

# ESTUDIO TEÓRICO Y EXPERIMENTAL DE LA ESTABILIDAD LINEAL DE CORRIENTES CO-AXIALES LÍQUIDO-GAS. APLICACIÓN A LA MICRO-ATOMIZACIÓN DE LÍQUIDOS Y FORMACIÓN DE MICRO-BURBUJAS

87

167

Memoria presentada por el doctorando  
**José Manuel Gordillo Arias de Saavedra**  
para optar al grado de Doctor en Ingeniería

24-09-01

*José Manuel Gordillo Arias de Saavedra*

Directores de la Tesis

**Dr. Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**  
Profesor Titular de Mecánica de Fluidos

**Dr. Alfonso Miguel Gañán Calvo**  
Catedrático de Mecánica de Fluidos



DEPT. INGENIERÍA ENERGÉTICA Y MECÁNICA DE FLUIDOS  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE SEVILLA. BIBLIOTECA

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Atomización asistida por aire . . . . .	3
1.2.1. Atomizadores de presión . . . . .	3
1.2.2. Atomizadores de coflujo gaseoso . . . . .	6
1.3. Generación de burbujas . . . . .	8
1.4. Objetivos de esta tesis . . . . .	10
1.5. Organización del trabajo . . . . .	15
<b>2. Análisis de estabilidad lineal</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Estabilidad de un flujo de cortadura . . . . .	25
2.3. Estabilidad de un flujo de cortadura forzado . . . . .	33
2.4. Conclusiones . . . . .	42
<b>3. Estabilidad lineal del chorro líquido</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Solución básica . . . . .	52
3.3. Resultados para el flujo básico . . . . .	57
3.3.1. Montaje experimental y comparación con los resultados numéricos . . . . .	61
3.4. Análisis de estabilidad . . . . .	64
3.5. Resultados numéricos . . . . .	70
3.5.1. Modelo A: Estabilidad de un chorro líquido de radio constante con perfil uniforme de velocidad cofluyendo con una corriente coaxial de gas. . . . .	71

3.5.2. Modelo <i>B</i> : Estabilidad de un chorro líquido con perfil de velocidad no uniforme rodeado por una corriente coaxial de gas no perturbada	75
3.5.3. Modelo <i>C</i> : Análisis de estabilidad del problema completo . . . . .	79
3.6. Comparación con los experimentos . . . . .	83
3.7. Conclusiones . . . . .	87
<b>4. Generación de burbujas micrométricas</b>	<b>91</b>
4.1. Introducción . . . . .	91
4.2. Análisis de estabilidad lineal . . . . .	92
4.2.1. Flujo básico . . . . .	94
4.2.2. Análisis de estabilidad . . . . .	96
4.3. Resultados experimentales . . . . .	100
4.4. Conclusiones . . . . .	104
<b>5. Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	<b>107</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	107
5.2. Líneas futuras de investigación . . . . .	110

# Agradecimientos

De los años que he necesitado para completar esta tesis, guardo en el recuerdo momentos de desesperación acompañados, eso sí, de la felicidad que produce el superar las situaciones difíciles. El principal responsable de esta mezcla de sensaciones agri-dulces entre las que, sin duda, predominan las alegrías, es Antonio Barrero. Fueron sus clases, siempre intensas, en las que aprendí que la intuición y la rigurosidad pueden complementarse en Ciencia e Ingeniería y las que me provocaron la necesidad de profundizar en mis conocimientos de Mecánica de Fluidos. Por ello y porque siempre he contado con su ánimo y apoyo, le estoy sinceramente agradecido.

Otro personaje fundamental en la particular historia de esta tesis es Alfonso Gañán, de quien siempre he recibido apoyo. Además, a su increíble capacidad creativa e innovadora, que me ha permitido trabajar en problemas a caballo entre la Ciencia y la Tecnología, le debo la motivación de esta tesis. Todo el trabajo de investigación, sin embargo, no podría haber sido llevado a buen término sin Miguel Pérez-Saborid. Quiero agradecer a Miguel que me haya enseñado, y también el que, en muchas ocasiones, me haya iluminado el camino a seguir a través de las innumerables conversaciones que hemos mantenido. Me siento enormemente afortunado por haber disfrutado de su visión global y profunda de los problemas matemáticos y físicos, y por contar con su apoyo siempre que ha sido necesario.

Siento también un enorme agradecimiento hacia Pepe López-Herrera y Carlos Tejada puesto que, sin su ayuda en las incontables ocasiones en las que la informática me ha superado o jugado una mala pasada, esta tesis se hubiera prolongado durante muchas semanas más. Por otra parte, el buen ambiente reinante en la Cátedra, al que también contribuyen de manera notable Javier Dávila y Miguel Ángel Herrada, ha sido de gran valor.

También quiero en estas líneas agradecer al jefe del laboratorio, Manuel González, su ayuda en la fabricación, siempre realizada con maestría, de las piezas necesarias para todos los experimentos que he realizado (tanto los válidos como los fallidos), así como en

*AGRADECIMIENTOS*

el montaje de los mismos. En este mismo sentido, la ayuda que José Luis Sampedro, V. Marandat, M. Hoc, N. Ouary, T. Prevost y S. Vidal me han prestado para llevar a cabo los experimentos de generación de burbujas, ha sido de gran valor.

Estas últimas líneas las reservo para expresar mi mayor agradecimiento, que va dirigido hacia mi familia. Sin ellos, sin el cariño, comprensión y estabilidad que me han dado, esta tesis no podría haber sido escrita. Va por vosotros.

*A mis padres Pepe y Mari  
a mi hermana Isi*

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El proceso conocido como atomización consiste en disgregar una corriente continua de líquido en pequeños fragmentos (gotas). La atomización tiene una importancia vital en muchas aplicaciones industriales entre las que cabe citar la sinterización de materiales, el enfriamiento evaporativo, la pintura a chorro y, destacando entre todas ellas, la combustión. En otros campos como la medicina, la generación de gotas de tamaño controlable es esencial para la producción de inhaladores o la fabricación de fármacos en tabletas; en agricultura, se hace indispensable para la fumigación de cosechas o en la humidificación de invernaderos, y en situaciones que se presentan en la industria alimenticia, para la producción de emulsiones y suspensiones. También en multitud de fenómenos naturales puede observarse cómo una corriente líquida queda disgregada en gotas, por ejemplo en las cataratas, en el impacto de las olas con la superficie marina o en los mismos chorros de la ducha. La trascendencia económica y física asociada a estos procesos justifica los enormes esfuerzos realizados tanto teórica como experimentalmente para poder entender los mecanismos físicos que producen la rotura de una corriente líquida. Dichos mecanismos pueden ser muy diversos dependiendo del dispositivo de atomización empleado (Lefebvre 1989). El funcionamiento de los atomizadores más usuales se basa, fundamentalmente, en mecanismos físicos tales como la tensión superficial entre el líquido y la atmósfera, los esfuerzos de cortadura ejercidos por una corriente de gas a gran velocidad que fluye de forma paralela a la interfase líquido-gas, los esfuerzos normales que sobre la superficie de la corriente líquida ejerce un flujo transversal de gas, la energía cinética turbulenta del propio líquido o incluso las fuerzas ejercidas por medios mecánicos sobre el volumen

de líquido. Los dispositivos (atomizadores) empleados para generar un aerosol hacen uso de uno o varios de estos mecanismos. En particular, uno de los objetivos de esta tesis es el estudio de ciertos problemas que aparecen en el proceso de atomización asistida por aire usando un nuevo dispositivo atomizador micrométrico desarrollado en el Grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla por el Profesor Gañán Calvo (Gañán Calvo y Barrero 1996, Gañán Calvo 1998), y que se describirá con detalle en secciones posteriores.

Otro proceso con numerosas aplicaciones tecnológicas en el que aparece la rotura de una corriente continua de un fluido es la generación de burbujas de forma controlada y masiva. La formación de burbujas es fundamental en infinidad de procesos que se presentan en ingeniería química: oxigenación del agua, purificación de aguas residuales (Lundth, Jonsson y Dahlquist 2000), esterilización de líquidos mediante  $\text{CO}_2$  u  $\text{O}_3$ , purificación de gases o en la combustión a baja temperatura de soluciones acuosas de material orgánico. En el campo de la medicina, las burbujas de tamaño micrométrico sirven de agentes para la destrucción de trombos o tumores al ser excitadas mediante ultrasonidos, y también pueden encontrar aplicación como método para la oxigenación de la sangre en casos de gran disfunción pulmonar. A estas aplicaciones clásicas se le unen, en el caso de que las burbujas producidas sean completamente monodispersas como ocurre en el caso tratado en esta tesis, otras pertenecientes a tecnologías emergentes; este es el caso de la fabricación de microestructuras tridimensionales a partir de elementos de igual forma y tamaño, con el objeto de producir materiales con resistencia y propiedades eléctricas y ópticas muy superiores a las convencionales. Los mecanismos de formación de burbujas no han sido tan estudiados en la literatura como la atomización de líquidos, y en cierta medida es aún un campo abierto. Parece ser que para burbujas en las que el gas es suministrado con una cantidad de movimiento relativamente baja, los mecanismos de flotabilidad y de tensión superficial juegan un papel esencial en su formación. En esta tesis, se va a considerar la formación de burbujas mediante el dispositivo citado anteriormente (que puede usarse tanto como atomizador o como generador de burbujas), y que da lugar a burbujas de tamaño micrométrico formadas a partir de una corriente de gas cuya cantidad de movimiento es prácticamente igual a la del líquido circundante. En este caso, no tratado previamente en la literatura, parece ser que los mecanismos de generación están asociados fundamentalmente a la tensión superficial y a la inercia de los flujos de líquido y gas, siendo la influencia de las fuerzas de flotabilidad, despreciable. En esta tesis se van tratar de forma tanto teórica como experimental, problemas relacio-

nados con la atomización de líquidos y con la formación de burbujas. Con el propósito de definir claramente los problemas en capítulos posteriores, se llevará a cabo en las dos secciones siguientes de este capítulo una descripción de las características principales de los procesos de atomización asistida por aire y de generación de burbujas, así como una revisión de los trabajos más relevantes publicados sobre dichos temas.

## 1.2. Atomización asistida por aire

La atomización asistida por aire o neumática, se usa fundamentalmente en procesos de combustión debido a que en esta técnica el combustible se mezcla de forma eficaz con la corriente externa de gas portadora del oxígeno necesario para las reacciones de combustión. En esta tesis, se considerarán procesos fluidomecánicos que aparecen en tipos de atomizadores en los que una corriente gaseosa a gran velocidad fluye de forma tangente a la superficie del líquido (atomizadores de coflujo gaseoso). No obstante, antes de entrar en detalle en el estudio de los atomizadores de coflujo, es instructivo revisar las características de otro tipo de atomizadores, denominados atomizadores de presión, cuyos regímenes de funcionamiento y los mecanismos físicos responsables de los mismos han sido tradicionalmente más estudiados debido a su gran aplicabilidad en motores diesel, post quemadores de las turbinas de gas en aviación, etc. Como se verá en lo que sigue, la consideración previa de los atomizadores de presión facilita un mejor entendimiento de los atomizadores de coflujo, lo cual es esencial para este trabajo. Debido a que existe cierta analogía entre los efectos aerodinámicos en los procesos de atomización con coflujo gaseoso y los que encontramos en los atomizadores de presión, se pasará a hacer un revisión de los numerosos trabajos publicados sobre estos últimos.

### 1.2.1. Atomizadores de presión

El intenso estudio experimental y teórico que se ha realizado en el campo de los atomizadores de presión es debido fundamentalmente a su simplicidad y a que son ampliamente usados en motores diesel, motores cohete y en los post quemadores de las turbinas de gas usadas en aviación. El mecanismo de funcionamiento de este tipo de dispositivos es bastante simple: un líquido a elevada presión es forzado a salir a través de un pequeño orificio o tubo, produciéndose la disgregación de la corriente líquida debida al nivel de turbulencia en el chorro líquido, a los esfuerzos aerodinámicos generados por el movimiento relativo entre el líquido y el gas exterior y a la tensión superficial.

El primer trabajo experimental sobre la rotura de chorros líquidos en aire se debe a Savart (1833), mientras que la primera descripción del mecanismo capilar como el responsable de la disgregación del ligamento líquido a bajas velocidades se debe a Plateau (1873). Sin embargo, el trabajo más conocido sobre la rotura capilar de chorros es el debido a Rayleigh (1878), en el que mediante un análisis lineal de estabilidad se cuantifica la tasa de crecimiento de las pequeñas perturbaciones y se predice, en excelente acuerdo con los experimentos, el tamaño más probable de las gotas formadas por la rotura del ligamento capilar. Weber (1931) extendió el análisis de Rayleigh para incluir los efectos de la viscosidad del líquido y de la inercia del aire circundante. El análisis de Weber muestra que la influencia de la inercia del aire, a pesar de ser ésta muy pequeña en comparación con la del líquido, es capaz de modificar sustancialmente los resultados obtenidos por Rayleigh, hecho que puede observarse experimentalmente. Desde entonces, gran cantidad de autores entre los que cabe citar a Haenlein (1932), Ohnesorge (1936), Miesse (1955) y, más recientemente a Reitz (1982) han estudiado los distintos regímenes de atomización que aparecen al variar la velocidad de inyección del líquido. Siguiendo a Reitz y Bracco (1982), los modos de rotura encontrados a medida que aumenta la velocidad de salida del líquido son los siguientes:

**1. Rotura capilar o de Rayleigh.** Cuando las velocidades relativas líquido-gas son suficientemente bajas, los efectos de la inercia del gas exterior son despreciables y el mecanismo de rotura del chorro líquido está dominado por las fuerzas de tensión superficial. En este caso, la rotura del chorro es muy regular y está originada por el crecimiento de ondas axilsimétricas que producen gotas del orden del diámetro del chorro. El régimen lineal de rotura es muy bien conocido y ha sido extensamente estudiado desde el trabajo pionero de Rayleigh (1878). La fase no lineal de la rotura, cuando la amplitud de las perturbaciones es comparable al diámetro del chorro, ha recibido una atención considerable recientemente desde el punto de vista del análisis numérico mediante el empleo de modelos unidireccionales (Lee 1974); además, cabe destacar el trabajo analítico de Eggers (1993), cuyas soluciones de semejanza para los instantes y la zona próximos al colapso del chorro o *pinch off* reproducen con gran exactitud los resultados experimentales.

**2. Régimen de atomización inducido aerodinámicamente.** A medida que la velocidad relativa gas-líquido aumenta, los efectos de la inercia del gas adquieren mayor importancia y modifican las características de la rotura capilar. La longitud de las ondas axilsimétricas que conducen a la rotura del chorro en este régimen es menor que las obtenidas por el mecanismo puramente capilar, pero el tamaño de las gotas obtenidas

sigue siendo del orden del diámetro del ligamento líquido. Numerosos autores (Reitz y Bracco 1982, Eroglu, Chigier y Farago 1991, Lin y Reitz 1998) atribuyen este fenómeno al efecto aerodinámico de la corriente exterior. Weber (1931) predijo este tipo de comportamiento con un análisis lineal de estabilidad de corrientes paralelas considerando corrientes uniformes tanto para el líquido como para el gas, y reteniendo la viscosidad en las perturbaciones sólo para el líquido. Sin embargo, autores como Fenn y Middleman (1969) encontraron serias discrepancias entre los resultados experimentales y los predichos por la teoría de Weber, que sobreestima el efecto aerodinámico. Esta teoría ha sido posteriormente corregida por Sterling y Sleicher (1975) quienes, en su análisis de estabilidad lineal, supusieron corrientes paralelas y uniformes tanto para el líquido como para el gas, al igual que hiciera Weber, pero incluyendo la viscosidad del aire en las perturbaciones a través de un coeficiente que se introduce *ad hoc* en el análisis con el objeto de reducir el efecto aerodinámico. Los resultados teóricos predicen con gran exactitud las longitudes de rotura de chorros descargando en ambientes con densidades iguales o inferiores a la atmosférica, con lo que demuestran la validez cualitativa de la teoría de Weber.

Además de la rotura axilsimétrica considerada en los trabajos citados anteriormente, en este régimen se observó posteriormente por Hoyt y Taylor (1977) un modo de rotura helicoidal, cuyo origen dichos autores asocian de forma inequívoca a la inercia del medio exterior. Hoyt y Taylor realizaron experimentos descargando el chorro tanto en una atmósfera en reposo como en el seno de una corriente coaxial de gas, observando cómo la amplitud de la hélice disminuía a medida que lo hacía la velocidad relativa entre el líquido y el gas. Posteriormente, Entov y Yarin (1983) y Yang (1992), demostraron teóricamente mediante un análisis de estabilidad lineal que estas estructuras surgen como consecuencia de una inestabilidad de origen aerodinámico. Para mayores velocidades relativas gas-líquido se observa que de la entrefase se originan filamentos de tamaño mucho menor que el diámetro del chorro y se adentran en la fase gaseosa; a una distancia de varios diámetros aguas abajo del orificio dichos filamentos se rompen en gotas. Estos resultados experimentales han sido corroborados recientemente mediante las simulaciones numéricas bidimensionales de Tryggvason y Unverdi (1999) en las que se retiene el efecto de la viscosidad en ambos flujos.

