24092 LBS 1206825

043
329

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

CÁLCULOS EFECTIVOS CON VALORACIONES: RAMIFICACIÓN

Memoria presentada por Miguel Ángel Olalla Acosta
para optar al grado de Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

V^o B^o del Director

Fdo. José Luis Vicente Córdoba
Catedrático de Algebra

El doctorando

Miguel Ángel Olalla Acosta

Sevilla, Junio 1999

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
[illegible]
[illegible] Doctoral
[illegible] 140 [illegible] 10 del libro
[illegible]
Sevilla, 04 JUN 1999
El Jefe del Negociado de Tesis

A mis padres y a Eugenia

Quiero mostrar mi más profundo agradecimiento al Prof. D. José Luis Vicente Córdoba, bajo cuya dirección ha sido realizada esta memoria. Sin su dedicación y su preocupación por mi formación científica no hubiera sido posible este trabajo. Hago extensivo este agradecimiento a todos los miembros del Departamento que mediante su participación en cursos, seminarios, charlas y discusiones científicas han contribuido en mi formación matemática. Quiero agradecer de manera especial el apoyo prestado por el Prof. D. José María Tornero Sánchez en la realización de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO

La teoría de valoraciones ha ido siempre estrechamente ligada al estudio de las singularidades de variedades algebraicas. La primera vez que aparecieron fue en el último cuarto del siglo XIX de la mano de Dedekind y Weber ([DW82]) en el aspecto aritmético y de Hensel ([Hen08]) en el geométrico. Aunque en estos trabajos no estaba explícito el concepto de valoración, si lo estaba el de superficie de Riemann, tomado en préstamo de la teoría de funciones de una variable compleja. Naturalmente, en el caso de libro de Hensel (de contenido completamente geométrico) nos estamos refiriendo a las curvas.

Los resultados obtenidos asociando valoraciones y teoría de curvas fueron tan espectaculares que se puso una esperanza desmedida en la utilidad del método valorativo. Esta esperanza comenzaría a tambalearse hacia 1940 con los trabajos de Zariski ([Zar39, Zar40, Zar43, Zar44a, Zar44b, Zar54, Zar79]) sobre singularidades de superficies porque, ni los resultados eran tan acabados como en el caso de curvas, ni la técnica tan sencilla. El método valorativo para el estudio de las singularidades entró en una vía muerta en la década de 1950, pese a los esfuerzos del tándem Zariski-Abhyankar ([ZA55]). Cayó en un olvido temporal en 1964 cuando Hironaka ([Hir64]) probó la resolución de singularidades sobre cuerpos base de característica cero por técnicas completamente diferentes. A finales de este siglo los métodos valorativos han vuelto a ser tenidos en cuenta, sobre todo de la mano de Spivakovsky ([Spi90]), en conexión con la resolución de singularidades en característica positiva.

¿Por qué los resultados sobre curvas son tan buenos? Consideremos una curva algebraica irreducible C en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Entonces C tiene sólo un número finito de puntos singulares. Si $P \in C$ es un punto no singular, existe una única valoración ν (necesariamente discreta de rango 1) del cuerpo de funciones K de C "correspondiente a P" en el sentido de que el anillo de la valoración es el anillo local de C en P. En cambio, si P es un punto singular, hay un número finito de valoraciones cuyos anillos dominan al anillo local de C en P: tantas como ramas analíticas tiene C en P.

En esta situación, la resolución de singularidades es fácil de plantear y de probar. Para ello comenzamos a explotar los puntos singulares uno por uno. Cada una de esas explosiones no modifica a los puntos restantes. Si nos centramos en un punto P y lo explotamos sucesivamente, mientras la multiplicidad no decrezca (lo que implicará que sólo haya un punto que vaya sobre el anterior), este proceso puede tener fin si, en un estadio determinado, la explosión separa ramas analíticas. Por tanto, esencialmente, la resolución se reduce a ver que en una rama analítica se puede hacer caer la multiplicidad por explosiones. Como explosiones y multiplicidades son compatibles con compleciones, nos podemos colocar en el marco de las series. Así se parte de un anillo

$$\mathfrak{o} = \mathbb{C}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/\mathfrak{p} = \mathbb{C}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]\,,\ x_i = X_i + \mathfrak{p}\,,\ 1 \leq i \leq n\,,$$

donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de coaltura 1. Por el lema de normalización de Noether, se puede escribir

$$\mathfrak{o} = \mathbb{C}[\![x_1]\!][x_1, \ldots, x_n]\,,$$

que es entero sobre $\mathbb{C}[\![x_1]\!]$. El cierre íntegro $\bar{\mathfrak{o}}$ de $\mathfrak{o}$ en un cuerpo de fracciones K es el anillo de la única valoración de $K|\mathbb{C}$ finita sobre $\mathfrak{o}$. Las explosiones sucesivas producen una cadena creciente de anillos

$$\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}_1 \subset \mathfrak{o}_2 \subset \cdots$$

todos ellos contenidos en $\bar{\mathfrak{o}}$. Como el cierre íntegro es un $\mathfrak{o}$–módulo de tipo finito, se debe alcanzar en un número finito de pasos, luego la singularidad está resuelta.

Ésta, dicha en pocas palabras, es la relación entre valoraciones y singularidades en el caso de curvas. Resolver singularidades de curvas es resolver una rama analítica. Para cada una de estas ramas hay una única valoración que une a los anillos explotados y un anillo se alcanza en un número finito de pasos (explosiones).

Ahora bien, la situación para superficies es completamente distinta. Aquí todo se desarregla. Lo primero que se estropea es que la normalización de una superficie ya no es lisa, sino que su lugar singular puede tener codimensión 2, es decir, consta de un número finito de puntos. Así pues, el cierre íntegro ya no es un objetivo a alcanzar por las modificaciones algebraicas que correspoden a las explosiones geométricas. En segundo lugar, en dimensión mayor que 1, hay muchísimas valoraciones cuyos anillos dominan el de un punto fijo P (sea singular o no). Estas valoraciones corresponden a curvas trascendentes (o incluso "salvajes") trazadas sobre la superficie en un entorno de P. No nos vamos a meter mucho en explicar la terminología: en la presente memoria hay suficientes explicaciones. Hay valoraciones con ecuaciones paramétricas en una variable y exponentes racionales con denominadores no acotados que forman un conjunto bien ordenado para el orden usual; las hay con exponentes reales, etcétera. A esto nos referimos cuando hablamos de "curvas salvajes".

Además, la situación es aún peor. Esta superabundancia de valoraciones hace que el cierre íntegro ya no sea un paraguas que cubra a los anillos explotados, luego el bien trazado rompecabezas de las curvas se rompe completamente.

Zariski logró abrirse camino en la "selva valorativa" de las superficies hacia el año 1940 para demostrar la resolución de singularidades. Este "abrirse camino" tiene un aspecto local y uno global. Comenzamos con éste, siguiendo a Zariski. Sea Σ un cuerpo de funciones analíticas en varias variables sobre $\mathbb{C}$. La superficie de Riemann de $\Sigma|\mathbb{C}$ es el conjunto $\mathcal{F}$ de las valoraciones de $\Sigma|\mathbb{C}$ de dimensión cero, dotado de la siguiente topología τ: una base de τ está formada por los conjuntos $N(H)$, donde H es una subvariedad irreducible de un modelo proyectivo de Σ y $N(H)$ es el conjunto de valoraciones con centro H. Con esta topología, $\mathcal{F}$ es casi-compacta: ésta es la clave de cualquier razonamiento global.

La técnica local es la uniformización de valoraciones, que Zariski enuncia así (c.f. [Zar40]; Teorema U_3, página 858):

Sea Σ un cuerpo de funciones algebraicas de r variables independientes sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica cero, y sea B una valoración s–dimensional de Σ. Sea V un modelo proyectivo Σ y sea W el centro de B en V. Existe un modelo proyectivo V' de Σ, en el cual el centro de B es una subvariedad simple W' y tal que el anillo cociente en W es un subanillo del anillo cociente en W'.

Más tarde profundizaremos en la uniformización de valoraciones. Por ahora seguiremos el razonamiento de Zariski. Volviendo al caso de superficies con $k = \mathbb{C}$, podemos hacer una lista de todas las valoraciones de Σ de dimensión cero. Es suficiente considerar un modelo proyectivo M de Σ y un punto cerrado $P \in M$, y describir todas las valoraciones de $\Sigma|\mathbb{C}$ cuyo centro en M sea P. Para ello se puede suponer que $\Sigma = \mathbb{C}(x, y, z)$, con x e y son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{C}$, z está definido por una ecuación $f(x, y, z) = 0$ donde f es un polinomio, y $P = (0, 0, 0)$. Las valoraciones que buscamos son las siguientes:

1. *Discretas de rango 1.* Sea ν una de ellas y t un elemento de valor 1. Entonces ν está dada por

   $$\Sigma \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}((t))^* \xrightarrow{\nu_t} \mathbb{Z}\,,$$

   verificándose $f(t, y(t), z(t)) = 0$. A la terna $(x(t) = t^n, y(t), z(t))$ se le llama unas ecuaciones paramétricas de la valoración ν.

2. *Valoraciones no discretas de rango 1 con grupo contenido en $\mathbb{Q}$.* Vienen dadas por un desarrollo en series de potencias donde

$x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ tienen exponentes fraccionarios y al menos una no es una serie de Puiseux (i.e. los denominadores no están acotados).

3. *Valoraciones no discretas de rango 1 cuyo grupo de valores no está contenido en* $\mathbb{Q}$. Vienen dadas por series de potencias donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son series con exponentes reales, algunos de los cuales no son racionales.

4. *Valoraciones discretas de rango 2.* Son composición de divisores primos con valoraciones de sus cuerpos residuales.

La idea de Zariski para resolver las singularidades de las superficies funciona como sigue. Sea Σ un cuerpo de funciones algebraicas en dos variables independientes sobre $\mathbb{C}$. Llamaremos un *sistema resolvente* de Σ a una colección $\{V_\alpha\}$ de modelos proyectivos tal que, para toda valoración v de la superficie de Riemann S existe un V_α de manera que el centro de v en V_α es un punto simple. Si se designa por $\mathrm{Sing}(V_\alpha)$ al lugar singular de V_α, el conjunto

$$N(V_\alpha \setminus \mathrm{Sing}(V_\alpha))$$

de las valoraciones v de S con centros en puntos de $V_\alpha \setminus \mathrm{Sing}(V_\alpha)$ es abierto y

$$\{N(V_\alpha \setminus \mathrm{Sing}(V_\alpha))\}$$

es un recubrimiento abierto de S. Por la condición de ser casi-compacto, existe un subrecubrimiento finito o, en otras palabras, un sistema resolvente finito. El problema está en demostrar que existe un sistema resolvente con un único elemento. Esto implica la resolución de singularidades, puesto que cada valoración de dimensión cero tendrá un único centro simple en ese modelo, luego el modelo es liso.

Zariski da la demostración por inducción. De la misma forma que se define un sistema resolvente para la superficie de Riemann S, se pueden definir sistemas resolventes para todos los subconjuntos $N \subset S$. Un sistema resolvente para N es cualquier conjunto finito de modelos de Σ tal que toda valoración de N tiene centro no singular en al menos uno de los modelos del sistema. Así, para hacer inducción descendente, Zariski necesita el teorema siguiente (c.f. [Zar39], página 584, teorema 4.2):

Si $N \subset S$ y existe un sistema resolvente de N con dos modelos, entonces existe otro con un solo modelo.

La inducción hacia abajo funciona así: sea $V_1, \ldots, V_n$ un sistema resolvente para S y sea N el subconjunto de S formado por las valoraciones con centro singular en $V_1, \ldots, V_{n-2}$. Entonces $\{V_{n-1}\ ,\ V_n\}$ es un sistema resolvente de N luego, por el teorema fundamenteal, existe V'_{n-1} tal que toda valoración de N tiene centro no singular en él. Así $V_1, \ldots, V_{n-2}, V'_{n-1}$ es un sistema resolvente con un elemento menos.

Demos una idea de la demostración del teorema fundamental. Sea $N \subset S$ y sea $V_1\ ,\ V_2$ un sistema resolvente de N. Primero eliminamos los puntos fundamentales de la correspondencia birracional entre ambos modelos mediante la aplicación de transformaciones analíticas. Luego tomamos la amalgama de los dos modelos y eso es todo. Recordemos que la amalgama de dos modelos proyectivos del mismo cuerpo, con coordenadas homogéneas de los puntos genéricos respectivos $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ y $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, es el modelo cuyas coordenadas son todos los productos $x_i y_j$.

Hemos dado un vistazo rápido a la resolución de singularidades de superficies. La técnica valorativa se complica:

a) Al aumentar la dimensión. En efecto, una década después logró Zariski resolver las singularidades en dimensión 3 y allí quedó detenido el problema. Sólo Hironaka lo resolvería, en 1964, con técnicas absolutamente distintas a las valoraciones.

b) Al pasar a característica positiva. Abhyankar estudió este caso, pero sin conclusiones generales desde el punto de vista de la resolución de singularidades, problema que permanece aún abierto.

Al llegar a este punto ya estaremos convencidos de que la uniformización de valoraciones es una técnica clave para la resolución de singularidades. Vamos a poner un ejemplo muy sencillo de una valoración y de cómo se uniformiza para que el lector se haga una idea clara del tema. Sean el polinomio $f = Z^2 - XY^3 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ y el anillo

$$R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(f) = \mathbb{C}[x, y, z] \text{ con } x = X + (f), y = Y + (f) \text{ y } z = Z + (f)\,,$$

y pongamos

$$K = \mathbb{C}(x, y) \subset L = \mathbb{C}(x, y, z)\,,$$

que es una extensión algebraica de grado 2. Sea t una nueva variable y sea

$$\varphi' : \mathbb{C}[X, Y, Z] \to \mathbb{C}[x^{1/2}, t^{1/2}]$$

la sustitución definida por

$$\varphi'(X) = x\,,\ \varphi'(Y) = t\,,\ \varphi'(Z) = x^{1/2}t^{3/2}$$

donde $x^{1/2}$ y $t^{1/2}$ son elecciones arbitrarias de raíces cuadradas de x y t en un cierre algebraico conveniente. Es trivial probar que $\ker \varphi' = (f)$, luego φ' induce una inyección

$$\varphi : R \to \mathbb{C}[x^{1/2}, t^{1/2}]$$

dada por

$$\varphi(x) = x\,,\ \varphi(y) = t\,,\ \varphi(z) = x^{1/2}t^{3/2}.$$

Designaremos también por φ a la inyección

$$\varphi : L \hookrightarrow \mathbb{C}(x^{1/2}, t^{1/2})$$

y sea v la composición de φ con la función de orden en t del cuerpo $\mathbb{C}(x^{1/2})(t^{1/2})$. Claramente v es una valoración de L sobre $\mathbb{C}$ cuyo centro en R es el ideal $\mathfrak{p} = (y, z)$. El anillo local

$$R_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}[x, y, z]_{(y,z)}$$

no es regular. En efecto, como $\mathfrak{p}$ tiene altura 1 en R, es $\dim(R_{\mathfrak{p}}) = 1$ luego, de ser regular, debe tener un sistema de parámetros con un sólo elemento o, equivalentemente $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}})$ debe ser un anillo de polinomios en una variable. Ahora bien, como

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) = \mathbb{C}[x][\overline{y}, \overline{z}]/(\overline{z}^2),$$

ésa no es la situación, al contener elementos nilpotentes. Consideremos ahora el anillo $R' = R[x, y, z/y]$; está claro que

$$R \subset R' \subset L$$

y ν es finita sobre R' porque $\nu(x) = 0$, $\nu(y) = 1$ y $\nu(z/y) = 1/2$. Poniendo $z' = z/y$ es

$$R' = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(Z^2 - XY) = \mathbb{C}[x, y, z']$$

con $x = X + (Z^2 - XY)$, $y = Y + (Z^2 - XY)$, $z' = Z + (Z^2 - XY)$. El centro de ν en R' es $\mathfrak{p}' = (y, z')$ y $R_{\mathfrak{p}'}$ es local regular ya que

$$y = \frac{1}{x} z'^2.$$

Considerando los cierres proyectivos de las variedades afines dadas, tenemos un ejemplo sencillo de uniformización de valoraciones.

¿Cuál es la filosofía principal de este ejemplo? Que, de alguna manera, la uniformización se "ve bien" si la valoración viene dada por una sustitución adecuada. En otras palabras, la uniformización "se ve" si la valoración tiene unas ecuaciones paramétricas. Así pues, uno de los objetivos de esta memoria es definir y hallar las ecuaciones paramétricas de ciertas valoraciones: no de todas, sino de las que tienen interés geométrico.

Para desarrollar ese objetivo vamos a operar dentro del marco de las series formales. Hay varias razones para ello. La primera es de índole práctica: una parametrización de una valoración va a estar formada por series, luego podemos partir directamente de anillos y cuerpos de series. Hay una segunda razón, esta vez más profunda:

que la uniformización es una técnica local (en el sentido algebraico de "local") luego se puede formular en series, su marco más adecuado. Así operaremos con anillos y cuerpos de series, en los que trabajaremos de forma sistemática.

En las páginas siguientes haremos una breve introducción de cada capítulo del presente trabajo.

En la primera sección del **capítulo I** se recogen algunas definiciones y resultados básicos, muy conocidos, pero que es preciso recordar, pues se hará uso intensivo de ellos en las secciones y capítulos siguientes. Así se recuerdan los conceptos de *valoración discreta de rango n*, *anillo* e *ideal de la valoración*, *cuerpo residual* y *dimensión de una valoración*. Además, dado que en el tercer capítulo se hace un estudio detallado de la ramificación de valoraciones discretas de rango 1 sobre el cuerpo de las series de potencias, conviene recordar los conceptos de *índice de ramificación reducido* y *grado relativo* de la valoración extendida. Por último se expone, aunque sin demostrar, un resultado conocido como *fórmula general de ramificación de valoraciones* y que será la base de algunas demostraciones del capítulo III. El teorema es el siguiente

---

Sea $K \subseteq L$ una extensión algebraica finita de grado n, sea ν una valoración de K de rango finito y sean $\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_g^*$ las extensiones de ν a L. Sean n_i y e_i el grado relativo y el índice de ramificación reducido, respectivamente, de ν_i^* con respecto a ν. Entonces

$$e_1 n_1 + e_2 n_2 + \cdots + e_g n_g \leq n.$$

Las definiciones y los resultados presentados en esta sección están sacados de [ZS60a]. Pensamos que con lo aquí expuesto es suficiente para una buena comprensión del presente trabajo.

La sección II–B, titulada **Compleción de un Cuerpo**, se basa fundamentalmente en el capítulo II de [Ser68] y en la sección 0 del primer capítulo de [Bri86]. En ésta se da una construcción clásica de lo que se conoce como compleción de un cuerpo que vamos a resumir.

Dado un cuerpo K, un valor absoluto $\Phi : K \to \mathbb{R}_0$ dota a K de estructura de cuerpo topológico. Si consideramos el anillo $S(K)$ de las sucesiones de Cauchy de elementos de K y, dentro de él, el ideal maximal de las sucesiones nulas $\mathcal{P}_0$. Se designará por $\hat{K}$ al cuerpo cociente $S(K)/\mathcal{P}_0$. Se tiene la inclusión natural $f : K \to \hat{K}$ que a cada $a \in K$ le asocia $\{a_n\}$, la sucesión constante $a_n = a$. Sobre este cuerpo $\hat{K}$ se define un valor absoluto, $\hat{\Phi}$ de la siguiente manera: si $\gamma = \{a_n\} + \mathcal{P}_0 \in \hat{K}$, se pondrá

$$\hat{\Phi}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \Phi(a_n).$$

El cuerpo $\hat{K}$ es completo para la topología determinada por $\hat{\Phi}$.

En la siguiente sección, **I–C Valoraciones Discretas y Compleciones**, se usa la construcción dada en la anterior para completar un cuerpo K dotado de una valoración discreta de rango 1. Sean $k \subset K$ dos cuerpos, ν una valoración discreta de rango 1 de $K|k$ y $\omega \in \mathbb{R}$, con $0 < \omega < 1$. La aplicación $\Psi_\omega : K \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi_\omega(\gamma) = \omega^{\nu(\gamma)}$ es un valor absoluto. De hecho, la topología que determina Ψ_ω sobre K no depende de la elección de ω. Luego la compleción de K respecto de este valor absoluto también es independiente de ω.

Sea $(\hat{K}, \hat{\Psi}_\omega)$ la compleción de (K, Ψ_ω), la valoración $\hat{\nu} : \hat{K} \to \mathbb{R}$ de $\hat{K}|k$ dada por

$$\hat{\nu}(\gamma) = \log_\omega \hat{\Psi}_\omega(\gamma)$$

prolonga a ν. De hecho, $\hat{\nu}$ es discreta de rango 1 y su grupo de valores coincide con el de ν. Además los cuerpos residuales Δ_ν y $\Delta_{\hat{\nu}}$ son isomorfos y $\hat{\nu}$ es la única valoración que extiende ν al cuerpo completo $\hat{K}$.

Dados un elemento de valor 1, $\theta \in R_{\hat{\nu}}$, y una k–sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, existe un homomorfismo

$$\Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \to R_{\hat{\nu}}$$

dado por

$$\Phi_{\sigma,\theta}\left(\sum_{i\geq 0}\delta_i t^i\right)=\sum_{i\geq 0}\sigma(\delta_i)\theta^i$$

que es un isomorfismo. Si $\nu_t : \Delta_{\hat{\nu}}((t)) \to \mathbb{Z}$ es la función de orden usual, entonces $\hat{\nu}$ es la composición de la extensión de $\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}$ a los cuerpos de fracciones, con ν_t.

Se termina esta sección poniendo varios ejemplos de valoraciones y de sus compleciones.

Para la siguiente sección del primer capítulo, **I–D Funciones de Orden**, consideramos un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado de característica cero. Sean $R = \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$, M_n su ideal maximal y $K_n = \mathbb{K}((X_1,\ldots,X_n))$ su cuerpo de fracciones. Fijemos una valoración discreta de rango 1 de $K_n|\mathbb{K}$ cuyo anillo R_ν contenga a R y cuyo centro en ese anillo, $\mathfrak{m}_\nu \cap R_\nu$, sea M_n. Se supone que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$ y se designa por Δ_ν al cuerpo residual de ν.

Sea $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, con $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, una forma lineal en las variables u_i. L define en el anillo R un orden, que llamaremos L–orden y que notaremos por ν_L, mediante la asignación del valor α_i a cada variable X_i. Así, el orden de una serie es el mínimo de los valores (o L–grado) que alcanza cada uno de sus monomios. La extensión de este L–orden al cuerpo de fracciones K_n nos define una valoración discreta de rango 1 que notaremos con la misma letra, ν_L. Llamaremos L–formas a los polinomios no nulos cuyos monomios tienen todos el mismo L–grado.

Sea ν la valoración sobre K_n definida anteriormente, supongamos que $\nu(X_i) = \alpha_i$ para todo i, tomemos la forma lineal $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ y la correspondiente función de orden ν_L. En esta sección se prueba que para toda L–forma f se tiene $\nu(f) \geq \nu_L(f)$. Diremos que una L–forma f es singular si $\nu(f) > \nu_L(f)$. El conjunto de todas las formas singulares de una valoración es un ideal primo, que notaremos $\mathrm{Sing}(\nu)$. Continúa esta sección probando el siguiente teorema:

Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\nu = \nu_L$.
2. ν no tiene formas singulares.

Este resultado fue demostrado por E. Briales en [Bri86]. En el mismo trabajo se prueba de una manera constructiva la existencia de valoraciones con ideal singular prefijado. Nosotros aprovechamos esta construcción para dar un ejemplo general y no trivial de valoraciones con formas singulares.

Para terminar esta sección calculamos el cuerpo residual de la función de orden ν_L. Si $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ es una base del subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ de ecuación implícita $L = 0$, se prueba fácilmente que el cuerpo residual es

$$\mathbb{K}\left(X^{A_1} + \mathfrak{m}_{\nu_L}, \ldots, X^{A_{n-1}} + \mathfrak{m}_{\nu_L}\right) = \Delta_{\nu_L},$$

que es una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$. La pregunta que puede plantearse a continuación es si toda valoración de $K_n|\mathbb{K}$, discreta de rango 1 centrada en el ideal maximal, cuyo cuerpo residual es una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$ es una función de orden. La respuesta es negativa, para demostrar esto introducimos los conceptos de explosiones monomiales, explosiones monomiales seguidas de cambio de origen e implosiones. Utilizamos estos conceptos para poner un ejemplo de una valoración de K_n con formas singulares (i.e. que no es una función de orden) y tal que su cuerpo residual es una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$.

En la última sección del Capítulo I, **I-E Divisores primos en series de potencias**, definimos un tipo de valoración sobre el cuerpo de fracciones de las series de potencias, cuyo centro es un ideal primo del anillo $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$.

Sea K el cuerpo de fracciones de R. Sea $f \in R$ un elemento irreducible, consideremos el ideal primo $\mathfrak{p} = f \cdot R$ y el anillo $V = R_{\mathfrak{p}}$. Entonces V es el anillo de una valoración discreta ν que actúa de la siguiente manera: si $\omega = (a/b)f^r \in K$, donde f no divide ni a a ni a b, entonces $v(\omega) = r$. El cuerpo residual de v es

$$\Delta = R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}) = Q(R/\mathfrak{p}).$$

La compleción usual $\widehat{V}$ de V es también la compleción con respecto a la valoración v. Llamemos $\widehat{K}$ al cuerpo de fracciones de $\widehat{V}$, y $\widehat{v}$ a la extensión de v a $\widehat{K}$. Se demuestra de una manera constructiva que cualquier elemento de $\widehat{K}$ se puede escribir como una serie de potencias en f con coeficientes en $\widehat{V}$, es lo que se llama *la serie de potencias de desarrollo de los elementos de* $\widehat{K}$ *con respecto a* f.

Terminamos la sección y el capítulo poniendo un ejemplo de cálculo de una sección de la valoración definida por la función $f = X_2^8 - X_1^{13}$ sobre el cuerpo $K = \mathbb{K}((X_1, X_2))$.

En el **capítulo II** se hacen una serie de cálculos efectivos sobre valoraciones discretas de rango 1 del cuerpo de facciones de las series de potencias en n variables centradas en el ideal maximal. Concretamente, dado que hemos mencionado anteriormente que uno de los objetivos de esta memoria es definir y hallar las ecuaciones paramétricas de estas valoraciones, damos en las secciones A y B una construcción explícita de un elemento de valor 1 (i.e. el parámetro) y del cuerpo residual (i.e. el cuerpo de coeficientes) de tales valoraciones.

Las condiciones iniciales en todo este capítulo, de hecho en todo el trabajo salvo en la última sección del capítulo siguiente, son las que se exponen a continuación. Sea $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ el anillo de las series de potencias sobre un cuerpo algebraicxamente cerrado de característica cero $\mathbb{K}$, sean $M_n = (X_1, \ldots, X_n)$ el ideal maximal y $K_n = \mathbb{K}(X_1, \ldots, X_n)$ el cuerpo de fracciones. Fijamos una valoración discreta de rango 1 de $K_n|\mathbb{K}$ centrada en M_n. Se supone que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$. Se designa por Δ_v al cuerpo residual de v. Cuando lo necesitemos, usaremos la compleción $\widehat{K}$ de K_n respecto de v. A la única extensión de v a $\widehat{K}$ la denotamos por $\widehat{v}$, siendo $R_{\widehat{v}}$ su anillo y $\mathfrak{m}_{\widehat{v}}$ su ideal maximal. Recordemos que los cuerpos residuales $\Delta_{\widehat{v}}$ y Δ_v coinciden salvo isomorfismo.

Haremos durante todo este capítulo un uso frecuente de las siguientes transformaciones:

Transformación monoidal formal.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \to & \mathbb{K}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \\ X_1 & \mapsto & Y_1 \\ X_2 & \mapsto & Y_1Y_2 \\ X_i & \mapsto & Y_i,\ i=1,\ldots,n. \end{array}$$

Cambio de coordenadas.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \to & \mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \\ X_1 & \mapsto & Y_1 \\ X_i & \mapsto & Y_i+\sigma(b_i)Y_1,\ i=2,\ldots,n, \end{array}$$

donde σ es una sección del homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ y $\mathbb{L}$ es un subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$.Es importante destacar las siguientes propiedades:

1. Ambas transformaciones son inyectivas.
2. Las variables $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ son formalmente independientes sobre $\mathbb{K}$ o sobre $\mathbb{L}$.
3. $\mathbb{K}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \subset R_{\hat{\nu}}$ y $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \subset R_{\hat{\nu}}$.
4. La unicidad de la extensión de ν a $\hat{\nu}$ asegura que ν se extiende de manera única a una valoración ν' sobre $\mathbb{K}((Y_1,\ldots,Y_n))$ o $\mathbb{L}((Y_1,\ldots,Y_n))$ tal que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$ y el cuerpo residual es el mismo $\Delta_{\hat{\nu}}$.

En la sección **II–A Construcción de un elemento de valor 1** de este capítulo, damos una demostración constructiva del siguiente teorema:

En las condiciones iniciales habituales, fijada la sección σ, se puede construir un elemento de valor 1 mediante un número finito de transformaciones monoidales y de cambios de coordenadas.

La prueba se realiza calculando de manera explícita dicho elemento. Partiendo de la valoración ν sobre K_n, se pueden igualar los valores de las variables mediante un número finito de transformaciones monoidales formales (tal y como se prueba en las notas II–A.1). Suponemos, entonces, que tenemos una valoración ν sobre $\mathbb{K}((X_1,\dots,X_n))$ tal que $\nu(X_i) = \alpha$ para todo i. Si $\alpha = 1$ hemos terminado, en caso contrario se prueba (ver notas II–A.2) que para cada $i \geq 2$ existe un $b_i \in \Delta_{\hat{\nu}}$ tal que $\hat{\nu}(X_i - \sigma(b_i)X_1) > \alpha$. Se realiza un cambio de coordenadas y, mediante el algoritmo descrito en las notas II–A.1 se igualan de nuevo los valores de las variables. En todo caso, con estas transformaciones el valor mínimo de las variables *decrece*. Por último, en las notas II–A.3, se prueba que este algoritmo produce un elemento de valor 1 en un número finito de pasos.

Terminamos esta sección con un ejemplo de cálculo de un elemento de valor uno para una valoración dada sobre $\mathbb{C}((X_1,X_2,X_3))$.

En la sección **II–B** damos un algoritmo para calcular, de manera explícita, el cuerpo residual de la valoración ν de $\mathbb{K}((X_1,\dots,X_n))$ como una extensión trascendente de $\mathbb{K}$. Realizaremos este cálculo mediante un número finito de transformaciones monoidales formales y de cambios de coordenadas, que irán eliminando las formas singulares de la valoración. En las notas II–B.1 se prueba que, en un número finito de pasos, se puede obtener una valoración, que también notamos por ν, sobre $\mathbb{K}((X_1,\dots,X_n))$ tal que el valor de todas las variables es $\alpha \in \mathbb{Z}$ y ningún residuo $X_i/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es racional sobre $\mathbb{K}$. Llegados a este punto, para el caso de dos variables se prueba el siguiente teorema

---

En la situación usual, si $n = 2$, por aplicación de un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas, obtenemos unaa valoración que es la función de orden usual.

