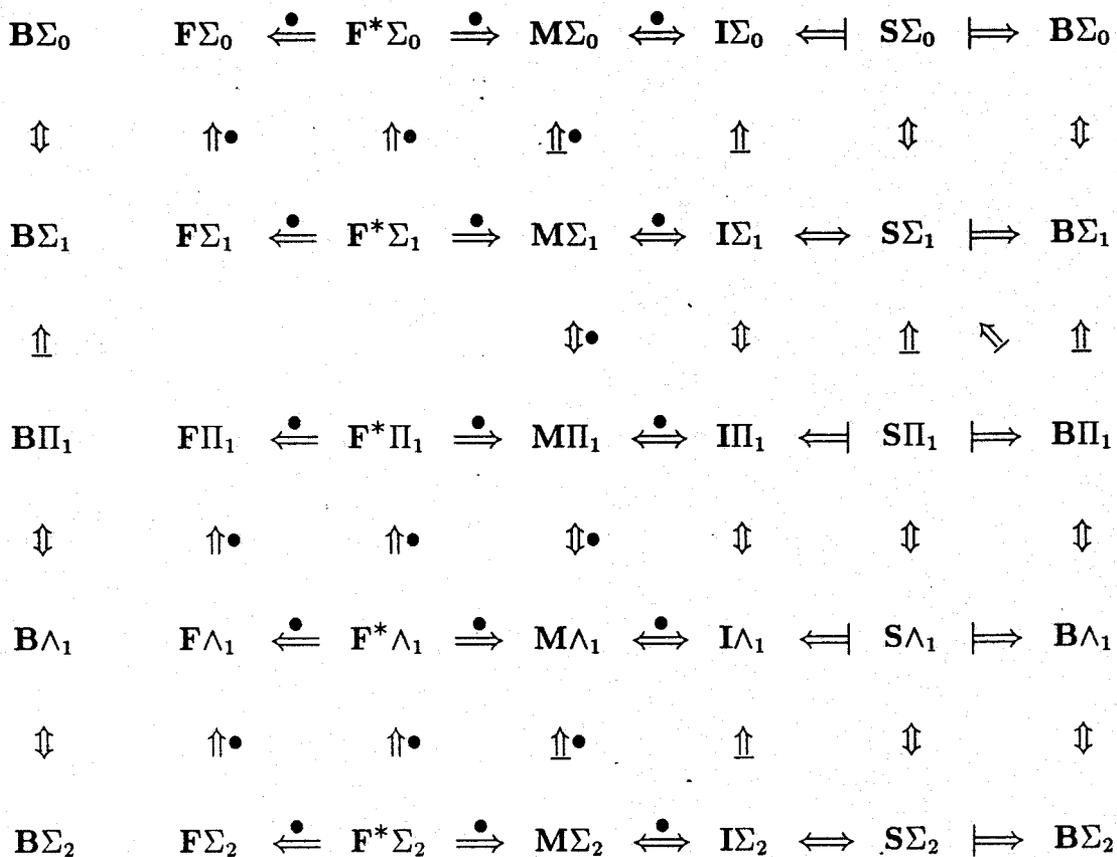


Figura 2

# Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección fuerte para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ (I)