Se anticipa aquí que las conclusiones de los análisis de estabilidad existentes en la literatura para los flujos que aparecen en este régimen, tanto los que consideran perturbaciones axilsimétricas como helicoidales, serán contrastados con los obtenidos en el capítulo tercero de esta tesis. En este capítulo se realiza un análisis de estabilidad lineal de una

solución básica de los flujos del gas y del líquido calculada numéricamente y verificada experimentalmente. Se hará notar entonces la enorme importancia que la solución básica tiene sobre los distintos modos, helicoidales y axilimétricos que aparecen en la rotura del chorro líquido. Al parecer, este punto no ha sido suficientemente considerado en la literatura existente, alguna de la cual se ha revisado en esta sección.

**3. Régimen de atomización.** Este es el régimen normal de funcionamiento de los atomizadores de presión, en el que el ligamento líquido se disgrega en gotas justamente a la salida del inyector, siendo éstas de tamaños mucho menores que el orificio de salida. Este ha sido el régimen más estudiado debido a sus implicaciones tecnológicas, aunque todavía no hay un acuerdo unánime entre los distintos autores para explicar los mecanismos físicos involucrados en el mismo. Así, Castelman (1931) atribuye al efecto aerodinámico la causa principal del proceso de atomización, mientras que otros autores como DeJuhasz (1931) o Schweitzer (1937) consideran que las fluctuaciones turbulentas en el interior del líquido son las responsables de la rotura del chorro. Más recientemente, Reitz y Bracco (1982), basados en sus propios experimentos y en otros trabajos, concluyen que este régimen debe estar producido por una combinación de los mecanismos antes señalados. Los esfuerzos teóricos por describir este fenómeno han estado dirigidos a describir el efecto aerodinámico de la corriente exterior mediante análisis de estabilidad lineal (Taylor 1963, Lin y Kang 1987). Por otra parte, hay que señalar que para llegar al régimen de atomización son necesarias presiones que pueden llegar a ser del orden de varios cientos de atmósferas.

### 1.2.2. Atomizadores de coflujo gaseoso

A diferencia de lo que ocurre en la atomización por presión, en los procesos de atomización por medio de un coflujo gaseoso, es el gas el inyectado a altas velocidades (en algunas aplicaciones se llegan e incluso superan las condiciones sónicas) el responsable del proceso de atomización. Se permiten así velocidades de inyección del líquido mucho menores (como máximo del orden de la decena de metros por segundo), con lo que no es necesario utilizar presiones de inyección tan elevadas como las utilizadas en los atomizadores de presión. El hecho de que la cantidad de movimiento relativa de aire inyectado con respecto a la de líquido ( $M_r = \rho_g v_g^2 / \rho_l v_l^2$ ) pueda ser variada en este tipo de dispositivos, introduce algunas diferencias con respecto a los tipos de rotura aerodinámicos observados en los atomizadores por presión. En principio, el proceso de fragmentación de la corriente no sólo se produce en la superficie del chorro líquido (atomización primaria), sino que los esfuerzos cortantes y turbulentos ejercidos por la corriente gaseosa sobre la superficie de

las gotas desprendidas del chorro, pueden conducir a la rotura posterior de éstas en gotas satélites (atomización secundaria). Además, cuando la relación de momentos es mucho mayor que la unidad ( $M_r \gg 1$ ), el proceso de atomización primaria está mucho más influenciado por la corriente externa que en el caso de atomizadores de presión y, por tanto, este tipo de atomización merece un estudio por separado.

La mayor parte de los avances en el estudio de este tipo de atomización se han realizado recientemente gracias a la fotografía a alta velocidad y al empleo de métodos de medida no intrusivos basados en la anemometría láser. Esta técnica ha permitido conocer con detalle lo que ocurre en la zona cercana al inyector donde tiene lugar el proceso de atomización primaria, así como medir con precisión la distribución axial y radial del tamaño de las gotas generadas. Las primeras visualizaciones de la rotura de chorros con un coflujo gaseoso fueron realizadas por Hoyt y Taylor (1977), aunque debido a que las velocidades de inyección del gas eran parecidas a las del líquido, el único efecto aerodinámico observado fue la aparición del modo helicoidal de rotura a distancias del orden de 100 veces el diámetro del inyector, de manera análoga a lo que ocurre en los atomizadores por presión. Sin embargo, en el régimen usual de funcionamiento de este tipo de atomizadores, la relación de momentos  $M_r$  es siempre igual o superior a la unidad, lo que permite observar los efectos aerodinámicos a distancias más cercanas al inyector (Farago y Chigier 1992, Lasheras, Villermaux y Hopfinger 1998, Lasheras y Hopfinger 2000). Entre todos estos trabajos, destaca el de Lasheras, Villermaux y Hopfinger (1998), en el que se introducen ideas esenciales para comprender este tipo de atomización: primeramente, se resalta la importancia que tiene el parámetro  $M_r$  en la determinación de la longitud de rotura del chorro líquido; además, se proporciona un modelo fenomenológico que predice las frecuencias de rotura primaria observadas en los experimentos y se analiza con detalle el proceso de atomización secundaria. En los artículos de Villermaux (1998) y de Lasheras y Hopfinger (2000) se introduce la idea fundamental de que para  $M_r \gg 1$  es el espesor característico de la capa de mezcla en la fase gaseosa el que determina la longitud de las ondas inestables que se desarrollan en la superficie del líquido y, por tanto, la frecuencia de la atomización primaria. Además, Lasheras y Hopfinger dejan abierta la posibilidad de que la escala de los filamentos que conducen a la atomización primaria esté determinada, para muy elevadas relaciones de momento ( $M_r \gtrsim 25$ ), por el espesor de la capa de mezcla en la fase líquida. Esta idea tiene su origen en el resultado experimental encontrado por Hoyt y Taylor (1977) de que la longitud de onda que conduce a la atomización para  $Re \gg 1$  escala de forma muy clara con el espesor de capa de mezcla del líquido a la salida

del inyector utilizado en sus experimentos.

En el capítulo tercero de esta tesis, se estudiará a través de un análisis de estabilidad que utiliza perfiles básicos de velocidad realistas, el proceso de atomización con coflujo gaseoso que se presentan al utilizar el dispositivo antes referido (Gañán-Calvo 1998). Este estudio detallado de la estabilidad de las soluciones básicas que se presentan en nuestros experimentos revela que, de acuerdo con Villermaux, y Lasheras y Hopfinger, los espesores de ambas capas de mezcla, y en especial de la del líquido, son los que determinan el tipo de rotura correspondiente a cada situación experimental. El origen de estos modos de rotura está asociado al crecimiento de modos inestables, no descritos previamente en la literatura, y que están asociados a la existencia de la capa de mezcla que se desarrolla en la interfase líquido-gas.

### 1.3. Generación de burbujas

Los trabajos existentes en la literatura sobre generación primaria y secundaria de burbujas no son tan numerosos como en el caso de la atomización de líquidos. Entre los pocos trabajos que tratan la estabilidad lineal de chorros gaseosos en el seno de un líquido pueden citarse los relativamente recientes de Parthasarathy y Chiang (1998) y Subramaniam y Parthasarathy (2000). En el primero de ellos se estudia la estabilidad de un chorro gaseoso no viscoso en el seno de un líquido viscoso en reposo, considerándose que el dominio para el líquido no está acotado. Además, se asume que ambas corrientes poseen perfiles uniformes de velocidad, con lo que se utiliza un simple modelo de Kelvin-Helmholtz. Los resultados más relevantes de este estudio son que el número de Weber de la corriente gaseosa es el parámetro que controla el factor de crecimiento de la perturbación, que tiende a ser atenuado por la viscosidad. El segundo de estos trabajos se diferencia del primero en que el líquido se encuentra confinado en el interior de un tubo. La conclusión principal a la que llegan estos autores es que el confinamiento únicamente modifica los factores de crecimiento en el caso en que los efectos viscosos sean muy importantes. Hay que señalar que en estos trabajos se realiza un simple análisis de estabilidad temporal que, como se verá en los capítulos segundo y cuarto de esta tesis, es insuficiente para describir la propagación ondas en el seno de corrientes paralelas no acotadas, ya que en este tipo de sistemas es necesario identificar si las perturbaciones pueden o no ser convectadas aguas abajo de la fuente que las origina.

En la literatura pueden encontrarse trabajos muchos más elaborados que estudian la

formación de burbujas de aire a través de un capilar al que se le suministra un caudal continuo de aire y que está sumergido en el seno de un líquido. En el artículo de Longuet-Higgins, Kerman y Lunde (1991) se estudia el proceso no lineal de formación de la burbuja desde el extremo del capilar. En este trabajo se desprecia la inercia del líquido, con lo que se considera que la influencia del exterior es únicamente el empuje de Arquímedes, lo que implica que esta aproximación sea únicamente válida para muy bajos caudales de gas. En el artículo de Oguz y Prosperetti (1993) se subsana esta deficiencia resolviéndose el problema acoplado del gas con el líquido exterior. Esto se consigue a través de un código numérico que supone que la presión en la burbuja es constante y que ésta queda determinada por la evolución no viscosa (potencial) del líquido. En este trabajo se estudia la influencia de la variación de la velocidad del líquido exterior, que se suministra de forma paralela a la aguja inyectora, en la generación de las burbujas. Se llega a la conclusión de que un aumento de la velocidad del líquido exterior conduce a una disminución del tamaño de las burbujas. Sin embargo, en este trabajo no se tiene en cuenta la cantidad de movimiento suministrada por la corriente gaseosa que, para el caso del dispositivo sobre el que se centrará esta tesis, es muy similar a la del líquido inyectado. Esto hace que los resultados obtenidos en las referencias anteriores no puedan ser aplicados de manera directa a los encontrados en nuestras situaciones experimentales.

En esta tesis, el problema de la generación de burbujas que se presenta en nuestras situaciones experimentales ha sido tratado desde el punto de vista de la estabilidad lineal y los resultados están expuestos en el capítulo cuarto. No obstante, el análisis de estabilidad realizado es, a diferencia de los publicados sobre esta materia (Parthasarathy y Chiang 1998, Subramaniam y Parthasarathy 2000), espacio-temporal. Este análisis es más elaborado que el temporal, y permite averiguar si las perturbaciones inestables son o no convectadas aguas abajo, lo cual es fundamental para determinar el comportamiento de los sistemas frente a pequeñas perturbaciones. En efecto, como se verá en el capítulo cuarto, los chorros gaseosos rodeados por una corriente líquida son sistemas absolutamente inestables, lo que implica que las inestabilidades crecen más rápidamente de lo que son convectadas aguas abajo; esto está directamente relacionado con la evidencia experimental de que la formación de burbujas desde un chorro gaseoso tiene lugar a una frecuencia propia e independiente de fuentes externas de ruido y con que la longitud del ligamento sea de sólo varias veces su diámetro.

En cuanto a la generación secundaria de burbujas, no considerada en esta tesis, hay que destacar los trabajos de Martínez-Bazán, Montañés y Lasheras (1999 a,b). En ellos se

proporciona una teoría sólidamente fundamentada que explica la distribución de tamaños de las burbujas generadas al ser inyectado gas en el seno de un chorro líquido en el que la turbulencia está completamente desarrollada. Este método de generación de burbujas implica que haya mucha dispersión en cuanto a tamaños, mientras que para muchas aplicaciones industriales son preferibles métodos de producción de burbujas de tamaños más homogéneos y pequeños.

## 1.4. Objetivos de esta tesis

En esta tesis se van tratar de forma tanto teórica como experimental, problemas relacionados con la atomización y la formación de burbujas. Los fenómenos observados en estos procesos (diferentes modos de rotura, frecuencia de formación y tamaño característico de las gotas y burbujas, etc.) se van a explicar en base a análisis de estabilidad lineal aplicados a soluciones básicas realistas, que han sido calculadas numéricamente y corroboradas experimentalmente. En lo que concierne a la estabilidad de chorros líquidos, los resultados de este análisis clarifican los obtenidos en multitud de estudios previos sobre estabilidad de chorros en los que, invariablemente, se hacían hipótesis simplificadoras demasiado restrictivas concernientes a los flujos básicos tanto del líquido como del gas exterior. Se demostrará aquí que el tener en cuenta de forma apropiada dichos flujos es esencial para entender los diversos modos de rotura del chorro, los cuales habían podido ser entendidos sólo de forma parcial mediante los análisis existentes en la literatura, algunos de los cuales han sido citados previamente. En el campo de la formación de burbujas, los resultados obtenidos en esta tesis permiten explicar, entre otros fenómenos, la extraordinaria homogeneidad en el tamaño de las mismas así como el periodo, muy bien definido, de formación. La relevancia de estos resultados es que han sido obtenidos para un régimen de generación opuesto al considerado en la literatura existente. En efecto, se ha considerado aquí la generación de burbujas cuando la cantidad de movimiento del gas eyectado es similar a la de la corriente de líquido que la rodea, mientras que hasta la fecha sólo se había estudiado el caso en que dicha cantidad era mucho menor, por lo que factores como la flotabilidad y la tensión superficial líquido-gas debían tenerse en cuenta. Por tanto, nuestros resultados muestran que en ausencia de dichos factores también es posible obtener homogeneidad de tamaño y de frecuencias de formación.

El análisis teórico llevado a cabo en esta tesis ha estado motivado por las observaciones experimentales realizadas mediante el dispositivo ilustrado en la figura 1.1, que ha

sido desarrollado en el grupo de Mecánica de Fluidos de Sevilla por el Profesor Gañán Calvo (Gañán Calvo y Barrero 1996, Gañán Calvo 1998). Este atomizador y generador

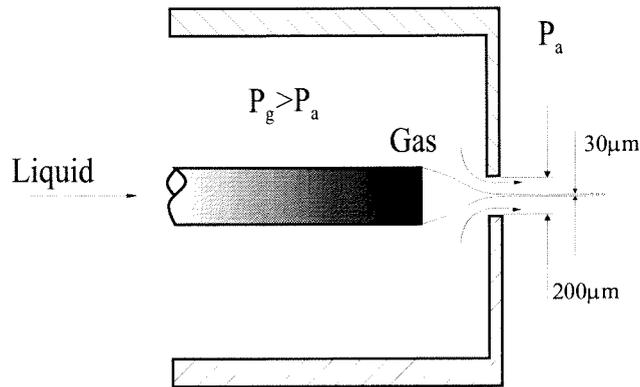


Figura 1.1: Esquema del atomizador.

de burbujas es tan sencillo como ingenioso y consta simplemente, como puede verse en la figura, de una aguja por la que se suministra el fluido a disgregar (líquido o gas), estando dicha aguja situada de forma concéntrica al orificio de salida de una cámara presurizada que contiene otro fluido inmiscible (gas o líquido) con el inyectado. El gradiente favorable de presiones que existe entre la cámara y el exterior, hace que el fluido inyectado a través de la aguja se acelere hacia el orificio de salida rodeado del fluido que se encuentra en el interior de la cámara. En el caso de que el aparato se emplee como atomizador, un chorro líquido es eyectado hacia el exterior de la cámara rodeado de una corriente gaseosa coaxial a gran velocidad y, como puede observarse de la figura 1.2, este ligamento se disgrega aguas abajo en gotas. Hay que indicar que dependiendo de los caudales de líquido inyectado y, fundamentalmente, de la presión del gas en la cámara, el chorro líquido puede romperse de formas distintas a la mostrada en la figura 1.2; los distintos modos de rotura que aparecen en el proceso serán estudiados con detalle, tanto de forma teórica como experimental, en el capítulo tercero. Desde un punto de vista tecnológico, este tipo de atomizador posee una serie de cualidades que lo convierten en un serio competidor de los aparatos convencionales. En efecto, la producción de estos aparatos es de muy bajo coste debido a su simplicidad, siendo además el coste de su mantenimiento mínimo. Esto se debe al hecho de que el chorro líquido que abandona la cámara presurizada, no entra en contacto en ningún momento con el orificio de salida (véanse las figuras 1.1-1.2), por lo que se minimiza el riesgo o se evita la obturación del atomizador. Por otra parte, la corriente coaxial de gas que rodea al chorro líquido, además de prevenir el contacto con

