

R. 23.727

LBS 1325967

C 043/346 BCD

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

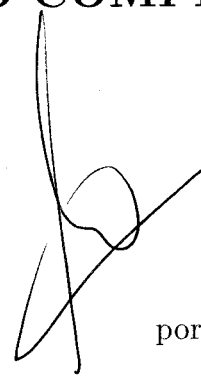
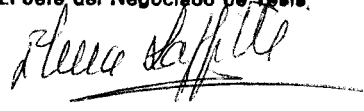
EL TAMAÑO DE UN GRAFO SIN SUBGRAFOS HOMEOMORFOS A UN GRAFO COMPLETO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 14 número 334 del libro
correspondiente.

Sevilla, 12 de diciembre de 1988

El Jefe del Negociado de Tesis.

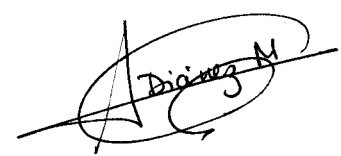


Memoria presentada por
Martín Cera López
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
de los Directores



Fdo. Alberto Márquez Pérez
Catedrático de Universidad del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de



Fdo. Ana Rosa Diánez Martínez
Profesora Titular de Universidad del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de
Sevilla

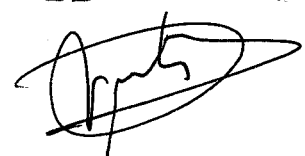
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Dpto. de Matemática Aplicada I
de la Facultad de Informática y Estadística
de esta Universidad desde el día 23/11/88
hasta el día 12/12/88

Sevilla, noviembre de 1998

Sevilla 12 de diciembre de 1988.

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO,



A TOÑI

*Si buscas resultados distintos,
no hagas siempre lo mismo.*

ALBERT EINSTEIN

Resumen

Desde el origen de la Teoría de Grafos Extremales, uno de los problemas más generales que pueden plantearse en este campo, es estudiar los grafos de manera que podamos encontrar condiciones para que contengan o no a un subgrafo dado. Es en este sentido donde podemos encuadrar los objetivos de esta tesis.

Concretamente, nos va a interesar el estudio de la función $ex(n; TK_p)$, es decir, el número máximo de aristas de un grafo de orden n para que no contenga a un subgrafo homeomorfo al grafo completo de orden p . A su vez, como en todo problema extremal, resulta interesante caracterizar los grafos maximales para la propiedad anterior, ésto es lo que se conoce como familia de grafos extremales. Una pequeña variación del problema anterior nos conduce al análisis paralelo de la función $ex(n; TK_p^-)$.

Por otra parte, el estudio de problemas extremales, como los anteriormente descritos, cuando el orden de los grafos estudiados es suficientemente grande, conduce de forma natural a plantearse el problema para grafos infinitos. Claro está, que para grafos infinitos, carece de sentido estudiar el número de aristas frente al número de vértices por ser, en general, ambos infinitos. Intentamos dar solución a este problema introduciendo el concepto de valencia media de un grafo infinito como límite de las valencias medias de una sucesión creciente de grafos finitos que lo recubren. Ésto, nos permite abordar el problema extremal, relacionado con la contención de subgrafos homeomorfos a un grafo completo, para grafos infinitos en función de la valencia media, así como, establecer las relaciones con el correspondiente problema para el caso finito.

*La inspiración existe, pero
tiene que encontrarte trabajando.*

PABLO RUIZ PICASSO

Agradecimientos

En primer lugar, debo citar a la profesora Ana Rosa Diánez Martínez por su constante apoyo y por su ayuda incondicional, sin olvidar al profesor Alberto Márquez Pérez, sin los que este trabajo nunca se hubiese podido realizar.

Quiero expresar mi gratitud a mis compañero de la E.T.S. de Arquitectura, a los fueron mis compañeros de E.U.I.T. Agrícola, y en general, al Departamento de Matemática Aplicada I, que siempre me ayudaron cuando los necesité.

Dejando a un lado el contexto laboral, no puedo dejar de mencionar a mi familia, mis amigos y, muy especialmente, a Toñi, por su paciencia y estímulo durante la realización de esta memoria.

Por último, y no en importancia, dar las gracias a mis padres, quiénes con su apoyo incondicional han hecho posible que pueda llegar este momento.

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de la Teoría de Grafos Extremales. Esta disciplina estudia las posibles relaciones que puedan existir entre diferentes invariantes de un grafo, como orden, tamaño, valencia media, conectividad,... y algunas propiedades de los grafos, como por ejemplo la contención de un subgrafo prohibido, ciclos de longitud dada,...

Los trabajos en este área han sido numerosos, así los primeros resultados aparecen en 1935 cuando K. Wagner en su tesis doctoral relaciona el Teorema de los Cuatro Colores con el problema de estudiar los grafos sin contener un subgrafo contractible a K_5 . Y entre los más recientes, podemos destacar los últimos trabajos de W. Mader [40] en 1997, donde prueba la Conjetura de Dirac sobre el tamaño de un grafo sin contener a un subgrafo homeomorfo a K_5 , problema que está relacionado directamente con el Teorema de Kuratowski sobre planaridad.

Existe una gran variedad de problemas, relacionados además con otras áreas, que pueden incluirse dentro de la Teoría Extremal de Grafos, pero, como dice Bollobás en su libro [5] uno de los problemas extremales más generales en Teoría de Grafos es encontrar los valores de la función $ex(n; F)$, es decir, el máximo número de aristas que puede tener un grafo con n vértices sin contener a F como subgrafo, donde F es un grafo cualquiera. En este sentido, uno de los resultados más conocidos en la Teoría Extremal de Grafos es el Teorema de Turán [53] y [54], quién en 1941 dió respuesta al problema tomando F como el grafo completo de tamaño p . Así probó que

$$ex(n; K_{p+1}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) n^2 + o(n),$$

aunque ya W. Mantel en [44] la había probado para $p = 2$.

Una formulación prácticamente equivalente a la función $ex(n; K_{p+1})$ es plantear el mismo problema en términos de valencia media en vez de máximo número de aristas. Así, dado un entero no negativo p , existe una constante $c = c(p)$ tal que si G es un grafo con n vértices y valencia media $d(G)$ mayor que cn entonces G contiene a K_{p+1} . De esta forma, si $d(n; K_{p+1})$ denota a la valencia media máxima de un grafo con n vértices sin contener a K_{p+1} como subgrafo entonces, como consecuencia inmediata del Teorema de Turan, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n; K_{p+1})}{n} = \frac{1}{2} \binom{p-1}{p}.$$

Dentro del mismo contexto de garantizar o no la presencia de un determinado subgrafo completo K_p , merece especial atención el problema de encontrar el número cromático de un grafo para que contenga como subgrafo a K_p . Este problema fue abordado por Hadwiger [23] en 1943, conjeturando que si G es un grafo de número cromático al menos p entonces G contiene a K_p como subgrafo. El resultado es trivial para $p = 1, 2$ y 3 (ver [11]) y para $p = 4$ fue probado por G.A. Dirac en [12]. K. Wagner en 1937 en [55] probó que La Conjetura de Hadwiger para $p = 5$ era equivalente al Teorema de los Cuatro Colores. Otras pruebas de dicha equivalencia fueron dadas por R. Halin [25] y [26], por O. Ore [47] y, posteriormente, por H.P. Young [58]. Por tanto, el caso $p = 5$ quedó probado cuando K. Appel y W. Haken [1] y [2] en 1976 demostraron el Teorema de los Cuatro Colores. El caso $p = 6$ ha sido verificado por Robertson, Seymour y Thomas en 1993 (ver [11]). Para valores de $p \geq 7$ el problema sigue aún abierto y únicamente se conocen resultados generales que han derivado del trabajo de K. Wagner [57] en el que probaba que todo grafo con número cromático al menos 2^p contiene una contracción de K_{p+1} . Este resultado fue generalizado por G.A. Dirac en [15] y por H.A. Jung en [31] quienes demostraron, de forma independiente, que cualquier grafo con número cromático par suficientemente grande contiene una subdivisión de K_p .

El paso al planteamiento topológico de la Conjetura de Hadwiger fue dado por G. Hajós [24] en 1961, estableciendo como conjetura que todo grafo p -cromático contiene un subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño p . Pero P.A. Catlin [7] en 1979 probó que la conjetura anterior es falsa para $p \geq 7$.

A la lista de los invariantes sobre un grafo expuestos anteriormente

–número de aristas, valencia media y número cromático– para garantizar o no la presencia de un determinado subgrafo completo, B. Grünbaum [21] introdujo el grado de conectividad. De hecho, sugirió la idea de probar que todo grafo finito con un grado de conectividad suficientemente grande contendría un subgrafo homeomorfo a K_p . Llegar a este resultado usando técnicas clásicas de conectividad, como los Teoremas de Menger [45], parece muy difícil. De hecho, para grafos infinitos W. Mader probó en [38] que el resultado era falso.

Sin embargo, si cambiamos grado de conectividad por valencia media de un grafo finito los resultados no tardan en aparecer. Así en 1967 W. Mader [37] probó que todo grafo G de n vértices con al menos $p \cdot 2^{\binom{p}{2}-1}$ aristas contiene un subgrafo homeomorfo a K_{p+1} .

De este resultado surge el estudio de la función $d(p)$ definida para todo p natural como:

$$d(p) = \inf\{t \geq -1 \text{ tal que si } 2|E(G)| \geq t|V(G)| \text{ entonces } TK_p \subset G\}$$

Así, el resultado anteriormente mencionado se traduce en $d(p+1) \leq 2 \cdot p \cdot 2^{\binom{p}{2}-1}$, desigualdad que fue mejorada por el propio Mader en [39], probando que para todo $p \geq 4$ se verifica que $d(p) \leq 6 \cdot 2^{p-3} - p$.

El problema anterior puede ser planteado igualmente en términos de número máximo de aristas de un grafo sin contener un subgrafo homeomorfo a K_p , es decir, en términos de la función $ex(n; TK_p)$. Así el resultado anterior de Mader puede expresarse

$$ex(n; TK_p) \leq t(p)n - \binom{t(p)+1}{2}$$

donde $n \geq t(p) = 3 \cdot 2^{p-3} - p$ con $p \geq 4$.

Como puede observarse, tanto si se plantea el problema en términos de la función $d(p)$ como de $ex(n; TK_p)$, los resultados reseñados son asintóticos, ya que el problema se vuelve mucho más complicado si se pretende encontrar valores exactos para dichas funciones. De hecho se conocen muy pocos valores exactos, a parte de los evidentes para $p \leq 3$, $d(p) = 2(p-2)$ y $ex(n; TK_3) = n-1$ ($n \geq 3$). El caso $p = 4$ fue resuelto sobre 1960 por G.A.

Dirac en [13] y por K. Wagner en [56], de forma que $ex(n; TK_4) = 2n - 3$ ($n \geq 3$) y en consecuencia $d(4) = 4$. Sin embargo, el caso $p = 5$ ha estado abierto desde 1964, cuando G.A. Dirac [14] conjeturó que $ex(n; TK_5) = 3n - 6$. La primera acotación significativa fue dada por C. Thomassen [50] en 1974 probando que $ex(n; TK_5) \leq 4n - 10$. Posteriormente, en 1997, él mismo [52] rebajó la cota a $ex(n; TK_5) \leq \frac{7}{2}n - 7$. Finalmente, dicha conjetura ha sido probada por W. Mader [40] en 1997, caracterizando además la familia maximal de grafos para este problema en [42]. Además, este problema relaciona la Teoría de Grafos Extremales con los problemas de inmersión de grafos. Concretamente, el Teorema de Kuratowski [4] afirma que un grafo admite una inmersión plana si y sólo si no contiene un subgrafo subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$, mientras que el resultado anterior probado por W. Mader da una condición sobre el tamaño de un grafo de orden n para asegurar que no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 . Así, el conocimiento de la función $ex(n; TK_p)$, y de forma general el estudio de la función $ex(n; TH)$ con H apropiado, puede conducir a resultados relacionados con la inmersión de grafos en superficies.

Como hemos descrito anteriormente, hasta el momento sólo se conocían valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ para un número finito de valores de p . El primer objetivo de esta memoria es seguir estudiando la función $ex(n; TK_p)$ para $p \geq 6$. En este sentido, encontraremos valores exactos de dicha función para un número infinito de valores de p , concretamente, para cada $p \geq 6$ encontraremos un intervalo de valores de n para los cuales probaremos valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$, como se muestra en la Tabla 1. Más aún, para los valores de n y p donde obtengamos valores exactos, describiremos la familia de grafos extremales $EX(n; TK_p)$ para dicha función, es decir, la familia de grafos de orden n con $ex(n; TK_p)$ arista sin contener un subgrafo homeomorfo a K_p (ver Tabla 2). Además, como consecuencia de las técnicas que utilizaremos para el estudio de dicha función, abordaremos un estudio paralelo para la función $ex(n; TK_p^-)$.

Por otra parte, desde que fue introducido el concepto de grafo infinito en 1916 por D. Köning [35], la Teoría de Grafos ha seguido dos vertientes, aunque estrechamente relacionadas, que son la teoría sobre grafos finitos y el estudio de grafos infinitos. La mayoría de los trabajos en grafos infinitos surgen al tratar de extender conceptos y propiedades, conocidos para grafos finitos, a grafos infinitos. En este sentido, un segundo objetivo trazado en este trabajo es extender los

p	n	$ex(n; TK_p)$	Referencia
3	$n \geq 3$	$n - 1$	
4	$n \geq 4$	$2n - 3$	[13]
5	$n \geq 5$	$3n - 6$	[40]
$p \geq 6$	$p < n \leq \lfloor \frac{4p-2}{3} \rfloor$	$\binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$	Teorema 3.3.1
	$\lfloor \frac{4p-2}{3} \rfloor < n \leq \lfloor \frac{3p-4}{2} \rfloor$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$	Teorema 3.3.5

Tabla 1: Valores exactos conocidos y nuevas aportaciones para la función $ex(n; TK_p)$.

problemas extremales, relacionados con la contención de subgrafos prohibidos, a grafos infinitos.

La memoria se ha desarrollado en cinco capítulos que a continuación detallamos.

El primer capítulo recoge, de forma general, algunas notaciones, definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grafos que necesitaremos a lo largo del desarrollo de los demás capítulos de esta memoria.

Persiguiendo el primer objetivo de encontrar valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$, introducimos una familia de grafos que notaremos por \mathcal{C}_r^t , que para ciertos valores de r y t se relacionan con los grafos que contienen a un subgrafo homeomorfo a uno dado. Definir y estudiar esta familia es el objeto del Capítulo 2. Concretamente, definiremos la familia \mathcal{C}_r^t como aquella formada por los grafos que al eliminar de ellos r vértices, el grafo resultante tiene a lo más t aristas. Una vez definida dicha familia, veremos que está bien definida y estudiaremos algunas de sus propiedades. Destacaremos, por su utilización en los próximos

Valores de n y p	$EX(n; TK_p)$	Referencia
$p < n \leq \left\lfloor \frac{4p-2}{3} \right\rfloor$	$K_{4p-3n-2} + (2n-2p+1)\overline{K_2}$	Teorema 3.4.4
$\left\lfloor \frac{4p-2}{3} \right\rfloor < n \leq \left\lfloor \frac{3p-6}{2} \right\rfloor$	$(3n-4p+2)\overline{K_3} + (6p-4n-3)\overline{K_2}$	Teorema 3.4.6

Tabla 2: Descripción de la familia $EX(n; TK_p)$ para $\left\lfloor \frac{2n+6}{3} \right\rfloor \leq p \leq n$.

capítulos, las condiciones suficientes sobre el número de aristas de un grafo para que pertenezca a las clases \mathcal{C}_q^q y \mathcal{C}_q^{q+1} .

Una vez analizada la clase de grafos \mathcal{C}_r^t , veremos en el Capítulo 3 la relación entre esta familia y la función $ex(n; TK_p)$. Comenzaremos probando una cota superior para dicha función que para ciertos valores de n y p conducirán a valores exactos de $ex(n; TK_p)$. Para conseguir estos objetivos, dado un grafo G construiremos un grafo bipartito asociado, de forma que la existencia de emparejamiento completo en el grafo bipartito va a garantizar que el grafo G contenga un subgrafo homeomorfo a un grafo completo. Ampliaremos el conjunto de valores de n y p donde probaremos valores exactos para la función en cuestión y pasaremos a analizar la familia extremal $EX(n; TK_p)$ para dichos valores. Para caracterizar la familia extremal probaremos que $EX(n; TK_p) \subseteq \mathcal{C}_q^{q+1} - \mathcal{C}_q^q$ y esto nos llevará a describir la citada familia de grafos. Por último daremos una caracterización de la función $d(p)$ en función de $ex(n; TK_p)$.

El siguiente capítulo, aprovechando los resultados y técnicas del capítulo anterior, está dedicado al estudio de la función $ex(n; TK_p^-)$, para la que encontraremos una cota superior general y valores exactos para $\left\lfloor \frac{2n+7}{3} \right\rfloor \leq p < n$. Además, describiremos la familia extremal correspondiente.

Como ya hemos dicho anteriormente, una de las líneas principales de desarrollo de la teoría de grafos infinitos, aparece al extender problemas conocidos para grafos finitos a grafos infinitos. Así, en el Capítulo 5, con el fin de extender la función $d(p)$ a grafos infinitos, introduciremos un concepto de valencia media $d_\infty(G)$ para grafos infinitos, que de alguna manera heredará las propiedades de valencia media para grafos finitos, ya que se definirá a partir de una sucesión de grafos finitos. La definición de valencia media $d_\infty(G)$, permitirá definir la función $d_\infty(p)$, que veremos que está bien definida y que se relaciona directamente con la función $d(p)$ probando la desigualdad $d(p) - 1 \leq d_\infty(p) \leq d(p)$.

Para finalizar cada capítulo hemos creído conveniente dedicar una sección a conclusiones y problemas abiertos, con el fin de agilizar la comprensión y orientar a lector sobre futuros trabajos.

Por último, reseñar que se ha incluido un apartado dedicado a la bibliografía empleada, que constituye una referencia básica de los trabajos que se han utilizado en el desarrollo de esta memoria.

Índice

Introducción	i
1 Preliminares	1
1.1 Grafos finitos	1
1.2 Grafos infinitos	6
2 Notaciones y resultados previos	11
2.1 Introducción	11
2.2 Sucesión creciente y decreciente de vértices.	13
2.3 Estudio de la familia \mathcal{C}_r^t	16
2.3.1 Definiciones	16
2.3.2 Propiedades	18
2.4 Conclusiones y problemas abiertos	29
3 Estudio de la función $ex(n; TK_p)$	31
3.1 Introducción	31
3.2 Cota superior para $ex(n; TK_p)$	34
3.3 Valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$	37

3.3.1	Caso $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$	38
3.3.2	Caso $\left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$	39
3.4	Familia extremal $EX(n; TK_p)$	52
3.4.1	Definiciones y Notaciones	52
3.4.2	Caso $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$	54
3.4.3	Caso $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$	59
3.5	Algunas aplicaciones de la función $ex(n; TK_p)$	64
3.5.1	Estudio de la función $d(n; TK_p)$	64
3.5.2	Número de Ramsey $R(TK_{3q+2}, TK_{1,2})$	66
3.6	Conclusiones y problemas abiertos	67
4	Estudio de la función $ex(n; TK_p^-)$	71
4.1	Introducción	71
4.2	Cota Superior para $ex(n; TK_p^-)$	72
4.3	Caso $\left\lceil \frac{3n+4}{4} \right\rceil \leq p < n$	73
4.3.1	Valores exactos de la función $ex(n; TK_p^-)$	73
4.3.2	Familia extremal $EX(n; TK_p^-)$	73
4.4	Caso $\left\lceil \frac{2n+7}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil$	76
4.4.1	Valores exactos de la función $ex(n; TK_p^-)$	76
4.4.2	Familia extremal $EX(n; TK_p^-)$	79
4.5	Estudio de la función $d(TK_p^-)$	82
4.6	Conclusiones y problemas abiertos	83

5	La función $d_\infty(p)$ para grafos infinitos	87
5.1	Introducción	87
5.2	Grafos media-medibles	88
5.2.1	Grafos semi-regulares	94
5.3	Estudio de la función $d_\infty(p)$	108
5.4	Conclusiones y problemas abiertos	115

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán las nociones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de esta tesis.

Básicamente, este trabajo se podría enmarcar dentro de la Teoría de Grafos Extremales.

Cualquier texto introductorio de Teoría de Grafos, el de Harary [28] (para grafos finitos); el de König [36] y los *surveys* de Thomassen [51] y Nash y Williams [46] (para grafos infinitos); de Teoría Extremal de Grafos el libro de B. Bollobás [5], el de R. Diestel [11] y el *survey* de W. Mader [43] etc. serán suficientes como referencias para la terminología y resultados que se utilizan en este trabajo.

En esta memoria estudiaremos un problema extremal relacionado con la contención de subgrafos homeomorfos a uno dado y extenderemos el problema para grafos infinitos.

1.1 Grafos finitos

En esta sección expondremos los conceptos y resultados básicos referentes a la teoría de grafos que usaremos a lo largo de esta memoria.

Un grafo G es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos verificando $E \subseteq V \times V$. A los elementos de V se les llama *vértices* y a los de E se les llama *aristas*. Así una arista $e = (u, v) \in E(G)$ de un grafo G es un par no ordenado de elementos de $V(G)$, donde $V(G)$ denota los vértices de G y $E(G)$ el conjunto de aristas. Dos vértices se dicen *adyacentes* si existe una arista formada por esos dos vértices y se dicen *disjuntos* en caso contrario. Un conjunto de vértices se dice *independiente* si dos a dos son disjuntos. Dos aristas se dicen *incidentes* si comparten un vértice. El número de vértices $|V(G)|$ de un grafo G se denomina *orden*. El número de aristas de G se denotará indistintamente como $e(G) = |E(G)|$ y se le llama *tamaño* del grafo.

Dado un vértice $v \in V(G)$ se denota por $\Gamma(v)$ al conjunto de vértices adyacentes a v y $\delta(v) = |\Gamma(v)|$ la *valencia* o *grado* del vértice v . Si $W \subseteq V(G)$, $\Gamma(W) = \bigcup_{v \in W} \Gamma(v)$. Un vértice de valencia nula se llama *aislado*. El número $\delta(G)$

es la *valencia mínima* de G , $\Delta(G)$ la *valencia máxima* y $d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta(v)}{|V(G)|}$ la *valencia media* de G . Estas cantidades están relacionadas verificándose que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ y además $d(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$, ya que $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \delta(v)$.

Teniendo en cuenta estas relaciones, si n_i denota el número de vértices de valencia i en un grafo cualquiera G se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} i \cdot n_i &= \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)| \\ \sum_{i \geq 0} n_i &= |V(G)| \end{aligned}$$

Un grafo se dice *regular* si todos los vértices tienen la misma valencia.

Un *subgrafo* de G no es más que otro grafo H de forma que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$, se escribe $H \subseteq G$ y diremos que H está contenido en G o bien G contiene a H . Dado un conjunto W de vértices de G , se llama *subgrafo inducido* por W , y se denota por $\langle W \rangle_G$, al subgrafo que tiene por conjunto de vértices W y por aristas todas las aristas de G que tienen ambos vértices en W . Dado un grafo G y $W \subseteq V(G)$ ($E' \subseteq E(G)$ resp.) denotaremos por $G - \{W\}$ ($G - \{E'\}$ resp.) al grafo inducido por el conjunto $V(G) - W$ (subgrafo de G que tiene por conjunto de vértices $V(G)$ y por conjunto de aristas $E(G) - E'$ resp.).

Sea G un grafo y $(u, v) \in E(G)$. Se dice que tenemos una *subdivisión*

elemental de G si la arista (u, v) se sustituye por la aristas (u, w) y (w, v) , donde w es un nuevo vértice que se ha añadido. Se dice que H es una *subdivisión* o *subdivisión topológica* de G y se denota por $H = TG$, si H puede obtenerse de G por una sucesión de subdivisiones elementales, y dos grafos G_1 y G_2 se dicen *homeomorfos* si son subdivisión de un mismo grafo (ver Figura 1.1). Dicho

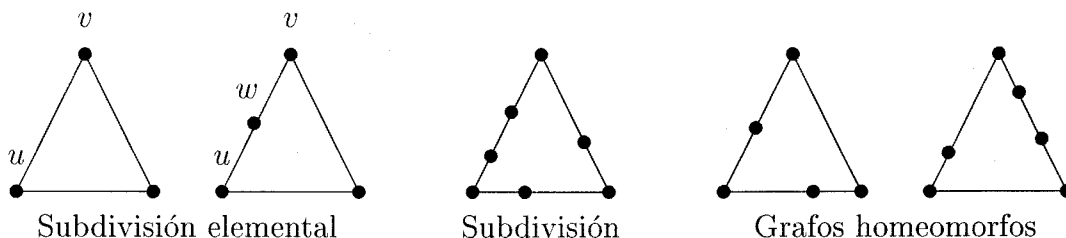


Figura 1.1: Subdivisiones de K_3 .

de otro modo, un grafo H es una subdivisión de un grafo G si H puede ser obtenido reemplazando las aristas de G por caminos disjuntos. En este sentido, $V(G) \subseteq V(H)$, y a dichos vértices de H se les llaman *vértices branch*. Obsérvese que los vértices que no son branch tienen valencia dos (ver Figura 1.2).

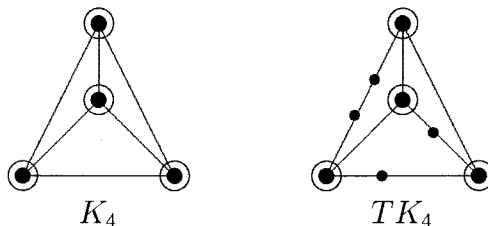


Figura 1.2: Vértices branch en una subdivisión de K_4 .

Dados dos grafos H y G se denota por $G + H$ al grafo donde el conjunto de vértices está formado por $V(G) \cup V(H)$ y el conjunto de aristas lo forman las aristas de G , las aristas de H y las aristas que unen cada vértice de G con cada vértice de H . Si $k \in \mathbf{N}$, el grafo $k \cdot H = \underbrace{H + \dots + H}_{k \text{ veces}}$. El grafo complementario de G , denotado por \overline{G} , es el grafo con $V(\overline{G}) = V(G)$ y donde una arista pertenece a $E(\overline{G})$ si no está en el conjunto de aristas de G (ver Figura 1.3).

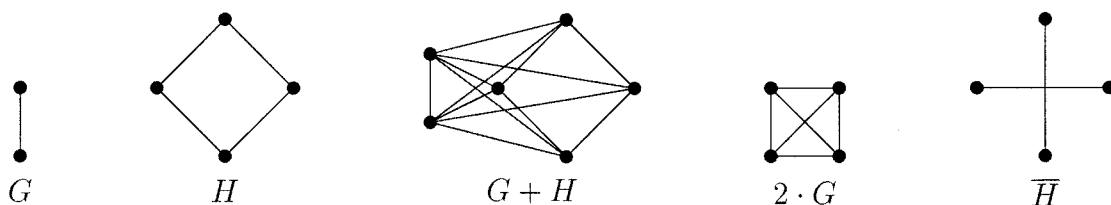


Figura 1.3: Suma, producto por escalar y complementario de un grafo.

Sea G un grafo y v_1, v_2 dos vértices de G . Un *camino* en G que une v_1 con v_2 es un conjunto ordenado $\{v_1, u_1, \dots, u_n, v_2\}$ de vértices de G , de manera que cada uno de los vértices u_1, \dots, u_n es adyacente con su anterior y su posterior. La *longitud* del camino es el número de vértices del conjunto anterior menos una unidad. En la situación anterior, si $n \geq 1$ y $v_1 = v_2$ se dirá que es un *ciclo*. Un grafo se dice *conexo* si para cualesquiera dos vértices existe un camino que los une. Con todas estas notaciones, dados v_1, v_2 dos vértices de un grafo G , se define la distancia entre dichos vértices, y se denota por $d_G(v_1, v_2)$ como la mínima longitud de todos los caminos que unen v_1 y v_2 . Si no existe ningún camino que los una se dice que $d(v_1, v_2) = \infty$. Se llama *diámetro* de G al número, $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) / u, v \in V(G)\}$, es decir, la mayor distancia entre cualesquiera dos vértices de G .

Un grafo conexo sin contener ciclos se dice que es un *árbol*. El grafo *completo* K_n es el grafo con n vértices y en el que dos vértices cualesquiera están unidos por una arista. El grafo completo menos una arista se denota por K_n^- . Dado un entero $r \geq 2$, un grafo G se dice *r-partito* si el conjunto de vértices admite una partición en r *clases de equivalencia* y de manera que cada arista tiene un vértice en diferente clase y los vértices de la misma clase son disjuntos. En particular, los grafos 2-partitos se denominan *bipartitos*. Si G es un grafo r -partito donde todos los vértices de diferentes clases comparten una arista se dice *completo*, y se denota por K_{n_1, \dots, n_r} , donde n_i es el cardinal de cada clase de equivalencia (ver Figura 1.4).

Un conjunto E' de aristas de un grafo G se denomina *emparejamiento* si dos a dos son no incidentes. Dado B un grafo bipartito de clases de equivalencia X e

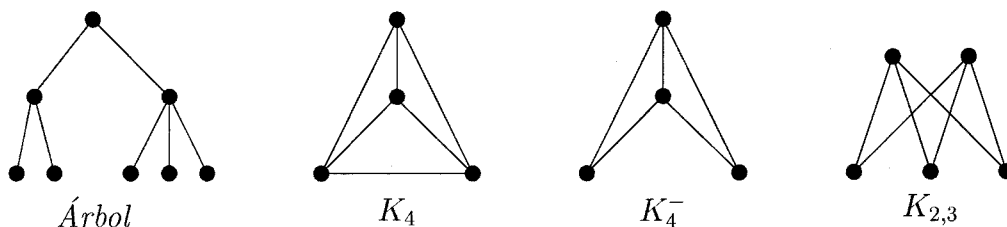
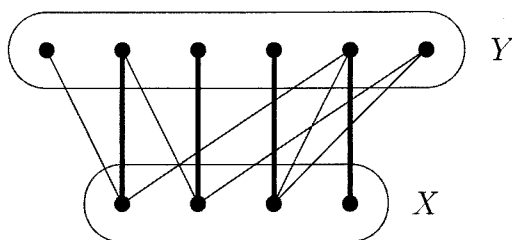


Figura 1.4: Algunos tipos de grafos.

Y , con $|X| \leq |Y|$, se dice que contiene un *emparejamiento completo* en X si existe un emparejamiento en B de manera que cada vértice de X pertenece a alguna de las aristas del emparejamiento (ver Figura 1.5). Una condición necesaria y

Figura 1.5: Emparejamiento completo en X .

suficiente para la existencia de emparejamiento completo en un grafo bipartito viene dada por la *Condición de Hall*:

Teorema 1.1.1 [27] *Si B es un grafo bipartito de clases X e Y , entonces B contiene un emparejamiento completo en X si y sólo si para todo $A \subseteq X$ se tiene que $|\Gamma(A)| \geq |A|$.*

Grafos extremales

Como ya dijimos en la introducción, los objetivos de esta memoria están relacionados con los problemas extremales en grafos que involucran la contención de un subgrafo dado. Así, en general, un *problema extremal* para una cierta

propiedad \mathcal{P} consiste en encontrar el menor valor m de manera que si $\mu(G) > m$, siendo μ un invariante en una clase de grafos \mathcal{H} , entonces G posee la propiedad \mathcal{P} . Centrándonos en el problema que nos va a interesar, dado un grafo F , se denota por $ex(n; F)$ ¹ al menor entero de manera que si G es un grafo de orden n con $E(G) > ex(n; F)$ entonces G contiene a F como subgrafo, o lo que es lo mismo, $ex(n, F)$ es el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener a F como subgrafo suyo. La familia de grafos maximales para la propiedad anterior se llama *familia extremal* y se denota por $EX(n; F)$. Es decir, si $G \in EX(n; F)$ entonces $|V(G)| = n$, $|E(G)| = ex(n; F)$ y $F \not\subseteq G$.

A lo largo de este trabajo la función que estudiaremos será $ex(n; TH)$, es decir, el tamaño o número de aristas de un grafo de orden n sin contener un subgrafo homeomorfo a H .

Resaltamos en este punto la conjetura de G.A. Dirac [14], $ex(n, TK_5) = 3n - 6$, probada recientemente por W. Mader [40], ya que relaciona el problema extremal de encontrar el tamaño de un grafo de orden n sin contener una subdivisión de K_5 con el Teorema de Kuratowski sobre planaridad²:

Teorema 1.1.2 [4] *Un grafo finito es plano si y sólo si no contiene ninguna subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.*

Así, teniendo en cuenta ambos resultados, se tiene que si G es un grafo no plano con $|E(G)| \geq 3|V(G)| - 5$ entonces $G \supseteq TK_5$.

1.2 Grafos infinitos

En esta sección vamos a describir algunos conceptos sobre grafos infinitos que necesitaremos en el Capítulo 5. Estos grafos, a pesar de constituir una generalización inmediata de los grafos finitos, han sido mucho menos estudiados, en parte

¹Basta considerar el problema extremal tomando como propiedad $\mathcal{P} \equiv$ contener un grafo F , $\mu \equiv$ número de aristas de un grafo, $\mathcal{H} \equiv$ grafos con n vértices y $m = ex(n; F)$.

²Todo grafo puede representarse en el plano, notando a los vértices como puntos y a las aristas como arcos de curvas entre los vértices. Se dice que un grafo es *plano* si existe una representación gráfica de tal forma que las aristas no se crucen.

debido a que las técnicas necesarias para la obtención de resultados, difieren algo de aquellas que se utilizan en grafos finitos.

Un *grafo infinito localmente finito*³ es un grafo tal que su conjunto de vértices es infinito numerable y la valencia de cada vértice es finita.

A continuación describiremos una familia de grafos infinitos, que será un ejemplo de grafo donde podamos definir la valencia media, como veremos en el Capítulo 5. Esta familia está generada por un grafo finito y, mediante traslaciones, se recubre el plano, generando un grafo infinito.

Si denotamos por \mathbf{C} al cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$, se define un grafo *célula* como un grafo finito con $V(G) \subset \mathbf{C}$ y de forma que no existe ningún vértice aislado. Así, dado un grafo célula G , se define el grafo *2-periódico* generado por G , y se denota por \mathcal{M}_G , al grafo definido como sigue

$$V(\mathcal{M}_G) = \{\tau_{(m,n)}(v) / v \text{ vértice de } G \text{ y } (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$$

$$E(\mathcal{M}_G) = \{(\tau_{(m,n)}(u), \tau_{(m,n)}(v)) / (u, v) \text{ arista de } G \text{ y } (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$$

siendo $\tau_{(m,n)}$ la traslación en el plano de vector (m, n) (ver Figura 1.6).

