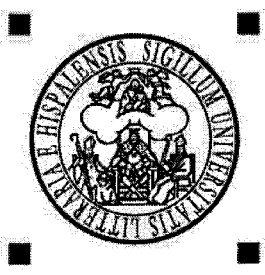


123728462

Consulta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



UNIVERSIDAD
de SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Tesis
80

PROBLEMAS EXTREMALES
EN TEORÍA DE GRAFOS

ESCUELA TECNICA SUPERIOR	
INGENIERIA INFORMATICA	
- BIBLIOTECA -	
N.º ORDEN GENERAL	011509594
OBRA N.º TOMO.....
SIGNATURA.....	
N.º EN ESPECIALIDAD
EJEMPLAR NUMERO	R. 14.8321

Pedro García Vázquez
Sevilla, 2003



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 065 número 236 del libro
correspondiente.

Sevilla, 17 de Julio de 2003

El Jefe del Negociado de Tesis

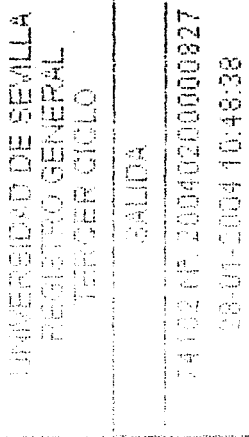
Álvaro López





UNIVERSIDAD
de SEVILLA

RECTORADO



Sevilla, 27 de enero de 2004
Ref: Negociado de Tesis EL/CH
Asunto: Enviando Tesis
Doctorales Leídas

Ilmo Sr. Director de la
Biblioteca de la E.T.S. de
Ingeniería Informática
Universidad de Sevilla

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESÍS LEIDAS

1. García Vázquez, Pedro .
2. Ruíz Cortés, David
3. Valenzuela Muñoz, Jesús



La Jefa de Sección de Doctorado

Fdo.: Yolanda Díaz Rolando

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

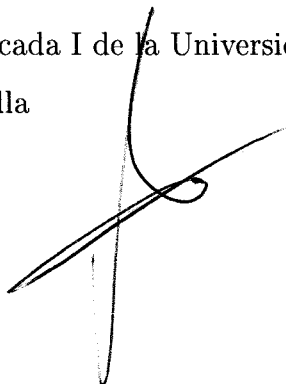
Departamento de Matemática Aplicada I

PROBLEMAS EXTREMALES
EN TEORÍA DE GRAFOS

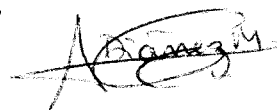
Memoria presentada por
Pedro García Vázquez
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

V^o B^o
de los Directores

Fdo. Martín Cera López
Catedrático E. Universitaria del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de
Sevilla



Fdo. Ana Rosa Diánez Martínez
Profesora Titular de Universidad del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de
Sevilla



Sevilla, Julio de 2003



A MI FAMILIA



*Ningún descubrimiento se haría
ya si nos contentásemos con
lo que sabemos.*

LUCIO ANNEO SÉNECA



Resumen

Uno de los problemas más representativos dentro de la Teoría Extremal de Grafos consiste en el estudio de los valores de la función $ex(n; F)$, es decir, el tamaño máximo de un grafo de orden n sin contener a F como subgrafo. Es en este sentido donde podemos encuadrar los objetivos de esta tesis.

Concretamente, abordaremos dos extensiones del modelo. Una de ellas consiste en el estudio de la función $ex(n; TK^p)$, que denota el número máximo de aristas de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo una subdivisión del grafo completo de orden p . En la otra, mediante la función $ex(n; K_{s,t})$ buscaremos maximizar el tamaño de un grafo de orden n sin contener como subgrafo al grafo bipartito $K_{s,t}$.

Como veremos a lo largo de esta memoria, estamos ante dos problemas extremales para los que se conocen sólo respuestas parciales y que han sido tratados principalmente desde un punto de vista asintótico, esto es, para valores suficientemente grandes de n . De hecho, los resultados han ido encaminados a la búsqueda de cotas para dichas funciones.

Nuestro propósito es profundizar en la búsqueda de valores exactos para las funciones $ex(n; TK^p)$ y $ex(n; K_{s,t})$. Probaremos resultados de estructura que nos llevarán a encontrar acotaciones que conducen a tales valores exactos. Finalmente, y para los casos en que tales valores sean encontrados, caracterizaremos lo que se conoce como familia de grafos extremales y que denotaremos por $EX(n; TK^p)$ y $EX(n; K_{s,t})$ respectivamente.



*La inspiración existe, pero
tiene que encontrarte trabajando.*

PABLO RUIZ PICASSO

Agradecimientos

Debo iniciar estas líneas expresando mi más sincera gratitud a la profesora Ana Rosa Diánez Martínez por el apoyo incondicional que siempre me dispensó y por su inestimable ayuda para que este trabajo saliera adelante.

Quisiera también que en este capítulo de agradecimientos ocupara un lugar excepcional el profesor Martín Cera López. Él fue quien me animó a iniciar esta andadura y junto a él he tenido el honor de compartir estos últimos dos años de trabajo inolvidables. Sus aportaciones, su ayuda y su ánimo han sido fundamentales para mí, pero nada es comparable a la virtud de haber contado con algo tan preciado como un amigo.

No puedo olvidarme de mis compañeros de la E.U. de Ingeniería Técnica Agrícola y, en general, del resto de compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I, por la acogida que tuve en su momento y por el gran apoyo que de ellos he recibido durante este tiempo.

Finalmente, mi recuerdo más especial debe ser para mi familia. No ha sido fácil el camino que juntos hemos recorrido para alcanzar este momento, ni pocas las adversidades que hemos tenido que superar. Sin embargo, siempre tuve su ánimo, su comprensión y su apoyo, y es por ello por lo que, aunque sea de modo testimonial, me gustaría que por un momento ellos fueran los verdaderos protagonistas de este feliz desenlace.



Introducción

La Teoría Extremal de Grafos es una disciplina enmarcada dentro de la Teoría de Grafos en la que se estudian las posibles relaciones entre diferentes invariantes de un grafo, como orden, tamaño, valencia media, conectividad,... y ciertas propiedades de los grafos, como pueden ser la contención de un subgrafo prohibido, ciclos de longitud dada,... Tales relaciones son planteadas en los que se conocen como *Problemas Extremales en Grafos*.

El inicio de esta Teoría se remonta a la década de los años 30 del siglo XX, cuando K. Wagner en su tesis doctoral (1935) relaciona el Teorema de los Cuatro Colores con el problema de estudiar los grafos sin contener un subgrafo contractible a K^5 . Sin embargo, el resultado extremal más significativo dentro de esta teoría es el conocido como *Teorema de Turán* [50] y [51], demostrado en 1941 y en el que se da respuesta a la cuestión de determinar el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo al grafo completo de orden p , representado por la función $ex(n; K^p)$. Este problema, del que sólo era conocida la solución para $p = 3$ por W. Mantel [39], es resuelto completamente por P. Turán [50] y [51], quien demuestra que para cada par de valores n y p , es

$$ex(n; K^p) = t_{p-1}(n)$$

donde $t_{p-1}(n)$ denota al número de aristas del único grafo $(p-1)$ -partito completo cuyos vértices están repartidos entre sus clases del modo más igualitario posible.

En dicho trabajo queda garantizado que dicho grafo es también el único grafo extremal para el problema.

La importancia del Problema de Turán se debe a dos razones fundamentalmente. Por una parte, se trata de uno de los pocos problemas extremales que han quedado resueltos completamente. Pero sobre todo, lo más significativo es el punto de partida que supuso para la expansión de la Teoría Extremal de Grafos con la aparición de numerosos problemas extremales que en su mayoría son extensiones del mismo, en unos casos, poniendo en relación otros invariantes de un grafo con la contención de K^p como subgrafo, y en otros, relacionando el invariante *tamaño* de un grafo con la contención de grafos bipartitos, ciclos, etc.

Dentro del contexto de garantizar o no la presencia de un determinado subgrafo completo K^p , merece especial atención el problema de encontrar el número cromático de un grafo para que contenga como subgrafo a K^p . Este problema es abordado por Hadwiger [20] en 1943, conjeturando que si G es un grafo con número cromático al menos p entonces G contiene un subgrafo contractible a K^p . Para valores pequeños de p surgen pronto respuestas que confirman dicha conjetura. El resultado es trivial para $p = 1, 2$ y 3 (ver [11]) y para $p = 4$ es probado por G.A. Dirac en [12]. Asimismo, del trabajo de K. Wagner (1937) en [52] se deduce claramente que la Conjetura de Hadwiger para $p = 5$ es equivalente al Teorema de los Cuatro Colores. Otras pruebas de dicha equivalencia surgen de los aportaciones de R. Halin [22] y [23], de O. Ore [41] y, posteriormente, de H.P. Young [54]. Por tanto, el caso $p = 5$ queda resuelto cuando K. Appel y W. Haken [1] y [2] en 1976 demuestran el Teorema de los Cuatro Colores. Finalmente, en 1993, Robertson, Seymour y Thomas (ver [11]) logran verificar el caso $p = 6$. El problema sigue abierto para valores de $p \geq 7$ y únicamente se conocen resultados generales que han derivado del trabajo de K. Wagner [53] en el que se prueba que todo grafo con número cromático al menos 2^p contiene un subgrafo contractible a K^{p+1} . Esto fue generalizado por G.A. Dirac

en [15] y por H.A. Jung en [26] quienes demostraron, de forma independiente, que cualquier grafo con número cromático par suficientemente grande contiene una subdivisión de K^p .

En 1961 G. Hajós [21] plantea la Conjetura de Hadwiger desde un punto de vista topológico, estableciendo como conjetura que todo grafo p -cromático contiene como subgrafo una subdivisión del grafo completo de orden p . Sin embargo, P.A. Catlin [7] en 1979 demuestra que la conjetura anterior es falsa para $p \geq 7$.

Siguiendo en la línea de garantizar o no la presencia de un determinado subgrafo completo, B. Grünbaum [19] se plantea en 1967 relacionar dicha propiedad con otro de los invariantes de un grafo: el *grado de conectividad*. Sugiere así la idea de probar que todo grafo finito con un grado de conectividad suficientemente grande contiene como subgrafo una subdivisión de K^p . Se trata de una cuestión más para la cual no se ha encontrado respuesta hasta el momento. De hecho, parece muy difícil que las técnicas clásicas de conectividad, como los Teoremas de Menger [40], puedan ayudar a encontrar la solución. Sólo se sabe por W. Mader [33] que, al menos para grafos infinitos, el resultado es falso.

En cualquier caso, la visión topológica de un problema extremal llevada a cabo por Hajós, abre las puertas a una de las extensiones del Problema de Turán más estudiadas a lo largo de los últimos 40 años: el *Problema Topológico de Turán*, en el que se aborda la búsqueda del máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo una subdivisión de K^p . El problema se inicia cuando W. Mader [32] y P. Erdős y A. Hajnal [17], de modo independiente, conjeturan la existencia de una función $f(p)$ para la cual todo grafo de orden n y tamaño, al menos, $f(p)n$ contiene como subgrafo una subdivisión de K^p . En otras palabras, se pretende acotar superiormente mediante una función $f(p)$ la valencia media de los grafos que no contienen una subdivisión de K^p como subgrafo.

El primero en proporcionar una primera respuesta para dicha función es W. Mader [32] en 1967, quien demuestra que $f(p) = (p-1) \cdot 2^{\binom{p-1}{2}-1}$ es suficiente. Sólo unos años más tarde, en 1972, el mismo autor en [35] consigue una mejora, dejando su valor en $f(p) = 3 \cdot 2^{p-3} - p$. Las mejoras posteriores corresponden a trabajos recientes, como vemos a continuación. En el primero de ellos, J. Komlós y E. Szemerédi [29], usando propiedades sobre grafos dispersos, prueban que para cada $\eta > 14$ existe una constante c_η de modo que $f(p) = c_\eta p^2 (\log p)^\eta$ es válida. Independientemente, N. Alon y P.D. Seymour [29] observan que un teorema de N. Robertson y P.D. Seymour [45], combinado con resultados de W. Mader [34], A. Kostochka [31] y A. Thomason [47], permite deducir la cota $f(p) = cp^2 (\log p)^{1/2}$. Finalmente, en trabajos independientes de B. Bollobás y A. Thomason [5] y de J. Komlós y E. Szemerédi [30] se logra la mejor aproximación conocida hasta el momento, dejando su valor en $f(p) = 256p^2$ y probándose que dicha cota superior es la mejor posible asintóticamente.

Como se puede comprobar, todos los trabajos citados se caracterizan por abordar la búsqueda de cotas superiores para la función $ex(n; TK^p)$ desde un punto de vista asintótico, es decir, fijando un valor para p y tomando valores suficientemente grandes de n . De hecho, dichas cotas no tienen sentido para valores cercanos de n y p . Más aún, a pesar de ser imposible mejorar asintóticamente la acotación $256p^2n$, no se han encontrado pares (n, p) para los cuales dicha cota conduzca al valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$.

Dejando de lado los casos triviales para $p \leq 3$, $ex(n; TK^3) = n-1$, ($n \geq 3$), el balance de resultados en lo que a valores exactos se refiere se inicia con el caso $p = 4$, $ex(n; TK^4) = 2n - 3$, ($n \geq 4$), probado por G.A. Dirac [13] en 1960. Sólo cuatro años más tardes, para el caso $p = 5$, el mismo autor en [14] conjetura que $ex(n; TK^5) = 3n - 6$. Ésta ha sido una de las conjeturas de mayor relevancia dentro de la Teoría Extremal de Grafos, no sólo por su interés en sí mismo, sino también por la vinculación que supone de la Teoría Extremal con los problemas

de inmersión de grafos. En este sentido, el Teorema de Kuratowski [3] afirma que un grafo admite una inmersión plana si y sólo si no contiene como subgrafo una subdivisión de K^5 o $K_{3,3}$, mientras que la Conjetura de Dirac da una condición sobre el tamaño de un grafo de orden n para asegurar que contiene una subdivisión de K^5 . La primera aproximación a la prueba de dicha conjetura es dada por C. Thomassen [48] en 1974 probando que $ex(n; TK^5) \leq 4n - 10$. Posteriormente, en 1997, el mismo autor [49] rebaja la cota a $ex(n; TK^5) \leq \frac{7}{2}n - 7$. Finalmente, W. Mader [36] en 1998, consigue verificar la conjetura, caracterizando además la familia extremal de grafos correspondiente en [37].

El conjunto de valores exactos se completa con el trabajo de M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [9] en el que por primera vez se aborda la búsqueda de soluciones para infinitos valores relacionados de n y p , simultáneamente. De este modo, los autores encuentran la solución exacta de la función $ex(n; TK^p)$ para todo par (n, p) perteneciente al sector del plano determinado por la expresión $\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil \leq p < n$ (Ver Tabla 1) y completan los resultados con un segundo trabajo [10] en el que llevan a cabo la caracterización de la correspondiente familia extremal de grafos cuando $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < n-3$. En esta memoria nos planteamos profundizar aún más en la búsqueda de soluciones para este problema extremal. Serán encontrados nuevos valores exactos para la función extremal $ex(n; TK^p)$ en sucesivos sectores del plano (n, p) (ver Tabla 1) y será caracterizada su correspondiente familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales.

Otro de los contextos dentro de los cuales han sido formuladas también extensiones del Problema de Turán es aquel en el que se relaciona el invariante *número de aristas* con la propiedad de contener al grafo bipartito completo $K_{s,t}$. En este sentido surgen dos problemas extremales, el *Problema de Turán sobre grafos bipartitos* y el *Problema de Zarankiewicz*, planteados en la década de los años 40 del pasado siglo (ver [44]). En el primero de ellos se buscan valores exactos para la función $ex(n; K_{s,t})$, que representa el máximo número de aristas

de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo al grafo bipartito completo con s y t vértices, respectivamente, en cada una de sus clases. En el segundo se estudia el tamaño máximo $z(n, m, s, t)$ de un grafo bipartito con n y m vértices en sus clases sin contener como subgrafo inducido a $K_{s,t}$.

Los escasos avances conseguidos en ambos problemas se han sucedido de modo paralelo debido a la estrecha relación entre ambas funciones extremales. En efecto, como queda de manifiesto en [44], las funciones $ex(n; K_{s,t})$ y $z(n, n; s, t)$ están vinculadas por la expresión

$$2ex(n; K_{s,t}) \leq z(n, n, s, t) \leq ex(2n; K_{s,t}) \quad (1)$$

y es a partir de tales desigualdades de donde se obtienen las cotas superior e inferior siguientes para la función $ex(n; K_{t,t})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - (t!)^{-2}) n^{2-2/(t+1)} &\leq ex(n; K_{t,t}) \\ &\leq \frac{1}{2} (t-1)^{1/t} (n-t+1) n^{1-1/t} + \frac{1}{2} (t-1)n \quad (2) \\ &< n^{2-1/t} + \frac{t-1}{2} n. \end{aligned}$$

Si bien es cierto que desde un punto de vista asintótico estamos ante acotaciones que aproximan en gran medida el valor exacto de la función $ex(n; K_{s,t})$, en ningún caso conducen a la prueba de valores exactos. Los intentos de alcanzar tales valores exactos se han centrado en los casos $s = t = 2$ y $s = t = 3$. En trabajos independientes, P. Kövari, V.T. Sós y P. Turán [46] (1954) e I. Reiman [43] (1958) logran acotar superiormente la función $z(n, n; 2, 2)$, probando que

$$z(n, n, 2, 2) \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{4n-3}).$$

Este resultado, aplicado sobre la desigualdad (1), permite obtener que

$$ex(n; K_{2,2}) \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3}).$$

Unos años más tarde, en 1966, P. Erdős, A. Rényi y V.T. Sós [42], haciendo uso de ciertos grafos contruidos por P. Erdős, A. Rényi [16], logran observar que

dicha cota superior es asintóticamente lo mejor posible. Demuestran que si q es la potencia de un número primo, entonces se verifica que

$$\frac{1}{2}q(q+1)^2 \leq ex(q^2 + q + 1; K_{2,2}) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2 + \frac{q+1}{2}.$$

Este mismo resultado es obtenido independientemente por W.G. Brown [6] en 1966. Finalmente, en 1983, Z. Füredi [18] logra la consecución de los únicos valores exactos para la función $ex(n; K_{t,t})$ conocidos hasta el momento, probando que

$$ex(q^2 + q + 1; K_{2,2}) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2$$

y que dicha cota es óptima cuando q es la potencia de un número primo.

Con relación al caso $t = 3$, en [6], W.G. Brown consigue probar que $z(n, n, 3, 3)$ es de orden $n^{5/3}$ asintóticamente. Sin embargo, ni para la función $z(n, n; 3, 3)$ ni para la función $ex(n; K_{3,3})$ han sido obtenidos valores exactos hasta el momento.

Como se puede comprobar, el estudio de la función extremal $ex(n; K_{s,t})$ ha sido reducido al caso $s = t$ para poder hacer uso de la relación existente con la función $z(n, n, t, t)$. Aunque los resultados son escasos en ambos problemas, los antecedentes parecen dejar claro que el Problema de Zarankiewicz es quizás más “fácilmente” abordable. En esta memoria pretendemos tratar directamente el estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$. Buscaremos una cota superior para dicha función y probaremos que ésta es óptima para infinitos valores relacionados de n , s y t (Ver Tabla 2).

Como hemos ido comentando en las líneas precedentes, en esta memoria abordaremos el estudio de dos de las extensiones del Problema de Turán. Nos dedicaremos principalmente al estudio de la versión topológica de dicho problema, a través de la búsqueda de valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$ y de la caracterización de su familia extremal de grafos $EX(n; TK^p)$. Finalmente trataremos con la función $ex(n; K_{s,t})$ mediante la búsqueda de una cota superior general

válida para cualesquiera valores n , s y t , probando que, en ciertos casos, dicha cota conduce a la obtención de valores exactos para la citada función extremal.

La memoria se ha desarrollado en cinco capítulos que a continuación detallamos.

El primer capítulo recoge, de forma general, algunas notaciones, definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grafos que necesitaremos a lo largo del desarrollo de los demás capítulos de esta memoria.

Los tres capítulos siguientes estarán dedicados al análisis del Problema Topológico de Turán. En el Capítulo 2 intentaremos depurar la técnica desarrollada en los trabajos de M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10]. Mediante un adecuado ajuste en los cálculos encontraremos el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ para n y p verificando la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$. También caracterizaremos la familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales cuando $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$ y cuando $n-3 \leq p < n$. De este modo, quedará cerrado completamente dicho problema para todo par de valores n y p pertenecientes al sector $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < n$.

En el Capítulo 3 estudiaremos el problema desde una perspectiva diferente. Por una parte, pretendemos analizar el comportamiento de la función extremal $ex(n; TK^p)$ en el plano (n, p) de tal forma que podamos extraer técnicas inductivas en las que apoyarnos para avanzar en la búsqueda de nuevos valores exactos y en la caracterización de sus correspondientes familias extremales. Dado un grafo G perteneciente a la familia extremal $EX(n; TK^p)$, parece lógico pensar que en las familias $EX(n+1; TK^p)$, $EX(n+1; TK^{p+1})$ o $EX(n; TK^{p+1})$ puedan existir sendos grafos con estructura “similar” a la del grafo G . En otras palabras, teniendo en cuenta que $ex(n; TK^p)$ es una función de dos variables, analizaremos su comportamiento a lo largo de determinadas direcciones en el plano (n, p) , y a partir de ellos, deduciremos ciertos resultados de monotonía. Por otra parte,

estableceremos conexiones entre la familia de grafos extremales $EX(n; TK^p)$ y los Grafos de Turán, a partir de las cuales, obtendremos una cota inferior para la correspondiente función $ex(n; TK^p)$. La aplicación conjunta de estos resultados de estructura nos llevará a la prueba del valor exacto de dicha función cuando n y p pertenecen al sector $\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil$.

En el Capítulo 4 completaremos el conjunto de nuevas aportaciones para este problema. La técnica iniciada por M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10], basada en la prueba de un emparejamiento completo en un adecuado grafo bipartito, será puesta en práctica para la obtención de nuevos valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$ cuando n y p verifican la expresión $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Asimismo será caracterizada la correspondiente familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales.

Por último, en el Capítulo 5 nos introduciremos en el estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$. Rompiendo con la idea clásica de trabajar de modo simultáneo con el Problema de Zarankiewicz, lograremos acotar superiormente dicha función para cualquier trío de valores (n, s, t) . Aunque no lograremos mejorar con dicha cota los antecedentes conocidos desde el punto de vista asintótico, si accederemos a la prueba de valores exactos para infinitos valores relacionados de n , s y t .

Todos los trabajos a los que se hará referencia a lo largo del desarrollo de esta memoria, serán finalmente recogidos en un apartado final dedicado a la bibliografía.



Valores de n y p	$ex(n; TK^p)$	Referencia
$p = 3, n \geq 3$	$n - 1$	
$p = 4, n \geq 4$	$2n - 3$	[13]
$p = 5, n \geq 5$	$3n - 6$	[36]
$\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$	$\binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$	[9]
$\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$	[9]
$\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$	Teoremas 2.3.4, 2.3.5 y 3.3.1
$p = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 2)$	Teorema 3.3.1
$\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 2)$	Teorema 4.2.6

Tabla 1: Valores exactos conocidos y nuevas aportaciones para la función $ex(n; TK^p)$.

n, s, t	$ex(n; K_{s,t})$	Referencia
$s = t$ $2t \leq n \leq 2t + 1$	$\binom{n}{2} - (2n - 3t)$	Teorema 5.3.1
s, t impares $n = s + t$	$\binom{n}{2} - \frac{s+t}{2}$	Teorema 5.4.1

Tabla 2: Nuevas aportaciones al cálculo de valores exactos para la función $ex(n; K_{s,t})$.

Contenido

Introducción	i
1 Preliminares	1
1.1 Notaciones y terminología	1
1.2 Problemas extremales en grafos	9
2 Primeros resultados	13
2.1 Introducción	13
2.2 Familia $EX(n; TK^p)$ para $n - 3 \leq p \leq n - 1$	20
2.3 Valores exactos de $ex(n; TK^p)$	27
2.4 Familia extremal $EX(n; TK^p)$	39
2.5 Conclusiones	47

3 Estructura de los grafos extremales	49
3.1 Introducción	49
3.2 Resultados generales	50
3.3 Aplicación de los resultados de estructura	61
3.3.1 Valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$	62
3.3.2 Cota superior para la función $ex(n; TK^p)$	66
3.3.3 Cota inferior para la función $ex(n; TK^p)$	69
3.3.4 Otras aplicaciones	82
3.4 Conclusiones y problemas abiertos	85
4 Estudio de la función $ex(n; TK^p)$	89
4.1 Introducción	89
4.2 Valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$	91
4.3 Caracterización de la familia extremal	112
4.4 Conclusiones y problemas abiertos	126
5 Estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$	129
5.1 Introducción	129
5.2 Grafos (s, t) -sectables	133
5.3 Estudio de la función $ex(n; K_{t,t})$	142
5.3.1 Valores exactos para la función $ex(n; K_{t,t})$	143

5.3.2	Familia extremal $EX(n; K_{t,t})$	145
5.4	Estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$	151
5.5	Conclusiones y problemas abiertos	156

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo estará dedicado a la introducción de todos los conceptos y definiciones generales que serán mencionados a lo largo de esta tesis.

Cualquier manual de introducción a la Teoría de Grafos recoge de modo más detallado aún toda la terminología y los resultados generales que utilizaremos. Entre otros, podemos citar al de Harary [25]; el de König [28], el libro de Teoría Extremal de Grafos de B. Bollobás [4], el de Teoría de Grafos de R. Diestel [11] y el *survey* de W. Mader [38].

1.1 Notaciones y terminología

En esta sección llevaremos a cabo una exposición de los conceptos básicos que serán usados a lo largo de esta memoria, así como de sus correspondientes notaciones.

Un *grafo* G es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos tales que $E \subseteq V \times V$. Los elementos de V se denominan *vértices* del grafo y los de E ,



aristas del grafo. De este modo una arista $e = (u, v) \in E(G)$ de un grafo G es un par no ordenado de elementos de $V(G)$, donde $V(G)$ denota al conjunto de vértices de G y $E(G)$ al conjunto de sus aristas. Se dice que dos vértices son *adyacentes* si existe en el grafo una arista que los une y se dicen *disjuntos* en caso contrario. Un conjunto de vértices se dice *independiente* si dos a dos son disjuntos. Diremos que dos aristas son *incidentes* si comparten un vértice. El número de vértices de un grafo G se conoce como *orden* y se denota indistintamente por $v(G)$ o $|V(G)|$. Por su parte, el número de aristas de G se denomina *tamaño* y se denota indistintamente por $e(G)$ o $|E(G)|$. A lo largo de esta memoria trabajaremos con:

grafos finitos, es decir, aquellos con un número finito de vértices,

grafos simples, esto es, aquellos en los cuales dos vértices pueden estar unidos a lo sumo por una arista,

grafos no dirigidos, es decir, aquellos para los que cualquier arista que una dos vértices a y b se denota indistintamente por (a, b) o por (b, a) .

Asimismo, en ningún caso serán considerados los grafos que permitan la existencia de lazos, esto es, aristas que unan un vértice con sí mismo.

Dado un vértice $v \in V(G)$ se define el *entorno* de v , y se denota por $N_G(v)$, al conjunto de vértices de G que son adyacentes a v . El cardinal de ese conjunto es conocido como *valencia* o *grado* del vértice v y se denota por $\delta_G(v) = |N_G(v)|$. Para cualquier subconjunto $W \subseteq V(G)$, se define el entorno de W como $N_G(W) = \bigcup_{v \in W} N_G(v)$. Al vértice de valencia nula se le llama *aislado*. En relación con el grafo G se distinguen tres tipos de valencia:

Valencia mínima de G : $\delta(G) = \min \{ \delta_G(v) : v \in V(G) \}$.

Valencia máxima de G : $\Delta(G) = \max \{ \delta_G(v) : v \in V(G) \}$.

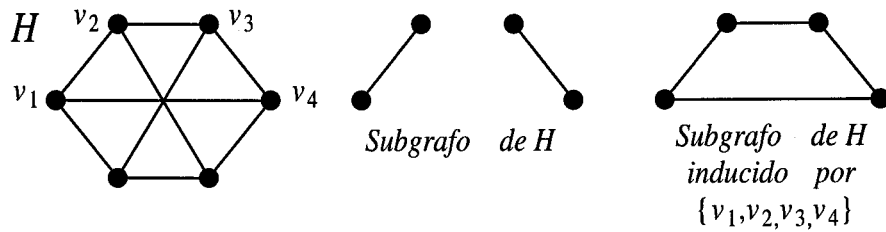


Figura 1.1: Ejemplo de subgrafo y subgrafo inducido.

$$\text{Valencia media de } G : d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)}{v(G)}.$$

Estas cantidades están trivialmente relacionadas por las desigualdades

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G). \quad (1.1)$$

Obsérvese que dichas desigualdades son óptimas sólo cuando todos los vértices del grafo G tienen la misma valencia. En este caso se dice que G es un *grafo regular*. Nótese también que debido a que $e(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \delta(G)$, resulta evidente la identidad

$$d(G) = \frac{2e(G)}{v(G)}.$$

Un *subgrafo* de G es otro grafo H de forma que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Suele ser habitual usar la notación $H \subseteq G$ para decir que H está contenido en G o bien que G contiene a H como subgrafo. Dado un conjunto W de vértices de G , se llama *subgrafo inducido por W* , y se denota por $G[W]$, al subgrafo que tiene por conjunto de vértices W y por aristas todas las aristas de G que tienen ambos vértices en W (ver Figura 1.1). Análogamente, dado un conjunto A de aristas de G , se llama *subgrafo inducido por A* , y se denota por $G[A]$, al subgrafo cuyos vértices son todos aquellos en los que incide alguna de las aristas de A y cuyas aristas son las del conjunto A .

Dados dos grafos H y G se denota por $G + H$ al grafo cuyos vértices son los del conjunto $V(G) \cup V(H)$ y cuyas aristas son todas las de G , todas las de H y todas las aristas que unen cada vértice de G con cada vértice de H . Para cualquier entero positivo k , el grafo $k \cdot H = \underbrace{H + \dots + H}_{k \text{ veces}}$. Se define el *grafo complementario* de un grafo G , y se denota por \overline{G} , como el grafo con $V(\overline{G}) = V(G)$ construido de modo que una arista pertenece a $E(\overline{G})$ si no está en el conjunto de aristas de G (ver Figura 1.2).

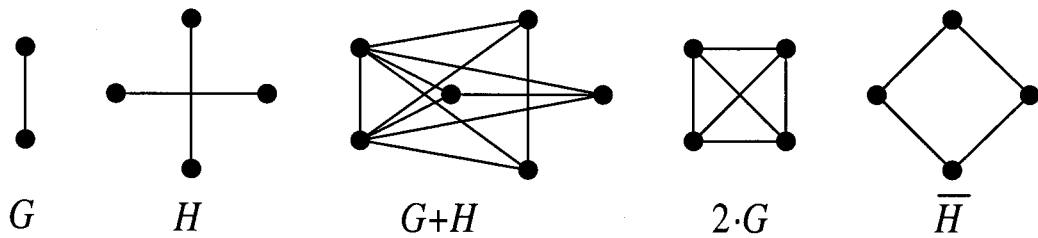


Figura 1.2: Suma, producto por escalar y complementario de un grafo.

Dado G un grafo y v, w dos vértices de G , un *camino* en G que une v con w es un conjunto ordenado $\{v, u_1, \dots, u_n, w\}$ de vértices distintos de G , de modo que cada uno de los vértices u_1, \dots, u_n es adyacente con su anterior y su posterior. La *longitud* del camino es el número de vértices de dicho conjunto menos una unidad. En el supuesto anterior, si $n \geq 2$ y $v = w$ se dice que es un *ciclo*. Dos caminos u_0, u_1, \dots, u_n y v_0, v_1, \dots, v_m se dicen *disjuntos*, si $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \cap \{v_1, \dots, v_{m-1}\} = \emptyset$. Se dice que un grafo es *conexo* cuando dos vértices cualesquiera están unidos por un camino. Todo grafo G no conexo está formado por la unión de dos o más subgrafos conexos disjuntos. A cada uno de tales subgrafos se le conoce como *componente conexa* de G . Si G tiene algún vértice aislado, a éste se le denomina *componente conexa trivial* de G . Dado un grafo G de orden $s+t$, diremos que G es (s, t) -*sectable* si sus componentes conexas pueden ser agrupadas en dos subgrafos disjuntos con s y t vértices, respectivamente. Cuando

$s = t$ diremos que G es *bisectable*.

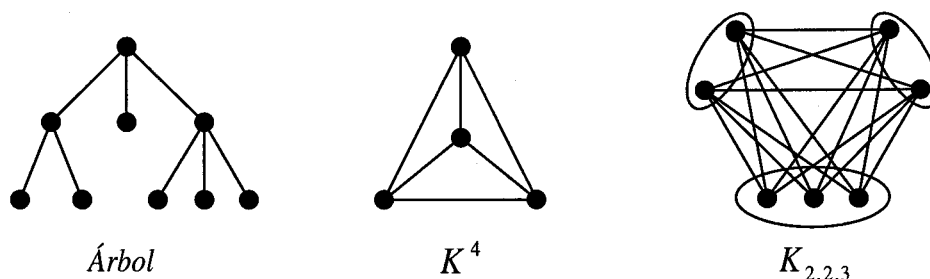


Figura 1.3: Ejemplos de un árbol, un grafo completo y un grafo bipartito.

Un grafo conexo sin contener ciclos se dice que es un *árbol*. Para cualquier grafo conexo G se sabe que

$$e(G) \geq v(G) - 1.$$

Además, la desigualdad es óptima si y sólo si G es un árbol. Un grafo *completo* K^n es aquel con n vértices dos a dos unidos por una arista. Dado un entero $r \geq 2$, un grafo G se dice *r-partito* si el conjunto de vértices admite una partición en r *clases de equivalencia* de tal modo que cada arista une dos vértices de diferente clase, siendo disjuntos por tanto los vértices de la misma clase. A los grafos 2-partitos se les llaman *bipartitos*. Los grafos r -partitos en los que cada par de vértices de diferente clase comparten una arista se dicen *completos*, y se denota por K_{n_1, \dots, n_r} , siendo n_i el número de vértices de cada clase de equivalencia (ver Figura 1.3). Nótese que el grafo complementario de K_{n_1, \dots, n_r} es aquel formado por r grafos completos K^{n_1}, \dots, K^{n_r} .

Un conjunto E' de aristas de un grafo G se denomina *emparejamiento* si dos a dos son no incidentes. Dado B un grafo bipartito de clases X e Y , con $|X| \leq |Y|$, se dice que B contiene un *emparejamiento completo* en X , si existe un



emparejamiento en B de manera que cada vértice de X pertenece a alguna de las aristas del emparejamiento (ver Figura 1.4).

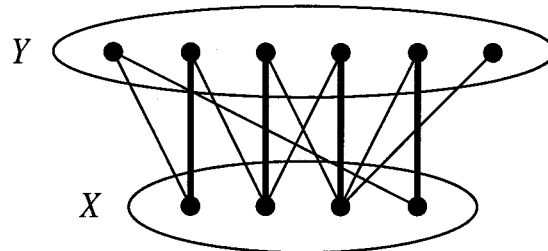


Figura 1.4: Emparejamiento completo en un grafo bipartito

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de emparejamiento completo en un grafo bipartito viene dada por la *Condición de Hall*:

Teorema 1.1.1 [24] *Si B es un grafo bipartito de clases X e Y , entonces B contiene un emparejamiento completo en X si y sólo si para todo $A \subseteq X$ se tiene que $|N_B(A)| \geq |A|$.*

Para un grafo G y una arista $(u, v) \in E(G)$ se dice que tenemos una *subdivisión elemental* de G si la arista (u, v) se sustituye por las aristas (u, w) y (w, v) , donde w es un nuevo vértice que se ha añadido. En general, se dice que el grafo H es una *subdivisión* o *subdivisión topológica* de G y se denota por $H = TG$, si H puede obtenerse de G por medio de subdivisiones elementales. Cuando dos grafos G_1 y G_2 son subdivisión de un mismo grafo se dice que son *homeomorfos* (ver Figura 1.5).

Obsérvese que un grafo H es una subdivisión de otro grafo G si el conjunto de aristas de G puede ser sustituido en H por otro conjunto de caminos disjuntos. En este sentido, $V(G) \subseteq V(H)$, y a los vértices de G identificados en H se les

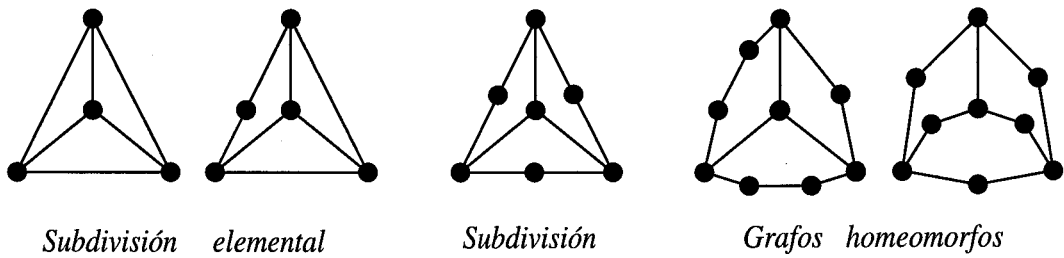


Figura 1.5: Subdivisiones de K^4 .

llaman *vértices branch*. Nótese que los vértices de H que no son branch tienen valencia dos (ver Figura 1.6).

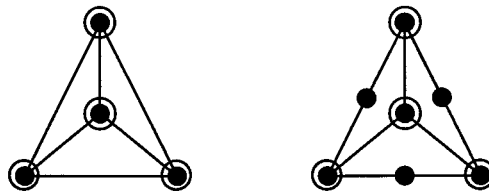


Figura 1.6: Vértices branch en una subdivisión de K^4 .

Finalizaremos la exposición de conceptos y notaciones haciendo referencia a dos definiciones que fueron introducidas en [9]. La primera de ellas se conoce como *sucesión decreciente de vértices*.

Definición 1.1.2 [9] Sean n y r dos enteros positivos con $r \leq n$. Sea H un grafo con n vértices y sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ordenado de r vértices de H . Diremos que dicho conjunto constituye una *sucesión decreciente de vértices* en H si verifica las siguientes propiedades:

1. $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{H_j}(v_{j+1})$ para $j = 1, \dots, r - 1$

2. Para cada m entero positivo, si existe $v \in H_k$ con $k = 1, \dots, r$ tal que $\delta_{H_k}(v) \geq m$ entonces se verifica que $\delta_{H_j}(v_{j+1}) \geq h$ para todo $j = 1, \dots, k$

donde $H_0 = H$ y H_j es el subgrafo de H resultante de eliminar el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_j\}$.

Expresado con otras palabras, una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_r\}$ de un grafo H , es aquella que cumple que v_1 es un vértice de valencia máxima en H , v_2 es un vértice de valencia máxima en $H_1 = H - \{v_1\}$, ..., v_j es un vértice de valencia máxima en $H_{j-1} = H - \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ (ver Figura 1.7).