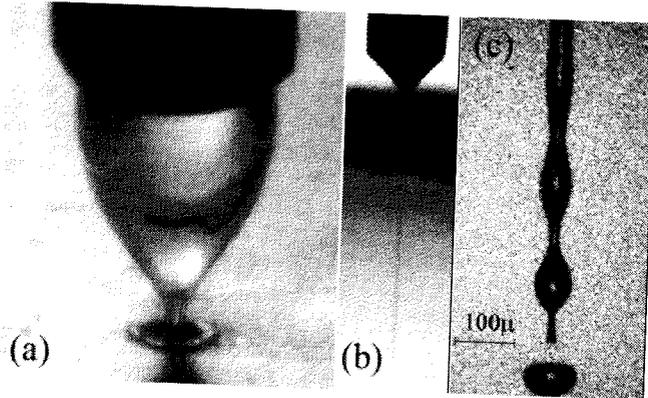


Figura 1.2: Funcionamiento del atomizador con parámetros arbitrarios. a) Vista del chorro estacionario generado en el interior de la cámara a presión. b) Vista general del chorro eyectado hacia el exterior del dispositivo. c) Rotura monodispersa del chorro en gotas

las superficies sólidas, hace que los esfuerzos cortantes en el líquido sean pequeños, lo que permite manejar líquidos que se degradarían con elevados esfuerzos tangenciales. Pero sobre todo, la característica más atractiva del atomizador, es que se pueden conseguir sprays con tamaños medios de gotas incluso inferiores a  $1\mu\text{m}$ , y que, bajo ciertos regímenes de funcionamiento, el aerosol generado posee una dispersión de tamaños muy baja como se puede observar en la figura 1.3. En efecto, el diámetro medio de las gotas puede estimarse de forma muy simple mediante la ley de Bernouilli si se tiene en cuenta que el número de Reynolds de las corrientes de líquido y de gas es elevado (lo que se verifica para líquidos con viscosidades inferiores a los 50 cp y para incrementos de presión entre la cámara y el exterior del orden de los 10 kpa), por lo que la evolución de ambos flujos será prácticamente isentrópica. Por tanto, si  $Q$  es el caudal de líquido,  $\Delta p$  el incremento de presión entre la cámara y el exterior y  $d$  el diámetro del ligamento líquido, la ley de Bernouilli proporciona

$$d \simeq \left( \frac{8\rho_l}{\pi^2\Delta p} \right)^{1/4} Q^{1/2}. \quad (1.1)$$

El diámetro medio de las gotas formadas puede estimarse directamente de la ecuación (1.1), puesto que dicho diámetro es similar en magnitud al del ligamento líquido (véase figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se observa también cómo el tamaño de las gotas puede ser reducido para un caudal dado de líquido simplemente aumentando  $\Delta p$ . Otra cuestión fundamental, es bajo qué rango de parámetros se consigue una pequeña dispersión de tamaños de las gotas; claramente esto va a depender del modo de rotura del ligamento líquido: si éste se fragmenta de forma axilsimétrica, la dispersión de tamaños será pequeña

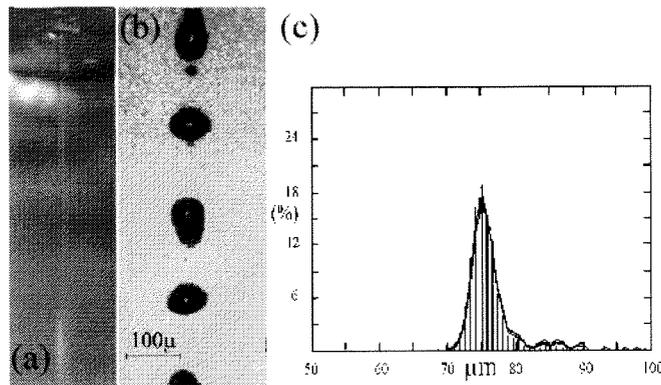


Figura 1.3: Atomizador funcionando en régimen monodisperso. a) Vista de un micro-chorro de agua a la salida de la cámara,  $\Delta p = 4,67kPa$ ,  $Q = 4,9\mu l s^{-1}$ ,  $d = 46\mu m$ . b) Rotura del ligamento líquido en gotas de tamaño uniforme. c) Histograma del tamaño de las gotas, en el que se muestra la gran uniformidad de tamaños del spray cuando la rotura es capilar. La desviación estándar en este caso es  $\sigma = 6,7\%$

(véase figura 1.3) mientras que si lo hace de manera helicoidal, la dispersión será mayor (véase figura 1.4). Precisamente, uno de los objetivos fundamentales del capítulo tercero

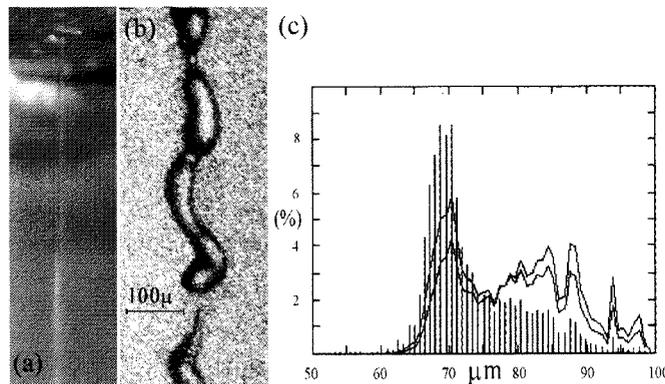


Figura 1.4: Vista de un micro-chorro de agua a la salida de la cámara,  $\Delta p = 32,4kPa$ ,  $Q = 8,2\mu l s^{-1}$ ,  $d = 46\mu m$ . b) Rotura del ligamento líquido por el crecimiento de una perturbación no axilimétrica. c) Histograma del tamaño de las gotas, en el que se muestra la más dispersión de tamaños que en el caso anterior. La desviación estándar en este caso es  $\sigma = 16,5\%$

es explicar bajo qué condiciones aparecen los distintos modos de rotura y así determinar el rango paramétrico dentro del cual es spray obtenido es altamente monodisperso.

Debe enfatizarse que el proceso de atomización que acaba de describirse es muy peculiar dentro del campo de la atomización asistida por aire. En efecto, en este tipo de dispositivos, el papel fundamental de la corriente de gas es acelerar la de líquido para

disminuir así el diámetro del chorro y, de esta forma, conseguir menores tamaños de gotas, en contraposición a los atomizadores convencionales en los que la función del aire es disgregar la corriente de líquido. Además, en el tipo de atomizador considerado aquí, la relación de momentos de las dos corrientes es necesariamente próxima a la unidad y su valor no puede variarse arbitrariamente. En efecto, debido a que tanto la corriente de líquido como la de gas se aceleran de forma casi isentrópica desde la misma presión de remanso hasta la presión de salida, la energía cinética por unidad de volumen alcanzada aguas abajo por las dos corrientes es muy similar. Finalmente debe indicarse que, aún de forma indirecta, la corriente exterior afecta de forma decisiva a la rotura primaria del chorro y con ello a la distribución de tamaños del spray como se ha indicado anteriormente y como se comprobará en el capítulo 3. Como se verá allí, este efecto es debido a la capa de cortadura que, inducida por la corriente de gas, se desarrolla en el líquido.

Cuando el dispositivo de la figura 1.1 se usa como generador de burbujas, se observa cómo se forma un tren de burbujas idénticas a partir de un delgado ligamento de gas eyectado a elevada velocidad y que se encuentra rodeado por un flujo coaxial de líquido (véase la figura 1.5). El chorro gaseoso es, en este caso, de una longitud tan corta que las

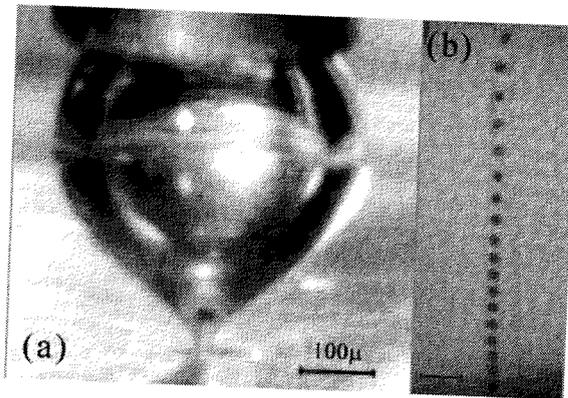


Figura 1.5: Funcionamiento del generador de burbujas con parámetros arbitrarios. Obsérvese la homogeneidad en tamaños del tren de burbujas formadas y que éstas comienzan a formarse en el límite de la cámara con el exterior.

burbujas se forman en el límite de la cámara a presión con el exterior, lo que hace que el ligamento gaseoso no pueda ser observado desde fuera del dispositivo. Hay que resaltar que ningún otro dispositivo del mercado posee la sorprendente capacidad de producción, sin excitación externa, de microburbujas *exactamente* iguales unas a otras, lo que lo convierte en el único aparato mecánico del que se tiene noticia capaz de generar burbujas monodispersas de tamaños inferiores a las  $100\mu\text{m}$ , habiéndose observado en el laborato-

rio burbujas con tamaños incluso inferiores a las  $2\mu\text{m}$ . Este comportamiento encontrado en la producción de burbujas (igualdad de tamaños y extremadamente corta longitud del ligamento de gas), y que se da en unos rangos muy amplios de funcionamiento del dispositivo, es completamente distinto al observado en la atomización de chorros. Esta diferencia de comportamientos quedará resuelta mediante el análisis llevado a cabo en el capítulo cuarto de esta tesis.

## 1.5. Organización del trabajo

Como se ha indicado anteriormente, en los capítulos tercero y cuarto se tratarán los problemas de la atomización del líquido y de la formación de burbujas respectivamente, con vistas a estudiar el dispositivo introducido en esta sección. Debido a que tanto para el estudio de la atomización primaria como para el análisis del problema de la generación de burbujas se va a realizar un estudio de estabilidad de cada flujo básico, el capítulo segundo de esta tesis está dedicado íntegramente al análisis de la propagación de ondas en flujos abiertos. En este capítulo se tratará el problema de estabilidad desde un punto de vista riguroso, que servirá para identificar el valor de los análisis clásicos de cálculo de autovalores (análisis de estabilidad temporal y espacial) en el estudio de la propagación de perturbaciones en corrientes paralelas. También, en este capítulo se trata el problema desde una óptica algo distinta a la encontrada en la literatura y se llega a algunos resultados originales que no han sido previamente descritos. Finalmente, el capítulo quinto está dedicado a las conclusiones y a sugerir futuras líneas de investigación.

## Capítulo 2

# Análisis de estabilidad lineal en flujos abiertos

### 2.1. Introducción

El análisis de estabilidad hidrodinámico lineal ha sido usado desde el último tercio del siglo XIX por autores tan relevantes como Helmholtz (1868), Kelvin (1871) y Rayleigh (1878). Ellos realizaron los trabajos pioneros además de contribuciones fundamentales en este campo. Este estudio ha sido usado desde entonces para determinar qué soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes describen el comportamiento de un flujo real. En efecto, si las inevitables pequeñas perturbaciones (p.ej. vibraciones acústicas, vibraciones transmitidas a través del suelo o imperfecciones en las condiciones de contorno del flujo) que están presentes en cualquier situación experimental tienden a amplificarse en el tiempo, el flujo es inestable y, por tanto, la solución bajo estudio no puede encontrarse como tal en la Naturaleza (al menos en una región del dominio fluido y del tiempo). Para el tratamiento analítico de estos problemas se realiza la hipótesis de que las perturbaciones externas introducidas en los campos de presión y velocidad  $(p, \vec{u})$  son mucho menores que las magnitudes  $(P, \vec{U})$  del flujo cuya estabilidad se desea investigar (flujo básico). Esta suposición, además de realista, se corresponde con lo que ocurre en infinidad de situaciones prácticas e introduce enormes simplificaciones en el estudio de la evolución de las perturbaciones. Esto es debido a que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describe la evolución de las fluctuaciones resulta ser lineal. En efecto, ya que tanto los campos de presión y velocidad totales  $(P + p, \vec{U} + \vec{u})$  y básicos  $(P, \vec{U})$  satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes, se tiene que las ecuaciones que describen la evolución de las

perturbaciones reteniendo términos de primer orden son las siguientes

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{U}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{\mathbf{u}}. \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones han de resolverse sujetas a condiciones de contorno homogéneas en el espacio:  $\vec{\mathbf{u}} = 0$  en las fronteras si el recinto es finito, o  $\vec{\mathbf{u}} \rightarrow 0$  si el dominio es infinito, además de las correspondientes condiciones iniciales en el tiempo. Si la solución básica es estacionaria, los coeficientes de este sistema lineal en derivadas parciales son funciones de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$ . Entonces, si  $f$  representa cualquiera de las perturbaciones  $(p, \vec{\mathbf{u}})$ , el sistema (2.1)-(2.2) admitirá soluciones del tipo  $\exp(i\omega t)f_\omega(\mathbf{x})$ , con lo que podemos eliminar la dependencia temporal del mismo. Ya que las ecuaciones que describen la evolución de  $f_\omega$  son lineales y a que las condiciones de contorno son homogéneas,  $\omega$  ha de calcularse como un autovalor del problema. Si, al menos uno de los autovalores  $\omega_j$  del conjunto completo  $\omega_s$  toma un valor complejo, el flujo básico será inestable ya que las perturbaciones serán amplificadas en el tiempo. El proceso de hallar los autovalores  $\omega_s$  del problema en cuestión recibe el nombre de análisis de estabilidad temporal del flujo considerado.

En sistemas acotados, el espectro de autovalores es discreto, por lo que, si se supone que el espacio de autofunciones es completo, se podrá expresar la solución general como suma de modos normales:

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} a_{\omega} \exp(i\omega t) f_{\omega}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

siendo  $a_{\omega}$  constantes determinadas a través de las condiciones iniciales. En estos casos, la respuesta a la perturbación inicial estará controlada por la autofunción correspondiente al autovalor  $\omega_k$  con mayor parte imaginaria dentro del conjunto discreto e infinito de autovalores y, por ello, en muchas situaciones basta conocer la autofunción (o autofunciones) ligadas a este autovalor para determinar la evolución lineal del sistema. Es por esto que en problemas con dominios acotados, como por ejemplo el de la inestabilidad térmica de Rayleigh-Bénard o el de la inestabilidad centrífuga de Taylor, las predicciones de la teoría de estabilidad lineal están en muy buen acuerdo con lo observado experimentalmente (Koschmieder 1993) en lo que se refiere a los valores de los parámetros que determinan los límites de estabilidad, así como de las longitudes de onda de las estructuras que aparecen en las condiciones críticas (celdas de convección en el caso del problema de Rayleigh y

vórtices en el de Taylor). Por tanto, en estos casos, los análisis de estabilidad lineal no sólo proporcionan información sobre las condiciones en las que una solución deja de ser estable, sino que, además, de los resultados obtenidos pueden extraerse conclusiones sobre las características del flujo una vez que se desarrolla la inestabilidad.

En flujos no acotados, por el contrario, no es tan inmediato hallar la respuesta lineal del sistema a unas condiciones iniciales dadas. En efecto, en este tipo de problemas el conjunto de autovalores y autofunciones es continuo, por lo que existe un conjunto infinito de autovalores con exponentes de amplificación temporal arbitrariamente cercanos al máximo. En estos casos, la respuesta viene determinada por la superposición de modos infinitamente próximos entre sí, lo que hace que la respuesta lineal del sistema sea en realidad un paquete de ondas en vez de ser una onda aislada. Como se verá, el efecto de la suma de modos de frecuencias muy próximas, genera interferencias entre los mismos, que provocan que el crecimiento de las perturbaciones no sea exponencial, sino que es más lento ajustándose a una ley típicamente de la forma  $f \sim t^{-\beta} \exp(\sigma t)$ , donde  $\sigma$  y  $\beta$  son números reales y positivos. El tratamiento analítico de estos problemas se facilita en los casos, ampliamente considerados en la literatura, en los que la extensión del dominio fluido en la dirección de la corriente principal es infinita. Esto permite, en muchos casos de interés, suponer que las variaciones del campo de velocidades en la dirección de la corriente principal son mucho menores que las transversales, por lo que el flujo básico es cuasi-unidireccional. Se restringe, entonces, el análisis al estudio de perturbaciones con longitudes de onda cortas comparadas con la longitud característica para variaciones longitudinales del flujo básico, pudiéndose considerar por tanto que los perfiles básicos de velocidad sólo dependen de las coordenadas transversales. Esto hace que el análisis pueda llevarse a cabo mediante el uso de la integral de Fourier según la coordenada espacial en la dirección de la corriente, lo que permite analizar de forma conveniente el efecto de la superposición de un conjunto continuo de modos. Por otra parte, la dependencia temporal de las ecuaciones suele eliminarse tomando la transformada de Laplace en el tiempo. La forma de proceder para hallar la respuesta lineal a unas condiciones iniciales dadas, es tomar las antitransformadas de Fourier y Laplace de la solución del sistema de ecuaciones transformado, sujeto a las apropiadas condiciones de contorno en el espacio y el tiempo.