Si \mathcal{M}_G es un grafo 2-periódico generado por un grafo célula G se definen los 8-vecinos de G como los subgrafos $\tau_{(i,j)}(G)$ de \mathcal{M}_G tales que $i \in \{-1, 0, 1\}$ y $j \in \{-1, 0, 1\}$ con $(i, j) \neq (0, 0)$. Se llaman 4-vecinos de G a los subgrafos $\tau_{(i,j)}(G)$, donde $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ con $(i, j) \neq (0, 0)$ y tal que el producto $i \cdot j = 0$ (ver Figura 1.7).

Dado G un grafo célula y \mathcal{M}_G el grafo 2-periódico generado por G , se define el *n-cuadrado* de centro G y radio n , y se denota por $\prod_n G$, como el subgrafo de \mathcal{M}_G

$$\prod_n G = \{\tau_{(i,j)}(G) / (i, j) \in \mathbf{Z}^2, \max\{|i|, |j|\} \leq n\}.$$

Es evidente que $\prod_n G$ está contenido en $(2n + 1)^2$ baldosas, copias de \mathbf{C} (ver Figura 1.8).

³En esta memoria nos referiremos por grafo infinito a un grafo infinito localmente finito.

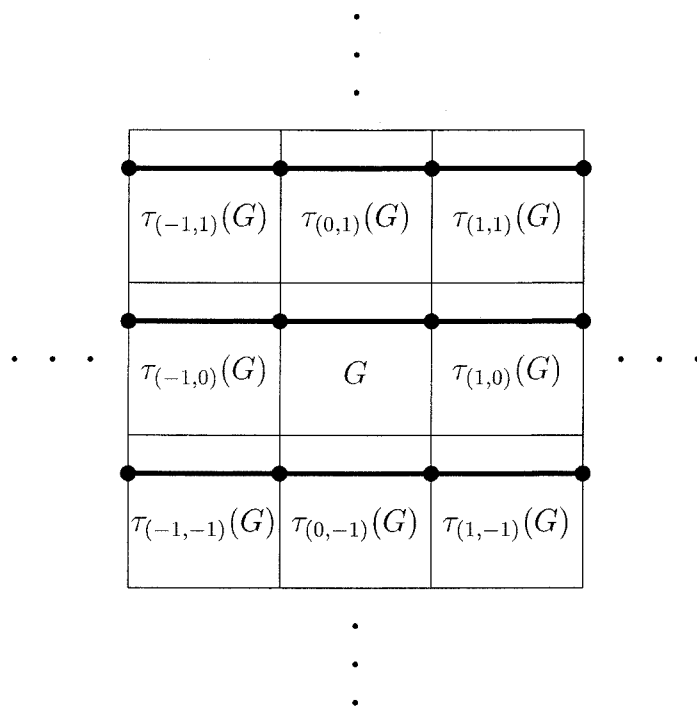
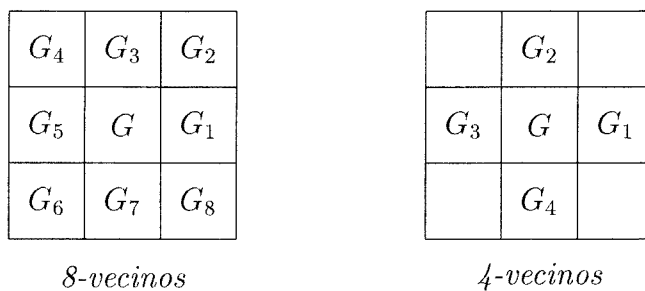


Figura 1.6: Grafo 2-periódico.

Figura 1.7: 4-vecinos y 8-vecinos de G .

Por último, para asegurar la conexión de un grafo 2-periódico basta tener en cuenta el siguiente resultado:

$\tau_{(-1,1)}(G)$	$\tau_{(0,1)}(G)$	$\tau_{(1,1)}(G)$
$\tau_{(-1,0)}(G)$	G	$\tau_{(1,0)}(G)$
$\tau_{(-1,-1)}(G)$	$\tau_{(0,-1)}(G)$	$\tau_{(1,-1)}(G)$

Figura 1.8: 2-cuadrado $\prod_2 G$.

Teorema 1.2.1 [9] *Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico generado. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. \mathcal{M}_G es conexo.
2. (a) G está unido a sus 4-vecinos.
 (b) Existe un natural $k \in \mathbf{N}$ tal que G está en una componente conexa de $\prod_k G$.

Para más detalles sobre grafos periódicos ver [9].

Capítulo 2

Notaciones y resultados previos

Para dar un enfoque diferente al estudio de la función $ex(n; TK_p)$, en este capítulo introduciremos una familia de grafos que denotaremos por \mathcal{C}_r^t , que permite controlar el número de aristas de un grafo obtenido de otro eliminando r vértices. Estudiaremos propiedades de esta familia y daremos una condición suficiente sobre el número de aristas de un grafo con $n \geq 3q + 2$ vértices, para que pertenezca a \mathcal{C}_q^q y \mathcal{C}_q^{q+1} .

2.1 Introducción

Supongamos que en una ciudad existen 13 líneas de metro y, por razones económicas, debemos prescindir de dos de ellas. Lógicamente, nos interesa suprimir aquellas que menos trastornos ocasionen, en el sentido de que las 11 restantes queden bien comunicadas. Si suponemos que este ejemplo puede ser modelizado por el grafo de la Figura 2.1, donde los vértices representan a las líneas de metro y una arista entre dos vértices significa que esas líneas no están comunicadas entre sí, entonces lo que nos interesa saber es qué dos vértices eliminar en el grafo H de forma que el grafo resultante tenga el menor número de aristas. Si denotamos por \mathcal{C}_r^t a la familia de grafos en los que existen r vértices que al eliminarlos resulta

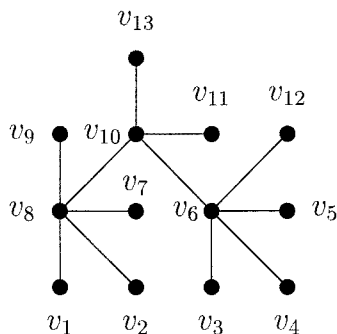


Figura 2.1: Grafo H representación de líneas de metro.

un subgrafo que tiene a lo más t aristas, entonces, lo que estamos planteando es encontrar el menor t tal que $H \in \mathcal{C}_2^t$.

Luego parece interesante tratar de conocer la familia de grafos \mathcal{C}_r^t formada por aquellos grafos H tales que existen r vértices que al eliminarlos resulta un subgrafo H_r que tiene a lo más t aristas.

Volviendo al ejemplo de la Figura 2.1, si consideramos el grafo que resulta de eliminar los vértices v_6 y v_8 , es evidente que H_2 tiene 2 aristas y, por tanto, pertenece a la clase \mathcal{C}_2^2 . Por otra parte, si consideramos su grafo complementario $G = \overline{H}$, se tiene que $G_2 = \langle V(G) - \{v_6, v_8\} \rangle_G$ es un grafo de orden 11 al que le faltan dos aristas, (v_{10}, v_{11}) y (v_{10}, v_{13}) , para ser completo. Si dichas aristas las sustituimos en G por los caminos $v_{10}v_6v_{11}$ y $v_{10}v_8v_{13}$ respectivamente, se tiene que G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{13-2} . Esta relación entre un grafo de la familia \mathcal{C}_2^2 y los grafos que contienen subgrafos homeomorfos a K_{13-2} , no es ocasional. En los próximos capítulos veremos que para ciertos valores de r y t existe una relación entre la familia de grafos \mathcal{C}_r^t y los grafos que contienen a un subgrafo homeomorfo a uno dado, que nos permitirá encontrar valores para las funciones $ex(n; TK_p)$ y $ex(n; TK_p^-)$, y caracterizar sus familias extremales correspondientes.

Así, el propósito de este capítulo será definir y estudiar la familia de grafos \mathcal{C}_r^t , analizando algunas de sus propiedades que nos llevarán a condiciones suficientes para que un grafo de orden $n \geq 3q + 2$ pertenezca a \mathcal{C}_q^q y a \mathcal{C}_q^{q+1} , con

$q \geq 1$.

2.2 Sucesión creciente y decreciente de vértices.

Sea G un grafo cualquiera con n vértices. Sea r un número entero no negativo y sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ordenado de r vértices de G . Notaremos por G_0 al grafo G y por G_k al grafo inducido en G por el conjunto de vértices que resulta de eliminar en G los vértices v_1, \dots, v_k para cada $1 \leq k \leq r$. Es decir:

$$\begin{aligned} G_0 &= G \\ G_k &= \langle V(G) - \{v_1, \dots, v_k\} \rangle_G \end{aligned}$$

Por otra parte, dado un vértice v de G_k , denotaremos por $\delta_{G_k}(v)$ o simplemente por $\delta_k(v)$ a la valencia del vértice v en dicho grafo.

Con estas notaciones definiremos un conjunto ordenado de vértices de un grafo con la propiedad de tener una sucesión creciente o decreciente de valencias.

Definición 2.2.1 Sean n, r dos enteros no negativos con $r \leq n$. Sea G un grafo con n vértices y sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ordenado de r vértices de G . Diremos que dicho conjunto constituye una *sucesión creciente* (resp. *decreciente*) de vértices si verifica las siguientes propiedades:

1. $\delta_{G_{j-1}}(v_j) \leq \delta_{G_j}(v_{j+1})$ (resp. $\delta_{G_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{G_j}(v_{j+1})$) para $j = 1, \dots, r - 1$.
2. Para cada h entero positivo, si existe $v \in G_k$ con $k = 1, \dots, r$ tal que $\delta_{G_k}(v) \leq h$ (resp. $\delta_{G_k}(v) \geq h$), entonces se verifica que $\delta_{G_j}(v_{j+1}) \leq h$ (resp. $\delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq h$) para todo $j = 1, \dots, k$.

Nota 2.2.2 Observar que si v_1 es el primer vértice de una sucesión decreciente de r vértices, por la propiedad 2 de la definición anterior, resulta que v_1 tiene valencia máxima en G . De forma análoga, v_2 tiene valencia máxima en G_1 y así sucesivamente. Es decir, la elección de una sucesión decreciente de vértices determina que al ir eliminando del grafo original cada uno de estos vértices obtengamos subgrafos con el menor número de aristas posible.

Un razonamiento similar tendríamos para sucesiones crecientes, con la diferencia

de que cada vértice v_j tendría valencia mínima en G_{j-1} y los subgrafos obtenidos al eliminar estos vértices tienen el mayor número de aristas posible. Además, dada una sucesión decreciente en un grafo, resulta inmediato comprobar que esta sucesión de vértices es una sucesión creciente en su grafo complementario y viceversa.

El siguiente resultado prueba que dado un grafo y un número entero r es siempre posible encontrar una sucesión decreciente de vértices de tamaño r .

Lema 2.2.3 *Sean n, r dos enteros no negativos con $r \leq n$. Dado G un grafo con n vértices existe una sucesión decreciente de vértices de tamaño r .*

Demostración: Sea δ_0 la máxima valencia del grafo G y Δ_0 el conjunto de vértices de G de valencia δ_0 , es decir $\Delta_0 = \{v \in V(G) / \delta_G(v) = \delta_0\}$. Sea v_1 un vértice cualquiera de Δ_0 , es decir, v_1 es un vértice de máxima valencia en G . Consideremos ahora $\delta_1 = \max_{v \in V(G_1)} \{\delta_{G_1}(v)\}$ y Δ_1 el conjunto de vértices de G_1 con valencia δ_1 . Para cada $v \in \Delta_1$ denotemos por $G_1^*(v)$ al subgrafo inducido por los vértices v_1 y v en el grafo G , es decir $G_1(v) = \langle v_1, v \rangle_G$ y sea $\hat{\delta}_1 = \max_{v \in \Delta_1} \{\delta_{G_1^*(v)}(v)\}$. Tomemos $v_2 \in \Delta_1$ tal que $\delta_{G_1^*(v_2)}(v_2) = \hat{\delta}_1$, es decir, v_2 es un vértice de valencia máxima en G_1 y de entre todos los que tienen valencia máxima tomamos aquel que sea adyacente a v_1 . Para todo $k = 2, \dots, r-1$ podemos construir la cadena de subgrafos G_k (ver Figura 2.2), donde denotamos por $\delta_k = \max_{v \in V(G_k)} \{\delta_{G_k}(v)\}$ y por $\Delta_k = \{v \in V(G_k) / \delta_{G_k}(v) = \delta_k\}$. Para cada $v \in \Delta_k$ sea $G_k^*(v) = \langle v_1, \dots, v_k, v \rangle_G$ y $\hat{\delta}_k = \max_{v \in \Delta_k} \{\delta_{G_k^*(v)}(v)\}$. Sea $v_{k+1} \in \Delta_k$ de tal forma que $\delta_{G_k^*(v_{k+1})}(v_{k+1}) = \hat{\delta}_k$. Así v_{k+1} es un vértice de máxima valencia en G_k y de entre todos los de máxima valencia el que tiene mayor número de adyacencias con los vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$. De esta forma se tiene que para cada $j = 1, \dots, r-1$, como G_j está contenido en G_{j-1} y v_j tiene valencia máxima en el subgrafo G_{j-1} , se tiene que $\delta_{G_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{G_j}(v)$ para todo vértice $v \in G_j$ y, por tanto, se verifica que

$$\delta_{G_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{G_j}(v_{j+1}).$$

Además, dado $k \in \{0, \dots, r-1\}$, si $v \in V(G_k)$ y $\delta_{G_k}(v) \geq h$ se tiene que $\delta_{G_k}(v_{k+1}) \geq h$ y por lo anterior se cumple que

$$\delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq \delta_{G_k}(v_{k+1}) \geq h$$

para todo $1 \leq j \leq k$, lo que prueba el resultado. \otimes

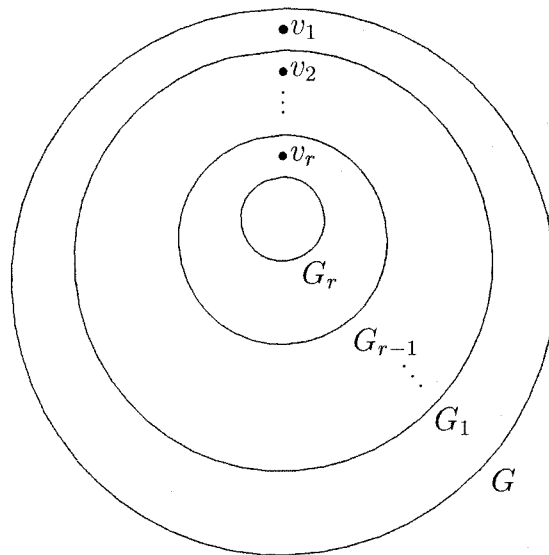


Figura 2.2: Cadena de subgrafos

Análogamente se prueba el resultado para sucesiones crecientes de vértices, sin más que tomar mínimos en lugar de máximos en la prueba del resultado anterior.

Lema 2.2.4 Sean n, r dos enteros no negativos con $r \leq n$. Dado G un grafo con n vértices existe una sucesión creciente de vértices de tamaño r .

Nota 2.2.5 La forma de elegir una sucesión decreciente de vértices como en la demostración del Lema 2.2.3 no garantiza que la sucesión sea única. Por ejemplo, en el grafo que muestra la Figura 2.3 los vértices a, b, c todos tienen valencia máxima igual a 5. Por tanto, aplicando el proceso anterior podría tomar como v_1 cualquiera de ellos. Supongamos que tomamos como v_1 el vértice a . Si consideramos ahora G_1 , el vértice de máxima valencia en dicho subgrafo es c y por tanto $v_2 = c$. Resulta así que G_2 tiene 3 aristas (ver Figura 2.4).

Sin embargo, si hubiésemos tomado $v_1 = b$, tendríamos que a y c tienen valencia máxima en G_1 y además son adyacentes a v_1 . Si tomamos por ejemplo $v_2 = a$ resultaría que G_2 tiene 4 aristas (ver Figura 2.5).

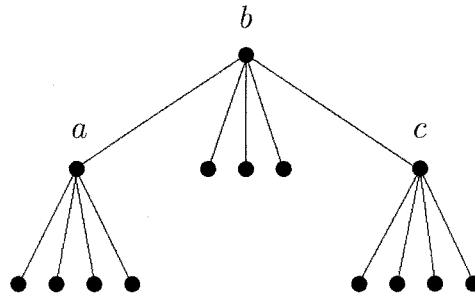


Figura 2.3: Vértices a, b, c tienen valencia máxima.

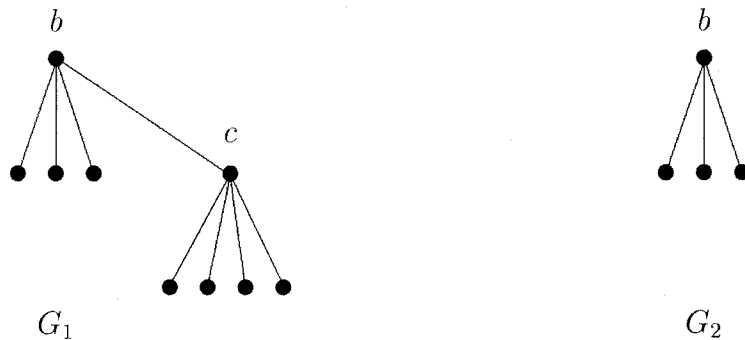


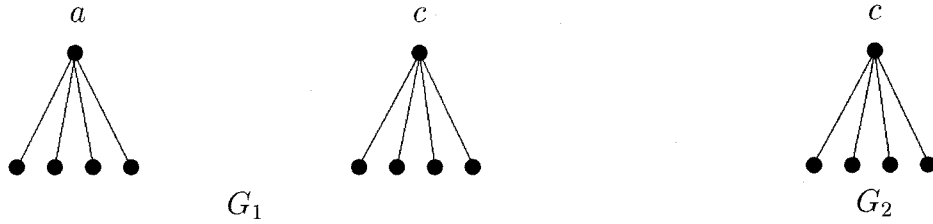
Figura 2.4: Caso $v_1 = a$ y $v_2 = c$.

2.3 Estudio de la familia \mathcal{C}_r^t

Como ya hemos comentado con anterioridad, vamos a introducir una familia de grafos que denominaremos \mathcal{C}_r^t , que nos será de gran utilidad en los Capítulos 2 y 3 de esta memoria.

2.3.1 Definición de la familia \mathcal{C}_r^t

A continuación vamos a definir una familia de grafos dependiente de dos parámetros r y t , donde r va a ser el número de vértices que tenemos que elegir para garantizar que en el grafo resultante de eliminar estos r vértices tenga a lo más t aristas.

Figura 2.5: Caso $v_1 = b$ y $v_2 = a$.

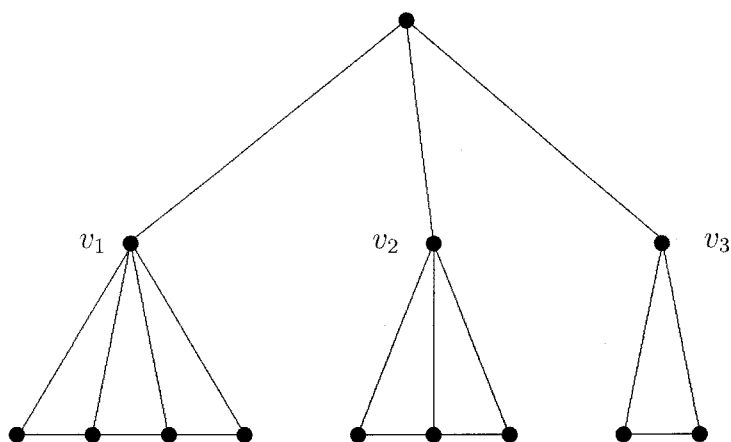
Definición 2.3.1 Sean r, t dos enteros no negativos. Se define la familia de grafos \mathcal{C}_r^t como el conjunto de grafos G para los cuales existe una sucesión decreciente de vértices de tamaño r tal que $e(G_r) \leq t$.

Es decir, un grafo G pertenece a la familia \mathcal{C}_r^t si existe un conjunto ordenado de vértices $\{v_1, \dots, v_r\}$ verificando las tres propiedades siguientes:

1. Para cada $j = 1, \dots, r - 1$ se verifica que $\delta_{G_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{G_j}(v_{j+1})$.
2. Para cada h entero positivo, si existe $v \in G_k$ con $k = 1, \dots, r$ tal que $\delta_{G_k}(v) \geq h$ entonces $\delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq h$ para todo $j = 1, \dots, k$.
3. G_r tiene a lo más t aristas, donde G_r denotaba al subgrafo de G obtenido al eliminar los vértices v_1, \dots, v_r .

Nota 2.3.2 Obsérvese que si queremos probar que un grafo G pertenece a la clase \mathcal{C}_r^t es suficiente elegir la sucesión decreciente de vértices aplicando el método que nos proporciona la prueba del Lema 2.2.3, es decir, v_1 va a ser el vértice de mayor valencia en G , el vértice v_2 va a ser el vértice de mayor valencia en G_1 y de entre ellos, el que tenga mayor número de adyacencias con v_1 y así sucesivamente. Una vez encontrada la sucesión decreciente de vértices nos bastará comprobar que el grafo G_r tiene a lo más t aristas.

Por ejemplo, el grafo que muestra la Figura 2.6 pertenece a la clase \mathcal{C}_3^6 : Una sucesión decreciente de 3 vértices pueden ser la formada por los vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ que muestra la figura, y puede comprobarse fácilmente que el grafo resultante de eliminar dichos vértices tiene 6 aristas. Además, dicho grafo no puede pertenecer a \mathcal{C}_3^5 , pues no hay ninguna forma posible de elegir una sucesión decreciente de 3 vértices que al eliminarlos resulte un grafo con a lo más 5 aristas.

Figura 2.6: Grafo perteneciente a \mathcal{C}_3^6 .

El Lema 2.2.3 nos garantiza que dado un grafo con n vértices y r un número entero no negativo, siempre podemos encontrar una sucesión decreciente de r vértices, con lo cual se tiene que las clases de grafos \mathcal{C}_r^t que hemos definido son no vacías. Así podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 2.3.3 *Sea G un grafo con n vértices. Entonces, para todo $r \leq n$, existe un t tal que G pertenece a la clase \mathcal{C}_r^t .*

Nota 2.3.4 Obsérvese que si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una sucesión decreciente de vértices elegidos como en la Nota 2.3.2 en un grafo G , y denotamos por A_{j+1} al conjunto de aristas incidentes con el vértice v_{j+1} en el subgrafo G_j con $j = 1, \dots, r-1$, entonces todas las aristas de A_j son distintas de las aristas de A_k . Es decir, las aristas que proporcionan la valencia al vértice v_{k+1} en G_k son distintas de las aristas que proporcionan la valencia a los vértices v_{j+1} en G_j para $j = 1, \dots, k-1$. Por tanto se tiene que

$$e(G) = \sum_{k=0}^{r-1} \delta_{G_k}(v_{k+1}) + e(G_r).$$

2.3.2 Propiedades de la familia \mathcal{C}_r^t

Conozcamos algunas propiedades de los grafos que pertenecen a la clase \mathcal{C}_r^t .

Proposición 2.3.5 Sean r, t enteros positivos. Si $G \in \mathcal{C}_r^t$ entonces

1. $G \in \mathcal{C}_r^{t'}$ para todo $t' \geq t$.
2. $G \in \mathcal{C}_{r'}^t$ para todo $r' \geq r$.

Demostración: Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ una sucesión decreciente tal que $e(G_r) \leq t$. Como $t \leq t'$ entonces $e(G_r) \leq t'$, lo que prueba la primera parte del resultado. Por otro lado, si tomamos $\{v_{r+1}, \dots, v_{r'}\}$ como en la Nota 2.3.2 se tiene que $G_{r'} \subseteq G_r$ y por tanto $e(G_{r'}) \leq e(G_r) \leq t$. \otimes

Proposición 2.3.6 Sean r, t dos enteros positivos. Si $G \in \mathcal{C}_r^t - \mathcal{C}_r^{t-1}$ entonces $G \in \mathcal{C}_{r+1}^{t-1}$.

Demostración: Si $G \in \mathcal{C}_r^t$ entonces existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_r\}$ de G . Sea v_{r+1} elegido por el procedimiento de la Nota 2.3.2. Se tiene así que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ constituye una sucesión decreciente de $r + 1$ vértices de G . Además, como $G \in \mathcal{C}_r^t$ se tiene que $e(G_r) \leq t$ pero $G \notin \mathcal{C}_r^{t-1}$ con lo cual $e(G_r) > t - 1$, luego $e(G_r) = t$ con $t \geq 1$. Por tanto $e(G_{r+1}) \leq t - 1$, lo que prueba el resultado. \otimes

El grafo de la Figura 2.6 pertenece a \mathcal{C}_3^6 y no a \mathcal{C}_3^5 . Es inmediato comprobar que pertenece a \mathcal{C}_4^5 sin más que tomar como cadena decreciente de grafos v_1, v_2, v_3 y como cuarto vértice uno cualquiera de G_3 que no sea de valencia nula.

Proposición 2.3.7 Sea r un entero positivo y sea G un grafo con valencia máxima δ_0 y $\Delta_0 = \{v \in V(G) / \delta_G(v) = \delta_0\}$. Sean $\{w_1, \dots, w_s\}$ el mayor conjunto de vértices independientes entre sí contenido en Δ_0 . Entonces existe una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_r\}$ verificando una de las siguientes propiedades:

1. Si $s \leq r$ entonces $\{w_1, \dots, w_s\} \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$.
2. Si $s > r$ entonces $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \{w_1, \dots, w_s\}$.

Demostración: Para construir una sucesión decreciente de vértices basta aplicar el proceso de la Nota 2.3.2. En ese caso v_1 puede ser tomado como cualquiera de los vértices del conjunto $\{w_1, \dots, w_s\}$, pues todos ellos tienen valencia máxima en G . Además, al ser disjuntos entre sí dichos vértices, resulta que al considerar los distintos subgrafos obtenidos al eliminar alguno de estos vértices, resulta que los vértices restantes de dicho conjunto siguen teniendo valencia máxima. Con lo cual sin más que tener en cuenta que s sea menor, igual o mayor que r se tiene el resultado. \otimes

Como aplicación inmediata de este resultado podemos clasificar a los grafos bipartitos completos de la siguiente forma:

Proposición 2.3.8 *Todo grafo bipartito completo K_{m_1, m_2} con $m_1 < m_2$ pertenece a la clase $\mathcal{C}_{m_1}^0$.*

Demostración: Sea B un grafo bipartito completo de clases X e Y con m_1 y m_2 vértices en cada clase respectivamente. Todo vértice de X tiene valencia m_2 , que además es la valencia máxima de B . Puesto que todos los vértices de X son disjuntos entre sí, aplicando la Proposición 2.3.7 se tiene que una sucesión decreciente de vértices estaría formada por la clase de vértices X . Obviamente al eliminar los vértices de X el grafo resultante se reduce a Y no tiene ninguna arista y, por tanto, el grafo bipartito inicial pertenece a la familia de grafos $\mathcal{C}_{m_1}^0$.

\otimes

Por otra parte, es inmediato que si tenemos un grafo completo de tamaño m y eliminamos de él $s < m$ vértices, entonces el subgrafo resultante es un grafo completo de tamaño $m - s$ y, por tanto, con $\binom{m-s}{2}$ aristas. Así podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.9 *Todo grafo completo K_m pertenece a la clase $\mathcal{C}_s^{\binom{m-s}{2}}$, con $s < m$.*

A continuación vamos a probar algunas condiciones suficientes sobre el número de aristas de un grafo para que pertenezca a la clase \mathcal{C}_r^t para ciertos valores de r y t .

Lema 2.3.10 Sean n, r enteros positivos, con $r < n$. Sea G un grafo con n vértices y $2r$ aristas. Entonces:

1. $\delta_{G_r}(v) \leq 1$ para $v \in V(G_r)$.
2. $G \in \mathcal{C}_r^r$

Demostración: Tomemos una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_r\}$ como en la Nota 2.3.2. Si existe un vértice $v \in G_r$ tal que $\delta_{G_r}(v) \geq 2$ tendríamos que $\delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq 2$ para todo $j = 1, \dots, r$, luego

$$e(G) \geq \sum_{k=0}^{r-1} \delta_{G_k}(v_{k+1}) + \delta_{G_r}(v) \geq 2r + 2 > 2r,$$

pero esto no es posible, pues $e(G) = 2r$. Por tanto, $\delta_{G_r}(v) \leq 1$ para todo $v \in V(G_r)$.

Por otra parte, si $\delta_{G_r}(v) = 0$ para todo $v \in G_r$ entonces $e(G_r) = 0 \leq r$ y por tanto G pertenece a \mathcal{C}_r^r .

Por último, si existe un vértice $v \in G_r$ tal que $\delta_{G_r}(v) = 1$ entonces por la propiedad 2 de la definición de sucesión decreciente se tiene que $\delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq 1$ para todo $j = 1, \dots, r$. Así tenemos que

$$\sum_{k=0}^{r-1} \delta_{G_k}(v_{k+1}) \geq r$$

y por tanto

$$e(G_r) = e(G) - \sum_{k=0}^{r-1} \delta_{G_k}(v_{k+1}) \leq 2r - r = r$$

En consecuencia el grafo G pertenece a \mathcal{C}_r^r . ⊗

Nota 2.3.11 El grafo que muestra la Figura 2.7 pone de manifiesto que el resultado anterior es óptimo para $n \geq 4r + 2$, puesto que en dicho grafo formado por $2r + 1$ aristas disjuntas resulta que el subgrafo obtenido eliminando cualesquiera r vértices de este grafo tiene al menos $r + 1$ aristas y, por tanto, no puede pertenecer a \mathcal{C}_r^r .

El siguiente resultado prueba que dado un grafo con valencia máxima Δ y al menos m vértices de valencia máxima, es posible elegir al menos $\lfloor \frac{m+\Delta}{\Delta+1} \rfloor$ vértices disjuntos entre sí con valencia máxima.

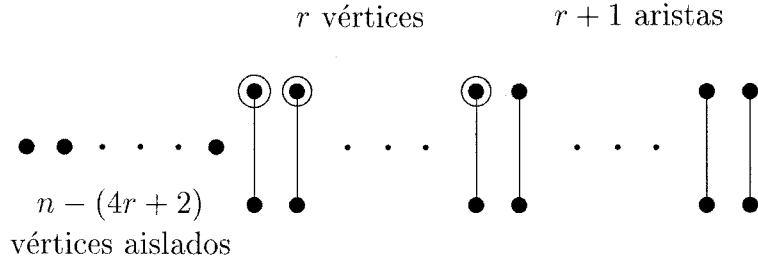


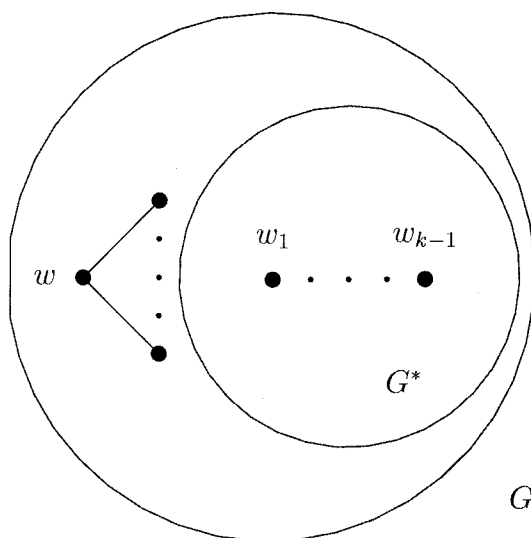
Figura 2.7: Grafo con $2r + 1$ aristas no perteneciente a \mathcal{C}_r^r .

Lema 2.3.12 *Sea G un grafo con al menos m vértices de valencia Δ . Entonces existen al menos $\lfloor \frac{m + \Delta}{\Delta + 1} \rfloor$ vértices disjuntos.*

Demostración: Probar este resultado es equivalente a probar que si G es un grafo con al menos $(\Delta + 1)k - \Delta$ vértices de valencia Δ donde k es un entero no negativo entonces existen al menos k vértices disjuntos de valencia Δ .

Para ello, vamos a realizar la prueba por inducción sobre k . Si $k = 1$ es evidente. Supongamos el resultado cierto para $k - 1$ y probémoslo para k . Sea w un vértice de G de valencia Δ y consideremos $G^* = \langle \{v \in V(G) - \{\Gamma(w) \cup \{w\}\} \rangle_G$. Resulta que G^* es un grafo con al menos $(\Delta + 1)k - \Delta - (\Delta + 1) = (\Delta + 1)(k - 1) - \Delta$ vértices de valencia Δ y, por hipótesis de inducción, G^* tiene al menos $k - 1$ vértices disjuntos $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ de valencia Δ . Así los k vértices w, w_1, \dots, w_{k-1} son disjuntos entre sí y de valencia Δ (ver Figura 2.8). \otimes

El resultado anterior es óptimo en el sentido de que existen grafos con $(\Delta + 1)k - \Delta - 1 = (\Delta + 1)(k - 1)$ vértices de valencia máxima Δ y que contienen a lo más $k - 1$ vértices independientes. Para ello basta considerar el grafo formado por $k - 1$ copias disjuntas del grafo completo de tamaño $\Delta + 1$. Más aún, el grafo anterior es el único en esas condiciones, es decir, si un grafo tiene $(\Delta + 1)(k - 1)$ vértices de valencia máxima Δ y contiene k vértices independientes, entonces dicho grafo contiene $k - 1$ copias disjuntas del grafo completo de orden $\Delta + 1$, como se recoge el siguiente resultado.

Figura 2.8: Construcción de G^* .

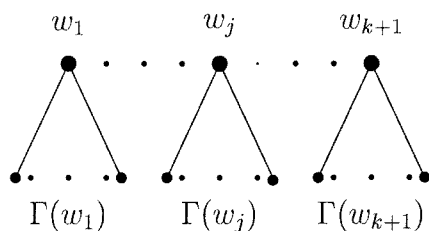
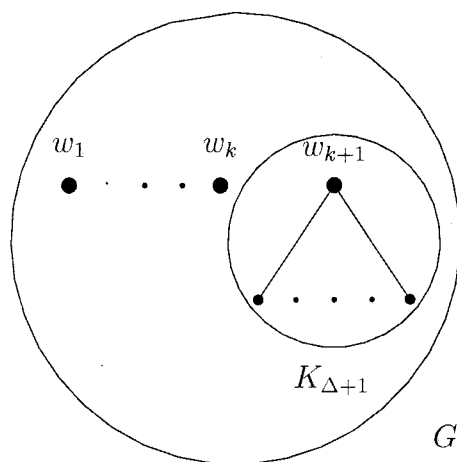
Lema 2.3.13 *Sea k un entero no negativo y G un grafo de valencia máxima Δ . Si G tiene $k(\Delta + 1)$ vértices de valencia Δ y k de ellos son independientes, entonces G contiene k copias disjuntas de $K_{\Delta+1}$.*

Demostración: Para $k = 1$ el resultado es inmediato ya que G sería justamente el grafo completo de tamaño $\Delta + 1$. Para realizar la prueba por inducción, suponemos cierto el resultado para k y veamos que es cierto para $k + 1$. Para ello, sea G un grafo con $(\Delta + 1)(k + 1)$ vértices de valencia Δ , donde $k + 1$ de ellos son independientes. Sean w_1, \dots, w_{k+1} dichos vértices. Si $\Gamma(w_{k+1}) \cap \Gamma(w_j) \neq \emptyset$ para algún j con $1 \leq j \leq k$, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k+1} \{\Gamma(w_i) \cup w_i\} \right| < (\Delta + 1)(k + 1),$$

con lo cual existiría $w \in G$ disjunto con w_i para todo i , tal que $\delta(w) = \Delta$. Por tanto, $\{w, w_1, \dots, w_{k+1}\}$ formaría un conjunto independiente de tamaño $k + 2$ y esto no es posible. En consecuencia, $\Gamma(w_i) \cap \Gamma(w_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$ (ver Figura 2.9).