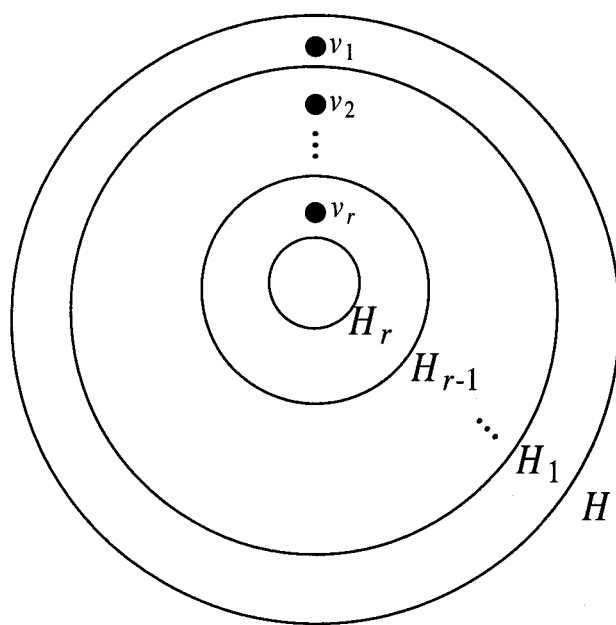


Figura 1.7: v_j es un vértice de valencia máxima en $H_{j-1} = H - \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$.

Obsérvese que este concepto nos proporciona un nuevo método para el recuento de aristas de un grafo. En efecto, $e(H) = \delta_{H_0}(v_1) + e(H_1)$, $e(H) = \delta_{H_0}(v_1) + \delta_{H_1}(v_2) + e(H_2), \dots$, y en general,

$$e(H) = \sum_{i=1}^r \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_r). \quad (1.2)$$

Asociado al concepto de sucesión decreciente, surge una familia de grafos, que denotaremos por \mathcal{C}_r^t , siendo r, t enteros no negativos, que fue introducida en [9] y cuya definición es la siguiente:

Definición 1.1.3 [9] Sean r, t dos enteros no negativos. Se define la familia de grafos \mathcal{C}_r^t como el conjunto de grafos H para los cuales existe una sucesión decreciente de r vértices de tal modo que el número de aristas de H_r es a lo sumo t .

1.2 Problemas extremales en grafos

En esta memoria abordamos el análisis de problemas extremales en grafos que involucran la contención de un subgrafo dado. En general, dados una propiedad \mathcal{P} y un invariante μ sobre una cierta clase de grafos \mathcal{H} , un *problema extremal* para la propiedad \mathcal{P} consiste en encontrar el menor valor m de manera que todo grafo $G \in \mathcal{H}$ con $\mu(G) > m$ posee la propiedad \mathcal{P} .

Particularmente centrados en el problema que nos va a ocupar a lo largo de esta memoria, dado un grafo F , serán considerados:

Propiedad $\mathcal{P} \equiv$ contener un grafo F

Invariante $\mu \equiv$ número de aristas de un grafo

Clase de grafos $\mathcal{H} \equiv$ grafos con n vértices

De este modo denotaremos por $m = ex(n; F)$ al menor entero de modo que todo grafo G de orden n con tamaño $e(G) > ex(n; F)$ contiene a F como subgrafo. En otras palabras, lo que nos planteamos mediante la función $ex(n; F)$ es determinar el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener a F como subgrafo suyo. En los casos en que tales valores exactos han sido

encontrados resulta interesante conocer además cuáles son todos los grafos de orden n y tamaño $ex(n; F)$ que no contienen a F como subgrafo. La familia compuesta por dichos grafos es conocida como *familia extremal* y se denota por $EX(n; F)$.

Dentro del modelo general de problema extremal expuesto anteriormente, el caso particular que resulta de tomar F como el grafo completo de orden p es conocido como *Problema de Turán*. Es decir, se trata de calcular el tamaño máximo $ex(n; K^p)$ de un grafo con n vértices sin contener al grafo completo de orden p como subgrafo. Este problema fue planteado y resuelto en 1941 por el autor al que debe su nombre. La solución viene dada por el número de aristas del único grafo $(p - 1)$ -partito completo cuyos vértices están repartidos entre las clases del modo más igualitario posible (ver Figura 1.8). Además la familia extremal $EX(n; K^p)$ está formada sólo por ese grafo. El valor exacto de la función $ex(n; K^p)$ es conocido como *Número de Turán* y se denota por $t_{p-1}(n)$. Por su parte, al único grafo extremal se llama *Grafo de Turán* y se denota por $T_{p-1}(n)$.

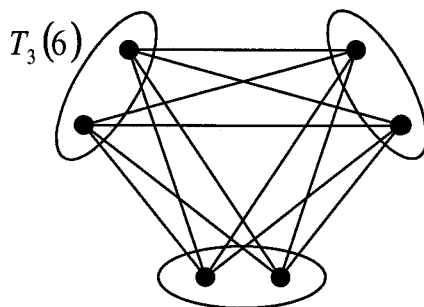


Figura 1.8: Único grafo perteneciente a la familia $EX(6; K^4)$.

A lo largo de este trabajo nos ocuparemos del estudio de dos variantes del Problema de Turán. El primero de ellos es conocido como *Problema Topológico de Turán* y consiste en la búsqueda del valor exacto para la función $ex(n; TK^p)$

que denota al máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo. En la segunda de las extensiones, llamada *Problema de Turán sobre grafos bipartitos*, trabajaremos con la función $ex(n; K_{s,t})$, que representa el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo al grafo bipartito completo con s vértices en una de sus clases y t vértices en la otra.

Capítulo 2

Primeros resultados

Serán encontrados los valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$ para n y p relacionados por la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$ y será caracterizada la familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales cuando n y p pertenecen al sector $n-3 \leq p < n$ o al sector $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$.

2.1 Introducción

Como ya se ha comentado al inicio de esta memoria, la resolución del problema que venimos considerando, exige la consecución de un doble objetivo:

En una primera etapa, se trata de encontrar el valor exacto de la función extremal $ex(n; TK^p)$, que representa el tamaño máximo de un grafo de orden n sin contener una subdivisión del grafo completo con p vértices.

En una segunda etapa, para los casos en que dicho valor exacto ha sido encontrado, resulta interesante conocer cuáles son los grafos de tamaño máximo



$ex(n; TK^p)$ que no contienen al grafo completo K^p como subdivisión. Estamos hablando, pues, de caracterizar la familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales.

Sin duda, nos encontramos ante un problema de enorme complejidad; basta hacer un pequeño repaso histórico del mismo para corroborar este hecho. Desde su planteamiento en la década de los sesenta, ha sido uno de los problemas extremales más conocidos y también uno de los más estudiados dentro de la Teoría Extremal de Grafos. Podemos enumerar una larga lista de trabajos relevantes que han aportado avances significativos, fundamentalmente, en términos de acotaciones asintóticas, pero que en ningún caso conducen a la prueba de nuevos valores exactos.

Teniendo en cuenta que el caso $p = 3$ es trivial y que el caso $p = 4$ se dedujo fácilmente a partir de un resultado de conectividad probado por G.A. Dirac [13] en 1960, todos los esfuerzos estuvieron centrados en demostrar la Conjetura planteada por Dirac $ex(n; TK^5) = 3n - 6$ en [14]. Como ya se ha comentado, C. Thomassen [48] y [49] fue quien más se aproximó con dos acotaciones, una de ellas, $ex(n; TK^5) \leq 4n - 10$, probada en 1974 y la otra, $ex(n; TK^5) \leq \frac{7}{2}n - 7$, en 1997. Finalmente, W. Mader [36] en 1998 consiguió demostrarla caracterizando también la correspondiente familia extremal de grafos $EX(n; TK^5)$.

En cuanto a la aportación de nuevos valores exactos, los últimos trabajos que se conocen son del año 2000 y se deben a M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10], quienes optaron por abordar este problema cuando n y p están relacionados de modo que n está acotado superiormente por una función lineal en p . Así, han encontrado valores exactos cuando $\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil \leq p < n$ y han caracterizado la familia $EX(n; TK^p)$ para $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < n - 3$.

En este capítulo pretendemos completar estos dos últimos trabajos citados con nuevas aportaciones. En primer lugar, caracterizaremos la familia $EX(n; TK^p)$

de grafos extremales para $n - 3 \leq p < n$. Posteriormente nos ocuparemos de encontrar el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ para cualquier par de enteros (n, p) tal que $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$. Y finalmente caracterizaremos la correspondiente familia extremal de grafos cuando $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$.

De este modo este problema extremal quedará completamente cerrado en el sector infinito de valores de n y p verificando la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < n$.

En general, la prueba de valores exactos para la función $ex(n; F)$ se inicia generalmente mediante la búsqueda de grafos de orden n sin contener a F como subgrafo, puesto que ello nos conduce a la obtención de cotas inferiores para la correspondiente función extremal. En el siguiente paso se trata de demostrar que esas cotas son óptimas, para lo cual hay que probar que todo grafo de orden n y cierto tamaño contiene a F como subgrafo. Esta segunda etapa se corresponde con la parte más complicada de este tipo de problemas, puesto que las hipótesis de que se dispone se reducen exclusivamente al orden y tamaño del grafo.

Con relación al Problema Topológico de Turán, para demostrar la existencia de una subdivisión de K^p en un grafo G de orden n debemos encontrar p vértices branch de modo que cada par de ellos estén unidos por un camino y que el conjunto de los $\binom{p}{2}$ caminos sean disjuntos.

La técnica diseñada en los trabajos de M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10], que completaremos en el presente capítulo y desarrollaremos en el Capítulo 4, trata con este problema desde el punto de vista del grafo complementario $H = \overline{G}$. En primer lugar dado un grafo G cualquiera de orden n y cierto tamaño, se hace necesario eliminar un conjunto adecuado de $q = n - p$ vértices en H , $\{v_1, \dots, v_q\}$, de tal modo que las aristas del subgrafo H_q de H inducido por los p vértices restantes puedan ser sustituidas en G por caminos disjuntos cuyos vértices intermedios pertenezcan al conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$.

Esa técnica de eliminación de vértices en H , que pretende dejar al subgrafo H_q con el menor número de aristas posible, viene dada por el concepto de *sucesión decreciente de vértices* (ver Definición 1.1.2).

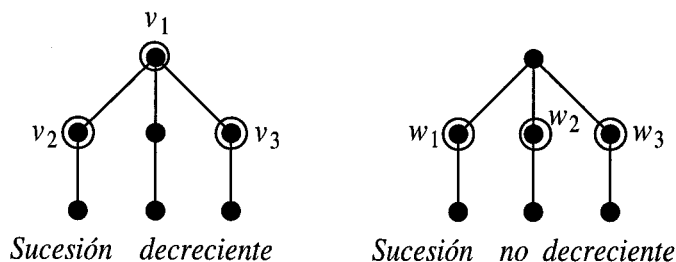


Figura 2.1: Con una sucesión decreciente no siempre se elimina el mayor número de aristas posible.

Si bien es cierto que la sucesión decreciente no siempre conduce a eliminar el mayor número de aristas posible (ver Figura 2.1), sin embargo, la ordenación de mayor a menor de las valencias de los vértices será una de las herramientas claves en futuras demostraciones, puesto que nos permitirá tener siempre una estimación sobre la valencia máxima de los subgrafos H_j antes definidos. En efecto, obsérvese que si para cierto $j \geq 1$, logramos demostrar que $\Delta(H_{j-1}) \geq h$, podremos deducir que

$$\delta_{H_{i-1}}(v_i) \geq h, \text{ para todo } i = 1, \dots, j.$$

Para la estimación del número de aristas del subgrafo H_q resultante, recurriremos a la familia \mathcal{C}_r^t . En efecto, recuérdese que una vez eliminada la sucesión decreciente $\{v_1, \dots, v_q\}$ de H , necesitamos demostrar que las aristas de H_q pueden ser sustituidas en G por caminos disjuntos cuyos vértices intermedios pertenecen al conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$. Es por ello, por lo que el número de aristas de H no puede ser superior a q . Esto, expresado en términos de la Definición 1.1.3, significa que

debe ser $H \in \mathcal{C}_q^q$.

Nótese que las aristas de H_q son, exactamente, las que le faltan al subgrafo de G inducido por los vértices del conjunto $V(G) - \{v_1, \dots, v_q\}$ para ser un grafo completo de orden p . Así que debemos probar que dichas aristas, $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$, con $s \leq q$, se pueden sustituir en G por caminos disjuntos cuyos vértices intermedios pertenecen al conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$. Para ello, construiremos el grafo bipartito B cuyas clases son $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$, definido de modo que un elemento e_i es adyacente en B a otro v_j si y sólo si existe en G el camino $a_i v_j b_i$.

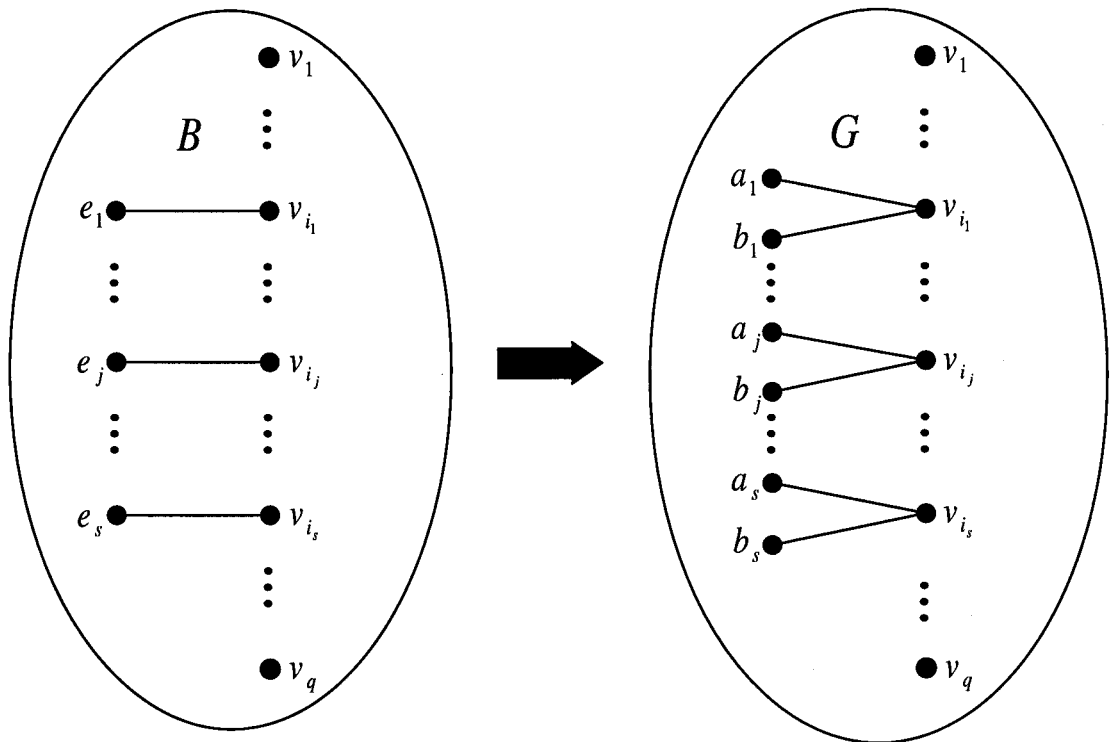


Figura 2.2: Un emparejamiento completo en B implica la contención de TK^p por parte de G .

Obsérvese en la Figura 2.2 que si sobre dicho grafo bipartito probamos la existencia de un emparejamiento completo, habrán sido encontrados tales caminos disjuntos y, en consecuencia, quedará probada la contención por parte de G de una subdivisión de K^p .

La existencia del emparejamiento completo quedará garantizada por aplicación de la Condición de Hall, enunciada antes en el Teorema 1.1.1.

En resumen, dado un grafo G de orden n y cierto tamaño, si denotamos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario, para garantizar que G contiene una subdivisión de K^p como subgrafo, será suficiente demostrar que:

1. $H \in \mathcal{C}_q^q$, siendo $q = n - p$, es decir, existe una sucesión decreciente de vértices en H de modo que el subgrafo H_q resultante de la eliminación de dichos vértices, tiene, a lo sumo, q aristas.
2. El grafo bipartito B antes definido posee un emparejamiento completo.

En consecuencia, deduciremos que

$$ex(n; TK^p) \leq e(G) - 1.$$

Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, nos planteamos completar los trabajos de M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10] mediante la prueba de nuevos valores exactos para la función extremal $ex(n; TK^p)$ y la caracterización de su respectiva familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales.

Los siguientes resultados resumen las aportaciones de los dos trabajos antes citados.

Teorema 2.1.1 [9] Sean n y p enteros positivos tales que $n \geq p$.

1. Si $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$ entonces

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1).$$

2. Si $\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$ entonces

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3).$$

Teorema 2.1.2 [10] Sean n y p enteros positivos tales que $n \geq p$.

1. Si $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n - 3$ entonces

$$EX(n; TK^p) = \{(2n - 2p + 1)\overline{K^2} + K^{4p-3n-2}\}.$$

2. Si $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$ entonces

$$EX(n; TK^p) = \{(3n - 4p + 2)\overline{K^3} + (6p - 4n - 3)\overline{K^2}\}.$$

En este capítulo nos proponemos llevar a cabo el siguiente trabajo:

1. Caracterizar la familia $EX(n; TK^p)$ cuando $n - 3 \leq p < n$.
2. Obtener el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ cuando n y p están relacionados por la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$.
3. Caracterizar la familia $EX(n; TK^p)$ cuando n y p verifican la desigualdad $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$.

Estas nuevas aportaciones, junto con los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 dejarán cerrado el problema extremal para cualquier par de enteros (n, p) tales que $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < n$.



2.2 Familia $EX(n; TK^p)$ para $n - 3 \leq p \leq n - 1$.

Nuestro propósito en esta sección es la caracterización de la familia extremal $EX(n; TK^p)$ cuando $n - 3 \leq p \leq n - 1$. Es decir, en dicho sector del plano nos planteamos encontrar todos los grafos de orden n sin contener como subgrafo a una subdivisión de K^p y cuyo número de aristas coincide con el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ correspondiente.

Dado un entero $n \geq 6$ consideremos los tres grafos siguientes:

Sea G el grafo cuyo complementario $H = \overline{G}$ está formado por 3 aristas disjuntas y $n - 6$ vértices aislados (ver Figura 2.3). Obsérvese que para cualquier elección de $n - 1$ vértices branch, al subgrafo inducido por tales vértices le faltan al menos, 2 aristas para ser un grafo completo de orden $n - 1$. Puesto que sólo disponemos de un solo vértice no branch, resulta imposible sustituir esas aristas en G por caminos disjuntos. En consecuencia, es evidente que G no contiene una subdivisión de K^{n-1} .

Sea G^* el grafo cuyo complementario $H^* = \overline{G^*}$ está formado por un K^3 y $n - 3$ vértices aislados (ver Figura 2.3). En este caso, dada una elección cualquiera de $n - 1$ vértices branch, en el peor de los casos posibles, al subgrafo inducido por tales vértices le falta una arista para ser un K^{n-1} . Pero dicha arista es disjunta en G^* con el único vértice no branch, con lo cual es imposible que pueda ser reemplazada en G^* por un camino. En cualquier otro caso, al subgrafo inducido por $n - 1$ vértices branch le faltan 3 aristas para ser un K^{n-1} y en cambio, sólo disponemos de un único vértice no branch, por lo que no se pueden sustituir las aristas por caminos disjuntos. Así que G^* no contiene una subdivisión de K^{n-1} como subgrafo.

Finalmente, sea \tilde{G} el grafo cuyo complementario $\tilde{H} = \overline{\tilde{G}}$ está formado por un camino de longitud 3 y $n - 4$ vértices aislados (ver Figura 2.3). Como en el

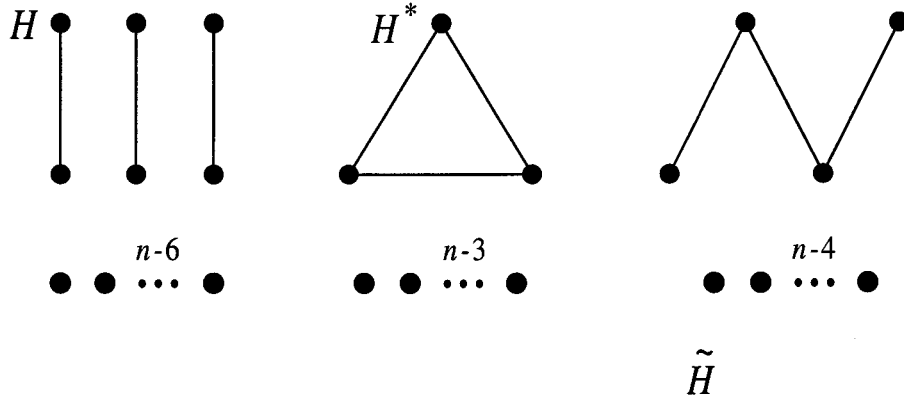


Figura 2.3: Complementarios de los grafos de la familia $EX(n; TK^{n-1})$.

caso anterior, para cualquier elección de $n - 1$ vértices branch, en el caso más desfavorable, al subgrafo inducido por dichos vértices le falta una arista $e = (a, b)$ para ser un K^{n-1} . Sin embargo, el único vértice v no branch de \tilde{G} es disjunto con a o con b , por lo que no existe en \tilde{G} el camino avb que pudiese sustituir a la arista ausente e . En cualquier otro caso, el número de aristas que faltan es mayor que 1 y por tanto, tampoco es posible que puedan ser sustituidas por caminos disjuntos. Luego \tilde{G} no contiene una subdivisión de K^{n-1} como subgrafo.

Obsérvese que G , G^* y \tilde{G} son grafos de orden n que no contienen una subdivisión de K^{n-1} y tales que

$$e(G) = e(G^*) = e(\tilde{G}) = \binom{n}{2} - 3 = ex(n; TK^{n-1}).$$

Luego $\{G, G^*, \tilde{G}\} \subseteq EX(n; TK^{n-1})$. En el siguiente resultado se prueba la otra contención y en consecuencia, se deduce que la familia de grafos extremales $EX(n; TK^{n-1})$ está formada por estos tres únicos grafos.

Teorema 2.2.1 *Para todo entero $n \geq 6$ se verifica que*

$$EX(n; TK^{n-1}) = \{\overline{K^3} + K^{n-3}; \overline{P_3} + K^{n-4}; 3\overline{K^2} + K^{n-6}\}$$

Demostración: Teniendo en cuenta el razonamiento previamente expuesto, será suficiente demostrar que si G pertenece a la familia $EX(n; TK^{n-1})$ entonces G es alguno de los tres grafos citados en el teorema.

Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^{n-1})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Vamos a demostrar que H debe ser uno de los tres grafos de la Figura 2.3.

Por el Teorema 2.1.1 es conocido que

$$ex(n; TK^{n-1}) = \binom{n}{2} - (2n - 2(n-1) + 1) = \binom{n}{2} - 3,$$

y por consiguiente, tenemos que H es un grafo con n vértices y 3 aristas. Es inmediato también que $\Delta(H) \leq 2$ ya que en caso contrario, es decir, si existiera un vértice v en H tal que $\delta_H(v) = 3$, entonces el grafo $H^* = H - v$ estaría formado por $n - 1$ vértices aislados y en consecuencia,

$$G^* = \overline{H^*} = K^{n-1} \subseteq G.$$

Supongamos primero que $\Delta(H) = 1$. Esto significa que el grafo H está formado por 3 aristas disjuntas y $n - 6$ vértices aislados.

Supongamos ahora que $\Delta(H) = 2$. Denotemos por v_1 a un vértice de H con valencia 2 y por H_1 al subgrafo de H resultante de eliminar en H el vértice v_1 . Es evidente que H_1 es un grafo formado por $n - 3$ vértices aislados y una sola arista $e = (a, b)$ o de modo equivalente, que $G_1 = \overline{H_1} = K^{n-1} - \{e\}$. Como suponemos que G no contiene una subdivisión de K^{n-1} , es imposible que exista en G el camino av_1b y, por tanto, v_1 debe ser adyacente en H al vértice a y/o adyacente al vértice b . Así que sólo son posibles dos casos:

Si v_1 es adyacente a los vértices a y b en H , entonces H es el grafo formado por un triángulo y $n - 3$ vértices aislados.

Si v_1 es adyacente sólo a uno de los dos vértices, por ejemplo, a . En este caso H está formado por un camino de longitud 3 y $n - 4$ vértices aislados. \otimes

Dado un entero $n \geq 10$ consideremos el grafo G de orden n cuyo grafo complementario $H = \overline{G}$ está formado por 5 aristas disjuntas y $n - 10$ vértices aislados (ver Figura 2.4). Resulta evidente que para cualquier elección de $n - 2$ vértices branch, al subgrafo inducido por dichos vértices le faltan al menos 3 aristas para ser un grafo completo de orden $n - 1$. En cambio, sólo hay 2 vértices que no son branch, por lo que es imposible conseguir 3 caminos disjuntos que sustituyan en G las aristas ausentes. Luego G no contiene una subdivisión de K^{n-2} como subgrafo. Como G tiene n vértices y además

$$e(G) = \binom{n}{2} - 5 = ex(n; TK^{n-2})$$

deducimos que $G \in EX(n; TK^{n-2})$.

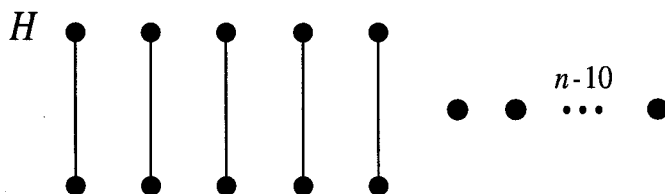


Figura 2.4: Complementario del único grafo de la familia $EX(n; TK^{n-2})$.

En el siguiente resultado se prueba que éste es el único grafo de la familia $EX(n; TK^{n-2})$.

Teorema 2.2.2 Para todo entero $n \geq 10$ se verifica que

$$EX(n; TK^{n-2}) = \{\overline{5K^2} + K^{n-10}\}$$

Demostración: Una de las contenciones ha sido probada en el razonamiento antes expuesto. Así que falta probar que el grafo $5\overline{K^2} + K^{n-10}$ es el único grafo extremal.

Sea $G \in EX(n; TK^{n-2})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. De nuevo, por aplicación del Teorema 2.1.1 sabemos que

$$ex(n; TK^{n-2}) = \binom{n}{2} - (2n - 2(n-2) + 1) = \binom{n}{2} - 5$$

y por tanto, que H es un grafo con n vértices y 5 aristas. También es inmediato que $\Delta(H) \leq 3$, puesto que en caso contrario seríamos capaces de eliminar de H dos vértices de tal modo que el subgrafo resultante H^* estaría formado por $n-2$ vértices aislados y, consiguientemente, que

$$G^* = \overline{H^*} = K^{n-2} \subseteq G.$$

Supongamos primero que $\Delta(H) = 3$. Sea v_1 un vértice de H con valencia 3 y denotemos por H_1 al subgrafo de H resultante de eliminar en H el vértice v_1 . En este caso, denotando por $G_1 = \overline{H_1}$ y teniendo en cuenta el Teorema 2.1.1, resulta que

$$e(G_1) = e(\overline{H_1}) = \binom{n-1}{2} - 2 > \binom{n-1}{2} - 3 = ex(n-1; TK^{n-2})$$

y por consiguiente, deducimos que G_1 contiene una subdivisión de K^{n-2} , siendo esto imposible porque $G_1 \subseteq G$ y $G \in EX(n; TK^{n-2})$. Luego $\Delta(H) \leq 2$.

Supongamos ahora que $\Delta(H) = 2$. Sea $\{v_1, v_2\}$ una sucesión decreciente de dos vértices en H . Tenemos dos situaciones posibles:

Si $\Delta(H_1) = 2$, entonces el grafo H_2 está formado por una única arista $e = (a, b)$ y $n-4$ vértices aislados, es decir, $G_2 = \overline{H_2} = K^{n-2} - \{e\}$. Como suponemos que G no contiene una subdivisión de K^{n-2} , es imposible que exista en G alguno de los caminos av_1b , av_2b , av_1v_2b o av_2v_1b . En otras palabras, la arista e debe ser no disjunta en H con v_1 y v_2 . Pero entonces tenemos que

$$\delta_H(a) \geq 3 \text{ o } \delta_H(b) \geq 3$$

lo cual contradice nuestro supuesto $\Delta(H) \leq 2$.

Si $\Delta(H_1) = 1$ entonces H_1 está formado por tres aristas disjuntas, $e_1 = (a_1, b_1)$, $e_2 = (a_2, b_2)$ y $e_3 = (a_3, b_3)$. Como $\delta_H(v_1) = 2$, deducimos que v_1 es disjunto en H con al menos, una de las tres aristas, por ejemplo, con e_1 . Pero entonces, tomando $v_2 = a_3$, tenemos que al grafo $G_2 = \overline{H_2}$ le faltan las aristas e_1 y e_2 para ser un K^{n-2} y dichas aristas pueden ser sustituidas en G por los caminos $a_1v_1b_1$ y $a_2v_2b_2$. Esto es un absurdo porque suponemos que $G \in EX(n; TK^{n-2})$.

Luego $\Delta(H) = 1$ y por tanto, H es el grafo formado por 5 aristas disjuntas y $n - 10$ vértices aislados, como queríamos demostrar. \otimes

Dado un entero $n \geq 14$, sea G el grafo de orden n cuyo complementario $H = \overline{G}$ está formado por 7 aristas disjuntas y $n - 14$ vértices aislados (ver Figura 2.5). De igual modo que en el caso anterior, dada una elección cualquiera de $n - 3$ vértices branch, al subgrafo inducido por tales vértices le faltan al menos 4 aristas para ser un K^{n-3} . Como el número de aristas ausentes es superior al número de vértices no branch es imposible que tales aristas puedan ser reemplazadas en G por caminos disjuntos, por lo que G no contiene una subdivisión de K^{n-3} como subgrafo. Como además se tiene que

$$e(G) = \binom{n}{2} - 7 = ex(n; TK^{n-3})$$

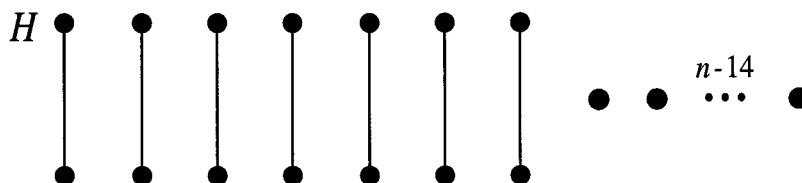


Figura 2.5: Complementario del único grafo de la familia $EX(n; TK^{n-3})$.



deducimos que G es un grafo perteneciente a la familia extremal $EX(n; TK^{n-3})$. En el siguiente resultado probamos que dicha familia está formada por este único grafo.

Teorema 2.2.3 *Para todo entero $n \geq 14$ se verifica que*

$$EX(n; TK^{n-3}) = \{7\overline{K^2} + K^{n-14}\}$$

Demostración: Por lo anteriormente expuesto, sólo será necesario probar que el grafo $7\overline{K^2} + K^{n-14}$ es el único grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^{n-3})$.

Para ello sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^{n-3})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Sabemos por el Teorema 2.1.1 que

$$ex(n; TK^{n-3}) = \binom{n}{2} - (2n - 2(n-3) + 1) = \binom{n}{2} - 7$$

por lo que tenemos que H es un grafo de orden n y tamaño 7.

Es inmediato que $\Delta(H) \leq 2$ ya que si existiera en H un vértice v con valencia al menos 3, entonces denotando por H^* al subgrafo de H resultante de eliminar en H dicho vértice, tendríamos que

$$e(\overline{H^*}) = \binom{n-1}{2} - e(H^*) \geq \binom{n-1}{2} - 4 > \binom{n-1}{2} - 5 = ex(n-1; TK^{n-3})$$

y por tanto, aplicando el Teorema 2.1.1,

$$TK^{n-3} \subseteq \overline{H^*} \subseteq G,$$

siendo esto una contradicción con la hipótesis $G \in EX(n; TK^{n-3})$.

Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una sucesión decreciente de vértices de H .

Supongamos en primer lugar que $\Delta(H) = 2$ y $\Delta(H_1) = 2$.

Si $\Delta(H_2) = 2$ entonces la única arista de H_3 sería disjunta en H con al menos uno de los vértices del conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ y por tanto podría ser sustituida

en G por un camino de longitud 2, siendo esto imposible porque G es un grafo extremal.

Pero si $\Delta(H_2) = 1$ entonces tenemos que H_2 está formado por 3 aristas disjuntas, $e_i = (a_i, b_i)$, con $i = 1, 2, 3$ y $n - 8$ vértices aislados. Debido a que $\Delta(H) = 2$ al menos una de tales aristas es disjunta en H con v_1 o v_2 . Supongamos, por ejemplo, que e_1 es disjunta en H con v_1 . En este caso tomando $v_3 = a_3$ llegamos a la conclusión de que el grafo H_3 tiene sólo dos aristas disjuntas e_1 y e_2 que pueden ser sustituidas en G por los caminos $a_1v_1b_1$ y $a_2v_3b_2$ respectivamente. Esto también es absurdo por la condición de grafo extremal de G .

Luego si $\Delta(H) = 2$ y $\Delta(H_1) = 2$ entonces G contiene una subdivisión de K^{n-3} como subgrafo, lo cual es imposible.

Supongamos ahora que $\Delta(H) = 2$ y $\Delta(H_1) = 1$. En esta situación las 5 aristas de H_1 , ($e_i = (a_i, b_i)$ con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), deben ser disjuntas. Por otra parte, como $\Delta(H) = 2$ podemos suponer, por ejemplo, que e_1 es disjunta en H con el vértice v_1 . Así que tomando $v_2 = a_4$ and $v_3 = a_5$ llegamos a la conclusión de que el grafo H_3 tiene sólo 3 aristas disjuntas, e_1, e_2, e_3 que pueden ser reemplazadas en G por los caminos $a_1v_1b_1, a_2v_2b_2$ y $a_3v_3b_3$, respectivamente. Esto absurdo debido a que $G \in \text{EX}(n; \text{TK}^{n-3})$.

En consecuencia debe ser $\Delta(H) = 1$, es decir, H sólo puede ser el grafo formado por 7 aristas disjuntas y $n - 14$ vértices aislados, como queríamos demostrar. \otimes

2.3 Valores exactos de $\text{ex}(n; \text{TK}^p)$.

En esta sección nos planteamos ampliar el conjunto de soluciones de este problema a través de la obtención del valor exacto de la función $\text{ex}(n; \text{TK}^p)$ cuando

$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$. De hecho probaremos que en este caso el valor exacto de dicha función coincide con el que fue obtenido en el Teorema 2.1.1 en el segundo de los sectores, es decir, que

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3).$$

Con objeto de hacer más cómodas las demostraciones, trabajaremos con el par de valores (n, q) , siendo $q = n - p$. De hecho, en el capítulo siguiente veremos la importancia que tiene observar la función extremal a lo largo de las rectas $n - p = \text{constante}$ y los resultados estructurales que se deducen de ello.

Obsérvese que entonces

$$p = \left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \iff 2n+3 \leq 3p < 2n+7$$

Así que tomando $p = n - q$ tenemos que $3q + 4 \leq n \leq 3q + 6$.

De igual modo resulta que

$$p = \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \iff 2n+3 \leq 3p < 2n+6$$

Por tanto tomando $p = n - q$ tenemos que $3q + 3 \leq n \leq 3q + 5$.

Luego podemos analizar de modo equivalente la función $ex(n; TK^{n-q})$, donde $n = 3q + r$, con $r \in \{3, 4, 5, 6\}$. En este sentido, nótese que

- Si $n = 3q + 6$ entonces $\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{6q+17}{3} \right\rceil = 2q+6 = n - q = p$.
- Si $n = 3q + 5$ entonces $\left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{6q+15}{3} \right\rceil = 2q+5 = n - q = p$.

Luego aplicando el Teorema 2.1.1 a los pares $(3q+6, 2q+6)$ y $(3q+5, 2q+5)$ se cumple que

$$\begin{aligned} ex(3q+6; TK^{2q+6}) &= \binom{3q+6}{2} - (3q-3) \text{ y} \\ ex(3q+5; TK^{2q+5}) &= \binom{3q+5}{2} - (3q-2). \end{aligned}$$

Por consiguiente, nuestro objetivo se reduce a demostrar que

$$\begin{aligned} \text{ex}(3q+4; \text{TK}^{2q+4}) &= \binom{3q+4}{2} - (3q-1) \text{ y} \\ \text{ex}(3q+3; \text{TK}^{2q+3}) &= \binom{3q+3}{2} - 3q. \end{aligned}$$

En la prueba de tales valores exactos será aplicado el siguiente resultado demostrado en [9], que nos aporta una condición suficiente sobre el orden y tamaño de un grafo que garantiza la pertenencia de éste a la clase \mathcal{C}_q^q .

Lema 2.3.1 [9] *Sean q, k enteros positivos tales que $k \leq q-1$. Sea H un grafo con $4q-k+1$ vértices y $2q+k+1$ aristas. Entonces $H \in \mathcal{C}_q^q$.*

Otro de los resultados que aplicaremos será el siguiente lema probado en [8] donde se pone en relación cierta propiedad en un adecuado grafo bipartito con la valencia de los vértices de una sucesión decreciente.

Lema 2.3.2 [8] *Sea H un grafo para el cual existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ tal que H_q tiene $s \leq q$ aristas, $e_i = (a_i, b_i)$, con $i \in \{1, \dots, s\}$. Sea B el grafo bipartito de clases $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ definido de modo que e_i es adyacente en B a v_j si existe en \bar{H} el camino $a_i v_j b_i$. Supongamos que A es un subconjunto de X de m elementos tal que $|\mathbf{N}_B(A)| < m$. Se verifica:*

1. Si $m = 1$ entonces

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2. \end{aligned}$$

2. Si $m = 2$ entonces

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3. \end{aligned}$$

3. Si $3 \leq m \leq s$ entonces

$$\begin{aligned}\delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq m, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m - 1) \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 1, \text{ para todo } j = q - (m - 2), \dots, q.\end{aligned}$$

En [9] podemos encontrar también la siguiente proposición que nos acota inferiormente la función extremal.

Proposición 2.3.3 [9] *Dados q, k enteros tales que $0 \leq k \leq q - 1$, se verifica que*

$$ex(4q - k + 1; TK^{3q-k+1}) \geq \binom{4q - k + 1}{2} - (2q + k + 2).$$

Finalmente, en los siguientes dos resultados encontramos el valor exacto de la función extremal en los casos $(3q + 4, 2q + 4)$ y $(3q + 3, 2q + 3)$. Como tendremos ocasión de ver, el esquema de demostración que se sigue es similar, hasta el punto que se podría haber enunciado y demostrado en un sólo resultado. Sin embargo, con objeto de que la prueba resulte más clara, hemos optado por abordar ambos casos por separado.

Teorema 2.3.4 *Dado $q \geq 4$ un entero, se verifica que*

$$ex(3q + 4; TK^{2q+4}) = \binom{3q + 4}{2} - (3q - 1).$$

Demostración: Teniendo en cuenta que una de las desigualdades se obtiene de tomar $k = q - 3$ en la Proposición 2.3.3, nuestro objetivo será demostrar que

$$ex(3q + 4; TK^{2q+4}) \leq \binom{3q + 4}{2} - (3q - 1).$$

Sea G un grafo de orden $3q + 4$ y tamaño $\binom{3q + 4}{2} - (3q - 2)$. Si denotamos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario, tenemos que H tiene $3q + 4$ vértices y $3q - 2$ aristas. Así que aplicando el Lema 2.3.1 para el caso $k = q - 3$, existe

una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ de H de tal modo que el subgrafo resultante H_q tiene s aristas, siendo $s \leq q$. Denotemos a dichas aristas por $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$.