Al igual que en el caso de dominios acotados, los problemas de estabilidad de corrientes paralelas (dominios ilimitados) se han resuelto tradicionalmente utilizando la técnica de descomposición de la respuesta en modos normales. Este análisis ha sido aplicado a este tipo de problemas desde Rayleigh (1878, 1880) y se ha venido utilizando sistemáticamente

hasta nuestros días como lo demuestran los libros sobre estabilidad hidrodinámica de Lin (1955), Betchov y Criminale (1967) y Drazin y Reid (1981). El objetivo de estos trabajos es el de hallar la función que proporciona el valor del factor de amplificación temporal en función del número de onda de la perturbación  $\sigma = \sigma(k)$ , donde  $\sigma = -\omega_i$ , y que recibe el nombre de *relación de dispersión temporal*<sup>1</sup>. En estos trabajos se supone además, y por extensión de lo que ocurre en el caso de flujos confinados, que la respuesta del sistema está dominada por la autofunción correspondiente al autovalor para el cual la función  $\sigma(k)$  presenta un máximo y, por norma, se obvia el hecho de que en este caso  $\sigma(k)$  es una función continua, por lo que se debería incluir el efecto de la superposición de un grupo continuo de modos en vez de considerar un modo aislado. Las deficiencias de este tipo de análisis se pusieron de manifiesto en los experimentos realizados por Schubauer y Skramstad (1947) sobre la estabilidad de la capa límite de Blasius y por Browand (1966) y Freymuth (1966) en el caso de la capa de mezcla. En estos trabajos, los flujos eran excitados a una determinada frecuencia y se observaba que las perturbaciones, en vez de amplificarse en el tiempo, lo hacían en el espacio. Estas deficiencias pusieron de manifiesto que los problemas de estabilidad lineal deberían plantearse de una forma más general de lo que lo hacía el análisis clásico de estabilidad temporal, incluyendo en las ecuaciones que gobiernan la evolución de las perturbaciones tanto el efecto de posibles fuentes excitadoras como el de los valores iniciales de la perturbación.

Sorprendentemente, el problema general no fue considerado hasta muy tarde en el campo de la Mecánica de Fluidos, dándose los primeros pasos fuera de la metodología clásica de la estabilidad temporal sólo a partir de la década de los 60. Así, las evidencias experimentales condujeron a autores como Michalke (1965) a buscar soluciones a las ecuaciones linealizadas de la forma  $f(y) \exp i(kx - \omega t)$ , siendo ahora  $\omega$  la frecuencia de la excitación y, por tanto, un parámetro con valores reales, y  $k$  el número de onda que puede tomar valores complejos. La búsqueda de este tipo de soluciones recibió el nombre de análisis de estabilidad espacial, para lo cual es preciso resolver un problema de autovalores con el objeto de determinar la relación de dispersión espacial  $k = k(\omega)$ <sup>2</sup> y las autofunciones asociadas. Michalke (1965) encontró muy buen acuerdo entre sus resultados y los datos experimentales a bajas frecuencias de excitación tanto en el valor del factor de amplificación como en la velocidad de fase de la onda, que no eran predichos con buena

<sup>1</sup>Hay que indicar que, en general, existe un conjunto discreto de autovalores  $\omega_d$  para cada número de onda, pero se asume que la respuesta está dominada por aquél cuya amplificación temporal es mayor

<sup>2</sup>Al igual que ocurre en el análisis de estabilidad temporal, para cada frecuencia existen varios autovalores  $k_d$ , aunque se asume que tomamos aquél con mayor factor de amplificación espacial.

aproximación por el análisis clásico de estabilidad temporal. Gaster (1965) fue el primero en el campo de la Mecánica de Fluidos en tratar el problema de la propagación de ondas lineales forzadas de forma rigurosa <sup>3</sup> y, posteriormente, Gaster (1968) consideró también el problema de valores iniciales en la evolución de las perturbaciones. Hay que indicar que en el problema de valores iniciales ya se habían hecho grandes progresos en otros campos tales como la Física de Plasmas desde el trabajo pionero de Landau (1959) y continuado, entre otros, por Sturrock (1961), Briggs (1964) y Bers (1975). Estos trabajos proporcionan la sistemática necesaria para clasificar los tipos de inestabilidades que pueden aparecer en corrientes paralelas, y que se ha venido utilizando desde entonces en la Mecánica de Fluidos. En particular, en el trabajo de Briggs (1964) sobre la interacción de corrientes de electrones con plasmas, se establece un criterio fundamental que puede aplicarse también de forma directa al estudio de inestabilidades hidrodinámicas de corrientes paralelas. Este criterio determina bajo qué circunstancias las perturbaciones introducidas en el instante inicial en un flujo inestable son convectadas aguas abajo o bien son amplificadas temporalmente en la región del espacio en la que se introduce la perturbación. Esta distinción es fundamental en la clasificación de los distintos tipos de flujos abiertos. En efecto, cuando las perturbaciones son amplificadas y convectadas aguas abajo, estos sistemas exhiben un comportamiento a modo de *amplificador de ruidos* (Huerre y Monkewitz 1990) y, por tanto, son extremadamente sensibles a las perturbaciones externas al sistema; se dice también que estos sistemas poseen una dinámica extrínseca o que son *convectivamente inestables*. Sin embargo, cuando las perturbaciones crecen sin ser convectadas aguas abajo <sup>4</sup>, el comportamiento del flujo es radicalmente distinto al caso anterior, ya que la evolución del sistema está controlada por la dinámica interior y no por el ruido externo, a modo de *oscilador* (Huerre y Monkewitz 1990); se dice entonces que estos sistemas exhiben una dinámica intrínseca o que son *absolutamente inestables*.

Como es sabido, el problema de la evolución lineal de las perturbaciones introducidas inicialmente en un flujo o excitadas en el mismo mediante una fuente externa, puede resolverse mediante la integral de convolución si se conoce la respuesta del sistema a un pulso inicial. Por tanto, el problema puede plantearse en términos de la función de Green

---

<sup>3</sup>En los experimentos de Schubauer y Skramstad (1947), que sirvieron para demostrar la existencia de las ondas de Tollmien-Schlichting, la excitación era introducida en el flujo mediante el movimiento periódico y transversal a la corriente de un hilo colocado sobre la pared.

<sup>4</sup>Las partículas fluidas sí son convectadas aguas abajo de la fuente, pero el movimiento ondulatorio puede persistir y amplificarse cerca de donde se ha producido la perturbación.

$G(x, y, t)$  tal que satisfaga:

$$L \left[ U_0(y) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{dU_0(y)}{dy}, \frac{\partial}{\partial t}; R_i \right] G(x, y, t) = \delta(t) \delta(x) \delta(y), \quad (2.4)$$

donde  $L$  es el operador lineal de la ecuación de Orr-Sommerfeld,  $x$  es la coordenada espacial en la dirección del flujo básico,  $y$  es la coordenada transversal y  $R_i$  son los parámetros de los que depende el problema. Una vez determinada la solución  $G(x, y, t)$ , se dice que el flujo básico es linealmente *estable* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0 \quad (2.5)$$

a lo largo de todos los rayos  $x/t = \text{constante}$ . Se dice que el flujo básico es *linealmente inestable* cuando se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = \infty \quad (2.6)$$

para al menos un rayo  $x/t = \text{constante}$ . Dentro del grupo de los flujos inestables, estos se denominan *convectivamente inestables* si se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0, \quad (2.7)$$

a lo largo del rayo  $x/t = 0$ , mientras que se dicen *absolutamente inestables* aquellos para los que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = \infty \quad (2.8)$$

a lo largo del rayo  $x/t = 0$ .

La solución al problema (2.4) puede obtenerse tomando la transformada de Fourier en la dirección  $x$  y la de Laplace en el tiempo, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la dirección  $y$  cuya solución  $g(y, k, \omega)$  puede invertirse proporcionando, de forma genérica (Huerre y Monkewitz 1990)

$$G(x, t) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_F \int_L \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{D(\omega, k)} d\omega dk, \quad (2.9)$$

donde se ha suprimido la dependencia con la coordenada transversal al no ser esencial para lo que se quiere mostrar;  $D(\omega, k)$  es una función conocida de la frecuencia y del número de onda (y de la coordenada transversal) que resulta de la resolución del problema, y los subíndices de las integrales denotan los contornos de integración para la integral de Fourier (el eje  $k$  real) y para la integral de Laplace. El contorno de inversión para la integral de Laplace debe ser un camino situado por encima de los polos del integrando para asegurar

la convergencia de la integral (obsérvese que esta condición puede interpretarse físicamente como la condición de causalidad  $G(x, t) = 0$  para  $t < 0$ ). Una vez obtenida la integral de Laplace mediante el teorema de los residuos, la integral de Fourier resultante puede calcularse de forma aproximada para tiempos grandes. En efecto si, para un valor de  $k$  dado,  $\omega_m(k)$  es la raíz (polo) de  $D(\omega, k) = 0$  de mayor amplificación temporal (mayor parte imaginaria) se tiene que, para tiempos grandes (2.9) puede aproximarse por

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i[kx - \omega_m(k)t]}}{\partial D / \partial \omega[\omega_m(k), k]} dk, \quad (2.10)$$

Esta integral puede calcularse, a su vez, en el límite asintótico  $t \rightarrow \infty$ ,  $x/t$  fijo, mediante la conocida técnica del *camino de máxima pendiente* [*steepest descent*, (Bleistein 1984)]. De acuerdo con este método, si el contorno original de integración puede ser deformado en el plano complejo de los números de onda de manera que pase por el punto  $k_*$  tal que

$$\frac{d\omega}{dk}(k_*) = \frac{x}{t}, \quad (2.11)$$

se tiene para  $t \gg 1$  que (Huerre y Monkewitz 1990)

$$G(x, t) \simeq (2\pi)^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{e^{i[k_*x - \omega t]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}[k_*, \omega(k_*)] \left[ \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_*) t \right]^{1/2}}. \quad (2.12)$$

De esta expresión se deduce que la respuesta en cada rayo  $x/t = \text{constante}$  está dominada por el número de onda complejo  $k_*$  tal que su velocidad de grupo satisface (2.11). A lo largo de estos rayos, el factor de amplificación temporal de las ondas es, claramente

$$\sigma = \omega_i(k_*) - (x/t)k_{*i}. \quad (2.13)$$

El máximo de (2.13) se encuentra para el número de onda  $k_{max}$  tal que se verifique

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_r} = 0, \quad (2.14)$$

lo que implica que

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r} + k_i \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_r \partial k_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial k_i} = k_i \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_r^2} - \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r} = 0. \quad (2.15)$$

Mediante las condiciones de Cauchy-Riemann aplicadas a la primera de las ecuaciones (2.15), se deduce fácilmente que  $k_i = 0$ <sup>5</sup>, que sustituido en la segunda de las igualdades

<sup>5</sup>El término  $\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_r \partial k_i}(k_*)$  es, generalmente, distinto de cero.

de (2.15) proporciona  $\partial\omega_i/\partial k_r = 0$ . Este resultado implica que el máximo del factor de amplificación temporal se encuentra para el número de onda real  $k_{max}$  para el que la función  $\omega_i(k)$  alcanza su máximo:  $\sigma = \omega_i(k_{max}) = \omega_{i,max}$ . Este es el valor del factor de amplificación que se obtendría también mediante el análisis de estabilidad temporal. Por tanto, el análisis de estabilidad temporal determina la forma del paquete de ondas *solamente* en el rayo en el que se alcanza la mayor amplificación temporal. Es claro que un flujo es inestable si  $\omega_{i,max} > 0$  mientras que si se verifica  $\omega_{i,max} < 0$ , el flujo es linealmente estable. Además, el análisis realizado permite discernir si un flujo básico inestable lo será de forma convectiva o absoluta. Para ello, basta con examinar el valor de (2.13) para el rayo  $x/t = 0$ :

$$\sigma = \omega_{i,0}(k_0) \quad \text{con } k_0 \text{ tal que } \frac{d\omega}{dk}(k_0) = 0. \quad (2.16)$$

De acuerdo con (2.16), si  $\omega_{i,0} > 0$ , el flujo es absolutamente inestable, mientras que si  $\omega_{i,0} < 0$ , el flujo básico es convectivamente inestable, lo que constituye el criterio de Briggs. Obsérvese que este criterio está fuera del alcance del análisis clásico de estabilidad temporal en el que, como se indicó anteriormente, la superposición de modos, expresada por las integrales (2.9) o (2.10), no se lleva a cabo. Por tanto, el análisis clásico de estabilidad no permite discernir si una perturbación inestable, según dicho análisis, crecerá indefinidamente en un punto fijo del dominio fluido o finalmente decaerá en dicho punto al ser convectada aguas abajo.

Debido a su importancia para los capítulos 3 y 4 de esta tesis, las ideas que se acaban de exponer se ilustrarán en las dos secciones siguientes mediante la resolución de las ecuaciones de la estabilidad lineal en un caso relativamente simple de corrientes paralelas. Se considerarán tanto el problema de valores iniciales (sección 2.3) como la respuesta a una excitación externa (sección 2.4). Aunque el problema que sirve aquí como ejemplo ha sido extensamente estudiado en la literatura, su solución se considerará aquí en detalle debido a que el método empleado difiere, en alguna medida, del usado en las referencias clásicas sobre el tema (Gaster 1965, Huerre y Monkewitz 1985, 1990, Huerre 2000). Mediante este método que, en nuestra opinión, es más sistemático y transparente, se han obtenido resultados asintóticos y numéricos que, estando entre sí en excelente acuerdo, en unos casos complementan y en otros contradicen algunos puntos expuestos por los citados autores. Uno de los objetivos fundamentales del análisis llevado a cabo en las dos secciones siguientes es ilustrar cómo los resultados obtenidos de los análisis de estabilidad tanto temporales como espaciales surgen, de forma natural, y como casos límites, del problema más general consistente en la resolución de las ecuaciones de la estabilidad lineal junto

con condiciones iniciales y/o un forzamiento periódico.

## 2.2. Análisis de estabilidad de un flujo de cortadura bidimensional: problema de valores iniciales.

Considérese la situación esquematizada en la figura 2.1 en la que dos corrientes infinitas de distintas densidades ( $\rho_2 < \rho_1$ ) y velocidades ( $U_2 > U_1$ ) fluyen de forma paralela. Las ecuaciones linealizadas no viscosas que describen la evolución de las perturbaciones de presión reducida  $\hat{P}$  y velocidad transversal  $\hat{v}$  son

$$\nabla^2 \hat{P}_{(1,2)} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{(1,2)}}{\partial t} + U_{(1,2)} \frac{\partial \hat{v}_{(1,2)}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{(1,2)}} \frac{\partial \hat{P}_{(1,2)}}{\partial y}, \quad (2.18)$$

donde los subíndices (1,2) denotan cada una de las corrientes. Obsérvese que la com-