En estas condiciones, $\langle w_{k+1} \cup \Gamma(w_{k+1}) \rangle$ es un subgrafo completo de tamaño $\Delta + 1$, ya que si faltase alguna arista, los vértices de dicha arista junto con w_1, \dots, w_k formarían un conjunto independiente de tamaño $k + 2$. Consideremos

Figura 2.9: Estructura de G .Figura 2.10: Construcción de G^* .

ahora el grafo G^* obtenido de G eliminando los vértices $w_{k+1} \cup \Gamma(w_{k+1})$ (ver Figura 2.10). Así G^* tiene $(\Delta + 1)k$ vértices de valencia máxima y k de ellos independientes. Por hipótesis de inducción G^* contiene k copias disjuntas de $K_{\Delta+1}$ que junto con el grafo completo que hemos eliminado de G prueba el resultado.

⊗

Como caso particular, para grafos de valencia máxima dos se tiene que el grafo formado por k triángulos disjuntos (ver Figura 2.11) está contenido como subgrafo en cualquier otro grafo con al menos $3k$ vértices de valencia máxima y con a lo más k de ellos independientes.

Continuando con grafos de valencia máxima 2, vamos a dar una condición suficiente sobre el número de vértices y el número de aristas de estos grafos para garantizar que pertenecen a una clase de grafos \mathcal{C}_r^t para r y t apropiados.

k triángulos disjuntos

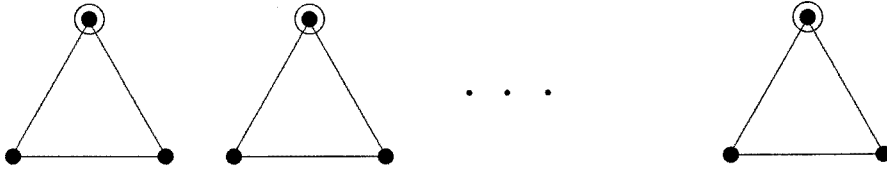


Figura 2.11: Grafo con $3k$ vértices y solo k independientes.

Lema 2.3.14 Sean q , k enteros positivos, con $k \leq q - 1$. Sea G un grafo con $4q - k + 1 - i$ vértices y $2q + k + 1 - 2i$ aristas, con $i \in \{0, \dots, q\}$. Si la máxima valencia de G es a lo más 2 se verifica:

- Si $i \leq k$ entonces $G \in \mathcal{C}_{q-i}^q$.
- Si $i > k$ entonces $G \in \mathcal{C}_{q-i}^{q+k-i+1}$.

Demostración: Si n_j denota el número de vértices de valencia j en un grafo cualquiera G se tiene en general que:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} j n_j &= \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2e(G) \\ \sum_{j \geq 0} n_j &= |V(G)| \end{aligned}$$

En este caso, si G es un grafo en las condiciones de las hipótesis del enunciado, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 2(2q + k + 1 - 2i) \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 4q - k + 1 - i \end{aligned}$$

Restándole a la primera igualdad la segunda, se tiene que $n_2 - n_0 = 3(k - i) + 1$ y, por tanto, $n_2 = 3(k - i) + 1 + n_0$. Si $i \leq k$, por el Lema 2.3.12, el número de vértices de valencia 2 disjuntos entre sí es mayor o igual que $k - i + 1$. Si elegimos una sucesión decreciente de vértices de tamaño $q - i$ resulta que al menos $k - i + 1$

verifican que $\delta_{G_j}(v_{j+1}) = 2$ para $j \in \{1, \dots, q-i\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) &= \sum_{j=0}^{j=k-i} \delta_{G_j}(v_{j+1}) + \sum_{j=k-i+1}^{j=q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) \\ &\geq 2(k-i+1) + (q-i-1 - (k-i+1) + 1) \\ &= q+k-2i+1 \end{aligned}$$

Así tendríamos que

$$\begin{aligned} e(G_{q-i}) &= e(G) - \sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) \\ &\leq 2q+k+1-2i - (q+k-2i+1) \\ &\leq q \end{aligned}$$

Para el caso $i > k$, tomemos una sucesión decreciente de vértices $\{v_1, \dots, v_{q-i}\}$ como en la Nota 2.3.2. Si

$$\sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) < q-i$$

se deduce que existe al menos un vértice de valencia nula en el conjunto $\{v_1, \dots, v_{q-i}\}$ y, por la Condición 2 de la definición de sucesión decreciente de vértices, $\delta_{G_{q-i}}(v) = 0$ para todo $v \in G_{q-i}$. Así pues

$$e(G) \leq 2(q-i-1) < 2q+k+1-2i$$

y esto no es posible. En consecuencia

$$\sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq q-i$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} e(G_{q-i}) &= e(G) - \sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) \\ &= 2q+k+1-2i - (q-i) = q+k-i+1 \end{aligned}$$

⊗

Nota 2.3.15 En el Lema 2.3.14 anterior, en cualquiera de los casos, se tiene que $G \in \mathcal{C}_{q-i}^q$ ya que, en el segundo caso, como $i > k$ se tiene que $q+k-i+1 \leq q$ y por la Proposición 2.3.5 tenemos que $\mathcal{C}_{q-i}^{q+k-i+1} \subset \mathcal{C}_{q-i}^q$.

Veamos a continuación un resultado similar al anterior pero sin la restricción en la valencia máxima del grafo.

Lema 2.3.16 Sean q, k enteros positivos, con $k \leq q - 1$. Sea G un grafo con $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 1$ aristas. Entonces $G \in \mathcal{C}_q^q$.

Demostración: Si la valencia máxima de G es 2 se tiene el resultado sin más que tomar el caso $i = 0$ en el Lema 2.3.14. Así pues supongamos que la valencia máxima de G es al menos 3. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vértices. En primer lugar, si $\Delta(G_q) = 0$ entonces se tiene el resultado. Si $\Delta(G_j) \geq 3$ para cada $0 \leq j \leq q - 1$ y $\Delta(G_q) \geq 1$ entonces tendríamos que

$$e(G) \geq \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) + 1 \geq 3q + 1 > 2q + k + 1$$

y esto no es posible. Por tanto existe $j \in \{1, \dots, q - 1\}$ tal que $\Delta(G_j) \leq 2$. Así pues G_j es un grafo con $4q - k + 1 - j$ vértices y $2q + k + 1 - 3j \leq 2q + k + 1 - 2j$ aristas. Por el Lema 2.3.14 se tiene que $G_j \in \mathcal{C}_{q-j}^q$, es decir existe una sucesión decreciente de vértices $\{w_1, \dots, w_{q-j}\}$ tal que $e((G_j)_{q-j}) \leq q$. En consecuencia $\{v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_{q-j}\}$ constituye una sucesión decreciente de vértices en G con $e(G_q) \leq q$, lo que prueba el resultado. \otimes

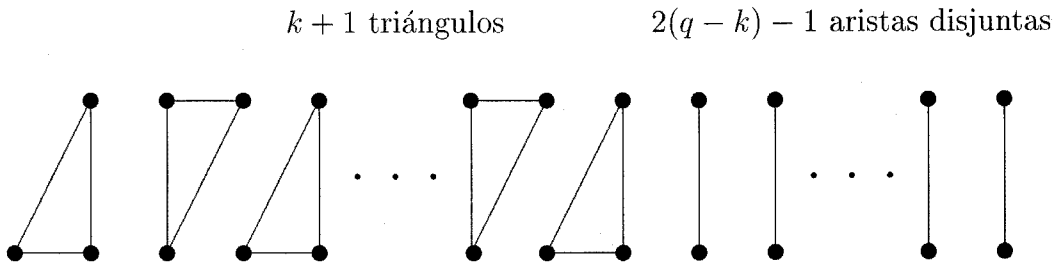


Figura 2.12: Grafo $G \notin \mathcal{C}_q^q$.

Nota 2.3.17 El resultado anterior no puede mejorarse ya que existen grafos con $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 2$ aristas no pertenecientes a \mathcal{C}_q^q . En efecto, el grafo G que muestra la Figura 2.12 formado por $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 2$ aristas no pertenece a la clase \mathcal{C}_q^q . Esto es evidente, puesto que cualquier sucesión decreciente

de vértices tiene que contener a los vértices de valencia máxima disjuntos entre sí por la Condición 2 de la definición de sucesión decreciente de vértices y por la Proposición 2.3.7. Así pues el subgrafo G_{k+1} está formado por $4q - 2k$ vértices y $2q - k$ aristas disjuntas entre sí. Por tanto, al elegir los $q - (k + 1)$ vértices restantes de la sucesión decreciente, resulta que en el mejor de los caso se tiene que:

$$e(G_q) \geq 2q + k + 2 - 2(k + 1) - (q - (k + 1)) = q + 1.$$

De forma análoga a lo que acabamos de probar, que nos ha permitido establecer una condición suficiente para que un grafo pertenezca a la clase \mathcal{C}_q^q , vamos a exponer a continuación una serie de resultados que nos conducirán a una condición para que un grafo pertenezca a la clase \mathcal{C}_q^{q+1} .

Lema 2.3.18 Sean k, q enteros positivos, con $k \leq q - 1$. Sea G un grafo con $4q - k + 3 - i$ vértices y $2q + k + 2 - 2i$ aristas, con $i \in \{0, \dots, q\}$. Si $\Delta(G) \leq 2$ entonces:

- Si $i \leq k$ entonces $G \in \mathcal{C}_{q-i}^{q+1}$.
- Si $i > k$ entonces $G \in \mathcal{C}_{q-i}^{q+k+2-i} \subseteq \mathcal{C}_{q-i}^{q+1}$.

Demostración: Con las mismas consideraciones y notaciones que el Lema 2.3.14 tenemos que

$$\begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 2(2q + k + 2 - 2i) \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 4q - k + 3 - i \end{aligned}$$

de donde se deduce que $n_2 = 3(k - i) + n_0$. Si $i \leq k$, aplicando el Lema 2.3.12, se tiene que G contiene un conjunto independiente de tamaño al menos $k - i + 1$ formado por vértices de valencia máxima. Por tanto,

$$\sum_{j=0}^{q-i-1} \delta_{G_j}(v_{j+1}) \geq q + k + 1 - 2i$$

y

$$e(G_{q-i}) \leq 2q + k + 2 - 2i - (q + k - 2i + 1) = q + 1.$$

Por otra parte, si $i > k$, tenemos que

$$e(G_{q-i}) \leq 2q + k + 2 - 2i - (q - i) = q + k + 2 - i,$$

lo que prueba el resultado. ⊗

Lema 2.3.19 Sean q, k enteros positivos, con $k \leq q - 2$. Dado G un grafo con $4q - k + 3$ vértices y $2q + k + 2$ aristas se verifica que $G \in \mathcal{C}_q^{q+1}$.

Demostración: La prueba de este resultado es análoga al Lema 2.3.16. Para $\Delta(G) = 2$ es trivial tomando $i = 0$ en el Lema 2.3.18 y para el caso $\Delta(G) \geq 3$ basta tener en cuenta que, como $k \leq q - 2$, existe $j \in \{1, \dots, q - 1\}$ tal que $\Delta(G_j) \leq 2$, con lo cual aplicando el Lema 2.3.18 tenemos que $G_j \in \mathcal{C}_{q-j}^{q+1}$ y en consecuencia $G \in \mathcal{C}_q^{q+1}$. \otimes

2.4 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos definido la familia de grafos \mathcal{C}_r^t , que básicamente permite controlar el número de aristas de un grafo obtenido a partir de otro eliminando r vértices.

Para grafos de orden $n \geq 3q + 2$ hemos dado una condición suficiente para que dicho grafo pertenezca a \mathcal{C}_q^q (Lemas 2.3.10 y 2.3.16). De forma similar, hemos abordado el problema para \mathcal{C}_q^{q+1} (Lema 2.3.19).

Como problema abierto podemos proponer, entre otros, la caracterización de \mathcal{C}_q^q y \mathcal{C}_q^{q+1} en función del número de aristas para grafos con cualquier número de vértices y un estudio análogo para otros valores de r y t . Problema que podemos formular de forma equivalente como el estudio de la función $c(n; r; t)$, con n, r, t enteros positivos y $r \leq n$, definida:

$$c(n; r; t) = \max\{s / \forall H \text{ con } |V(H)| = n, \text{ si } e(H) \leq s \text{ entonces } H \in \mathcal{C}_r^t\}$$

que expresa el número de aristas de un grafo de orden n para garantizar que dicho grafo pertenece a la clase \mathcal{C}_r^t . Por otra parte, al igual que en otros problemas extremales¹ podemos estudiar la función

$$\bar{c}(r, t) = \sup\{s / \text{Si } \frac{e(H)}{|V(H)|} \leq s \text{ entonces } H \in \mathcal{C}_r^t\}$$

O lo que es lo mismo

$$\bar{c}(r, t) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{c(n; r; t)}{n} \right\}.$$

¹La función $d(n)$ en [43], $f(t)$ en [33] y [34], $f(n; \bar{k} \leq k)$ en [5]...

Quizás del conocimiento de estas funciones podamos extender las conclusiones que veremos en los próximos capítulos.

Capítulo 3

Estudio de la función $ex(n; TK_p)$

Con las notaciones y definiciones introducidas en el capítulo anterior, abordaremos el problema de encontrar valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$, probando previamente una cota superior general. Además, caracterizaremos la familia extremal de grafos para la función anterior.

3.1 Introducción

Como ya se ha puesto de manifiesto en la introducción de esta memoria, pocos son los valores conocidos para la función $ex(n; TK_p)$, donde recordemos que dicha función representa el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener a un subgrafo homeomorfo al grafo completo de p vértices.

Por otra parte, tanto en este como en otros problemas extremales, resulta interesante estudiar los grafos maximales para el problema planteado. Así $EX(n; TK_p)$ denota la familia de grafos de orden n que no contienen ningún subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño p , y cuyo número de aristas es igual a $ex(n; TK_p)$.

Sólo se conocen valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ para pequeños valores de p : trivialmente $ex(n; TK_3) = n - 1$ ($n \geq 3$), y Dirac [13] probó

que $ex(n; TK_4) = 2n - 3$ ($n \geq 3$). Para el caso $p = 5$ Dirac conjeturó [14] que $ex(n; TK_5) = 3n - 6$. Una primera aproximación a este resultado fue dado por C. Thomassen en 1974 en [50] donde probó que $ex(n; TK_5) \leq 4n - 10$, para posteriormente en 1996 en [52] refinar este resultado, probando que $ex(n; TK_5) \leq \frac{7}{2}n - 7$. Recientemente, W. Mader en [40] ha probado que la conjetura es cierta, describiendo además en [42] la familia maximal de grafos $EX(n; TK_5)$.

En cuanto a acotaciones generales de la función $ex(n; TK_p)$, W. Mader [37] probó que para todo p existe una constante c_p tal que $ex(n; TK_p) \leq c_p n$ ($n \geq p$). Posteriormente, el propio Mader [39] refinó el resultado con la cota

$$ex(n; TK_p) \leq t(p)n - \binom{t(p) + 1}{2}$$

donde $n \geq t(p) = 3 \cdot 2^{p-3} - p$ con $p \geq 4$. Estos resultados son bastante interesantes si analizamos el problema desde un punto de vista asintótico, pero si planteamos la búsqueda de valores exactos nos aportan muy poca información.

Con respecto a las cotas inferiores, es fácil probar que

$$ex(n; TK_p) \geq (p - 2)n - \binom{p - 1}{2}$$

sin más que considerar el grafo $K_{p-2} + \overline{K_{n-p+2}}$. Esta desigualdad es realmente una igualdad para pequeños valores de p , pero Mader [37] probó que 7 es el mayor valor de p para el cual esta desigualdad puede ser una igualdad, considerando el grafo completo 5-partito con dos vértices en cada clase (ver Figura 3.1), probando que $ex(10; TK_8) \geq 40$ mientras que la acotación anterior sólo garantiza $ex(10; TK_8) \geq 39$. En la Figura 3.1 se han marcado los vértices branch para formar un subgrafo homeomorfo a K_7 , donde las aristas (a_6, a_7) y (a_2, a_3) han sido sustituidas por los caminos $a_6 a_4 a_7$ y $a_2 a_{10} a_3$ respectivamente. Es fácil comprobar que si añadimos alguna otra arista, dicho grafo contiene un subgrafo homeomorfo a K_8 .

El propósito de este capítulo es obtener una cota superior para la función $ex(n; TK_p)$ probando que es óptima, en el sentido de que para valores de n y p suficientemente grandes la acotación es en realidad una igualdad. Haremos notar

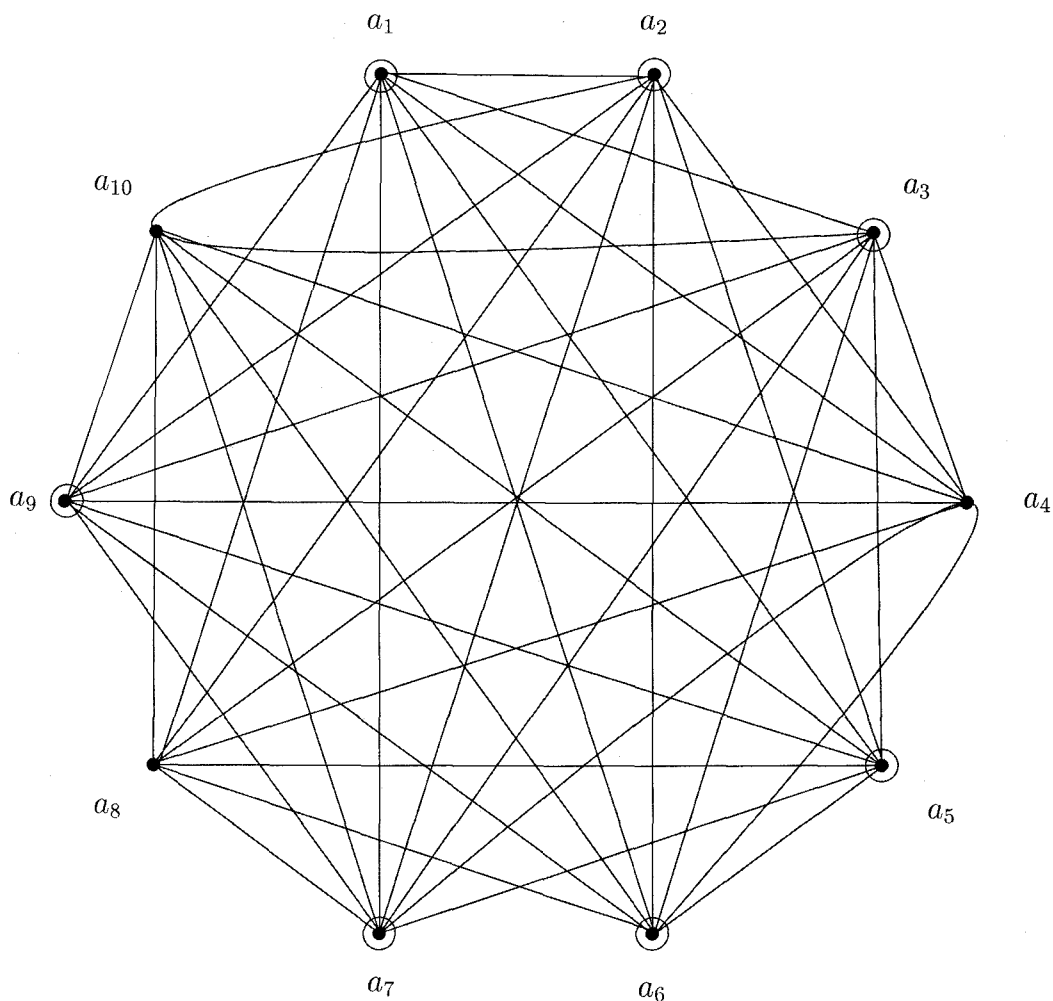


Figura 3.1: Grafo $K_{2,2,2,2,2}$, cota inferior para $ex(10; K_8)$.

que nuestro objetivo es, efectivamente, calcular valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ y caracterizar la familia $EX(n; TK_p)$, y no encontrar acotaciones generales que sean buenas asintóticamente.

Hasta el momento, todos los trabajos que conocemos relacionados con la búsqueda de valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ han dado como resultado el conocimiento de dicha función para un número finito de valores de p . En este Capítulo aportaremos el primer resultado en el estudio de la función $ex(n; TK_p)$ que permite obtener valores exactos de dicha función para infinitos valores de p , de manera que para $p \geq 6$ encontraremos un intervalo para n , de forma que para dichos valores de n y p , daremos valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$.

Concretamente, obtendremos valores exactos de dicha función para el caso en que n y p verifiquen $p < n \leq \lfloor \frac{3p-4}{2} \rfloor$ ¹, o lo que es lo mismo, $\lceil \frac{2n+4}{3} \rceil$ ² $\leq p < n$.

3.2 Cota superior para $ex(n; TK_p)$

En esta sección probaremos una cota superior para la función $ex(n; TK_p)$, de forma que para algunos valores de n y p esta acotación será una igualdad como veremos posteriormente.

Con el fin de hacer más cómodas las demostraciones, planteamos el estudio de la función $ex(n; TK_p)$ de forma equivalente como $ex(n; TK_{n-q})$ para un valor de q apropiado. Así la manera general de proceder consistirá en elegir de forma apropiada q vértices en un grafo con n vértices de tal forma que los restantes $n - q$ vértices de G serán los vértices branch de un subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño $n - q$.

Teorema 3.2.1 *Sean n , p dos enteros positivos, con $n > p$. Entonces*

$$ex(n; TK_p) \leq \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$$

Demostración: En primer lugar notemos que probar la acotación anterior es equivalente a probar que

$$ex(n; TK_{n-q}) \leq \binom{n}{2} - (2q + 1)$$

donde q es un entero positivo tal que $q < n$, sin más que cambiar p por $n - q$. Así probaremos que todo grafo de n vértices con más de $\binom{n}{2} - (2q + 1)$ aristas contiene a TK_{n-q} . Para ello consideremos un grafo G con n vértices y $\binom{n}{2} - 2q$ aristas. Vamos a probar que G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} . Denotemos por H al grafo complementario de G . Así H es un grafo con

¹ $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera por defecto o suelo.

² $\lceil \cdot \rceil$ denota la parte entera por exceso o techo.

n vértices y $2q$ aristas. Por el Lema 2.3.10 sabemos que H pertenece a la clase \mathcal{C}_q^q y por tanto existe un subconjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ en H tal que el número de aristas de H_q es menor o igual que q , es decir, existe un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ en G de tal forma que a G_q le faltan a lo más $s \leq q$ aristas $\{e_1, \dots, e_s\}$ para ser un grafo completo de tamaño $n - q$. Vamos a probar que los vértices de G_q van a ser los vértices branch de un subgrafo de G homeomorfo a K_{n-q} . Para ello denotemos por a_i y b_i a los vértices de la arista e_i ($e_i = (a_i, b_i)$) para $i = 1, \dots, s$. Consideremos el grafo bipartito cuyas clases de equivalencia son

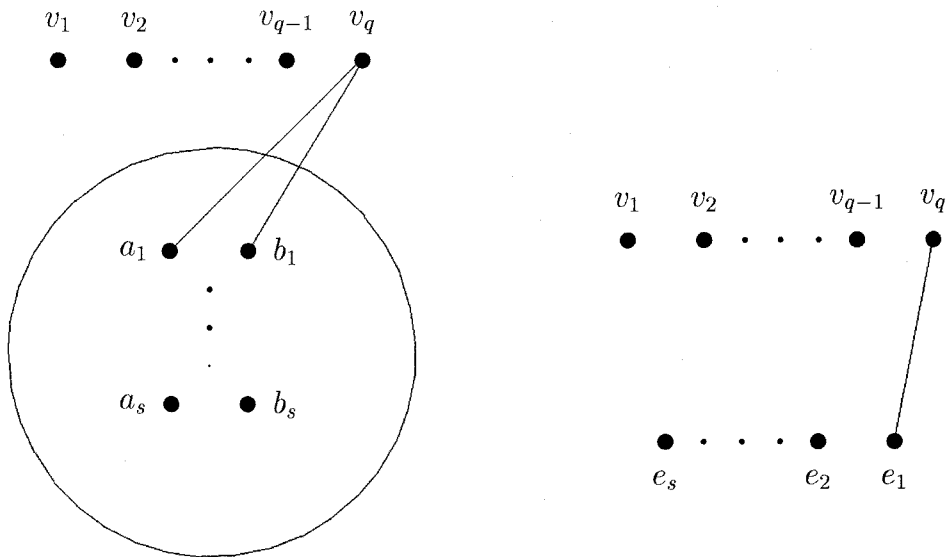


Figura 3.2: Construcción del grafo bipartito.

$X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$, de forma que un vértice e_i de X es adyacente a un vértice v_j de Y si en el grafo G existe el camino $a_i v_j b_i$ (ver Figura 3.2). Si en este grafo encontramos un emparejamiento completo, estaríamos probando en realidad que existen caminos disjuntos entre sí, que unen los vértices a_i con b_i a través de los vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$. Por tanto habríamos encontrado un subgrafo completo en G homeomorfo a K_{n-q} . La existencia de dicho emparejamiento está garantizada, ya que si existiera $e_i \in X$ no adyacente a $v_{q-i+1} \in Y$ en el grafo bipartito entonces o bien a_i o bien b_i tendrían valencia al menos 2 en H_{q-i} y, por tanto, por pertenecer H a la clase \mathcal{C}_q^q , se tiene que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{H_{q-i}}(v_{q-i+1}) \geq 2$$

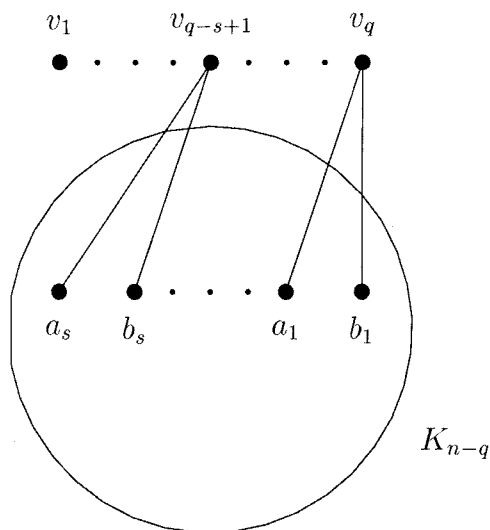


Figura 3.3: Existencia del subgrafo completo K_{n-q} .

para todo $j = 1, \dots, q - i + 1$. Por tanto,

$$e(H) \geq 2(q - i + 1) + i - 1 + s > 2q$$

pero esto no es posible, lo que prueba la existencia del subgrafo completo de tamaño $n - q$ (ver Figura 3.3). \otimes

Esta cota superior que acabamos de probar es válida para todo $n > p$. Si la comparamos con la cota superior de Mader [39]

$$ex(n; TK_p) \leq t(p)n - \binom{t(p) + 1}{2}$$

válida para $n \geq t(p) = 3 \cdot 2^{p-3} - p$ con $p \geq 4$, podemos observar que esta nueva acotación nos da una cota superior para aquellos casos donde la cota de Mader no tiene sentido. Además, incluso para valores de $n \geq t(p)$, la cota que acabamos de encontrar mejora la anterior. En la Tabla 3.1 se muestra, para algunos valores de p , el valor de $t(p)$ correspondiente y el máximo valor de n hasta donde la nueva cota mejora la anterior.

Así por ejemplo, la Figura 3.4 muestra, para $p = 19$, la diferencia entre las cotas superiores en función de n , para $n \geq t(p)$. No hemos representado los valores

p	$t(p)$	n máximo
6	18	28
7	41	55
8	88	108
9	183	212
10	374	414
11	757	814
12	1524	1604
13	3059	3171
14	6130	6288
\vdots	\vdots	\vdots
19	196589	197478
\vdots	\vdots	\vdots

Tabla 3.1: Mejora de cota superior para algunos valores de p .

menor que $t(p)$ ya que en ese caso la cota de Mader no tiene sentido. Además, como veremos en la próxima sección, la cota superior que acabamos de probar es óptima en cierto sentido, ya que para ciertos valores de n y p conducirá a valores exactos. Así por ejemplo, y siguiendo con el caso $p = 19$, la nueva cota aportará valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ para $n = 19, 20, 21, 22, 23, 24$.

Bien es verdad que asintóticamente la cota de Mader es mejor, pero recordemos que nuestro principal interés está dirigido a encontrar valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$, como veremos a continuación.

3.3 Valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$

En esta sección vamos a probar que la cota superior anteriormente expuesta es realmente el valor exacto de la función $ex(n; TK_p)$ para $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$, mientras que si $\left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$ el valor exacto de la función es menor que la cota dada.

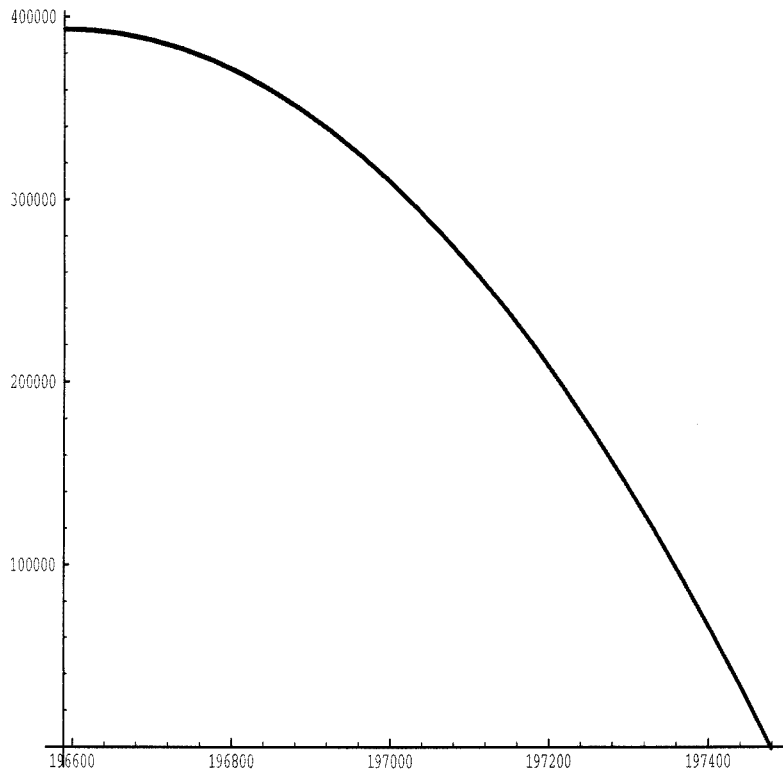


Figura 3.4: Diferencia entre cotas para $p = 19$.

3.3.1 Caso $\lceil \frac{3n+2}{4} \rceil \leq p < n$

Recordemos que Mader en [37] utilizó el grafo 5-partito con dos vértices en cada clase para poner de manifiesto que la cota inferior

$$ex(n; TK_p) \geq (p-2)n - \binom{p-1}{2}$$

es una desigualdad estricta para $p > 7$.³

Si consideramos el grafo $(2n - 2p + 1)$ -partito con dos vértices en cada clase podemos llegar a demostrar que $ex(n; TK_p) = \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$ para $\lceil \frac{3n+2}{4} \rceil \leq p < n$.⁴

³De hecho, Mader probó que $ex(10; TK_8) \geq 40$.

⁴En particular, obtenemos que $ex(10; TK_8) = 40$.

Teorema 3.3.1 Sean n, p dos enteros positivos. Si $\lceil \frac{3n+2}{4} \rceil \leq p < n$ entonces

$$\text{ex}(n; \text{TK}_p) = \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$$

Demostración: Como en el Teorema 3.2.1 probar esta igualdad es equivalente a probar que

$$\text{ex}(n; \text{TK}_{n-q}) = \binom{n}{2} - (2q + 1)$$

para $n \geq 4q + 2$ ya que:

$$\begin{aligned} \lceil \frac{3n+2}{4} \rceil \leq p < n &\iff \\ 3n+2 \leq 4p < 4n & \end{aligned}$$

Si ahora hacemos el cambio de parámetros $q = n - p$ entonces

$$\begin{aligned} 3n+2 \leq 4n-4q < 4n &\iff \\ n \geq 4q+2. & \end{aligned}$$

Consideremos ahora el grafo G que se obtiene eliminando $2q + 1$ aristas disjuntas del grafo completo de tamaño n . Así su grafo complementario \overline{G} tiene n vértices y $2q + 1$ aristas disjuntas (ver Figura 3.5) y, como ya probamos en la Nota 2.3.11, $\overline{G} \notin \mathcal{C}_q^q$. En consecuencia G no contiene ningún subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño $n - q$. \otimes

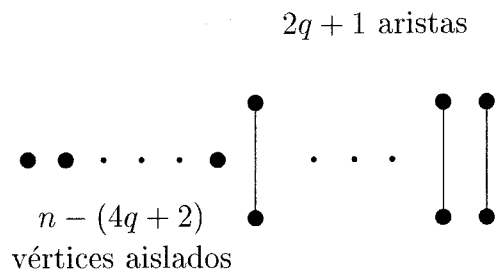


Figura 3.5: Complementario del grafo cota inferior para $n \geq 4q + 2$.

3.3.2 Caso $\lceil \frac{2n+4}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil$

Cuando $p \in \left[\lceil \frac{2n+5}{3} \rceil, \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil \right]$, la cota superior expuesta en el Teorema 3.2.1 puede ser mejorada, e incluso podemos dar el valor exacto de la función. Comence-

mos probando una nueva cota inferior para estos valores de p .

Proposición 3.3.2 Sean n, p enteros positivos tal que $\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$.