Obsérvese que $\overline{H_q}$ es un grafo de orden $2q + 4$ al que le faltan las aristas $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$ para ser un grafo completo de orden $2q + 4$. Así que si probamos que dichas aristas pueden ser sustituidas en G por caminos disjuntos pasando por los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$, tendremos garantizada la existencia de una subdivisión de K^{2q+4} como subgrafo de G .

Para ello consideremos el grafo bipartito B cuyas clases son los conjuntos $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $X = \{e_1, \dots, e_s\}$, definido de modo que un vértice e_i es adyacente en B a otro v_j si y sólo si existe en G el camino $a_i v_j b_i$. La existencia de un emparejamiento completo en B nos permitiría reemplazar las s aristas ausentes en $\overline{H_q}$ por s caminos disjuntos de longitud 2.

Vamos a aplicar la Condición de Hall (ver Teorema 1.1.1) para demostrar que existe dicho emparejamiento completo en B . Es decir, probaremos que se cumple que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$ con tamaño m , siendo $1 \leq m \leq s$.

En el caso $m = 1$, dado A un subconjunto de X de tamaño 1, supongamos por reducción al absurdo que $|\mathbf{N}_B(A)| = 0$. Entonces aplicando el Lema 2.3.2, se cumple que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + s \geq 3q - 1$$

pero eso es imposible puesto que tenemos que $e(H) = 3q - 2$. Así que para todo subconjunto A de X con tamaño 1 se verifica que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq 1$.

Analicemos ahora el caso $m = 2$. Dado un subconjunto A de X de tamaño 2, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $|\mathbf{N}_B(A)| \leq 1$. De nuevo aplicando el Lema 2.3.2, se verifica que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 1, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3.\end{aligned}$$

Luego,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + s \geq 3q - 2.$$

Pero nótese que por otra parte tenemos que $e(H) = 3q - 2$. Luego todas las desigualdades anteriores son de hecho igualdades, es decir, $m = s = 2$ y además,

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &= 1, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &= 2, \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &= 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3.\end{aligned}$$

Como $\delta_{H_{q-1}}(v_q) = 1$, deducimos que v_q es disjunto en H con las dos aristas $e_1 = (a_1, b_1)$ y $e_2 = (a_2, b_2)$ de X , es decir, $\{v_q\} \subseteq \mathbf{N}_B(A) = \mathbf{N}_B(X)$. Por otra parte, como $|\mathbf{N}_B(A)| \leq 1$, tenemos que cada uno de los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_{q-1}\}$ es no disjunto en H con e_1 y e_2 . Así que, en el peor de los casos, sólo son posibles las dos configuraciones de la Figura 2.6, y en cualquiera de ellas, tenemos que $\delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) \geq 3$, siendo esto una contradicción con lo anteriormente probado. Así que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq 2$ para todo subconjunto A de X de tamaño 2.

Por último, para conjuntos A de tamaño m , con $3 \leq m \leq s$, supongamos por reducción al absurdo que $|\mathbf{N}_B(A)| < m$. Por el Lema 2.3.2 se cumple que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq m, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m - 1) \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 1, \text{ para todo } j = q - (m - 2) \dots, q.\end{aligned}$$

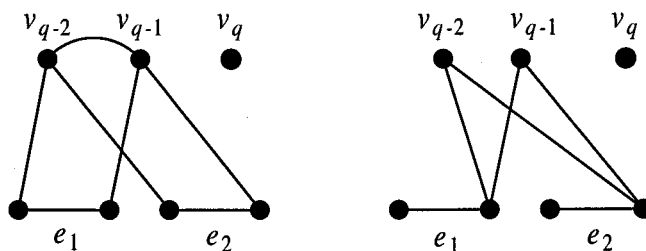


Figura 2.6: Posibles configuraciones de H cuando $m = s = 2$ y $|\mathbf{N}_B(A)| \leq 1$.

Por tanto,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q - (m-1)) \cdot m + (m-1) \cdot 1 + s \geq -m^2 + (q+3)m - 1.$$

Por otra parte, es inmediato comprobar que cuando $3 \leq m \leq q$ se verifica que $-m^2 + (q+3)m - 1 \geq 3q - 1$. Luego $e(H) \geq 3q - 1$, lo cual es imposible.

Así que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$, quedando probado el resultado.

⊗

Teorema 2.3.5 Dado $q \geq 4$ un entero, se verifica que

$$\text{ex}(3q+3; \text{TK}^{2q+3}) = \binom{3q+3}{2} - 3q.$$

Demostración: Teniendo en cuenta la Proposición 2.3.3 tomando $k = q - 2$, sólo será necesario demostrar que

$$\text{ex}(3q+3; \text{TK}^{2q+3}) \leq \binom{3q+3}{2} - 3q.$$

Sea G un grafo con $3q+3$ y $\binom{3q+3}{2} - (3q-1)$ aristas. En este caso, aplicando el Lema 2.3.1 tomando $k = q - 2$, existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ de H , de tal modo que H_q tiene $s \leq q$ aristas $e_1 = (a_1, b_1), \dots,$



$e_s = (a_s, b_s)$. Vamos a demostrar que tales aristas pueden ser sustituidas en G por caminos disjuntos de longitud 2. Para ello, razonaremos como en el Teorema 2.3.4 definiendo el grafo bipartito B de clases $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ en los mismos términos que en dicho resultado. Sobre dicho grafo B aplicaremos la Condición de Hall para demostrar la existencia de un emparejamiento completo y en consecuencia, deduciremos la contención de una subdivisión de K^{2q+3} por parte de G . Para ello, sea A un subconjunto de X de tamaño m , con $1 \leq m \leq s$.

Analicemos el caso $m = 1$ suponiendo por reducción al absurdo que $|\mathbf{N}_B(A)| = 0$. Entonces, aplicando el Lema 2.3.2, deducimos que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2\end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + s \geq 3q - 1.$$

Teniendo en cuenta que $e(H) = 3q - 1$ se deduce que todas las desigualdades son de hecho igualdades, es decir, $m = s = 1$ y además,

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &= 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &= 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2.\end{aligned}$$

Pero como $|\mathbf{N}_B(A)| = 0$ se cumple que ninguno de los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$ es disjunto con la única arista de X e_1 . Luego en el más desfavorable de los casos como se observa en la Figura 2.7 se tiene que $\delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) \geq 3$, siendo esto absurdo. En consecuencia $|\mathbf{N}_B(A)| \geq 1$.

Consideremos ahora subconjuntos A de tamaño $m = 2$ y supongamos que

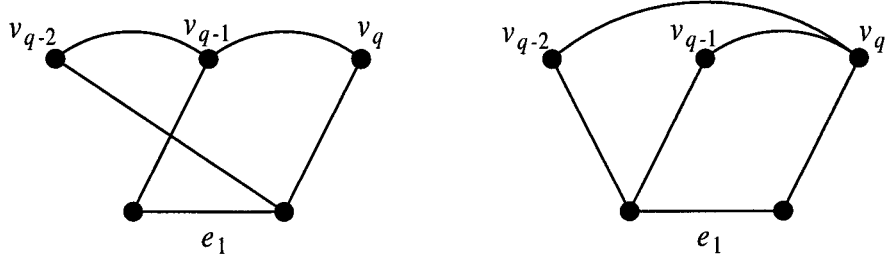


Figura 2.7: Casos más desfavorables en H para $s = 1$ y $|\mathbf{N}_B(X)| = 0$.

$|\mathbf{N}_B(A)| \leq 1$. Aplicando el Lema 2.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 1, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + s = 3q - 4 + s.$$

Teniendo en cuenta que $e(H) = 3q - 1$ deducimos que $2 \leq s \leq 3$.

• Supongamos en primer lugar que $s = 3$. En este caso, todas las desigualdades anteriores son óptimas, es decir,

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &= 1, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &= 2, \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &= 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3. \end{aligned}$$

Como $\delta_{H_{q-1}}(v_q) = 1$, el grafo H_{q-1} tiene sus 4 aristas disjuntas. Además, debido a que $\delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) = 2$ y $\delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) = 2$, los vértices v_{q-2} y v_{q-1} son disjuntos en H con al menos dos de las aristas de H_{q-1} . Por tanto, podemos suponer sin pérdida

de generalidad que v_{q-2} es disjunto con e_1 en H y que v_{q-1} es disjunto con e_2 . Luego, existen en G los caminos $a_1v_{q-2}b_1$, $a_2v_{q-1}b_2$, y $a_3v_qb_3$ y por consiguiente, G contiene una subdivisión de K^{2q+3} como subgrafo.

• Supongamos ahora que $s = 2$. Como $|\mathbf{N}_B(A)| \leq 1$ distinguiremos los dos posibles valores:

Si $|\mathbf{N}_B(A)| = 0$, entonces las dos aristas de H_q son no disjuntas en H con cada uno de los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$. Pero en tal caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2, \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2.\end{aligned}$$

Luego,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + s = 3q > 3q - 1$$

lo cual es absurdo.

Si $|\mathbf{N}_B(A)| = 1$ entonces en el caso más desfavorable, como se observa en la Figura 2.8, tenemos que las dos aristas de H_q son disjuntas en H con v_q , con lo cual

$$\delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) \geq 3 \text{ y } \delta_{H_{q-4}}(v_{q-3}) \geq 4.$$

Pero en tal caso

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-3) \cdot 4 + 3 + 2 + 1 + s = 4q - 4 > 3q - 1,$$

siendo esto una contradicción. Luego, $|\mathbf{N}_B(A)| \geq 2$.

Finalmente, para subconjuntos A de X de tamaño m , con $3 \leq m \leq s$, supongamos por reducción al absurdo que $|\mathbf{N}_B(A)| < m$. Entonces, por aplicación del Lema 2.3.2, se cumple que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq m, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m-1) \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 1, \text{ para todo } j = q - (m-2) \dots, q\end{aligned}$$

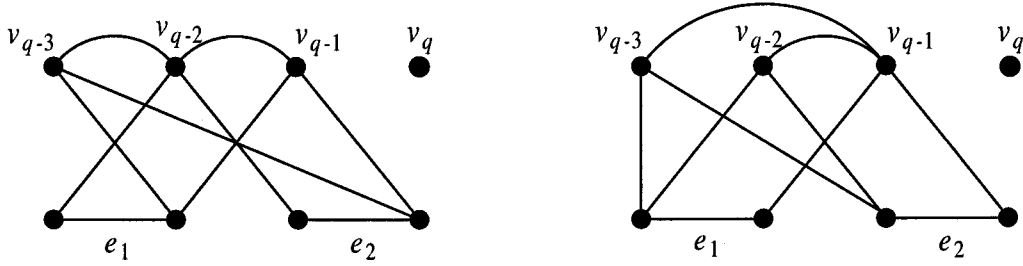


Figura 2.8: Casos más desfavorables en H para $s = 2$ y $|\mathbf{N}_B(X)| = 1$.

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m - 1)) \cdot m + (m - 1) \cdot 1 + s \\ &\geq -m^2 + (q + 3)m - 1 \geq 3q - 1. \end{aligned}$$

Como sabemos que $e(H) = 3q - 1$, deducimos que las desigualdades anteriores son óptimas, es decir, $m = s$ y además,

$$\begin{aligned} \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= s, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (s - 1) \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &= 1, \text{ para todo } j = q - (s - 2) \dots, q. \end{aligned}$$

En tal caso, el grafo $H_{q-(s-1)}$ tiene sus $2s - 1$ aristas disjuntas. $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_{2s-1} = (a_{2s-1}, b_{2s-1})$. Ahora bien, por otra parte tenemos que $\delta_{H_{q-s}}(v_{q-(s-1)}) = s$, con lo cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho vértice es disjunto en H con e_1 ya que de no ser así bastaría reelegir de modo adecuado los vértices del conjunto $\{v_{q-(s-2)}, \dots, v_q\}$. Luego, las s aristas de H_q pueden ser sustituidas en G por los caminos $a_1 v_{q-(s-1)} b_1, a_i v_{q-(s-i)} b_i$, para $i = 2, \dots, s$ y en consecuencia $G \supseteq \text{TK}^{2q+3}$ como queríamos demostrar.

Por tanto $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$, quedando probado el resultado. \otimes

Nota 2.3.6 Los Teoremas 2.3.4 y 2.3.5 son también ciertos para $q = 3$. En efecto, veamos que todo grafo G con 13 vértices y 71 aristas no contiene como subgrafo a una subdivisión de K^{10} . Obsérvese que el grafo $H = \overline{G}$ complementario de G tiene 13 vertices y 7 aristas.

Por una parte, si existiera un vértice v de H tal que $\delta_H(v) \geq 3$ entonces $H^* = H - \{v\}$ sería un grafo con 12 vértices y a lo sumo 4 aristas. Así que aplicando el Teorema 2.1.1, $\overline{H^*}$ contendría una subdivisión de K^{10} y en consecuencia $G \supseteq \overline{H^*} \supseteq TK^{10}$.

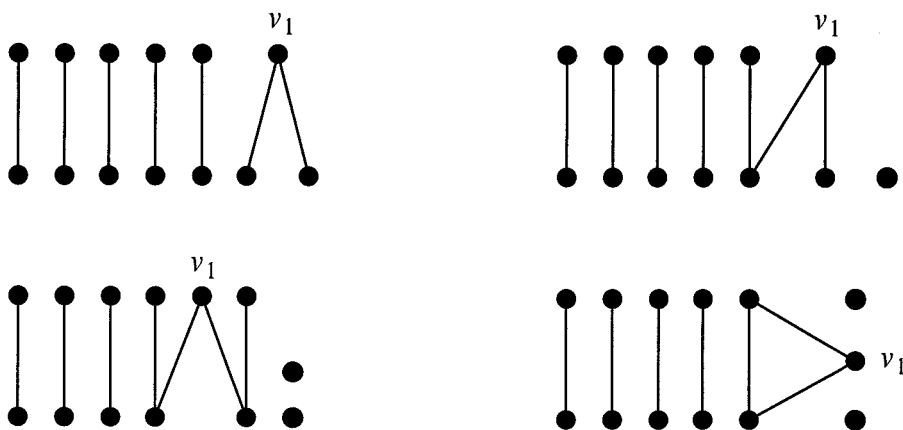


Figura 2.9: Configuraciones posible de H .

Por otra parte, como $2e(H) > v(H)$ tenemos que $\Delta(H) \geq 2$. Deducimos entonces que $\Delta(H) = 2$. Sea v_1 un vértice de H de valencia 2. En este caso, se cumple que $H_1 = H - \{v_1\}$ es un grafo con 12 vértices y 5 aristas, y por tanto, teniendo en cuenta los Teoremas 2.1.1 y 2.2.2, si $\overline{H_1}$ no contiene una subdivisión de K^{10} , entonces H_1 está formado por 5 aristas disjuntas y 2 vértices aislados. Pero en tal caso H sólo puede ser uno de los grafos de la Figura 2.9.

Es inmediato comprobar que en todos los casos posibles se cumple que G

contiene una subdivisión de K^{10} .

Análogamente, se comprueba que todo grafo G con 12 vértices y $\binom{12}{2} - 9 = 57$ aristas contiene una subdivisión de K^9 como subgrafo. Para ello, sobre el grafo complementario $H = \overline{G}$, que tiene orden 12 y tamaño 9, basta analizar los posibles casos de valencia máxima y aplicar los Teoremas 2.1.1 y 2.2.2 para deducir que $G \supseteq TK^9$.

Por tanto quedan obtenidos los valores exactos de la función extremal en un nuevo sector de pares de enteros (n, p) , como se recoge en el siguiente corolario.

Corolario 2.3.7 Sean n y p enteros positivos, con $p \geq 6$ y tales que $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$. Entonces

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3).$$

2.4 Familia extremal $EX(n; TK^p)$.

En esta sección nos planteamos completar el análisis de este problema extremal en el sector $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < n$ mediante la caracterización de la familia de grafos extremales $EX(n; TK^p)$ cuando $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$.

Del mismo modo que en la sección anterior, por comodidad en las demostraciones, recurriremos al valor $q = n - p$. Así que por una parte

$$p = \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil \iff 2n+5 \leq 3p < 2n+8$$

de donde deducimos que $3q+5 \leq n \leq 3q+7$.

Y por otra parte,

$$p = \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \iff 2n+3 \leq 3p < 2n+6$$



con lo cual $3q + 3 \leq n \leq 3q + 5$.

En definitiva, se trata de caracterizar las familias $EX(3q + r; TK^{2q+r})$, donde $r \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Obsérvese que si $r \in \{6, 7\}$ entonces

$$\left\lceil \frac{2n + 6}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{6q + 6 + 2r}{3} \right\rceil = 2q + r = p$$

Luego aplicando el Teorema 2.1.2 cambiando n por $3q + r$ y p por $n - q$ tenemos que

$$EX(3q + r; TK^{2q+r}) = \{(q - r + 2)\overline{K^3} + (2r - 3)\overline{K^2}\}$$

Así que bastará caracterizar las familias $EX(3q + r; TK^{2q+r})$, para $r = 3, 4, 5$.

El siguiente resultado probado en [8] nos proporciona un camino indirecto para la caracterización de las familias extremales anteriores.

Lema 2.4.1 [8] *Sean n , r y q tres enteros, con $n = 3q + r$ y tales que $3 \leq r \leq q - 1$. Sean $G \in EX(n; TK^{n-q})$ y $H = \overline{G}$ su grafo complementario. Si $H \notin \mathcal{C}_q^q$ entonces H está formado por $q - r + 2$ copias disjuntas de K^3 y $2r - 3$ copias disjuntas de K^2 .*

Por tanto, nuestro propósito en el siguiente lema es demostrar que si G pertenece a la familia $EX(3q + r; TK^{2q+r})$, con $r \in \{3, 4, 5\}$, y H es su grafo complementario, entonces $H \notin \mathcal{C}_q^q$.

Lema 2.4.2 *Sean n , r y q tres enteros tales que $q \geq 4$, $n = 3q + r$ y $3 \leq r \leq 5$. Si G es un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^{n-q})$ y $H = \overline{G}$ es su grafo complementario, entonces*

$$H \notin \mathcal{C}_q^q.$$

Demostración: Sea G un grafo en las hipótesis del resultado y sea H su grafo complementario. Como $G \in EX(n; TK^{n-q})$, sabemos por los Teoremas 2.1.1, 2.3.4 y 2.3.5 que H tiene $3q + r$ vértices y $3q + 3 - r$ aristas.

Debemos probar que para toda sucesión decreciente de vértices de H se cumple que el subgrafo H_q resultante de eliminar dichos vértices tiene al menos $q + 1$ aristas. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo lo contrario, es decir, que existe una sucesión $\{v_1, \dots, v_q\}$ en H tal que $e(H_q) \leq q$.

Denotemos por $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$, con $s \leq q$, a las aristas de H_q . Si probamos que tales aristas pueden ser sustituidas en G por caminos disjuntos de longitud 2 pasando por los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$, habremos llegado a una contradicción con el supuesto de que G es grafo extremal. Para ello consideremos el grafo bipartito B de clases $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ definido como en los Teoremas 2.3.4 y 2.3.5, es decir, de modo que e_i es adyacente a v_j en B si existe en G el camino $a_i v_j b_i$. Nos proponemos aplicar la Condición de Hall para demostrar que dicho grafo bipartito posee un emparejamiento completo.

Dado $j \in \{1, \dots, s\}$, sea $\widehat{H} = H - \{e_j\}$, es decir, \widehat{H} es el subgrafo de H resultante de eliminar la arista e_j . Es evidente que este grafo tiene $3q + 3$ vértices y $3q + 2 - r$ aristas. Luego aplicando los Teoremas 2.1.1, 2.3.4 y 2.3.5, se cumple que \widehat{H} contiene una subdivisión de K^{n-q} como subgrafo. De hecho, en dichos resultados ha quedado garantizada la existencia de un emparejamiento completo en el grafo bipartito \widehat{B} de clases $\widehat{Y} = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $\widehat{X} = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s\}$. Por tanto, aplicando la Condición de Hall, para todo subconjunto A de X de tamaño m , con $1 \leq m \leq s - 1$ se verifica que $|N_B(A)| \geq m$. Así que sólo será necesario demostrar que $|N_B(X)| \geq s$.

Supongamos por reducción al absurdo que $|N_B(X)| \leq s - 1$.

Si $s = 1$, como $|N_B(X)| = 0$ tenemos que cada uno de los vértices del

conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$ es no disjunto con la arista e_1 . Por tanto se verifica que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-2.\end{aligned}$$

Pero por otra parte, debido a que $G \not\cong TK^{n-q}$, aún en el caso más desfavorable como se observa en la Figura 2.7, se deduce que

$$\delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) \geq 3 \text{ y } \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) \geq 4$$

con lo cual, teniendo en cuenta que $\{v_1, \dots, v_q\}$ es sucesión decreciente, llegamos a que

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-2) \cdot 4 + 3 + 2 + s = 4q - 2 > 3q + 3 - r$$

siendo esto imposible.

Para $s = 2$ tenemos dos casos posibles:

- Si $|N_B(X)| = 0$ entonces cada uno de los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$ es no disjunto en H con las aristas e_1 y e_2 . Por tanto, en los casos más desfavorables representados en la Figura 2.10, se cumple que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-1\end{aligned}$$

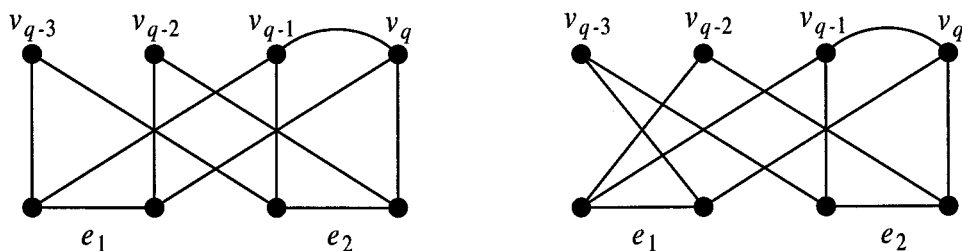
de lo cual deducimos que

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-1) \cdot 3 + 2 + s = 3q + 1 > 3q + 3 - r$$

pero esto es imposible.

- Si $|N_B(X)| = 1$ entonces, en los peores casos, que se recogen en la Figura 2.8, se tiene que

$$\begin{aligned}\delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2, \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 3 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-3\end{aligned}$$

Figura 2.10: Casos más desfavorables en H para $s = 2$ y $|\mathbf{N}_B(X)| = 0$.

y por consiguiente,

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq (q-3) \cdot 4 + 3 + 2 + 1 + s = 4q - 4 > 3q + 3 - r,$$

si $q \geq 5$ o $r \geq 4$. En el caso particular $q = 4$ y $r = 3$, obsérvese que $e(H) = 12$ y por tanto, las desigualdades anteriores son de hecho, igualdades, es decir,

$$\begin{aligned} \delta_{H_3}(v_4) &= 1, \\ \delta_{H_2}(v_3) &= 2, \\ \delta_{H_1}(v_2) &= 3 \text{ y} \\ \delta_H(v_1) &= 4. \end{aligned}$$

Como H_3 tiene sus 3 aristas disjuntas y $\delta_{H_2}(v_3) = 2$, tenemos que el vértice v_3 es disjunto en H al menos, con 2 de las 3 aristas. En particular, es disjunto con una de las aristas de H_q , por ejemplo, e_1 . Luego existen en G los caminos $a_1v_3b_1$ y $a_2v_4b_2$, lo cual es una contradicción.

Si $3 \leq s \leq q$ entonces, razonando como en la prueba del Teorema 2.3.5 cuando $3 \leq m \leq q$ tomando $m = s$, deducimos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq s, \text{ para } j = 1, \dots, q - (s-1) \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 1, \text{ para } j = q - (s-2), \dots, q. \end{aligned}$$

Asimismo podemos hacer las siguientes consideraciones:

1. Ninguno de los vértices del conjunto $\{v_{q-(s-2)}, \dots, v_q\}$ puede ser disjunto en B con todos los elementos de X , puesto que si ello ocurriera, tendríamos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq s, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (s - 2)$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (s - 2)) \cdot s + (s - 1) \cdot 1 + s \\ &= -s^2 + (q + 4)s - 1. \end{aligned}$$

Pero cuando $3 \leq s \leq q$ es $-s^2 + (q + 4)s - 1 \geq 3q + 1 > 3q + 3 - r$ y esto es una contradicción.

2. Como consecuencia de lo anterior y teniendo en cuenta que suponemos que $|\mathbf{N}_B(X)| \leq s - 1$, deducimos que cada uno de los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_{q-(s-1)}\}$ debe ser disjunto en B con todos los elementos de X .
3. Además se verifica que $\Delta(H_{q-(s-2)}) = 1$ puesto que en caso contrario, y debido al decrecimiento de la sucesión $\{v_1, \dots, v_q\}$, llegaríamos a que

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (s - 1)) \cdot s + 2 \cdot 2 + (s - 3) \cdot 1 + s \\ &= -s^2 + (q + 3)s + 1. \end{aligned}$$

Y cuando $3 \leq s \leq q$, es $-s^2 + (q + 3)s + 1 \geq 3q + 1 > 3q + 3 - r$ que también es absurdo.

4. Análogamente se puede verificar fácilmente que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) = s, \text{ para } j = 2, \dots, q - (s - 1),$$

así como

$$\begin{aligned} s &\leq \delta_H(v_1) \leq s + 1 \text{ y} \\ 1 &\leq \delta_{H_{q-(s-1)}}(v_{q-(s-2)}) \leq 2. \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que estas observaciones nos llevan a deducir que G contiene como subgrafo una subdivisión de K^{n-q} , en contra de nuestro supuesto de que G es grafo extremal.

Como $\Delta(H_{q-(s-2)}) = 1$ y $e(H_q) = s$ deducimos que el grafo $H_{q-(s-2)}$ tiene $2s - 2$ aristas y éstas son todas disjuntas. Por otra parte,

- Si $s = 3$, entonces $\delta_{H_{q-s}}(v_{q-(s-1)}) = 3 = s < 2 \cdot s - 2 = 4$.
- Si $4 \leq s \leq q$, entonces $\delta_{H_{q-s}}(v_{q-(s-1)}) \leq s + 1 < 2s - 2$.

En definitiva, al menos una de las aristas de $H_{q-(s-2)}$ es disjunta en H con el vértice $v_{q-(s-1)}$. De hecho, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se trata de una de las aristas de H_q , por ejemplo, e_1 , ya que de no ser así, bastaría reelegir adecuadamente el conjunto de vértices $\{v_{q-(s-3)}, \dots, v_q\}$. Además, para todo $s \geq 3$ se tiene que $2s - 2 \geq 4$ y por tanto, existen al menos dos aristas en $H_{q-(s-2)}$ que son disjuntas en H con el vértice $v_{q-(s-2)}$. Por idéntica razón podemos suponer que una de dichas aristas pertenece a H_q y es, por ejemplo, e_2 .

Pero entonces las aristas de H_q pueden ser sustituidas en G , respectivamente, por los caminos $a_1v_{q-(s-1)}b_1$, $a_2v_{q-(s-2)}b_2$ y $a_iv_{q-(s-i)}b_i$, con $i = 3, \dots, s$. Es decir, G contiene una subdivisión de K^{n-q} como subgrafo. Esto es imposible porque $G \in EX(n; TK^{n-q})$.

Luego $|N_B(X)| \geq |X|$, como queríamos demostrar. ⊗

En consecuencia, teniendo en cuenta los Lemas 2.4.1 y 2.4.2 obtenemos las familias extremales $EX(3q + r; TK^{2q+r})$, para $q \geq 4$ y $r = 3, 4, 5$ en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.3 Sean r y q dos enteros tales que $3 \leq r \leq 5$ y $q \geq 4$. Entonces

$$EX(3q + r; TK^{2q+r}) = \{(q - r + 2)\overline{K^3} + (2r - 3)\overline{K^2}\}.$$



Nota 2.4.4 Respecto al caso $q = 3$ también se tiene el resultado del corolario anterior, es decir,

$$1. EX(13; TK^{10}) = \{\overline{K^3} + 5\overline{K^2}\}.$$

$$2. EX(12; TK^9) = \{2\overline{K^3} + 3\overline{K^2}\}.$$

Demostración: Vamos a demostrar que si G es un grafo de la familia $EX(13; TK^{10})$ y H es su grafo complementario, entonces H está formado por 5 aristas disjuntas y un K^3 .

Sabemos por el Teorema 2.3.4 que H tiene 13 vértices y 8 aristas. Como $2e(H) > v(H)$ deducimos que $\Delta(H) \geq 2$. Por otra parte, teniendo en cuenta que por el Teorema 2.1.1 es $ex(12; TK^{10}) = \binom{12}{2} - 5$, resulta evidente que $\Delta(H) \leq 3$.

Supongamos que existe un vértice v_1 en H con valencia 3. Entonces tenemos que $H_1 = H - \{v_1\}$ tiene 12 vértices y 5 aristas y además, $\overline{H_1} \not\subseteq TK^{10}$, es decir, aplicando los Teoremas 2.1.1 y 2.2.2 se cumple que H_1 es el grafo formado por 2 vértices aislados y 5 aristas disjuntas, $e_i = (a_i, b_i)$, con $i = 1, \dots, 5$. Además, como $\delta_H(v_1) = 3$, podemos suponer por ejemplo, que la arista e_1 es disjunta en H con v_1 . Pero entonces, tomando $v_2 = a_4$ y $v_3 = a_5$, existen en G los caminos $a_1v_1b_1$, $a_2v_2b_2$ y $a_3v_3b_3$ que sustituyen las aristas de H_q y por consiguiente, $G \supseteq TK^{10}$ lo cual es absurdo. Así que $\Delta(H) = 2$.

Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una sucesión decreciente de vértices de H . Supongamos por reducción al absurdo que $\Delta(H_1) = 2$. Vamos a distinguir dos casos posibles:

- Si $\Delta(H_2) = 2$, entonces los vértices v_1, v_2 y v_3 son disjuntos en H y además H_3 tiene sólo 2 aristas, $e_1 = (a_1, b_1)$ y $e_2 = (a_2, b_2)$. Como $\Delta(H) = 2$ podemos suponer, por ejemplo, que v_1 es disjunto en H con e_1 . Pero entonces existen en G los caminos $a_1v_1b_1$ y $a_2v_2v_3b_2$, lo cual es absurdo porque G es grafo extremal.

• Si $\Delta(H_2) = 1$, entonces H_2 tiene sus 4 aristas disjuntas. Como $\delta_H(v_1) = 2$ y $\delta_{H_1}(v_2) = 2$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad que e_1 y e_2 son disjuntas en H con v_1 y v_2 , respectivamente. Luego existen en G los caminos $a_1v_1b_2$, $a_2v_2b_2$ y $a_3v_3b_3$, lo cual es imposible.

Luego $\Delta(H_1) = 1$. Pero nótese que H_1 tiene 12 vértices y 6 aristas disjuntas. Así que H sólo puede ser el grafo formado por un K^3 y 5 aristas disjuntas.

De manera análoga es fácil demostrar que si $G \in EX(12; TK^9)$ entonces su grafo complementario H está formado por 2 copias disjuntas de K^3 y 3 aristas disjuntas. \otimes

Deshaciendo los cambios $q = n - p$ y $n = 3q + r$ tenemos que

$$q - r + 2 = 4q - (3q + r) + 2 = 3n - 4p + 2$$

y

$$2r - 3 = 2(3q + r) - 6q - 3 = 6p - 4n - 3$$

con lo que obtenemos como conclusión el siguiente corolario.

Corolario 2.4.5 Sean n y p dos enteros positivos, con $n \geq p$ y tales que $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$. Entonces

$$EX(n; TK^p) = \left\{ (3n - 4p + 2)\overline{K^3} + (6p - 4n - 3)\overline{K^2} \right\}.$$

2.5 Conclusiones

En este capítulo hemos encontrado el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ cuando n y p verifican la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$ (ver Figura 2.11). Asimismo hemos caracterizado la familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales en los

sectores dados por las desigualdades $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil$ y $n-3 \leq p \leq n-1$. Nos hemos dedicado, básicamente, a completar las aportaciones de los trabajos de M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [9] y [10].

De este modo, nos encontramos con dos bloques diferenciados para los cuales el problema extremal ha quedado cerrado completamente, y que vienen dados, por una parte, por los pares (n, p) tales que $p \leq 5$ y $n \geq p$, y por otra, por aquellos que verifican la expresión $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p < n$.

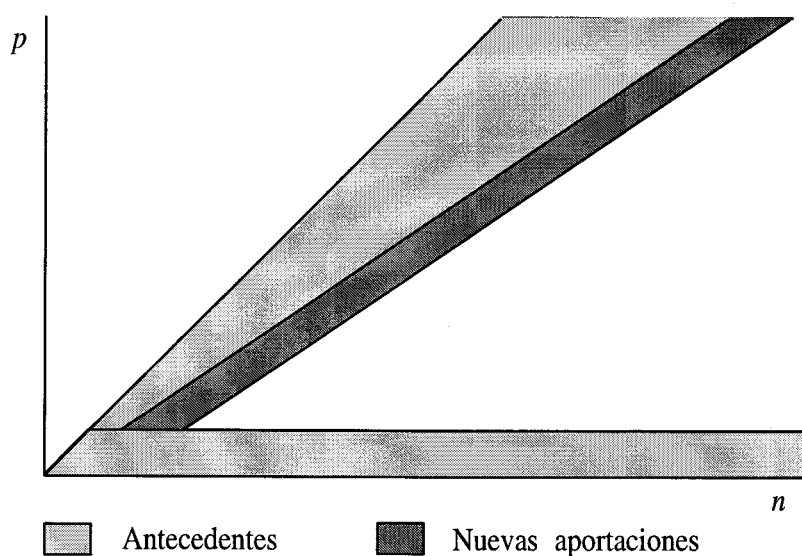


Figura 2.11: Nuevos valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$.

Capítulo 3

Estructura de los grafos extremales

Pretendemos profundizar en la búsqueda de técnicas inductivas que, basadas en propiedades de estructura de los grafos extremales, nos permitan avanzar en la resolución del problema extremal que venimos considerando. Probaremos resultados generales a partir de los cuales, obtendremos nuevas acotaciones y nuevos valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$.

3.1 Introducción

Aunque el problema extremal consistente en determinar el máximo número de aristas $ex(n; TK^p)$ de un grafo con n vértices sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo se trata de una de las extensiones del Problema de Turán, no por ello es de esperar que las soluciones de este último deban guardar relación alguna con las de aquél. Obsérvese que mientras un grafo completo K^p admite una única

configuración formada por p vértices dos a dos adyacentes, una subdivisión de un K^p en un grafo con n vértices admite múltiples configuraciones tanto más cuanto mayor sea n en relación con p . Esta complejidad combinatorial es tal vez la razón por la cual el problema sigue aún abierto en un amplio sector del plano (n, p) pese a los recientes avances citados en capítulos precedentes.

Sin embargo, a pesar de dicha complejidad combinatorial, es significativo que la familia de grafos extremales caracterizada en [10] y completada en el capítulo anterior, resulte ser unitaria como en el Problema de Turán con la excepción de los pares $(n, n - 1)$ para los cuales se compone sólo de 3 grafos.

Nuestro propósito en este capítulo es analizar el comportamiento de la función extremal $ex(n; TK^p)$ a lo largo del plano (n, p) de tal forma que podamos extraer técnicas inductivas en las que apoyarnos para avanzar en la búsqueda de nuevos valores exactos y en la caracterización de sus correspondientes familias extremales.

Probaremos resultados generales que relacionan entre sí los valores de la función $ex(n; TK^p)$ cuando los pares (n, p) varían a lo largo de ciertas direcciones en el plano. Dichos resultados serán aplicados al cálculo de valores exactos, a la caracterización de familias extremales y a la búsqueda de nuevas acotaciones que, sin ser buenas asintóticamente, sí aproximan nuevas soluciones cuando n y p están relacionados.

3.2 Resultados generales

En esta sección pretendemos analizar el comportamiento de la función extremal $ex(n; TK^p)$ cuando variamos los pares (n, p) a lo largo de determinadas direcciones en el plano. Deduciremos ciertas acotaciones generales que ponen en

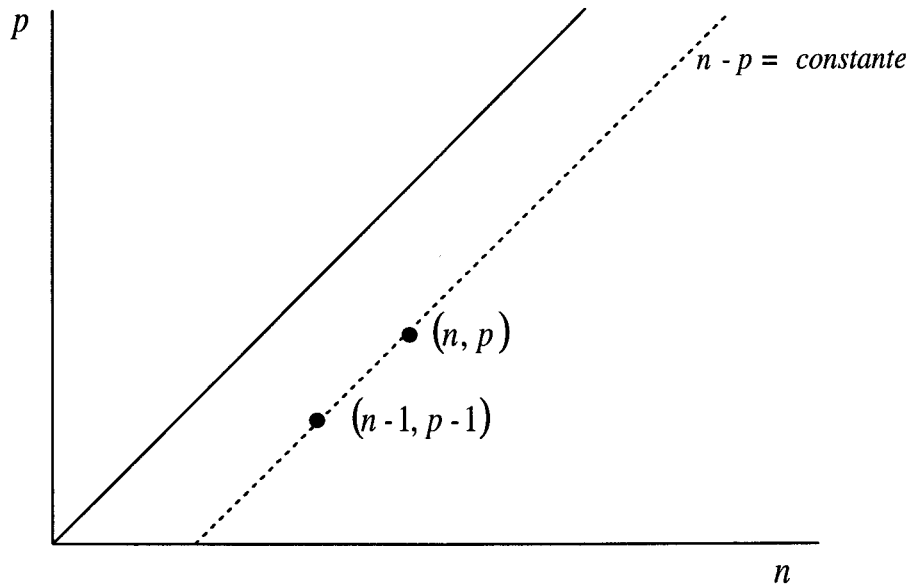


Figura 3.1: Estudio de la monotonía de la función $ex(n; TK^p)$ sobre las rectas $n - p = constante$.

relación los valores exactos de dicha función para pares (n, p) a lo largo de ciertas direcciones en el plano.

Los dos primeros resultados surgen de analizar la función $ex(n; TK^p)$ a lo largo de la dirección $n - p = constante$ (Ver Figura 3.1). En el primero de ellos a partir de un grafo extremal de la familia $EX(n - 1; TK^{p-1})$ construimos otro grafo de orden n sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo. De este modo, obtenemos una cota superior de la función extremal en el par $(n - 1, p - 1)$ expresada en términos del valor que toma en el par (n, p) .

Teorema 3.2.1 Sean n y p dos enteros positivos, con $n \geq p$. Entonces se verifica que

$$ex(n - 1; TK^{p-1}) \leq ex(n; TK^p) - (n - 1).$$

Demostración: Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n-1; TK^{p-1})$. Por definición, tenemos que G es un grafo con $n-1$ vértices y $ex(n-1; TK^{p-1})$ aristas que no contiene una subdivisión de K^{p-1} como subgrafo. Es decir, para cualquier elección de $p-1$ vértices branch en el grafo G , es imposible encontrar $\binom{p-1}{2}$ caminos disjuntos uniendo dichos vértices entre sí.

