CONSTRUCCION EXPLICITA DE VALORACIONES DISCRETAS DE RANGO 1

Autorizo la consulta de esta tesis Doctoral

Fdo.: Emilio Briales Morales.

Memoria presentada por Emilio Briales Morales para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Director de la memoria

José L. Vicente

Fdo.: José L. Vicente Córdoba

VºBº del Director del Departamento

José L. Vicente

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS

INDICE

INTRODUCCION.-

La teoría de valoraciones tiene en O. Zariski y S.S. Abhyankar sus principales artífices.

En 1939, O. Zariski, en su trabajo "The reduction of singularities of an algebraic surfaces" |35| construye los distintos tipos de valoraciones de un cuerpo de funciones algebraicas de dos variables, con cuerpo base de característica cero. Esto es utilizado para demostrar que todo cuerpo de funciones algebraicas de dos variables posee un modelo proyectivo liso.

Más tarde, en 1954, este autor en su trabajo "Applicazione geometriche della teoria delle valutazioni" (Rend. Mat. e Appl. Vol 13, fasc. 1, 2. Roma 1954) prueba el teorema de uniformización de valoraciones, lo que permite resolver las singularidades de variedades tridimensionales.

Hacia la mitad de la década de los cincuenta, S.S. Abhyankar reemprende el estudio de la teoría de valoraciones, dirigido hacia la resolución de singularidades en característica positiva.(Veanse los distintos trabajos de este autor citados en la bibliografía.)

En 1981, F.J. Herrera, en su Tesis Doctoral, da la construcción explícita de las valoraciones de $k((X_1,X_2))|k$, y de la ramificación de las funciones de orden, siempre en el caso de k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Es en la linea de dicho trabajo donde se enmarca la presente memoria, es decir, el objetivo principal del trabajo que presentamos es estudiar, mediante cálculos explícitos, las valoraciones discretas de rango 1 en cuerpos de series.

Podríamos distinguir dos partes dentro del presente trabajo. Por un lado está el estudio de valoraciones discretas de rango 1 sobre un cuerpo de series en dos variables, que se realiza en el capítulo II de la presente memoria, y por otro, se estudian las valoraciones discretas de rango 1 sobre un cuerpo de series en n variables, $n > 2$. En ambos casos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

No obstante, una diferencia importante entre ambas partes radica en la condición de ser o no un trabajo abierto. Expliquemos esto.

En el capítulo I y en el apéndice se resuelven diversos problemas sobre valoraciones discretas de rango 1 de $k((X_1,.X_2,\ldots,X_n))|k$, cuyo centro en $k||X_1,\ldots,X_n||$ es el ideal maximal. Algunos de ellos son: estudio y cálculo del cuerpo residual de una función de orden, Teoremas de existencia (constructivos) de valoraciones con ideal singular prefijado, Teorema de existencia de valoraciones discretas de rango 1 y de dimensión menor que n-1, etc. Esto constituye un primer paso en el estudio de tales valoraciones, teniendo en cuenta que la literatura existente es este campo es muy escasa.

En el capítulo II se hace un estudio exhaustivo de las valoraciones discretas de rango 1 de $k((X_1,X_2))|k$ tales que su centro en $k||X_1,X_2||$ es el ideal maximal. En particular, se dan teoremas de caracterización de las funciones de orden, se calcula el cuerpo residual de todas las valoraciones discretas de rango 1 y centradas en el ideal maximal, se describe un proceso "algorítmico" para llevar cualquier valoración discreta de rango 1, centrada en el ideal maximal, a una valoración que sea una función de orden, y se construyen todas las ampliaciones a una extensión finita L del cuerpo de series en dos variables.

Pasemos, ahora, a contar el contenido de los dos capítulos y el apéndice.

En el capítulo I trabajamos en la situación siguiente:

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, de característica $p \geqslant 0$, $K = k((X_1,\dots,X_n))$, $R = k||X_1,\dots,X_n||$, $M = (X_1,\dots X_n)R$, y v una valoración discreta de rango 1 de $K|k$, cuyo centro en R es M.

En las secciones 0 y 1, estudiamos la técnica de la compleción y construimos un isomorfismo

$$\phi_{\kappa\theta} : \Delta_v((t)) \rightarrow K$$

definido por

$$\phi_{\kappa\theta}(\sum_{i>0} \alpha_i t^i) = \sum_{i\geq 0} \kappa(\alpha_i)\,\theta^i$$

donde κ es una k-sección del homomorfismo natural $R_v \rightarrow \Delta_v$, $\theta \in R_{\hat{v}}$ es un elemento de valor 1, $\hat{K}$ la compleción de K respecto de v y $\hat{v}$ la ampliación de v a $\hat{K}$. Este isomorfismo lo usaremos con bastante profusión en el resto de la memoria.

En la sección 2 estudiamos las funciones de orden v_L asociadas a una forma lineal $L = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, con $\alpha_i \in Z_0$, definidas como sigue:

Sea $f \in R$, $f \neq 0$; se pondrá $f = \sum_{A \in \xi(f)} f_A X^A$, $f_A \in k$,

donde, si $A=(a_1,\dots,a_n)$, $X^A = X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$, y $\xi(f) = \{ A \in Z^n | f_A \neq 0 \}$

Así, se define $v_L(f) = \min_{A \in \xi(f)} \{L(A)\}$

Es claro que si $\alpha_i > 0$, $i=1,\dots,n$, entonces v_L es una valoración discreta de rango 1, cuyo centro en R es M.

Un resultado clave es (cf. teorema 2.8):

Teorema 1.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K|k$, cuyo centro en R es M, sea $\alpha_i = v(X_i)$, i.1,...,n, $L=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Entonces, para todo $f \in R$ es $v(f) \geqslant v_L(f)$.

Así, diremos que una forma $f \in R$ respecto de la graduación determinada por L, es regular para v si $v(f) = v_L(f)$. En caso contrario se dirá que f es singular para v; y definimos

Definición 2.- Se llamará ideal singular de v, Sing(v), al ideal primo de $k|X_1,\ldots,X_n|$ generado por las formas singulares de v.

A continuación se demuestran algunas propiedades de dicho ideal, destacando el siguiente (cf. teorema 2.12):

Teorema 3.- Teorema de existencia de valoraciones con ideal singular prefijado.

Sea $L = \alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n$, $\alpha_i \in Z_+$, $1 \leqslant i \leqslant n$, una forma lineal, y sea dado $p \in \mathrm{Proj}_L(S_n)$ tal que $X_i \notin p$, $1\leqslant i \leqslant n$. Existe una valoración discreta de rango 1 de $K|k$, cuyo centro en R es M, que denotaremos por v, tal que $v(X_i) = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, y $p = \mathrm{Sing}(v)$.

La sección 3 la dedicamos a dar una descripción explícita del cuerpo residual Δ_{v_L} de las valoraciones v_L asociadas a una forma lineal L. Probamos el siguiente teorema (cf. teorema 3.4)

Teorema 4.- Δ_{v_L} es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia n-1.

En la sección 4 realizamos el cálculo del ideal singular y del cuerpo residual en el siguiente ejemplo:

Sean u,t,T_2,T_3,T_4 variables independientes, $K = C(u)$, y sea $\psi : C||X_1,X_2,X_3,X_4|| \rightarrow K||t,T_2,T_3,T_4||$ el C-homomorfismo dado por las sustituciones:

$$\psi(X_1) = t$$
$$\psi(X_2) = u^2 t + T_2 t^3$$
$$\psi(X_3) = u^4 t + u^3 t^2 + T_3 t^3$$
$$\psi(X_4) = u^6 t + u t^2 + T_4 t^3$$

Probamos que ψ es inyectivo, y consideramos

$$v: C((X_1,X_2,X_3,X_4)) \rightarrow Z$$

la valoración obtenida al componer la ampliación de ψ a sus cuerpos de fracciones con la función de orden en t.

Con esto terminamos el capítulo I.

En el capítulo II estudiamos el caso de dos variables: Sea $R = k||X_1,X_2||$, $K = k((X_1,X_2))$, donde X_1, X_2 son variables y k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p \geq 0$.

En primer lugar, en la sección 5, y por métodos directos, probamos (cf. teorema 5.1):

Teorema 5.- El cuerpo residual Δ_v de una valoración v discreta de rango 1 de $K|k$, cuyo centro en R es M, es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable.

En la sección siguiente afinamos este resultado, probando (cf. teorema 6.1):

Teorema 6.- Sea v como antes. Entonces Δ_v es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia 1.

Para probar este resultado, describimos un algorítmo que nos permite encontrar nuevas variables X'_1,X'_2 y un isomorfismo $\sigma : k((X'_1,X'_2)) \rightarrow K$ tales que

a) $k((X'_1,X'_2)) \subset \hat{K}$

b) $v' = v\,\sigma = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$ es una función de orden.

Las transformaciones que aplicamos a la valoración v de partida vienen dadas en función de los valores de X_1 y X_2, y son de los tres tipos siguientes:

<u>P-1</u> Si $v(X_1) < v(X_2)$

Consideramos $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2/X_1$, $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$

<u>P-2</u> Si $v(X_1) > v(X_2)$

Consideramos $X'_1 = X_1/X_2$, $X'_2 = X_2$, $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$

<u>P-3</u> Si $v(X_1) = v(X_2)$

Hacemos el cambio

$X'_1 = X_1$

$X'_2 = X_2 - a_1X_1 - a_2X^{p_1} - \ldots - a_sX^{p_s}$

$a_1,\ldots,a_s \in k \setminus \{0\}$, $0 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_s$, $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$

En primer lugar damos sentido a estas transformaciones, y probamos que los procesos <u>P-1</u> y <u>P-2</u> no alteran el caracter de ser o no función de orden de la valoración v, es decir, (cf. proposiciones 6.6 y 6.7) que v es una función de orden si y solo si lo es v'. Este resultado junto al (cf. teorema 6.3)

<u>Teorema 7</u>.- Si $v(X_1) = v(X_2)$, entonces $v = v_L$ si y solo si, para todo $(a,b) \in k^2 \setminus (0,0)$, es $v(aX_1+bX_2) = v(X_1)$.

nos da una caracterización de las funciones de orden en el caso de dos variables.

Por último, tras una serie de resultados intermedios, probamos (cf. teorema 6.12) dada una valoración v como siempre, aplicando un número finito de veces las transformaciones <u>P-1</u>, <u>P-2</u> y <u>P-3</u> obtenemos una valoración v' que es una función de orden. Esto, junto con el lema 6.14 nos da la prueba del teorema 6.

Hemos de resaltar que el algoritmo antes descrito, nos da un procedimiento de <u>cálculo explícito</u> del cuerpo residual Δ_v de cualquier valoración v discreta de rango 1, cuyo centro en R es M.

Esto último nos permite considerar una inmersión

$$\psi : K \to k(u)((t))$$

donde $k(u) = \Delta_v$, y ψ es la restricción a K del isomorfismo

$$\phi_{\kappa\theta}^{-1} : \hat{K} \to k(u)((t))$$

construido en la sección 1. Esta inmersión será la que nos permitirá construir (en el caso de característica cero) las ampliaciones de v a una extensión finita L de K. Esto se aborda en la última sección del capítulo II, y funciona como sigue:

Sea $L = K(z)$ una extensión finita de K, z un elemento primitivo de la extensión, que podemos considerar entero sobre R. Sea, también, $f(Z) \in K|Z|$ el polinomio mínimo de z sobre K, f(Z) polinomio de Weierstrass.

Si denotamos por $\psi' : K|Z| \to k(u)((t))|Z|$ la ampliación natural de ψ, sea $\bar{f}(Z) = \psi'(f(Z))$, y $\bar{f}(Z) = \bar{f}_1(Z)\ldots\bar{f}_h(Z)$ su descomposición sobre $k(u)((t))$.

Sea $\eta_i \in k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$, $i=1,..,h$, una raiz de $\bar{f}_i(Z)$. Entonces se tiene una inmersión

$$\psi_i : L \to k(u)((t))(\eta_i)$$

tal que $\psi_i(z) = \eta_i$.

Si denotamos por v'_i la valoración que a cada elemento de $k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$ le hace corresponder su orden (fraccionario) en t, se tiene que $v_i = v'_i \psi_i$ es una valoración discreta de rango 1, que amplia la de partida. Dicha valoración se realiza así:

Si $\gamma \in L$, $\gamma = \gamma_0(X_1,X_2) + \gamma_1(X_1,X_2)z + \ldots + \gamma_{n-1}(X_1,X_2)z^{n-1}$ es

$$v_i(\gamma) = v'_i(\gamma_0(\psi(X_1),\psi(X_2)) + \gamma_1(\psi(X_1),\psi(X_2))\eta_i + \ldots$$
$$\gamma_{n-1}(\psi(X_1),\psi(X_2))\eta_i^{n-1})$$

De esta forma obtenemos h ampliaciones de v a L, y todas son distintas (cf. teorema 7.4). En la demostración de este hecho se aplican argumentos tipo Puiseux a conjugados η y η' sobre k(u)((t)). Estos resultados, de forma detallada, se encuentran en |16|.

Para probar que estas son las únicas ampliaciones, calculamos el índice de ramificación y el grado relativo de las valoraciones v_i. Probamos que q_i es el índice de ramificación de v_i y, designando por e_i al grado relativo, es $q_i.e_i = n_i = \text{grad}(f_i(Z))$. Por tanto,

$$e_1.q_1 + \dots + e_h.q_h = n_1 + \dots + n_h = n$$

Ahora bien, por la fórmula general de ramificación de valoraciones se deduce que $v_1,\dots,v_h$ son todas las ampliaciones posibles de v a L.(cf. Teorema 7.8). Con esto se termina el capítulo II.

En el apéndice probamos el siguiente resultado: En $k((X_1,\dots,X_n))$, $n > 2$, existen valoraciones discretas de rango 1, cuyo centro en R es M, de dimensión menor que n-1.

Este resultado lo probamos en el caso particular n=3, si bien su generalización es inmediata.

Para su demostración nos es necesario introducir unos anillos, que denotaremos por $\mathcal{R}(R,u)$, donde R es un dominio de integridad y u es una variable, definidos así:

$$\mathcal{R}(R,u) = \{ (a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} \mid a_\gamma=0, \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{Q}_0 \setminus \{\text{una sucesión monótona creciente divergente}\}\}$$

$$\mathcal{R}(R,u) \subset \prod_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} R_\gamma \ , \ R_\gamma = R.$$

Dotamos a $\mathcal{R}(R,u)$ de estructura de anillo y estudiamos algunas de sus propiedades, por ejemplo, si R es local, $\mathcal{R}(R,u)$ es local, aunque no es noetheriano, aun cuando R lo sea. Notese que el anillo de series de Puiseux $R||u||^*$ está contenido en $\mathcal{R}(R,u)$.

En los casos en que $R = k$ o $k||t||$, con k algebraicamente cerrado de característica cero, definimos unas topologías sobre $\mathcal{R}(R,u)$ que los hacen completos. como resultado final de esta sección se tiene (cf. teorema 8.9)

Teorema 8.- Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, $\omega \in \mathcal{R}(K,u)$ una no unidad distinta de cero. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) ω es una serie de Puiseux.
2) ω es entero sobre $K||u||$.
3) ω es algebraico sobre $K((u))$.

Este teorema es clave para probar que el C-homomorfismo dado por las sustituciones

$$\zeta : C||X_1,X_2,X_3|| \rightarrow \mathcal{R}(C||t||,u)$$

$$\zeta(X_1) = t$$

$$\zeta(X_2) = ut^2$$

$$\zeta(X_3) = \sum_{i>1} u^{(3^{2i}+1)/3^i} t^{3^i}$$

es inyectivo.

Si denotamos por ν_t es la función de orden en t en $\mathcal{R}(C||t||,u)$, y componiendola con ζ, obtenemos una valoración discreta de rango 1, cuyo centro en $C||X_1,X_2,X_3||$ es el ideal maximal, y tal que $gr.tr.(\Delta_v|C) = 1$, es decir, es de dimensión uno.

CAPITULO I

VALORACIONES DISCRETAS DE RANGO 1 DE CUERPOS DE SERIES

Sección 0: La técnica de la complección.-

A lo largo de esta sección operaremos con un cuerpo fijo K.

Definición 0.1.- Un valor absoluto sobre K es una función $\phi : K \to \mathbb{R}_0$ que verifica:

0.1.1.- $\phi(a) > 0$, para todo $a \in K$, $a \neq 0$ y $\phi(0) = 0$.

0.1.2.- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

0.1.3.- $\phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b)$

Nota 0.2.-

0.2.1.- La función ϕ es un homomorfismo del grupo multiplicativo K^* de K en el grupo multiplicativo de los reales positivos; así pues $\phi(1) = 1$. Por tanto

$$\phi(-1)^2 = \phi(-1)\phi(-1) = \phi((-1)(-1)) = \phi(1) = 1$$

luego $\phi(-1) = 1$ y así $\phi(-a) = \phi(a)$, para todo $a \in K$.

0.2.2.- Si $a,b \in K$ es

$$\phi(a-b) \geq \phi(a) - \phi(b).$$

En efecto

$$\phi(a) = \phi(a-b+b) \leq \phi(a-b) + \phi(b),$$

de donde la conclusión.

Nota 0.3.- Sea $\phi : K \to \mathbb{R}_0$ un valor absoluto y sea $d_\phi : K\times K \to \mathbb{R}$ la función definida por $d_\phi(a,b) = \phi(a-b)$. Se ve inmediatamente que d_ϕ es una distancia, que convierte a K en un espacio métrico. La topología determinada por esa distancia dota a K de una estructura de cuerpo topológico. Probemos esta afirmación.

Sean $a,b \in K$ y $\delta \in \mathbb{R}_+$. Tomemos $x,y \in K$ con $\phi(x-a) < \delta/2$ $\phi(y-b) < \delta/2$; se tiene

$$\phi((x-y) - (a-b)) = \phi((x-a) - (y-b)) \leq \phi(x-a) + \phi(y-b) < \delta .$$

De otro lado sean $a,b \in K^*$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. Tomemos $\delta' \in \mathbb{R}_+$ de tal forma que $\delta' < \phi(b)$ y $\delta' < \phi(\delta\phi(b))/(\delta + \phi(a/b))$ y tomemos

$y \in K^*$ con $\phi(y-b) < \delta'$. Obsérvense los siguientes hechos:

1) $\phi(y) = \phi(b+y-b) \geqslant \phi(b) - \phi(y-b) > \phi(b) - \delta'$.

2) $\delta(\phi(b) - \delta') - \phi(a/b)\delta' = \delta\phi(b) - \delta\delta' - \phi(a/b)\delta' = \delta\phi(b) - $
$- \delta'(\delta + \phi(a/b)) > 0$.

Tomemos $x \in K^*$ con $\phi(x-a) < \delta(\phi(b) - \delta') - \phi(a/b)\delta'$; así se tiene

$$\phi((x/y)-(a/b)) = \phi(1/y)\phi((bx-ay)/b) = \phi(1/y)\phi((bx-ab+ab-ay)/b) =$$

$$= \phi(1/y)\phi((x-a)-(a/b)(y-b)) \leqslant \phi(1/y)(\phi(x-a) + \phi(a/b)\phi(y-b)) <$$

$$< \phi(1/y)(\delta(\phi(b) - \delta') - \phi(a/b)\delta') = \phi(1/y)\delta(\phi(b) - \delta') < \delta \ .$$

Esto prueba que K es un cuerpo topológico.

Nota 0.4.- Vamos a introducir una categoría importante, que denotaremos por $\mathcal{C}$, y que llamaremos categoría de los cuerpos valorados. Sus objetos, llamados cuerpos valorados, son los pares (K,ϕ) donde K es un cuerpo y ϕ es un valor absoluto. Dados dos cuerpos valorados (K,ϕ), (K',ϕ'), los morfismos del primero en el segundo son los homomorfismos de cuerpos $f:K \to K'$ que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & K' \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathbb{R}_0 & \end{tikzcd}$$

Nótese que el homomorfismo cero de K en K' queda excluido como morfismo de cuerpos valorados. Nótese, tambien, que un morfismo de cuerpos valorados es necesariamente contínuo. En efecto, sea $a \in K$ y $\delta \in \mathbb{R}_+$; considerando la bola $B(a,\delta)$ de centro a y radio δ, si $x \in B(a,\delta)$, es

$$\phi'(f(x)-f(a)) = \phi' f(x-a) = \phi(x-a) < \delta \ ,$$

luego $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\delta)$.

Una subcategoría plena muy importante de $\mathcal{C}$ es la categoría $\bar{\mathcal{C}}$ de los cuerpos valorados completos, cuyos objetos son los cuerpos valorados, completos para la topología determinada por el valor absoluto.

Fijemos un cuerpo valorado (K,ϕ) y consideremos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((K,\phi),-): \bar{\mathcal{C}} \to$ Ens, la categoría de conjuntos. Una solución del problema universal planteado por este funtor es un cuerpo valorado completo $(\hat{K},\hat{\phi})$ junto con un morfismo $f:(K,\phi) \to (\hat{K},\hat{\phi})$ de tal manera que, para todo cuerpo valorado completo (K',ϕ') y todo morfismo $g:(K,\phi) \to (K',\phi')$, existe un único $\hat{g}:(\hat{K},\hat{\phi}) \to (K',\phi')$ tal que $\hat{g}\circ f = g$. En la nota siguiente vamos a ver cómo existe esa solución del problema universal planteado anteriormente.

Nota 0.5.- Es muy clásica la construcción de lo que llamaremos "la compleción" de un cuerpo respecto de un valor absoluto. Se puede, incluso, ver en tratados elementales como |1|. Se considera el anillo S(K) de las sucesiones de Cauchy de elementos de K y, dentro de él, el ideal maximal P_0 de las sucesiones nulas o con límite cero. Se designará por $\hat{K}$ al cuerpo cociente $S(K)/P_0$. Se tiene la inclusión natural $f:K \to \hat{K}$ dada de la siguiente manera: si $a \in K$ y $\{a_n\}$ es la sucesión constante $a_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se pondrá $f(a) = \{a_n\} + P_0$.

Vamos a construir el valor absoluto $\hat{\phi}$. Nótese que, si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K, entonces $\{\phi(a_n)\}$ es una sucesión de números reales. En efecto, dado $\delta \in \mathbb{R}_+$, existe un n_0 tal que, para todo $n,m > n_0$ es $\phi(a_n-a_m) < \delta$. Así

$$\phi(a_n) - \phi(a_m) < \phi(a_n-a_m) < \delta,$$

lo que prueba nuestra afirmación. Pero hay más, si $\{a_n\}$ es una sucesión nula de elementos de K, entonces $\{\phi(a_n)\}$ es una sucesión nula de números reales.

Las anteriores consideraciones permiten definir una función $\hat{\phi}:\hat{K} \to \mathbb{R}$ en la forma siguiente. Si $\gamma = \{a_n\} + P_0 \in \hat{K}$, se pondrá $\hat{\phi}(\gamma) = \lim_n \phi(a_n)$. En fácil ver que esta definición tiene sentido. Si $\{a_n\} + P_0 = \{b_n\} + P_0$, es $\{a_n-b_n\} \in P_0$, luego $\{\phi(a_n-b_n)\}$ es una sucesión nula de números reales. Así, dado $\delta \in \mathbb{R}_+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, es

$$\phi(a_n) - \phi(b_n) < \phi(a_n - b_n) < \delta ,$$

luego $\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(b_n)$.

Supongamos que $\gamma \neq 0$; así $\{a_n\} \notin p_0$. En estas circunstancias (vease | |, pag 401), existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $n \geqslant n_0$, es $\phi(a_n) > \delta$. Así, $\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) \geqslant \delta$ y $\phi(\gamma) > 0$. Si $\gamma' = \{a'_n\} + p_0$, es

$$\hat{\phi}(\gamma\gamma') = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n)\phi(a'_n) = \hat{\phi}(\gamma)\hat{\phi}(\gamma')$$

$$\hat{\phi}(\gamma+\gamma') = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n + a'_n) < \lim_{n\to\infty} (\phi(a_n) + \phi(a'_n)) = \hat{\phi}(\gamma) + \hat{\phi}(\gamma')$$

Esto prueba que $\hat{\phi}$ es un valor absoluto.

Nota 0.6.- Hay que demostrar ahora que $(\hat{K},\hat{\phi})$ es un cuerpo valorado completo. Vamos a comenzar estudiando el caso en que K es finito. Como ϕ es un homomorfismo de K^* en $\mathbb{R}_+$, y el único subgrupo finito de R_+ es $\{1\}$, es necesariamente $\phi(K^*) = \{1\}$. Así, las sucesiones de Cauchy de elementos de K son las sucesiones constantes, a partir de un cierto término, y las sucesiones nulas son las sucesiones constantes igual a cero, a partir de un cierto término. Por tanto, $\hat{K} = K$ y $\hat{\phi} = \phi$, que es, evidentemente, completo por lo dicho anteriormente.

Pasando al caso general hay que demostrar que toda sucesión de Cauchy de elementos de K tiene límite. Podemos suponer que la sucesión tiene infinitos términos distintos porque, si no, sería constante a partir de un cierto término y, claramente, tendría límite. Tambien podemos suponer que $a_n \neq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pues, de lo contrario, suprimiendo los términos iguales, se obtendría una sucesión cuya diferencia con la dada tendría límite cero.

Pongamos $\hat{\phi}(a_p - a_{p+1}) = \delta_p$. Se tiene que $\{\delta_p\}$ es una sucesión nula de números reales. De otro lado sabemos que, para todo $p \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{b_{p_n}\}$ de elementos de K tal que $b_p = \lim_{n\to\infty} b_{p_n}$. Así pues, existe n_{0p} tal que, para todo $n \geqslant n_{0p}$ es

$\widehat{\phi}(a_p - b_{p_n}) < \delta_p$; pongamos $b_p = b_{p_{n_{0p}}}$. Así $\widehat{\phi}(b_p - a_p) < \delta_p$. Para todo $\delta \in \mathbb{R}_+$ existe n' tal que para $p,q > n'$ es $|a_p - a_q| < \delta/3$. También existe n'' tal que, para todo $p > n''$, es $\delta_p < \delta/3$. Sea $n = \max.(n',n'')$; para $p,q > n$ es

$$|b_p - b_q| = |b_p - a_p + a_p - a_q + a_q - b_q| \leq |b_p - a_p| + |a_p - a_q| + |a_q - b_q| <$$

$$< (\delta/3) + (\delta/3) + (\delta/3) = \delta .$$

Así $\{b_p\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K que tiene un límite $\omega \in \widehat{K}$. Como la diferencia entre $\{a_p\}$ y $\{b_p\}$ es una sucesión nula, es $\omega = \lim\limits_{p \to \infty} a_p$, lo que prueba que $\widehat{K}$ es completo.

<u>Nota 0.7</u>.- Resta probar que $((\widehat{K},\widehat{\phi}),f)$ es una solución del problema universal planteado por el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}((K,\phi),-)$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & K' \arrow[ddl, "\phi'"] \\
& \widehat{K} \arrow[ur, "\widehat{g}"] \arrow[d, "\widehat{\phi}"] & \\
& \mathbb{R}_0 &
\end{tikzcd}$$

donde (K',ϕ') es un cuerpo valorado completo y $g:(K,\phi) \to (K',\phi')$ es un morfismo de cuerpos valorados. Se trata de construir $\widehat{g}$ de tal forma que $\widehat{g}\circ f = g$.

La construcción de $\widehat{g}$ es completamente standard. Puesto que $\widehat{g}$, caso de existir, es contínua, se tiene que verificar que, para toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ de elementos de K, sea $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{g}\circ f(a_n)$. Esta relación da, a la vez, la clave para definir $\widehat{g}$ y su unicidad. Si $\omega \in \widehat{K}$ y si $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\{a_n\} \in S(K)$, se pondrá $\widehat{g}(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)$.

Sección 1: Valoraciones discretas y complecciones.-

Una técnica clave en el estudio de las valoraciones discretas es el paso a la complección, que vamos a describir a continuación. Sean $k \subset K$ dos cuerpos.

Nota 1.1.- Sea v una valoración discreta de $K|k$ y $\omega \in \mathbb{R}$, con $0 < \omega < 1$. Se define una aplicación $\psi_\omega : K_0 \to \mathbb{R}$, poniendo

$$\psi_\omega(\gamma) = \omega^{v(\gamma)}$$

para todo $\gamma \in K_0$.