Entonces:

$$ex(n; TK_p) \geq \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$$

Demostración: Este resultado es equivalente a probar que

$$ex(n; TK_{n-q}) \geq \binom{4q-k+1}{2} - (2q+k+2)$$

con q, k enteros verificando $0 \leq k \leq q-1$ y $n = 4q - k + 1$, ya que:

Por una parte

$$\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p \iff 2n+2 \leq 3p$$

Si ahora tomamos $q = n - p$ entonces

$$2n+2 \leq 3n-3q \iff n \geq 3q+2$$

Por otra parte

$$p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil \iff 4p \leq 3n+1$$

Tomando $q = n - p$ se tiene

$$4n-4q \leq 3n+1 \iff n \leq 4q+1$$

Así tenemos que

$$3q+2 \leq n \leq 4q+1,$$

por lo que podemos expresar $n = 4q - k + 1$, donde k cumple de forma inmediata $0 \leq k \leq q - 1$. Por tanto, para probar el resultado debemos encontrar un grafo con $4q - k + 1$ vértices y $\binom{4q-k+1}{2} - (2q+k+2)$ aristas de forma que no contenga a TK_{n-q} . Consideremos el complementario del grafo formado por $k+1$ triángulos disjuntos y $2(q-k)-1$ aristas disjuntas, como muestra la Figura 3.6. Por la Nota 2.3.17 sabemos que $\overline{G} \notin \mathcal{C}_q^q$ y, por tanto, G no contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} . \otimes

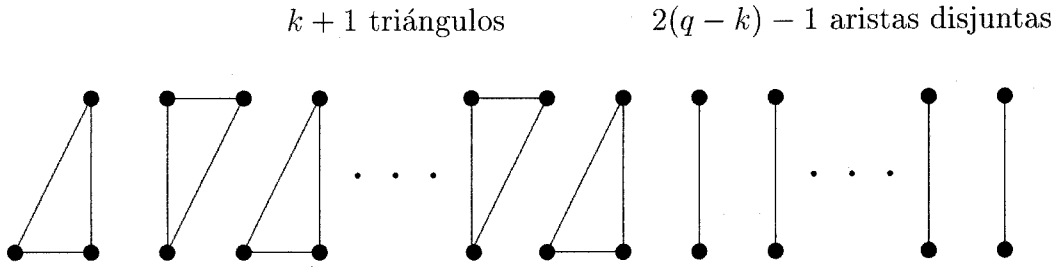


Figura 3.6: Complementario del grafo cota inferior para $n = 4q - k + 1$ con $0 \leq k \leq q - 1$.

La desigualdad anterior es en realidad una igualdad. Para ello nos basaremos en una idea similar a la prueba del Teorema 3.2.1, tomando un grafo con un determinado número de vértices y aristas y construyendo un grafo bipartito asociado, de forma que la existencia de un emparejamiento completo en el grafo bipartito garantice la existencia de un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} en el grafo de partida.

Teorema 3.3.3 Sean n y p enteros positivos con $\lceil \frac{2n+5}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil$. Entonces:

$$ex(n; TK_p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$$

Demostración: Como vimos en la Proposición 3.3.2 probar lo anterior es equivalente a probar

$$ex(n; TK_{n-q}) = \binom{n}{2} - (2q + k + 2)$$

para $n = 4q - k + 1$ con $0 \leq k \leq q - 4$.

Para ello sea G un grafo de n vértices y con $\binom{n}{2} - (2q + k + 1)$ aristas.

Veamos que G contiene un subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño $n - q$. Sea H el grafo complementario de G . Por el Lema 2.3.16, puesto que H tiene $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 1$ aristas, sabemos que $H \in \mathcal{C}_q^q$ y, por tanto, podemos encontrar un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ en H de forma que el grafo resultante de eliminar estos q vértices, H_q posee a lo más q aristas. Sea

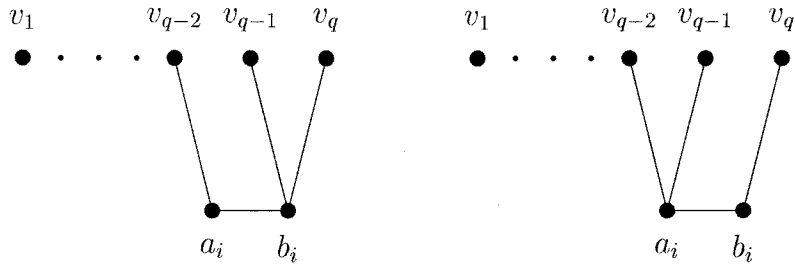


Figura 3.7: Posibles estructuras de H para subconjuntos de X de tamaño 1.

$\{e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)\}$ el conjunto de aristas de H_q . Es decir, $\{e_1, \dots, e_s\}$ es el conjunto de aristas que le faltan a G_q para ser un grafo completo de tamaño $n - q$. Vamos a probar que estas aristas pueden reemplazarse por caminos desde el vértice a_i hasta b_i a través de vértices del conjunto $\{v_1, \dots, v_q\}$ y estos caminos van a ser disjuntos para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Para conseguir esto, consideremos el grafo bipartito B cuyas clases de equivalencia van a ser $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y de forma que un vértice v_j de Y es adyacente a un vértice e_i de X si existe el camino $a_i v_j b_i$ en el grafo G .

Como en el Teorema 3.2.1 basta encontrar un emparejamiento completo en B , para lo que usaremos la condición de Hall [27]: si garantizamos que $|\Gamma(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$ tendremos el emparejamiento completo. Por tanto, tendremos que estudiar el cardinal del conjunto $\Gamma(A)$ para todo $A \subseteq X$ con $|A| = m$ siendo $1 \leq m \leq s$.

Para el caso $m = 1$, sea $A = \{e_i\}$ con $i \in \{1, \dots, s\}$. Si e_i no fuese adyacente a ningún vértice del conjunto $\{v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ en B , entonces en el peor de los casos (ver Figura 3.7),

$$\delta_{H_{q-1}}(a_i) \geq 2 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-1}}(b_i) \geq 2$$

y, además,

$$\delta_{H_{q-3}}(a_i) \geq 3 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-3}}(b_i) \geq 3,$$

y, por la Condición 2 de la Definición 2.3.1, se tiene que $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ para cada $j = 1, \dots, q - 2$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 2 \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3 \quad \text{para } 1 \leq j \leq q - 2 \end{aligned}$$

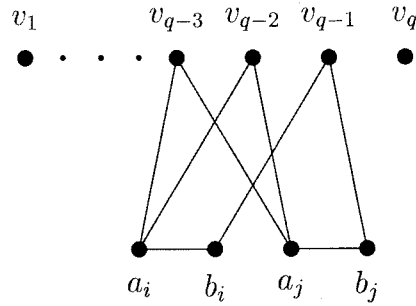


Figura 3.8: Posible estructura de H para el caso $m = 2$.

y como

$$e(H_q) = s \geq 1$$

entonces

$$e(H) \geq 3(q-2) + 4 + s = 3q + s - 2.$$

Por otra parte $k \leq q-4 < q-2$, y por tanto $q > k+2$. De todo esto se deduce que

$$e(H) \geq 3q + s - 2 > 2q + s - 2 + k + 2 = 2q + k + s \geq 2q + k + 1$$

y esto no es posible pues $e(H) \leq 2q + k + 1$. Así pues, para cada elemento del conjunto X existe al menos un elemento del conjunto Y de forma que son adyacentes.

Para el caso $m = 2$, denotemos por comodidad al conjunto $A = A_{ij}$ al conjunto de vértices $\{e_i, e_j\}$ de B para $i, j \in \{1, \dots, q\}$ con $i \neq j$. Si $|\Gamma(A_{ij})| \leq 1$, entonces al menos 3 vértices del conjunto $\{v_{q-3}, v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ no son adyacentes ni a e_i ni a e_j en el grafo B . Más aún, si un vértice v del conjunto $\{v_{q-3}, v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ fuese adyacente en B a e_i y $w \in \{v_{q-3}, v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ fuese adyacente a e_j entonces necesariamente $v = w$, pues si $v \neq w$ entonces $|\Gamma(A_{ij})| \geq 2$. Así, en el peor de los casos (ver Figura 3.8),

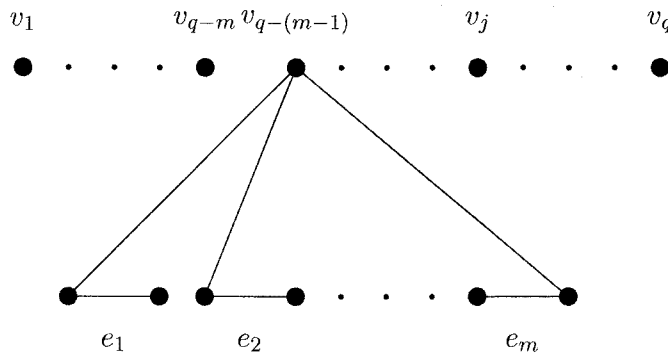
$$\delta_{H_{q-2}}(a_h) \geq 2 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-2}}(b_h) \geq 2$$

y, además,

$$\delta_{H_{q-4}}(a_h) \geq 3 \quad \text{o} \quad \delta_{H_{q-4}}(b_h) \geq 3$$

para $h \in \{i, j\}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 3 \quad \text{para } j = 1, \dots, q-3. \end{aligned}$$

Figura 3.9: Posible estructura de H para el caso $3 \leq m \leq s$.

Además sólo podemos garantizar que

$$\delta_{H_{q-1}}(v_q) \geq 1.$$

Por otra parte

$$e(H_q) = s \geq 2.$$

Deducimos entonces que:

$$e(H) \geq 3(q-3) + 4 + 1 + s$$

y como $q \geq k + 4$

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 3q - 4 + s \\ &\geq 3q - 4 + 2 \\ &= 2q - 2 + q \\ &\geq 2q - 2 + k + 4 \\ &> 2q + k + 1 \end{aligned}$$

y, como antes, esto no es posible. Luego $|\Gamma(A_{ij})| \geq 2$, es decir, se verifica la condición de Hall para conjuntos de 2 vértices de X .

Para conjuntos de vértices de X de tamaño m con $3 \leq m \leq s$, denotemos por $A_{i_1, \dots, i_m} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ al conjunto formado por los vértices $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$, donde $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, q\}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Si $|\Gamma(A_{i_1, \dots, i_m})| \leq m - 1$, con la misma idea que señalábamos en el paso anterior, existe al menos un vértice del conjunto $\{v_{q-(m-1)}, \dots, v_q\}$ que no es adyacente en B a ningún elemento del conjunto A_{i_1, \dots, i_m} . Así, en el peor de los casos (ver Figura 3.9),

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq m$$

y, por tanto,

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq m \quad \text{para } j = 1, \dots, q - (m - 1).$$

Por otro lado

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 1 \quad \text{para } j = q - (m - 2), \dots, q$$

y

$$e(H_q) = s \geq m.$$

Deducimos entonces que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq (q - (m - 1))m + (m - 1) + s \\ &\geq mq - m^2 + m + m - 1 + m \\ &= -m^2 + m(q + 3) - 1 \end{aligned}$$

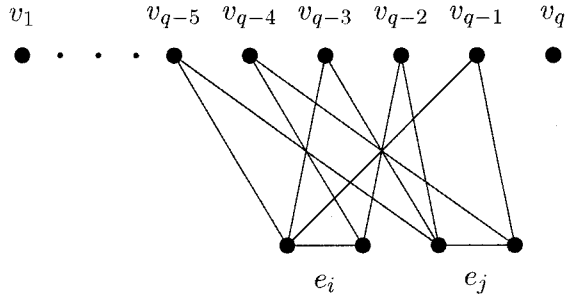
Por otra parte es inmediato comprobar que $-m^2 + m(q + 3) - 1 \geq 3q - 1$ para valores $3 \leq m \leq q$, y como $q \geq k + 4 > k + 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq -m^2 + m(q + 3) - 1 \\ &\geq 3q - 1 \\ &= 2q - 1 + q \\ &> 2q - 1 + k + 2 = 2q + k + 1. \end{aligned}$$

pero como en los casos anteriores esto no es posible. Así pues $|\Gamma(A_{i_1, \dots, i_m})| \geq m$ y, por tanto, se verifican las hipótesis de la condición de Hall para emparejamientos de grafos bipartitos. Como consecuencia se tiene el resultado enunciado. \otimes

Nota 3.3.4 Obsérvese en la prueba del resultado anterior que para los casos $m = 1$ y $3 \leq m \leq s$ sólo ha sido necesaria la condición de que $k \leq q - 3$, mientras que en el caso $m = 2$ si ha sido necesaria la condición $k \leq q - 4$ para poder llegar a contradicción. Sin embargo, vamos a ver que, en realidad, es cierto para $k \leq q - 3$. Concretamente veremos que para $k = q - 3$ también se verifica que $|\Gamma(A_{ij})| \geq 2$ para $A_{ij} = \{e_i, e_j\} \subseteq X$.

En primer lugar, si $q \geq 6$ y suponemos que $|\Gamma(A_{ij})| \leq 1$, razonando como en el Teorema 3.3.3 anterior en el caso $m = 2$ (ver Figura 3.10), tendríamos que al menos 5 vértices del conjunto $\{v_{q-5}, v_{q-4}, v_{q-3}, v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ no son adyacentes

Figura 3.10: Posible estructura de H para el caso $k = q - 3$ con $q \geq 6$ y $m = 2$.

ni a e_i ni a e_j . Con lo cual

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 1 \\ \delta_{H_{q-2}}(v_{q-1}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{q-3}}(v_{q-2}) &\geq 2 \\ \delta_{H_{q-4}}(v_{q-3}) &\geq 3 \\ \delta_{H_{q-5}}(v_{q-4}) &\geq 3 \\ \delta_{H_{j-1}}(v_j) &\geq 4 \quad \text{para } j = 1, \dots, q-5. \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$e(H) \geq 4(q-5) + 6 + 4 + 1 + s \geq 4q + 7 \geq 3q - 1$$

para $q \geq 6$. Pero esto no es posible pues $2q + k + 1 = 3q - 2 < 3q - 1$.

Analicemos qué ocurre para $q = 3, 4, 5$:

Caso $q = 3$: Para este caso, H es un grafo con 13 vértices y 7 aristas. Supongamos que $|\Gamma(A_{ij})| \leq 1$. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto de vértices elegidos como en el Lema 2.2.3, se tiene que $\Delta(H_3) = 1$, ya que si $\Delta(H_3) \geq 2$ entonces $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2$ para $j = 1, 2, 3$ y, por tanto,

$$e(H) = \sum_{j=1}^3 \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_3) \geq 6 + 2 > 7.$$

Así tenemos que e_i y e_j no son incidentes en H .

Ya hemos probado que para todo $A \subseteq X$ con $|A| = 1$ se tiene que $|\Gamma(A)| \geq 1$. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que e_i y e_j son adyacentes a v_3 en B y no son adyacentes ni a v_1 ni a v_2 . Es decir, podemos

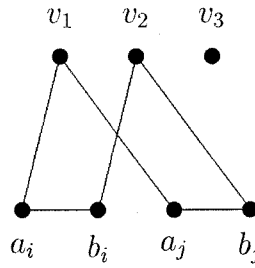


Figura 3.11: Posible estructura de H para el caso $q = 3$ y $m = 2$.

suponer que v_1 es adyacente en H a a_i y a_j y que v_2 es adyacente a b_i y b_j (ver Figura 3.11). Podemos así afirmar que $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 2$ para $k = 1, 2$. Además, a_i es un vértice de H_2 tal que $\delta_{H_2}(a_i) \geq 1$ (ver Figura 3.12). Por otra parte

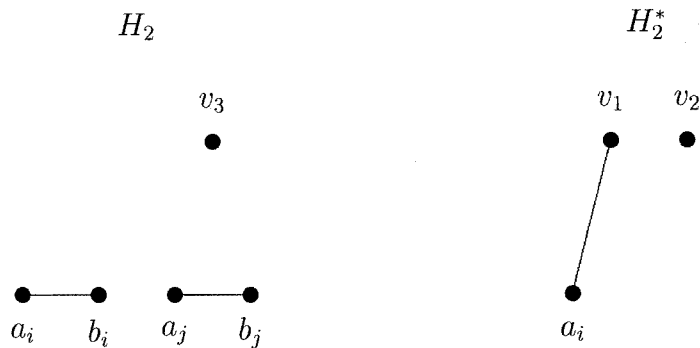


Figura 3.12: Posible estructura de H_2 y H_2^* para el caso $q = 3$ y $m = 2$.

$\delta_{H_2^*(a_i)}(a_i) \geq 1$, donde recordemos que $H_2^*(v) = \langle v_1, v_2, v \rangle_H$ para $v \in \Delta_2$, siendo $\Delta_2 = \{v \in V(H_2) / \delta_{H_2}(v) = \max_{v \in V(H_2)} \{\delta_{H_2}(v)\}\}$. Por elección de v_3 , como en el Lema 2.2.3, se tiene que $\delta_{H_2^*(v_3)}(v_3) \geq 1$, es decir, v_3 es adyacente a algún vértice del conjunto $\{v_1, v_2\}$ en H (ver Figura 3.13). Luego, al menos, se tiene que $\delta_H(v_1) \geq 3$ y, por tanto,

$$e(H) \geq 3 + 2 + 1 + 2 > 7.$$

El resto de configuraciones de vértices y aristas que podemos encontrar, o bien son equivalentes a la anterior, o bien, permite probar de forma inmediata que

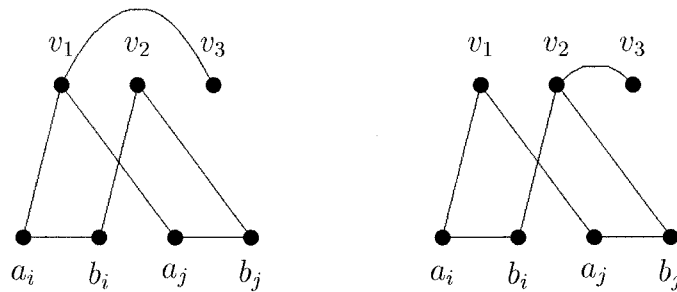


Figura 3.13: Configuraciones de H para el caso $q = 3$ y $m = 2$.

$\delta_H(v_1) \geq 3$ y $\delta_{H_1}(v_2) \geq 2$, lo que nos lleva como antes a contradicción.

Caso $q = 4$: Nuevamente debemos probar que $|\Gamma(A_{ij})| \geq 2$, para lo que supondremos lo contrario, teniendo en cuenta que H es un grafo con 16 vértices y 10 aristas. Analicemos los casos generales que pueden presentarse:

Si $\Delta(H_4) \geq 2$, como sabemos que para conjuntos $A \subseteq X$ con $|A| = 1$ se tiene que $|\Gamma(A)| \geq 1$, podemos suponer que e_1 y e_2 no son adyacentes a ningún vértice del conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ en B , y por tanto en H tenemos garantía de que $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 3$ para $k = 1, 2$ (ver Figura 3.14). Por tanto,

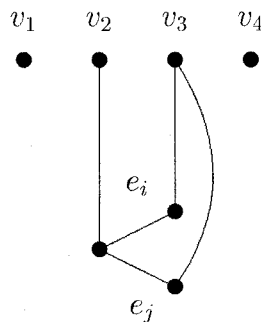


Figura 3.14: H para el caso $q = 4$ y $\Delta(H_3) \geq 2$.

$$e(H) \geq 6 + 2 + 2 + 2 > 10.$$

Si $\Delta(H_4) = 1$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que e_i y e_j son adyacentes a v_4 en B y que no lo son a ningún vértice del conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$. Se tiene entonces que a_i y a_j son adyacentes en H a v_2 y v_3 y que b_i y b_j lo son a v_2 (ver Figura 3.15). Si $\delta_{H_3}(v_4) \geq 2$, como $\delta_H(a_i) \geq 3$ se tiene que $\delta_H(v_1) \geq 3$ y, por

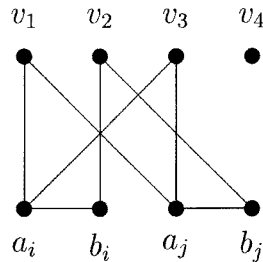


Figura 3.15: H para el caso $q = 4$ y $\Delta(H_3) = 1$.

tanto, se tendría que $e(H) \geq 3 + 2 + 2 + 2 + 2 > 10$. Así podemos suponer que $\delta_{H_3}(v_4) = 1$.

Por otra parte, se tiene que a_i es un vértice de H_3 tal que $\delta_{H_3}(a_i) \geq 1$ y, además, $\delta_{H_3^*(a_i)}(a_i) \geq 2$ (ver Figura 3.16). En consecuencia $\delta_{H_3^*(v_4)}(v_4) \geq 2$ y, por

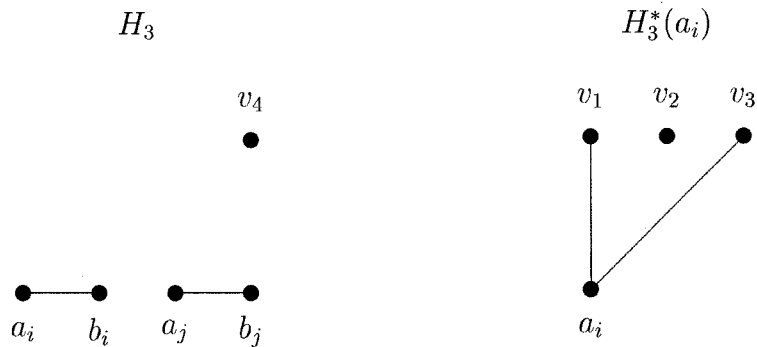


Figura 3.16: H_3 y $H_3^*(a_i)$ para el caso $q = 4$ y $\Delta(H_3) = 1$.

tanto, $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 3$ para $k = 1, 2$. Pero esto no es posible ya que

$$e(H) \geq 3 + 3 + 2 + 1 + 2 > 10.$$

Es inmediato comprobar que cualquier otra configuración, si no es equivalente a la anterior, hace que $\delta_H(v_1) \geq 4$ con $\delta_{H_1}(v_2) \geq 2$ y $\delta_{H_2}(v_3) \geq 2$, lo que lleva a contradicción.

Caso $q = 5$: H es un grafo con 19 vértices y 13 aristas. Razonando como en los casos anteriores supongamos que $|\Gamma(A_{ij})| \leq 1$. Como en el caso anterior para $q = 4$, podemos suponer que $\Delta(H_5) = 1$, ya que en caso contrario se tendría que $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 3$ para $k = 1, 2, 3$ y, por tanto, $e(H) \geq 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 > 13$. En esta situación, y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que a_i y a_j son adyacentes a v_1 y v_3 en H , y que b_i y b_j lo son a v_2 y v_4 (ver Figura 3.17). Si

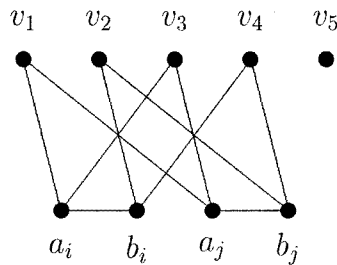


Figura 3.17: Posible estructura de H para el caso $q = 5$.

$\delta_{H_4}(v_5) \geq 2$, como $\delta_{H_1}(b_i) \geq 3$ se tiene que $\delta_{H_1}(v_2) \geq 3$ y, por tanto,

$$e(H) \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 > 13.$$

Así, podemos suponer que $\delta_{H_4}(v_5) = 1$. Obsérvese que a_i es un vértice de H_4 verificando que $\delta_{H_4}(a_i) \geq 1$ y que $\delta_{H_4^*(a_i)}(a_i) \geq 2$ (ver Figura 3.18), y por tanto, $\delta_{H_4^*(v_5)}(v_5) \geq 2$. Si v_5 fuese adyacente a v_3 o v_4 en H , entonces $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 3$ para $k = 1, 2, 3$ y, por tanto, $e(H) \geq 3 \cdot 3 + 2 + 1 + 2 > 13$. Así el vértice v_5 es adyacente a v_1 y v_2 (ver Figura 3.19).

Si $\delta_{H_3}(v_4) \geq 3$ se tendría que $e(H) \geq 4 \cdot 3 + 1 + 2 > 13$. Así se tiene que $\delta_{H_3}(v_4) \leq 2$. Pero, por otra parte, se verifica que $\delta_{H_3}(b_i) \geq 2$ y

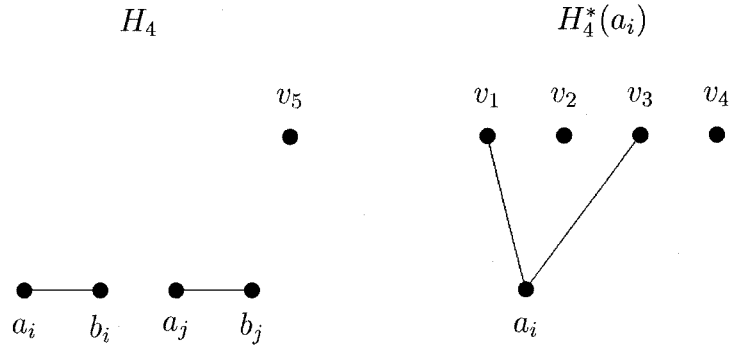


Figura 3.18: H_4 y $H_4^*(a_i)$ para el caso $q = 5$.

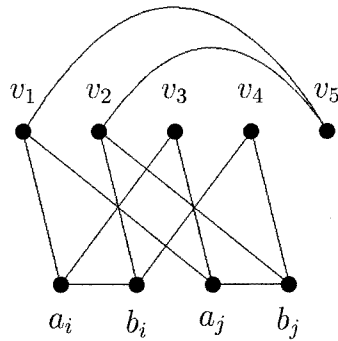


Figura 3.19: Estructura de H para el caso $q = 5$.

$\delta_{H_3^*(b_i)}(b_i) \geq 1$ y, por tanto, $\delta_{H_3^*(v_4)}(v_4) \geq 1$ (ver Figura 3.20). Así se verifica, en el peor de los casos, que $\delta_{H_2}(v_3) \geq 3$ y como $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 3$ para $k = 1, 2$, entonces

$$e(H) \geq 2 \cdot 3 + 3 + 2 + 1 + 2 > 13.$$

En otra configuración no equivalente a la anterior, es inmediato comprobar que $\delta_H(v_1) \geq 4$ y $\delta_{H_1}(v_2) \geq 3$, que nos llevaría a contradicción teniendo en cuenta que, además, $\delta_{H_{k-1}}(v_k) \geq 2$ para $k = 3, 4$.

En definitiva, en cualquiera de los casos probamos que $|\Gamma(A_{ij})| \geq 2$ y por tanto el Teorema 3.3.3 anterior es cierto para $k = q - 3$.

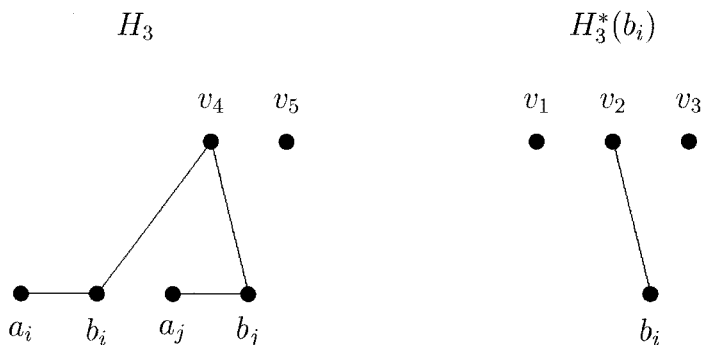


Figura 3.20: H_3 y $H_3^*(b_i)$ para el caso $q = 5$.

Por tanto, podemos obtener valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$ para $\left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{2n+5}{3} \right\rceil$. Así el Teorema 3.3.3 puede enunciarse de la siguiente forma:

Teorema 3.3.5 Sean n y p enteros positivos con $\left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$. Entonces:

$$ex(n; TK_p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$$

3.4 Familia extremal $EX(n; TK_p)$

El propósito de esta sección es caracterizar la familia de grafos $EX(n; TK_p)$, es decir, el conjunto de grafos de orden n que no contienen a ningún subgrafo homeomorfo a K_p y que tienen tamaño máximo, en el sentido de que el número de aristas de estos grafos es igual a $ex(n; TK_p)$. De hecho, describiremos explícitamente la familia anterior para $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < n$.

3.4.1 Definiciones y Notaciones

Siguiendo la misma pauta del capítulo el estudio de la familia $EX(n; TK_p)$ puede ser planteado de forma equivalente en términos de $EX(n; TK_{n-q})$ cambiando p

por $n - q$ para valores apropiados de q .

Comenzamos esta sección introduciendo la familia de grafos $\mathcal{H}(n; TK_{n-q})$ descrita como:

Definición 3.4.1 Sean n, q enteros positivos y sea k un entero no negativo. La familia $\mathcal{H}(n; TK_{n-q})$ describe a los grafos tales que

- Si $n \geq 4q + 2$, G tiene n vértices y \overline{G} está formado por $2q + 1$ aristas disjuntas (ver Figura 3.21).

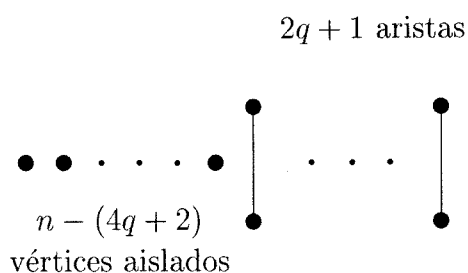


Figura 3.21: Estructura de \overline{G} para $n \geq 4q + 2$

- Si $n = 4q - k + 1$ con $0 \leq k \leq q - 1$, G tiene $4q - k + 1$ vértices y su grafo complementario \overline{G} está formado por $k + 1$ triángulos disjuntos y $2(q - k) - 1$ aristas disjuntas, como muestra la Figura 3.22.

La familia definida anteriormente se puede describir de forma equivalente en función de n y p como muestra la Tabla 3.2.

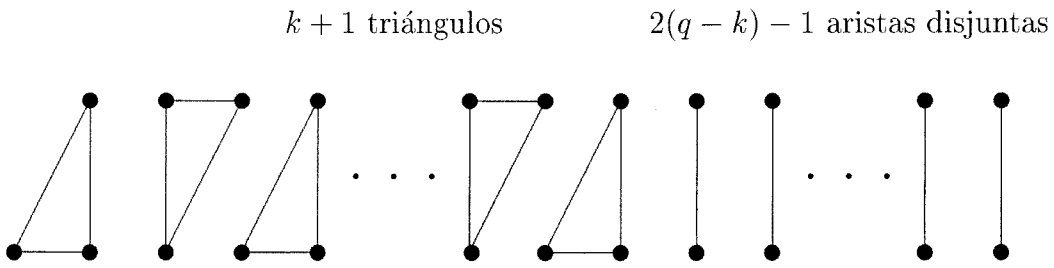
El objeto de esta sección será probar que

$$\mathcal{H}(n; TK_p) = EX(n; TK_p)$$

para $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p < n$, o lo que es lo mismo

$$\mathcal{H}(n; TK_{n-q}) = EX(n; TK_{n-q})$$

para $n \geq 4q + 2$ y $n = 4q - k + 1$ con $0 \leq k \leq q - 5$. Para ello, al igual que hicimos para encontrar valores de $ex(n; TK_p)$ tendremos que dividir el problema en varios casos.

Figura 3.22: Estructura de \overline{G} para $n = 4q - k + 1$

Valores de p	$\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p < \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$
Grafo G	$(3n - 4p + 2)\overline{K_3} + (6p - 4n - 3)\overline{K_2}$	$K_{4p-3n-2} + (2n - 2p + 1)\overline{K_2}$
\overline{G}	$3n - 4p + 2$ triángulos disjuntos $6p - 4n - 3$ aristas disjuntas	$2n - 2p + 1$ aristas disjuntas $4p - 3n - 2$ vértices aislados

Tabla 3.2: Descripción de $G \in \mathcal{H}(n; TK_p)$ para $\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p < n$.

3.4.2 Caso $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$

En la sección 3.3.1 hemos probado que

$$ex(n; TK_p) = \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$$

para $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$, utilizando para demostrar esta igualdad el grafo que muestra la Figura 3.5, es decir, un grafo de la familia $\mathcal{H}(n; TK_p)$ (ver Figura 3.21). En realidad, ésto nos permite afirmar que todo grafo G de la familia $\mathcal{H}(n; TK_p)$ con $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$ es extremal para la función $ex(n; TK_p)$, ya que si añadimos

una arista a G , el número de aristas del grafo resultante sería

$$\binom{n}{2} - (2n - 2p) > ex(n; TK_p)$$

y, por tanto, contendría un subgrafo homeomorfo a K_p . Así podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 3.4.2 Sean n, p enteros positivos tal que $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil \leq p < n$. Se verifica que

$$\mathcal{H}(n; TK_p) \subseteq EX(n; TK_p)$$

El resto de ésta sección tiene como propósito probar que la contención anterior es realmente una igualdad. Para conseguir esto, por comodidad, probaremos que

$$EX(n; TK_{n-q}) \subseteq \mathcal{H}(n; TK_{n-q})$$

con $n \geq 4q + 2$.

Para llegar a este resultado vamos a estudiar una propiedad que nos va a relacionar la familia extremal $EX(n; TK_{n-q})$ con la familia \mathcal{C}_q^t . Para entender esta relación retomemos, por ejemplo, el grafo $K_{2,2,2,2,2}$ dado en la Figura 3.1, que nos permitió encontrar una cota inferior para la función $ex(10; TK_{10-2})$. Denotemos por H a su grafo complementario $\overline{5K_2}$ (ver Figura 3.23). Es fácil ver que $H \in \mathcal{C}_2^3$ y que $H \notin \mathcal{C}_2^2$, ya que para cualquier sucesión decreciente de vértices $\{v_1, v_2\}$ que elijamos, se verifica que $e(H_2) = 3$. Es decir, $H \in \mathcal{C}_q^{q+1} - \mathcal{C}_q^q$ con $q = 2$. Esta situación, evidente en este ejemplo, se verifica para todo $n \geq 4q + 2$ como se pone de manifiesto en el siguiente lema:

Lema 3.4.3 Sean n, q enteros no negativos con $q \geq 4$ y $n \geq 4q + 2$. Dado un grafo G de la familia de grafos $EX(n; TK_{n-q})$, si $H = \overline{G}$ entonces

$$H \in \mathcal{C}_q^{q+1} - \mathcal{C}_q^q.$$

Demostración: Sea G un grafo de la familia $EX(n; TK_{n-q})$, es decir, G es un grafo con n vértices que no contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} y de manera que

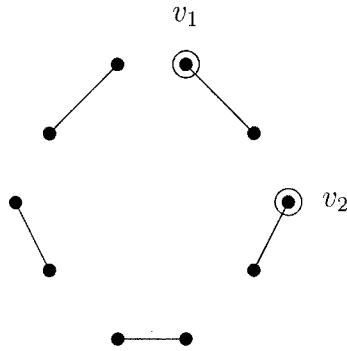


Figura 3.23: Elección de vértices $\{v_1, v_2\}$ en $\overline{5K_2}$

$e(G) = ex(n; TK_{n-q})$. Por el Teorema 3.3.1, sabemos que

$$e(G) = ex(n; TK_{n-q}) = \binom{n}{2} - (2q + 1).$$

Sea $H = \overline{G}$. Por el Lema 2.3.3, dado $q \leq n$ existe un número natural s tal que $H \in \mathcal{C}_q^s$. Pero como $e(H) = 2q + 1$, entonces $e(H_q) \leq q + 1$, por lo que $s \leq q + 1$ y, por tanto, $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$.