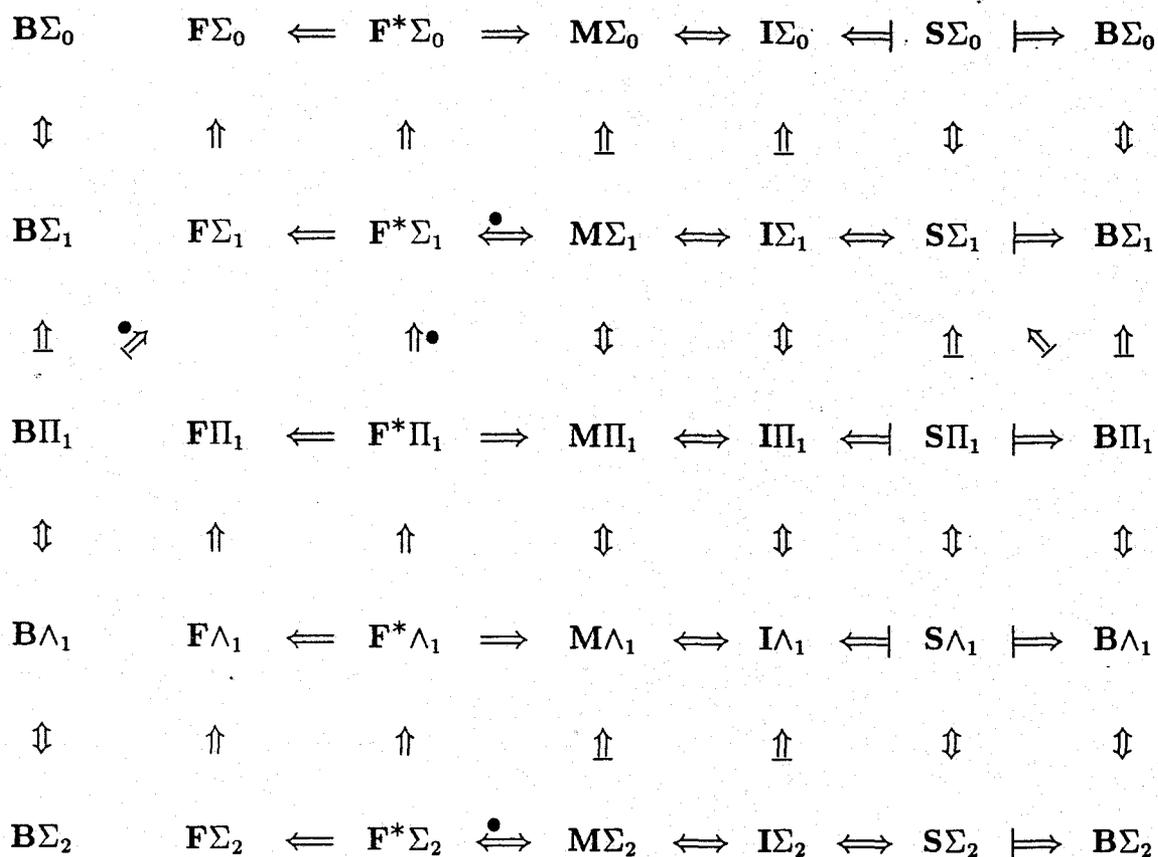
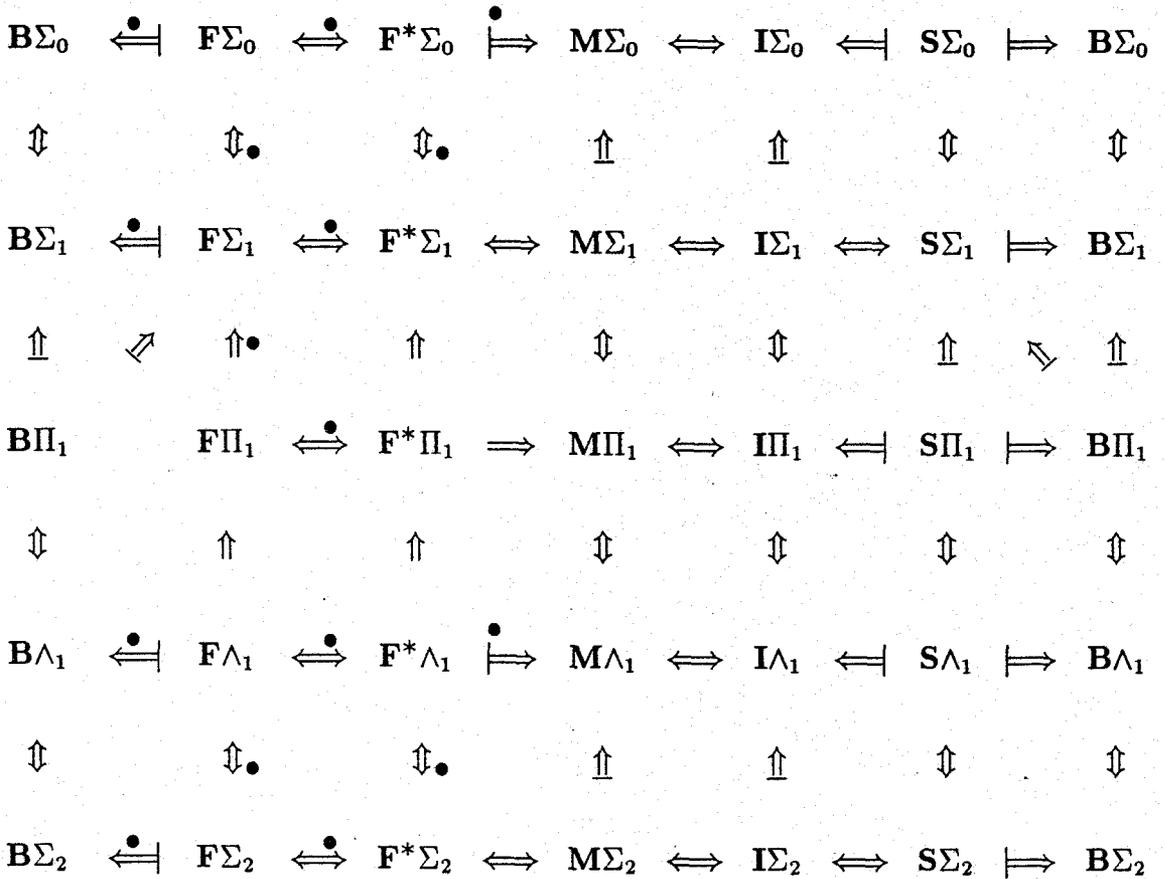