Es claro que ψ_ω es un valor absoluto. Lo importante aquí es que la topología determinada por ψ_ω no depende de ω. En efecto: sea $\omega' \in \mathbb{R}$, $0 < \omega' < 1$, y sea $\tau = \log \omega'/\log \omega$; como $\tau \log \omega = \log \omega'$ es $\omega' = \omega^\tau$. Sea, pues, fijado $\delta > 0$; si $\gamma \in K_0$ se verifica:

$$\omega^{v(\gamma)} < \delta \iff \omega'^{v(\gamma)/\tau} < \delta \iff \omega'^{v(\gamma)} < \delta^\tau$$

y así, el entorno de radio δ para ψ_ω es igual al entorno de radio δ^τ para $\psi_{\omega'}$.

Vamos a estudiar cuidadosamente las sucesiones de Cauchy no nulas de elementos de K. Sea $\{\gamma_p\}$ una sucesión de Cauchy no nula de elementos de K, y sea $\Gamma = \{v(\gamma_p)\}$. Desde luego, Γ no puede ser un conjunto infinito. En efecto, si lo fuese, existirían en Γ números, bien arbitrariamente grandes, bien arbitrariamente pequeños. En el primero de los casos, para cada $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiría un $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi_\omega(\gamma_p) = \omega^{v(\gamma_p)} < \delta ,$$

lo que contradice el hecho de que los términos de una sucesión no nula de Cauchy no se pueden acercar indefinidamente a cero. En el segundo de los casos se contradice, visiblemente, el hecho de que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Vamos a probar que existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo

$p \geqslant p_0$, es $v(\gamma_p) = v(\gamma_{p_0})$. Supongamos que no, es decir que, para todo $p_0 \in \mathbb{N}$ existe $p > p_0$ tal que $v(\gamma_p) \neq v(\gamma_{p_0})$. Sea $\mu = \max \Gamma$ y sea $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta < \omega^\mu$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geqslant p_0$, es $\omega^{v(\gamma_p - \gamma_{p_0})} < \delta$. Tomemos aquí $p \in \mathbb{N}$ tal que $v(\gamma_p) \neq v(\gamma_{p_0})$; entonces

$$v(\gamma_p - \gamma_{p_0}) = \min\{ v(\gamma_p), v(\gamma_{p_0}) \} < \mu ,$$

luego $\omega^{v(\gamma_p - \gamma_{p_0})} > \omega^\mu > \delta$, contradicción.

Esta es una propiedad esencial en las sucesiones de Cauchy no nulas, que será usada ampliamente en lo sucesivo.

Para la construcción de la complección de K se puede usar cualquier número real ω, $0 < \omega < 1$, en la inteligencia de que esta construcción no depende de ese número.

Nota 1.2.- Sea $(\hat{K}, \hat{\psi}_\omega)$ la complección de (K, ψ_ω), y sea $\hat{v}: \hat{K} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{v}(\gamma) = \log_\omega \hat{\psi}_\omega(\gamma).$$

Claramente $\hat{v}$ es una valoración de $\hat{K}|k$ que prolonga a v. Vamos a estudiar con un poco de detalle cómo es esta valoración.

Sea $\gamma \in \hat{K}$, $\gamma \neq 0$, y sea $\{\gamma_p\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K cuyo límite sea γ. Por la nota anterior, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geqslant p_0$ es $v(\gamma_{p_0}) = v(\gamma_p)$. Así

$$\hat{\psi}_\omega(\gamma) = \lim_{p \to \infty} \psi_\omega(\gamma_p) = \lim_{p \to \infty} \omega^{v(\gamma_p)} = \omega^{v(\gamma_{p_0})},$$

por tanto

$$\hat{v}(\gamma) = v(\gamma_{p_0}) \in \mathbb{Z}.$$

Así, $\hat{v}$ es discreta de rango 1 y tiene el mismo grupo de valores que v.

Sean $R_{\hat{v}}$, $m_{\hat{v}}$, $\Delta_{\hat{v}}$, respectivamente, el anillo, el ideal, y el cuerpo residual de $\hat{v}$. Consideremos la inmersión canónica $i:\Delta_v \to \Delta_{\hat{v}}$ dada por $i(\gamma+m_v) = \gamma+m_{\hat{v}}$. Vamos a demostrar que esta inmersión es un isomorfismo, lo que permitirá en el futuro identificar sistemáticamente Δ_v con $\Delta_{\hat{v}}$.

Sea $\gamma \in \hat{K}$ un elemento de valor cero, y sea $\{\gamma_p\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K con límite γ. En virtud de lo anterior, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geq p_0$, es $v(\gamma_p) = 0$. Sea $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta<\omega$ y tomemos $p> p_0$ tal que $\hat{\psi}_\omega(\gamma-\gamma_p) < \delta$. Así,

$$\omega^{\hat{v}(\gamma-\gamma_p)} < \delta < \omega,$$

luego $\hat{v}(\gamma-\gamma_p) > 1$ y así $\gamma-\gamma_p \in m_{\hat{v}}$. Esto prueba que $\gamma+m_{\hat{v}} = \gamma_p+m_{\hat{v}}$ y, por tanto, que i es sobre.

Nota 1.3.- Vamos ahora a estudiar con detalle el anillo $R_{\hat{v}}$. Por la teoría general de valoraciones, sabemos que $R_{\hat{v}}$ es un anillo local noetheriano (de hecho es un dominio de ideales principales). Lo importante aquí es que $R_{\hat{v}}$ es completo para la topología de Krull. En efecto, lo que ocurre es que la topología de Krull sobre $R_{\hat{v}}$ coincide con la determinada por $\hat{\psi}_\omega$. Probemos esto.

Sea $\theta \in R_{\hat{v}}$ un elemento de valor 1; sabemos que $m_{\hat{v}} = \theta R_{\hat{v}}$. Sea $\delta \in \mathbb{R}_+$ y sea r el mayor entero menor o igual que $\log_\omega \delta$; si $\gamma \in R_{\hat{v}}$ se tiene que

$$\hat{\psi}_\omega(\gamma) < \delta \Leftrightarrow \omega^{\hat{v}(\gamma)} < \delta \Leftrightarrow \hat{v}(\gamma) > \log_\omega \delta \Leftrightarrow \hat{v}(\gamma) > r \Leftrightarrow \gamma \in \theta^r . R_{\hat{v}}.$$

Esto prueba que los entornos de cero en la topología determinada por $\hat{\psi}_\omega$ y en la topología de Krull coinciden.

Por el teorema de Cohen de estructura de los anillos locales completos, el homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_{\hat{v}} = R_{\hat{v}}/m_{\hat{v}}$ posee una sección $\kappa:\Delta_{\hat{v}} \to R_{\hat{v}}$, que es una inclusión de $\Delta_{\hat{v}}$ en $R_{\hat{v}}$. Así, $\Delta_{\hat{v}}$ es un cuerpo de representantes de $R_{\hat{v}}$. Ahora bien, como, en nuestro caso, $k \subset R_{\hat{v}}$, si k' es un cuerpo maximal tal que $k \subset k' \subset R_{\hat{v}}$ se tiene que k' es isomorfo a $\Delta_{\hat{v}}$ mediante el homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_{\hat{v}} = R_{\hat{v}}/m_{\hat{v}}$ (vease |29|, pag.43), y por tanto el homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to R_{\hat{v}}/m_{\hat{v}}$ posee una k-sección $\kappa:\Delta_{\hat{v}} \to R_{\hat{v}}$.

Sea t una variable, $\theta \in R_{\hat{v}}$ un elemento de valor 1 y consideremos una k-sección cualquiera $\kappa : \Delta_{\hat{v}} \rightarrow R_{\hat{v}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \rightarrow \Delta_{\hat{v}}$. Asociado a κ y a θ existe un homomorfismo local

$$\Phi_{\kappa,\theta} : \Delta_{\hat{v}}||t|| \rightarrow R_{\hat{v}}$$

que viene definido por

$$\Phi_{\kappa,\theta}(\sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i) = \sum_{i \geq 0} \kappa(\alpha_i)\theta^i,$$

y que es un isomorfismo, como vamos a demostrar. Desde luego, $\Phi_{\kappa,\theta}$ es inyectivo, pues, caso contrario, su núcleo sería un ideal de la forma (t^r), luego sería $\theta^r = 0$, lo que es imposible. La suprayectividad de $\Phi_{\kappa,\theta}$ la probamos a continuación.

Sea $\gamma \in R_{\hat{v}}$ y pongamos $\gamma = \gamma_0$, $\hat{v}(\gamma_0) = r_0$. Se tiene que $\hat{v}(\gamma_0/\theta^{r_0}) = 0$. Sea $\alpha_0 = (\gamma/\theta^{r_0}) + m_v$; poniendo $\gamma_1 = \gamma - \kappa(\alpha_0)\theta^{r_0}$ es $\hat{v}(\gamma_1) \geq r_0$, y como

$$\hat{v}(\gamma_1/\theta^{r_0}) = \hat{v}((\gamma/\theta^{r_0}) - \kappa(\alpha_0)) > 0$$

es $\hat{v}(\gamma_1) > r_0$. Supongamos construidos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in R_{\hat{v}}$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1} \in \Delta_{\hat{v}}$ tales que:

$$\gamma_1 = \gamma_0 - \kappa(\alpha_0)\theta^{r_0}$$

$$\gamma_2 = \gamma_0 - \kappa(\alpha_0)\theta^{r_0} - \kappa(\alpha_1)\theta^{r_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_q = \gamma_0 - \kappa(\alpha_0)\theta^{r_0} - \kappa(\alpha_1)\theta^{r_1} - \ldots - \kappa(\alpha_{q-1})\theta^{r_{q-1}}$$

con $r_0 = \hat{v}(\gamma_0) < r_1 = \hat{v}(\gamma_1) < \ldots < r_q = \hat{v}(\gamma_q)$.

Como $\hat{v}(\gamma_q/\theta^{r_q}) = 0$, poniendo $\alpha_q = (\gamma_q/\theta^{r_q}) + m_v$ y $\gamma_{q+1} = \gamma_q - \kappa(\alpha_q)\theta^{r_q}$, es $\hat{v}(\gamma_{q+1}) \geq r_q$, y como

$$\hat{v}(\gamma_{q+1}/\theta^{r_q}) = \hat{v}((\gamma_q/\theta^{r_q}) - \kappa(\alpha_q)) > 0$$

es $\hat{v}(\gamma_{q+1}) = r_{q+1} > r_q$. Este algoritmo recurrente nos permite construir una serie $\sum_{i \geq 0} \alpha_i t^{r_i}$, y es obvio que

$$\Phi_{\kappa,\theta}(\sum_{i \geq 0} \alpha_i t^{r_i}) = \gamma .$$

Nótese, finalmente, que si $\nu : \Delta_{\hat{v}}((t)) \to Z$ es la función de orden usual, entonces $\hat{v}$ coincide con la composición de la extensión de $\Phi^{-1}_{\kappa,\theta}$ a los cuerpos de fracciones, con ν.

Vamos a ver ahora un importante teorema relativo a anillos de valoración discreta completos: el teorema preparatorio de Weierstrass.

Sea R_v un anillo de valoración discreta completo, m_v su ideal maximal, K su cuerpo de fracciones, v la valoración correspondiente, Δ_v su cuerpo residual, T una variable. Se supondrá que K contiene un subcuerpo k formado por elementos de valor cero, es decir, que v es una valoración de $K|k$.

<u>Definición 1.4</u>.- Dada una no unidad $f(T) \in R_v||T||$ distinta de cero, se dirá que f(T) es regular en T de orden r si la imagen canónica $\bar{f}(T)$ de f(T) en $\Delta_v||T||$ es una serie no nula de orden r.

<u>Teorema 1.5</u>.- <u>Teorema preparatorio de Weierstrass</u>.- Sea f(T) una no unidad de $R_v||T||$ distinta de cero y regular en T de orden r. Para cada $g(T) \in R_v||T||$, existen $h(T) \in R_v||T||$ y $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1} \in R_v$, univocamente determinados, tales que

$$g(T) = h(T).f(T) + c_0 + c_1 T + \ldots + c_{r-1} T^{r-1}$$

<u>Demostración</u>.-

Sea Z una nueva variable, $\kappa : \Delta_v \to R_v$ una k-sección del homomorfismo natural $R_v \to \Delta_v$ y $\theta \in R_v$ un elemento de valor 1. Consideremos el isomorfismo

$$\Phi_{\kappa,\theta}: \Delta_v||Z|| \rightarrow R_v$$

de la nota 1.3. Es evidente que este isomorfismo puede ser extendido a un isomorfismo

$$\Phi : \Delta_v||Z,T|| \rightarrow R_v||T||$$

poniendo

$$\Phi\Big(\sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{ij}Z^iT^j\Big) = \sum_{i,j\geqslant 0} \kappa(\alpha_{ij})\theta^iT^j$$

o sea

$$\Phi\Big(\sum_{j\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant 0} \alpha_{ij}Z^i\Big)T^j\Big) = \sum_{j\geqslant 0} \Phi_{\kappa,\theta}\Big(\sum_{i\geqslant 0} \alpha_{ij}Z^i\Big)T^j.$$

En esta situación, es evidente que $\Phi^{-1}(f(T))=f'(Z,T)$ es regular en T de orden r.

Sea $g(T) \in R_v||T||$ y sea $g'(Z,T)=\Phi^{-1}(g(T))$. Por el teorema preparatorio de Weierstrass para series, existen c'_0, c'_1,... ..., $c'_{r-1} \in \Delta_v||Z||$ y $h'(Z,T) \in \Delta_v||Z,T||$, univocamente determinados, tales que

$$g'(Z,T) = h'(Z,T)f'(Z,T) + c'_0 + c'_1T + \dots + c'_{r-1}T^{r-1}$$

Aplicando Φ se tiene entonces el resultado apetecido.

Sección 2: Valoraciones discretas de rango 1 de cuerpos de series. Generalidades.-

A partir de ahora vamos a fijar un cuerpo algebraicamente cerrado k, de característica $p \geqslant 0$, que actuará de cuerpo base en todos nuestros razonamientos. El objetivo de esta sección es exponer un lenguaje y unos primeros resultados sobre valoraciones discretas de rango 1 (sobre k), del cuerpo de las series en n variables independientes, $k((X_1,\dots,X_n))$, sobre k. Como notaciones iniciales pondremos:

$$K_n = k((X_1,\dots,X_n)), \qquad R_n = k||X_1,\dots,X_n||, \qquad M_n = (X_1,\dots,X_n)R_n$$

Nota 2.1.- Vamos a probar que, si $u \in R_n$ es una unidad, y $q \in Z_+$ es un entero, arbitrario si la característica de k es cero, y no divisible por ella si es positiva, entonces existe una unidad $w \in R_n$ tal que $w^q = u$, es decir, que u tiene raiz q-ésima en R_n. Para demostrar esto, probaremos previamente el siguiente

Aserto.- Sea R un dominio de integridad, y sea $u \in R||X||$ tal que $u(0) \neq 0$, $u(0)$ tiene una raiz q-ésima en R y $q.1 \neq 0$ en R. Entonces u tiene raiz q-ésima en $R||X||$.

En efecto: sea $u = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$, y sea $b_0 \in R$ tal que $a_0 = b_0^q$. Se trata de demostrar que existe una sucesión $\{b_1, b_2,\dots\}$ de elementos de R tal que $(\sum_{i \geqslant 0} b_i X^i)^q = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$. Igualando los coeficientes de X en ambos miembros, se tendrá

$$q.b_0^{q-1}.b_1 = a_1,$$

de donde $b_1 = a_1/q.b_0^{q-1}$. Supongamos, recurrentemente, que se han calculado $\{b_0,b_1,\dots,b_r\}$ por igualación de los coeficientes de $\{1,X,\dots,X^r\}$ en la anterior relación. Igualando los coeficientes de X^{r+1} se tendrá una expresión de la forma

$$q.b_0^{q-1}.b_{r+1} + P_{r+1}(b_0,b_1,..,b_r) = a_{r+1},$$

donde P_{r+1} es un polinomio en los argumentos que se indican. Así,

$$b_{r+1} = (a_{r+1} - P_{r+1}(b_0,b_1,..,b_r))/q.b_0^{q-1},$$

lo que prueba el aserto.

Con este aserto, la existencia de la raiz q-ésima de $u \in R_n$ es ya trivial de demostrar. Se operará por recurrencia sobre n. Si n=1, el resultado es claro por el aserto y por el hecho de ser k algebraicamente cerrado. En cuanto al paso de n-1 a n, notemos que se puede escribir

$$u = \sum_{i \geqslant 0} u_i(X_1,..,X_{n-1})X_n^{\ i},$$

donde $u_0(X_1,..,X_{n-1}) \in R_{n-1}$ es una unidad, que admite una raiz q-ésima en R_{n-1}, por hipótesis de recurrencia. De nuevo, por el aserto, u admite raiz q-ésima en R_n.

Notaciones 2.2.- Si v es una valoración de $K_n|k$ se notará, como de costumbre, por R_v a su anillo, y a su ideal por m_v. Su cuerpo residual será notado por Δ_v e identificado con R_v/m_v.

Proposición 2.3.- (Lipman) Si v es una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$, entonces $R_n \subset R_v$.

Demostración.-

Es evidente que basta ver que las unidades de R_n están contenidas en R_v y, para ello, que las unidades de R_n tienen valor cero en v. Si $u \in R_n$ es una unidad, para todo $q \in Z_+$, arbitrario si p=0 y no divisible por p si $p > 0$, existe $u_q \in R_n$ tal que $(u_q)^q = u$. Así, $q.v(u_q) = v(u)$, luego $q|v(u)$. Esto sólo puede ocurrir si $v(u) = 0$, lo que prueba nuestra proposición.

Ejemplo 2.4.- Sea $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in Z[u_1,..,u_n]$ una forma lineal con coeficientes no negativos. Los monomios de R_n serán notados en la forma siguiente. Si $A = (a_1,..,a_n) \varepsilon Z_0^{\,n}$, el monomio

$$X_1^{a_1}\ldots\ldots X_n^{a_n}$$

será designado simplemente por X^A. Para cada monomio X^A de R_n se escribirá $\nu_L(X^A) = L(A) = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$.

Sea $f \varepsilon R_n$, $f \neq 0$; se pondrá $f = \sum_{A \varepsilon \xi(f)} f_A X^A$, $f_A \varepsilon k$ y $\xi(f) = \{ A \varepsilon Z_0^{\,n} \mid f_A \neq 0\}$.

Así, se define una función $\nu_L : R_n \setminus \{0\} \to Z_0$ poniendo

$$\nu_L(f) = \min_{A \varepsilon \xi(f)} \{\nu_L(X^A)\} = \min_{A \varepsilon \xi(f)} \{L(A)\} .$$

Esta función admite una ampliación obvia a $K_n \setminus \{0\} \to Z$, que denotaremos por v_L, poniendo $v_L(f/g) = \nu_L(f) - \nu_L(g)$.

Es trivial de comprobar que v_L es una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$, que se llama <u>función de orden</u> asociada a la forma lineal L. Si $\alpha_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, v_L es la valoración trivial. En general, si hay algún α_i no nulo, $1 \leqslant i \leqslant n$, y si d es el m.c.d($\alpha_1,..,\alpha_n$), el grupo de valores de v_L es Z_d, por lo que se tomará usualmente d = 1, dividiendo por d todas las α_i.

Este que se acaba de describir es uno de los ejemplos más importantes de valoraciones discretas de rango 1 de $K_n|k$. Hay otros, sin embargo, que también tienen su importancia, como el

<u>Ejemplo 2.5</u>.- Sea $f \varepsilon R_n$ una no unidad distinta de cero e irreducible. El anillo $(R_n)_f$ es un anillo de valoración discreta, pues es local, noetheriano de dimensión 1 e integramente cerrado. Si v es la valoración correspondiente, v actúa así:

sea $g/h \varepsilon K_n \setminus \{0\}$; existe un único $r \varepsilon Z$ tal que

$$g/h = f^r.(g'/h'), \text{ con } f \nmid g' \text{ y } f \nmid h'$$

Así es $v(g/h) = r$.

Usualmente se escribirá $v = v_f$ y se la llamará valoración f-ádica.

Nota 2.6.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$. La primera característica que se puede considerar de v es su centro en R_n. Si $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \in Z|u_1,\ldots,u_n|$ es una forma lineal como en 2.4, el centro de v_L en R_n es

$$m_{v_L} \cap R_n = (X_{i_1},\ldots,X_{i_r})$$

donde $\{i_1,\ldots,i_r\}$ es el conjunto de todos los índices i entre 1 y n para los que $\alpha_i \neq 0$. En particular, si $\alpha_i \neq 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$, el centro de v_L en R_n es el ideal maximal M_n. Si f es un elemento de R_n irreducible, el centro en R_n de la valoración f-ádica v_f es el ideal principal (f).

A partir de ahora, nuestro interés se va acentrar, de forma exclusiva, en las valoraciones discretas de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, aunque eventualmente manejaremos otras.

Nota 2.7.- El ejemplo 2.4 nos suministra una amplia clase de valoraciones discretas de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n: las funciones de orden v_L cuando la forma lineal $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ verifica que $\alpha_i > 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$.

Sin embargo, esas no son todas, como lo prueba el ejemplo que damos a continuación.

Sea

$$C||X_1,X_2|| \xrightarrow{\psi} C||X_1,X_2|| \xrightarrow{\nu_L} Z$$

con $\psi(X_1) = X_1$

$\psi(X_2) = X_1 + X_2$, $\quad L = u_1 + 2u_2$

y sea $v' = v_L \circ \psi'$, donde ψ' es la ampliación de ψ al cuerpo de fracciones. Se tiene que: $v'(X_1) = 1$, $v'(X_2) = 1$.

Sea $L' = u_1 + u_2$ y sea $v_{L'}$ la valoración correspondiente. Aunque es $v_{L'}(X_1) = v_{L'}(X_2) = 1$, no es $v' = v_{L'}$, pues

$$v_{L'}(X_1 - X_2) = 1$$

y

$$v'(X_1 - X_2) = v_L(X_2) = 2.$$

Un resultado clave por su importancia es:

Teorema 2.8.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, sea $\alpha_i = v(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, y sea la forma lineal $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$, (notese que no tiene por qué ser $1 = m.c.d.(\alpha_1,..,\alpha_n)$ aun cuando el grupo de valores de v sea Z). Entonces, para todo $f \in R_n$ es $v(f) \geqslant v_L(f)$.

Demostración.-

Consideremos la complección $\hat{K}_n$ de K_n respecto de v y la ampliación $\hat{v}$ de v a $\hat{K}_n$, construida como en la sección 1. Sea $\kappa : \Delta_v \to R_{\hat{v}}$ una k-sección del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_v = \Delta_{\hat{v}}$, $\theta \in R_{\hat{v}}$ un elemento de valor 1, t una variable y consideremos el isomorfismo

$$\Phi_{\kappa,\theta} : \Delta_v ||t|| \to R_{\hat{v}}$$

de 1.3. Sea

$$\Phi_{\kappa,\theta}^{-1}(X_i) = \sum_{j \geqslant 0} a_{ij} t^{m_{ij}}$$

con $m_{i0} = \alpha_i$, $a_{ij} \in \Delta_v \setminus \{0\}$, $i = 1,..,n$.

Para cada $f \in R_n$ se verifica que

$$v(f) = \nu(\Phi_{\kappa,\theta}^{-1}(f))$$

donde ν es el orden usual de una serie y

$$\Phi_{\kappa,\theta}^{-1}(f) = f(\Phi_{\kappa,\theta}^{-1}(X_1),..,\Phi_{\kappa,\theta}^{-1}(X_n)).$$

Si $f \neq 0$ y $f = f_r + f_{r+1} + ...$, $f_r \neq 0$, es la descomposición de f en suma de formas respecto de la graduación determinada por L, es

$$\Phi_{K,\theta}^{-1}(f) = f_r(\sum_{j\geq 0} a_{1j}t^{m_{1j}},..,\sum_{j\geq 0} a_{nj}t^{m_{nj}}) + f_{r+1}(\sum_{j\geq 0} a_{1j}t^{m_{1j}},..$$

$$..,\sum_{j\geq 0} a_{nj}t^{m_{nj}}) + \ldots =$$

$= t^r(f_r(a_{10},\ldots,a_{n0})$+términos en t de grado superior o igual a 1)

Así $v(f) \geq r = v_L(f)$ y, además, $v(f) = v_L(f)$ sí y solo si $f(a_{10},\ldots,a_{n0}) \neq 0$. Esto prueba el teorema.

<u>Definición 2.9</u>.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, $\alpha_i = v(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, $L = \alpha_1 u_1 +..+ \alpha_n u_n$. Si $f \in R_n$ es una forma respecto de la graduación determinada por L (abreviadamente, en lo sucesivo, una forma respecto de L), se dirá que f es regular para v si $v(f) = v_L(f)$. Caso contrario se dirá que f es singular para v. Se llamará ideal singular para v, y se representará por Sing(v), al ideal de $k|X_1,..,X_n|$ engendrado por las formas singulares para v. Claramente Sing(v) es primo.

Como consecuencia de 2.8 tenemos el

<u>Teorema 2.10</u>.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, $\alpha_i = v(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, $L = \alpha_1 u_1 +..+ \alpha_n u_n$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

<u>2.10.1</u>.- $v = v_L$.

<u>2.10.2</u>.- Para todo $f \in R_n$, es $v(f) = v_L(f)$.

<u>2.10.3</u>.- Toda forma respecto de L es regular para v.

<u>Demostración</u>.-

Claramente 2.10.1 es equivalente a 2.10.2 y ambas implican 2.10.3. Probemos, pues, que 2.10.3 implica 2.10.2.

Sea $f \in R_n$, y sea $f = f_r + f_{r+1} + \ldots$, $f_r \neq 0$, su descomposición en suma de formas respecto de L. Usando las notaciones de 2.8, como

$\Phi_{\kappa\,\theta}^{-1}(f) = t^r(f_r(a_{10},..,a_{n0})$ + términos en t de orden igual o superior a 1)

y como f_r es regular para v, es $v(f) = r = v_L(f)$. Esto prueba el teorema.

Vamos a probar ahora que la asignación que a cada valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n hace corresponder su ideal singular tiene una recíproca.

Nota 2.11.- Sea $S_n = k|X_1,..,X_n|$, $n \geqslant 2$, $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in Z_+$ $1 \leqslant i \leqslant n$, y consideremos la graduación de S_n respecto de L. Al conjunto de los ideales primos homogéneos de S_n (respecto de esa graduación), y distintos de $(X_1,...,X_n)$, se le designará por $\mathrm{Proj}_L(S_n)$. Dado $p \in \mathrm{Proj}_L(S_n)$, se pondrá

$$A(p) = S_n/p = k|z_1,..,z_n|$$

donde $z_i = X_i + p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, y se considerará sobre $A(p)$ la graduación cociente. Al anillo $A(p)$ se le llamará anillo de las coordenadas homogéneas de p, y a $(z_1,..,z_n)$ se le llamará n-upla de las coordenadas homogéneas del punto genérico de p.

Teorema 2.12.- Teorema de existencia de valoraciones con ideal singular prefijado.-

Sea $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in Z_+$, $1 \leqslant i \leqslant n$, una forma lineal, y sea dado $p \in \mathrm{Proj}_L(S_n)$ tal que $X_i \notin p$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Existe una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, que denotaremos por v, tal que $v(X_i) = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, y $p = \mathrm{Sing}(v)$.

Demostración.-

Pongamos, como antes,

$$S_n/p = k|z_1,..,z_n|$$

y designemos por Δ a su cuerpo de fracciones. Sean $t,T_1,..,T_n$ nuevas variables y sea

$$\psi : R_n \to \Delta||t,T_1,..,T_n||$$

el k-homomorfismo definido por las sustituciones

$$\psi(X_i) = z_i t^{\alpha_i} + T_i t^{2\alpha_i}$$

$1 \leqslant i \leqslant n$, ($z_i \neq 0$, pues $X_i \notin p$).