Veamos ahora que $H \notin \mathcal{C}_q^q$, es decir, que el número de aristas de H_q no puede ser menor o igual que q . Para ello supongamos por reducción al absurdo que $s \leq q$. Entonces $H \in \mathcal{C}_q^s$ y, por tanto, existe un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_q\}$ que nos garantiza dicha propiedad. Sean $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$ las aristas de H_q .

Si $s = 1$ y cada vértice del conjunto $\{v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ fuese adyacente a algún vértice del conjunto $\{a_1, b_1\}$ en H , entonces, razonando como en la prueba del Teorema 3.3.3 para el caso $m = 1$, tendríamos que $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ para $j = 1, \dots, q - 2$ y $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2$ para $j = q - 1, q$. Así

$$e(H) \geq 3(q - 2) + 2 \cdot 2 + 1 \geq 2q + 2 \text{ para } q \geq 3.$$

Pero de partida $e(H) = 2q + 1$, con lo cual al menos un vértice v del conjunto $\{v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ es adyacente a los vértices a_1 y b_1 en el grafo G . No obstante, si

esto ocurre, tenemos que G contendría un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} , ya que $H_q = K_{n-q} - \{e\}$ y la arista que falta la sustituimos por el camino a_1vb_1 , donde v es el vértice mencionado anteriormente (ver Figura 3.24). Pero esto no es posible, ya que G no contiene subgrafo homeomorfo a K_{n-q} .

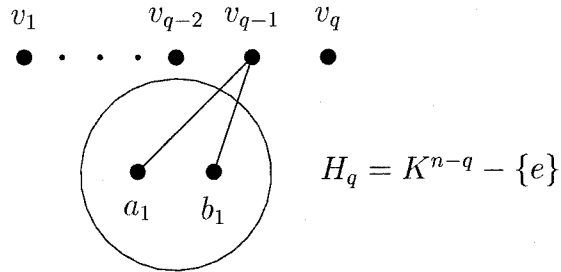


Figura 3.24: Existencia de subgrafo homeomorfo a K_{n-q} para el caso $s = 1$

Si $s = 2$, razonando como en el caso anterior, alguno de los vértices del conjunto $\{v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ es adyacente al conjunto $\{a_1, b_1\}$ en G , pues en caso contrario tendríamos que

$$e(H) \geq 3(q-2) + 4 + 2 \geq 2q + 2 \text{ para } q \geq 2$$

y esto no es posible. Por otra parte, si ninguno de los otros tres vértices del conjunto $\{v_{q-3}, v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$ fuese adyacente a los vértices del conjunto $\{a_2, b_2\}$ en G , entonces $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ para $j = 1, \dots, q-3$ y la valencia de los vértices v_{q-2} y v_{q-1} sería al menos 2. Así

$$e(H) \geq 3(q-3) + 2 \cdot 2 + 1 + 2 \geq 2q + 2 \text{ para } q \geq 4,$$

pero, como antes, esto no es posible. Por tanto, tendríamos que las aristas e_1 y e_2 de H podrían ser sustituidas en G por caminos disjuntos a través de vértices del conjunto $\{v_{q-2}, v_{q-1}, v_q\}$, con lo cual habríamos encontrado un subgrafo en G homeomorfo a K_{n-q} que está en contradicción con la hipótesis de partida sobre G .

Si $3 \leq s \leq q$, vamos a considerar, como en el Teorema 3.2.1, el grafo bipartito B cuyas clases de equivalencia la forman los conjuntos de vértices

$X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ y de forma que un vértice e_i de X es adyacente en B a un vértice v_j de Y , si existe el camino $a_i v_j b_i$ en el grafo G . En esta situación, para $3 \leq m \leq s$, si existe $i \in \{q - (m - 1), \dots, q\}$ de forma que el vértice v_i no es adyacente a ninguno de los vértices del conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$ en el grafo bipartito, entonces para $1 \leq j \leq q - (m - 1)$ tenemos que $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq m$ y entonces H tendría al menos $m(q - (m - 1))$ aristas inducidas por estos vértices, al menos $m - 1$ distintas de las anteriores por los vértices $v_{q-(m-2)}, \dots, v_q$ y s aristas de H_q . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} e(H) &\geq m(q - (m - 1)) + m - 1 + s \\ &\geq mq - m^2 + 3m - 1 \end{aligned}$$

Pero si $q \geq 3$ se cumple que:

$$\frac{3 + q - \sqrt{q^2 - 2q - 3}}{2} \leq 3 \leq m \leq s \leq q \leq \frac{3 + q + \sqrt{q^2 - 2q - 3}}{2}$$

es decir,

$$mq - m^2 + 3m - 1 \geq 2q + 2$$

y, por tanto, para $q \geq 3$ tendríamos que $e(H) \geq 2q + 2$ que es una contradicción. Es decir, para cada uno de los vértices v_i con $1 \leq i \leq q - (m - 1)$ existe un

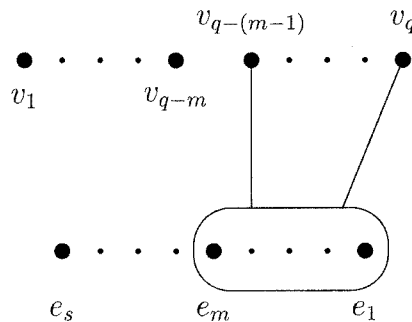


Figura 3.25: Adyacencias en el grafo bipartito.

vértice del conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$ al que es adyacente en el grafo bipartito y, por tanto, $|\Gamma(\{e_1, \dots, e_m\})| \geq m$ (ver Figura 3.25). Pero esta propiedad se tiene en realidad para cada subconjunto de m vértices de la clase X , es decir, para cada m con $3 \leq m \leq s$,

$$|\Gamma(\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\})| \geq m$$

para todo $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, s\}$. Así, aplicando la condición de Hall [27] tendríamos un emparejamiento completo en el grafo bipartito, o lo que es lo mismo, el grafo G contendría un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} que contradice nuestra hipótesis de partida. En consecuencia, G no pertenece a la clase \mathcal{C}_q^q , lo que prueba el resultado. \otimes

Para probar que, efectivamente, $EX(n; TK_{n-q}) \subseteq \mathcal{H}(n; TK_{n-q})$, consideremos un grafo G de la primera clase y denotemos por H a su grafo complementario. Por el Teorema 3.3.1 sabemos que $e(H) = 2q + 1$. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ un conjunto de vértices elegido como en la Nota 2.3.2. Es evidente que $\Delta(H_q) \geq 1$, ya que si todos los vértices de H_q fuesen de valencia nula, entonces el grafo G_q sería un subgrafo completo de tamaño $n - q$. Por otra parte, si además la valencia del vértice v_1 fuese mayor o igual que 2, entonces

$$e(H_q) \leq 2q + 1 - (2 + q - 1) = q$$

y se tendría que $H \in \mathcal{C}_q^q$, pero esto no es posible por el Lema 3.4.3 anterior. Así pues, cualquier vértice de H tiene valencia menor o igual que uno y, en consecuencia, H está formado por $2q + 1$ aristas disjuntas. Esto significa que $G \in \mathcal{H}(n; TK_{n-q})$. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado:

Teorema 3.4.4 *Sean n, p enteros no negativos tales que $\lceil \frac{3n+1}{4} \rceil \leq p < n$. Se verifica que*

$$EX(n; TK_p) = \mathcal{H}(n; TK_p)$$

3.4.3 Caso $\lceil \frac{2n+6}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil$

En esta sección vamos a caracterizar la familia extremal $EX(n; TK_{n-q})$ para $n = 4q - k + 1$, con $0 \leq k \leq q - 5$. Concretamente probaremos que

$$EX(n; TK_{n-q}) = \mathcal{H}(n; TK_{n-q})$$

utilizando ideas similares a las utilizadas en la sección anterior.

En primer lugar, veremos un resultado análogo al Lema 3.4.3, es decir, si G es un grafo de la familia $EX(n; TK_{n-q})$ con $n = 4q - k + 1$ entonces su grafo complementario H pertenece a la clase \mathcal{C}_q^{q+1} pero no pertenece a \mathcal{C}_q^q .

Lema 3.4.5 Sean k, n, q enteros no negativos tales que $q \geq 5$, $0 \leq k \leq q - 5$ y $n = 4q - k + 1$. Si $G \in EX(n; \text{TK}_{n-q})$, y $H = \overline{G}$ entonces

$$H \in \mathcal{C}_q^{q+1} - \mathcal{C}_q^q$$

Demostración: Sea G un grafo de la familia $EX(n; \text{TK}_{n-q})$. Por definición de dicha clase de grafos, el grafo G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_{n-q} y, por el Teorema 3.3.3, sabemos que

$$e(G) = \binom{n}{2} - (2q + k + 2).$$

Si denotamos por H al complementario de G , tenemos que H es un grafo con $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 2$ aristas. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de q vértices de H elegidos como en la Nota 2.3.2. Consideremos ahora el grafo H^* que se obtiene de H eliminando una de las aristas de H_q , donde recordemos que H_q era el subgrafo de H que se obtiene al eliminar los q vértice anteriores. Así H^* está formado por $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 1$ aristas y, por el Lema 2.3.16, resulta que H^* pertenece a la clase \mathcal{C}_q^q y, en consecuencia, por construcción de H^* tenemos que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$.

Veamos ahora que $H \notin \mathcal{C}_q^q$. Para ello razonamos por reducción al absurdo: supongamos que H es un grafo de la familia \mathcal{C}_q^q . Por definición de dicha clase de grafos sabemos que existe un conjunto de q vértices $\{w_1, \dots, w_q\}$ que nos garantiza dicha propiedad. Denotemos por $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$ las aristas del subgrafo H_q correspondiente, con $s \leq q$.

Consideremos como en la prueba del Lema 3.4.3 el grafo bipartito B de clases $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{w_1, \dots, w_q\}$. Si probamos la existencia de emparejamiento completo en B tendremos garantizado que G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} , lo que estaría en contradicción con la hipótesis inicial. Para ello, sea $j \in \{1, \dots, s\}$ y denotemos por \widehat{H} al grafo obtenido de H eliminando la arista e_j , es decir, $\widehat{H} = H - \{e_j\}$. El grafo así construido tiene $4q - k + 1$ vértices y $2q + k + 1$ aristas y, por el Teorema 3.3.3, sabemos que \widehat{H} contiene un subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño $n - q$. Es decir, si consideramos el grafo bipartito \widehat{B} de clases $\widehat{X} = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s\}$ e $\widehat{Y} = \{w_1, \dots, w_q\}$ definido como en el Lema 3.4.3, tenemos garantizado para dicho grafo un emparejamiento

completo. Por tanto, para todo conjunto A de m vértices de X con $m \leq s - 1$ se tiene que $|\Gamma(A)| \geq m$. Luego para garantizar el emparejamiento completo en B tan sólo falta probar que $|\Gamma(X)| \geq s$.

Supongamos por reducción que $|\Gamma(X)| \leq s - 1$.

Si $s = 1$, tal como vimos en la demostración del Teorema 3.3.3 para el caso $m = 1$, tendríamos que

$$e(H) \geq 3q + s - 2 = 3q - 1$$

Y como $k \leq q - 4$ entonces

$$3q - 3 \geq 2q + k + 4 - 1 > 2q + k + 2$$

pero esto no es posible.

Para el caso $s = 2$, considerando como antes el caso $m = 2$ del Teorema 3.3.3 se tiene que

$$e(H) \geq 3q - 4 + s = 3q - 2$$

y teniendo en cuenta que $k \leq q - 5$ entonces $e(H) > 2q + k + 2$.

En general, si $3 \leq s \leq q$, en la misma prueba del Teorema mencionado anteriormente y haciendo $m = s$ se tiene que

$$e(H) \geq -s^2 + s(q + 3) - 1 \geq 3q - 1$$

para $3 \leq s \leq q$ y como $k \leq q - 4$ entonces $e(H) > 2q + k + 2$.

Luego en cualquiera de los casos, $|\Gamma(X)| \geq s$ y aplicando la condición de Hall [27] se tiene la existencia del emparejamiento completo y, por tanto, se prueba el resultado. \otimes

Ya estamos en condiciones de probar que la familia extremal de grafos de la función $ex(n; TK_{n-q})$ para este caso, viene dada por $\mathcal{H}(n; TK_{n-q})$.

Teorema 3.4.6 Sean n, p enteros no negativos con $\left\lceil \frac{2n+6}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$. Se tiene que

$$EX(n; TK_p) = \mathcal{H}(n; TK_p)$$

Demostración: Para tener el resultado basta probar que

$$EX(n; TK_{n-q}) = \mathcal{H}(n; TK_{n-q})$$

para $n = 4q - k + 1$ con $0 \leq k \leq q - 5$.

En primer lugar, es evidente que si tomamos un grafo G de la familia $\mathcal{H}(n; TK_{n-q})$, entonces dicho grafo no contiene ningún subgrafo homeomorfo al grafo completo de tamaño $n - q$ y además es maximal en el sentido de que si añadiésemos alguna arista a G , el grafo resultante contendría una copia homeomorfa de K_{n-q} . Por tanto $\mathcal{H}(n; TK_{n-q}) \subseteq EX(n; TK_{n-q})$.

Para probar la otra contención, sea $G \in EX(n; TK_{n-q})$. Denotemos por H al grafo complementario de G . Así, por el Teorema 3.3.3, tenemos que $e(H) = 2q + k + 2$. Supongamos ahora que existe un vértice v de H tal que su valencia sea al menos 3. Sean $\{v_1, \dots, v_q\}$ vértices de H elegidos como en la Nota 2.3.2. Si para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ se tiene que $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ entonces $e(H) \geq 3q$. Pero como

$$e(H) = 2q + k + 2 \leq 2q + q - 5 + 2 = 3q - 3 < 3q$$

entonces resulta que existe j con $1 \leq j \leq q$ tal que la valencia máxima de H_j es a lo más 2. Así el grafo H_j tiene $4q - k + 1 - j$ vértices y $2q + k + 2 - 3j$ arista. Si $k \leq 2j - 2$ entonces

$$\begin{aligned} e(H_j) &\leq (2q + k + 2) - [3j + q - j] \\ &= 2q + k + 2 - 3j - q + j \\ &\leq 2q + 2j - 2 + 2 - 3j - q + j \\ &= q \end{aligned}$$

y, por tanto, H pertenecería a la clase \mathcal{C}_q^q .

Si $k \geq 2j - 1$ y denotamos por n_i al número de vértices de valencia i en H_j se tiene que

$$\left. \begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 2(2q + k + 2 - 3j) \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 4q - k + 1 - j \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce que

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= 3k + 3 - 5j + n_0 \\ &= 3(k - 2j + 1) + j + n_0 \end{aligned} \right\}$$

Por el Lema 2.3.12 se tiene que existen al menos

$$\left\lfloor \frac{3(k-2j+1) + j + n_0 + 2}{3} \right\rfloor \geq k - 2j + 2$$

vértices independientes de valencia 2. De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} e(H_q) &\leq 2q + k + 2 - (3j + 2(k - 2j + 2) + (q - (k - j + 2))) \\ &= q \end{aligned}$$

y, por tanto, H es un grafo de la familia \mathcal{C}_q^q .

Luego en cualquiera de los casos $H \in \mathcal{C}_q^q$, pero esto no es posible por el Lema 3.4.5. En consecuencia la valencia máxima de H es 2.

Además, H tiene a lo más $3k + 3$ vértices de valencia 2, ya que si tuviese $3k + 4$, entonces nuevamente aplicando el Lema 2.3.12 tendríamos que al menos

$$\left\lfloor \frac{3k + 4 + 2}{3} \right\rfloor = k + 2$$

de ellos serían independientes y por tanto

$$e(H_q) \leq 2q + k + 2 - (2(k + 2) + q - (k + 2)) = q$$

y $H \in \mathcal{C}_q^q$, pero como antes esto no es posible.

Por otra parte, si denotamos por m_i al número de vértices de H de valencia i entonces

$$\left. \begin{aligned} 2m_2 + m_1 &= 2(2q + k + 2) \\ m_2 + m_1 + m_0 &= 4q - k + 1 \end{aligned} \right\}$$

Así $m_2 = 3k + 3 + n_0 \geq 3k + 3$ y, por tanto, $m_2 = 3k + 3$ y $m_0 = 0$. Aplicando como antes el Lema 2.3.12, resulta que al menos $k + 1$ de ellos son independientes y no hay más ya que acabamos de ver que no puede haber $k + 2$ independientes. En consecuencia, H es un grafo con $3(k + 1)$ vértices de valencia 2 y $k + 1$ de ellos independientes. Por el Lema 2.3.13 se tiene que H contiene $k + 1$ triángulos independientes, lo que prueba el resultado. \otimes

3.5 Algunas aplicaciones de la función $\text{ex}(n; \text{TK}_p)$.

En esta sección expondremos dos aplicaciones inmediatas del conocimiento de valores exactos de la función $\text{ex}(n; \text{TK}_p)$. La primera de ellas proporciona valores para la función $d(n; \text{TK}_p)$. En la segunda pretendemos dar una aplicación inmediata al campo de la Teoría de Ramsey para grafos, proporcionando valores exactos para los números $R(\text{TK}_{3q+2}, \text{TK}_{1,2})$ siendo q un entero no negativo.

3.5.1 Estudio de la función $d(n; \text{TK}_p)$.

Como ya se ha puesto de manifiesto en la introducción de esta memoria, cuando se estudia el comportamiento asintótico de la función $\text{ex}(n; \text{TK}_p)$ para valores suficientemente grandes de n , el problema tiene una formulación equivalente en términos de la función $d(p)$, donde recordemos que dicha función está definida para todo número natural como

$$d(p) = \inf\{t \geq -1 \text{ tal que si } d(G) \geq t \text{ entonces } \text{TK}_p \subseteq G\},$$

donde $d(G)$ denota la valencia media del grafo G . Esta formulación fue introducida por W. Mader [37] en 1967, probando, además, que la función $d(p)$ está acotada por $d(p) \leq 2(3 \cdot 2^{p-3} - p)$ para $p \geq 4$. Los resultados conocidos para esta función son en su mayoría de tipo asintótico. Así B. Bollobás y A. Thomason en [6] y J. Komlós y E. Szemerédi en [34] han probado, de forma simultánea, que $d(p) = O(p^2)$, resultado conjeturado por P. Erdős y A. Hajnal [17].

El estudio de valores exactos de la función $d(p)$ presenta muchas complicaciones. De hecho, a parte del caso evidente para $p \leq 3$, donde $d(p) = 2(p - 2)$, sólo se conoce que $d(4) = 4$, probado en [13] y [56], y el resultado reciente de Mader [40] $d(5) = 6$.

Persiguiendo el objetivo de conocer $d(p)$, podemos considerar la función

$$d(n; \text{TK}_p) = \inf\{t / \forall G, |V(G)| = n, d(G) \geq t \rightarrow \text{TK}_p \subseteq G\},$$

es decir, $d(n; \text{TK}_p)$ denota el menor número real de forma que si G es un grafo de orden n tal que $d(G) > d(n; \text{TK}_p)$ entonces G contiene un subgrafo homeomorfo a TK_p . Con esta función así definida se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.5.1 *Sea p un entero no negativo. Se verifica que*

$$d(p) = \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p)\}.$$

Demostración: Si $d(p) > \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p)\}$, existe un número real t tal que

$$d(p) > t > \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p)\}.$$

Sea G un grafo tal que $d(G) \geq t > d(|V(G)|; TK_p)$ y por definición de la función $d(|V(G)|; TK_p)$ se tiene que $TK_p \subseteq G$ y, por tanto, por definición de $d(p)$ se tiene $d(p) \leq t$, pero $d(p) > t$. Esto no es posible y, en consecuencia, $d(p) \leq \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p)\}$.

Para probar la otra desigualdad, supongamos, por reducción al absurdo, que existe un número natural n de forma que $d(p) < d(n; TK_p)$. Consideremos un número real t_n tal que $d(p) < t_n < d(n; TK_p)$. Así, para todo grafo G con $|V(G)| = n$ se tiene que si $d(G) \geq t_n > d(p)$ entonces, por definición de $d(p)$, el grafo G contiene un subgrafo homeomorfo a K_p y, por tanto, se tendría, por definición de $d(n; TK_p)$, que $d(n; TK_p) \leq t_n < d(n; TK_p)$, que es una contradicción. Por tanto, $d(p) \geq d(n; TK_p)$ para todo n y se tiene el resultado.

⊗

Por otra parte, teniendo en cuenta la relación existente entre el número de vértices, número de aristas, valencia media de un grafo y las definiciones de las funciones $ex(n; TK_p)$ y $d(n; TK_p)$ se tiene que

$$d(n; TK_p) = \frac{2ex(n; TK_p)}{n}.$$

De esta forma, podemos enunciar el siguiente resultado

Teorema 3.5.2 *Sean n, p dos enteros positivos. Se verifica que*

- Si $\left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor \leq p < n$ entonces $d(n; TK_p) = \frac{n^2 - 5n + 4p - 2}{n}$
- Si $\left\lfloor \frac{2n+4}{3} \right\rfloor \leq p < \left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor$ entonces $d(n; TK_p) = \frac{n^2 - 11n + 12p - 6}{n}$

3.5.2 Número de Ramsey $R(\text{TK}_{3q+2}, \text{TK}_{1,2})$.

Dada una reunión de seis personas puede probarse que, o bien tres de ellas se conocen entre sí, o existe una terna de desconocidos dos a dos. Además, es fácil ver que seis es el menor número de personas en una reunión para el cual ocurre ésto. La generalización del problema es obvia: ¿Cuál es el menor número de personas en una reunión para que s de ellas se conozcan entre sí o t personas sean desconocidas dos a dos? A este número se le denota por $r(s, t)$ y se le conoce como número de Ramsey. Este nombre procede de la primera persona que consideró el problema, F. Ramsey, quién en 1930 en [49], probó, desde el punto de vista de la lógica formal que el número $r(s, t)$ existe y es finito para todo s, t .

A raíz de este resultado ha surgido toda una teoría denominada Teoría de Ramsey ⁵, que tiene conexiones con numerosos campos, entre ellos la Teoría de Grafos, ya que el número $r(s, t)$ puede formularse en términos de grafos como sigue:

Si a un conjunto de n personas las representamos mediante un grafo, de forma que dichas personas representen los vértices y de manera que dos vértices son adyacentes sin ambas personas se conocen, el número de Ramsey $r(s, t)$ representa el menor entero positivo n para el cual un grafo con n vértices contiene un subgrafo completo de tamaño s o bien su complementario contiene un subgrafo completo de tamaño t .

Este problema anterior puede formularse de forma general como la búsqueda del menor número natural n de forma que $H_1 \subseteq G$ o $H_2 \subseteq \overline{G}$ para cualquier grafo G de orden n , siendo H_1 y H_2 dos grafos cualesquiera, y que se denota por $R(H_1, H_2)$ ($r(s, t) = R(K_s, K_t)$). Sobre este tema puede encontrarse una amplia referencia bibliográfica en el trabajo de S.P. Radziszowski [48].

Como consecuencia de los resultados expuestos en este capítulo podemos abordar el problema de determinar valores exactos para los números $R(\text{TK}_{3q+2}, \text{TK}_{1,2})$, es decir, cuál es menor entero n de manera que para cualquier

⁵El libro de Graham, Rothschild y Spencer [20] presenta un desarrollo bastante completo e interesante de esta teoría. Podemos destacar, por se una buena introducción en castellano, el texto de J.C. Ferrando y V. Gregori [18].

grafo G de orden n , o bien G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{3q+2} o bien su grafo complementario \overline{G} contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,2}$.

Teorema 3.5.3 *Sea q un entero no negativo. Entonces se verifica:*

$$R(TK_{3q+2}, TK_{1,2}) = 4q + 3$$

Demostración: Sea G un grafo perteneciente a $\mathcal{H}(4q+2; TK_{3q+2})$, es decir, G tiene $4q+2$ vértices y su complementario está formado por $2q+1$ aristas disjuntas. Por el Teorema 3.4.4 sabemos que $G \in EX(4q+2; TK_{3q+2})$ y, por tanto, no contiene un subgrafo homeomorfo a K_{3q+2} . Además, su grafo complementario no contiene ningún vértice de valencia 2. Por tanto, $R(TK_{3q+2}, TK_{1,2}) \geq 4q + 3$.

Para probar la otra desigualdad, consideremos un grafo G con $4q + 3$ vértices y denotemos por H a su grafo complementario. Si $e(H) \leq 2q$ el Teorema 3.3.1 garantiza que G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{3q+2} . Si $e(H) = 2q + 1$ y $\Delta(H) \geq 2$ es evidente que G contiene $TK_{1,2}$. Si $\Delta(H) = 1$ es inmediato que $H \in \mathcal{C}_{q+1}^q$ y, por tanto, G contiene un subgrafo homeomorfo a K_{3q+2} . Por último, si $e(H) \geq 2q + 2$, como H es un grafo con $4q + 3$ aristas, resulta que H contiene al menos un vértice de valencia 2 y, por tanto, H contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,2}$. \otimes

3.6 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos obtenido valores exactos de la función $ex(n; TK_p)$. Para ello nos hemos basado en algunas propiedades de la familia \mathcal{C}_r^t , para valores apropiados de r y de t , y en la condición de Hall sobre la existencia de emparejamiento completo en un grafo bipartito B , construido a partir de un grafo dado G , de forma que la existencia del emparejamiento completo en B garantice que G contiene un subgrafo homeomorfo a un grafo completo. Ésto nos ha permitido llegar a valores exactos para $\lceil \frac{2n+4}{3} \rceil \leq p \leq n$, o dicho de otro modo, para cada $p \geq 8$ y $n \in [p, \lceil \frac{3p-4}{2} \rceil]$ hemos encontrado valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$, como puede verse en la Tabla 3.3, donde se muestran los resultados ya conocidos y los valores nuevos obtenidos para la función $ex(n; TK_p)$.

p	n	$ex(n; TK_p)$	Referencia	Figura 3.26
3	$n \geq 3$	$n - 1$		(i)
4	$n \geq 4$	$2n - 3$	[13]	(ii)
5	$n \geq 5$	$3n - 6$	[40]	(iii)
$p \geq 6$	$\lfloor \frac{4p-2}{3} \rfloor < n \leq \lfloor \frac{3p-4}{2} \rfloor$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 3)$	Teorema 3.3.5	(iv)
	$p < n \leq \lfloor \frac{4p-2}{3} \rfloor$	$\binom{n}{2} - (2n - 2p + 1)$	Teorema 3.3.1	(v)

Tabla 3.3: Valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$.

La Tabla 3.5 recoge algunos valores exactos, hasta $p = 19$, que pueden obtenerse a partir de los resultados desarrollados en este capítulo.

Por otra parte, cuando $\lceil \frac{2n+6}{3} \rceil \leq p \leq n$ hemos caracterizado la familia extremal de grafos $EX(n; TK_p)$ (ver Tabla 3.4).

Valores de n y p	$EX(n; TK_p)$	Referencia
$\lfloor \frac{3n+2}{4} \rfloor \leq p < n$	$K_{4p-3n-2} + (2n - 2p + 1)\overline{K}_2$	Teorema 3.4.4
$\lceil \frac{2n+6}{3} \rceil \leq p < \lfloor \frac{3n+2}{4} \rfloor$	$(3n - 4p + 2)\overline{K}_3 + (6p - 4n - 3)\overline{K}_2$	Teorema 3.4.6

Tabla 3.4: Descripción de la familia $EX(n; TK_p)$ para $\lceil \frac{2n+6}{3} \rceil \leq p \leq n$.

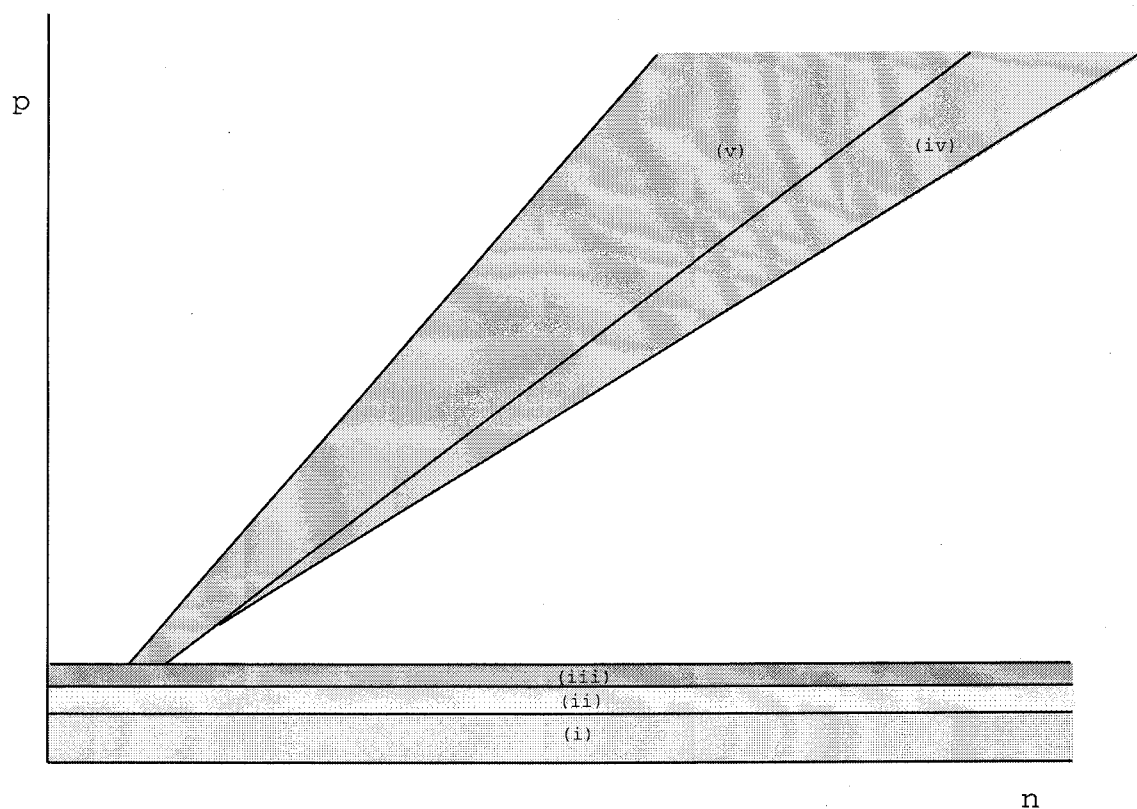


Figura 3.26: Regiones del plano (n, p) donde se alcanzan valores exactos para $ex(n; TK_p)$.

En cuanto a problemas abiertos, destacar la búsqueda de valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$ que faltan por conocerse, ampliando la región del plano (n, p) (ver Figura 3.26) donde tengamos valores exactos, intentando, además, caracterizar sus familias extremales.

n	Valores de p															
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
5	9															
6	12	14														
7		18	20													
8			25	27												
9				33	35											
10				40	42	44										
11					50	52	54									
12						61	63	65								
13						70	73	75	77							
14							84	86	88	90						
15								98	100	102	104					
16								109	113	115	117	119				
17									126	129	131	133	135			
18										144	146	148	150	152		
19										157	162	164	166	168	170	
20											177	181	183	185	187	
21												198	201	203	205	
22													214	220	222	224
23														237	242	244
24															261	265
25															280	286
26																306

Tabla 3.5: Algunos valores exactos para la función $ex(n; TK_p)$ con $p \leq 19$.

Capítulo 4

Estudio de la función $ex(n; TK_p^-)$

Los problemas extremales que involucran la contención de subgrafos prohibidos son múltiples. En este capítulo, utilizando las mismas técnicas del capítulo anterior, estudiaremos la función $ex(n; TK_p^-)$, para la que daremos, además de una cota superior, valores exactos para $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p < n$, caracterizando la familia extremal.

4.1 Introducción

Desde que Dirac en 1964 en [14] conjeturó que $ex(n; TK_5) = 3n - 6$, casi todos los esfuerzos en el estudio de la función $ex(n; H)$, para H un grafo dado, han sido dirigidos en este sentido. En el intento de acercarse a la conjetura anterior, surge el estudio de la función $ex(n; TK_p^-)$, es decir, el número máximo de aristas de un grafo de orden n para que no contenga a un subgrafo homeomorfo a K_p^- , donde K_p^- denota al grafo completo de tamaño p menos una arista.

Las reseñas bibliográficas referentes a este tema son escasas. El primer resultado que se conoce que involucre al grafo TK_p^- fue dado por C. Thomassen en [50], donde prueba que $ex(n; TK_5^-) = \frac{5}{2}n - 4$.

A parte de ésto, se conoce bien poco de la función general $ex(n; TK_p^-)$. Todos los estudios se han encaminado a conocer la familia $EX(n; TK_5^-)$ ([41], [32], [40], [10]) para poder abordar la función $ex(n; TK_5)$, resuelto definitivamente, como ya comentamos, por W. Mader en [40] y [42].

El objetivo de este capítulo es estudiar la función $ex(n; TK_p^-)$, probando una cota superior, que para ciertos valores de n y p proporcionará valores exactos. Además encontraremos otros valores exactos que nos llevarán a conocer la función $ex(n; TK_p^-)$ para $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p < n$, caracterizando la familia extremal $EX(n; TK_p^-)$ correspondiente.

4.2 Cota Superior para $ex(n; \mathbf{TK}_p^-)$

El propósito de esta sección es encontrar una cota superior para la función $ex(n; TK_p^-)$. Una aplicación inmediata del Teorema 3.2.1 nos conduce a:

Teorema 4.2.1 *Sean n , p dos enteros positivos, con $n > p$. Entonces*

$$ex(n; TK_p^-) \leq \binom{n}{2} - (2n - 2p + 2)$$

Demostración: Sea G un grafo con n vértices y $\leq \binom{n}{2} - (2n - 2p + 2) + 1$ aristas. Consideremos G^* el grafo obtenido de G añadiendo una arista. Resulta así que G^* tendría $\leq \binom{n}{2} - (2n - 2p + 2) + 2$ aristas, y aplicando el Teorema 3.2.1 se tendría que G^* contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q} y, por tanto, G contiene una subdivisión de K_{n-q}^- . \otimes

La cota superior descrita anteriormente permite encontrar valores exactos de la función $ex(n; TK_p^-)$ para $\lceil \frac{3n+4}{4} \rceil \leq p < n$. Además, como en el capítulo anterior, encontraremos otros valores exactos cuando $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$. En las próximas secciones estudiaremos ambos casos, caracterizando en cada caso la familia extremal $EX(n; TK_p^-)$ correspondiente.

4.3 Caso $\left\lceil \frac{3n+4}{4} \right\rceil \leq p < n$

A continuación, probaremos que la cota anteriormente expuesta es el valor de la función $ex(n; TK_p^-)$ para $\left\lceil \frac{3n+4}{4} \right\rceil \leq p < n$. Además, caracterizaremos la familia extremal.

