DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe

Juan Núñez y Juan Portero

Resumen. En este artículo se trata de mostrar que dos objetos situados en mundos aparentemente distintos, como son las Matemáticas y el vino, están muy relacionados entre sí, y de hecho, bajo unas ligaduras muy fuertes. No en vano fueron objeto de un estudio conjunto por el genial matemático y astrónomo Johannes Kepler, nada menos que hace ya más de tres siglos.

Abstract. In this paper we try to show that two subjects, not seeming to be linked between themselves, like Mathematics and the wine, certainly they do, and really under a very strong chains. Note that they were already studied joint by the great mathematician and astronomer Johannes Kepler, nothing less than three centuries ago.

Introducción

Desde que en el Capítulo VII del Libro Quinto de su "Ética a Telémaco", Aristóteles relacionara de alguna manera las Matemáticas con el vino: ... *porque ni las medidas del vino ni las del trigo son iguales en todas las tierras* ..., no puede decirse que haya habido muchos más ejemplos concretos de esa relación.

Y ni siquiera actualmente parecen existir. De hecho, pasando por alto el tema anecdótico de la *botella de Klein*, superficie sólo conocida por los muy adictos a la Geometría y, casi con toda seguridad, totalmente desconocida para los interesados en el vino, no puede decirse que actualmente exista una relación muy estrecha entre las Matemáticas y la Enología, ciencia, esta última, del vino.

Así, si en estos momentos se le pregunta a alguna persona "normal", esto es, poseedora de una cultura media y no especializada en ninguna de las dos materias, por la relación que existe entre las Matemáticas y el vino, seguramente responderá que las Matemáticas sirven para contar el número de botellas de vino existentes en una determinada bodega o, como mucho, que mediante las Matemáticas también se puede determinar la capacidad de una copa de vino o de una barrica (según el Diccionario de la Real Academia Española, *especie de tonel mediano que sirve para diferentes usos*). Y de hecho que esas respuestas no van muy descaminadas.

Figura 1: Botella de Klein.

Ahora bien, puntualicemos algunos aspectos al respecto. Primero, esas respuestas no indican en realidad la relación en sí que pueda existir entre esa ciencia y ese producto. A lo sumo, da ideas de cómo pueden aplicarse las Matemáticas para responder a diversas cuestiones relacionadas con el vino. Y además, tampoco de una forma intrínseca, lo cual, aunque sin ser poco, no satisface en absoluto nuestras ansias de conocimiento. No sucede entonces con las Matemáticas y el vino como con, por ejemplo, la Química o la Biología o incluso la Medicina y el vino, en las que sabemos que existe una rama de cada una de ellas, como la Enología, por ejemplo, en el caso de la Biología, dedicada íntegramente al estudio, total o parcial, de la cultura del vino.

Y en segundo lugar, en el supuesto de que las personas a las que formulásemos la cuestión anteriormente citada sí tuviesen conocimientos matemáticos reconocidos, como los propios licenciados en Matemáticas o en alguna otra licenciatura o carrera técnica, ¿serían capaces de profundizar en sus respuestas, indicándonos cómo se calcularían tales capacidades? Suponemos que en el caso de la copa, sí, pero en el de la barrica, ya empezamos a dudarlo. Nótese también que, aparte de la ambigüedad cuantitativa, la unidad de medida no tiene unas dimensiones volumétricas universales, lo cual supone que montantes aparentemente iguales no sean, sin embargo, equivalentes, en función de su localización geográfica. Por ejemplo, ¿qué bebedor piensa, cuando pide un *medio*, en la fracción matemática equivalente a la mitad de algo (como corresponde al valor semántico de la expresión, aunque su valor matemático real sea de 3/8)? Puede verse entonces que el término matemático se ha desnaturalizado, pasando a adquirir un valor únicamente cultural.

