2.12166
LBS 1004766
237 48
BCa
043
130/1,2

Sobre las componentes irreducibles de la variedad de leyes de álgebra de Lie nilpotentes complejas de dimensión 8

Memoria presentada por Gerardo Valeiras Reina para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Directores:

Fdo: José M. Ancochea Bermúdez **Fdo: José Ramón Gómez Martín**

Doctorando:

Fdo: Gerardo Valeiras Reina

Mayo de 1992

Agradecimientos

Es especialmente agradable para mí expresar mi sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han contribuido a la realización de este trabajo.

En primer lugar debo citar a los profesores José María Ancochea Bermúdez y José Ramón Gómez Martín, por su constante apoyo y estímulo, y por su ayuda incondicional, sin los que este trabajo nunca se hubiera realizado.

Mi agradecimiento al profesor Michel Goze, por su valiosísimo asesoramiento y ayuda.

Al profesor José Luis Vicente Córdoba, quien siempre tuvo el consejo adecuado en el momento en que era más necesario.

Deseo también recordar aquí a mis compañeros y amigos del Departamento de Algebra, Computación, Geometría y Topología; especialmente al profesor Francisco J. Castro Jiménez, por aceptar las molestias que le causaron los trámites de la presentación del trabajo.

Expreso también mi agradecimiento a mis actuales compañeros y amigos del Departamento de Matemática Aplicada que siempre me ayudaron cuando lo necesité.

En último lugar, aunque no en importancia, mi gratitud a mi mujer, por su paciencia y aliento durante la realización del trabajo.

Contenido

Introducción

Presentación de la Tesis

En el presente trabajo se expone el desarrollo de un método para el tratamiento efectivo de los problemas que se presentan en el estudio de la variedad N^n, junto con los desarrollos teóricos necesarios, y su aplicación a la resolución de un problema abierto hasta el presente: la determinación de las componentes irreducibles de esa variedad en dimensión 8.

Nos parece importante señalar dos aspectos distintos en el trabajo:

1. La metodología, integrando técnicas fundamentadas en el Análisis No Standard, invariantes algebraicos y técnicas de Algebra Computacional, junto con un tratamiento informático.
2. Los resultados obtenidos con estos métodos, principalmente el teorema fundamental de determinación de *todas* las componentes irreducibles de la variedad N^8, resultado que parecía inalcanzable con las técnicas clásicas.

El principal resultado es

Teorema. *La variedad N^8 posee ocho componentes irreducibles, C_i, $(1 \leq i \leq 8)$ donde solo las dos primeras cortan al abierto de las filiformes, y las siguientes vienen dadas respectivamente por las clausuras de Zariski de las órbitas de las familias:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu^1(X_1, X_i) & = & X_{i-1},\ 3 \leq i \leq 8, \\ \mu^1(X_4, X_8) & = & \alpha\, X_2, \\ \mu^1(X_5, X_7) & = & X_2, \\ \mu^1(X_5, X_8) & = & (1+\alpha)\, X_3 + X_2, \\ \mu^1(X_6, X_7) & = & X_3, \\ \mu^1(X_6, X_8) & = & (2+\alpha)\, X_4 + X_3, \\ \mu^1(X_7, X_8) & = & (2+\alpha)\, X_5 + X_4 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \mu^2(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 3\le i\le 8,\\ \mu^2(X_4,X_7) &= X_2,\\ \mu^2(X_4,X_8) &= X_3+X_2,\\ \mu^2(X_5,X_6) &= -X_2,\\ \mu^2(X_5,X_7) &= -\frac{2}{5}\,X_2,\\ \mu^2(X_5,X_8) &= X_4+\frac{3}{5}\,X_3,\\ \mu^2(X_6,X_7) &= -\frac{2}{5}\,X_3,\\ \mu^2(X_6,X_8) &= X_5+\frac{1}{5}\,X_4+X_3+\alpha\,X_2,\\ \mu^2(X_7,X_8) &= X_6+\frac{1}{5}\,X_6+\alpha\,X_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^3(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 4\le i\le 8,\\ \mu^3(X_2,X_6) &= X_3,\\ \mu^3(X_2,X_7) &= X_4+\alpha_1\,X_3,\\ \mu^3(X_2,X_8) &= X_5+\alpha_1\,X_4,\\ \mu^3(X_5,X_8) &= \alpha_2\,X_3,\\ \mu^3(X_6,X_7) &= X_3,\\ \mu^3(X_6,X_8) &= (1+\alpha_2)\,X_4,\\ \mu^3(X_7,X_8) &= (1+\alpha_2)\,X_5+\alpha_3\,X_3 \qquad\qquad \textit{con } \alpha_2\neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^4(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 4\le i\le 8,\\ \mu^4(X_2,X_7) &= X_3,\\ \mu^4(X_2,X_8) &= X_4+\alpha_1\,X_3,\\ \mu^4(X_5,X_8) &= \alpha_2\,X_3,\\ \mu^4(X_6,X_7) &= \alpha_3\,X_3,\\ \mu^4(X_6,X_8) &= (\alpha_3+\alpha_2)\,X_4+\alpha_4\,X_3,\\ \mu^4(X_7,X_8) &= (\alpha_3+\alpha_2)\,X_4+e_3\,X_4+X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^5(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 4\le i\le 8,\\ \mu^5(X_2,X_8) &= -2\,X_3,\\ \mu^5(X_5,X_7) &= X_3,\\ \mu^5(X_5,X_8) &= X_4+X_2,\\ \mu^5(X_6,X_7) &= X_4+\alpha_1\,X_3-X_2,\\ \mu^5(X_6,X_8) &= 2\,X_5+\alpha_1\,X_4+\alpha_2\,X_3,\\ \mu^5(X_7,X_8) &= 2\,X_6+\alpha_1\,X_5+\alpha_2\,X_4+\alpha_3\,X_3+\alpha_4\,X_2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mu^6(X_1,X_3) & = & X_2,\\
\mu^6(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5\leq i\leq 8,\\
\mu^6(X_2,X_3) & = & X_4,\\
\mu^6(X_2,X_7) & = & \alpha_1\,X_4,\\
\mu^6(X_2,X_8) & = & \alpha_2\,X_4+\alpha_1\,X_5,\\
\mu^6(X_3,X_6) & = & \alpha_3\,X_4,\\
\mu^6(X_3,X_7) & = & \alpha_4\,X_4+(\alpha_1+\alpha_3)\,X_5,\\
\mu^6(X_3,X_8) & = & \alpha_5\,X_2+\alpha_6\,X_4+(\alpha_2+\alpha_4)\,X_5+(2\alpha_1+\alpha_3)\,X_6,\\
\mu^6(X_6,X_7) & = & X_4,\\
\mu^6(X_6,X_8) & = & \alpha_7\,X_4+X_5,\\
\mu^6(X_7,X_8) & = & (2\alpha_3+\alpha_1(2+\alpha_5))\,X_2+\alpha_8\,X_4+\alpha_7\,X_5+X_6
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mu^7(X_1,X_3) & = & X_2,\\
\mu^7(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5\leq i\leq 8,\\
\mu^7(X_3,X_7) & = & X_4,\\
\mu^7(X_3,X_8) & = & \alpha_1\,X_2+\alpha_2\,X_4+X_5,\\
\mu^7(X_5,X_8) & = & X_2,\\
\mu^7(X_6,X_7) & = & -X_2+\alpha_3\,X_4,\\
\mu^7(X_6,X_8) & = & X_2+\alpha_3\,X_5,\\
\mu^7(X_7,X_8) & = & X_3+\alpha_3\,X_6
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mu^8(X_1,X_3) & = & X_2,\\
\mu^8(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5\leq i\leq 8,\\
\mu^8(X_2,X_8) & = & X_4,\\
\mu^8(X_3,X_7) & = & \alpha_1\,X_4,\\
\mu^8(X_3,X_8) & = & \alpha_2\,X_2+X_4+(1+\alpha_1)\,X_5,\\
\mu^8(X_6,X_7) & = & \alpha_3\,X_4,\\
\mu^8(X_6,X_8) & = & X_2+\alpha_3\,X_5,\\
\mu^8(X_7,X_8) & = & X_3+\alpha_3\,X_6
\end{array}\right.$$

Creemos que el resultado obtenido es interesante por sí mismo; sin embargo posiblemente tenga mayor alcance la metodología empleada para su consecución, ya que abre camino al tratamiento de otros problemas que involucran cálculos efectivos. Pese a esto, queremos enfatizar que *no es el programa el que hace las Matemáticas*; remitimos para ello a la discusión realizada en 2.1.

Se ha elegido un modo expositivo en el que los resultados aparecen tras el razonamiento que conduce a ellos. Así es frecuente que el enunciado de una proposición aparezca solo al final de su demostración, cuando la obtención de la misma parece ya obvia. De hecho sólo se enfatizan etiquetándolos como *lema*, *proposición* o *teorema*, algunos resultados escogidos. Esta presentación a veces enmascara la verdadera dificultad de obtención de algunos resultados, pero pone de manifiesto el discurso lógico que conduce a ellos.

Organización de la Tesis

La exposición del trabajo está dividida en 4 capítulos, la bibliografía y un apéndice (en un volumen aparte):

Introducción : Es el capítulo actual, en el que se presenta el trabajo y se describe su organización.

Capítulo 0 : Se hace un breve recorrido por las principales técnicas de Análisis No Standard que se utilizarán en el trabajo.

Capítulo 1 : Tras una exposición sumaria del estado de los conocimientos en los temas de que se ocupa el trabajo, se fija la terminología y se obtienen los resultados que justifican los métodos utilizados para la determinación de las componentes. En particular se obtienen resultados que enlazan con otros existentes y que permiten su tratamiento informático.

Capítulo 2 : Es una descripción del programa informático desarrollado para los cálculos que intervienen en la determinación de las componentes. No es una exposición informática (de hecho se omiten las complejidades técnicas), sino que se muestran las *ideas matemáticas* usadas, junto con su traducción a fragmentos escogidos de código. En estas secciones hay por tanto contenidos matemáticos fundamentales para el resto del trabajo. Se concluye el capítulo con un listado completo del programa.

Capítulo 3 : Se utilizan los métodos desarrollados en los capítulos anteriores para aplicarlos a la determinación de las componentes irreducibles de la variedad N^8. Está dividido en secciones que estructuran el problema según la consideración de las sucesivas sucesiones características.

Bibliografía : Aquí de dan las principales referencias utilizadas en el desarrollo del trabajo. No se pretende ser exhaustivo, ya que la bibliografía y artículos sobre el tema es extensísima; de hecho se han omitido casi todas las referencias a libros, y se citan solo los artículos más relevantes relacionados con el tema del trabajo.

Apéndice : Se dan muestras de los cálculos intermedios proporcionados por el programa, que justifican los desarrollos del capítulo 3. Hemos hecho una selección (para que el volumen fuera razonable), ya que solo se pretende ilustrar la naturaleza de estas salidas y mostrar su complejidad.

Capítulo 0

El método no standard en el estudio de N^n

0.1 La variedad N^n

Sea $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones bilineales de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Dada una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, podemos determinar un elemento $\alpha \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ por sus *constantes de estructura* dadas por la igualdad

$$\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \cdot e_k \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

De este modo podemos identificar $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ con un espacio afín.

Para que $\mu \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ sea una ley de álgebra de Lie debe ser alternada y verificar la igualdad de Jacobi, es decir, para todos $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ deben verificarse:

$$\mu(X,Y) = -\mu(Y,X)$$
$$\mu(X, \mu(Y,Z)) + \mu(Z, \mu(X,Y)) + \mu(Y, \mu(Z,X)) = 0$$

La primera condición nos da la sencilla relación

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

y entonces la igualdad de Jacobi equivale a las ecuaciones sobre las constantes de estructura:

$$\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{kl}^s + C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s = 0 \qquad (1 \leq i \leq j < k \leq n,\ 1 \leq s \leq n)$$

Así el conjunto L^n de todas las leyes de álgebra de Lie en C^n, parametrizadas por las $(n^3 - n^2)/2$ constantes C_{jk}^i es una variedad algebraica afín de $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$.

Análogamente, por el teorema de Engel, la nilpotencia del álgebra de Lie se corresponde con unas ecuaciones polinómicas sobre las constantes de estructura y por tanto el conjunto N^n de las leyes de álgebra de Lie nilpotentes es una variedad cerrada de L^n.

Consideramos la fibración de N^n definida por las órbitas correspondientes a la acción natural del grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{C})$ definida por los cambios de base:

$$Gl(n, \mathbb{C}) \times N^n \longrightarrow N^n : (f, \mu) \to f^{-1} \cdot \mu \cdot f \times f$$

Si $g = (\mu, \mathbb{C}^n) \in N^n$, designaremos por $\mathcal{O}(g)$ o $\mathcal{O}(\mu)$ la órbita de g por esta acción. Entonces $\mathcal{O}(\mu)$ es una subvariedad regular de N^n y que su espacio tangente en el punto μ es el espacio vectorial $B^2(\mu, \mu)$ de los 2-cobordes en la cohomología de Chevalley asociada a μ (véase [14]).

Consideramos en N^n la topología métrica (la misma que la topología inducida como subconjunto de $\mathbf{C}^{(n^3-n^2)/2}$). Debe notarse que al tratarse de álgebras de Lie complejas, la clausura de Zariski de cualquiera de las órbitas coincide con su clausura en la topología métrica (véase [7]).

0.2 Análisis No Standard

Clásicamente, el estudio de las variedades de leyes de álgebra de Lie sobre $\mathbf{C}^n$ se apoya en el concepto formal de deformación introducido por Gerstenhaber en 1964 [10], lo que conduce, bien a sofisticados cálculos cohomológicos, bien a cálculos formales que se alejan de los problemas topológicos iniciales. En esta sección pretendemos mostrar brevemente algunos de los principales resultados que proporcionarán poderosas herramientas para la determinación de las componentes irreducibles de N^8. Debemos hacer constar que ésta exposición será necesariamente incompleta, y remitimos para un tratamiento más amplio y profundo a las referencias [22,24,25].

Daremos en primer lugar la exposición axiomática de I.S.T. ('Internal Set Theory').

Se añade al lenguaje de Z.F.E. (Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección) el símbolo predicado *st* (leído *standard*). las nuevas fórmulas se llaman *externas*, las de Z.F.E. *internas*. Los axiomas no lógicos de I.S.T. son además de los de Z.F.E. restringidos a las fórmulas internas, los tres principios siguientes:

T *Axioma de Transferencia:* sea $A(x, t_1, \dots, t_k)$ una fórmula interna sin más variables libres que $x, t_1, \dots, t_k$. Entonces

$$\forall^{st} t_1, \dots, \forall^{st} t_k \, [\forall^{st} x \, A(x, t_1, \dots, t_k) \Leftrightarrow \forall x \, A(x, t_1, \dots, t_k)]$$

donde $\forall^{st} x \, A(x)$ es una abreviatura para $\forall x \, [x \textit{standard} \Rightarrow A(x)]$

I *Axioma de Idealización:* sea $B(x,y)$ una fórmula interna que contiene al menos dos variables libres x e y. Entonces

$$\forall^{st}\,\text{finito}\, z \exists x\, \forall y \in z\, B(x,y) \Leftrightarrow \exists x\, \forall^{st} y\, B(x,y)$$

S *Axioma de Standarización:* sea $F(z)$ una fórmula (interna o externa). Entonces

$$\forall^{st} x\, \exists^{st} y\, \forall^{st} z\, [z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ y } F(z)]$$

Se demuestra que I.S.T. es una extensión conservativa de Z.F.E.; por consiguiente, las propiedades internas demostradas en I.S.T. admiten también una demostración en Z.F.E., a menudo más larga y menos natural.

Aunque el predicado *st* es indefinido, es decir, no se sabe a priori cuáles son los conjuntos standard y cuáles no, se tiene que *todo conjunto definido de manera única por una propiedad interna es standard.* De esta manera los objetos matemáticos clásicos son standard, así como todos los construidos a partir de ellos por un procedimiento interno.

El axioma T se aplica esencialmente en los dos casos siguientes:

1. Para demostrar que una propiedad interna (dependiente solamente de constantes standard) es verificada por todo x, basta con probarla para todo x standard.

2. Los objetos cuya existencia y unicidad viene dada por una fórmula interna a partir de constantes standard, son standard.

El axioma I proporciona objetos *ideales* imperceptibles para la matemática clásica. Por ejemlo, si se aplica a la fórmula $B(u,v) = [u \in \mathbb{N} \text{ y } v \in \mathbb{N} \text{ y } u > v]$, se obtiene que *existe* $\omega \in \mathbb{N}$ *tal que* $\omega > n$ $\forall^{st} n \in \mathbb{N}$. Un tal ω se dice que es *infinitamente grande* y evidentemente no es standard. De forma análoga, el Axioma de Idealización garantiza la existencia de números reales *infinitamente grandes* (mayores en valor absoluto que todo real standard) y reales *infinitamente pequeños* (menores en valor absoluto que todo real standard positivo).

Se utilizará la terminología siguiente:

- $x \in \mathbf{R}$ es *limitado* si $\exists^{st} y$ tal que $|x| < y$.
- $x, y \in \mathbf{R}$ son *infinitamente próximos* si $|x - y|$ es infinitamente pequeño. Escribiremos en este caso $x \simeq y$.

A partir del axioma S podemos obtener que *para todo real limitado x existe un único real standard ${}^0x$ llamado* sombra *de x tal que ${}^0x \simeq x$*. Análogamente, para todo $A \subset \mathbf{R}$ el axioma S proporciona la existencia de un único conjunto standard ${}^0A$, llamado *sombra* de A, tal que sus elementos son las sombras de los elementos limitados de A.

Podemos obtener algunas curiosas aplicaciones a la Topología que luego resultarán útiles en capítulos posteriores.

Si (X, T) es un espacio topológico standard (X y T standard), $a \in X$ standard y $A \subset X$ standard. Si $x \in X$, se dirá que:

- *x es del halo de a* si x pertenece a todos los entornos standard de a.
- *x es del halo de A* si x es del halo de algún standard $b \in A$.
- *x es del gran halo de A* si x pertenece a todos los abiertos standard que contienen a A.

Escribiremos respectivamente $x \in h(a)$, $x \in h(A)$, $x \in H(A)$, aunque el halo de a, el halo de A y el gran halo de A no son, en general, conjuntos en el sentido de I.S.T.

Se pueden demostrar los siguientes resultados:

1. A es abierto si y sólo si todo punto del halo de A está en A.
2. a es del interior de A si y sólo si todo punto del halo de a está en A.
3. $a \in \overline{A}$ si y sólo si existe un punto del halo de a en A.

Por su importancia a la hora del estudio de las perturbaciones, concepto crucial en todo el trabajo, citaremos el siguiente resultado

Teorema. (Goze) *Sea $M_0 \in \mathbf{C}^n$ standard. Todo punto $M \in \mathbf{C}^n$ infinitamente próximo a M_0 admite una descomposición de la forma*

$$M = M_0 + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 v_2 + \cdots + \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_p v_p$$

donde $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$ son infinitamente pequeños y $v_1, \ldots, v_p$ son vectores standard linealmente independientes.

Además si $M = M_0 + \epsilon'_1 v'_1 + \epsilon'_1 \epsilon'_2 v'_2 + \cdots + \epsilon'_1 \epsilon'_2 \cdots \epsilon'_q v'_q$ es otra descomposición de M con esas condiciones, se tiene que $p = q$ y la bandera definida por $v'_1, \ldots, v'_q$ coincide con la definida por $v_1, \ldots, v_p$.

0.3 Perturbaciones

Introduciremos en esta sección el concepto de perturbación, que será esencial en los desarrollos posteriores.

Consideraremos n standard, con lo que $\mathbf{C}^n$ y la variedad de leyes de álgebra de Lie L^n son standard.

Diremos que $x \in \mathbf{C}^n$ es *limitado* (resp. *infinitamente pequeño*) si las partes real e imaginaria de cada una de sus componentes lo son. De este modo, si x es limitado, existe ${}^0x$.

Una *perturbación* de una ley standard μ_0 de L^n es una ley μ de L^n que verifica

$$\mu(x,y) \simeq \mu_0(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{C}^n \text{standard o limitados de} \mathbf{C}^n$$

Si μ es una perturbación de μ_0, escribiremos $\mu \simeq \mu_0$.

Se verifican entonces los siguientes resultados:

1. Si $\mu \simeq \mu_0$, entonces las constantes de estructura de μ_0 respecto de una base standard son las sombras de las constantes de estructura de μ respecto de dicha base.

2. Si $\mu_0 \in L^n$ es standard y $\mu \simeq \mu_0$, entonces para toda $\mu_1 \in L^n$ isomorfa a μ, μ_0 es una contracción de μ_1.

3. El conjunto de todas las perturbaciones de μ_0 constituye el halo de μ_0 para la topología métrica de L^n. Como una topología standard en un conjunto standard está completamente determinada por los halos de los puntos standard, el estudio de las perturbaciones de las leyes standard de L^n determinan completamente la topología de L^n.

4. Como consecuencia del teorema de GOZE (ver 0.2), si μ es una perturbación de una ley standard μ_0 de L^n, μ admite una descomposición de la forma

$$\mu = \mu_0 + \epsilon_1 \varphi_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \varphi_2 + \cdots + \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_p \varphi_p$$

donde para todo i con $1 \leq i \leq p$, $\epsilon_i \simeq 0$ y $\varphi_i : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ son aplicaciones bilineales alternadas standard linealmente independientes.

Capítulo 1

Componentes irreducibles de N^n

1.1 Antecedentes

Una variedad algebraica V se dice irreducible si no puede ser dada como la unión de dos variedades V_1, V_2 con $V_1, V_2 \neq V$. Un razonamiento elemental conduce a que toda variedad V reducible puede ser puesta como

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$$

donde cada V_i es una variedad irreducible. Estas V_i son las llamadas ***componentes irreducibles*** de la variedad V.