4.3.1 Valores exactos de la función $ex(n; TK_p^-)$.

Basándonos en la misma idea del Teorema 3.3.1, para hallar valores exactos de la función $ex(n; TK_p^-)$ bastará con encontrar una cota inferior para la función $ex(n; TK_{n-q}^-)$, para q apropiado.

Teorema 4.3.1 Sean n, p enteros positivos. Si $\left\lceil \frac{3n+4}{4} \right\rceil \leq p < n$ entonces

$$ex(n; TK_p^-) = \binom{n}{2} - (2n - 2p + 2)$$

Demostración: Es fácil probar que la igualdad anterior es equivalente a

$$ex(n; TK_{n-q}^-) = \binom{n}{2} - (2q + 2)$$

para $n \geq 4q + 4$. Para probar que $ex(n; TK_{n-q}^-) \geq \binom{n}{2} - (2q + 2)$, consideremos el grafo G obtenido de K_n eliminando $2q + 2$ aristas disjuntas. De forma análoga a la Nota 2.3.11 se prueba que $G \notin \mathcal{C}_q^{q+1}$ y, por tanto, G no contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- , lo cual garantiza el resultado. \otimes

4.3.2 Familia extremal $EX(n; TK_p^-)$.

Teniendo en cuenta el grafo descrito en la demostración del teorema anterior, es evidente que para cada n y p con $\left\lceil \frac{3n+4}{4} \right\rceil \leq p < n$, el grafo obtenido de K_p eliminando $2(n - p) + 2$ aristas disjuntas es extremal para la función $ex(n; TK_p^-)$. En esta sección vamos a probar que realmente la familia de grafos anteriormente

descrita es la familia $EX(n; \text{TK}_p^-)$. Para ello, como hicimos en la sección 3.4.1, introduciremos la familia $\mathcal{H}(n; \text{TK}_p^-)$ para $\lceil \frac{3n+4}{4} \rceil \leq p < n$ de la siguiente forma

$$\mathcal{H}(n; \text{TK}_p^-) = \left\{ (2n - 2p + 2)\overline{K}_2 + K_{4p-3n-4} \right\},$$

o lo que es lo mismo, en términos de n y $n - q$, un grafo $G \in \mathcal{H}(n; \text{TK}_{n-q}^-)$ si \overline{G} está formado por $2q + 2$ aristas disjuntas (ver Figura 4.1).

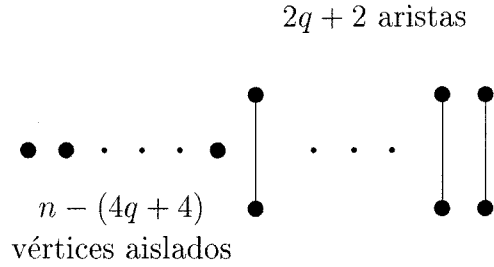


Figura 4.1: Estructura de \overline{G} para $n \geq 4q + 4$

Así, vamos a probar que $EX(n; \text{TK}_{n-q}^-) = \mathcal{H}(n; \text{TK}_{n-q}^-)$, para lo que necesitaremos un resultado previo que relaciona la familia $EX(n; \text{TK}_{n-q}^-)$ con las familias \mathcal{C}_q^{q+1} y \mathcal{C}_q^{q+2} .

Lema 4.3.2 Sean n, q enteros no negativos con $q \geq 4$ y $n \geq 4q + 4$. Dado un grafo G de la familia $EX(n; \text{TK}_{n-q}^-)$, si $H = \overline{G}$ entonces

$$H \in \mathcal{C}_q^{q+2} - \mathcal{C}_q^{q+1}.$$

Demostración: Dado $G \in EX(n; \text{TK}_{n-q}^-)$ se tiene que $e(G) = \text{ex}(n; \text{TK}_{n-q}^-)$ y por el Teorema 4.3.1 $e(H) = 2q + 2$. Por tanto $e(H_q) \leq q + 2$ y $H \in \mathcal{C}_q^{q+2}$. Veamos, por reducción al absurdo, que $H \notin \mathcal{C}_q^{q+1}$:

Si $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$ consideremos los vértices v_1, \dots, v_q que garantizan dicha propiedad y sean e_1, \dots, e_s las aristas de H_q , con $s \leq q + 1$. Razonando como en el Lema 3.4.3, analicemos la situación para los distintos valores de s que pueden presentarse.

Si $s = 2$ y no existe en G ningún camino $a_j v_i b_j$ con $j = 1, 2$ e $i \in \{q - 2, q - 1, q\}$ entonces (ver Figura 4.2) se tendría que $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ para $j = 1, \dots, q - 2$ y

$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2$ para $j = q - 1, q$, con lo cual

$$e(H) \geq 3(q - 2) + 4 + s \geq 2q + 3 \text{ para } q \geq 3$$

y esto no es posible.

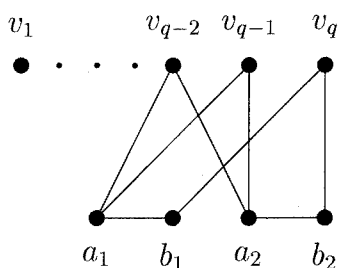


Figura 4.2: Posible estructura de H para $s = 2$.

Luego existe al menos uno de los caminos anteriores, lo que implicaría la existencia de un subgrafo en G homeomorfo a K_{n-q}^- , que está en contra de nuestras hipótesis sobre G .

Si $s = 3$, es fácil ver que es posible construir en G el camino $a_1 v_{i_1} b_1$ para algún $i_1 \in \{q - 2, q - 1, q\}$. Por otra parte, si en G no existiese ninguno de los caminos $a_j v_i b_j$ para $j = 2, 3$ y $i \in \{q - 3, \dots, q\} - \{i_1\}$ entonces $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 3$ para $j = 1, \dots, q - 3$ y $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2$ para $j = q - 2, q - 1$ entonces

$$e(H) \geq 3(q - 3) + 4 + 1 + s \geq 2q + 3 \text{ para } q \geq 4.$$

Razonando como en el caso $s = 2$, la existencia de uno de los caminos anteriores en G , nos lleva a la existencia de un subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- .

Si $4 \leq s \leq q + 1$, consideremos, como en la demostración del Lema 3.4.3, el grafo bipartito B cuyas clases de equivalencia la forman los conjuntos de vértices $X = \{e_1, \dots, e_{s-1}\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$. Así para cada $3 \leq m \leq s - 1$, se tiene que $|\Gamma(e_1, \dots, e_m)| \geq m$ ya que en caso contrario tendríamos que

$$e(H) \geq m(q - (m - 1)) + m - 1 + s \geq -m^2 + m(q + 3) \geq 2q + 3.$$

Por tanto, aplicando la condición de Hall de emparejamiento completo a B , tendríamos en G la existencia de un subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- . \otimes

Vamos a ver a continuación, basándonos en el resultado anterior, que efectivamente $EX(n; \text{TK}_p^-) \subseteq \mathcal{H}(n; \text{TK}_p^-)$.

Teorema 4.3.3 Sean n, p enteros no negativos tales que $\lceil \frac{3n+4}{4} \rceil \leq p < n$. Se verifica que

$$EX(n; \text{TK}_p^-) = \mathcal{H}(n; \text{TK}_p^-)$$

Demostración: Para probar el resultado, basta ver que

$$EX(n; \text{TK}_{n-q}^-) \subseteq \mathcal{H}(n; \text{TK}_{n-q}^-)$$

para n, q enteros no negativos, con $q \geq 3$ y $n \geq 4q + 4$.

Dado $G \in EX(n; \text{TK}_{n-q}^-)$ sabemos por el Teorema 4.3.1 que si $H = \overline{G}$ entonces $e(H) = 2q + 2$. Consideremos una sucesión decreciente de vértices v_1, \dots, v_q . Si $\Delta(H_q) \geq 2$ y $\delta_H(v_1) \geq 2$ entonces $e(H_q) \leq 2q + 2 - (2 + q - 1) = q + 1$, pero esto no es posible ya que, por el Lema 4.3.2, sabemos que $H \notin \mathcal{C}_q^{q+1}$. Por tanto $\Delta(H) = 1$ y se tiene el resultado. \otimes

4.4 Caso $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$

En esta sección vamos a probar que es posible mejorar la cota superior del Teorema 4.2.1 cuando $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$, de forma que nos va a permitir calcular valores exactos para la función $\text{ex}(n; \text{TK}_p^-)$ en dicho intervalo. Además, cuando $\lceil \frac{2n+8}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$ determinaremos la familia extremal $EX(n; \text{TK}_p^-)$.

4.4.1 Valores exactos de la función $\text{ex}(n; \text{TK}_p^-)$.

Veamos en primer lugar como, efectivamente, la cota superior del Teorema 4.2.1 es mejorada para $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$.

Teorema 4.4.1 Sean n y p enteros positivos con $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$. Se verifica que

$$\text{ex}(n; \text{TK}_p^-) \leq \binom{n}{2} - (5n - 6p + 6)$$

Demostración: El esquema de la demostración es análogo al Teorema 3.3.3. En primer lugar, notar que el resultado se tiene si probamos que

$$ex(n; TK_{n-q}^-) \leq \binom{n}{2} - (2q + k + 3)$$

con $n = 4q - k + 3$ y $0 \leq k \leq q - 4$.

Para ello, sea G un grafo con $\binom{n}{2} - (2q + k + 2)$ aristas. Si $H = \overline{G}$, por el Lema 2.3.19, se tiene que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ un conjunto de vértices que garantiza la propiedad anterior y sean $\{e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)\}$ con $s \leq s + 1$, el conjunto de aristas de H_q . Vamos a probar que dichas aristas, salvo a lo más una, pueden ser reemplazadas por caminos disjuntos a través de los vértices v_1, \dots, v_q . Para conseguir ésto, consideremos el grafo bipartito B de clases $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ construido como en el Teorema 3.3.3, es decir, un vértice $e_i \in X$ es adyacente a $v_j \in Y$ si existe el camino $a_i v_j b_i$ en G . Para terminar será suficiente encontrar un emparejamiento completo desde un subconjunto de tamaño $s - 1$ de X a Y .

Sea $A \subset X$ con $|A| = 1$. Si $|\Gamma(A)| = 0$, razonando como en el caso $m = 1$ del Teorema 3.3.3, tendríamos que

$$e(H) \geq 3(q - 2) + 4 + s \geq 3q \geq 2q + k + 3 > 2q + k + 2$$

para $q \geq k + 3$, pero esto no es posible.

Si $|A| = 2$ y suponemos que $|\Gamma(A)| \leq 1$ llegamos a contradicción, ya que al ser $q \geq k + 4$, y razonando como en el Teorema 3.3.3 para $m = 2$, se tendría que

$$e(H) \geq 3(q - 3) + 4 + 1 + s \geq 3q - 1 \geq 2q + k + 3.$$

Si $|A| = l$ con $3 \leq l \leq s - 1 \leq q$, siguiendo el esquema del caso $3 \leq m \leq s$ en el Teorema 3.3.3, si suponemos que $|\Gamma(A)| \leq l - 1$ tenemos que

$$e(H) \leq (q - (l - 1))l + (l - 1) + s \geq -l^2 + l(q + 3).$$

Pero para $3 \leq l \leq q$ es evidente que $-l^2 + l(q + 3) \geq 3q$, con lo cual $e(H) > 2q + k + 2$ para $k \leq q - 3$.

Así pues, basta aplicar la condición de Hall sobre emparejamiento completo a un subgrafo cualquiera $X' \subset X$ con $|X'| = s - 1$. \otimes

Nota 4.4.2 Obsérvese que la demostración del teorema anterior nos permite afirmar que si G es un grafo con $\binom{n}{2} - (2q + k + 2)$ aristas, $\{v_1, \dots, v_q\}$ es una sucesión de vértices que garantiza que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$ y $\{e_1, \dots, e_s\}$ es el conjunto de aristas de H_q , entonces para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ es posible encontrar un emparejamiento completo en el grafo bipartito $B' \subset B$ de clase $X' = \{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_s\}$ e $Y' = \{v_1, \dots, v_q\}$.

Para probar que la cota superior anterior es una igualdad, consideremos, para cada $n = 4q - k + 3$ con $0 \leq k \leq q - 1$, el grafo G definido de forma que su grafo complementario H está formado por $k + 1$ triángulos disjuntos y $2(q - k)$ aristas disjuntas (ver Figura 4.3).

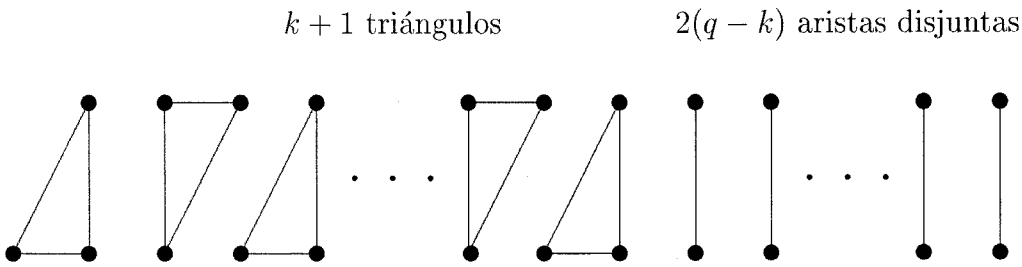


Figura 4.3: Complementario del grafo cota inferior para $n = 4q - k + 3$ con $0 \leq k \leq q - 1$.

Es fácil ver que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$ y, por tanto, G no contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- . Así pues,

$$ex(n; TK_{n-q}^-) \geq \binom{n}{2} - (2q + k + 3)$$

y podemos enunciar el siguiente resultado

Teorema 4.4.3 Sean n y p enteros positivos con $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$. Entonces

$$ex(n; TK_p^-) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 6)$$

4.4.2 Familia extremal $EX(n; TK_p^-)$.

En esta sección vamos a describir la familia extremal $EX(n; TK_p^-)$ para $p \in \left[\left\lceil \frac{2n+8}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil \right]$. Para ello, como en la sección 4.3.2, consideremos para n y p verificando $\left\lceil \frac{2n+4}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil$, la familia $\mathcal{H}(n; TK_p^-)$ definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}(n; TK_p^-) = \left\{ (3n - 4p + 4)\overline{K}_3 + (6p - 4n - 6)\overline{K}_2 \right\},$$

es decir, si $n = 4q - k + 3$ con $0 \leq k \leq q - 1$, un grafo $G \in \mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-)$ si \overline{G} está formado por $k + 1$ triángulos disjuntos y $2(q - k)$ aristas disjuntas (ver Figura 4.3).

Como acabamos de probar en la sección anterior, dado $G \in \mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-)$, se tiene que G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- y teniendo en cuenta que $e(G) = ex(n; TK_{n-q}^-)$, podemos afirmar que

$$\mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-) \subseteq EX(n; TK_{n-q}^-).$$

A continuación vamos a ver que la contención anterior es realmente una igualdad para $n = 4q - k + 3$ con $0 \leq k \leq q - 5$. Para llegar a este resultado necesitaremos el siguiente resultado previo, que como en la sección 4.3.2 relaciona las familias \mathcal{C}_q^{q+1} y \mathcal{C}_q^{q+2} con $\mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-)$.

Lema 4.4.4 Sean k, n, q enteros no negativos tales que $0 \leq k \leq q - 5$ con $n = 4q - k + 3$. Si $G \in EX(n; TK_{n-q}^-)$, entonces

$$\overline{G} \in \mathcal{C}_q^{q+2} - \mathcal{C}_q^{q+1}$$

Demostración: Sea G un grafo de la familia $EX(n; TK_{n-q}^-)$ y H su grafo complementario. Razonando como en el Lema 3.4.5 podemos considerar el grafo H^* obtenido de H eliminando una de las aristas de H_q . Aplicando el Lema 2.3.19 tenemos que $H^* \in \mathcal{C}_q^{q+1}$ y por tanto $H \in \mathcal{C}_q^{q+2}$.

Supongamos ahora que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$. Sea $\{v_1, \dots, v_q\}$ una sucesión decreciente de vértices que nos garantice dicha propiedad y sea $e_1 = (a_1, b_1), \dots, e_s = (a_s, b_s)$ con $s \leq q + 1$ las aristas de H_q . Consideremos

a continuación, como en el Lema 3.4.5, el grafo bipartito asociado B , de clases $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$.

Sea $j \in \{1, \dots, s\}$ y consideremos el subgrafo $\widehat{H} = H - \{e_j\}$. El grafo así definido tiene $4q - k + 3$ vértices y $2q + k + 2$ aristas y, aplicando el Teorema 4.4.1, se tiene que \widehat{H} contiene un subgrafo homeomorfo a K_{n-q}^- . Sea e_i la arista de H_q que le falta al subgrafo anterior para ser completo. En estas condiciones, si consideramos el grafo bipartito $\widehat{B} \subset B$ de clases $\widehat{X} = \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_s\}$ e $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$, podemos afirmar la existencia, para dicho grafo, de un emparejamiento completo. Así pues, si ahora consideramos el grafo bipartito $B' \subset B$ de clase de equivalencia $X' = \{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_s\}$ e $Y' = \{v_1, \dots, v_q\}$, y teniendo en cuenta la Nota 4.4.2, se tiene que para todo $A \subset X'$ con $|A| \leq s - 2$ se verifica que $|\Gamma(A)| \geq |A|$ y, por tanto, si probamos que $|\Gamma(X')| \geq s - 1$, tendríamos garantizado un emparejamiento completo en B' . Para ello, supongamos por reducción al absurdo que $|\Gamma(X')| \leq s - 2$.

Razonando como el Lema 3.4.5 ¹ tenemos que, para $s = 2$, si $|\Gamma(X')| = 0$ entonces

$$e(H) \geq 3q - 2 + s > 2q + k + 3$$

si $q \geq k + 4$.

Para $s = 3$, siguiendo como el Lema 3.4.5 ², tendríamos que

$$e(H) \geq 3q - 4 + s \geq 2q + k + 4$$

para $q \geq k + 5$, y esto no es posible.

Por último, en el caso general con $s \geq 4$, si suponemos que $|\Gamma(X')| \leq s - 2$, razonando como en el Lema 3.4.5 ³, tendríamos que

$$e(H) \geq -s^2 + s(q + 3) > 2q + k + 3$$

cuando $k \leq q - 4$, que está en contradicción con nuestras hipótesis sobre el número de aristas de H .

Por tanto, en cualquiera de los casos $|\Gamma X'| \geq s - 1$ y se tendría un emparejamiento completo en B' , es decir, G contendría un subgrafo homeomorfo a

¹Caso $s = 1$.

²Caso $s = 2$.

³Caso general $3 \leq s \leq q$.

K_{n-q}^- , que contradice nuestras hipótesis iniciales sobre G . Luego $H \notin \mathcal{C}_q^{q+1}$ y, por tanto, se tiene el resultado. \otimes

Con este resultado ya estamos en condiciones de probar que

$$EX(n; TK_{n-q}^-) \subseteq \mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-),$$

es decir, vamos a probar que, efectivamente, $EX(n; TK_p^-) = \mathcal{H}(n; TK_p^-)$ para $\left\lceil \frac{2n+8}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil$.

Teorema 4.4.5 Sean n, p enteros no negativos tales que $\left\lceil \frac{2n+8}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil$. Se verifica que

$$EX(n; TK_p^-) = \mathcal{H}(n; TK_p^-)$$

Demostración: Para probar el resultado es suficiente ver que

$$EX(n; TK_{n-q}^-) \subseteq \mathcal{H}(n; TK_{n-q}^-),$$

para k, q enteros no negativos con $0 \leq k \leq q - 5$ y $n = 4q - k + 3$.

Para ello, sea $G \in EX(n; TK_{n-q}^-)$. Por definición de dicha familia extremal y aplicando el Teorema 4.4.1 se tiene que $e(H) = 2q + k + 3$ donde $H = \overline{G}$. Vamos a probar en primer lugar que $\Delta(H) = 2$. Para ello supongamos que existiese un vértice en H de valencia al menos 3. Si elegimos una sucesión decreciente de vértices como en la Nota 2.3.2, entonces existe j con $1 \leq j \leq q$ tal que $\Delta(H_j) \leq 2$ ya que si para todo j se tuviera $\Delta(H_j) \geq 3$ entonces

$$e(H) \geq 3q > 2q + k + 3.$$

Tenemos así que H_j es un grafo con $4q - k + 3 - j$ vértices y con a lo más $2q + k + 3 - 3j$ aristas.

Si $k \leq 2j - 2$ se tiene que

$$e(H_j) \leq 2q + k + 3 - (3j + q - j) \leq q + 1.$$

Si $k \geq 2j - 1$ tenemos que $n_2 = 3(k - 2j + 1) + j + n_0$, que se deduce fácilmente teniendo en cuenta que

$$\left. \begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 2(2q + k + 3 - 3j) \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 4q - k + 3 - j \end{aligned} \right\}.$$

Aplicando el Lema 2.3.12 se tiene que existen al menos

$$\left\lfloor \frac{3(k-2j+1) + j + n_0 + 2}{3} \right\rfloor \geq k - 2j + 2$$

vértices independientes de valencia 2. Por tanto

$$e(H_q) \leq 2q + k + 3 - (3j + 2(k - 2j + 2) + (q - (k - j + 2))) = q + 1$$

En consecuencia, para todos los casos tenemos que $H \in \mathcal{C}_q^{q+1}$, pero esto no es posible por el Lema 4.4.4. Así pues $\delta_H(v) \leq 2$ para todo $v \in H$. Además el número de vértices de valencia máxima es $3k + 3$, ya que por una parte se tiene la relación

$$\left. \begin{aligned} 2n_2 + n_1 &= 2(2q + k + 3) \\ n_2 + n_1 + n_0 &= 4q - k + 3 \end{aligned} \right\}$$

que nos lleva a que $n_2 = 3k + 3 + n_0 \geq 3k + 3$.

Por otra parte si $n_2 \geq 3k + 4$, aplicando el Lema 2.3.12 se tendría que al menos $k + 2$ vértices son disjuntos y

$$e(H_q) \leq 2q + k + 3 - (2(k + 2) + q - (k + 2)) = q + 1.$$

Por tanto, $n_2 = 3k + 3$ y $n_0 = 0$. Aplicando nuevamente el Lema 2.3.12 resulta que H tiene $k + 1$ vértices independientes de valencia máxima y por el Lema 2.3.13 se tiene que H contiene $k + 1$ triángulos disjuntos. \otimes

4.5 Estudio de la función $\mathbf{d}(\text{TK}_p^-)$

Recordemos que la función $d(p)$ se definió en [37] y [43] como

$$d(p) = \inf\{t \geq -1 \text{ tal que si } d(G) \geq t \text{ entonces } \text{TK}_p \subseteq G\}.$$

De igual forma, se puede considerar dicha función para el caso de TK_p^- , es decir, podemos considerar

$$d(\text{TK}_p^-) = \inf\{t \geq -1 \text{ tal que si } d(G) \geq t \text{ entonces } \text{TK}_p^- \subseteq G\},$$

que está bien definida para todo p , ya que $d(\text{TK}_p^-) \leq d(p)$.

Al igual que hicimos en la sección 3.5.1, podemos considerar la función

$$d(n; TK_p^-) = \inf\{t / \forall G, |V(G)| = n, d(G) \geq t \rightarrow TK_p^- \subseteq G\},$$

definida para todo $n \geq p$, y, por tanto,

$$d(TK_p^-) = \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p^-)\}.$$

Además

$$d(n; TK_p^-) = \frac{2ex(n; TK_p^-)}{n}.$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones y los resultados obtenidos en las secciones precedentes de este capítulo, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 4.5.1 *Sean n, p dos enteros positivos. Se verifica que*

- Si $\left\lfloor \frac{3n+4}{4} \right\rfloor \leq p < n$ entonces $d(n; TK_p^-) = \frac{n^2 - 5n + 4p - 4}{n}$
- Si $\left\lfloor \frac{2n+7}{3} \right\rfloor \leq p < \left\lfloor \frac{3n+3}{4} \right\rfloor$ entonces $d(n; TK_p^-) = \frac{n^2 - 11n + 12p - 12}{n}$

Por otra parte, si realizamos un estudio asintótico de la función $d(TK_p^-)$, como consecuencia de la definición de dicha función y del teorema anterior, se tiene que

$$d(TK_p^-) \geq d\left(\left\lfloor \frac{3p-7}{2} \right\rfloor, TK_p^-\right)$$

y, por tanto,

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{d(TK_p^-)}{p} \geq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{d\left(\left\lfloor \frac{3p-7}{2} \right\rfloor, TK_p^-\right)}{p} \geq \frac{3}{2}.$$

4.6 Conclusiones y problemas abiertos

Como consecuencia de las técnicas y resultados obtenidos en los Capítulos 1 y 2, hemos estudiado en este capítulo la función $ex(n; TK_p^-)$, de forma que hemos encontrado una cota superior (Teorema 4.2.1), que para $\left\lfloor \frac{3n+4}{4} \right\rfloor \leq p < n$ aporta

p	$ex(n; TK_p)$	Referencia
$\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p < \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$	$\binom{n}{2} - (5n - 6p + 6)$	Teorema 4.4.1
$\lceil \frac{3n+4}{4} \rceil \leq p < n$	$\binom{n}{2} - (2n - 2p + 2)$	Teorema 4.3.1

Tabla 4.1: Valores exactos para la función $ex(n; TK_p^-)$.

valores exactos. Además, cuando $\lceil \frac{2n+7}{3} \rceil \leq p < \lceil \frac{3n+3}{4} \rceil$ también hemos obtenido el valor exacto de la función (ver Tabla 4.1).

Por otra parte, para $\lceil \frac{2n+8}{3} \rceil \leq p < n$ hemos caracterizado la familia de grafos extremales de la función $ex(n; TK_p^-)$ (ver Tabla 4.2).

Valores de p	$EX(n; TK_p)$	Referencia
$\lceil \frac{3n+4}{4} \rceil \leq p < n$	$K_{4p-3n-4} + (2n - 2p + 2)\overline{K_2}$	Teorema 4.3.3
$\lceil \frac{2n+6}{3} \rceil \leq p < \lceil \frac{3n+2}{4} \rceil$	$(3n - 4p + 4)\overline{K_3} + (6p - 4n - 6)\overline{K_2}$	Teorema 4.4.5

Tabla 4.2: Descripción de la familia $EX(n; TK_p^-)$ para $\lceil \frac{2n+8}{3} \rceil \leq p \leq n$.

Como problemas abiertos nos queda desde la búsqueda de mejores cotas superiores para la función $ex(n; TK_p^-)$ que permita un mejor tratamiento

asintótico, hasta la búsqueda de otros valores exactos, caracterizando, siempre que sea posible, la familia de grafos extremales.

Por otra parte, con las técnicas utilizadas a lo largo de esta memoria es posible abordar el problema para otras funciones de la forma $ex(n; H)$, siendo H por ejemplo $TK_{p,q}$, TW_r ⁴,... problemas que, alguno de ellos, han sido tratados (ver [50], [29], [10]).

Por último, y de forma general, decir que todos los problemas tratados en este capítulo pueden estudiarse con una variante, en lugar de buscar subgrafos homeomorfos a uno dado, buscar grafos contractibles⁵, es decir, estudiar la función $ex(n; MH)$ (ver [55], [38], [10],[29],[30]).

⁴ $W_r = K_1 + C_{r-1}$.

⁵Un grafo G es contractible a un grafo H , si H puede ser obtenido de G por contracciones elementales, donde una contracción elemental en un grafo G se obtiene identificando dos vértices adyacentes u y v en un nuevo vértice w , de forma que w será adyacente a los vértices que eran adyacentes a u y a v (ver [5], [28], [11])

Capítulo 5

La función $d_\infty(p)$ para grafos infinitos

Son muchos los problemas extremales para grafos finitos relacionados con el número de vértices y aristas y, por tanto, con la valencia media de grafos finitos. En este capítulo extenderemos el concepto de valencia media para grafos infinitos sobre una familia de grafos, que llamaremos media-medibles, y relacionaremos la función $d(p)$ definida para grafos finitos, con su extensión $d_\infty(p)$ a grafos infinitos, probando de forma general que $d(p) - 1 \leq d_\infty(p) \leq d(p)$.

5.1 Introducción

El estudio de la función $d(p)$ planteado por W. Mader [37] en 1967, donde recordemos que $d(p) = \inf\{t / d(G) \geq t \rightarrow TK_p \subseteq G\}$, ha sido formulado en esta memoria en términos de la función $ex(n; TK_p)$. Así, se ha probado en la Proposición 3.5.1, que $d(p) = \sup_{n \geq p} \{d(n; TK_p)\}$, siendo $d(n; TK_p) = \frac{2ex(n; TK_p)}{n}$.

De esta forma, para llegar a conocer valores de la función $d(p)$ se precisan conocer valores de $d(n; TK_p)$, o lo que es lo mismo de $ex(n; TK_p)$ para valores de

n suficientemente grandes. Dicho de otra forma, la necesidad de estudiar valores de $ex(n; TK_p)$ para n tendiendo a infinito, nos sugiere la idea de estudiar dicha propiedad para grafos infinitos.

Si bien el problema de estudiar el número de aristas frente al número de vértices en un grafo infinito no parece tener sentido, si que toma mayor peso la idea de pensar en un concepto similar al de valencia media para grafos finitos, ya que todo grafo infinito puede verse como límite de grafos finitos y en la valencia media no aparece explícitamente ni el número de vértices ni el número de aristas.

Teniendo en cuenta estas ideas, el objetivo de este capítulo es doble. En primer lugar definiremos el concepto de valencia media para grafos infinitos, siempre heredando las propiedades de valencia media para grafos finitos. En segundo lugar, generalizaremos la función $d(p)$ para grafos infinitos, que la denotaremos por $d_\infty(p)$. Probaremos las relaciones existentes entre ambas funciones y daremos algunos valores exactos para $d_\infty(p)$.

5.2 Grafos media-medibles

En esta sección vamos a definir la valencia media para un grafo infinito, perteneciendo dicho grafo a una familia que llamaremos media-medible. Como ejemplos de grafos media-medibles estudiaremos los árboles y otra familia de grafos que llamaremos semi-regulares. Para llegar a estos objetivos necesitamos algunas notaciones y definiciones previas.

Definición 5.2.1 Sea G un grafo infinito localmente finito y sea $\{G_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subgrafos finitos contenidos en G . Decimos que $\{G_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión creciente concéntrica (SCC) si:

- $G_n \subset G_{n+1}$ para todo n .
- $\partial G_n \cap \partial G_{n+1} = \emptyset$ para todo n .
- $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_n = G$,

donde $\partial G_n = \langle V(G_n) - V(G_{n-1}) \rangle_G$ denota la *frontera* de G_n .

Nota 5.2.2 Dado un grafo infinito G cualquiera y dado $v \in G$ siempre existe una SCC: denotemos por $G_n(v) = \langle \{u \in V(G) / d(u, v) \leq n\} \rangle_G$. Así, es fácil ver que la sucesión $\{G_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica las condiciones anteriores, teniendo en cuenta que $\partial G_n(v) = \langle \{u \in V(G) / d(u, v) = n\} \rangle_G$.

Definición 5.2.3 Dado un grafo G infinito localmente finito, llamaremos *valencia media inferior* de G y la denotaremos por $\underline{d}_\infty(G)$ a

$$\underline{d}_\infty(G) = \inf\{\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) / \forall v \in G\}$$

De la misma forma se define la *valencia media superior* como

$$\bar{d}_\infty(G) = \sup\{\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) / \forall v \in G\}$$

Definición 5.2.4 Sea G un grafo infinito localmente finito. Diremos que G es *media-medible* si $\underline{d}_\infty(G) = \bar{d}_\infty(G) < +\infty$. Además, es tal caso llamaremos *valencia media* de G y la denotaremos por $d_\infty(G) = \underline{d}_\infty(G) = \bar{d}_\infty(G)$.

Ejemplo 5.2.5 Consideremos el grafo infinito G que muestra la Figura 5.1. Sea v

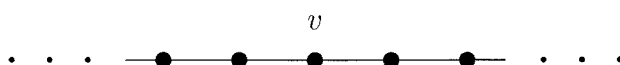


Figura 5.1: La valencia media de un 2-rayo es 2.

un vértice cualquiera de G y consideremos la sucesión $\{G_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Es inmediato que $|V(G_n(v))| = 2n + 1$ y $|E(G_n(v))| = 2n$. Así

$$d(G_n(v)) = \frac{2|E(G_n(v))|}{|G_n(v)|} = \frac{2 \cdot 2n}{2n + 1}.$$

Por tanto,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) = 2.$$

Como esto se verifica para cualquier vértice v de G entonces tenemos que

$$\underline{d}_\infty(G) = \bar{d}_\infty(G) = 2$$

y, por tanto, G es media-medible y $d_\infty(G) = 2$.

Ejemplo 5.2.6 Sea H el árbol que muestra la Figura 5.2, donde cada hijo tiene la valencia de su predecesor más una unidad. Consideremos la SCC $\{H_n(u)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Es fácil ver que

$$|V(H_n(u))| = \frac{2! + \dots + (n+2)!}{2}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que cada subgrafo finito $H_n(u)$ de H vuelve a ser un árbol, es evidente que

$$|E(H_n(u))| = |V(H_n(u))| - 1.$$

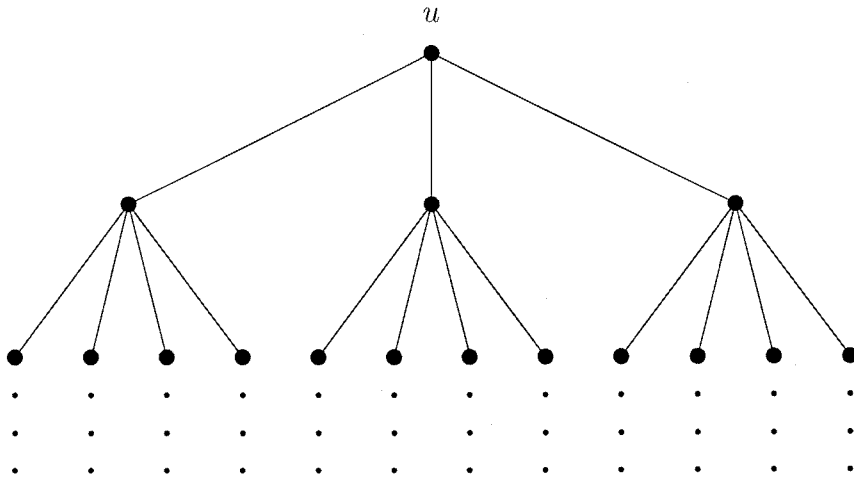


Figura 5.2: Árbol H de valencia creciente.