Observemos que, si demostramos que ψ es inyectiva, la demostración del teorema estará concluida. En efecto, supongamos probado que ψ es inyectiva. Entonces, ψ se puede extender a una inmersión de los cuerpos de fracciones

$$\psi' : K_n \to \Delta((t,T_1,..,T_n)) = \Delta'.$$

Sea v' la valoración de $\Delta'|\Delta$ que sobre $\Delta||t,T_1,..,T_n||$ funciona asignando a cada serie su orden en t (es decir, v' es la valoración asociada a la forma lineal $L' = u+0.u_1+...+0.u_n$). Es evidente que la composición $v = v' \circ \psi'$ es una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$ cuyo centro en R_n es M_n, y vamos a probar que $Sing(v) = p$.

Para ello observemos que una forma h, respecto de L, pertenece a $Sing(v)$ sí y solo si $v(h) > v_L(h)$. La demostración de este hecho es trivial. Sentado esto, sea $h \in S_n$ una forma de grado r respecto de L; como

$$\psi(h) = h(z_1 t^{\alpha_1}+T_1 t^{2\alpha_1},..,z_n t^{\alpha_n}+T_n t^{2\alpha_n}) =$$

$$= t^r(h(z_1,..,z_n) + \text{términos en t de grado superior o igual a 1}),$$

está claro que $v(h) > r$ si y solo si $h(z_1,..,z_n) = 0$, o sea si y solo si $h \in p$. Así $\mathrm{Sing}(v) = p$ y esto probaría el teorema.

Por lo tanto, para completar nuestra demostración, resta probar que ψ es inyectivo. Para ello observemos que

$$\psi(R_n) \subset k|z_1,..,z_n| \; ||t,T_1,..,T_n||,$$

como es trivial de comprobar. Sea

$$\eta : k|z_1,..,z_n| \; ||t,T_1,..,T_n|| \to k||t,T_1,..,T_n||$$

el homomorfismo natural asociado a

$$k|z_1,..,z_n| \to k|z_1,..,z_n|/(z_1,..,z_n)$$

y sea $f \in R_n$, $f \neq 0$, $f = f_r+f_{r+1}+\dots$ su descomposición en suma de formas respecto de L, $f_r \neq 0$. Se tiene que

$$\eta\psi(f) = \eta(f_r(z_1t^{\alpha_1}+T_1t^{2\alpha_1},..,z_nt^{\alpha_n}+T_nt^{2\alpha_n}) + f_{r+1}(z_1t^{\alpha_1}+T_1t^{2\alpha_1},..,z_nt^{\alpha_n}+T_nt^{2\alpha_n}) + \dots) = f_r(T_1t^{2\alpha_1},..,T_nt^{2\alpha_n}) + f_{r+1}(T_1t^{2\alpha_1},..,T_nt^{2\alpha_n}) + \dots = t^{2r}f_r(T_1,..,T_n) + t^{2(r+1)}f_{r+1}(T_1,..,T_n) + \dots$$

que es distinta de cero, porque $f_r(T_1,..,T_n) \neq 0$. A fortiori, $\psi(f) \neq 0$ y ψ es inyectivo. Esto concluye la demostración del teorema.

<u>Nota 2.13</u>.- La cuestión de unicidad en el teorema anterior no es ni planteable. En efecto, tomemos de nuevo el ejemplo 2.7 un poco reformado. Consideremos la composición

$$C((X_1,X_2)) \xrightarrow{\psi'} C((X_1,X_2)) \xrightarrow{\nu_L} Z\cup\{\infty\}$$

donde ψ' es el C-automorfismo definido por las sustituciones

$$\psi'(X_1) = X_1, \quad \psi'(X_2) = X_1 + X_2$$

y $L = u_1 + \alpha u_2$, $\alpha > 1$ y llamemos $v_\alpha = v_L \circ \psi'$. Está claro que $v_\alpha \neq v_{L'}$, con $L' = u_1 + u_2$, pese a que $v_\alpha(X_1) = v_\alpha(X_2) = 1 = v_{L'}(X_1) = v_{L'}(X_2)$, ya que $v_\alpha(X_1 - X_2) = \alpha > 1 = v_{L'}(X_1 - X_2)$. De otro lado, se tiene que $X_1 - X_2 \in \mathrm{Sing}(v_\alpha)$ y si $h \in \mathrm{Sing}(v_\alpha)$ es una forma, el algoritmo de la división permite escribir

$$h = h'.(X_1 - X_2) + a.X_2^r$$

donde, si r es el grado de h, es h' homogéneo de grado $r-1$ y $a \in C$ Si fuese $a \neq 0$, como

$$v_\alpha(h'.(X_1 - X_2)) = v_\alpha(h') + v_\alpha(X_1 - X_2) \geq r - 1 + \alpha > r$$

sería

$$v_\alpha(h) = v_\alpha(a.X_2^r) = r,$$

en contradicción con que $h \in \mathrm{Sing}(v_\alpha)$. Así, $\mathrm{Sing}(v_\alpha) = (X_1 - X_2)$, independiente de α . Esto prueba que todas las valoraciones v_α, con $\alpha \in Z_+ \setminus \{1\}$ tienen el mismo ideal singular.

<u>Nota 2.14</u>.- En la demostración de 2.12 aparece un k-homomorfismo

$$\psi : R_n \to \Delta||t, T_1, .. T_n||$$

definido por las sustituciones

$$\psi(X_i) = z_i t^{\alpha_i} + T_i t^{2\alpha_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dicho k-homomorfismo puede ser, en cierta forma, generalizado, obteniendo un método de fabricar ejemplos.

<u>Proposición 2.15</u>.- Sean $\{t, T_1, .. T_n\}$ variables, $\zeta_1(t), .., \zeta_n(t)$ series con coeficientes en k, de órdenes $\alpha_1, .., \alpha_n \in Z_+$, respectivamente, y sea

$$\psi : R_n \to k||t, T_1, .. T_n||$$

el k-homomorfismo dado por las sustituciones

$$\psi(X_i) = \zeta_i(t) + T_i t^{q\alpha_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad q \in Z_+.$$

Se verifica entonces:

2.15.1.- ψ es inyectivo; por tanto admite una única ampliación $\psi':K_n \to k((t,T_1,..,T_n))$.

2.15.2.- La composición de ψ' con la función de orden respecto de t es una valoración v discreta de rango 1 de $K_n|k$, cuyo centro en R_n es M_n.

2.15.3.- Si $q > 1$, Sing(v) es un ideal primo de S_n de dimensión de Krull igual a 1, y si $q = 1$, Sing(v) = (0).

Demostración.-

La dificultad está en probar 2.15.1. Admitamos 2.15.1 y vamos a probar 2.15.2 y 2.15.3. En primer lugar, 2.15.2 es trivial. En cuanto a 2.15.3 observemos que, suponiendo $q > 1$ y escribiendo

$$\zeta_i(t) = t^{\alpha_i} \sum_{j \geq 0} a_{ij} t^j, \quad a_{ij} \in k, \; a_{i0} \neq 0, \; 1 \leq i \leq n$$

es

$$a_{10}^{\alpha_2} X_2^{\alpha_1} - a_{20}^{\alpha_1} X_1^{\alpha_2}, \ldots, a_{10}^{\alpha_n} X_n^{\alpha_1} - a_{n0}^{\alpha_1} X_1^{\alpha_n} \in \mathrm{Sing}(v),$$

con lo que dim Sing(v) ≤ 1. Como Sing(v) $\subsetneq (X_1,X_2,\ldots,X_n)$, es dim Sing(v) = 1.

Supongamos ahora que $q = 1$; entonces se tiene que

$$\psi(X_i) = (a_{i0} + T_i)t^{\alpha_i} + a_{i1} t^{\alpha_i+1} + \ldots \quad , 1 \leq i \leq n$$

Si $h \in R_n$ es una forma no nula de grado r respecto de la forma $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$, entonces es

$$\psi(h) = t^r.h(a_{10}+T_1+t(\sum_{j\geq 1} a_{1j}t^j),..,a_{n0}+T_n+t(\sum_{j\geq 1} a_{nj}t^j)) =$$

$$= t^r(h(a_{10}+T_1,..,a_{n0}+T_n) + \text{términos en } t \text{ de grado positivo})$$

Así

$$h \in \mathrm{Sing}(v) \iff h(a_{10}+T_1,..,a_{n0}+T_n) = 0 \iff h = 0.$$

Probemos, entonces 2.15.1. Sea $h \in R_n$ una forma no nula de grado r respecto de L; se tiene

$$\psi(h) = h(\zeta_1(t) + T_1 t^{q\alpha_1},..,\zeta_n(t) + T_n t^{q\alpha_n}).$$

Vamos a desarrollar esta expresión fijándonos en los monomios en $T_1,..,T_n$. Como es evidente que sólo hay un número finito, está claro que $\psi(h) \in k||t|| \; |T_1,..,T_n|$. Graduemos este anillo respecto de L y consideremos la descomposición de $\psi(h)$ en suma de formas respecto de L. Es fácil ver que la forma de menor grado es

$$h(\zeta_1(t),..,\zeta_n(t)),$$

que es de grado cero y puede ser nula, y la de mayor grado es

$$t^{rq}h(T_1,..,T_n),$$

que es de grado r y no nula. Si $m \in Z$, $0 < m < r$, cada monomio de grado m en $T_1,..,T_n$ tiene un coeficiente que es una serie en t de orden estrictamente mayor que mq.

Sentado esto, es ya fácil ver que si $f \in R_n$ es una no unidad distinta de cero, es $\psi(f) \neq 0$. En efecto, sea $f=f_s+f_{s+1}+..$ la descomposición de f en suma de formas respecto de L, $f_s \neq 0$. En $\psi(f)$ hay una forma de grado s en $T_1,..,T_n$ no nula, que es

$$t^{sq}.f(T_1,..,T_n).$$

Esta forma es incancelable, pues las formas de grado s en $T_1,\ldots,T_n$ que provengan de formas f_j, con $j > s$, tienen en cada uno de sus monomios coeficientes que son series en t de orden estrictamente mayor que sq. Esto prueba la proposición.

Definición 2.16.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$, cuyo centro en R_n es M_n , $\alpha_i = v(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha_i \in Z_+$, $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. A la variedad del espacio proyectivo alabeado (respecto de la graduación determinada por L) dada por Sing(v) se le llama variedad singular asociada a v.

Como final de esta sección vamos a probar el siguiente

Lema 2.17.- Sea v una valoración discreta de rango 1 de $K_n|k$, cuyo centro en R_n es M_n, $\alpha_i = v(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sea $\hat{K}_n$ la complección de K_n respecto de v, $\hat{v}$ la ampliación de v a $\hat{K}_n$, $\kappa : \Delta_v \to R_{\hat{v}}$ una k-sección del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_v$, $\theta \in R_{\hat{v}}$ un elemento de valor 1, t una variable,

$$\Phi_{\kappa,\theta} : \Delta_v||t|| \to R_{\hat{v}}$$

el isomorfismo correspondiente, y escribamos

$$\Phi^{-1}_{\kappa,\theta}(X_i) = t^{\alpha_i} \sum_{j \geqslant 0} a_{ij} t^j, \; a_{ij} \in \Delta_v, \; a_{i0} \neq 0, \; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Se verifica que $(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n})$ es una n-upla de coordenadas homogéneas del punto genérico de Sing(v).

Demostración.-

Sea $\psi : S_n = k|X_1,\ldots,X_n| \to \Delta_v|t|$ el k-homomorfismo definido por las sustituciones

$$\psi(X_i) = a_{i0} t^{\alpha_i}, \; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Sea $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ y consideremos sobre S_n la graduación determinada por L. Vamos a ver que $\ker\psi$ es un ideal homogéneo de S_n. En efecto, sea $f = f_r + f_{r+1} + \ldots + f_s \in S_n$ un polinomio descompuesto en suma de formas respecto de L, donde f_i es cero o una forma de grado i. Si $f \in \ker\psi$, es

$$\psi(f) = f_r(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n}) + f_{r+1}(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n}) + \ldots.$$

$$\ldots + f_s(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n}) = t^r f_r(a_{10},\ldots,a_{n0}) + t^{r+1} f_{r+1}(a_{10},\ldots,a_{n0}) + \ldots$$

$$\ldots + t^s f_s(a_{10},\ldots,a_{n0}) = 0,$$

de donde

$$0 = f_r(a_{10},\ldots,a_{n0}) = f_{r+1}(a_{10},\ldots,a_{n0}) = f_s(a_{10},\ldots,a_{n0})$$

y así

$$0 = \psi(f_r) = \psi(f_{r+1}) = \ldots = \psi(f_s)$$

lo que prueba que $\ker\psi$ es un ideal homogéneo de S_n. En estas circunstancias, sea $h \in S_n$ una forma de grado r. Se tiene

$$h \in \mathrm{Sing}(v) \Leftrightarrow v(h) > v_L(h) \Leftrightarrow v_t(h(t^{\alpha_1}\sum_{j\geq 0} a_{1j}t^j,\ldots,t^{\alpha_n}\sum_{j\geq 0} a_{nj}t^j)) >$$

$$> r \Longleftrightarrow v_t(h(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n}) + \text{términos en } t \text{ de grado superior}$$

$$\text{a } r)) > r \Longleftrightarrow h(a_{10}t^{\alpha_1},\ldots,a_{n0}t^{\alpha_n}) = 0 \Leftrightarrow h \in \ker\psi .$$

Esto prueba el lema.

Sección 3: Los cuerpos residuales I.-

En esta sección nos proponemos dar unos cuantos teoremas sobre los cuerpos residuales de las valoraciones discretas de rango 1 de $K_n|k$, centradas, en R_n, en el ideal maximal M_n. Vamos a comenzar por un caso sencillo y espectacular: el de las valoraciones v_L asociadas a una forma lineal $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$ $\alpha_i > 0$, $i=1,..,n$, $1 = \text{m.c.d.}(\alpha_1,..,\alpha_n)$.

La espectacularidad de este caso proviene de que se puede dar una descripción explícita muy elegante de Δ_{v_L}. Antes de entrar directamente en este estudio, vamos a hacer unas breves observaciones, que reinterpretan, de manera ingeniosa, hechos elementales de álgebra lineal.

Consideremos el Z-módulo Z^n y un submódulo arbitrario $M \subset Z^n$. Se pondrá, con notación obvia,

$$k(X^M) = k(\{X^A \mid A \in M\}) \subset k(X_1,..,X_n).$$

Lema 3.1.- Si $\{A_1,..,A_r\}$ es un sistema de generadores de M, entonces

$$k(X^M) = k(X^{A_1},..,X^{A_r}).$$

Demostración.-

Claramente $k(X^{A_1},..,X^{A_r}) \subset k(X^M)$; veamos la inclusión contraria.

Sea $A \in M$, $A = \beta_1 A_1 + .. + \beta_r A_r$, $\beta_i \in Z$; asi es

$$X^A = X^{\beta_1 A_1 + .. + \beta_r A_r} = (X^{A_1})^{\beta_1} ... (X^{A_r})^{\beta_r} \in k(X^{A_1},..,X^{A_r}),$$

lo que prueba que $k(X^M) \subset k(X^{A_1},...,X^{A_r})$ y el lema.

<u>Lema 3.2</u>.- Sean $\{A_1,..,A_r\}$ elementos de Z^n linealmente independientes. Entonces los monomios $X^{A_1},..,X^{A_r}$ son algebraicamente independientes sobre k.

<u>Demostración</u>.-

Sean $\{Z_1,..,Z_r\}$ variables, y sea

$$f(Z_1,..,Z_r) = \sum_{i=1}^{s} q_i Z_1^{\beta_{i1}} \cdots Z_r^{\beta_{ir}} \in k|Z_1,..,Z_r|$$

tal que $f(X^{A_1},..,X^{A_r}) = 0$. Obsérvese que

$$f(X^{A_1},..,X^{A_r}) = \sum_{i=1}^{s} q_i X^{\beta_{i1}A_1+\cdots+\beta_{ir}A_r}$$

y que la independencia lineal de $\{A_1,..,A_r\}$ se traduce en que

$$\beta_{i1}A_1+..+\beta_{ir}A_r = \beta_{j1}A_1+..+\beta_{jr}A_r \Longleftrightarrow (\beta_{i1},..,\beta_{ir}) = (\beta_{j1},..,\beta_{jr})$$

Obsérvese, también, que existe $A \in Z_0^n$ tal que

$$A + \beta_{i1}A_1 + .. + \beta_{ir}A_r \in Z_0^n, \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Partiendo de que $\{(\beta_{i1},..,\beta_{ir}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ son r-uplas distintas, las n-uplas $\{\beta_{i1}A_1 + .. + \beta_{ir}A_r \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ son también distintas. Por tanto, de

$$X^A f(X^{A_1},..,X^{A_r}) = 0$$

se deduce que $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$, lo que prueba el lema.

Fijemos ahora una forma lineal $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in Z_+$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 = \text{m.c.d.}(\alpha_1,..,\alpha_n)$, y vamos a proceder al cálculo de Δ_{v_L}.

Designaremos por K_L al subconjunto de K_n formado por los cocientes de formas, respecto de L, del mismo grado. Es trivial ver que K_L es un subcuerpo de K_n.

<u>Proposición 3.3</u>.- El homomorfismo natural $R_{v_L} \to \Delta_{v_L}$ posee una k-sección κ cuya imagen es K_L.

<u>Demostración</u>.-

Es claro que todos los elementos de K_L tienen valor cero; asi la restricción $\psi : K_L \to \Delta_{v_L}$ a K_L del homomorfismo natural $R_{v_L} \to \Delta_{v_L}$ es una inmersión de cuerpos. Vamos a probar que ψ es suprayectivo, con lo que se tendrá demostrada la proposición, sin más que tomar $\kappa = \psi^{-1}$.

Sea $f/g \in K_n$ un elemento de valor cero, y sean

$$f = f_r + f_{r+1} + \dots , \quad f_r \neq 0,$$

$$g = g_r + g_{r+1} + \dots , \quad g_r \neq 0,$$

las descomposiciones de f y g en suma de formas respecto de L; se verifica que $(f/g) + m_{v_L} = (f_r/g_r) + m_{v_L}$ porque

$$\frac{f_r+f_{r+1}+ \dots}{g_r+g_{r+1}+ \dots} - \frac{f_r}{g_r} = \frac{(g_r f_r+g_r f_{r+1}+\dots) - (f_r g_r+f_r g_{r+1}+\dots)}{g_r^2+g_r g_{r+1}+\dots} =$$

$$= \frac{(g_r f_{r+1} - f_r g_{r+1}) + \dots}{g_r^2+g_r g_{r+1}+\dots} ,$$

que es un elemento de valor positivo. Así, $(f/g) + m_{v_L} = \psi(f_r/g_r)$

lo que prueba que ψ es suprayectivo y la proposición.

<u>Teorema 3.4</u>.- Δ_{v_L} es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia n-1.

<u>Demostración</u>.-

Sea $M \subset Z^n$ el submódulo de ecuación implícita $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ y observemos que, para probar el teorema, basta ver que $k(X^M) = K_L$.

En efecto, supuesta probada esta relación, sabemos por álgebra lineal elemental que M es un módulo libre de rango n-1. Si $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ es una base de M, el lema 3.1 nos diría que

$$K_L = k(X^{A_1}, \ldots, X^{A_{n-1}})$$

y el lema 3.2 que $\{X^{A_1}, \ldots, X^{A_{n-1}}\}$ son algebraicamente independientes sobre k.

Vamos, entonces, a probar que $k(X^M) = K_L$. Sea $A \in M$, $A \neq 0$, $A = (a_1, \ldots, a_n)$; sean $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ sus componentes positivas y $a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}$ sus componentes negativas; entonces

$$X^A = \frac{X_{i_1}^{a_{i_1}} \cdots X_{i_r}^{a_{i_r}}}{X_{j_1}^{-a_{j_1}} \cdots X_{j_s}^{-a_{j_s}}}$$

que es un cociente de formas, respecto de L, del mismo grado. Esto prueba que $X^A \in K_L$ y, por tanto, que $k(X^M) \subset K_L$. Reciprocamente, sean

$$c_1 X^{A_1} + \cdots + c_r X^{A_r},\ d_1 X^{B_1} + \cdots + d_s X^{B_s}$$

dos formas no nulas del mismo grado m, ω su cociente, y sea X^A un monomio arbitrario de grado m. Se tiene que

$$\omega = \frac{c_1X^{A_1} + \dots + c_rX^{A_r}}{d_1X^{B_1} + \dots + d_sX^{B_s}} = \frac{c_1X^{A_1-A} + \dots + c_rX^{A_r-A}}{d_1X^{B_1-A} + \dots + d_sX^{B_s-A}}$$

y como $A_i - A$, $B_j - A \in M$, es $\omega \in k(X^M)$. Esto prueba que $K_L \subset k(X^M)$, y la igualdad, lo que concluye la demostración del teorema.

Nota 3.5.- Como nota final a este cálculo del cuerpo residual de v_L, haremos los comentarios siguientes. No todo conjunto de n-1 elementos de M linealmente independientes son una base de M, como es bien conocido. Tomando un tal conjunto, y designando por M' al submódulo engendrado por él, sabemos que el módulo cociente M/M' es de torsión. Ese conjunto es una base de M si y solo si M/M' = (0). Caso contrario M/M' es de la forma

$$|*| \quad M/M' \simeq (Z/d_1Z) + \dots + (Z/d_mZ), \ m \leqslant n-1, \ d_1,\dots,d_m \in Z_+,$$

$d_1|\dots|d_m$; pongamos $d = d_1\dots d_m$. Por álgebra lineal elemental sabemos que $|*|$ es equivalente a la existencia de sendas bases $\{A_1,..,A_{n-1}\}$ de M y $\{B_1,..,B_{n-1}\}$ de M' tales que

$$B_1 = d_1A_1,.., B_m = d_mA_m, B_{m+1} = A_{m+1},.., B_{n-1} = A_{n-1}.$$

Así

$$(X^{A_i})^{d_i} = X^{B_i}, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \ y \ X^{B_j} = X^{A_j}, \ m+1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Eso significa que k(M') es una extensión trascendente pura de k y que k(M) es una extensión algebraica finita de k(M').

Veamos, para concluir, un ejemplo numérico. Sea n = 3, $L = 4u_1+6u_2+9u_3$. Una base de M es $\{(6,-1,-2),(3,-2,0)\}$ y así

$$k(X^M) = k((X_1{}^6/X_2X_3{}^2),(X_1{}^3/X_2{}^2)).$$

En cambio, tomando $(9,0,-4),(3,-2,0)$ y el submódulo $M'\subset M$ engendrado por ellos se ve que $M' \neq M$, que $M'=\langle(12,-2,-4),(3,-2,0)\rangle$ que $(12,-2,-4) = 2(6,-1,-2)$, y asi $M/M'\simeq Z/2Z$. Así

$$k(X^{M'}) = k(\frac{X_1{}^{12}}{X_2{}^2X_3{}^4}, \frac{X_1{}^3}{X_2{}^2}) \subset k(X^M)$$

y $|k(X^M):k| = 2$, porque $(X_1{}^6/X_2X_3{}^2)^2 - (X_1{}^{12}/X_2{}^2X_3{}^4) = 0.$

<u>Nota 3.6</u>.- Vamos, ahora, a hacer unos cálculos sobre el completado $\hat{K}_n$ de K_n respecto de la valoración v_L. Por 3.3 tenemos una k-sección $\kappa:\Delta_{v_L} \to R_{v_L}$ del homomorfismo natural $R_{v_L} \to \Delta_{v_L}$. Por ser $1 = $ m.c.d.$(\alpha_1,..,\alpha_n)$, existen enteros $\beta_1,..,\beta_n$ tales que $1 = \beta_1\alpha_1 + \ldots + \beta_n\alpha_n$. Así, poniendo $\theta = X_1^{\beta_1}\ldots X_n^{\beta_n}$, se tiene que $v_L(\theta) = 1$.

En estas circunstancias, si $\hat{v}_L$ es la ampliación de v_L a $\hat{K}_n$, se tiene un Δ_{v_L}-isomorfismo

$$\Phi_{\kappa\theta}:\Delta_{v_L}||t|| \to R_{\hat{v}_L}$$

Para operar con este caso concreto, y sin variar κ ni θ podemos identificar ambos anillos vía $\Phi_{\kappa\theta}$. Haciéndolo así, resulta

$$X_1 = \delta_1\theta^{\alpha_1}, \quad \delta_1 = X_1^{1-\alpha_1\beta_1}X_2^{-\alpha_1\beta_2}\ldots X_n^{-\alpha_1\beta_n} \in \Delta_{v_L}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n = \delta_n\theta^{\alpha_n}, \quad \delta_n = X_1^{-\alpha_n\beta_1}X_2^{-\alpha_n\beta_2}\ldots X_n^{1-\alpha_n\beta_n} \in \Delta_{v_L}$$

En este caso, se tiene la importante propiedad de que

$$\Delta_{v_L} = k(\delta_1,\ldots,\delta_n).$$

En efecto, sean $f,g \in R_n$ dos formas respecto de L no nulas de grado r,

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i X^{A_i}, \qquad g = \sum_{j=1}^{q} d_j X^{B_j}, \qquad L(A_i) = L(B_j) = r$$

con $c_i, d_j \in k$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Se tiene que, escribiendo $A_i = (a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$, $B_j = (b_{j_1},\ldots,b_{j_n})$, es

$$\frac{f}{g} = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i \delta_1^{a_{i_1}} \cdots \delta_n^{a_{i_n}}}{\sum_{j=1}^{q} d_j \delta_1^{b_{j_1}} \cdots \delta_n^{b_{j_n}}} \in k(\delta_1,\ldots,\delta_n)$$

lo que prueba que $K_L \subset k(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Como el recíproco es trivial, se tiene la igualdad.

Sean ahora

$$A_1' = (1-\alpha_1\beta_1,\ -\alpha_1\beta_2,\ldots,\ -\alpha_1\beta_n) \in Z^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n' = (-\alpha_n\beta_1,\ -\alpha_n\beta_2,\ldots,\ 1-\alpha_n\beta_n) \in Z^n$$

y sea M' el submódulo de Z^n engendrado por ellos. Sea M, como antes, el submódulo de Z^n de ecuación implícita $\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=0$; se tiene

$$\Delta_{v_L} = k(X^M) = k(X^{M'})$$

Como $M' \subset M$ está claro que $M = M'$.

Sección 4: Estudio de un ejemplo.-

En esta sección vamos a trabajar con un ejemplo que nos de pistas claras para el cálculo del cuerpo residual de una valoración. Comenzamos con un resultado semejante a 2.15.

Proposición 4.1.- Sea K una extensión de k, $\{t, T_2, .., T_n\}$ variables, $\zeta_2(t), .., \zeta_n(t) \in K||t||$ de órdenes respectivos $\alpha_2, .., \alpha_n \in Z_+$ y sea

$$\psi : R_n \to K||t, T_2, .., T_n||$$

el k-homomorfismo definido por las sustituciones

$$\psi(X_1) = t^{\alpha_1}$$

$$\psi(X_i) = \zeta_i(t) + T_i t^{q\alpha_i}, \quad \alpha_1, \ q \in Z_+, \ 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Entonces ψ es inyectivo.

Demostración.-

Sea $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ y sea $h \in R_n$ una forma no nula de grado r respecto de L; se tiene

$$\psi(h) = h(t^{\alpha_1}, \zeta_2(t) + T_2 t^{q\alpha_2}, .., \zeta_n(t) + T_n t^{q\alpha_n}).$$

Vamos a desarrollar esta expresión fijándonos en los monomios en $T_2, .., T_n$. Como es evidente que solo hay un número finito, está claro que $\psi(h) \in K||t|| \; |T_2, .., T_n|$. Graduemos este anillo con respecto a la forma lineal $L' = \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$, y consideremos la descomposición de $\psi(h)$ en suma de formas respecto de L'. Es claro que la forma de menor grado es

$$h(t^{\alpha_1}, \zeta_2(t), .., \zeta_n(t)),$$

que es de grado cero, que puede ser nula, y que si no es nula, es de orden r en t. Para continuar el estudio consideremos los siguientes casos.

caso 1.- h no es divisible por X_1.