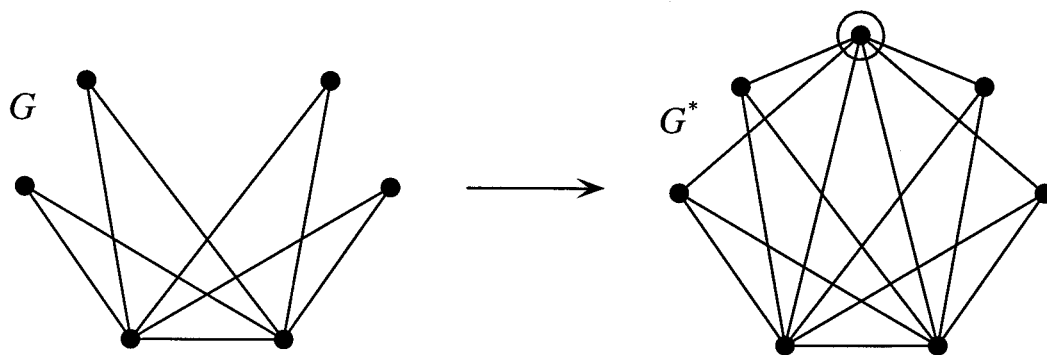


Figura 3.2: Como $G \in EX(6; TK^4)$, tenemos que $G^* = G + K^1 \not\subseteq TK^5$.

Consideremos, entonces, el grafo $G^* = G + K^1$, esto es, el grafo resultante de introducir un nuevo vértice v y unirlo mediante una arista a cada uno de los vértices de G (ver Figura 3.2). Es evidente que el grafo G^* tiene n vértices y $ex(n-1; TK^{p-1}) + n - 1$ aristas. Veamos que, además, este grafo no contiene una subdivisión de K^p .

Para ello, seleccionemos un conjunto de p vértices, $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, en el grafo G^* y supongamos, por reducción al absurdo, que tales vértices son vértices branch de una subdivisión de K^p . Sólo son posibles dos situaciones: O bien v es uno de los vértices branch, por ejemplo v_p , o $v \notin \{v_1, \dots, v_p\}$. Pero tanto en uno como en otro caso deducimos que los vértices v_1, \dots, v_{p-1} estarían unidos por $\binom{p-1}{2}$ caminos disjuntos en el grafo G , lo cual es imposible puesto que G no contiene ninguna subdivisión de K^{p-1} .

Hemos encontrado, pues, un grafo G^* con n vértices que no contiene una subdivisión de K^p . Luego,

$$ex(n; TK^p) \geq e(G^*) = ex(n-1; TK^{p-1}) + n - 1$$

finalizando así la prueba del resultado. \otimes

Resulta interesante averiguar si determinadas propiedades en los grafos extremales pueden conducirnos a deducir que la acotación anterior sea óptima. En efecto, una condición necesaria y suficiente para que dicha desigualdad sea, de hecho, una igualdad, es la que se demuestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Sean n y p dos enteros positivos, con $n \geq p$. Son equivalentes:*

1. $\max\{\Delta(G) : G \in EX(n; TK^p)\} = n - 1$.
2. $ex(n-1; TK^{p-1}) = ex(n; TK^p) - (n - 1)$.

Demostración: Para la prueba en el sentido directo, nótese que sólo es necesario verificar que $ex(n-1; TK^{p-1}) \geq ex(n; TK^p) - (n - 1)$, puesto que la otra desigualdad siempre es cierta como ha quedado probado en el Teorema 3.2.1.

Como $\max\{\Delta(G) : G \in EX(n; TK^p)\} = n - 1$, sabemos que existe un grafo G perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$ tal que $\Delta(G) = n - 1$. Luego existe un vértice v en G adyacente a todos los demás vértices del grafo, es decir, $\delta_G(v) = n - 1$. Consideremos el grafo \tilde{G} resultante de eliminar en el grafo G el vértice v . Como G no contiene una subdivisión de K^p y $\delta_G(v) = n - 1$, es evidente que \tilde{G} no puede contener ninguna subdivisión de K^{p-1} .

Luego,

$$ex(n-1; TK^{p-1}) \geq e(\tilde{G}) = e(G) - (n - 1) = ex(n; TK^p) - (n - 1),$$

lo que prueba la implicación en el sentido directo.

Para probar el recíproco, suponiendo que se verifica la hipótesis (2) basta encontrar un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$ con valencia máxima $n - 1$.

Dado G un grafo perteneciente a la familia $EX(n - 1; TK^{p-1})$, consideremos el grafo $G^* = G + K^1$. Es evidente que G^* tiene n vértices y que $\Delta(G^*) = n - 1$. Por otra parte, razonando como en la prueba del Teorema 3.2.1, tenemos que G^* no contiene una subdivisión de K^p . Finalmente,

$$e(G^*) = e(G) + n - 1 = ex(n - 1; TK^{p-1}) + (n - 1) = ex(n; TK^p),$$

es decir, $G \in EX(n; TK^p)$ como queríamos demostrar. \otimes

Los resultados anteriores nos ofrecen una interesante interpretación, como queda reflejado a continuación.

En efecto, el Teorema 3.2.1 puede ser expresado en términos del número de aristas del grafo complementario, como sigue

$$\binom{n}{2} - ex(n; TK^p) \leq \binom{n-1}{2} - ex(n-1; TK^{p-1}).$$

Es decir, si en lugar de considerar el número $ex(n; TK^p)$ analizamos el número de aristas del grafo complementario, esto es, $\binom{n}{2} - ex(n; TK^p)$, el Teorema 3.2.1 nos dice que a lo largo de cualquiera de las direcciones $n - p = \text{constante}$, el tamaño del grafo complementario es decreciente conforme crecen los valores de n y p . Esto nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3 (Teorema de Sandwich) Sean n, p, k y e cuatro enteros positivos, con $n \geq p$. Si se cumplen las condiciones siguientes

$$1. \text{ex}(n; TK^p) \geq \binom{n}{2} - e$$

$$2. \text{ex}(n+k; TK^{p+k}) \leq \binom{n+k}{2} - e$$

entonces $\text{ex}(n+j; TK^{p+j}) = \binom{n+j}{2} - e$, para cada $j = 1, \dots, k-1$.

Demostración: Para probar este resultado basta aplicar sucesivamente el razonamiento antes expuesto. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} e &\geq \binom{n}{2} - \text{ex}(n; TK^p) \geq \binom{n+1}{2} - \text{ex}(n+1; TK^{p+1}) \geq \dots \geq \\ &\geq \dots \geq \binom{n+j}{2} - \text{ex}(n+j; TK^{p+j}) \geq \dots \geq \\ &\geq \dots \geq \binom{n+k}{2} - \text{ex}(n+k; TK^{p+k}) \geq e \end{aligned}$$

Así pues, deducimos que

$$e \geq \binom{n+j}{2} - \text{ex}(n+j; TK^{p+j}) \geq e,$$

y por tanto, $\text{ex}(n+j; TK^{p+j}) = \binom{n+j}{2} - e$, con lo cual, el resultado queda demostrado. \otimes

A lo largo de la misma dirección $n - p = \text{constante}$, en los casos en que es posible aplicar el Teorema 3.2.2 para determinar el valor exacto de la función extremal sobre un par $(n-1, p-1)$ en función del par (n, p) , también resulta inmediata la caracterización de la correspondiente familia extremal $EX(n-1; TK^{p-1})$ a partir de los grafos de la familia $EX(n; TK^p)$. Como se demuestra en el siguiente



teorema, sólo tenemos que seleccionar entre los grafos de la familia $EX(n; TK^p)$, aquellos que tienen algún vértice con valencia $n - 1$ y eliminar ese vértice, obteniéndose así todos los grafos de la familia $EX(n - 1; TK^{p-1})$.

Teorema 3.2.4 Sean n y p dos enteros positivos con $n \geq p$. Supongamos que $ex(n - 1; TK^{p-1}) = ex(n; TK^p) - (n - 1)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $G \in EX(n - 1; TK^{p-1})$.
2. $G = G^* - v$, donde $G^* \in EX(n; TK^p)$, $v \in V(G)$ y $\delta_G(v) = n - 1$.

Demostración: Para probar la implicación en sentido directo, suponiendo que G es un grafo perteneciente a la familia $EX(n - 1; TK^{p-1})$, bastará demostrar que el grafo $G^* = G + K^1$ pertenece a la familia $EX(n; TK^p)$. Por una parte, razonando como en la prueba del Teorema 3.2.1, tenemos que G^* no contiene una subdivisión de K^p . Por otra parte,

$$v(G^*) = v(G) + 1 = n$$

y

$$e(G^*) = e(G) + (n - 1) = ex(n - 1; TK^{p-1}) + (n - 1) = ex(n; TK^p).$$

Luego G^* pertenece a la familia $EX(n; TK^p)$, como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que G^* es un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$ y que v es un vértice de G^* con valencia $n - 1$. Consideremos el grafo $G = G^* - v$, es decir, el grafo resultante de eliminar en G^* el vértice v . Como G^* no contiene una subdivisión de K^p , es evidente que G no puede contener ninguna subdivisión de K^{p-1} . Pero, además,

- $|V(G)| = |V(G^*)| - 1 = n - 1$.

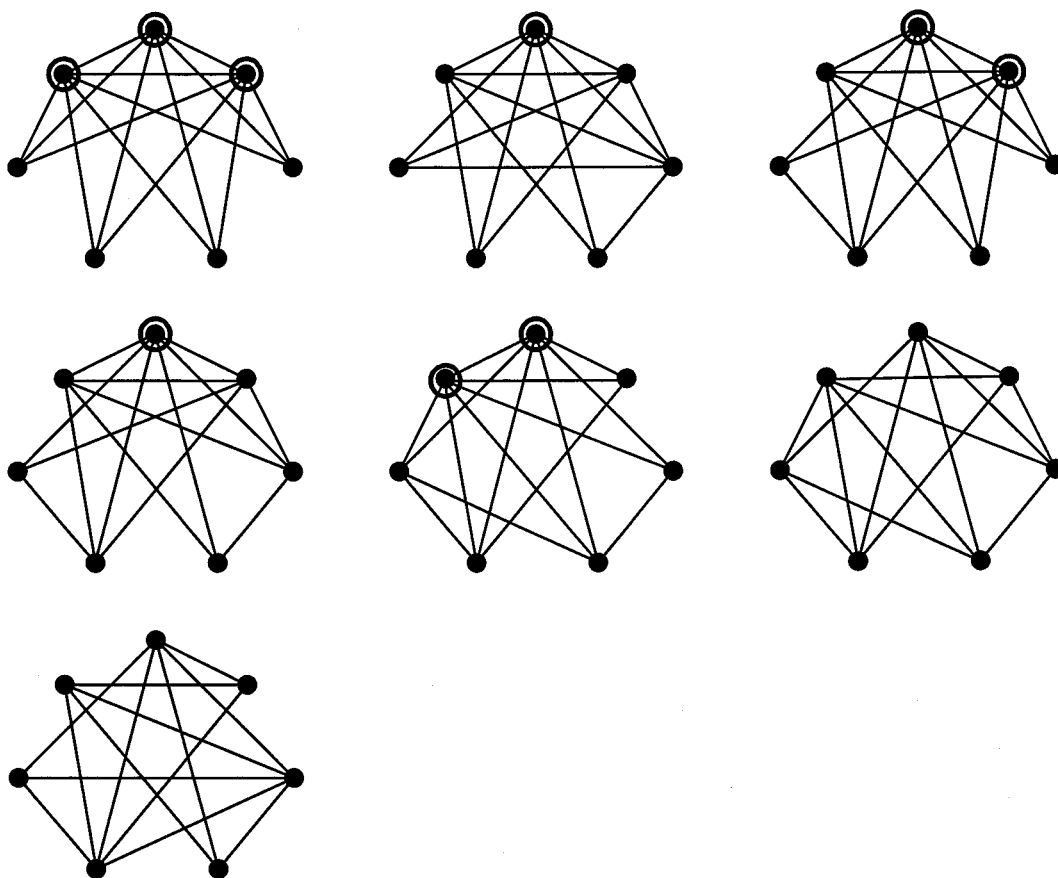


Figura 3.3: Familia de grafos extremales con 7 vértices sin contener una subdivisión de K^5 .

- $|E(G)| = |E(G^*)| - (n - 1) = ex(n; TK^p) - (n - 1) = ex(n - 1; TK^{p-1})$.

Luego G pertenece a la familia $EX(n - 1; TK^{p-1})$, con lo cual, el resultado queda demostrado. \otimes

En la Figura 3.3 están representados los grafos de la familia $EX(7; TK^5)$. Como se puede observar, hay 5 grafos con vértices de valencia 6. En total hay 9 vértices con valencia máxima. De la eliminación de cada uno de dichos vértices,



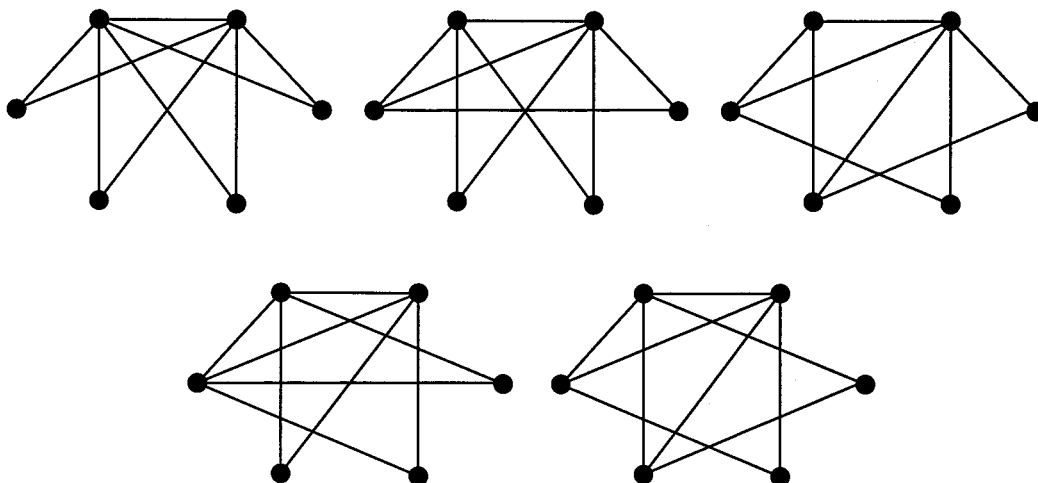


Figura 3.4: Familia de grafos extremales con 6 vértices sin contener una subdivisión de K^4 .

resulta un grafo perteneciente a la familia $EX(6; TK^4)$. Eliminando aquellos que son isomorfos entre sí, la familia $EX(6; TK^4)$ acaba siendo la compuesta por los grafos de la Figura 3.4. Además, por el Teorema 3.2.4, sabemos que no hay más grafos.

Otra dirección del plano (n, p) en la que parece razonable abordar el análisis de la monotonía de la función $ex(n; TK^p)$ es $p = \text{constante}$.

El siguiente resultado, cuyo razonamiento vemos en la Figura 3.5, nos aporta una desigualdad mediante la cual se relacionan dos pares contiguos a lo largo de cualquiera de dichas rectas.

Teorema 3.2.5 Sean n y p dos enteros positivos, con $n \geq p$. Entonces se verifica que

$$ex(n; TK^p) \leq ex(n-1; TK^p) + \min\{\delta(G) : G \in EX(n; TK^p)\}.$$

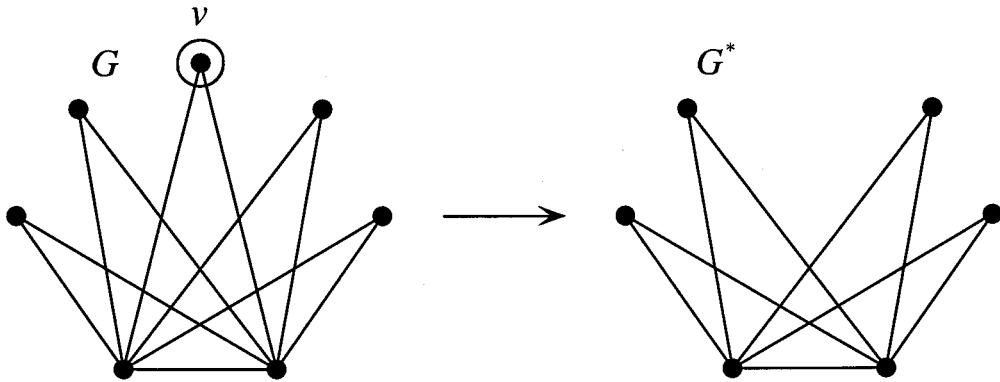


Figura 3.5: Si $G \not\subseteq TK^p$, es evidente que $G^* = G - v \not\subseteq TK^p$.

Demostración: Bastará demostrar que para todo grafo G perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$, se cumple la desigualdad

$$ex(n; TK^p) \leq ex(n-1; TK^p) + \delta(G).$$

Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$. El grafo G no contiene una subdivisión de K^p como subgrafo. Por tanto, dado un vértice v de G tal que $\delta_G(v) = \delta(G)$, el grafo $G^* = G - v$ no contiene K^p como subdivisión y, por tanto,

$$ex(n-1; TK^p) \geq e(G^*) = e(G) - \delta(G) = ex(n; TK^p) - \delta(G),$$

con lo cual, el resultado queda demostrado. \otimes

Sabemos que para que un grafo contenga una subdivisión de K^p como subgrafo es necesario encontrar p vértices, llamados vértices branch, unidos dos a dos por un camino y de tal forma que los $\binom{p}{2}$ caminos sean disjuntos. Teniendo en cuenta el máximo número de caminos de longitud mayor o igual que 2 que pueden existir en una subdivisión de K^p , vamos a obtener una condición suficiente para garantizar la no contención de dicha subdivisión.



En efecto, tal y como se observa en la Figura 3.6, el siguiente resultado muestra cómo dada una elección de p vértices, $U = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$, en un grafo G con n vértices, si al subgrafo de G inducido por los vértices del conjunto U le faltan, al menos, $n - p + 1$ vértices para ser un K^p es imposible que los vértices de U puedan ser vértices branch de una subdivisión de K^p . El argumento que justifica esa afirmación es muy simple: cada arista que falta debe ser sustituida por un camino, para lo cual, es necesario, al menos, un vértice intermedio; como el número de vértices intermedios es siempre $n - p$, es imposible sustituir todas las aristas por caminos.

Teorema 3.2.6 *Sean n y p enteros positivos, con $n \geq p$. Sea G un grafo con n vértices tal que para todo H subgrafo de G de orden p , se cumple que $e(H) \leq \binom{p}{2} - (n - p + 1)$. Entonces $G \not\supseteq TK^p$.*

Demostración: Para probar que G no contiene una subdivisión de K^p , debemos garantizar que para cualquier elección de p vértices branch, es imposible encontrar $\binom{p}{2}$ caminos disjuntos que conecten dichos vértices entre sí.

Sea $\{v_1, \dots, v_p\}$ un conjunto cualquiera de p vértices de G y denotemos por H al subgrafo de G inducido por dichos vértices. Por hipótesis, tenemos que

$$e(H) \leq \binom{p}{2} - (n - p + 1),$$

es decir, al grafo H le faltan, al menos $n - p + 1$ aristas para ser un K^p . Esas aristas han de ser sustituidas por caminos disjuntos de longitud, al menos 2, cuyos vértices intermedios son del conjunto $V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_p\}$. Es evidente que cada camino exige, al menos, un vértice intermedio. Hay que construir, al menos, $n - p + 1$ caminos y, sin embargo, sólo se dispone de $n - p$ vértices intermedios. Luego es imposible que los vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_p\}$ sean vértices branch de una subdivisión de K^p , con lo cual, el resultado queda demostrado. \otimes

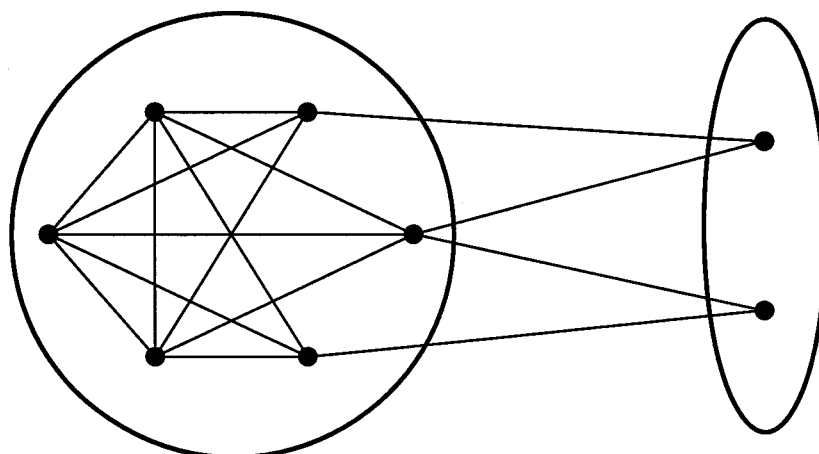


Figura 3.6: Faltan 3 aristas para obtener un K^6 y sólo disponemos de 2 vértices intermedios.

3.3 Aplicación de los resultados de estructura

En la sección anterior se han enunciado varios resultados que relacionan valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$ sobre pares (n, p) contiguos en el plano. Como veremos en esta sección, en los casos en que se cumplen ciertas propiedades sobre los grafos extremales, las desigualdades antes demostradas terminan siendo óptimas.

De este modo, estos resultados generales podrán ser aplicados a la obtención de cotas superior e inferior, así como nuevos valores exactos cuando $\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil$. También aportaremos una visión alternativa de la familia $EX(n; TK^4)$, a partir de la cual, deduciremos una sencilla caracterización de los árboles. Finalmente, apuntaremos algunas propiedades sobre los grafos de la familia extremal $EX(n; TK^6)$, aún desconocida, que, de ser ciertos, nos permitirían deducir trivialmente el valor exacto de la función $ex(n; TK^6)$.

3.3.1 Valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$

En primer lugar, aplicaremos los resultados generales de estructura en la búsqueda de valores exactos para la función extremal $ex(n; TK^p)$ cuando n y p están relacionados por la expresión $\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil$.

Teorema 3.3.1 Sean n y p dos enteros positivos, con $n \geq p$.

1. Si $p = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$, entonces $ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$.
2. Si $p = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$, entonces $ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2)$.

Demostración: Como en el capítulo anterior, con objeto de facilitar la prueba, tomaremos $q = n - p$.

(1) Tenemos que

$$p = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \iff \frac{2n+2}{3} \leq p < \frac{2n+5}{3}$$

Luego,

$$3q + 2 \leq n < 3q + 5$$

es decir, si definimos $n = 3q + k + 1$, con $1 \leq k \leq 3$ bastará demostrar que

$$ex(n; TK^{n-q}) = \binom{n}{2} - (3q - k + 2).$$

Obsérvese que los casos $k = 2$ y $k = 3$ han sido probados en los Teoremas 2.3.4 y 2.3.5. Así pues, nuestro objetivo será demostrar que

$$ex(3q+2; TK^{2q+2}) = \binom{3q+2}{2} - (3q+1).$$

Consideremos el grafo $G = \overline{C_{3q+1}} + K^1$, es decir, el grafo con $n = 3q + 2$ vértices cuyo complementario, H , está formado por un ciclo de orden $3q + 1$ y

un vértice aislado. Como $\Delta(H) = 2$, es evidente que para cualquier conjunto de q vértices que eliminemos en H , el subgrafo resultante tiene, al menos, $q + 1$ aristas. Pero esto significa que todo subgrafo de G de orden p tiene tamaño, al menos, $\binom{3q+2}{2} - (q+1)$. Luego aplicando el Teorema 3.2.6, G no contiene una subdivisión de K^{2q+2} y por consiguiente,

$$ex(3q+2; TK^{2q+2}) \geq e(G) = \binom{3q+2}{2} - (3q+1).$$

Para probar la otra desigualdad, analizaremos la familia extremal $EX(n+1; TK^{n-q+1}) = EX(3q+3; TK^{2q+3})$ caracterizada en el Teorema 2.4.3. Como ha quedado demostrado en dicho resultado, dicha familia está formada por el único grafo G cuyo complementario está formado por $q - 1$ copias disjuntas de K^3 y 3 aristas disjuntas. Es evidente que $\Delta(G) = n - 1 < n$, de lo cual, deducimos que

$$\max\{\Delta(G) : G \in EX(n+1; TK^{n-q+1})\} = n - 1 < n.$$

Luego, aplicando el Teorema 3.2.2, tenemos que

$$ex(n; TK^{n-q}) \leq ex(n+1; TK^{n-q+1}) - (n+1).$$

Pero es conocido, por el Teorema 2.3.5, que

$$ex(3q+3; TK^{2q+3}) = \binom{3q+3}{2} - 3q,$$

por lo que deducimos que

$$ex(3q+2; TK^{2q+2}) \leq \binom{3q+3}{2} - 3q - (3q+3) = \binom{3q+2}{2} - (3q+1)$$

como queríamos demostrar.

(2) Del mismo modo,

$$p = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \iff \frac{2n+1}{3} \leq p < \frac{2n+4}{3}$$

Luego,

$$3q + 1 \leq n < 3q + 4$$

es decir, si definimos $n = 3q + k + 1$, con $0 \leq k \leq 2$ bastará demostrar que

$$ex(3q + k + 1; TK^{2q+k+1}) = \binom{3q + k + 1}{2} - (3q - k + 2), \text{ si } 1 \leq k \leq 2$$

y

$$ex(3q + 1; TK^{2q+1}) = \binom{3q + 1}{2} - (3q + 1).$$

Obsérvese que el caso $k = 2$ ha sido probado en el Teorema 2.3.5 y el caso $k = 1$ ha quedado demostrado en el apartado anterior. Así pues, nuestro objetivo será demostrar que

$$ex(3q + 1; TK^{2q+1}) = \binom{3q + 1}{2} - (3q + 1).$$

Hemos obtenido el valor exacto $ex(3q + 2; TK^{2q+2})$, pero desconocemos cuáles son los grafos extremales correspondientes. No obstante, el grafo $G = \overline{C_{3q+1}} + K^1$ antes definido tiene orden $n = 3q + 2$ y tamaño extremal, y además no contiene una subdivisión de K^{2q+2} . Luego podemos afirmar que G pertenece a la familia $EX(n; TK^{2q+2})$. Por otra parte, es evidente que $\Delta(G) = n - 1$. Así que, aplicando el Teorema 3.2.2, tenemos que

$$\begin{aligned} ex(3q + 1; TK^{2q+1}) &= ex(3q + 2; TK^{2q+2}) - (3q + 1) \\ &= \binom{3q + 2}{2} - (3q + 1) - (3q + 1) \\ &= \binom{3q + 1}{2} - (3q + 1), \end{aligned}$$

es decir,

$$ex(3q + 1; TK^{2q+1}) = \binom{3q + 1}{2} - (3q + 1).$$

⊗

Como ya se ha comentado en la sección anterior, el Teorema 3.2.1 proporciona una interesante interpretación si lo analizamos desde el punto de vista del número de aristas del complementario del grafo extremal. Cuando los valores de n y p crecen a lo largo de una cualquiera de las direcciones $n - p = \text{constante}$ se observa un decrecimiento en el tamaño de dichos grafos que nos ha llevado a probar un Teorema del Sandwich (Teorema 3.1) que permite la obtención inmediata de valores exactos. En la Tabla 3.1, que recoge el valor $\binom{n}{2} - ex(n; TK^p)$; para $p \leq n \leq 12$, en los casos resueltos hasta el momento, se pueden observar algunos ejemplos que permiten la aplicación de este resultado.

Resulta evidente la obtención de soluciones en los pares $(8, 6)$, $(9, 6)$ y $(10, 7)$.

En efecto, se conoce que

- $ex(7; TK^5) = 15 = \binom{7}{2} - 6$ (ver [36]).
- $ex(9; TK^7) = 30 = \binom{9}{2} - 6$ (ver Teorema 3.3.1),

Luego, aplicando el Teorema 3.2.3, es evidente que

$$ex(8; TK^6) = \binom{8}{2} - 6 = 22.$$

Asimismo, son conocidos los valores

- $ex(8; TK^5) = 18 = \binom{8}{2} - 10$ (ver [36]).
- $ex(11; TK^8) = 45 = \binom{11}{2} - 10$ (ver Teorema 3.3.1).

Por tanto, por el Teorema 3.2.3, deducimos que

$$ex(9; TK^6) = \binom{9}{2} - 10 = 26.$$



19															1
18														1	3
17												1	3	5	
16											1	3	5	7	
15									1	3	5	7	9		
14								1	3	5	7	9	14		
13								1	3	5	7	10	15	19	
12							1	3	5	7	11	16			
11						1	3	5	7	12	16				
10					1	3	5	8	13						
9				1	3	5	9	13							
8			1	3	5	10									
7		1	3	6											
6	1	3													
5	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
p	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	Valores de n														

Tabla 3.1: $\binom{n}{2} - ex(n; TK^p)$, para $p \leq n \leq 12$.

y

$$ex(10; TK^7) = \binom{10}{2} - 10 = 35.$$

3.3.2 Cota superior para la función $ex(n; TK^p)$

Existen numerosos trabajos en los que se ha profundizado en la búsqueda de cotas superiores para esta función. De hecho, desde la cota de W. Mader [32] a

la que hicimos referencia en el inicio de esta memoria, numerosos autores se han centrado en rebajar lo máximo posible el valor de cierta constante c_p de tal modo que $ex(n; TK^p) \leq c_p n$.

Nuestro propósito en esta sección es la búsqueda de una cota superior para dicha función con una visión diferente a la de los trabajos antes citados. Si observamos el problema desde un punto de vista asintótico, esto es, fijando un valor de p y haciendo variar n las cotas que se probarán no mejoran a las conocidas hasta el momento. Sin embargo, sí aproximan la solución de este problema cuando n y p están relacionados de modo que $n \leq cp$, para cierta constante c .

Desde este punto de vista, sólo se conoce la cota superior

$$ex(n; TK^p) \leq \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1),$$

obtenida por M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [9]. En el siguiente resultado, haciendo uso de algunas de las técnicas de estructura probadas en el inicio de este capítulo, conseguimos mejorar dicha cota sobre los pares (n, p) para los que el problema sigue abierto.

En la Figura 3.7 podemos observar la técnica que seguiremos en la demostración del resultado. Dado un par (n, p) para el que desconocemos el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$, buscamos en la dirección $x - y = n - p$ el primer par (n^*, p^*) , con $n^* \geq n$, para el que sí se conoce la solución del problema extremal. Teniendo en cuenta el decrecimiento de la función $\binom{n}{2} - ex(n; TK^p)$ a lo largo de dicha dirección, podemos despejar el valor $ex(n; TK^p)$ y obtener la cota superior que buscamos.

Teorema 3.3.2 Sean n y p dos enteros positivos, con $6 \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ y $n - p \geq 3$. Entonces

$$ex(n; TK^p) \leq \binom{n}{2} - (3n - 3p + 1).$$

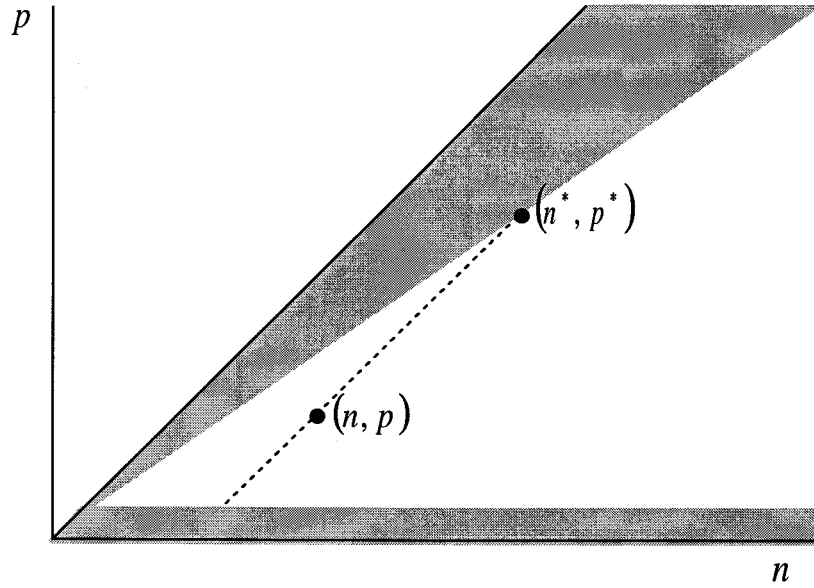


Figura 3.7: $\binom{n}{2} - ex(n; TK^p) \geq \binom{n^*}{2} - ex(n^*; TK^{p^*})$.

Demostración: Sean n y p dos enteros positivos en las condiciones del teorema. Consideremos los enteros $n^* = 3(n - p) + 1$ y $p^* = 2(n - p) + 1$. Sabemos que se verifica la desigualdad

$$\binom{n}{2} - ex(n; TK^p) \geq \binom{n^*}{2} - ex(n^*; TK^{p^*}).$$

Por otra parte, obsérvese que $p^* = \frac{2n^* + 1}{3}$, es decir, que el par (n^*, p^*) es el primer par perteneciente a la semirrecta $x - y = n - p$, con $x \geq n$, para el que se conoce el valor exacto de la función extremal. En efecto, por el Teorema 3.3.1, conocemos que

$$ex(n^*; TK^{p^*}) = \binom{n^*}{2} - (5n^* - 6p^* + 2).$$

Luego, sustituyendo n^* y p^* por sus valores en términos de n y p , llegamos a que

$$ex(n; TK^p) \leq \binom{n}{2} - (5(3(n-p) + 1) - 6(2(n-p) + 1) + 2),$$

es decir,

$$ex(n; TK^p) \leq \binom{n}{2} - (3n - 3p + 1).$$

⊗

Obsérvese que conforme se pueda ampliar el sector $\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \leq p \leq n$ mediante la obtención de nuevos valores exactos, podrá ser aplicado el Teorema 3.3.2 para afinar aún más en la acotación para los casos en que el problema siga abierto.

3.3.3 Cota inferior para la función $ex(n; TK^p)$

La búsqueda de una cota inferior para la función extremal consiste en encontrar un grafo con n vértices sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo. Aunque a priori parece una tarea menos complicada, no existen trabajos que hayan abordado su estudio.

Sólo es conocida la cota

$$ex(n; TK^p) \geq (p-2)n - \binom{p-1}{2},$$

que se deduce trivialmente de comprobar que el grafo $K^{p-2} + \overline{K^{n-p+2}}$ no contiene una subdivisión de K^p como subgrafo. Para valores pequeños de p esta cota parece una aproximación inmejorable del valor exacto. De hecho, en los casos resueltos de $p = 3, 4$ y 5 , coincide con la solución del problema, al tiempo que no parece probable mejorarla cuando $p = 6$ o $p = 7$.

Del mismo modo que para el caso de la cota superior antes demostrada, nuestro propósito en las líneas que siguen es el de abordar la búsqueda de alguna

cota inferior que nos ponga en la pista de nuevos valores exactos para la función extremal.

Para ello, recurriremos de nuevo al trabajo de M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [10] (ver Teorema 2.1.2). Recuérdese que en dicho trabajo se prueba que si $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n-3$ entonces $G = (2n-2p+1)\overline{K^2} + K^{4p-3n-2}$ es el único grafo extremal para este problema.

Si observamos el grafo complementario de G , podemos comprobar que dicho grafo está formado por $(2n-2p+1)$ copias disjuntas de K^2 y $(4p-3n-2)$ copias disjuntas de K^1 . Así que tenemos que G es un grafo r -partito completo, siendo $r = (2n-2p+1) + (4p-3n-2) = 2p-n-1$, cuyos vértices están repartidos entre las clases del modo más igualitario posible. En otras palabras, G es el Grafo de Turán $T_{2p-n-1}(n)$.

Lo mismo sucede con el segundo sector demostrado en [10]. Se prueba que si $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$ entonces $G = (3n-4p+2)\overline{K^3} + (6p-4n-3)\overline{K^2}$ es el único grafo extremal. Su grafo complementario está formado, pues, por $(3n-4p+2)$ copias disjuntas de K^3 y $(6p-4n-3)$ copias disjuntas de K^2 . Por tanto, G es un grafo r -partito completo, cuyos vértices están repartidos también entre sus clases del modo más igualitario posible, siendo r un entero dado por $r = (3n-4p+2) + (6p-4n-3) = 2p-n-1$.

En resumen, de los trabajos de M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [9] y [10] deducimos que el valor exacto para la función $ex(n; TK^p)$ coincide con el Número de Turán $t_{2p-n-1}(n)$ en los sectores infinitos antes reseñados. Más aún, el propio Grafo de Turán $T_{2p-n-1}(n)$ es el único grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^p)$ correspondiente.

Resulta evidente, pues, que las soluciones del Problema Topológico objeto de nuestro estudio están muy relacionadas con las soluciones del Problema de

Turán, al menos, cuando n y p están suficientemente cercanos.

Por ello, en las líneas que siguen nos planteamos analizar hasta qué punto son determinantes los Grafos de Turán en la solución del Problema Topológico. Probaremos que en cierta región del plano (n, p) , existen Grafos de Turán que no contienen subdivisiones de un grafo completo y cuyo tamaño será una cota inferior para la función $ex(n; TK^p)$. El resultado que obtendremos nos servirá más adelante para iniciar la búsqueda de nuevos valores exactos para la función extremal.

Observación 3.3.3 *El Número de Turán $t_r(n)$ puede ser expresado en términos del número de aristas del complementario como sigue:*

$$\begin{aligned} t_r(n) &= \binom{n}{2} - \left(r \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - 1} i + \left(n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \right) \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \right) \\ &= \binom{n}{2} - \left(\left(n - \frac{r}{2} \right) \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \frac{r}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor^2 \right). \end{aligned}$$

A partir de la observación anterior, vamos a hacer uso de la siguiente notación.

Notación 3.3.4 *Dados n, p, k y r enteros positivos con $n \geq p \geq 3$ y tales que $k, r \in \{2, \dots, p-1\}$,*

1. Denotaremos por $f_p(k) = p \left\lfloor \frac{p+1}{k} \right\rfloor - k \left(\left\lfloor \frac{\frac{p+1}{k}}{2} \right\rfloor \right) - 1$.
2. Denotaremos por $\bar{t}_r(n) = \left(n - \frac{r}{2} \right) \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \frac{r}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor^2$.

En el siguiente resultado probaremos que en el sector infinito del plano que aparece en la Figura 3.8, y que viene determinado por los valores de n y p tales que $6 \leq p < \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor$, es posible acotar inferiormente la función $ex(n; TK^p)$ en términos de los Números de Turán.



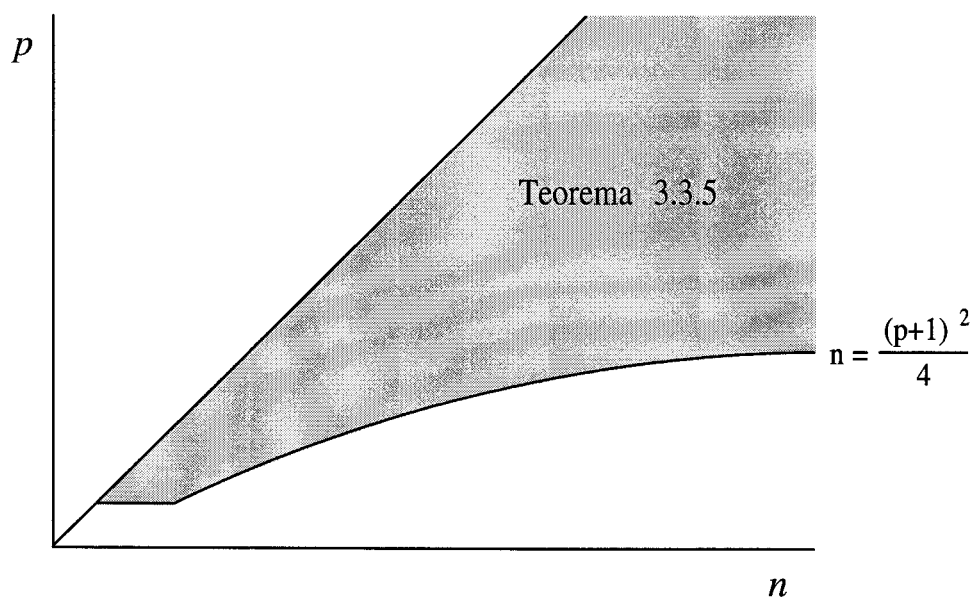


Figura 3.8: Nueva cota inferior para la función $ex(n; TK^p)$.