Este resultado ya fue probado por el profesor E. Briales en su Tesis Doctoral (c.f. [Bri86]).

La dificultad para el caso de tres o más variables es la que se expone a continuación. Este algoritmo construye el cuerpo residual $\Delta_{\hat{\nu}}$ mediante sucesivas extensiones (trascendentes o algebraicas infinitas) del cuerpo base $\mathbb{K}$. En cada paso, si llamamos $\mathbb{F}'$ a la correspondiente extensión intermedia entre $\mathbb{K}$ y $\Delta_{\hat{\nu}}$, tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} & \Delta_{\hat{\nu}} \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[l, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Luego cada vez que encontramos una extensión de $\mathbb{K}$, debemos extender la sección σ del homomorfismo natural $\mathbb{F} \to \mathbb{F}'$. Si la extensión es trascendente, el problema se resuelve fácilmente en el primer apartado de las notas II–B.4. La prueba del caso algebraico, más técnica y laboriosa, se expone en el punto segundo de las mismas notas.

Construiremos el cuerpo residual de una manera inductiva. Partimos de la extensión $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(X_2/X_1 + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}) = \Delta_2$. En las notas II–B.5 se exponen las transformaciones que hay que hacer para cada variable X_i, con $i = 3, \ldots, n$, para obtener una extensión Δ_i de Δ_{i-1} que nos acerque al cuerpo residual. Si, mediante un número finito de transformaciones monoidales formales y cambios de coordenadas, encontramos un residuo trascendente u_i, entonces la extensión que buscamos es $\Delta_{i-1}(u_i)$. Si por el contrario, todos los residuos obtenidos, u_{ij} son algebraicos, probamos que

La extensión algebraica

$$\Delta_{i-1} \subsetneq \Delta_{i-1}\left(\{u_{ij}\}_{j\geq 1}\right) = \Delta_i,$$

es infinita

Como en cada paso (al obtener cada residuo) aplicamos un número finito de cambios de coordenadas, puede que el cuerpo base varíe, pero siempre será una extensión algebraica finita del anterior. De esta forma, aplicando este procedimiento a cada variable obtenemos un cuerpo Δ_n que es una extensión trascendente de $\mathbb{K}$. Probamos en esta sección el siguiente resultado:

El cuerpo residual la citada valoración ν de $\mathbb{K}((X_1,\ldots,X_n))|\mathbb{K}$ es Δ_n

---

Resumiendo, hemos obtenido los siguientes teoremas:

Sea ν una valoración de $K_n|\mathbb{K}$ discreta de rango 1 cuyo centro en R es el ideal maximal M_n. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. El grado de trascendencia de Δ_ν sobre $\mathbb{K}$ es $n-1$
2. Existe una sucesión finita de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas que transforman ν en una función de orden.

Sea ν una valoración discreta de rango 1 sobre $\mathbb{K}((X_1,\ldots,X_n))$ centrada en el ideal maximal, sea $\Delta_{\hat{\nu}}$ su cuerpo residual. Sea σ una sección del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, entonces:

1. Si la dimensión de ν es $n-1$, podemos sumergir $\mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ en un nuevo anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$, donde $\mathbb{L}$ es subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ y tal que la valoración extendida de ν sobre $\mathbb{L}((Y_1,\ldots,Y_n))$ es la dada por la función de orden usual.
2. Si la dimensión de ν es $m-1 < n-1$, podemos sumergir $\mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ en un nuevo anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$, donde $\mathbb{L}$ es subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ y tal que la restricción a $\mathbb{L}((Y_1,\ldots,Y_m))$ de la valoración extendida de ν sobre $\mathbb{L}((Y_1,\ldots,Y_n))$ es la dada por la función de orden usual multiplicada por α.

Comenzamos la **sección II–C** poniendo algunos ejemplos en los que se aplica este algoritmo para el cálculo efectivo del cuerpo residual de algunas valoraciones dadas. El punto en común de estos ejemplos es que, en todos los casos, nos encontramos con valoraciones de dimensión $n-1$. Luego cabe preguntarse, ¿existen valoraciones de dimensión estrictamente menor que $n-1$? La respuesta afirmativa fue dada por E. Briales en [Bri86] poniendo un ejemplo de valoración sobre $\mathbb{C}((X_1, X_2, X_3))$ de dimensión 1. En esta sección usamos el algoritmo expuesto en la anterior para demostrar el siguiente teorema:

Dado cualquier número m entre 1 y n-1, existe $v : \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n)) \to \mathbb{Z}$ una valoración discreta de rango 1, centrada en M_n, tal que el grado de trascendencia del cuerpo residual de v es m.

En el **capítulo III** consideramos, como es habitual, el cuerpo $K_n = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$, sea v una valoración de $K_n|\mathbb{K}$ discreta de rango 1 con grupo de valores $\mathbb{Z}$, bien centrada en el ideal maximal, bien definida a partir de un elemento $f \in R = \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ irreducible, como en la sección I-E. Sea $L = K_n(z)$ una extensión algebraica finita, el objeto del capítulo III es estudiar cuántas valoraciones distintas extienden a v. Por otro lado, si v' es una valoración de $L|\mathbb{K}$ que extiende a v, estudiaremos también el *índice de ramificación reducido* y *grado relativo* de la valoración v' sobre v.

En todo este capítulo usaremos de manera intensiva la *fórmula general de ramificación de valoraciones*, así como la técnica desarrollada por F.J. Herrera en [Her81] y E. Briales en [Bri86] para el caso de dos variables. Veremos (nota III-B.3) que las posibles dificultades que pudiera plantear el paso de cuerpos series formales en dos variables al caso general se ven resueltas vía la construcción dada en esta memoria de un elemento de valor 1.

En la sección **III-A La función de orden**, resolvemos un caso que nos servirá de base para estudiar los más generales. Sea v_t la función de orden sobre un cuerpo $\Delta((t))$, donde Δ es un cuerpo que contiene a otro algebraicamente cerrado de característica cero. Desde luego, v_t es una valoración discreta de rango uno, con grupo de valores

$\mathbb{Z}$, anillo de valoración $\Delta[\![t]\!]$ y cuerpo residual Δ.

Sea ζ una raíz de un polinomio $Q(Z)$ de Weiertstrass irreducible, consideremos la extensión $\Delta((t)) \subset \Delta((t))(\zeta)$. Comenzamos nuestro estudio con un lema técnico

---

Sea Δ_2 una extensión finita de Galois de Δ, con grupo de Galois G. Sea $p_1 > 0$ un entero y G_{p_1} el grupo de las raíces p_1–ésimas de 1 en Δ. Entonces $\Delta_2((t^{1/p_1}))$ es una extensión finita de Galois de $\Delta((t))$ con grupo $G \times G_{p_1}$ actuando como sigue: si $(\varphi, \varepsilon) \in G \times G_{p_1}$ y $\Psi = \sum_i \alpha_i t^{i/p_1} \in \Delta_2((t^{1/p_1}))$, entonces

$$(\varphi, \varepsilon)(\Psi) = \sum_i \varphi(\alpha_i) t^{i/p_1}.$$

La demostración del siguiente resultado se realiza mediante el teorema de Puiseux y la fórmula general de ramificación de valoraciones.

La función de orden ν_t tiene una única extensión a $\Delta((t))(\zeta)$.

De hecho, la valoración que extiende a ν_t es la función de orden sobre $\Delta((t))(\zeta)$, que notaremos por ν_1. El resultado principal de esta sección es el teorema:

En la situación del lema anterior, el índice de ramificación reducido de ν_1 respecto de ν_t, es p_1. Además, el grado relativo es p/p_1.

En la prueba de este teorema se da una construcción explícita del elemento de $\Delta((t))(\zeta)$ cuyo valor es, precisamente, $1/p_1$. Concluimos el desarrollo de esta sección con un ejemplo concreto de ramificación de la función de orden sobre $\mathbb{C}((t))$.

La sección **III-B Ramificación de valoraciones en K_n** estudia la ramificación de una valoración ν de $K_n|\mathbb{K}$ discreta, de rango 1, centrada en el ideal maximal. Como es habitual, consideremos una $\mathbb{K}$–sección, σ, del homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ y un elemento de valor 1, $\theta \in R_{\hat{\nu}}$, así tenemos el isomorfismo

$$\Phi = \Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\hat{\nu}}((t)) \longrightarrow K_{\hat{\nu}}$$

Sea $\Psi : K_n \longrightarrow \Delta_{\hat{\nu}}$ la inmersión de K_n en $\Delta_{\hat{\nu}}$, que es la restricción del isomorfismo Φ^{-1} a K_n.

Sea L una extensión finita de K_n, sea z un elemento primitivo de la extensión $K_n \subset L$ y sea

$$f(Z) = Z^m + a_1(X_1, \ldots, X_n)Z^{m-1} + \ldots +$$

$$+ a_{m-1}(X_1, \ldots, X_n)Z + a_m(X_1, \ldots, X_n)$$

el polinomio mínimo de z sobre K_n. Podemos suponer que $f(Z) \in R[Z]$ es un polinomio de Weierstrass. Sea

$$\overline{f}(Z) = Z^m + \overline{a}_1(t)Z^{m-1} + \ldots + \overline{a}_{m-1}(t)Z + \overline{a}_m(t) \in \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!][Z]$$

la imagen de $f(Z)$ por Ψ. $\overline{f}(Z)$ no es necesariamente irreducible, supongamos entonces que $\overline{f}(Z) = \overline{f}_1(Z) \cdot \cdots \cdot \overline{f}_h(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$ y tomemos ξ_{i1} una raíz de $\overline{f}_i(Z)$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t)) \arrow[d] \\
L \arrow[r, "\lambda_i"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda_i : L \longrightarrow \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1}$ es una inmersión tal que $\lambda_i(z) = \xi_{i1}$.

Sea Δ el cierre algebraico de $\Delta_{\hat{\nu}}$, sabemos que $\xi_{ij} \in \Delta[\![t^{1/q_i}]\!]$ para algún entero positivo q_i. Sea ν_i' la restricción a $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})$ de la función de orden sobre $\Delta((t^{1/q_i}))$. La composición de ν_i' con λ_i nos da una aplicación

$$\nu_i : L \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{1}{q_i}\right),$$

que es una valoración de $L|\mathbb{K}$ discreta de rango 1 que extiende a ν.

Supongamos elegida otra raíz ξ_{ij}, conjugada con ξ_{i1}, sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$ y sea $\lambda_{ij} : L \longrightarrow \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{ij})$. Se tiene la siguiente proposición:

$\nu_i'\lambda_{ij} = \nu_i$ para todo $j = 1, \ldots, m_i$.

El recíproco también es cierto, como se demuestra en el teorema:

Sean i, j enteros distintos, $1 \leq i, j \leq h$. Si $\nu_i = \nu_j$, entonces ξ_{i1} y ξ_{j1} son conjugados sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$.

La prueba de este resultado requiere, en principio, que $\Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \subset \Psi(K_n)$. Para ello es necesario poder elegir un elemento de valor 1 que pertenezca a K_n. La construcción dada en el capítulo anterior del elemento de valor 1 nos permite escogerlo en $\overline{\mathbb{K}}((X_1, \ldots, X_n)) = \overline{K}_n$. Por tanto, fijados la sección σ y el elemento $\theta \in \overline{K}_n$, tenemos que $\Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \subset \Psi(\overline{K}_n)$, y con esto es suficiente para probar el teorema.

Como consecuencia de este teorema se tiene que si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ son, respectivamente, raíces de los factores irreducibles $\overline{f}_1(Z), \ldots, \overline{f}_h(Z)$ de $\overline{f}(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$, entonces las valoraciones asociadas $\nu_1, \ldots, \nu_h$ son ampliaciones de ν a L, y todas distintas. Nos queda probar que éstas son las únicas ampliaciones de ν a L. Para ello usaremos la fórmula general de ramificación de valoraciones, por tanto, necesitamos conocer el índice de ramificación y el grado relativo de estas extensiones ν_i de ν. Los siguientes resultados nos dan estos números para ν_1, siendo igual en los demás casos.

El índice de ramificación de ν_1 es q_1.

La prueba de este teorema nos proporciona, además, una construcción explícita del elemento de valor $1/q_1$. La siguiente proposición nos da el grado relativo.

El grado relativo de v_1 respecto de v es igual al grado relativo de v'_1 respecto de v_t.

Todos estos resultados nos permiten demostrar el siguiente teorema, cuya demostración es ya inmediata gracias a la fórmula general de ramificación de valoraciones:

Sea L una extensión finita de K, $L = K(z)$, sea $f(Z)$ el polinomio mínimo de z sobre K, $\overline{f}(Z) = \Psi'(f(Z)) \in \Delta_{\hat{v}}((t))[Z]$. Entonces existen tantas ampliaciones de v a L como factores irreducibles tenga el polinomio $\overline{f}(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{v}}((t))$.

Concluimos esta sección poniendo algunos ejemplos de cálculo de extensiones de valoraciones en dos y tres variables. Asimismo calculamos en cada ejemplo los elementos que nos dan el índice de ramificación reducido.

La última sección del presente trabajo, titulada **III-C Divisores primos en series de potencias**, resuelve el problema de la ramificación para las valoraciones divisoriales, definidas por un elemento irreducible $f \in R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ sobre el cuerpo $K = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$. Sea v una tal valoración definida por un elemento $f \in R$, si $\mathfrak{p} = f \cdot R$, entonces el anillo de la valoración es $V = R_{\mathfrak{p}}$ y el cuerpo residual es $\Delta = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$. Si $\hat{V}$ es la compleción de V y $\hat{K}$ es su cuerpo de fracciones, fijada una sección σ del homomorfismo natural $\hat{V} \to \Delta$, tenemos un isomorfismo $\Psi : \hat{K} \to \Delta$.

Sea $P(Z) \in R[Z]$ un polinomio mónico, irreducible, de Weierstrass. Consideremos el anillo cociente

$$R[Z]/(P \cdot R[Z]) = R[z] ,$$

con $z = Z + P \cdot R[Z]$. Su cuerpo de fracciones, $L = K(z)$, es una extensión algebraica finita de K. Nuestro propósito es estudiar todas las posibles extensiones a L de la valoración v. Como en la sección anterior, el polinomio $\overline{P}(Z) = \Psi(P(Z)) \in \Delta[\![t]\!]$ no es necesariamente irreducible sobre el cuerpo de fracciones. Si $\overline{P} = \overline{P}_1 \cdot \cdot \cdot \overline{P}_s$, podemos definir a partir de una raíz ζ_i de $\overline{P}_i(Z)$ una valoración ν_i que extiende a ν y que no depende de la elección de ζ_i. De manera completamente análoga a lo realizado en la sección anterior, se prueba el teorema:

Para cada $i = 1, \ldots, s$, el índice de ramificación reducido de ν_i es p_i. Las valoraciones $\{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ son las únicas extensiones de ν a $K(z)$.

Para el caso de las valoraciones divisoriales, obtenemos el siguiente teorema:

En la situación usual, si ν ramifica (alguna de las extensiones tiene índice de ramificación ≥ 2), entonces f divide al discriminante de $P(Z)$.

Concluimos la sección y, por tanto, el presente trabajo poniendo un par de ejemplos sobre ramificación de valoraciones divisoriales, el primero de ellos es un contraejemplo que demuestra que el recíproco del último teorema no es cierto.

CAPÍTULO I

Preliminares

I–A DEFINICIONES

Aunque las valoraciones son objetos ya muy conocidos, estimamos conveniente empezar definiendo brevemente algunos de los conceptos que vamos a manejar en las siguientes secciones. Sean K un cuerpo y K^* su grupo multiplicativo. Sea G un grupo aditivo, abeliano y totalmente ordenado.

Definición I–A.1 ■ Una *valoración* de K es una aplicación v de K^* en G que satisface las siguientes condiciones:

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$,

2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Para cualquier $x \in K$, el elemento $v(x)$ se denomina *valor de x* en la valoración dada. El subgrupo $v(K^*) \subseteq G$ se llama *grupo de valores de v*, supondremos siempre que $v(K^*) = G$. Si el grupo de valores es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, diremos que v es una valoración *discreta de rango n*.

Definición I–A.2 Sea k un subcuerpo de K. Una valoración v de K se dice *valoración de K sobre k* (también diremos valoración de $K|k$), si $v(c) = 0$ para todo $c \in k$.

Nota I–A.3 Sea v una valoración de K. El conjunto

$$R_v = \{x \in K | v(x) \geq 0\}$$

es un anillo que llamaremos *anillo de valoración de v*. El ideal de R_v

$$\mathfrak{m}_v = \{x \in K | v(x) > 0\},$$

es maximal, se llama *ideal de la valoración v*. Llamaremos *cuerpo residual de la valoración v* a $\Delta_v = R_v/\mathfrak{m}_v$. La imagen de un elemento $x \in R_v$ por el homomorfismo natural v de $R_v \to \Delta_v$ se dice *residuo de x*. Si v es una valoración de $K|k$, podemos identificar k con su imagen por el homomorfismo natural $R_v \to \Delta_v$ y llamaremos *dimensión de v* al grado de trascendencia de Δ_v sobre k..

Nota I–A.4 Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos, sea v una valoración del cuerpo K de grupo de valores G. Diremos que una valoración v^* de L, con grupo de valores $G^* \supseteq G$ es una *extensión* de v si su restricción a K es v. Se prueba fácilmente (para más detalles sobre esta sección, ver [ZS60b, ZS60a]) que, si la extensión $K \subseteq L$ es algebraica, entonces el grupo cociente G^*/G tiene orden finito. Este orden, el índice de G en G^*, se llama *índice de ramificación reducido de v^* con respecto a v* (o con respecto a K).

Sean Δ_v y Δ_v^* los cuerpos residuales de v y v^* respectivamente. Si la extensión $K \subseteq L$ es finita, entonces también lo es la extensión $\Delta_v \subseteq \Delta_v^*$. Llamaremos *grado relativo* de la valoración v^* con respecto a v a $[\Delta_v^* : \Delta_v]$.

Un resultado importante en ramificación de valoraciones es el siguiente, conocido como *fórmula general de ramificación de valoraciones*. Las pruebas de los siguientes resultados se pueden encontrar en [ZS60a].

Teorema I–A.5 Sea $K \subseteq L$ una extensión algebraica finita de grado n, sea v una valoración de K de rango finito y sean $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_g^*$ las extensiones de v a L. Sean n_i y e_i el grado relativo y el índice de ramificación reducido, respectivamente, de v_i^* con respecto a v. Entonces

$$e_1 n_1 + e_2 n_2 + \cdots + e_g n_g \leq n.$$

Corolario I–A.6 En la situación del teorema, si el cuerpo residual de v, Δ_v, tiene característica cero, se tiene la igualdad.

I–B COMPLECIÓN DE UN CUERPO

Sea K un cuerpo.

Definición I–B.1 Un valor absoluto sobre K es una función $\Phi : K \to \mathbb{R}_0$ que verifica

1. $\Phi(a) > 0$, para todo $a \in K$, $a \neq 0$ y $\Phi(0) = 0$.
2. $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$.
3. $\Phi(a+b) \leq \Phi(a) + \Phi(b)$.

Notas I–B.2 1) La función Φ es un homomorfismo del grupo multiplicativo K^* de K en el grupo multiplicativo de los reales positivos; así $\Phi(1) = 1$. Por tanto

$$\Phi(-1)^2 = \Phi(-1)\Phi(-1) = \Phi((-1)(-1)) = \Phi(1) = 1,$$

luego $\Phi(-1) = 1$ y $\Phi(-a) = \Phi(a)$, $\forall a \in K$.

2) Si $a, b \in K$ es

$$\Phi(a-b) \geq \Phi(a) - \Phi(b).$$

En efecto,

$$\Phi(a) = \Phi(a-b+b) \leq \Phi(a-b) + \Phi(b),$$

de donde la condición. ∎

Nota I–B.3 ∎ Sea $\Phi : K \to \mathbb{R}_0$ un valor absoluto y sea $d_\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ la función definida por $d_\Phi(a,b) = \Phi(a-b)$. Es inmediato comprobar que d_Φ es una distancia, lo que dota a K de estructura de espacio métrico. La topología determinada por d_Φ dota a K de una estructura de cuerpo topológico. Probemos esta afirmación.

Sean $a, b \in K$ y $\delta \in \mathbb{R}_+$. Tomemos $x, y \in K$ con $\Phi(x-a) < \delta/2$ y $\Phi(y-b) < \delta/2$; se tiene

$$\Phi((x-y)-(a-b)) = \Phi((x-a)-(y-b)) \leq \Phi(x-a) + \Phi(y-b) < \delta.$$

De otro lado sean $a,\ b \in K^*$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. Tomemos $\delta' \in \mathbb{R}_+$ de tal forma que $\delta' < \delta\Phi(b)/(\delta + \Phi(a/b))$ y tomemos $y \in K^*$ con $\Phi(y-b) < \delta'$. Obsérvense los siguientes hechos:

1. $\Phi(y) = \Phi(b+y-b) \geq \Phi(b) - \Phi(y-b) > \Phi(b) - \delta'$.
2. $\delta(\Phi(b)-\delta') - \Phi(a/b)\delta' = \delta\Phi(b) - \delta\delta' - \Phi(a/b)\delta' =$
   $= \delta\Phi(b) - \delta'(\delta + \Phi(a/b)) > 0.$

Tomemos $x \in K^*$ con $\Phi(x-a) < \delta(\Phi(b)-\delta') - \Phi(a/b)\delta'$; así se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right) &= \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\Phi\left(\frac{bx-ay}{b}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\Phi\left(\frac{bx-ab+ab-ay}{b}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\left(\Phi\left((x-a) - \frac{a}{b}(y-b)\right)\right) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\left(\Phi(x-a)+\Phi\left(\frac{a}{b}\right)\Phi(y-b)\right) <$$

$$< \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\left(\delta(\Phi(b)-\delta')-\Phi\left(\frac{a}{b}\right)\delta'\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{y}\right)\delta(\Phi(b)-\delta') < \delta.$$

Esto prueba que K es un cuerpo topológico. ■

Nota I–B.4 ■ Vamos a introducir una categoría importante, que denotaremos por $\mathcal{K}$, y que llamaremos categoría de los cuerpos valorados. Sus objetos, llamados cuerpos valorados, son los pares (K, Φ) donde K es un cuerpo y Φ es un valor absoluto. Dados dos cuerpos valorados (K, Φ) y (K', Φ'), los morfismos del primero al segundo son los homomorfismos de cuerpos $f : K \to K'$ que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & K' \arrow[dl, "\Phi'"] \\ & \mathbb{R}_0 & \end{tikzcd}$$

Nótese que el homomorfismo cero de K en K' queda excluído como morfismo de la categoría $\mathcal{K}$. Nótese, también, que un morfismo de cuerpos valorados es necesariamente continuo. En efecto, sea $a \in K$ y $\delta \in \mathbb{R}_+$; considerando la bola $B(a, \delta)$ de centro a y radio δ, si $x \in B(a, \delta)$ es

$$\Phi'(f(x)-f(a)) = \Phi'(f(x-a)) = \Phi(x-a) < \delta,$$

luego $f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a), \delta)$.

Una subcategoría plena muy importante de $\mathcal{K}$ es la categoría $\widehat{\mathcal{K}}$ de los cuerpos valorados completos, cuyos objetos son los cuerpos valorados, completos para la topología determinada por el valor absoluto.

Fijemos un cuerpo valorado (K, Φ) y consideremos el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}((K, \Phi), -) : \widehat{\mathcal{K}} \to \mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E}$ es la categoría de conjuntos. Una solución al problema universal planteado por este funtor es un cuerpo valorado completo $(\widehat{K}, \widehat{\Phi})$ junto con un morfismo $f : (K, \Phi) \to (\widehat{K}, \widehat{\Phi})$ de tal manera que, para todo cuerpo valorado completo (K', Φ') y todo morfismo $g : (K, \Phi) \to (K', \Phi')$, existe un único $\widehat{g} : (\widehat{K}, \widehat{\Phi}) \to (K', \Phi')$ tal que $\widehat{g} \circ f = g$. En la nota siguiente vamos a ver que existe una solución del problema universal planteado anteriormente. ▪

Nota I–B.5 ▪ Es muy clásica la construcción de lo que llamaremos *la compleción* de un cuerpo respecto de un valor absoluto. Se considera el anillo $S(K)$ de las sucesiones de Cauchy de elementos de K y, dentro de él, el ideal $\mathcal{P}_0$ de las sucesiones nulas (esto es, con límite cero). Es fácil comprobar que este ideal es maximal apoyándose en el resultado siguiente: si $\{a_n\}$ es de Cauchy y no nula, existen $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $n \geq n_0$, es $\Phi(a_n) > \delta$.

Se designará por $\widehat{K}$ al cuerpo cociente $S(K)/\mathcal{P}_0$. Se tiene la inclusión natural $f : K \to \widehat{K}$ dada de la siguiente manera: si $a \in K$ y $\{a_n\}$ es la sucesión constante $a_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se pondrá $f(a) = \{a_n\} + \mathcal{P}_0$.

Vamos a construir el valor absoluto $\widehat{\Phi}$. Nótese que, si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K, entonces $\{\Phi(a_n)\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. En efecto, dado $\delta \in \mathbb{R}_+$, existe un n_0 tal que, para todo $n, m \geq n_0$ es $\Phi(a_n - a_m) < \delta$. Así

$$\Phi(a_n) - \Phi(a_m) \leq \Phi(a_n - a_m) < \delta,$$

lo que prueba nuestra afirmación. Es más, si $\{a_n\}$ es una sucesión nula de elementos de K, entonces $\{\Phi(a_n)\}$ es una sucesión nula de números reales.

Las anteriores consideraciones permiten definir una función

$$\widehat{\Phi} : \widehat{K} \to \mathbb{R}$$

de la forma siguiente: si $\gamma = \{a_n\} + \mathcal{P}_0 \in \widehat{K}$, se pondrá

$$\widehat{\Phi}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \Phi(a_n).$$

Es fácil ver que esta definición tiene sentido. Si $\{a_n\} + \mathcal{P}_0 = \{b_n\} + \mathcal{P}_0$, es $\{a_n - b_n\} \in \mathcal{P}_0$, luego $\{\Phi(a_n - b_n)\}$ es una sucesión nula de números reales. Así, dado $\delta \in \mathbb{R}_+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, es

$$\Phi(a_n) - \Phi(b_n) \leq \Phi(a_n - b_n) < \delta,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(a_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(b_n).$$

Supongamos que $\gamma \neq 0$; así $\{a_n\} \notin \mathcal{P}_0$. En estas circunstancias, existen $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $n \geq n_0$, es $\Phi(a_n) > \delta$. Así, $\lim_{n\to\infty} \Phi(a_n) \geq \delta$ y $\widehat{\Phi}(\gamma) > 0$. Si $\gamma' = \{a'_n\} + \mathcal{P}_0$, es

$$\widehat{\Phi}(\gamma\gamma') = \lim_{n\to\infty} \Phi(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(a_n)\Phi(a'_n) = \widehat{\Phi}(\gamma)\widehat{\Phi}(\gamma')$$

$$\widehat{\Phi}(\gamma + \gamma') = \lim_{n\to\infty} \Phi(a_n + a'_n) = \lim_{n\to\infty}(\Phi(a_n) + \Phi(a'_n)) = \widehat{\Phi}(\gamma) + \widehat{\Phi}(\gamma').$$

Esto prueba que $\widehat{\Phi}$ es un valor absoluto. ∎

Nota I–B.6 ∎ Hay que probar ahora que $(\widehat{K}, \widehat{\Phi})$ es un cuerpo valorado completo. Vamos a comenzar estudiando el caso en que K es finito. Como Φ es un homomorfismo de K^* en $\mathbb{R}_+$, y el único subgrupo finito de $\mathbb{R}_+$ es $\{1\}$, es necesariamente $\Phi(K^*) = \{1\}$. Así, las sucesiones de Cauchy de elementos de K son las sucesiones constantes, a partir de un cierto término, y las sucesiones nulas son las sucesiones constantes igual a cero, también a partir de un cierto término. Por tanto $\widehat{K} = K$ y $\widehat{\Phi} = \Phi$, que es, evidentemente, completo por lo dicho anteriormente.

Pasando al caso general hay que demostrar que toda sucesión de Cauchy de elementos de $\widehat{K}$ tiene límite. Podemos suponer que la sucesión tiene infinitos términos distintos porque, si no, sería constante a partir de un cierto término y, claramente, tendría límite. También podemos suponer que $a_n \neq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pues, de lo contrario, suprimiendo los términos iguales, se obtendría una sucesión cuya diferencia con la dada tendría límite cero.

Pongamos $\widehat{\Phi}(a_p - a_{p+1}) = \delta_p$. Se tiene que $\{\delta_p\}$ es una sucesión de números reales positivos, cuyo límite es cero. Por otra parte, se sabe que, para todo $p \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{a_{p,n}\}$ de elementos de K tal que $a_p = \lim_{n\to\infty} a_{p,n}$ ($\leftrightarrow a_p = \{a_{p,n}\} + \mathcal{P}_0$). Por tanto existe $n_{p,0}$ tal que, para todo $n \geq n_{p,0}$ es $\widehat{\Phi}(a_p - a_{p_n}) < \delta_p$; pongamos $b_p = a_{p_{n_{p,0}}}$. Así $\widehat{\Phi}(b_p - a_p) < \delta_p$. Para todo $\delta \in \mathbb{R}_+$ existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que para $p, q > n'$ es $|a_p - a_q| < \delta/3$. También existe $n'' \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p > n''$, es $\delta_p < \delta/3$. Sea $n = \max(n', n'')$; para $p, q > n$ es

$$\begin{aligned} |b_p - b_q| &= |b_p - a_p + a_p - a_q + a_q - b_q| \leq \\ &\leq |b_p - a_p| + |a_p - a_q| + |a_q - b_q| < \\ &< \tfrac{\delta}{3} + \tfrac{\delta}{3} + \tfrac{\delta}{3} = \delta. \end{aligned}$$

Así $\{b_p\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K y por tanto tiene límite en $\omega \in \widehat{K}$. Como la diferencia entre $\{a_p\}$ y $\{b_p\}$ es una sucesión nula, es

$$\omega = \lim_{n\to\infty} a_p,$$

lo que prueba que $\widehat{K}$ es completo. ∎

Nota I–B.7 Resta probar que $((\widehat{K}, \widehat{\Phi}), f)$ es una solución del problema universal planteado por el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}((K, \Phi), -)$, recuérdese que $f : K \to \widehat{K}$ es la inmersión canónica. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "\Phi"'] & & K' \arrow[ddl, "\Phi'"] \\
& \widehat{K} \arrow[ur, "\widehat{g}"'] \arrow[d, "\widehat{\Phi}"] & \\
& \mathbb{R}_0 &
\end{tikzcd}$$

donde (K', Φ') es un cuerpo valorado completo y $g : (K, \Phi) \to (K', \Phi')$ es un morfismo de cuerpos valorados. Se trata de construir $\widehat{g}$ de tal forma que $\widehat{g} \circ f = g$.