Tomando como base el grafo H anterior vamos a construir un grafo G de manera que $V(G) = V(H)$. Ahora bien, el nuevo grafo G además de las aristas de H esta formado por un conjunto de aristas de manera que:

$$\partial G_1(v) = K_3$$

y para $n \geq 2$

$$|E(\partial G_n(v))| = n|V(G_n(v))|.$$

En primer lugar veamos que está bien definido, es decir, que es posible construir con los vértices $V(\partial G_n(v))$ un subgrafo con $n|V(G_n(v))$ aristas: efectivamente, basta ver de forma inmediata, por inducción, que

$$n|V(G_n(v))| \leq \binom{|V(\partial G_n(v))|}{2},$$

es decir,

$$n \frac{2! + \dots + (n+2)!}{2} \leq \binom{(n+2)!}{2}.$$

Por otra parte, tal y como se ha construido el grafo G es fácil ver que

$$|V(G_n(v))| = \frac{2! + \dots + (n+2)!}{2}$$

y

$$|E(G(v))| = |V(G_n(v))| - 1 + 3 + 2|V(G_2(v))| + \dots + n|V(G_n(v))|.$$

Una vez estudiado el número de vértices y aristas de los grafos H y G , consideremos el grafo M construido de forma que $V(M) = V(H) \cup V(G) \cup \{w\}$ y $E(M) = E(H) \cup E(G) \cup \{(u, w), (v, w)\}$ (ver Figura 5.4).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores sobre los vértices y aristas de los grafos de las sucesiones $\{H_n(u)\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{G_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$ vamos a analizar las sucesiones $\{M_n(u)\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{M_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Comencemos por la sucesión $\{M_n(u)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Por definición de $M_n(u)$, para $n \geq 2$ se tiene que:

$$|V(M_n(u))| = |V(H_n(u))| + |V(G_{n-2}(v))| + 1$$

y

$$|E(M_n(u))| = |E(H_n(u))| + |E(G_{n-2}(v))| + 2.$$

Para determinar el límite de la sucesión $\{d(M_n(u))\}_{n \geq 2}$ basta, por definición de valencia media de un grafo finito, analizar el cociente $\frac{|E(M_n(u))|}{|V(M_n(u))|}$. Aplicando el

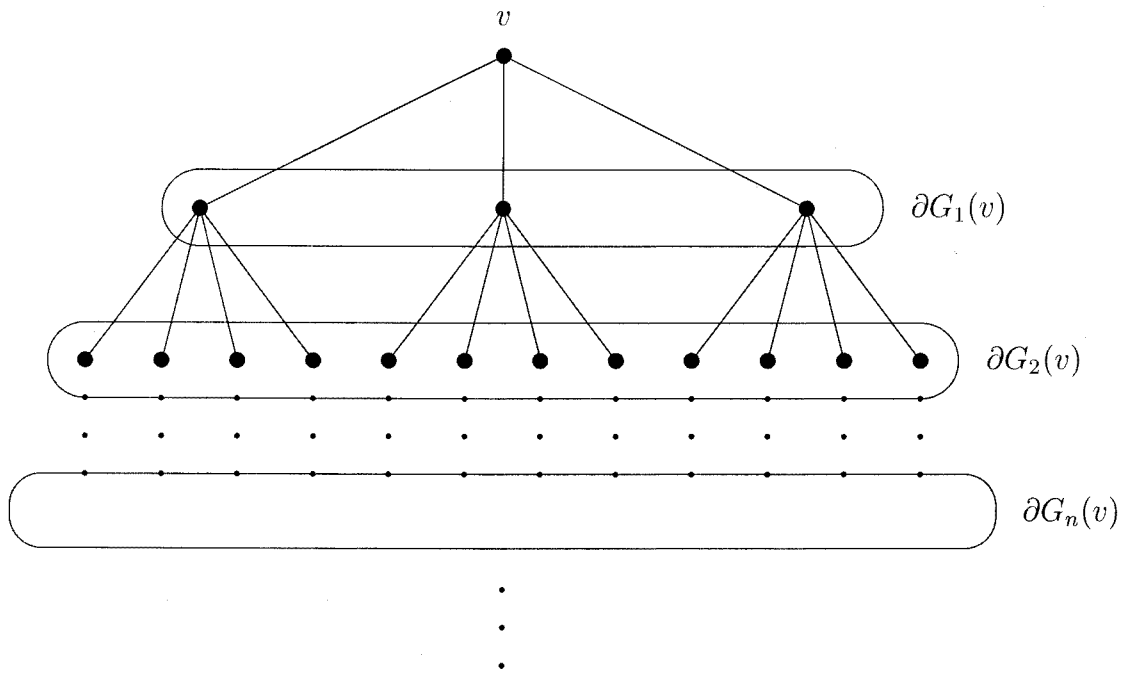


Figura 5.3: Grafo G obtenido de H .

criterio de Stolz se tiene que

$$\frac{|E(M_{n+1}(u))| - |E(M_n(u))|}{|V(M_{n+1}(u))| - |V(M_n(u))|} =$$

$$\frac{\frac{(n+3)!}{2} + \frac{(n+1)!}{2} + (n-1)\frac{2! + \dots + (n+1)!}{2}}{\frac{(n+3)!}{2} + \frac{(n+1)!}{2}} =$$

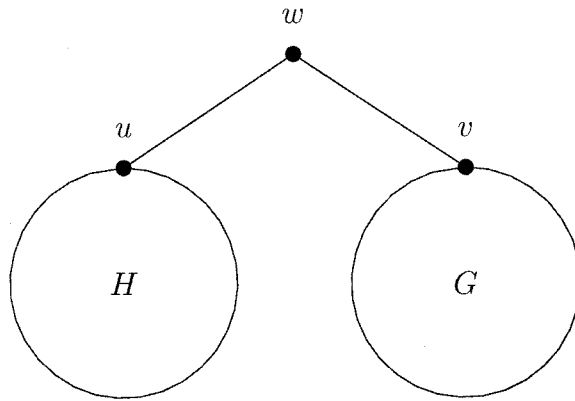
$$1 + \frac{(n-1)\frac{2! + \dots + (n+1)!}{2}}{\frac{(n+3)!}{2} + \frac{(n+1)!}{2}}.$$

Pero basta aplicar nuevamente el criterio de Stolz para probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2! + \dots + (n+1)!)}{(n+3)! + (n+1)!} = 0.$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{|E(M_n(u))|}{|V(M_n(u))|} = 2$$

Figura 5.4: Grafo M obtenido a partir de H y G .

y, por tanto, $\underline{d}_\infty(M) \leq 2$.

Veamos qué ocurre con la sucesión $\{M_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Con las mismas consideraciones anteriores se tiene que

$$|V(M_n(v))| = |V(H_{n-2}(u))| + |V(G_n(v))| + 1$$

y

$$|E(M_n(v))| = |E(H_{n-2}(u))| + |E(G_n(v))| + 2.$$

Como hicimos anteriormente para estudiar el límite de la valencia media de cada los subgrafos $M_n(v)$, aplicaremos el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned} \frac{|E(M_{n+1}(v))| - |E(M_n(v))|}{|V(M_{n+1}(v))| - |V(M_n(v))|} &= \\ 1 + \frac{(n+1) \frac{2! + \dots + (n+3)!}{2}}{\frac{(n+3)!}{2} + \frac{(n+1)!}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el criterio de Stolz, se puede ver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2! + \dots + (n+3)!)}{(n+3)! + (n+1)!} = +\infty.$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{|E(M_n(u))|}{|V(M_n(u))|} = +\infty$$

y, por tanto, $\bar{d}_\infty(M) = +\infty$. En consecuencia, M es un grafo no media-medible, donde $\underline{d}_\infty(M) \leq 2 < \bar{d}_\infty(M) = +\infty$.

Si retomamos el grafo H anteriormente descrito, podemos observar que la sucesión $\{H_n(u)\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica que $|E(H_n(u))| = |V(H_n(u))| - 1$ y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{|E(H_n(u))|}{|V(H_n(u))|} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{|V(H_n(u))|} = 2.$$

Pero esta propiedad del vértice u se tiene para cualquier otro vértice de H , por ser H un árbol. Así pues, podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 5.2.7 *Todo árbol T infinito localmente finito es media-medible y $d_\infty(T) = 2$.*

5.2.1 Grafos semi-regulares

Hasta el momento los únicos ejemplos de grafos media-medibles que hemos analizado son los árboles, pero es fácil comprobar que el grafo de la Figura 5.5 es un grafo media-medible de valencia media 4. Ya que si v es un vértice cualquiera de dicho grafo G , se tiene que

$$|V(G_n(v))| = (2n + 1)^2$$

y

$$|E(G_n(v))| = 2 \cdot 2n(2n + 1).$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(G_n(v)) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(2n + 1)}{(2n + 1)^2} = 4.$$

Observemos, además, que la frontera $\partial G_n(v)$ verifica, lo que denominaremos *condición de frontera*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} = \frac{8n}{(2n + 1)^2} = 0,$$

ya que

$$|V(\partial G_n(v))| = |V(G_n(v))| - |V(G_{n-1}(v))| = 8n.$$

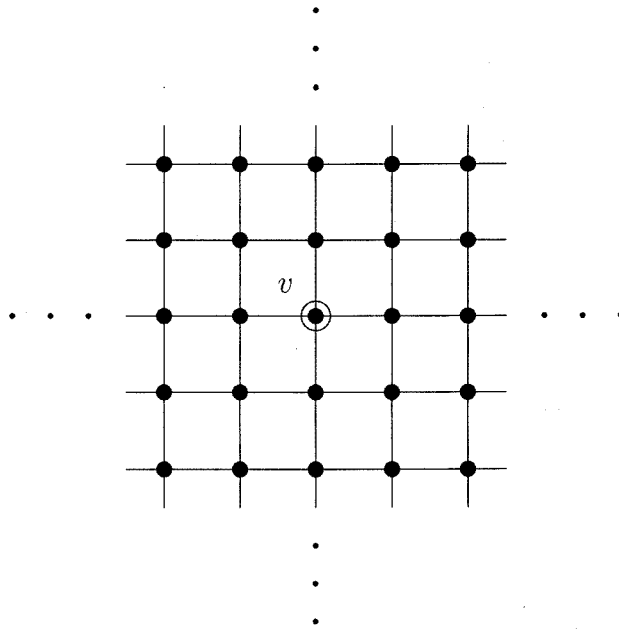


Figura 5.5: Grafo de valencia media 4.

Esta propiedad no es exclusiva de este grafo, sino que existe toda una familia de grafos, que denominaremos *semi-regulares*, que cumplen la *condición de frontera* y para los que probaremos que existe la valencia media.

Definición 5.2.8 Sea G un grafo infinito localmente finito. Dada una sucesión SCC $\{G_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, diremos que verifica la *condición de frontera* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|} = 0.$$

Nota 5.2.9 La condición de frontera $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|} = 0$ es equivalente a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1})|}{|V(G_n)|} = 1,$$

ya que

$$\frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|} = \frac{|V(G_n)| - |V(G_{n-1})|}{|V(G_n)|} = 1 - \frac{|V(G_{n-1})|}{|V(G_n)|}.$$

Definición 5.2.10 Sea G un grafo infinito localmente finito. Diremos que G es *semi-regular* si existe $v \in G$ tal que la SCC $\{G_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica la condición de frontera.

Veamos que la definición anterior no depende del vértice elegido, es decir, si para un vértice se cumple la condición de frontera, se cumple para cualquier otro.

Lema 5.2.11 Sea G un grafo semi-regular. Entonces para todo $v \in G$ la sucesión $\{G_n(v)\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica la condición de frontera, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} = 0$.

Demostración: Dado G un grafo semi-regular, por definición sabemos que existe un vértice v_0 tal que la SCC $\{G_n(v_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica la condición de frontera. Sea v otro vértice cualquiera de G y denotemos por r la distancia en G entre dichos vértices, es decir, $r = d(v, v_0)$. Para probar la condición de frontera, por la Nota 5.2.9, es equivalente ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(v))|}{|V(G_n(v))|} = 1.$$

Para ello, teniendo en cuenta la definición de las sucesiones $\{G_n(v_0)\}$ y $\{G_n(v)\}$ y la propiedad triangular de la distancia, para todo $n \geq r + 1$ se tiene que

$$G_{n-r-1}(v_0) \subseteq G_{n-1}(v)$$

y

$$G_n(v) \subseteq G_{n+r}(v_0).$$

Por tanto,

$$\frac{|V(G_{n-1}(v))|}{|V(G_n(v))|} \geq \frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|}.$$

Además,

$$\frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|} = \frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n-r}(v_0))|} \frac{|V(G_{n-r}(v_0))|}{|V(G_{n-r+1}(v_0))|} \dots \frac{|V(G_{n+r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|},$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n-r}(v_0))|} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ &\vdots \\ \frac{|V(G_{n+r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Es decir,

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(v))|}{|V(G_n(v))|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|} = 1.$$

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(v))|}{|V(G_n(v))|} = 1$ y se tiene el resultado. \otimes

Nota 5.2.12 Por un razonamiento similar al seguido en la demostración del lema anterior para ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-r-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|} = 1$, se prueba que si $\{G_n(v)\}$ es una sucesión SCC verificando la condición de frontera entonces para todo k entero se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_n(v))|}{|V(G_{n+k}(v))|} = 1.$$

El resultado del lema anterior se puede generalizar para otras sucesiones. Así, tal como definimos la sucesión $\{G_n(v)\}$ para v un vértice de un grafo G , dado un subgrafo $G_0 \subset G$ finito, podemos construir la sucesión SCC $\{G_n(G_0)\}_{n \geq 0}$ definida como sigue:

$$G_n(G_0) = \langle \{u \in V(G) / d(u, G_0) \leq n\} \rangle_G.$$

Para estas sucesiones se verifica el siguiente resultado:

Proposición 5.2.13 *Sea G un grafo infinito localmente finito. Entonces G es semi-regular si y solo si existe un subgrafo $G_0 \subset G$ finito verificando la condición de frontera, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} = 0$. Además, en tal caso, se verifica la condición de frontera para todo $G_0 \subset G$ finito.*

Demostración: Sea G un grafo infinito semi-regular. Sea $G_0 \subset G$ un subgrafo finito. Vamos a probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} = 0$. Para ello, sea $v_0 \in V(G_0)$ y denotemos por r al diámetro de G_0 , es decir, $r = \text{diam}(G_0)$. En estas condiciones, es fácil ver que

$$G_{n-1}(v_0) \subseteq G_{n-1}(G_0)$$

y

$$G_n(G_0) \subseteq G_{n+r}(v_0)$$

para todo n . Así se tiene que

$$\frac{|V(G_{n-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} \geq \frac{|V(G_{n-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{|V(G_{n-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} \leq 1$ y aplicando la Nota 5.2.12, se verifica que

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(v_0))|}{|V(G_{n+r}(v_0))|} = 1.$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} = 1$.

Para probar la otra implicación, supongamos que existe G_0 tal que la sucesión $\{G_n(G_0)\}$ verifica la condición de frontera. Sea como antes, $v_0 \in V(G_0)$ y $r = \text{diam}(G_0)$. Se tiene que

$$G_{n-r-1}(G_0) \subseteq G_{n-1}(v_0)$$

y

$$G_n(v_0) \subseteq G_n(G_0).$$

Por tanto,

$$\frac{|V(G_{n-1}(v_0))|}{|V(G_n(v_0))|} \geq \frac{|V(G_{n-r-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|}.$$

Razonando como en la Nota 5.2.12 se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-r-1}(G_0))|}{|V(G_n(G_0))|} = 1$$

y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_{n-1}(v_0))|}{|V(G_n(v_0))|} = 1,$$

lo que prueba el resultado. ⊗

A continuación vamos a probar que todo grafo semi-regular de valencia máxima acotada es media-medible.

Teorema 5.2.14 *Si G es un grafo infinito localmente finito tal que $\Delta(G) < +\infty$. Si G es semi-regular entonces G es media-medible.*

Demostración: Sea G infinito con $\Delta(G) = \Delta < +\infty$. Dado $v \in G$, consideremos la sucesión $G_n = G_n(v)$ para todo n natural. Como $\Delta(G) < +\infty$, sabemos que $d(G_n) \leq 2\Delta$. Para probar que $d(G_n)$ es convergente, veamos que $\{d(G_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. Para ello, vamos a probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(G_{n+1}) - d(G_n)| = 0$. Consideremos pues la sucesión $\{s_n\}$ como sigue

$$s_n = \left| \frac{|E(G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} - \frac{|E(G_n)|}{|V(G_n)|} \right| = \left| \frac{|E(G_{n+1})| \cdot |V(G_n)| - |E(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|}{|V(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|} \right|.$$

Si denotamos por

$$E(\partial G_n, \partial G_{n+1}) = \{(w_n, w_{n+1}) \in E(G) / w_n \in \partial G_n, w_{n+1} \in \partial G_{n+1}\}$$

entonces (ver Figura 5.6)

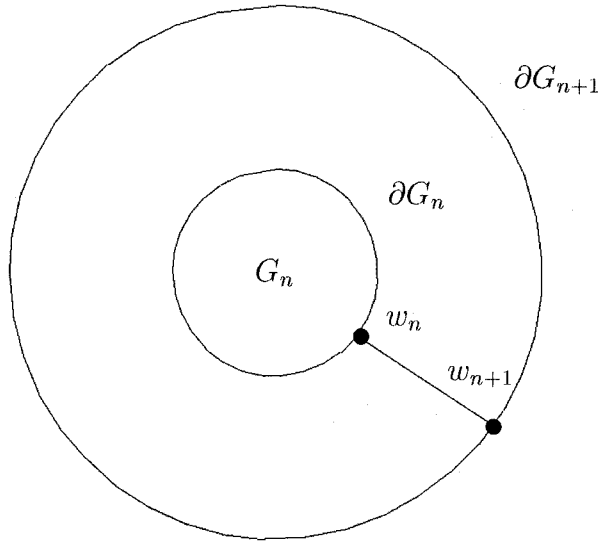


Figura 5.6: Descomposición de aristas de $E(G_{n+1})$.

$$|E(G_{n+1})| = |E(G_n)| + |E(\partial G_n, \partial G_{n+1})| + |E(\partial G_{n+1})|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} s_n &= \left| \frac{|V(G_n)| (|E(G_n)| + |E(\partial G_n, \partial G_{n+1})| + |E(\partial G_{n+1})|) - |E(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|}{|V(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|} \right| \\ &\leq \frac{|E(G_n)| \left| |V(G_n)| - |V(G_{n+1})| \right|}{|V(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|} + \frac{|E(\partial G_n, \partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} + \frac{|E(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} \end{aligned}$$

Pero,

$$\frac{|E(G_n)| \left| |V(G_n)| - |V(G_{n+1})| \right|}{|V(G_n)| \cdot |V(G_{n+1})|} \leq \Delta \frac{|V(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|},$$

$$\frac{|E(\partial G_n, \partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} \leq \frac{\Delta |V(\partial G_n)|}{|V(G_{n+1})|} \leq \Delta \frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|}$$

y

$$\frac{|E(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} \leq \Delta \frac{|V(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|}$$

Luego,

$$s_n \leq \Delta \frac{|V(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|} + \Delta \frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|} + \Delta \frac{|V(\partial G_{n+1})|}{|V(G_{n+1})|}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n)|}{|V(G_n)|} = 0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ y, en consecuencia, la sucesión $\{d(G_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es convergente.

Por último, para probar que $d_\infty(G) = \bar{d}_\infty(G)$, veamos que para cada $u \in V(G)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E(G_n(u))|}{|V(G_n(u))|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E(G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} = t$. Así pues, sea $u \in V(G)$ y sea $r = d_G(u, v)$. Así,

$$\begin{aligned} t_n &= \left| \frac{|E(G_n(u))|}{|V(G_n(u))|} - \frac{|E(G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} \right| \\ &= \left| \frac{|E(G_n(u))| \cdot |V(G_n(v))| - |E(G_n(v))| \cdot |V(G_n(u))|}{|V(G_n(u))| \cdot |V(G_n(v))|} \right|. \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que

$$G_{n-r}(v) \subseteq G_n(u) \subseteq G_{n+r}(v)$$

para $n \geq r$, se tiene que

$$\begin{aligned} t_n &\leq \left| \frac{|E(G_{n+r}(v))| \cdot |V(G_n(v))| - |E(G_n(v))| \cdot |V(G_{n-r}(v))|}{|V(G_{n-r}(v))| \cdot |V(G_n(v))|} \right| \\ &= \left| \frac{|E(G_{n+r}(v))|}{|V(G_{n-r}(v))|} - \frac{|E(G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} \right| \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(G_n(v))|}{|V(G_{n+1}(v))|} = 1$$

y

$$\frac{|E(G_{n+r}(v))|}{|V(G_{n-r}(v))|} = \frac{|E(G_{n+r}(v))|}{|V(G_{n+r}(v))|} \frac{|V(G_{n+r}(v))|}{|V(G_{n+r-1}(v))|} \dots \frac{|V(G_{n-r+1}(v))|}{|V(G_{n-r}(v))|}$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E(G_{n+r}(v))|}{|V(G_{n-r}(v))|} = t$$

y, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, lo que prueba el resultado. \otimes

Nota 5.2.15 En el teorema es necesaria la condición $\Delta(G) < +\infty$, ya que el grafo G que muestra la Figura 5.7 es un grafo semi-regular pero no media-medible. Dicho grafo, está construido de forma que el subgrafo ∂G_n es el grafo completo

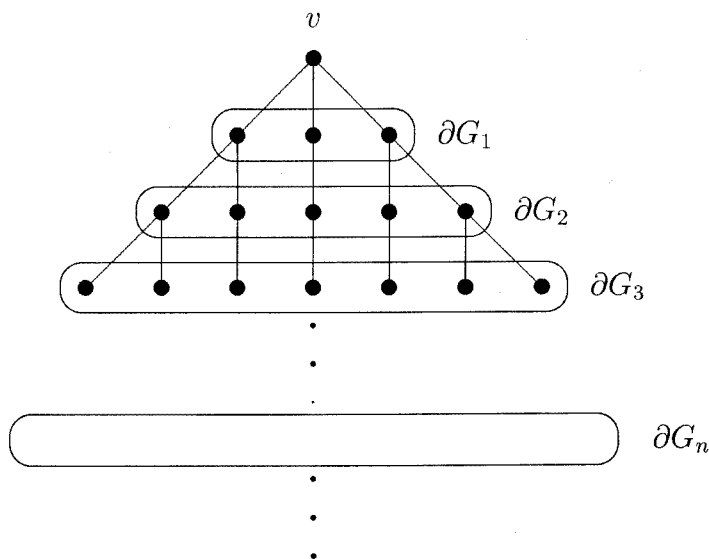


Figura 5.7: Grafo con $\Delta(G) = +\infty$, semi-regular pero no media-medible.

de tamaño $2n + 1$, para $n \geq 1$. De esta forma,

$$|V(G_n(v))| = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$$

y

$$|E(G_n(v))| = 3 + 5 + \dots + (2n + 1) + \binom{3}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{2n + 1}{2}.$$

En primer lugar, G es semi-regular ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial G_n(v))|}{|V(G_n(v))|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+3+5+\dots+(2n+1)} = 0.$$

Por otra parte, para calcular el límite del cociente $\frac{|E(G_n(v))|}{|V(G_n(v))|}$, apliquemos el criterio de Stolz:

$$\frac{|E(G_{n+1}(v))| - |E(G_n(v))|}{|V(G_{n+1}(v))| - |V(G_n(v))|} = \frac{2n+3 + \binom{2n+3}{2}}{2n+3} = +\infty.$$

Por tanto, $\bar{d}_\infty(G) = +\infty$ y G no es media-medible.

Nota 5.2.16 Es fácil ver que no todo grafo media-medible es semi-regular. Basta para ello considerar el grafo H del Ejemplo 5.2.6. Este grafo, por ser un árbol, es media-medible, pero no es semi-regular ya que:

$$\frac{|V(\partial H_n(u))|}{|V(H_n(u))|} = \frac{|V(H_n(u))| - |V(H_{n-1}(u))|}{|V(H_n(u))|} = \frac{(n+2)!}{2! + \dots + (n+2)!}.$$

Aplicando el criterio de Stolz se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+3)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1 \neq 0$$

y, por tanto, la sucesión $\{H_n(u)\}$ no verifica la condición de frontera y H no puede ser semi-regular.

Una familia importante de grafos semi-regulares son los grafos periódicos¹. Dichos grafos son de gran utilidad por su facilidad de tratamiento computacional (ver [9]). Ejemplos de grafos periódicos podemos encontrarlos en los mosaicos y patrones [22], diagramas de Cayley [8] y [19], e incluso aparecen como grafos resultantes de resolver sistemas de ecuaciones [3].

Veamos que realmente los grafos periódicos son semi-regulares y, por tanto, al tener valencia máxima acotada, serán media-medibles.

¹Salvo que digamos lo contrario, llamaremos grafo periódico al grafo periódico 2-dimensional. Recordemos que un grafo periódico 2-dimensional es un grafo generado por copias de un grafo finito, por traslaciones que recubren el plano.

Proposición 5.2.17 *Todo grafo infinito periódico \mathcal{M}_G conexo generado por un grafo célula G es semi-regular y media-medible.*

Demostración: Sea G un grafo célula y consideremos el grafo periódico $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G$ generado por G . Para probar que es semi-regular, por la Proposición 5.2.13, es suficiente probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{|V(\mathcal{M}_n(G))|} = 0,$$

donde recordemos que $\{\mathcal{M}_n(G)\}$ está definida como

$$\mathcal{M}_n(G) = \langle u \in V(\mathcal{M}) / d(u, G)_{\mathcal{M}} \leq n \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Para ello sea $d = \max\{d(u, G) / u \in G_i, 1 \leq i \leq 8\}$, donde G_i son los 8-vecinos de G . En primer lugar, para cada $n \geq d$ se verifica que (ver Figura 5.8):

$$\prod_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} G \subseteq \mathcal{M}_n(G) \subseteq \prod_n G,$$

ya que si $v \in \prod_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} G$ entonces (ver Figura 5.9)

$$d(u, G) \leq d + d(u, \prod_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} G) \leq \dots \leq d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leq n.$$

Así,

$$\frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{|V(\mathcal{M}_n(G))|} \leq \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{|V(\prod_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} G)|} \leq \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{\left(2 \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1\right)^2 |V(G)|}.$$

Por otra parte, para cada $n \geq 1$, sea $k(n) = |V(\partial \mathcal{M}_n(G))|$. Como

$$V(\mathcal{M}_n(G)) = \bigcup_{i=0}^n V(\partial \mathcal{M}_i(G)) \subseteq V(\prod_n G),$$

se tiene que

$$s_n = k(1) + k(2) + \dots + k(n) \leq (2n + 1)^2 |V(G)|.$$

Supongamos que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n)}{n^2} = l$ con $l > 0$. Aplicando el criterio de Stolz al cociente $\frac{s_n}{(2n + 1)^2}$ se tiene que

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2} = \frac{k(n + 1)}{8n + 9} = \frac{k(n + 1)}{(n + 1)^2} \frac{(n + 1)^2}{8n + 9}$$

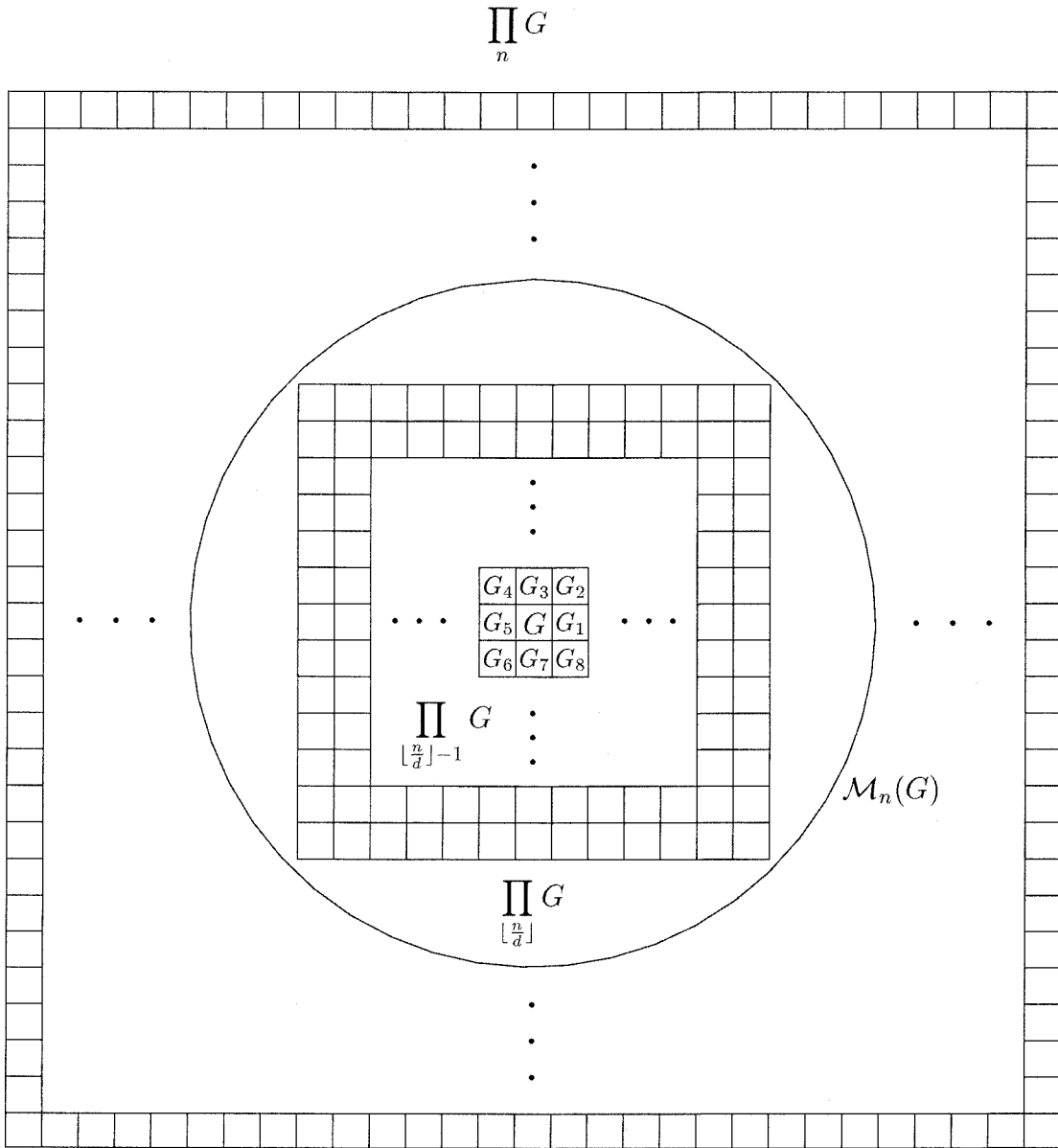


Figura 5.8: Cadena de contenciones para $\mathcal{M}_n(G)$.

y, por tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{(2n+1)^2 |V(G)|} = \frac{1}{|V(G)|} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n+1)(n+1)^2}{(n+1)^2 8n+9} = +\infty.$$

Pero esto es una contradicción, ya que estábamos suponiendo que

$$\frac{s_n}{(2n+1)^2 |V(G)|} \leq 1.$$

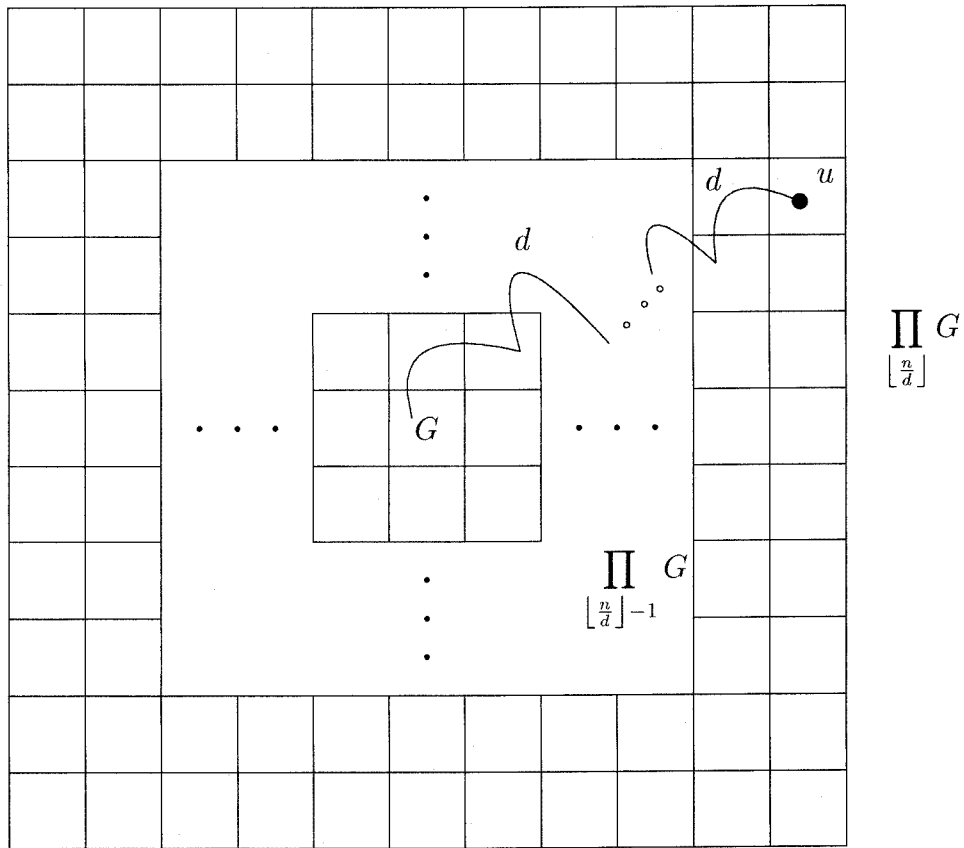


Figura 5.9: $\prod_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} G \subseteq \mathcal{M}_n(G)$.