Teorema 3.3.5 Sean n y p enteros positivos, con $n \geq p$ y $n < \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor$. Si denotamos por $r = \max\{k \text{ entero y } 2 \leq k \leq p-1 : n \leq f_p(k)\}$, entonces

$$ex(n; TK^p) \geq t_r(n) + f_p(r) - n.$$

Demostración: Teniendo en cuenta que $n < \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor = f_p(2) + 1$, está siempre garantizada la existencia de algún entero $k \in \{2, \dots, p-1\}$ tal que $n \leq f_p(k)$ y, por tanto, el valor r está bien definido.

Vamos a probar en primer lugar el resultado en el caso particular en que $n = f_p(r)$. Veamos que

$$ex(n; TK^p) \geq t_r(n),$$

o, de modo equivalente, que el Grafo de Turán $T_r(n)$ no contiene una subdivisión de K^p como subgrafo.

Es fácil comprobar que el subgrafo de $T_r(n)$ con p vértices y máximo número de aristas es $T_r(p)$. Pero a este grafo le faltan $\bar{t}_r(p)$ aristas para ser un grafo completo de orden p , es decir,

$$e(T_r(p)) = t_r(p) = \binom{p}{2} - \bar{t}_r(p).$$

Así, pues, dado un conjunto cualquiera de p vértices branch en $T_r(n)$, $\{v_1, \dots, v_p\}$, al subgrafo H de $T_r(n)$ inducido por tales vértices le faltan, al menos, $\bar{t}_r(p)$ aristas para ser un K^p y, por tanto,

$$e(H) \leq \binom{p}{2} - \bar{t}_r(p).$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \bar{t}_r(p) &= \left(p - \frac{r}{2}\right) \left[\frac{p}{r}\right] - \frac{r}{2} \left[\frac{p}{r}\right]^2 \\ &= \left(p - \frac{r}{2}\right) \left(\left[\frac{p+1}{r}\right] - 1\right) - \frac{r}{2} \left(\left[\frac{p+1}{r}\right] - 1\right)^2 \\ &= p \left[\frac{p+1}{r}\right] - r \binom{\left[\frac{p+1}{r}\right]}{2} - p = f_p(r) + 1 - p = n - p + 1. \end{aligned}$$

Es decir, $e(H) \leq \binom{p}{2} - \bar{t}_r(p) = \binom{p}{2} - (n - p + 1)$. Luego, aplicando el Teorema 3.2.6, el grafo de Turán $T_r(n)$ no contiene una subdivisión de K^p como subgrafo y, por consiguiente,

$$ex(n; TK^p) \geq t_r(n).$$

En general, supongamos que $n < f_p(r)$, siendo

$$r = \max\{k \text{ entero y } 2 \leq k \leq p-1 : n \leq f_p(k)\}.$$

Vamos a demostrar que si tomamos en el Grafo de Turán $T_r(n)$ un conjunto E de aristas de cardinal $f_p(r) - n$, entonces el grafo resultante G no contiene a K^p como subdivisión.

Recordemos que en el caso anterior para cualquier elección de p vértices branch al subgrafo de $T_r(n)$ inducido por dichos vértices le faltan, al menos, $\bar{t}_r(p)$ aristas para ser un K^p . Por tanto al subgrafo H de G inducido por un conjunto $\{v_1, \dots, v_p\}$ de p vértices branch cualesquiera le faltarán, al menos $\bar{t}_r(p) - (f_p(r) - n)$ aristas para ser un K^p . Pero entonces,

$$\begin{aligned} e(H) &\leq \binom{p}{2} - (\bar{t}_r(p) - (f_p(r) - n)) \\ &= \binom{p}{2} - (f_p(r) + 1 - p - (f_p(r) - n)) \\ &= \binom{p}{2} - (n - p + 1). \end{aligned}$$

Luego, aplicando de nuevo el Teorema 3.2.6, deducimos que el grafo G no contiene a K^p como subdivisión y, por tanto,

$$ex(n; TK^p) \geq e(G) = t_r(n) + |E| = t_r(n) + f_p(r) - n$$

como queríamos demostrar. ⊗

En la Tabla 3.2 podemos observar la notable mejora conseguida con esta nueva cota inferior si la comparamos con la conocida hasta ahora.

En los casos en que p es impar, aún existen pares de valores (n, p) no considerados en el Teorema 3.3.5 para los que es posible encontrar Grafos de Turán sin contener una subdivisión de K^p , como vemos a continuación.

Teorema 3.3.6 Sean n y p dos enteros positivos tales que p es impar y $\left\lfloor \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \right\rfloor \leq n < \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \right\rfloor + \frac{p-5}{2}$. Entonces

$$ex(n; TK^p) \geq t_2(n).$$

p	n	$(p-2)n - \binom{p-1}{2}$	$t_r(n) + f_p(r) - n$
10	17	100	108
25	57	1035	1392
75	272	17155	33908
200	1050	$1,9 \cdot 10^5$	$5,2 \cdot 10^5$
800	21700	$1,7 \cdot 10^7$	$2,2 \cdot 10^8$
2000	40000	$7,8 \cdot 10^7$	$7,8 \cdot 10^8$
5000	415000	$2 \cdot 10^9$	$8,3 \cdot 10^{10}$
10^4	504000	$5 \cdot 10^9$	$1,2 \cdot 10^{11}$
10^5	$6,6 \cdot 10^7$	$6,6 \cdot 10^{12}$	$2,1 \cdot 10^{15}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
10^8	$5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{21}$	$1,2 \cdot 10^{27}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabla 3.2: Comparación de ambas cotas inferiores.

Demostración: Vamos a demostrar que en el sector anterior, el Grafo de Turán $T_2(n)$ no contiene como subdivisión a K^p . Denotemos por C_1 y C_2 a las dos clases de vértices de $T_2(n)$. Para cualquier conjunto $\{v_1, \dots, v_p\}$ de vértices de $T_2(n)$, al subgrafo inducido por dicho conjunto le faltan, al menos $\binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + s}{2}$ aristas en una de sus clases, por ejemplo C_1 , y por tanto $\binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - s}{2}$ aristas en C_2 para ser un K^p , siendo $s \geq 0$.



Obsérvese también que cada una de las aristas que faltan en una de las clases debe ser sustituida por un camino en el que al menos uno de sus vértices intermedios deber pertenecer a la otra clase. Por consiguiente, si probamos que el número de aristas que faltan en una de las clases es mayor que el número de vértices que no son vértices branch de la otra, habremos demostrado el resultado. Probaremos concretamente, que

$$\binom{\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + s}{2} > |C_2| - \left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - s \right).$$

En efecto, como p es impar, tenemos que

$$n \leq \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor + \frac{p-5}{2} - 1 = \frac{p^2 + 4p - 13}{4}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \binom{\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + s}{2} &= \frac{p^2 - 1}{8} + s \frac{p + s}{2} \\ &\geq \frac{p^2 - 1}{8} + s \\ &> \frac{p^2 - 5}{8} + s \\ &= \frac{p^2 + 4p - 13}{8} - \frac{p - 2}{2} + s \\ &\geq \frac{n + 1}{8} - \frac{p - 1}{2} + s \\ &\geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - s \right) \geq |C_2| - \left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - s \right) \end{aligned}$$

Luego, $T_2(n) \not\subseteq TK^p$, quedando probado el resultado. \otimes

Como hemos podido comprobar, los Grafos de Turán nos conducen a una cota inferior que supone una mejora considerable y un mayor acercamiento al posible valor exacto. También es cierto que esta cota no es válida en todo el plano.

En el siguiente resultado se demuestra que en cualquiera de los casos no recogidos en los Teoremas 3.3.5 y 3.3.6, no se puede acotar inferiormente la función $ex(n; TK^p)$ en términos de los Números de Turán. Por consiguiente, la función

$$g(p) = \begin{cases} \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor & \text{si } p \text{ es par} \\ \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor + \frac{p-5}{2} & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

representa la frontera que separa en el plano (n, p) la región en la que es posible encontrar Grafos de Turán sin contener una subdivisión de K^p de la zona donde resulta imposible tal cosa.

Teorema 3.3.7 Sean n y p dos enteros positivos, con $p \geq 6$ y tales que $n \geq \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor$. Entonces, se verifica:

1. $T_r(n) \supseteq TK^p$, para todo entero r , con $3 \leq r \leq p-1$.
2. Además, si $n \geq g(p)$ entonces $T_2(n) \supseteq TK^p$.

Demostración: (1) Denotemos por C_i a cada una de las clases de vértices del grafo de Turán $T_r(n)$, con $i = 1, \dots, r$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|C_i| \geq |C_{i+1}|$, es decir, que $|C_i| = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$, para $i = 1, \dots, n-r \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ y $|C_i| = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$, para $i = n-r \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1, \dots, r$.

Consideremos el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_p\}$ resultante de elegir $\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor$ vértices en la clase C_j , si $j \in \left\{1, \dots, n-r \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor\right\}$ y $\left\lceil \frac{p}{r} \right\rceil$ vértices en la clase C_j , si $j \in \left\{n-r \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor + 1, \dots, r\right\}$. Es evidente que el subgrafo de $T_r(n)$ inducido por el conjunto de vértices así elegido, es el grafo de Turán $T_r(p)$. Asimismo sabemos que a dicho grafo le faltan $\bar{t}_r(p)$ aristas, $e_i = (a_i, b_i)$, con $i \in \{1, \dots, \bar{t}_r(p)\}$, para ser un grafo completo de orden p . Además, por la propia definición de

Grafo de Turán, sabemos que cada una de las aristas que faltan une en $\overline{T_r(p)}$ dos vértices de la misma clase. Vamos a demostrar que esas aristas se pueden sustituir por caminos disjuntos de longitud dos cuyos vértices intermedios pertenecen al conjunto $V(T_r(n)) - V(T_r(p))$. De este modo, deduciremos que el Grafo de Turán $T_r(n)$ contiene una subdivisión de K^p como subgrafo.

Denotemos por E_i al conjunto de aristas de $\overline{T_r(p)}$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Recordemos que esas aristas unen en $\overline{T_r(p)}$ vértices de la clase C_i . Por otra parte por construcción, $|E_i| = \binom{\lfloor \frac{p}{r} \rfloor}{2}$, si $i = 1, \dots, p - r \lfloor \frac{p}{r} \rfloor$, $|E_i| = \binom{\lfloor \frac{p}{r} \rfloor}{2}$, si $i = p - r \lfloor \frac{p}{r} \rfloor + 1, \dots, r$ y además

$$\bar{t}_r(p) = \sum_{i=1}^r |E_i|.$$

Denotemos por V_i al conjunto de vértices de C_i que no son vértices branch. Teniendo en cuenta la forma de elegir los vértices branch en $T_r(p)$ y que los conjuntos C_i se diferencian a lo sumo en un vértice, es fácil comprobar que los conjuntos V_i de vértices no branch también difieren a lo sumo en un vértice, es decir, $|V_i| - |V_j| \in \{-1, 0, 1\}$; además, como siempre, el conjunto de vértices que no son branch tiene cardinal $n - p$ y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^r |V_i| = n - p.$$

Obsérvese que $n \geq \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor = f_p(2) + 1$ con lo cual $n > f_p(r)$ para todo $r \geq 2$ y por consiguiente, $\bar{t}_r(p) \leq n - p$.

Consideremos el grafo bipartito B cuyas clases son los conjuntos $X = \bigcup_{i=1}^r E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_{\bar{t}_r(p)}\}$ e $Y = \bigcup_{i=1}^r V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-p}\}$, definido de modo que un elemento $e_i = (a_1, b_i)$ es adyacente a otro v_j en B si existe en $T_r(n)$ el camino $a_i v_j b_i$. En estas condiciones, bastará demostrar la existencia de

un emparejamiento completo en el grafo B para deducir la contención por parte de $T_r(n)$ de una subdivisión de K^p .

Aplicaremos en este caso la Condición de Hall (ver Teorema 1.1.1) sobre emparejamientos completos. Así pues, debemos comprobar que se verifica que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$, para todo $A \subseteq X$, siendo $\mathbf{N}_B(A) = \bigcup_{v \in A} \mathbf{N}_B(v)$ y $\mathbf{N}_B(v)$ el conjunto de vértices adyacentes a v en B .

Sea A un subconjunto cualquiera de X . Obsérvese que si $\{e, \tilde{e}\} \subseteq A$, siendo $e \in E_j$ y $\tilde{e} \in E_k$, con $j \neq k$, entonces $\mathbf{N}_B(A) = Y$, puesto que

$$\mathbf{N}_B(\{e\}) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r E_i \text{ y } \mathbf{N}_B(\{\tilde{e}\}) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r E_i.$$

Pero en tal caso, $|\mathbf{N}_B(A)| = n - p \geq \bar{t}_r(p) = |X| \geq |A|$. Luego, será suficiente demostrar que $|\mathbf{N}_B(E_j)| \geq |E_j|$, para todo $j = 1, \dots, r$, es decir, que

$$|E_j| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i|.$$

La prueba la haremos por reducción al absurdo, suponiendo que existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$|E_j| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i|.$$

Las siguientes consideraciones nos llevarán a contradicción:

Por una parte, como $\bar{t}_r(p) = \sum_{i=1}^r |E_i| \leq n - p = \sum_{i=1}^r |V_i|$, resulta ser

$$|V_j| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |E_i|.$$

Por otra parte, como $|V_j| - |V_k| \leq 1$, para todo $k = 1, \dots, r$, con $k \neq j$, tenemos que

$$|V_k| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |E_i|.$$



Finalmente, puesto que $|E_j| - |E_k| \leq \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor$, para todo $k = 1, \dots, r$, con $k \neq j$, deducimos que

$$|E_k| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i| - \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j\}.$$

Sea $k \in \{1, \dots, r\}$, con $k \neq j$. Se verifica:

$$|E_k| > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^r |V_s| - \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor \geq (r-1) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |E_i| - \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor.$$

Por tanto, $(r-2) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |E_i| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^r |E_i| - \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor < 0$.

Sin embargo, $|E_i| \geq \binom{\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor}{2}$, para todo $i \geq 1$. Luego,

$$(r-2)(r-1) \binom{\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor}{2} + (r-2) \binom{\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor}{2} - \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor < 0.$$

Pero como $r \leq p-1$, es claro que $\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor > 0$, con lo cual

$$\frac{r(r-2)}{2} \left(\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor - 1 \right) - 1 < 0$$

y, por consiguiente,

$$\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor < 1 + \frac{2}{r^2 - 2r} < 2 \text{ para todo } r \geq 3.$$

Luego, $\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor = 1$, es decir, $|E_j| \leq 1$.

Ahora bien, como $|E_j| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i|$, tenemos que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i| = 0$. Por tanto, $n - p = |V_j| \leq 1$, es decir, $n \leq p + 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis $n \geq \left\lceil \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rceil$, con $p \geq 6$. Luego $|E_j| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r |V_i|$, quedando demostrado el primer punto.

(2) Para probar que $T_2(n)$ contiene una subdivisión de K^p como subgrafo, haciendo uso de la misma notación introducida en la prueba del apartado anterior, consideremos el subgrafo de Turán $T_2(p)$ definido de modo que $|E_1| = \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{2}$ y $|E_2| = \binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil}{2}$. Nuevamente, aplicaremos la Condición de Hall sobre emparejamientos completos para probar la existencia de dicho emparejamiento en el grafo bipartito B cuyas clases son $X = E_1 \cup E_2$ e $Y = V_1 \cup V_2$, definido igual que en el caso anterior. Será suficiente, pues, demostrar que $|E_1| \leq |V_2|$ y $|E_2| \leq |V_1|$. Diferenciaremos los casos en que p es par e impar.

Si p es par, tenemos que $n \geq \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor = \frac{p^2 + 2p}{4}$, con lo cual,

$$\begin{aligned} \bullet |V_2| &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{p}{2} \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 + 2p}{4} \right) \right\rfloor - \frac{p}{2} \\ &= \frac{p^2 + 2p}{8} - \frac{p}{2} \\ &= \frac{p^2 - 2p}{8} = \binom{\frac{p}{2}}{2} = |E_1|. \end{aligned}$$

$$\bullet |V_1| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \frac{p}{2} \geq |V_2| \geq |E_1| = |E_2|.$$

Si p es impar, tenemos que $n \geq \left\lfloor \left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right\rfloor + \frac{p-5}{2} = \frac{p^2 + 4p - 9}{4}$. Luego,

$$\begin{aligned} \bullet |V_2| &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{p+1}{2} \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 + 4p - 9}{4} \right) \right\rfloor - \frac{p+1}{2} \\ &= \frac{p^2 + 4p - 13}{8} - \frac{p+1}{2} \\ &= \frac{p^2 - 17}{8} \\ &\geq \frac{p^2 - 3p + 2}{8} \\ &= \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{2} = |E_1|, \end{aligned}$$

puesto que $p \geq 7$.

$$\begin{aligned}
 \bullet |V_1| &= \binom{n}{2} - \frac{p-1}{2} \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 + 4p - 9}{4} \right) \right\rfloor - \frac{p-1}{2} \\
 &= \frac{p^2 + 4p - 5}{8} - \frac{p-1}{2} = \frac{p^2 - 1}{8} \\
 &= \binom{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}{2} = |E_2|.
 \end{aligned}$$

Luego $T_2(n) \supseteq TK^p$, con lo cual, el resultado queda demostrado. \otimes

3.3.4 Otras aplicaciones

Los resultados de estructura obtenidos en la sección anterior pueden ser aplicados a la familia extremal $EX(n; TK^5)$, conocida por el trabajo de W. Mader [36], para relacionar de forma elegante los grafos periplanos maximales con la familia de grafos extremales $EX(n; TK^4)$, también caracterizada por G.A. Dirac [13].

La familia extremal $EX(n; TK^4)$ [13] es la formada por los grafos con n vértices que resultan de “pegar” recursivamente triángulos a lo largo de aristas. Un ejemplo de este tipo de grafos podemos encontrarlo en la Figura 3.9. Por su parte, los grafos de la familia $EX(n; TK^5)$ son aquellos que se obtienen de “pegar” sucesivamente grafos planos maximales disjuntos, de orden al menos, tres a lo largo de un triángulo. Obsérvese también un ejemplo en la Figura 3.10.

Recuérdese que los grafos periplanos son aquellos que admiten una inmersión en el plano con todos sus vértices en una cara (ver [25]). Y se dicen maximales cuando dejan de ser periplanos sólo con añadirle una nueva arista. En relación con este tipo de grafos, es conocido el siguiente resultado.

Teorema 3.3.8 [25] *Para cualquier grafo G se verifica:*

1. G es periplano si y sólo si $G + K^1$ es plano.
2. G es periplano maximal si y sólo si $G + K^1$ es plano maximal.

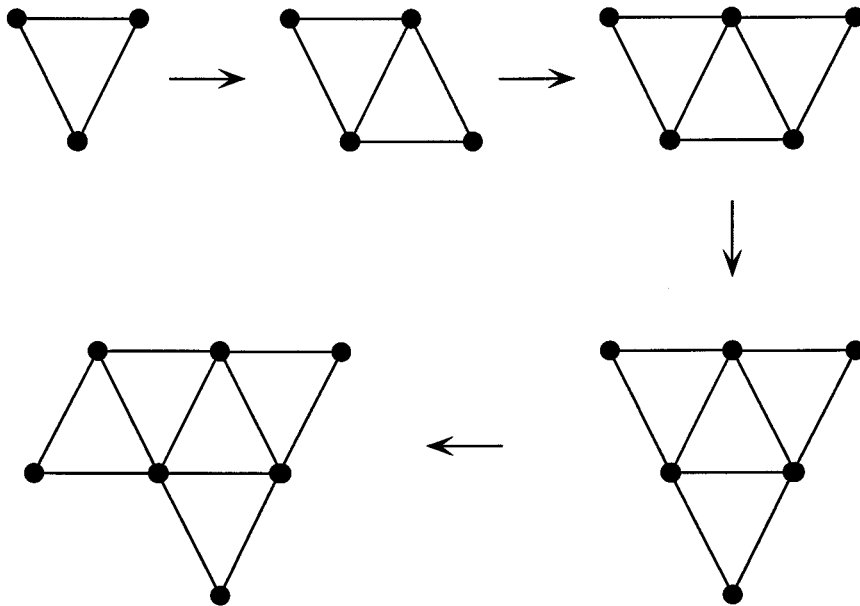


Figura 3.9: Ejemplo de un grafo G de la familia $EX(7; TK^4)$.

A partir de los trabajos de Dirac y Mader antes citados conocemos que

$$ex(n; TK^4) = 2n - 3,$$

de lo cual, deducimos que

$$ex(n; TK^4) = 3(n + 1) - 6 - n = ex(n + 1; TK^5) - n.$$

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.2.4 y, por tanto, todo grafo G perteneciente a la familia $EX(n; TK^4)$ resulta de eliminar un vértice de valencia máxima n en otro grafo $G^* \in EX(n + 1; TK^5)$. Recordemos que G^* se obtiene de “pegar” grafos planos maximales G_i^* , para $i = 1, \dots, r$. Así que si v es un vértice de valencia máxima n de G^* , entonces v es un vértice de valencia máxima en cada uno de los grafos G_i^* . Luego aplicando el Teorema 3.3.8 tenemos que $G_i^* - v$ es un grafo periplano maximal, para cada $i = 1, \dots, r$. Como $G = G^* - v$ llegamos a que

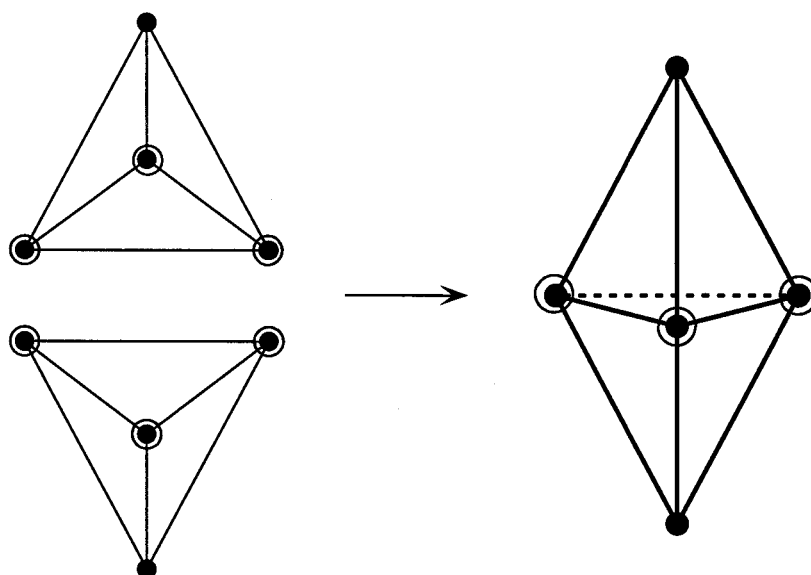


Figura 3.10: Ejemplo de un grafo G de la familia $EX(8; TK^5)$.

La familia extremal $EX(n; TK^4)$ es la formada por los grafos resultantes de identificar grafos periplanos maximales a través de una arista.

Mediante un razonamiento similar al que hemos utilizado anteriormente, podemos aplicar los resultados de estructura de la sección anterior sobre las familias extremales $EX(n; TK^3)$ y $EX(n; TK^4)$ y deducir en consecuencia una nueva caracterización de los árboles.

Teorema 3.3.9 *Dado un grafo T , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. T es un árbol de orden n .
2. $T + K^1$ es un grafo resultante de identificar grafos periplanos maximales por medio de una arista.

Demostración: De manera trivial, es conocido que $ex(n; TK^3) = n - 1$ y que su

correspondiente familia de grafos extremales $EX(n; TK^3)$ está formada por todos los árboles con n vértices. Así pues, teniendo en cuenta que $ex(n; TK^4) = 2n - 3$ (ver [13]), es evidente que

$$ex(n; TK^3) = 2(n + 1) - 3 - n = ex(n + 1; TK^4) - n.$$

Luego aplicando el Teorema 3.2.4 y teniendo en cuenta la caracterización antes probada para la familia $EX(n; TK^4)$ deducimos las siguientes equivalencias:

Es conocido que T es un árbol de orden n si y sólo si $T \in EX(n; TK^3)$. Por otra parte, aplicando el Teorema 3.2.4, tenemos que $T \in EX(n; TK^3)$ si y sólo si $T + K^1 \in EX(n + 1; TK^4)$. Finalmente, por [13], conocemos que $T + K^1 \in EX(n; TK^4)$ si y sólo si $T + K^1$ es un grafo resultante de identificar grafos periplanos maximales por medio de una arista.

Por consiguiente, T es un árbol de orden n si y sólo si $T + K^1$ resulta de identificar grafos periplanos maximales por medio de una arista, como queríamos demostrar. \otimes

3.4 Conclusiones y problemas abiertos

Resulta evidente que la búsqueda de valores exactos para la función $ex(n; TK^p)$ supone afrontar un problema con una gran complejidad combinatorial, que crece conforme lo hace la diferencia entre n y p .

En este capítulo hemos centrado nuestros esfuerzos en la búsqueda de resultados generales que, bajo determinadas condiciones, muestran cómo se relacionan los valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$ y cómo lo hacen sus familias

extremales respectivas cuando consideramos pares (n, p) a lo largo de ciertas direcciones en el plano.

Dichos resultados se han basado principalmente en la siguiente idea: Dado un grafo G perteneciente a la familia extremal $EX(n; TK^p)$, parece lógico pensar que en las familias $EX(n+1; TK^p)$, $EX(n+1; TK^{p+1})$ o $EX(n; TK^{p+1})$ puedan existir sendos grafos con estructura “similar” a la del grafo G . En otras palabras, teniendo en cuenta que $ex(n; TK^p)$ es una función de dos variables, si la analizamos a lo largo de determinadas direcciones en el plano (n, p) , parece lógico pensar que se pueden deducir ciertas relaciones de monotonía.

De este modo se han probado resultados generales cuya aplicación ha sido inmediata en muchos casos. Hemos obtenido los valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$ cuando $\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ y hemos encontrado dos acotaciones para dicha función extremal que nos ponen en la pista de nuevas soluciones de este problema, como veremos más adelante. Queremos concluir este capítulo apuntando algunas consideraciones acerca de un interesante problema abierto.

Desde la resolución de la Conjetura de Dirac por parte de W. Mader [36], queda abierta la prueba del caso $p = 6$. Hasta la fecha, no ha sido posible encontrar un grafo G con n vértices sin contener una subdivisión de K^6 y cuyo tamaño sea mayor que $4n - 10$. En la Tabla 3.1 podemos ver que cuando $p = 6$ sólo se conocen valores exactos para $n \leq 9$, y en tales casos, $ex(n; TK^6) = 4n - 10$.

Sin duda, queda por delante un interesante problema abierto. Dado que parece probable que sea ése el valor exacto de la función $ex(n; TK^6)$, los resultados de estructura de la sección anterior nos permiten enunciar el siguiente teorema que aporta dos condiciones necesarias y suficientes para que $4n - 10$ sea el tamaño óptimo. Ambas están basadas en las valencias máxima y mínima de los grafos extremales.

Teorema 3.4.1 *Para todo $n \geq 6$, $ex(n; TK^6) = 4n - 10$ si y sólo si se verifica, al menos, una de las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $n \geq 6$, existe un grafo $G \in EX(n; TK^6)$ tal que $\Delta(G) = n - 1$.*
2. *Para cada $n \geq 6$, existe un grafo $G \in EX(n; TK^6)$ tal que $\delta(G) \leq 4$.*

Demostración: La condición necesaria es inmediata en cualquiera de los dos puntos del teorema. En efecto, suponiendo que $ex(n; TK^6) = 4n - 10$, basta considerar el grafo $G = K^4 + \overline{K^{n-4}}$. Es fácil comprobar que el grafo G tiene n vértices, $4n - 10$ aristas y no contiene una subdivisión de K^6 . Por otra parte, es evidente que $\Delta(G) = n - 1$ y $\delta(G) = 4$.

Vamos a probar que son también condiciones suficientes. En primer lugar, es cierto siempre que $ex(n; TK^6) \geq 4n - 10$, puesto que sólo basta tomar el grafo G antes citado para comprobar se pueden encontrar grafos con n vértices y $4n - 10$ aristas que no contienen a K^6 como subdivisión. Así que sólo es necesaria la prueba de la otra desigualdad.

(1) Supongamos que existe un grafo G perteneciente a la familia extremal $EX(n; TK^6)$ tal que $\Delta(G) = n - 1$. En este caso, deducimos que

$$\max\{\Delta(G) : G \in EX(n; TK^6)\} = n - 1$$

y por consiguiente, aplicando el Teorema 3.2.2, tenemos que

$$ex(n; TK^6) \leq ex(n - 1; TK^5) + n - 1 = 3(n - 1) - 6 + n - 1 = 4n - 10,$$

como queríamos demostrar.

(2) Supongamos ahora que para cada $n \geq 6$ existe un grafo G perteneciente a la familia $EX(n; TK^6)$ tal que $\delta(G) \leq 4$. Vamos a realizar la demostración por inducción sobre el número de vértices.



Para $n = 6$ el resultado es trivial, puesto que el único grafo con 6 vértices que no contiene una subdivisión de K^6 es K^6 menos una arista, con lo cual, $ex(6; TK^6) = 14 = 4 \cdot 6 - 10$. Así, pues, supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, es decir, que $ex(n - 1; TK^6) \leq 4(n - 1) - 10$. Vamos a demostrar que también lo es para n .

Por hipótesis, sabemos que existe un grafo $G \in EX(n; TK^6)$ tal que $\delta(G) \leq 4$. Por tanto, aplicando el Teorema 3.2.5, sabemos que

$$ex(n; TK^6) \leq ex(n - 1; TK^6) + \delta(G) \leq 4(n - 1) - 10 + 4 = 4n - 10$$

quedando probado el resultado. ⊗

Como se ha venido comentando a lo largo de esta memoria, la búsqueda de soluciones de este problema se ha llevado a cabo, tradicionalmente, para valores fijos de p . Quizás por ello, la prueba del valor exacto para la función $ex(n; TK^6)$ es uno de los casos que suscita más interés entre los casos que siguen abiertos.

Capítulo 4

Estudio de la función $ex(n; TK^p)$

Abordaremos la búsqueda de valores exactos para la función extremal $ex(n; TK^p)$ en el sector infinito de plano (n, p) determinado por la expresión $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Asimismo, en dicho sector procederemos a la caracterización de la correspondiente familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales para el problema.

4.1 Introducción

Son muchos los trabajos que han abordado el estudio de este problema extremal, aunque la mayoría de ellos se han centrado en la búsqueda de cotas superiores para la función $ex(n; TK^p)$. En general, las acotaciones han sido obtenidas asintóticamente, es decir, fijando un valor de p y haciendo variar valores de n suficientemente grandes. Aunque desde el trabajo de W. Mader [32] hasta el de A. Thomason [5] se han venido realizando sucesivas mejoras con nuevas cotas, ninguna de ellas conduce a valores exactos para la función extremal.



De hecho, el problema se vuelve mucho más complicado cuando se trata de encontrar dichos valores exactos y de caracterizar la correspondiente familia extremal de grafos. Prueba de ello es la escasez de trabajos en este sentido.

El caso $p = 3$ es trivialmente conocido. Obsérvese que las subdivisiones de un K^3 son los ciclos. Por tanto $ex(n; TK^3)$ representa el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener ciclos. En este caso es evidente que los grafos extremales son los árboles de orden n y en consecuencia que $ex(n; TK^3) = n - 1$, ($n \geq 3$).

El caso $p = 4$ fue resuelto por G.A. Dirac en [13] quien demostró que $ex(n; TK^4) = 2n - 3$, ($n \geq 4$). También probó que la familia $EX(n; TK^4)$ es la formada por los grafos con n vértices resultantes de “pegar” recursivamente triángulos a lo largo de aristas.

El caso $p = 5$ ha sido el más estudiado de todos. Su punto de partida fue la conjetura $ex(n; TK^5) = 3n - 6$ planteada por G.A. Dirac [14] en 1964. Como ya se ha citado en esta memoria, la conjetura fue finalmente resuelta por W. Mader [36] en 1998, probándose además en [37] que la familia $EX(n; TK^5)$ está compuesta por los grafos que se obtienen de “pegar” sucesivamente grafos planos maximales disjuntos de orden, al menos, 3 a lo largo de un triángulo.

Finalmente nos encontramos con dos trabajos de M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [9] y [10] en los que se aborda el análisis del problema desde otro punto de vista. En lugar de fijar un valor de p se opta por fijar la diferencia $n - p$, es decir, se afronta la búsqueda de valores exactos sobre las rectas $n - p = constante$. De este modo, encuentran el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$ para cualquier par de valores (n, p) tales que $\left\lceil \frac{2n + 5}{3} \right\rceil \leq p \leq n$. También caracterizan la familia $EX(n; TK^p)$ de grafos extremales cuando $\left\lceil \frac{2n + 6}{3} \right\rceil \leq p \leq n - 4$. Estos trabajos han sido completados en el Capítulo 2 de esta memoria donde se han encontrado

nuevos valores exactos y se han caracterizado familias extremales, quedando cerrado el problema para cualquier par (n, p) tal que $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n$.

Como ya hemos comprobado en el capítulo anterior, las soluciones vienen dadas en términos del Número de Turán $t_{2p-n-1}(n)$ y es el Grafo de Turán $T_{2p-n-1}(n)$ el único grafo extremal, excepto cuando $p = n - 1$.

Nuestro propósito en este capítulo es continuar en la línea de los dos últimos trabajos citados. Nos proponemos resolver el problema en el sector infinito de pares de valores (n, p) relacionados por la expresión $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$.

4.2 Valores exactos de la función $ex(n; TK^p)$

En esta sección abordaremos la búsqueda de nuevos valores exactos para la función extremal $ex(n; TK^p)$ en el sector infinito de pares (n, p) relacionados por la expresión $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$, con $n - p \geq 15$. Probaremos que en dicho sector del plano se verifica que

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2).$$

Como siempre, para demostrar que $\binom{n}{2} - (5n - 6p + 2)$ es una cota inferior para la función $ex(n; TK^p)$, sólo necesitamos encontrar un grafo de orden n con dicho tamaño, sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo. Ese es nuestro propósito en el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1 *Sean n y p dos enteros positivos, con $n - p \geq 15$ y tales que $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Entonces*

$$ex(n; TK^p) \geq \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2).$$



Demostración: Consideremos el grafo G con n vértices cuyo grafo complementario H está formado por $2n - 3p + 1$ copias disjuntas de K^4 y un ciclo de longitud $12p - 7n - 4$ (Ver Figura 4.1).

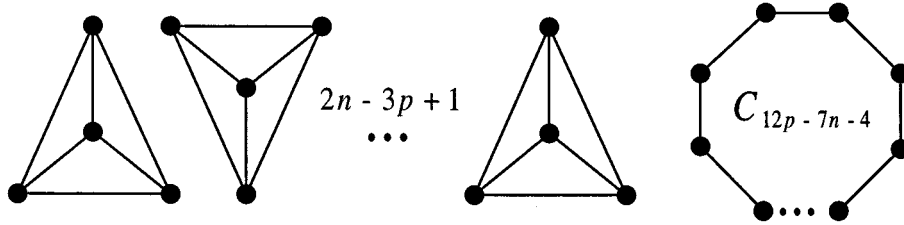


Figura 4.1: Complementario de un grafo sin contener una subdivisión de K^p .

Obsérvese en primer lugar que el grafo G está bien definido. En efecto, por una parte,

$$v(G) = v(H) = 4(2n - 3p + 1) + (12p - 7n - 4) = n$$

y

$$e(G) = \binom{n}{2} - (6(2n - 3p + 1) + (12p - 7n - 4)) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2).$$

Por otra parte, tiene sentido definir un ciclo de longitud $12p - 7n - 4$, porque

$$12p - 7n - 4 \geq 12 \left\lceil \frac{7n + 7}{12} \right\rceil - 7n - 4 \geq 12 \left(\frac{7n + 7}{12} \right) - 7n - 4 = 3.$$

Para probar que G no contiene una subdivisión de K^p , aplicaremos el Teorema 3.2.6 del capítulo anterior. Para ello, demostraremos que todo subgrafo de orden p de G tiene tamaño a lo sumo

$$\binom{p}{2} - (n - p + 1)$$

o de modo equivalente, que sea cual sea el conjunto de $n - p$ vértices que eliminemos en H , el grafo resultante H_{n-p} tiene, al menos, $n - p + 1$ aristas.

Sea $\{v_1, \dots, v_{n-p}\}$ un conjunto cualquiera de $n-p$ vértices de H . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los vértices está ordenados de modo que para cada $j \in \{1, \dots, n-p-1\}$, es

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{H_{j-1}}(v_i), \text{ para todo } i \in \{j+1, \dots, n-p\}.$$

Como $\Delta(H) = 3$ y el máximo número de vértices independientes de valencia 3 en H es $2n - 3p + 1$, deducimos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \leq 3, \text{ para } j = 1, \dots, 2n - 3p + 1 \text{ y}$$

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \leq 2, \text{ para } j = 2n - 3p + 2, \dots, q$$

Luego, entonces

$$\begin{aligned} e(H_{n-p}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{n-p} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &\geq 5n - 6p + 2 - 3(2n - 3p + 1) - 2(n - p - (2n - 3p + 1)) \\ &= 5n - 6p + 2 - 6n + 9p - 3 - 2n + 2p + 4n - 6p + 2 \\ &= n - p + 1, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. \otimes

En lo sucesivo, y como hicimos en los capítulos precedentes, será de gran utilidad para nosotros fijar el valor $q = n - p$. De este modo, resulta equivalente demostrar que

$$ex(n; TK^{n-q}) = \binom{n}{2} - (3q + k + 2),$$

donde q y k son dos enteros verificando las expresiones $q \geq 15$, $n = 3q - k$ y $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor$.

En efecto, por ua parte

$$p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \iff 3p \leq 2n$$

Luego tomando $q = n - p$, tenemos que

$$n \leq 3q \iff n = 3q - k, \text{ con } k \geq 0.$$



Por otra parte,

$$p \geq \left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \iff 12p \geq 7n+7$$

Así que considerando $q = n - p$, resulta ser

$$5n \geq 12q + 7 \iff n \geq 3q - \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor.$$

Por consiguiente, bastará tomar $n = 3q - k$, con $q \geq 15$ y $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor$.

Nuestro propósito es demostrar que la desigualdad de la Proposición 4.2.1 es de hecho una igualdad. Para ello, probaremos que todo grafo G con tamaño mayor del que indica esa cota inferior contiene una subdivisión de K^p .

Previamente, probaremos algunos resultados auxiliares a partir de los cuales para todo grafo G en las condiciones del párrafo anterior se cumple que su complementario pertenece a ciertas familias del tipo \mathcal{C}_r^t , para r y t adecuados, es decir, que podemos eliminar una sucesión decreciente de r vértices en $H = \overline{G}$ de modo que el subgrafo H_q resultante tiene tamaño, a lo sumo, t .