Sin embargo, hay un ejemplo muy claro de esta relación entre las Matemáticas y el vino y se remonta nada menos que al siglo XVII, cuando a partir de una observación hecha por él mismo en su propia casa, de cómo un vinatero austriaco medía rápida y misteriosamente la capacidad de diferentes barricas de vino que él había comprado días antes de su reciente matrimonio con la joven Sussana Reutlinger, el genial matemático y astrónomo Johannes Kepler decidió *investigar las leyes geométricas de esta medición doméstica de tanta utilidad.* Precisamente, el resultado de su trabajo, la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (en adelante Nova stereometria) publicada en Linz en 1615, habría de ayudar a establecer los fundamentos del Cálculo Diferencial e Integral e impulsar la aplicación de las matemáticas a la solución de problemas de la vida real. De dicha obra, quizás una de las más comentadas obras matemáticas de Kepler en los textos de cálculo, así como en los libros de historia de las Matemáticas, merecen destacarse su importantísimo aspecto humano, los métodos de trabajo que empleó Kepler en su realización y sobre todo, las ideas que se tenían en aquel tiempo sobre los problemas de optimización y la manera de usarlos en problemas de la vida real. De hecho, antes de la llegada de Kepler, en el mundo del vino existía una aparente falta de exactitud. Curiosamente el sistema métrico decimal no se ha aplicado en este mundo, y se mantienen patrones antiguos, que en la medición de otras magnitudes sí se han sustituido por las medidas internacionales.

El presente trabajo está destinado entonces a poner de manifiesto más extensamente esta relación entre las Matemáticas y el vino, viendo cómo interesó sobremanera a Kepler y cómo éste usó de su ingenio, sabiduría y sobre todo, de sus conocimientos matemáticos, para resolver una cuestión aparentemente intrascendente: *cómo un vendedor de vino medía todos los barriles, sin distinción, sin poner atención a la forma y sin pensar o hacer cálculo alguno.*

Otros artículos sobre esta relación entre las Matemáticas y el vino pueden también verse en [2], [3] y [4], por ejemplo. En particular, en [2] puede leerse (en original, en árabe, y en su traducción al castellano) una extensa poesía que el insigne matemático y poeta árabe Omar Khayyam (1048 - 1122) le dedicó al vino [entre los principales méritos científicos de Omar Khayyam destacan el de haber recopilado unas tablas astronómicas, contribuir a la reforma del calendario de su tiempo y descubrir un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas por intersección de una parábola con un círculo]. Dos de las estrofas de esa poesía son las siguientes:

El vino es granate líquido, la copa es la mina.
La copa es el cuerpo y el alma es el vino,
lágrima donde la sangre del corazón se esconde,
que es la copa de cristal que sonríe por el vino.

-——————————————————————-

Bebe vino, que la vida eterna es ésta.
Tu cosecha de juventud es ésta.
En tiempos de vino y rosas y amigos ebrios
sé alegre un momento, que la vida es ésta.

1. El secreto de las barricas de vino

Kepler describe en su Nova stereometria un evento de su vida que ocurrió en el otoño del año 1613 (véase la traducción del ruso al inglés de [5], pag. 49):

> *En Diciembre del año pasado ... traje a casa una nueva esposa al tiempo que en Austria, habiéndose recogido una extraordinaria cosecha de uvas nobles, se distribuían sus riquezas. ... La costa de Linz estaba abarrotada con barricas de vino que se vendían a precio razonable. ... Es por esa razón que fueron traídas a mi casa y colocadas en fila un cierto número de barricas, y cuatro días más tarde el vendedor vino y midió todos los barriles, sin distinción, sin poner atención a la forma, sin pensar o hacer cálculo alguno. A saber, metía la punta de cobre de una regla por el hoyo de llenado del barril atravesándolo hasta llegar al talón de cada uno de los discos de madera a los que nos referiremos simplemente como los fondos, y tan pronto como la longitud medida desde el hoyo de llenado a ambos talones de los discos era la misma, el vendedor daba el número de ánforas contenidas en el barril después de tan sólo ver el número en la regla en el punto donde la longitud en cuestión terminaba. !Quedé asombrado!*

La conversación que anexamos, a fin de darle seguimiento a la cita anterior, está tomada de [1]:

> *-¿No estará haciendo trampa?, -dudó por un momento Kepler.*
> *-No se preocupe, señor matemático de su majestad, -dijo el joven como si leyera la mente de Kepler. -Este método de medición de las barricas fue aceptado por nuestras autoridades de la ciudad. El departamento de fabricación de barriles garantiza su exactitud.*
>
> *-¿Para cualquier barril?*
>
> *-No lo sé; pero para los barriles de Austria, seguro, -bromeó el joven-.*
>
> *-¿Pero sobre la base de qué estás tan seguro de la certeza del método?*
>
> *-No puedo decir lo que no sé, no voy a mentir. Dicen que hace muchos años, vivió aquí un viejo fabricante de barricas; él propuso este método, pero ¿por qué?, no lo sé.*
>
> *-Kepler pensó que era extraño que por medio de una sola medición, pudiese uno determinar los volúmenes de barricas de diferentes formas y tamaños. Recordó la manera tediosa de medición que se usaba en el reino: sin temor al tiempo empleado, llenaban el barril contando la cantidad de ánforas vaciadas. !Líbrenos Dios de tener que volverlo a medir!*

Kepler entonces, tal como ya se ha comentado antes, decidió ïnvestigar las leyes geométricas de esta medición doméstica (la de las barricas) de tanta utilidad". Para ello, la metodología que empleó fue la siguiente:

Kepler consideró primero el caso de los barriles cilíndricos (véase la siguiente figura). Llamó λ a la distancia ND que hay entre el hoyo de llenado y el talón de los fondos, $2x$ a la altura AB del barril y $2y$ al diámetro AD del barril.

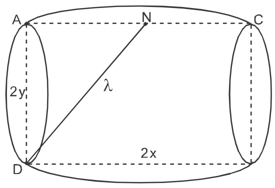

Figura 2: Medidas del barril.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que: $x^2 + 4\,y^2 = \lambda^2$. Por tanto, el volumen del barril podría ser calculado, según:

$$V = \frac{1}{2}\,\pi\,x\,(\lambda^2 - x^2)$$

La observación crucial hecha por Kepler fue entonces que todos los barriles austriacos se fabricaban con la misma razón entre la altura y el diámetro.

En efecto, considerando la razón $t = \frac{x}{y}$ y empleando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$V = 2\pi\lambda^3\,t\,(4+t^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

De esta fórmula se observa, pensó Kepler, que el volumen V de un barril cilíndrico no se determina solamente conocido el valor de λ. Para que se pueda utilizar el método de medición de los toneleros austriacos, los barriles tendrían que fabricarse con una relación t fija. Llámese t_0 a esta relación. Sin embargo, quedan las preguntas: ¿Cuál será la mejor selección de t_0? ¿Cómo podría escogerse ventajosamente la relación entre el segmento AB o altura del cilindro y el diámetro AD de los fondos?

Kepler supuso que los vinateros austriacos habían elegido con astucia t_0, tomándola como el valor que maximiza el volumen V de todos los barriles que tengan el mismo valor de λ, ya que en ese caso (véase [1]):

> *El vinicultor podría calcular el volumen de todas las barricas usando la fórmula (3), que quedaría solamente en función de λ. Si en la fabricación de los barriles, el tonelero no pudiera conseguir exactamente la relación t_0 y terminara haciéndolos con la relación t_1 ($t_1 \approx t_0$), el volumen real del barril V_1 siempre sería menor que el*

> *volumen máximo V_0, pero él recibiría el pago correspondiente a V_0. Por otro lado, un vinicultor respetable no está interesado en engañar al cliente, le importa que el volumen real del barril se diferencie lo menos posible del volumen V_0.*

Se trata pues, como puede observarse, de un problema de optimización planteado alrededor de 70 años antes de que se *descubriera* el cálculo infinitesimal, incluso bastante antes de que naciera Newton (1642).