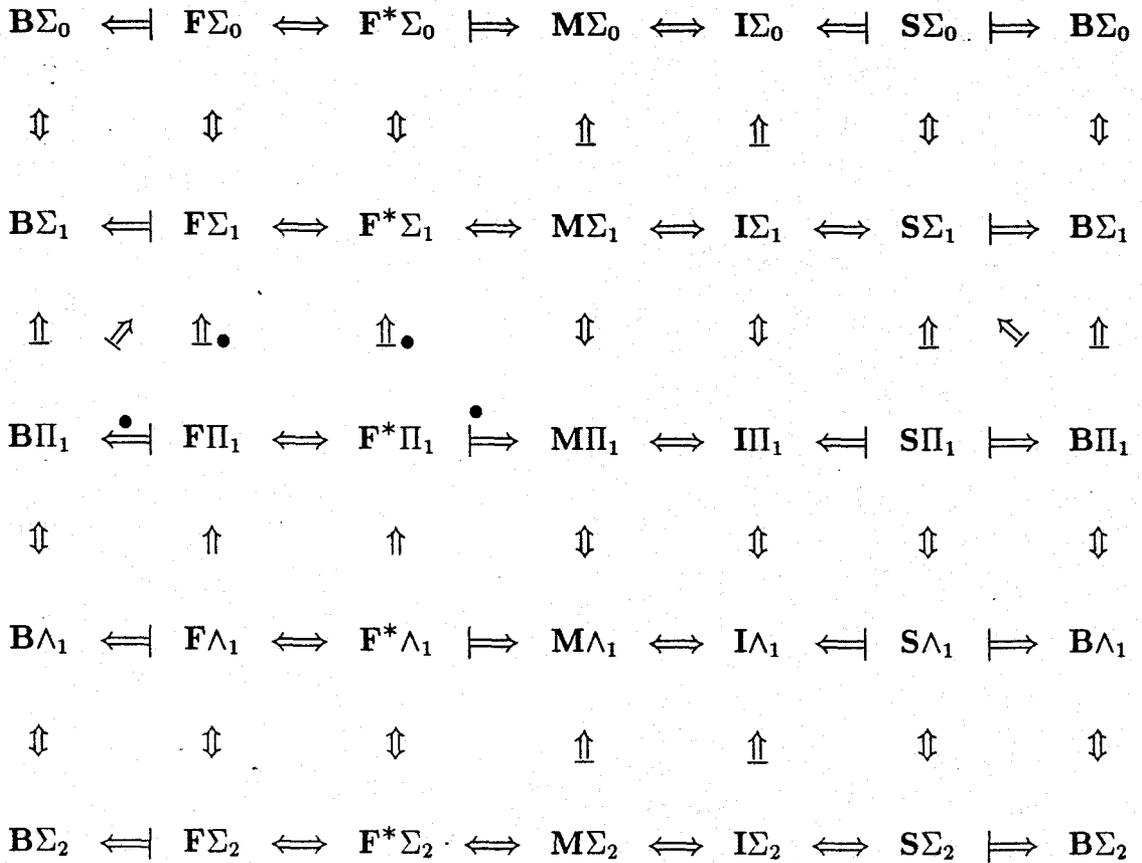
Figura 3

**Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección fuerte para  $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$  (II)**



**Figura 4**

**Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección para  $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$  (I)**



**Figura 5**

# Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección para $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$ (II)