Uno de los primeros trabajos sobre las componentes irreducibles de la variedad N^n es la tesis de VERGNE [27] en 1966 y otros de sus trabajos del mismo periodo [29,28], quien demuestra mediante unos cálculos cohomológicos, que para $n \leq 6$ es irreducible, que para $n = 7$ y $n \geq 11$ es reducible, (aunque no determina explícitamente las componentes). En 1991, HAKIMJANOV [17] demuestra que para $n \geq 12$, si n es impar hay al menos 3 componentes y si n es par, hay al menos 4 componentes, siendo siempre filiformes las que encuentra. El problema en las dimensiones $8, 9$ y 10 quedó abierto hasta que recientemente, HAKIMJANOV, ANCOCHEA Y GOZE [18], demostraron que son reducibles también en esas dimensiones.

Así respecto a las componentes irreducibles conocidas de la variedad N^n podemos afirmar:

- Para $n \leq 6$ es irreducible.
- Para $n = 7$ la variedad es la unión de dos componentes irreducibles, una de las cuales contiene al abierto de las *filiformes* (lo que implica la irreducibilidad de ese abierto).
- Para $n \geq 11$, $n = 10$ existen al menos dos componentes en el abierto de las filiformes.
- Para $n = 9$ el abierto de las filiformes es irreducible [1], pero es posible dar una familia de leyes de álgebra de Lie de sucesión característica $(7, 1, 1)$ que la adherencia de su órbita es una segunda componente.
- Para $n = 8$ existen al menos dos componentes en el abierto de las filiformes. Recientemente *Seeley* [26] mostró una componente no filiforme en esta dimensión.

- Muy recientemente, Hakimjanov, Goze y Ancochea [19] han encontrado una componente irreducible en N^n para $n \geq 11$ que no corta al abierto de las filiformes. En este mismo trabajo se demuestra que para n suficientemente grande, el número de componentes que no cortan al abierto de las filiformes es mayor o igual que $n/74$.

Puede sugerir el carácter no trivial del problema el hecho que desde los primeros trabajos en 1966 hasta la primera obtención de resultados explícitos transcurrieron 25 años. Más aún merece la pena señalar que a pesar de remontarse los primeros trabajos a 1966, todavía en 1988 se estaba trabajando en dimensión 5 (ver [16]).

Nótese la carencia de información especialmente en la dimensión 8, y en particular acerca de las componentes no cortando al abierto de las filiformes. También es necesario insistir en la falta de construcciones explícitas de las componentes (excepto en casos aislados): en su mayoría, estos resultados dan la *existencia* de componentes, sin poder construirlas. Esta carencia de ejemplos no triviales supone un gran obstáculo en el camino de la comprensión de la estructura de la variedad N^n.

En el presente trabajo demostraremos la existencia de exactamente ocho componentes irreducibles en N^8, dos de ellas cortando al abierto de las filiformes y seis no cortándolo: determinaremos estas componentes de forma explícita y calcularemos sus dimensiones.

1.2 La Sucesión característica

La sucesión característica aparece utilizada explícitamente por primera vez en los trabajos de Goze y Ancochea [2]. Es un invariante basado en conceptos elementales relacionados con la forma canónica de Jordan que proporciona un método fructífero y sistemático para el estudio de la variedad N^n.

Sea $\mathfrak{g} = (\mathbf{C}^n, \mu)$ un álgebra de Lie nilpotentey $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ su álgebra derivada. Para cada $X \in \mathfrak{g} - \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ llamamos

$$s_\mu(X) = (s_1(X), \ldots, s_k(X), 1)$$

la sucesión ordenada $(s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k)$ de los exponentes de semejanza del operador nilpotente $\mathrm{ad}_\mu(X)$. Ordenamos el conjunto de tales sucesiones lexicográficamente y definimos

$$s(\mu) = \sup(s_\mu(X) | X \in \mathrm{g} - \mathcal{D}(\mathrm{g}))$$

que llamaremos la ***sucesión característica*** del álgebra. Claramente $s(\mu)$ es invariante ante los isomorfismos y tiene sentido hablar de la sucesión característica de un elemento de $N^n/Gl(n, \mathbf{C})$.

Por construcción existe al menos un $X \in \mathrm{g} - \mathcal{D}(\mathrm{g})$ tal que $s_\mu(X) = s(\mu)$; diremos entonces que X es un *vector característico* de g.

1.2.1 Sucesión característica y partición de multiplicidades

Sea X un vector característico. Los elementos de la sucesión característica tienen una interpretación elemental sobre la forma canónica de Jordan de $\mathrm{ad}_\mu(X)$: como $\mathrm{ad}_\mu(X)$ es nilpotente tendrá el cero como único autovalor, y su forma de Jordan consistirá en distintos bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la dimensión del bloque puede estar entre 1 y n. Podemos suponer que los bloques de Jordan están ordenados de mayor a menor. Se verifica así que, si la sucesión característica es $s = (s_1, \ldots, s_k)$, entonces s_i es la dimensión del bloque número i.

Si X es un vector catracterístico para la sucesión característica s, por construcción X_1 no pertenece al álgebra derivada, por lo que podemos tomar un subespacio vectorial V de $\mathbf{C}^n$ suplementario del engendrado por X y conteniendo al álgebra derivada. Entonces $\forall Y \in V$ se tiene $\mu(X, Y) \in V$, con lo que podemos tomar una base de $\mathbf{C}^n$ para la que $\mathrm{ad}(X)$ está en forma canónica de Jordan, uniendo X y una base de V. Como $\mu(X, X) = 0$, se puede asegurar que la forma canónica de Jordan de $\mathrm{ad}(X)$ tiene un bloque de tamaño uno, es decir, necesariamente la sucesión característica termina en un uno.

Mediante un razonamiento elemental de Álgebra Lineal se tiene que a cada $s_\mu(Y)$ con $Y \in \mathfrak{g} - \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ y sucesión de semejanza $s(Y) = (s_1(Y), \dots, s_l(Y))$ le corresponde biunívocamente una ***sucesión de rangos*** $(r_0, r_1, \dots, r_k)$ que puede obtenerse mediante el procedimiento:

$r_0 = n$
$k = \max(s_1, \dots, s_l)$
$n_i =$ número de veces que aparece i en $(s_1, \dots, s_l) \qquad (1 \le i \le k)$
$r_i = r_{i-1} - \sum_{j=i}^{k} n_j \qquad (1 \le i \le k)$

Esta sucesión de rangos se relaciona con la ***partición de multiplicidades*** de $\mathrm{ad}_\mu(X)$: si la partición de muliplicidades es $(p_1, \dots, p_k)$, entonces

$$p_i = r_{i-1} - r_i \qquad \forall i,\ 1 \le i \le k$$

y se interpretan fácilmente los r_i como

$$r_i = \mathrm{rango}(\mathrm{ad}_\mu(X)^i)$$

Dada una sucesión característica s, sabemos que todo vector que no esté en la derivada tiene una sucesión de semejanza menor o igual (lexicográficamente) que s, y para cada uno de ellos obtenemos una sucesión de rangos r. No todas estas sucesiones de rangos tienen la misma longitud, así que las completamos con ceros a la derecha, de modo que todas tengan la longitud m de la más larga. Co esto tenemos una lista de sucesiones de rangos

$$r^i = (r_1^i, \dots, r_m^i) \qquad (1 \le i \le k)$$

y tomamos

$$R = (R_1, \dots, R_m), \text{ siendo } R_j = \max\{r_j^i | i = 1, \dots, k\}$$

y se puede garantizar que si Y es un vector que no está en el álgebra derivada, entonces se cumple

$$\mathrm{rango}(\mathrm{Adj}(Y))^j \le R_j \qquad (1 \le j \le m)$$

Como veremos en 2.3.3, esto tendrá gran interés a la hora de los cálculos efectivos.

1.3 Determinación de las componentes irreducibles

El concepto de perturbación, junto con el invariante de la sucesión característica, proporcionan las herramientas claves para la determinación explícita de las componentes irreducibles y viene a sustituir ventajosamente al concepto clásico de deformación.

La búsqueda de las componentes irreducibles se realiza estratificando el cociente $N^n/Gl(n, \mathbf{C})$ según la sucesión característica, procediendo en primer lugar por las sucesiones características mayores en orden lexicográfico.

El proceso en una sucesión característica dada se puede dividir en las siguientes etapas:

1. Determinación genérica de las constantes de estructura de las posibles leyes de álgebra de Lie en esa sucesión característica.
2. Refinamiento y obtención de las posibles familias de leyes de álgebra de Lie, imponiendo las condiciones de Jacobi, la nilpotencia y exigiendo la pertenencia a esa sucesión característica.
3. Obtención de las componentes irreducibles proporcionadas por esas familias.

Determinación genérica de las leyes de álgebra de Lie

Sea s una sucesión característica dada. Pretendemos determinar todas las posibles leyes de álgebras de Lie nilpotentes correspondientes a la sucesión característica s.

Empezamos considerando un vector característico, que llamaremos X_1. Por construcción X_1 no pertenece al álgebra derivada, por lo que podemos tomar un subespacio vectorial V de $\mathbf{C}^n$ suplementario del engendrado por X_1 y conteniendo al álgebra derivada. Entonces

$$\mu(X_1, X) \in V \qquad \forall X \in V$$

Así se puede considerar la restricción de $\mathrm{ad}(X_1)$ a V, para la cuál tomamos una base de Jordan $(X_2, \ldots, X_n)$. Claramente, respecto a la base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, la matriz de ad(X_1) estará en la forma canónica de Jordan correspondiente a la sucesión característica s, que es conocida. De este modo podemos partir conociendo los productos $\mu(X_1, X_j)$ para todo j.

Los productos $\mu(X_i, X_j)$ con $j > 1$ los podemos obtener simplemente suponiendo constantes de estructura genéricas C_{ij}^k y determinar las que sean posibles a partir de las condiciones de Jacobi. En la práctica esto es muy sencillo y de hecho pueden obtenerse los siguientes productos de un modo recursivo mediante las condiciones de Jacobi, como se verá en los casos que desarrollaremos en detalle en la exposición de este trabajo.

Debe notarse que la ley así generada posee constantes de estructura indeterminadas, en número que dependerá de la sucesión característica y de lo intensivamente que se apliquen las condiciones de Jacobi y nilpotencia.

En realidad, lo que hacemos al obtener una *ley genérica* para esa sucesión característica, es obtener una familia tal que su órbita contiene a todas las leyes de álgebra de Lie de esa sucesión característica.

Debemos señalar que, como veremos más adelante, a veces es conveniente no eliminar *todos* los parámetros posibles. De hecho utilizaremos exclusivamente las condiciones de Jacobi y nilpotencia ya que las condiciones derivadas de la pertenencia a esa sucesión característica pueden sugerir pistas útilies para la búsqueda de la posibles perturbaciones.

1.4 Obtención de las familias de leyes

A partir de la familia encontrada en la fase anterior, dependiendo de cierto número de constantes de estructura indeterminadas, se imponen exhaustivamente las condiciones de Jacobi y la nilpotencia.

Se utilizan en esta fase algunas funciones del programa desarrollado para **Mathematica**, que construyen listas de relaciones que deben verificar las constantes de estructura para que se trate de una ley de álgebra de Lie nilpotente. Este proceso informático se describe en detalle en 2.3.1 y 2.3.2.

Debe notarse que las condiciones impuestas son ***necesarias y suficientes*** para que se trate de una ley de álgebra de Lie nilpotente.

Habitualmente las listas de relaciones obtenidas deben simplificarse y proporcionan en algunos casos valores explícitos para algunas de las constantes, y en otros casos relaciones polinómicas entre ellas.

Cuando aparecen relaciones polinómicas complicadas, es necesario el desglose de la familia general en varias familias, considerando varios casos en los que pueden aparecer los parámetros y obteniendo las subfamilias correspondientes. Aunque luego se insistirá en ello, es importante señalar ahora que se imponen condiciones ***abiertas***; esto tendrá importancia en la obtención de las componentes irreducibles.

Bases de Gröbner y refinamiento de las restricciones

Las relaciones que se obtienen entre las constantes de estructura que restan indeterminadas son en algunos casos muy complicadas y es necesario acudir a potentes técnicas de álgebra conmutativa para su tratamiento. La herramienta básica para ello la proporciona la teoría matemática de las ***bases de Gröbner*** (tanbién llamadas ***bases de división***) sobre las que hablaremos aquí brevemente. Se pueden encontrar referencias completas en [6,9,8,21].

Las restricciones impuestas a las constantes de estructura se materializan en una lista de ecuaciones polinómicas sobre ellas. Estos polinomios generan un ideal de un módulo de polinomios con indeterminadas las constantes de estructura. Los problemas básicos que se nos presentan, que están íntimamente relacionados entre sí, son los siguientes:

1. Decidir si un polinomio dado pertenece al ideal.
2. Simplificar un polinomio módulo el ideal.
3. Resolver las ecuaciones, obteniendo las soluciones en todos los casos posibles.

Exponemos brevemente los principales resultados que utilizaremos para abordar estos problemas:

Suponemos elegido en $\mathbb{N}^m$ un orden total cumpliendo:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^m,\ \beta \neq 0,\ \alpha < \alpha + \beta$$
$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{N}^m,\ \alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$$

Ejemplos de tales órdenes son el lexicográfico, el diagonal, etc.

Designando $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$, definimos el *exponente privilegiado* de un polinomio no nulo $f = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{X}^\alpha \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ (respecto al orden escogido) como el elemento de $\mathbb{N}^m$

$$\exp(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}^m | f_\alpha \neq 0\}$$

Si I es un ideal no nulo de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ definimos el conjunto de exponentes de I como

$$\mathrm{E(I)} = \{\exp(f) \mid f \in \mathrm{I}\}$$

Es claro que $\mathrm{E(I)} + \mathbb{N}^m = \mathrm{E(I)}$. Los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}^m$ con esta propiedad se llaman *ideales* de $\mathbb{N}^m$.

Una *base de división* de un ideal I no nulo de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ es una familia finita $f_1, \ldots, f_r$ de elementos de I tales que

$$\mathrm{E(I)} = \bigcup_{i=1}^{r} (\exp(f_i) + \mathbb{N}^m)$$

Se tiene entonces:

1. Todo ideal de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ posee una base de división.
2. Una base de división de un ideal de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ es un sistema generador del ideal.
3. Existe una división de un polinomio entre una familia de polinomios en la que existen unos cocientes y un resto de modo que un polinomio pertenece al ideal si y solo si es nulo el resto de dividirlo entre una base de división del ideal.

4. Existen algoritmos que permiten encontrar bases de división [6,9,8].

Utilizaremos las bases de división para la reducción de las restricciones obtenidas sobre las constantes de estructura, como veremos en 2.4.1

1.5 Obtención de las componentes

El resultado fundamental que permite diseñar un procedimiento de búsqueda efectiva de las componentes es el siguiente [13]:

Proposición. *Si μ' es una perturbación de μ en N^n, entonces $s(\mu') \geq \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in \mathbf{C}^n$ tal que $s_\mu(X) = s(\mu)$. Como $\mu' \simeq \mu$, si $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie asociada a μ' y $X' \simeq X$ con $X' \in \mathfrak{g}' - \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$, entonces $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')$ es una perturbación de $\mathrm{ad}_\mu(X)$. Sea $s_\mu(X) = (s_1, \ldots, 1)$ y consideremos el primer subespacio propio E_1 (resp. E_1') de $\mathrm{ad}_\mu(X)$ (resp. $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')$) que tiene dimensión s_1. Si $(e_1, \ldots, e_{s_1})$ es una base de Jordan de E_1, entonces $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')(e_i) \simeq e_{i+1}$ y $\dim(E_1') \geq \dim(E_1)$. En caso de darse la igualdad se comparan los subespacios propios siguientes. De aquí la proposición. □

LLamaremos

$$U_s^n = \{\mu \in N^n \mid s(\mu) \geq s\}$$
$$N_s^n = \{\mu \in N^n \mid s(\mu) = s\}$$

Como consecuencia de la proposición, U_s^n es un abierto de N^n. En particular, cuando $s = (n-1, 1)$ tenemos el abierto de las leyes filiformes.

Si consideramos todas las posibles sucesiones características en dimensión n:

$$(n-1, 1) = s_0 > s_1 > \ldots s_k = (1, \ldots, 1)$$

tenemos entonces la sucesión de abiertos encajados

$$U_{s_0}^n \subset U_{s_1}^n \subset \ldots \subset U_{s_k}^n$$

Cuando busquemos las componentes irreducibles lo haremos recorriendo los abiertos U_s^n en ese orden.

Empezamos por el abierto $U_{(n-1,1)}^n$ de las leyes filiformes. Se describe el abierto como la órbita de una familia de leyes con cierto número de constantes de estructura indeterminadas y con ciertas restricciones entre ellas. Esta familia se divide en subfamilias que permitan un tratamiento razonable y se descartan las que pertenezcan a la adherencia de Zariski de las órbitas de otras. Las adherencias de Zariski de las órbitas de las familias proporcionan las componentes irreducibles buscadas, de entre las que habrá que determinar las que sean distintas.

Supuesto que se han determinado las componentes cortando los abiertos $U_{s_0}^n, \ldots, U_{s_{l-1}}^n$, se pasa a la sucesión característica siguiente s_l (inmediatamente inferior) y se determinan las posibles familias de leyes cortando el abierto $U_{s_l}^n$. Para cada una de las familias halladas se estudia si pueden perturbarse en alguna de las encontradas en las familias halladas anteriormente. Si una de aquéllas se perturba en otra, entonces está en la adherencia de la órbita de esa otra, y por tanto en una de las componentes previamente determinadas. Si una de las familias no puede perturbarse en ninguna de las anteriores, entonces la adherencia de su órbita determina una *nueva* componente.

Debe notarse la importancia del resultado mencionado al principio, que es fundamental para garantizar la validez de este proceso. Esto pone además de manifiesto lo adecuado del uso de la sucesión característica como invariante cuyo comportamiento ante las perturbaciones es controlable, contrariamente a lo que ocurre con otros invariantes clásicos (grupos de cohomología, sistemas de pesos, etc.)

Por otra parte veremos que, al contrario que las deformaciones, las perturbaciones permiten un tratamiento informático que proporciona resultados efectivos.

1.6 Dimensiones de las componentes irreducibles de N^8

El problema de determinar la dimensión de una variedad algebraica cuando viene dada por sus ecuaciones implícitas no es en absoluto trivial. Existen distintas aproximaciones al problema, cohomológicas, combinatorias, etc. Afortunadamente, en nuestro caso contamos con la ventaja de no estar en una situación tan general, sino que nuestras componentes vienen dadas como la adherencia de Zariski de las órbitas de unas determinadas familias de leyes. El problema en este caso está perfectamente resuelto [18,14,15]: la dimensión de la clausura de la órbita es igual a la dimensión del espacio B^2 de los 2-cobordes de la cohomología de Chevalley, más el número de parámetros independientes en la familia.

El cálculo de la dimensión de B^2 se realiza mediante un programa de ordenador preparado por *Goze* y *Maklouf* [14,15]. Así pues, el problema queda reducido a la determinación del mínimo número de parámetros en la familia de leyes que da la órbita. Esto se resuelve por una computación simple (aunque a veces terríblemente larga) gracias a la naturaleza lineal de la estructura de álgebra de Lie: se plantean los posibles cambios de base que transforman leyes de la familia en otras leyes de la misma familia. Si la ley de la familia es isomorfa a otra ley con menos parámetros, debe serlo mediante uno de esos cambios de base. Esto da lugar a un estudio detallado de los cálculos del ordenador: el hecho de transformar la familia en sí misma impone restricciones a los posibles cambios de base, de modo que el problema se reduce al fin al estudio de las posibles elecciones de los coeficientes del cambio de base tales que eliminen algunas de las constantes de estructura. Este cálculo es perfectamente abordable con un tratamiento informático (léanse los comentarios sobre los cambios de base en el capítulo 2, especialmente en la página 34).

De este modo el cálculo de las dimensiones de las componentes irreducibles se reduce a una simple computación.

Capítulo 2

Tratamiento informático

El proceso descrito de obtención de las componentes pasa por la obtención de las restricciones sobre las constantes de estructura para garantizar que se trata de una ley de álgebra de Lie nilpotente. Por otra parte, el estudio de las dimensiones de las componentes obtenidas, así como otros cálculos necesarios requieren la utilización de cambios de base y otras transformaciones que si bien son conceptualmente sencillos, en la práctica por su complejidad resultan irrealizables manualmente. Para facilitar la obtención de las familias y su posterior estudio se ha realizado una colección de programas; expondremos en el presente capítulo el modo en que se realiza este tratamiento informático.

2.1 Matemáticas e Informática

Es quizá el momento de dejar claro que el desarrollo informático que se expone en este capítulo *no es una calculadora de componentes irreducibles*, sino un (limitado) asistente matemático que colabora haciendo por nosotros los cálculos que quizá no seríamos capaces de realizar manualmente.

Más aún insistimos en un hecho que hemos tenido ocasión de comprobar reiteradamente:

El ordenador no hace las Matemáticas.

En efecto, nos atrevemos a afirmar que sin la comprensión de las ideas matemáticas subyacentes a los cálculos, éstos no habrían llegado a ninguna parte. De hecho, argumentos geométricos y algebraicos permiten simplificaciones que hacen posibles las operaciones siguientes. Como sea que estos argumentos se aplican cuando interpretamos los resultados de cálculos previos, concluimos que

> *Es la cooperación interactiva entre la mente del matemático y la capacidad de cálculo del ordenador lo que hace posible que se obtengan resultados.*

2.2 Sobre la implementación

La programación se ha hecho para el sistema de cálculo formal denominado **Mathematica**. Antes de elegir **Mathematica** como sistema sobre el que hacer estos desarrollos se consideraron distintas posibilidades:

1. Una opción era trabajar en un lenguaje de más bajo nivel. Esto tendría la considerable ventaja de la velocidad de ejecución y sus pocas exigencias de equipos potentes para su ejecución. La experiencia del autor en el desarrollo de software científico en C y C++ (Paquetes de cálculo formal, Bases de Gröbner, etc.) hacían que esta opción fuese tenida en cuenta en la elección.