La forma de mayor grado de $\psi(h)$ es, entonces,

$$t^{rq}h(0,T_2,..,T_n),$$

que es de grado r y no nula. Vamos a estudiar los órdenes de los coeficientes de los monomios en $T_2,..,T_n$ de grado menor que r. Sea $m \in Z$, $0 < m < r$. Consideremos un monomio de grado r que aparezca en h,

$$\mu = X_1^{a_1} X_2^{a_2} ... X_n^{a_n}, \quad \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = r$$

y su transformado por

$$\psi(\mu) = t^{\alpha_1 a_1}(\zeta_2(t)+T_2 t^{q\alpha_2})^{a_2} ... (\zeta_n(t)+T_n t^{q\alpha_n})^{a_n},$$

y vamos a fijarnos en los posibles monomios de grado m en $T_2,..$ $..,T_n$ que aparecen en $\psi(\mu)$. Tomemos uno de ellos,

$$\mu' = T_2^{\nu_2} .... T_n^{\nu_n}, \quad m = \alpha_2 \nu_2 + ... + \alpha_n \nu_n$$

y vamos a ver cual es su coeficiente. Ciertamente este coeficiente es, salvo producto por un número entero

$$c(t) = t^{\alpha_1 a_1} \zeta_2(t)^{a_2 - \nu_2} t^{q\alpha_2 \nu_2} ... \zeta_n(t)^{a_n - \nu_n} t^{q\alpha_n \nu_n} =$$

$$= t^{\alpha_1 a_1 + qm} \zeta_2(t)^{a_2 - \nu_2} ... \zeta_n(t)^{a_n - \nu_n}.$$

Si $a_1 = 0$, como $m < r$, debe existir un i, $2 \leqslant i \leqslant n$, tal que $\nu_i < a_i$, luego $a_i - \nu_i > 0$ y asi el orden de c(t) es mayor que qm. Si $a_1 \neq 0$ es claro que el orden de c(t) es mayor que qm. Esto prueba que el coeficiente de μ' es una serie en t de orden mayor que qm.

<u>caso 2</u>.- h es divisible por X_1 pero no es una potencia de X_1.

Entonces $h = X_1^s h'$ con $s > 0$, $X_1 \nmid h'$ y h' es de grado $r' > 0$. Aplicando lo que sabemos del caso 1, la forma de mayor grado de $\psi(h)$ es

$$t^{s\alpha_1 + r'q} h'(0,T_2,..,T_n)$$

que es de grado r' y no nula. Obsérvese que, como $r = s\alpha_1 + r'$, es $rq = s\alpha_1 q + r'q \geqslant s\alpha_1 + r'q$. Cada monomio de grado m, $0 < m < r'$ (si existe un tal m), en $T_2,..,T_n$ en $\psi(h)$ tiene un coeficiente que es de orden estrictamente mayor que mq en t.

<u>caso 3</u>.- h es una potencia de X_1.

En este caso, salvo producto por una constante, es $\psi(h) = t^r$.

Con estos preliminares, vamos a probar que si $f \in R_n$ es una no unidad distinta de cero, entonces $\psi(h) \neq 0$. Sea $f = f_d + f_{d+1} + \ldots$ la descomposición de f en suma de formas respecto de L, $f_d \neq 0$. Consideremos $\psi(f) = \psi(f_d) + \psi(f_{d+1}) + \ldots$ y estudiemos los siguientes casos:

<u>caso 1</u>.- f_d no es divisible por X_1.

Entonces en $\psi(f_d)$ hay una forma de grado d en $T_2,..,T_n$, que es

$$t^{dq} h(0,T_2,..,T_n).$$

Esta forma es incancelable, pues las formas de grado d en $T_2,..,T_n$ que provengan de formas f_j, con $j > d$, tienen en cada uno de sus monomios coeficientes que son series en t de órdenes estrictamente mayores que dq.

<u>caso 2</u>.- f_d es divisible por X_1 pero no es una potencia de X_1.

Poniendo $f_d = X_1^s . f'_{d'}$, con $d' > 0$, $s \gg 0$ y $X_1 \nmid f'_{d'}$, la forma en $T_2,..,T_n$ de mayor grado en $\psi(f_d)$ es

$$t^r f'_{d'}(0,T_2,..,T_n)$$

que es de grado d', no nula, y $r \leqslant dq$. Esta forma es incancelable por la misma razón anterior.

<u>caso 3</u>.- $f_d = a.X_1^{d/\alpha_1}$, $a \in k$.

Entonces $\psi(f_d) = a.t^d$, que es evidentemente incancelable pues la forma de grado cero de f_j, con $j > d$, si no es nula, tiene orden j en t. Esto prueba la proposición.

Vamos ahora a plantear el ejemplo que pretendíamos. Sean u,t,T_2,T_3,T_4 variables independientes, $K = C(u)$ y sea

$$\psi : C||X_1,X_2,X_3,X_4|| \to K||t,T_2,T_3,T_4||$$

el C-homomorfismo dado por las sustituciones

$$\psi(X_1) = t$$

$$\psi(X_2) = u^2 t + T_2 t^3$$

$$\psi(X_3) = u^4 t + u^3 t^2 + T_3 t^3$$

$$\psi(X_4) = u^6 t + u t^2 + T_4 t^3.$$

Sea $\psi' : C((X_1,X_2,X_3,X_4)) \to K((t,T_2,T_3,T_4))$ la extensión de ψ a los cuerpos de fracciones y sea $v : C((X_1,X_2,X_3,X_4)) \to Z \cup \{\infty\}$ la composición de ψ' con la función de orden respecto de t. Sea $L = u_1+u_2+u_3+u_4$ y v_L la valoración correspondiente.

<u>Proposición 4.2</u>.- $\mathrm{Sing}(v) = (X_1X_3-X_2^2,\ X_1X_4-X_2X_3,\ X_2X_4-X_3^2)$.

<u>Demostración</u>.-

Sabemos por geometría elemental que el ideal de la derecha de la expresión anterior es primo de altura 2, por ser el ideal de la cúbica alabeada. Sea

$$\sigma : C|X_1,X_2,X_3,X_4| \to C|t,u|$$

dado por

$$\sigma(X_1) = t,\ \sigma(X_2) = u^2t,\ \sigma(X_3) = u^4t,\ \sigma(X_4) = u^6t.$$

Es claro que $(X_1X_3-X_2^2,\ X_1X_4-X_2X_3,\ X_2X_4-X_3^2)$ $\ker\sigma$. De otro lado, $\mathrm{im}\,\sigma = C|t,u^2t,u^4t,u^6t|$, que tiene dimensión mayor o igual que 2, pues $(0) < (u^2t,u^4t,u^6t) < (t,u^2t,u^4t,u^6t)$ es una cadena de ideales primos. Así, $(X_1X_3-X_2^2,\ X_1X_4-X_2X_3,\ X_2X_4-X_3^2) = \ker\sigma$.

De otro lado, si $f \in C|X_1,X_2,X_3,X_4|$ es una forma respecto de L, de grado r, como

$$\psi(f) = f(t,u^2t+T_2t^3,u^4t+u^3t^2+T_3t^3,u^6t+ut^2+T_4t^3) =$$

$$= t^rf(1,u^2,u^4,u^6)+\text{términos en } t \text{ de grado superior a } r =$$

$$= f(t,u^2t,u^4t.u^6t)+\text{términos en } t \text{ de grado superior a } r,$$

es $f \in \mathrm{Sing}(v) \Leftrightarrow f(t,u^2t,u^4t,u^6t) = 0 \Leftrightarrow f \in \ker\sigma$, lo que prueba la proposición

<u>Nota 4.3</u>.- Sea, en general, v una valoración de $K_n|k$, discreta de rango 1 cuyo centro en R_n es M_n, sea $\hat{K}_n$ la complección de K_n respecto de v y sea $\hat{v}$ la ampliación de v a $\hat{K}_n$. Si se toman ele-

mentos $u_1,..,u_n \in R_{\hat{v}}$, de valor positivo, tiene sentido hablar del anillo $R_n' = k||u_1,..,u_n||$ como subanillo de $R_{\hat{v}}$ y de $K_n' = k((u_1, ..,u_n))$ como subcuerpo de $\hat{K}_n$. En estas circunstancias, siempre se tomará como compleción de K_n' respecto de $\hat{v}$ el subconjunto de $\hat{K}_n$ formado por los límites de las sucesiones de Cauchy de elementos de K_n'. Con este convenio, lo que viene a continuación cobra sentido.

Pongamos

$$Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_2,\ Y_3 = (X_1X_3-X_2^2)/X_1^2,\ Y_4 = (X_1^2X_4-X_2^3)/X_1^3$$

se tiene que

$$\psi(Y_1) = t$$

$$\psi(Y_2) = u^2t + T_2t^3$$

$$\psi(Y_3) = u^3t + (T_3-2u^2T_2)t^4 - T_2^2t^6$$

$$\psi(Y_4) = ut + (T_4-3u^4T_2)t^2 - 3u^2T_2^2t^4 - T_2^3t^6$$

<u>Proposición 4.4</u>.- $\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\}$ son formalmente independientes sobre C.

<u>Demostración</u>.-

Pongamos

$\zeta_1'=t$ $\qquad\qquad$ $\zeta_1=\zeta_1'$

$\zeta_2'=u^2t+T_2t^3$ $\qquad\qquad$ $\zeta_2=\zeta_2'-u^2t=\zeta_2'-u^2\zeta_1'$

$\zeta_3'=u^3t+(T_3-2u^2T_2)t^4-T_2^2t^6$ $\qquad\qquad$ $\zeta_3=\zeta_3'-u^3t=\zeta_3'-u^3\zeta_1'$

$\zeta_4'=ut+(T_4-3u^4T_2)t^2-3u^2T_2^2t^4-T_2^3t^6$ $\qquad\qquad$ $\zeta_4=\zeta_4'-ut=\zeta_4'-u\zeta_1'$

basta probar que $\{\zeta_1',\zeta_2',\zeta_3',\zeta_4'\}$ son formalmente independientes sobre K. Para esto, teniendo en cuenta que, como subanillos de $K||t,T_2,T_3,T_4||$ es $K||\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4|| = K||\zeta'_1,\zeta'_2,\zeta'_3,\zeta'_4||$, basta ver que $\{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4\}$ son formalmente independientes sobre K.

Sea $\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\}$ variables, y

$$\sigma : K||Z_1,Z_2,Z_3,Z_4|| \rightarrow K||\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4||$$

el K-homomorfismo dado por las sustituciones $\sigma(Z_i) = \zeta_1$, $1 \leq i \leq 4$ Se trata de probar que es inyectivo. Sea $L' = u_1+3u_2+4u_3+2u_4$, $f \in K||Z_1,Z_2,Z_3,Z_4||$ una no unidad, distinta de cero, y consideremos su decomposición $f = f_d+f_{d+1}+\ldots$ en formas respecto de L', $f_d \neq 0$. Así

$\sigma(f) = t^d f_d(1,T_2,T_3-2u^2T_2,T_4-3u^4T_2)$ + términos en t de grado superior a d,

con lo que $\sigma(f) \neq 0$, pues $\{1,T_2,T_3-2u^2T_2,T_4-3u^4T_2\}$ son algebraicamente independientes sobre K. Esto prueba la proposición.

Sea $\hat{K}_4$ la compleción de $C((X_1,X_2,X_3,X_4))$ respecto de v y $\hat{v}$ la ampliación de v a $\hat{K}_4$.

Proposición 4.5.- En el anillo $R'_4 = C||Y_1,Y_2,Y_3,Y_4||$ el ideal singular de $\hat{v}$ es $(Y_1Y_2-Y_4^2,Y_1Y_3-Y_2Y_4,Y_4Y_3-Y_2^2)$.

La demostración es análoga a la de 4.2.

Lo que trataremos probar ahora es que el cuerpo residual de la restricción de $\hat{v}$ a $C((Y_1,Y_2,Y_3,Y_4))$ coincide con el de v. Para ello establezcamos el siguiente

Lema 4.6.- Sea v' una valoración arbitraria, discreta de rango 1 de $K_n|k$, cuyo centro en R_n sea M_n, y sea v" su restricción a $k(X_1,\ldots,X_n)$. La inmersión canónica $\sigma : \Delta_{v''} \rightarrow \Delta_{v'}$ es un isomorfismo.

Demostración.-

Recordemos que la inmersión canónica $\sigma : \Delta_{v''} \to \Delta_{v'}$ funciona así: si $f,g \in k|X_1,..,X_n|$ son tales que $v''(f/g) = 0$, entonces

$$\sigma((f/g) + m_{v''}) = (f/g) + m_{v'}.$$

El único problema está en demostrar que σ es suprayectiva. Sea $\hat{K}_n$ la compleción de K_n respecto de v', $\kappa : \Delta_{\hat{v}'} \to R_{\hat{v}'}$ una k-sección del homomorfismo natural $R_{\hat{v}'} \to \Delta_{\hat{v}'}$, donde $\hat{v}'$ es la ampliación de v' a $\hat{K}_n$, $\theta \in R_{\hat{v}'}$ un elemento de valor 1. Consideremos el isomorfismo correspondiente

$$\Phi_{\kappa,\theta} : \Delta_{v'}||t|| \to R_{\hat{v}'}$$

donde t es una variable, y pongamos

$$\Phi^{-1}_{\kappa\theta}(X_i) = t^{\alpha_i} \sum_{j \geq 0} a_{ij} t^j, \quad a_{i0} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sea $f \in k||X_1,..,X_n||$, $f = \sum_{j \geq 0} f_j$ la descomposición de f en suma de formas respecto de $L = \alpha_1 u_1 + .. + \alpha_n u_n$. Dado un entero $m > 0$ arbitrario, los coeficientes de $\Phi^{-1}_{\kappa\theta}(f)$ como serie en t, hasta el grado m, solo dependen de $\sum_{j=0}^{m} f_j$ y no de las formas restantes. Así, si $g = \sum_{j \geq 0} g_j \neq 0$, poniendo

$$\Phi^{-1}_{\kappa\theta}(f) = t^{v'(f)} \sum_{j \geq 0} a_j t^j, \quad \Phi^{-1}_{\kappa\theta}(g) = t^{v'(g)} \sum_{j \geq 0} b_j t^j, \quad a_0, b_0 \neq 0$$

$$\Phi^{-1}_{\kappa\theta}\left(\sum_{j=0}^{v'(f)} f_j\right) = a_0 t^{v'(f)} + t^{v'(f)+1} \sum_{j \geq 0} a'_j t^j$$

$$\Phi_{\kappa\theta}^{-1}\left(\sum_{j=0}^{v'(g)} g_j\right) = b_0 t^{v'(g)} + t^{v'(g)+1}\sum_{j\geq 0} b_j' t^j$$

Así

$$\Phi_{\kappa\theta}^{-1}\left(\frac{f}{g} - \frac{\sum_{j=0}^{v'(f)} f_j}{\sum_{j=0}^{v'(g)} g_j}\right) = \frac{t^{v'(f)}\sum_{j\geq 0} a_j t^j}{t^{v'(g)}\sum_{j\geq 0} b_j t^j} - \frac{a_0 t^{v'(f)} + t^{v'(f)+1}\sum_{j\geq 0} a_j' t^j}{b_0 t^{v'(g)} + t^{v'(g)+1}\sum_{j\geq 0} b_j' t^j} =$$

$$= \frac{t^{v'(f)+v'(g)}(\text{serie en t de orden mayor o igual que uno})}{t^{2v'(g)}(b_0\sum_{j\geq 0} b_j t^j + t(\sum_{j\geq 0} b_j t^j)(\sum_{j\geq 0} b_j' t^j))}$$

Así, si $v'(f) = v'(g)$, se tiene, claramente, que

$$(f/g) - \left(\left(\sum_{j=0}^{v'(f)} f_j\right)/\left(\sum_{j=0}^{v'(g)} g_j\right)\right) \in m_{v'}$$

lo que prueba el lema.

Como consecuencia de 4.6 y del hecho de verificarse que $C(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = C(X_1,X_2,X_3,X_4)$, se tiene que el cuerpo residual de la restricción de $\hat{v}$ a $C((Y_1,Y_2,Y_3,Y_4))$ coincide con el de v.

Pongamos, ahora,

$$Z_1 = Y_1,\ Z_2 = Y_2,\ Z_3 = (Y_1Y_3^2 - Y_2^3)/Y_1^3,\ Z_4 = (Y_4^2 - Y_1Y_2)/Y_1^2,$$

se tiene que

$$\psi(Z_1) = t$$

$$\psi(Z_2) = u^2t + T_2t^3$$

$$\psi(Z_3) = -3u^4T_2t^2 + 2u^3(T_3 - 2u^2T_2)t^3 - 3u^2T_2^2t^4 - 2u^3T_2^2t^5 + (T_3 - 2u^2T_2 - T_2^3)t^6 -$$

$$-2T_2^2(T_3-2u^2T_2)t^8+T_2^4t^{10}$$

$$\psi(Z_4) = 2u(T_4-3u^4T_2)t+((T_4-3u^4T_2)^2-T_2)t^2-6u^3T_2^2t^3-6u^2T_2^2(T_4-3u^4T_2)t^4$$
$$-2uT_2^3t^5+(9u^4T_2^4-2T_2^3(T_4-3u^4T_2))t^6+6u^2T_2^5t^8+T_2^6t^{10}$$

<u>Proposición 4.7</u>.- $\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\}$ son formalmente independientes sobre C.

<u>Demostración</u>.-

Basta probar que las series del segundo miembro de las expresiones anteriores son formalmente independientes sobre C. Sea $L'' = u_1+u_2+2u_3+u_4$, $f \in R_4$ una no unidad, distinta de cero, $f = f_d+f_{d+1}+\dots$ su descomposición en suma de formas respecto de L'', $f_d \neq 0$. Llamando $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ a las series del segundo miembro anterior, se tiene

$$f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4) = f_d(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4) + f_{d+1}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4) + \dots =$$

$= t^d f_d(1,u^2,-3u^4T_2,2u(T_4-3u^4T_2))$ + términos en t de grado superior a d;

y eso es distinto de cero, pues al ser $\{1,u^2,-3u^4T_2,2u(T_4-3u^4T_2)\}$ algebraicamente independiente sobre C, se tiene que

$$f_d(1,u^2,-3u^4T_2,2u(T_4-3u^4T_2)) \neq 0.$$

<u>Proposición 4.8</u>.- En el anillo $R_4'' = C||Z_1,Z_2,Z_3,Z_4||$ el ideal singular de $\hat{v}$ es (0).

La demostración es evidente a partir de la demostración de la proposición anterior.

<u>Nota 4.9</u>.- Es fácil ver que $C(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) = C(Y_1,Y_2,Y_3^2,Y_4^2)$. Por lo tanto el cuerpo residual de la restricción de $\hat{v}$ al cuerpo de fracciones de R_4'' coincide con el de la restricción de $\hat{v}$ al cuerpo $C((Y_1,Y_2,Y_3^2,Y_4^2))$. Como $C((Y_1,Y_2,Y_3,Y_4))$ es algebraico sobre éste, $_v$ es una extensión algebraica del cuerpo residual de la restricción de $\hat{v}$ a $C((Y_1,Y_2,Y_3^2,Y_4^2))$. Este es

$$C\left(\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1^2}, \frac{Z_4}{Z_1}\right) = C\left(\frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_1Y_3^2-Y_2^3}{Y_1^3}, \frac{Y_4^2-Y_1Y_2}{Y_1^2}\right) =$$

$$= C\left(\frac{X_2}{X_1}, \frac{X_1\left(\frac{X_1X_3-X_2^2}{X_1^2}\right)^2 - X_2^3}{X_1^3}, \frac{\left(\frac{X_1X_4-X_2^3}{X_1^3}\right)^2 - X_1X_2}{X_1^2}\right)$$

CAPITULO II

EL CASO DE DOS VARIABLES.

Sección 5: Los cuerpos residuales II.-

Pongamos $R = k||X_1,X_2||$, $K = k((X_1,X_2))$, donde X_1,X_2 son variables y k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p \geqslant 0$. El objetivo de esta sección es probar el siguiente

Teorema 5.1.- El cuerpo residual Δ_v de una valoración v de $K|k$ discreta de rango 1, cuyo centro en R es el ideal maximal $M = (X_1 X_2)R$, es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable.

Fijamos, pues, una tal valoración v y vamos a trabajar con ella.

Nota 5.2.- Como es usual en estos casos, trabajamos con la complección de K respecto de v. Sea ésta $\hat{K}$, y sean $\hat{v}$ la ampliación de v a $\hat{K}$ y $R_{\hat{v}}$ su anillo. Fijemos una k-sección $\kappa : \Delta_v \to R_{\hat{v}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_v$, donde $m_{\hat{v}}$ es el ideal de $\hat{v}$ y un elemento $\theta \varepsilon R_{\hat{v}}$ de valor 1. Se tiene asi un k-isomorfismo

$$\Phi = \Phi_{\kappa\theta} : \Delta_v||t|| \to R_{\hat{v}}$$

definido por

$$\Phi\left(\sum_{i\geqslant 0} \alpha_i t^i\right) = \sum_{i\geqslant 0} \kappa(\alpha_i)\theta^i.$$

Pongamos

$$\Phi^{-1}(X_2) = \sum_{i\geqslant r} \beta_i t^i, \quad \beta_i \varepsilon \Delta_v, \quad \beta_r \neq 0;$$

Considerando la serie

$$\left(\sum_{i\geqslant r+1} (\beta_i/\beta_r)t^i\right) + t^r$$

existe una serie $\sum_{j\geqslant 1} \gamma_j u^j$, $\gamma_j \varepsilon \Delta_v$, $\gamma_1 \neq 0$, tal que

$$(\sum_{j\geq 1}\gamma_j u^j)^r + \sum_{i\geq r+1}(\beta_i/\beta_r)(\sum_{j\geq 1}\gamma_j u^j)^i = u^r$$

Considerando el Δ_v-isomorfismo $\psi:\Delta_v||t|| \to \Delta_v||u||$ definido por la sustitución $\psi(t) = \sum_{j\geq 1}\gamma_j u^j$ se tiene que

$$\psi\,\Phi^{-1}(X_2) = \beta_r u^r.$$

Nótese que componer con ψ equivale a cambiar θ por θ', tal que $\theta = \sum_{j\geq 1}\gamma_j\theta'^j$. Así se puede suponer desde un principio que

$$\begin{cases}\Phi^{-1}(X_1) = \sum_{i\geq 1}\alpha_i t^{r_i}\\ \\ \Phi^{-1}(X_2) = \alpha t^r\end{cases}$$

con $\alpha_i \neq 0$, para todo i, $0<r_1<r_2<\ldots$. En este caso, $v(X_1)=r_1$, $v(X_2) = r$.

<u>Nota 5.3</u>.- El teorema es trivial si v es la función de orden asociada a la forma lineal $L = r_1u_1 + ru_2$. En este caso, por el teorema 3.4, Δ_v es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia 1, lo que comprueba el resultado. Así pues, el problema está en el caso en que v no es la función de orden asociada a L.

<u>Lema 5.4</u>.- Si v no es la función de orden asociada a $L=r_1u_1+ru_2$, entonces existe un $\lambda \in k\setminus\{0\}$ tal que $\alpha_1^r - \lambda\alpha^{r_1} = 0$. En particular, $\{\alpha,\alpha_1\}$ son algebraicamente dependientes sobre k.

<u>Demostración</u>.-

Puesto que v no es una función de orden, existe una forma $f(X_1,X_2) \in k|X_1,X_2|$ respecto de L que es singular para v. Si p es el grado, respecto de L, de f, es $v(f) > p$.

De entre todos los monomios de $k|X_1,X_2|$ que tienen grado p respecto de L, elegimos el que es mayor para el orden lexicográfico; designémosle por $X_1^i X_2^j$. Si $X_1^{i'} X_2^{j'}$ es otro monomio tal que $r_1 i' + rj' = p$, si m.c.d.$(r_1,r) = d$, $r_1 = r_1'.d$, $r = r'.d$, se tiene que

$$(X_1^{i'} X_2^{j'})/(X_1^i X_2^j) = X_2^{j'-j}/X_1^{i-i'}$$

Ahora bien

$$p = r_1 i + rj = r_1 i' + rj' \Rightarrow r_1(i-i') = r(j'-j) \Rightarrow r_1'(i-i') = r'(j'-j)$$

$$\Rightarrow \quad i-i' = r'h \quad y \quad j'-j = r_1'h.$$

Por tanto

$$(X_1^{i'} X_2^{j'})/(X_1^i X_2^j) = (X_2^{r_1'}/X_1^{r'})^h.$$

De aquí se deduce que $f(X_1,X_2)/X_1^i X_2^j$ es un polinomio en $X_2^{r_1}/X_1^{r'}$ luego, por ser k algebraicamente cerrado, es

$$f(X_1,X_2)/X_1^i X_2^j = \prod_{l=1}^{s} ((X_2^{r_1'}/X_1^{r'}) - \mu_l)$$

luego

$$X_1^{r's}.f(X_1,X_2)/X_1^i X_2^j = \prod_{l=1}^{s} (X_2^{r_1'} - \mu_l X_1^{r'})$$

Nótese que $f(X_1,X_2)/X_1^i X_2^j$ no puede ser un monomio constante pues, si lo fuera, en $f(X_1,X_2)$ sólo habría el monomio mayor para el orden lexicográfico y así $f(X_1,X_2)$ no podría ser una forma singular.

En esta situación se tiene que

$$\Phi^{-1}(X_1^{r's}.f(X_1,X_2)/X_1^iX_2^j) = \prod_{l=1}^{s}((\alpha t^r)^{r'_l} - \mu_l(\sum_{m\geqslant 1}\alpha_m t^{r_m})^{r'}) =$$

$$= t^{r_1 r's}\prod_{l=1}^{s}(\alpha^{r'_l} - \mu_l(\sum_{m\geqslant 1}\alpha_m t^{r_m - r_1})^{r'}).$$

Pero como

$$v(X_1^{r's}f(X_1,X_2)/X_1^iX_2^j) = r_1r's-p+v(f) > r_1r's-p+p = r_1r's$$

debe ser

$$\prod_{l=1}^{s}(\alpha^{r'_l} - \mu_l\alpha_1^{r'}) = 0$$

Así pues, existe un l, $1 \leqslant l \leqslant s$, tal que $\alpha^{r'_l} - \mu_l\alpha_1^{r'} = 0$ luego $\alpha^{r'_l} = \mu_l\alpha_1^{r'}$, de donde, elevando a la d-ésima potencia, se tiene que $\alpha^{r_1} = \mu_l^d\alpha_1^r$ y, poniendo $\lambda = 1/\mu_l^d$ es

$$\alpha_1^r - \lambda\alpha^{r_1} = 0,$$

lo que prueba el lema.

Nota 5.5.- Sea Δ la ampliación de Δ_v con una raiz r-ésima fija de α. Si $\{\varepsilon_1=1,\varepsilon_2,..,\varepsilon_r\}$ son las raices r-ésimas de 1 en h y si $\alpha^{1/r}$ es una raiz r-ésima fija de α, es

$$\Delta_v(\alpha^{1/r}) = \Delta_v(\varepsilon_2\alpha^{1/r}) = .. = \Delta_v(\varepsilon_r\alpha^{1/r}) = \Delta .$$

Así pues, Δ contiene a todas las raices r-ésimas de α y es un cuerpo de descomposición, sobre Δ_v, de la ecuación $X^r - \alpha = 0$.

Pongamos

$$x_1 = \Phi^{-1}(X_1) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i t^{r_i}$$

$$x_2 = \Phi^{-1}(X_2) = \alpha t^r$$

y consideremos la inmersión natural $\zeta : \Delta_v||t|| \to \Delta||t||$. Poniendo $x_2^{1/r} = \alpha^{1/r}.t$ se tienen las inclusiones naturales

$$\begin{array}{ccc} \Delta_v||t|| & \xrightarrow{\zeta} & \Delta||t|| \\ \uparrow & & \uparrow \\ k||x_1,x_2|| & \to & k||x_1,x_2^{1/r}|| \end{array}$$

Demostración del teorema 5.1.-

Fijemos una valoración v como en el enunciado, que no sea una función de orden respecto de una forma lineal L, y usamos la preparación y notaciones de las notas anteriores.