La construcción de $\widehat{g}$ es completamente estándar, si $\omega \in \widehat{K}$ y $\omega = \lim_{n\to\infty} a_n$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de K ,se pondrá

$$\widehat{g}(\omega) = \lim_{n\to\infty} g(a_n).$$

Puesto que se tiene que verificar que

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} \widehat{g} \circ f(a_n),$$

ya que $\widehat{g}$ debe ser continua. La unicidad es clara con esta construcción. ∎

I–C VALORACIONES DISCRETAS Y COMPLECIONES

Sean $k \subset K$ dos cuerpos.

Nota I–C.1 ▪ Sea ν una valoración discreta de rango 1 de K/k y sea $\omega \in \mathbb{R}$, con $0 < \omega < 1$. Sea define una aplicación $\Psi_\omega : K^* \to \mathbb{R}$, poniendo

$$\Psi_\omega(y) = \omega^{\nu(y)}$$

para todo $y \in K^*$ y $\Psi_\omega(0) = 0$.

Es claro que Ψ_ω es un valor absoluto. Lo importante aquí es que la topología determinada por Ψ_ω no depende de ω. En efecto: sea $\omega' \in \mathbb{R}$, $0 < \omega' < 1$, y sea $\tau = \log \omega' / \log \omega$; como $\tau \cdot \log \omega = \log \omega'$ es $\omega' = \omega^\tau$. Sea, pues, fijado $\delta > 0$; si $y \in K^*$ se verifica:

$$\omega^{\nu(y)} < \delta \Leftrightarrow (\omega')^{\nu(y)/\tau} < \delta \Leftrightarrow (\omega')^{\nu(y)} < \delta^\tau$$

y así, el entorno de cero de radio δ para Ψ_ω es igual al entorno de radio δ^τ para $\Psi_{\omega'}$. Luego las topologías coinciden por la condición de cuerpo topológico.

Vamos a estudiar cuidadosamente las sucesiones de Cauchy no nulas de elementos de K. Sea $\{y_p\}$ una sucesión de Cauchy no nula de elementos de K, y sea $\Gamma = \{\nu(y_p)\}$. Desde luego, Γ no puede ser un conjunto infinito. En efecto, si lo fuese, existirían en Γ números, bien arbitrariamente grandes, bien arbitrariamente pequeños. En el primero de los casos, para cada $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiría un $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Psi_\omega(y_p) = \omega^{\nu(y_p)} < \delta,$$

lo que contradice el hecho de que los términos de una sucesión de Cauchy no nula no se pueden acercar arbitrariamente a cero. En el segundo de los casos se contradice, visiblemente, el hecho de que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Vamos a probar que existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geq p_0$, es $\nu(y_p) = \nu(y_{p_0})$. Supongamos que no, es decir, que para todo $p_0 \in \mathbb{N}$

existe $p > p_0$ tal que $\nu(\gamma_p) \neq \nu(\gamma_{p_0})$. Sea $\mu = \max \Gamma$ y sea $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta < \omega^\mu$. Por ser $\{\gamma_n\}$ de Cauchy, dado δ existe p_0 tal que, para todo $p \geq p_0$ es

$$\omega^{\nu(\gamma_p - \gamma_{p_0})} < \delta.$$

Por hipótesis existe $p \in \mathbb{N}$, $p > p_0$, tal que $\nu(\gamma_p) \neq \nu(\gamma_{p_0})$; entonces

$$\nu(\gamma_p - \gamma_{p_0}) = \min\{\nu(\gamma_p), \nu(\gamma_{p_0})\} \leq \mu,$$

luego $\omega^{\nu(\gamma_p - \gamma_{p_0})} \geq \omega^\mu > \delta$, lo que supone una contradicción.

Ésta es la propiedad esencial en las sucesiones de Cauchy no nulas, que será usada ampliamente en lo sucesivo.

Para la construcción de la compleción de K se puede usar cualquier número real ω, $0 < \omega < 1$, sabiendo que esta construcción no depende de ese número. ■

Nota I–C.2 ■ Sea $(\widehat{K}, \widehat{\Psi}_\omega)$ la compleción de (K, Ψ_ω), y sea $\widehat{\nu} : \widehat{K} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{\nu}(\gamma) = \log_\omega \widehat{\Psi}_\omega(\gamma).$$

Claramente $\widehat{\nu}$ es una valoración de $\widehat{K}/k$ que prolonga a ν. Vamos a estudiar con más detalle esta valoración.

Sea $\gamma \in \widehat{K}$, $\gamma \neq 0$, y sea $\{\gamma_p\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K cuyo límite sea γ. Por la nota anterior, existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geq p_0$ es $\nu(\gamma_{p_0}) = \nu(\gamma_p)$. Así

$$\widehat{\Psi}_\omega(\gamma) = \lim_{p\to\infty} \Psi_\omega(\gamma_p) = \lim_{p\to\infty} \omega^{\nu(\gamma_p)} = \omega^{\nu(\gamma_{p_0})},$$

por tanto

$$\widehat{\nu}(\gamma) = \nu(\gamma_{p_0}) \in \mathbb{Z}.$$

Así, $\widehat{\nu}$ es discreta de rango 1 y tiene el mismo grupo de valores que ν.

Sean $R_{\widehat{\nu}}$, $\mathfrak{m}_{\widehat{\nu}}$, $\Delta_{\widehat{\nu}}$, respectivamente, el anillo, el ideal y el cuerpo residual de $\widehat{\nu}$. Consideremos la inmersión canónica $i : \Delta_\nu \to \Delta_{\widehat{\nu}}$ dada por $i(y+\mathfrak{m}_\nu) = y+\mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$. Vamos a demostrar que esta inmersión es un isomorfismo, lo que permitirá en el futuro identificar sistemáticamente Δ_ν con $\Delta_{\hat{\nu}}$.

Sea $y \in \widehat{K}$ un elemento de valor cero, y sea $\{y_p\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de K con límite y. En virtud de lo anterior, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geq p_0$, es $\nu(y_p) = 0$. Sea $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta \leq \omega$ y tomemos $p > p_0$ tal que $\widehat{\Psi}_\omega(y - y_p) < \delta$. Así,

$$\omega^{\hat{\nu}(y-y_p)} < \delta \leq \omega,$$

luego $\hat{\nu}(y - y_p) > 1$ y así $y - y_p \in \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$. Esto prueba que

$$y + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}} = y_p + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$$

y, por tanto, que i es sobreyectiva. ∎

Nota I–C.3 ∎ Vamos a estudiar con detalle el anillo $R_{\hat{\nu}}$. Por la teoría general de valoraciones (ver [ZS60a]), sabemos que $R_{\hat{\nu}}$ es un anillo local noetheriano (de hecho es un dominio de ideales principales). Lo importante aquí es que $R_{\hat{\nu}}$ es completo para la topología de Krull. En efecto, lo que ocurre es que la topología de Krull sobre $R_{\hat{\nu}}$ coincide con la determinada por $\widehat{\Psi}_\omega$. Probemos esto.

Sea $\theta \in R_{\hat{\nu}}$ un elemento de valor 1; sabemos que $\mathfrak{m}_{\hat{\nu}} = \theta \cdot R_{\hat{\nu}}$. Sea $\delta \in \mathbb{R}_+$ y sea r el mayor entero menor o igual que $\log_\omega \delta$; si $y \in R_{\hat{\nu}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_\omega(y) < \delta \;&\Leftrightarrow\; \omega^{\hat{\nu}(y)} < \delta \;\Leftrightarrow\; \hat{\nu}(y) > \log_\omega \delta \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; \hat{\nu}(y) > r \;\Leftrightarrow\; y \in \theta^r \cdot R_{\hat{\nu}}.\end{aligned}$$

Esto prueba que los entornos de cero en la topología determinada por $\widehat{\Psi}_\omega$ y en la topología de Krull coinciden. ∎

Nota I–C.4 ■ Por el Teorema de Cohen de estructura de los anillos locales completos, el homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ posee una sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ que es una inclusión de $\Delta_{\hat{\nu}}$ en $R_{\hat{\nu}}$. Así, $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ es un cuerpo de representantes de $R_{\hat{\nu}}$. Ahora bien, como, en nuestro caso, $k \subseteq R_{\hat{\nu}}$, si k' es un cuerpo maximal tal que $k \subseteq k' \subseteq R_{\hat{\nu}}$, de nuevo por el Teorema de Cohen se tiene que k' es isomorfo a $\Delta_{\hat{\nu}}$ mediante el homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, y por tanto el homomorfismo natural posee una k–sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ con imagen k' .

Sea t una variable, $\theta \in R_{\hat{\nu}}$ un elemento de valor 1 y consideremos una k–sección cualquiera $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ del homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$. Asociado a σ y a θ existe un homomorfismo local

$$\Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \to R_{\hat{\nu}}$$

dado por

$$\Phi_{\sigma,\theta}\left(\sum_{i\geq 0} \delta_i t^i\right) = \sum_{i\geq 0} \sigma(\delta_i)\theta^i$$

y que es un isomorfismo, como vamos a demostrar. Desde luego, $\Phi_{\sigma,\theta}$ es inyectivo, pues, caso contrario, su núcleo sería un ideal de la forma (t^r), luego sería $\theta^r = 0$, lo que es imposible. La suprayectividad de $\Phi_{\sigma,\theta}$ la probamos a continuación.

Sea $\gamma \in R_{\hat{\nu}}$ y pongamos $\gamma = \gamma_0$, $\hat{\nu}(\gamma_0) = r_0$. Se tiene que $\hat{\nu}(\gamma_0/\theta^{r_0}) = 0$. Sea $\alpha_0 = (\gamma/\theta^{r_0}) + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$; poniendo $\gamma_1 = \gamma - \sigma(\alpha_0)\theta^{r_0}$ es $\hat{\nu}(\gamma_1) \geq r_0$, y como

$$\hat{\nu}\left(\frac{\gamma_1}{\theta^{r_0}}\right) = \hat{\nu}\left(\left(\frac{\gamma}{\theta^{r_0}}\right) - \sigma(\alpha_0)\right) > 0$$

es $\hat{\nu}(\gamma_1) = r_1 > r_0$. Supongamos construidos

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in R_{\hat{\nu}},$$

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1} \in \Delta_{\hat{\nu}},$$

tales que:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_0 - \sigma(\alpha_0)\theta^{r_0},\\
\gamma_2 &= \gamma_0 - \sigma(\alpha_0)\theta^{r_0} - \sigma(\alpha_1)\theta^{r_1},\\
&\dots\\
\gamma_q &= \gamma_0 - \sigma(\alpha_0)\theta^{r_0} - \sigma(\alpha_1)\theta^{r_1} - \dots - \sigma(\alpha_{q-1})\theta^{r_{q-1}},
\end{aligned}$$

con $r_0 = \hat{v}(\gamma_0) < r_1 = \hat{v}(\gamma_1) < \dots < r_q = \hat{v}(\gamma_q)$.

Como $\hat{v}(\gamma_q/\theta^{r_q}) = 0$, tomando $\alpha_q = (\gamma_q/\theta^{r_q}) + \mathfrak{m}_{\hat{v}}$ y $\gamma_{q+1} = \gamma_q - \sigma(\alpha_q)\theta^{r_q}$, es $\hat{v}(\gamma_{q+1}) \geq r_q$, y como

$$\hat{v}\left(\frac{\gamma_{q+1}}{\theta^{r_q}}\right) = \hat{v}\left(\left(\frac{\gamma_q}{\theta^{r_q}}\right) - \sigma(\alpha_q)\right) > 0,$$

es $\hat{v}(\gamma_{q+1}) = r_{q+1} > r_q$. Este algoritmo recurrente nos permite construir una serie $\sum_{i\geq 0} \alpha_i t^{r_i}$, y es obvio que

$$\Phi_{\sigma,\theta}\left(\sum_{i\geq 0} \alpha_i t^{r_i}\right) = \gamma.$$

Nótese, finalmente, que si $v_t : \Delta_{\hat{v}}((t)) \to \mathbb{Z}$ es la función de orden usual, entonces $\hat{v}$ es la composición de la extensión de $\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}$ a los cuerpos de fracciones, con v_t. ■

Ejemplos I–C.5 ■ 1) Consideremos las valoraciones discretas de rango 1 del cuerpo de las funciones racionales $\mathbb{C}(X)$. Es bien sabido ([ZS60a], pg. 39) que las valoraciones de $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}$ son de dos tipos:

a) Valoraciones $P(X)$–ádicas, donde $P(X) = (X - \alpha) \in \mathbb{C}[X]$. El anillo de la valoración es

$$\mathbb{C}[X]_{(X-\alpha)}$$

y podemos escribir la valoración como composición de la extensión del homomorfismo inyectivo de anillos dado por

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[X]_{(X-\alpha)} & \hookrightarrow & \mathbb{C}[[t]]\\
X-\alpha & \mapsto & t
\end{array}$$

a sus cuerpos de fracciones con la función de orden en t sobre $\mathbb{C}((t))$, digamos v_t. El cuerpo residual de esta valoración es $\mathbb{C}$. Así, el par $(\mathbb{C}((t)), v_t)$ es la compleción de la valoración dada.

b) La valoración $v_\infty(f(X)/g(X)) = \mathrm{gr}(g(X)) - \mathrm{gr}(f(X))$, cuyo anillo de valoración es

$$\mathbb{C}[1/X]_{(1/X)} = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid \mathrm{gr}(f(X)) \leq \mathrm{gr}(g(X)) \right\}.$$

Esta valoración se puede expresar mediante la extensión de la inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[1/X]_{(1/X)} & \hookrightarrow & \mathbb{C}[\![t]\!] \\ 1/X & \mapsto & t \end{array}$$

a sus cuerpos de fracciones compuesta con la función de orden sobre $\mathbb{C}((t))$. De nuevo la compleción es el par $(\mathbb{C}((t)), v_t)$.

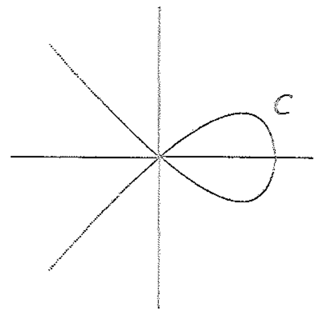
2) Consideremos el homomorfismo de anillos dado por

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}[X, Y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[\![t]\!] \\ X & \mapsto & t \\ Y & \mapsto & te^t \end{array}$$

Este homomorfismo es inyectivo porque e^t es una función trascendente.

La composición de esta inmersión φ, extendida a sus cuerpos de fracciones, con la función de orden en t, nos da una valoración de $\mathbb{C}(X, Y)/\mathbb{C}$ centrada el ideal maximal con cuerpo residual $\mathbb{C}$. La compleción es también el par formado por $\mathbb{C}((t))$ con la función de orden en t.

3) Sea ahora el anillo de coordenadas $R = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^2 - X^3) = \mathbb{C}[x, y]$, sea $K = \mathbb{C}(x, y)$ su cuerpo de fracciones. Sea C la curva de ecuación $x^2 - y^2 - x^3 = 0$. Vamos a estudiar las valoraciones de $K/\mathbb{C}$ finitas sobre R y centradas en (x, y).



Sabemos que tales valoraciones son de dimensión cero, esto es consecuencia de ([ZS60a] corolario 2, pg. 26), y de que $\mathbb{C}$ sea algebraicamente cerrado.

$$x^2 - y^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow \nu(x^2 - y^2 - x^3) = \infty.$$

Como $\nu(x) > 0$, es claro que $\nu(x^3) = 3\nu(x) > 2\nu(x) = \nu(x^2)$. Probemos que $\nu(x^2) = \nu(y^2)$, si no fuera así entonces tendríamos

a) $\nu(y^2) < \nu(x^2)$, lo que implica que $\nu(x^2 - y^2 - x^3) = \nu(y^2) \neq \infty$, que es una contradicción.

b) $\nu(y^2) > \nu(x^2)$, lo que implica que $\nu(x^2 - y^2 - x^3) = \nu(x^2) \neq \infty$, lo que nos lleva a una contradicción.

Luego $\nu(x^2) = \nu(y^2)$ y, por tanto, $\nu(x) = \nu(y)$, lo que que implica que $\nu(y/x) = 0$. Por el mismo motivo $\nu(x^2 - y^2) = \nu(x^3)$.
De otra parte,

$$0 = \frac{1}{x^2}(x^2 - y^2 - x^3) = 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + x \in \mathfrak{m}_\nu,$$

luego

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \in \mathfrak{m}_\nu.$$

Como

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 - \frac{y}{x}\right),$$

se tiene que

$$\left(1+\frac{y}{x}\right) \in \mathfrak{m}_\nu \text{ ó } \left(1-\frac{y}{x}\right) \in \mathfrak{m}_\nu,$$

pero no los dos a la vez, pues $1 \notin \mathfrak{m}_\nu$.
Consideremos el primero de los casos. Como

$$\left(1+\frac{y}{x}\right) \in \mathfrak{m}_\nu$$

es $\nu(x+y) > \nu(y) = \nu(x)$. Pero $\nu(x-y) = \nu(y) = \nu(x)$ y $(x+y)(x-y)-x^3 = 0$, luego $\nu(x+y) = \nu(x^2)$, lo que implica que

$$\nu\left(\frac{x+y}{x^2}\right) = 0.$$

Por tanto, existe $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\nu\left(\frac{x+y}{x^2} - \alpha_2\right) > 0,$$

lo que implica que $r = \nu(x+y+\alpha_2 x^2) > \nu(x^2)$. Es decir, existe $\alpha_r \in \mathbb{C}$ tal que

$$\nu\left(\frac{x+y-\alpha_2 x^2}{x^r} - \alpha_r\right) > 0.$$

Prolongando este proceso, obtenemos una serie

$$y + x - \alpha_2 x^2 - \alpha_r x^r - \ldots = 0,$$

luego hemos construído un homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[x,y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}((x)) \\ x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & -x + \alpha_2 x^2 + \ldots \end{array}$$

que es inyectivo, pues de no serlo, su núcleo sería un ideal maximal $(x-\alpha, y-\beta)$, y esto no es posible.
Esta inmersión compuesta con la función de orden en x sobre $\mathbb{C}((x))$, nos da una valoración de $K/\mathbb{C}$ finita sobre R y centrada en el ideal maximal (x, y).

Haciendo lo mismo para el caso en que $1-(y/x) \in \mathfrak{m}_v$ obtenemos otra valoración, que es la composición de la inmersión

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{C}[x,y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}((x)) \\ x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & x+\beta_2 x^2+\dots \end{array}$$

con la función de orden.

Estas son las dos valoraciones de $K/\mathbb{C}$ finitas sobre R y centradas en el ideal maximal (x,y). En efecto, consideremos la extensión $\mathbb{C}(x) \subseteq K$, de grado 2, la valoración $v' = v_{|\mathbb{C}(x)}$ y el anillo $R_{v'} = \mathbb{C}[x]_{(x)}$ (apartado 1). Por la fórmula $\sum e_i n_i = n$ [ZS60a] sabemos que

- o bien el grado relativo de la extensión es 2 y el índice de ramificación reducido es 1, en cuyo caso sólo habría una extensión de v' a K, lo cual no puede ser porque hemos encontrado dos,
- o bien el grado relativo es 1, igual que el índice de ramificación reducido, en cuyo caso hay dos valoraciones que extienden v'. Como esto es lo que ocurre, v es una de estas dos valoraciones y, en ambos casos, la compleción es $\mathbb{C}((x))$ con la función de orden, vía las inmersiones dadas.

Los hechos apuntados en este ejemplo son generales. En primer lugar, dada una curva proyectiva C (en un espacio de dimensión arbitraria) con cuerpo de funciones K, el número de valoraciones discretas de rango 1 con centro un punto P es finito. Si P es liso, hay una única valoración discreta de rango 1 de $K/\mathbb{C}$ centrada en P: la de anillo $\mathcal{O}_{C,P}$, el anillo local de C en P (porque $\mathcal{O}_{C,P}$ es íntegramente cerrado al ser regular). Si P es singular hay un número finito de valoraciones discretas de rango 1 de $K/\mathbb{C}$ centradas en P: tantas como ramas analíticas de la curva C en P. En el ejemplo anterior hemos visto cómo una valoración es, en cierto modo, un desarrollo en serie de y como función de x (en general no serán series enteras, sino de Puiseux).

Estos hechos no se generalizan a dimensión superior. Por ejemplo, si

$$K = \mathbb{C}(x, y, z) \text{ con } z^2 = xy,$$

hay infinitas valoraciones discretas de rango 1 centradas en el origen. Esto se ve fácilmente: como K es una extensión algebraica finita de $\mathbb{C}(x, y)$, basta probar que hay infinitas valoraciones en $\mathbb{C}(x, y)/\mathbb{C}$ centradas en el origen. Una familia infinita la constituyen las funciones de orden respecto de una forma lineal $L = \alpha u + \beta v$ dada. A cada monomio $x^a y^b$ se le asigna el grado $\alpha a + \beta b$. El valor de un polinomio es el mínimo de los grados de sus monomios, y el valor de cada fracción es la diferencia de los valores del numerador y el denominador. Este hecho hace que la resolución de singularidades de variedades de dimensión superior a 1 sea mucho más difícil. Sobre las funciones de orden profundizamos en la siguiente sección dada su importancia.

I-D FUNCIONES DE ORDEN

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, M_n su ideal maximal y $K_n = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$ su cuerpo de fracciones. Fijemos una valoración discreta de rango 1 de $K_n/\mathbb{K}$ cuyo anillo R_v contenga a R y cuyo centro, $\mathfrak{m}_v \cap R_v$, en ese anillo sea M_n. Se supone que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$ y se designa por Δ_v al cuerpo residual de v.

Notemos que la condición $R \subseteq R_v$ es redundante en nuestro caso, pues un resultado de Lipman prueba que si v es una valoración discreta de rango 1 de K_n/k, entonces R_v contiene a R (ver [Lip75, Lip65]).

Cuando lo necesitemos, usaremos la compleción $\widehat{K}_v$ de K_n respecto de la valoración v en la forma usual, descrita en las secciones anteriores. A la única extensión de v a $\widehat{K}_v$ la denotaremos por $\widehat{v}$, escribiendo su anillo y su ideal como $R_{\widehat{v}}$ y $\mathfrak{m}_{\widehat{v}}$ respectivamente. Por respetar la coherencia de la notación, se pondrá $\widehat{K}_v = K_{\widehat{v}}$.

Vamos a introducir las funciones de orden y a comparar nuestra valoración ν con ellas.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+$ y sea $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ la forma lineal correspondiente (en las variables u_i). Escribiremos los monomios de R en la forma X^A donde $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_0^n$ es un multi-índice. El grado ordinario de X^A se llamará también el grado del multi-índice A y se denotará por $|A| = a_1 + \ldots + a_n$. El L–grado de A es el número

$$L(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Para cada serie $f \in R$ se escribirá

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^n} f_A X^A,$$

donde $f_A \in \mathbb{K}$. Si $f \neq 0$ se llamará diagrama de Newton de f a la nube de puntos de $\mathbb{Z}_0^n$ dada por

$$\mathcal{E}(f) = \{ A \in \mathbb{Z}_0^n | f_A \neq 0 \}.$$

Por convenio, el diagrama de Newton de 0 es el conjunto vacío. Si $f \neq 0$ se llamará L–orden de f al número $\nu_L(f)$ dado por

$$\nu_L(f) = \min\{L(A) | A \in \mathcal{E}(f)\}.$$

Convendremos que $\nu_L(0) = \infty$.

Una L–forma de L–grado m es un polinomio distinto de cero cuyos monomios tienen todos L–grado igual a m. Por convenio, 0 es una L–forma de cualquier L–grado. Si m es un número que no está en la imagen de L entonces la única L–forma de grado m es 0. Evidentemente, para cada m, el conjunto Λ_m de las L–formas de L–grado m es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. De hecho, Λ_m es de dimensión finita, pues está generado por todos los monomios de L–grado m, que a su vez están contenidos en el conjunto de todos los monomios de grado usual menor o igual que m. Como este conjunto es finito, podemos concluir que Λ_m es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión finita.

Cada serie $f \in R$ se puede descomponer, de manera única, en suma de L–formas; se le llama la L–descomposición de f. Si $f \neq 0$, la L–forma de L–grado más bajo que aparece en f se llama su L–forma inicial. Sean f, g dos series distintas de cero, vamos a probar que la L–forma inicial de fg es el producto de las L–formas iniciales de f y g. Supongamos que las L–formas iniciales de f y g son de L–grado r y s respectivamente, podemos escribir

$$f = f_r^L + f_{>r}^L, \quad g = g_s^L + g_{>s}^L,$$

donde f_r^L y g_s^L son las L–formas iniciales y $f_{>r}^L$, $g_{>s}^L$ son sumas de formas de L–grados mayores que r y s respectivamente. Entonces

$$fg = f_r^L g_s^L + f_r^L g_{>s}^L + f_{>r}^L g_s^L + f_{>r}^L g_{>s}^L$$

y, obviamente $f_r^L g_s^L$ es la L–forma inicial de fg.

Con los convenios usuales de manejo del infinito, se tiene así que:

1. $\nu_L(f \cdot g) = \nu_L(f) + \nu_L(g)$.
2. $\nu_L(f + g) \geq \min\{\nu_L(f), \nu_L(g)\}$ y se tiene la igualdad si el mínimo se alcanza en sólo uno de los dos números.

Esto indica que se puede extender ν_L a una función sobre K_n, que designaremos por el mismo símbolo ν_L, sin más que poner $\nu_L(f/g) = \nu_L(f) - \nu_L(g)$. Esta función ν_L es una valoración.

Supongamos ahora que $\nu(X_i) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$; la cuestión es comparar, como se ha dicho anteriormente, nuestra valoración ν con ν_L.

Notas I–D.1 ■ **1)** La definición de valoración indica que si f es una L–forma distinta de cero y $m = \nu_L(f)$, entonces $\nu(f) \geq m$ (probaremos esto en los puntos siguientes).

2) A continuación vamos a hacer uso del isomorfismo

$$\Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \to R_{\hat{\nu}}$$

dado en la sección anterior. Recuérdese que $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ es una sección del homomorfismo natural $R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ y que $\theta \in R_{\hat{\nu}}$ es un elemento de valor 1. Además $\Phi_{\sigma,\theta}(\sum \delta_i t^i) = \sum \sigma(\delta_i)\theta^i$. Se escribirá

$$\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_i) = \sum_{j\geq\alpha_i} a_{ij}t^j,\ a_{ij} \in \Delta_{\hat{\nu}},\ a_{i\alpha_i} \neq 0;\ i = 1,\ldots,n.$$

Evidentemente, si $f \in R$, es

$$\nu(f) = \nu_t\left(f\left(\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_1),\ldots,\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_n)\right)\right),$$

donde ν_t es el orden usual de una serie en t. Para aligerar la notación escribiremos

$$\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_i) = \omega_i(t),\ i = 1,\ldots,n.$$

3) Para toda serie $f \in R$ distinta de cero es $\nu(f) \geq \nu_L(f)$. En efecto, sea $\alpha = \nu_L(f)$ y sea $f = \sum_{i\geq\alpha} f_i$ la L–descomposición de f, donde f_i es una L–forma de grado i. Entonces

$$\nu(f) = \nu_t(f(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t))).$$

La serie $f(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t))$ se puede escribir como

$$f(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)) = t^\alpha f_\alpha(a_{1\alpha_1},\ldots,a_{n\alpha_n}) + t^{\alpha+1}g,\ g \in \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!].$$

Así queda claro que $\nu(f) \geq \alpha = \nu_L(f)$. ∎

Definición I–D.2 Sea f una L–forma, decimos que es singular si $\nu(f) > \nu_L(f)$; caso contrario diremos que la forma es no singular. Llamaremos ideal singular de la valoración ν, Sing (ν), al ideal de $k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ generado por las formas singulares de ν. Claramente Sing(ν) es primo, homogéneo para la L–graduación.

Teorema I–D.3 ▪ Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\nu = \nu_L$.
2. ν no tiene formas singulares.

Demostración. Es claro que ν_L no tiene formas singulares; veamos el recíproco. Supongamos que ν no tiene formas singulares; hay que probar que ν coincide con ν_L sobre R. Sea $f \in R$ distinta de cero, sea $\alpha = \nu_L(f)$ y sea $f = \sum_{i \geq \alpha} f_i$ la L–descomposición de f, donde f_i es una L–forma de grado i. Entonces

$$\nu(f) = \nu_t(f(\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))).$$

La serie $f(\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$ se puede escribir como

$$f(\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)) = t^{\alpha} f_{\alpha}(a_{1\alpha_1}, \ldots, a_{n\alpha_n}) + t^{\alpha+1} g, \ \ g \in \Delta_{\hat{\nu}}[[t]].$$

Como ν no tiene formas singulares, es $f_{\alpha}(a_{1\alpha_1}, \ldots, a_{n\alpha_n}) \neq 0$, luego $\nu(f) = \nu_L(f)$. ▪

Ejemplo I–D.4 ▪ Procede aquí poner algún ejemplo de valoración con formas singulares. Vamos a recordar la construcción de valoraciones con ideal singular prefijado que E. Briales da en ([Bri86] teorema 2.12, pág. 18).

Sea $L = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq n$, una forma lineal. Sea $\mathfrak{p}$ ideal primo homogéneo del anillo $S_n = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Pongamos

$$\frac{S_n}{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n],$$

y llamemos Δ a su cuerpo de fracciones. Sean $t, T_1, \ldots, T_n$ nuevas variables y sea

$$\Psi : R \longrightarrow \Delta[[t, T_1, \ldots, T_n]]$$

el $\mathbb{C}$–homomorfismo inyectivo definido por

$$\Psi(X_i) = z_i t^{\alpha_i} + T_i t^{2\alpha_i},$$

con $1 \leq i \leq n$. Denominemos también Ψ a su extensión a los cuerpos de fracciones. Sea ν la valoración dada por Ψ compuesta con la función de orden en t sobre $\Delta((t, T_1, \ldots, T_n))$; $\nu = \nu_t \circ \Psi$ es una valoración discreta de rango 1 de $K_n/\mathbb{C}$ centrada en M_n. El ideal de las formas singulares es

$$\mathrm{Sing}(\nu) = \mathfrak{p}.$$

■

Nota I–D.5 ■ Las funciones de orden tienen un cuerpo residual sencillo de calcular (c.f. [Bri86]). Sea $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ y consideremos la función ν_L. Notemos, de pasada, que si queremos seguir manteniendo que el grupo de valores sea $\mathbb{Z}$, debemos exigir que

$$\mathrm{m.c.d.}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Sea $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ una base del subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ de ecuación implícita $L = 0$. Los monomios X^{A_i} tienen algunos exponentes negativos y verifican que $\nu_L(X^{A_i}) = 0$. Sea

$$\Delta = \mathbb{K}\left(X^{A_1} + \mathfrak{m}_{\nu_L}, \ldots, X^{A_{n-1}} + \mathfrak{m}_{\nu_L}\right) \subseteq \Delta_{\nu_L}$$

y vamos a ver que $\Delta_{\nu_L} = \Delta$. Sean $f, g \in R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ tales que $\nu_L(f/g) = 0$. Escribiendo $f = f_r + f_{>r}$ y $g = g_r + g_{>r}$ como antes, con $0 \leq r = \nu_L(f) = \nu_L(g)$, tenemos que

$$\frac{f}{g} + \mathfrak{m}_{\nu_L} = \frac{f_r + f_{>r}}{g_r + g_{>r}} + \mathfrak{m}_{\nu_L} = \frac{f_r}{g_r} + \mathfrak{m}_{\nu_L}.$$

Dividiendo f_r y g_r por un mismo monomio de grado r, basta ver que el residuo del cociente de dosmonomios del mismo grado pertenece a Δ o, equivalentemente, que el residuo de un monomio con exponentes positivos y negativos de valor 0 pertenece a Δ. Sea X^A un tal monomio; como $A = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i A_i$, $\beta_i \in \mathbb{Z}$, es

$$X^A = \left(X^{A_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(X^{A_{n-1}}\right)^{\beta_{n-1}}$$

de donde el aserto es evidente.