En el otoño de 1615, a solicitud de Kepler, se realizó un encuentro entre él y el representante de los fabricantes de barricas de vino. La conversación fue la siguiente (véase [1]):

> *- Señor representante, - empezó Kepler, - estoy interesado en el método que usan los fabricantes de barricas austriacas para medir la capacidad de las mismas.*
>
> *- Verá usted, Señor matemático de su majestad, - dijo el representante, - ése es un secreto de nuestra comunidad y se ha heredado de una generación a otra desde los viejos tiempos.*
>
> *- Yo creo que hace mucho tiempo existió algún excelente geómetra que enseñó a nuestros fabricantes de barricas, pero pienso que he podido descubrir su secreto, - replicó Kepler .*
>
> *- Entonces diga usted, Señor matemático de su majestad, en qué según su opinión consiste el secreto de los viejos fabricantes de barricas, y yo le prometo decir cuáles de sus palabras son verdad.*
>
> *- Mis reflexiones me guiaron a una conclusión, - contestó Kepler, - que al fabricar las barricas, independientemente del tamaño, los fabricantes de Linz usan solamente una idea, que la longitud de las duelas sea 1.5 veces mayor que el diámetro de los fondos -.*
>
> *- ¡Perfectamente cierto! - afirmó con asombro el representante.*
>
> *- Además, para medir la capacidad de las barricas, ustedes utilizan una regla cuya escala sigue la ley cúbica.*
>
> *- ¡Ésa es la mera verdad!, - afirmó aún con mayor sorpresa el representante, - ¿No es usted clarividente Señor Kepler? Escuché que usted como astrónomo de su majestad sabe leer el pasado y el futuro de acuerdo a las posiciones de las estrellas. ¿Acaso descubrió usted el secreto con la ayuda de la astrología?*
>
> *- No, lo hice con ayuda de las matemáticas, - contestó Kepler, dándose con esto por terminada la conversación.*

Pasamos a continuación, para terminar el artículo, a reseñar unas breves notas biográficas sobre la vida y obra de Johannes Kepler, que ayuden a entender

Figura 3: Johannes Kepler.

mejor el pensamiento de este genial científico y el enorme interés que siempre tuvo por resolver cualquier interrogante que se le plantease en el mundo en el que él vivía. De hecho, Kepler trató indistintamente temas de Astronomía, Matemáticas y Física, aparte de llegar a descubrir dos nuevos sólidos poliédricos. No obstante, para el objetivo de este artículo, la publicación, aunque menor, que nos merece destacar de Kepler aparece como resultado del estudio de los volúmenes de los sólidos de revolución: *Nova Stereometria doliorum vinariorum, in primis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae commpendiosissimus & plane singularis. Accessit Stereometriae Archemedeae supplementum... (Linz, Johann Planck, 1615)*, en la que basándose en la obra de Arquímedes, usó un método de partición en indivisibles, que sería posteriormente desarrollado por Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y es considerado sin ninguna duda como uno de los precursores del Cálculo Infinitesimal.

Aunque se han consultado varias biografías de Kepler para hacer el extracto que sigue a continuación, la mayor parte de los datos que se comentan se han tomado de [6].

2. Breves notas biográficas de Johannes Kepler

Johannes Kepler nació el 27 de Diciembre de 1571 en la pequeña ciudad de Weil der Stadt, Württemberg, Sacro Imperio Romano (ahora Alemania) y se mudó a la cercana Leonberg con sus padres en 1576. Mientras fue niño, Kepler vivió con su madre en la posada de su abuelo, y según él mismo cuenta, ayudando a servir en la posada.

Kepler primeramente estudió en una escuela local y después en un seminario cercano, del cual pasó a la Universidad de Tübingen (de ortodoxia luterana), con la intención de ser ordenado sacerdote (a lo largo de toda su vida, Kepler siempre fue un hombre profundamente religioso y todos sus escritos contienen numerosas referencias a Dios. Él estaba convencido de que Dios había hecho el Universo conforme a un plan matemático (creencia ya encontrada en las obras de Platón y asociada con Pitágoras)).

Por aquella época, era normal para todos los estudiantes de una universidad asistir a clases sobre Matemáticas. En principio esto incluía las cuatro ciencias matemáticas: aritmética, geometría, astronomía y música. En Tübingen, Kepler fue instruido en astronomía por uno de los astrónomos principales de la época, Michael Maestlin (en aquella época, los astrónomos se veían a sí mismos como matemáticos). También estudió griego y hebreo, aparte de que la enseñanza en la Universidad era en latín (curiosamente, al final de su primer año, Kepler obtuvo las mejores calificaciones en todo, menos en matemáticas).