Lema 4.2.2 *Sean q y k dos enteros tales que $0 \leq k \leq q - 1$. Sea H un grafo con $v(H) = 3q - k - i$ vértices y $e(H) \leq 3q + k + 1 - 3i$ aristas, siendo $i \in \{0, \dots, q\}$. Si la valencia máxima de H es a lo sumo 3, entonces*

$$H \in \mathcal{C}_{q-i}^q.$$

Demostración: Vamos a probar de hecho, que dada una sucesión decreciente cualquiera de $q - i$ vértices de H , el grafo H_{q-i} resultante de eliminar tales vértices tiene a lo sumo, q aristas.

Nótese que puesto que $e(H) \leq 3q + k + 1 - 3i$, existe un entero $m \geq 0$ tal que $e(H) = 3q + k + 1 - 3i - m$.

Sea $\{v_1, \dots, v_{q-i}\}$ una sucesión decreciente en H . Por una parte, si fuera $\Delta(H_{q-i}) = 1$ el resultado sería evidente puesto que

$$\begin{aligned} e(H_{q-i}) &\leq \frac{1}{2}v(H_{q-i}) \\ &= \frac{1}{2}(v(H) - (q - i)) \\ &= \frac{1}{2}(2q - k) \leq q \end{aligned}$$

Así pues, en lo sucesivo supondremos que $\Delta(H_{q-i}) \geq 2$. Distinguiremos dos casos posibles de acuerdo con la valencia máxima de H .

Caso 1. Supongamos que $\Delta(H) = 3$.

Como $k \leq q - 1$ resulta evidente que existe $j \in \{1, \dots, q - i\}$ tal que $\Delta(H_{j-1}) = 3$ and $\Delta(H_j) = 2$, puesto que en caso contrario, teniendo en cuenta que partimos de una sucesión decreciente de vértices, deduciríamos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - i$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} e(H_{q-i}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{q-i} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &= 3q + k + 1 - 3i - m - 3(q - i) = k + 1 - m \leq q \end{aligned}$$

con lo que el resultado sería inmediato.

Obsérvese que en tal caso, el grafo H_j tiene orden $v(H_j) = v(H) - j$ y tamaño $e(H_j) = e(H) - 3j$. Además, como $\Delta(H_j) = 2$, tenemos que

$$e(H_j) \leq v(H_j),$$

es decir,

$$3q + k + 1 - 3i - m - 3j \leq 3q - k - i - j$$

y por tanto, $k \leq \frac{2i + 2j - 1 + m}{2}$.



Luego,

$$\begin{aligned}
 e(H_{q-i}) &= e(H) - 3j - 2(q - i - j) \\
 &= 3q + k + 1 - 3i - m - j - 2q + 2i \\
 &= q + k + 1 - i - j - m \\
 &\leq q + \left(\frac{2i + 2j - 1 + m}{2} \right) + 1 - i - j - m \leq q + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Nótese que $e(H_{q-i})$ es un entero, con lo cual, $e(H_{q-i}) \leq q$ y por consiguiente, $H \in \mathcal{C}_{q-i}^q$ como queríamos demostrar.

Caso 2. Supongamos que $\Delta(H) = 2$.

En este caso, deducimos que $e(H) \leq v(H)$, es decir,

$$3q + k + 1 - 3i - m \leq 3q - k - i$$

de ahí que $k \leq \frac{2i - 1 - m}{2}$. Pero entonces

$$\begin{aligned}
 e(H_{q-i}) &= e(H) - 2(q - i) \\
 &\leq 3q + k + 1 - 3i - m - 2q + 2i \\
 &= q + k + 1 - i - m \\
 &\leq q + \left(\frac{2i - 1 - m}{2} \right) + 1 - i - m \\
 &\leq q + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por idéntico argumento al del caso anterior, deducimos que $e(H_{q-i}) \leq q$ y por tanto, que $H \in \mathcal{C}_{q-i}^q$, finalizando así la prueba del resultado. \otimes

Lema 4.2.3 Sean k y q dos enteros tales que $0 \leq k \leq q - 1$. Sea H un grafo con $v(H) = 3q - k$ vértices y a lo sumo $e(H) = 3q + k + 1$ aristas. Entonces $H \in \mathcal{C}_q^q$.

Demostración: Si la valencia máxima de H es menor o igual que 3 el resultado es inmediato, puesto que bastaría aplicar el Lema 4.2.2 tomando $i = 0$.

Supongamos pues que $\Delta(H) \geq 4$. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vértices de H .

Si fuera $\Delta(H_q) \geq 4$, el decrecimiento de la sucesión anterior nos llevaría a deducir que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q$$

con lo cual

$$\begin{aligned} e(H_q) &= e(H) - \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &= 3q + k + 1 - 3q = k + 1 \leq q. \end{aligned}$$

Supongamos, entonces, que existe $i \in \{1, \dots, q-1\}$ tal que $\Delta(H_{i-1}) \geq 4$ and $\Delta(H_i) \leq 3$. En tal caso, el grafo H_i verifica:

$$\begin{aligned} v(H_i) &= v(H) - i = 3q - k - i \\ e(H_i) &\leq e(H) - 4i = 3q + k + 1 - 4i \leq 3q + k + 1 - 3i \end{aligned}$$

es decir, tenemos que el grafo H_i tiene orden $3q - k - i$, tamaño, a lo sumo, $3q + k + 1 - 3i$ y valencia máxima menor o igual que 3. Luego, aplicando el Lema 4.2.2 deducimos que

$$H_i \in \mathcal{C}_{q-i}^q,$$

esto es, existe una sucesión decreciente de vértices $\{w_1, \dots, w_{q-i}\}$ en H_i tal que $e(H_i)_{q-i} \leq q$. Pero entonces tenemos que $\{v_1, \dots, v_i, w_1, \dots, w_{q-i}\}$ es una sucesión decreciente de vértices de H para la cual se cumple que $e(H) \leq q$, como queríamos demostrar. \otimes

Lema 4.2.4 Sean k y q dos enteros tales que $0 \leq k \leq q-1$. Sea H un grafo con $v(H) = 3q - k - 1 - i$ vértices y $e(H) \leq \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i$ aristas, siendo $i \in \{0, \dots, q-1\}$. Si la valencia máxima de H es a lo sumo 3, entonces para toda sucesión decreciente de $q-1-i$ vértices, el grafo H_{q-1-i} resultante de eliminar dichos vértices tiene, a lo sumo, $q-1$ aristas.

Demostración: Sea $\{v_1, \dots, v_{q-1-i}\}$ una sucesión decreciente en H . Si fuera $\Delta(H_{q-2-i}) = 1$ el resultado sería evidente puesto que

$$\begin{aligned} e(H_{q-1-i}) &= e(H_{q-2-i}) - 1 \\ &\leq \frac{1}{2}v(H_{q-2-i}) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(v(H) - (q - 2 - i)) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(2q - k - 1) \leq q - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Y como el número de aristas de un grafo es siempre un entero positivo, llegamos a que $e(H_{q-1-i}) \leq q - 1$.

Así pues, en lo sucesivo supondremos que $\Delta(H_{q-2-i}) \geq 2$. Por otra parte, como $e(H) \leq \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i$, sabemos que existe un entero $m \geq 0$ tal que $e(H) = \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m$. Distinguiremos dos casos de acuerdo con la valencia máxima de H .

Caso 1. Supongamos que $\Delta(H) = 3$.

Si fuera $\Delta(H_{q-2-i}) = 3$, debido al carácter decreciente de la sucesión de vértices anterior, tendríamos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - 1 - i$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} e(H_{q-1-i}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{q-1-i} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &\leq \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m - 3(q - 1 - i) = k + 5 - \frac{1}{2}q \\ &\leq \frac{1}{2}q + 4 \leq q - 1, \end{aligned}$$

obteniéndose el resultado.

Supongamos entonces que existe $j \in \{1, \dots, q - 1 - i\}$ tal que $\Delta(H_{j-1}) = 3$ y $\Delta(H_j) = 2$. Entonces $e(H_j) \leq v(H_j)$, es decir,

$$\frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m - 3j \leq 3q - k - 1 - i - j$$

deduciéndose que $k \geq \frac{q-6+4i+4j+2m}{4}$. Luego,

$$\begin{aligned} e(H_{q-1-i}) &= e(H) - 3j - 2(q-1-i-j) \\ &= \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m - j - 2q + 2i + 2 \\ &= \frac{1}{2}q + k + 4 - i - j - m \\ &\leq \frac{1}{2}q + \left(\frac{q-6+4i+4j+2m}{4} \right) + 4 - i - j - m \\ &\leq \frac{3}{4}q + \frac{5}{2} < q \end{aligned}$$

Tenemos que $e(H_{q-1-i})$ es un entero, con lo cual, $e(H_{q-1-i}) \leq q-1$ y por tanto, $H \in \mathcal{C}_{q-1-i}^{q-1}$ como queríamos probar.

Caso 2. Supongamos que $\Delta(H) = 2$.

En este caso, deducimos que $e(H) \leq v(H)$, es decir,

$$\frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m \leq 3q - 1 - k - i$$

de ahí que $k \leq \frac{q+4i-6+2m}{4}$. Pero entonces

$$\begin{aligned} e(H_{q-1-i}) &= e(H) - 2(q-1-i) \\ &\leq \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i - m - 2q + 2i \\ &= \frac{1}{2}q + k + 2 - i - m \\ &\leq \frac{1}{2}q + \left(\frac{q+4i-6+2m}{4} \right) + 2 - i - m \\ &\leq \frac{3q+2}{4} < q \end{aligned}$$

Por idéntico argumento al del caso anterior, deducimos que $e(H_{q-1-i}) \leq q-1$ y por tanto, que $H \in \mathcal{C}_{q-1-i}^{q-1}$, quedando así probado el resultado. \otimes

Lema 4.2.5 Sean k y q dos enteros tales que $0 \leq k \leq q-1$. Sea H un grafo con $3q-k$ vértices y a lo sumo $3q+k+2$ aristas. Si $\Delta(H) \geq \frac{q}{2}$ entonces para toda sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ en H se cumple que $e(H_q) \leq q-1$.

Demostración: Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vértices de H . Como $\Delta(H) \geq \frac{q}{2}$ sabemos que $\delta_H(v_1) = \Delta(H) \geq \frac{q}{2}$. Obsérvese que el grafo H_1 tiene $3q - k - 1$ vértices y a lo sumo $\frac{5}{2}q + k + 2$ aristas.

Así que si $\Delta(H_1) \leq 3$ el resultado es inmediato, puesto que bastaría aplicar el Lema 4.2.4 tomando $i = 0$.

Supongamos pues que $\Delta(H_1) \geq 4$. Si fuera $\Delta(H_q) \geq 4$, por el decrecimiento de la sucesión anterior tenemos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q-1$$

con lo cual

$$\begin{aligned} e(H_{q-1}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{q-1} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &= \frac{5}{2}q + k + 2 - 3q = k + 1 - \frac{1}{2}q \leq q - 1. \end{aligned}$$

Supongamos, entonces, que existe $i \in \{1, \dots, q-2\}$ tal que $\Delta(H_{i-1}) \geq 4$ and $\Delta(H_i) \leq 3$. En tal caso, se cumple sobre el grafo H_i que

$$\begin{aligned} v(H_i) &= 3q - 1 - k - i \\ e(H_i) &\leq e(H) - 4i = \frac{5}{2}q + k + 2 - 4i \leq \frac{5}{2}q + k + 2 - 3i \end{aligned}$$

es decir, tenemos que H_i tiene orden $3q - 1 - k - i$, tamaño, a lo sumo, $\frac{5}{2}q + k + 2 - 3i$ y valencia máxima menor o igual que 3. Luego, aplicando el Lema 4.2.4 deducimos que para toda sucesión decreciente de $q-i$ vértices, se tiene que $e((H_i)_{q-i}) \leq q-1$. En particular, tomando la sucesión $\{v_{i+1}, \dots, v_q\}$ deducimos que

$$e(H_q) = e((H_i)_{q-i}) \leq q - 1$$

como queríamos demostrar. \otimes

En el siguiente resultado nos proponemos demostrar que la desigualdad expuesta en la Proposición 4.2.1 conduce al valor exacto de la función $\text{ex}(n; \text{TK}^p)$ en el sector infinito que venimos estudiando.

Teorema 4.2.6 Sean n y p dos enteros positivos, con $n - p \geq 15$ y tales que $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Entonces

$$ex(n; TK^p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2).$$

Demostración: Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la Proposición 4.2.1, nuestro objetivo en esta prueba se reduce a demostrar que dicha desigualdad es, de hecho, una igualdad, para lo cual sólo es necesario verificar que

$$ex(n; TK^p) \leq \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2).$$

Dada la equivalencia antes expuesta y con objeto de simplificar expresiones, demostraremos de modo equivalente que

$$ex(n; TK^{n-q}) \leq \binom{n}{2} - (3q + k + 2),$$

para $n = 3q - k$, con $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor$.

Sea G un grafo con n vértices y $\binom{n}{2} - (3q + k + 1)$ aristas, y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. El grafo H tiene, pues, n vértices y $3q + k + 1$ aristas. Por tanto, aplicando el Lema 4.2.3, existe una sucesión decreciente de vértices en H , $\{v_1, \dots, v_q\}$, de tal modo que el grafo resultante H_q obtenido de H al eliminar dicho conjunto de vértices tiene a lo más q aristas.

Denotemos por $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$, con $s \leq q$, a las aristas de H_q . Obsérvese que éstas son las aristas que faltan en el grafo G para que los vértices de H_q formen un K^p . Por tanto, si demostramos que cada una de esas aristas puede ser reemplazada por un camino en G cuyos vértices intermedios pertenecen al conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$, y de tal modo que dichos caminos son disjuntos, quedará probada la existencia de una subdivisión de K^p en G . Ese será nuestro propósito en las líneas que siguen.

Consideremos el grafo bipartito B cuyas clases de vértices son $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$, definido de modo que el elemento v_j es adyacente a e_i en B , si existe en el grafo G el camino $a_i v_j b_i$. Teniendo en cuenta el grafo bipartito así definido, bastará demostrar la existencia de un emparejamiento completo en B . Para ello, aplicaremos la Condición de Hall (ver Teorema 1.1.1) sobre emparejamientos completos, es decir, probaremos que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$, para todo $A \subseteq X$.

Dado $m \in \{1, \dots, s\}$, sea $A \subseteq X$ un subconjunto cualquiera de X formado por m elementos $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$, donde $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$, con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Denotemos por $H[A]$ al subgrafo de H inducido por las aristas del conjunto A . Obsérvese que $\Delta(H[A]) \leq 3$, ya que si no fuera así y puesto que A es un subconjunto de aristas de H_q , deduciríamos que $\Delta(H_q) \geq 4$. Ahora bien, recuérdese que $\{v_1, \dots, v_q\}$ es una sucesión decreciente en H y por tanto,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q.$$

Luego $e(H) \geq 4q + e(H_q) > 4q$ lo cual es absurdo porque $e(H) = 3q + k + 1 < 4q$.

• Supongamos primero $\Delta(H[A]) = 1$. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $|\mathbf{N}_B(A)| \leq m - 1$.

Si $1 \leq m \leq 3$ entonces en el conjunto $\{v_{q-(m+5)}, \dots, v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ hay, al menos, 7 vértices que son no disjuntos en H_q con cada una de las aristas del conjunto A . Así que en el peor de los casos (ver Figura 4.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-m}}(a_{i_1}) &\geq 2 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-m}}(b_{i_1}) \geq 2 \\ \delta_{H_{q-(m+2)}}(a_{i_1}) &\geq 3 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+2)}}(b_{i_1}) \geq 3 \\ \delta_{H_{q-(m+4)}}(a_{i_1}) &\geq 4 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+4)}}(b_{i_1}) \geq 4 \\ \delta_{H_{q-(m+6)}}(a_{i_1}) &\geq 5 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+6)}}(b_{i_1}) \geq 5 \end{aligned}$$

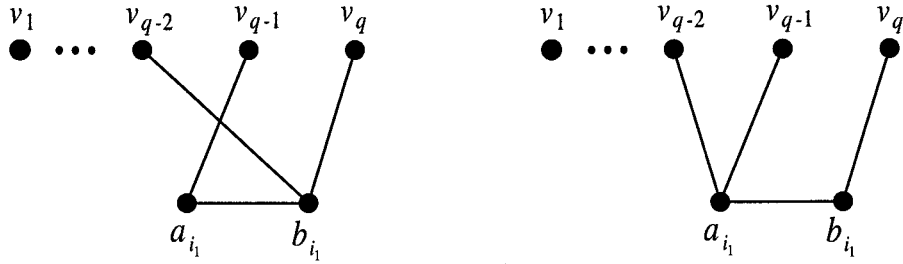


Figura 4.2: Posibles configuraciones de H cuando $m = 1$.

Puesto que $\{v_1, \dots, v_q\}$ es una sucesión decreciente, deducimos que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq 2$$

$$\delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) \geq 3$$

$$\delta_{H_{q-(m+4)}}(v_{q-(m+3)}) \geq 4 \text{ y}$$

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 5, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m + 5).$$

Por otra parte, podemos garantizar al menos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 1, \text{ para todo } j = q - (m - 2), \dots, q$$

así como que

$$e(H_q) = s \geq m.$$

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m + 5)) \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + m - 1 + s \\ &\geq 5q - 3m - 8 \geq 5q - 17. \end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos también que

$$e(H) = 3q + k + 1 \leq 3q + \frac{3q - 7}{5} + 1 = \frac{18q - 2}{5}.$$



Ahora bien, $5q - 17 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 11$ lo cual es absurdo porque suponemos que $q \geq 15$.

Si $4 \leq m \leq q$ entonces en el conjunto $\{v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ hay al menos un vértice que es no disjunto en H_q con cada una de las aristas del conjunto A . Así que en el más desfavorable de los casos (ver Figura 4.3)

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq m$$

y por tanto,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq m, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m - 1).$$

Asimismo sabemos que cuanto menos se cumple que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 1, \text{ para todo } j = q - (m - 2), \dots, q$$

y que

$$e(H_q) = s \geq m.$$

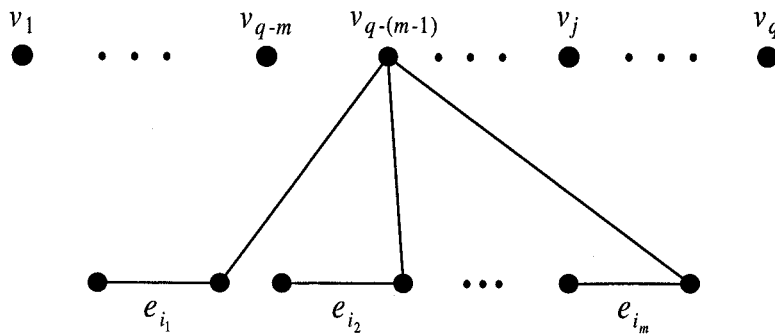


Figura 4.3: Estructura de H si $\Delta(H[A]) = 1$ y $|N_B(A)| < |A|$.

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m - 1)) \cdot m + m - 1 + s \\ &\geq -m^2 + (q + 3)m - 1. \end{aligned}$$

Por otra parte es inmediato comprobar que cuando $4 \leq m \leq q - 1$ se verifica que $-m^2 + (q + 3)m - 1 \geq 4q - 5$. Así que

$$4q - 5 \leq e(H) = 3q + k + 1 \leq \frac{18q - 2}{5}.$$

Pero $4q - 5 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 11$ siendo esto una contradicción con nuestro supuesto $q \geq 15$.

Respecto al caso $m = q$, teniendo en cuenta que $m \leq s \leq q$, resulta que H es un grafo con $3q - k$ vértices y $3q + k + 1$ aristas para el que existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ de forma que $e(H_q) = q$. Luego aplicando el Lema 4.2.5 deducimos que $\Delta(H) < \frac{q}{2}$. Sin embargo, el razonamiento antes expuesto nos permite concluir también que $\delta_H(v_1) \geq q > \frac{q}{2}$. Llegamos pues a contradicción.

Así que para todo subconjunto A de X verificando $\Delta(H[A]) = 1$, se cumple que $|\mathbf{N}_B(A)| \geq |A|$.

• Supongamos ahora que $\Delta(H[A]) = 2$. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $|\mathbf{N}_B(A)| \leq m - 1$. Nótese que debido a que $\Delta(H[A]) = 2$ deducimos que $\Delta(H_q) \geq \Delta(H[A]) = 2$ y por consiguiente,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2, \text{ para todo } j = 1, \dots, q.$$

Además es evidente que A debe tener al menos 2 aristas, de ahí que el caso $m = 1$ no tenga sentido bajo este supuesto.

Si $m = 2$ entonces existen al menos 4 vértices en el conjunto $\{v_{q-4}, \dots, v_q\}$ que son no disjuntos en H_q con las dos aristas de A . Pero en tal caso, como se



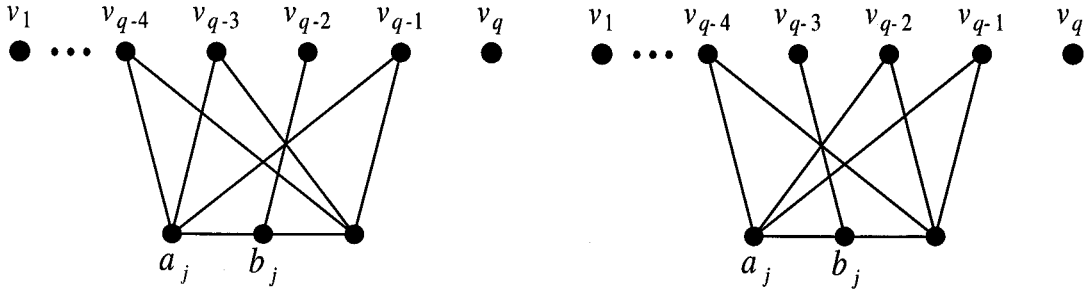


Figura 4.4: Posibles estructuras de H cuando $\Delta(H[A]) = 2$ y $|\mathbf{N}_B(A)| < 2$.

observa en la Figura 4.4, existe al menos una arista $e_j = (a_j, b_j)$ en A para la cual se verifica que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-2}}(a_j) &\geq 2 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-2}}(b_j) \geq 2 \\ \delta_{H_{q-3}}(a_j) &\geq 3 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-3}}(b_j) \geq 3 \\ \delta_{H_{q-5}}(a_j) &\geq 4 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-5}}(b_j) \geq 4. \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \dots, v_q\}$ es una sucesión decreciente de vértices de H , tenemos que entonces

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 3 \quad \text{y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 4 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, q-4 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q-4) \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + s \geq 4q - 4. \end{aligned}$$

Nótese que

$$4q - 4 \leq e(H) = 3q + k + 1 \leq \frac{18q - 2}{5}$$

y sin embargo $4q - 4 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 9$. Se trata de una contradicción puesto que partimos del supuesto $q \geq 15$.

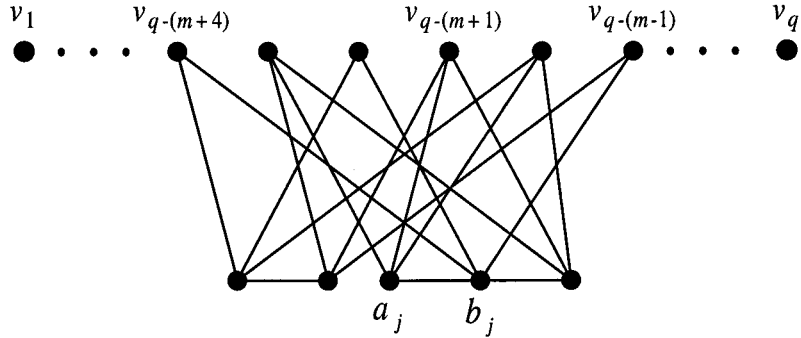


Figura 4.5: Estructura de H para $m = 3$ cuando $\Delta(H[A]) = 2$ y $|\mathbf{N}_B(A)| < |A|$.

Si $3 \leq m \leq 7$ entonces en el conjunto $\{v_{q-(m+4)}, \dots, v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ hay, al menos, 6 vértices que son no disjuntos en H_q con cada una de las aristas del conjunto A . Así que en el peor de los casos (ver Figura 4.5), para alguna arista $e_j = (a_j, b_j)$ de A tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-m}}(a_j) &\geq 3 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-m}}(b_j) \geq 3 \\ \delta_{H_{q-(m+3)}}(a_j) &\geq 4 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+3)}}(b_j) \geq 4 \\ \delta_{H_{q-(m+5)}}(a_j) &\geq 5 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+5)}}(b_j) \geq 5 \end{aligned}$$

Debido al decrecimiento en H del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$ deducimos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) &\geq 3 \\ \delta_{H_{q-(m+3)}}(v_{q-(m+2)}) &\geq 4 \text{ y} \end{aligned}$$

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 5, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m + 4).$$

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m + 4)) \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (m - 1) \cdot 2 + s \\ &\geq 5q - 2m - 5 \geq 5q - 19. \end{aligned}$$

Sin embargo sabemos por otra parte que

$$e(H) = 3q + k + 1 \leq 3q + \frac{3q - 7}{5} + 1 = \frac{18q - 2}{5}.$$

Ahora bien, $5q - 19 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 13$ que es absurdo puesto que $q \geq 15$.

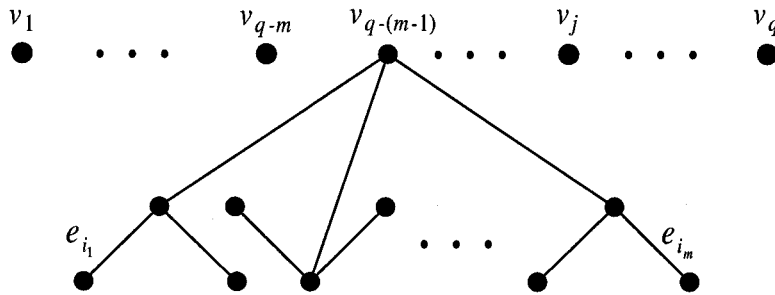


Figura 4.6: Estructura de H cuando $\Delta(H[A]) = 2$ y $|\mathbf{N}_B(A)| < |A|$.

Si $8 \leq m \leq q$ entonces existe al menos un vértice en el conjunto $\{v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ que es no disjuncto en H_q con cada una de las aristas del conjunto A . Por tanto en el caso más desfavorable (ver Figura 4.6) se tiene que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{2}$$

y en consecuencia,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \frac{m}{2}, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m - 1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m - 1)) \cdot \frac{m}{2} + (m - 1) \cdot 2 + s \\ &\geq \frac{-m^2 + (q + 7)m - 4}{2}. \end{aligned}$$

Resulta evidente que cuando $8 \leq m \leq q - 1$ se cumple que

$$\frac{-m^2 + (q + 7)m - 4}{2} \geq 4q - 6.$$

Por tanto llegamos a que

$$4q - 6 \leq e(H) = 3q + k + 1 \leq \frac{18q - 2}{5}.$$

Ahora bien, $4q - 6 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 14$, lo cual contradice nuestro supuesto $q \geq 15$.

Como en el caso anterior, en cuanto a $m = q$, se tiene H es un grafo con $3q - k$ vértices y $3q + k + 1$ aristas para el que existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ de forma que $e(H_q) = q$. Por consiguiente aplicando el Lema 4.2.5 llegamos a que $\Delta(H) < \frac{q}{2}$. Sin embargo, el razonamiento antes expuesto nos permite concluir también que $\delta_H(v_1) \geq \frac{q}{2}$. Esto es también absurdo.

Luego para todo subconjunto A de X verificando que $\Delta(H[A]) = 2$ también se cumple que $|N_B(A)| \geq |A|$.

• Supongamos finalmente que $\Delta(H[A]) = 3$. Teniendo en cuenta que A es un subconjunto de aristas de H_q , tenemos que $\Delta(H_q) \geq 3$ y en consecuencia, que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3, \text{ para todo } j = 1, \dots, q.$$

Además es inmediato que A debe tener al menos 3 aristas, de ahí que los casos $m = 1$ y $m = 2$ no tengan sentido bajo este supuesto.

Si $3 \leq m \leq 11$ entonces existen al menos 5 vértices en el conjunto $\{v_{q-(m+3)}, \dots, v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ no disjuntos en H_q con cada una de las aristas



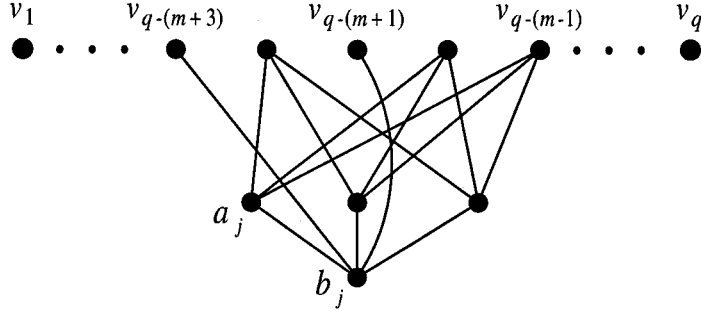


Figura 4.7: Estructura de H para $m = 3$ cuando $\Delta(H[A]) = 3$ y $|\mathbf{N}_B(A)| < |A|$.

del conjunto A . Por tanto en el caso más desfavorable (ver Figura 4.7) existe una arista $e_j = (a_j, b_j)$ en A para la cual se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-(m+2)}}(a_{i_1}) &\geq 4 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+2)}}(b_{i_1}) \geq 4 \\ \delta_{H_{q-(m+4)}}(a_{i_1}) &\geq 5 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-(m+4)}}(b_{i_1}) \geq 5 \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \dots, v_q\}$ es decreciente en H se deduce que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) &\geq 4 \text{ y} \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 5, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m + 3). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m + 3)) \cdot 5 + 2 \cdot 4 + (m + 1) \cdot 3 + s \\ &\geq 5q - m - 4 \geq 5q - 15. \end{aligned}$$

Pero entonces

$$5q - 15 \leq e(H) = 3q + k + 1 \leq \frac{18q - 2}{5}.$$

Y sin embargo $5q - 15 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 10$ cosa que no es posible porque $q \geq 15$.

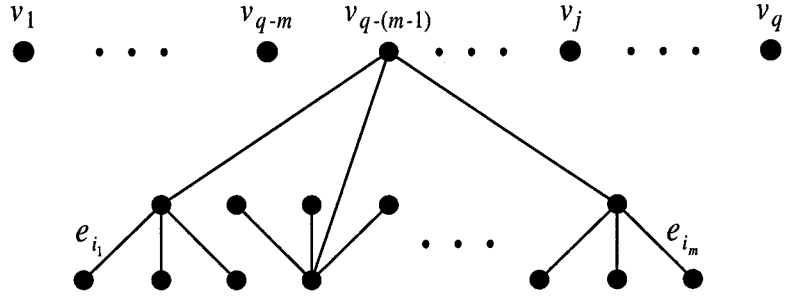


Figura 4.8: Estructura de H cuando $\Delta(H[A]) = 3$ y $|\mathbf{N}_B(A)| < |A|$.

Si $12 \leq m \leq q$ entonces existe al menos un vértice en el conjunto $\{v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ que es no disjuncto en H_q con cada una de las aristas del conjunto A . Por tanto aún en el peor caso (ver Figura 4.8) se tiene que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{3}$$

con lo que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \frac{m}{3}, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - (m - 1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m - 1)) \cdot \frac{m}{3} + (m - 1) \cdot 3 + s \\ &\geq \frac{-m^2 + (q + 13)m - 9}{3}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que cuando $q \geq 15$ y $12 \leq m \leq q$ se cumple que

$$\frac{-m^2 + (q + 13)m - 9}{3} \geq 4q - 1.$$

Pero entonces

$$4q - 1 \leq e(H) = 3q + k + 1 \leq \frac{18q - 2}{5}.$$

Y sin embargo $4q - 1 \leq \frac{18q - 2}{5} \iff q \leq 1$, siendo esto absurdo.

Luego para todo subconjunto A de X verificando que $\Delta(H[A]) \geq 3$ se cumple que $|N_B(A)| \geq |A|$.

Así, pues, hemos probado que en el grafo bipartito B definido anteriormente, se cumple que $|N_B(A)| \geq |A|$, para cada subconjunto A de X . Luego, aplicando la Condición de Hall, tenemos garantizada la existencia de un emparejamiento completo en B y, por consiguiente, queda demostrado el resultado. \otimes

4.3 Caracterización de la familia extremal

Una vez que se ha encontrado el valor exacto de la función extremal $ex(n; TK^p)$, resulta interesante plantearse cuáles son los grafos que sin contener una subdivisión de K^p como subgrafo tienen tamaño máximo. En otras palabras, se trata de caracterizar la familia extremal $EX(n; TK^p)$. Ese será nuestro propósito en esta sección, para cualquier par de valores (n, p) verificando la expresión $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$, con $n-p \geq 17$.

En la prueba del resultado de caracterización serán de utilidad para nosotros dos lemas que están demostrados en [8]. En el primero de ellos se relaciona el número de vértices de valencia máxima Δ en un grafo H con la cantidad de ellos que son independientes.

Lema 4.3.1 [8] *Sea H un grafo con al menos m vértices de valencia máxima Δ . Entonces al menos $\left\lfloor \frac{m+\Delta}{\Delta+1} \right\rfloor$ de ellos son independientes.*

En el segundo resultado, se relaciona el número de vértices independientes de valencia Δ en un grafo H con la cantidad de copias disjuntas de $K^{\Delta+1}$ contenidas en H .

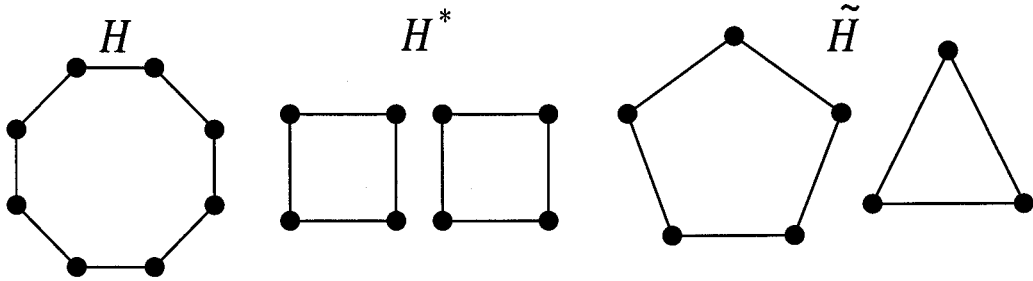


Figura 4.9: H , H^* y \tilde{H} son los tres únicos grafos de la familia \mathcal{F}_8 .

Lema 4.3.2 [8] Sean r un entero positivo y H un grafo de valencia máxima Δ . Si H tiene $k(\Delta + 1)$ vértices de valencia máxima Δ y k de ellos son independientes, entonces H contiene k copias disjuntas de $K^{\Delta+1}$.

En lo sucesivo trataremos con la familia $EX(n; TK^{n-q})$ cambiando p por $n - q$, puesto que ello hará más fáciles las demostraciones.

Previamente vamos a definir la siguiente familia de grafos.

Definición 4.3.3 Dado un número entero $r \geq 3$, se define la familia \mathcal{F}_r como aquella formada por todos los grafos cuyos r vértices son todos de valencia 2 (ver Figura 4.9).

La siguiente proposición nos permitirá construir cierta familia de grafos que denotaremos por $\mathcal{H}(n, n-q)$ y que terminará siendo la familia $EX(n; TK^{n-q})$.

Proposición 4.3.4 Sean n , q y k tres enteros tales que $n = 3q - k$, y $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor$. Sea G un grafo con n vértices cuyo grafo complementario H está formado por $k+1$ copias disjuntas de K^4 y un grafo H^* perteneciente a la familia $\mathcal{F}_{3q-5k-4}$. Entonces $G \in EX(n; TK^p)$.



Demostración:

Es claro que G está bien definido, puesto que

$$v(G) = 4(k+1) + 3q - 5k - 4 = 3q - k = n.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} e(G) &= \binom{n}{2} - e(H) = \binom{n}{2} - (6(k+1) + 3q - 5k - 4) \\ &= \binom{n}{2} - (3q + k + 2) \end{aligned}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta el Teorema 4.2.6, sólo nos falta demostrar que G no contiene una subdivisión de K^{n-q} como subgrafo.

Para ello, nos basaremos en el Teorema 3.2.6, según el cual, será suficiente probar que cualquier subgrafo de G de orden p tiene, a lo sumo $\binom{p}{2} - (n-p+1)$ aristas. O de modo equivalente, bastará demostrar que para cualquier conjunto de q vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ de H , el grafo H_q resultante de eliminar dichos vértices en H tiene, al menos, $q+1$ aristas.

Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ un conjunto cualquiera de q vértices de H . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dichos vértices están ordenados de modo que para cada $j \in \{1, \dots, q-1\}$, es

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{H_{j-1}}(v_i), \text{ para todo } i \in \{j+1, \dots, q\}.$$

Es evidente por la definición de H que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \leq 3, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, k+1\}$$

y

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \leq 2, \text{ para todo } j \in \{k+2, \dots, q\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e(H_q) &= e(H) - \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &\geq 3q + k + 2 - 3(k + 1) - 2(q - k - 1) \\ &= q + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Teorema 3.2.6, deducimos que $G \not\subseteq TK^p$ quedando probado el resultado. \otimes

Consideremos entonces la siguiente familia de grafos.

Definición 4.3.5 Dados n , q y k tres enteros positivos, con $n = 3q - k$ y $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q - 7}{5} \right\rfloor$, se define la familia $\mathcal{H}(n, n - q)$ como aquella formada por los grafos G cuyo complementario H está formado por $k + 1$ copias disjuntas de K^4 y un grafo perteneciente a $\mathcal{F}_{3q-5k-4}$.

Un ejemplo de la familia $\mathcal{H}(n, n - q)$ así definida lo tenemos en la Figura 4.10 para $n = 50$ y $q = 20$.

La Proposición 4.3.4 nos permite deducir que

$$\mathcal{H}(n, n - q) \subseteq EX(n; TK^p)$$

por lo que en lo sucesivo, nos ocuparemos de probar la otra contención.

Para ello demostraremos un resultado previo según el cual si G es un grafo perteneciente a la familia $EX(n; TK^{n-q})$, entonces su complementario H no pertenece a la clase \mathcal{C}_q^q , es decir, para toda sucesión decreciente de q vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$, el grafo H_q resultante de eliminar en H dichos vértices tiene al menos $q + 1$ aristas.



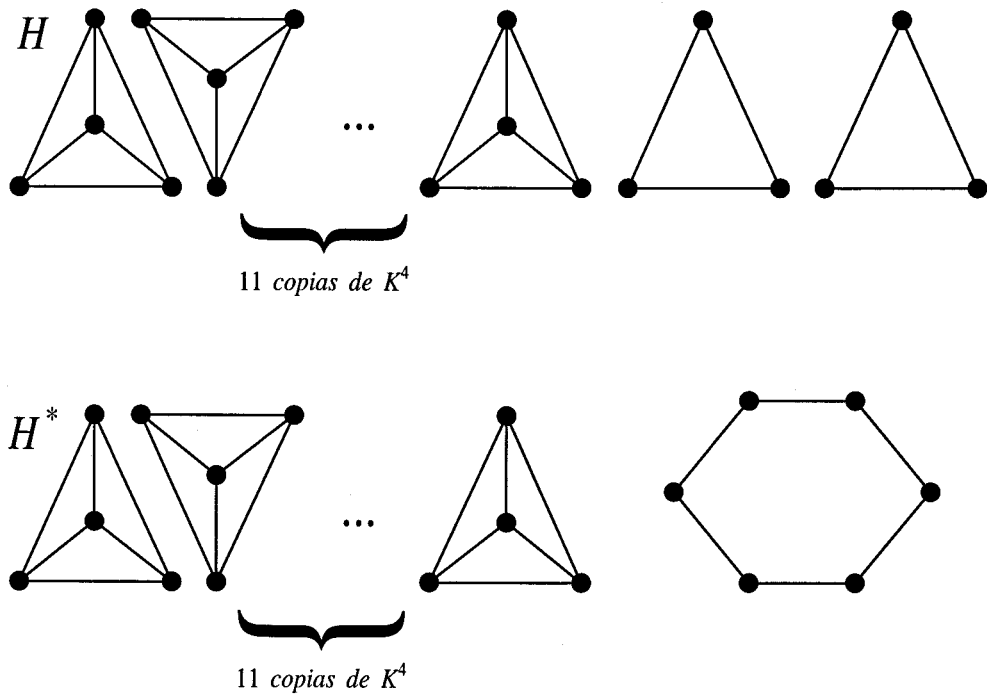


Figura 4.10: H y H^* son los dos únicos grafos de la familia $\mathcal{H}(50, 30)$.