Esto prueba que

$$\Delta_{\nu_L} = \mathbb{K}\left(X^{A_1} + \mathfrak{m}_{\nu_L}, \ldots, X^{A_{n-1}} + \mathfrak{m}_{\nu_L}\right).$$

Además, es trivial comprobar que estos residuos son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{K}$. Por tanto, Δ_{ν_L} es una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$.

Puede plantearse la pregunta de si una valoración discreta de $K_n = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$ sobre $\mathbb{K}$ centrada en el ideal maximal y cuyo cuerpo residual sea una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$ es una función de orden. La respuesta es terminante: no. Vamos a tratar un poco acerca de este tema procurando reformular la pregunta en términos más adecuados. La idea es hacer una transformación birracional dentro de Δ_{ν_L} que pueda "levantar" (de una cierta forma que ahora explicaremos) a una transformación bimeromorfa en K_n y la valoración resultante ya no sea una función de orden. Para precisar este proceso necesitamos un poco de lenguaje: definir lo que se llaman las explosiones monomiales, las explosiones monomiales seguidas de cambios de origen y las implosiones ("blowing-down").

Nota I–D.6 ■ Explosiones, implosiones, explosiones con cambio de origen.

Sea $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, tomemos $a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ y pongamos

$$\begin{array}{rcll} Y_1 & = & X_1 & \\ Y_2 & = & a_2X_1 & + \quad X_1X_2 \\ \vdots & & \vdots & \quad\quad \vdots \\ Y_n & = & a_nX_1 & + \quad X_1X_n, \end{array}$$

sea $R' = \mathbb{K}[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!]$. Vamos a probar que las variables $Y_1, \ldots, Y_n$ son formalmente independientes sobre $\mathbb{K}$. Sean $Z_1, \ldots, Z_n$ nuevas variables y sea $0 \neq f(Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{K}[\![Z_1, \ldots, Z_n]\!]$. Si f es una unidad, es evidente que

$$f(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_nX_1 + X_1X_n) \neq 0$$

porque no hay forma de que el término independiente cancele por las sustituciones hechas. Supongamos que f no es una unidad y que f_r es su forma inicial (de grado r). Entonces

$$f_r(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_nX_1 + X_1X_n) = X_1^r f_r(1, a_2 + X_2, \ldots, a_n + X_n).$$

Si $Z_1^{r_1}Z_2^{r_2} \cdots Z_n^{r_n}$ es el mayor monomio en el orden lexicográfico ($Z_1 > Z_2 > \ldots > Z_n$) que aparece en f_r, el monomio $X_2^{r_2} \cdots X_n^{r_n}$ aparece en $f_r(1, a_2+X_2, \ldots, a_n+X_n)$ y es incancelable. Como en las formas de grado más alto de f se originan potencias de X_1 de exponente más alto, se ve que el término en $X_1^r X_2^{r_2} \cdots X_n^{r_n}$ es incancelable, luego

$$f(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_nX_1 + X_1X_n) \neq 0$$

Obsérvese que la especificidad del papel jugado por la variable X_1 en el proceso anterior es más aparente que real. Se pueden hacer las mismas construcciones usando las restantes variables. Obsérvese, asimismo, que las constantes $a_i \in \mathbb{K}$ no han jugado un papel esencial.

Daremos los siguientes nombres:

1. El anillo R se llama una em explosión de R' si $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Se llama una *explosión con cambio de origen* si algún $a_i \neq 0$.
2. El anillo R' se llama una *implosión* de R, con o sin cambio de origen.
3. Dado ahora un anillo $S_n = \mathbb{K}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$, efectuar una explosión de S_n (con cambio de origen o sin él) es identificar S_n con R' (o con uno similar en que otra X_i juegue el papel de X_1) mediante el isomorfismo $Z_i \to Y_i$ y pasar al anillo R.

Ejemplo I–D.7 ■ Estamos ahora en condiciones de dar un ejemplo del hecho de que no toda valoración de $K_n|\mathbb{K}$, centrada en R en el ideal maximal y cuyo cuerpo residual sea una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$ engendrada por $n-1$ elementos, es una función de orden. A la vez nos damos cuenta de que este ejemplo se puede iterar un número finito de veces, obteniendo valoraciones cada vez más complicadas.

Tomemos una forma lineal $L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ y la valoración ν_L de K_n asociada a ella. Ponemos la condición de que

$$\alpha_1 = \min\{\alpha_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

y elegimos $(a_2, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^{n-1}$, haciendo la implosión como en la nota anterior. La restricción de ν_L a R' da una valoración ν' que no es una función de orden porque toda forma lineal $Y_i - a_i Y_1$ con $a_i \neq 0$ es singular. Sus cuerpos residuales $\Delta_{\nu'}$ y Δ_{ν_L} coinciden. En efecto, como ν' es restricción de ν_L, es $\Delta'_{\nu} \subseteq \Delta_{\nu_L}$. Por lo demás, como

$$X_1 = Y_1, \quad X_i = \frac{Y_i - a_i Y_1}{Y_1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

el aserto es evidente por construcción de Δ_{ν_L}.

Nota I–D.8 ■ A la vista de lo anterior, la pregunta correcta es: Si una valoración ν de $K_n | \mathbb{K}$ con centro en el ideal maximal es tal que Δ_ν es una extensión trascendente pura de grado de trascendencia $n-1$, ¿existe una sucesión finita de explosiones que la convierte en una función de orden? Más tarde volveremos sobre esta pregunta.

I–E DIVISORES PRIMOS EN SERIES DE POTENCIAS

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, consideremos el anillo $R = \mathbb{K}[\![\mathbb{X}]\!] = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ de las series formales de potencia. Sean $f \in R$ un elemento irreducible, $\mathfrak{p} = f \cdot R$ el correspondiente ideal primo y $V = R_\mathfrak{p}$ el anillo de valoración asociado. Si K es el cuerpo de fracciones de R, entonces V es el anillo de una valoración discreta ν que actúa de la siguiente manera: si $\omega = (a/b)f^r \in K$, donde f no divide ni a a ni a b, entonces $\nu(\omega) = r$.

El cuerpo residual de v es

$$\Delta = \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}},$$

que es isomorfo al cuerpo de fracciones $Q(R/\mathfrak{p})$ de $R/\mathfrak{p}$. Fijemos un isomorfismo entre estos dos cuerpos definido como sigue: a cada elemento $a/b+\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$, donde $a, b \in R$ y f no divide a b, le hacemos corresponder el elemento $(a+\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}})/(b+\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}})$. En lo que sigue identificaremos ambos cuerpos vía este ismorfismo, así $\Delta = Q(R/\mathfrak{p})$. También escribiremos

$$\frac{R}{\mathfrak{p}} = \mathbb{K}[\![\mathbf{x}]\!] = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!], \;\; \Delta = \mathbb{K}((\mathbf{x}))$$

con $x_i = X_i + \mathfrak{p}$.

Nota I–E.1 ■ La compleción usual $\widehat{V}$ de V es también la compleción con respecto a la valoración v. Llamemos $\widehat{\mathfrak{m}}$ al ideal maximal de $\widehat{V}$, $\widehat{K}$ a su cuerpo de fracciones, y $\widehat{v}$ a la extensión de v a $\widehat{K}$.

Fijemos una sección $\sigma : \Delta \hookrightarrow \widehat{V}$ del homomorfismo natural $\widehat{V} \to \widehat{V}/\widehat{\mathfrak{m}} = \Delta$, que es una inclusión de cuerpos tal que, para todo $\delta \in \Delta$, se tiene que $\sigma(\delta) + \widehat{\mathfrak{m}} = \delta$. Nosotros necesitamos que σ deje invariante a los elementos de $\mathbb{K}$. Esta sección existe por el teorema de Cohen de estructura de los anillos locales completos [ZS60a]. Vamos a construir lo que llamaremos *la serie de potencias de desarrollo de los elementos de $\widehat{K}$ con respecto a f*.

Sea $\omega \in \widehat{K}$, $\omega \neq 0$, $\widehat{v}(\omega) = r_1$; entonces $\widehat{v}(\omega/f^{r_1}) = 0$, y escribamos

$$\delta_{r_1} = \left(\frac{\omega}{f^{r_1}}\right) + \widehat{\mathfrak{m}} \in \Delta.$$

Sea $\omega_1 = \omega - \sigma(\delta_{r_1})f^{r_1}$; entonces

$$\frac{\omega_1}{f^{r_1}} + \widehat{\mathfrak{m}} = \left(\frac{\omega}{f^{r_1}} + \widehat{\mathfrak{m}}\right) - \delta_{r_1} = 0,$$

luego $\widehat{v}(\omega_1) = r_2 > r_1$.

Sea $i \geq 1$ entero, supongamos que hemos encontrado unos enteros $r_1 < \cdots < r_i$ y unos elementos $\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_i} \in \Delta$ tales que el elemento

$$\omega_i = \omega - \sum_{1 \leq k \leq i} \sigma(\delta_{r_k}) f^{r_k} \neq 0$$

tiene valor $r_{i+1} > r_i$ respecto de $\hat{\nu}$. Entonces $\hat{\nu}(\omega_i / f^{r_{i+1}}) = 0$; notemos por $\delta_{r_{i+1}} \in \Delta$ al residuo de $\omega_i / f^{r_{i+1}}$. Sea $\omega_{i+1} = \omega_i - \sigma(\delta_{r_{i+1}}) f^{r_{i+1}}$; como antes, observamos que $\hat{\nu}(\omega_{i+1}) > r_{i+1}$.

Continuando este proceso, llegamos a una de las siguientes situaciones:

- o se detiene (porque uno de los ω_i es cero),
- o no se detiene.

En el primer caso, ω es un polinomio en f (o una función racional si alguno de los r_i es negativo). En el segundo caso, ω es una serie de potencias en f, con orden posiblemente negativo. Observemos que el hecho de que σ deje invariante a todo elemento de $\mathbb{K}$ implica que la serie de potencias de desarrollo de f es justamente f.

Sea t una nueva variable, consideremos el cuerpo $\Delta((t))$. Tenemos un isomorfismo

$$\Psi : \hat{K} \to \Delta((t))$$

que transforma el elemento $\sum \sigma(\delta_i) f^i$ en $\sum \delta_i t^i$. El hecho de que Ψ sea un isomorfismo viene de la construcción de cualquier elemento de $\hat{K}$ como una serie de potencias en f junto con que σ sea una inmersión de cuerpos. Es claro que $\Psi(f) = t$. ∎

Ejemplo I–E.2 ∎ No se puede esperar, en general, que exista una sección $\sigma : \Delta_\nu \to V$ del homomorfismo natural $V \to \Delta_\nu$ porque el uso de las series es esencial. En dos variables, el cálculo explícito de una sección está ligado a la resolución de la singularidad de la curva $f = 0$, como vemos en el ejemplo siguiente. Sea $f = X_2^8 - X_1^{13} \in \mathbb{K}[\![X_1, X_2]\!]$; el proceso de resolución de singularidades es:

$$X_2^8 - X_1^{13} = 0$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^8 - X_1^5 = 0$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^3 - \left(\frac{X_1}{X_2/X_1}\right)^5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^3 - \left(\frac{X_1^2}{X_2}\right)^5 = 0$$

$$\left(\frac{X_2/X_1}{X_1^2/X_2}\right)^3 - \left(\frac{X_1^2}{X_2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{X_2^2}{X_1^3}\right)^3 - \left(\frac{X_1^2}{X_2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{X_2^2}{X_1^3} - \left(\frac{X_1^2/X_2}{X_2^2/X_1^3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{X_2^2}{X_1^3} - \left(\frac{X_1^5}{X_2^3}\right)^2 = 0$$

$$\frac{X_2^2/X_1^3}{X_1^5/X_2^3} - \frac{X_1^5}{X_2^3} = 0 \Rightarrow \frac{X_2^5}{X_1^8} - \frac{X_1^5}{X_2^3} = 0$$

Como $\Delta_\nu = \mathbb{K}((x_1^{1/8}))$, $x_i = X_i + \mathfrak{p}$, $i = 1, 2$, la existencia de una sección $\sigma : \Delta_\nu \to V$ equivale a hallar una raíz octava de X_1 en $V = R_\mathfrak{p}$. Esto quiere decir que se debe encontrar una serie $u = \sum_{i \geq 1} u_i f^i$ "en la variable f con coeficientes en $V = R_\mathfrak{p}$" tal que $u^8 = X_1$. Calculemos un par de términos para ver el procedimiento general. Para calcular u_0 hay que encontrar $u_0 \in R_\mathfrak{p}$ tal que $u_0^8 - X_1 \in \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$. Usando la resolución de singularidades es

$$\left(\frac{X_1^5}{X_2^3}\right)^8 - X_1 = \frac{X_1^{40} - X_1 X_2^{24}}{X_2^{24}} = \frac{-X_1(X_2^{24} - X_1^{39})}{X_2^{24}} =$$

$$= \frac{-X_1(X_2^8 - X_1^{13})(X_2^{16} + X_2^8 - X_1^{13} + X_1^{26})}{X_2^{24}} \in \mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p},$$

luego se puede tomar

$$u_0 = \frac{X_1^5}{X_2^3}.$$

Ahora bien

$$\left(\frac{X_1^5}{X_2^3}\right)^8 - X_1 = -8u_0u_1 f - \cdots$$

$$\frac{-X_1(X_2^{16}+X_2^8X_1^13+X_1^{26})}{X_2^{24}} = -8\frac{X_1^5}{X_2^3}u_1 - \cdots,$$

de donde

$$\frac{X_1^5}{X_2^3}u_1 - \frac{-X_1(X_2^{16}+X_2^8X_1^13+X_1^{26})}{X_2^{24}} \in pR_p$$

$$\frac{X_1\left(8X_1^4X_2^{21}u_1-(X_2^{16}+X_2^8X_1^{13}+X_1^{26})\right)}{X_2^{24}} \in pR_p$$

para lo que basta tomar

$$u_1 = \frac{X_1^9}{4X_2^{13}}.$$

Obsérvese que este procedimiento es generalizal en el caso de dos variables. Siempre se puede obtener una función racional en x_1, x_2 con valor 1 para la única valoración de Δ_ν que contiene a $\mathbb{K}[\![x_1, x_2]\!]$, que es la clave para el comienzo de los cálculos.

Esto no es generalizable a más variables. En este caso las explosiones nos pueden hacer salir del cierre íntegro y, por tanto, fuera de un anillo de valoración dado. Además, en todo caso, hay que definir lo que se entiende por resolución de singularidades de una hipersuperficie algebroide, lo que no es claro como se ha mostrado en el prólogo.

CAPÍTULO II

Construcciones

En el prólogo hemos dicho que uno de los objetivos de la presente memoria es definir y hallar las ecuaciones paramétricas de ciertas valoraciones, concretamente de las discretas de rango 1 sobre los cuerpos de series formales. Para hacer esto necesitamos, evidentemente, un *parámetro*, que será el elemento de valor 1 construido en la sección II-A, y unos *coeficientes*, que estarán en el cuerpo residual de la valoración cuyo cálculo efectivo se expone en la sección II-B. Evidentemente, al hablar de construcciones, o *cálculos efectivos*, con series formales, estamos suponiendo que somos capaces de recorrer toda la serie.

II–A CONSTRUCCIÓN DE UN ELEMENTO DE VALOR 1

Sea el anillo $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, sea M_n su ideal maximal y notemos por $K_n = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$ a su cuerpo de fracciones. Fijamos una valoración discreta de rango 1 de $K_n|\mathbb{K}$ finita sobre R y centrada en M_n. Se supone que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$. Como es habitual, se designa por Δ_ν al cuerpo residual de ν.

Cuando lo necesitemos, usaremos la compleción $K_{\hat{\nu}}$ de K_n respecto de la valoración ν en la forma usual, descrita en las secciones anteriores. A la única extensión de ν a $K_{\hat{\nu}}$ la denotaremos por $\hat{\nu}$, escribiendo su anillo y su ideal como $R_{\hat{\nu}}$ y $\mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ respectivamente. Recordemos que los cuerpos residuales $\Delta_{\hat{\nu}}$ y Δ_ν coinciden.

En esta sección vamos a dar un algoritmo finito para la construcción de un elemento de valor 1.

Notas II–A.1 ■ 1) Los conceptos de explosión e implosión (con o sin cambio de origen) que vimos en la nota I–D.6 se pueden generalizar fácilmente como sigue. Elijamos un entero q, con $1 \leq q \leq n$ y pongamos

$$\begin{array}{rcll} Y_1 & = & X_1 & \\ Y_i & = & a_iX_1 + X_1X_i & , \ 1 \leq i \leq q \\ Y_j & = & X_j & , \ j \geq q. \end{array}$$

Se puede ver con facilidad que $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ son formalmente independientes sobre $\mathbb{K}$, adaptando el procedimiento que hicimos en la citada nota I–D.6. En efecto, sean $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ nuevas variables y sean $R' = \mathbb{K}[\![Z_1, \ldots, Z_n]\!]$, $f \in R'$ con $f \neq 0$. Si f es una unidad es claro que

$$0 \neq f(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_qX_1 + X_1X_q, X_{q+1}, \ldots, X_n).$$

Supongamos, pues, que f no es una unidad y descompongamos f en suma de formas respecto de las variables $\{Z_1, \ldots, Z_q\}$. Los coeficientes de cada forma serán series en $\{Z_{q+1}, \ldots, Z_n\}$. Sea $f_r(Z_1, \ldots, Z_q)$ la forma inicial y pongamos

$$f'_r = f_r(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_qX_1 + X_1X_q) =$$

$$= X_1^r f_r(1, a_2 + X_2, \ldots, a_q + X_q).$$

Si $Z_1^{r_1}Z_2^{r_2} \cdots Z_q^{r_q}$ es el mayor monomio (para el orden lexicográfico) que aparece en f_r, entonces en f'_r aparece un término en $X_1^{r_1}X_2^{r_2} \cdots X_q^{r_q}$ que es incancelable en f'_r. Como en las formas de grado superior aparece X_1 elevado a un exponente mayor, es claro que ese término también es incancelable en

$$f(X_1, a_2X_1 + X_1X_2, \ldots, a_qX_1 + X_1X_q, X_{q+1}, \ldots, X_n).$$

Luego esta expresión no es nula. Esto prueba nuestro aserto.
Para esta situación su usan también los nombres de explosión e implosión, con o sin cambio de origen. Sin embargo, la tradición reserva para este caso la expresión "R es un *transformado monoidal* de $\mathbb{K}[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!]$".

2) Consideremos el anillo $R = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ y sea ν una valoración de $K_n|\mathbb{K}$, discreta de rango 1 cuyo centro en R es el ideal maximal M_n. Sea $\nu(X_i) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$ y supongamos que hay un α_j que no es múltiplo de $\min\{\alpha_i | 1 \leq i \leq n\}$. Reordenando las variables si preciso fuera se puede suponer que $\nu(X_1) = \alpha_1 = \min\{\alpha_i | 1 \leq i \leq n\}$ y $\nu(X_2) = \alpha_2$ no es múltiplo de α_1. Tomemos la transformación monoidal

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!] & \to & \mathbb{K}[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!] \\ X_1 & \mapsto & Y_1 \\ X_2 & \mapsto & Y_1Y_2 \\ X_i & \mapsto & Y_i, \ i = 3, \ldots, n. \end{array}$$

Como

$$Y_2 = \frac{X_2}{X_1} \text{ y } \nu(Y_2) = \nu(X_2) - \nu(X_1) > 0,$$

el anillo $\mathbb{K}[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!]$ está contenido en $R_{\hat{\nu}}$, luego se puede considerar la valoración ν_1 restricción de $\hat{\nu}$ a $\mathbb{K}((Y_1, \ldots, Y_n))$, que extiende a ν. A este proceso le llamamos extender ν al transformado monoidal de R.

3) Sea $\alpha_2 = q\alpha_1 + r$. Aplicando q veces esta transformación, se obtiene un anillo que designaremos de nuevo por $\mathbb{K}[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!]$, donde $\nu(Y_2) = r > 0$ y es la variable de menor valor. Nuevamente se permutan las variables para que la primera sea la de menor valor y se vuelve a hacer esta operación.

4) Al final, en un número finito de pasos, llegamos a una situación en la que todos los α_i (volviendo a la notación inicial) son múltiplos enteros de α_1. La finitud es evidente, pues en cada paso desciende el valor mínimo, manteniéndose positivo. Llegado a este punto, si suponemos que $\alpha_i = n_i\alpha_1$, aplicamos para cada variable $n_i - 1$ transformaciones monoidales formales como ésta:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \to & \mathbb{K}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \\ X_i & \mapsto & Y_1Y_i \\ X_j & \mapsto & Y_j,\ i \neq j. \end{array}$$

para reducir el valor de la Y_i, de hecho obtenemos $\nu(Y_i) = \alpha_1$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

5) Es evidente que lo anterior implica que, por aplicación de un número finito de transformaciones monoidales formales, se pueden igualar los valores de las variables. ■

Notas II–A.2 ■ Vamos a suponer en estas notas que todos los α_i son iguales; designemos por α al valor común de todas las variables. Si $\alpha = 1$, entonces cualquiera de las variables es un elemento de valor 1. Supongamos que $\alpha > 1$ y sea $L = \alpha\sum_{i=1}^n u_i$. Fijemos una sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$, tomemos un elemento $\theta \in R_{\hat{\nu}}$ de valor 1 y consideremos el isomorfismo

$$\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1} : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!]$$

del capítulo anterior, donde t es una variable.

1) Vamos a probar que, para cada $i = 2,\ldots,n$, existe un $b_i \in \Delta_{\hat{\nu}}$ tal que $\hat{\nu}(X_i - \sigma(b_i)X_1) > \alpha$. Como en el capítulo anterior, ponemos

$$\left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_i) = \sum_{j\geq\alpha} a_{ij}t^j = \omega_i(t),\ a_{ij} \in \Delta_{\hat{\nu}},\ a_{i\alpha} \neq 0.$$

Si $b_i = a_{i\alpha}/a_{1\alpha}$, es claro que se verifica la condición requerida. A la transformación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \to & \mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!] \\ X_1 & \mapsto & Y_1 \\ X_i & \mapsto & Y_i + \sigma(b_i)Y_1,\ i = 2,\ldots,n \end{array}$$

la llamamos *cambio de coordenadas*. Después de esta operación nos quedamos con un anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$, donde $\mathbb{L}$ es un subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$, tal que los valores de las variables son distintos.

2) Es importante destacar aquí lo siguiente:

a) Esta transformación es inyectiva porque es un $\mathbb{L}$–automorfismo del anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$ ([ZS60a] corolario 2, pág. 137).

b) Por el mismo motivo las variables $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ son formalmente independientes sobre $\mathbb{L}$.

c) Además $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots Y_n]\!] \subset R_{\hat{\nu}}$. Esto es claro, pues

$$\hat{\nu}(Y_i) = \hat{\nu}(X_i - \sigma(b_i)X_1) > \alpha > 0.$$

3) De nuevo podemos usar la unicidad de la extensión de ν a $\hat{\nu}$ para asegurar que ν se extiende de manera única a una valoración ν' sobre $\mathbb{L}((Y_1,\ldots Y_n))$ tal que el grupo de valores es $\mathbb{Z}$ y el cuerpo residual es $\Delta_{\hat{\nu}}$.

4) Como al aplicar el cambio de coordenadas hemos alterado el valor de las variables del anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\ldots Y_n]\!]$, aplicamos de nuevo el algoritmo dado en las notas II–A.1 para igualar éstos. De esta forma lo que hacemos es, en todo caso, decrecer el valor mínimo de las variables. ■

Notas II–A.3 ■ Partiendo del anillo R iniciamos un proceso de transformaciones monoidales y cambio de coordenadas en busca de un elemento de valor 1, como hemos hecho en las notas anteriores. Nótese que podemos unir transformaciones monoidales con cambios de coordenadas para obtener transformaciones monoidales con cambio de origen, aunque los coeficientes ya estén en un cuerpo que contiene al cuerpo base.

1) Eventualmente este algoritmo nos puede producir un elemento de valor 1 en un número finito de pasos. En este caso hemos terminado.

2) El que no podamos producir un elemento de valor 1 equivale a la existencia de una sucesión infinita de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas que estabiliza el valor de las variables en un elemento $\alpha > 1$. Vamos a ver que esto no es posible.

3) La única manera de entrar en un proceso infinito en el que se estabilicen los valores de las variables es la que se explica a continuación. Se parte de una situación en la que todos los valores de las variables sean iguales a $\alpha > 0$. Además se supone que cualquier cambio de coordenadas posible hace que los valores de las nuevas variables sean múltiplos de α, de manera infinita. Esta situación es la que no puede darse; lo demostraremos posteriormente.

4) Hay que realizar unas transformaciones monoidales tras cada cambio de coordenadas, pues los valores de las variables no se conservan en general. Sin embargo, si suponemos que los valores de las nuevas variables son múltiplos de α, como es nuestro caso, podemos integrar las transformaciones monoidales dentro de los cambios de coordenadas como sigue: si $\nu(X_i) = m_i\alpha$, existe un $b_i \in \Delta_{\hat{\nu}}$ tal que $\nu(X_i - \sigma(b_i)X_1^{m_i}) > m_i\alpha$, y realizamos el cambio

$$X_i \longrightarrow Y_i + \sigma(b_i)Y_1^{m_i}.$$

5) Supongamos que tomamos como base la variable X_1, y que tenemos una sucesión infinita de cambios de coordenadas. Tal sucesión nos conduciría a una sucesión infinita de expresiones de la forma

$$\begin{aligned} &Y_{1,j} = X_1, \\ &Y_{i,j} = X_i - \textstyle\sum_{k=1}^{j} \sigma(a_{ik})X_1^{n_k}, \; i = 2, \dots, n, \; a_{ik} \in \Delta_{\hat{\nu}} \end{aligned}$$

donde $\nu(Y_{i,j}) > \nu(Y_{i,j-1})$ $\forall i, j$. En definitiva, tendríamos series

$$X_i - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(a_{ik})X_1^{n_k}, \; i = 2, \dots, n,$$

tales que cualquier sucesión de sumas parciales tiene valores crecientes. Estas series convergen a cero en $R_{\hat{\nu}}$, luego

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(a_{ik})X_1^{n_k}, \; \forall i = 2, \dots, n.$$

Si tomamos ahora un elemento de K_n y sustituimos $X_2, \dots, X_n$ por sus valores dados por las series anteriores vemos que su valor es un múltiplo de α.

$$f(X_1, \dots, X_n) \in K_n$$

$$\nu(f) = \hat{\nu}\left(f\left(X_1, \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(a_{2k}) X_1^{n_{2k}}, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(a_{nk}) X_1^{n_{nk}}\right)\right) = m\alpha.$$

Como el grupo de valores de ν es $\mathbb{Z}$, no puede ser $\alpha > 1$. Esto prueba nuestro aserto. ■

Con esto hemos probado el siguiente

Teorema II–A.4 ■ Fijada la sección σ, se puede construir un elemento de valor 1 mediante un número finito de transformaciones monoidales y de cambios de coordenadas. ■

Ejemplo II–A.5 ■ Consideremos en $\mathbb{C}$ el retículo

$$\Omega = \{t_1 e_1 + t_2 e_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\},$$

sea la función $\wp$ de Weierstrass,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

y su derivada

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{-2}{(z-\omega)^3}.$$

Sabemos (c.f. [Har77] pág. 327) que ambas funciones satisfacen la siguiente relación:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

donde

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \text{ y } g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Luego estas funciones $\wp(z)$ y $\wp'(z)$ parametrizan la cúbica elíptica de ecuación $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$.

Sabemos que si tomamos $\Omega = \{t_1 + it_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\}$, tenemos que $g_3 = 0$ y $g_2 \neq 0$. Sea entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi' : \mathbb{C}[\![X_1, X_2, X_3]\!] & \to & \mathbb{C}((z))[\![t]\!] \\ X_1 & \mapsto & t^2 \\ X_2 & \mapsto & 4^{1/3}t^2\wp(z) \\ X_3 & \mapsto & t^2\wp'(z), \end{array}$$

por las propiedades de la función $\wp$ de Weierstrass, el núcleo de esta aplicación es $\ker(\Psi') = (X_1X_3^2 - X_2^3 + AX_1^2X_2)$, donde

$$A = \frac{60}{4^{1/3}}g_2 \neq 0.$$

Si tomamos dos nuevas variables T_2 y T_3 y consideramos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}[\![X_1, X_2, X_3]\!] & \to & \mathbb{C}((z))[\![t, T_2, T_3]\!] \\ X_1 & \mapsto & t^2 \\ X_2 & \mapsto & 4^{1/3}t^2\wp(z) + T_2t^4 \\ X_3 & \mapsto & t^2\wp'(z) + T_3t^5, \end{array}$$

que es inyectivo. Este hecho está probado por E. Briales (c.f. [Bri86]) proposición 2.15 pág 22) para un caso algo más general. Podemos construir una valoración $\nu = \nu_t\Psi$, donde Ψ es la ampliación de Ψ a los cuerpos de funciones y ν_t es la función de orden en t. El ideal de las formas singulares de esta valoración es, por todo lo anterior,

$$\mathrm{Sing}(\nu) = \ker(\Psi') = (X_1X_3^2 - X_2^3 + AX_1^2X_2).$$

Sea $\hat{\nu}$ la valoración dada por la compleción del cuerpo K_ν, sea $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ una sección del homomorfismo natural de $R_{\hat{\nu}}$ en $\Delta_{\hat{\nu}}$.