Kepler ha pasado a la posteridad principalmente por descubrir las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre (publicadas en 1609 y 1619). Hizo también un importante trabajo en óptica (1604, 1611), descubrió dos nuevos poliedros regulares (1619), dio por primera vez tratamiento matemático a la agrupación apretada de esferas iguales (conduciendo a una explicación de la forma de las celdas de una colmena, 1611), aportó la primera prueba de cómo funcionaban los logaritmos (1624), y diseñó un método para hallar los volúmenes de sólidos de revolución que, retrospectivamente, puede verse como una contribución al desarrollo del cálculo infinitesimal (1615, 1616). Además, calculó las tablas astronómicas más exactas conocidas hasta el momento, las Tablas Rudolfinas, Ulm, 1627.

Kepler murió en Regensburg, el 15 de Noviembre de 1630, siendo sepultado en la iglesia local, aunque ésta luego fue destruida en el curso de la Guerra de los Treinta Años, no quedando nada ya de su tumba.

Como curiosidad, reseñar que un biógrafo de la época escribió con admiración, lo grande y magnífica que fue la obra de Kepler, pero al final se lamentaba de que un hombre de su sabiduría llegase a tener demencia senil en la última etapa de su vida, llegando incluso a afirmar (Kepler) que *las mareas venían motivadas por una atracción que la luna ejercía sobre los mares...*, un hecho que por cierto fue demostrado años después de su muerte. Asimismo, y en su honor, una cadena montañosa del satélite marciano Fobos fue bautizada con el nombre de 'Kepler Dorsum'.

Permítasenos finalizar este trabajo adhiriéndonos al homenaje que el insigne poeta de la "Generación del 27" Gabriel Celaya le brindó a Kepler, por su gran honestidad científica, en forma de un no muy conocido poema:

Kepler miró llorando los cinco poliedros
encajados uno en otro, sistemáticos, perfectos,
en orden musical hasta la gran esfera.
Amó al dodecaedro, lloró al icosaedro
por sus inconsecuencias y sus complicaciones

adorables y raras, pero, !ay!, tan necesarias,
pues no cabe idear más sólidos perfectos
que los cinco sabidos, cuando hay tres dimensiones.
Pensó, mirando el cielo matemático, lejos,
que quizá le faltara una lágrima al miedo.
La lloró cristalina: depositó el silencio,
y aquel metapoliedro, geometría del sueño,
no pensable y a un tiempo normalmente correcto,
restableció sin ruido la paz del gran sistema.
No cabía, es sabido, según lo que decían,
más orden que el dictado. Mas él soñó: pensaba.
Eran más que razones: las razones ardían.
Estaba equivocado, mas los astros giraban.
Su sistema era sólo, según lo presentido,
el orden no pensado de un mundo enloquecido,
y él buscaba el defecto del bello teorema.
Lo claro coincidía de hecho con el espanto
y en la nada, la nada le besaba a lo exacto.

Referencias

[1] Balk M. B. *El secreto del viejo barriquero*, Kvant **8**(1986), 14–18 (original, en ruso. Puede verse en http://kvant.mccme.ru/1986/08/p14.htm).

[2] Janés, Clara. *Omar Jayyam Rubayat*, Alianza Editorial, 2007.

[3] Nieves Huerta A. y Mejía Velasco H.R. *Johannes Kepler y el secreto de la fabricación de las barricas de vino austriacas*, Epsilon 59, **20**:2(2004), 261–274.

[4] Solaeche Galera M. C. *Omar Khayyam: las Matemáticas, la Nada, el Vino, el Torno y la Amada*, Divulgaciones Matemáticas, **10**:1 (2002), 79–83.

[5] Tikhomirov V. M. *S*tories about maxima and minima (original, en ruso). Traducido en Amer. Math. Monthly 99:2 (1990), 182-183.

[6] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/K.html (sobre la biografía de Johannes Kepler).

Juan Núñez y Juan Portero
Departamento de Geometría y Topología.
Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
Aptdo. 1160. 41080-Sevilla (Spain).
e-mail: jnvaldes@us.es, juanitopb@hotmail.com