2. Otra posibilidad era trabajar en un lenguaje de más alto nivel, por ejemplo se pensó seriamente hacerlo en LISP (elección aconsejada por el buen conocimiento y la experiencia en desarrollos en ese lenguaje). No obstante no se encontró ninguna ventaja del LISP respecto a las opciones siguientes, por lo que fué descartado.

3. La opción restante era utilizar un sistema de cálculo formal especializado en Matemáticas. Pronto pareció ésta la mejor opción por la mayor expresividad de los lenguajes de programación que estos sistemas incorporan y principalmente por la posibilidad de reutilizar software altamente contrastado y que se beneficia de la experiencia de otros matemáticos. Se barajaron distintos sistemas REDUCE (una primera versión de los programas se llegó a utilizar), se consideró hacerlo con MAPLE y por último se eligió **Mathematica** como el más adecuado para las necesidades del programa que se pretendía.

Entre las ventajas del programa realizado para **Mathematica** podemos mencionar:

Interactividad: el sistema debe ser imaginado como una *calculadora que sabe de álgebras de Lie nilpotentes*, más que como un programa ciego que lee los datos e imprime los resultados. Como veremos esta interacción humana en el desarrollo de los cálculos resultará *indispensable* para poder completar algunos de ellos.

Portabilidad: **Mathematica**, así como el software que se desarrolle con él, se ejecuta sin cambios en muchas plataformas informáticas distintas. Nosotros hemos hecho la mayor parte del trabajo en un ordenador personal con microprocesador 80386/87 a 33 MHz, 8Mb de RAM y disco duro de 200Mb. Por otra parte tenemos acceso a sistemas **Mathematica** instalados en VAX/VMS, VAX/UNIX, CONVEX y estaciones de trabajo SUN. Evidentemente la mayor capacidad de estos sistemas daría una solución más rápida de los cálculos planteados y permitiría abordar otros más complicados. En nuestro caso hemos preferido un ordenador personal por tener **Mathematica** un mejor interface de usuario que lo hacía más *amistoso* que en los sistemas mayores.

Expresividad: El lenguaje mixto procedural/de reglas/funcional de **Mathematica** hacen que su código sea muy expresivo y legible, lo que disminuye el riesgo de errores de programación.

Podemos separar las funciones del programa en tres grandes grupos, según la tarea que realizan:

- cálculo
- manipulación de resultados
- escritura

2.3 Funciones de cálculo

Entre las funciones de cálculo en el programa distinguiremos las principales, destinadas a ser llamadas por el usuario, y las auxiliares, privadas para uso de las funciones principales. Es de notar que la mayor parte de las veces es en las funciones auxiliares donde reside la complejidad del programa desde el punto de vista informático. Aquí solo describiremos las principales, agrupándolas según la tarea que realizan. No entraremos a exponer los detalles técnicos de su implementación, por considerarlos de menor interés que sus aspectos matemáticos.

2.3.1 Condiciones de Jacobi

Las condiciones de Jacobi se traducen de forma natural al programa utilizando la muy eficiente multiplicación de matrices: así la condición

$$\mu(X,\mu(Y,Z)) + \mu(Z,\mu(X,Y)) + \mu(Y,\mu(Z,X)) = 0$$

queda

$$\mathrm{ad}(X)\cdot\mathrm{ad}(Y)\cdot Z + \mathrm{ad}(Z)\cdot\mathrm{ad}(X)\cdot Y + \mathrm{ad}(Y)\cdot\mathrm{ad}(Z)\cdot X = 0$$

lo que se escribe en **Mathematica** como:

```
Jacobi[i_, j_, k_] :=
    Module[{lrel},
        lrel = Expand[Adj[i] . Adj[j] . vb[k] +
                      Adj[j] . Adj[k] . vb[i] +
                      Adj[k] . Adj[i] . vb[j]] /. Rel
        lrel = Union[Select[lrel, !NumberQ[#]&]];
        Return[Map[#==0&, lrel]];
    ]
```

Imponiendo la función `Jacobi[]` a todas las ternas de vectores de la base (X_i, X_j, X_k) con $1 \leq i < j < k \leq n$ se obtiene una lista de relaciones entre las constantes de estructura, que son las condiciones necesarias y suficientes para que se trate de un Álgebra de Lie.

2.3.2 Condiciones de nilpotencia

La nilpotencia se impone a través del teorema de Engel, obligando a que el polinomio característico de la adjunta de cada vector de la base tenga como única raiz el cero:

$$|\lambda \cdot I_n - \mathrm{ad}(X_i)| = \lambda^n \qquad \forall i \mid 1 \geq i \geq n$$

El código correspondiente es:

```
Nilpotencia[i_] :=
    Module[{pol, lrel, laux, x},
        pol = Det[x IdentityMatrix[8] - Adj[i]];
        lrel = ReplaceAll[Expand[CoefficientList[pol, x]], Rel];
        lrel = Select[lrel, Function[!NumberQ[#]]];
        lrel = Union[lrel];
        Return[lrel];
    ]
```

Debe observarse que la nilpotencia del álgebra se reduce a la nilpotencia de los operadores adjuntos de *todos* los vectores (T. de Engel), y que a su vez ésta se reduce a la nilpotencia de los operadores adjuntos de los vectores de la base.

2.3.3 Condiciones de la sucesión característica

La determinación de las componentes irreducibles se hace realmente mediante la consideración de una sucesión de abiertos encajados: para cada sucesión característica s se considera el abierto (ver 1.5)

$$U_s^n = \{\mu \in N^n \,|\, s(\mu) \geq s\}$$

y se estudian las posibles sucesiones en orden descendente, buscando cada vez en abiertos U_s^n más grandes y con cuidado de no repetir componentes encontradas a partir de los anteriores.

Cuando se impone que una determinada familia de leyes de álgebra de Lie esté en uno de esos abiertos, se obtienen nuevas restricciones sobre las constantes de estructura. En general sólo se exigen condiciones *necesarias*; de hecho se hacen dos tipos de razonamientos:

1. Los derivados de las condiciones de rango de las adjuntas de los vectores que no están en la derivada, obtenidos en 1.2.1.
2. Consideraciones directas sobre la forma canónica de Jordan de ciertos operadores adjuntos.

El primer grupo de condiciones se hace mediante la consideración de familias de vectores que no están en el álgebra derivada y dependen de parámetros, por ejemplo, vectores de la forma $\alpha X_1 + \beta X_8$ con $\alpha \neq 0$. Los rangos de las potencias de la matriz del operador adjunto de cualquiera de esos vectores está limitado por ciertos valores impuestos por la sucesión característica (los hallados en 1.2.1). La imposición de estas limitaciones da condiciones sobre las constantes de estructura y los parámetros. Estas igualdades son *polinomios* en los parámetros (α y β en nuestro ejemplo) igualados a cero, polinomios cuyos coeficientes deben ser todos nulos. Esto da una serie de condiciones necesarias.

Además de varias auxiliares, las funciones principales que se encargan de imponer estas condiciones son:

`RSet` : Impone la condición de que el rango no supere los R_i (notación de 1.2.1). Es una función recursiva que reduce la matriz por transformaciones elementales todo lo que puede, y que acude al cálculo directo de menores cuando no le queda más remedio.

`SetSC` : Recibe una matriz e impone `RSet` a sus sucesivas potencias. Se le pasa el nombre de los parámetros utilizados y retorna la lista de restricciones sobre las constantes de estructura.

A continuación damos el código de una de las versiones de `SetSC` (nótese que una misma función admite en **Mathematica** más de una definición simultánea, fenómeno llamado *polimorfismo* en programación orientada a objeto)

```
SetSC[A_List, vari_] :=
    Module[{k, r, s, j, sol={}},
        r = SRMax[SCar];
        For[k = 1, k <= Length[r], k++,
            s = RSet[MatrixPower[A, k], r[[k]], vari];
            sol = Union[sol, s];
        ];
        RelSC = sol;
        Return[RelSC];
    ]
```

El segundo modo de obtener condiciones derivadas de la sucesión característica utiliza argumentos directos sobre ésta. Habitualmente se busca un vector adecuado Y_0 y se construye una cadena de vectores

$$Y_{i+1} = \mu(Y_0, Y_i) \qquad (i \geq 0)$$

La sucesión característica impide que cadenas como ésta puedan superar cierta longitud, lo que nos obliga a que sean cero los vectores Y_i a partir de un cierto $i \geq k$. De aquí se obtienen nuevas condiciones. Con **Mathematica** es fácil hacer estos cálculos interactivamente, pudiéndose hacer distintos intentos a partir de vectores Y escogidos. Un ejemplo de sesión interactiva podría ser, a partir de un Y y un k adecuados:

Calculamos la sucesión de los Y_i:

```
Y[0]=Y;
For[i=1, i<k, i++, Y[i+1]=mu[Y[0],Y[i]]];
```

Elegida una base, por ejemplo x, pedimos que nos de una lista con las coordenadas de Y_k respecto a esa base igualadas a cero (la función `Coordenada` la hemos desarrollado expresamente para esta tarea):

```
lRCoord = {};
For[j=1, j<=8, j++,
    lRCoord=Append[lRCoord,
                        Coordenada[j, Y[k], x] == 0
               ]
];
```

A continuación se puede examinar la lista `lRCoord` obtenida, pedir que la simplifique mediante bases de Gröbner, o cualquier otra manipulación que resulte conveniente. Por ejemplo, en un caso concreto, pidiéndole el cuarto elemento obtuvimos la respuesta:

```
d[4]==0
```

lo que nos dice que la constante de estructura que hemos llamado d_4 debe ser nula para que la familia de leyes de álgebra de Lie que estábamos considerando sea de la sucesión característica impuesta.

Haremos una observación importante sobre este último ejemplo. Si en el caso allí presentado, ni las condiciones de Jacobi ni las de nilpotencia exigían que d_4 fuese cero (situación normal, ya que de otro modo hubiéramos hecho d_4 igual a cero y la condición no hubiera aparecido en `lRCoord`), entonces *el valor nulo o no de d_4 puede hacer cambiar la familia de sucesión característica y es por tanto un indicio de cómo perturbar la ley en otra sucesión característica mayor.* Por razones como ésta no se aplican habitualmente las condiciones de sucesión característica en etapas tempranas del estudio de la ley.

2.3.4 Cambios de base

En varias ocasiones ha sido necesario obtener la expresión de la ley del álgebra en una base diferente de la considerada, fundamentalmente en dos situaciones:

1. Para simplificar la expresión de la ley permitiendo la anulación de ciertas constantes de estructura.
2. Para calcular las dimensiones de las componentes irreducibles halladas.

Para el primero de los casos no hubiera sido imprescindible un tratamiento informático, ya que habitualmente se hacen cambios relativamente simples (aunque a veces muy difíciles de encontrar sin ayuda del ordenador). No ocurre lo mismo con el segundo. Cuando abordamos el estudio de las dimensiones de las componentes como se explica en 1.6, vemos que los cambios de base *generales* que hay que estudiar requieren cálculos casi inhumanos, imposibles sin un tratamiento informático (al menos en esta dimensión).

La función que realiza el cambio de base se llama `CambiaBase`. Recibe como argumentos los nombres de las dos bases y una lista de ecuaciones que ligan los vectores de ambas. Esta lista no tiene que ser completa, ya que para hacer su uso más cómodo, hemos programado que suponga que todos los vectores de la nueva base que no aparecen ligados a la antigua en las ecuaciones es que permanecen iguales a sus los vectores correspondientes en la base anterior.

`CambiaBase` calcula los productos μ de los vectores de la nueva base respecto a la nueva base y construye las ecuaciones del cambio de base.

Por ejemplo, si se pide:

```
CambiaBase[{Y[2] == X[2] + a X[1],
            Y[6] == X[3] - X[6]}, X, Y];
```

El programa entenderá que se trata de cambiar de la base X a la base Y y entenderá que la nueva base viene dada por:

$$\begin{array}{l} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 + aX_1 \\ Y_3 = X_3,\ Y_4 = X_4,\ Y_5 = X_5 \\ Y_6 = X_3 - X_6 \\ Y_7 = X_7,\ Y_8 = X_8 \end{array}$$

y calculará las ecuaciones de los cambios de base de Y a X y de X a Y, así como las coordenadas de los productos $\mu(Y_i, Y_j)$ respecto a la base $(Y_1, \ldots, Y_8)$.

2.4 Manipulación de resultados

En el programa hay un grupo de funciones destinadas a realizar distintas transformaciones con las listas de relaciones. Las más elementales se limitan a convertir de un objeto a otro: relación a lista, relación a ecuación, relación a expresión, etc. Otras sirven para facilitar el acceso a partes de las expresiones, como las funciones que extraen el numerador y el denominador, entre otras, las que calculan las coordenadas de un vector respecto a una determinada base, etc.

Las más interesantes son las que realizan transformaciones basadas en bases de Gröbner, que describimos a continuación.

2.4.1 Uso de las bases de Gröbner

El sistema **Mathematica** viene con una eficiente implementación del algoritmo de cálculo de bases de Gröbner (véase 1.4), que has sido cruciales en la manipulación de las condiciones obtenidas.

Mathematica contempla tres tipos de objetos relacionados con las bases de Gröbner:

Bases de Gröbner : bases de un ideal de un módulo de polinomios, como se estudiaron en 1.4.

Reglas algebraicas : listas de *reglas de sustitución*, que pueden ser utilizadas para realizar simplificaciones en expresiones de una forma increíblemente eficiente.

Listas de soluciones : listas de listas de sustituciones obtenidas como solución de un sistema de ecuaciones polinómicas.

Estos tres tipos de objetos han sido utilizados intensivamente en el trabajo, principalmente a través de las funciones del programa llamadas `Simp`, `LE2AR` y `Resuelve` cuyo código puede consultarse en la sección 2.6.

2.5 Funciones de escritura

Aunque pudieran parecer secundarias, las funciones de presentación e impresión de los resultados son un aspecto fundamental del programa. De hecho, algunas de las relaciones obtenidas eran tan complicadas que sin una presentación que pusiera de manifiesto su estructura matemática, difícilmente habrían podido ser interpretadas.

No vamos a entrar aquí en aspectos técnicos, ya que en cierto modo estas funciones son complicadas, sino que mencionaremos algunas características básicas.

2.5.1 Salida TEX

Se ha hecho uso intensivo de las capacidades de **Mathematica** para traducir a TEX (el procesador con el que está escrito el presente trabajo) las expresiones matemáticas. Programando adecuadamente estas capacidades se obtienen *papeles en sucio* con los resultados intermedios, con una calidad que permite su comprensión.

Las funciones básicas de impresión en TEX son:

OpenTeX: abre el fichero TEX, escribe una cabecera descriptiva adecuada, escribe la ley del álgebra y eventualmente también las adjuntas de los vectores de la base.

CloseTeX: concluye y cierra convenientemente el fichero.

MatrizTeX: escribe en un formato legible una matriz.

LisTeX: escribe los elementos de una lista usando varios formatos alternativos, que se determinan por los argumentos de la función.

AdjTeX: escribe las adjuntas de los vectores de la base por defecto.

SolTeX: Muestra las soluciones de una lista de ecuaciones polinómicas.

2.5.2 Otras funciones de escritura

No ha sido necesario programar muchas funciones de escritura, ya que **Mathematica** incorpora muchas opciones que cubren las principales necesidades. Sin embargo en algunos casos se han preparado algunas que facilitan la interpretación de los resultados. Citaremos como muestra algunos de los aspectos de la función `mu` (debe notarse que esta función es a la vez de cálculo y de presentación de los resultados):

`mu[x]`: llamada con un argumento supone que éste es el nombre genérico de los vectores de una base y entonces escribe la ley del álgebra expresada en esa base.

`mu[x,y]`: llamada con una lista de dos elementos como argumento, supone que los elemntos son los nombres genérico de los vectores de dos bases y entonces escribe la ley del álgebra en las dos bases, agrupando los productos correspondientes. De este modo se facilita la comparación de la ley en bases diferentes.