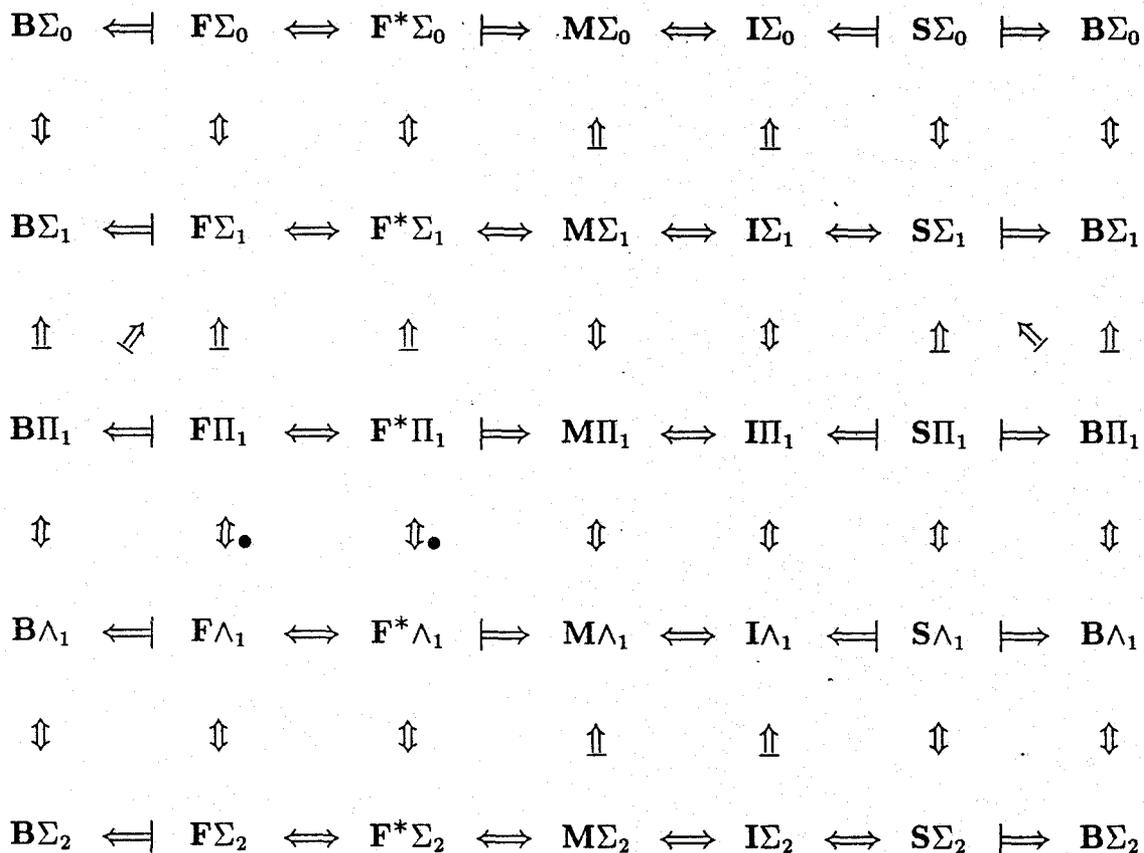


Figura 6

Relaciones entre los esquemas del máximo y de colección para  $\Sigma_n, \Pi_n, \Lambda_n$  (III)