Por el lema 5.4 existe una raiz r-ésima de 1, ε_1, y un escalar $\lambda_1 \varepsilon k \setminus \{0\}$ tales que $\alpha_1 = \varepsilon_1 \lambda_1^{1/r} \alpha^{r_1/r}$. Asi, se tiene que $\alpha_1 t^{r_1} = \varepsilon_1 \lambda_1^{1/r} x_2^{r_1/r} = \gamma_1 x_2^{r_1/r}$, donde $\gamma_1 = \varepsilon_1 \lambda_1^{1/r}$. Pongamos $x_{11} = x_1 - \alpha_1 t^{r_1} = x_1 - \gamma_1 x_2^{r_1/r}$; se tiene que $\nu(x_{11}) = r_2 > r_1$.

Para cada $i \geq 0$ pongamos $x_{1i} = \sum_{j \geq i+1} \alpha_j t^{r_j}$ y supongamos que $p \geqslant 0$ es un entero tal que

a) para cada $i=0,..,p$, $\{x_{1i}, x_2\}$ son formalmente independientes sobre k.

b) la restricción v_i de $\hat{v}_\circ \Phi$ a $k((x_{1i}, x_2))$ no es una función de orden asociada a una forma lineal L.

(Obviamente se tiene $x_{10} = x_1$, $v_0 = v$)

Sea i un entero, $1 \leqslant i \leqslant p+1$, si existe; como v_{i-1} no es una función de orden, por el lema 5.4, se tiene una ecuación del tipo $\alpha_i^r - \lambda_i \alpha^{r_i} = 0$, $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$. Así, existe una raiz r-ésima de 1, ε_i, tal que $\alpha_i = \varepsilon_i \lambda_i^{1/r} \alpha^{r_i/r}$, de donde $\alpha_i t^{r_i} = \varepsilon_i \lambda_i^{1/r} x_2^{r_i/r} =$

$= \gamma_i x_2^{r_i/r}$, donde $\gamma_i = \varepsilon_i \lambda_i^{1/r}$ y, por tanto,

$$x_{1p+1} = x_1 - \gamma_1 x_2^{r_1/r} - .. - \gamma_p x_2^{r_p/r} - \gamma_{p+1} x_2^{r_{p+1}/r}.$$

En esta situación se trata de probar, antes de nada, que $\{x_{1p+1}, x_2\}$ son formalmente independientes sobre k. Supongamos que $\{Z_0, Z_1, Z_2\}$ son variables, y supongamos, por reducción al absurdo, que $\{x_{1p+1}, x_2\}$ son formalmente dependientes sobre k. Entonces el k-homomorfismo

$$\eta_0 : k||Z_0, Z_2|| \rightarrow \Delta||t||$$

definido por las sustituciones $\eta_0(Z_0) = x_{1p+1}$, $\eta_0(Z_2) = x_2$ <u>no</u> es inyectivo. Como ker η_0 es un ideal primo y como $x_2 \neq 0$, se puede suponer que ker η_0 está engendrado por una serie no divisible por Z_2 y, más aún, se puede suponer que esa serie es un polinomio de Weierstrass

$$f_0(Z_0, Z_2) = Z^m + b_1(Z_2) Z^{m-1} + .. + b_m(Z_2),$$

$b_1(Z_2) \in k||Z_2||$, $\nu(b_1(Z_2)) > 0$.

De otro lado, el k-homomorfismo $\eta_1 : k||Z_1,Z_2|| \to \Delta||t||$ definido por las sustituciones $\eta_1(Z_1) = \gamma_1 x_2^{r_1/r} +..+\gamma_{p+1} x_2^{r_{p+1}/r}$, $\eta_1(Z_2) = x_2$ es claramente no inyectivo, y su núcleo está engendrado por el polinomio mínimo de $\eta_1(Z_1)$ sobre $k((x_2))$, que tiene todos sus coeficientes en $k||x_2||$. O sea, un generador del ker η_1 es del tipo

$$f_1(Z_1,Z_2) = Z^n + c_1(Z_2)Z^{n-1} + .. + c_n(Z_2),$$

$$c_i(Z_2) \in k||Z_2||, \quad \nu(c_i(Z_2)) > 0.$$

Sea $\eta : k||Z_0,Z_1,Z_2|| \to \Delta||t||$ el k-homomorfismo definido por las sustituciones $\eta(Z_0) = \eta_0(Z_0)$, $\eta(Z_1) = \eta_1(Z_1)$, $\eta(Z_2) = \eta_0(Z_2) = \eta_1(Z_2)$. Sea p = ker η y pongamos

$$k||Z_0, Z_1, Z_2||/p = k||z_0,z_1,z_2||, \quad z_i = Z_1 + p \quad , i=0,1,2.$$

Por la forma de las series f_0 y f_1 está claro que $k||z_0,z_1,z_2|| = k||z_2|| \, |z_0,z_1|$ y es entero sobre $k||z_2||$ al serlo z_0 y z_1. De aquí se deduce que z_0+z_1 es entero sobre $k||z_2||$, lo que significa que x_1 es entero sobre $k||x_2||$ y eso es imposible, pues $\{X_1,X_2\}$ son variables y Φ es un isomorfismo. Esto prueba el aserto de que $\{x_{1p+1},x_2\}$ son formalmente independientes sobre k.

Llegados a este punto, se pueden presentar dos casos:

<u>caso 1</u>.- v_{p+1} es la función de orden asociada a la forma lineal

$$L_{p+2} = r_{p+2}u_1 + ru_2.$$

Pongamos $x'_{p+1}=\gamma_1 x_2^{r_1/r}+\ldots+\gamma_{p+1}x_2^{r_{p+1}/r}=\alpha_1 t^{r_1}+\ldots+\alpha_{p+1}t^{r_{p+1}}$ $\varepsilon\ \Delta_v||t||$; se tiene un diagrama de inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} k((x_{1p+1},x_2)) & \rightarrow & k((x_{1p+1},x_2,x'_{p+1})) & \rightarrow & \Delta_v((t)) \\ & & \uparrow & & \\ & & k((x_1,x_2)) & & \end{array}$$

justificado por el hecho de que $x_1 = x_{1p+1}+x'_{p+1}$. Pongamos v^*_{p+1} para la restricción de $\hat{v}_o\Phi$ a $k((x_{1p+1},x_2,x'_{p+1}))$ y designemos, como es usual, los cuerpos residuales por la letra Δ afectada de un subíndice que indique la valoración. Del hecho de que $\Delta_{\hat{v}_o\Phi}=$ $=\Delta_{v_o\Phi}$ se deduce que, al ser $k((x_{1p+1},x_2,x'_{p+1}))$ un cuerpo intermedio entre $k((x_1,x_2))$ y $\Delta_v((t))$, es $\Delta_{v^*_{p+1}} = \Delta_{v_o\Phi}$. Pero como x'_{p+1} es algebraico sobre $k((x_2))$ se tiene que $k((x_{1p+1},x_2,x'_{p+1}))$ es una extensión algebraica finita de $k((x_{1p+1},x_2))$, luego $\Delta_{v_o\Phi}$ es una extensión algebraica finita de $\Delta_{v_{p+1}}$. Como éste último es una extensión trascendente pura de k (c.f. teorema 3.4) se tendría que Δ_v es un cuerpo de funciones algebraicas en una variable, en este caso, lo que concluiría la demostración del teorema.

<u>caso 2</u>.- v_{p+1} no es una función de orden asociada a una forma lineal

Entonces, el proceso anterior puede ser continuado un paso más.

Es un hecho que el proceso anterior no puede ser continuado indefinidamente, pues, en ese caso, el crecimiento de los órdenes en t de las sucesivas x_{1i} significaría que x_1 se podría escribir como

$$x_1 = \sum_{i \geqslant 1} \gamma_i x_2^{r_i/r}$$

lo que implicaría que $\{ x_1, x_2 \}$ serían formalmente dependientes sobre k, y eso no ocurre. Asi pues, debe existir un p tal que v_p es una función de orden asociada a una forma lineal, y eso termina la demostración del teorema al caer en el caso 1 anterior.

Sección 6: Valoraciones discretas: funciones de orden.-

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria, R y K como en la sección anterior, v una valoración de $K|k$ discreta de rango 1, cuyo centro en R es el ideal maximal $M = (X_1,X_2)R$. Sean, como siempre, $\hat{K}$ la compleción de K respecto de v, $(R_{\hat{v}},m_{\hat{v}})$ el anillo de la ampliación $\hat{v}$ de v a $\hat{K}$.

En la sección anterior probamos, de forma directa, que el cuerpo residual Δ_v de v es un cuerpo de funciones algebraicas en una variable. En esta sección veremos que, mediante el uso de explosiones, llegamos a:

Teorema 6.1.- El cuerpo residual Δ_v de una valoración v de $K|k$ discreta de rango 1, cuyo centro en R es el ideal M, es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia igual a uno.

Antes de entrar en la demostración de este teorema, probaremos, en sucesivos pasos, que dada una valoración v como al principio, existen nuevas variables X'_1, X'_2 y un isomorfismo $\sigma : K \to k((X'_1,X'_2))$ tales que:

1) $k((X'_1,X'_2)) \subset \hat{K}$

2) $v' = v \circ \sigma^{-1} = \hat{v}|_{k((X'_1,X'_2))}$ es una valoración asociada a la forma lineal $L'(u_1,u_2) = v'(X'_1)u_1 + v'(X'_2)u_2$.

Nota 6.2.- Supongamos, en primer lugar, que $v(X_1) = v(X_2) = r$ y sea v_L la valoración asociada a la forma lineal $L(u_1,u_2) = ru_1 + ru_2$.

Como consecuencia del teorema 2.8, y del lema de Hensel, se tiene que si $f(X_1,X_2)$ R 0 es tal que $v(f(X_1,X_2) \neq$

$\neq v_L(f(X_1,X_2))$, entonces la forma inicial de $f(X_1,X_2)$ es divisible por una forma lineal del tipo $X_2 - aX_1$ con $a \in k\ \{0\}$

En esta situación, es decir, cuando $v(X_1) = v(X_2) = r$, se tiene la siguiente caracterización de las funciones de orden:

Teorema 6.3.- $v = v_L$ si y solo si toda forma lineal tiene valor r, es decir, si y solo si $v(aX_1+bX_2) = r$, para todo $(a,b) \in k^2$ distinto de $(0,0)$.

Demostración.-

Supongamos, en primer lugar, que $v = v_L$. Como para todo par $(a,b) \neq (0,0)$, aX_1+bX_2 es una forma de grado r respecto de L, es $v(aX_1+bX_2) = r$.

Reciprocamente, sea $f \in M\setminus\{0\}$ irreducible. Por el lema de Hensel se tiene que

$$f(X_1,X_2) = (aX_1+bX_2)^n + F(X_1,X_2)$$

con $F(X_1,X_2) \in R$ y de orden estrictamente mayor que n. Por el teorema 2.8 se tiene que

$$v(F) \geqslant v_L(F) > r.n \ .$$

Ademas, como $v((aX_1+bX_2)^n) = r.n$, es $v(f) = r.n = v_L(f)$ con lo que queda demostrado el teorema.

Nota 6.4.- Supongamos que la valoración v no es igual a la función de orden v_L. Como consecuencia del teorema anterior existe un par $(a,b) \in k^2 \setminus (0,0)$ tal que $v(aX_1+bX_2) = p > r = v_L(aX_1+bX_2)$

Si $a'X_1+b'X_2$ es otra forma lineal proporcional a la forma aX_1+bX_2, es claro que $v(a'X_1+b'X_2) = p$.

En caso contrario, es decir, si la forma $a'X_1+b'X_2$ no es proporcional a aX_1+bX_2, entonces se verifica que su valor es igual a r. En efecto:

Si fuese $v(a'X_1+b'X_2) > r$, se tendría que

$$v((aX_1+bX_2) - (a/a')(a'X_1+b'X_2)) \geqslant \min\{ v(aX_1+bX_2), v(a'X_1+b'X_2)\} > $$

$> r$. Por otra parte:

$$v((aX_1+bX_2) - (a/a')(a'X_1+b'X_2)) = v((b-(a.b'/a'))X_2) = r,$$

ya que $b - (a.b'/a') \neq 0$, pues las formas lineales no son proporcionales.

Por lo tanto, salvo producto por constantes, se tiene una única forma lineal cuyo valor es estrictamente mayor que r. De ahora en adelante, siempre que nos haga falta, dicha forma lineal la escribiremos en la forma X_2-aX_1, con $a \in k\setminus\{0\}$.

Volvamos a la situación de partida, es decir, v una valoración discreta de rango 1, cuyo centro en R es M, y pongamos $v(X_1) = r_1$, $v(X_2) = r_2$.

Para cada uno de los casos en que $r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$, $r_1 = r_2$, vamos a describir unos procesos <u>P-1</u>, <u>P-2</u> y <u>P-3</u>, respectivamente, que, mas adelante, aplicaremos a nuestra valoración. Dichos procesos son:

<u>P-1</u>.- $r_1 < r_2$.

Consideramos el anillo $k||X'_1,X'_2||$, donde $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2/X_1$, y sea $v' = v \circ \sigma^{-1}$, siendo σ la ampliación a los cuerpos de fracciones de la inmersión de $k||X_1,X_2||$ en el anillo $k||X'_1,X'_2||$ dada por la sustitución anterior.

P-2.- $r_1 > r_2$.

Consideramos el anillo $k||X'_1,X'_2||$, donde $X'_2 = X_2$, $X'_1 = X_1/X_2$, y sea $v' = v\circ\sigma^{-1}$, siendo σ la ampliación a los cuerpos de fracciones de la inmersión de $k||X_1,X_2||$ en el anillo $k||X'_1,X'_2||$ dada por la sustitución anterior.

P-3.- $r_1 = r_2$.

En este caso consideramos el anillo $k||X'_1,X'_2||$ donde

$X'_1 = X_1$,

$X'_2 = X_2 - a_1X_1^{p_1} - a_2X_1^{p_2} - \ldots - a_sX_1^{p_s}$

donde $a_1,\ldots,a_s \in k\setminus\{0\}$ $p_i \in Z$, $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_s$, y sea v' construida como antes.

En primer lugar vamos a ver que los procesos definidos anteriormente tienen sentido, y vamos a estudiar el efecto que cada uno de ellos produce sobre la valoración de partida.

Lo primero que hemos de probar es la siguiente

Proposición 6.5.- $\{X'_1, X'_2\}$ son formalmente independientes sobre k.

Demostración.-

La demostración la haremos en el caso P-1, ya que la de los otros dos casos es análoga.

Supongamos que X'_1 y X'_2 son formalmente dependientes sobre k; esto implicaría la existencia de una serie irreducible $f(Z_1,Z_2) \in k||Z_1,Z_2||$ tal que $f(X'_1,X'_2) = 0$. Ademas podemos suponer que $f(Z_1,Z_2)$ es de la forma

$$f(Z_1,Z_2) = Z_2^s + b_1(Z_1)Z_2^{s-1} + \dots + b_s(Z_1)$$

Como $f(X'_1,X'_2) = 0$ se tiene, haciendo la sustitución de X'_1 y X'_2 por X_1 y X_2/X_1, respectivamente, que

$$(X_2/X_1)^s + b_1(X_1)(X_2/X_1)^{s-1} + \dots + b_s(X_1) = 0$$

y por lo tanto obtendríamos una relación

$$X_2^s + b_1(X_1)X_1X_2^{s-1} + \dots + b_s(X_1)X_1^s = 0$$

de dependencia formal para X_1 y X_2 sobre k, en contra de ser X_1 y X_2 formalmente independientes sobre k.

Es claro que, en los tres casos, el k-homomorfismo $\sigma : k||X_1,X_2|| \to k||X'_1,X'_2||$ dado por las sustituciones $\sigma(X_1) = X'_1$, $\sigma(X_2) = X'_2$ es una inmersión y que $k||X'_1,X'_2|| \subset R_{\hat{v}}$. Si denotamos tambien por σ la ampliación de dicha inmersión a sus cuerpos de fracciones, se tiene que σ es un isomorfismo y que se verifica que $v' = v \circ \sigma^{-1} = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$.

Estudiaremos ahora, como apuntamos anteriormente, la relación que existe entre la valoración v y la valoración v' obtenida. Se verifica que:

<u>Proposición 6.6</u>.- Sea v' la valoración obtenida a partir de v aplicando <u>P-1</u>. Entonces se verifica que v es la valoración asociada a la forma lineal $L(u_1,u_2) = r_1u_1 + r_2u_2$ si y solo si v' es la valoración asociada a la forma lineal $L'(u_1,u_2) = r_1u_1 + (r_2-r_1)u_2$.

<u>Demostración</u>.-

Basta probar la proposición para las restricciones de v y v' a los cuerpos $k((X_1))(X_2)$ y $k((X'_1))(X'_2)$, respectivamente.

Supongamos que v es la valoración asociada a la forma lineal $L(u_1,u_2) = r_1u_1+r_2u_2$ y consideremos un elemento no nulo de $k|[X'_1]|[X'_2]|$, que lo escribiremos de la forma

$$P'(X'_1,X'_2) = b_0(X'_1)X'^m_2 + b_1(X'_1)X'^{m-1}_2 + \dots + b_m(X'_1)$$

y consideremos $P(X_1,X_2) \varepsilon k|[X_1]|[X_2]|$, tal que

$$X'_1P'(X'_1,X'_2) = \sigma\,(P(X_1,X_2))$$

es decir,

$$P(X_1,X_2) = b_0(X_1)X_2^m + b_1(X_1)X_1X_2^{m-1} + \dots + b_m(X_1)X_1^m \quad .$$

Sea $r = v(P(X_1,X_2))$. Se tiene que $r \geqslant r_1.m.$ ya que:

$$v(b_i(X_1)X_1^iX_2^{m-i}) = v(b_i(X_1)) + i.r_1 + (m-i).r_2 \geqslant m.r_1.$$

Sea α_i el orden de $b_i(X)$, $i=0,\dots,m$. Los posibles pares (a_1,a_2) tales que $L(a_1,a_2) = r$ son:

$$(\alpha_0,m),\ (\alpha_1+1,m-1),\ \dots\ ,\ (\alpha_m+m,0).$$

Sean $i_0,\ i_1,\ \dots\ ,\ i_s$ tales que

$$r = (\alpha_{i_0}+i_0).r_1 + (m-i_0).r_2 = \dots = (\alpha_{i_s}+i_s).r_1 + (m-i_s).r_2.$$

Luego si $(\beta_i,m-i)$ es otro punto del diagrama de Newton de $P(X_1,X_2)$, se tiene que

$$r < \beta_i.r_1 + (m-i).r_2.$$

Por otro lado

$$v'(P'(X'_1,X'_2)) = v(P(X_1,X_2)/X_1^m) = r - mr_1$$

Veamos que tambien es $r - mr_1 = v_{L'}(P'(X'_1,X'_2))$. En efecto:

$$r - mr_1 = (\alpha_{i_j}+i_j)r_1 + (m-i_j)r_2 - mr_1 = \alpha_{i_j} r_1 + (m-i_j)(r_2-r_1),$$

para todo $j = 0,..,s$. Además, si $(\beta_i',m-i)$ es un punto del diagrama de Newton de $P'(X'_1,X'_2)$ entonces $(\beta_i'+i,m-i)$ pertenece al diagrama de Newton de $P(X_1,X_2)$, por lo tanto

$$r > (\beta_i'+i)r_1 + (m-i)r_2 = \beta'_i r_1 + (m-i)(r_2-r_1) + mr_1$$

luego

$$r-mr_1 > \beta_i' r_1 + (m-i)(r_2-r_1)$$

de donde se deduce que

$$v_{L'}(P'(X'_1,X'_2)) = r-mr_1 = v'(P'(X'_1,X'_2))$$

es decir, $v' = v_{L'}$, que es lo que queríamos probar.

El recíproco se demuestra igual.

Con unos razonamientos totalmente análogos a los de la proposición 6.6 se demuestra la siguiente

<u>Proposición 6.7</u>.- Sea v' la valoración obtenida a partir de v aplicando <u>P-2</u>. Entonces se verifica que v es la valoración asociada a la forma lineal $L(u_1,u_2) = r_1u_1+r_2u_2$ si y solo si v' es la valoración asociada a la forma lineal $L'(u_1,u_2) = (r_1-r_2)u_1+r_2u_2$.

Supongamos que $r_1 = r_2$ y que v no es la valoración asociada a la forma lineal $L(u_1,u_2) = r_1u_1+r_2u_2$. Entonces

Proposición 6.8.- $(X_2/X_1) + m_v$ es un elemento de k.

Demostración.-

Como v es distinta de v_L sabemos que existe una forma lineal $X_2-aX_1 = f(X_1,X_2)$ de R tal que

$$v(X_2-aX_1) > v(X_1)$$

Por lo tanto

$$(X_2/X_1) + m_v = ((f(X_1,X_2)/X_1) + a) + m_v = a + m_v \in k$$

Nota 6.9.- Nuestro objetivo es probar que, dada una valoración v de $K|k$ discreta de rango 1, cuyo centro en R es M, tras un número finito de transformaciones y sustituciones como las definidas en P-1, P-2 y P-3, llegamos a una valoración v' que está asociada a una forma lineal.

Es claro que podemos suponer que nuestra valoración de partida verifica que $v(X_1) = v(X_2) = r$.(En caso de no verificarse esa condición, tras aplicar un número finito de veces P-1 y P-2, se llegaría a una valoración v' tal que $v'(X'_1) = v'(X'_2)$, y que estaría asociada a una forma lineal si y solo si lo estaba la de partida.)

Sea $L(u_1,u_2) = ru_1+ru_2$ y v_L la valoración asociada a L. Supongamos, también, que $v \neq v_L$, pues en caso contrario no habría nada que probar.

Como $v \neq v_L$ existe una forma lineal $X_2-a_1X_1$ tal que

$v(X_2-a_1X_1) = p_1 > r$. Sea $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$ con $X'_1 = X_1$ y $X'_2 = X_2-a_1X_1$.

Si p_1 no es múltiplo de r, entonces m.c.d.(p_1,r) es estrictamente menor que r, y por lo tanto aplicando los procesos P-1 y P-2 un número finito de veces se llegaría a una valoración $v'' = \hat{v}_{|k((X''_1,X''_2))}$, tal que $v''(X''_1) = v''(X''_2) < v(X_1)$ y verificando que v'' está asociada a una forma lineal si y solo si v' lo está. Entonces si v'' no es una función de orden, comenzamos el proceso con v''. Por lo tanto, podemos suponer que se tiene que $p_1 = q_1.r$.

Proposición 6.10.- En la situación anterior, son equivalentes las siguientes condiciones:

1) $v' = v_{L'}$, con $L'(u_1,u_2) = ru_1 + q_1ru_2$

2) $v(X_2-a_1X_1-aX_1^{q_1}) = p_1$, para todo $a \in k$.

Demostración.-

Que 1) implica 2) es trivial, ya que $v(X_2-a_1X_1-aX_1^{q_1}) = v'(X'_2-aX'^{q_1}_1) = p_1$.

Demostremos ahora la implicación contraria. Como es $v'(X'_2) = q_1r = q_1v'(X'_1)$, aplicando el proceso P-1 q_1-1 veces, llegamos a una valoración $v'_{q_1-1} = \hat{v}_{|k((X'_{1,q_1-1},X'_{2,q_1-1}))}$ tal que

$$v'_{q_1-1}(X'_{1,q_1-1}) = r = v'_{q_1-1}(X'_{2,q_1-1}),\ X'_{1,q_1-1} = X'_1$$

$$X'_{2,q_1-1} = X'_2/(X'_1)^{q_1-1}$$

y tal que v'_{q_1-1} es una función de orden si y solo si v' lo es.

Supongamos que v'_{q_1-1} no está asociada a una forma lineal, entonces existe una forma $X'_{2,q_1-1} - aX'_{1,q_1-1}$ tal que $v'_{q_1-1}(X'_{2,q_1-1}-aX'_{1,q_1-1}) = b > r$, de donde se deduce que

$$v'((X'_2/X'^{q_1-1}_1) - aX'_1) = b$$

y por tanto $v'(X'_2-aX'^{q_1}_1) = b + (q_1-1)r$, luego

$$v(X_2-a_1X_1-aX_1^{q_1}) = b + (q_1-1)r > q_1r = p_1$$

en contradicción con lo supuesto. Esto prueba la ptoposición.

Supongamos que no se verifican las condiciones de la proposición anterior, es decir, v' no es una función de orden, y por lo tanto existe $a_2 \in k\setminus\{0\}$ tal que

$$v(X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}) = p_2 > p_1.$$

Igual que antes, si p_2 no fuese múltiplo de r, entonces el m.c.d.(p_2,r) es estrictamente menor que r, y por tanto, aplicando los procesos <u>P-1</u>, <u>P-2</u> un número finito de veces se llegaría a una valoración $v'' = \hat{v}_{|k((X''_1,X''_2))}$ tal que $v''(X''_1) = v''(X''_2) < v(X_1)$ y v'' no está asociada a una forma lineal si no lo está v', y comenzaríamos el proceso con v''. Así, podemos suponer que $p_2 = q_2.r$.

En general, supongamos que existen unos elementos $a_1, a_2, \dots, a_s \in k\setminus\{0\}$, y unos números $q_1, q_2, \dots, q_s \in Z_+$, con $1 < q_1 < q_2 < \dots < q_{s-1} < q_s$ tales que

$$v(X_2-a_1X_1) = q_1r$$

$$v(X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}) = q_2r$$

$$\vdots$$

$$v(X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}-\dots-a_sX_1^{q_{s-1}}) = q_sr$$

Entonces, en esta situación, se tiene:

<u>Proposición 6.11</u>.- Sean $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}-\dots-a_sX_1^{q_{s-1}}$ y $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$. Son equivalentes las siguientes condiciones:

1) $v' = v_{L'}$, con $L'(u_1,u_2) = ru_1+q_sru_2$.

2) $v(X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}-\dots-a_sX_1^{q_{s-1}}-aX_1^{q_s}) = q_sr$, para todo a de k.

La demostración de esta proposición la omitimos pues es igual a la demostración de la proposición anterior.

Por último llegamos al

<u>Teorema 6.12</u>.- Sea v una valoración de $K|k$, discreta de rango 1 cuyo centro en R es M. Supongamos que $v(X_1) = v(X_2) = r$ y que al aplicarle a v el proceso <u>P-3</u> el valor de las nuevas variables no decrece. Entonces, o bien v es la función de orden v_L, con $L(u_1,u_2) = r(u_1+u_2)$, o bien existen unos elementos $a_1,a_2,\dots,a_s$ de k, unos números $q_1,q_2,\dots,q_s$ de Z_+, con $q_0=1 < q_1 < q_2 < \dots < q_s$ tales que:

a) $v(X_2 - \sum_{j=1}^{i} a_jX_1^{q_{j-1}}) = q_ir$, $i=1,\dots,s$

b) Si $v' = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$ con $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2-a_1X_1-\dots-a_sX_1^{q_{s-1}}$ es v' la función de orden asociada a $L'(u_1,u_2) = ru_1+rq_su_2$.

Demostración.-

Solamente nos resta probar que el procedimiento descrito en las proposiciones anteriores es finito.

Supongamos que no lo fuera. Esto implicaría que existe una serie

$$f(X_1,X_2) = X_2 - \sum_{i \geqslant 1} a_i X_1^{q_{i-1}}$$

con $1=q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$ y tal que

$$v(X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1} - \ldots - a_iX_1^{q_{i-1}}) = q_i r$$

para todo i.

Como $f(X_1,X_2) \in R \setminus \{0\}$, se tiene que $v(f(X_1,X_2)) = d > 0$. Por otra parte, al ser $\{q_i\}_{i \geqslant 0}$ una sucesión estrictamente creciente, existe un i_0 de Z_+ tal que $q_{i_0} > d$.

Sea $g(X_1,X_2) = X_2-a_1X_1-a_2X_1^{q_1}-\ldots-a_{i_0}X_1^{q_{i_0-1}}$. Es claro que $v(g(X_1,X_2)) = q_{i_0}.r$. Por otra parte

$$v(f(X_1,X_2) - g(X_1,X_2)) \geqslant v_L(f(X_1,X_2) - g(X_1,X_2)) > r.q_{i_0}$$

luego

$$v(f(X_1,X_2)) \geqslant \min\{ v(g(X_1,X_2)),\ v(f(X_1,X_2)-g(X_1,X_2))\} \geqslant rq_{i_0} > d$$

en contra de ser $v(f(X_1,X_2)) = d$.