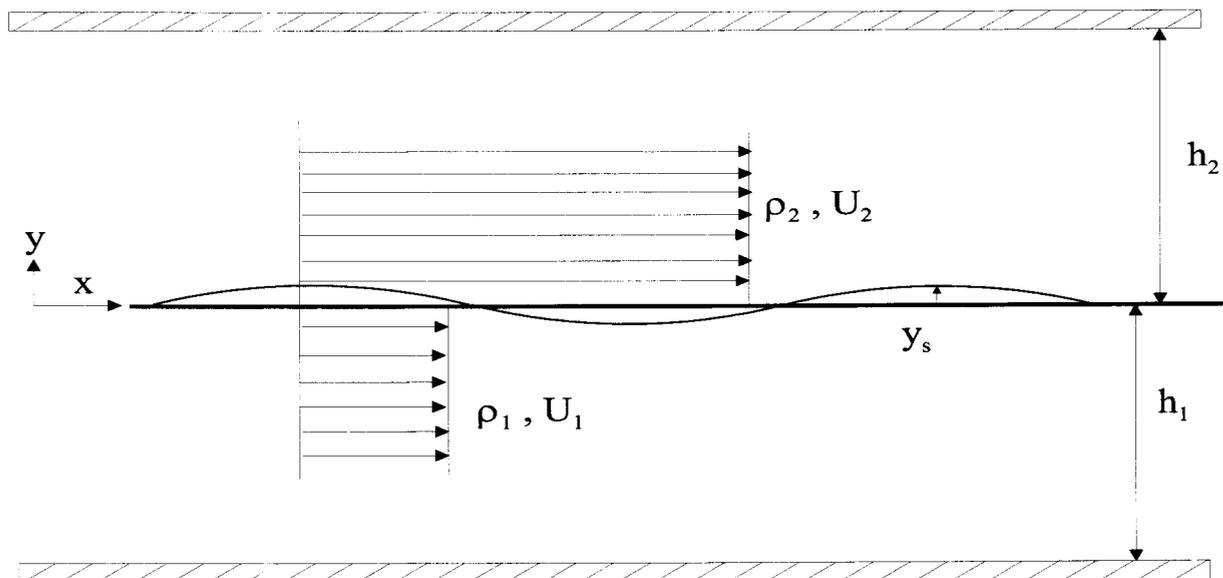


Figura 2.1: Esquema del flujo de cortadura a estudiar

ponente longitudinal de la ecuación de cantidad de movimiento ha sido sustituida por la divergencia de la ecuación de cantidad de movimiento, y que no se ha escrito la ecuación de continuidad puesto que ésta simplemente permite calcular la componente longitudinal

de la velocidad una vez conocida su componente transversal. Las condiciones de contorno para el sistema de ecuaciones (2.17)-(2.18) son

$$y = h_2 \quad v_2 = 0 \quad , \quad y = -h_1 \quad v_1 = 0 \quad , \quad (2.19)$$

$$x \rightarrow \pm\infty \quad \hat{v}_{(1,2)}, \hat{P}_{(1,2)} \rightarrow 0 \quad , \quad (2.20)$$

$$y = 0 \quad \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - g\hat{y}_s(\rho_1 - \rho_2) = -\gamma \frac{d\hat{y}_s}{dx^2} \quad , \quad (2.21)$$

$$y = 0 \quad \hat{v}_{(1,2)} = \frac{\partial \hat{y}_s}{\partial t} + U_{(1,2)} \frac{\partial \hat{y}_s}{\partial x} \quad , \quad (2.22)$$

donde (2.19) es la condición de impermeabilidad, (2.20) es la condición de que las perturbaciones se anulan en el infinito, (2.21) expresa el salto de esfuerzos normales en la interfase, siendo  $\gamma$  la tensión superficial entre los dos medios y  $g$  la aceleración de la gravedad, y la ecuación(2.22) indica que la interfase  $\hat{y}_s$  es una superficie fluida. En lo que sigue se analizará la evolución de las perturbaciones descritas por las ecuaciones y condiciones de contorno (2.17)-(2.22) a partir de unas condiciones iniciales

$$t = 0 : \quad \hat{v}_{(1,2)} = \hat{v}_{(1,2)}^0(x, y) \quad , \quad \hat{y}_s = \hat{y}_s^0(x) \quad , \quad (2.23)$$

que serán detalladas posteriormente una vez que se haya llevado a cabo de forma conveniente un tratamiento previo de las ecuaciones y condiciones de contorno. En efecto, obsérvese primero que, dado que el dominio es ilimitado en la dirección  $x$  y las perturbaciones decaen a cero en el infinito, es permisible usar en el análisis la transformada de Fourier según la coordenada  $x$ . En términos de las variables transformadas,

$$v_{(1,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_{(1,2)} e^{-ikx} dx \quad , \quad P_{(1,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_{(1,2)} e^{-ikx} dx \quad , \quad y_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}_s e^{-ikx} dx \quad , \quad (2.24)$$

la ecuación (2.17) se escribe

$$\frac{d^2 P_{(1,2)}}{dy^2} - k^2 P_{(1,2)} = 0 \quad . \quad (2.25)$$

Las condiciones de impermeabilidad (2.19) requieren  $\partial \hat{P}_2 / \partial y (y = h_2) = \partial \hat{P}_1 / \partial y (y = -h_1) = 0$ , por lo que las soluciones de (2.25) son de la forma

$$P_1 = A (e^{ky} + e^{-2kh_1} e^{-ky}) \quad y \quad P_2 = B (e^{-2kh_2} e^{ky} + e^{-ky}) \quad , \quad (2.26)$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones del tiempo que podrán determinarse posteriormente. Si (2.26) se sustituye en la transformadas de las ecuaciones (2.18) se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + ikU_1 v_1 = -\frac{1}{\rho_1} Ak (e^{ky} - e^{-2kh_1} e^{-ky}) \quad , \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + ikU_2v_2 = -\frac{1}{\rho_2}Bk(-e^{-ky} + e^{-2kh_2}e^{ky}) . \quad (2.28)$$

Por otra parte, las condiciones de contorno (2.21)-(2.22) se escriben, una vez transformadas,

$$A(1 + e^{-2kh_1}) - B(1 + e^{-2kh_2}) - gy_s(\rho_1 - \rho_2) = \gamma k^2 y_s , \quad (2.29)$$

$$v_{(1,2)} = \frac{dy_s}{dt} + ikU_{(1,2)}y_s . \quad (2.30)$$

Si se particularizan ahora las ecuaciones (2.27)-(2.30) en  $y = 0$  y se emplean la relaciones (2.29)- (2.30) se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución temporal de la entrefase

$$\begin{aligned} & [\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)] \frac{d^2 y_s}{dt^2} + 2ik[\rho_1 \coth(kh_1)U_1 + \rho_2 \coth(kh_2)U_2] \frac{dy_s}{dt} + \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)k + \gamma k^3 - k^2 (\rho_1 \coth(kh_1)U_1^2 + \rho_2 \coth(kh_2)U_2^2)] y_s = 0 . \end{aligned} \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) admite soluciones de la forma  ${}^6 e^{i\bar{\omega}t}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{A} \left( -k B \pm \sqrt{k^2 B^2 + AC} \right) , \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2) , \quad B = \rho_1 \coth(kh_1)U_1 + \rho_2 \coth(kh_2)U_2 , \\ y \quad C &= g(\rho_1 - \rho_2)k + \gamma k^3 - k^2 (\rho_1 \coth(kh_1)U_1^2 + \rho_2 \coth(kh_2)U_2^2) . \end{aligned} \quad (2.33)$$

El valor de  $\bar{\omega}$  es imaginario si se satisface la relación

$$\frac{[\rho_1 \rho_2 \coth(kh_1) \coth(kh_2)]^2 (U_1 - U_2)^4}{4\gamma g(\rho_1 - \rho_2) [\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)]^2} < 1 , \quad (2.34)$$

que, como se comprueba fácilmente, coincide para  $|kh_1| \rightarrow \infty$  y  $|kh_2| \rightarrow \infty$ , con la condición de inestabilidad del problema clásico de Kelvin-Helmholtz (Chandrasekhar 1961). El cálculo de la relación  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(k)$  es el principal objetivo del análisis clásico de estabilidad temporal, y según dicho análisis el flujo básico sería inestable para perturbaciones que satisfacen (2.34). No obstante, dicho resultado es claramente insuficiente para describir tanto la evolución espacio-temporal de las perturbaciones, como para decidir si el tipo de

---

<sup>6</sup>Obsérvese que, aunque el problema hubiera podido resolverse mediante el uso de la transformada de Laplace en el tiempo, en este caso no es necesario para un tratamiento analítico del problema puesto que las dependencias espacial y temporal se separan de forma natural en las ecuaciones de estabilidad. Se seguirá por tanto el camino alternativo, pero equivalente, de analizar el problema en el dominio del tiempo, lo que hará que ciertos cálculos sean más directos y transparentes.

inestabilidad es absoluta o convectiva. Para ello es necesario aplicar la integral de Fourier (2.10) a la solución de la ecuación (2.31). El proceso se simplifica notablemente para el caso en que se desprece el efecto de la gravedad, lo que está justificado si

$$Fr = \frac{\gamma g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)^2}{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^4}, \quad (2.35)$$

es pequeño frente a la unidad y se consideran perturbaciones de longitud de onda pequeña frente a  $h_1$  y  $h_2$  ( $|kh_1| \gg 1$ ,  $|kh_2| \gg 1$ ), lo que permite sustituir las funciones hiperbólicas por su límite (en este caso 1 o -1) para grandes valores del argumento. Introduciendo en la ecuación de  $y_s$ , una vez simplificada, los siguientes parámetros y variables

$$\eta = \frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2}{\gamma(\rho_1 + \rho_2)} y_s \quad \tau = \frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^3}{\gamma(\rho_1 + \rho_2)^2} t \quad \kappa = \frac{\gamma(\rho_1 + \rho_2)}{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2} k, \\ \beta = \frac{(U_2 - U_1)^2}{\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} U_1 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} U_2\right)^2}, \quad (2.36)$$

se obtiene

$$\ddot{\eta} + 2i\kappa\dot{\eta} + [\kappa^2|\kappa| - \kappa^2(1 + \beta)]\eta = 0. \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) se resolverá sujeta a las condiciones iniciales

$$\eta(0) = 0 \quad , \quad \dot{\eta}(0) = 1, \quad (2.38)$$

que representan un pulso inicial comunicado a la interfase concentrado en el origen  $x = 0$ . Como se indicó en la sección anterior, la conveniencia de considerar la solución a un pulso inicial radica en que, mediante convolución, puede construirse la solución a cualquier otro tipo de condición inicial, así como también la respuesta a una excitación externa de ley temporal conocida (este problema se considerará en §2.4). La solución del problema (2.37)-(2.38) se obtiene inmediatamente como

$$\eta(\kappa) = \frac{i}{\omega_1 - \omega_2} (e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}), \quad (2.39)$$

donde

$$\omega_{(1,2)}(\kappa) = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2|\kappa| - \beta\kappa^2}. \quad (2.40)$$

Finalmente, la evolución temporal de la interfase adimensional  $\hat{\eta}(x, t)$  se obtiene al aplicar la transformada inversa a la solución (2.39)

$$\bar{\eta}(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (2.41)$$

A continuación se llevará a cabo la evaluación asintótica de la integral (2.41) para tiempos grandes mediante el método de la pendiente máxima, y el resultado se comparará con el de su evaluación numérica. El buen acuerdo existente entre las dos soluciones justificará entonces que el análisis de estabilidad del flujo considerado pueda basarse en los resultados de la aproximación asintótica según los criterios enunciados en la sección anterior. Para la evaluación asintótica de acuerdo según el método del descenso máximo, es conveniente expresar la integral (2.41) en la forma

$$\bar{\eta}(x, t) = I = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{it(\kappa x/t - \omega_1(\kappa))} + e^{it(-\kappa x/t - \omega_1(-\kappa))} - e^{it(\kappa x/t - \omega_2(\kappa))} - e^{it(-\kappa x/t - \omega_2(\kappa))}}{\omega_1 - \omega_2} d\kappa, \quad (2.42)$$

con el objeto de descomponer esta expresión en cuatro sumandos, cada uno de la forma (2.10). Sin embargo, puesto que el denominador de estas integrales se anula para ciertos valores de  $\kappa$  positivos, no está justificado calcular esta integral como suma de las integrales por separado. Esta dificultad puede soslayarse si se asegura que los polos del integrando estén siempre fuera del eje real, lo que se consigue, simplemente calculando  $I$  como el límite

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{it[\kappa x/t - \omega_1(\kappa)]}}{\omega_1(\kappa) - \omega_2(\kappa) + \epsilon} d\kappa + \int_0^\infty \frac{e^{it[-\kappa x/t - \omega_1(-\kappa)]}}{\omega_1(-\kappa) - \omega_2(-\kappa) + \epsilon} d\kappa - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{it[\kappa x/t - \omega_2(\kappa)]}}{\omega_1(\kappa) - \omega_2(\kappa) + \epsilon} d\kappa - \int_0^\infty \frac{e^{it[-\kappa x/t - \omega_2(-\kappa)]}}{\omega_1(-\kappa) - \omega_2(-\kappa) + \epsilon} d\kappa \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I_1 + I_2 - I_3 - I_4]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Obsérvese que este procedimiento está justificado debido a que, por supuesto, la integral original (2.42), es convergente. Puesto que cada una de las integrales del segundo miembro está ya expresada en la forma apropiada para la aplicación del método del descenso máximo, sólo resta hallar los  $\kappa_*$  que cumplan (2.11) y los correspondientes valores  $\omega_1(\kappa_*)$  y  $\omega_2(\kappa_*)$ . Para ello, obsérvese primero que, de acuerdo con (2.40), tanto  $\omega_1$  como  $\omega_2$  satisfacen la ecuación característica

$$(\omega - \kappa)^2 - \kappa^2 |\kappa| + \beta \kappa^2 = 0 \quad (2.44)$$

que derivada implícitamente proporciona, haciendo uso de la relación (2.11),

$$2 \left( \frac{d\omega}{d\kappa} - 1 \right) (\omega - \kappa) - (3\kappa^2 - 2\kappa\beta) = 2 \left( \frac{x}{t} - 1 \right) (\omega - \kappa) - (3\kappa^2 - 2\kappa\beta). \quad (2.45)$$

El sistema de ecuaciones (2.44)-(2.45) permite hallar los siguientes valores de  $\kappa_*$  y  $\omega(\kappa_*)$ :

$$\kappa_* = \frac{2}{9}C^2 + \frac{2}{3}\beta \pm \frac{2}{9}\sqrt{C^4 - 3C^2\beta}, \quad (2.46)$$

$$\omega(\kappa_*) = \left[ 1 + \frac{1}{C} \left( \frac{2}{3}C^2 + \beta \right) \right] \kappa_* - \frac{2}{3C}\beta (C^2 + \beta) , \quad (2.47)$$

donde  $C = x/t - 1$ . De las expresiones (2.46)-(2.47) puede obtenerse de forma inmediata el rango paramétrico de  $\beta$  para el cual el flujo será absoluta o convectivamente inestable según el criterio de Briggs, enunciado en §2.2. En efecto, para el rayo  $x/t = 0$  ( $C = -1$ ) se deduce de (2.46) que para  $\beta > 1/3$ ,  $\kappa$  será imaginario, lo que proporciona, de acuerdo con (2.47), una parte imaginaria positiva para  $\omega$ , con lo que para estos valores del parámetro  $\beta$  la inestabilidad será absoluta. Para valores menores de  $\beta$  en el rango  $0 < \beta < 1/3$ ,  $\omega$  es real y, por tanto, la inestabilidad es convectiva, decayendo la perturbación en un punto fijo del dominio fluido para tiempos grandes. Una interpretación física de estos resultados puede obtenerse si se tiene en cuenta que para grandes valores de  $\beta$  la velocidad de crecimiento de las perturbaciones, que debe ser del orden de  $|U_2 - U_1|$  puesto que la causante del desarrollo de la inestabilidad es la diferencia de velocidades entre los dos fluidos, supera a la velocidad con la que éstas son convectadas ( $\sqrt{\rho_1/\rho_2}U_1 + \sqrt{\rho_2/\rho_1}U_2$ ).

Una vez calculadas  $\kappa_*$  y  $\omega_*$ , la expresión asintótica de la integral (2.43) puede obtenerse sin dificultad. Para ello, obsérvese que las integrales  $I_j$  de la ecuación (2.43) dependen de  $C$  de tal forma que

$$I_1 = I_1(C) \quad , \quad I_2 = I_1(-C) \quad , \quad I_3 = I_3(C) \quad , \quad I_4 = I_3(-C) \quad , \quad (2.48)$$

con lo que solamente existen dos integrales independientes en (2.43),

$$I = I_1(C) + I_1(-C) - I_3(C) - I_3(-C) . \quad (2.49)$$

El método del descenso máximo permite ahora calcular asintóticamente  $I_1$  e  $I_3$  mediante expresiones análogas a (2.12). En la figura 2.2 se representa la forma de la superficie para dos instantes de tiempo distintos y un mismo valor de  $\beta$ . Dicha forma ha sido obtenida de la evaluación de (2.41) tanto de forma asintótica como numérica<sup>7</sup>. Obsérvese tanto la dispersión como la amplificación del pulso conforme éste es convectado aguas abajo. Es de resaltar también la gran aproximación con que los resultados asintóticos reproducen los numéricos mejorando, como era de esperar, el acuerdo con el tiempo. Este buen acuerdo se manifiesta también en la figura 2.3, donde se representa la evolución temporal del pulso

<sup>7</sup>La integración numérica de (2.41) para cada par de valores dados de  $x$  y de  $t$  se ha realizado transformando la integral en una ecuación diferencial y llevando a cabo su integración en un intervalo de  $\kappa$  suficientemente amplio mediante un método estándar de Runge-Kutta con control de paso. Este procedimiento evita los problemas de discretización que aparecerían para grandes valores de  $\kappa$  si se evaluase la integral de otra forma debido a las rápidas oscilaciones del integrando.