Lema 4.3.6 Sean n , q , y k tres enteros, con $q \geq 17$, $n = 3q - k$ y tales que $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q - 7}{5} \right\rfloor$. Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n; \text{TK}^{n-q})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Entonces

$$H \notin \mathcal{C}_q^q.$$

Demostración: Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(n; \text{TK}^{n-q})$. Por definición, G es un grafo con tamaño máximo sin contener una subdivisión de K^{n-q} como subgrafo. Así que, por el Teorema 4.2.6, podemos afirmar que

$$e(G) = \binom{n}{2} - (3q + k + 2).$$

Luego si H es el grafo complementario de G , entonces H tiene $v(H) = 3q - k$ vértices y $e(H) = 3q + k + 2$ aristas.

Vamos a demostrar que $H \notin \mathcal{C}_q^q$, es decir, que para toda sucesión decreciente de vértices de H , $\{v_1, \dots, v_q\}$, el grafo H_q resultante de eliminar en H dicho conjunto de vértices tiene, al menos, $q + 1$ aristas.

Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que $H \in \mathcal{C}_q^q$, es decir, que existe una sucesión decreciente de vértices, $\{v_1, \dots, v_q\}$, en H de tal modo que el subgrafo H_q de H resultante de eliminar dicho conjunto de vértices tiene, a lo sumo, q aristas. Denotemos por $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$, a las aristas de H_q , con $s \leq q$. Vamos a demostrar que en estas condiciones, el grafo G contiene una subdivisión de H^{n-q} como subgrafo, lo cual va en contradicción con el hecho de que $G \in EX(n; TK^{n-q})$.

Para ello, consideremos el grafo bipartito B de clases $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$, definido como en la prueba del Teorema 4.2.6, es decir, de modo que un elemento e_i es adyacente en B a otro v_j si y sólo si existe en G el camino $a_i v_j b_i$. Probaremos que en este grafo bipartito existe un emparejamiento completo, lo cual nos permitirá deducir la contención de una subdivisión de K^{n-q} por parte de G .

Dado $j \in \{1, \dots, s\}$, denotemos por \widehat{H} al grafo obtenido de H al eliminar la arista e_j , esto es, $\widehat{H} = H - \{e_j\}$. Es evidente que el grafo \widehat{H} tiene $v(\widehat{H}) = v(H) = 3q - k$ vértices y $e(\widehat{H}) = e(H) - 1 = 3q + k + 1$ aristas. Así que aplicando el Teorema 4.2.6, sabemos que el grafo $\widehat{G} = \widehat{\widehat{H}}$ contiene una subdivisión de K^{n-q} como subgrafo. Aún más, si consideramos el grafo bipartito \widehat{B} de clases $\widehat{X} = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s\}$ e $\widehat{Y} = \{v_1, \dots, v_q\}$ definido como en el Teorema 4.2.6, en dicho resultado se demuestra la existencia de un emparejamiento completo en \widehat{B} . Luego, aplicando la Condición de Hall, deducimos que para todo subconjunto A de X con tamaño m , siendo $m \leq s - 1$, se tiene que $|\mathcal{N}_B(A)| \geq |A| = m$. Por consiguiente, para garantizar la existencia de un emparejamiento completo en B , sólo será necesario demostrar que



$$|\mathbf{N}_B(X)| \geq |X| = s.$$

Supongamos por reducción al absurdo que $|\mathbf{N}_B(X)| \leq s - 1$. Obsérvese que $\delta(H_q) \leq 3$ puesto que en caso contrario, teniendo en cuenta que $\{v_1, \dots, v_q\}$ es una sucesión decreciente en H , deduciríamos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q$$

y en consecuencia, se verificaría que $e(H) \geq 4q + e(H_q) > 4q$. Pero eso no es posible puesto que $e(H) = 3q + k + 2 < 4q$.

• Si $\Delta(H_q) = 1$ entonces tomando $m = s$ y razonando como en la demostración del Teorema 4.2.6 para el caso $\Delta(H[A]) = 1$ deducimos:

Si $1 \leq s \leq 3$ entonces $e(H) \geq 5q - 17$. Luego

$$5q - 17 \leq e(H) = 3q + k + 2 \leq 3q + \frac{3q - 7}{5} + 2 = \frac{18q + 3}{5}$$

y sin embargo, $5q - 17 \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 12$, lo cual es absurdo puesto que $q \geq 17$.

Si $4 \leq s \leq q$ entonces $e(H) \geq 4q - 5$. Así que

$$4q - 5 \leq e(H) = 3q + k + 2 \leq \frac{18q + 3}{5}$$

con lo que $4q - 5 \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 14$, siendo esto una contradicción.

• Si $\Delta(H_q) = 2$ entonces tomando $m = s$ y remitiéndonos a la prueba del Teorema 4.2.6 para el caso $\Delta(H[A]) = 2$ tenemos:

Si $s = 2$ entonces $e(H) \geq 4q - 4$, con lo cual

$$4q - 4 \leq e(H) \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 11$$

y esto es absurdo.

Si $3 \leq s \leq 7$ entonces $e(H) \geq 5q - 19$. Luego

$$5q - 19 \leq e(H) \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 14,$$

lo cual es absurdo.

Si $8 \leq s \leq q - 1$ entonces $e(H) \geq 4q - 6$ pero en tal caso

$$4q - 6 \leq e(H) \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 16,$$

cosa que no es cierta puesto que $q \geq 17$.

Y si $s = q$ vimos en el citado Teorema 4.2.6 que $\delta_H(v_1) \geq \frac{q}{2}$. Pero por otra parte, tenemos que H tiene $3q - k$ vértices, $3q + k + 2$ aristas y existe una sucesión decreciente $\{v_1, \dots, v_q\}$ tal que $e(H_q) = q$. Luego aplicando el Lema 4.2.5 deducimos que $\Delta(H) < \frac{q}{2}$. Esto es una contradicción.

• Finalmente si $\Delta(H_q) = 3$ entonces tomando $m = s$ y razonando como en la demostración del Teorema 4.2.6 para el caso $\Delta(H[A]) = 3$ obtenemos estas conclusiones:

Si $3 \leq s \leq 11$ entonces $e(H) \geq 5q - 15$. En cambio

$$5q - 15 \leq e(H) \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 11$$

y esto es imposible.

Si $12 \leq s \leq q$ entonces $e(H) \geq 4q - 1$ y sin embargo

$$4q - 1 \leq e(H) \leq \frac{18q + 3}{5} \iff q \leq 4$$

siendo pues una contradicción.

Así que también se cumple que $|\mathbf{N}_B(X)| \geq |X|$. Luego aplicando la Condición de Hall queda demostrada la existencia de un emparejamiento completo en B . Ahora bien, eso significa que las aristas de H_q pueden ser sustituidas

en G por caminos disjuntos, con lo cual, G contiene una subdivisión de K^{n-q} . Esto es absurdo puesto que suponemos que $G \in EX(n; \text{TK}^{n-q})$.

Por tanto, $H \notin \mathcal{C}_q^q$, como queríamos demostrar. \otimes

Finalmente, en el siguiente resultado se prueba que todo grafo G de la familia $EX(n; \text{TK}^{n-q})$ pertenece a la clase $\mathcal{H}(n, n - q)$.

Teorema 4.3.7 Sean n , q y k tres enteros, con $n = 3q - k$, $q \geq 17$ y tales que $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q - 7}{5} \right\rfloor$. Entonces

$$EX(n; \text{TK}^{n-q}) \subseteq \mathcal{H}(n, n - q).$$

Demostración: Consideremos un grafo $G \in EX(n; \text{TK}^{n-q})$ y denotemos por H a su grafo complementario. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el Teorema 4.2.6, es evidente que en este caso H es un grafo con $v(H) = 3q - k$ vértices y $e(H) = 3q + k + 2$ aristas. Entonces, aplicando el Lema 4.3.6, para cada sucesión decreciente de vértices de H , $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$, el subgrafo H_q resultante de la eliminación de tales vértices tiene, a lo sumo, $q + 1$ aristas. Sea, pues, $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vertices de H .

Obsérvese, primero, que $\Delta(H_q) \geq 2$. Si no fuera así, tendríamos que H_q estaría formado, al menos, por $q + 1$ aristas disjuntas. Pero en tal caso,

$$v(H_q) \geq 2(q + 1) = 2q + 2,$$

lo que no es posible, puesto que

$$v(H_q) = v(H) - q = 3q - k - q = 2q - k.$$

Es más, de hecho, $\Delta(H_q) = 2$, porque si fuera $\Delta(H_q) \geq 3$, entonces

$$\Delta(H_j) \geq 3, \text{ para todo } j \in \{0, \dots, q - 1\},$$

es decir,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, q\}$$

y en consecuencia

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq 3q + q + 1 = 4q + 1.$$

Pero como $q \geq 17$ y $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{3q-7}{5} \right\rfloor$, es evidente que

$$e(H) \geq 4q + 1 > 3q + k + 2,$$

cosa que no es posible puesto que $e(H) = 3q + k + 2$.

Así pues, queda demostrado que $\Delta(H_q) = 2$. Y dado que $\{v_1, \dots, v_q\}$ es sucesión decreciente en H , podemos afirmar que

$$\Delta(H_j) \geq 2, \text{ para todo } j \in \{0, \dots, q\}.$$

En una primera etapa, vamos a demostrar que $\Delta(H) = 3$. Como $e(H) = 3q + k + 1 > 3q - k = v(H)$, es evidente que $\Delta(H) \geq 3$. Por tanto, sólo será necesario verificar la otra desigualdad. Para ello, razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que dicha desigualdad no es cierta, es decir, que $\Delta(H) \geq 4$.

Como $\Delta(H_q) = 2$, tenemos garantizada la existencia de un entero $j \in \{1, \dots, q\}$ tal que $\Delta(H_{j-1}) \geq 4$ and $\Delta(H_j) \leq 3$.

Obsérvese que puesto que $\Delta(H_q) \geq 2$, sabemos que

$$\Delta(H_i) \geq 2, \text{ para todo } i = j, \dots, q,$$

con lo cual

$$e(H_j) = \sum_{i=j+1}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \geq (q-j) \cdot 2 + e(H_q) \geq 3q + 1 - 2j.$$



Asímismo, es claro que $v(H_j) = v(H) - j = 3q - k - j$.

Supongamos primero que $\Delta(H_j) = 2$. Entonces $e(H_j) \leq v(H_j)$ y, por tanto,

$$3q + 1 - 2j \leq 3q - k - j$$

de donde se deduce que $k \leq j - 1$. Pero en tal caso,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{i=1}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \\ &\geq 4j + 2(q - j) + e(H_q) \\ &\geq 2q + 2j + q + 1 \\ &= 3q + 2j + 1 \\ &\geq 3q + 2k + 3 > 3q + k + 2, \end{aligned}$$

lo cual es imposible, debido a que $e(H) = 3q + k + 2$.

Supongamos ahora que $\Delta(H_j) = 3$. Como sabemos que $\Delta(H_q) = 2$, entonces, existe otro entero $i \in \{j+1, \dots, q\}$ tal que $\Delta(H_{i-1}) = 3$ and $\Delta(H_i) = 2$.

En este caso, tenemos garantía de que

$$\Delta(H_r) \geq 2, \text{ para todo } r = i, \dots, q$$

y, por consiguiente, que

$$e(H_i) = 2(q - i) + e(H_q) \geq 3q + 1 - 2i.$$

Por otra parte, es evidente que $v(H_i) = v(H) - 1 = 3q - k - i$.

Como se cumple que $\Delta(H_i) = 2$, deducimos que debe ser $e(H_i) \leq v(H_i)$ y, por tanto,

$$3q + 1 - 2i \leq 3q - k - i,$$

lo que nos lleva a deducir que $k \leq i - 1$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{r=1}^q \delta_{H_{r-1}}(v_r) + e(H_q) \\ &\geq 4j + 3(i - j) + 2(q - i) + e(H_q) \\ &\geq 2q + j + i + q + 1 \\ &\geq 3q + k + 2 + j > 3q + k + 2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo, porque $e(H) = 3q + k + 2$.

Así, pues, en cualquiera de los supuestos posibles llegamos a una contradicción, con lo cual, $\Delta(H) = 3$.

En la siguiente etapa probaremos que el grafo H está formado por $k + 1$ copias disjuntas de K^4 y un grafo H^* de valencia máxima 2. Obsérvese que para ello, será suficiente demostrar que H tiene, exactamente, $4(k + 1)$ vértices de valencia 3 y que el máximo número de ellos que son independientes es $k + 1$, puesto que en tal caso, bastaría con aplicar el Lema 4.3.2 para conseguir nuestro propósito.

Tenemos que H es un grafo con valencia máxima 3. Por consiguiente, H tiene al menos $2e(H) - 2v(H) = 4k + 4$ vértices de valencia 3. Asimismo, aplicando el Lema 4.3.1, al menos,

$$\left\lfloor \frac{4k + 4 + 3}{4} \right\rfloor = k + 1$$

de ellos son independientes.

Veamos que, de hecho, el máximo número de vértices independientes de valencia 3 de H es, exactamente, $k + 1$. Para ello, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que dicho número es $k + 2 + i$, siendo i un entero verificando que $0 \leq i \leq q - k - 2$. Sea $\{w_1, \dots, w_{k+2+i}\}$ un conjunto de vértices independientes de valencia 3 y denotemos por H_{k+2+i} al grafo resultante de eliminar de H los vértices de dicho conjunto.

Como el conjunto de vértices independientes antes considerado tiene máximo cardinal, es evidente que

$$v(H_{k+2+i}) = 3q - 2k - 2 - i \text{ y } e(H_{k+2+i}) = 3q - 2k - 4 - 3i,$$

así como que $\Delta(H_{k+2+i}) \leq 2$. De hecho, como $\Delta(H_q) = 2$, tenemos que

$$\Delta(H_j) = 2, \text{ para todo } j = k + 2 + i, \dots, q.$$

Es decir, para cada $j \in \{k + 3 + i, \dots, q\}$, existe $w_j \in H_{j-1}$ tal que $\delta_{H_{j-1}}(w_j) = 2$.

Luego $\{w_1, \dots, w_{k+2+i}, w_{k+2+i+1}, \dots, w_q\}$ es una sucesión decreciente de vértices y el grafo H_q resultante de eliminar dichos vértices de H verifica que

$$\begin{aligned} e(H_q) &= e(H) - 3(k + 2 + i) - 2(q - (k + 2 + i)) \\ &= 3q + k + 2 - k - 2 - i - 2q \\ &= q - i < q + 1, \end{aligned}$$

de donde deducimos que $H \in \mathcal{C}_q^q$. Esto es un absurdo puesto que por aplicación del Lema 4.3.6 tenemos constancia de que $H \notin \mathcal{C}_q^q$.

Así que el máximo número de vértices independientes de valencia 3 en H es exactamente $k + 1$.

Por otra parte, si H tuviese al menos $4k + 5$ vértices de valencia 3, entonces por el Lema 4.3.1 deduciríamos que al menos

$$\left\lfloor \frac{4k + 5 + 3}{4} \right\rfloor = k + 2$$

de ellos son independientes siendo esto una contradicción con el razonamiento anterior.

Luego hemos demostrado que H tiene exactamente $4k + 4$ vértices de valencia 3 y que el máximo número de ellos que son independientes es $k + 1$. Por consiguiente, aplicando el Lema 4.3.2 H está formado por $k + 1$ copias disjuntas de K^4 y un grafo H^* de valencia máxima 2.

Nótese que sólo nos falta probar que $H^* \in \mathcal{F}_{3q-5k-4}$, es decir, que todos los vértices de H^* son de valencia 2.

Denotemos por $n_j \geq 0$ al número de vértices de H que tienen valencia j , para $j = 0, 1, 2, 3$. Son conocidas las identidades

$$\left. \begin{aligned} 3n_3 + 2n_2 + n_1 &= 2e(H) \\ n_3 + n_2 + n_1 + n_0 &= v(H) \end{aligned} \right\},$$

es decir,

$$\left. \begin{aligned} 3n_3 + 2n_2 + n_1 &= 2(3q + k + 2) \\ n_3 + n_2 + n_1 + n_0 &= 3q - k \end{aligned} \right\}.$$

Hemos demostrado que $n_3 = 4k + 4$, con lo que el sistema se reduce a este otro:

$$\left. \begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 6q - 10k - 8 \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 3q - 5k - 4 \end{aligned} \right\},$$

de donde se deduce trivialmente que $n_1 + 2n_0 = 0$ esto es, que $n_0 = n_1 = 0$.

Hemos probado, pues, que H está formado $4k + 4$ vértices de valencia 3 y un grafo H^* de orden $3q - 5k - 4$ cuyos vértices son todos de valencia 2. Esto finaliza la prueba del resultado. \otimes

La Proposición 4.3.4 y el Teorema 4.3.7 nos conducen a la caracterización de la familia extremal de grafos $EX(n; TK^p)$ para cualquier par de valores (n, p) pertenecientes al sector infinito que venimos estudiando. Deshaciendo el cambio $p = n - q$, dicha familia es la que se enuncia en el Corolario que sigue a continuación.

Corolario 4.3.8 Sean n y p dos enteros positivos, con $n - p \geq 17$ y tales que $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Entonces

$$EX(n; TK^p) = \left\{ (2n - 3p + 1)\overline{K^4} + \overline{F}, : F \in \mathcal{F}_{12p-7n-4} \right\}.$$

4.4 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos abordado la búsqueda directa de nuevas soluciones para el Problema Topológico de Turán. Siguiendo la línea de trabajo iniciada en [9] y [10], y completada en los capítulos 2 y 3 de esta memoria, hemos analizado la función $ex(n; TK^p)$ para valores relacionados de n y p . De este modo, han sido obtenidos tales valores exactos cuando $\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ y $n-p \geq 15$. En el mismo sector, cuando $n-p \geq 17$, también ha sido caracterizada su correspondiente familia extremal de grafos.

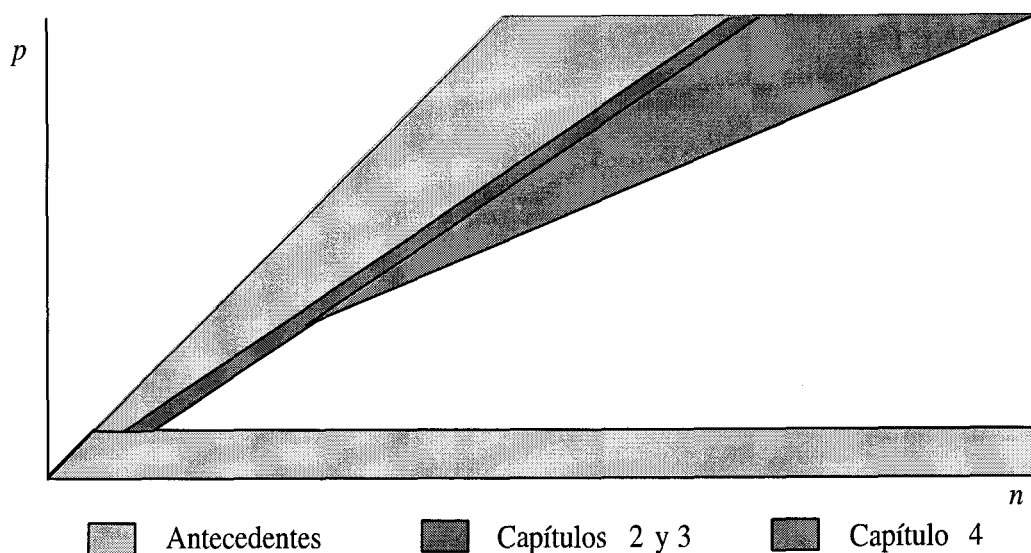


Figura 4.11: Región del plano para la que se conoce el valor exacto de la función $ex(n; TK^p)$.

Aunque desde un punto de vista global se ha avanzado de un modo significativo (ver Figura 4.11), también es cierto que el resto de casos no contemplados hasta el momento constituye un amplio sector para el que la respuesta a este problema sigue siendo una incógnita.

Otro problema extremal que permanece abierto actualmente y muy relacionado con el Problema Topológico de Turán, consiste en la búsqueda de valores exactos para la función $ex(n; MK^p)$, que denota al máximo número de aristas de un grafo de orden n sin contener un subgrafo contractible a K^p . En todos los trabajos que se conocen, se ha tratado la búsqueda de tales valores exactos para valores pequeños de p , conociéndose la respuesta sólo para $p \leq 8$.

Creemos que el análisis de este problema para valores relacionados de n y p , es una línea de trabajo que podría ser aplicada a esta nueva extensión y a partir de la cual, tal vez se podrían obtener nuevas aportaciones.

Capítulo 5

Estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$

En este capítulo abordaremos el análisis del problema extremal que involucra al grafo bipartito completo $K_{s,t}$ como subgrafo prohibido. Aportaremos una cota superior de la función $ex(n; K_{s,t})$, que será óptima para infinitos valores relacionados de n , s y t . En tales casos, también caracterizaremos su correspondiente familia de grafos extremales.

5.1 Introducción

Otra de las extensiones que surgen del Problema de Turán se corresponde con la búsqueda del valor exacto para la función $ex(n; K_{s,t})$, que representa el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo al grafo bipartito completo $K_{s,t}$ con s vértices en una de sus clases y t vértices en la otra.

Siguiendo con nuestro esquema de trabajo, para los casos en que tales valores exactos han sido encontrados, el paso siguiente consiste en caracterizar la



familia extremal $EX(n; K_{s,t})$ correspondiente, formada por los grafos de orden n y tamaño extremal sin contener a $K_{s,t}$ como subgrafo.

El planteamiento de este problema se remonta a los primeros años de la década de los años 50. P. Kövari, V.T. Sós y P. Turán [46] fueron algunos de los primeros que abordaron su análisis buscando tal vez una solución general para éste en los mismos términos que la obtenida para la función $ex(n; K^p)$. Sin embargo, la analogía entre ambos problemas en cuanto a su planteamiento, nada tiene que ver con el tipo de soluciones. De hecho, como veremos a continuación, los antecedentes son más bien escasos.

Otro problema extremal de formulación similar y muy relacionado con éste, es el conocido como *Problema de Zarankiewicz* [27], planteado por dicho autor en el año 1951. Consiste en determinar el máximo número de aristas $z(n, m, s, t)$ de un grafo bipartito con n vértices en una de sus clases y m en la otra, sin contener a $K_{s,t}$ como subgrafo inducido.

Resulta particularmente interesante citar este problema por la relación existente entre ambas funciones extremales. En efecto, como podemos ver en [44], es fácilmente verificable que

$$2ex(n; K_{s,t}) \leq z(n, n, s, t) \leq ex(2n; K_{s,t}) \quad (5.1)$$

Esta secuencia de desigualdades ha sido la base de los antecedentes conocidos hasta el momento. De hecho, el resultado más significativo es la acotación siguiente que se deduce de (5.1) para la función $ex(n; K_{t,t})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - (t!)^{-2}) n^{2-2/(t+1)} &\leq ex(n; K_{t,t}) \\ &\leq \frac{1}{2} (t-1)^{1/t} (n-t+1) n^{1-1/t} + \frac{1}{2} (t-1)n \quad (5.2) \\ &< n^{2-1/t} + \frac{t-1}{2} n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para valores de $t \geq 4$ se desconoce el orden de la función $z(n, n, t, t)$, el problema también sigue abierto para la función $ex(n; K_{t,t})$.

Sólo en los casos $t = 2$ y $t = 3$, y a partir de las desigualdades (5.1) y (5.2), se conoce que los valores $ex(n; K_{2,2})$ y $ex(n; K_{3,3})$ son de orden $n^{3/2}$ y $n^{5/3}$, respectivamente.

Durante el tiempo transcurrido hasta la fecha, los esfuerzos han estado centrados en intentar obtener valores exactos de la función $ex(n; K_{t,t})$ para los casos $t = 2, 3$. En trabajos independientes, P. Kövari, V.T. Sós y P. Turán [46], en 1954, e I. Reiman [43], en 1958, lograron la cota superior

$$z(n, n, 2, 2) \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Así que, aplicando dicho resultado sobre la desigualdad (5.1) se dedujo la acotación

$$ex(n; K_{2,2}) \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Unos años más tarde, en 1966, P. Erdős, A. Rényi y V.T. Sós [42], haciendo uso de ciertos grafos contruidos por P. Erdős, A. Rényi [16], observaron que la cota superior anterior es asintóticamente lo mejor posible, probando que si q es la potencia de un número primo, entonces se verifica que

$$\frac{1}{2}q(q+1)^2 \leq ex(q^2 + q + 1; K_{2,2}) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2 + \frac{q+1}{2}.$$

Este mismo resultado fue demostrado independientemente por W.G. Brown [6] en 1966. Finalmente, en 1983, Z. Füredi [18] logró la demostración de los únicos valores exactos para la función $ex(n; K_{t,t})$ conocidos hasta el momento, probando que

$$ex(q^2 + q + 1; K_{2,2}) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2$$

y que dicha cota es óptima cuando q es la potencia de un número primo.

Con relación al caso $t = 3$, en [6], W.G. Brown consiguió probar que $z(n, n, 3, 3)$ es de orden $n^{5/3}$ asintóticamente. Sin embargo, ni para la función $z(n, n, 3, 3)$ ni para la función $ex(n; K_{3,3})$ han sido obtenidos valores exactos hasta el momento.

Como se puede comprobar, el estudio de la función extremal $ex(n; K_{s,t})$ ha sido reducido al caso $s = t$ para poder hacer uso de la relación existente con la función $z(n, n, t, t)$. De hecho, en todos los trabajos citados se ha intentado profundizar en la búsqueda de resultados para el Problema de Zarankiewicz, con el objetivo de ser aplicados posteriormente, si es posible, sobre la función $ex(n; K_{t,t})$. En cualquier caso, tanto en uno como en otro problema los antecedentes son escasos, como ha quedado de manifiesto.

Nuestro propósito en este capítulo es afrontar directamente el análisis de la función $ex(n; K_{s,t})$, para valores de s y t no necesariamente idénticos. Lo analizaremos con una visión parecida a la que nos ha conducido a nuevas soluciones para el Problema Topológico en los capítulos precedentes. Así que para ello, en primer lugar, abordaremos la prueba de una cota superior de dicha función que, aunque no sea muy buena desde un punto de vista asintótico, sí nos permita obtener nuevos valores exactos. Con relación al caso $s = t$, demostraremos que dicha cota conduce a la solución exacta de la función $ex(n; K_{t,t})$ cuando $2t \leq n \leq 2t + 1$ y caracterizaremos su familia extremal $EX(n; K_{t,t})$ correspondiente. En cuanto al caso general, probaremos que la cota es también óptima cuando s y t son enteros impares y $n = s + t$. En dicho caso, también será caracterizada su familia extremal correspondiente.

Obsérvese que para demostrar que un grafo G de orden n contiene como subgrafo a $K_{s,t}$, será necesario encontrar en G dos conjuntos, U y V , de s y t vértices, respectivamente, de modo que cada vertice de U es adyacente a todos los vértices de V .

Al igual que para la función $ex(n; TK^p)$, nosotros abordaremos el análisis de este problema desde el punto de vista del grafo complementario (ver Figura 5.1). Para ello, sobre $H = \overline{G}$, eliminaremos un conjunto de $q = n - (s + t)$ vértices de modo que el grafo H_q resultante sea (s, t) -sectable, en cuyo caso, quedará

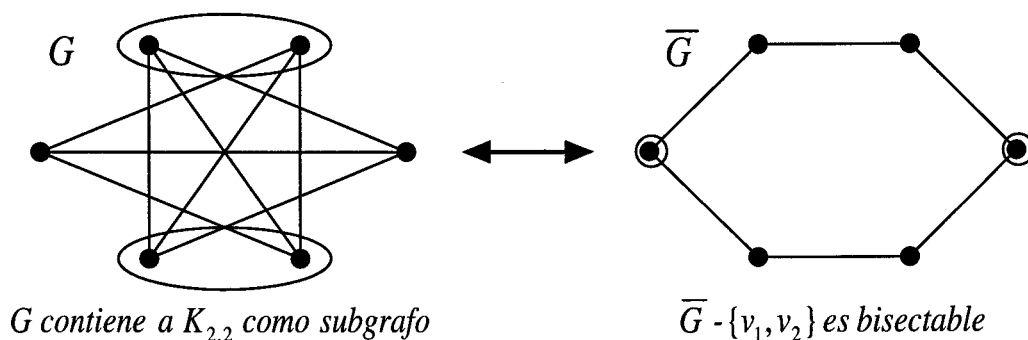


Figura 5.1: Análisis de la función $ex(n; K_{s,t})$ desde el punto de vista del grafo complementario.

demostrado que $G \supseteq K_{s,t}$ y, en consecuencia, deduciremos la cota superior

$$ex(n; K_{s,t}) \leq e(G) - 1.$$

Para probar que dicha acotación es óptima, será necesario encontrar grafos de orden n y tamaño coincidente con la cota, sin contener como subgrafo a $K_{s,t}$.

5.2 Grafos (s, t) -sectables

En esta sección nos planteamos la búsqueda de una cota superior para la función $ex(n; K_{s,t})$ que, aunque no mejore asintóticamente a la expuesta al inicio de este capítulo, sí lo haga cuando n , s y t estén relacionados, hasta el punto de que nos pueda conducir a la obtención de valores exactos.

Para la obtención de dicha cota, será necesario probar que todo grafo G de orden n y cierto tamaño contiene dos conjuntos disjuntos, U y V con s y t vértices respectivamente, de modo que cada vértice de U es adyacente en G con cada vértice de V . En lo sucesivo adoptaremos como supuesto que $s \leq t$ puesto

que ello no supone ninguna pérdida de generalidad. Por otra parte, denotaremos por $q = n - (s + t)$ y trabajaremos sobre el grafo complementario a través del siguiente razonamiento:

Dado un grafo G de orden n y cierto tamaño, sobre su grafo complementario H , nos planteamos eliminar un adecuado conjunto de q vértices de tal modo que el grafo H_q resultante sea (s, t) -sectable. Si esto se cumple podremos deducir que el conjunto de $s + t$ vértices de H_q puede ser separado en dos subconjuntos, U y V , de s y t vértices, respectivamente, de modo que en H_q no hay aristas que unan un vértice de U con otro de V . Esto nos llevaría a deducir en G la existencia de dos conjuntos disjuntos de vértices, U , de cardinal s , y V , de cardinal t , tales que cada vértice de U es adyacente en G a todos los vértices de V . De este modo quedaría probada la contención de $K_{s,t}$ como subgrafo de G .

El resultado central de esta sección consistirá, pues, en demostrar que todo grafo con $s + t$ vértices y a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$ aristas es (s, t) -sectable. Para ello, sobre cualquier grafo de orden n y cierto tamaño, necesitamos previamente diseñar una técnica de eliminación de esos q vértices, a partir de la cual podamos garantizar que el subgrafo resultante tiene tamaño a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$.

Dicha técnica de eliminación de vértices estará basada en el concepto de *sucesión decreciente de vértices* y, por tanto, reducida a probar que $H \in \mathcal{C}_q^{\frac{s+t}{2}-1}$. A la consecución de este propósito nos dedicamos en los dos lemas que siguen.

Lema 5.2.1 Sean n, s, t y q enteros no negativos, con $n \geq s + t$. Sea H un grafo con $n - i$ vértices y a lo sumo, $2(q - i) + \frac{s+t}{2} - 1$ aristas, siendo $i \in \{0, \dots, q\}$. Si la valencia máxima de H es, a lo más, 2 entonces para toda sucesión decreciente de $q - i$ vértices, el subgrafo H_{q-i} resultante de eliminar dichos vértices tiene, a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$ aristas.

Demostración: Denotemos por m al entero no negativo que verifica que $e(H) = 2(q - i) + \frac{s+t}{2} - 1 - m$. Obsérvese que el resultado es inmediato en el caso particular $i = q$, puesto que $e(H) = \frac{s+t}{2} - 1 - m$. Supongamos entonces que $i \leq q - 1$. Sea $\{v_1, \dots, v_{q-i}\}$ una sucesión decreciente de vértices de H .

Supongamos primero que $\Delta(H_{q-i}) = 2$. En este caso, debido al carácter decreciente de la sucesión de vértices, tenemos que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 2, \text{ para todo } j = 1, \dots, q - i$$

con lo cual, por aplicación de la igualdad 1.2 introducida en el Capítulo 1, deducimos que

$$\begin{aligned} e(H_{q-i}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{q-i} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\ &= 2(q - i) + \frac{s+t}{2} - 1 - m - 2(q - i) \\ &= \frac{s+t}{2} - 1 - m \leq \frac{s+t}{2} - 1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que existe $r \in \{1, \dots, q - i\}$ tal que $\Delta(H_{r-1}) = 2$ y $\Delta(H_r) = 1$. Obsérvese que en tal caso H_r es un grafo con $v(H_r) = n - i - r$ vértices y $e(H_r) = 2(q - i) + \frac{s+t}{2} - 1 - m - 2r$ aristas para el cual se cumple que

$$2e(H_r) \leq v(H_r)$$

de donde se deduce que

$$r \geq q - i - \left(\frac{2 + 2m}{3} \right) \tag{5.3}$$

Luego teniendo en cuenta la desigualdad (5.3) llegamos a que

$$\begin{aligned}
 e(H_{q-i}) &= e(H) - \sum_{j=1}^{q-i} \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\
 &= 2(q-i) + \frac{s+t}{2} - 1 - m - 2r - (q-i-r) \\
 &= q-i + \frac{s+t}{2} - 1 - m - r \\
 &\leq q-i + \frac{s+t}{2} - 1 - m - \left(q-i - \left(\frac{2+2m}{3} \right) \right) \\
 &= \frac{s+t}{2} - \frac{1+m}{3} < \frac{s+t}{2}
 \end{aligned}$$

Como el número de aristas es siempre un entero, llegamos a la conclusión de que $e(H_{q-i}) \leq \frac{s+t}{2} - 1$, quedando demostrado el resultado. \otimes

Lema 5.2.2 Sean n, s, t y q enteros no negativos, con $n \geq s+t$. Sea H un grafo con n vértices y $2q + \frac{s+t}{2} - 1$ aristas. Entonces $H \in \mathcal{C}_q^{\frac{s+t}{2}-1}$.

Demostración: Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vértices de H . Vamos a demostrar que el subgrafo H_q de H resultante de la eliminación de tales vértices tiene tamaño a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$. Si la valencia máxima de H es a lo más 2, el resultado es inmediato por aplicación del Lema 5.2.1 tomando $i = 0$. Así que sólo nos falta analizar el supuesto $\Delta(H) \geq 3$.

Supongamos primero que $\Delta(H_j) \geq 3$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$. En este caso, debido al carácter decreciente de la sucesión de vértices considerada, lle-

gamos a que

$$\begin{aligned}
 e(H_q) &= e(H) - \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) \\
 &\leq 2q + \frac{s+t}{2} - 1 - 3q \\
 &= \frac{s+t}{2} - 1 - q \leq \frac{s+t}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que existe $i \in \{1, \dots, q\}$ tal que $\Delta(H_{i-1}) \geq 3$ y $\Delta(H_i) \leq 2$. Nótese que en estas condiciones el grafo H_i tiene $n - i$ vértices y a lo sumo $2q + \frac{s+t}{2} - 1 - 3i \leq 2q + \frac{s+t}{2} - 1 - 2i$ aristas. Así que aplicando el Lema 5.2.1, para toda sucesión decreciente de $q - i$ vértices, el subgrafo de H_i resultante de eliminar dichos vértices tiene a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$ aristas. En particular, v_{i+1}, \dots, v_q es una sucesión decreciente en H_i . Luego $e(H_q) = e((H_i)_{q-i}) \leq \frac{s+t}{2} - 1$.

Hemos probado pues que dada una sucesión decreciente de q vértices cualquiera en H , el subgrafo H_q tiene tamaño a lo sumo $\frac{s+t}{2} - 1$. Por consiguiente, $H \in \mathcal{C}_q^{\frac{s+t}{2}-1}$ como queríamos demostrar. \otimes

Una vez demostrados los dos lemas previos, en el siguiente resultado nos ocuparemos de probar que todo grafo H de orden $s + t$ y tamaño no superior a $\frac{s+t}{2} - 1$, es (s, t) -sectable, es decir, podemos separar H en dos subgrafos disjuntos con s y t vértices, respectivamente. Ese es el propósito del siguiente resultado.

Teorema 5.2.3 *Sean s y t dos enteros positivos con $s \leq t$. Si H es un grafo de orden $n = s + t$ y tamaño, a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$, entonces H es (s, t) -sectable.*

Demostración: El caso particular $s = 1$ es trivial. En efecto, como $2e(H) < v(H)$, tenemos que H tiene, al menos, un vértice aislado, por lo que resulta evidente que H es $(1, t)$ -sectable. Así pues, en lo sucesivo supondremos que $s \geq 2$.

Denotemos por H_1, \dots, H_k , con $k \in \left\{1, \dots, \frac{s+t}{2} - 1\right\}$, a las componentes conexas de H con al menos, una arista. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que tales componentes están numeradas en orden creciente de sus vértices, es decir, que

$$v(H_1) \leq v(H_2) \leq \dots \leq v(H_k).$$

Nótese que esta definición nos permite expresar

$$H = \bigcup_{i=1}^k H_i \cup \bigcup_{j=1}^l K^1,$$

siendo $l = s + t - \sum_{i=1}^k v(H_i)$.

Si $k = 1$ el resultado es inmediato puesto que si todas las aristas de H pertenecen a la componente conexa H_1 , tenemos que $H = H_1 \cup \bigcup_{i=1}^{n-v(H_1)} K^1$ y además

$$v(H_1) \leq e(H_1) + 1 \leq \frac{s+t}{2} - 1 + 1 \leq t.$$

Así que bastaría considerar los subgrafos

$$H^* = \bigcup_{i=1}^s K^1 \text{ y } \tilde{H} = H_1 \cup \bigcup_{i=1}^{t-v(H_1)} K^1$$

que tienen s y t vértices respectivamente y entre los cuales no hay ninguna arista perteneciente a H .