Se trata de aplicar el algoritmo dado en las notas anteriores para construir un elemento de valor 1. Como

$$\nu(X_1) = \nu(X_2) = \nu(X_3) = 2,$$

hemos de aplicar un cambio de coordenadas. Debemos tomar dos elementos $b_2, b_3 \in \Delta_{\hat{\nu}}$ tales que $\hat{\nu}(X_2 - \sigma(b_2)X_1) > 2$ y $\hat{\nu}(X_3 - \sigma(b_3)X_1) > 2$. Sean entonces $b_2 = \wp(z)/4^{1/3} + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ y $b_3 = \wp'(z) + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$, y hagamos el cambio de coordenadas

$$\begin{array}{rcl} X_1 & \to & X_{1,1} \\ X_2 & \to & X_{1,2} + \sigma(b_2)X_{1,1} \\ X_3 & \to & X_{1,3} + \sigma(b_3)X_{1,1}, \end{array}$$

donde $X_{i,j}$ es la variable j–ésima tras haber realizado i transformaciones monoidales y cambios de coordenadas. De esta forma hemos extendido ν a una valoración, ν_1, del cuerpo $\mathbb{L}((X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3}))/\mathbb{L}$ dada por la composición de la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{L}((X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3})) & \to & \mathbb{L}((t, T_2, T_3)) \\ X_{1,1} & \mapsto & t^2 \\ X_{1,2} & \mapsto & T_2 t^4 \\ X_{1,3} & \mapsto & T_3 t^5, \end{array}$$

con la función de orden en t, donde $\mathbb{L}$ es un subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ que contiene a $\sigma(b_2)$ y $\sigma(b_3)$. Sabemos que $\Delta_{\nu_1} = \Delta_{\hat{\nu}}$, ahora el valor de las variables es distinto

$$\nu_1(X_{1,1}) = 2, \;\; \nu_1(X_{1,2}) = 4, \;\; \nu_1(X_{1,3}) = 5.$$

Debemos realizar unas transformaciones monoidales formales para reducir su valor, hagamos el cambio

$$\begin{array}{rcl} X_{1,1} & \to & X_{2,1} \\ X_{1,2} & \to & X_{2,1}X_{2,2} \\ X_{1,3} & \to & X_{2,1}X_{2,3}, \end{array}$$

para obtener una valoración ν_2 del cuerpo $\mathbb{L}((X_{2,1}, X_{2,2}, X_{2,3}))/\mathbb{L}$, que es la composición del homomorfismo de cuerpos

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{L}((X_{2,1}, X_{2,2}, X_{2,3})) & \to & \mathbb{L}((t, T_2, T_3)) \\ X_{2,1} & \mapsto & t^2 \\ X_{2,2} & \mapsto & T_2 t^2 \\ X_{2,3} & \mapsto & T_3 t^3 \end{array}$$

con la función de orden en t. El valor de las variables es $\nu_2(X_{2,1}) = \nu_2(X_{2,2}) = 2$ y $\nu_1(X_{2,3}) = 3$. Podemos realizar otra transformación para reducir aún más el valor de la tercera variable, haciendo el cambio

$$\begin{array}{rcl} X_{2,1} & \to & X_{3,1} \\ X_{2,2} & \to & X_{3,2} \\ X_{3,3} & \to & X_{3,1}X_{3,3} \end{array}$$

obtenemos una valoración ν_3 de $\mathbb{L}((X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3}))/\mathbb{L}$, que es la composición de

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{L}((X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3})) & \to & \mathbb{L}((t, T_2, T_3)) \\ X_{3,1} & \mapsto & t^2 \\ X_{3,2} & \mapsto & T_2 t^2 \\ X_{3,3} & \mapsto & T_3 t \end{array}$$

con ν_t tal que $\Delta_{\nu_3} = \Delta_{\hat{\nu}}$, donde $\nu_3(X_{3,3}) = 1$ como buscábamos. Así, deshaciendo los cambios, tenemos un elemento

$$\frac{X_3 - \sigma(b_3)X_1}{X_1^2}$$

de valor 1 para $\hat{\nu}$.

II–B CONSTRUCCIÓN DEL CUERPO RESIDUAL

Vamos a refinar en esta sección las construcciones dadas en la anterior. Partimos del anillo R. El objetivo es, mediante transformaciones monoidales formales y cambios de coordenadas, llegar a un anillo donde la valoración extendida sea la dada por la función de orden usual, si es posible (que no lo va a ser, en general).

Notas II–B.1 ■ 1) Mediante una sucesión finita de transformaciones monoidales se puede suponer que operamos con un anillo $R = \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ en el cual todas la variables tienen el mismo valor α.

2) Consideremos la variable X_2. Como $\nu(X_2/X_1) = 0$, es $0 \neq (X_2/X_1) + \mathfrak{m}_\nu \in \Delta_\nu$. Supongamos que este residuo es racional, es decir que pertenece a $\mathbb{K}$. Entonces existe un número $a_{21} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu = a_{21} + \mathfrak{m}_\nu,$$

luego

$$\frac{X_2}{X_1} - a_{21} = \frac{X_2 - a_{21}X_1}{X_1} \in \mathfrak{m}_\nu,$$

lo que implica que

$$\nu\left(\frac{X_2 - a_{21}X_1}{X_1}\right) > 0,$$

como $\nu(X_1) = \alpha$, tenemos que $\nu(X_2 - a_{21}X_1) = \alpha_1 > \alpha$. Supongamos que α_1 es múltiplo de α, digamos $\alpha_1 = r_1\alpha$ con $r_1 \geq 2$; entonces

$$\nu\left(\frac{X_2 - a_{21}X_1}{X_1^{r_1}}\right) = 0.$$

Supongamos que el residuo de este elemento es también racional. Existe entonces un número $a_{2r_1} \in \mathbb{K}$ tal que $\nu(X_2 - a_{21}X_1 - a_{2r_1}X_1^{r_1}) = \alpha_2 > \alpha_1$. Si α_2 es múltiplo de α, pongamos $\alpha_2 = r_2\alpha$, $r_2 > r_1$, podemos repetir la operación.

3) No se puede dar una sucesión infinita de operaciones como la anterior. En efecto, el que se dé equivale a construir una serie

$$X_2 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}X_1^i$$

cuya sucesión de sumas parciales tendría valores crecientes. Así esta serie debería ser nula, lo que no es posible porque X_1 y X_2 son variables.

4) De manera análoga a lo realizado anteriormente con la segunda variable podemos efectuar todos los cambios de variables

$$Y_j = X_j - \sum_{i=1}^{s_j} a_{ji}X^i,$$

$$Y_1 = X_1,$$

de tal forma que el anillo $\mathbb{K}[\![Y_1,\dots,Y_n]\!]$ sea tal que

a) o bien el residuo de Y_j/Y_1, $j \neq 1$ no es racional, si $\nu(Y_j) = \nu(Y_1)$,

b) o bien $\nu(Y_j)$ no es múltiplo de $\nu(Y_1)$, si son distintos.

Para el caso a), realizamos el cambio

$$Z_j = Y_j - \sum_{i=1}^{s-1} a_{ji} Y_1^i, \text{ con } j \neq 1,$$

donde s es tal que Z_j/Y_1^s es el primer residuo no racional en el proceso descrito anteriormente.
En la situación del apartado b), hacemos el cambio de variable

$$Z_j = Y_j - \sum_{i=1}^{s-1} a_{ji} Y_1^i, \text{ con } j \neq 1,$$

donde s es tal que el valor de Z_j es el primero en el proceso anterior que no es múltiplo de α.
En cualquier caso esta transformación ya está estudiada, pues no es más que un cambio de coordenadas, como hemos visto en la sección anterior. Tras esta operación, aplicamos un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas de tal manera que los valores de las variables se igualen a un nivel inferior.
De cualquier manera, esta situación se puede repetir sólo un número finito de veces porque sólo hay un número finito de posibilidades de hacer decrecer el valor de X_1.

5) Mediante este proceso llegamos a un anillo que, para facilitar la comprensión del texto, notaremos también por $R = \mathbb{K}[\![X_1,\dots,X_n]\!]$, en el cual los valores de las variables son iguales a un cierto α y ningún residuo $X_i/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es racional. Como tenemos fijada una sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \to R_{\hat{\nu}}$ ponemos $u_2 = \sigma(X_2/X_1 + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})$, de tal manera que $\hat{\nu}(X_2 - u_2 X_1) > \hat{\nu}(X_1)$. ∎

Lema II–B.2 Sea ν una valoración de $K_n|\mathbb{K}$ discreta de rango 1 finita sobre R y centrada en el ideal maximal. Si ν es tal que $\nu(f_r) = r\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ para toda forma f_r de grado r, entonces el valor de cada serie de R es α veces su orden usual (es decir, el grupo de valores es $\mathbb{Z}\alpha$).

Demostración. Sea μ la función de orden usual. Sea $f \in R$ tal que $\mu(f) = r$, entonces

$$f = \sum_{i \geq r} f_i, \ f_i \text{ forma de grado } i.$$

Consideremos el isomorfismo $\Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \to R_{\hat{\nu}}$ y, como es usual, notemos

$$\omega_i(t) := \left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}(X_i) = \sum_{j \geq \alpha} a_{ij}t^j, \text{ con } a_{i\alpha} \neq 0.$$

Como $\nu = \nu_t \circ \left(\Phi_{\sigma,\theta}\right)^{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \nu_t(f(\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))) = \\ &= \nu_t\left(\textstyle\sum_{i \geq r} f_i(\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))\right) = \\ &= t^{r\alpha} f_r(a_{1\alpha}, \ldots, a_{n\alpha}) + t^{r\alpha+1} g, \ g \in \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!]. \end{aligned}$$

Por hipótesis $\nu(f) = r\alpha$, luego es claro que $f_r(a_{1\alpha}, \ldots, a_{n\alpha}) \neq 0$, y por tanto

$$\nu(f) = r\alpha = r\mu(f)$$

como queríamos. ∎

Teorema II–B.3 En la situación usual, si $n = 2$, por aplicación de un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas, la extensión de la valoración dada es la función de orden usual.

Demostración. Después de un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas, nos encontraremos en la situación final de las notas II–B.1. Sea $h \neq 0$ una forma de grado r y pongamos $y = X_2 - u_2 X_1$, sabemos por la construcción de u_2 que $\hat{\nu}(y) > \alpha$. Entonces

$$h(X_1, X_2) = h(X_1, u_2 X_1 + y) = X_1^r h(1, u_2) + y',$$

donde γ' es tal que $\nu(\gamma') > r\alpha$, pues, desarrollando por el binomio de Newton, vemos que γ' est formado por monomios $a_{ij}X_1^i\gamma^j$ con $a_{ij} \in \mathbb{K}(u_2)$, $i + j = r$ y $j \geq 1$. Como u_2 es trascendente sobre $\mathbb{K}$, debe ser $h(1, u_2) \neq 0$, luego $\nu(h) = r\alpha$. Del lema anterior se deduce que el valor de cualquier serie es α veces su orden. Como el grupo de valores es $\mathbb{Z}$, tiene que ser $\alpha = 1$ y concluimos que ν coincide con la función de orden usual. ∎

Notas II–B.4 ∎ 1) Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & \Delta_{\hat{\nu}} \arrow[l, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[l, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde σ es una sección del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, y $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}'$ son subcuerpos de $R_{\hat{\nu}}$ y $\Delta_{\hat{\nu}}$ respectivamente. Sea $\omega \in R_{\hat{\nu}}$ tal que $\hat{\nu}(\omega) = 0$, entonces, si $\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ es trascendente sobre $\mathbb{F}'$, ¿es $\sigma(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})$ trascendente sobre $\mathbb{F}$?

Sea $f(X) \in \mathbb{F}[X]$ un polinomio en una variable, $f(X) \neq 0$. Pongamos

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i')X^i\,, \quad a_i' \in \mathbb{F}'.$$

Entonces

$$f\left(\sigma(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})\right) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i')\sigma(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})^i = \sigma\left(\sum_{i=0}^{n} a_i'(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})^i\right) \neq 0$$

porque $\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ es trascendente sobre $\mathbb{F}'$. Luego hemos demostrado que si $\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ es trascendente sobre $\mathbb{F}'$, entonces $\sigma(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})$ lo es sobre $\mathbb{F}$.

2) Para el caso algebraico, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} & & \Delta_{\hat{\nu}} \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[ll, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[rr, leftrightarrow, "id"] & & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde σ es una sección del homomorfismo natural $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$, y $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}'$ son subcuerpos de $R_{\hat{\nu}}$ y $\Delta_{\hat{\nu}}$ respectivamente. Sea $\alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}} \in \Delta_{\hat{\nu}}$, $\hat{\nu}(\alpha) = 0$, un elemento algebraico sobre $\mathbb{F}'$, sea

$$\bar{f}(X) = X^m + \beta_1 X^{m-1} + \ldots + \beta_m, \ \ \beta_i \in \mathbb{F}',$$

el polinomio mínimo de $\alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$ sobre $\mathbb{F}'$. Tomemos el polinomio

$$f(X) = X^m + b_1 X^{m-1} + \ldots + b_m \in \mathbb{F}[X], \ \ b_i = \sigma(\beta_i).$$

Por un corolario del *Lema de Hensel*, ([ZS60a] página 279), sabemos que existe un elemento $a \in R_{\hat{\nu}}$ tal que a es raíz simple de $\mathbb{F}(X)$ y $\varphi(a) = \alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$. Como $\varphi\sigma = id$, $f(X)$ es necesariamente el polinomio mínimo de a, luego podemos ampliar $\sigma : \mathbb{F}'(\alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}) \to \mathbb{F}(a)$. Así tenemos:

$$\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} & & \Delta_{\hat{\nu}} \\
\mathbb{F}(a) \arrow[u] \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \mathbb{F}'(\alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}) \arrow[u] \arrow[ll, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[ll, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[rr, leftrightarrow, "id"] & & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\Omega = \{(\mathbb{F}_1, \sigma_1) \mid \mathbb{F}_1 \supset \mathbb{F} \text{ y } \sigma_1 \text{ prolonga a } \sigma\}$$

ordenado de la siguiente manera

$$(\mathbb{F}_1, \sigma_1) < (\mathbb{F}_2, \sigma_2) \Leftrightarrow \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \text{ y } \sigma_{2|\mathbb{F}_1} = \sigma_1.$$

Por el *Lema de Zorn*, existe un elemento maximal $(\mathbb{L}, \sigma') \in \Omega$, y por otro corolario del *Lema de Hensel* ([ZS60a] página 280) se tiene $\varphi(\mathbb{L}) = \Delta_{\hat{\nu}}$. Luego podemos extender σ a una sección σ' del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ de manera que $a = \sigma'(\alpha + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})$ es algebraico sobre $\mathbb{F}$.

$$\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \Delta_{\hat{\nu}} \arrow[ll, shift right, "\sigma'"'] \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[ll, shift right, "\sigma'"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[rr, leftrightarrow, "id"] & & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

3) En las notas siguientes vamos a dar una construcción explícita del cuerpo residual de la valoración como subcuerpo $R_{\hat{\nu}}$. Lo probado en los dos puntos anteriores es bastante útil para ésto, pues sabemos que, en la situación del siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
R_{\hat{\nu}} & & \Delta_{\hat{\nu}} \\
\mathbb{F} \arrow[u] \arrow[rr, shift right, "\varphi"'] & & \mathbb{F}' \arrow[u] \arrow[ll, shift right, "\sigma"'] \\
\mathbb{K} \arrow[u] \arrow[rr, leftrightarrow, "id"] & & \mathbb{K} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

si $\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}}$, $\hat{\nu}(\omega) = 0$, es un elemento trascendente (respectivamente algebraico) de $\mathbb{F}'$, existe una sección σ' del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, que extiende a σ y tal que $\sigma'(\omega + \mathfrak{m}_{\hat{\nu}})$ es trascendente (respectivamente algebraico) sobre $\mathbb{F}$. ▪

Notas II–B.5 ▪ Volvamos al caso general, supongamos que $n > 2$ y que hemos aplicado el algoritmo de las notas II–B.1 para obtener una valoración de $K_n|\mathbb{K}$ tal que

a) El valor de todas las variables es α.

b) Ningún residuo $X_i/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es racional sobre $\mathbb{K}$. Luego todos ellos son trascendentes sobre $\mathbb{K}$, pues $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado.

1) El teorema II–B.3 se puede reinterpretar en la situación general diciendo que, mediante un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas, se obtiene una valoración ν, extendida de la dada, tal que su restricción a $\mathbb{K}((X_1, X_2))$ es la función de orden usual multiplicada por α.

2) Las expresiones

$$\begin{cases} X_1 = t^\alpha \\ X_2 = u_2 t^\alpha \end{cases}$$

constituyen unas ecuaciones paramétricas de la restricción de ν al cuerpo $\mathbb{K}((X_1, X_2))$ porque, para hallar el valor de una serie, basta sustituir X_1, X_2 por los valores en t indicados y tomar el valor del orden en t. Si Δ_2 es el cuerpo residual de esta restricción, se prueba en el capítulo I, nota I–D.5, que Δ_2 es una extensión trascendente pura de $\mathbb{K}$, de grado de trascendencia 1, generada por el residuo $X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$, y que $\sigma_2 : \Delta_2 \to \mathbb{K}((X_1, X_2))$ dado por

$$\sigma_2\left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right) = \frac{X_2}{X_1}$$

es una sección del homomorfismo natural. La fijamos para posteriores razonamientos, pues sabemos que existe una sección σ del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$ que extiende a σ_2 en el sentido de las notas anteriores.

3) Supongamos que el residuo de X_3/X_1 es algebraico sobre el cuerpo $\mathbb{K}((X_2/X_1)+\mathfrak{m}_\nu)$, y designemos por u_{31} a su imagen mediante σ. Entonces $\nu(X_3 - u_{31}X_1) = \alpha_1 > \alpha$. Si α_1 es múltiplo de α, existen $u \in \operatorname{Im}(\sigma)$ y $r > 1$ tales que $\nu(X_3 - u_{31}X_1 - uX_1^r) = \alpha_2 > \alpha_1$. Supongamos que u sigue siendo algebraico sobre $\mathbb{K}(u_2)$ y que α_2 sigue siendo múltiplo de α. Nos podemos encontrar con tres situaciones, descritas en los puntos siguientes.

4) La primera situación es que, después de un determinado número de pasos, se llegue a un valor que no sea múltiplo de α. Entonces, realizando un cambio de coordenadas del tipo

$$Y_3 = X_3 - \sum_{j=1}^{s} u_{3j} X_1^j,$$

donde los elementos $\sigma(u_{3j})$ son todos algebraicos sobre $\mathbb{K}(u_2)$, y aplicando un número finito de transformaciones monoidales, hacemos descender el valor de las variables y comenzamos todo desde el principio. Como cada vez que ocurra esto el valor de las variables desciende estrictamente y éste está acotado por 1, podemos suponer que, realizando un número finito de cambios de coordenadas y transformaciones monoidales formales, hemos alcanzado un estricto mínimo, que eventualmente será uno, y que notaremos también por α para no complicar la notación. Por tanto, podemos suponer que esta situación no se va a producir ni con X_3 ni con ninguna otra variable. Es importante destacar que, en ningún momento, los cambios de coordenadas realizados aportan un elemento trascendente al cuerpo sobre el que estamos trabajando. Supongamos, entonces, que el cuerpo base es $\mathbb{L}$, extensión algebraica de $\mathbb{K}$ contenida en $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$.

5) La segunda situación es que, después de un número finito de pasos, tengamos un residuo trascendente sobre $\mathbb{L}((X_2/X_1) + \mathfrak{m}_\nu)$. Esto quiere decir que, tomando un cambio de coordenadas del tipo

$$Y_3 = X_3 - \sum_{j=1}^{s_3} u_{3j} X_1^j,$$

y aplicando un número finito de transformaciones monoidales, nos vamos a encontrar en un anillo $\mathbb{L}_3[\![X_1, X_2, Z_3, X_4, \ldots, X_n]\!]$, donde $\mathbb{L}_3 = \mathbb{L}(\{u_{3j}\}_{j=1}^{s_3})$ y el residuo $(Z_3/X_1) + \mathfrak{m}_\nu$ es trascendente sobre el cuerpo $\mathbb{L}_3((X_2/X_1) + \mathfrak{m}_\nu)$. Y, por tanto, $u_3 = \sigma((Z_3/X_1) + \mathfrak{m}_\nu)$ es trascendente sobre $\mathbb{L}_3(u_2)$. Notaremos por Δ_3 al cuerpo $\mathbb{L}_3(u_2, u_3)$.

6) En la situación anterior, si $n = 3$, entonces $\alpha = 1$ y ν, la valoración extendida a $\mathbb{L}_3((X_1, X_2, Z_3))$, es la función de orden usual. La demostración de ésto es análoga a la del caso $n = 2$ (teorema II–B.3). En general, lo que se puede afirmar es que la restricción de ν a $\mathbb{L}_3((X_1, X_2, Z_3))$ es la función de orden usual.

7) Puede ocurrir, como tercera posibilidad, que los residuos sucesivos sean todos algebraicos. En este caso se tiene el

Teorema II–B.6 Si, en la situación anterior, todos los residuos son algebraicos y si $\{u_{3j}\}_{j\geq 1}$ son sus imágenes mediante σ (sección construida según las notas II–B.4), entonces la extensión algebraica

$$\mathbb{L}((u_2)) \subseteq \mathbb{L}\left(\left(u_2, \{u_{3j}\}_{j\geq 1}\right)\right) = \Delta_3$$

debe ser infinita.

Demostración. Notemos antes que nada que, por construcción,

$$X_3 - \sum_{j\geq 1} u_{3j} X_1^j = 0,$$

ya que la sucesión de valores de las sumas parciales de esta serie tiene valores crecientes. Supongamos que esa extensión fuese finita, digamos de grado r. Sea δ un elemento primitivo de la extensión, y sea $\{\delta = \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\}$ la lista de conjugados de δ en la mínima extensión normal de $\mathbb{L}(u_2)$ que contiene a $\mathbb{L}(u_2, \delta)$. Consideremos la lista de elementos

$$\begin{cases} \eta_1 = \varphi_0(X_1) + \varphi_1(X_1)\delta_1 + \ldots + \varphi_{r-1}(X_1)\delta_1^{r-1} \\ \quad\vdots \\ \eta_r = \varphi_0(X_1) + \varphi_1(X_1)\delta_r + \ldots + \varphi_{r-1}(X_1)\delta_r^{r-1} \end{cases}$$

donde $\varphi_i(X_1) \in \mathbb{L}(u_2)((X_1))$, donde η_1 se escribe sustituyendo en la serie $\sum_{j\geq 1} u_{3j} X_1^j$ los coeficientes por sus valores en función de δ y reordenando en potencias de δ, y donde los restantes η_i se obtienen de η_1 sustituyendo δ por sus conjugados. Utilizando propiedades generales de extensiones de Galois se prueba que

$$\prod_{i=1}^{r} (Y - \eta_i) = P \in \mathbb{L}(u_2)[\![X_1]\!][Y]$$

y sustituyendo Y por X_3 da cero, en contradicción con el hecho de que X_1, X_2 y X_3 son variables. ∎

Notas II–B.7 ■ Supongamos que hemos repetido el proceso de las notas II–B.5 con cada variable $X_4, \ldots, X_{i-1}$, con $i \leq n$, obteniendo un cuerpo

$$\Delta_{i-1} = \mathbb{L}_{i-1}(u_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{i-1}) \subseteq \sigma(\Delta_{\hat{\nu}}),$$

donde cada ζ_k es: bien $\sigma(X_k/X_1 + m_\nu)$ si éste es trascendente sobre sobre Δ_{k-1} (es decir, si estamos en la situación del punto 5 de la nota II–B.5, bien $\{u_{kj}\}_{j\geq 1}$ si estamos en la situación del punto 7 de la citada nota y el teorema II–B.6, obteniéndose, en este último caso, que la extensión $\Delta_{k-1} \subseteq \Delta_k$ es algebraica infinita. Entonces para la variable X_i sólo existen dos situaciones posibles:

1) Hay un cambio de coordenadas del tipo

$$Y_i = X_i - \sum_{j=1}^{s_i} u_{ij} X_1^j,$$

donde los u_{ij} son algebraicos sobre Δ_{i-1}, de foma que la imagen por σ del residuo de Y_i/X_1, pongamos u_i, es trascendente sobre Δ_{i-1}. En este caso tomamos el cuerpo $\Delta_i = \mathbb{L}_i(u_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{i-1}, u_i)$, donde

$$\mathbb{L}_{i-1} \subseteq \mathbb{L}_i = \mathbb{L}_{i-1}(\{u_{ij}\}_1^{s_i})$$

es una extensión algebraica finita.

2) Todos los elementos u_{ij} que se obtienen al aplicar el algoritmo de las notas II–B.5 son algebraicos, luego se tiene que la extensión

$$\Delta_{i-1} \subseteq \Delta_{i-1}(\{u_{ij}\}_{j\geq 1}) = \Delta_i$$

es algebraica infinita. La demostración de este hecho es igual a la del teorema II–B.6. Por coherencia de la notación , llamaremos $\mathbb{L}_i$ al cuerpo $\mathbb{L}_{i-1}$. ■

Mediante estas construcciones llegamos a un teorema de gran calado que generaliza resultados obtenidos en [Her81] y [Bri86]:

Teorema II–B.8 Sea v una valoración de $K_n|\mathbb{K}$ discreta de rango 1 cuyo centro en R es el ideal maximal M_n. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. El grado de trascendencia de Δ_v sobre $\mathbb{K}$ es $n-1$
2. Existe una sucesión finita de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas que transforman v en una función de orden.

Demostración. Claramente $2 \Rightarrow 1$ por los resultados de la sección I-D. La demostración de que $1 \Rightarrow 2$ se basa en la construcción anterior. Si el grado de trascendencia es $n-1$ las construcciones anteriores son finitas para cada variable, al caer necesariamente sobre un residuo algebraicamente independiente de los anteriores. ∎

Mediante el proceso descrito en este capítulo, hemos logrado dar una aplicación inyectiva entre los anillos R y $\mathbb{L}_n[\![X_1,\ldots,X_n]\!] \subseteq R_{\hat{v}}$ (para simplificar la notación volveremos a llamar $\mathbb{L}$ al cuerpo $\mathbb{L}_n$) de tal manera que la valoración extendida, v, sobre el cuerpo $\mathbb{L}((X_1,\ldots,X_n))$ verifica las siguientes propiedades:

1. Reordenando las variables, si es necesario, podemos suponer que las m primeras son las únicas tales que el residuo de X_i/X_1 con $i \leq m$ es trascendente sobre los anteriores, mientras que para las variables X_k con $k > m$ entramos en el proceso infinito descrito en el punto 7 de las notas II–B.5 y en el teorema II–B.6.
2. $v_{|\mathbb{L}((X_1,\ldots,X_m))}$ es la función de orden usual multiplicada por α, $m \leq n$.
3. Sean u_{kj}, con $k > m$, $j \geq 1$, la imagen por σ de los residuos obtenidos a partir de los X_k en el proceso anterior, sean $u_i =$

$\sigma((X_i/X_1)+\mathfrak{m}_v)$, con $i \le m$. Entonces la extensión algebraica

$$\mathbb{L}(u_2,\ldots,u_m) \subseteq \mathbb{L}(u_2\ldots,u_m)\left(\left\{u_{ij}\right\}_{j\ge 1}\right), \quad i = m+1,\ldots,n$$

es infinita.

Teorema II–B.9 El cuerpo residual de la citada valoración ν sobre $\mathbb{L}((X_1,\ldots,X_n))/\mathbb{L}$ es

$$\Delta_n = \mathbb{L}(u_2\ldots,u_m)\left(\left\{u_{m+1,j}\right\}_{j\ge 1},\ldots,\left\{u_{n,j}\right\}_{j\ge 1}\right).$$

Demostración. En la sección anterior hemos dado una construcción que nos permite hallar el valor de los elementos de $\mathbb{L}((X_1,\ldots,X_n))$ en función del de la variable X_1. Es decir, hemos construido la inmersión

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{L}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \hookrightarrow & \Delta_n[\![t]\!] \\ X_1 & \mapsto & t^{\alpha} \\ X_i & \mapsto & u_i t^{\alpha},\ i=2,\ldots,m \\ X_k & \mapsto & \sum_{j\ge\alpha} u_{kj}t^j,\ u_{k\alpha}\neq 0,\ k=m+1,\ldots,n.\end{array}$$

Notemos también por φ a su extensión a los cuerpos de fracciones. Por las construcciones anteriores, es evidente que la valoración ν es la composición de este homomorfismo con la función de orden en t. Luego el cuerpo residual de ν es Δ'.

■

El siguiente resultado es consecuencia directa del teorema anterior:

Corolario II–B.10 La función de orden usual es una valoración cuyo cuerpo residual tiene grado de trascendencia $n-1$ sobre $\mathbb{K}$. ■

En resumen, se tiene el

Teorema II–B.11 Sea ν una valoración discreta de rango 1 sobre $\mathbb{K}((X_1,\dots,X_n))$ centrada en el ideal maximal, sea $\Delta_{\hat{\nu}}$ su cuerpo residual. Sea σ una sección del homomorfismo natural $\varphi : R_{\hat{\nu}} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, entonces:

1. Si la dimensión de ν es $n-1$, podemos sumergir $\mathbb{K}[\![X_1,\dots,X_n]\!]$ en un nuevo anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\dots,Y_n]\!]$, donde $\mathbb{L}$ es subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ y tal que la valoración extendida de ν sobre $\mathbb{L}((Y_1,\dots,Y_n))$ es la dada por la función de orden usual.
2. Si la dimensión de ν es $m-1 < n-1$, podemos sumergir $\mathbb{K}[\![X_1,\dots,X_n]\!]$ en un nuevo anillo $\mathbb{L}[\![Y_1,\dots,Y_n]\!]$, donde $\mathbb{L}$ es subcuerpo de $\sigma(\Delta_{\hat{\nu}})$ y tal que la restricción a $\mathbb{L}((Y_1,\dots,Y_m))$ de la valoración extendida de ν sobre $\mathbb{L}((Y_1,\dots,Y_n))$ es la dada por la función de orden usual multiplicada por α.

II–C EJEMPLOS

En esta sección, al exponer algunos ejemplos de cálculo efectivo del cuerpo residual de una valoración, observamos que aparentemente todas las valoraciones tienen dimesión $n-1$. E. Briales probó (c.f. [Bri86]) que existían valoraciones sobre el cuerpo de series formales de tres variables de dimensión 1. Para el caso general demostraremos en esta sección que existen valoraciones de dimensión arbitraria entre 1 y $n-1$.