2.6 El programa completo

Damos a continuación un listado completo del programa, tal como se ha utilizado. Debe observarse que ha sido conveniente omitir acentos y otras puntuaciones, para evitar ciertos comportamientos extraños por parte de **Mathematica**, probablemente debidos a que se ha usado una versión poco elaborada del paquete.

```
ALN::usage = "aln es un paquete de calculo en algebras de Lie.
    Se diferencian los procesos de calculo y de impresion de los
    resultados.
    Primero se obtienen, a partir de las condiciones, unas listas
    de polinomios en las constantes de estructura y se las
    manipula; luego se escribe un fichero TeX con los resultados
    obtenidos.
    Funciones de obtencion de relaciones basicas:
        mu, Adj, SetJac, SetNil, SetSC.
    Funciones de manipulacion de las relaciones:
        Rel2List, Rel2Ec, Rel2Expr, Numerador, Simp,
```

```
        LE2AR, Resuelve.
    Listas construidas:
        Rel, RelJac, RelNil, RelSC.
    Funciones de escritura:
        OpenTeX, CloseTeX, MatrizTeX, LisTeX, AdjTeX, SolTeX.

    Ejecutar ?nombre para mas ayuda ..."

(*  VARIABLES GLOBALES *)

RelJac::usage = "Lista con las condiciones obtenidas con los Jacobi."

RelNil::usage = "Lista con las condiciones obtenidas con las
    nilpotencias."

RelSC::usage = "Lista con las condiciones obtenidas con la sucesion
    caracteristica."

SucCar::usage = "Cadena de caracteres con la sucesion caracteristica.
    Debe asignarse en el fichero de la etapa"

Etapa::usage = "Cadena de caracteres con la etapa actual.
    Debe asignarse en el fichero de la etapa"

Rel::usage = "Lista de relaciones de esa etapa.
    Debe asignarse en el fichero de la etapa"

RelTeX::usage = "Lista de lineas de texto explicando las relaciones
    y otros datos de la etapa.
    Debe asignarse en el fichero de la etapa"

Base::usage = "Base por defecto."

MAXPOL::usage = "constante numerica que determina el numero maximo
    de monomios para que se imprima una expresion."


(* FUNCIONES DE CALCULO *)

mu::usage = "mu[X,Y] es la ley del algebra.
    mu[base] escribe la ley del algebra en la base dada.
    mu[{base1, base2}] escribe juntos los correspondientes
    productos en las dos bases dadas."

Adj::usage = "Adj[Y] (re)calcula la adjunta del vector Y.
```

```
    Adj[n] es la adjunta calculada del vector n de la base
    por defecto."

SetJac::usage = "SetJac obtiene todas las condiciones de Jacobi
    en la base por defecto."

SetNil::usage = "SetNil obtiene todas las condiciones de
    nilpotencia de las adjuntas de los vectores de la base
    por defecto."


SetSC::usage = "SetSC[A_List, k_Integer, vari_]
    retorna una lista de expresiones que deben ser nulas para que
    el rango de A^k no supere el permitido por la sucesion
    caracteristica.
    SetSC[A_List, vari_] lo hace para todos los rangos.
    En las dos, vari es el nombre de una variable de la que depende
    la matriz A."

RSet::usage = "RSet[A_List, r_Integer, vari_]
    retorna una lista de expresiones que deben ser nulas para que el
    rango de A no supere r.
    vari es el nombre de una variable de la que depende la matriz A."


(* FUNCIONES DE MANIPULACION DE LAS CONDICIONES *)

Rel2List::usage = "Rel2List[izq_ -> der_] convierte la relacion
    izq -> der en una lista {izq, der}."

Rel2Ec::usage = "Rel2Ec[izq_ -> der_] convierte la relacion
    izq -> der en una ecuacion izq == der."

Rel2Expr::usage = "Rel2Expr[izq_ -> der_] convierte la relacion
    izq -> der en una expresion izq - der."

Simp::usage = "Simp[le_List, lr_List] reduce una lista de
    expresiones le segun una lista de relaciones lr usando para
    ello Bases de Groebner.
    Simp[expr_, lr_List] simplifica solo la expresion dada.
    Simp[le_List] obtiene una base de Groebner a partir de la
    lista de expresiones lrel."

Numerador::usage = "Numerador[expr_] reduce a comun denominador
```

```
    la expresion dada y retorna el nuevo numerador."

Resuelve::usage = "Resuelve[lexpr_List] usa bases de Groebner para
    reducir todas las expresiones de la lista lrexpr y las resuelve."

LE2AR::usage = "LE2AR[le_List] Retorna una lista de AlgebraicRules
    a partir de la lista de expresiones que se le da."

CambiaBase::usage = "CambiaBase[cb_List, basex_:x, basey_:y] hace un
    cambio de base. cb debe ser una lista de la forma
    {basey[]==basex[], ...} donde pueden omitirse los que no cambian.
    Asigna valores permanentes a mu[basey[i], basey[j]]
    en funcion de los vectores de la base basey y a dos listas de
    relaciones basey[basex] y basex[basey], cada una con las
    expresiones de una base respecto a la otra."

(* FUNCIONES DE ESCRITURA *)

LisTeX::usage = "LisTeX[lista_List, HeaderSeccion_, nameItem_,
    igualcero_: True]
    escribe la lista dada en el fichero TeX."

CloseTeX::usage = "CloseTeX cierra el fichero TeX."

MatrizTeX::usage = "MatrizTeX[A_List, name_] escribe en el fichero
    TeX la matriz A dada."

OpenTeX::usage = "OpenTeX abre y pone los primeros datos de la
    etapa en el fichero TeX."

AdjTeX::usage = "AdjTeX escribe las adjuntas en el fichero TeX"

SolTeX::usage = "SolTeX[lsol_List] escribe en el fichero TeX las
    soluciones de la lista lsol."


MAXPOL = 25


vb[i_] := IdentityMatrix[8][[i]] (* base canonica *)
Base = x    (* base por defecto *)

fileTeX := StringJoin[SucCar, "E", Etapa, ".TEX"]
    (* nombre del fichero de salida *)
```

```
(* SCar construye la lista de la sucesion caracteristica *)
SCar :=
    Module[{s},
        s = Map[Function[ToCharacterCode[#][[1]]-
                         ToCharacterCode["0"][[1]]],
                Characters[SucCar]];
        While[Apply[Plus, s] < 8, s = Append[s, 1]];
        Return[s]
    ]

Format[a[i_]]:=Subscripted[a[i]]
Format[b[i_]]:=Subscripted[b[i]]
Format[c[i_]]:=Subscripted[c[i]]
Format[d[i_]]:=Subscripted[d[i]]
Format[e[i_]]:=Subscripted[e[i]]
Format[f[i_]]:=Subscripted[f[i]]
Format[g[i_]]:=Subscripted[g[i]]
Format[h[i_]]:=Subscripted[h[i]]

Format[a[i_], TeXForm] := Subscripted[a[i]]
Format[b[i_], TeXForm] := Subscripted[b[i]]
Format[c[i_], TeXForm] := Subscripted[c[i]]
Format[d[i_], TeXForm] := Subscripted[d[i]]
Format[e[i_], TeXForm] := Subscripted[e[i]]
Format[f[i_], TeXForm] := Subscripted[f[i]]
Format[g[i_], TeXForm] := Subscripted[g[i]]
Format[h[i_], TeXForm] := Subscripted[h[i]]

Format[x[i_], TeXForm] := Subscripted[x[i]]
Format[x[i_]] := Subscripted[x[i]]

Format[y[i_], TeXForm] := Subscripted[y[i]]
Format[y[i_]] := Subscripted[y[i]]

Format[z[i_], TeXForm] := Subscripted[z[i]]
Format[z[i_]] := Subscripted[z[i]]

(* reglas para la ley del algebra *)
mu[0, x_] := 0;
mu[x_, 0] := 0;
mu[x_, x_] := 0
mu[x_, y_] := Simplify[-mu[y, x]] /; OrderedQ[{y,x}]
mu[x_+y_, z_] := Simplify[mu[x, z] + mu[y, z]]
mu[z_, x_+y_] := Simplify[mu[z, x] + mu[z, y]]
```

```
mu[a_ x_, y_] := a mu[x,y]
mu[x_, a_ y_] := a mu[x,y]

mu[b_:x] :=
    Module[{i, j},
For[i = 1, i <= 7, i++,
    For[j = i + 1, j <= 8, j++,
mu[b[i], b[j]] = Simplify[mu[b[i], b[j]]];
    If[!NumberQ[mu[b[i], b[j]]],
                        Print["[", b[i], ", ", b[j], "] = ",
                              mu[b[i],b[j]]]]]]];

    ];


mu[{x_, y_}] :=
    Module[{i, j},
        lx = Table[x[i], {i, 1, 8}];
        ly = Table[y[i], {i, 1, 8}];
        For[i = 1, i <= 7, i++,
            For[j = i + 1, j <= 8, j++,
                If[!NumberQ[mu[x[i], x[j]]] ||
                   !NumberQ[mu[y[i], y[j]]],
                   Print["-----------------------------------"];
                   Print["[", x[i], ", ", x[j], "] = ",
                       mu[x[i], x[j]]];
                   Print["[", y[i], ", ", y[j], "] = ",
                       mu[y[i], y[j]]];
                ]
            ]
        ];
        Print["-----------------------------------"];
    ];


mu[u_, v_, b_] :=
    Module[{cu, cv, i, j},
        cu = Coordenadas[u, b];
        cv = Coordenadas[v, b];
        Sum[cu[[i]]*cv[[j]]*mu[b[i],b[j]], {i,1,8}, {j,1,8}]
    ]


(* Adj obtiene la adjunta de un vector a parir de la ley *)
```

```
Adj[i_Integer, b_:Base] := Adj[i] = Adj[b[i], b]
Adj[v_, b_:Base] :=
    Module[{adjv, fila, columna},
        adjv = Table[0, {fila, 1, 8}, {columna, 1, 8}];
        For[fila = 1, fila <= 8, fila++,
            For[columna = 1, columna <= 8, columna++,
                adjv[[fila, columna]] =
                Simplify[
                    ReplaceAll[Coefficient[
                            Expand[mu[v, b[columna]]],
                            b[fila]
                        ], Rel]
                ]
            ];
        ];
    Return[adjv];
    ]


(* OpenTeX abre y pone los datos de la etapa en el fichero TeX *)
OpenTeX :=
    Module[{},
        sc = SCar;
        FileName = fileTeX;
        OpenWrite[FileName, {FormatType->TeXForm, PageWidth->256}];
        CabeceraTeX;
        LeyTeX;
        If[Etapa == "1" || ADJUNTAS, AdjTeX];
        relacionesTeX;
    ]


(* CloseTeX cierra el fichero TeX *)
CloseTeX :=
    Module[{},
        Write[FileName, "\\end{document}"];
        Close[FileName]
    ]


(* CabeceraTeX escribe la cabecera del fichero TeX *)
CabeceraTeX :=
    Module[{fecha, tetap, netap},
```

```
        Write[FileName, "\\documentstyle[12pt]{aln}"];
        Write[FileName, "\\markright{Sucesion
            Caracteristica ("];
        For[i = 1, i < Length[sc], i++,
        Write[FileName, sc[[i]], ","]];
        If[StringTake[Etapa, {1}] == "F", tetap = "F";
            netap = StringDrop[Etapa, 1]];
        If[StringTake[Etapa, {1}] == "E", tetap = "E";
            netap = StringDrop[Etapa, 1]];
        If[StringTake[Etapa, {1}] != "F" &&
           StringTake[Etapa, {1}] != "E", tetap = "E";
            netap = Etapa];

        Write[FileName, sc[[-1]], ")\\hfill ", tetap, netap ,
            "\\ --\\ \\today\\ --\\ Pagina }"];
        Write[FileName, "\\pagestyle{cab}"];
        Write[FileName, "\\begin{document}\n
            \\thispagestyle{plain}"];
        Write[FileName, "\\begin{center}{\\Large\\bf\\sc
            Sucesion Caracteristica ("];
        For[i = 1, i < Length[sc], i++,
            Write[FileName, sc[[i]], ","]];
        Write[FileName, sc[[-1]], ")}\\\\"];
        fecha = Date[];
        Write[FileName, "{\\large\\sc Etapa ", Etapa, "\\\\
            \\normalsize",
            fecha[[3]], "/", fecha[[2]], "/",
            fecha[[1]], "}\n\\end{center}\n
            \\vspace{5ex}\n"];
    ]


(* relacionesTeX escribe las relaciones en el fichero TeX *)
relacionesTeX :=
    Module[{j},
        If[Length[RelTeX] > 0,
            Write[FileName, "\\seccion{relaciones}\n\n
                \\begin{mathlist}"];
            For[j = 1, j <= Length[RelTeX], j++,
            Write[FileName, "\n\\rel ", RelTeX[[j]] ]];
            Write[FileName, "\\end{mathlist}\n"];
        ];
    ]
```

```
(* LeyTeX escribe la ley del algebra en el fichero TeX *)
LeyTeX :=
    Module[{begin, muij},
        Write[FileName, "\\seccion{Ley del \\'Algebra}\n\n"];
        begin = False;
        For[i = 1, i <= 7, i++,
            For[j = i+1, j <= 8, j++,
                muij = mu[Base[i], Base[j]] /. Rel;
                If[!NumberQ[muij],
                    If[!begin, Write[FileName,
                        "\\begin{mathlist}"]];
                    begin = True;
                    Write[FileName,
                        "\n\\item[{$[", Base[i], ",",
                    Base[j], "]=$}] $", muij, "$"
                    ];
                ];
            ];
        ];
        If[begin, Write[FileName,
                "\\end{mathlist}\\par
                \\vspace{3ex}"]];
    ]


(* AdjTeX escribe las adjuntas en el fichero TeX *)
AdjTeX :=
    Module[{name},
        Write[FileName, "\\seccion{Adjuntas}\n\n"];
        For[i = 1, i <= 8, i++,
            name = StringForm["adj$(``_``)$", Base, i];
            MatrizTeX[Adj[i], name];
        ];
    ]


(* MatrizTeX escribe en el fichero TeX la matriz dada *)
MatrizTeX[A_List, name_] :=
    Module[{},
        Write[FileName, name, "$=\\left(
            \\begin{array}{cccccccc}"];
        For[fil = 1, fil <= 8, fil++,
```

```
            Write[FileName, A[[fil, 1]], " & ",
                            A[[fil, 2]], " & ",
                            A[[fil, 3]], " & ",
                            A[[fil, 4]], " & ",
                            A[[fil, 5]], " & ",
                            A[[fil, 6]], " & ",
                            A[[fil, 7]], " & ",
                            A[[fil, 8]]
            ];
            If[fil < 8, Write[FileName, "\\\\"]];
        ];
        Write[FileName, "\\end{array}\\right)
            $\\vspace{1cm}\n\n"]
    ]


(* SetJac obtiene todas las condiciones de Jacobi
        en la base por defecto *)
SetJac :=
    Module[{i, j, k, lrel, max=8},
        lrel = {};
        For[i = 1, i <= max-2, i++,
            For[j = i+1, j <= max-1, j++,
                For[k = j+1, k <= max, k++,
                    Module[{jac, lenlrel, antlenlrel},
                        jac = Jacobi[i, j, k];
                        antlenlrel = Length[lrel];
                        lrel = Union[lrel, jac];
                        lenlrel = Length[lrel];
                    ];
                ];
            ];
        ];
        RelJac = lrel;
        Return[lrel];
    ]


(* Jacobi obtiene las condiciones de Jacobi en la base
   por defecto con los tres vectores indicados *)
Jacobi[i_, j_, k_] :=
    Module[{lrel, val},
        lrel = ReplaceAll[Expand[
            Adj[i] . Adj[j] . vb[k] +
```

```
            Adj[j] . Adj[k] . vb[i] +
            Adj[k] . Adj[i] . vb[j]
            ], Rel];
        lrel = Select[lrel, Function[!NumberQ[#]]];
        lrel = Union[lrel];
        Return[lrel];
    ]


(* SetNil obtiene todas las condiciones de nilpotencia
   de las adjuntas de los vectores de la base por defecto *)
SetNil :=
    Module[{i, lrel, max=8},
        lrel = {};
        For[i = 1, i <= max, i++,
            Module[{cadj, lenlrel, antlenlrel},
                cadj = Nilpotencia[i];
                antlenlrel = Length[lrel];
                lrel = Union[lrel, cadj];
                lenlrel = Length[lrel];
            ];
        ];
        RelNil = lrel;
        Return[lrel];
    ]



(* Nilpotencia obtiene las condiciones de nilpotencia de la
        adjunta del vector de la base por defecto dado *)
Nilpotencia[i_] :=
    Module[{pol, lrel, laux, x},
        pol = Det[x IdentityMatrix[8] - Adj[i]];
        lrel = ReplaceAll[Expand[CoefficientList[pol, x]], Rel];
        lrel = Select[lrel, Function[!NumberQ[#]]];
        lrel = Union[lrel];
        Return[lrel];
    ]


(* CambiaBase hace un cambio de base. cb debe ser una lista
    de la forma { y[]==x[], ... } donde pueden omitirse los
    que no cambian. Asigna valores permanentes a mu[y[i], y[j]]
    en funcion de los vectores de la base y a dos listas de
    relaciones y[x] y x[y], cada una con las expresiones de una
```

```
    base respecto a la otra. *)
CambiaBase[cb_List, x_:x, y_:y, le_:{}] :=
    Module[{lx, ly, i, j, ecb},
        lx = Table[x[i], {i, 1, 8}];
        ly = Table[y[i], {i, 1, 8}];

        If[Length[cb] < 8,
            y[x] = First[Solve[ecb, ly]];

        (* completa la lista de relaciones *)
        For[i = 1, i <= 8, i++,
            Module[{temp},
                temp = ReplaceAll[y[i], y[x]] ;
                If[temp == y[i],
                    ecb = Union[{y[i]==x[i]}, ecb]]
                ]
            ]
        ];

        (* prepara las listas de los cb *)


        ecb = Union[cb, le];
        Print["Calculando ", x, "[", y, "]"];
        x[y] = First[Solve[ecb, lx]];
        Print["Calculando ", y, "[", x, "]"];
        y[x] = First[Solve[ecb, ly]];

        (* genera y guarda los productos con la nueva base *)
        For[i = 1, i <= 7, i++,
            For[j = i+1, j <= 8, j++,
                Print["Calculando [", y[i], ",", y[j], "]"];
                mu[y[i], y[j]] =
                    (mu[y[i], y[j], x] /. y[x]) /. x[y];
            ]
        ]
    ]


SetRestr[bx_, by_] :=
    Module[{lr = {}, coefx, coefy, i, j, k},
        For[i = 1, i < 8, i++,
            For[j = i+1, j <= 8, j++,
                lr = Union[lr, SetRestr[bx, by, i, j]]
```

```
        ]
    ];
    Return[lr];
]


SetRestr[x_, y_, i_Integer, j_Integer, ecu_: True] :=
    Module[{lr, coefx, coefy, k, n, d},
        lr = {};
        For[k = 1, k <= 8, k++,
            coefx = Coordenada[k, mu[x[i], x[j]], x];
            If[NumberQ[coefx],
                coefy = Coordenada[k, mu[y[i], y[j]], y];
                If[!NumberQ[coefy],
                    lr = Union[lr, {Numerador[coefy] -
                        coefx * Denominador[coefy]}]
                ]
            ]
        ];
        If[ecu, Map[#==0&, lr], lr]
    ]



Coordenada[i_Integer, v_, b_] :=
    Module[{rel},
        rel = Table[b[j]->If[j==i, 1, 0], {j,1,8}];
        Return[v /. rel];
    ]


Coordenadas[v_, b_] := Table[Coordenada[i, v, b], {i, 1, 8}]



(* LSS : lista de todos los posibles simbolos de Segre en
        dimension 8 *)
LSS = { {7,1},
        {6, 1, 1},
        {5, 2, 1}, {5, 1, 1, 1},
        {4, 3, 1}, {4, 2, 1, 1}, {4, 1, 1, 1, 1},
        {3, 3, 1, 1}, {3, 2, 2, 1}, {3, 2, 1, 1, 1},
        {3, 1, 1, 1, 1, 1},
        {2, 2, 2, 1, 1}, {2, 2, 1, 1, 1, 1},
        {2, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
```

```
    };


(* SSMenorQ es el predicado de orden (<=) lexicografico
   entre simbolos de Segre *)
SSMenorQ[a_List, b_List] :=
    Module[{i, la, lb},
        la = Length[a];
        lb = Length[b];
        For[i = 1, i <= la && i <= lb &&
            a[[i]] == b[[i]], i++];
            If[i > la || i > lb,
                Return[True],
                Return[a[[i]] < b[[i]]
            ]
        ];
    ]

(* SSSub obtiene la lista de los Simbolos de Segre menores
   o iguales lexicograficamente que el dado *)
SSSub[ss_List] := Select[LSS, Function[s, SSMenorQ[s, ss]]];


(* SS2SR convierte de Simbolos de Segre a sucesiones de rangos *)
SS2SR[ss_List] :=
    Module[{k, n, i, j, l, r},
        k = Max[ss];
        For[i = 1, i <= k, i++, n[i] = Count[ss, i]];
        r[0] = 8;
        For[i = 1, i <= k, i++,
            r[i] = r[i-1] - Sum[n[j], {j, i, k}]];
        Return[Table[r[h], {h, k}]]
    ]


(* SRSubSS obtiene la lista de las sucesiones de rangos
   correspondientes a la lista de todos los simbolos de Segre
   menores que el dado *)
SRSubSS[ss_List] := Map[SS2SR, SSSub[ss]]

(* SRElem obtiene el elemento n de la lista de rangos,
   retornando 0 si n es mayor que el numero de elementos
   de la lista *)
SRElem[sr_List, n_Integer] := If[n > Length[sr], 0, Part[sr, n]]
```

```
(* SRMaxLSR obtiene la lista de rangos maximos permitidos para
   la adjunta de un vector que no este en la derivada, a partir
   de la lista de rangos posibles:
      r[[n]] = maximo rango permitido para Adj[X]^n *)
SRMaxLSR[lsr_List] :=
    Module[{i, k, r},
        k = Apply[Max, Map[Length, lsr]];
        For[i = 1, i <= k, i++,
            r[i] = Apply[Max, Map[Function[l,
                SRElem[l, i]], lsr]];
        ];
        Return[Table[r[l], {l, k}]]
    ]

(* SRMax toma la sucesion caracteristica dada y retorna la
   lista r de rangos maximos permitidos para la adjunta de un
   vector que no este en la derivada:
          r[[n]] = maximo rango permitido para Adj[X]^n *)
SRMax[sc_List] := SRMaxLSR[SRSubSS[sc]]


(* SetSC impone la condicion de que los rangos de las sucesivas
   potencias de la matriz dada A no superen los permitidos por
   la sucesion caracteristica *)
SetSC[A_List, k_Integer, vari_] :=
    Module[{r, s},
        r = SRMax[SCar];
        If[k > Length[r] || k <= 0, Return[False]];
        s = RSet[MatrixPower[A, k], r[[k]], vari];
        Return[s];
    ]


SetSC[A_List, vari_] :=
    Module[{k, r, s, j, sol={}},
        r = SRMax[SCar];
        For[k = 1, k <= Length[r], k++,
            s = RSet[MatrixPower[A, k], r[[k]], vari];
            sol = Union[sol, s];
        ];
        RelSC = sol;
        Return[RelSC];
    ]
```

```
(* TEF suma a la fila i de A la fila j multiplicada por K
   y retorna la nueva matriz *)
TEF[A_List, i_Integer, j_Integer, K_] :=
    Module[{B},
        B = A;
        B[[i]] = B[[i]] + K B[[j]];
        Return[B];
    ]



(* TEFS hace ceros en la matriz A mediante TEF usando como
   pivote el elemento de la fila fil y columna col *)
TEFS[A_List, fil_Integer, col_Integer] :=
    Module[{B, i},
        B = A;
        For[i = 1, i <= Length[B], i++,
            If[i != fil, B = TEF[B, i,
                fil, - B[[i, col]] / B[[fil, col]]]
            ]
        ];
        Return[B];
    ]


(* RSet impone la condicion de que el rango de la matriz
   dada A no supere r *)
RSet[A_List, r_Integer, vari_] :=
    Module[{B, nf, nc, fil, col, sol},
        If[r < 0, Return[{}]];
        fil = col = {};

        If[A=={}, Return[{}]];
        {nf, nc} = Dimensions[A];


        (* se queda con las filas y columnas con algun
           elemento no nulo *)
        For[i = 1, i <= nf, i++,
            For[j = 1, j <= nc, j++,
                If[!NumberQ[A[[i, j]]] || A[[i, j]] != 0,
                    fil = Union[fil, {i}];
```

```
                col = Union[col, {j}]
            ]
        ]
    ];

    If[fil == {} || col == {}, Return[{}]];

    B = A[[fil, col]];

    (* elimina las filas y columnas en las que hay un
       pivote numerico no nulo, disminuyendo el rango
       en una unidad cada vez *)
    {nf, nc} = Dimensions[B];
    For[i = 1, i <= nf, i++,
        For[j = 1, j <= nc, j++,
            If[NumberQ[B[[i, j]]] && B[[i, j]] != 0,
                fil = Complement[Range[1, nf], {i}];
                col = Complement[Range[1, nc], {j}];
                B = TEFS[B, i, j];
                Return[RSet[B[[fil, col]], r - 1, vari]]
            ]
        ]
    ];


    sol = ReplaceAll[Flatten[
        CoefficientList[Minors[B, r + 1], vari]], Rel] ;
    sol = ReplaceAll[Union[
        Select[sol, Function[!NumberQ[#]]]], Rel] ;
    Return[sol];
]




(* Combinaciones construye las combinaciones sin repeticion
   de r elementos de la lista l *)
Combinaciones[m_Integer, n_Integer] :=
    Combinaciones[Range[1, m], n];
Combinaciones[l_List, n_Integer] :=
    Module[{i, sol, lg},
        sol = {};
        lg = Length[l];
        If[n <= 0 || lg < n, Return[sol]];
```

```
        If[n == 1,
            For[i = 1, i <= lg, i++,
                sol = Union[sol, {{l[[i]]}}]
            ];
            Return[sol];
        ];
        For[i = 1, i <= lg - n + 1, i++,
            Module[{el},
                el = l[[i]];
                sol = Union[sol,
                        Map[Function[Prepend[#, el]],
                        Combinaciones[Take[l, i - lg],
                            n - 1]]
                ];
            ];
        ];
        Return[sol];
    ]


(* LisTeX escribe la lista dada en el fichero *)
LisTeX[lista_List, seccion_, item_, igualcero_: True] :=
    Module[{j},
        If[Length[lista] > 0,
            Write[FileName, "\\seccion{", seccion,
                "}\n\n\\begin{mathlist}"];
            For[j = 1, j <= Length[lista], j++,
                Module[{lg},
                    If[item == "",
                        Write[FileName, "\n\\item $"],
                        Write[FileName, "\n\\item[${\\rm ", item,
                            "}_{", j, "}", ":$]$"]
                    ];
                    lg = Length[lista[[j]]];
                    If[lg > MAXPOL,
                        Write[FileName,
                            "\\;($demasiado grande$\\;\\ldots\\;)$"],
                        Write[FileName,
                            lista[[j]], If[igualcero, "=0$", "$"]]
                    ]
                ];
            ];
            Write[FileName, "\\end{mathlist}\n"];
        ];
```

```
    ]


(* Rel2List convierte la relacion a -> b en una lista {a, b} *)
Rel2List[izq_ -> der_] := {izq, der}

(* Rel2Ec convierte la relacion a -> b en una ecuacion a == b *)
Rel2Ec[izq_ -> der_] := izq == der

(* Rel2Expr convierte la relacion a -> b en una expresion a - b *)
Rel2Expr[izq_ -> der_] := izq - der

(* Simp reduce una lista de expresiones le segun una lista de
   relaciones lr usando para ello Bases de Groebner *)
Simp[le_List, lr_List] :=
    Module[{lv, bg, sol},
        If[lr == {}, Return[le]];

        (* construye la lista de las variables involucradas *)
        lv = Flatten[Variables[Map[Rel2List, lr]]];
        lv = Union[lv, Flatten[Variables[le]]];
        lv = Reverse[lv];

        (* convierte la lista de relaciones en una base de Groebner *)
        bg = AlgebraicRules[Map[Rel2Ec, lr], lv];

        (* Simplifica *)
        sol = Map[Function[ex, ReplaceAll[ex, bg]], le];
        sol = Union[Select[sol, Function[!NumberQ[#]]]];
        Return[sol];
    ]

Simp[expr_, lr_List] :=
    Module[{lv, bg, sol},
        If[lr == {}, Return[expr]];

        (* construye la lista de las variables involucradas *)
        lv = Flatten[Variables[Map[Rel2List, lr]]];
        lv = Union[lv, Flatten[Variables[expr]]];
        lv = Reverse[lv];

        (* convierte la lista de relaciones en una base
           de Groebner *)
        bg = AlgebraicRules[Map[Rel2Ec, lr], lv];
```

```
        (* Simplifica *)
        sol = ReplaceAll[expr, bg];
        Return[sol];
    ]


Simp[le_List] :=
    Module[{lvar, BG},
        lvar = Union[Flatten[Variables[le]]];
        BG = GroebnerBasis[le, lvar];
        Return[BG]
    ]


Simp[expr_, AR_] :=
    Module[{num, den},
        If[AR == {}, Return[expr]];
        {num, den} = NumDen[expr] /. AR;
        Return[num / den];
    ]



LE2AR[le_List] :=
    Module[{lvar, AR},
        lvar = Union[Flatten[Variables[le]]];
        AR = AlgebraicRules[Map[Function[x, x==0], le], lvar];
        Return[AR]
    ]


(* Resuelve usa bases de Groebner para reducir todas las
        expresiones de la lista lexpr y las resuelve *)
Resuelve[lexpr_List] :=
    Module[{BG, lvar, lecs},
        lvar = Union[Flatten[Variables[lexpr]]];
        BG = GroebnerBasis[lexpr, lvar];
        lecs = Map[Function[x, x == 0], BG];
        Return[Solve[lecs, lvar]];
    ]


SolTeX[lsol_List] :=
```

```
    Module[{i},
        For[i = 1, i <= Length[lsol], i++,
        LisTeX[lsol[[i]], StringForm["Solucion ``", i],
            "", False]
        ]
    ]


Numerador[expr_] :=
    Module[{eexpr},
        eexpr = Together[expr];
        Return[Numerator[eexpr]];
    ]


Denominador[expr_] :=
    Module[{eexpr},
        eexpr = Together[expr];
        Return[Denominator[eexpr]];
    ]


NumDen[f_] :=
    Module[{TExpr},
        TExpr = Together[f];
        Return[{Numerator[TExpr], Denominator[TExpr]}]
    ]
```