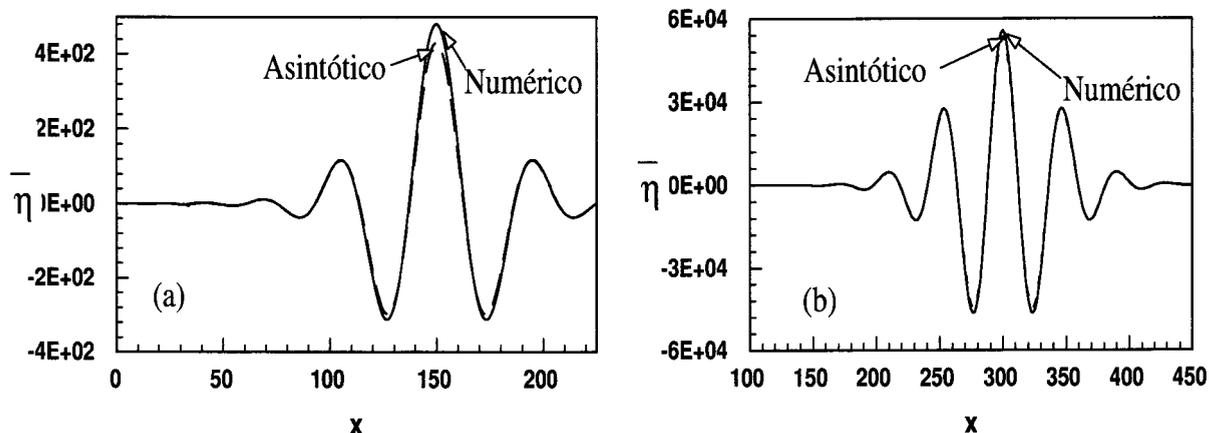


Figura 2.2: Evolución espacial de un pulso para dos instantes distintos de tiempo: (a)  $t=150$ , (b)  $t=300$ .  $\beta = 0,2$

en una posición fija del espacio para distintos valores de  $\beta$  en el rango  $0 < \beta < 1/3$ , correspondiente al tipo de inestabilidad convectiva. Obsérvese cómo la amplitud primero crece con el tiempo para decaer posteriormente a medida que el pulso es convectado aguas abajo, siendo el decaimiento más lento para mayores valores de  $\beta$ . Finalmente,

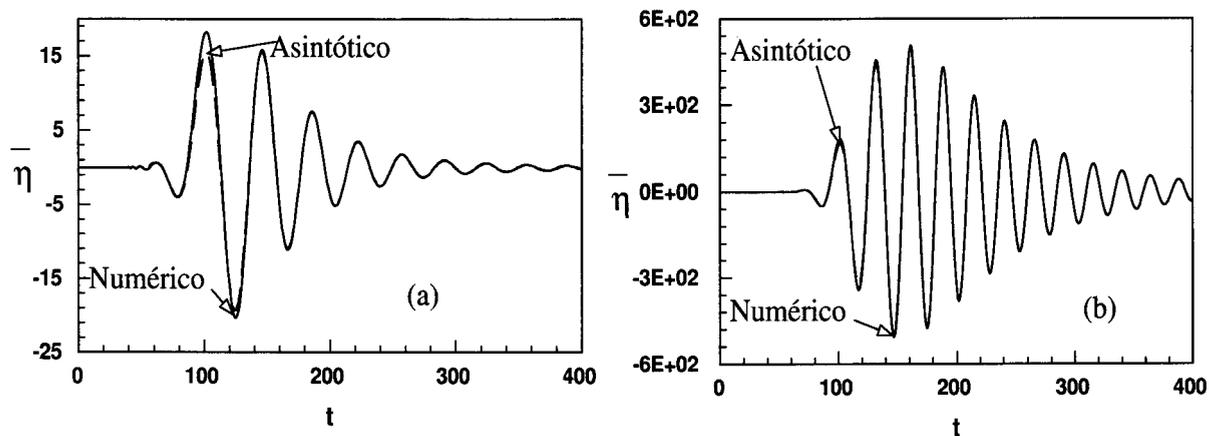


Figura 2.3: Evolución temporal de un pulso en  $x=100$  para dos valores distintos de  $\beta$ : (a)  $\beta=0.2$  y  $\beta=0.3$ , un valor muy próximo a  $\beta=1/3$  para el que la inestabilidad es absoluta.

la figura 2.4 muestra la evolución temporal en varias posiciones fijas del espacio para valores de  $\beta$  en el rango  $\beta > 1/3$  (inestabilidad absoluta). Obsérvese que, en este caso, la inestabilidad se propaga también aguas arriba como se muestra en la figura 2.4 (c). A

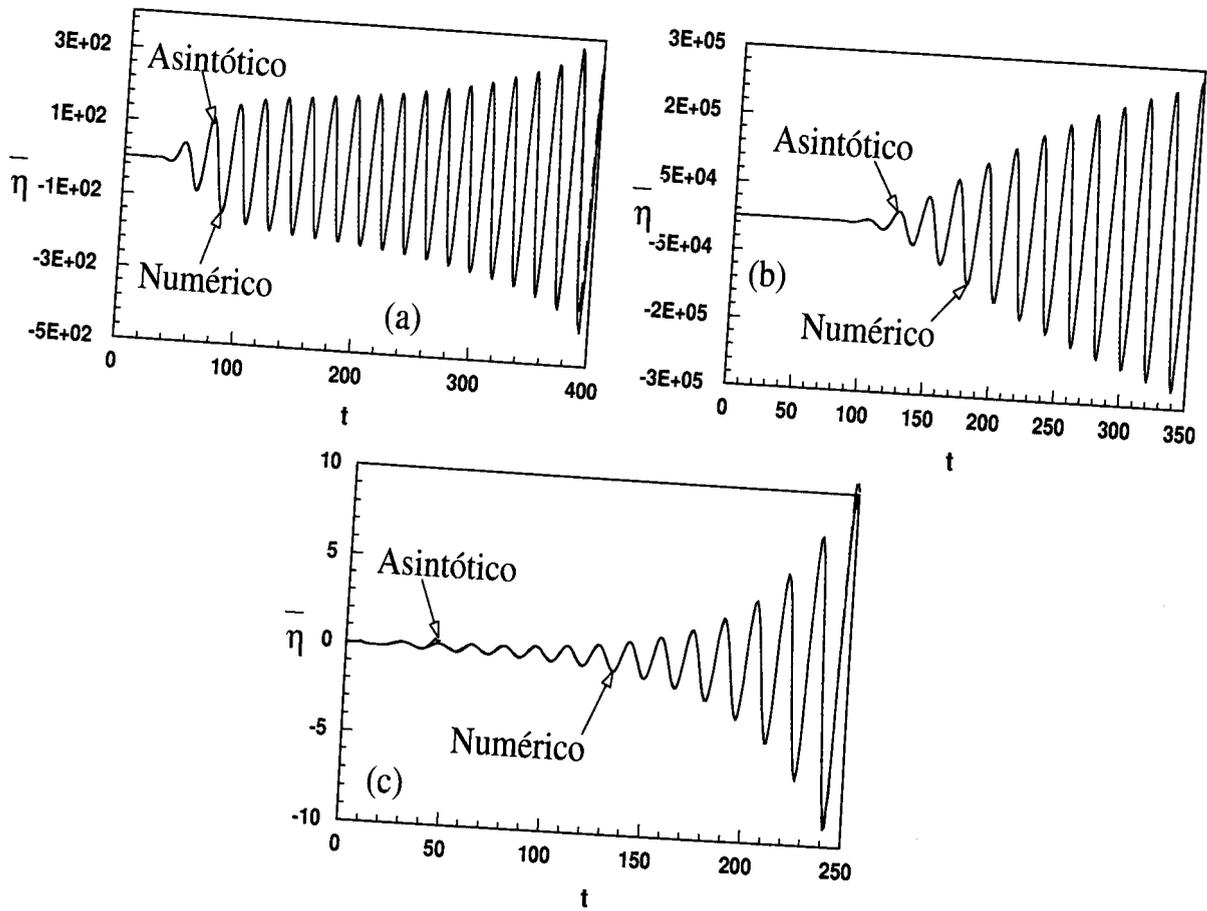


Figura 2.4: Evolución temporal de un pulso en distintas posiciones espaciales y para distintos valores de  $\beta$  para los que la inestabilidad es absoluta. a)  $\beta = 0,4$ ,  $x = 50$ ; b)  $\beta = 0,4$ ,  $x = 100$ ; c)  $\beta = 0,5$ ,  $x = -10$ .

la luz de los resultados anteriores, se puede concluir que el excelente acuerdo existente entre los resultados asintóticos y numéricos confirma plenamente la validez del criterio de Briggs (que, se recuerda, está basado en el método de la pendiente máxima) para analizar el carácter de la estabilidad lineal de un flujo. Este criterio se aplicará a continuación para estudiar la respuesta del flujo considerado en esta sección a una excitación externa de ley temporal conocida (problema forzado).

Una vez entendido el problema de valores iniciales, se pasará en la siguiente sección a resolver un problema de gran interés práctico debido a que se presenta en numerosas situaciones experimentales: el problema de la señal.

### 2.3. Análisis de estabilidad de un flujo de cortadura bidimensional: problema forzado.

En esta sección se tratará el problema de la evolución de las perturbaciones generadas por una fuente que excita, a frecuencia constante, el flujo considerado en la sección anterior. Obviamente, la respuesta a excitaciones con leyes temporales más generales puede obtenerse mediante síntesis de Fourier. Al tratar de resolver este problema dentro de la aproximación lineal, se encuentra la aparente paradoja de que las ecuaciones (2.17)-(2.18) que gobiernan la evolución de las perturbaciones no contienen términos fuentes y, por tanto, las perturbaciones sólo podrían ser excitadas mediante condiciones iniciales. Esta dificultad puede soslayarse si se tiene en cuenta la idea introducida por Lighthill (véase, por ejemplo, Lighthill 1978) en su estudio pionero sobre la generación aerodinámica de sonido, de que la fuente de las perturbaciones proviene de los términos no lineales de las ecuaciones de Navier-Stokes despreciados en las ecuaciones linealizadas (2.17)-(2.18), y que deben ser retenidos para describir el flujo en la zona de excitación. Esto hace que los términos no lineales entren en las ecuaciones (2.17)-(2.18) como fuentes localizadas en la región del espacio en la que se encuentra el dispositivo excitador, pudiendo estudiarse la propagación de las perturbaciones suficientemente lejos del mismo, mediante las ecuaciones (2.17)-(2.18) suplementadas con términos fuentes cuya dependencia espacio-temporal debe suponerse conocida (puesto que la determinación detallada del flujo en la zona de excitación cae fuera del análisis lineal). Si teniendo en cuenta dichas fuentes se realiza un análisis enteramente similar al que llevó de las ecuaciones (2.17)-(2.18) a la ecuación (2.37) para la transformada de Fourier de la entrefase, se obtiene, para una excitación armónica de frecuencia  $\Omega$  concentrada alrededor de  $x = 0$ ,

$$\ddot{\eta} + 2i\kappa\dot{\eta} + [\kappa^2|\kappa| - \kappa^2(1 + \beta)] \eta = \cos(\Omega t). \quad (2.50)$$

La solución a la ecuación (2.50) puede hallarse de forma inmediata, mediante la integral de convolución, a partir de la respuesta (2.41) al pulso inicial hallada en la sección anterior. Se obtiene,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x, t) &= \text{Re} \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{e^{-i\omega_1(t-\tau)} - e^{-i\omega_2(t-\tau)}}{\omega_1 - \omega_2} e^{-i\Omega\tau} e^{i\kappa x} d\tau d\kappa \right] = \\ &= \text{Re} \left[ \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\Omega t}}{\omega_1 - \Omega} - \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\Omega t}}{\omega_2 - \Omega} \right) e^{i\kappa x} d\kappa \right] = \text{Re}[I], \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde  $I$  es una abreviatura que denota la integral dentro del corchete de la segunda igualdad de (2.51). Para la evaluación asintótica de esta integral mediante el método del descenso máximo, es conveniente expresar  $I$  en la forma

$$I = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty (G(\kappa) + G(-\kappa)) d\kappa, \quad (2.52)$$

donde

$$\begin{aligned} G(\kappa) &= \frac{e^{-i\omega_1(\kappa)t} - e^{-i\Omega t}}{(\omega_1(\kappa) - \omega_2(\kappa))(\omega_1(\kappa) - \Omega)} e^{i\kappa x} - \frac{e^{-i\omega_2(\kappa)t} - e^{-i\Omega t}}{(\omega_1(\kappa) - \omega_2(\kappa))(\omega_2(\kappa) - \Omega)} e^{i\kappa x} = \\ &= G_1(\kappa) - G_2(\kappa). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para separar (2.52) en la suma de dos integrales, se empleará el mismo procedimiento que en la sección anterior para integrales que contienen polos en el eje real, y que consiste en sumar una pequeña cantidad compleja  $\epsilon$  al denominador de  $G_1$  y  $G_2$ , y calcular  $I$  como el límite

$$I = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty [G_1(\kappa) + G_1(-\kappa) - G_2(\kappa) - G_2(-\kappa)] d\kappa = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_1 + I_2 - I_3 - I_4), \quad (2.54)$$

donde  $I_1, \dots, I_4$  son abreviaciones para denotar las correspondientes integrales en el segundo miembro de la primera igualdad de (2.54)<sup>8</sup>. En adelante se detallará únicamente el cálculo de la integral  $I_1$ , puesto que el procedimiento para el cálculo de las restantes es completamente análogo. Además, para simplificar la notación, no se hará explícita la cantidad arbitrariamente pequeña  $\epsilon$  en los denominadores de  $G_1$  y  $G_2$  ni la notación de paso al límite, sobreentendiéndose que este proceso debe llevarse a cabo al final del análisis<sup>8</sup>. Teniendo en cuenta esto, está justificado descomponer a su vez  $I_1$  en suma de dos integrales

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 - \Omega)} e^{i\kappa x} d\kappa - e^{i\Omega t} \int_0^\infty \frac{e^{i\kappa x}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \Omega)} d\kappa = I_{1a} - e^{i\Omega t} I_{1b}. \quad (2.55)$$

A continuación se evaluarán las integrales en (2.55) comenzando por la segunda de ellas que se ha denotado por  $I_{1b}$ . Para ello, es conveniente sustituir el camino de integración

<sup>8</sup>No se han considerado, ni se hará en lo que sigue, las contribuciones de los polos del integrando que se encuentran a distancias del orden  $\epsilon$  del eje real. Es fácil ver que, debido a que el integrando de la integral original (2.51) no es singular en estos puntos, las contribuciones de estos polos a  $I_1 \dots I_4$  van a cancelarse en (2.54). La validez de esta afirmación se comprobará al comparar los resultados asintóticos obtenidos con los numéricos.

original sobre el eje real por los caminos mostrados en la figura 2.5, dependiendo del signo de  $x$ , y que son de descenso máximo en los extremos del intervalo de integración. Mediante el teorema de Cauchy se tiene entonces que

$$\int_F \frac{e^{i\kappa x}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \Omega)} d\kappa = \int_C \frac{e^{i\kappa x}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \Omega)} d\kappa \pm 2\pi i \sum \text{residuos} . \quad (2.56)$$

Es fácil ver ahora que la integral buscada debe decaer con la distancia  $|x|$  aguas abajo.

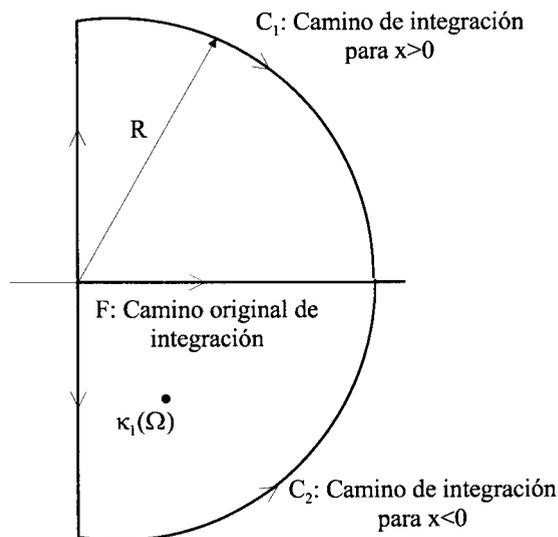


Figura 2.5: Distintos caminos de integración, determinados por el signo de  $x$ , para hallar el valor de las integrales  $I_{1b}$

En efecto, la contribución de los residuos a dicha integral es siempre de la forma  $I_{1,b} \sim \exp(-|\text{Im}(\kappa_i)||x| - i\Omega t)$ , donde  $\kappa_i$  es el valor de  $\kappa$  correspondiente al polo  $i$  en el interior del contorno  $F+C$ . Además, la integral sobre el contorno  $C$  se reduce, en el límite  $R \rightarrow \infty$  a la integral sobre el eje imaginario  $iy$ , siendo el integrando exponencialmente decreciente con  $|y|$  y aumentando la tasa de decrecimiento con  $|x|$ , por lo que la mayor contribución a esta integral proviene de puntos sobre el eje imaginario muy cercanos a  $\kappa = 0$ . Se deduce por tanto, que la integral (2.55) permanece siempre acotada con  $x$ , y que tiende a cero para grandes valores de  $|x|$ . Esto contradice a lo sostenido por reputados investigadores en el campo de la estabilidad de corrientes paralelas tales como Huerre y Monkewitz (1985, 1990), Huerre (2000), quienes aseveran que la integral  $I_{1b}$  puede presentar un crecimiento exponencial con  $x$  aguas abajo de la fuente cuando la inestabilidad es convectiva. Sin embargo, es precisamente la primera de las integrales en (2.55)  $I_{1a}$ , a los que los citados autores conceden una importancia secundaria, la responsable del crecimiento exponencial

antes referido. En efecto, al evaluar  $I_{1a}$  mediante el método de la pendiente máxima, se observa que tanto el punto de fase estacionaria  $\kappa_*$  como  $\omega(\kappa_*)$  vienen dados por la expresiones (2.46)-(2.47) de la sección anterior, puesto que el exponente del integrando de  $I_{1a}$  es idéntico al que aparece en la primera de las integrales en (2.43) que surge en el problema del pulso inicial. La diferencia entre ambas integrales radica en que el integrando de  $I_{1a}$  contiene singularidades localizadas (polos) dados por las raíces de

$$\omega_1(\kappa) - \Omega = 0, \quad (2.57)$$

que, como se comprueba elevando al cuadrado la igualdad anterior, también son raíces del polinomio cúbico<sup>9</sup>

$$(\Omega - \kappa)^2 - (\kappa^3 - \beta\kappa^2) = 0. \quad (2.58)$$

De las tres soluciones  $\kappa = \kappa(\Omega)$  de (2.58), sólo una satisface la condición (2.57), por