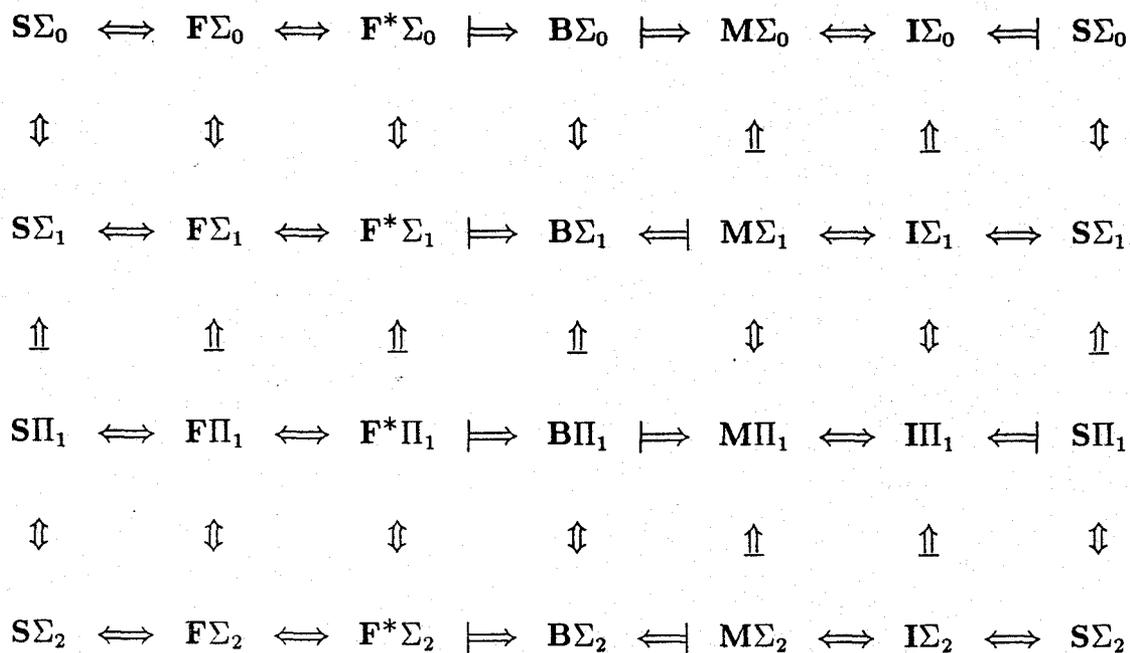


Figura 7

Relaciones entre los esquemas del máximo, inducción , colección y colección fuerte para  $\Delta_{n+1}$  (I)

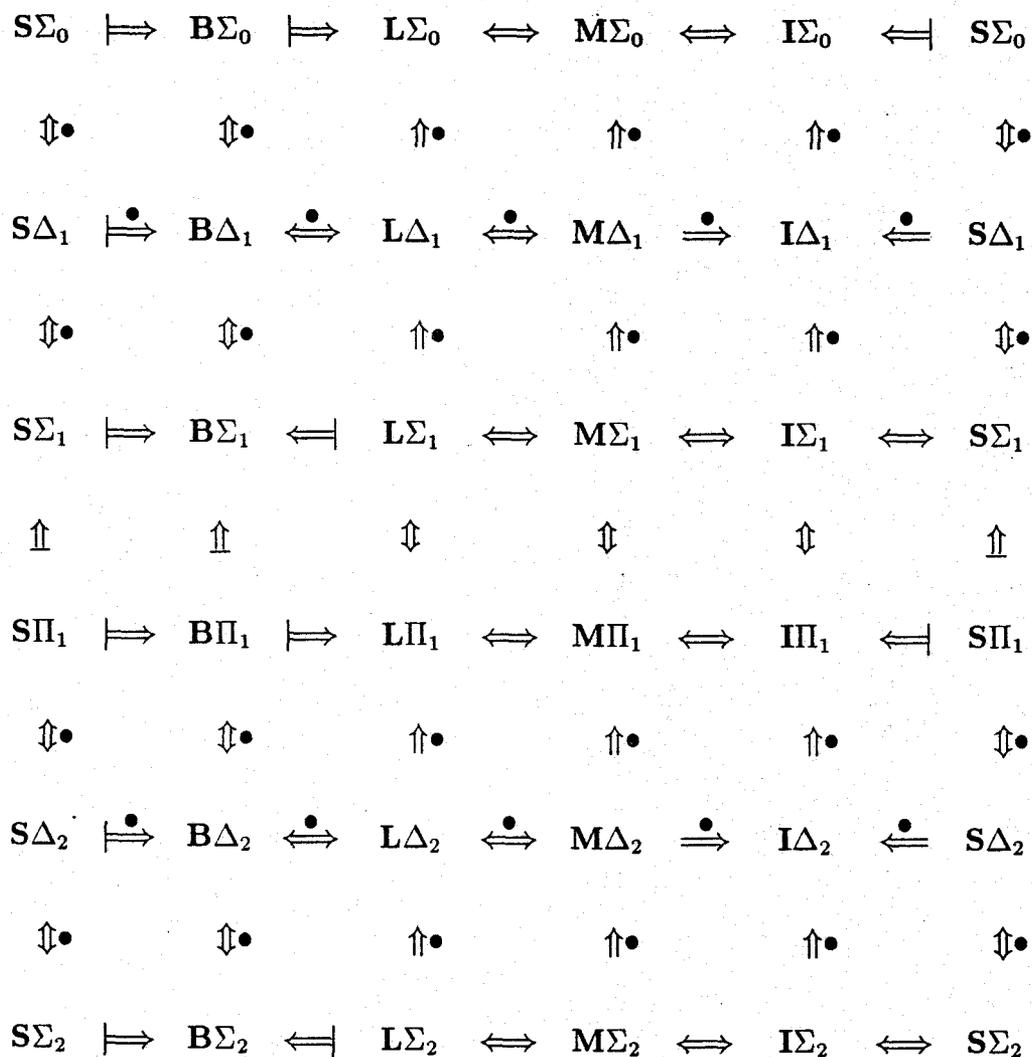


Figura 8

Relaciones entre los esquemas del máximo, inducción , colección y colección fuerte para  $\Delta_{n+1}$  (II)