Capítulo 3

Determinación de las componentes irreducibles de N^8

Desde los primeros estudios en los años 60 sobre la estructura de la variedad N^n, se planteó la determinación de sus componentes irreducibles. Pronto se obtuvieron para dimensiones bajas, pero las dificultades aumentaban exponencialmente con la dimensión (ver 1.1).

En este capítulo utilizaremos los resultados de los anteriores y la metodología expuesta para determinar las componentes irreducibles de la variedad N^8.

En las siguientes secciones estudiaremos la sucesión de abiertos

$$U^8_{(7,1)} \subset U^8_{(6,1,1)} \subset U^8_{(5,2,1)} \subset \cdots \subset U^8_{(1,1,1,1,1,1,1,1)}$$

y siguiendo lo descrito en 1.5, obtendremos sucesivamente las componentes irreducibles $C_1, C_2, \ldots$.

3.1 Sobre las exposiciones siguientes

Tanto en la exposición de los resultados como en el desarrollo de las demostraciones, tendremos necesidad de escribir detalladamente distintas leyes de N^8. Para abreviar esta escritura haremos el siguiente convenio:

> *Cuando escribamos la ley μ respecto a una base $(X_1, \ldots, X_n)$ omitiremos los productos $\mu(X_i, X_j)$ que sean nulos.*

Para describir las perturbaciones seguiremos las notaciones de M. Goze en [12] (ver 0.3). A menudo daremos una perturbación de una ley μ como $\mu + \epsilon\varphi$, donde φ es una aplicación bilineal alternada

$$\varphi : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$$

y $\epsilon \simeq 0$ (ver 0.3).

Al dar la aplicación φ seguiremos también un convenio análogo al anterior, no escribiendo los $\varphi(X_i, X_j)$ que sean nulos.

También por brevedad, si c es una constante de estructura, usaremos expresiones 'perturbando c', o bien 'haciendo $c = \epsilon$', que son formas coloquiales que se interpretan fácilmente como referencias a una perturbación $\mu + \epsilon\varphi$ con un φ adecuado.

Hay una dificultad en la esposición de un trabajo como el presente, que pasamos a analizar.

Una parte del trabajo se apoya en cálculos realizados con ordenador, según se expuso en 2. Esta es una parte mecánica, que desde un punto de vista matemático consideraríamos trivial. Sin embargo si, sin un poco más de reflexión, la ignorásemos, ocultaríamos una de las características fundamentales de problemas como el que nos ocupa; de hecho

> *la complejidad de los cálculos necesarios (que incluso se consideraban irrealizables), es uno de los principales obstáculos en la obtención de resultados como los de este trabajo.*

No obstante, las exposiciones detalladas de todos los pasos y cálculos conducentes a las demostraciones de los teoremas resultarían excesivamente farragosas, incluso probablemente ilegibles (para el lector humano): la mayor parte de los cálculos intermedios (*no sus interpretaciones*) se han obtenido mediante uso intensivo del ordenador, con lo que resulta demasiado difícil su seguimiento sobre el papel (aunque todo se detallara, ver para ello el apéndice a este trabajo). Esto obliga a que en la exposición se omitan los cálculos farragosos y se obtengan directamente los resultados, centrándonos en sus interpretaciones, de modo que se pueda seguir el discurso lógico de las demostraciones.

Lo anterior, aunque casi inevitable, plantea un problema: en algunas ocasiones se hacen afirmaciones categóricas *no evidentes*; por ejemplo abundarán las afirmaciones como

> 'en este caso siempre ... (y siguen varias afirmaciones)'

Muchas de estas afirmaciones resultan de los cálculos realizados o de su elaboración mediante determinados razonamientos. Hemos procurado que los razonamientos utilizados aparezcan explícitamente al menos una vez, en alguna de las exposiciones, aunque por razones obvias, no siempre en la misma sección. Esto nos ha llevado a una selección peculiar de qué procesos se detallan y cuáles dan en forma condensada. Así, ciertos pasos que se describen solo a grandes rasgos en las secciones correspondientes a las sucesiones características mayores, se dan relativamente detallados en las sucesiones características inferiores, ya que es más fácil su seguimiento en éstas. De este modo, son los casos intermedios los que aperecen con menos detalle, llegándose en alguno de ellos al simple enunciado de los resultados fundamentales.

En un apéndice proporcionaremos algunas de las salidas impresas de los cálculos que hace el ordenador, a fin de que sirva como ilustración de qué es lo que se omite, así como de la enorme evergadura de estos cálculos.

3.2 Sucesión característica $(7,1)$

Las leyes de álgebra de Lie de esta sucesión característica son las leyes filiformes. Las componentes irreducibles de N^8 que cortan al abierto de las filiformes han sido determinadas por GOZE y ANCOCHEA [13], quienes demuestran la siguiente proposición:

Proposición. *El abierto de las filiformes $N^8_{(7,1)}$ está contenido en la unión de dos componentes irreducibles de dimensión* 55, C_1 *y* C_2*, dadas respectivamente por las clausuras de Zariski de las órbitas de las familias:*

$$\begin{cases} \mu^1(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 3\leq i\leq 8,\\ \mu^1(X_4,X_8) &=& \alpha X_2,\\ \mu^1(X_5,X_7) &=& X_2,\\ \mu^1(X_5,X_8) &=& (1+\alpha)\,X_3+X_2,\\ \mu^1(X_6,X_7) &=& X_3,\\ \mu^1(X_6,X_8) &=& (2+\alpha)\,X_4+X_3,\\ \mu^1(X_7,X_8) &=& (2+\alpha)\,X_5+X_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 3\leq i\leq 8,\\ \mu^2(X_4,X_7) &=& X_2,\\ \mu^2(X_4,X_8) &=& X_3+X_2,\\ \mu^2(X_5,X_6) &=& -X_2,\\ \mu^2(X_5,X_7) &=& -\frac{2}{5}\,X_2,\\ \mu^2(X_5,X_8) &=& X_4+\frac{3}{5}\,X_3,\\ \mu^2(X_6,X_7) &=& -\frac{2}{5}\,X_3,\\ \mu^2(X_6,X_8) &=& X_5+\frac{1}{5}\,X_4+X_3+\alpha\,X_2,\\ \mu^2(X_7,X_8) &=& X_6+\frac{1}{5}\,X_6+\alpha\,X_6 \end{cases}$$

3.3 Sucesión característica $(6,1,1)$

Proposición. *El abierto $U^8_{(6,1,1)}$ está contenido en la unión de cinco componentes irreducibles, C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, donde las dos primeras son las determinadas en 3.2 y las tres siguientes vienen dadas respectivamente por las clausuras de Zariski de las órbitas de las familias:*

$$\begin{cases} \mu^3(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\le i\le 8, \\ \mu^3(X_2,X_6) &=& X_3, \\ \mu^3(X_2,X_7) &=& X_4+\alpha_1 X_3, \\ \mu^3(X_2,X_8) &=& X_5+\alpha_1 X_4, \\ \mu^3(X_5,X_8) &=& \alpha_2 X_3, \\ \mu^3(X_6,X_7) &=& X_3, \\ \mu^3(X_6,X_8) &=& (1+\alpha_2) X_4, \\ \mu^3(X_7,X_8) &=& (1+\alpha_2) X_5+\alpha_3 X_3 \qquad \text{con } \alpha_2\neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^4(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\le i\le 8, \\ \mu^4(X_2,X_7) &=& X_3, \\ \mu^4(X_2,X_8) &=& X_4+\alpha_1 X_3, \\ \mu^4(X_5,X_8) &=& \alpha_2 X_3, \\ \mu^4(X_6,X_7) &=& \alpha_3 X_3, \\ \mu^4(X_6,X_8) &=& (\alpha_3+\alpha_2) X_4+\alpha_4 X_3, \\ \mu^4(X_7,X_8) &=& (\alpha_3+\alpha_2) X_4+e_3 X_4+X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^5(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\le i\le 8, \\ \mu^5(X_2,X_8) &=& -2 X_3, \\ \mu^5(X_5,X_7) &=& X_3, \\ \mu^5(X_5,X_8) &=& X_4+X_2, \\ \mu^5(X_6,X_7) &=& X_4+\alpha_1 X_3-X_2, \\ \mu^5(X_6,X_8) &=& 2X_5+\alpha_1 X_4+\alpha_2 X_3, \\ \mu^5(X_7,X_8) &=& 2X_6+\alpha_1 X_5+\alpha_2 X_4+\alpha_3 X_3+\alpha_4 X_2 \end{cases}$$

y siendo sus dimensiones respectivas 54, 57 *y* 57.

El resto de esta sección estará dedicada a demostrar esta proposición. Determinaremos en primer lugar una familia genérica de sucesión característica $(6,1,1)$, obteniendo las restricciones impuestas sobre las constantes de estructura por las condiciones de Jacobi, de nilpotencia y la pertencia a esa sucesión característica.

3.3.1 La ley del álgebra

Sea g un álgebra de Lie de sucesión característica $(6,1,1)$. Si X_1 es un vector característico de g, entonces respecto a una base de Jordan $(X_1,\ldots,X_8)$, la matriz de $\mathrm{ad}(X_1)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos determinados los productos $\mu(X_1,X_j)$:

$$\begin{array}{ll} \mu(X_1,X_2)=\mu(X_1,X_3)=0 & \\ \mu(X_1,X_j)=X_{j-1} & (4\leq j\leq 8) \end{array}$$

Para encontrar $\mu(X_2,X_3)$ utilizamos la igualdad de Jacobi

$$\mu(X_1,\mu(X_2,X_3))+\mu(X_3,\mu(X_1,X_2))+\mu(X_2,\mu(X_3,X_1))=0$$

De aquí $\mu(X_1,\mu(X_2,X_3))=0$ y por tanto

$$\mu(X_2,X_3)=a_1X_3+a_2X_2$$

pero entonces, por la nilpotencia se tiene que $a_1=a_2=0$ y obtenemos que $\mu(X_2,X_3)=0$

Procediendo análogamente, haciendo uso de las igualdades de Jacobi, junto con alguna de las condiciones de nipotencia, encontramos la expresión de todos los productos $\mu(X_i,X_j)$ y obtenemos

Lema. $N^8_{(6,1,1)}$ *está contenido en la órbita de la familia de leyes de álgebra de Lie que en la base* $(X_1,\ldots,X_8)$ *vienen dadas por:*

$$\begin{aligned} \mu(X_1,X_4) &= X_3 \\ \mu(X_1,X_5) &= X_4 \end{aligned}$$

$$\mu(X_1, X_6) = X_5$$
$$\mu(X_1, X_7) = X_6$$
$$\mu(X_1, X_8) = X_7$$

$$\mu(X_2, X_4) = a_3\, X_3$$
$$\mu(X_2, X_5) = a_5\, X_3 + a_3\, X_4$$
$$\mu(X_2, X_6) = a_7\, X_3 + a_5\, X_4 + a_3\, X_5$$
$$\mu(X_2, X_7) = a_9\, X_3 + a_7\, X_4 + a_5\, X_5 + a_3\, X_6$$
$$\mu(X_2, X_8) = a_{12}\, X_2 + a_{11}\, X_3 + a_9\, X_4 + a_7\, X_5 + a_5\, X_6 + a_3\, X_7$$

$$\mu(X_3, X_8) = b_{10}\, X_2 + b_9\, X_3$$

$$\mu(X_4, X_6) = c_3\, X_3$$
$$\mu(X_4, X_7) = -(b_{10}\, X_2) + c_5\, X_3 + c_3\, X_4$$
$$\mu(X_4, X_8) = c_7\, X_3 + (b_9 + c_5)\; X_4 + c_3\, X_5$$

$$\mu(X_5, X_6) = b_{10}\, X_2 + d_1\, X_3 + c_3\, X_4$$
$$\mu(X_5, X_7) = d_3\, X_3 + (c_5 + d_1)\; X_4 + 2\, c_3\, X_5$$
$$\mu(X_5, X_8) = d_6\, X_2 + d_5\, X_3 + (c_7 + d_3)\; X_4 + (b_9 + 2\, c_5 + d_1)\; X_5 + 3\, c_3\, X_6$$

$$\mu(X_6, X_7) = -(d_6\, X_2) + e_1\, X_3 + d_3\, X_4 + (c_5 + d_1)\; X_5 + 2\, c_3\, X_6$$
$$\mu(X_6, X_8) = e_3\, X_3 + (d_5 + e_1)\; X_4 + (c_7 + 2\, d_3)\; X_5 + (b_9 + 3\, c_5 + 2\, d_1)\; X_6 + 5\, c_3\, X_7$$

$$\mu(X_7, X_8) = f_2\, X_2 + f_1\, X_3 + e_3\, X_4 + (d_5 + e_1)\; X_5 + (c_7 + 2\, d_3)\; X_6 + (b_9 + 3\, c_5 + 2\, d_1)\; X_7 + 5\, c_3\, X_8$$

donde, como siempre, omitimos los productos nulos.

3.3.2 Componentes irreducibles cortando $U^8_{(6,1,1)}$

Imponiendo las condiciones de Jacobi y nilpotencia y mediante unos adecuados cambios de base se obtienen (entre otras) las relaciones

$$c_3 = a_5 b_{10} = a_7 b_{10} = a_9 b_{10} = a_5 d_1 = a_5 d_6 = 0$$

Procederemos considerando distintos casos, sugeridos por las relaciones obtenidas.

Caso $b_{10} \neq 0$

En este caso se tiene de las relaciones anteriores

$$a_5 = a_7 = a_9 = 0$$

y mediante una elección adecuada de los coeficientes α y β, mediante un cambio de la forma $Y_2 = \alpha X_2 + \beta X_3$ se puede hacer siempre

$$b_9 = 0$$

Llevando esto a las restricciones halladas se encuentra

$$c_5 = d_1 = a_{12} = 0$$

y entonces por nilpotencia se tiene

$$d_3 = a_{11} = 0$$

y de nuevo con un cambio de la forma $Y_8 = X_8 + \alpha X_1$ se puede hacer

$$c_7 = 0$$

Con estos coeficientes nulos, de las condiciones de Jacobi y de las de nilpotencia sólo queda la restricción:

$$2d_5 + 3e_1 = 0$$

La ley resulta entonces

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 4 \leq i \leq 8, \\ \mu(X_3,X_8) &= b_{10}\,X_2, \\ \mu(X_4,X_7) &= -b_{10}\,X_2, \\ \mu(X_5,X_6) &= b_{10}\,X_2, \\ \mu(X_5,X_8) &= d_6\,X_2 + d_5\,X_3, \\ \mu(X_6,X_7) &= -d_6\,X_2 - (2d_5/3)\,X_3, \\ \mu(X_6,X_8) &= e_3\,X_3 + (d_5/3)\,X_4, \\ \mu(X_7,X_8) &= f_2\,X_2 + f_1\,X_3 + e_3\,X_4 + (d_5/3)\,X_5 \end{cases}$$

Si consideramos la aplicación bilineal alternada definida por

$$\begin{aligned} &\varphi(X_1,X_3) = X_2 \\ &\varphi(X_4,X_8) = \tfrac{5}{3}d_5\,X_2 \\ &\varphi(X_5,X_7) = -\tfrac{2}{3}\,d_5\,X_2 \\ &\varphi(X_6,X_7) = e_3\,X_2 \\ &\varphi(X_6,X_8) = f_1\,X_2) \end{aligned}$$

(donde no escribimos los $\varphi(X_i, X_j)$ nulos), se tiene que $\mu+\epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y que es filiforme. Concluimos entonces que en este caso no se obtiene una nueva componente, ya que la familia hallada está en una de las componentes C_1 o C_2 halladas anteriormente.

Caso $a_5 \neq 0$

De las condiciones de Jacobi y nilpotencia tenemos

$$b_{10} = b_9 = d_1 = a_{12} = c_5 = d_6 = d_3 = e_1 = f_2 = 0$$

Mediante el cambio $Y_8 = X_8 + (d_5/a_5)\,X_2$ se convierte la ley en otra de la misma familia pero con el correspondiente d_5 nulo, con lo que siempre podemos suponer $d_5 = 0$.

LLevando esto de nuevo a la ley, queda

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 4 \leq i \leq 8, \\ \mu(X_2,X_5) &= a_5\,X_3, \\ \mu(X_2,X_6) &= a_5\,X_4 + a_7\,X_3, \\ \mu(X_2,X_7) &= a_5\,X_5 + a_7\,X_4 + a_9\,X_3, \\ \mu(X_2,X_8) &= a_5\,X_6 + a_7\,X_5 + a_9\,X_4 + a_{11}\,X_3, \\ \mu(X_6,X_8) &= e_3\,X_3, \\ \mu(X_7,X_8) &= e_3\,X_4 + f_1\,X_3 \end{cases}$$

Consideramos entonces la aplicación bilineal alternada definida por

$$\begin{array}{l} \varphi(X_1,X_2) = X_8 \\ \varphi(X_6,X_2) = e_3\,X_3 \\ \varphi(X_7,X_2) = 2\,e_3\,X_5 + f_1\,X_4 \\ \varphi(X_8,X_2) = 2\,e_3\,X_6 + f_1\,X_5 \end{array}$$

donde de nuevo no escribimos los $\varphi(X_i,X_j)$ nulos.

Entonces otra vez se tiene que $\mu + \epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y que es filiforme. Concluimos que en este caso no se obtiene una nueva componente, ya que la familia hallada está en una de las componentes $\mathcal{C}_1$ o $\mathcal{C}_2$ halladas anteriormente.

Caso $a_7 \neq 0$, $b_{10} = a_5 = 0$

Por las condiciones de nilpotencia y Jacobi se tiene en este caso

$$b_9 = c_5 = d_1 = a_{12} = d_6 = d_3 = f_2 = 0$$

y mediante un cambio de base de la forma $Y_8 = X_8 + \alpha X_1$ se puede hacer

$$c_7 = 0$$

Tenemos entonces la ley del álgebra

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\leq i\leq 8,\\ \mu(X_2,X_6) &=& a_7\,X_3,\\ \mu(X_2,X_7) &=& a_7\,X_4+a_9\,X_3,\\ \mu(X_2,X_8) &=& a_7\,X_5+a_9\,X_4+a_{11}\,X_3,\\ \mu(X_5,X_8) &=& d_5\,X_3,\\ \mu(X_6,X_7) &=& e_1\,X_3,\\ \mu(X_6,X_8) &=& (e_1+d_5)\,X_4+e_3\,X_3,\\ \mu(X_7,X_8) &=& (e_1+d_5)\,X_5+e_3\,X_4+f_1\,X_3 \end{cases}$$

Mediante un cambio de la forma $Y_1 = X_1 + \alpha X_2$ se puede hacer $a_{11} = 0$; mediante otro de la forma $Y_8 = X_8 + \alpha X_2$ se puede hacer $e_3 = 0$ y otros razonamientos similares permiten hacer $a_7 = e_1 = 1$. También podemos imponer que $d_5 \neq -1$ ya que en otro caso la familia se perturbaría (mediante d_5) en las otras.