Supongamos entonces que $k \geq 2$. Otro supuesto bajo el cual el resultado también es trivial es cuando $\sum_{i=1}^k v(H_i) \leq t$, en cuyo caso bastaría tomar los subgrafos

$$H^* = \bigcup_{i=1}^s K^1 \text{ y } \tilde{H} = \bigcup_{i=1}^k H_i \cup \bigcup_{i=1}^{t-\sum_{i=1}^k v(H_i)} K^1.$$

Así que en lo sucesivo, trabajaremos bajo la condición de que

$$\sum_{i=1}^k v(H_i) \geq t + 1 \tag{5.4}$$

Veamos en primer lugar que $v(H_1) \leq s$. Para ello razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $v(H_1) \geq s + 1$. Teniendo en cuenta que las componentes conexas H_i están numeradas en orden creciente de su número de vértices, deducimos que

$$v(H_i) \geq s + 1, \text{ para cada } i = 1, \dots, k.$$

Por consiguiente,

$$\frac{s+t}{2} - 1 \geq \sum_{i=1}^k e(H_i) \geq \sum_{i=1}^k (v(H_i) - 1) \geq k(s+1) - k = ks$$

de donde se tiene que

$$k \leq \frac{s+t-2}{2s} \tag{5.5}$$

Pero por otra parte, de la desigualdad (5.4) obtenemos que

$$t+1 \leq \sum_{i=1}^k v(H_i) \leq \sum_{i=1}^k (e(H_i) + 1) \leq \frac{s+t}{2} - 1 + k$$

y por tanto, $k \geq \frac{t-s+4}{2}$. Ahora bien, como $2 \leq s \leq t$ llegamos a que

$$\begin{aligned} k \geq \frac{t-s+4}{2} &= \frac{s+t-2}{2s} + \frac{st-s^2+3s-t+2}{2s} \\ &= \frac{s+t-2}{2s} + \frac{(s-2)(t-s)+s+t+2}{2s} > \frac{s+t-2}{2s} \end{aligned}$$

siendo esto una contradicción con la desigualdad (5.5). Luego $v(H_1) \leq s$.

Sea $j \geq 1$ un entero tal que

$$\sum_{i=1}^j v(H_i) \leq s \text{ y } \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \geq s+1.$$

Nótese que la existencia de dicho entero queda garantizada debido a que $v(H_1) \leq s$ y $\sum_{i=1}^k v(H_i) \geq t+1$. Consideremos los siguientes subconjuntos del conjunto de vértices de H :

$$U^* = \bigcup_{i=1}^j V(H_i) \text{ y } \tilde{U} = \bigcup_{i=j+1}^k V(H_i).$$

Teniendo en cuenta que cualquier vértice de H no perteneciente a U^* ni a \tilde{U} , debe ser aislado, será suficiente demostrar que $|U^*| \leq s$ y $|\tilde{U}| \leq t$. Es más, por definición de j , sabemos que $|U^*| \leq s$, por lo que sólo nos ocuparemos de la otra desigualdad.

Veamos primero que $j \geq \frac{ks}{s+t}$. En efecto, de no ser así tendríamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+2}^k v(H_i) &\geq (k - (j+1)) v(H_{j+2}) \\ &\geq \left(k - \frac{ks}{s+t}\right) v(H_{j+2}) \\ &\geq \frac{kt}{s+t} \cdot \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \\ &\geq \frac{kt}{s+t} \cdot \frac{s+t}{ks} (s+1) \\ &= t \cdot \frac{s+1}{s} > t. \end{aligned}$$

Pero entonces, $s+t \geq \sum_{i=1}^k v(H_i) = \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) + \sum_{i=j+2}^k v(H_i) > s+1+t$ lo cual es una contradicción. Por tanto $j \geq \frac{ks}{s+t}$.

Veamos ahora que $|\tilde{U}| \leq t$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que no es así. Como las componentes H_i están numeradas en orden creciente de sus vértices, sabemos que se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{s+t}{2} - 1 &\geq \sum_{i=1}^k e(H_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^k (v(H_i) - 1) \\ &= |U^*| + |\tilde{U}| - k \\ &\geq jv(H_1) + t + 1 - k \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$v(H_1) \leq \frac{s-t-4+2k}{2j} \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta que $2 \leq s \leq t$, que $j \geq \frac{ks}{s+t}$ y que $k \leq \frac{s+t}{2} - 1$, la

desigualdad (5.6) nos lleva a deducir que

$$\begin{aligned}
 v(H_1) &\leq \frac{s - t - 4 + 2k}{2j} \\
 &\leq \frac{(s - t - 4 + 2k)(s + t)}{2ks} \\
 &= \frac{s^2 - t^2 - 4s - 4t + 2ks + 2kt}{2ks} \\
 &= 2 - \frac{(s + t - 2k)(t - s) + 4(s + t)}{2ks} < 2
 \end{aligned}$$

Esto significa que la componente conexa H_1 tiene a lo sumo un único vértice. Se trata pues de una contradicción debido a que, por hipótesis, cada componente H_i tiene al menos una arista.

Luego $|\tilde{U}| \leq t$, quedando probado el resultado. \otimes

Dado un grafo G con n vértices y al menos, $\binom{n}{2} - \left(2n - 3\frac{s+t}{2}\right) + 1$ aristas, si denotamos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario, tenemos que H tiene orden n y tamaño, a lo sumo, $2q + \frac{s+t}{2} - 1$, siendo $q = n - (s+t)$. Así que aplicando el Lema 5.2.2, deducimos que $H \in \mathcal{C}_q^{\frac{s+t}{2}-1}$ y, por tanto, existe en H una sucesión decreciente de q vértices, $\{v_1, \dots, v_q\}$, tal que el subgrafo H_q resultante de la eliminación de dichos vértices tiene a lo sumo, $\frac{s+t}{2} - 1$ aristas. Ahora bien, tenemos que H_q es un grafo de orden $s+t$ y tamaño no superior a $\frac{s+t}{2} - 1$. Luego, por el Teorema 5.2.3 llegamos a la conclusión de que H_q es (s, t) -sectable y, por consiguiente, G contiene a $K_{s,t}$ como subgrafo. Esta secuencia de razonamientos nos conduce a la obtención de la cota inferior que se recoge en el siguiente resultado.



Teorema 5.2.4 Sean n, s y t tres enteros positivos, con $n \geq s + t$. Entonces

$$ex(n; K_{s,t}) \leq \binom{n}{2} - \left(2n - 3\frac{s+t}{2}\right).$$

5.3 Estudio de la función $ex(n; K_{t,t})$.

Como se ha puesto de manifiesto al inicio de este capítulo, todos los antecedentes de este problema tienen como resultado más significativo las acotaciones que se deducen de la relación entre la función $ex(n; K_{s,t})$ y la función extremal $z(n, n, s, t)$ del Problema de Zarankiewicz. Si bien es cierto que desde un punto de vista asintótico son cotas muy buenas, en ningún caso conducen a la obtención de valores exactos para la función extremal $ex(n; K_{s,t})$.

Dada la gran dificultad que supone la obtención de soluciones exactas para este problema, en muchos trabajos se ha optado por llevar a cabo una simplificación del mismo haciendo coincidir los valores de s y t y estudiar así la función $ex(n; K_{t,t})$. En cualquier caso, las únicas aportaciones que se conocen hasta la fecha en términos de valores exactos se reducen a los casos $t = 2$ y $t = 3$, para los cuales se sabe que las funciones $ex(n; K_{2,2})$ y $ex(n; K_{3,3})$ son, respectivamente, de orden $n^{3/2}$ y $n^{5/3}$.

En esta sección demostraremos que la cota superior del Teorema 5.2.4 resulta ser óptima para todo par de valores de n y t tales que $2t \leq n \leq 2t + 1$. Asimismo, en todos estos casos, caracterizaremos la correspondiente familia de grafos extremales.

5.3.1 Valores exactos para la función $ex(n; K_{t,t})$.

Obsérvese que tomando $s = t$ en el Teorema 5.2.4, ha quedado probado que

$$ex(n; K_{t,t}) \leq \binom{n}{2} - (2n - 3t).$$

Así que para comprobar que dicha cota superior es óptima cuando $2t \leq n \leq 2t + 1$, será suficiente encontrar un grafo de orden n y tamaño $\binom{n}{2} - (2n - 3t)$ sin contener como subgrafo a $K_{t,t}$.

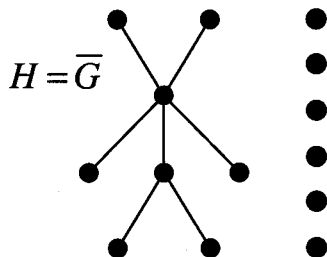


Figura 5.2: Complementario de un grafo G sin contener a $K_{7,7}$.

Respecto al caso $n = 2t$, consideremos el grafo G de orden $2t$ cuyo grafo complementario $H = \bar{G}$ está formado por un árbol T con $t + 1$ vértices y $t - 1$ vértices aislados (ver Figura 5.2). Como sabemos que el número de aristas de un árbol es siempre igual al número de vértices menos una unidad, tenemos que

$$v(G) = v(H) = t + 1 + t - 1 = 2t$$

y

$$e(G) = \binom{2t}{2} - e(H) = \binom{2t}{2} - t = \binom{n}{2} - (2n - 3t).$$

Por otra parte, es imposible separar el grafo H en dos subgrafos disjuntos de orden t puesto que T es conexo y tiene $t + 1$ vértices. Así pues, H es no bisectable y, por consiguiente, G no contiene a $K_{t,t}$ como subgrafo.

Análogamente, sea G^* el grafo de orden $2t + 1$ cuyo complementario H^* está formado por un ciclo C de longitud $t + 2$ y $t - 1$ vértices aislados (ver Figura 5.3). Es evidente que

$$v(G^*) = v(H^*) = t + 2 + t - 1 = 2t + 1$$

y

$$e(G^*) = \binom{2t + 1}{2} - e(H^*) = \binom{2t + 1}{2} - (t + 2) = \binom{n}{2} - (2n - 3t).$$

Para que G^* contenga a $K_{t,t}$ como subgrafo, debemos ser capaces de eliminar un vértice v de H^* de modo que $H^* - \{v\}$ sea bisectable. Sin embargo es evidente que tal cosa no es posible, con lo cual, G^* no contiene como subgrafo a $K_{t,t}$.

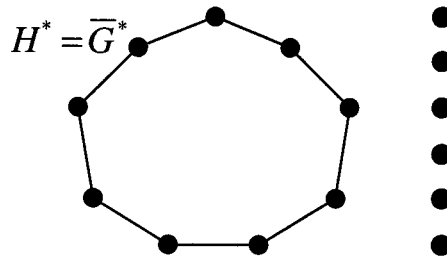


Figura 5.3: Complementario de un grafo G^* sin contener a $K_{7,7}$.

En definitiva, para $n = 2t$ y $n = 2t + 1$ existen grafos de orden n y tamaño $2n - 3t$ sin contener a $K_{t,t}$ como subgrafo y por consiguiente, en estos casos, la cota superior del Teorema 5.2.4 conduce al valor exacto de la función $ex(n; K_{t,t})$, como queda reflejado en el siguiente resultado.

Teorema 5.3.1 *Dados n y t dos enteros positivos tales que $2t \leq n \leq 2t + 1$, se verifica que*

$$ex(n; K_{t,t}) = \binom{n}{2} - (2n - 3t).$$

5.3.2 Familia extremal $EX(n; K_{t,t})$.

En las líneas que siguen nos proponemos dejar cerrado este problema extremal cuando $2t \leq n \leq 2t + 1$ mediante la caracterización de la correspondiente familia $EX(n; K_{t,t})$ de grafos extremales. Recuérdese que dicha familia está formada por los grafos con n vértices y $ex(n; K_{t,t})$ aristas que no contienen como subgrafo a $K_{t,t}$.

En el primero de los resultados analizaremos el caso $n = 2t$. Probaremos que si denotamos por \mathcal{T}_r al conjunto de los árboles con r vértices (ver Figura 5.4), entonces la familia $EX(2t; K_{t,t})$ está determinada por los grafos G cuyo complementario H está formado por un grafo $T \in \mathcal{T}_{t+1}$ y $t - 1$ vértices aislados (ver Figura 5.5). Además, para los casos en que t es impar, el Grafo de Turán $T_t(2t)$ también es grafo extremal.

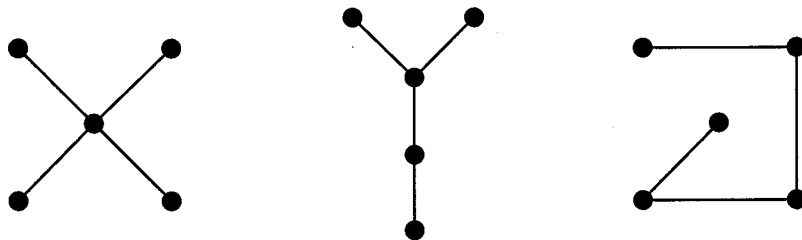
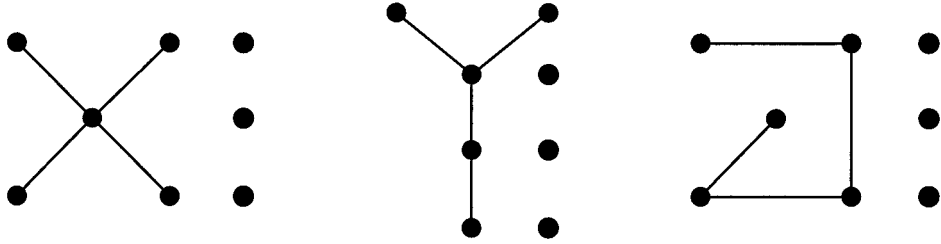


Figura 5.4: Grafos de la familia \mathcal{T}_5



Figura 5.5: Complementarios de los grafos de la familia $EX(8; K_{4,4})$

Teorema 5.3.2 Para cada entero positivo t se cumple:

- Si t es par entonces $EX(2t; K_{t,t}) = \{\overline{T} + K^{t-1} : T \in \mathcal{T}_{t+1}\}$
- Si t es impar entonces $EX(2t; K_{t,t}) = \{\overline{T} + K^{t-1} : T \in \mathcal{T}_{t+1}\} \cup \{T_t(2t)\}$.

Demostración: Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(2t; K_{t,t})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Por aplicación del Teorema 5.3.1, sabemos que H tiene $2t$ vértices y t aristas.

Como en el Teorema 5.2.3, denotemos por H_1, \dots, H_k , con $k \in \{1, \dots, t\}$, a las componentes conexas no triviales de H , es decir, aquellas componentes con al menos una arista. Igualmente podemos suponer que dichas componentes están ordenadas de modo que $v(H_1) \leq v(H_2) \leq \dots \leq v(H_k)$.

Supongamos primero que $k = 1$, es decir, que H está formado por una única componente conexa no trivial y que el resto de sus vértices son aislados. Como $G \in EX(2t; K_{t,t})$ es evidente que H es no bisectable, con lo cual deducimos que $v(H_1) \geq t + 1$. Ahora bien,

$$t \leq v(H_1) - 1 \leq e(H_1) = t$$

y, en consecuencia, H_1 es un grafo conexo de orden $t + 1$ y tamaño t . Luego H_1 es un árbol con $t + 1$ vértices y por tanto $G = \overline{H_1} + K^{t-1}$, siendo $H_1 \in \mathcal{T}_{t+1}$.

Supongamos ahora que $k \geq 2$. Vamos a demostrar que en tal caso no existen más grafos extremales, con la única excepción del caso t impar para el cual podemos encontrar también el Grafo de Turán $T_t(2t)$.

Es evidente que si $v(H_i) \geq t + 1$, para todo $i = 1, \dots, k$ entonces

$$2t = v(H) \geq \sum_{i=1}^k v(H_i) \geq k(t + 1) \geq 2t + 2$$

siendo esto un absurdo. Así que existe un entero $j \geq 1$ tal que $\sum_{i=1}^j v(H_i) \leq t$ y $\sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \geq t + 1$.

Por una parte, como H es no bisectable, tenemos que

$$\sum_{i=j+1}^k v(H_i) \geq t + 1. \quad (5.7)$$

Por otra parte, es inmediato también que

$$j \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \quad (5.8)$$

puesto que en caso contrario, llegamos a la conclusión de que

$$2t \geq \sum_{i=1}^k v(H_i) \geq 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} v(H_i) \geq 2 \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \geq 2(t + 1) > 2t$$

siendo esto una contradicción.

Así que haciendo uso de la desigualdad (5.7), deducimos esta otra:

$$t + 1 \leq \sum_{i=j+1}^k v(H_i) \leq \sum_{i=j+1}^k e(H_i) + k - j = t - \sum_{i=1}^j e(H_i) + k - j \leq t + k - 2j. \quad (5.9)$$

Obsérvese que si k es par, entonces

$$t + k - 2j \leq t + k - 2 \frac{k}{2} = t,$$

con lo que la desigualdad (5.9) es un absurdo.

Si k es impar, teniendo en cuenta que por la desigualdad (5.8) es $j \geq \frac{k-1}{2}$, la expresión (5.9) queda del siguiente modo

$$t+1 \leq \sum_{i=j+1}^k v(H_i) \leq \sum_{i=j+1}^k e(H_i) + k - j = t - \sum_{i=1}^j e(H_i) + k - j \leq t + k - 2j \leq t + 1. \quad (5.10)$$

con lo que deducimos que

$$j = \frac{k-1}{2}, \quad \sum_{i=1}^j e(H_i) = \frac{k-1}{2} = j \quad \text{y} \quad \sum_{i=j+1}^k v(H_i) = t + 1.$$

Por una parte, como $\sum_{i=1}^j e(H_i) = \frac{k-1}{2} = j$ y las componentes conexas H_i son no triviales, tenemos que $e(H_i) = 1$, para todo $i = 1, \dots, j$, es decir, $H_i = K^2$, para cada $i \in \left\{1, \dots, \frac{k-1}{2}\right\}$.

Pero por otra parte, como $j = \frac{k-1}{2}$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} v(H_i) = \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \geq t + 1.$$

Además las componentes H_i están ordenadas de modo creciente en función de su número de vértices, con lo cual podemos concluir que

$$v\left(H_{\frac{k+1}{2}}\right) \geq t + 1 - \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} v(H_i) = t + 1 - 2 \frac{k-1}{2} = t + 2 - k$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 t = \sum_{i=1}^k e(H_i) &= \frac{k-1}{2} + \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k e(H_i) \\
 &\geq \frac{k-1}{2} + \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k (v(H_i) - 1) \\
 &= \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k v(H_i) - 1 \\
 &\geq \frac{k+1}{2} v(H_{\frac{k+1}{2}}) - 1 \\
 &\geq \frac{k+1}{2} (t+2-k) - 1 \geq t
 \end{aligned}$$

puesto que $k \in \{2, \dots, t\}$.

Así que $\frac{k+1}{2}(t+2-k) - 1 = t$ y en consecuencia, $k = t$ y $H_i = K^2$, para todo $i \in \left\{ \frac{k+1}{2}, \dots, k \right\}$. Como k es impar, deducimos que en este caso t debe ser impar y H es el grafo formado por t aristas disjuntas, como queríamos demostrar. \otimes

La caracterización de la familia $EX(2t; K_{t,t})$ llevada a cabo en el teorema anterior, resulta determinante para conocer cuáles son los grafos de la familia $EX(2t+1; K_{t,t})$. En el siguiente resultado demostraremos que dicha familia es unitaria y está formada por el grafo G cuyo complementario H es un ciclo C de orden $t+2$ y $t-1$ vértices aislados.

Teorema 5.3.3 *Para cada entero positivo t se verifica que*

$$EX(2t+1; K_{t,t}) = \{ \overline{C_{t+2}} + K^{t-1} \},$$

donde C_{t+2} denota a un ciclo de orden $t+2$.

Demostración: Vamos a demostrar que el único grafo perteneciente a la familia $EX(2t+1; K_{t,t})$ es aquel cuyo complementario H es el formado por un ciclo de longitud $t+2$ y $t-1$ vértices aislados.

Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(2t+1; K_{t,t})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Sabemos, por aplicación del Teorema 5.3.1, que H tiene $2t+1$ vértices y $t+2$ aristas.

En primer lugar, veamos que $\Delta(H) = 2$. Por una parte, debido a que $2e(H) > v(H)$, debe ser $\Delta(H) \geq 2$. Para probar la otra desigualdad razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe en H un vértice v con valencia mayor o igual que 3. Si denotamos por H^* al grafo resultante de eliminar en H el vértice v , tenemos que H^* tiene $2t$ vértices y a lo sumo $t-1$ aristas. Luego, aplicando el Teorema 5.2.3, deducimos que H^* es bisectable y, en consecuencia, que

$$G = \overline{H} \supseteq \overline{H^*} \supseteq K_{t,t}.$$

Esto es una contradicción, puesto que suponemos que $G \in EX(2t+1; K_{t,t})$. Por tanto, tenemos que $\Delta(H) = 2$.

Supongamos que eliminamos en H un vértice v de valencia 2 y denotemos por $H^* = H - \{v\}$. El grafo H^* tiene orden $2t$ y tamaño t . Además, como suponemos que G es grafo extremal, se cumple que $\overline{H^*} \not\supseteq K_{t,t}$. Pero por otra parte, aplicando el Teorema 5.3.1, sabemos que

$$\text{ex}(2t; K_{t,t}) = \binom{2t}{2} - t.$$

En otras palabras, $\overline{H^*} \in EX(2t; K_{t,t})$.

Obsérvese que en tal caso sólo hay dos posibles configuraciones para el grafo H^* :

Supongamos que H^* está formado por un árbol de orden $t+1$ y $t-1$ vértices aislados. En tal caso, como $\Delta(H) = 2$, es evidente que $\Delta(H^*) \leq 2$.

Ahora bien, el único árbol con valencia máxima 2 es el camino. Así que H^* es el grafo formado por un camino de longitud t y $t - 1$ vértices aislados. De nuevo, como $\Delta(H) = 2$, deducimos que H sólo puede ser el grafo compuesto por un ciclo de orden $t + 2$ y $t - 1$ vértices aislados.

Supongamos que t es impar y H^* está formado por t aristas disjuntas. En tal caso, debido a que $\Delta(H) = 2$, en cualquiera de las configuraciones posibles para H , podemos eliminar un vértice w , de forma que el subgrafo resultante es bisectable.

Por tanto, la única configuración posible es la del grafo H compuesto por un ciclo de longitud $t + 2$ y $t - 1$ vértices aislados. Esto finaliza la prueba del resultado. \otimes

5.4 Estudio de la función $ex(n; K_{s,t})$

En esta sección probaremos que para infinitos valores de s y t , la cota superior obtenida en el Teorema 5.2.4, conduce al valor exacto de la función $ex(n; K_{s,t})$. Concretamente, nos ocuparemos de demostrar que dicha cota es óptima cuando s y t son impares y $n = s + t$. Finalmente, completaremos el trabajo mediante la caracterización de su correspondiente familia de grafos extremales.

Así pues, en lo sucesivo, trabajaremos con valores impares de s y t . Consideremos el Grafo de Turán $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)$. Sabemos que se trata de un grafo $\frac{s+t}{2}$ -partito completo con 2 vértices en cada una de sus clases. Por tanto, si denotamos por H a su grafo complementario, es evidente que dicho grafo estará formado por $\frac{s+t}{2}$ aristas disjuntas.

Obsérvese que si separamos al grafo H en dos subgrafos disjuntos, en cada uno de ellos el número de vértices es siempre par. Como suponemos que

s y t son impares, deducimos que H es no (s, t) -sectable (ver Figura 5.6) y, por consiguiente, que $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)$ no contiene como subgrafo a $K_{s,t}$. Ahora bien, tenemos que

$$v\left(T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)\right) = s+t$$

y

$$e\left(T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)\right) = \binom{s+t}{2} - \frac{s+t}{2} = ex(s+t; K_{s,t}).$$

Esto nos permite enunciar el siguiente corolario.

Teorema 5.4.1 Sean s y t dos enteros positivos impares, con $s \leq t$. Entonces

$$ex(s+t; K_{s,t}) = \binom{s+t}{2} - \frac{s+t}{2}.$$

En lo que sigue abordaremos la caracterización de la correspondiente familia extremal de grafos para los casos en que ha sido encontrado el valor exacto de la función $ex(n; K_{s,t})$. Recuérdese que del razonamiento previo al enunciado del Teorema 5.4.1, se concluye que para valores impares de s y t , el Grafo de Turán $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)$ tiene orden $s+t$, tamaño $ex(s+t; K_{s,t})$ y no contiene como subgrafo a $K_{s,t}$. En consecuencia, $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)$ pertenece a la familia $EX(s+t; K_{s,t})$. En el siguiente resultado probaremos que es el único grafo extremal.

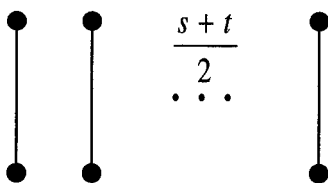


Figura 5.6: Complementario del único grafo de la familia $EX(s+t; K_{s,t})$, para s y t impares.

Teorema 5.4.2 Sean s y t dos enteros positivos impares, con $s < t$. Entonces

$$EX(s+t; K_{s,t}) = \left\{ T_{\frac{s+t}{2}}(s+t) \right\}.$$

Demostración: En las líneas precedentes hemos visto que para valores impares de s y t , el Grafo de Turán $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)$ pertenece a la familia $EX(s+t; K_{s,t})$. Así que nuestro objetivo se reduce a demostrar que cuando $s < t$, se trata del único grafo extremal.

Como el grafo complementario de $T_{\frac{s+t}{2}}(s+t) \in EX(s+t; K_{s,t})$ está formado por $\frac{s+t}{2}$ aristas disjuntas, será suficiente probar que si $G \in EX(s+t; K_{s,t})$ y H es su grafo complementario, entonces todos los vértices de H tienen valencia 1.

Sea G un grafo perteneciente a la familia $EX(s+t; K_{s,t})$ y denotemos por $H = \overline{G}$ a su grafo complementario. Por aplicación del Teorema 5.3.1, sabemos que H tiene $s+t$ vértices y $\frac{s+t}{2}$ aristas. Por otra parte, como G no contiene a $K_{s,t}$ como subgrafo, deducimos que H es no (s, t) -sectable.

Para el caso particular $s = 1$, el resultado es trivial. En efecto, en estas circunstancias tenemos que H es no $(1, t)$ -sectable si y sólo si ninguno de sus vértices es aislado. Ahora bien, si alguno de los vértices de H tuviese valencia mayor que 1, llegaríamos a la conclusión de que

$$s+t = 2e(H) = \sum_{v \in V(H)} \delta_H(v) \geq 1 \cdot (v(H) - 1) + 2 = v(H) + 1 = s+t+1,$$

siendo esto una contradicción. En consecuencia, todos los vértices de H tienen valencia 1.

Así pues, en lo sucesivo, supondremos que $2 \leq s < t$. Como en el Lema 5.3.2, denotemos por H_1, \dots, H_k , con $k \in \left\{ 1, \dots, \frac{s+t}{2} \right\}$, a las componentes conexas no triviales de H , es decir, aquellas componentes con al menos una arista. Igualmente, las supondremos ordenadas de modo que $v(H_1) \leq v(H_2) \leq \dots \leq v(H_k)$.



Como H tiene tamaño $\frac{s+t}{2}$ y k es el número de componentes conexas no triviales, bastará demostrar que $k = \frac{s+t}{2}$, en cuyo caso, H estaría formado por $\frac{s+t}{2}$ aristas disjuntas.

Es evidente que

$$\sum_{i=1}^k v(H_i) \geq t + 1 \quad (5.11)$$

puesto que el grafo H es no (s, t) -sectable.

Supongamos primero que $k = 1$. En tal caso, tenemos que H está formado por una única componente conexa no trivial, H_1 , y que el resto de sus vértices son aislados. Ahora bien, sabiendo que H es no (s, t) -sectable, tenemos que $v(H_1) \geq t + 1$. Pero esto se traduce en la secuencia de desigualdades siguiente:

$$t + 1 \leq v(H_1) \leq e(H_1) + 1 = \frac{s+t}{2} + 1 < t + 1$$

lo cual es absurdo. Por tanto, deducimos que $k \geq 2$.

Debido a $k \geq 2$ y a la desigualdad (5.11), podemos garantizar la existencia de un entero $j \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^j v(H_i) \leq s \text{ y } \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \geq s + 1.$$

Por una parte, como H es no (s, t) -sectable y $\sum_{i=1}^j v(H_i) \leq s$, por construcción, tenemos que

$$\sum_{i=j+1}^k v(H_i) \geq t + 1. \quad (5.12)$$

Obsérvese también que si fuera $j < \frac{(s+1)(k-1) - t}{s+t+1}$, entonces tendríamos que $(j+1)t < (k-j-1)(s+1)$ y, en consecuencia,

$$\frac{(k-j-1)(s+1)}{j+1} > t.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la ordenación de las componentes H_i , llegaríamos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+2}^k v(H_i) &\geq (k-j-1)v(H_{j+2}) \\ &\geq (k-j-1) \cdot \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) \\ &\geq \frac{(k-j+1)(s+1)}{j+1} > t \end{aligned}$$

y por tanto,

$$s+t = \sum_{i=1}^k v(H_i) = \sum_{i=1}^{j+1} v(H_i) + \sum_{i=j+2}^k v(H_i) > s+1+t,$$

siendo esto una contradicción. Así pues, tenemos garantizado que

$$j \geq \frac{(s+1)(k-1) - t}{s+t+1}. \quad (5.13)$$

Recuérdese que las componentes conexas H_i tienen, al menos, una arista cada una. Como sabemos que $e(H) = \frac{s+t}{2}$, si demostramos que $k = \frac{s+t}{2}$ llegaríamos a la conclusión de que el grafo H estaría formado por $\frac{s+t}{2}$ aristas disjuntas y el resultado quedaría probado.

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $k \leq \frac{s+t}{2} - 1$. En tal caso, las desigualdades (5.12) y (5.13), unidas a la hipótesis $s < t$, nos permiten



deducir que

$$\begin{aligned}
 t+1 &\leq \sum_{i=j+1}^k v(H_i) \\
 &\leq \sum_{i=j+1}^k e(H_i) + k - j \\
 &= \frac{s+t}{2} - \sum_{i=1}^j e(H_i) + k - j \\
 &\leq \frac{s+t}{2} + k - 2j \\
 &\leq \frac{s+t}{2} + k - 2 \frac{(s+1)(k-1) - t}{s+t+1} \\
 &= \frac{s+t}{2} - 2 + \frac{t-s-1}{s+t+1} k \\
 &\leq \frac{s+t}{2} - 2 + \frac{t-s-1}{s+t+1} \left(\frac{s+t}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{s+t}{s+t+1} t - 2 - \frac{t-s-1}{s+t+1} \\
 &\leq t-2 < t+1,
 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por consiguiente, deducimos que $k = \frac{s+t}{2}$, es decir, que H está formado por $\frac{s+t}{2}$ aristas disjuntas, como queríamos demostrar. \otimes

5.5 Conclusiones y problemas abiertos

A lo largo del presente capítulo hemos abordado el estudio de otra de las extensiones del Problema de Turán, consistente en determinar el tamaño máximo

$ex(n; K_{s,t})$ de un grafo con n vértices sin contener como subgrafo al grafo bipartito completo $K_{s,t}$, con s vértices en una de sus clases y t vértices en la otra.

Como ya se ha comentado a lo largo del mismo, los avances conocidos hasta el momento, se han derivado de la relación de la función $ex(n; K_{s,t})$ con la función extremal $z(n, m, s, t)$ del Problema de Zarankiewicz, el que se busca maximizar el tamaño de un grafo bipartito con n y m vértices en sus dos clases, sin contener como subgrafo inducido a $K_{s,t}$. Dicha relación permite la obtención de acotaciones superior e inferior para la función $ex(n; K_{s,t})$ que, como en otros problemas extremales, son muy buenas desde un punto de vista asintótico, pero que en ningún caso conducen a la obtención de valores exactos.

Hemos visto que sólo en el caso particular $s = t = 2$ se conoce el valor exacto de dicha función para infinitos valores (no todos) de n , en un resultado debido a Z. Füredi [18].

n, s, t	$ex(n; K_{s,t})$	Referencia
$s = t$ $2t \leq n \leq 2t + 1$	$\binom{n}{2} - (2n - 3t)$	Teorema 5.3.1
s, t impares $n = s + t$	$\binom{n}{2} - \frac{s+t}{2}$	Teorema 5.4.1

Tabla 5.1: Valores exactos para la función $ex(n; K_{s,t})$.

Nuestro propósito en este capítulo ha sido buscar una cota superior a partir de la cual pudiésemos alcanzar valores exactos de la función $ex(n; K_{s,t})$. La cota superior probada en la Sección 2, en efecto, no supone ningún avance

desde el punto de vista asintótico, pero sí lo hace para valores relacionados de n , s y t relacionados hasta el punto de llegar a ser óptima en infinitos casos. Asimismo, en todos los casos en que se han encontrado tales valores exactos, ha quedado caracterizada la familia extremal correspondiente. En las Tablas 5.1 y 5.2 aparacen resumidas las nuevas aportaciones.

Resulta evidente que, a pesar de estas aportaciones, el problema sigue abierto en gran medida. Quedan pendientes, pues, la búsqueda de nuevas cotas superiores a partir de las cuales se pueda avanzar en la búsqueda de más soluciones para este problema extremal.

n, s, t	$EX(n; K_{s,t})$	Referencia
$s = t$ $n = 2t$	$\{\overline{T_{t+1}} + K_{t-1} : T \in \mathcal{T}_{t+1}\} \cup \{T_t(2t)\}$	Teorema 5.3.2
$s = t$ $n = 2t + 1$	$\{\overline{C_{t+2}} + K_{t-1}\}$	Teorema 5.3.3
s, t impares $s < t$ y $n = s + t$	$\{T_{\frac{s+t}{2}}(s+t)\}$	Teorema 5.4.2

Tabla 5.2: Familia extremal $EX(n; K_{s,t})$.

Bibliografía

- [1] K. Appel y W. Haken. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part I: discharging*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [2] K. Appel, W. Haken y J. Koch. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part II: reducibility*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [3] N.L. Biggs, E.K. Lloyd y R.J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [4] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1978.
- [5] B. Bollobás y A. Thomason. Proof of a conjecture of Mader, Erdős and Hajnal on Topological Complete Subgraphs. *Europ. J. Combin.*, 19:883–887, 1998.
- [6] W.G. Brown. On graphs that do not contain a Thomsen graph. *Canad. Math. Bull.*, 9:281–285, 1966.
- [7] P.A. Catlin. Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *J. Combinatorial Theory B*, 26:268–274, 1979.
- [8] M. Cera. El tamaño de un grafo sin subgrafos homeomorfos a un grafo completo. *Tesis Doctoral*, pages 1–121, 1998.

- [9] M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez. The size of a graph without topological complete subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 13:295–301, 2000.
- [10] M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez. Family of extremal graphs without topological complete subgraphs. *Enviado a SIAM J. Discrete Math.*, 2000.
- [11] R. Diestel. Graph theory. En *Graduate Texts in Mathematics*, volumen 173. Springer-Verlag, 1997,2000.
- [12] G.A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.*, 27:85–92, 1952.
- [13] G.A. Dirac. In Abstrakten Graphen Vorhandene Vollständige 4-graphen und Ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.*, 22:61–85, 1960.
- [14] G.A. Dirac. Homomorphism theorems of graphs. *Math. Ann.*, 153:69–80, 1964.
- [15] G.A. Dirac. Chromatic number and topological complete subgraphs. *Canad. Math. Bull.*, 8:711–715, 1965.
- [16] P. Erdős y A. Rényi. On a problem in the theory of graphs. *Publ. Math. Ins. Hungar. Acad. Sci.*, 7:215–235, 1962.
- [17] P. Erdős y A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, 7:143–149, 1964.
- [18] Z. Füredi. Graphs without quadrilaterals. *J. Combin. Theory B*, 34:187–190, 1983.
- [19] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, London, New York, Sydney, 1967.
- [20] H. Hadwinger. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich*, 88:133–142, 1943.

- [21] G. Hajós. Über ein Konstruktion nicht n -Färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, 10:116–117, 1961.
- [22] R. Halin. Über Einen Satz von K. Wagner zum Vierfarbenproblem. *Math. Ann.*, 153:47–62, 1964.
- [23] R. Halin. Zur Klassifikation der Endlichen Graphen Nach H. Hadwiger und K. Wagner. *Math. Ann.*, 172:46–78, 1967.
- [24] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.
- [25] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [26] H.A. Jung. Anwendung einer methode von K. Wagner bei färbungs problemen für Graphen. *Math. Ann.*, 161:325–326, 1965.
- [27] K. Karankiewicz. Problem p 101. *Colloq. Math.*, 2:116–131, 1951.
- [28] D. Köning. *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhäuser, 1990.
- [29] J. Komlós y E. Szemerédi. Topological cliques in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 3:247–256, 1994.
- [30] J. Komlós y E. Szemerédi. Topological cliques in graphs II. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:79–90, 1996.
- [31] A. Kostochka. A lower bound for the hadwiger number of a graph as a function of the average degree of its vertices. *Discret. Analyz. Novosibirsk*, 38:37–58, 1982.
- [32] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und Mittlere Kantendichte von graphen. *Math. Annalen*, 174:265–268, 1967.
- [33] W. Mader. Homomorphiesätze für Graphen. *Math. Annalen*, 178:154–168, 1968.



- [34] W. Mader. Existenz n -fach Zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend grosser Kantendichte. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 37:86–97, 1972.
- [35] W. Mader. Hinreichende Bedingungen für die existenz von Teilgraphen, die zu einem Vollständigen Graphen homöomorph sind. *Math. Nachr.*, 53:145–150, 1972.
- [36] W. Mader. $3n - 5$ edges do force a subdivision of K_5 . *Combinatorica*, 18, 4:569–595, 1997.
- [37] W. Mader. Graphs without a subdivision of K_5 of maximum size. *Preprint*, 1997.
- [38] W. Mader. Topological minors in graphs of minimum degree n . *Personal Survey*, 1998.
- [39] W. Mantel. Problem 28, Soln. by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.
- [40] K. Menger. Zur Allgemeinen Kuventheorie. *Fund. Math.*, 10:96–115, 1927.
- [41] O. Ore. *The four-colour problem*. Academic Press, New York, 1967.
- [42] A. Rényi P. Erdős y V.T. Sós. On a problem of graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1:215–235, 1966.
- [43] I. Reiman. Über ein problem von K. Zarankiewicz. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 9:269–279, 1958.
- [44] M. Grötschel R.L. Graham y L. Lovász. *Handbook of Combinatorics*. Elsevier Science B.V., New York, 1967.
- [45] N. Robertson y P.D. Seymour. Graph minor XIII. the disjoint paths problem. *J. Comb. Theory Ser. B*, 63:65–110, 1995.

- [46] P. Kövári. V.T. Sós y P. Turán. On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloq. Math.*, 3:50–57, 1954.
- [47] A. Thomason. An extremal function for complete subgraphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 95:261–265, 1984.
- [48] C. Thomassen. Some homeomorphism properties of graphs. *Math. Nachr.*, 64:119–133, 1974.
- [49] C. Thomassen. K_5 -subdivisions in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:179–189, 1996.
- [50] P. Turán. Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.
- [51] P. Turán. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, 3:19–30, 1954.
- [52] K. Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Math. Ann.*, 114:570–590, 1937.
- [53] K. Wagner. Beweis einer abschwächung der Hadwiger-Vermutung. *Math. Ann.*, 153:139–141, 1964.
- [54] H.P. Young. A quick proof of Wagner's equivalence Theorem. *J. London Math. Soc.*, 3 (2):661–664, 1971.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal Integrado por los abajo firmantes

en el día de la fecha, para juzgar la tesis Doctoral de

D. PEDRO GARCIA VAZQUEZ

titulada PROBLEMAS EXTREMOS EN TEORÍA DE

GRAFOS

SOBRESALIENTE CON

acordó otorgarle la calificación de LAUDE por unanimidad

2003

Sevilla, 3 de Octubre

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Doctorado,

El presidente

El Secretario,