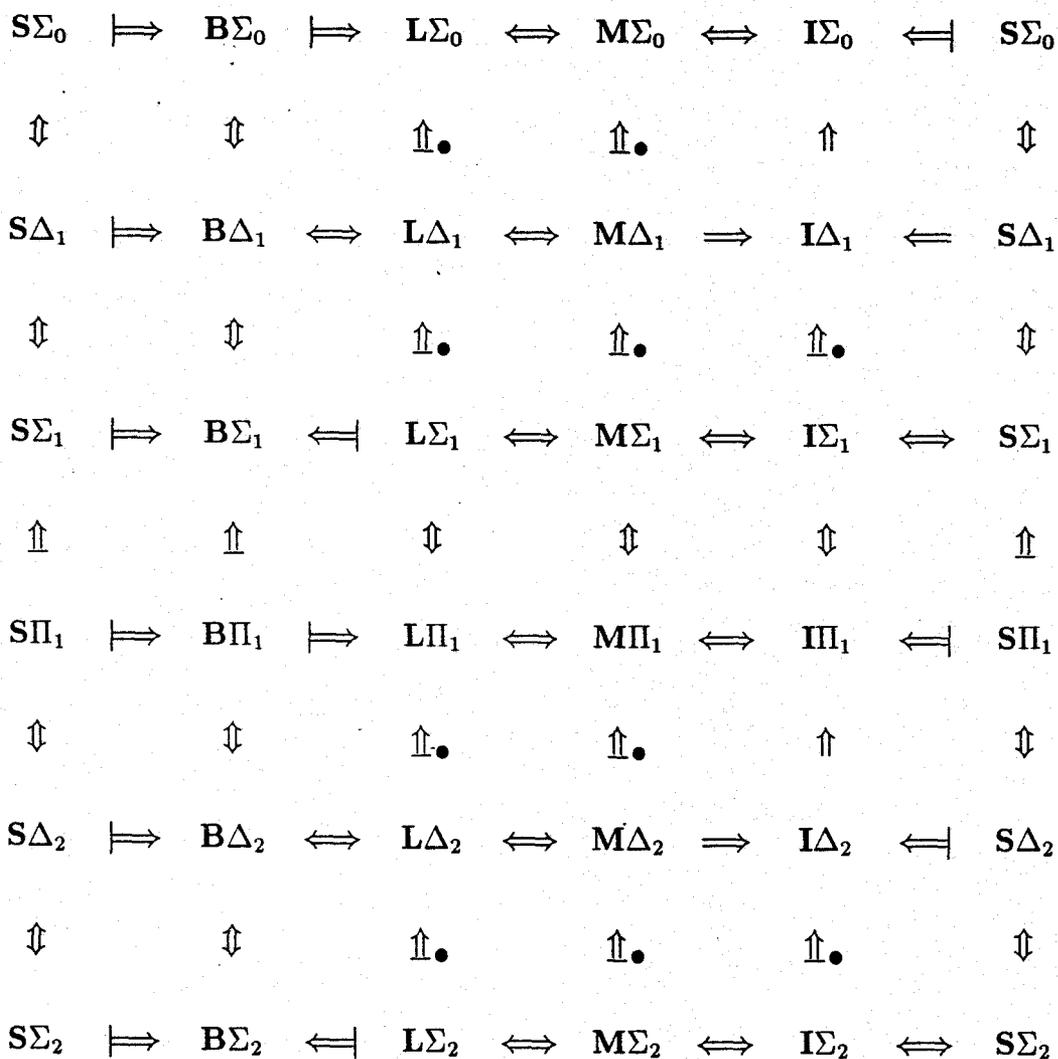


Figura 9

# Indice de notaciones

$L$ .....	1	$B\Gamma$ .....	5
$\text{Form}(L)$ .....	1	$S\Gamma$ .....	5
$\text{Sent}(L)$ .....	1	$L\Delta_n$ .....	5
$P^-$ .....	1	$S\Delta_n$ .....	5
$N$ .....	1	$I\Delta_n$ .....	5
$\omega$ .....	1	$B\Delta_n$ .....	5
$\Delta_0$ .....	2	$\langle x, y \rangle$ .....	5
$\Sigma_n$ .....	2	$(z)_0$ .....	6
$\Pi_n$ .....	2	$(z)_1$ .....	6
$\Lambda_n$ .....	2	$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .....	6
$V_n$ .....	2	$\vec{a} \in A$ .....	7
$\Delta_{n+1}$ .....	2	$\mathfrak{A} \prec_{\Gamma} \mathfrak{B}$ .....	7
$\Gamma(T)$ .....	2	$A \subset B$ .....	7
$\Gamma(\mathfrak{A})$ .....	2	$\mathfrak{A} \prec_n \mathfrak{B}$ .....	7
$\mathfrak{A} \models T$ .....	3	$\mathfrak{A} \subset_e \mathfrak{B}$ .....	8
$\mathfrak{A} \not\models T$ .....	3	$\mathfrak{A} \subset_c \mathfrak{B}$ .....	8
$T \Rightarrow T'$ .....	3	$\mathcal{J}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ .....	8
$T \Vdash T'$ .....	3	$\mathfrak{A} \prec_n^c \mathfrak{B}$ .....	8
$I_{\varphi}$ .....	4	$\mathfrak{A} \prec_e^c \mathfrak{B}$ .....	8
$L_{\varphi}$ .....	4	$\mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{a}) \rightsquigarrow b$ .....	9
$x = (\mu z)\varphi(z, \vec{y})$ .....	4	$K_n(\mathfrak{A}; X)$ .....	9
$B_{\varphi}$ .....	4	$I_n(\mathfrak{A}; X)$ .....	9
$S_{\varphi}$ .....	4	$I_n(\mathfrak{A})$ .....	9