Ejemplos II–C.1 ■ 1) Hallemos el cuerpo residual de la valoración dada en el ejemplo II–A.5. Recordemos que ν es la composición de la inmersión

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}((X_1, X_2, X_3)) & \to & \mathbb{C}((z))((t, T_2, T_3)) \\ X_1 & \mapsto & t^2 \\ X_2 & \mapsto & 4^{1/3} t^2 \wp(z) + T_2 t^4 \\ X_3 & \mapsto & t^2 \wp'(z) + T_3 t^5, \end{array}$$

con la función de orden en t. Donde $\wp(z)$ es la función $\wp$ de Weierstrass asociada al retículo

$$\Omega = \{t_1 + it_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

En el citado ejemplo, mediante una serie de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas con el objeto de hallar un elemento de valor 1, habíamos obtenido una valoración, ν_3 de $\mathbb{L}((X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3}))|\mathbb{L}$, que es la composición de

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{L}((X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3})) & \to & \mathbb{L}((t, T_2, T_3)) \\ X_{3,1} & \mapsto & t^2 \\ X_{3,2} & \mapsto & T_2 t^2 \\ X_{3,3} & \mapsto & T_3 t, \end{array}$$

con ν_t. De tal forma que $\Delta_{\nu_3} = \Delta_{\hat{\nu}} = \Delta_\nu$, luego tenemos que hallar el cuerpo residual de ν_3. Mediante un cambio de variables

$$\begin{array}{rcl} X_{3,1} & \to & X_{4,2} \\ X_{3,2} & \to & X_{4,3} \\ X_{3,3} & \to & X_{4,1} \end{array}$$

y unas transformaciones monoidales formales

$$\begin{array}{rcl} X_{4,1} & \to & X_{5,1} \\ X_{4,2} & \to & X_{5,1} X_{5,2} \\ X_{4,3} & \to & X_{5,1} X_{5,3}, \end{array}$$

tenemos una valoración ν_5 dada por la composición de la inmersión

$$\begin{array}{rcl}\Psi : \mathbb{L}((X_{5,1}, X_{5,2}, X_{5,3})) & \to & \mathbb{L}((t, T_2, T_3)) \\ X_{5,1} & \mapsto & T_3 t \\ X_{5,2} & \mapsto & \frac{1}{T_3} t \\ X_{5,3} & \mapsto & \frac{T_2}{T_3} t. \end{array}$$

Como $\Psi(X_{5,2}/X_{5,1}) = 1/T_3^2$, es evidente que el residuo $X_{5,2}/X_{5,1} + \mathfrak{m}_\nu$ es trascendente sobre $\mathbb{L}$. Sea $u_2 = \sigma(X_{5,2}/X_{5,1} + \mathfrak{m}_\nu)$, como $\Psi(X_{5,3}/X_{5,1}) = T_2/T_3^2$ es fácil comprobar que $u_3 = \sigma(X_{5,3}/x_{5,1} + \mathfrak{m}_\nu)$ es trascendente sobre $\mathbb{L}(u_2)$, pues el hecho contrario iría en contradicción con que T_2 y T_3 son variables. Así pues, el cuerpo residual de nuestra valoración es

$$\Delta_{\hat{\nu}} = \mathbb{L}\left(\frac{X_{5,2}}{X_{5,1}} + \mathfrak{m}_\nu, \frac{X_{5,3}}{X_{5,1}} + \mathfrak{m}_\nu\right).$$

Deshaciendo los cambios, tenemos

$$X_{5,1} = \frac{X_3 - \sigma(b_3)X_1}{X_1^2},$$

$$X_{5,2} = \frac{X_1^3}{X_3 - \sigma(b_3)X_1},$$

$$X_{5,3} = \frac{X_1(X_2 - \sigma(b_2)X_1)}{X - 3 - \sigma(b_3)X_1},$$

de donde

$$\Delta_{\hat{\nu}} = \mathbb{L}\left(\frac{X_1^5}{(X_3 - \sigma(b_3)X_1)^2}, \frac{X_1^3(X_2 - \sigma(b_2)X_1)}{(X_3 - \sigma(b_3)X_1)^2}\right)$$

como queríamos.

2) Consideremos ahora la inmersión

$$\begin{array}{rcl}\Psi : \mathbb{C}[[X_1, X_2, X_3, X_4]] & \to & \mathbb{C}[[t, T_2, T_3, T_4]] \\ X_1 & \mapsto & t \\ X_2 & \mapsto & T_2 t \\ X_3 & \mapsto & T_2^2 t + T_2 t^2 + T_3 t^3 \\ X_4 & \mapsto & T_2^3 t + T_2^2 t^2 + T_3 t^3 + T_4 t^4, \end{array}$$

donde t, T_2, T_3 y T_4 son nuevas variables sobre $\mathbb{C}$. Notemos también por Ψ a su extensión a los cuerpos de fracciones. La composición de este homomorfismo inyectivo con la función de orden en t nos da una valoración, $\nu = \nu_t \circ \Psi$, de $\mathbb{C}((X_1, X_2, X_3, X_4))/\mathbb{C}$, discreta, de rango uno y centrada en el ideal maximal. Es evidente que ningún residuo $X_i/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$, $i = 2, 3$ ó 4, es racional sobre $\mathbb{C}$, como los valores de todas las variables son iguales a 1, estamos en situación de aplicar la construcción del cuerpo residual dada en la sección B de este capítulo.
Como $X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es trascendente sobre $\mathbb{C}$, tomo $u_2 = \sigma(X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu)$. Por las notas II–B.4, sabemos que se puede construir σ a medida que vamos ampliando el cuerpo base $\mathbb{C}$ hacia el cuerpo residual. Tomemos entonces $u_2 = X_2/X_1$ como representante del residuo $X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$.
¿Es $X_3/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ algebraico sobre $\Delta_2 = \mathbb{C}(X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu)$? Es evidente que

$$\nu\left(\frac{X_3}{X_1} - \frac{X_2^2}{X_1^2}\right) = \nu\left(\frac{X_1X_3 - X_2^2}{X_1^2}\right) = 3 - 2 = 1 > 0.$$

Si tomamos el polinomio

$$P(Z) = Z - \left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right)^2 \in \mathbb{C}\left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right)[Z],$$

tenemos que $P(X_3/X_1 + \mathfrak{m}_\nu) = 0 + \mathfrak{m}_\nu$, luego $X_3/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es algebraico. Tomemos

$$u_{3,1} = \sigma\left(\frac{X_3}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right) = \sigma\left(\frac{X_2^2}{X_1^2} + \mathfrak{m}_\nu\right) = u_2^2.$$

El valor del elemento $X_3 - u_{3,1}X_1$ es 2, así que tenemos que comprobar si

$$\frac{X_3 - u_{3,1}X_1}{X_1^2} + \mathfrak{m}_\nu$$

es algebraico sobre Δ_2. De nuevo observamos que

$$\nu\left(\frac{X_3 - u_{3,1}X_1}{X_1^2} - \frac{X_2}{X_1}\right) = 1 > 0,$$

luego es raíz del polinomio

$$P(Z) = Z - \left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right) \in \Delta_2[Z].$$

Sea
$$u_{3,2} = \sigma\left(\frac{X_3 - u_{3,1}X_1}{X_1^2} + \mathfrak{m}_\nu\right) = \sigma\left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right) = u_2.$$
Como $\nu(X_3 - u_{3,1}X_1 - u_{3,2}X_1^2) = 3$, tenemos que comprobar si
$$\frac{X_3 - u_{3,1}X_1 - u_{3,2}X_1^2}{X_1^3} + \mathfrak{m}_\nu$$
es algebraico o no sobre Δ_2. En este caso, como
$$\Psi\left(\frac{X_3 - u_{3,1}X_1 - u_{3,2}X_1^2}{X_1^3}\right) = T_3,$$
es evidente que este residuo es trascendente. Sea entonces
$$u_3 = \sigma\left(\frac{X_3 - u_{3,1}X_1 - u_{3,2}X_1^2}{X_1^3} + \mathfrak{m}_\nu\right),$$
que, sustituyendo los $u_{3,i}$ por su valor en función de u_2, podemos escribir
$$u_3 = \frac{X_1X_3 - X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^4}.$$
Tomemos
$$\Delta_3 = \mathbb{C}\left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu,\ \frac{X_1X_3 - X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^4} + \mathfrak{m}_\nu\right).$$
Ahora hemos de aplicar este algoritmo a la variable X_4. El residuo $X_4/X_1 + \mathfrak{m}_\nu$ es algebraico sobre Δ_3, pues es raíz del polinomio
$$P(Z) = Z - \left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right)^3.$$
Sea $u_{4,1} = \sigma(X_4/X_1 + \mathfrak{m}_\nu)$. Es evidente que $u_{4,1} = u_2^3$.
El valor del elemento $X_4 - u_{4,1}X_1$ es 2, así que tenemos que ver si el residuo
$$\frac{X_4 - u_{4,1}X_1}{X_1^2} + \mathfrak{m}_\nu$$
es algebraico sobre Δ_3. Como
$$\nu\left(\frac{X_4 - u_{4,1}X_1}{X_1^2} - \frac{X_2^2}{X_1^2}\right) = 1 > 0,$$

tenemos que este elemento es algebraico sobre Δ_3, pues es raíz de

$$P(Z) = Z - \left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu\right)^2.$$

Sea

$$u_{4,2} = \sigma\left(\frac{X_4 - u_{4,1}X_1}{X_1^2} + \mathfrak{m}_\nu\right) = u_2^2.$$

$\nu(X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2) = 3$, comprobemos que el residuo de

$$\frac{X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2}{X_1^3}$$

es algebraico sobre Δ_3, ya que es raíz de

$$P(Z) = Z - \left(\frac{X_1X_3 - X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^4} + \mathfrak{m}_\nu\right) \in \Delta_3[Z].$$

Tomemos ahora

$$u_{4,3} = \sigma\left(\frac{X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2}{X_1^3} + \mathfrak{m}_\nu\right) = u_3.$$

El valor de $X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2 - u_{4,3}X_1^3$ es cuatro. En este caso tenemos que

$$\Psi\left(\frac{X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2 - u_{4,3}X_1^3}{X_1^4}\right) = T_4,$$

que es, evidentemente, trascendente sobre Δ_3. Sea entonces

$$u_4 = \sigma\left(\frac{X_4 - u_{4,1}X_1 - u_{4,2}X_1^2 - u_{4,3}X_1^3}{X_1^4} + \mathfrak{m}_\nu\right) =$$

$$= \frac{X_1^2X_4 - X_2^3 - X_1^2X_2^2 - X_1^2X_3 - X_1X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^6}.$$

Luego el cuerpo residual de la valoración es

$$\Delta_{\hat{\nu}} = \mathbb{C}\left(\frac{X_2}{X_1} + \mathfrak{m}_\nu, \frac{X_1X_3 - X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^4} + \mathfrak{m}_\nu,\right.$$

$$\left.\frac{X_1^2X_4 - X_2^3 - X_1^2X_2^2 - X_1^2X_3 - X_1X_2^2 - X_1^2X_2}{X_1^6} + \mathfrak{m}_\nu\right).$$

Entonces, acabamos de ver que, mediante un número finito de transformaciones monoidales y cambios decoordenadas, que podemos resumir

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \longrightarrow & Y_1 \\ X_2 & \longrightarrow & Y_2 \\ X_3 & \longrightarrow & Y_1^2Y_3 + u_{3,1}Y_1 + u_{3,2}Y_1^2 \\ X_4 & \longrightarrow & Y_1^3Y_4 + u_{4,1}Y_1 + u_{4,2}Y_1^2 + u_{4,3}Y_1^3, \end{array}$$

extendemos nuestra valoración a una que es la función de orden usual en $\mathbb{C}((Y_1, Y_2, Y_3, Y_4))|\mathbb{C}$, y el cuerpo residual es

$$\Delta_{\hat{\nu}} = \mathbb{C}\left(\frac{Y_2}{Y_1} + \mathfrak{m}_\nu, \frac{Y_3}{Y_1} + \mathfrak{m}_\nu, \frac{Y_4}{Y_1} + \mathfrak{m}_\nu\right)$$

■

En las secciones anteriores hemos visto que los cuerpos residuales de las valoraciones discretas de rango 1, sobre el cuerpo de series de potencias $\mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$, centradas en el ideal maximal, tienen grado de trascendencia menor o igual que $n-1$ sobre $\mathbb{K}$. También, como consecuencia de la construcción dada, hemos comprobado que la función de orden usual es una valoración cuyo cuerpo residual tiene grado de trascendencia exactamente $n-1$. Acabamos de ver unos ejemplos de valoraciones que no son funciones de orden y tal que, sin embargo, su cuerpo residual tiene grado de trascendencia exáctamente $n-1$. Pero esto no es siempre así, ya en [Bri86] se da un ejemplo de una valoración ν sobre $\mathbb{K}((X_1, X_2, X_3))$ de dimensión 1. En esta sección vamos a construir ejemplos de valoraciones de dimensión la que queramos entre 1 y $n-1$, lo que probaría el siguiente

Teorema II–C.2 Dado cualquier número m entre 1 y n-1, existe $\nu : \mathbb{K}((X_1,\ldots,X_n)) \to \mathbb{Z}$ una valoración discreta de rango 1, centrada en M_n, tal que el grado de trascendencia del cuerpo residual de ν, $\Delta_{\hat{\nu}}$, es m.

Consideremos para ello el siguiente homomorfismo:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!] & \to & \overline{\mathbb{K}(u)}[\![t]\!] \\ & X_1 & \mapsto & t \\ & X_2 & \mapsto & ut \\ & X_i & \mapsto & \sum_{j\geq 1} u^{1/p_i^j} t^j \end{array}$$

donde $\overline{\mathbb{K}(u)}$ es el cierre algebraico de $\mathbb{K}(u)$ y $2 < p_3 < \ldots < p_n$ números primos.

Lema II–C.3 φ es inyectivo.

Demostración. Sean $K_2 = \mathbb{K}(u)$ y

$$K_i \doteq \mathbb{K}(u, \{u^{1/p_3^j}, j \geq 1\}, \ldots, \{u^{1/p_i^j}, j \geq 1\})$$

para $i \geq 3$.

Razonemos por reducción al absurdo. Sea $f \neq 0$, $f \in \ker(\varphi)$, $f \in M = (X_1,\ldots,X_n)$. Sea m el índice más alto tal que $f \in \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_m]\!]$.
Si $\underline{m = 1 \text{ ó } 2}$, el resultado es claro.
Si $\underline{m = 3}$, sea $\bar{f} = f(\varphi(X_1), \varphi(X_2), X_3) \in K_2[\![t, X_3]\!]$. Consideremos el homomorfismo $\psi : K_2[\![t, X_3]\!] \to \overline{\mathbb{K}((u))}[\![t]\!]$ definido por $\psi(t) = t$ y $\psi(X_3) = \sum_{j\geq 1} u^{1/p_3^j} t^j$. Sabemos que $\bar{f}$ pertenece al núcleo de ψ y que éste es primo por ser un homomorfismo entre dominios de integridad. Podemos escribir $\bar{f} = t^r g$, donde $r \geq 0$ y t no divide a g, esto quiere decir que g tienemonomios cuya única variable es X_3, sea $s > 0$ el menor tal que X_3 es uno de estos términos. Por el Teorema Preparatorio de Weierstrass, se tiene $g = Ug'$, donde U es una unidad tal que $U(0,0) \neq 0$ y

$$g' = X_3^s + a_1(t) X_3^{s-1} + \ldots + a_s(t).$$

Como U es unidad, $g' \in ker(\psi)$, luego

$$\psi(g') = g'(t, \sum_{j\geq 1} u^{1/p_3^j} t^j) = 0.$$

Pero esto es contradictorio ya que, por el Teorema de Puiseux, sabemos que todas las raíces de g' están en $K_2[\![t^{1/q}]\!]$ para un cierto $q \in \mathbb{Z}$.
Si $\underline{m > 3}$ el esquema de la prueba es idéntico al anterior, sea

$$\bar{f} = f(\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_{m-1}), X_m) \in K_{m-1}[\![t, X_m]\!],$$

consideremos el homomorfismo $\psi : K_{m-1}[\![t, X_m]\!] \to \overline{\mathbb{K}((u))}[\![t]\!]$ dado por $\psi(t) = t$ y $\psi(X_m) = \varphi(X_m)$. Al igual que antes, podemos escribir $\bar{f} = t^r h$ donde $h \in ker(\psi)$. Aplicando el Teorema Preparatorio de Weierstrass, tenemos $h = Uh'$ donde U es una unidad tal que $U(0,0) \neq 0$ y

$$h' = X_m^s + b_1(t)X_m^{s-1} + \ldots + b_s(t) \in ker(\psi),$$

es decir, $h'(t, \sum_{j\geq 1} u^{1/p_m^j} t^j) = 0)$. Pero esto, de nuevo por el Teorema de Puiseux, es una contradicción. Como $ker(\psi)$ es primo, puedo suponer que h' es irreducible en $K_{m-1}[\![t]\!][X_m]$. En estas condiciones el Teorema dice que, para obtener los coeficientes de una raíz de $h' = 0$ (como serie de Puiseux en t con coeficientes en $\mathbb{K}(u)$) tengo que resolver *sólo un número finito* de ecuaciones algebraicas de grado mayor que 1 en K_{m-1}. Dentro de K_{m-1} no se puede obtener u^{1/p_m}, y con un número finito de ecuaciones algebraicas sólo podemos obtener un *número finito de potencias de* u^{1/p_m^j} pero no todas. Esto prueba el teorema. ∎

El siguiente lema nos da practicamente la prueba del teorema II–C.2:

Lema II–C.4 ∎ Existe una valoración $\nu : \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n)) \to \mathbb{Z}$ discreta de rango 1 cuyo cuerpo residual, $\Delta_{\hat{\nu}}$, tiene grado de trascendencia 1.

Demostración. Ya sabemos que el homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \to \overline{\mathbb{K}(u)}[\![t]\!],$$

definido anteriormente, es inyectivo. Esto nos permite definir una valoración $\nu = \nu_t\varphi$, donde ν_t es la valoración en $\overline{\mathbb{K}(u)}((t))$ dada por el orden en t y notamos por la misma letra φ a la extensión de esta inmersión a los cuerpos de fracciones. Sea $\alpha = X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu \in \Delta_{\hat{\nu}}$. Vamos a probar que $\sigma(\alpha) \notin \mathbb{K}$, lo cual implica que, como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, $\sigma(\alpha)$ es trascendente sobre $\Delta_{\hat{\nu}}$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\sigma(\alpha) \in \mathbb{K}$. Entonces existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $X_2/X_1 + \mathfrak{m}_\nu = a + \mathfrak{m}_\nu$, luego

$$\frac{X_2 - aX_1}{X_1} \in \mathfrak{m}_\nu,$$

lo que implica que $\nu(X_2 - aX_1) > 1$. Pero, por otro lado,

$$\varphi(X_2 - aX_1) = (u - a)t,$$

luego $\nu(X_2 - aX_1) = 1$ y se llega a contradicción. Por tanto, el grado de trascendencia de $\Delta_{\hat{\nu}}$ sobre $\mathbb{K}$ es mayor o igual que 1.

Continuando con la aplicación del algoritmo dado en la sección anterior, vamos a ver que todos los residuos que se obtienen a partir de las otras variables $X_2, \ldots, X_n$ son algebraicos sobre $\mathbb{K}((u))$. Sea $u_{31} = \sigma(u^{1/p_3} + \mathfrak{m}_\nu)$, que es algebraico sobre $\mathbb{K}(u)$ por serlo $u^{1/p_3} + \mathfrak{m}_\nu$, como

$$\varphi(X_3/X_1) = u^{1/p_3} + \sum_{j \geq 2} u^{1/p_3^j} t^{j-1},$$

se tiene que

$$\nu(X_3 - u_{31}X_1) = \nu_t\varphi(X_3 - u_{31}X_1) = \nu_t\left(\sum_{j \geq 2} u^{1/p_3^j} t^j\right) = 2 > 1.$$

Tomemos ahora $u_{32} = \sigma(u^{1/p_3^2} + \mathfrak{m}_\nu)$ que es algebraico sobre $\mathbb{K}(u, u^{1/p_3})$ por serlo $u^{1/p_3^2} + \mathfrak{m}_\nu$. Como

$$\varphi\left(\frac{X_3 - u_{31}X_1}{X_1^2}\right) = u^{1/p_3^2} + \sum_{j \geq 3} u^{1/p_3^j} t^{j-2},$$

se tiene que

$$\nu(X_3 - u_{31}X_1 - u_{32}X_1^2) = \nu_t\varphi(X_3 - u_{31}X_1) = \nu_t\left(\sum_{j \geq 3} u^{1/p_3^j} t^j\right) = 3 > 2.$$

De esta manera entramos en un proceso infinito que nos da la siguiente extensión algebraica de subcuerpos de $\Delta_{\hat{\nu}}$

$$\mathbb{K}(u) \subseteq \mathbb{K}\left(u, \{u^{1/p_3^j}, j \geq 1\}\right).$$

De igual manera, se prueba que la imagen por σ de todos los residuos obtenidos a partir de la variable X_i, nos dan la siguiente extensión algebraica infinita

$$\mathbb{K}\left(u, \{u^{1/p_3^j}, j \geq 1\}, \ldots, \{u^{1/p_{i-1}^j}, j \geq 1\}\right) \subseteq$$

$$\mathbb{K}\left(u, \{u^{1/p_3^j}, j \geq 1\}, \ldots, \{u^{1/p_{i-1}^j}, j \geq 1\}, \{u^{1/p_i^j}, j \geq 1\}\right)$$

de subcuerpos de $\Delta_{\hat{\nu}}$.

Es decir, el cuerpo residual de la valoración es

$$\Delta_{\hat{\nu}} = \mathbb{K}\left(u, \{u^{1/p_3^j}, j \geq 1\}, \ldots, \{u^{1/p_n^j}, j \geq 1\}\right),$$

que es una extensión algebraica infinita de $\mathbb{K}(u)$. Luego el grado de trascendencia de $\Delta_{\hat{\nu}}$ sobre $\mathbb{K}$ es 1.

■

Con este resultado estamos en situación de dar la prueba del teorema II–C.2:

Demostración. Tenemos que encontrar una valoracion discreta de rango 1,

$$\nu : \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n)) \to \mathbb{Z},$$

de grado de trascendencia $m < n$. Para ello basta considerar el siguiente homomorfismo inyectivo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi \quad \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!] & \to & \overline{\mathbb{K}(u_2, \ldots, u_m)}[\![t]\!] \\ X_1 & \mapsto & t \\ X_i & \mapsto & u_i t \text{ si } 2 \leq i \leq m \\ X_k & \mapsto & \sum_{j \geq 1} u_2^{1/p_k^j} t^j \text{ si } i > m \end{array}$$

y tomar la valoración $\nu := \nu_t \varphi$ como antes. ■

CAPÍTULO III

Ramificación de valoraciones

III–A LA FUNCIÓN DE ORDEN

Sea Δ un cuerpo que contiene a otro algebraicamente cerrado de característica cero $\mathbb{K}$. Sea t una variable y consideremos el anillo $\Delta[\![t]\!]$ de las series formales de potencias en t, sea $\Delta((t))$ su cuerpo de fracciones. Consideremos sobre $\Delta((t))$ la función de orden ν_t, que es una valoración discreta de rango uno, cuyo anillo es $\Delta[\![t]\!]$, y cuyo cuerpo residual es Δ.

Obsérvese que el estudio de la ramificación de esta función de orden es fundamental para el caso más general de las valoraciones discretas de rango uno sobre $K_n = \mathbb{K}((X_1, \ldots, X_n))$ centradas en el ideal maximal, pues, mediante la técnica de la compleción, hemos visto que estas valoraciones se pueden escribir como la composición de la inmersión de K_n en $\Delta_\nu((t))$ con la función de orden sobre $\Delta_\nu((t))$.

Sea entonces

$$Q(Z) = Z^p + c_1(t)Z^{p-1} + \ldots + c_{p-1}(t)Z + c_p(t) \in \Delta[\![t]\!][Z]$$

un polinomio de Weierstrass irreducible, sea ζ una raíz de Q en alguna clausura algebraica de $\Delta((t))$, y consideremos el cuerpo $\Delta((t))(\zeta)$. Nuestro propósito es estudiar las extensiones de ν_t a $\Delta((t))(\zeta)$. Empezamos con un resultado técnico.

Lema III–A.1 ■ Sea Δ_2 una extensión finita de Galois de Δ, con grupo de Galois G. Sea $p_1 > 0$ un entero y G_{p_1} el grupo de las raíces p_1-ésimas de 1 en Δ. Entonces $\Delta_2((t^{1/p_1}))$ es una extensión finita de Galois de $\Delta((t))$ con grupo $G \times G_{p_1}$ actuando como sigue: si $(\varphi, \varepsilon) \in G \times G_{p_1}$ y $\psi = \sum_i \alpha_i t^{i/p_1} \in \Delta_2((t^{1/p_1}))$, entonces

$$(\varphi, \varepsilon)(\psi) = \sum_i \varphi(\alpha_i)\varepsilon^i t^{i/p_1}.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$P = \prod_{(\varphi,\varepsilon)\in G\times G_{p_1}} (Z - (\varphi, \varepsilon)(\eta)) \in \Delta((t))[Z].$$

Podemos extender la acción de $G \times G_{p_1}$ sobre $\Delta_2((t^{1/p_1}))$ a $\Delta_2((t^{1/p_1}))[Z]$ haciéndolo actuar sobre los coeficientes de los polinomios. Si $(\varphi', \varepsilon') \in G \times G_{p_1}$ es un elemento cualquiera, entonces

$$(\varphi', \varepsilon')(P) = \prod_{(\varphi,\varepsilon)\in G\times G_{p_1}} (Z - (\varphi'\varphi, \varepsilon'\varepsilon)(\eta)) = P,$$

así que todos los coeficientes de P, como polinomios en Z, son invariantes por todos los elementos de $G \times G_{p_1}$. Esto implica que $P \in \Delta((t))[Z]$, por comparación *término a término* de las series de potencias. ■

Lema III–A.2 ■ La función de orden ν_t tiene una única extensión a $\Delta((t))(\zeta)$.

Demostración. Este lema es consecuencia del teorema de Puiseux para cuerpos no algebraicamente cerrados. Sea Δ^* una clausura algebraica de Δ, consideremos la ecuación $Q = 0$ sobre $\Delta^*((t))$. Entonces se puede aplicar el teorema de Puiseux en esta situación. Así supongamos que ζ es una raíz de la forma

$$\zeta = \sum_{l \geq 1} \alpha_l t^{r_l/p_1}$$

donde $0 \neq \alpha_l \in \Delta^*$, $0 \leq r_1 < r_2 \ldots$, y m.c.d.$(p_1, r_1, r_2, \ldots) = 1$. Todos los α_l generan una extensión algebraica finita Δ_1 de Δ.

Sea Δ_2 la menor extensión de Galois de Δ que contiene a Δ_1, y sea

$$G = \{\varphi_0 = \mathrm{id}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}\}$$

su grupo de Galois. Sea

$$G_{p_1} = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p_1-1}\}$$

el grupo de las raíces p_1-ésimas de 1. Para cualquier (i, j), con $0 \leq i \leq d-1$, $0 \leq j \leq p_1 - 1$, escribiremos

$$\zeta_{ij} = \sum_{l \geq 1} \varphi_i(\alpha_l)\varepsilon_j^{r_l} t^{r_l/p_1}$$

(por supuesto $\zeta_{00} = \zeta$). Los ζ_{ij} no son necesariamente distintos. Por el lema III–A.1, el polinomio

$$\hat{P} = \prod_{i,j}(Z - \zeta_{ij})$$

pertenece a $\Delta[\![t]\!][Z]$. Esto prueba que $Q|\hat{P}$, así que las raíces de Q son las ζ_{ij} que son diferentes. También se tiene que Q es el menor polinomio que tiene a las ζ_{ij} como raíces. Para cualquier (i, j), consideraremos el $\Delta((t))$–isomorfismo

$$\delta_{ij} = (\varphi_i, \varepsilon_j) : \Delta((t))(\zeta) \to \Delta((t))(\zeta_{ij})$$

que envía ζ en ζ_{ij}. Consideraremos también la restricción de la función de orden sobre $\Delta_2((t^{1/p_1}))$ a $\Delta((t))(\zeta_{ij})$. La composición de δ_{ij} con estas restricciones nos da unas valoraciones de $\Delta((t))(\zeta)$ que extienden la función de orden sobre $\Delta((t))$. Es fácil ver que todas estas valoraciones coinciden. En efecto, si

$$\eta = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\zeta + \cdots + \alpha_{p-1}(t)\zeta^{p-1} \in \Delta((t))(\zeta),$$

entonces todos los

$$\delta_{ij}(\eta) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\zeta_{ij} + \cdots + \alpha_{p-1}(t)\zeta_{ij}^{p-1}$$

son conjugados sobre $\Delta((t))$, luego tienen todos el mismo orden.

La unicidad se tiene por lo siguiente: si consideramos la inclusión $\Delta((t)) \hookrightarrow \Delta^*((t))$, la función de orden sobre $\Delta^*((t))$ es la única extensión de la de orden sobre $\Delta((t))$. Por argumentos basados en series de Puiseux, si consideramos la inclusión $\Delta^*((t)) \hookrightarrow \Delta^*((t^{1/p_1}))$, sabemos que la función de orden sobre $\Delta^*((t^{1/p_1}))$ es la única que extiende a la de orden sobre $\Delta^*((t))$. Ahora bien, si la función de orden sobre $\Delta((t))$ tuviera dos extensiones diferentes a $\Delta((t))(\zeta)$, por la fórmula de ramificación de valoraciones, podríamos construir dos extensiones diferentes de ν_t a $\Delta^*((t^{1/p_1}))$, lo cual no es posible. Esto prueba el lema. ∎

Acabamos de ver que la función de orden sobre $\Delta((t))(\zeta)$ es la única extensión de la función de orden ν_t sobre $\Delta((t))$. Denotaremos por ν_1 a la función de orden sobre $\Delta((t))(\zeta)$. El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema III–A.3 ∎ Bajo las notaciones del lema III–A.2, el índice de ramificación reducido de ν_1, respecto de ν_t en $\Delta((t))$, es p_1. Además el grado relativo es p/p_1.

Demostración. Es claro que $\nu_1(\Delta((t))(\zeta)) \subseteq \mathbb{Z} \cdot (1/p_1)$. Luego es suficiente demostrar que existe un elemento $\omega \in \Delta((t))(\zeta)$ tal que $\nu_1(\omega) = 1/p_1$.

Sea $\omega_1 = \zeta$; entonces $\nu_1(\omega_1) = r_1/p_1$. Sea $b \geq 1$ un entero y supongamos probado que para todo entero l, $1 \leq l \leq b$, existe un elemento $\omega_l \in \Delta((t))(\zeta)$ tal que $\nu_1(\omega_l) = r_l/p_1$.

Consideremos el elemento

$$\zeta' = \sum_{l=1}^{b} \alpha_l t^{r_l/p_1},$$

que es algebraico sobre $\Delta((t))$. Sea $\overline{P}(Z)$ el polinomio mínimo de ζ' sobre $\Delta((t))$. De la forma de ζ' se deduce que $\overline{P}(Z) \in \Delta[\![t]\!][Z]$. Sea $\omega'_{b+1} = \overline{P}(\zeta) \in \Delta((t))(\zeta)$, vamos a estudiar su valor por ν_1.

Sean $\{\zeta'_1 = \zeta', \zeta'_2, \ldots, \zeta'_c\}$ los conjugados diferentes de ζ' sobre $\Delta((t))$, pongamos

$$\bar{P}(Z) = \prod_{i=1}^{c}(Z - \zeta'_i).$$

Entonces

$$\nu_1(\omega'_{b+1}) = \nu_1\left(\prod_{i=1}^{c}(\zeta - \zeta'_i)\right)$$

y en esta situación se tiene que

1) $\nu_1(\zeta - \zeta') = r_{b+1}/p_1$.

2) Para todo $i = 2, \ldots, c$, $\nu_1(\zeta - \zeta'_i) = r_{l_i}/p_1$, con $1 \le l_i \le b$.

Por lo tanto tenemos que

$$\nu_1(\omega'_{b+1}) = \frac{r_{b+1} + \sum_{i=2}^{c} r_{l_i}}{p_1}.$$

Consideremos el elemento $\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i} \in \Delta((t))(\zeta)$. Si tomamos

$$\omega_{b+1} = \frac{\omega'_{b+1}}{\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i}} \in \Delta((t))(\zeta),$$

tenemos

$$\nu_1(\omega_{b+1}) = \nu_1(\omega'_{b+1}) - \nu_1\left(\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i}\right) = \frac{r_{b+1} + \sum_{i=2}^{c} r_{l_i}}{p_1} - \sum_{i=2}^{c} \frac{r_{l_i}}{p_1} = \frac{r_{b+1}}{p_1}.$$

Esto prueba que existe $\omega_l \in \Delta((t))(\zeta)$ tal que $\nu_1(\omega_l) = r_l/p_1$ para todo $l \ge 1$.