Tenemos entonces:

Lema. *La adherencia de Zariski de la órbita de la familia*

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\leq i\leq 8,\\ \mu(X_2,X_6) &=& X_3,\\ \mu(X_2,X_7) &=& X_4+a_9\,X_3,\\ \mu(X_2,X_8) &=& X_5+a_9\,X_4,\\ \mu(X_5,X_8) &=& d_5\,X_3,\\ \mu(X_6,X_7) &=& X_3,\\ \mu(X_6,X_8) &=& (1+d_5)\,X_4,\\ \mu(X_7,X_8) &=& (1+d_5)\,X_5+f_1\,X_3 & \qquad \text{con } d_5\neq -1 \end{cases}$$

es una componente irreducible C_3 que corta al abierto $U^8_{(6,1)}$, cuya dimensión es 54 *y que no corta al abierto de las filiformes.*

Demostración: Sea μ' una perturbación de μ en otra sucesión característica (que necesariamente tendría que ser filiforme). Llamemos $\mathfrak{g} = (\mathbf{C},\mu)$ y $\mathfrak{g}' = (\mathbf{C},\mu')$. Entonces considerando los cocientes por sus centros se tiene que $\mathfrak{g}'/Z(\mathfrak{g}')$ es una perturbación de $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$; como ésta es una ley de sucesión característica $(5,1,1)$ (precisamente la llamada $n^7_{13,\alpha}$ en [4]), y el cociente de una ley filiforme por su centro es siempre filiforme, se tiene que necesariamente $\mathfrak{g}'/Z(\mathfrak{g}')$ es no filiforme, con lo que tampoco lo es $\mathfrak{g}'$. Esto demuestra que $\mathfrak{g}$ no puede perturbarse en una ley filiforme. Una simple computación muestra que cualquier ley de esta familia es isomorfa a otra de la misma familia pero con $f_1 = 0$. Además se tiene que no puede eliminarse ningún otro parámetro. La dimensión del segundo grupo B^2 de los 2-cobordes de la cohomología de Chevalley es 52 (ver 1.6), con lo que la dimensión de la componente es 54. □

Observación. *Desde hace tiempo se pensaba que las dimensiones de las componentes irreducibles no cortando al abierto de las filiformes serían mayores o iguales que las que sí cortaban a este abierto. Este resultado pone de manifiesto que la conjetura no era cierta, ya que las componentes C_1 y C_2 son de dimensión* 55.

Caso $b_{10} = a_5 = a_7 = 0$, $a_9 \neq 0$

Se tiene entonces por nilpotencia y Jacobi que

$$b_9 = a_3 = c_3 = c_5 = d_1 = a_{12} = d_6 = d_3 = 0$$

Por otra parte, siempre se puede hacer $c_7 = 0$.

Se obtiene la ley

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu(X_1, X_i) & = & X_{i-1},\ 4 \leq i \leq 8, \\ \mu(X_2, X_7) & = & a_9 X_3, \\ \mu(X_2, X_8) & = & a_9 X_4 + a_{11} X_3, \\ \mu(X_5, X_8) & = & d_5 X_3, \\ \mu(X_6, X_7) & = & e_1 X_3, \\ \mu(X_6, X_8) & = & (e_1 + d_5) X_4 + e_3 X_3, \\ \mu(X_7, X_8) & = & (e_1 + d_5) X_5 + e_3 X_4 + f_1 X_3 + f_2 X_2 \end{array}\right.$$

Si $f_2 = 0$ se puede perturbar en la familia anterior.

Si $f_2 \neq 0$ se puede tomar $a_9 = f_2 = 1$ y $f_1 = 0$; entonces un razonamiento análogo al del lema de la sección anterior demuestra que se tiene una nueva componente de dimensión 57 ya que la dimensión de B^2 es 53 y un cálculo demuestra que no puede eliminarse ningún parámetro.

Tenemos entonces:

Lema. *La adherencia de Zariski de la órbita de la familia*

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\le i\le 8,\\ \mu(X_2,X_7) &=& X_3,\\ \mu(X_2,X_8) &=& X_4+a_{11}\,X_3,\\ \mu(X_5,X_8) &=& d_5\,X_3,\\ \mu(X_6,X_7) &=& e_1\,X_3,\\ \mu(X_6,X_8) &=& (e_1+d_5)\,X_4+e_3\,X_3,\\ \mu(X_7,X_8) &=& (e_1+d_5)\,X_5+e_3\,X_4+X_2 \end{cases}$$

es una componente irreducible C_4 *que corta al abierto* $U^8_{(6,1)}$, *distinta de* C_1, C_2 *y* C_3, *y que tiene dimensión* 57.

Caso $b_{10}=a_5=a_7=a_9=0,\ a_{11}\neq 0$

En este caso siempre podemos hacer $a_3=c_3=0$; por nilpotencia y Jacobi tenemos entonces:

$$b_9=d_1=c_5=a_{12}=0$$

y podemos conseguir que $c_7=0$.

Entonces nos queda la ley del álgebra

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_i) &=& X_{i-1},\ 4\le i\le 8,\\ \mu(X_2,X_8) &=& a_{11}\,X_3,\\ \mu(X_5,X_7) &=& d_3\,X_3,\\ \mu(X_5,X_8) &=& d_3\,X_4+d_5\,X_3+d_6\,X_2,\\ \mu(X_6,X_7) &=& d_3\,X_4+e_1\,X_3-d_6\,X_2,\\ \mu(X_6,X_8) &=& 2d_3\,X_5+(e_1+d_5)\,X_4+e_3\,X_3,\\ \mu(X_7,X_8) &=& 2d_3\,X_6+(e_1+d_5)\,X_5+e_3\,X_4+f_1\,X_3+f_2\,X_2 \end{cases}$$

con la única condición de Jacobi

$$2d_3^2+d_6\,a_{11}=0$$

Entonces, si $d_6=0$ también $d_3=0$ y se puede perturbar fácilmente en el caso $d_6\neq 0$, tomando

$$d_3=\epsilon,\ d_6=-2\epsilon^2/a_{11}$$

Si $d_6 \neq 0$ se tiene de la condición de Jacobi $d_3 \neq 0$ (ya que $a_{11} \neq 0$), y por tanto no se puede perturbar en las anteriores. Se pueden tomar $d_6 = d_3 = 1$ y $a_{11} = -2$. Además, con un cambio de la forma $Y_8 = X_8 + \alpha X_2$ podemos hacer $d_5 = 0$.

Hemos encontrado entonces:

Lema. *La adherencia de Zariski de la órbita de la familia*

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1},\ 4 \leq i \leq 8, \\ \mu(X_2, X_8) &= a_{11} X_3, \\ \mu(X_5, X_7) &= d_3 X_3, \\ \mu(X_5, X_8) &= d_3 X_4 + d_5 X_3 + d_6 X_2, \\ \mu(X_6, X_7) &= d_3 X_4 + e_1 X_3 - d_6 X_2, \\ \mu(X_6, X_8) &= 2d_3 X_5 + (e_1 + d_5) X_4 + e_3 X_3, \\ \mu(X_7, X_8) &= 2d_3 X_6 + (e_1 + d_5) X_5 + e_3 X_4 + f_1 X_3 + f_2 X_2 \end{cases}$$

es una componente irreducible C_5 que corta al abierto $U^8_{(6,1)}$, distinta de C_1, C_2, C_3 y C_4.

En esta componente la dimensión del segundo grupo de los 2-cobordes de la cohomología de Chevalley es 55 y mediante un estudio asistido por el ordenador, se demuestra que no puede eliminarse ningún parámetro, con lo que la dimensión es 57.

Caso $b_{10} = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = 0$

Como antes, podemos conseguir $a_3 = c_3 = 0$. Las condiciones de Jacobi y nilpotencia nos dan que

$$a_{12} = b_9 = d_3 = d_1 = c_5 = 0$$

y queda la ley simplificada como

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1},\ 4 \leq i \leq 8, \\ \mu(X_5, X_8) &= d_5 X_3 + d_6 X_2, \\ \mu(X_6, X_7) &= e_1 X_3 - d_6 X_2, \\ \mu(X_6, X_8) &= (e_1 + d_5) X_4 + e_3 X_3, \\ \mu(X_7, X_8) &= (e_1 + d_5) X_5 + e_3 X_4 + f_1 X_3 + f_2 X_2 \end{cases}$$

De nuevo consideramos los casos $d_6 \neq 0$ y $d_6 = 0$. En el primero, tomamos la aplicación bilineal alternada definida por

$$\begin{aligned}
&\varphi(X_2, X_8) = -(2\epsilon^2/d_6)\, X_3,\\
&\varphi(X_5, X_7) = \epsilon\, X_3,\\
&\varphi(X_5, X_8) = \epsilon\, X_4,\\
&\varphi(X_6, X_7) = 2\,\epsilon\, X_5,\\
&\varphi(X_6, X_8) = 2\,\epsilon\, X_6,\\
&\varphi(X_7, X_8) = 2\,\epsilon\, X_6
\end{aligned}$$

Entonces otra vez se tiene que $\mu + \epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y que es de la familia anterior.

Si $d_6 = 0$, se perturba análogamente en la ley del caso $d_6 \neq 0$.

Concluimos entonces que en este caso no se obtiene ninguna nueva componente. ya que la familia hallada está siempre en la adherencia de las órbitas de familias consideradas anteriormente, y por tanto en una de las componentes halladas antes.

Esto concluye la discusión de todos los casos y por tanto se tiene demostrada la proposición.

3.4 Sucesión característica $(5, 2, 1)$

Proposición. *El abierto $U^8_{(5,2,1)}$ está contenido en la unión de ocho componentes irreducibles, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 y C_8, donde las dos primeras son las determinadas en 3.2, las tres siguientes las determinadas en 3.3, y las tres últimas vienen dadas respectivamente por las clausuras de Zariski de las órbitas de las familias:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu^6(X_1,X_3) & = & X_2, \\ \mu^6(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5 \leq i \leq 8, \\ \mu^6(X_2,X_3) & = & X_4, \\ \mu^6(X_2,X_7) & = & \alpha_1 X_4, \\ \mu^6(X_2,X_8) & = & \alpha_2 X_4 + \alpha_1 X_5, \\ \mu^6(X_3,X_6) & = & \alpha_3 X_4, \\ \mu^6(X_3,X_7) & = & \alpha_4 X_4 + (\alpha_1+\alpha_3) X_5, \\ \mu^6(X_3,X_8) & = & \alpha_5 X_2 + \alpha_6 X_4 + (\alpha_2+\alpha_4) X_5 + (2\alpha_1+\alpha_3) X_6, \\ \mu^6(X_6,X_7) & = & X_4, \\ \mu^6(X_6,X_8) & = & \alpha_7 X_4 + X_5, \\ \mu^6(X_7,X_8) & = & (2\alpha_3+\alpha_1(2+\alpha_5)) X_2 + \alpha_8 X_4 + \alpha_7 X_5 + X_6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu^7(X_1,X_3) & = & X_2, \\ \mu^7(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5 \leq i \leq 8, \\ \mu^7(X_3,X_7) & = & X_4, \\ \mu^7(X_3,X_8) & = & \alpha_1 X_2 + \alpha_2 X_4 + X_5, \\ \mu^7(X_5,X_8) & = & X_2, \\ \mu^7(X_6,X_7) & = & -X_2 + \alpha_3 X_4, \\ \mu^7(X_6,X_8) & = & X_2 + \alpha_3 X_5, \\ \mu^7(X_7,X_8) & = & X_3 + \alpha_3 X_6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu^8(X_1,X_3) & = & X_2, \\ \mu^8(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5 \leq i \leq 8, \\ \mu^8(X_2,X_8) & = & X_4, \\ \mu^8(X_3,X_7) & = & \alpha_1 X_4, \\ \mu^8(X_3,X_8) & = & \alpha_2 X_2 + X_4 + (1+\alpha_1) X_5, \\ \mu^8(X_6,X_7) & = & \alpha_3 X_4, \\ \mu^8(X_6,X_8) & = & X_2 + \alpha_3 X_5, \\ \mu^8(X_7,X_8) & = & X_3 + \alpha_3 X_6 \end{array}\right.$$

siendo sus dimensiones respectivas 59, 59 y 55.

El resto de esta sección estará dedicada a demostrar esta proposición.

Determinaremos en primer lugar una familia genérica de sucesión característica $(5,2,1)$, obteniendo las restricciones impuestas sobre las constantes de estructura por las condiciones de Jacobi, de nilpotencia y la pertencia a esa sucesión característica.

3.4.1 La ley del álgebra

Sea g un álgebra de Lie de sucesión característica $(5,2,1)$. Si X_1 es un vector característico de g, entonces respecto a una base de Jordan $(X_1,\ldots,X_8)$, la matriz de $\mathrm{ad}(X_1)$ es

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos determinados los productos $\mu(X_1,X_j)$:

$$\begin{array}{ll} \mu(X_1,X_2)=0 & \\ \mu(X_1,X_3)=X_2 & \\ \mu(X_1,X_4)=0 & \\ \mu(X_1,X_j)=X_{j-1} & (5\le j\le 8) \end{array}$$

De nuevo utilizamos la igualdad de Jacobi para encontrar los productos $\mu(X_i,X_j)$ obteniendo así:

Lema. $N^8_{(5,2,1)}$ *está contenido en la órbita de la familia de leyes de álgebra de Lie dada por*

$$\begin{aligned} \mu(X_1,X_3) &= X_2\\ \mu(X_1,X_5) &= X_4\\ \mu(X_1,X_6) &= X_5 \end{aligned}$$

$$\mu(X_1, X_7) = X_6$$
$$\mu(X_1, X_8) = X_7$$

$$\mu(X_2, X_3) = a_1X_4$$
$$\mu(X_2, X_6) = a_7X_4$$
$$\mu(X_2, X_7) = a_7X_5 + a_9X_4 + a_{10}X_2$$
$$\mu(X_2, X_8) = a_7X_6 + a_9X_5 + a_{11}X_4 + a_{10}X_3 + a_{12}X_2$$

$$\mu(X_3, X_5) = b_3X_4$$
$$\mu(X_3, X_6) = (b_3 + a_7)X_5 + b_5X_4 - 2a_{10}X_2$$
$$\mu(X_3, X_7) = (b_3 + 2a_7)X_6 + (b_5 + a_9)X_5 + b_7X_4 - a_{10}X_3 + b_8X_2$$
$$\mu(X_3, X_8) = (b_3+3a_7)X_7+(b_5+2a_9)X_6+(b_7+a_{11})X_5+b_9X_4+(b_8+a_{12})X_3+ b_{10}X_2$$

$$\mu(X_4, X_8) = c_7X_4 - 2d_4X_2$$

$$\mu(X_5, X_7) = d_3X_4 + d_4X_2$$
$$\mu(X_5, X_8) = (d_3 + c_7)X_5 + d_5X_4 - d_4X_3 + d_6X_2$$

$$\mu(X_6, X_7) = d_3X_5 + e_1X_4 + d_4X_3 - d_6X_2$$
$$\mu(X_6, X_8) = (2d_3 + c_7)X_6 + (e_1 + d_5)X_5 + e_3X_4 + e_4X_2$$

$$\mu(X_7, X_8) = (2d_3 + c_7)X_7 + (e_1 + d_5)X_6 + e_3X_5 + f_1X_4 + e_4X_3 + f_2X_2$$

3.4.2 Componentes irreducibles cortando $U^8_{(5,2,1)}$

Con varios razonamientos basados de nuevo en las condiciones de Jacobi y nilpotencia y mediante los adecuados cambios de base se obtienen (entre otras) las relaciones

$$\begin{aligned}
a_7 &= 0, a_{10} = 0,\\
a_1 d_4 &= 0,\\
a_9 d_4 &= 0,\\
b_3 d_4 &= 0\\
a_1 d_6 &= 0,\\
b_5 d_4 &= 0,\\
b_8 &= -2a_{12} - 4c_7 - 5d_3,\\
b_3(a_{12}+b_8) &= 0,\\
a_1(c_7+d_3) &= 0,\\
d_4(a_12 + 6c_7 + 10d_3) &= 0
\end{aligned}$$

Esto nos sugiere la distinción de los siguientes casos:

caso $d_4 \neq 0$

Al ser $d_4 \neq 0$, de las relaciones anteriores se tiene

$$a_1 = a_9 = b_3 = b_5 = 0$$

Por otra parte, como al ser un álgebra de Lie nilpotente existe un centro de dimensión al menos 1, en la estructura de la ley vemos que se puede suponer

$$a_{11} = a_{12} = 0, \; c_7 = -\frac{5}{3}d_3$$

y entonces las condiciones de Jacobi y nilpotencia quedan muy sencillas.

Ahora bien, después de estas simplificaciones, un razonamiento sencillo nos permite demostrar que *este caso no puede darse* en esta etapa; en efecto consideramos un vector $Y_1 = X_1 + m\,X_8$ con m genérico. Entonces formamos una cadena de vectores mediante la recurrencia:

$$\begin{aligned}
Y_7 &= \mu(Y_1, X_8) = X_7\\
Y_6 &= \mu(Y_1, Y_7) = \alpha_1 X_6 + \text{sumandos dependientes de } X_5, X_4, X_3 \text{ y } X_2\\
Y_5 &= \mu(Y_1, Y_6) = \alpha_2 X_5 + \text{sumandos dependientes de } X_4, X_3 \text{ y } X_2\\
Y_4 &= \mu(Y_1, Y_5) = \alpha_3 X_4 + \text{sumandos dependientes de } X_3 \text{ y } X_2\\
Y_3 &= \mu(Y_1, Y_4) = \alpha_4 X_3 + \text{sumandos dependientes de } X_2\\
Y_2 &= \mu(Y_1, Y_3) = \alpha_5 X_2
\end{aligned}$$

donde los α_i dependen de m y de las constantes de estructura. Se puede observar que cuando $d_4 \neq 0$ es posible elegir m de modo que los vectores Y_i sean linealmente independientes y se tiene que el bloque de mayor tamaño de la forma canónica de $\mathrm{ad}(Y_1)$ es mayor que 5, y como Y_1 no está en el álgebra derivada, esto contradice el que la familia sea de la sucesión característica $(5,2,1)$.

Caso $d_4 = 0,\ a_1 \neq 0$

De las relaciones tenemos

$$a_7 = a_{10} = d_4 = c_7 = d_3 = d_6 = a_{12} = e_4 = 0,\ b_8 = -2a_{12} - 5d_3$$

Mediante un cambio de base de la forma $Y_8 = X_8 + \alpha\, X_1$ podemos conseguir $d_5 = 0$, y con $Y_3 = X_3 + \beta\, X_1$, hacemos $b_3 = 0$. Tras simplificar, nos queda la familia

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mu(X_1,X_3) & = & X_2, \\
\mu(X_1,X_i) & = & X_{i-1},\ 5 \leq i \leq 8, \\
 & & \\
\mu(X_2,X_3) & = & X_4, \\
\mu(X_2,X_7) & = & a_9\, X_4, \\
\mu(X_2,X_8) & = & a_{11}\, X_4 + a_9\, X_5, \\
 & & \\
\mu(X_3,X_6) & = & b_5\, X_4, \\
\mu(X_3,X_7) & = & b_7\, X_4 + (a_9 + b_5)\, X_5, \\
\mu(X_3,X_8) & = & b_{10}\, X_2 + b_9\, X_4 + (a_{11} + b_7)\, X_5 + (2a_9 + b_5)\, X_6, \\
 & & \\
\mu(X_6,X_7) & = & X_4, \\
\mu(X_6,X_8) & = & e_3\, X_4 + X_5, \\
 & & \\
\mu(X_7,X_8) & = & (2b_5 + a_9(2 + b_{10}))\, X_2 + f_1\, X_4 + e_3\, X_5 + X_6
\end{array}\right.$$

Esta es la primera familia de la proposición, y un razonamiento análogo al utilizado anteriormente nos permite obtener:

Lema. *La adherencia de Zariski de la órbita de la familia anterior es una componente irreducible C_6 que corta al abierto $U^8_{(6,1)}$, distinta de C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5.*

Caso $d_4 = a_1 = 0,\ d_6 \neq 0$

Las relaciones nos dan entonces

$$a_7 = a_{10} = d_4 = c_7 = d_3 = a_9 = a_{11} = a_{12} = b_5 = b_8 = 0$$

Por otra parte, siempre se puede hacer $b_3 = 0$ y tras varias simplificaciones queda la familia

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_3) &= X_2, \\ \mu(X_1,X_i) &= X_{i-1},\ 5 \leq i \leq 8, \\ \\ \mu(X_3,X_7) &= X_4, \\ \mu(X_3,X_8) &= b_{10}X_2 + b_9X_4 + X_5, \\ \\ \mu(X_5,X_8) &= X_2, \\ \\ \mu(X_6,X_7) &= -X_2 + e_1X_4, \\ \mu(X_6,X_8) &= X_2 + e_1X_5, \\ \\ \mu(X_7,X_8) &= X_3 + e_1X_6 \end{cases}$$

Mediante una computación por ordenador, como se explica en 1.6, se calcula la dimensión de la adherencia de la órbita de esta familia, y resulta ser 59, con lo que nos da una componente irreducible distinta de las anteriores.