Esto termina la demostración del teorema.

Nota 6.13.- Resumiendo lo probado hasta ahora se tiene que dada una valoración v discreta de rango 1, cuyo centro en R es M, existen nuevas variables X'_1, X'_2 y un isomorfismo σ

$$\sigma : k((X'_1,X'_2)) \to k((X_1,X_2))$$

tales que la valoración $v' = v\ \sigma = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$ es una función de orden. El teorema 6.1 se obtiene, ahora, como consecuencia de este resultado y del siguiente

Lema 6.14.- Sean F y F' dos cuerpos, $\zeta : F' \to F$ un isomorfismo, v una valoración de F, $v' = v\ \zeta$ la correspondiente valoración de F'. Supongamos que existe una sección $\lambda' : \Delta_{v'} \to R_{v'}$ del homomorfismo natural $R_{v'} \to \Delta_{v'}$. Entonces ζ induce un isomorfismo $\zeta' : \Delta_{v'} \to \Delta_v$ y $\zeta\ \lambda'\zeta'^{-1} = \lambda$ es una sección del homomorfismo natural $R_v \to \Delta_v$.

Demostración.-

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\zeta"] & F \\ \Delta_{v'} \arrow[u, "\lambda'"] \arrow[r, "\zeta'"] & \Delta_v \end{tikzcd}$$

y vamos a construir en él la aplicación ζ'. Como $R_{v'} = \zeta^{-1}(R_v)$, $m_{v'} = \zeta^{-1}(m_v)$ se define

$$\zeta' : R_{v'}/m_{v'} \to R_v/m_v$$

poniendo, para cada $\gamma' \in R_{v'}$, $\zeta'(\gamma'+m_{v'}) = \zeta(\gamma')+m_v$. Claramente ζ' es un isomorfismo entre ambos cuerpos. Si $\gamma \in R_v$, es

$$\zeta\ \lambda'\zeta'^{-1}(\gamma+m_v) = \zeta\ \lambda'(\zeta^{-1}(\gamma)+m_{v'})$$

Sea $\gamma' = \lambda'(\zeta^{-1}(\gamma) + m_{v'})$; se tiene que

$$|*| \quad \gamma' + m_{v'} = \zeta^{-1}(\gamma) + m_{v'}$$

De otro lado

$$\zeta\,\lambda'\zeta'^{-1}(\gamma + m_v) = \zeta(\gamma')$$

y

$$\xi(\gamma') + m_v = \gamma + m_v$$

ya que, por $|*|$ es

$$\gamma' - \zeta^{-1}(\gamma) \in m_{v'}$$

luego

$$\xi(\gamma') - \zeta\,\zeta^{-1}(\gamma) = \zeta(\gamma') - \gamma \in m_v$$

Esto prueba el lema.

<u>Demostración del teorema 6.1</u>.-

Sean, como en la nota 6.13, X'_1 y X'_2 nuevas variables y el isomorfismo σ

$$\sigma : k((X'_1, X'_2)) \to k((X_1, X_2))$$

tal que la valoración obtenida $v' = v\,\sigma = \hat{v}_{|k((X'_1,X'_2))}$ es una función de orden. Por el teorema 3.4 sabemos que el cuerpo residual $\Delta_{v'}$ de v' es una extensión trascendente pura de k de grado de trascendencia 1. Por el lema 6.14, los cuerpos residuales de v y de v' son isomorfos; esto prueba el teorema.

Sección 7: Ramificación de valoraciones discretas de rango 1.-

Sean $R = k||X_1,X_2||$, $K = k((X_1,X_2))$, donde X_1, X_2 son variables y k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y sea v una valoración discreta de rango 1, cuyo centro en R es M. Sean $\hat{K}$, $\hat{v}$, $R_{\hat{v}}$, $m_{\hat{v}}$ como siempre. Fijemos una k-sección $\kappa : \Delta_v \to R_{\hat{v}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_v$ y un elemento $\theta \in R_{\hat{v}}$ de valor 1. Se tiene así un k-isomorfismo

$$\phi = \phi_{\kappa\,\theta} : \Delta_v||t|| \to R_{\hat{v}}$$

definido por

$$\phi\left(\sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i\right) = \sum_{i \geq 0} \kappa(\alpha_i)\, \theta^i,$$

donde t es una variable. Pongamos

$$\phi^{-1}(X_1) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i t^{r_{1i}}, \qquad \phi^{-1}(X_2) = \sum_{i \geq 1} \beta_i t^{r_{2i}}$$

con los α_i, β_i no nulos, para todo $i \geq 1$, $0 < r_{j1} < r_{j2} < \dots$.
Entonces $v(X_1) = r_{11}$ y $v(X_2) = r_{21}$.

Denotemos tambien por ϕ^{-1} el isomorfismo de $\hat{K}$ en $\Delta_v((t))$ que se obtiene, por ampliación a sus cuerpos de fracciones, del isomorfismo $\phi^{-1} : R_{\hat{v}} \to \Delta_v||t||$.

Como v es una valoración discreta de rango 1, sabemos que el cuerpo residual Δ_v de v es una extensión trascendente pura de k, de grado de trascendencia uno. Es decir, podemos poner $\Delta_v = k(u)$, con u trascendente sobre k. Así, pondremos $\phi^{-1} : \hat{K} \to k(u)((t))$.

Por último, designaremos por ψ la inmersión de K en $k(u)((t))$, $\psi : K \to k(u)((t))$, obtenida al restringir el isomorfismo $\phi^{-1}:\hat{K} \to k(u)((t))$ a K.

Nota 7.1.- Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, u y t variables y consideremos el cuerpo $k(u)((t))$

Sea $\bar{f}(Z) \in k(u)((t))|Z|$ un polinomio de Weierstrass, no necesariamente irreducible, y sin raices múltiples.

Como $k(u) \subset k((u)) \subset k((u))^*$, donde por $k((u))^*$ denotamos el cuerpo de las series de Puiseux en u, podemos considerar el polinomio $\bar{f}(Z)$ como elemento de $k((u))^*((t))|Z|$, que sabemos tiene todas sus raices en el cuerpo $k((u))^*((t))^*$, es decir, en el cuerpo de las series de Puiseux en t con coeficientes e $k((u))^*$. Recordemos algunas propiedades que poseen dichas raices.

El polinomio $\bar{f}(Z) \in k((u))^*((t))|Z|$ es de Weierstrass, por lo tanto la factorización sobre $k((u))^*((t))^*$ se hace mediante polinomios de Weierstrass. Esto nos indica que una raiz arbitraria de él es de la forma

$$\zeta = \sum_{i \geq 1} \omega_i t^{r_i/q}$$

con $\omega_i \in k((u^{1/p})) \setminus \{0\}$, $q, r_i \in Z_+$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$, y m.c.d.$(q, r_1, r_2, \ldots) = 1$.

Sea $\bar{f}(Z) = \bar{f}_1(Z).\bar{f}_2(Z)....\bar{f}_h(Z)$ la factorización de $\bar{f}(Z)$ sobre $k(u)((t))$, donde cada $\bar{f}_i(Z)$ es un polinomio de Weierstrass, de la forma

$$\bar{f}_i(Z) = Z^{n_i} + c_{i1}Z^{n_i-1} + \ldots + c_{in_i}$$

Designaremos por $\{\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in_i}\}$ a las raices de $\bar{f}_i(Z) = 0$, y supondremos que todas pertenecen a un cuerpo $k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$, donde los denominadores p_i, q_i se elegirán mínimos. Se escribirá, entonces

$$\eta_{ik} = \sum_{l \geq 1} \omega_{ikl}(u^{1/p_i})t^{r_l/q_i}$$

donde $\omega_{ikl}(u^{1/p_i}) \in k((u^{1/p_i}))\setminus\{0\}$, $p_i, q_i, r_l \in Z_+$, $r_1 < r_2 < \cdots$

Nota 7.2.- Sea L una extensión finita de K. Se trata de estudiar las extensiones de la valoración v de K|k al cuerpo L. Dedicaremos especial atención a los cálculos explícitos, que constituyen el centro de interés de nuestro trabajo.

Sea $z \in L$ un elemento primitivo de la extensión L de K, es decir, L = K(z). Eligiendo $z \in L$ de tal forma que sea entero sobre R, se tiene que el polinomio mínimo de z sobre K es

$$f(Z) = Z^n + a_1(X_1,X_2)Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(X_1,X_2)Z + a_n(X_1,X_2)$$

con todos sus coeficientes en R, pues R es integramente cerrado. Además, podemos suponer que $a_n(X_1,X_2)$ es una no unidad en R. En efecto:

Si $a_n(X_1,X_2)$ fuese una unidad, tomando $a \in k\setminus\{0\}$ tal que

$$a^n + a_1(0,0)a^{n-1} + \ldots + a_n(0,0) = 0$$

y considerando el elemento $z' = z - a$, se tendría que:

a) z' es entero sobre R

b) $L = K(z')$

c) Si $f'(Z')$ es el polinomio mínimo de z' sobre K,

$$f'(Z') = Z'^n + a'_1(X_1,X_2)Z'^{n-1} + \ldots + a'_n(X_1,X_2)$$

es $a'_n(0,0) = 0$.

Supondremos, pues, desde un principio que $a_n(X_1,X_2)$ es una no unidad en R. Por el teorema preparatorio de Weierstrass, ningún otro $a_i(X_1,X_2)$ puede ser una unidad en R, con lo que f(Z) es un polinomio de Weierstrass.

Denotaremos por

$$\bar{f}(Z) = Z^n + \bar{a}_1(u,t)Z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}(u,t)Z + \bar{a}_n(u,t)$$

donde $\bar{a}_i(u,t) = a_i(\psi(X_1),\psi(X_2))$, $\bar{f}(Z) \in k(u)((t))|Z|$.

Sea $\bar{f}(Z) = \bar{f}_1(Z).\bar{f}_2(Z)\ldots\bar{f}_h(Z)$ la descomposición de $\bar{f}(Z)$ en factores irreducibles en $k(u)((t))|Z|$, y consideremos, siguiendo las notaciones de la nota anterior, η_{i1} una raiz de $\bar{f}_i(Z)$, con $i=1,..,h$. Veamos que la inmersión

$$\psi : K \rightarrow k(u)((t))$$

se puede ampliar a una inmersión

$$\psi_i : K(z) \rightarrow k(u)((t))(\eta_{i1})$$

En efecto:

ψ se puede ampliar a una inmersión

$$\psi' : K|Z| \rightarrow k(u)((t))|Z|$$

definiendo para cada $\sum_j b_j Z^j \in K|Z|$, $\psi'(\sum_j b_j Z^j) = \sum_j \psi(b_j)Z^j$.

Como $\psi'(f(Z)) = \bar{f}(Z)$, la imagen mediante ψ' del ideal $(f(Z))$ está contenida en el ideal $(\bar{f}_i(Z))$. Esto implica que se puede construir un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K|Z| & \xrightarrow{\psi'} & k(u)((t))|Z| \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu_i \\ K|Z|/(f(Z)) & \xrightarrow{\psi'_i} & k(u)((t))|Z|/(\bar{f}_i(Z)) \end{array}$$

donde μ y μ_i son los homomorfismos naturales y

$$\psi'_i(\sum_j b_j Z^j + (f)) = \psi'(\sum_j b_j Z^j) + (\bar{f}_i) = \sum_j \psi(b_j) Z^j + (\bar{f}_i)$$

Como $L = K(z) \simeq K|Z|/(f)$ bajo un isomorfismo que lleva z sobre $Z + (f)$ y $k(u)((t))|Z|/(\bar{f}_i) \simeq k(u)((t))(\eta_{i1})$ bajo un isomorfismo $Z + (\bar{f}_i)$ sobre η_{i1}, componiendo ψ'_i con estos isomorfismos se tiene una inmersión

$$\psi_i : L \to k(u)((t))(\eta_{i1})$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\psi} & k(u)((t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\psi_i} & k(u)((t))(\eta_{i1}) \end{array}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones naturales, es decir, ψ_i prolonga a ψ. Además, $\psi_i(z) = \eta_{i1}$.

Sea v'_i la valoración canónica de $k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$ sobre $k((u^{1/p_i}))$, es decir, aquella cuyo anillo es

$$k((u^{1/p_i}))||t^{1/q_i}||.$$

Esta valoración hace corresponder a cada elemento de $k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$ su orden fraccionario en t. Considerando a ψ_i como una inmersión de L en $k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$ y componiendola con v'_i, se tiene una aplicación

$$v_i : L\setminus\{0\} \to Z.(1/q_i)$$

que es una valoración de $L|k$ discreta de rango 1.

Veamos que esta valoración v_i es una ampliación de v a L. En efecto:

Sea $g(X_1,X_2) \in k||X_1,X_2|| \setminus \{0\}$. Queremos probar que $v(g(X_1,X_2)) = v_i(g(X_1,X_2))$. Ahora bien,

$$v(g(X_1,X_2)) = \nu_t(\psi(g(X_1,X_2))) = \nu_t(\psi_i(g(X_1,X_2))) =$$

$$= v'_i(\psi_i(g(X_1,X_2))) = v_i(g(X_1,X_2)),$$

donde ν_t es la función de orden en t usual.

Así v_i es una ampliación de v a L, que se realiza así:

$$\text{Si } \gamma \in L,\ \gamma = \gamma_0(X_1,X_2)+\gamma_1(X_1,X_2)\, z + \ldots + \gamma_{n-1}(X_1,X_2) z^{n-1}$$

es

$$v_i(\gamma) = v'_i(\gamma_0(\psi(X_1),\psi(X_2)) + \gamma_1(\psi(X_1),\psi(X_2))\eta_{i1} + \ldots$$

$$\ldots + \gamma_{n-1}(\psi(X_1),\psi(X_2))\,\eta_{i1}^{n-1})$$

Lo que trataremos probar ahora es que de esta manera obtenemos todas las ampliaciones de v a L.

Nota 7.3.- Al comienzo de la sección fijabamos una k-sección $\kappa : \Delta_v \to R_{\hat{v}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{v}} \to \Delta_v$, y un elemento $\theta \in R_{\hat{v}}$ de valor uno. Es claro que dicho elemento θ de valor uno lo podemos elegir de tal forma que $\theta \in K$. La razón de elegirlo de esta manera radica en que, si $\theta \in K$, entonces se tiene que

$$k(u)|t| \subset \psi(K).$$

Esta propiedad la usaremos en lo sucesivo.

Una vez puesto de manifiesto este hecho, volvamos al problema que teníamos planteado, es decir, el problema de probar que las valoraciones que hemos construido son todas las ampliaciones posibles. En primer lugar se tiene el siguiente

Teorema 7.4.- Sean i,j dos enteros distintos, $1 \leqslant i,j \leqslant h$. Se tiene que si $v_i = v_j$, entonces η_{i1} y η_{j1} son conjugados sobre $k(u)((t))$.

Demostración.-

Haremos la demostración por reducción al absurdo. (En la demostración usaremos razonamientos tipo Puiseux que pueden encontrarse en |16|).

Supongamos que η_{i1} y η_{j1} no son conjugadas sobre $k(u)((t))$. Entonces existirá un entero positivo b tal que

$$\eta'_{i1} = \sum_{l=1}^{b} \omega_{il1} t^{r_1/q_i} \quad \text{y} \quad \eta'_{j1} = \sum_{l=1}^{b} \omega_{jl1}\, t^{s_1/q_j}$$

no sean conjugadas sobre $k(u)((t))$. Elegimos b mínimo siguiendo la condición de que η'_{i1} y η'_{j1} no sean conjugadas.

Sea $\overline{P}(Z) \in k(u)((t))|Z|$ el polinomio mínimo de η'_{i1} sobre $k(u)((t))$. Es claro que el grado m de $\overline{P}(Z)$ es menor estrictamente que n, ya que, al no ser η_{i1} y η_{j1} conjugados sobre $k(u)((t))$, el polinomio mínimo de η_{i1} (y por tanto el polinomio mínimo de η'_{i1}) es de grado estrictamente menor que n.

De otro lado, de la forma de η'_{i1} se deduce que $\overline{P}(Z)$ pertenece a $k(u)|t||Z|$, luego, por la nota 7.3, existe un polinomio $P(Z) \in K|Z|$ tal que $\psi'(P(Z)) = \overline{P}(Z)$.

Sean $\eta'_{i11} = \{\eta'_{i1}, \eta'_{i12}, \ldots , \eta'_{i1m}\}$ los conjugados de η'_{i1} sobre $k(u)((t))$, y escribamos

$$\overline{P}(Z) = \prod_{c=1}^{m} (Z - \eta'_{i1c})$$

Se tiene que $\overline{P}(\eta_{i1})$ y $\overline{P}(\eta_{j1})$ no pueden ser los dos iguales a cero, pues η_{i1} y η_{j1} no son conjugados. Supongamos que ambos son no nulos, pues, en caso contrario, el resultado es trivial.

Consideremos dos casos:

1) $b = 1$.

En este caso, para todo $c=1,\ldots,m$, es

$$\nu_t(\eta_{j1} - \eta'_{i1c}) = \min \{s_1/q_j, r_1/q_i\} .$$

De otro lado

$$\nu_t(\eta_{i1} - \eta'_{i1}) \geqslant r_2/q_i$$

mientras que

$$\nu_t(\eta_{i1} - \eta'_{i1c}) = r_1/q_i$$

para todo $c=2,..,m$. Esto prueba que

$$\nu_t(\overline{P}(\eta_{j1})) < \nu_t(\overline{P}(\eta_{i1})),$$

y por tanto $v_i \neq v_j$.

2) $b > 1$.

Sea m' el grado del polinomio mínimo de

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{il1}\, t^{r_l/q_i}$$

y sea $m'' = m/m'$. Los factores lineales que aparecen en la descomposición de $\overline{P}(Z)$ se pueden dividir en m' grupos, cada grupo conteniendo m'' polinomios $Z - \eta'_{ilc}$ que tengan iguales las sumas de los $b-1$ primeros sumandos.

Sea $R_1(Z)$ el producto de los polinomios del grupo que tenga la suma de los $b-1$ primeros términos igual a

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{jl1}\, t^{s_l/q_j}$$

y sea $R_2(Z)$ el correspondiente a

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{il1}\, t^{r_l/q_i}$$

Entonces

$$\nu_t(R_1(\eta_{j1})) = m''.\min\{s_b/q_j,\ r_b/q_i\}$$

y

$$\nu_t(R_2(\eta_{i1})) \geq r_{b+1}/q_i + (m''-1).r_b/q_i.$$

Sea C el conjunto de los productos de los términos correspondientes a cada grupo. C tiene m' elementos, y cada uno de ellos es un polinomio de grado m''. Entonces es claro que existe una biyección de $C \setminus R_1(Z)$ sobre $C \setminus R_2(Z)$ tal que los términos correspondientes $Q_1(Z)$ y $Q_2(Z)$ verifiquen que

$$\nu_t(Q_1(\eta_{j1}) = \nu_t(Q_2(\eta_{i1})).$$

Esto prueba que $\nu_t(\bar{P}(\eta_{j1})) < \nu_t(\bar{P}(\eta_{i1}))$ y, por tanto, $v_i \neq v_j$. Esto concluye la demostración del teorema.

Como consecuencia de este teorema, se tiene que si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h$ son, respectivamente, raices de los factores irreducibles $\bar{f}_1(Z),\ldots,\bar{f}_h(Z)$ de $\bar{f}(Z)$ sobre $k(u)((t))$, entonces las valoraciones asociadas $v_1, v_2, \ldots, v_h$ son ampliaciones de v a L, y todas distintas.

El siguiente paso es probar que no existen mas ampliaciones de v a L que las anteriores. Para ello trataremos de calcular el índice de ramificación y el grado relativo de v_i respecto de v, $i=1,\ldots,h$, y aplicar la fórmula de ramificación de valoraciones.

Estudiaremos una valoración en concreto, por ejemplo v_1, pues el estudio de las demás es igual a éste caso. Consideramos η_1 una raiz de $\bar{f}_1(Z) = 0$, como serie de Puiseux en la variable t con coeficientes algebraicos sobre $k(u)$. Sean p_1, q_1 los enteros mínimos tales que $\eta_1 \in k((u^{1/p_1}))((t^{1/q_1}))$, y escribiremos

$$\eta_1 = \sum_{l \geq 1} \omega_{1l}(u^{1/p_1})t^{r_l/q_1}$$

con $\omega_{1l}(u^{1/p_1}) \in k((u^{1/p_1})) \setminus \{0\}$.

<u>Teorema 7.5</u>.- El índice de ramificación de v_1 es q_1.

<u>Demostración</u>.-

Por la forma como se ha construido la valoración v_1, es claro que $v_1(L\setminus\{0\}) \subset Z.(1/q_1)$.

Si probamos que existe un elemento $\omega \in L$ tal que $v_1(\omega) = 1/q_1$, se tendría el resultado, pues eso implicaría que $Z.(1/q_1) \subset v_1(L\setminus\{0\})$.

Sea $\omega_1 = z$; entonces $v_1(\omega_1) = r_1/q_1$. Sea $b > 1$ un entero y supongamos probar que, para todo l, $1 \leq l \leq b$, existe un elemento $\omega_l \in L$ tal que $v_1(\omega_l) = r_l/q_l$.

Consideremos el elemento

$$\eta'_1 = \sum_{l=1}^{b} \omega_{1l}(u^{1/p_l})\, t^{r_l/q_l}$$

que es algebraico sobre $k(u)((t))$. Sea $\overline{P}(Z)$ el polinomio mínimo de η'_1 sobre $k(u)((t))$. Por la forma de η'_1, se deduce que $\overline{P}(Z)\in$ $\in k(u)|t||Z|$, por lo tanto existe $P(Z)\in K|Z|$ tal que $\psi'(P(Z)) =$ $= \overline{P}(Z)$.

Sea $\omega'_{b+1} = P(z) \in L$ y vamos a estudiar el valor de ω'_{b+1} por v_1.

Sean $\{\eta'_{11} = \eta'_1, \eta_{12}, \ldots, \eta'_{1c}\}$ los conjugados diferentes de η'_1 sobre $k(u)((t))$, y pogamos $\overline{P}(Z) = \prod_{i=1}^{c}(Z-\eta'_{1i})$.

Entonces

$$v_1(\omega'_{b+1}) = \nu_t\left(\prod_{i=1}^{c} (\eta_1 - \eta'_{1i})\right)$$

y, en esta situación se tiene que

1) $\nu_t(\eta_1 - \eta'_1) = r_{b+1}/q_1$

2) para todo $i=2,\dots,c$, $\nu_t(\eta_1 - \eta'_{1i})$ es de la forma r_{l_i}/q_1, con $1 \leq l_i \leq b$.

Por tanto se tiene que

$$v_1(\omega'_{b+1}) = (r_{b+1} + \sum_{i=2}^{c} r_{l_i})/q_1$$

Consideremos el elemento $\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i} \in L$. Entonces, si ponemos

$$\omega_{b+1} = \omega'_{b+1}/(\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i}) \in L$$

se tiene que

$$v_1(\omega_{b+1}) = v_1(\omega'_{b+1}) - v_1(\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i}) = (r_{b+1}+\sum_{i=2}^{c} r_{l_i})-\sum_{i=2}^{c}(r_{l_i}/q_1)=$$

$= r_{b+1}/q_1$.

Esto prueba que, para todo $l \geq 1$, existe un elemento $\omega_l \in L$ tal que $v_1(\omega_l) = r_l/q_1$.

Sea $b \in Z$ tal que m.c.d.$(q_1, r_1, \dots, r_b) = 1$, y sean $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \in Z$ tales que $\alpha_0 q_1 + \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_b r_b = 1$.

Consideremos el elemento

$$\omega = \theta^0 . \prod_{l=1}^{b} \omega_l^{\alpha_l} \in L$$

(recuerdese que estamos considerando $\theta \in K$).

Entonces

$$v_1(\omega) = v_1(\theta^{\alpha_0}) + \sum_{l=1}^{b} v_1(\omega_l^{\alpha_l}) = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{b} \alpha_l(r_l/q_l) = 1/q_1$$

con lo que queda probado el teorema.

Sea ν_t la función de orden en t sobre k(u)((t)), y denotemos, también, por v'_1 la restricción de la valoración canónica de $k((u^{1/p_1}))((t^{1/q_1}))$ sobre $k((u^{1/p_1}))$ al cuerpo $k(u)((t))(\eta_1)$. Es claro que v'_1 amplia a ν_t a $k(u)((t))(\eta_1)$. Como en el teorema anterior se ha probado la existencia de un elemento $\omega \varepsilon L$ tal que $v_1(\omega) = 1/q_1$, es claro que el índice de ramificación de v'_1 respecto de ν_t es q_1, ya que $v'_1(\psi_1(\omega)) = = v_1(\omega) = 1/q_1$.

Sea e_1 el grado relativo de v'_1 respecto de ν_t. Se tiene la siguiente:

Proposición.- v'_1 es la única ampliación de ν_t a $k(u)((t))(\eta_1)$. En particular, $q_1.e_1 = n_1$.

Demostración.-

Sabemos que k(u)((t)) es completo y que $k(u)((t))(\eta_1)$ es una extensión finita de k(u)((t)). Por lo tanto, existe a lo más una ampliación de ν_t a $k(u)((t))(\eta_1)$. (Vease |30|). Como hemos probado que v'_1 es una ampliación de ν_t a $k(u)((t))(\eta_1)$ se tiene que v'_1 es la única.

La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la primera y de la fórmula de la ramificación de valoraciones, (Vease |37|).

Hemos probado ya que los índices de ramificación de v'_1 y v_1 sobre ν_t y v, respectivamente, coinciden y son iguales a q_1. Veamos que esto es cierto, también, para los grados relativos, es decir,

Proposición 7.7.- El grado relativo de v_1 respecto de v es igual al grado relativo de v'_1 respecto de ν_t.

Demostración.-

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & k(u)((t)) \arrow[d, hook] \\ L \arrow[r, "\psi_1"] & k(u)((t))(\eta_1) \end{tikzcd}$$

y sea $\overline{K}^* = \psi(K)$. Se tiene que $\psi_1(L) = \overline{K}(\eta_1)$ y que $|\overline{K}(\eta_1):\overline{K}| = |L:K| = n$. Sea $v' = \nu_{t|\overline{K}}$, $v'' = v'_{1|\overline{K}(\eta_1)}$ y denotemos por (R'', m'') , (R'_1, m'_1) los anillos de valoración de v'' y v'_1 respectivamente, y sean $\Delta'' = R''/m''$, $\Delta'_1 = R'_1/m'_1$ los cuerpos residuales. Se trata de calcular el grado relativo de v'' respecto de v'.

Como $v'' = v'_{1|\overline{K}(\eta_1)}$, es claro que v'' hace corresponder a cada elemento de $\overline{K}(\eta_1)$ su orden (fraccionario) como serie en t. Esto significa que v'_1 es una ampliación de v'' al cuerpo $k(u)((t))(\eta_1)$, y por tanto el cuerpo residual Δ'' de v'' se puede identificar a un subcuerpo del de v'_1. Esta identificación se hace como sigue:

Como $R'' \subset R'_1$ y $m'_1 \cap R'' = m''$, se tiene una inmersión

$$\Delta'' = R''/m'' \longrightarrow \Delta'_1 = R'_1/m'_1$$

que a la clase del elemento $\zeta \in R''$ le hace corresponder $\zeta + m'_1$.

Basta entonces, para demostrar la proposición, probar que, dado un elemento $\zeta \in R'_1$ existe un elemento $\zeta' \in R''$ tal que $\zeta + m'_1 = \zeta' + m'_1$.

Sea pues $\zeta \in R'_1$, y pongamos

$$\zeta = \zeta_0(u,t) + \zeta_1(u,t)\eta_1 + \dots + \zeta_{n-1}(u,t)\eta_1^{n-1}$$

con $\zeta_i(u,t) \in k(u)((t))$, $i=0,\dots, n-1$.