Sea $b \in \mathbb{Z}$ tal que m.c.d.$(p_1, r_1, \ldots, r_b) = 1$ y sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_b \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha_0 p_1 + \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_b r_b = 1$. Consideremos el elemento

$$\omega = t^{\alpha_0} \cdot \prod_{l=1}^{b} \omega_l^{\alpha_l} \in \Delta((t))(\nu_t).$$

Entonces

$$\nu_1(\omega) = \nu_1(t^{\alpha_0}) + \sum_{l=1}^{b} \nu_1(\omega_l^{\alpha_l}) = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{b} \alpha_l \frac{r_l}{p_1} = \frac{1}{p_1},$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema. La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la fórmula de ramificación de valoraciones. ∎

Ejemplo III–A.4 ■ Sea ν_t la función de orden en t sobre el cuerpo $\mathbb{C}((t))$. Sea $\zeta = t + t^{6/4} + t^{9/4} + t^3$ una raíz del polinomio irreducible

$$P(Z) = Z^4 - 4t(1+t^2)Z^3 + 2t^2(3t^4 - t + 3 + 6t^2)Z^2 + 4t^3(-t^6 + t - 3t^2 - 1 - 3t^4)Z +$$
$$+ t^4(5t^2 - 2t + 1 + 4t^6 + t^8 + t^5 + 6t^4).$$

Es evidente que la extensión de ν_t al cuerpo $L = \mathbb{C}((t))(\zeta)$ es una valoración ν_1 con índice reducido de ramificación 4 y grado relativo 1. Aplicaremos la construcción dada en la demostración anterior para hallar un elemento $\omega \in L$ de valor $1/4$. Siguiendo la notación usada en esta prueba, tenemos que $p_1 = 4$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $r_3 = 9$ y $r_4 = 12$. El entero r_3 es el primero tal que el m.c.d.$(p_1, r_1, r_2, r_3) = 1$. Por el Lema de Bezout, sabemos que existen unos enteros α_i, con $i = 0, \ldots, 3$, tales que $\alpha_0 p_1 + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 = 1$. Tomamos $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 1$. Hemos de hallar elementos ω_i tales que $\nu_1(\omega_i) = r_i/p_1$ para $i = 1$, 2 y 3. Sea entonces $\omega_1 = \zeta$, es evidente que $\nu_1(\omega_1) = 1$. El polinomio mínimo de $\zeta'_1 = t$ es, evidentemente, $\overline{P}_1(Z) = Z - t$. Sea $\omega'_2 = \overline{P}_1(\zeta)$, es claro que $\nu_1(\omega'_2) = 3/2$, luego tomamos $\omega_2 = \omega'_2$. Tomemos ahora el polinomio mínimo de $\zeta'_2 = t + t^{6/4}$:

$$\overline{P}_2(Z) = Z^2 - 2tZ + t^2 - t^3,$$

de raíces $\zeta'_{21} = \zeta'_2$ y $\zeta'_{22} = t - t^{6/4}$. Consideremos el elemento $\omega'_3 = \overline{P}_2(\zeta)$, tenemos que

$$\nu_1(\omega'_3) = \nu_1\left(\prod_{i=1}^{2}(\zeta - \zeta'_{2i})\right) = \frac{15}{4}.$$

El elemento que buscamos es $\omega_3 = \omega'_3/\omega_2$. Para finalizar, nuestro elemento de valor $1/4$ es

$$\omega = \frac{\omega_3}{t^2}.$$

III–B RAMIFICACIÓN DE VALORACIONES EN $\mathbb{K}((X_1,\ldots,X_N))$

Sean $R = \mathbb{K}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$, $K_n = \mathbb{K}((X_1,\ldots,X_n))$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y sea ν una valoración discreta de rango 1 centrada en el ideal maximal $M_n = (X_1,\ldots,X_n)$. Sean $\widehat{K}$, $\widehat{\nu}$, $R_{\widehat{\nu}}$ y $\mathfrak{m}_{\widehat{\nu}}$ como siempre. Fijemos una $\mathbb{K}$–sección $\sigma : \Delta_{\widehat{\nu}} \to R_{\widehat{\nu}}$ del homomorfismo natural $R_{\widehat{\nu}} \to \Delta_{\widehat{\nu}}$ y un elemento $\theta \in R_{\widehat{\nu}}$ de valor 1. Se tiene así un $\mathbb{K}$–isomorfismo

$$\Phi = \Phi_{\sigma,\theta} : \Delta_{\widehat{\nu}}[\![t]\!] \to R_{\widehat{\nu}}$$

definido por

$$\Phi\left(\sum_{i\geq 0} \alpha_i t^i\right) = \sum_{i\geq 0} \sigma(\alpha_i)\theta^i.$$

Pongamos

$$\Phi^{-1}(X_1) = \sum_{i\geq 1} \alpha_{1i} t^{r_{1i}}, \ldots, \Phi^{-1}(X_n) = \sum_{i\geq 1} \alpha_{ni} t^{r_{ni}},$$

con los α_{ij} no todos nulos y para todo $j = 1,\ldots,n$, $0 < r_{j1} < r_{j2} < \ldots$ Entonces $\nu(X_j) = r_{j1}$, $j = 1,\ldots,n$.

Denotemos también por Φ^{-1} el isomorfismo de $\widehat{K}$ en $\Delta_{\widehat{\nu}}((t))$ que se obtiene, por ampliación a sus cuerpos de fracciones, del isomorfismo $\Phi^{-1} : R_{\widehat{\nu}} \to \Delta_{\widehat{\nu}}[\![t]\!]$.

Por último, designaremos por Ψ la inmersión de K_n en $\Delta_{\widehat{\nu}}((t))$, $\Psi : K_n \to \Delta_{\widehat{\nu}}((t))$, obtenida al restringir el isomorfismo $\Phi^{-1} : \widehat{K} \to \Delta_{\widehat{\nu}}((t))$ a K_n.

Nota III–B.1 ■ Sea L una extensión finita de K_n. Se trata de estudiar las extensiones de la valoración ν de $K_n|\mathbb{K}$ al cuerpo L.

Sea $z \in L$ un elemento primitivo de la extensión L de K_n, es decir, $L = K_n(z)$. Eligiendo $z \in L$ de tal forma que sea entero sobre R, se tiene que el polinomio mínimo de z sobre K_n es

$$f(Z) = Z^m + a_1(X_1,\ldots,X_n)Z^{m-1} + \ldots +$$

$$+ a_{m-1}(X_1,\ldots,X_n)Z + a_m(X_1,\ldots,X_n),$$

con todos sus coeficientes en R, pues es íntegramente cerrado.

Supongamos que $a_n(X_1,\ldots,X_n)$ fuese una unidad en R y sea $a \in \mathbb{K}$ una raíz no nula de la ecuación

$$a^m + a_1(0,\ldots,0)a^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(0,\ldots,0)a + a_m(0,\ldots,0).$$

Entonces el elemento $z' = z - a$ es entero sobre R y su polinomio mínimo sobre K_n es

$$f'(Z) = Z^m + a'_1(X_1,\ldots,X_n)Z^{m-1} + \ldots +$$

$$+ a'_{m-1}(X_1,\ldots,X_n)Z + a'_m(X_1,\ldots,X_n),$$

donde $f'(z-a) = f(z)$. En este caso $a'_m(0,\ldots,0) = f(0,\ldots,0,a) = 0$ y así $a'_n(X_1,\ldots,X_n)$ es una no unidad en R. Entonces podemos considerar desde el principio un polinomio $f(Z)$ tal que $a_n(X_1,\ldots,X_n)$ es no unidad en R. Por el Teorema Preparatorio de Weierstrass, podemos suponer que ningún otro $a_i(X_1,\ldots,X_n)$ es una unidad en R, con lo que $f(Z) \in R[Z]$ es un polinomio de Weierstrass.

Consideremos la inmersión $\Psi : K_n \to \Delta_{\hat{\nu}}((t))$, sea el polinomio

$$\bar{f}(Z) = Z^m + \bar{a}_1(t)Z^{m-1} + \ldots + \bar{a}_{m-1}(t)Z + \bar{a}_m(t),$$

donde $\bar{a}_i(t) = \Psi(a_i(X_1,\ldots,X_n)) \in \Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!]$ (pues Ψ restringida a R es una inmersion de R en $\Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!]$). Sea ξ_{i1} una raíz de la ecuación $\bar{f}_i(Z) = 0$, donde $\bar{f}(Z) = \bar{f}_1(Z)\ldots\bar{f}_h(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$. Sea ahora la inmersión $\Psi' : K_n[Z] \to \Delta_{\hat{\nu}}((t))[Z]$, donde

$$\Psi'\left(\sum e_j Z^j\right) = \sum \Psi(e_j)Z^j.$$

Es evidente que Ψ' amplia a Ψ. Como $\Psi'(f(Z)) = \bar{f}(Z)$, la imagen del ideal (f) está contenida en el ideal $(\bar{f}_i)$. Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_n[Z] \arrow[r, "\Psi'"] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t))[Z] \arrow[d, "\mu_i"] \\
K_n[Z]/(f) \arrow[r, "\lambda_i'"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t))[Z]/(\bar{f}_i)
\end{tikzcd}$$

donde μ y μ_i son los homomorfismos naturales, y

$$\lambda_i'\left(\left(\sum e_j Z^j\right)+(f)\right)=\Psi'\left(\sum e_j Z^j\right)+(\bar{f}_i).$$

Pero sabemos que $L = K_n(z) \simeq K(Z)/(f)$ bajo un isomorfismo que lleva z sobre $Z+(f)$ y, análogamente, que $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1}) \simeq \Delta_{\hat{\nu}}((t))[Z]/(\bar{f}_i)$ bajo un isomorfismo que lleva ξ_{i1} sobre $Z+(\bar{f}_i)$. Componiendo λ_i' con estos isomorfismos se tiene una inmersión $\lambda_i : L \to \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t)) \arrow[d] \\
L \arrow[r, "\lambda_i"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones naturales. Además $\lambda_i(z) = \xi_{i1}$.

Sea $\Delta^*_{\hat{\nu}}$ el cierre algebraico de $\Delta_{\hat{\nu}}$, entonces, por un razonamiento tipo Puiseux, $\xi_{i1} \in \Delta^*_{\hat{\nu}}[\![t^{1/q_i}]\!]$ para algún entero positivo q_i. Sea ν'_i la restricción a $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})$ de la valoración canónica de $\Delta^*_{\hat{\nu}}((t^{1/q_i}))$ sobre $\Delta^*_{\hat{\nu}}$, es decir, aquella cuyo anillo de valoración es $\Delta^*_{\hat{\nu}}[\![t^{1/q_i}]\!]$; esta valoración hace corresponder a cada elemento del cuerpo $\Delta^*_{\hat{\nu}}((t^{1/q_i}))$ su orden fraccionario en t. Sabemos, por el teorema III–A.2, que ν'_i es la única extensión de ν_t al cuerpo $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{i1})$. Considerando λ_i como una inmersión de L en $\Delta^*_{\hat{\nu}}((t^{1/q_i}))$, se compone con ν'_i obteniéndose una aplicación

$$\nu_i : L \setminus \{0\} \to \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{1}{q_i}\right),$$

que es una valoración de $L|\mathbb{K}$ discreta de rango uno. La restricción de ν_i a K_n es discreta de rango uno, luego su anillo contiene a R. Como debido a la conmutatividad del diagrama anterior es

$$\nu_i(X_j) = \nu'_i(\lambda_i(X_j)) = \nu_t(\Psi(X_j)) = \nu(X_j)\ \forall j = 1,\ldots,n,$$

tenemos $\nu_{i|K} = \nu$, por construcción de estas valoraciones discretas. Así ν_i es una ampliación de ν a L que se realiza como sigue: si $\eta \in L$,

$$\eta = \rho_0 + \rho_1 z + \ldots + \rho_{m-1} z^{m-1},\quad \rho_j \in K_n,$$

se tiene

$$\nu_i(\eta) = \nu'_i(\overline{\rho}_0 + \overline{\rho}_1 \xi i1 + \ldots + \overline{\rho}_{m-1}\xi_{i1}^{m-1}),$$

donde $\overline{\rho}_j = \rho_j(\Psi(X_1),\ldots,\Psi(X_n))$. ∎

A continuación vamos a probar que ν_i no depende de la elección de la raíz ξ_{i1}, es decir, que ν_i no varía al sustituir ξ_{i1} por una conjugada sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$. Supongamos elegida otra raíz ξ_{ij}, conjugada con ξ_{i1}, sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$ y sea $\lambda_{ij} : L \to \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_{ij})$ la inmersión correspondiente, construida como λ_i (obsérvese que $\lambda_i = \lambda_{i1}$). Se tiene la siguiente

Proposición III–B.2 ∎ $\nu'_i\lambda_{ij} = \nu_i$ para todo $j = 1,\ldots,m_i$.

Demostración. Llamemos Δ_2 a la menor extensión de Galois de $\Delta_{\hat{\nu}}$ que contiene a todos los coeficientes de las raíces ξ_{ij}, de manera análoga a lo hecho en el lema III–A.2.

Sea $\sigma_{ij} \in \mathrm{Gal}(\Delta_2((t^{1/q_i}))|\Delta_{\hat{\nu}}((t)))$ tal que $\sigma_{ij}(\xi_{i1}) = \xi_{ij}$. Si $\eta \in L$, $\eta = \rho_0 + \rho_1 z + \ldots + \rho_{m-1} z^{m-1}$, es

$$\sigma_{ij}\lambda_i(\eta) = \sigma_{ij}\left(\sum_{l=0}^{m-1} \Psi(\rho_l)\xi_{ij}^l\right) = \sum_{l=0}^{m-1} \Psi(\rho_l)\xi_{ij}^l = \lambda_{ij}(\eta),$$

luego $\sigma_{ij}\lambda_i = \lambda_{ij}$. Así $\nu_i'\lambda_{ij} = \nu_i'\sigma_{ij}\lambda_i$ y, para probar lo que queremos, basta ver que $\nu_i'\sigma_{ij} = \nu_i'$. Pero esto es trivial, pues un elemento de $\Delta_{\hat{\nu}}^*((t^{1/q_i}))$ no cambia de orden al sustituir t^{1/q_i} por $\delta t^{1/q_i}$, donde δ es una raíz q_i–ésima de 1. ∎

Nota III–B.3 ∎ En el capítulo anterior (teorema II–A.4) hemos probado que, fijada la sección σ, se puede construir un elemento de valor 1 mediante un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas. Recordemos que el homomorfismo Ψ ha sido construído a partir de una sección σ y de un elemento θ de valor uno, supongamos que θ es el elemento obtenido mediante la construcción dada en el capítulo anterior. Tenemos, por la propia construcción, que $\theta \in \overline{\mathbb{K}}((X_1, \ldots, X_n))$, donde $\overline{\mathbb{K}}$ es un subcuerpo de $\Delta_{\hat{\nu}}$ y $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ es una extensión algebraica finita.

Por tanto, fijados la sección σ y el elemento $\theta \in \overline{\mathbb{K}}((X_1, \ldots, X_n))$, es evidente que $\Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!] \subset \Psi(\overline{K}_n)$, donde $\overline{K}_n = \overline{\mathbb{K}}((X_1, \ldots, X_n))$. Haremos uso de este hecho en las demstraciones de los siguientes resultados. ∎

Teorema III–B.4 ∎ Sean i, j enteros distintos, $1 \leq i, j \leq h$. Si $\nu_i = \nu_j$, entonces ξ_{i1} y ξ_{j1} son conjugados sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que ξ_{i1} y ξ_{j1} no son conjugados sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$. Entonces existirá un entero positivo b tal que

$$\xi'_{i1} = \sum_{l=1}^{b} \omega_{i1l} t^{r_l/q_i} \text{ y } \xi'_{j1} = \sum_{l=1}^{b} \omega_{j1l} t^{s_l/q_i}$$

no sean conjugadas sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$. Elegimos b mínimo.

Sea $\overline{P}(Z) \in \Delta_{\hat{\nu}}((t))[Z]$ el polinomio mínimo de ξ'_{i1} sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$. Es claro que el grado p de $\overline{P}(Z)$ es estrictamente menor que m, ya que, al ser ξ_{i1} y ξ_{j1} dos elementos no conjugados sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$, el polinomio mínimo de ξ_{i1} es de grado estrictamente menor que m.

Además, de la forma ξ'_{i1} se deduce que $\overline{P}(Z)$ pertenece a $\Delta_{\hat{\nu}}[t][Z]$, luego por la nota III–B.3 existe un polinomio $P(Z) \in \overline{K}_n[Z]$ que verifica que $\Psi'(P(Z)) = \overline{P}(Z)$.

Sean $\{\xi'_{i11} = \xi'_{i1}, \xi'_{i12}, \ldots, \xi'_{i1p}\}$ los conjugados de ξ'_{i1} sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$, y escribamos

$$\overline{P}(Z) = \prod_{c=1}^{p} \left(Z - \xi'_{i1c}\right).$$

$\overline{P}(\xi_{i1})$ Y $\overline{P}(\xi_{j1})$ no pueden ser los dos iguales a cero, pues ξ_{i1} y ξ_{j1} no son conjugados. Supongamos que ambos son no nulos, pues, en caso contrario, el resultado es trivial.

Consideremos dos casos:

1) $\boxed{b=1}$ En este caso, para todo $c = 1,\ldots,p$ es

$$\nu_t(\xi_{j1} - \xi'_{i1c}) = \min\left\{\frac{s_1}{q_j}, \frac{r_1}{q_i}\right\}.$$

De otro lado,

$$\nu_t(\xi_{i1} - \xi'_{i1}) \geq \frac{r_2}{q_i}$$

mientras que

$$\nu_t(\xi_{i1} - \xi'_{i1c}) = \frac{r_1}{q_i}$$

para todo $c = 2,\ldots,p$. Esto prueba que

$$\nu_t(\overline{P}(\xi_{j1})) < \nu_t(\overline{P}(\xi_{i1})),$$

y, por tanto, $v_i \neq v_j$.

2) $\boxed{b > 1}$ Sea p' el grado del polinomio mínimo de

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{i1l} t^{r_l/q_i},$$

y sea $p'' = p/p'$. Los factores lineales que aparecen en la descomposición de $\overline{P}(Z)$ se pueden dividir en p' grupos, cada grupo conteniendo p'' polinomios $Z - \xi'_{i1c}$ que tengan iguales las sumas de los $b-1$ primeros sumandos.

Sea $Q_1(Z)$ el producto de los polinomios del grupo que tengan la suma de los $b-1$ primeros términos igual a

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{j1l} t^{s_l/q_j},$$

y sea $Q_2(Z)$ el correspondiente a

$$\sum_{l=1}^{b-1} \omega_{i1l} t^{r_l/q_i}.$$

Entonces

$$v_t(Q_1(\xi_{j1})) = p'' \cdot \min\left\{\frac{s_b}{q_j}, \frac{r_b}{q_i}\right\}$$

y

$$v_t(Q_2(\xi_{i1})) \geq \frac{r_{b+1}}{q_i} + (p''-1)\frac{r_b}{q_i}.$$

Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de los productos de los términos correspondientes a cada grupo. $\mathcal{K}$ tiene p' elementos, y cada uno de ellos es un polinomio de grado p''. Entonces es claro que existe una biyección de $\mathcal{K}\setminus Q_1(Z)$ sobre $\mathcal{K}\setminus Q_1(Z)$ tal que los primeros términos correspondientes $R_1(Z)$ y $R_2(Z)$ verifiquen que

$$v_t(R_1(\xi_{j1})) = v_t(R_2(\xi_{i1})).$$

Esto prueba que

$$v_t(\overline{P}(\xi_{j1})) < v_t(\overline{P}(\xi_{i1}))$$

y, por tanto, que $v_i \neq v_j$.

■

Como consecuencia de este teorema se tiene que si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ son, respectivamente, raíces de los factores irreducibles $\overline{f}_1(Z), \dots, \overline{f}_h(Z)$ de $\overline{f}(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$, entonces las valoraciones asociadas $\nu_1, \dots, \nu_h$ son ampliaciones de ν a L, y todas distintas.

El siguiente paso es probar que no existen más ampliaciones de ν a L que las anteriores. Para ello trataremos de calcular el índice de ramificación y el grado relativo de ν_i respecto de ν, $i = 1, \dots, h$, y aplicar la fórmula de ramificación de valoraciones.

Estudiaremos la valoración ν_1, pues el estudio de las demás es igual a este caso. Consideremos una raíz ξ_1 de $\overline{f}_1(Z) = 0$, como serie de Puiseux en la variable t con coeficientes en $\Delta^*_{\hat{\nu}}$. Sea q_1 el entero mínimo tal que $\xi_1 \in \Delta^*_{\hat{\nu}}((t^{1/q_1}))$, y escribiremos

$$\xi_1 = \sum_{l \geq 1} \omega_{1l} t^{r_l/q_1}$$

con $\omega_{1l} \in \Delta^*_{\hat{\nu}}$.

Teorema III–B.5 ▪ El índice de ramificación de ν_1 es q_1.

Demostración. Es evidente que $\nu_1(L \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z} \cdot (1/q_1)$. Basta entonces probar que existe $\omega \in L$ tal que $\nu_1(\omega) = q_1$, pues esto implica que $\mathbb{Z} \cdot (1/q_1) \subseteq \nu_1(L \setminus \{0\})$. Sabemos por la sección anterior que la valoración ν'_1 sobre $\Delta_\nu((t))(\xi_1)$ es una extensión de ν_t con índice de ramificación reducido igual a q_1. Es decir, que existe un elemento $\omega' \in \Delta_\nu((t))(\xi_1)$ de valor $1/q_1$, luego basta encontrar un elemento $\omega \in L$ y tal que $\lambda_1(\omega) = \omega'$. Esto se tiene por la nota III–B.3, pues el elemento ω' se construye en la demostración del teorema III–A.3 como una combinación de elementos que se obtienen evaluando unos determinados polinomios $\overline{P}(Z) \in \Delta_\nu[\![t]\!][Z]$ en ξ_1. Por la nota anteriormente citada, existen polinomios $P(Z) \in R[Z]$ tales que $\Psi(P(Z)) = \overline{P}(Z)$. Luego el elemento ω será la misma combinación de los elementos que se obtienen al evaluar los polinomios $P(Z)$ en z. ▪

Sea ν_t la función de orden en t sobre $\Delta_{\hat{\nu}}((t))$ y denotemos por ν'_1 la restricción de la valoración canónica de $\Delta^*_{\hat{\nu}}((t^{1/q_1}))$ sobre $\Delta^*_{\hat{\nu}}$ al cuerpo $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_1)$. Es claro que ν'_1 amplia a ν_t a $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_1)$. Como en el teorema anterior se ha probado la existencia de un elemento $\omega \in L$ tal que $\nu_1(\omega) = 1/q_1$, es claro que el índice de ramificación de ν'_1 respecto de ν_t es q_1, ya que $\nu'_1(\lambda_1(\omega)) = \nu_1(\omega) = 1/q_1$.

Nota III–B.6 ■ Sea e_1 el grado relativo de ν'_1 respecto de ν_t. Recordemos que ν'_1 es la única ampliación de ν_t a $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_1)$. En particular sabemos que $q_1 \cdot e_1 = m_1$. ■

Hemos probado ya que los índices de ramificación de ν'_1 y ν_1 sobre ν_t y ν respectivamente, coinciden y son iguales a q_1. Veamos que también esto es cierto para los grados relativos, es decir,

---

Proposición III–B.7 ■ El grado relativo de ν_1 respecto de ν es igual al grado relativo de ν'_1 respecto de ν_t.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t)) \arrow[d] \\
L \arrow[r, "\lambda_l"] & \Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_1)
\end{tikzcd}$$

y sea $\tilde{K} = \Psi(K)$. Se tiene $\lambda_1(L) = \tilde{K}(\xi_1)$ y que $[\tilde{K}(\xi_1) : \tilde{K}] = [L : K] = m$. Sean $\nu' = \nu_{t|\tilde{K}}$ y $\nu'' = \nu'_{1|\tilde{K}}(\xi_1)$, denotaremos por $(R'', \mathfrak{m}'')$ y $(R'_1, \mathfrak{m}'_1)$ a los respectivos anillos de valoración de ν'' y ν'_1, sean $\Delta'' = R''/\mathfrak{m}''$ y $\Delta'_1 = R'_1/\mathfrak{m}'_1$ los cuerpos residuales. Se trata de calcular el grado relativo de ν'' respecto de ν'.

Como $\nu'' = \nu'_{1|\widetilde{K}}(\xi_1)$, es claro que ν'' hace corresponder a cada elemento de $\widetilde{K}(\xi_1)$ su orden (fraccionario) como serie en t. Esto significa que ν'_1 es una ampliación de ν'' al cuerpo $\Delta_{\hat{\nu}}((t))(\xi_1)$, y por tanto el cuerpo residual Δ'' de ν'' se puede identificar con un subcuerpo de Δ'_1. Esta identificación se hace como sigue:

Como $R'' \subseteq R'_1$ y $\mathfrak{m}'_1 \cap R'' = \mathfrak{m}''$, se tiene una inmersión

$$\Delta'' = R''/\mathfrak{m}'' \to \Delta'_1 = R'_1/\mathfrak{m}'_1$$

que a la clase del elemento $\eta \in R''$ le hace corresponder $\eta + \mathfrak{m}'_1$.

Luego para demostrar la proposición es suficiente probar que, dado un elemento $\eta \in R'_1$, existe un elemento $\eta' \in R''$ tal que $\eta + \mathfrak{m}'_1 = \eta' + \mathfrak{m}'_1$. Sea $\eta \in R'_1$ y pongamos

$$\eta = \eta_0(t) + \eta_1(t)\xi_1 + \ldots + \eta_{m-1}(t)\xi^{m-1}$$

con $\eta_i(t) \in \Delta_{\hat{\nu}}((t))$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Observemos que las series $\eta_i(t)$ pueden tener orden negativo en t, pero ξ_1 siempre tiene orden positivo. Además, un término cualquiera de la expresión anterior, por ejemplo $\eta_i(t)\xi_1^i$, no es más que el producto de dos series en t^{1/q_1}. Por lo tanto, nos interesan sólo los términos de este producto de grado inferior o igual a cero. Los coeficientes de esos términos no dependen sino de los de $\eta_i(t)$ hasta un grado fijo. Esto quiere decir que existe un entero s_i tal que, si denotamos por $\eta'_i(t)$ a la suma de los s_i primeros términos de $\eta_i(t)$, entonces los coeficientes de $\eta_i(t)\xi_1^i$ hasta el grado cero son exactamente los mismos que los de $\eta'_i(t)\xi_1^i$ hasta el grado cero. Pongamos

$$\eta' = \eta'_0(t) + \eta'_1(t)\xi_1 + \ldots + \eta'_{m-1}(t)\xi^{m-1}.$$

Entonces η', considerada como serie en t^{1/q_1}, tiene exactamente los mismos coeficientes que η hasta el grado cero. Por tanto, los coeficientes de los posibles términos de η' de grado negativo son nulos y el coeficiente del término de grado cero de η' es el mismo que el de η. Así pues

$$\eta + \mathfrak{m}'_1 = \eta' + \mathfrak{m}'_1.$$

Como los $\eta'_i(t)$ son funciones racionales en t con coeficientes en $\Delta_{\hat{v}}$, es decir, $\eta'_i(t) \in \Delta_{\hat{v}}(t)$, se tiene que $\eta'_i(t) \in K$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Luego $\eta' \in K(\xi_1)$, lo que prueba la proposición. ∎

Como lo hecho para v_1 es válido para cualquier ampliación v_i, $i = 1, \ldots, h$ de v a L, llegamos al siguiente

Teorema III–B.8 Sea L una extensión finita de K, $L = K(z)$, sea $f(Z)$ el polinomio mínimo de z sobre K, $\bar{f}(Z) = \Psi'(f(Z)) \in \Delta_{\hat{v}}((t))[Z]$. Entonces existen tantas ampliaciones de v a L como factores irreducibles tenga el polinomio $\bar{f}(Z)$ sobre $\Delta_{\hat{v}}((t))$. Además, dichas ampliaciones se realizan de la siguiente manera:

Sea $\bar{f}(Z) = \bar{f}_1(Z) \ldots \bar{f}_h(Z)$ la descomposición de $\bar{f}(Z)$ en polinomios mónicos irreducibles sobre $\Delta_v((t))$, y, para cada $i = 1, \ldots, h$, sea $\xi_i \in \Delta^*_{\hat{v}}((t^{1/q_i}))$ una raíz de $\bar{f}_i(Z)$, y consideremos la inmersión

$$\lambda_i : L = K(z) \to \Delta_{\hat{v}}((t))(\xi_i)$$

determinada anteriormente.

Entonces $v_i = v'_i\lambda_i$, $i = 1, \ldots, h$ son todas las ampliaciones de v a L.

Demostración. Sabemos que $v_1, \ldots, v_h$ son ampliaciones de v a L, y que todas son distintas. Resta probar que no hay más.

Sea q_i el índice de ramificación de v_i respecto de v, sea e_i el grado relativo. Hemos probado que $q_i \cdot e_i = m_i$, $i = 1, \ldots, h$. Por consiguiente, se tiene que

$$q_1 \cdot e_1 + q_2 \cdot e_2 + \ldots + q_h \cdot e_h = m_1 + m_2 + \ldots + m_h = [L : K] = m.$$

Este hecho, junto con la fórmula general de ramificación de valoraciones, indica que las valoraciones $v_1, \ldots, v_h$ descritas son todas las ampliaciones posibles de v a L. ∎

Ejemplos III–B.9 ■ 1) En $\mathbb{C}((X_1,X_2))$ consideremos la valoración v dada por la composición del homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{C}((X_1,X_2)) & \to & \mathbb{C}(u)((t)) \\ & X_1 & \mapsto & t \\ & X_2 & \mapsto & ut \end{array}$$

con la función de orden en t. Como sabemos por las construcciones dadas en el Capítulo II, se trata de la función de orden ususal en $\mathbb{C}((X_1,X_2))$ y su cuerpo residual es $\mathbb{C}(u)$. Sea

$$z = X_1^{1/4}X_2^{3/4} + X_1^{2/4}X_2 + X_1^{3/4}X_2^{6/4} + X_1X_2^2.$$

Su polinomio mínimo, $f(Z)$, es de grado 16. Para no confundir omitimos su escritura, dada su excesiva longitud. Vamos a construir las extensiones de v al cuerpo $L = \mathbb{C}((X_1,X_2))(z)$. La imagen por Ψ de z es el elemento

$$\xi_1 = u^{3/4}t + ut^{6/4} + u^{6/4}t^{9/4} + u^2t^3,$$

cuyo polinomio mínimo es el mismo $\overline{f}(Z)$, es decir éste es irreducible y sólo existe una extensión v_1 de v: la dada por la composición de la aplicación $\lambda_1 : L \to \mathbb{C}(u)((t))(\xi_1)$ con la valoración v_1', que es la restricción a $\mathbb{C}(u)((t))(\xi_1)$ de la función de orden en t sobre $\mathbb{C}(u)^*((t^{1/4}))$, como hemos visto anteriormente.