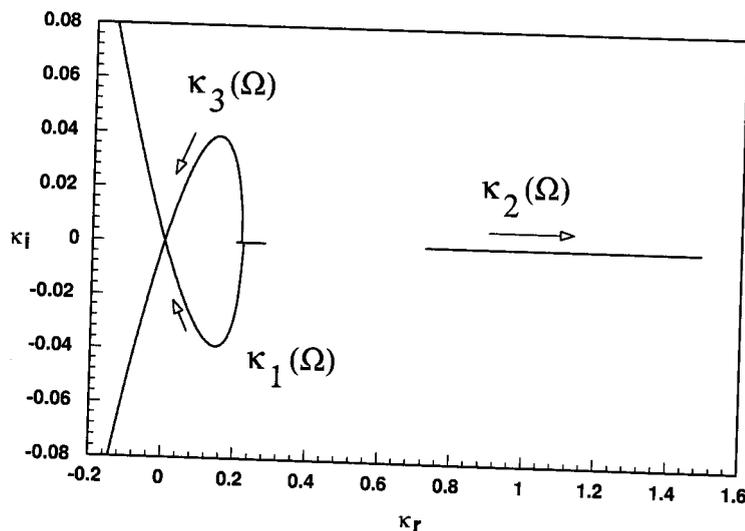


Figura 2.6: Autovalores espaciales en el plano  $\kappa$  complejo para  $\beta = 0,2$  y  $\Omega$  comprendido entre  $(-0,2,0,2)$ ; las flechas indican valores decrecientes de  $\Omega$ . La curva correspondientes al autovalor temporal con parte imaginaria positiva ( $\omega_1$ ) es  $\kappa_1(\Omega)$

lo que las dos restantes deben excluirse. En la figura 2.6, se han representado en forma paramétrica las tres ramas  $\kappa_1(\Omega)$ ,  $\kappa_2(\Omega)$  y  $\kappa_3(\Omega)$ , que son soluciones de la ecuación (2.58); se comprueba que sólo  $\kappa_1(\Omega)$  satisface (2.57). En la figura 2.7 se han representado la curva

<sup>9</sup>El cálculo de estas raíces es el objetivo de los denominados análisis de estabilidad espacial (Michalke 1965).

donde se encuentran los polos del integrando de  $I_{1a}$  (curva  $C_p$ ), la curva que determina la posición de los puntos de silla (curva  $C_{ps}$ ), y los caminos de descenso máximo [ $\text{Re}(\kappa x - \omega t) = \text{cte}$ , Bleistein (1984)] que emanan de  $\kappa = 0$  (camino  $C_1$ ) y del punto de silla  $\kappa_*$  (camino  $C_2$ ) correspondiente a un rayo dado (o, lo que es lo mismo, a un valor dado del parámetro  $C = x/t - 1$  introducido en la sección anterior). Para la evaluación de  $I_{1a}$

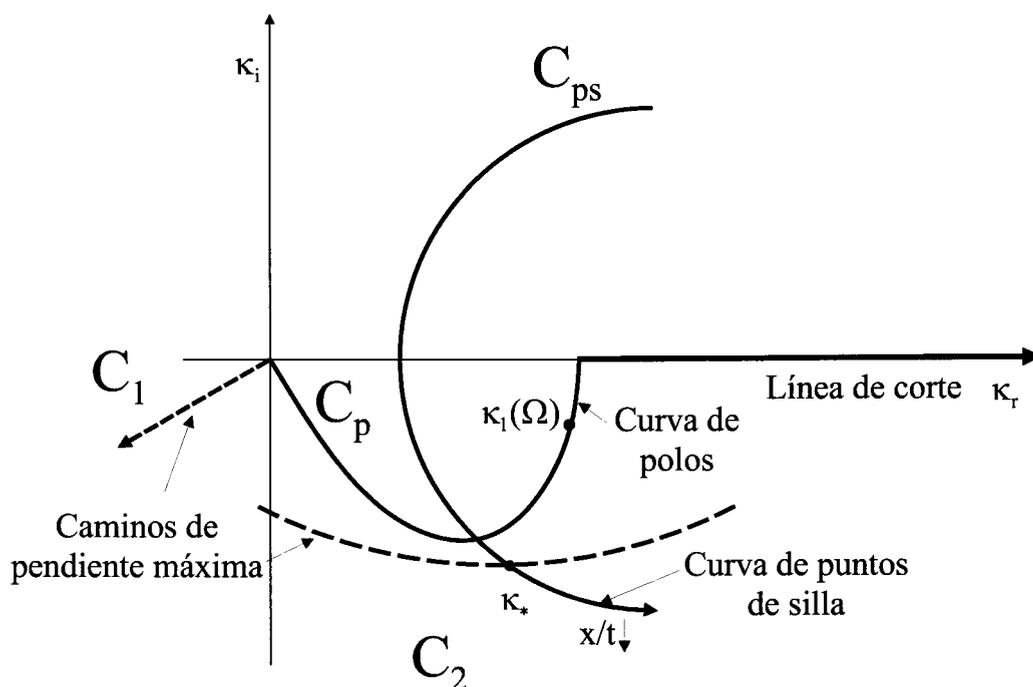


Figura 2.7: Curvas de polos y de puntos de silla mostrando los caminos de steepest descent emanando del punto de silla y de  $\kappa = 0$ . Para la frecuencia  $\Omega$  de excitación considerada en este ejemplo genérico, ocurre que  $\kappa_1(\Omega)$  se encuentra encerrado por el contorno de integración en el plano complejo  $C_1 + C_2$ .

debe tenerse en cuenta que si, para una frecuencia de excitación  $\Omega$  dada, se considera un rayo para el que los correspondientes caminos de descenso máximo  $C_1$  y  $C_2$  encierran al polo del integrando  $\kappa_1(\Omega)$ , a la contribución a  $I_{1a}$  proveniente de los caminos de descenso máximo, hay que añadir la contribución de los residuos en el polo citado (Bleistein 1984).

En este caso se obtiene

$$\begin{aligned}
I_{1a} \sim & (2\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} \frac{e^{i[\kappa_*^A x - \omega t]}}{[\omega_1(\kappa_*^A) - \omega_2(\kappa_*^A)] |t [d^2\omega/dk^2]_{\kappa=\kappa_*^A}|^{1/2}} + \\
& + (2\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} \frac{e^{i[\kappa_*^B x - \omega t]}}{[\omega_1(\kappa_*^B) - \omega_2(\kappa_*^B)] |t [d^2\omega/dk^2]_{\kappa=\kappa_*^B}|^{1/2}} - \\
& (-2\pi i) \frac{e^{i(\kappa_1(\Omega)x - \Omega t)}}{[\omega_1[\kappa_1(\Omega)] - \omega_2[\kappa_1(\Omega)]] [\partial(\Omega - \omega_1)/\partial\kappa]_{\kappa=\kappa_1(\Omega)}}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Por el contrario, si los caminos de integración no encierran ningún polo (lo cual sucede para valores de  $x/t$  suficientemente elevados), sólo deben retenerse el primer y segundo sumandos de (2.59), que representa una perturbación cuya amplitud decae tanto para grandes valores de  $x$  (con  $t$  fijo), como para grandes valores de  $t$  (en  $x$  fijo). En efecto, para grandes valores de  $x/t$  ( $C \rightarrow \infty$ ) se deduce de la relación (2.46) que

$$\kappa_*^A \simeq \frac{4}{9} C^2 \simeq \frac{4}{9} \left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad \kappa_*^B \simeq \beta + \frac{\beta^2}{4C^2} \simeq \beta + \frac{\beta^2 t^2}{4x^2}, \tag{2.60}$$

y teniendo en cuenta que de (2.40)

$$\omega_1(\kappa_*) - \omega_2(\kappa_*) = 2\sqrt{\kappa_*^3 - \beta\kappa_*^2}, \tag{2.61}$$

$$\frac{d^2\omega}{dk^2}(\kappa_*) = \frac{3}{2(\kappa_* - \beta)^{1/2}} - \frac{3\kappa_* - 2\beta}{4(\kappa_* - \beta)^{3/2}}, \tag{2.62}$$

se deduce de lo anterior que el primer sumando decae como  $x^{-5/2}$  para grandes valores de  $x$ , mientras que el segundo lo hace como  $x^{-1/2}$ . Asimismo, para grandes valores de  $t$ , se deduce que  $\kappa_*$  tiende a un valor constante, siendo además  $\omega(\kappa_*)$  real; esto implica que todos los términos que dependen de  $\kappa_*$  en los dos primeros sumandos de (2.59) sean constantes y que la contribución a la integral  $I_{1a}$  de los mismos decaiga como  $t^{-1/2}$  en cada  $x$  fijo. Por el contrario, a lo largo de los rayos para los que el tercer sumando de (2.59) deba retenerse, la evolución para tiempos grandes es, en cada  $x$  fijo, una función armónica de amplitud constante, creciendo dicha amplitud de forma exponencial con la distancia  $x$  aguas abajo de la fuente debido a que  $\text{Im}[\kappa_1(\Omega)] < 0$ , como se muestra en las figuras (2.6)-(2.7). La contribución de este término a la integral ha de incluirse sólo para los rayos tales que los caminos de descenso máximo que emanan de los puntos de silla correspondientes, abarquen al polo  $\kappa_1(\Omega)$  (véase la figura 2.7). A continuación se determinará un criterio que permite acotar el intervalo espacio-temporal dentro del cual debe estar incluido el rayo límite a partir del que se debe considerar la contribución de dicho polo y, posteriormente, se llevará a cabo la determinación de dicho rayo. Para ello,

obsérvese primero que los puntos del plano  $\kappa$  complejo para los que  $d\omega/d\kappa(\kappa_*) = x/t$ , han de corresponderse con los máximos de los isocontornos  $\omega_i = cte$ , ya que en estos puntos  $\partial\omega_i/\partial\kappa_r = 0$  y, por tanto,  $d\omega/d\kappa$  es real y de valor  $\partial\omega_r/\partial\kappa_r$ . El lugar geométrico de dichos máximos constituye, por tanto, la curva de puntos de silla, denotada como  $C_{ps}$  en la figura 2.7. Nótese que el camino de máxima pendiente que emana de un punto de silla genérico  $\kappa_*$ , se dirige siempre hacia valores crecientes de la función  $\phi = Im(\kappa_*x/t - \omega)$ , de forma que el exponente del integrando de  $I_{1a}$  definida en (2.55), decrezca monótonamente sobre dicho camino. Además, de las hipótesis realizadas en el curso del análisis, es fácil deducir cuál debe ser la dirección de las  $\phi$  crecientes. En efecto, se ha asumido que los puntos de silla son simples (es decir, que  $d^2\omega/d\kappa^2 \neq 0$ ) y, por otra parte, que  $\partial\omega_r/\partial\kappa_r = x/t > 0$  en el punto de silla que se encuentra sobre el eje real<sup>10</sup>. Además, como el punto de silla correspondiente al rayo  $\partial\omega_r/\partial\kappa_r = x/t = 0$  ha de encontrarse en el semiplano  $\kappa_i < 0$ <sup>11</sup>, se deduce inmediatamente que  $\partial\omega_r/\partial\kappa_r$  decrece monótonamente a lo largo de la curva de los puntos de silla en la dirección indicada en la figura 2.7. Por tanto, para un valor fijo de  $x/t$ , la función  $x/t - d\omega/d\kappa$  evaluada sobre  $C_{ps}$  es 0 para el valor de  $\kappa_*$  correspondiente a  $x/t$  y positiva (negativa), en puntos  $\kappa_*$  sobre  $C_{ps}$  tales que  $\kappa_i < Im[\kappa_*]$  ( $\kappa_i > Im[\kappa_*]$ ). Esto implica que, para un valor de  $x/t$  fijo, la función  $\phi = \kappa_i(x/t) - \omega_i(\kappa_r, \kappa_i)$  debe decrecer en el plano complejo  $\kappa$  hacia el interior de la curva  $\omega_i(\kappa_r, \kappa_i) = cte$  que pasa por el punto de silla  $\kappa_*$  correspondiente a  $x/t$ , mientras que debe aumentar en la dirección opuesta (véase la figura 2.8). Por tanto, el camino de pendiente máxima que emana de  $\kappa_*$  ha de abarcar al isocontorno  $\omega_i(\kappa_r, \kappa_i) = \omega_i(\kappa_*)$ , puesto que, de otra forma, la función  $\phi$  decrecería sobre dicho camino si éste cortase al isocontorno (véase la figura 2.8)<sup>12</sup>. Se deduce, por tanto, que para cualquier frecuencia de excitación  $\Omega$ , la evolución de la onda es periódica en el tiempo dentro de la región espacio-temporal delimitada por los rayos  $0 < x/t < \partial\omega_r/\partial\kappa_r(\kappa_{me})$ , siendo  $\kappa_{me}$  el máximo de la curva de polos ( $\omega_i = 0$ ). Naturalmente, esto es debido a que el polo  $\kappa_1(\Omega)$ , al estar situado sobre el isocontorno  $\omega_i(\kappa_r, \kappa_i) = 0$ , siempre debe ser abarcado por el camino de pendiente máxima. Por otra parte, cuando el punto de silla se encuentra sobre el eje  $\kappa_i = 0$ , hecho que ocurre para  $\kappa = \kappa_{mt}$ , siendo  $\kappa_{mt}$  el máximo de la relación de dispersión temporal, la contribución del polo a la integral  $I_{1a}$  no debe considerarse ya

<sup>10</sup>Esto ocurre para el rayo  $x/t = \partial\omega_r/\partial\kappa_r(\kappa_{mt})$ , donde  $\kappa_{mt}$  es el máximo de la relación de dispersión temporal

<sup>11</sup>Esta condición se verifica siempre que el sistema sea convectivamente inestable.