Observemos que las series $\zeta_j(u,t)$ pueden tener orden negativo en t, pero η_1 siempre tiene orden positivo. Además, un término cualquiera de la expresión anterior, por ejemplo, $\zeta_j(u,t)\eta_1^j$, no es más que el producto de dos series en t^{1/q_1}. Por lo tanto, si nos interesan sólo los términos de este producto de un grado inferior o igual a uno determinado (cero en nuestro caso), los coeficientes de esos términos no dependen sino de los coeficientes de $\zeta_j(u,t)$ hasta un grado fijo. Esto quiere decir que existe un entero s_j tal que, si denotamos por $\zeta'_j(u,t)$ a la suma de los s_j primeros términos de $\zeta_j(u,t)$, entonces los coeficientes de $\zeta_j(u,t)\eta_1^j$ hasta el grado cero son, exactamente los mismos que los de $\zeta'_j(u,t)\eta_1^j$ hasta el grado cero. Pongamos

$$\zeta' = \zeta'_0(u,t) + \zeta'_1(u,t)\eta_1 + \dots + \zeta'_{n-1}(u,t)\eta_1^{n-1}$$

Entonces ζ', considerada como serie en t^{1/q_1}, tiene exactamente los mismos coeficientes que ζ hasta el grado cero.

Por tanto, los coeficientes de los posibles términos de ζ' de grado negativo son nulos y el coeficiente del término de grado cero de ζ' es el mismo que el de ζ . Así pues

$$\zeta + m'_1 = \zeta' + m'_1$$

Como los $\zeta'_i(u,t)$ son funciones racionales de t con coeficientes en k(u), es decir, $\zeta'_i(u,t) \in k(u)(t)$, se tiene que $\zeta'_i(u,t) \in K$, $i=0,..,n-1$. Luego $\zeta' \in K(\eta_1)$, lo que prueba la proposición.

Como lo hecho para v_1 es válido para cualquier ampliación v_i, $i=1,...,h$, de v a L, llegamos al siguiente

<u>Teorema 7.8</u>.- Sea L una extensión finita de K, $L = K(z)$, f(Z) el polinomio mínimo de z sobre K, $f(Z) = \psi'(f(Z)) \in k(u)((t))|Z|$. Entonces existen tantas ampliaciones de v a L como factores irreducibles tenga el polinomio f(Z) sobre k(u)((t)). Además, dichas ampliaciones se realizan de la siguiente manera:

Sea $f(Z) = f_1(Z)....f_h(Z)$ la descomposición de f(Z) en polinomios mónicos irreducibles sobre k(u)((t)), y, para cada $i=1,..,h$, sea $\eta_i \in k((u^{1/p_i}))((t^{1/q_i}))$ una raiz de $f_1(Z)$, y consideramos la inmersión

$$\psi_i : L=K(z) \qquad k(u)((t))(\eta_i)$$

determinada anteriormente.

Entonces $v_i = v'_i\,\psi_i$, $i=1,...,h$, son todas las ampliaciones de v a L.

<u>Demostración</u>.-

Sabemos que $v_1,...,v_h$ son ampliaciones de v a L, y que todas son distintas. Resta probar que son las únicas.

Sea q_i el índice de ramificación de v_i respecto de v, e_i el grado relativo. Hemos probado que $q_i . e_i = n_i$, $i=1,..,h$. Por consiguiente, se tiene que

$$q_1 . e_1 + q_2 . e_2 + \ldots + q_h . e_h = n_1 + n_2 + \ldots + n_h = |L:K| = n.$$

Este hecho, junto con la fórmula general de ramificación de valoraciones indica que $v_1,\ldots,v_h$ son todas las ampliaciones posibles de v a L.

APENDICE

Sección 8: Unos anillos especiales.-

Vamos, en esta sección, a efectuar unas construcciones algebraicas un poco complicadas.

Nota 8.1.- Sea R un dominio de integridad, u una variable, $\mathbb{Q}_0$ el conjunto de los números racionales no negativos; para cada $\gamma \in \mathbb{Q}_0$ se pondrá $R_\gamma = R$. Sea $\mathcal{R}(R)$ el subconjunto de $\prod_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} R_\gamma$ definido por

$$\mathcal{R}(R) = \{(a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} \mid a_\gamma = 0,\ \forall \gamma \in \mathbb{Q}_0 \setminus \{\text{una sucesión monótona creciente divergente}\}\}$$

Para operar fácilmente con $\mathcal{R}(R)$ conviene cambiar un poco la notación. Se pondrá $\mathcal{R}(R,u) = \mathcal{R}(R)$ y se escribirá

$$(a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} a_\gamma u^\gamma \ , \text{ para todo } (a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} \in \mathcal{R}(R)$$

Se considerará la inmersión canónica $R \to \mathcal{R}(R,u)$ que a cada $a \in R$ le hace corresponder $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} a_\gamma u^\gamma$ con $a_\gamma = 0$, para todo $\gamma \neq 0$, $a_0 = a$, y se identifica, mediante ella, a R con su imagen en $\mathcal{R}(R,u)$.

Naturalmente, $\mathcal{R}(R,u)$ hereda la estructura de grupo abeliano de R (respecto de +); vamos a definir una multiplicación que le dote de estructura de anillo. Si $\omega, \omega' \in \mathcal{R}(R,u)$, $\omega = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} a_\gamma u^\gamma$ $\omega' = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} a'_\gamma u^\gamma$, se pondrá

$$|1| \qquad \omega \cdot \omega' = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} \Big(\sum_{\substack{\delta, \delta' \in \mathbb{Q}_0 \\ \delta + \delta' = \gamma}} a_\delta a'_{\delta'} \Big) u^\gamma \ .$$

Vamos a ver que la expresión |1| tiene sentido. En efecto, fijado

$\gamma \in \mathcal{Q}_0$, el número de posibles sumandos distintos de cero en

$$|2|. \quad \sum_{\substack{\delta,\delta' \in \mathcal{Q}_0 \\ \delta+\delta'=\gamma}} a_\delta a'_{\delta'}$$

es finito, pues las δ (resp. δ') para las que a_δ (resp. $a'_{\delta'}$) es distinto de cero forman una sucesión monótona creciente divergente, a lo más. Así, para $\delta \leq \gamma$, sólo hay un número finito de a_δ distintos de cero. Esto da sentido a la expresión $|2|$. Resta por probar que $\omega \cdot \omega' \in \mathcal{R}(R,u)$, es decir, que la familia

$$\Big(\sum_{\substack{\delta,\delta' \in \mathcal{Q}_0 \\ \delta+\delta'=\gamma}} a_\delta a'_{\delta'}\Big)_{\gamma \in \mathcal{Q}_0}$$

es cero fuera de una sucesión monótona creciente divergente. Para ello basta ver que, para todo entero $N \geq 0$, la familia anterior, cuando $\gamma \leq N$, tiene a lo más un número finito de sumandos distintos de cero. Pero como los conjuntos

$$\Gamma_1 = \{\delta \in \mathcal{Q}_0 \mid \delta \leq N,\ a_\delta \neq 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{\delta' \in \mathcal{Q}_0 \mid \delta' \leq N,\ a'_{\delta'} \neq 0\}$$

son finitos, y como

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{Q}_0 \mid \gamma \leq N, \sum_{\substack{\delta+\delta'=\gamma \\ \delta,\delta' \in \mathcal{Q}_0}} a_\delta a'_{\delta'}\} \subset \Gamma_1 + \Gamma_2$$

es Γ finito. Con esto probamos que la definición de producto de dos elementos de $\mathcal{R}(R,u)$ tiene sentido. Ya es fácil comprobar que se tiene sobre $\mathcal{R}(R,u)$ una estructura de anillo conmutativo con elemento unidad, para el cual la inmersión canónica $R \to \mathcal{R}(R,u)$ es un homomorfismo de anillos.

<u>Proposición 8.2</u>.- Sea $\omega = \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}_0} a_\gamma u^\gamma \in \mathcal{R}(R,u)$; las condiciones siguientes son equivalentes:

8.2.1.- ω es una unidad en $\mathcal{R}(R,u)$.

8.2.2.- a_0 es una unidad en R.

Demostración.-

$$\text{Si } \omega^{-1} = \sum_{\gamma \in Q_0} b_\gamma u^\gamma \quad \text{es } 1 = \omega\,\omega^{-1} = \sum_{\gamma \in Q_0} \Big(\sum_{\substack{\delta,\delta' \in Q_0 \\ \delta+\delta'=\gamma}} a_\delta b_{\delta'} \Big) u^\gamma ,$$

de donde $a_0 b_0 = 1$, luego a_0 es una unidad en R.

Probaremos ahora el recíproco. A partir de ahora, para cada $\omega = \sum_{\gamma \in Q_0} a_\gamma u^\gamma$ se pondrá

$$\Gamma(\omega) = \{ \gamma \in Q_0 \mid a_\gamma \neq 0 \}.$$

Tomamos el ω del enunciado y notemos que la hipótesis implica, en particular, que $\Gamma(\omega) \neq \emptyset$ pues $0 \in \Gamma(\omega)$. Sea Γ' el conjunto de todas las sumas finitas de elementos de $\Gamma(\omega)$. Si $\Gamma(\omega) = \{0\}$, entonces $\Gamma' = \{0\}$, pero si $\Gamma(\omega)$ contiene a un elemento distinto de cero, entonces Γ' es una sucesión monótona creciente divergente. Supongamos que estamos en el caso no trivial en que $\Gamma(\omega) \neq \{0\}$ y sea $\Gamma' = \{\gamma_0 = 0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$, ordenado en orden creciente. Designemos por $\{b_{\gamma_i}\}_{i \geq 0}$ a la solución del sistema escalonado infinito de ecuaciones lineales siguiente

$$a_0 b_{\gamma_0} = 1$$

$$a_0 b_{\gamma_1} + a_{\gamma_1} b_{\gamma_0} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 b_{\gamma_i} + a_{\gamma_i - \gamma_{i-1}} b_{\gamma_{i-1}} + \cdots + a_{\gamma_i - \gamma_1} b_{\gamma_1} + a_{\gamma_i} b_{\gamma_0} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y pongamos $\omega' = \sum_{\gamma \in Q_0} b_\gamma u^\gamma$ con $b_\gamma = 0$ para todo $\gamma \notin \Gamma'$ y es $\gamma = \gamma_i$, $i \geq 0$, entonces el coeficiente b_γ del término correspondiente en ω' es el b_{γ_i} calculado antes. Se trata de probar que $\omega\,\omega' = 1$.

Se tiene que

$$\omega\,\omega' = \sum_{\gamma\,\varepsilon\,Q_0} \Big(\sum_{\substack{\delta,\delta'\,\varepsilon\,Q_0 \\ \delta+\delta'=\gamma}} a_\delta b_{\delta'} \Big) u^\gamma = \sum_{\gamma\,\varepsilon\,Q_0} c_\gamma u^\gamma .$$

Desde luego $c_0 = 1$. Fijemos $\gamma\,\varepsilon\,Q_0$, $\gamma \neq 0$. Supongamos, primero, que $\gamma \notin \Gamma'$ y sean $\delta, \delta'\,\varepsilon\,Q_0$ tales que $\delta+\delta' = \gamma$. Si $\delta\,\varepsilon\,\Gamma(\omega)$ entonces $\delta' \notin \Gamma'$, luego $b_{\delta'} = 0$ y asi $a_\delta b_{\delta'} = 0$. Si $\delta \notin \Gamma(\omega)$ es $a_\delta = 0$, luego $a_\delta b_{\delta'} = 0$. Esto prueba que $c_\gamma = 0$ para $\gamma \notin \Gamma'$. Supongamos ahora que $\gamma\,\varepsilon\,\Gamma'$ y sea $\gamma = \gamma_i$, $i > 0$, entonces

$$c_{\gamma_i} = a_0 b_{\gamma_i} + a_{\gamma_i-\gamma_{i-1}} b_{\gamma_i} + \ldots + a_{\gamma_i-\gamma_1} b_{\gamma_1} + a_{\gamma_i} b_{\gamma_0} = 0$$

Esto prueba que $\omega\,\omega' = 1$, y la proposición.

<u>Proposición 8.3</u>.- Si R es un anillo local, entonces $\mathcal{R}(R,u)$ lo es también. Sin embargo, $\mathcal{R}(R,u)$ no es noetheriano aún cuando R lo sea.

<u>Demostración</u>.-

A los elementos de $\mathcal{R}(R,u)$ les llamaremos series (generalizadas) en la variable u con coeficientes en R. Dado $\omega\,\varepsilon\,\mathcal{R}(R,u)$ distinto de cero, $\omega = \sum_{\gamma\,\varepsilon\,Q_0} a_\gamma u^\gamma$, se llamará orden de ω, y se designará por $\nu(\omega)$, al número racional $\nu(\omega) = \min \Gamma(\omega)$. Si $\omega = 0$, se pondrá $\nu(\omega) = \infty$. Sean $\omega, \omega'\,\varepsilon\,\mathcal{R}(R,u)$; es fácil comprobar que se verifica

$$\nu(\omega\omega') = \nu(\omega) + \nu(\omega')$$
$$\nu(\omega+\omega') \geq \min\{\nu(\omega), \nu(\omega')\} .$$

Si $0 \neq \omega = \sum_{\gamma\,\varepsilon\,Q_0} a_\gamma u^\gamma$ y $\gamma_0 = \nu(\omega)$, entonces a a_{γ_0} se le llama el coeficiente inicial de ω. Dicho esto, como R es un dominio de integridad, $\mathcal{R}(R,u)$ también lo es, y el coeficiente inicial de $\omega\omega'$ es el producto de los coeficientes iniciales de ω y de ω'

Dicho esto, la proposición no es difícil de probar.

Sea M el ideal maximal de R y $M' = \{ \omega \varepsilon \mathcal{R}(R,u) \mid \nu(\omega) > 0 \}$; es claro que M' es un ideal de $\mathcal{R}(R,u)$. Sea $\mathcal{M} = M\mathcal{R}(R,u) + M'$; entonces se tiene que $\mathcal{M}$ es, justamente, el conjunto de las no unidades de $\mathcal{R}(R,u)$, luego $\mathcal{R}(R,u)$ es local.

Para ver que $\mathcal{R}(R,u)$ no es noetheriano basta un ejemplo. Supongamos que R = k es un cuerpo; entonces $\mathcal{M} = M'$. Vamos a ver que $\mathcal{M}$ no está finitamente generado. Como para todo $\omega \varepsilon \mathcal{R}(R,u)$,

$\omega \neq 0$, es $\omega = u^{\nu(\omega)}\omega'$, donde ω' es una unidad, si $\mathcal{M}$ estuviese finitamente generado, existiría un conjunto finito de números racionales positivos $\{\gamma_1,..,\gamma_n\}$ tal que $\mathcal{M} = (u^{\gamma_1},..,u^{\gamma_n})$. Sea $p \varepsilon Z_+$ tal que $p\gamma_i \varepsilon Z_+$ para todo $i=1,..,n$, y sea $q \varepsilon Z_+$, $q> p$. Se tiene que $u^{1/q} \varepsilon \mathcal{M}$ y vamos a ver que no puede ser combinación lineal de $u^{\gamma_1},..,u^{\gamma_n}$. El hecho de que $q > p$ significa que, poniendo $\gamma_i = a_i/p$, es $(1/q) < (1/p) \leqslant (a_i/p) = \gamma_i$.

De otro lado, como para todo $\omega_i \varepsilon \mathcal{R}(R,u)$ es $\nu(\omega_i u^{\gamma_i}) \geqslant \gamma_i$ será $\nu(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u^{\gamma_i}) \geqslant \min\{\gamma_1,..,\gamma_n\} > 1/q$. Esto prueba que $u^{1/q}$ no pertenece a $(u^{\gamma_1},..,u^{\gamma_n})$ y que $\mathcal{R}(R,u)$ no es noetheriano. Así concluye la demostración de la proposición.

<u>Nota 8.4</u>.- El anillo $\mathcal{R}(R,u)$ lo utilizaremos en dos casos principalmente: cuando R = k, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y cuando R = k||t||, el anillo de series en la variable t con coeficientes en k. Vamos a definir en ambos casos, unas topologías sobre $\mathcal{R}(R,u)$.

Supongamos primero que R = k, como antes, y para cada $\gamma \varepsilon \mathbb{Q}_0$ sea

$$\mathcal{F}_\gamma = \{ \omega \varepsilon (k,u) \mid \nu(\omega) \geqslant \gamma \}.$$

Es evidente que $\mathcal{F}_\gamma$ es un ideal de $\mathcal{R}(k,u)$ y que la familia $\{\mathcal{F}_\gamma\}$ cuando $\gamma \varepsilon \mathbb{Q}_0$ es una filtración, pues

$$\mathcal{F}_\gamma \cdot \mathcal{F}_{\gamma'} \subset \mathcal{F}_{\gamma+\gamma'} \quad y \quad \mathcal{F}_\gamma \supset \mathcal{F}_{\gamma'}, \ \forall\ \gamma' \geqslant \gamma .$$

Además,

$$|*| \qquad \bigcap_{\gamma \in \mathbb{Q}_0} F_\gamma = (0)$$

A esta filtración hay asociada una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{R}(k,u)$, que le dota de una estructura de anillo topológico. Dicha topología es Hausdorff en virtud de $|*|$.

Supongamos ahora que $R = k||t||$; cada elemento ω de $\mathcal{R}(k||t||,u)$ será escrito, usualmente, en la forma

$$\omega = \sum_{(\alpha,\gamma) \in Z_0 \times \mathbb{Q}_0} a_{(\alpha,\gamma)} t^\alpha u^\gamma$$

y se pondrá $\nu'(\omega) = \min\{\alpha+\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in Z_0 \times \mathbb{Q}_0,\ a_{(\alpha,\gamma)} \neq 0\}$, llamando a $\nu'(\omega)$ el orden total de ω. La expresión

$$\sum_{\substack{\alpha+\gamma=\nu'(\omega) \\ a_{(\alpha,\gamma)} \neq 0}} a_{(\alpha,\gamma)} t^\alpha u^\gamma$$

se llamará la forma inicial total de ω. Si $\omega,\omega' \in \mathcal{R}(k||t||,u)$ es

$$\nu'(\omega\omega') = \nu'(\omega) + \nu'(\omega')$$
$$\nu'(\omega+\omega') \geq \min\{\nu'(\omega),\nu'(\omega')\}$$

y si ω y ω' son distintos de cero, entonces la forma inicial de $\omega\,\omega'$ es el producto de las formas iniciales de ω y ω'.

Sea, en este caso, para cada $\gamma \in \mathbb{Q}_0$,

$$F'_\gamma = \{\omega \in \mathcal{R}(k||t||,u) \mid \nu'(\omega) \geq \gamma\}.$$

Como antes $\{F'_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Q}_0}$ es una filtración de $\mathcal{R}(k||t||,u)$ que verifica $|*|$. La topología $\mathcal{T}'$ determinada por ella sobre el anillo $\mathcal{R}(k||t||,u)$ (que es compatible con la estructura de anillo) es Hausdorff. En ambos casos se tiene:

<u>Proposición 8.5</u>.- Los anillo $\mathcal{R}(k,u)$, $\mathcal{R}(k||t||,u)$ son completos para las topologías definidas.

Demostración.-

Comencemos con el caso de $\mathcal{R}(k,u)$. Sea $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathcal{R}(k,u)$ y vamos a construir su límite. Pongamos $\omega_n = \sum_{\gamma \in Q_0} a_{n\gamma} u^{\gamma}$; se trata de construir un $\omega = \sum_{\gamma \in Q_0} a_{\gamma} u^{\gamma}$ tal que $\omega = \lim_{n \to \infty} \omega_n$.

Tomemos un $\gamma \in Q_0$ fijo; existe $n(\gamma+1) \in Z_+$ tal que para todo $n,m \geq n(\gamma+1)$ es $\omega_n - \omega_m \in \mathcal{F}_{\gamma+1}$. Esto significa que, para todo $\gamma' < \gamma+1$ es $a_{n\gamma'} = a_{m\gamma'}$; en particular, $a_{n\gamma} = a_{m\gamma}$. Pongamos $a_{\gamma} = a_{n\gamma} = a_{m\gamma}$ en estas circunstancias. Es evidente, a partir de la construcción de a_{γ} y del hecho de que las ω_n están en $\mathcal{R}(k,u)$, que el número de las a_{γ} distintas de cero para $\gamma \leq N$, N dado, es finito. Así pues, $\omega = \sum_{\gamma \in Q_0} a_{\gamma} u^{\gamma} \in \mathcal{R}(k,u)$ y, claramente es $\omega = \lim_{n \to \infty} \omega_n$

Vamos a estudiar el caso de $\mathcal{R}(k||t||,u)$. Sea $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathcal{R}(k||t||,u)$ y vamos a construir su límite. Pongamos $\omega_n = \sum_{(\alpha,\gamma) \in Z_0 \times Q_0} a^{(n)}_{(\alpha,\gamma)} t^{\alpha} u^{\gamma}$; se trata de construir $\omega = \sum_{(\alpha,\gamma) \in Z_0 \times Q_0} a_{(\alpha,\gamma)} t^{\alpha} u^{\gamma}$ tal que $\omega = \lim_{n \to \infty} \omega_n$.

Para $\gamma \in Q_0$ fijo, pongamos $a^{(n)}_{\gamma} = \sum_{\alpha \in Z_0} a^{(n)}_{(\alpha,\gamma)} t^{\alpha}$, $a_{\gamma} = \sum_{\alpha \in Z_0} a_{(\alpha,\gamma)} t^{\alpha}$

Tomemos $\alpha \in Z_0$, $\gamma \in Q_0$ fijos; existe $n(\alpha+\gamma+1) \in Z_+$ tal que para todo $n,m \geq n(\alpha+\gamma+1)$ es $\omega_n - \omega_m \in \mathcal{F}'_{\alpha+\gamma+1}$. Esto significa que, para todo $\alpha' \in Z_0$, $\gamma' \in Q_0$ tales que $\alpha'+\gamma' < \alpha+\gamma+1$ es $a^{(n)}_{(\alpha',\gamma')} = a^{(m)}_{(\alpha',\gamma')}$; en particular $a^{(n)}_{(\alpha,\gamma)} = a^{(m)}_{(\alpha,\gamma)}$. Pongamos $a_{(\alpha,\gamma)} = a^{(n)}_{(\alpha,\gamma)} = a^{(m)}_{(\alpha,\gamma)}$ en las anteriores circunstancias. Es evidente, a partir de la construcción de $a_{(\alpha,\gamma)}$ y del hecho de que las ω_n están en $R(k||t||,u)$, que el número de las a_γ distintas de cero para $\gamma \leqslant N$, N dado, es finito. Así pues, $\omega = \sum_{\gamma \in Q_0} a_\gamma u^\gamma \in R(k||t||,u)$ y, claramente, $\omega = \lim_{n \to \infty} \omega_n$. Esto prueba la proposición.

<u>Nota 8.6</u>.- Sea ahora k un cuerpo arbitrario y consideremos el anillo $R(k||t||,u)$; es evidente que $R(k||t||,u) \supset k||t,u||$. Sean $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r \in R(k||t||,u)$ no unidades distintas de cero; se tiene que $\nu'(\omega_i) = \rho_i > 0$, $i=1,2,..r$. Sean $X_1,..,X_r$ variables; vamos a ver que existe un único k-homomorfismo ψ de $k||X_1,..,X_r||$ en $R(k||t||,u)$ tal que $\psi(X_i) = \omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Consideremos la forma lineal $L': Z_0 \to Q_0$ dada por $L' = \rho_1 u_1 + .. + \rho_r u_r$. Esta forma induce sobre $k||X_1,..,X_r||$ la la filtración $\{A_\gamma\}_{\gamma \in Q_0}$ donde $A_\gamma = \{f \in k||X_1,..,X_r|| \mid \nu(f) \geqslant r\}$ habiendo puesto, para $f \in k||X_1,..,X_r|| = k||\underline{X}||$, $f \neq 0$,

$$f = \sum_{(i_1,..,i_r) \in Z_0^r} b_{i_1..i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r},$$

$$\nu(f) = \min \{L'(i_1,..,i_r) \mid b_{i_1..i_r} \neq 0\} .$$

Nótese, a ese respecto, que, para un γ fijo, es finito el conjunto $C_\gamma = \{ (i_1,..,i_r) \in Z_0^r \mid L'(i_1,..,i_r) \leqslant \gamma\}$. Para $\gamma \in Q_0$ se designará por f_γ a la suma de todos los términos distintos de cero de f, tales que $L'(i_1,..,i_r) = \gamma$. Es evidente que $f_\gamma \neq 0$ fuera de una sucesión monótona creciente divergente.

Para cada entero $n \geqslant 0$ se pondrá

$$\sigma_n = \sum_{\substack{\gamma \in Q_0 \\ \gamma \leqslant n}} f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r);$$

vamos a probar que $\{\sigma_n\}_{n \geqslant 0}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de $R(k||t||,u)$. Sea dado $\rho \in Q_0$; para todo $n > m > \rho$, es

$$\sigma_n - \sigma_m = \Big(\sum_{\substack{\gamma \in Q_0 \\ \gamma \leq n}} f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r)\Big) - \Big(\sum_{\substack{\gamma \in Q_0 \\ \gamma \leq m}} f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r)\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma \in Q_0, m < \gamma \leq n} f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r),$$

luego $\nu'(\sigma_n - \sigma_m) \geq \min_{m < \gamma \leq n} \{\nu'(f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r))\} > m > \rho$, por lo tanto $\sigma_n - \sigma_m \in F'_\rho$. Sea $\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$.

Se define la aplicación $\psi : k||\underline{X}|| \to R(k||t||,u)$ poniendo, para cada $f \in k||\underline{X}||$ como antes,

$$\psi(f) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\gamma \in Q_0, \gamma \leq n} f_\gamma(\omega_1,..,\omega_r).$$

Es evidente que ψ es un homomorfismo de anillos tal que $\psi(X_i) = \omega_i$, $1 \leq i \leq r$. La unicidad de ψ es tambien clara por argumentos de continuidad.

Nota 8.7.- Sea, como en la nota anterior, k un cuerpo arbitrario, y consideremos el anillo $R(k,u)$. Sean $\omega_1,..,\omega_r \in R(k,u)$ no unidades distintas de cero. Se tiene que $\nu(\omega_i) = \rho_i > 0$, $1 \leq i \leq r$. Sean $X_1,..,X_r$ variables. Como antes, existe un único k-homomorfismo $\psi : k||\underline{X}|| \to R(k,u)$ tal que $\psi(X_i) = \omega_i$, $1 \leq i \leq r$. La construcción de ψ es análoga a la de la nota anterior, por la cual la omitimos.

Esta situación admite una generalización bien fácil de construir. Sea k' otro cuerpo, $\sigma : k' \to k$ una inyección. Existe una ampliación $\psi : k'||\underline{X}|| \to R(k,u)$ de σ tal que $\psi(X_i) = \omega_i$, $1 \leq i \leq r$. La construcción, repetimos, es análoga a las anteriores.

Recordemos que en 8.2 se introdujo la notación siguiente. Si R es un anillo y $\omega = \sum_{\gamma \in Q_0} a_\gamma u^\gamma \in R(R,u)$, se pondrá

$$\Gamma(\omega) = \{\gamma \in Q_0 \mid a_\gamma \neq 0\}.$$

Definición 8.8.- Sea R un anillo arbitrario. Un elemento ω de $\mathcal{R}(R,u)$ se llama una serie de Puiseux si, o bien $\Gamma(\omega) = \emptyset$, o bien existe $n \in Z_+$ tal que $n.\Gamma(\omega) \subset Z_0$ (es decir, si los exponentes de u en la expresión de ω pueden ser reducidos a común denominador).

Teorema 8.9.- Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, $\omega \in \mathcal{R}(K,u)$ una no unidad distinta de cero. Las condiciones siguientes son equivalentes:

8.9.1.- ω es una serie de Puiseux.

8.9.2.- ω es entero sobre $K||u||$.

8.9.3.- ω es algebraico sobre $K((u))$.