Usaremos las construcciones dadas en las demostraciones de los teoremas III–A.3 y III–B.5 para hallar explícitamente un elemento ω de valor 1/4 para v_1. Siguiendo la notación usada en estas demostraciones, tenemos $q_1 = 4$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $r_3 = 9$, $r_4 = 12$. Además r_3 es el primero tal que m.c.d.$(q_1,r_1,r_2,r_3) = 1$, luego existe una combinación $\alpha_0q_1 + \alpha_1r_1 + \alpha_2r_2 + \alpha_3r_3 = 1$. Tomamos $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 1$, tenemos que el elemento que buscamos es $\omega = X_1^{-2}\omega_3$, donde X_1 es un elemento de valor 1 para v_1 y ω_3 es un elemento de L que vamos a construir de valor $r_3/q_1 = 9/4$. Sea $\omega_1 = z$. Es evidente que $v_1(\omega_1) = 1$. Sean $\xi_1' = u^{3/4}t$ y su polinomio mínimo

$$\overline{P}_1(Z) = Z^4 - u^3t^4.$$

Sus raíces son $\xi'_{11} = \xi'_1$, $xi'_{12} = iu^{3/4}t$, $\xi'_{13} = -iu^{3/4}t$, $\xi'_{14} = -u^{3/4}t$. El polinomio

$$P_1(Z) = Z^4 - X_2^3 X_1$$

es tal que $\Psi(P_1(Z)) = \overline{P}_1(Z)$. Sea $\omega'_2 = P_1(z)$, el valor de éste elemento es

$$\nu_1(\omega'_2) = \nu_t(\overline{P}_1(\xi_1)) = \nu_t\left(\prod_{i=1}^{4}(\xi_1 - \xi'_{1i})\right) = \sum_{i=1}^{4}\nu_t(\xi_1 - \xi'_{1i}) = \frac{18}{4}.$$

Sea $\omega_2 = \omega'_2/\omega_1^3$, un elemento tal que $\nu_1(\omega_2) = 6/4$.
Tomemos ahora $\xi''_1 = u^{3/4}t + ut^{6/4}$ y su polinomio mínimo

$$\overline{P}_2(Z) = Z^8 - 4u^2t^3Z^6 + (-2u^3t^4 + 6u^4t^6)Z^4 +$$

$$+(-4u^6t^9 - 12u^5t^7)Z^2 + u^6t^8 - 2u^7t^{10} + u^8t^{12}.$$

Sus raíces son

$$\xi''_{11} = \xi''_1,\ \xi''_{12} = u^{3/4}t - ut^{6/4},\ \xi''_{13} = iu^{3/4}t + ut^{6/4},\ \xi''_{14} = iu^{3/4}t - ut^{6/4},$$

$$\xi''_{15} = -\xi''_{11},\ \xi''_{16} = -\xi''_{12},\ \xi''_{17} = -\xi''_{13},\ \xi''_{18} = -\xi''_{14}.$$

El polinomio

$$P_2(Z) = Z^8 - 4X_2^2X_1Z^6 + (-2X_2^3X_1 + 6X_2^4X_1^2)Z_4 +$$

$$+(-4X_2^6X_1^3 - 12X_2^5X_1^2)Z^2 + X_2^6X_1^2 - 2X_2^7X_1^3 + X_2^8X_1^4$$

es tal que $\psi(P_2(Z)) = \overline{P}_2(Z)$. Sea $\omega'_3 = P_2(z)$, su valor es

$$\nu_1(\omega'_3) = \nu_t(\overline{P}_2(\xi_1)) = \nu_t\left(\prod_{i=1}^{8}(\xi_1 - \xi''_{1i})\right) = \sum_{i=1}^{8}\nu_t(\xi_1 - \xi''_{1i}) = \frac{39}{4}.$$

Sea entonces

$$\omega_3 = \frac{\omega'_3}{\omega_1^6\omega_2},$$

el elemento ω de valor $1/4$ que buscamos es

$$\omega = \frac{\omega_3}{X_1^2} \in L.$$

Por la fórmula general de ramficaciones, se tiene que el grado relativo de la extensión es 4.

2) Es conveniente poner un ejemplo donde existan más de una valoración que extiende a la de partida. Considremos de nuevo la valoración ν del ejemplo anterior sobre $\mathbb{C}((X_1,X_2))$, que es la función de orden usual. Sea el polinomio

$$f(Z) = Z^4 - X_1(X_1 - X_2) \in \mathbb{C}[\![X_1,X_2]\!][Z],$$

que es irreducible por el Criterio de Eisenstein. Si sumergimos el anillo $\mathbb{C}[\![X_1,X_2]\!]$ en $\mathbb{C}(X_1^{1/4})[\![X_2]\!]$ obtenemos una raíz de $f(Z)$:

$$z = X_1^{1/2} - \frac{X_2}{4X_1^{1/2}} - \frac{3X_2^2}{32X_1^{3/2}} - \frac{7X_2^3}{128X_1^{5/2}} - \frac{77X_2^4}{2048X_1^{7/2}} - \frac{231X_2^5}{8192X_1^{9/2}} - \frac{1463X_2^6}{65536X_1^{11/2}} - \ldots$$

En este caso, el polinomio

$$\bar{f}(Z) = Z^4 - t^2(1-u)$$

es reducible pues, aunque no tiene ninguna raíz, es producto de dos polinomios de grado 2:

$$\bar{f}(Z) = (Z^2 - t\alpha(u))(Z^2 + t\alpha(u)) = \bar{f}_1(Z)\bar{f}_2(Z),$$

donde

$$\alpha(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 - \frac{7}{256}u^5 - \frac{21}{1024}u^6 - \ldots$$

Luego hay dos valoraciones que extienden ν a $L = \mathbb{C}((X_1,X_2))(z)$. La imagen de z por Ψ es

$$\xi_1 = t^{1/2}\left(1 - \frac{1}{4}u - \frac{3}{32}u^2 - \frac{7}{128}u^3 - \frac{77}{2048}u^4 - \frac{231}{8192}u^5 \ldots\right),$$

que es raíz de $\bar{f}_1(Z)$. Es evidente que su conjugada es $\xi_{12} = -\xi_1$ y que las raíces de $\bar{f}_2(Z)$ son $\xi_2 = i\xi_1$ y $\xi_{22} = -i\xi_1$. Luego las extensiones de ν

a L son las valoraciones ν_i dadas por la composición de la aplicación $\lambda_i : L \to \mathbb{C}(u)((t))(\xi_i)$ con la función de orden en t, para $i = 1, 2$. En ambos casos es evidente que el índice de ramificación es 2, de hecho $\nu_1(z) = \nu_2(z) = 1/2$, y que el grado relativo es 1.

3) Consideremos para este ejemplo la valoración ν de $\mathbb{C}((X_1, X_2, X_3))$ dada por la composición del homomorfismo inyectivo

$$\begin{array}{rrcl} \Psi : & \mathbb{C}((X_1, X_2, X_3)) & \to & \mathbb{C}((t, T_2, T_3)) \\ & X_1 & \mapsto & T_3 t \\ & X_2 & \mapsto & \frac{1}{T_3} t \\ & X_3 & \mapsto & \frac{T_2}{T_3} t \end{array}$$

Recordemos que esta valoración es la que se obtiene en los ejemplos II–A.5 y II–C.1 al hallar un elemento de valor 1 y el cuerpo residual de una dada, aplicando un número finito de transformaciones monoidales y cambios de coordenadas.

Sea

$$z = X_1^{1/4} X_2^{1/4} + X_1^{1/4} X_3^{1/4}$$

una raíz del polinomio irreducible

$$f(Z) = Z^{16} + (-4X_1X_3 - 4X_1X_2)Z^{12} + (-124X_1^2X_2X_3 + 6X_1^2X_2^2 + 6X_1^2X_3^2)Z^8 +$$
$$+(-4X_1^3X_2^3 - 4X_1^3X_3^3 - 124X_1^3X_2X_3^2 - 124X_1^3X_2^2X_3)Z^4 +$$
$$+X_1^4X_3^4 - 4X_1^4X_2^3X_3 - 4X_1^4X_2X_3^3 + 6X_1^4X_2^2X_3^2 + X_1^4X_2^4.$$

El polinomio mínimo de

$$\xi_1 = \Psi(z) = t^{1/2}(1 + T_2^{1/4})$$

es

$$\bar{f}_1(Z) = Z^8 - 4tZ^6 + (-2t^2T_2 + 6t^2)Z^4 + (-12t^3T_2 - 4t^3)Z^2 + t^4T_2^2 + t^4 - 2t^4T_2.$$

Esto quiere decir que $\bar{f}(Z)$ es reducible y que hay más de una valoración que extiende ν al cuerpo $L = \mathbb{C}((X_1, X_2, X_3))(z)$. De hecho, $\bar{f}(Z)$ es producto de dos polinomios irreducibles de grado 8, $\bar{f}_1(Z)$ y $\bar{f}_2(Z)$. Una raíz de éste último es

$$\xi_2 = \Psi(z) = it^{1/2}(1 + T_2^{1/4}).$$

De la manera usual, se obtienen las valoraciones ν_1 y ν_2 que extienden a ν. En ambos casos el índice reducido de ramificación es 2 y el grado relativo es 4.

III–C DIVISORES PRIMOS EN SERIES DE POTENCIAS

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, consideremos el anillo $R = \mathbb{K}[\![\mathbb{X}]\!] = \mathbb{K}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ de las series formales de potencia. Sean $f \in R$ un elemento irreducible, $\mathfrak{p} = f \cdot R$ el correspondiente ideal primo y $V = R_\mathfrak{p}$ el anillo de valoración asociado. Si K es el cuerpo de fracciones de R, entonces V es el anillo de una valoración discreta ν que actúa de la siguiente manera: si $\omega = (a/b)f^r \in K$, donde f no divide ni a a ni a b, entonces $\nu(\omega) = r$.

El cuerpo residual de ν es

$$\Delta = R_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}),$$

que es isomorfo al cuerpo de fracciones $Q(R/\mathfrak{p})$ de $R/\mathfrak{p}$. Cuando sea necesario, consideraremos la compleción $\hat{V}$ de V, su cuerpo de fracciones $\hat{K}$ y la única extensión $\hat{\nu}$ de ν a $\hat{K}$. Fijada una sección $\sigma : \Delta_{\hat{\nu}} \hookrightarrow \hat{V}$ del homomorfismo natural $\hat{V} \to \Delta_{\hat{\nu}}$, tenemos un isomorfismo

$$\Psi : \hat{K} \to \Delta_{\hat{\nu}}((t))$$

que transforma el elemento $\sum \sigma(\delta_i)f^i$ en $\sum \delta_i t^i$. También escribiremos

$$R/\mathfrak{p} = \mathbb{K}[\![\mathbb{x}]\!] = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!], \ \Delta = \mathbb{K}((\mathbb{x}))$$

con $x_i = X_i + \mathfrak{p}$.

Nota III–C.1 ■ Sea

$$P(Z) = Z^m + a_1(\mathbb{X})Z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\mathbb{X})Z + a_m(\mathbb{X}) \in R[Z]$$

un polinomio irreducible de Weierstrass. Consideremos el anillo cociente

$$R[Z]/(P \cdot R[Z]) = R[z],$$

con $z = Z + P \cdot R[Z]$, y su cuerpo de fracciones $L = K(z)$. Entonces L es una extensión algebraica de K, de grado m. Nuestro propósito es estudiar todas las posibles extensiones a L de la valoración ν. El método que usaremos será tomar compleciones y aplicar los resultados obtenidos en la sección A de este capítulo.

Notemos por $\overline{P}(Z) \in \Delta[\![t]\!][Z]$ al polinomio

$$\overline{P}(Z) = \Psi(P(Z)) = Z^m + u_1(t)Z^{m-1} + \cdots + u_{m-1}(t)Z + u_m(t),$$

donde

$$u_i(t) = \Psi(a_i(\mathbb{X})), \; i = 1, \ldots, m.$$

El polinomio $\overline{P}(Z)$ no es necesariamente irreducible en $\Delta[\![t]\!][Z]$ así que, en general, puede ser factorizado de la forma

$$\overline{P} = \overline{P}_1 \cdots \overline{P}_s \,, \; \overline{P}_i \in \Delta[\![t]\!][Z],$$

donde suponemos que todos los $\overline{P}_i$ son mónicos. La irreducibilidad de $P(Z)$ implica que $\overline{P}(Z)$ no tiene raíces múltiples, ya que estamos en un cuerpo de característica cero.

Esta situación se puede trasladar a $\widehat{K}$ vía Ψ. Si $P_i = \Psi^{-1}(\overline{P}_i)$, entonces P factoriza en $\widehat{K}[Z]$ como

$$P = P_1 \cdots P_s \,,$$

donde los P_i pertenecen a $\widehat{V}[Z]$ y son mónicos, ya que σ deja invariantes a los elementos de $\mathbb{K}$.

Fijemos una clausura algebraica de $\widehat{K}$ y, en ella, tomemos la extensión algebraica $K \subset K_1$ generada por todas las raíces de $P(Z)$. Elijamos raíces $\{z_1, \ldots, z_s\}$ en K_1 tales que $P_i(z_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Tomemos un cuerpo de descomposición $\overline{\Delta}_1$ de $\overline{P}(Z)$ sobre $\Delta((t))$, consideremos la extensión del isomorfismo Ψ (notada con la misma letra), y escribamos

$$\Psi(z_i) = \zeta_i = \sum_{l\geq 1} \alpha_{il} t^{r_{il}/p_i}.$$

Entonces ζ_i es raíz de $\overline{P}_i$, $i = 1, \ldots, s$. Además, $\Psi(K_1)$ es el cuerpo de descomposición de $\overline{P}(Z)$ sobre $\Psi(K)$.

Sea $G = \{\varphi_{i1} = \mathrm{id}, \ldots, \varphi_{id_i}\}$ el grupo de Galois de $P_i(Z)$ sobre $\widehat{K}$, donde $d_i = \mathrm{gr}(P_i) = \mathrm{gr}(\overline{P}_i)$, entonces $\overline{G}_i = \{\overline{\varphi}_{i1}, \ldots, \overline{\varphi}_{id_i}\}$ es el grupo de Galois de $\overline{P}(Z)$ sobre $\Delta((t))$, donde $\overline{\varphi}_{ij} = \Psi\varphi_{ij}\Psi^{-1}$, consideremos las extensiones de Ψ:

$$\Psi_i : K(z) \hookrightarrow \Delta((t))(\zeta_i)$$

definida por $\Psi_i(z) = \zeta_i$. La composición de Ψ_i con la función de orden es una valoración ν_i que extiende a ν, y tenemos el siguiente

Teorema III–C.2 Para cada $i = 1, \ldots, s$, el índice de ramificación reducido de ν_i es p_i. Las valoraciones $\{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ son las únicas extensiones de ν a $K(z)$.

Demostración. Basta probar el teorema para ν_1, pues para las demás valoraciones la prueba es igual. Como $\nu_1(L \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z} \cdot (1/p_1)$, debemos encontrar un elemento $\omega \in L$ tal que $\nu_1(\omega) = 1/p_1$.

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema III–B.5. Hay que encontrar elementos $\omega_l \in L$ de valor r_l/p_1. Esto se hace por inducción

1. Paso inicial: $\omega_1 = z$, es evidente que $\nu_1(\omega_1) = r_1/p_1$.
2. Paso de inducción: Supongamos que para todo l, $1 \leq l \leq b$ existe ω_l tal que $\nu_1(\omega_l) = r_l/p_1$. Si consideramos el elemento

$$\zeta_1' = \sum_{l=1}^{b} \alpha_{1l} t^{r_l/p_1}$$

y tomamos el polinomio mínimo

$$\overline{Q}(Z) = \prod_{i=1}^{c} (Z - \zeta_{1i}'),$$

donde $\{\zeta'_{11} = \zeta'_1, \zeta'_{12}, \ldots, \zeta'_{1c}\}$ es el conjunto de los conjugados distintos de ζ'_1 sobre $\Delta((t))$, sabemos que existe un polinomio $Q(Z) \in K_1[Z]$ tal que $\Psi(\overline{Q}(Z)) = Q(Z)$.

Sea $\omega'_{b+1} = Q(z)$, hemos visto que

$$\nu_1(\omega'_{b+1}) = \frac{r_{b+1} + \sum_{i=2}^{c} r_{l_i}}{p_1}.$$

Entonces, si tomamos

$$\omega_{b+1} = \frac{\omega'_{b+1}}{\prod_{i=2}^{c} \omega_{l_i}} \in L,$$

tenemos $\nu_1(\omega_{b+1}) = r_{b+1}/p_1$ como queríamos.

Luego considerando el elemento

$$\omega = f^{n_0} \prod_{l=1}^{b} \omega_l^{n_l}$$

con $b \in \mathbb{Z}$ tal que m.c.d.$(p_1, r_1, \ldots, r_b) = 1$ y $n_0, n_1, \ldots, n_b$ enteros tales que $n_0 p_1 + n_1 r_1 + \cdots + n_b r_b = 1$, se tiene que

$$\nu_1(\omega) = \frac{1}{p_1}.$$

Por tanto, el grupo de valores de ν_1 es $\mathbb{Z} \cdot (1/p_1)$ y su índice de ramificación reducido es p_1. El resto del teorema es consecuencia directa de la fórmula general de ramificación de valoraciones. ∎

Teorema III–C.3 ∎ En la situación usual, si ν ramifica (alguna de las extensiones tiene índice de ramificación ≥ 2), entonces f divide al discriminante de $P(Z)$.

Demostración. Sea $D \in R$ el discriminante de $P(Z)$, es claro que $\overline{D} = \Psi^{-1}(D)$ es el discriminante de $\overline{P}$, pues D es una función polinómica de los coeficientes de $P(Z)$. Sea

$$\overline{P} = \overline{P}_1 \cdots \overline{P}_s$$

la factorización de $\overline{P}$ en $\Delta_{\hat{\nu}}[\![t]\!][Z]$, y sea

$$\zeta_i = \sum_{l\geq 1} \alpha_{il} t^{r_{il}/p_i}$$

una raíz de $\overline{P}(Z)$ tal que $p_i > 1$(i.e. hay ramificación).

Supongamos que ζ_i es raíz de $\overline{P}_i$, el hecho de que ramifique implica que el grado de este polinomio es mayor que 1, es decir, que hay raíces conjugadas con ζ_i. Luego en $\overline{D}$, que es el producto de los cuadrados de las diferencias de raíces, hay factores sin término independiente (dos raíces conjugadas tienen el mismo término independiente), concluyéndose que t divide a $\overline{D}$. Mediante el isomorfismo Ψ^{-1} se obtiene que $\Psi^{-1}(t) = f$ divide a $\Psi^{-1}(\overline{D}) = D$. ∎

Ejemplos III–C.4 ∎ 1) Veamos con este ejemplo que el recíproco del teorema anterior no es cierto. En el anillo $R = \mathbb{C}[\![X_1, X_2]\!]$, consideremos el elemento irreducible $f = X_1$. Esto nos da una valoración discreta de rango 1 ν de $\mathbb{C}((X_1, X_2))|\mathbb{C}$, que es el orden usual en X_1. Sea

$$\Delta_{\hat{\nu}} = Q(R/X_1 \cdot R) = \mathbb{C}((x_2))$$

el cuerpo residual de ν.
Consideremos el polinomio irreducible

$$P(Z) = Z^4 - X_1^4 X_2(1 - X_1) \in R[Z].$$

Sea

$$z = X_2^{1/4} X_1 \left(1 - \frac{X_1}{4} - \frac{3X_1^2}{32} - \frac{7X_1^3}{128} - \frac{77X_1^4}{2048} - \frac{231X_1^5}{8192} - \cdots\right)$$

una raíz de $P(Z)$. Llamemos L a la extensión generada por z sobre $K = \mathbb{C}((X_1, X_2))$. El isomorfismo Ψ transforma $P(Z)$ en

$$\Psi(P(Z)) = \overline{P}(Z) = Z^4 - t^4 x_2(1 - t) \in \Delta[\![t]\!][Z],$$

que es irreducible, luego hay una única extensión ν_1 de ν a L. Sea

$$\zeta = x_2^{1/4} t \left(1 - \frac{t}{4} - \frac{3t^2}{32} - \frac{7t^3}{128} - \frac{77t^4}{2048} - \frac{231t^5}{8192} - \cdots\right)$$

una raíz de $\overline{P}(Z)$. Es evidente que el índice de ramificación reducido de v_1 respecto de v es 1 y, por tanto, que el grado relativo es 4.
Luego v no ramifica y, sin embargo, el discriminante de $P(Z)$,

$$D = 256X_1^{12}X_2^3(-1 + X_1)^3,$$

es un múltiplo de $f = X_1$.

2) Seguimos en $R = \mathbb{C}[\![X_1, X_2]\!]$. Tomemos ahora sobre $K = \mathbb{C}((X_1, X_2))$ la valoración v definida por $f = X_2^2 - X_1^3$. Sabemos que el cuerpo residual es $\Delta = \mathbb{C}((x_1^{1/2})) = \mathbb{C}((x_1))(x_1^{1/2})$. Consideremos el polinomio irreducible

$$P(Z) = Z^2 - 2X_1(X_2^2 - X_1^3)Z - X_1^2(X_2^2 - X_1^3)^2 - X_1^4(X_2^2 - X_1^3)^3 \in R[Z].$$

Sean

$$z = X_1(X_2^2 - X_1^3) + X_1^2(X_2^2 - X_1^3)^{3/2}$$

una raíz de $P(Z)$ y $L = K(z)$ extensión finita de grado 2. La imagen de $P(Z)$ por Ψ es el polinomio irreducible

$$\Psi(P(Z)) = \overline{P}(Z) = Z^2 - 2x_1tZ + x_1^2t^2 + x_1^4t^3 \in \Delta[\![t]\!][Z].$$

Luego sólo hay una valoración v_1 que extiende v a L. Una raíz de $\overline{P}(Z)$ es

$$\zeta = x_1t + x_1^2t^{3/2}.$$

Sabemos que el índice de ramificación es 2, de hecho, siguiendo la prueba del teorema III–C.2, obtenemos un elemento

$$\omega = \frac{X_1^2(X_2^2 - X_1^3)^{3/2}}{X_2^2 - X_1^3}$$

tal que $v_1(\omega) = 2$. Además, la fórmula general de ramificación de valoraciones nos dice que el grado relativo de v_1 respecto de v es 1.
Como v ramifica, f debe dividir al discriminante, D, de $P(Z)$. En efecto, pues

$$D = X_1^4(X_2^2 - X_1^3)^3 = X_1^4f^3.$$

∎

BIBLIOGRAFÍA

[Abh55] S.S. Abhyankar. On the ramification of algebraic functions. *Amer. J. Math.*, **77**:575–592, 1955.

[Abh56a] S.S. Abhyankar. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$. *Ann. of Math.*, **63**:491–526, 1956. Correcciones Ann. of Math. **78**:202–203, 1963.

[Abh56b] S.S. Abhyankar. On the valuations centered in a local domain. *Amer. J. Math.*, **78**:321–348, 1956.

[Abh58] S.S. Abhyankar. On the ramification of algebraic functions. *Trans. Amer. Math. Soc*, **89**:310–325, 1958.

[Abh64] S.S. Abhyankar. Uniformization in p–cyclic extensions of algebraic surfaces over ground fields of characteristic p. *Math. Ann.*, **153**:81–96, 1964.

[Abh67] S.S. Abhyankar. Nonsplitting of valuations in extensions of two dimensional regular local domains. *Math. Ann.*, **170**:87–144, 1967.

[Abh89] S.S. Abhyankar. Irreducibility criterion of germs of analytic functions of two complex variables. *Advances in Mathematics*, **74**:190–257, 1989.

[AHV75] J.M. Aroca, H. Hironaka, and J.L. Vicente. *The theory of the maximal contact.* Número **29** de las Memorias del Instituto "Jorge Juan". Consejo Superior de Investigaciones Científicas., Madrid, 1975.

[AHV77] J.M. Aroca, H. Hironaka, and J.L. Vicente. *Desingularization theorems.* Número **30** de las Memorias del Instituto "Jorge Juan". Consejo Superior de Investigaciones Científicas., Madrid, 1977.

[Arn79] J. T. Arnold. Trascendence degree in power series rings. *J. Algebra*, **57**, 1979.

[Arn81] J. T. Arnold. Algebraic extensions of power series rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1**, 1981.

[BH85] E. Briales and F.J. Herrera. Construcción explícita de las valoraciones de un anillo de series formales en dos variables. In *Actas X Jornadas Hispano-Lusas*, volumen II, páginas 1–10, Murcia, 1985.

[Bre81] J.W. Brewer. *Power series over commutative rings.*, volume 64 of *Lecture Notes in Pure and Applied Math.* Ed. Marcel Decker, 1981.

[Bri86] E. Briales. *Construcción explícita de valoraciones discretas de rango 1.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1986.

[Bri89] E. Briales. Constructive theory of valuations. *Comm. Algebra*, **17**(5):1161–1177, 1989.

[Coh86] J.A.D. Cohen. Extensions of valuations and absolute valued topologies. *Pacific J. Math.*, **125**(1):39–44, 1986.

[DW82] R. Dedekind and H. Weber. Theorie der algebraischen functionen einer veränderlichen. *Crelle J.*, **92**:181–290, 1882.

[End72] O. Endler. *Valuation theory.* Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[End75] O. Endler. Finite separable extensions with prescribed extensions of valuations. ii. *Manuscripta Math.*, **17**:383–408, 1975.

[Gil69] R. Gilmer. Integral dependence in power series rings. *J. Algebra*, **11**, 1969.

[Gra94] A. Granja. Irreducible polynomials with coefficients in a complete discrete valuation field. *Advances in Mathematics*, **109**:75–87, 1994.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Number 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris, 1977.

[Hee59] N. Heerema. On ramified complete discrete valuation rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**:490–496, 1959.

[Hen08] K. Hensel. *Theorie der algebraischen Zahlen.* Teubner, 1908.

[Her81] F. J. Herrera. *Ramificación de valoraciones de superficies algebroides.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1981.

[Hir64] H. Hironaka. Resolutions of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II. *Ann. of Math.*, **79**:109–326, 1964.

[Jac74] N. Jacobson. *Basic Algebra I.* Freeman, San Francisco, 1974.

[KG89] S. K. Khanduja and U. Grag. On extensions of valuations to simple trascendental extensions. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **32**:147–156, 1989.

[KG90] S. K. Khanduja and U. Grag. On rank of extensions of valuations. *Colloq. Math.*, **LIX**(1):25–29, 1990.

[Kha91] S. K. Khanduja. Prolongations of valuations to simple trascendental extensions with given residue field and value group. *Mathematika*, **38**:386–390, 1991.

[Kha93] S. K. Khanduja. A uniqueness problem in simple trascendental extensions of valued fields. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **37**:13–23, 1993.

[Kha94] S. K. Khanduja. On value groups and residue fields of some valued function fields. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **37**:445–454, 1994.

[Kra76] P. Kranz. Extension of a valuation on a lattice. *Fund. Math.*, **XCI**:171–178, 1976.

[Kru67] W. Krull. Algerneine bewertungstheorie. *J. Reine Angew. Math.*, **167**:160–196, 1967.

[Lip65] J. Lipman. *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. PhD thesis, Harvard Univ., 1965.

[Lip75] J. Lipman. Introduction to resolution of singularities. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.*, pages 187–230. Summer Institute of A.M.S. Arcata 1974, 1975.

[Lue79] I. Luengo. *Sobre la estructura de las singularidades de las superficies algebroides sumergidas.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense (Madrid), 1979.

[Mor92] P. J. Morandi. Maximal orders over valuation rings. *J. Algebra*, **152**:313–341, 1992.

[MR84] R. Mines and F. Richman. Valuation theory: a constructive view. *J. Number Theory*, **19**(1):40–62, 1984.

[Ohm83] J. Ohm. The ruled residue theorem for simple trascendental extensions of valued fields. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **89**(1):16–18, September 1983.

[Pop87] D. Popescu. Algebraic extensions of valued fields. *J. Algebra*, **108**:513–533, 1987.

[Rib64a] P. Ribenboim. On the completion of a valuation ring. *Math. Ann.*, **155**:392–396, 1964.

[Rib64b] P. Ribenboim. *Theorie des valuations.* Press. Univ. Montreal, 1964.

[Ser68] J. P. Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968.

[SG76] T. Sánchez Giralda. *Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense (Madrid), 1976.

[Spi90] M. Spivakovsky. Valuations in function fields of surfaces. *Amer. J. Math.*, **112**:107–156, 1990.

[VdW53] B. L. Van der Waerden. *Modern Algebra.* Frederic Ungar, New York, 1953.

[Vic69] J.L. Vicente. Properties of the normal subobjects of an object of a category. In *Proceedings of the Tenth Annual Conference of Spanish Mathematicians.*, pages 269–283, La Laguna, 1969. Instituto "Jorge Juan".

[Vic77] J.L. Vicente. The weierstrass-hironaka preparation theorem. *Rev. Mat. Hisp. Amer.*, **37**(1–2):51–81, 1977.

[Vic81] J.L. Vicente. Zariski equisingular stratification of a variety. In *Proceedings of the Eight Portuguese-Spanish Conference on Mathematics.*, volume I, pages 37–57, Coimbra, 1981. Univ. Coimbra.

[War85] S. Warner. Residual fields in valuation theory. *Math. Scand.*, **56**(2):203–221, 1985.

[Wri71] M. J. Wright. On the number of prolongations of a finite rank valuation. *Can. J. Math.*, **XXIII**(3):553–556, 1971.

[ZA55] O. Zariski and S.S. Abhyankar. Splitting of valuations in extensions of local domains. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41**:84–90, 1955.

[Zar39] O. Zariski. The reduction of singularities of an algebraic surface. *Ann. of Math.*, **40**(3):639–689, 1939.

[Zar40] O. Zariski. Local uniformization on algebraic varieties. *Ann. of Math.*, **41**(4):852–896, 1940.

[Zar43] O. Zariski. Foundations of a general theory of birrational correspondences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:490–542, 1943.

[Zar44a] O. Zariski. The compactness of the riemann manifold of an abstract field of algebraic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40**:683–691, 1944.

[Zar44b] O. Zariski. Reduction of the singularities of an algebraic three dimensional varieties. *Ann. of Math.*, **45**:472–542, 1944.

[Zar54] O. Zariski. Applicazioni geometriche della teoria delle valutazioni. *Rend. Mat. e Appl.*, **13**(1–2):1–38, 1954.

[Zar79] O. Zariski. Foundations of a general theory of equisingularity on r-dimensional algebroid and algebraic varieties, of embedding dimension $r+1$. *Amer. J. Math.*, **101**:453–514, 1979.

[ZS60a] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra.*, volume II of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-HeidelBerg-Berlin, 1960.

[ZS60b] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra.*, volume I of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-HeidelBerg-Berlin, 1960.

FMA C 043/329
501206825

MIGUEL ANGEL OLALLA ACOSTA

CALCULOS EFECTIVOS CON VALORACIONES : RAMIFICACIÓN

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

5 OCTUBRE 99