Caso $d_4 = a_1 = d_6 = 0,\ e_4 \neq 0$

Tenemos ahora:

$$d_4 = c_7 = a_1 = d_6 = d_3 = a_{12} = b_8 = b_3 = 0,\ b_9 = c_5$$

Utilizando un cambio de base de la forma

$$\begin{aligned} Y_8 &= \beta X_8 \\ Y_7 &= \alpha\beta X_7 \\ Y_6 &= \alpha^2\beta X_6 \\ Y_5 &= \alpha^3\beta X_5 \\ Y_4 &= \alpha^4\beta X_4 \\ Y_3 &= \gamma X_3 \\ Y_2 &= \alpha\gamma X_2 \\ Y_1 &= \alpha X_1 \end{aligned}$$

se puede suponer siempre $a_{11} = e_4 = 1$ y entonces las condiciones de la sucesión característica imponen $b_5 = 0$. Si $b_{10} - d_5 + 4e_1 = 0$, entonces se perturba en $b_5 \neq 0$, que es de sucesión característica mayor. Así también podemos suponer $b_{10} - d_5 + 4e_1 \neq 0$ y si $e_4 = 0$ se podría perturbar en el caso $a_1 \neq 0$. Si $e_4 \neq 0$ quedan

$$f_2 = f_1 = e_3 = d_5 = 0$$

y se obtiene una familia cuya adherencia de su órbita es una componente irreducible que claramente no corta al abierto de las filiformes:

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_3) &= X_2, \\ \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, \ 5 \leq i \leq 8, \\ \\ \mu(X_2, X_8) &= X_4, \\ \\ \mu(X_3, X_7) &= b_7 X_4, \\ \mu(X_3, X_8) &= b_{10} X_2 + X_4 + (1 + b_7) X_5, \\ \\ \mu(X_6, X_7) &= e_1 X_4, \\ \mu(X_6, X_8) &= X_2 + e_1 X_5, \\ \\ \mu(X_7, X_8) &= X_3 + e_1 X_6 \end{cases}$$

Calculando la dimensión de esa componente resulta ser 55, con lo que se trata de una nueva componente.

Caso $d_4 = a_1 = d_6 = e_4 = 0$

Aquí se tiene

$$e_4 = d_4 = c_7 = a_1 = d_6 = d_3 = a_{12} = b_8 = 0$$

Como siempre, se puede anular b_3 con un cambio de la forma $Y_3 = X_3 + \alpha X_1$, y entonces es fácil encontrar una perturbación en el caso $a_1 \neq 0$.

El cálculo de las dimensiones se ha realizado

3.5 Sucesión característica $(5,1,1,1)$

3.5.1 La ley del álgebra

Sea g un álgebra de Lie de sucesión característica $(5,1,1,1)$. Si X_1 es un vector característico de g, entonces respecto a una base de Jordan $(X_1,\dots,X_8)$, la matriz de $\mathrm{ad}(X_1)$ es

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos determinados los productos $\mu(X_1,X_j)$:

$$\mu(X_1,X_j)=X_{j-1} \qquad (5\le j\le 8)$$

De nuevo utilizamos la igualdad de Jacobi para encontrar los productos $\mu(X_i,X_j)$ obteniendo así:

Lema. $N^8_{(5,1,1,1)}$ *está contenido en la órbita de la familia de leyes de álgebra de Lie que en la base* $(X_1,\dots,X_8)$ *vienen dadas por: la ley*

$$\mu(X_1,X_j)= X_{j-1}, \qquad (5\le j\le 8)$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_2,X_3) &= a_1\,X_4\\
\mu(X_2,X_7) &= a_{13}\,X_4\\
\mu(X_2,X_8) &= a_{18}\,X_2+a_{17}\,X_3+a_{16}\,X_4+a_{13}\,X_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_3,X_6) &= b_7\,X_4\\
\mu(X_3,X_7) &= b_{10}\,X_4+b_7\,X_5\\
\mu(X_3,X_8) &= b_{15}\,X_2+b_{14}\,X_3+b_{13}\,X_4+b_{10}\,X_5+b_7\,X_6
\end{aligned}$$

$$\mu(X_5, X_8) = d_9\, X_2 + d_8\, X_3$$

$$\mu(X_6, X_7) = -b_9\, X_2 - d_8\, X_3 + e_1\, X_4$$
$$\mu(X_6, X_8) = e_4\, X_4 + e_1\, X_5$$

$$\mu(X_7, X_8) = f_3\, X_2 + f_2\, X_3 + f_1\, X_4 + e_4\, X_5 + e_1\, X_6$$

3.5.2 Componentes irreducibles cortando $U^8_{(5,1,1,1)}$

Proposición. *El abierto $U^8_{(5,1,1,1)}$ está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

Dedicaremos el resto de la sección a demostrar la proposición.

A partir de las condiciones de Jacobi, las de nilpotencia y las derivadas de la sucesión característica, obtenemos una lista de restricciones en las constantes de estructura que son absolutamente inabordables; en cambio urtilizando bases de Groebner (ver 1.4), obtenemos la siguiente lista reducida:

$$b_{15}\, d_8 - b_{14}\, d_9 = 0$$
$$b_7\, d_9 = 0$$
$$b_7\, d_8 = 0$$
$$b_7\, b_{14} = 0$$
$${b_7}^2\, f_2 = 0$$
$$a_{18} + b_{14} = 0$$
$$b_{14}\, d_8 + a_{17}\, d_9 = 0$$
$$-{b_{14}}^2 - a_{17}\, b_{15} = 0$$
$$a_{17}\, b_7 = 0$$
$$b_{13}\, d_8 + a_{16}\, d_9 - b_7\, f_2 = 0$$
$$-(b_{13}\, b_{14}\, d_8) - a_{16}\, b_{15}\, d_8 = 0$$
$$-(a_{17}\, b_{13}\, d_8) + a_{16}\, b_{14}\, d_8 = 0$$
$$-(b_{10}\, d_8) - a_{13}\, d_9 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&-(b_{10}\, b_{14}\, d_8) - a_{13}\, b_{15}\, d_8 = 0\\
&b_{10}\, b_{14}\, f_2 + a_{13}\, b_{15}\, f_2 + 2\, b_7\, e_1\, f_2 + a_{17}\, b_{10}\, f_3 - a_{13}\, b_{14}\, f_3 = 0\\
&a_{17}\, b_{10}\, d_8 - a_{13}\, b_{14}\, d_8 = 0\\
&-\left(a_{16}\, b_{10}\, {d_8}^2\right) + a_{13}\, b_{13}\, {d_8}^2 = 0\\
&-((a_{16}\, b_{10} - a_{13}\, b_{13})\; d_8) - a_{13}\, b_7\, f_2 = 0\\
&a_{16}\, a_{17}\, b_{10}\, d_8 - a_{13}\, a_{17}\, b_{13}\, d_8 = 0\\
&b_{10}\, b_{14} + a_{13}\, b_{15} + 2\, b_7\, e_1 - a_1\, f_3 = 0\\
&a_{17}\, b_{10} - a_{13}\, b_{14} + a_1\, f_2 = 0\\
&a_1\, d_9 = 0\\
&-(a_1\, d_8) = 0
\end{aligned}
$$

Lo que nos sugiere qué casos es más adecuado considerar:

Caso $b_7 \neq 0$

En este caso la sucesión característica obliga a que $b_{15} = 0$, con lo que la base de Gröbner queda reducida a la única relación

$$2\, b_7\, e_1 - a_1\, f_3 \;=\; 0$$

Pero entonces siempre se perturba en el caso $b_{15} \neq 0$:

- Si $a_{13} \neq 0$ y $a_1 \neq 0$, se perturba mediante

$$b_{15} = \epsilon,\ a_1 = a_{13}\epsilon/a_1$$

- Si $a_{13} \neq 0$, $a_1 = 0$ y $f_3 \neq 0$, se perturba mediante

$$b_{15} = \epsilon,\ a_1 = a_{13}\epsilon/f_3$$

- Si $a_{13} \neq 0$, $a_1 = f_3 = 0$, se perturba mediante

$$b_{15} = \epsilon^2/a_{13},\ a_1 = f_3 = \epsilon$$

- Si $a_{13} = 0$ se perturba de forma evidente.

Caso $b_7 = 0$ **y** $a_1 \neq 0$

En este caso siempre se puede suponer $f_2 = 0$ y entonces las condiciones de la sucesión característica dan

$$a_{17} = a_{18} = b_{14} = b_{15} = 0$$

Las condiciones de Jacobi y la nilpotencia quedan reducidas a $a_1 f_3 = 0$, con lo que $f_3 = 0$

Entonces se puede suponer $b_{10} = 0$ y se tiene una perturbación evidente mediante $a_{17} = \epsilon$.

Caso $b_7 = a_1 = 0$

Entonces siempre se puede suponer $d_8 = 0$ y la base de Gröbner queda

$$b_{14}\, d_9 = 0$$
$$a_{18} + b_{14} = 0$$
$$a_{17}\, d_9 = 0$$
$$-{b_{14}}^2 - a_{17}\, b_{15} = 0$$
$$a_{16}\, d_9 = 0$$
$$a_{13}\, d_9 = 0$$
$$b_{10}\, b_{14} + a_{13}\, b_{15} = 0$$
$$a_{17}\, b_{10} - a_{13}\, b_{14} = 0$$

Si $d_9 \neq 0$, queda

$$b_{14} = a_{18} = a_{17} == a_{16} = a_{13} = 0$$

y la ley se simplifica a

$$\begin{cases} \mu(X_1,X_j) &= X_{j-1},\ (5 \leq j \leq 8) \\ \\ \mu(X_3,X_7) &= b_{10}X_4, \\ \mu(X_3,X_8) &= b_{15}X_2 + b_{13}X_4 + b_{10}X_5, \\ \\ \mu(X_5,X_8) &= d_9X_2, \\ \\ \mu(X_6,X_7) &= d_9X_2 + e_1X_4, \\ \mu(X_6,X_8) &= e_4X_4 + e_1X_5, \\ \\ \mu(X_7,X_8) &= f_3X_2 + f_2X_3 + f_1X_4 + e_4X_5 + e_1X_6 \end{cases}$$

Como en 3.4.2 en la página 78, consideramos entonces la cadena de vectores definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha X_1 + X_8 \\ Y_8 &= X_8 \\ Y_j &= \mu(Y_1, Y_{j-1}) \end{aligned}$$

encontramos que si $b_{15} \neq 0$ habría más vectores linealmente independientes de los que permite la sucesión característica, con lo que necesariamente $b_{15} = 0$. Entonces la familia se perturba trivialmente en una con $b_{15} \neq 0$, que es de otra sucesión característica.

Si $d_9 = 0$, como también d_8 se puede hacer cero, las relaciones quedan

$$\begin{aligned} &a_{18} + b_{14} = 0 \\ &-b_{14}{}^2 - a_{17}b_{15} = 0 \\ &b_{10}b_{14} + a_{13}b_{15} = 0 \\ &a_{17}b_{10} - a_{13}b_{14} = 0 \end{aligned}$$

y siempre se puede suponer $a_{13} = 0$. Una sucesión de vectores como la considerada en el caso anterior obliga a las relaciones

$$b_{14} = b_{15} = a_{17} = a_{18} = 0$$

y se encuentra como antes la perturbación evidente dada por $b_{15} = \epsilon$.

Esto completa la discusión d elos casos y concluye la demostración de la proposición.

3.6 Sucesión característica $(4,3,1)$

Sea g un álgebra de Lie de sucesión característica $(4,3,1)$. Si X_1 es un vector característico de g, entonces respecto a una base de Jordan $(X_1,\ldots,X_8)$, la matriz de $\mathrm{ad}(X_1)$ es

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos determinados los productos $\mu(X_1,X_j)$:

$$\begin{array}{ll} \mu(X_1,X_2)=0 & \\ \mu(X_1,X_3)=X_2 & \\ \mu(X_1,X_4)=X_3 & \\ \mu(X_1,X_j)=X_{j-1} & \qquad (6\le j\le 8) \end{array}$$

De nuevo utilizamos la igualdad de Jacobi para encontrar los productos $\mu(X_i,X_j)$ obteniendo así, tras algunas simplificaciones por condiciones de nilpotencia:

Proposición. $N^8_{(4,3,1)}$ *está contenido en la órbita de la familia de leyes de álgebra de Lie que en la base* $(X_1,\ldots,X_8)$ *vienen dadas por: la ley*

$$\begin{aligned} \mu(X_1,X_3) &= X_2\\ \mu(X_1,X_4) &= X_3\\ \mu(X_1,X_6) &= X_5\\ \mu(X_1,X_7) &= X_6\\ \mu(X_1,X_8) &= X_7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_2,X_3) &= a_1\,X_5\\
\mu(X_2,X_4) &= a_1\,X_6 + a_3\,X_5 + a_4\,X_2\\
\mu(X_2,X_7) &= -a_4\,X_5\\
\mu(X_2,X_8) &= -a_4\,X_6 + a_{11}\,X_5 + a_{12}\,X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_3,X_4) &= a_1\,X_7 + a_3\,X_6 + b_1\,X_5 + a_4\,X_3 + b_2\,X_2\\
\mu(X_3,X_6) &= a_4\,X_5\\
\mu(X_3,X_7) &= b_7\,X_5 + b_8\,X_2\\
\mu(X_3,X_8) &= -a_4\,X_7 + (a_{11}+b_7)\,X_6 + b_9\,X_5 + (a_{12}+b_8)\,X_3 + b_{10}\,X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_4,X_6) &= a_4\,X_6 + c_3\,X_5 + c_4\,X_2\\
\mu(X_4,X_7) &= a_4\,X_7 + (b_7+c_3)\,X_6 + c_5\,X_5 + (b_8+c_4)\,X_3 + c_6\,X_2\\
\mu(X_4,X_8) &= (a_{11}+2b_7)\,X_7 + (b_9+c_5)\,X_6 + c_7\,X_5 + (a_{12}+2b_8+c_4)\,X_4 +\\
&\quad (b_{10}+c_6)\,X_3 + c_8\,X_2
\end{aligned}
$$

$$
\mu(X_5,X_8) = d_5\,X_5 + d_6\,X_2
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_6,X_7) &= e_1\,X_5 + e_2\,X_2\\
\mu(X_6,X_8) &= (d_5+e_1)\,X_6 + e_3\,X_5 + (d_6+e_2)\,X_3 + e_4\,X_2
\end{aligned}
$$

$$
\mu(X_7,X_8) = (d_5+e_1)\,X_7 + e_3\,X_6 + f_1\,X_5 + (d_6+e_2)\,X_4 + e_4\,X_3 + f_2\,X_2
$$

Procediendo de modo similar al de las secciones precedentes encontramos:

Proposición. *El abierto $U^8_{(4,3,1)}$ está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

3.7 Sucesión característica $(4, 2, 1, 1)$

Proposición. *El abierto $U^8_{(4,2,1,1)}$ está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, razonando como se ha expuesto anteriormente se obtiene que $N^8_{(4,2,1,1)}$ está contenido en la órbita de la familia

$$
\begin{aligned}
\mu(X_1, X_4) &= X_3 \\
\mu(X_1, X_6) &= X_5 \\
\mu(X_1, X_7) &= X_6 \\
\mu(X_1, X_8) &= X_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_2, X_3) &= a_1 X_5 \\
\mu(X_2, X_4) &= a_1 X_6 + a_4 X_5 + a_5 X_3 + a_6 X_2 \\
\mu(X_2, X_6) &= a_{10} X_5 \\
\mu(X_2, X_7) &= a_{10} X_6 + a_{13} X_5 + a_{14} X_3 \\
\mu(X_2, X_8) &= a_{10} X_7 + a_{13} X_6 + a_{16} X_5 + a_{14} X_4 + a_{17} X_3 + a_{18} X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_3, X_4) &= b_1 X_5 + b_2 X_3 + b_3 X_2 \\
\mu(X_3, X_7) &= b_{10} X_5 + b_{11} X_3 \\
\mu(X_3, X_8) &= b_{10} X_6 + b_{13} X_5 + b_{11} X_4 + b_{14} X_3 + b_{15} X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_4, X_6) &= c_4 X_5 + c_5 X_3 \\
\mu(X_4, X_7) &= (b_{10} + c_4) X_6 + c_7 X_5 - b_{11} X_4 + c_8 X_3 - b_{15} X_2 \\
\mu(X_4, X_8) &= (2b_{10} + c_4) X_7 + (b_{13} + c_7) X_6 + c_{10} X_5 + (b_{14} + c_8) X_4 + c_{11} X_3 + c_{12} X_2
\end{aligned}
$$

$$
\mu(X_5, X_8) = d_7 X_5 + d_8 X_3 + d_9 X_2
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(X_6, X_7) &= e_1 X_5 - d_8 X_3 - d_9 X_2 \\
\mu(X_6, X_8) &= (d_7 + e_1) X_6 + e_4 X_5 + e_5 X_3
\end{aligned}
$$

$$\mu(X_7, X_8) = (d_7 + e_1)\, X_7 + e_4\, X_6 + f_1\, X_5 + e_5\, X_4 f_2\, X_3 + f_3\, X_2$$

y una discusión de casos nos lleva a comprobar que en todos los casos se puede perturbar a leyes correspondiendo a sucesiones características superiores, con lo que la órbita está contenida en las componentes irrdeducibles determinadas previamente. □

3.8 Sucesión característica $(4,1,1,1,1)$

Proposición. *El abierto* $U^8_{(4,1,1,1,1)}$ *está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, un tratamiento como en las secciones anteriores nos permite obtener que $N^8_{(4,1,1,1,1)}$ está contenido en la órbita de la familia

$$\mu(X_1, X_6) = X_5$$
$$\mu(X_1, X_7) = X_6$$
$$\mu(X_1, X_8) = X_7$$

$$\mu(X_2, X_3) = a_1\, X_5$$
$$\mu(X_2, X_4) = a_5\, X_5$$
$$\mu(X_2, X_8) = a_{11}\, X_5$$

$$\mu(X_3, X_4) = b_1\, X_5$$
$$\mu(X_3, X_8) = b_7\, X_5$$

$$\mu(X_4, X_7) = c_2\, X_5$$
$$\mu(X_4, X_8) = c_2\, X_6 + c_3\, X_5$$

$$\mu(X_7, X_8) = f_1\, X_5 + f_2\, X_4 + f_3\, X_3 + f_4\, X_2$$

Distinguimos entonces los casos:

Caso $f_2 \neq 0$

Entonces se puede suponer que $f_1 = f_3 = f_4 = 0$, y con ello, de las condiciones de Jacobi se encuentra que $b_1 = a_5 = 0$. Entonces con la aplicación bilineal alternada definida por $\varphi(X_3, X_8) = X_2$, se tiene que $\mu + \epsilon\varphi$ es una perturbación de μ y es de sucesión característica superior.

Caso $f_2 = 0$ y $f_3 \neq 0$ o $f_4 \neq 0$

Si $f_3 \neq 0$ se puede suponer $f_1 = f_4 = 0$, con lo que queda $a_1 = b_1 = 0$, y es fácil ver que se perturba en un caso anterior (basta cambiar X_3 por X_4) El caso $f_4 \neq 0$ se trata de forma similar.

Caso $f_2 = f_3 = f_4 = 0$

Un razonamiento similar permite perturbar en este caso, consiguiendo $a_1 \neq 0$, $a_5 \neq 0$ o $b_1 \neq 0$. □

3.9 Sucesiones características $(3,3,1,1)$, $(3,2,2,1)$ y $(3,2,1,1,1)$

Las leyes de estas sucesiones características tienen un tratamiento muy similar, no permitiendo obtener ninguna componente irreducible nueva, por lo que nos centraremos en solo una de ellas, tratándose las otras de forma casi igual.

Empezamos como siempre utilizando la sucesión característica para conocer $\mathrm{ad}(X_1)$, y obteniendo, a partir de los productos $\mu(X_1, X_i)$ y las condiciones de Jacobi, una ley genérica:

Lema. *$N^8_{(3,3,1,1)}$ está contenido en la órbita de la familia de leyes de álgebra de Lie siguiente:*

$$\mu(X_1,X_4) = X_3$$
$$\mu(X_1,X_5) = X_4$$
$$\mu(X_1,X_7) = X_6$$
$$\mu(X_1,X_8) = X_7$$

$$\mu(X_2,X_3) = a_1 X_6 + a_2 X_3$$
$$\mu(X_2,X_4) = a_1 X_7 + a_4 X_6 + a_2 X_4 + a_5 X_3$$
$$\mu(X_2,X_5) = a_1 X_8 + a_4 X_7 + a_7 X_6 + a_2 X_5 + a_5 X_4 + a_8 X_3 + a_9 X_2$$
$$\mu(X_2,X_6) = -a_2 X_6 + a_{11} X_3$$
$$\mu(X_2,X_7) = -a_2 X_7 + a_{13} X_6 + a_{11} X_4 + a_{14} X_3$$
$$\mu(X_2,X_8) = -a_2 X_8 + a_{13} X_7 + a_{16} X_6 + a_{11} X_5 + a_{14} X_4 + a_{17} X_3 + a_{18} X_2$$

$$\mu(X_3,X_4) = b_1 X_6 - b_{10} X_3$$
$$\mu(X_3,X_5) = b_1 X_7 + b_4 X_6 - b_{10} X_4 + b_5 X_3$$
$$\mu(X_3,X_7) = b_{10} X_6 + b_{11} X_3$$
$$\mu(X_3,X_8) = b_{10} X_7 + b_{13} X_6 + b_{11} X_4 + b_{14} X_3 + b_{15} X_2$$

$$\mu(X_4,X_5) = b_1 X_8 + b_4 X_7 + c_1 X_6 + b_2 X_5 + b_5 X_4 + c_2 X_3 + c_3 X_2$$
$$\mu(X_4,X_6) = -b_{10} X_6 - b_{11} X_3$$
$$\mu(X_4,X_7) = c_7 X_6 + c_8 X_3 - b_{15} X_2$$
$$\mu(X_4,X_8) = b_{10} X_8 + (b_{13}+c_7) X_7 + c_{10} X_6 + b_{11} X_5 + (b_{14}+c_8) X_4 + c_{11} X_3 + c_{12} X_2$$

$$\mu(X_5,X_6) = b_{10} X_7 + d_1 X_6 - b_{11} X_4 + d_2 X_3 + b_{15} X_2$$
$$\mu(X_5,X_7) = b_{10} X_8 + (c_7+d_1) X_7 + d_4 X_6 - b_{11} X_5 + (c_8+d_2) X_4 + d_5 X_3 - c_{12} X_2$$
$$\mu(X_5,X_8) = (b_{13}+2c_7+d_1) X_8 + (c_{10}+d_4) X_7 + d_7 X_6 + (b_{14}+2c_8+d_2) X_5 + (c_{11}+d_5) X_4 + d_8 X_3 + d_9 X_2$$

$$\mu(X_6,X_7) = -b_{11} X_6 + e_2 X_3$$
$$\mu(X_6,X_8) = -b_{11} X_7 + e_4 X_6 + e_2 X_4 + e_5 X_3$$

$$\mu(X_7,X_8) = -b_{11} X_8 + e_4 X_7 + f_1 X_6 + e_2 X_5 + e_5 X_4 + f_2 X_3 + f_3 X_2$$

Hemos elegido esta sucesión característica de entre las tres para comentar un fenómeno cada vea más claro según se va avanzando hacia las sucesiones características más bajas. Por un lado la ley obtenida es cada vez más complicada; esto no es extraño si recordamos (ver 1.5) que cada vez trabajamos en abiertos más grandes, con lo que la lay general es cada vez más general. Por otra parte, cuando imponemos las condiciones derivadas de la sucesión característica, obtenemos cada vez mayor número de restricciones sobre las constantes de estructura, lo que pronto simplifica enormemente la ley (de hecho cuando en secciones posteriores escribamos la lay habremos introducido muchas de esas simplificaciones, para facilitar la lectura del trabajo).