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n)}{n^2} = 0$ y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{\left(2 \lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1\right)^2 |V(G)|} \leq \frac{1}{|V(G)|} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n)}{n^2} \frac{n^2}{\left(2 \left(\frac{n}{d} - 1\right) + 1\right)^2} = 0.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{|V(\mathcal{M}_n(G))|} = 0$$

y, por tanto, \mathcal{M} es semi-regular. Además, al ser \mathcal{M} un grafo periódico se verifica que $\Delta(\mathcal{M}) < +\infty$ y, aplicando el Teorema 5.2.14 se tiene que \mathcal{M} es media-medible. \otimes

Ejemplo 5.2.18 Consideremos el grafo periódico \mathcal{M} generado por el grafo célula

G , como muestra la Figura 5.10. Como \mathcal{M} es conexo, aplicando el resultado

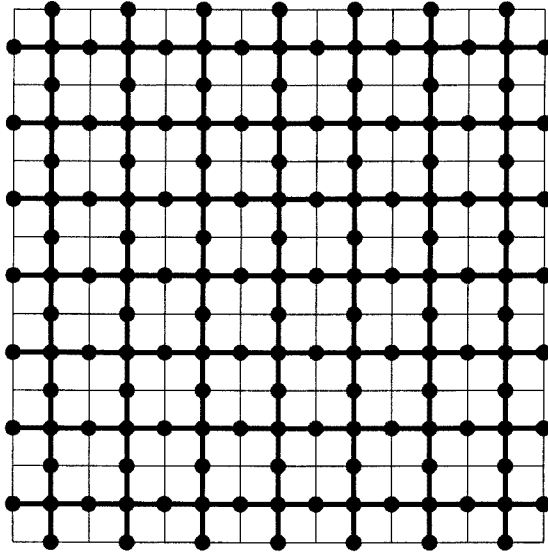
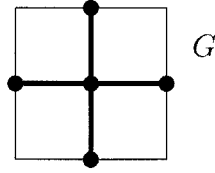


Figura 5.10: Grafo periódico de valencia media $\frac{8}{3}$.

anterior sabemos que es media-medible. Consideremos la sucesión $\{\mathcal{M}_n(G)\}$. Por ser convergente la sucesión $\{d(\mathcal{M}_n(G))\}$, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathcal{M}_n(G)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathcal{M}_{2n}(G)).$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$|V(\mathcal{M}_{2n}(G))| = 5 + 16 + 6(4 + 8 + \cdots + 2^n)$$

y

$$|E(\mathcal{M}_{2n}(G))| = 4 + 16 + 8(4 + 8 + \cdots + 2^n)$$

y, por tanto, aplicando el criterio de Stolz se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathcal{M}_{2n}(G)) = \frac{8}{3}.$$

Como otro caso de grafo periódico, podemos considerar los grafos periódicos 1-dimensionales, que vienen generados por un grafo célula G y por traslaciones horizontales G_i de éste (ver Figura 5.11). A dichos grafos se les denota por \mathcal{M}_G^1 . Además, para cada $v \in V(G)$ denotaremos por v_i al trasladado de v en G_i , para cada i entero. Con estas notaciones podemos enunciar el siguiente resultado:

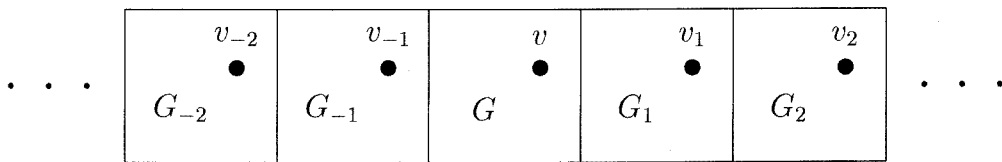


Figura 5.11: Grafo periódico 1-dimensional generado por G .

Proposición 5.2.19 *Sea G un grafo célula finito. Si \mathcal{M}_G^1 es conexo entonces es semi-regular y, por tanto, media-medible.*

Demostración: Sea G un grafo finito tal que $M = \mathcal{M}_G^1$ es conexo. Consideremos la sucesión $\{M_n(G)\}_{n \in \mathbf{N}}$ y sea $d = \text{diam}(G)$. Estudiemos el cardinal de $V(\partial M_n(G))$. Para ello, sea $v_k \in V(G_k)$ tal que $d(v_k, G)_M = n$, donde $k = \min\{i > 0 / d(v_i, G) = n\}$. Entonces para todo $i \geq k + d + 1$ se tiene que $d(v_i, G) \geq n + 1$, ya que, si suponemos que $d(v_i, G) \leq n$, como $d(v_i, G_k) \geq i - k$ (ver Figura 5.12), se tiene que existe $w_k \in V(G_k)$ tal que $d(v_i, w_k) \geq i - k$ y, por tanto,

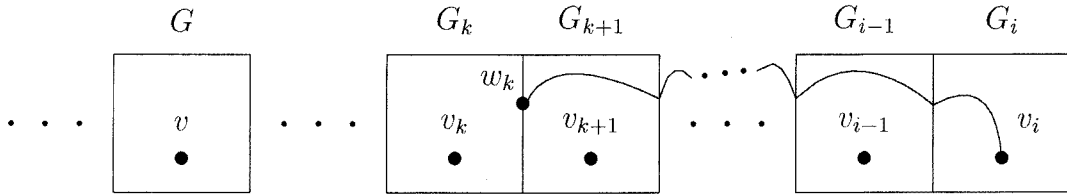
$$d(w_k, G) \leq d(v_i, G) - d(v_i, w_k) \leq n - i + k \leq n - d - 1.$$

Pero

$$d(v_k, G) \leq d(v_k, w_k) + d(w_k, G) \leq d + n - d - 1 = n - 1,$$

que no es posible, ya que $d(v_k, G) = n$. Procediendo de forma análoga para $k < 0$, se tiene que

$$|V(\partial M_n(G))| \leq 2(d + 1)|V(G)|$$

Figura 5.12: Camino en M desde v_i a G_k .

y, por tanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V(\partial \mathcal{M}_n(G))|}{|V(\mathcal{M}_n(G))|} = 0$, ya que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |V(\mathcal{M}_n(G))| = +\infty$, lo que prueba el resultado. \otimes

5.3 Estudio de la función $d_\infty(\mathbf{p})$.

Como ya hemos puesto de manifiesto en la introducción de este capítulo, vamos a intentar extender los problemas extremales planteados en los capítulos anteriores para grafos infinitos. Como para dichos grafos, no tiene sentido estudiar el número de aristas frente al número de vértices, por ambos infinitos, no podemos extender la función $ex(n; TK_p)$. Sin embargo, si vemos un grafo infinito como límite de grafos finitos, la función anterior sí que tiene sentido. Es decir, dado un grafo infinito G buscamos alguna condición, relacionada con la función $ex(n; TK_p)$, de forma que nos garantice en G la existencia de un subgrafo homeomorfo a K_p . Ahora bien, al tomar límite, para pasar de grafos finitos a infinitos, debemos buscar una condición independiente del número de vértices, ésto es, la función $d(p)$.

Recordemos que si H es un grafo finito con $d(H) > d(p)$ entonces $H \supseteq TK_p$, donde $d(p) = \inf\{t / \forall H, d(H) \geq t \implies H \supseteq TK_p\}$. Este concepto es fácilmente extensible a grafos infinitos, de manera que podemos dar la siguiente definición:

Definición 5.3.1 Sea p un entero positivo. Llamaremos $d_\infty(p)$ a la función

$$d_\infty(p) = \inf\{t / \forall G \text{ media-medible}, d_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\}.$$

En la definición anterior, al intervenir la valencia media de un grafo infinito nos obliga a exigir que dicho grafo sea media-medible. Pero esta definición puede extenderse, sin estas restricciones, de la siguiente forma:

Definición 5.3.2 Sea $p \in \mathbf{N}$. Denotaremos por $\underline{d}_\infty(p)$ y $\bar{d}_\infty(p)$ a las siguientes funciones:

$$\underline{d}_\infty(p) = \inf\{t / \forall G \text{ infinito, } \underline{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\}$$

y

$$\bar{d}_\infty(p) = \inf\{t / \forall G \text{ infinito, } \bar{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\}$$

Como consecuencia de las definiciones anteriores es evidente que $d_\infty(p) \leq \underline{d}_\infty(p)$, ya que si G es un grafo infinito media-medible y

$$t \in \{t / \forall G \text{ infinito, } \underline{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\}$$

entonces, si $d_\infty(G) \geq t$, como $\underline{d}_\infty(G) = d_\infty(G) \geq t$ se tiene que $TK_p \subset G$. Es decir,

$$\{t / d_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\} \supseteq \{t / \underline{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\}$$

y, por tanto, por definición de $d_\infty(p)$ y $\underline{d}_\infty(p)$ se verifica que $d_\infty(p) \leq \underline{d}_\infty(p)$.

Del mismo modo, como $\underline{d}_\infty(G) \leq \bar{d}_\infty(G)$, si

$$t \in \{t / \forall G \text{ infinito, } \bar{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset TK_p\},$$

entonces si $\underline{d}_\infty(G) \geq t$, como $\bar{d}_\infty(G) \geq \underline{d}_\infty(G) \geq t$ se tiene que $G \supset TK_p$ y, en consecuencia, $\underline{d}_\infty(p) \leq \bar{d}_\infty(p)$.

A continuación vamos a probar un resultado que nos va a relacionar las funciones anteriormente definidas con la función $d(p)$. Además, este mismo resultado nos va a permitir afirmar que dichas funciones están bien definidas y son finitas.

Teorema 5.3.3 Sea p un número natural. Se verifica que

$$d(p) - 1 \leq d_\infty(p) \leq \underline{d}_\infty(p) \leq \bar{d}_\infty(p) \leq d(p).$$

Demostración: Veamos en primer lugar que $d(p) - 1 \leq d_\infty(p)$. Para probar esta desigualdad es suficiente ver que para todo grafo G finito con $d(G) \geq d_\infty(p) + 1$ se tiene que $G \supset TK_p$ y así, por definición de $d(p)$, tendríamos que $d(p) \leq d_\infty(p) + 1$.

Para ello, sea G un grafo finito y sean u y v vértices de G tales que $d(u, v) = \text{diam}(G) = d$. Consideremos el grafo G^* , definido de forma que

$$V(G^*) = V(G) \cup \{\alpha, \beta\}$$

y

$$E(G^*) = E(G) \cup \{(\alpha, u), (\beta, v)\}.$$

Sea $M = \mathcal{M}_G^1$ el grafo periódico 1-dimensional generado por G^* (ver Figura 5.13). Por la Proposición 5.2.19 sabemos que M es media-medible, por tanto, para

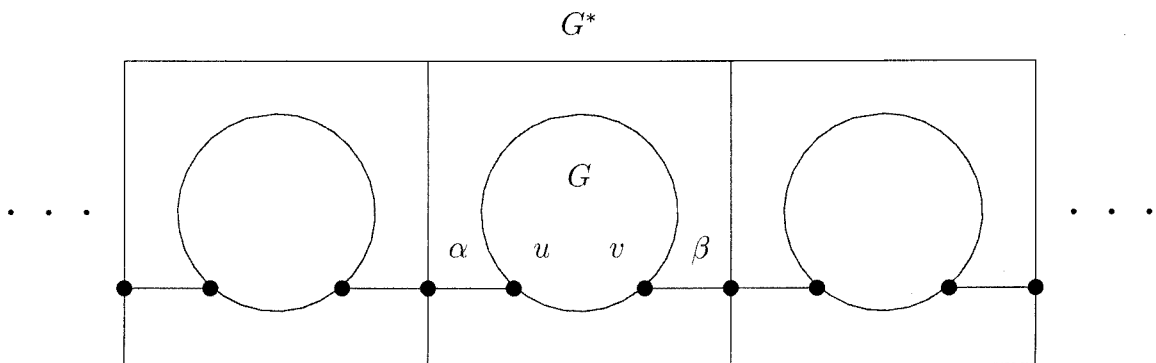


Figura 5.13: Grafo M generado por G^* .

calcular su valencia media consideremos la subsucesión $\{M_{(d+2)n}(G^*)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Como $d_{G^*}(\alpha, \beta) = d + 2$, se tiene que

$$|V(M_{(d+2)n}(G^*))| = |V(G^*)| + 2n(|V(G^*)| - 1) = 2 + |V(G)| + 2n(|V(G)| + 1)$$

y

$$|E(M_{(d+2)n}(G^*))| = |E(G^*)| + 2n|E(G^*)| = 2 + |E(G)| + 2n(|E(G)| + 2).$$

Luego,

$$\begin{aligned} d_\infty(M) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{|E(M_{(d+2)n}(G^*))|}{|V(M_{(d+2)n}(G^*))|} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + |E(G)| + 2n(|E(G)| + 2)}{2 + |V(G)| + 2n(|V(G)| + 1)} \\ &= 2 \frac{|E(G)| + 2}{|V(G)| + 1}. \end{aligned}$$

Así

$$d_\infty(M) = \frac{|E(G)| + 2}{|V(G)| + 1} > 2 \frac{|E(G)|}{|V(G)|} - 1 \geq d_\infty(p)$$

ya que

$$\frac{|E(G)| + 2}{|V(G)| + 1} > 2 \frac{|E(G)|}{|V(G)|} - 1 \iff |E(G)| < \frac{|V(G)|^2 + 5|V(G)|}{2}.$$

Pero

$$|E(G)| \leq \frac{|V(G)|(|V(G)| - 1)}{2}$$

y

$$\frac{|V(G)|(|V(G)| - 1)}{2} < \frac{|V(G)|^2 + 5|V(G)|}{2} \iff |V(G)| > 0.$$

Por tanto, por definición de $d_\infty(p)$, se tiene que $M \supset TK_p$. Pero por construcción de M , si $M \supset TK_p$ entonces $G \supset TK_p$. En consecuencia, si $d(G) \geq d_\infty(p) + 1$ se verifica que $G \supset TK_p$, lo que prueba que $d(p) \leq d_\infty(p) + 1$.

Para probar que $\bar{d}_\infty(p) \leq d(p)$, supongamos por reducción al absurdo lo contrario. Sean a, b números reales tales que $\bar{d}_\infty(p) > a > b > d(p)$. Sea G un grafo infinito y supongamos que $\bar{d}_\infty(G) \geq a$. Dado $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, por definición de $\bar{d}_\infty(G)$, existe $v \in G$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) \geq \bar{d}_\infty(G) - \varepsilon.$$

Además, dado ε , por definición de límite superior, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$d(G_{n_0}(v)) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(G_n(v)) - \varepsilon \geq \bar{d}_\infty(G) - 2\varepsilon.$$

Por tanto,

$$d(G_{n_0}(v)) \geq a - a + b > d(p).$$

Pero, por definición de $d(p)$ se tiene que $G_{n_0}(v) \supset TK_p$ y, en consecuencia $G \supset TK_p$. Luego, por definición de $\bar{d}_\infty(p)$ se tendría que $\bar{d}_\infty(p) \leq a < \bar{d}_\infty(p)$, que es una contradicción. \otimes

Como ya se puso de manifiesto en la Sección 3.5.1 sólo se conocen valores exactos de $d(p) = 2(p - 2)$ para $p \leq 5$. A continuación vamos a probar que $d_\infty(p) = d(p)$ para dichos valores.

Sea T un árbol cualquiera. Por la Proposición 5.2.7 sabemos que T es media-medible y $d_\infty(T) = 2$. Además, es evidente que T no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_3 , y, por tanto, $d_\infty(3) \geq 2$. Pero por el Teorema 5.3.3 anterior se tiene que

$$d_\infty(3) = \underline{d}_\infty(3) = \bar{d}_\infty(3) = d(3) = 2.$$

Para probar que $d_\infty(4) = d(4)$ consideremos el grafo G que muestra la Figura 5.14. Es evidente que G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a

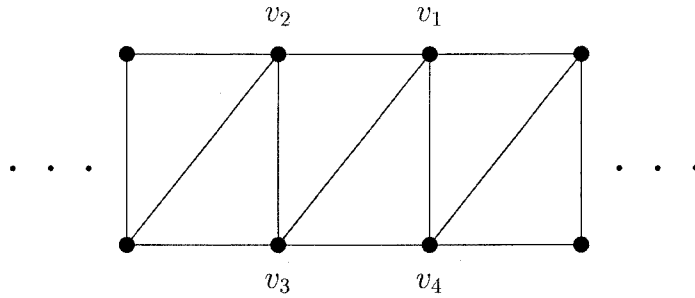


Figura 5.14: Grafo media-medible con $d_\infty(G) = 4$.

K_4 . Además, si denotamos por H al subgrafo generado en G por los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 , y consideramos la sucesión $\{G_n(H)\}_{n \in \mathbf{N}}$, se tiene que

$$|V(G_n(H))| = 4(n + 1)$$

y

$$|E(G_n(H))| = 5 + 6 + 8(n - 1).$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V(\partial G_n(H))|}{|V(G_n(H))|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(n + 1) - 4n}{4(n + 1)} = 0.$$

Así G es media-medible y $d_\infty(G) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{|E(G_n(H))|}{|V(G_n(H))|} = 4$. En consecuencia, $d_\infty(4) \geq 4$ y teniendo en cuenta que $d(4) = 4$, aplicando el Teorema 5.3.3 se tiene que $d_\infty(4) = d(4) = 4$.

Para el caso $p = 5$, consideremos el grafo G que muestra la Figura 5.15. Como admite una representación plana (ver Figura 5.16), aplicando el Teorema

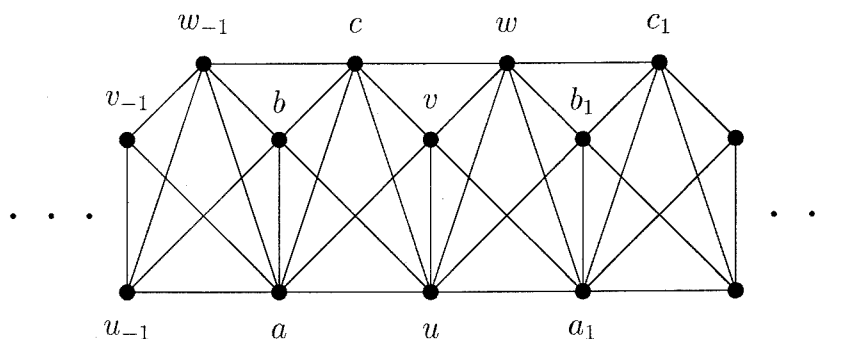


Figura 5.15: Grafo media-medible con $d_\infty(G) = 5$.

de Kuratowski para grafos infinitos sobre planaridad², dado por G.A. Dirac y S. Schuster [16], sabemos que $G \not\cong TK_5$.

Veamos que es media-medible y que $d_\infty(G) = 6$. Para ello, sea $H = \langle \{a, b, c, u, v\} \rangle_G$ y consideremos la SCC $\{G_n(H)\}$. Es fácil ver que

$$|V(G_n(H))| = 5 + 6n$$

y

$$|E(G_n(H))| = 9 + 18n.$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V(\partial G_n(H))|}{|V(G_n(H))|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{5 + 6n} = 0$$

y, por tanto, G es media-medible y

$$d_\infty(G) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{|E(G_n(H))|}{|V(G_n(H))|} = 6.$$

Luego, $d_\infty(5) = d(5) = 6$. Podemos concluir que

Teorema 5.3.4 Si $p \leq 5$ se tiene que

$$d_\infty(p) = \underline{d}_\infty(p) = \bar{d}_\infty(p) = d(p) = 2(p - 2).$$

²Un grafo infinito conexo es plano si y sólo si cada subgrafo suyo finito es plano.

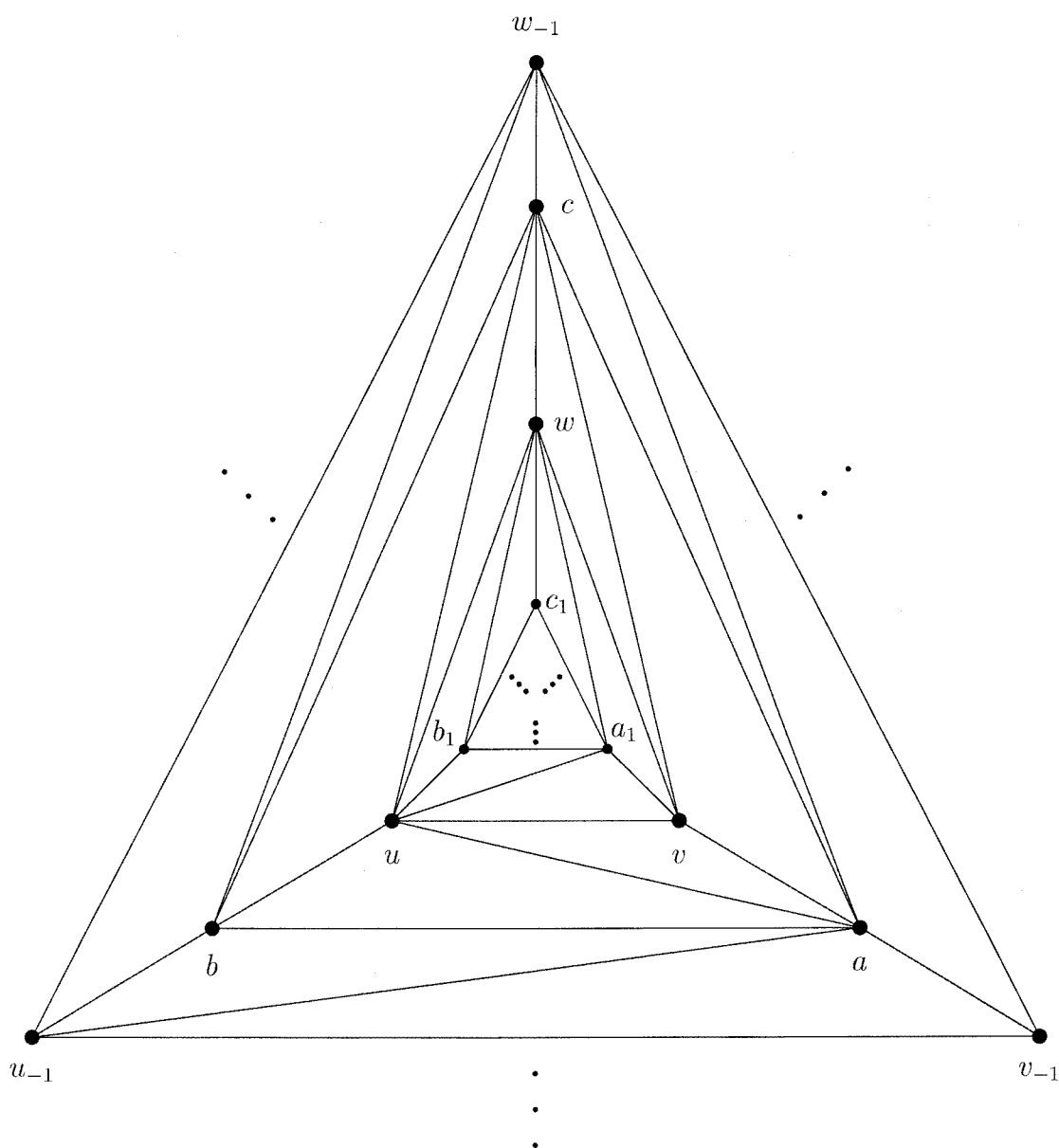


Figura 5.16: Representación plana del grafo de la Figura 5.15.

Hasta el momento no hemos encontrado ningún ejemplo que nos lleve a pensar que para algún p se tenga que $d_\infty(p) \neq d(p)$. Ésto nos lleva a conjeturar que las dos funciones son iguales.

5.4 Conclusiones y problemas abiertos

Con la idea de generalizar los problemas extremales planteados en los capítulos precedentes, hemos encontrado un concepto de valencia media $d_\infty(G)$ para grafos infinitos. Este concepto lo hemos definido a partir de una sucesión de grafos finitos, de forma que la valencia media del grafo infinito herede las propiedades de la valencia media para grafos finitos. Ésto nos ha llevado a la definición de valencia media para una familia de grafos infinitos que hemos denominado media-medibles. Entre los grafos de esta familia hemos encontrado los árboles y otra familia que hemos llamado semi-regular, con valencia máxima acotada, dentro de la cual se encuentran los grafos periódicos (ver Figura 5.17).

Con los conceptos previamente expuestos, hemos extendido la definición de la función $d(p)$ para grafos infinitos, $d_\infty(p)$, y hemos probado de forma general que $d(p) - 1 \leq d_\infty(p) \leq d(p)$, llegando a probar que $d_\infty(p) = d(p) = 2(p - 2)$ para $p \leq 5$.

Por último, notemos que si F es un grafo finito cualquiera y definimos las funciones

$$d(F) = \inf\{t / \forall H \text{ finito}, d(H) \geq t \implies H \supseteq F\},$$

$$d_\infty(F) = \inf\{t / \forall G \text{ media-medible}, d_\infty(G) \geq t \implies G \supset F\},$$

$$\underline{d}_\infty(F) = \inf\{t / \forall G \text{ infinito}, \underline{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset F\}$$

y

$$\bar{d}_\infty(F) = \inf\{t / \forall G \text{ infinito}, \bar{d}_\infty(G) \geq t \implies G \supset F\},$$

el Teorema 5.3.3 se puede enunciar de forma general, sin más que cambiar TK_p por F en la demostración, como:

Teorema 5.4.1 *Sea p un número natural. Se verifica que*

$$d(F) - 1 \leq d_\infty(F) \leq \underline{d}_\infty(F) \leq \bar{d}_\infty(F) \leq d(F).$$

Así, como problemas abiertos, por una parte, podemos encontrar valores de $d_\infty(F)$ para grafos F de manera que $d(F)$ sea conocido, como por ejemplo, para $F = K_p, MH$ (grafos contractibles a H), ... Avanzar en este sentido nos puede

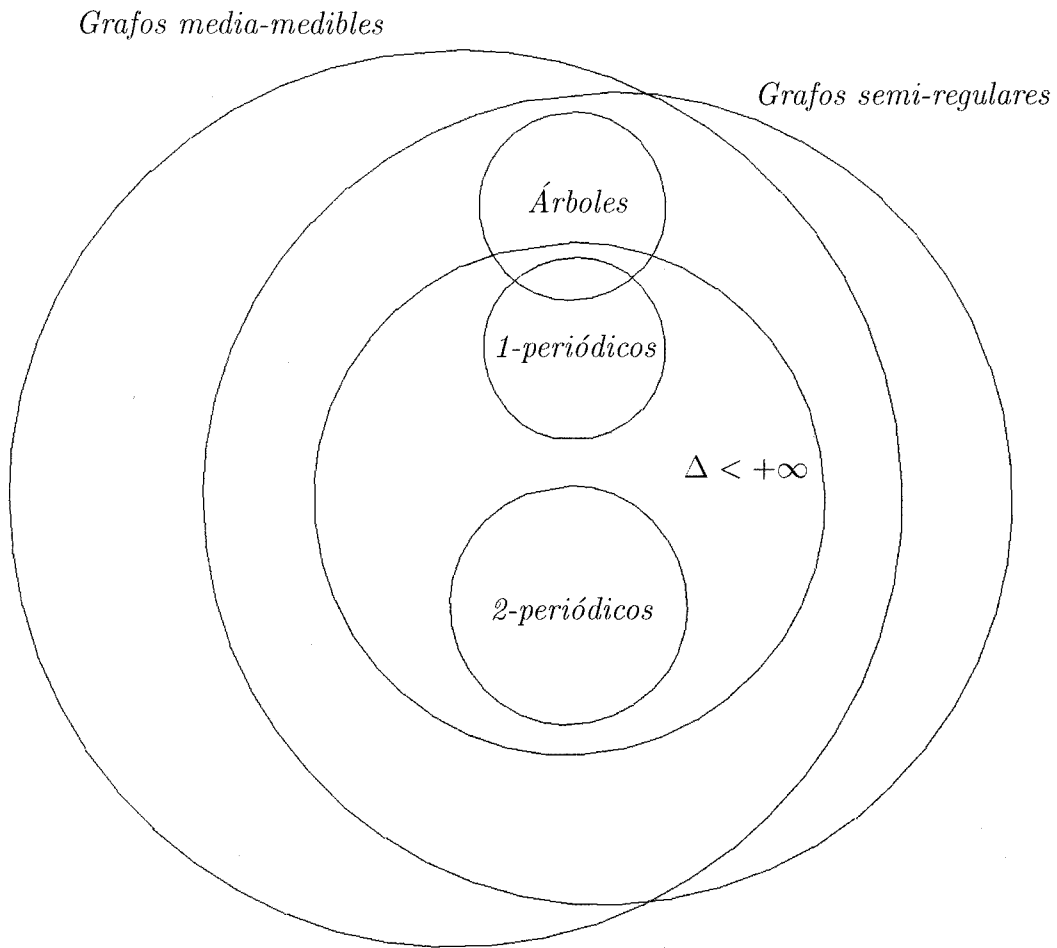


Figura 5.17: Relaciones entre los grafos media-medibles.

aportar alguna información que nos lleve a afirmar o negar que $d(F) = d_\infty(F)$ para todo F .

Por otra parte, podemos intentar cotas para la función $d_\infty(F)$, de manera que dichas cotas mejoren los resultados conocidos para el caso finito $d(F)$. Así podemos seguir estudiando $d_\infty(p)$ para $p \geq 6$, $d_\infty(TK_p^-)$...

Bibliografía

- [1] K. Appel y W. Haken. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part I: discharging*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [2] K. Appel, W. Haken y J. Koch. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part II: reducibility*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [3] M. Bauderon. *On System of Equations Defining Infinite Graphs*. C.N.R.S. prc. Mathematiques et Informatique.
- [4] N.L. Biggs, E.K. Lloyd y R.J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Claredon Press, Oxford, 1976.
- [5] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1978.
- [6] B. Bollobás y A. Thomason. Topological complete subgraphs. *Enviado a European Journal of Combinatorics*.
- [7] P.A. Catlin. Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *J. Combinatorial Theory B*, 26:268–274, 1979.
- [8] A. Cayley. The theory of groups, graphical representation. *Mathematical Papers, Cambridge*, 10:26–28, 1895.
- [9] J.C. Dana. *Grafos Periódicos: Una Familia de Grafos Infinitos que Admite una Algorítmica Constructiva*. Tesis Doctoral, 1994.
- [10] R. Diestel. *Graph Decompositions*. Oxford Science Publications, Oxford, 1990.
- [11] R. Diestel. Graph theory. En *Graduate Texts in Mathematics*, volumen 173. Springer-Verlag, 1997.

- [12] G.A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.*, 27:85–92, 1952.
- [13] G.A. Dirac. In abstrakten graphen vorhandene vollständige 4-graphen und ihre unterteilungen. *Math. Nachr.*, 22:61–85, 1960.
- [14] G.A. Dirac. Homomorphism theorems of graphs. *Math. Ann.*, 153:69–80, 1964.
- [15] G.A. Dirac. Chromatic number and topological complete subgraphs. *Canad. Math. Bull.*, 8:711–715, 1965.
- [16] G.A. Dirac y S. Schuster. A theorem of Kuratowski. *Indag Math.*, 16:343–348, 1954.
- [17] P. Erdős y A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, 7:143–149, 1964.
- [18] J.C. Ferrando y V. Gregori. *Matemática Discreta*. Reverté, 1995.
- [19] R. Frucht. Herstellung von graphen mit vorgegebener abstrakten gruppe. *Compositio Math.*, 6:239–250, 1938.
- [20] R.L. Graham, B.L. Rothschild y J.H. Spencer. *Ramsey Theory*. John Wiley & Sons, 1990.
- [21] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, London, New York, Sydney, 1967.
- [22] B. Grünbaum y G.C. Shephard. *Tiling and Patterns*. Freeman, New York, 1987.
- [23] H. Hadwinger. Über eine klassifikation der streckenkomplexe. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich*, 88:133–142, 1943.
- [24] G. Hajós. Über ein konstruktion nicht n-färbbarer graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, 10:116–117, 1961.
- [25] R. Halin. Über einen satz von K. Wagner zum vierfarbenproblem. *Math. Ann.*, 153:47–62, 1964.
- [26] R. Halin. Zur klassifikation der endlichen graphen nach H. Hadwinger und K. Wagner. *Math. Ann.*, 172:46–78, 1967.

- [27] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.
- [28] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [29] L.K. Jorgensen. Extremal graphs for contractions to K_7 . *Ars Combinatoria*, 25C:133–148, 1988.
- [30] L.K. Jorgensen. Contractions to K_8 . *Journal of Graph Theory*, 18:431–448, 1994.
- [31] H.A. Jung. Anwendung einer methode von k. wagner bei färbungsproblemen für graphen. *Math. Ann.*, 161:325–326, 1965.
- [32] A.E. Kézdy y P.J. McGuinness. Do $3n - 5$ edges force a subdivision of K_5 ? *J. Graph Theory*, 15:389–406, 1991.
- [33] J. Komlós y E. Szemerédi. Topological cliques in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 3:247–256, 1994.
- [34] J. Komlós y E. Szemerédi. Topological cliques in graphs II. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:79–90, 1996.
- [35] D. Köning. Über graphem und ihre anwendung auf determinantentheorie und mendgenlehre. *Math. Ann.*, 77:453–465, 1916.
- [36] D. Köning. *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhäuser, 1990.
- [37] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere kantendichte von graphen. *Math. Annalen*, 174:265–268, 1967.
- [38] W. Mader. Homomorphiesätze für graphen. *Math. Annalen*, 178:154–168, 1968.
- [39] W. Mader. Hinreichende bedingungen für die existenz von teilgraphen, die zu einem vollständigen graphen homöomorph sind. *Math. Nachr.*, 53:145–150, 1972.
- [40] W. Mader. $3n - 5$ edges do force a subdivision of K_5 . *Enviado a Combinatorica*, 1997.
- [41] W. Mader. An extremal problem for subdivision of K_5^- . *Enviado a Journal of Graph Theory*, 1997.

- [42] W. Mader. Graphs without a subdivision of K_5 of maximum size. *Preprint*, 1997.
- [43] W. Mader. Topological minors in graphs of minimum degree n . *Personal Survey*, 1998.
- [44] W. Mantel. Problem 28, soln. by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.
- [45] K. Menger. Zur allgemeinen kuventheorie. *Fund. Math.*, 10:96–115, 1927.
- [46] C. St. J.A. Nash-Williams. Infinite graphs. A survey. *Journal of Combinatorial Theory*, 3:286–301, 1967.
- [47] O. Ore. *The four-colour problem*. Academic Press, New York, 1967.
- [48] S.P. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *Dynamic Survey DS1, Electronic J. Combinatorics*, 1994, Revisado: Julio 1998.
- [49] F.P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceeding of the London Mathematical Society*, 30:264–286, 1930.
- [50] C. Thomassen. Some homeomorphism properties of graphs. *Math. Nachr.*, 64:119–133, 1974.
- [51] C. Thomassen. Infinite graphs. En *Selected Topics in Graph Theory*, volumen 2, pages 129–160. Academic Press, London - New York, 1983.
- [52] C. Thomassen. K_5 -subdivisions in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:179–189, 1996.
- [53] P. Turán. Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.
- [54] P. Turán. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, 3:19–30, 1954.
- [55] K. Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Math. Ann.*, 114:570–590, 1937.
- [56] K. Wagner. Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung. *Math. Ann.*, 141:433–451, 1960.

- [57] K. Wagner. Beweis einer abschwächung der Hadwiger-Vermutung. *Math. Ann.*, 153:139–141, 1964.
- [58] H.P. Young. A quick proof of Wagner's equivalence theorem. *J. London Math. Soc.*, 3 (2):661–664, 1971.

[Handwritten signature]

Uladis Dominguez Murillo

[Handwritten signature]
Marz Nay Serrano

[Handwritten signature]

Luis Boza Prieto

[Handwritten signature]

ANNA SANCHEZ LLADÓ

[Handwritten signature]

JOSE CALERES COWEÁLEZ



* 5 0 1 3 2 5 9 6 7 *

FMA C 043/346