Demostración.-

8.9.1.- 8.9.2.- Si ω es una serie de Puiseux y se escribe

$$\omega = \sum_{i \geqslant 0} a_{r_i} u^{r_i/n} , \quad a_{r_i} \in K \setminus \{0\}, \quad r_i \in Z_+, \quad r_0 < r_1 < r_2 < \ldots ,$$

y n es el mínimo denominador de los exponentes de ω. Se sabe por teoría elemental de curvas que, si $\{\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n\}$ son las raices n-ésimas de la unidad en K, los conjugados de ω sobre $K((u))$ son $\{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$ con

$$\omega_j = \sum_{i \geqslant 0} a_{r_i} \varepsilon_j^{r_i} u^{r_i/n} , \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Así, escribiendo $Z^n + d_1(u)Z^{n-1} + .. + d_{n-1}(u)Z + d_n(u) = \prod_{j=1}^{n} (Z - \omega_j)$

las relaciones de Cardano prueban que $\nu(d_1(u)) \geqslant 1r_0/n > 0$, luego ω es entero sobre $K||u||$.

8.9.2.- 8.9.3.- Es evidente.

8.9.3.- 8.9.1.- Sea $d_0(u)Z^n + d_1(u)Z^{n-1} + .. + d_{n-1}(u)Z + d_n(u) = 0$ una ecuación irreducible satisfecha por ω sobre $K((u))$, con los $d_i(u) \in K||u||$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Por el teorema de Puiseux, todas las raices de la ecuación anterior son series de Puiseux. Luego, en particular, ω lo es. Esto prueba el teorema.

Sección 9 : Existencia de valoraciones de $k((X_1,..,X_n)), n > 2$, de de dimensión menor que n-1. El ejemplo básico.-

En esta sección vamos a desarrollar un ejemplo importante. Tomemos como cuerpo base el cuerpo complejo C y sean t,u variables. Consideremos el anillo $\mathcal{R}(C||t||,u)$, y sean X_1,X_2,X_3 nuevas variables. Sea $\zeta : C||X_1,X_2,X_3|| \rightarrow \mathcal{R}(C||t||,u)$ el C-homomorfimo definido por las sustituciones

$$\zeta(X_1) = t, \quad \zeta(X_2) = ut^2, \quad \zeta(X_3) = \sum_{i\geq 1} u^{(3^{2i}+1)/3^i} t^{3^i}$$

Proposición 9.1.- ζ es inyectivo.

Demostración.-

Se hará por reducción al absurdo. Supongamos que ζ no es inyectivo, y sea f una no unidad irreducible tal que $\zeta(f)=0$.

Sea $K = \overline{C((t))}$ un cierre algebraico de $C((t))$ y consideremos la inmersión canónica $\mathcal{R}(C||t||,u) \rightarrow \mathcal{R}(K,u)$. Escribamos

$$f(X_1,X_2,X_3) = \sum_{(m,n)\in Z_0 x Z_0} f_{(m,n)}(X_1)\, X_2^m X_3^n.$$

Nótese que tiene que existir un par de la forma $(o,n) \in Z_0 x Z_0$ tal que $f_{(0,n)}(X_1) \neq 0$, pues, caso contrario, $f(X_1,X_2,X_3)$ sería divisible por X_2, lo que no es posible. Sea r el mínimo entero no negativo tal que $f_{(0,r)}(X_1) \neq 0$. Probemos que $r > 0$. En efecto, si fuese $f_{(0,0)}(X_1) \neq 0$, sería

$$0 = f_{(0,0)}(t) + \sum_{(m,n)\in Z_+ x Z_+} f_{(m,n)}(t)(ut^2)^m \Big(\sum_{i\geq 1} u^{(3^{2i}+1)/3^i} t^{3^i}\Big)^n$$

y es claro que, entonces, los términos de $f_{(0,0)}(t)$ serían incancelables.

Considerando a $f(X_1,X_2,X_3)$ como una serie es X_2,X_3 con coeficientes en $C((X_1))$, el teorema preparatorio de Weierstrass permite escribir $f(X_1,X_2,X_3) = U(X_2,X_3).P(X_2,X_3)$, donde $U(X_2,X_3)$

es una unidad de $C((X_1))||X_2,X_3||$, y

$$P(X_2,X_3) = X_3^r + b_1(X_2)X_3^{r-1} + .. + b_r(X_2),$$

con $b_j(X_2) \in C((X_1))||X_2||$, $b_j(0) = 0$, $j = 1,..,r$.

Consideremos la inmersión canónica de $C||X_1,X_2,X_3||$ en $C((X_1))||X_2,X_3||$. La inmersión $\sigma : C((X_1)) \to K$ que deja invariantes los elementos de C y transforma X_1 en t se extiende a un homomorfismo $\zeta' : C((X_1))||X_2,X_3|| \to \mathcal{R}(K,u)$ tal que $\zeta'(X_2) = \zeta(X_2)$, $\zeta'(X_3) = \zeta(X_3)$. Es claro que $f(X_1,X_2,X_3)$ y $P(X_2,X_3)$ pertenecen al núcleo de ζ'. Esto último nos indica que $\zeta(X_3)$ es entero sobre $K||u||$, y como no es una serie de Puiseux, se contradice el teorema 8.9. Esto prueba la proposición.

<u>Nota 9.2</u>.- Designemos por $\mathcal{K}(C||t||,u)$ al cuerpo de fracciones de $\mathcal{R}(C||t||,u)$. La inmersión ζ se extiende a una inmersión, designada por la misma letra, $\zeta : C((X_1,X_2,X_3)) \to \mathcal{K}(C||t||,u)$.

Todo elemento $\omega \in \mathcal{R}(C||t||,u)$ puede ser escrito en la forma

$$\omega = \sum_{(\alpha,\gamma) \in Z_0 \times Q_0} a_{(\alpha,\gamma)} t^{\alpha} u^{\gamma} .$$

Para $\omega \neq 0$ como arriba se pondrá $\nu_t(\omega) = \min\{\alpha \in Z_0 \mid \exists \gamma \in Q_0, a_{(\alpha,\gamma)} \neq 0\}$

Si $\nu_t(\omega) = \alpha_0$, se puede escribir ω de la forma $\omega = \sum_{i \geq 0} \omega_i t^{\alpha_i}$, donde $\omega_i \in \mathcal{R}(C,u)$, $\omega_i \neq 0$ y todas las ω_i verifican lo siguiente: Si $\omega_i = \sum_{\gamma \in Q_0} (\omega_i)_{\gamma} u^{\gamma}$, entonces $(\omega_i)_{\gamma} = 0$ fuera de una sucesión monótona creciente divergente, la misma para todo i. Al término $\omega_0 t^{\alpha_0}$ se le llama la forma inicial (en t) de ω .

Fácilmente se comprueban los siguientes hechos:

i) $\nu_t(\omega\omega') = \nu_t(\omega) + \nu_t(\omega')$

ii) $\nu_t(\omega+\omega') \geqslant \min\{\nu_t(\omega), \nu_t(\omega')\}$

iii) la forma inicial de $\omega\omega'$ es el producto de las formas iniciales de ω y ω'.

Como consecuencia de esto, ν_t induce una aplicación (notada ν_t),

$$\nu_t : K(C||t||,u)\setminus\{0\} \to Z$$

que es una valoración. Pongamos $\nu_t(0) = \infty$. Poniendo $v = \nu_t\zeta$, se tiene una valoración de $C((X_1,X_2,X_3))|C$ cuyo grupo es Z, pues $v(X_1) = 1$.

Vamos a suministrar alguna información sobre el cuerpo residual Δ_v de v. Para ello, cuando sea necesario, se considerará la compleción $\widehat{C((X_1,X_2,X_3))}$ de $C((X_1,X_2,X_3))$ respecto de v, y usaremos las notaciones habituales. En estas condiciones se tiene

<u>Teorema 9.3</u>.- $gr.tr.(\Delta_v|C) = 1$.

<u>Demostración</u>.-

Sea $\alpha = (X_2/X_1^2) + m_v \in \Delta_v$. Vamos a ver que $\alpha \notin C$. Si fuese $\alpha \in C$, existiría $a \in C$ tal que $(X_2/X_1^2) + m_v = a + m_v$, luego $(X_2-aX_1^2)/X_1^2 \in m_v$ y asi sería $v(X_2-aX_1^2) > 2$, lo que no ocurre, pues $\zeta(X_2-aX_1^2) = ut^2-at^2 = (u-a)t^2 \neq 0$. Esto prueba que α es trascendente sobre C y que $gr.tr.(\Delta_v|C) \geqslant 1$. Para probar el teorema basta ver que Δ_v es una extensión algebraica de $C(\alpha)$.

Sea la forma lineal $L = u_1+2u_2+3u_3$ y consideremos para cada serie $f \in C||X_1,X_2,X_3||$ su descomposición en suma de formas respecto de L. Vamos a ver que cada uno de los coeficientes de cada una de las potencias de t en $\zeta(f)$ es un polinomio en u y en un número finito de elementos $u^{(3^{2i}+1)/3^i}$. Para ello basta ver que, si $g(X_1,X_2,X_3)$ es una forma (respecto de L) se verifica lo anterior para $\zeta(g)$. Pero esto es consecuencia inmediata del hecho de que se verifique lo mismo para X_3^r, $r \geqslant 0$, que es evidente por las propiedades de la multiplicación de series.

Sean $f,g \in C||X_1,X_2,X_3||$ tales que $g \neq 0$ y $v(f/g) = 0$; entonces, por lo anterior, $\zeta(f/g) = \omega_0 + t\,\omega'$, donde ω_0 es una fracción racional en u y en un número finito de argumentos de $\{ u^{(3^{2i}+1)/3^i} \}$. Así, ω_0 es algebraico sobre $C(u)$. Sea

$$b_0(u)Z^n + b_1(u)Z^{n-1} + .. + b_{n-1}(u)Z + b_n(u)$$

un polinomio satisfecho por ω_0, donde $b_i(u) \in C|u|$ y $b_0(u) \neq 0$.

Consideremos el elemento $\gamma \in C((X_1,X_2,X_3))$ definido por

$$\gamma = b_0(X_2/X_1^2)(f/g)^n + b_1(X_2/X_1^2)(f/g)^{n-1} + .. + b_n(X_2/X_1^2) ;$$

se tiene

$$\zeta(\gamma) = b_0(u)(\omega_0+t\omega')^n+b_1(u)(\omega_0+t\omega')^{n-1}+..+b_{n-1}(u)(\omega_0+t\omega')+b_n(u)$$

de donde $\nu_t\zeta(\gamma) = v(\gamma) > 0$ y asi $\gamma \in m_v$. Entonces

$$0 = \gamma + m_v = b_0(\alpha)((f/g)+m_v)^n + b_1(\alpha)((f/g)+m_v)^{n-1} +..+ b_n(\alpha)$$

lo que prueba que $(f/g)+ m_v$ es algebraico sobre $C(\alpha)$ y el teorema.

<u>Nota 9.4</u>.- Sea $p > 0$ un entero y consideremos el elemento

$$\omega = u^{10/3}t^3 + u^{82/9}t^9 + .. + u^{(3^{2p}+1)/3^p}t^{3^p} \in R(C||t||,u),$$

que es una serie de Puiseux en las variables u,t. Reduciendo a común denominador los exponentes de u se tiene que

$$\omega = u^{3^{p-1}(3^2+1)/3^p}t^3+u^{3^{p-2}(3^{2.2}+1)/3^p}t^{3^2}+..+u^{(3^{2p}+1)/3^p}t^{3^p}$$

y como $1 = m.c.d(3^p,3^{p-1}(3^2+1),3^{p-2}(3^{2.2}+1),..,3^{2p}+1)$, ω tiene 3^p conjugados distintos, que son todos y que se escriben a continuación. Si $\{\varepsilon_1=1, \varepsilon_2,..,\varepsilon_{3^p}\}$ son las raices 3^p-ésimas de la unidad en C, los conjugados de ω sobre $C|t,u|$ son $\{\omega_1=\omega ,\omega_2,..,\omega_{3^p}\}$ donde

$$\omega_j = (\varepsilon_j u^{1/3^p})^{3^{p-1}(3^2+1)} t^3 + .. + (\varepsilon_j u^{1/3^p})^{(3^{2p}+1)} t^{3^p}$$

Vamos, en esta nota, a hallar los órdenes en u de las diferencias $\{\omega_1 - \omega_j\}$, $j=2,..,3^p$.

Sea $G = Gal(C(u,t)(\omega)|C(u,t))$; se tiene que G se puede interpretar como grupo $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2,.., \varepsilon_{3^p}\}$ de las raices 3^p-ésimas de 1 en C. Además $C(t,u)(\omega) = C(t,u)(u^{1/3^p})$. Si K es un cuerpo intermedio $C(t,u) \subset K \subset C(t,u)(\omega)$ se pondrá $Fix(K)=\{\sigma \in G|\sigma(\gamma)=\gamma$, para todo $\gamma \in K\}$. Fix(K) es un subgrupo de G y la correspondencia $K \to Fix(K)$ es biyectiva por el teorema fundamental de la teoría de Galois.

Para $i \in Z$, $1 \leqslant i \leqslant p$, se pondrá $K_i=C(t,u)(u^{1/3},..,u^{1/3^i})$; se tiene que $K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq .. \subsetneq K_p$, luego $Fix(K_1) \supsetneq Fix(K_2) \supsetneq .. \supsetneq Fix(K_p)$. Si $\sigma \in Fix(K_i)$, para cada $j \leqslant i$, es

$$|*| \qquad \sigma(u^{3^{p-j}(3^{2j}+1)/3^p} t^{3^j}) = u^{3^{p-j}(3^{2j}+1)/3^p} t^{3^j}$$

y reciprocamente, si $\sigma \in G$ es tal que verifica $|*|$, entonces $\sigma \in Fix(K_i)$. Como $|K_i:C(t,u)| = 3^i$ es $|Fix(K_i)| = 3^{p-i}$. Esto significa que:

1) hay $3^p-3^{p-1} = 2.3^{p-1}$ diferencias $\omega_1-\omega_1$ de orden $3^{p-1}(3^2+1)/3^p$, que corresponden a $\{\omega_1-\sigma(\omega_1)|\sigma \in Fix(K_1)\}$. Si $\sigma \in Fix(K_1)$, entonces el orden de $\omega_1-\sigma(\omega_1)$ es estrictamente mayor que 10/3.

2) Fijemos un entero $i \geqslant 1$, $i < p$, y calculemos los órdenes de las diferencias $\omega_1-\sigma(\omega_1)$ cuando $\sigma \in Fix(K_i)$. Es evidente que hay $2.3^{p-(i+1)}$ diferencias de orden $3^{p-i}(3^{2i}+1)/3^p$ y las restantes $3^{p-(i+1)}$ son de orden mayor.

En resumen, de las diferencias $\{\omega_1-\sigma(\omega_1)\}_{\sigma \in G\setminus\{1\}}$ hay

2.3^{p-r} de orden $3^{p-r}(3^{2.r}+1)/3^p$, $r=1,..,p$,

luego el orden en u de $\prod_{\sigma \in G\setminus\{1\}} (\omega_1-\sigma(\omega_1))$ es

$$n = \prod_{1 \leqslant r \leqslant p} (3^{p-r}(3^{2.r}+1)/3^{p}) = (8p.3^{2p}+3^{2p}-1)/4.3^{p}.$$

Nota 9.5.- Sea R un anillo conmutativo con elemento unidad, Z una indeterminada y consideremos el polinomio

$$P(Z) = (Z-a_1)(Z-a_2)....(Z-a_n), \; a_i \varepsilon R, \; 1 \leqslant i \leqslant n, \; n \geqslant 2.$$

Se verifica que para todo r=1,..,n,

$$\frac{d^r P(Z)}{dZ^r} = r! \sum_{(i_1,..,i_{n-r}) \varepsilon C_{n,n-r}} (Z-a_{i_1})...(Z-a_{i_{n-r}}).$$

Probemos esto por recurrencia sobre r. Si r=1, entonces

$$\frac{dP(Z)}{dZ} = (Z-a_2)..(Z-a_n)+(Z-a_1)(Z-a_3)..(Z-a_n)+..+(Z-a_1)...(Z-a_{n-1})$$

Supongamos el resultado cierto para r tal que $1 \leqslant r < n$. Entonces

$$\frac{d^{r+1}P(Z)}{dZ^{r+1}} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{d^r P(Z)}{dZ^r}\right) = \frac{d}{dZ} \; r! \sum_{(i_1,..,i_{n-r}) \varepsilon C_{n,n-r}} (Z-a_{i_1})..(Z-a_{i_{n-r}})$$

$$= r! \sum_{(i_1,..,i_{n-r}) \varepsilon C_{n,n-r}} ((Z-a_{i_2})..(Z-a_{i_{n-r}})+..+(Z-a_{i_1})..(Z-a_{i_{n-r}}))$$

$$= (r+1)! \sum_{(i_1,..,i_{n-r}) \varepsilon C_{n,n-r}} (Z-a_{i_1})..(Z-a_{i_{n-r-1}}).$$

Teorema 9.6.- $|\Delta_v : C(\alpha)| = \infty$.

Demostración.-

Probemos que, dado un entero positivo N, arbitrario pero fijo, existe un elemento $\mu \varepsilon \Delta_v$ tal que $|C(\alpha)(\mu):C(\alpha)| > N$, con lo cual se tendrá probado el teorema.

Sea $p > 0$ tal que $3^p > N$ y consideremos el elemento

$$\omega = u^{10/3}t^3 + \ldots + u^{(3^{2p}+1)/3^p}t^{3^p} \in R(C||t||,u),$$

que es una serie de Puiseux en las variables u,t. Reduciendo a común denominador los exponentes de u se tiene que

$$\omega = u^{3^{p-1}(3^2+1)/3^p}t^3 + \ldots + u^{(3^{2p}+1)/3^p}t^{3^p},$$

y, como en la nota 9.4, ω tiene 3^p conjugados distintos, que son todos. Sea

$$P(Z) = Z^{3^p} + a_1(u,t)Z^{3^p-1} + \ldots + a_{3^p}(u,t)$$

el polinomio mínimo de ω sobre $C|u,t|$.

Llegados a este punto observemos lo siguiente. Sea $u^m t^n$ un monomio; si $2m \leqslant n$ entonces $u^m t^n = \zeta(X_1^{n-2m}X_2^m)$ y si $2m > n$ entonces $u^m t^n = \zeta(X_2^m/X_1^{2m-n})$. De aqui se deduce que todo polinomio $a(u,t) \in C|u,t|$ puede ser escrito en la forma

$$a(u,t) = \zeta(a'(X_1,X_2)/X_1^{\rho}),\ a'(X_1,X_2) \in C|X_1,X_2|.$$

En virtud de esta observación podemos escribir, para $P(Z)$, $a_i(u,t) = \zeta(a_i'(X_1,X_2)/X_1^{\rho_i})$, $1 \leqslant i \leqslant 3^p$, y considerar el elemento $\gamma \in C((X_1,X_2,X_3))$ dado por

$$\gamma = X_3^{3^p} + (a_1(X_1,X_2)/X_1^{\rho_1})X_3^{3^p-1} + \ldots + (a_{3^p}(X_1,X_2)/X_1^{\rho_{3^p}}).$$

Sea $\omega' = \zeta(X_3) - \omega$; entonces $\omega' = \sum_{i>p} u^{(3^{2i}+1)/3^i}t^{3^i}$.

Por la fórmula de Taylor,

$$\zeta(\gamma) = (\omega+\omega')^{3^p} + a_1(u,t)(\omega+\omega')^{3^p-1} + \ldots + a_{3^p}(u,t) =$$

$$= P(\omega) + \left[\frac{dP(Z)}{dZ}\right]_{Z=\omega}\omega' + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2P(Z)}{dZ^2}\right]_{Z=\omega}\omega'^2 + \ldots + \frac{1}{3^p!}\left[\frac{d^{3^p}P(Z)}{dZ^{3^p}}\right]_{Z=\omega}\omega'^{3^p}.$$

En esa fórmula se tiene lo siguiente:

1) $P(\omega) = 0$.

2) Sean $\{\omega_1=\omega, \omega_2, .., \omega_{3^p}\}$ los conjugados de ω sobre $C(u,t)$ (vease nota 9.4). Entonces

$$P(Z) = (Z-\omega_1)(Z-\omega_2)..(Z-\omega_{3^p})$$

y

$$\frac{dP(Z)}{dZ} = (Z-\omega_2)...(Z-\omega_{3^p}) + .. + (Z-\omega_1)(Z-\omega_2)...(Z-\omega_{3^p-1})$$

luego

$$\left[\frac{dP(Z)}{dZ}\right]_{Z=\omega} = (\omega_1-\omega_2)...(\omega_1-\omega_{3^p}),$$

y asi, por 9.4, el orden en u de $\left[\frac{dP(Z)}{dZ}\right]_{Z=\omega}$ es $q=(8p3^{2p}+3^{2p}-1)/43^p$

Obsérvese que $8p3^{2p}+3^{2p}-1$ es divisible por 4. Asi $q = q_1/3^p$, con $q_1 = (8p3^{2p}+3^{2p}-1)/4$.

3) Sea $j > 1$ y $j \leqslant 3^p$. En virtud de 9.5 el orden en u de $\left[\frac{d^jP(Z)}{dZ^j}\right]_{Z=\omega}$ es mayor o igual que $(q_1 - (j-1)(3^{2p}+1))/3^p$, porque hay que quitar $(j-1)$ diferencias de orden máximo. Representemos por ν_u el orden en u. Así

$$\nu_u\left(\left[\frac{dP(Z)}{dZ}\right]_{Z=\omega}\omega'\right) = (q_1/3^p) + (3^{2(p+1)}+1)/3^{p+1}$$

y para $1 < j \leqslant 3^p$

$$\nu_u\left(\left[\frac{d^jP(Z)}{dZ^j}\right]_{Z=\omega}\omega'^j\right) \geqslant (q_1 - (j-1)(3^{2p}+1))/3^p + j(3^{2(p+1)}+1/3^{p+1} =$$

$$= \frac{q_1}{3^p} + \frac{3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} + (j-1)\quad\frac{3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} - \frac{3^{2p}+1}{3^p} \quad =$$

$$= \frac{q_1}{3^p} + \frac{3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} + (j-1)\ \frac{3^{2(p+1)}+1-3^{2p+1}-3}{3^{p+1}} > \frac{q_1}{3^p} + \frac{3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} =$$

$$= \nu_u \left(\left[\frac{dP(Z)}{dZ}\right]_{Z=\omega} \omega' \right)$$

luego el término en $u^{(q_1/3^p)+((3^{2(p+1)}+1)/3^{p+1})}$ de $\zeta(\gamma)$ es in-cancelable. Asi se tiene que

$$\zeta(\gamma) = u^{(q_1/3^p)+((3^{2(p+1)}+1)/3^{p+1})} a_0(t) + \text{términos en u de grado superior.}$$

Pero, en virtud de 9.4,

$$a_0(t) = c.t^{2p3^p+3^{p+1}} = c.t^{3^p(2p+3)},$$

y además $3^p(2p+3) = \nu_t(\zeta(\gamma))$.

Sea $\mu = (\gamma/X^{3^p(2p+3)}) + m_v$; como

$$\frac{q_1}{3^p} + \frac{3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} = \frac{3q_1+3^{2(p+1)}+1}{3^{p+1}} = \frac{q_2}{3^{p+1}}$$

y m.c.d.$(q_2, 3^{p+1}) = 1$, se tiene que el polinomio mínimo, sobre $C(u)$, de $u^{q_2/3^{p+1}}$ es $Z^{3^{p+1}} - u^{q_2} = 0$. Asi, tomando

$$\eta = \left(\frac{\gamma}{X_1^{3^p(2p+3)}}\right)^{3^{p+1}} = \left(\frac{X_2}{X_1^2}\right)^{q_2}$$

es

$$\zeta(\eta) = \left(u^{q_2/3^{p+1}}\right)^{3^{p+1}} - u_2^{q_2}$$

luego $\nu_t(\zeta(\eta)) > 0$ y, por tanto,

$$0 = \eta + \mathfrak{m}_v = \mu^{3^{p+1}} - \alpha^{q_2}$$

luego μ es algebraico sobre $C(\alpha)$ de grado $3^{p+1} > 3^p > N$. Esto prueba el teorema.

BIBLIOGRAFIA

| 1| Abellanas, P.: "Elementos de Matemáticas" Madrid (1973).

| 2| Abhyankar, S.S.: "On the ramification of algebraic funtions". Amer. J.Math. 77. (1955)

| 3| " "On the valuations centered in a local domain". Amer. J. Math. 78 (1956).

| 4| " : "Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic p≠0". Ann. of Math 63 (1956). Correcciones Ann. of Math. 78 (1963).

| 5| " : "On the ramification of algebraic funtions. Part II". Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958).

| 6| " : "Uniformization in p-cyclic extensions of algebraic surfaces over ground fields of characteristic p". Math. Ann. 153 (1964)

| 7| " : "Non-splitting of valuations in extensions of two dimensional regular local domains". Math. Ann. 170 (1967).

| 8| Arnold, J.T.: "Trascendence degree in power series rings". J. of Algebra. 57 (1979).

| 9| " : "Algebraic extensions of power series rings". Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1981).

|10| Brewer, J.W.: "Power series over commutative rings". Lectures Notes in pure and applied Math. 64 (1981). Ed. Marcel Dekker.

|11| Briales,E.-Herrera,F.J.: "Construcción explícita de las valoraciones de un anillo de series formales en dos variables". Actas X Jornadas Hispano-Lusas. Murcia. (1985).

|12| Chevalley, C.: "Some properties of ideals in rings of power series". Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944).

|13| Endler, O.: "Valuation theory". Ed. Springer Verlag. (1972).

|14| Gilmer, R.: "Integral dependence in power series rings". J. of Algebra. 11 (1969).

|15| Greco,S.-Salmon,P.: "Topics in m-adic topologies". Ergeb. der Math. Band. 58 (1971). Springer Verlag.

|16| Herrera, F.J.: "Ramificación de valoraciones de superficies algebroides". Tesis Doctoral. Sevilla. (1981).

|17| Hironaka, H.: "Resolutions of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I and II". Ann. of Math. 79 (1964).

|18| Jacobson, N.: "Basic Algebra I". Ed. Freeman. San Francisco.(1974)

|19| Lam, T.Y.: "Orderings, valuations and quadratic forms". Conf. board of the Math. Science. 52 (1983).

|20| Lipman, J.: "Introduction to resolution of singularities". Summer Institute of A.M.S. Arcata 1974. Proceedings of Symposia in Pure Math. 29 (1975).

|21| " : "Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces". Thesis. Harvard Univ. (1965).

|22| Mac-Lane,S.-Schilling,O.F.G.: "Zero dimensional branches of rank one on algebraic varieties". Ann. of Math. 40 (1939).

|23| Nagata, M.: "Local rings". Interscience. (1962).

|24| Ribenboim, P.: "Theorie des valuations". Press. Univ. Montreal. (1964).

|25| Sanchez Giralda, T.: "Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". Tesis. Madrid. (1976).

|26| Schilling, O.F.G.: "The theory of valuations". Math. Survey n° IV. Amer. Math. Soc. (1950).

|27| " : "A generalization of local class field theory". Amer. J. Math. 60 (1938).

|28| " : "Arithmetic in fields of formal power series in several variables". Ann. of Math. 38 (1937).

|29| Serre, J.P.: "Corps locaux". Ed. Hermann. Paris. (1968).

|30| Thomas, A.D.: "Zeta-functions: An introduction to algebraic geometry". Ed. Pitman Pub. (1977).

|31| Van der Waerden, B.L.: "Modern Algebra". Ed. Frederic Ungar. New York. (1953).

|32| Zariski,O-Abhyankar,S.S.: "Splitting of valuations in extensions of local domains". Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 41 (1955).

|33| Zariski, O.: "Foundations of a general theory of birrational correspondences". Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943).

|34| " : "The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic funtions". Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1944).

|35| Zariski, O.: "The reduction of singularities of an algebraic surface". Ann. of Math. 40 (1939).

|36| " : "Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties". Ann. of Math. 45 (1944).

|37| Zariski,O.-Samuel,P.: "Commutative algebra". Vol. I y II. Van Nostrand. (1960).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. Emilio Briales Morales

"Construcción Explícita de Valoraciones Discretas de Rango 1"

acordó otorgarle la calificación de "APTO" CUM LAUDE"

Sevilla, de Julio 86

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,