$PA$ .....	4	$K_n(\mathfrak{A})$ .....	9
$\Pi\Gamma$ .....	5	$\exp$ .....	10
$LG$ .....	5	$\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner$ .....	11

$V_n(x, \vec{y})$ .....	11	$J_n^*(\mathfrak{A}; a)$ .....	83
$V^n(x, \vec{y})$ .....	11	$F_{\Pi_n}(x, y)$ .....	95
$\text{FUN}(\theta(x, y), z)$ .....	13	$\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ .....	96
$\Gamma$ -aplicación .....	13	$\text{Th}_n(\mathfrak{A})$ .....	97
$F_\theta^*$ .....	14	$\Gamma[\mathfrak{A}]$ .....	102
$m = (\max y)_{x \leq z} \theta(x, y)$ .....	14		
$F_\theta$ .....	14		
$M_\varphi$ .....	14		
$m = (\max x)_{x \leq z} \varphi(x)$ .....	14		
$F^*\Gamma$ .....	14		
$F\Gamma$ .....	14		
$M\Gamma$ .....	14		
$\overset{\bullet}{\rightleftarrows}$ .....	15		
$\overset{\bullet}{\rightleftarrows}$ .....	15		
$R_\varphi$ .....	39		
$R\Gamma$ .....	39		
$\text{PHP } \Gamma$ .....	54		
$F^*\Delta_{n+1}$ .....	61		
$F\Delta_{n+1}$ .....	61		
$M\Delta_{n+1}$ .....	61		
$\Sigma_0(\sigma)$ .....	69		
$\Sigma_0(\Gamma)$ .....	69		
$I\Sigma_0(\Delta_n)$ .....	69		
$S_k^n(\mathfrak{A}; X)$ .....	75		
$I_n^*(\mathfrak{A}; a)$ .....	75		
$I_n^*(\mathfrak{A})$ .....	75		
$H^n(\mathfrak{A})$ .....	75		
$\varphi(x, y, \vec{u}) \in \text{FUN}(v)$ .....	82		
$[\varphi, a, \vec{b}]$ .....	82		
$\text{cl}_k^n(\mathfrak{A}; a)$ .....	82		
$J_n(\mathfrak{A}; a)$ .....	82		
$\text{cl}_k^{*n}(\mathfrak{A}; a)$ .....	82		