Debe notarse que al tener cada vez más condiciones impuestas por la sucesión característica será cada vez más fácil que la ley pueda perturbarse en otras de sucesión característica mayor. En efecto, basta perturbar las constantes de estructura que aparezcan en estas relaciones y no en las condiciones de Jacobi ni en las de nilpotencia, de modo que sin dejar de ser álgebra de Lie nilpotente, cambie de sucesión característica.

Tras una serie de computaciones, obtenemos entonces el resultado:

Proposición. *Los abiertos $U^8_{(3,3,1,1)}$, $U^8_{(3,2,2,1)}$ y $U^8_{(3,2,1,1,1)}$ están contenidos en las componentes determinadas anteriormente.*

3.10 Sucesión característica $(3,1,1,1,1,1)$

Detallamos aparte el caso de esta sucesión característica ya que ofrecerá ocasión de mostrar algunos razonamientos que, aunque hubieran aparecido si hubiésemos detallado el tratamiento de las anteriores, allí daban lugar a cálculos más complicados y difíciles de seguir, sin aportar en cambio ninguna idea distinta de las que veremos aquí.

El resultado que obtendremos es:

Proposición. *El abierto $U^8_{(3,1,1,1,1,1)}$ está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

Demostración: En efecto, cualquier ley de esa sucesión característica es isomorfa a una de la forma

$$
\begin{aligned}
\mu(X_1,X_7) &= X_6\\
\mu(X_1,X_8) &= X_7\\[1em]
\mu(X_2,X_3) &= a_1\,X_6\\
\mu(X_2,X_4) &= a_2\,X_6\\
\mu(X_2,X_5) &= a_3\,X_6\\
\mu(X_2,X_7) &= a_4\,X_6\\
\mu(X_2,X_8) &= a_4\,X_7 + a_5\,X_6 + a_6\,X_5 + a_7\,X_4 + a_8\,X_3 + a_9\,X_2\\[1em]
\mu(X_3,X_4) &= b_1\,X_6\\
\mu(X_3,X_5) &= b_2\,X_6\\
\mu(X_3,X_7) &= b_3\,X_6\\
\mu(X_3,X_8) &= b_3\,X_7 + b_4\,X_6 + b_5\,X_5 + b_6\,X_4 + b_7\,X_3 + b_8\,X_2\\[1em]
\mu(X_4,X_5) &= c_1\,X_6\\
\mu(X_4,X_7) &= c_2\,X_6\\
\mu(X_4,X_8) &= c_2\,X_7 + c_3\,X_6 + c_4\,X_5 + c_5\,X_4 + c_6\,X_3 + c_7\,X_2\\[1em]
\mu(X_5,X_7) &= d_1\,X_6\\
\mu(X_5,X_8) &= d_1\,X_7 + d_2\,X_6 + d_3\,X_5 + d_4\,X_4 + d_5\,X_3 + d_6\,X_2\\[1em]
\mu(X_7,X_8) &= f_1\,X_6 + f_2\,X_5 + f_3\,X_4 + f_4\,X_3 + f_5\,X_2
\end{aligned}
$$

Un razonamiento como los de secciones anteriores, permite siempre suponer

$$a_4 = b_3 = c_2 = b_2 = a_3 = a_2 = f_1 = 0$$

Imponiendo las condiciones de la sucesión característica sobre $\mathrm{ad}(X_1 + \alpha X_8)$, se deducen las relaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_6 & = & a_7 & = & a_8 & = & a_9 & = & 0 \\ b_5 & = & b_6 & = & b_7 & = & b_8 & = & 0 \\ c_4 & = & c_5 & = & c_6 & = & c_7 & = & 0 \\ d_3 & = & d_4 & = & d_5 & = & d_6 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_5 f_2 & = & a_5 f_3 & = & a_5 f_4 & = & a_5 f_5 & = & 0 \\ b_4 f_2 & = & b_4 f_3 & = & b_4 f_4 & = & b_4 f_5 & = & 0 \\ c_4 f_2 & = & c_5 f_3 & = & c_6 f_4 & = & c_7 f_5 & = & 0 \\ d_3 f_2 & = & d_4 f_3 & = & d_5 f_4 & = & d_6 f_5 & = & 0 \end{array}$$

La ley se reduce entonces a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu(X_1, X_7) & = & X_6, \\ \mu(X_1, X_8) & = & X_7, \\ & & \\ \mu(X_2, X_3) & = & a_1 X_6, \\ \mu(X_2, X_4) & = & a_2 X_6, \\ \mu(X_2, X_5) & = & a_3 X_6, \\ \mu(X_2, X_8) & = & a_5 X_6, \\ & & \\ \mu(X_3, X_4) & = & b_1 X_6, \\ \mu(X_3, X_8) & = & b_4 X_6, \\ & & \\ \mu(X_4, X_5) & = & c_1 X_6, \\ \mu(X_4, X_8) & = & c_3 X_6, \\ & & \\ \mu(X_5, X_7) & = & d_1 X_6, \\ \mu(X_5, X_8) & = & d_1 X_7 + d_2 X_6, \\ & & \\ \mu(X_7, X_8) & = & f_2 X_5 + f_3 X_4 + f_4 X_3 + f_5 X_2 \end{array} \right.$$

Tomamos así la aplicación bilineal alternada definida por $\varphi(X_3, X_8) = X_2$ y se tiene que $\mu + \epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y que es de sucesión característica superior. Al perturbarse en una superior, es adherente a la órbita de la perturbada, y ésta está en una de las componentes determinadas previamente. □

3.11 Sucesión característica $(2,2,2,1,1)$

Proposición. *El abierto* $U^8_{(2,2,2,1,1)}$ *está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, cualquier ley de esa sucesión característica es isomorfa a una de la forma

$$\begin{aligned}
\mu(X_1,X_4) &= X_3\\
\mu(X_1,X_6) &= X_5\\
\mu(X_1,X_8) &= X_7\\[1ex]
\mu(X_2,X_4) &= a_1\,X_7 + a_2\,X_5 + a_3\,X_3\\
\mu(X_2,X_6) &= a_4\,X_7 + a_5\,X_5 + a_6\,X_3\\
\mu(X_2,X_8) &= a_7\,X_7 + a_8\,X_5 + a_9\,X_3\\[1ex]
\mu(X_4,X_6) &= c_1\,X_7 + c_2\,X_5 + c_3\,X_3 + c_4\,X_2\\
\mu(X_4,X_8) &= c_5\,X_7 + c_6\,X_5 + c_7\,X_3 + c_8\,X_2\\[1ex]
\mu(X_6,X_8) &= b_1\,X_7 + b_2\,X_5 + b_3\,X_3 + b_4\,X_2
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones derivadas de la sucesión característica obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
c_4a_4 &=& c_4a_5 &=& c_4a_6 &=& 0\\
c_4a_1 &=& c_4a_2 &=& c_4a_3 &=& 0\\[1ex]
c_8a_1 &=& c_8a_2 &=& c_8a_3 &=& 0\\
c_8a_7 &=& c_8a_8 &=& c_8a_9 &=& 0\\[1ex]
b_4a_4 &=& b_4a_5 &=& b_4a_6 &=& 0\\
b_4a_7 &=& b_4a_8 &=& b_4a_9 &=& 0
\end{array}$$

Es evidente la simetría que existe entre b_4, c_8 y c_4; esto nos permite que si uno de ellos es no nulo, los otros se pueden suponer nulos.

Consideramos entonces dos casos:

Primer caso: uno de los tres es nulo

Supongamos $b_4 \neq 0$ y $c_8 = c_4 = 0$ (los otros casos se tratan de forma simétrica); de las relaciones anteriores queda

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$$

Las condiciones de Jacobi implican entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y la ley queda

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_4) &= X_3, \\ \mu(X_1, X_6) &= X_5, \\ \mu(X_1, X_8) &= X_7, \\ \mu(X_4, X_6) &= c_1 X_7 + c_2 X_5 + c_3 X_3, \\ \mu(X_4, X_8) &= c_5 X_7 + c_6 X_5 + c_7 X_3, \\ \mu(X_6, X_8) &= b_4 X_2 \end{cases}$$

Tomamos ahora la aplicación bilineal alternada definida por $\varphi(X_3, X_4) = X_5$ y se tiene que $\mu + \epsilon\varphi$ es una perturbación de μ y es de sucesión característica superior.

Falta solamente considerar el caso en que los tres sean nulos:

Segundo caso: los tres son nulos

Si $c_4 = b_4 = c_8 = 0$ se puede suponer que $a_2 = a_3 = 0$ y entonces tomando la aplicación bilineal alternada definida por

$$\varphi(X_4, X_6) = -a_1 X_1$$
$$\varphi(X_6, X_8) = X_2$$

se tiene que $\mu + \epsilon\varphi$ es una perturbación de μ y es de sucesión característica superior.

En todos los casos es adherente a la órbita de una familia de sucesión característica superior, y por tanto está en las componentes irreducibles determinadas anteriormente. □

3.12 Sucesión característica $(2,2,1,1,1,1)$

Proposición. *El abierto* $U^8_{(2,2,1,1,1,1)}$ *está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN: $N^8_{(2,2,1,1,1,1)}$ está contenido en la órbita de la familia

$$\begin{aligned}
\mu(X_1,X_6) &= X_5\\
\mu(X_1,X_8) &= X_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_2,X_3) &= a_1\,X_7 + a_2\,X_5\\
\mu(X_2,X_4) &= a_3\,X_7 + a_4\,X_5\\
\mu(X_2,X_6) &= a_5\,X_7 + a_6\,X_5 + a_7\,X_4 + a_8\,X_3 + a_9\,X_2\\
\mu(X_2,X_8) &= a_{10}\,X_7 + a_{11}\,X_5 + a_{12}\,X_4 + a_{13}\,X_3 + a_{14}\,X_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_3,X_4) &= b_1\,X_7 + b_2\,X_5\\
\mu(X_3,X_6) &= b_3\,X_7 + b_4\,X_5 + b_5\,X_4 + b_6\,X_3 + b_7\,X_2\\
\mu(X_3,X_8) &= b_8\,X_7 + b_9\,X_5 + b_{10}\,X_4 + b_{11}\,X_3 + b_{12}\,X_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_4,X_6) &= c_1\,X_7 + c_2\,X_5 + c_3\,X_4 + c_4\,X_3 + c_5\,X_2\\
\mu(X_4,X_6) &= c_6\,X_7 + c_7\,X_5 + c_8\,X_4 + c_9\,X_3 + c_{10}\,X_2
\end{aligned}$$

$$\mu(X_5,X_8) = d_1\,X_7 + d_2\,X_5 + d_3\,X_4 + d_4\,X_3 + d_5\,X_2$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_6,X_7) &= -d_1\,X_7 - d_2\,X_5 - d_3\,X_4 - d_4\,X_3 - d_5\,X_2\\
\mu(X_6,X_8) &= e_1\,X_7 + e_2\,X_5 + e_3\,X_4 + e_4\,X_3 + e_5\,X_2
\end{aligned}$$

Consideramos un vector $Y_1 = X_1 + \alpha X_8$ con m genérico. Entonces una cadena de vectores mediante:

$$\begin{array}{lllll} Y_5 & = & \mu(Y_1,X_6) & = & -\alpha e_1 X_7 - (\alpha e_2 - 1) X_5 - \alpha e_3 X_4 - \alpha e_4 X_3 - \alpha e_5 X_2 \\ Y_4 & = & \mu(Y_1,Y_5) & = & (\alpha d_1 + \alpha^2\beta_1) X_7 + (\alpha d_2 + \alpha^2\beta_2) X_5 + (\alpha d_3 + \alpha^2\beta_3) X_4 \\ & & & & +(\alpha d_4 + \alpha^2\beta_4) X_3 + (\alpha d_5 + \alpha^2\beta_5) X_2 \end{array}$$

donde los β_i dependen de las constantes de estructura. Si alguno de los d_i, $1 \leq i \leq 5$ fuese no nulo, se podría elegir α de modo que los vectores Y_i fuesen linealmente independientes, lo que contradeciría el que la sucesión característica fuese $(2,2,1,1,1,1)$. Así tenemos que $d_i = 0$, $1 \leq i \leq 5$.

Un razonamiento similar se hace con los a_i, b_i y los c_i, con lo que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_9 & = & a_{14} & = & a_8 & = & a_{13} & = & a_7 & = & a_{12} & = & 0 \\ b_7 & = & b_{12} & = & b_6 & = & b_{11} & = & b_5 & = & b_{10} & = & 0 \\ c_5 & = & c_{10} & = & c_4 & = & c_9 & = & c_3 & = & c_8 & = & 0 \\ d_1 & = & d_2 & = & d_3 & = & d_4 & = & d_5 & & & = & 0 \end{array}$$

Por otra parte, siempre podemos conseguir $e_3 = e_4 = 0$, con lo que la ley queda (renumerando algunas de las constantes de estructura)

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mu(X_1,X_6) & = & X_5, \\ \mu(X_1,X_8) & = & X_7, \\ \mu(X_2,X_3) & = & a_1 X_7 + a_2 X_5, \\ \mu(X_2,X_4) & = & a_3 X_7 + a_4 X_5, \\ \mu(X_2,X_6) & = & a_5 X_7 + a_6 X_5, \\ \mu(X_2,X_8) & = & a_7 X_7 + a_8 X_5, \\ \mu(X_3,X_4) & = & b_1 X_7 + b_2 X_5, \\ \mu(X_3,X_6) & = & b_3 X_7 + b_4 X_5, \\ \mu(X_3,X_8) & = & b_5 X_7 + b_6 X_5, \\ \mu(X_4,X_6) & = & c_1 X_7 + c_2 X_5, \\ \mu(X_4,X_8) & = & c_3 X_7 + c_4 X_5, \\ \mu(X_6,X_8) & = & e_1 X_7 + e_2 X_5 + e_3 X_2 \end{array} \right.$$

Utilizando las condiciones de Jacobi se tienen las restricciones:

$$a_2 e_3 = a_4 e_3 = a_1 e_3 = a_3 e_3 = 0$$

y de nuevo con la sucesión característica

$$a_5 e_3 = a_7 e_3 = a_6 e_3 = a_8 e_3 = 0$$

Si consideramos ahora la aplicación bilineal alternada definida por

$$\varphi(X_6, X_8) = X_1$$

$\mu + \epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y pertenece a otra sucesión característica. □

3.13 Sucesión característica $(2,1,1,1,1,1,1)$

Proposición. *El abierto $U^8_{(2,1,1,1,1,1,1)}$ está contenido en la unión de las componentes irreducibles determinadas anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN: $N^8_{(2,1,1,1,1,1,1)}$ está contenido en la órbita de la familia

$$\mu(X_1, X_8) = X_7$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_2, X_3) &= a_1\, X_7 \\
\mu(X_2, X_4) &= a_2\, X_7 \\
\mu(X_2, X_5) &= a_3\, X_7 \\
\mu(X_2, X_6) &= a_4\, X_7 \\
\mu(X_2, X_8) &= a_5\, X_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_3, X_4) &= b_1\, X_7 \\
\mu(X_3, X_5) &= b_2\, X_7 \\
\mu(X_3, X_6) &= b_3\, X_7 \\
\mu(X_3, X_8) &= b_4\, X_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_4, X_5) &= c_1\, X_7 \\
\mu(X_4, X_6) &= c_2\, X_7 \\
\mu(X_4, X_8) &= c_3\, X_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X_5, X_6) &= d_1\, X_7 \\
\mu(X_5, X_8) &= d_2\, X_7
\end{aligned}$$

$\mu(X_6, X_8) = e_1\, X_7$

$\mu(X_7, X_8) = f_1\, X_7$

Si consideramos ahora la aplicación bilineal alternada definida por

$$\varphi(X_2, X_8) = X_1$$

$\mu + \epsilon\,\varphi$ es una perturbación de μ y pertenece a otra sucesión característica. □

3.14 Sucesión característica $(1,1,1,1,1,1,1,1)$

El álgebra de esta sucesión característica es abeliana y de forma evidente se puede perturbar en las sucesiones características superiores.

Bibliografía

[1] J.M. Ancochea Bermúdez, J.R. Gómez Martín Actas de las 15 jornadas Hispano-Lusas, Evora, 1990.

[2] J.M. Ancochea Bermúdez, M. Goze *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7* C.R. Acd. Sc. Paris, t. 302, Série I, nº 17, 1986.

[3] J.M. Ancochea Bermúdez, M. Goze *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8.* Archiv der Mathematik, Vol. 50, 511-525. 1988.

[4] J.M. Ancochea Bermúdez, M. Goze *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7.* Archiv der Mathematik, Vol. 52, nº 2, 175-185. 1989.

[5] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie* ch. 1. Hermann. Paris 1960.

[6] B. Buchberger *Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory.* N.K.Bose (ed.), Multidimensional Systems Theory, 184-232. Reidel Publ. Co. 1985.

[7] R. Carles *Introduction aux deformations d'algebres de Lie de dimension finie.* Preprint 19. Univ. Poitiers.

[8] F.J. Castro Jiménez *Geometría Algebraica y Algebra Computacional.* Por publicar (versión preliminar).

[9] A. Galligo *Algorithmes de calcul de base standards.* Prepublication de l'Université de Nice, nº 9 (1983).

[10] M. Gerstenhaber *Perturbations of Lie algebra structures* On the deformation of rings and algebras. Ann. of Math. 79 (1964) p. 59-103.

[11] J.R. Gómez Martín, F.J. Echarte Reula *Classification of Complex Filiform Nilpotent Lie Algebras of dimension 9.* Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Università Cagliari. Vol. 60, Fasc. 1 (1991).

[12] M. Goze *Perturbations of Lie algebra structures.* NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phis. Sci. 197 (1988).

[13] M. Goze, J.M. Ancochea Bermúdez *On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8* Journal of Pure and Applied Algebra 77 (1992) 131-140. North-Holland.

[14] M. Goze, A. Makhlouf *La cohomologie de Chevalley d'une algèbre de Lie* Univ. Louis Pasteur. Institut de Recherche Mathematique avancee. Preprint.

[15] M. Goze, A. Makhlouf *Calcul du* $H^2(\mathrm{g},\mathrm{g})$ *sur IBMPC* Preprint, Univ. Mulhouse, 1988.

[16] F. Grunewald, O'Halloran *Varieties of nilpotent algebras of dimension less than six.* J. Algebra, 112, 1988, p. 137.

[17] Yu. B. Hakimjanov *The variety of nilpotent Lie algebra laws.* Geometriae Dedicata t.11, 1991.

[18] Yu. B. Hakimjanov, J.M. Ancochea Bermúdez, M. Goze *Sur la réducibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes complexes* C.R. Acad. Sci. paris, t. 313, Série I, p. 59-62, 1991.

[19] Yu. B. Hakimjanov, M. Goze, J.M. Ancochea Bermúdez *Sur les composantes de la variété des algèbres de Lie nilpotentes* 1992. Por aparecer.

[20] A.A. Kirillov, Yu. Neretin *The variety* A_n *of* n*-dimensional Lie algebra structures.* A.M.S. Transl. (2), 1987, p.137.

[21] M. Lejeune–Jalabert *Effectivitè de calculs polynomiaux.* Cours de D.E.A. 1984/85. Institut Fourier.

[22] R. Lutz, M. Goze *Non Standard Analysis, a practical guide with applications.* Lecture Notes 881. Springer-Verlag. (1981).

[23] R. Maeder *Programming in Mathematica.* Addison-Wesley, Second Edition, 1991.

[24] E. NELSON *Internal Set Theory: a new approach to Non Standard Analysis.* Bull. Amer. Math. Soc. 83, p. 1165-1198. (1977).

[25] A. ROBINSON *Non Standard Analysis.* North-Holland. Amsterdam. (1966).

[26] C. SEELEY *A component of non-filiform nilpotent Lie algebras.* 1991. Por aparecer.

[27] M. VERGNE *Variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Thèse troisième cycle. Paris 1966.

[28] M. VERGNE *Réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes.* C.R. Acad. Sci. paris, t. 263,A,p4-6, 1966.

[29] M. VERGNE *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Bull. Soc. Math. France, 98, 1970, p. 81-116.

[30] S. WOLFRAM *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.* Addison-Wesley, Second Edition, 1991.

Gerardo Valeiras Reina

Sobre las Componentes irreductibles de la variedad de leyes de Algebras de Lie nilpotentes de dimensión 8.

apto "cum laude".

5 Mayo 92.

José d. Vicente