# Bibliografía

- [1] CHANG, C.C.; KEISLER, H.J. **Model Theory**. North-Holland. Amsterdam (1977).
- [2] CLOTE, P.G. *Partition relations in arithmetic*. **Lecture Notes in Mathematics**. Vol 1130 (1983), pp. 32-68.
- [3] CLOTE, P.G. *A note on the Mac Dowell-Specker theorem*. **Fundamenta Mathematica**. Vol 127 (1986), pp 163-170.
- [4] DIMITRACOPOULOS, C. *Matijasevič's Theorem and fragments of Arithmetic*. Tesis Doctoral. Universidad de Manchester (1980).
- [5] DIMITRACOPOULOS, C. *A generalization of a theorem of H. Friedman*. **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**. Vol 31 (1985), pp. 221-225.
- [6] DIMITRACOPOULOS, C. *Overspill and Fragments of Arithmetic*. **Archive for Mathematical Logic**. Vol 32 (1989), pp.73-80.
- [7] DIMITRACOPOULOS, C.; PARIS, J. *The pigeonhole principle and fragments of arithmetic*. **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**. Vol 32 (1986), pp. 73-80.
- [8] DIMITRACOPOULOS, C.; PARIS, J. *A note on a theorem of H. Friedman*. **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**. Vol 34 (1988), pp. 13-17.

- [9] FRIEDMAN, H. *Countable models of set theories*. **Lecture Notes in Mathematics**. Vol 337 (1973), pp. 539-573.
- [10] GAIFMAN, H. *A note on models and submodels of arithmetic*. **Lecture Notes in Mathematics**. Vol 255 (1972), pp. 128-144.
- [11] GAIFMAN, H. *Models and types of Peano's arithmetic*. **Annals of Mathematical Logic**. Vol 9 (1976), pp.223-306.
- [12] GAIFMAN, H.; DIMITRACOPOULOS, C. *Fragments of arithmetic and the MRDP theorem*. **Logic and Algorithmic**. **Monographie de L'Enseignement Mathématique**. N° 30 (1982), pp.187-206.
- [13] HÁJEK, P. *Positive results on fragments of arithmetic*. Praga. Preprint.
- [14] HÁJEK, P. Comunicación personal. 1991.
- [15] HÁJEK, P.; PUDLÁK, P. **Metamathematics of first-order arithmetic**. Springer-Verlag. En prensa.
- [16] KAYE, R. *Diophantine and Parameter-free Induction*. Tesis doctoral. Universidad de Manchester (1987).
- [17] KAYE, R. **Models of Peano Arithmetic**. Oxford Logic Guides 15. Oxford (1991).
- [18] KAYE, R. ; PARIS, J. ; DIMITRACOPOULOS, C. *On parameter free induction schemas*. **The Journal of Symbolic Logic**. Vol 53 (1988), n° 4, pp. 1082-1097.
- [19] LESSAN, H. *Models of Arithmetic*. Tesis doctoral. Universidad de Manchester (1978).
- [20] MC ALOON, K. *Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic*. **Transactions of the American Mathematical Society**. Vol 239 (1978), pp 253-277.

- [21] MCLAUGHLIN, T.G. *Sub-arithmetical ultrapowers: a survey*. **Annals of Pure and Applied Logic**. Vol 49 (1990), pp.143-191.
- [22] MILLS, G.M. *Extensions of Models of Peano Arithmetic*. Tesis doctoral. Berkeley. Universidad de California (1980).
- [23] MILLS, G.M. ; PARIS J. *Regularity in models of arithmetic*. **The Journal of Symbolic Logic**. Vol 49 (1984), n° 1, pp. 272-280.
- [24] PARIS, J. *A hierarchy of cuts in models of arithmetic*. **Lecture Notes in Mathematics**. Vol. 834 (1979), pp. 312-337.
- [25] PARIS, J. ; KIRBY, L.  $\Sigma_n$ -*Collection Schemas in Arithmetic*. **Logic Colloquium'77**. North-Holland (1978), pp.199-209.
- [26] POIZAT, B. *Cours de Théorie des Modèles*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, n° 1. Offilib. Paris (1985).
- [27] SMORYŃSKI C. *Lectures on nonstandard models of arithmetic*. **Logic Colloquium'82**. North-Holland (1984), pp.1-70.
- [28] WILKIE, A.J. *Models of Arithmetic*. Notas manuscritas. Oxford (1979).

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

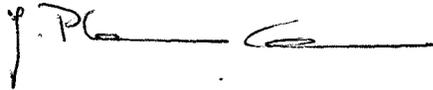
Reunido el Tribunal nombrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D. Mario de Jesús Pérez Jiménez  
con el título Esquemas del máximo en la aritmética

acordó otorgarle el título de Apto cum laude por unanimidad

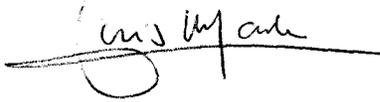
Sevilla, 27 de Marzo

1992

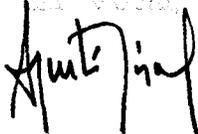
El Vocal,



El Presidente



El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Doctorado,