<sup>12</sup>Como nota adicional, es fácil verificar que, puesto que el camino de descenso máximo verifica la relación  $\kappa_r(x/t) - \omega_r = Re[\kappa_*(x/t) - \omega(\kappa_*)]$ , junto con que  $\omega = \omega(\kappa_*) + (x/t)\Delta\kappa + O(\Delta\kappa^2)$  en las cercanías del punto de silla, el camino de descenso máximo ha de ser tangente a la curva  $\omega_i = cte$ .

que el camino de pendiente máxima es el propio eje real<sup>12</sup>. De lo anterior se deduce de forma inmediata que el rayo límite  $(x/t)_{lim}$  buscado se encuentra, necesariamente, en el intervalo

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \kappa_r}[\kappa_{me}] < \left(\frac{x}{t}\right)_{lim} < \frac{\partial \omega_r}{\partial \kappa_r}[\kappa_{mt}]. \quad (2.63)$$

El criterio (2.63) establece que, para cualquier rayo  $x/t < \partial \omega_r / \partial \kappa_r[\kappa_{me}]$ , la respuesta va a ser periódica con una frecuencia  $\Omega$  igual a la de la excitación, mientras que la respuesta en la región espacio-temporal  $x/t > \partial \omega_r / \partial \kappa_r[\kappa_{mt}]$ , será la correspondiente a un transitorio (véase la figura 2.9). El rayo límite proporciona por tanto una estimación de la velocidad de la propagación de la respuesta del sistema a una excitación periódica. Una vez hechas

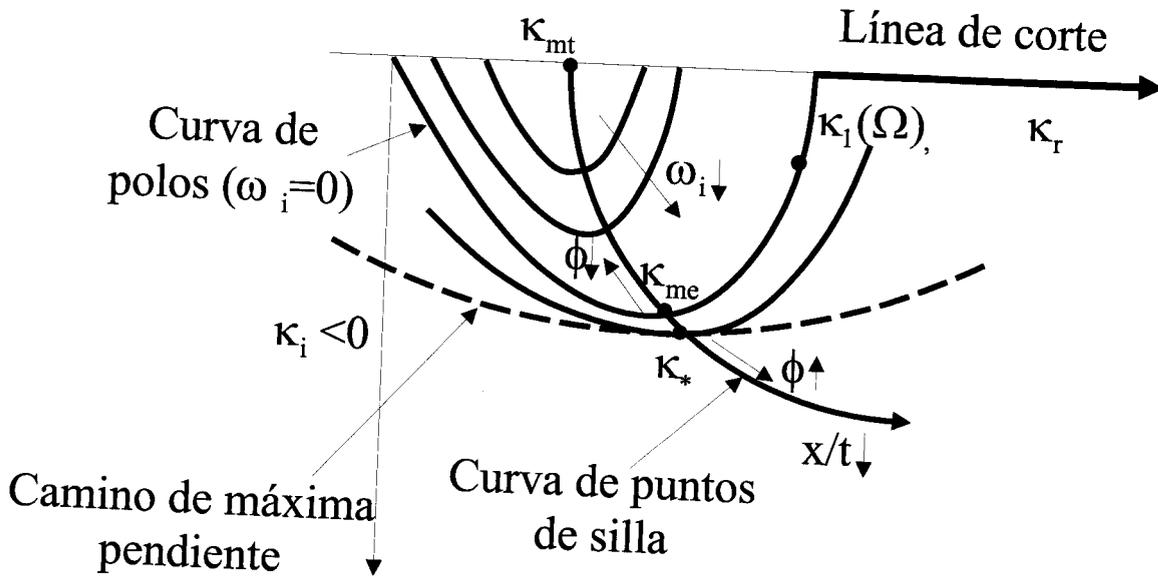


Figura 2.8: Esquema que muestra el camino de descenso máximo, que ha de abarcar a las curvas de  $\omega_i = cte$ .

estas consideraciones de carácter general, la condición que determina el rayo límite a partir del cual ha de considerarse la contribución del polo  $\kappa_1(\Omega)$ , se establece fácilmente si se tiene en cuenta que, como se indicó anteriormente, el camino de descenso máximo que emana del punto  $\kappa_*$  está determinado por los puntos  $\kappa$  para los que se cumple que  $\kappa_r x/t - \omega_r(\kappa_r, \kappa_i) = \text{Re}(\kappa_*)x/t - \omega_r(\kappa_*)$ . Por tanto, el rayo límite a partir del cual el camino de máxima pendiente abarca al polo, se define según las condiciones

$$\text{Re}[\kappa_1(\Omega)]x/t - \Omega = \text{Re}[\kappa_*]x/t - \omega_r(\kappa_*) \quad \text{y} \quad \text{Im}[\kappa_1(\Omega)]x/t > \text{Im}[\kappa_*]x/t - \omega_i(\kappa_*). \quad (2.64)$$

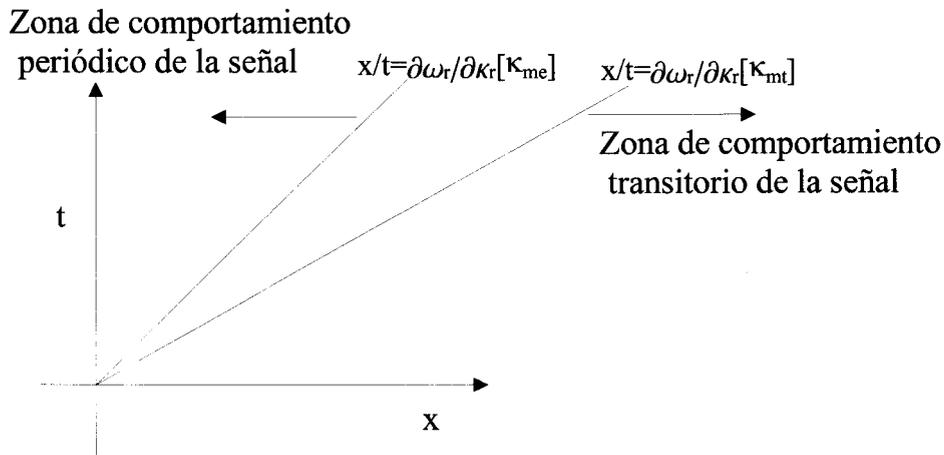


Figura 2.9: Esquema que muestra las cotas (2.63) del espacio-tiempo que delimitan los comportamientos transitorio y periódico de la señal.

De nuevo, estos resultados están en contradicción con lo expuesto en Huerre y Monkewitz (1990) y Huerre (2000), quienes consideran que la contribución de  $I_{1a}$  es un transitorio inicial que finalmente debe decaer a lo largo de cualquier rayo y asocian, por tanto, la respuesta permanente a la excitación con la integral  $I_{1b}$ , la cual se ha demostrado que debe decaer de forma exponencial con la distancia aguas abajo de la fuente.

Los resultados de la evaluación asintótica de la forma de la interfase (2.51), que han sido obtenidos calculando las integrales que aparecen en (2.54) siguiendo los pasos explicados en el párrafo anterior, han sido comparados con los resultados numéricos en las figuras 2.10-2.11. En las figuras 2.10 (a-b) se muestra la forma de la interfase para dos instantes diferentes. Obsérvese que la amplitud de la interfase crece hasta alcanzar un máximo para decaer tras el mismo. Debe indicarse que los análisis asintóticos clásicos presentados en Gaster (1965), Huerre y Monkewitz (1990) y, más recientemente, en Huerre (2000) no recogen este comportamiento que, desde un punto de vista físico, debe estar presente en la propagación de ondas excitadas externamente. Obsérvese también que, como era de esperar, la forma de la perturbación se dispersa aguas abajo, y que el acuerdo entre los resultados asintóticos y numéricos es mejor cuanto mayor es el tiempo. En las figuras 2.11 (a-c) se muestra la evolución temporal de la perturbación en tres puntos fijos aguas abajo de la fuente cuyas coordenadas son  $x = 100$ ,  $x = 200$  y  $x = 300$  respectivamente. Obsérvese cómo la respuesta tiende en todos los casos a una función periódica de frecuencia  $\Omega$ , siendo la amplitud de la oscilación en el punto más alejado de la fuente varios órdenes de magnitud mayor que en el más cercano a la misma. Nótese también cómo la respuesta

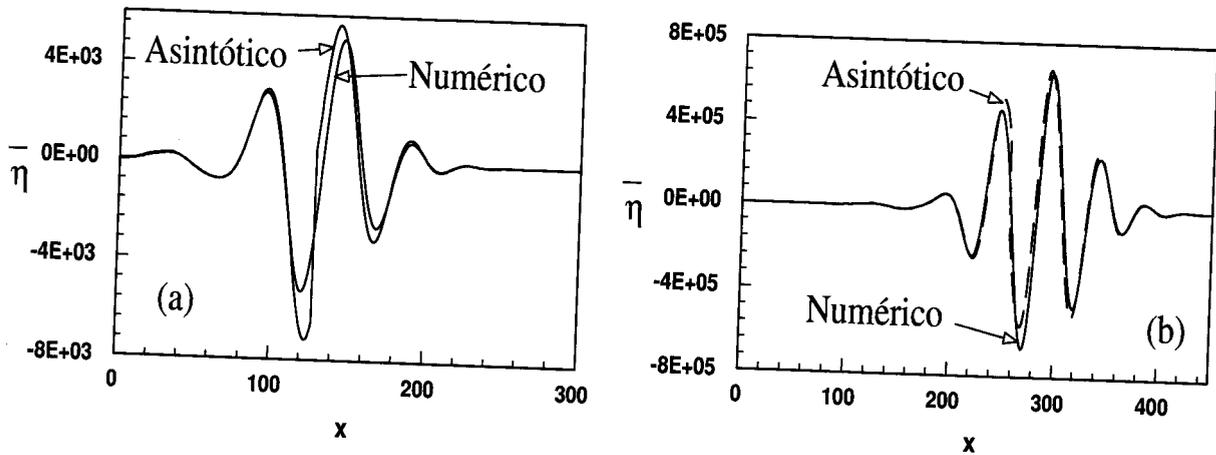


Figura 2.10: Evolución espacial de una señal periódica con  $\Omega = 0,1$  y  $\beta = 0,2$  para distintos instantes de tiempo. a)  $t = 100$ ; b)  $t = 200$ .

asintótica se aproxima tanto más a la numérica cuanto más alejado esté el punto de la fuente, debido a que el tiempo transcurrido para que la señal alcance estos puntos es, necesariamente, mayor.

## 2.4. Conclusiones

En este capítulo se han revisado conceptos de la estabilidad lineal de movimientos fluidos que serán de utilidad esencial en capítulos posteriores. En particular, se ha puesto de manifiesto cómo tanto el análisis clásico de estabilidad temporal (Rayleigh 1878, 1880, Chandrasekhar 1961, Michalke 1964, Drazin y Reid 1981) como el más reciente de estabilidad espacial (Michalke 1965, Keller, Rubinow y Tu 1973, Monkewitz y Huerre 1982, Lin y Kang 1987), tratados tradicionalmente por separado en la literatura de Mecánica de Fluidos, pueden obtenerse como casos particulares de un análisis más completo que tenga como punto de partida las ecuaciones generales (espacio-temporales) de la estabilidad lineal, y que incluya la excitación de perturbaciones tanto mediante condiciones iniciales como mediante un forzamiento externo. A continuación, se recogerán, a modo de conclusión, los puntos más importantes aparecidos a lo largo de este capítulo en lo que se refiere a la conexión existente entre los problemas de autovalores que surgen de los análisis de estabilidad temporal y espacial, y la resolución de problemas lineales sujetos a condiciones iniciales y a forzamiento externo. Sorprendentemente, la atención prestada a este enfoque unificado es relativamente reciente en la literatura de la Mecánica de Fluidos.

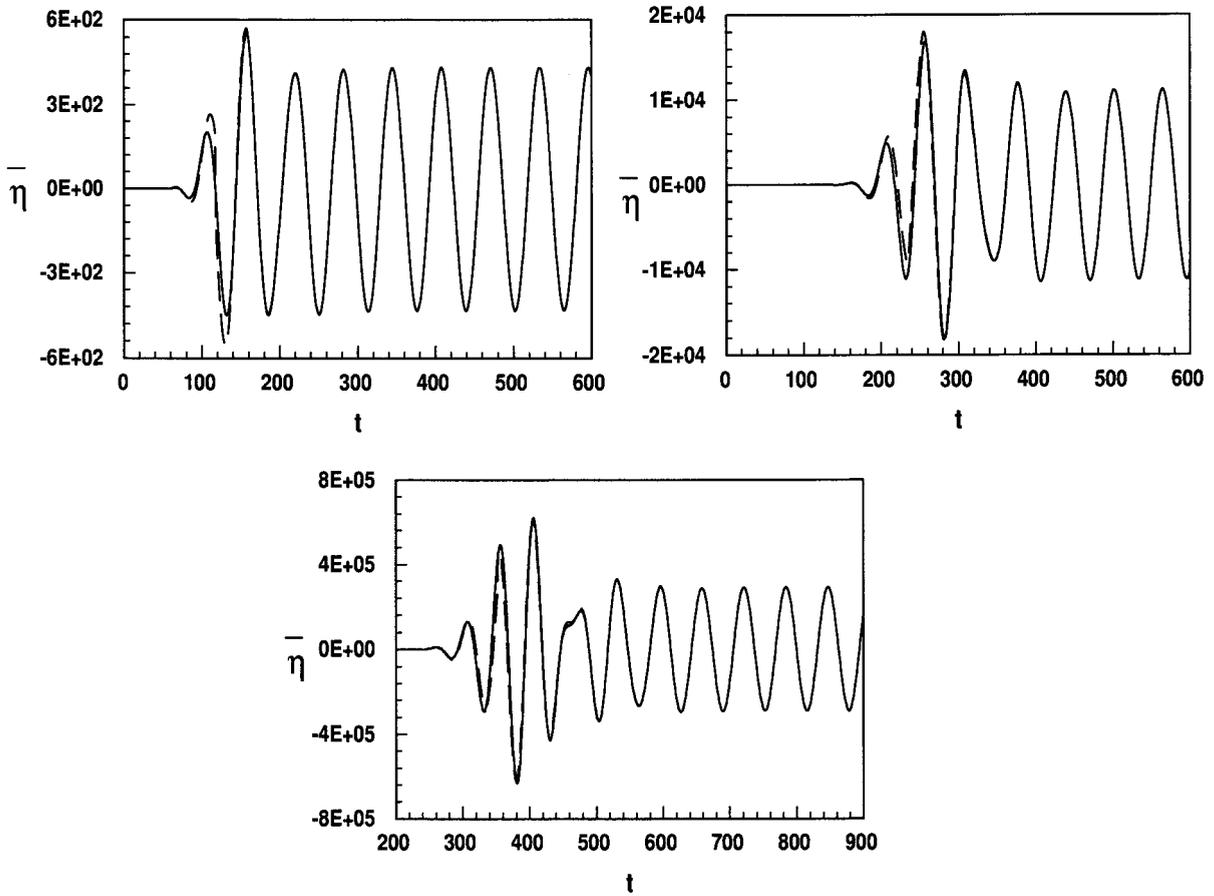


Figura 2.11: Evolución temporal, en varias posiciones fijas del espacio, de una señal periódica excitada a una frecuencia adimensional  $\Omega = 0,1$ , y para un valor del parámetro  $\beta = 0,2$ . a)  $x = 100$ ; b)  $x = 200$ ; c)  $x = 300$

Cuando se resuelve el problema de valores iniciales para las perturbaciones, los métodos del análisis clásico de estabilidad temporal que, esencialmente clasifican al sistema como estable o inestable de acuerdo con que admita o no alguna solución de la forma  $e^{i\omega t}$  con parte imaginaria de  $\omega$  negativa, son insuficientes para describir la evolución temporal de las pequeñas perturbaciones introducidas en el flujo inicialmente. En efecto, cuando el problema de valores iniciales se resuelve de forma completa, puede resultar que en un punto fijo del dominio fluido la perturbación inicialmente crezca con el tiempo, cualitativamente de acuerdo con las conclusiones del análisis de estabilidad temporal, pero acabe por decrecer en dicho punto debido a que es conveccionada aguas abajo, teniendo lugar el tipo de inestabilidad denominada convectiva. Está claro que este comportamiento no es

recogido por el análisis clásico de estabilidad temporal, puesto que para ello es necesario obtener la solución completa al problema de valores iniciales superponiendo los diferentes modos, cada uno de ellos con su frecuencia propia  $\omega$ , sujetos a las condiciones de contorno e iniciales dadas. En el caso de flujos paralelos, el proceso de superposición es esencial debido a que el espectro de modos continuo, lo que hace que la respuesta del sistema sea muy distinta de la correspondiente a un sólo modo o a la agrupación de un número de ellos. En efecto, la superposición de modos conlleva la aparición de interferencias entre ellos que hacen que el crecimiento de las perturbaciones no sea puramente exponencial, sino de la forma  $f \sim e^{\sigma t}/t^\beta$ . Asimismo, la superposición modal fija la velocidad de propagación de las perturbaciones que determina, en flujos inestables si, en un punto fijo del espacio, la amplitud de las perturbaciones decae con el tiempo al ser éstas convectadas aguas abajo (inestabilidades convectivas) o bien si las perturbaciones se amplifican temporalmente al ser el tiempo de crecimiento de la perturbación menor que el convectivo (inestabilidades absolutas). Por tanto, el análisis de estabilidad temporal, que se limita a encontrar soluciones a las ecuaciones linealizadas que dependan del tiempo en la forma  $e^{i\omega(\kappa)t}$ , con  $k$  real, puede predecir si un flujo será estable o inestable, pero no permite concluir nada acerca del tipo de inestabilidad que desarrolla, absoluta o convectiva, ni de la evolución espacio-temporal de la perturbación. Debe puntualizarse, no obstante, que los resultados del análisis de estabilidad temporal permiten predecir el rayo de máxima amplificación temporal de la perturbación originada por un pulso inicial, así como la evolución temporal a lo largo de dicho rayo. Esto se ha comprobado para un caso concreto en §2.3, donde se ha llevado a cabo un análisis asintótico del problema mediante el método del descenso máximo, cuyos resultados han sido validados numéricamente con una gran aproximación. Esto confirma la validez de criterios basados en el método del descenso máximo tales como el Briggs, expuesto en §2.1.

Por otra parte, el objetivo de los análisis de estabilidad espacial (Michalke 1965, Monkewitz y Huerre 1982), es caracterizar las perturbaciones que se amplifican bajo una excitación temporal externa de frecuencia constante  $\omega$ . Para ello, se suponen soluciones a las ecuaciones linealizadas de la forma  $e^{i(k(\omega)x - \omega t)}$ , donde  $\omega$  en este tipo de análisis sólo toma valores reales. Dichas soluciones han sido utilizadas tradicionalmente para describir la propagación de pequeñas perturbaciones, debido a que los experimentos de Schubauer y Skramstad (1947) y, posteriormente, de Browand (1966) y Freymuth (1966) sobre estabilidad en flujos de cortadura excitados armónicamente, demostraron que las inestabilidades se amplifican exponencialmente con la distancia a la fuente, en vez de hacerlo en el tiem-

po. Los primeros análisis de estabilidad espacial sólo estaban soportados por la evidencia experimental hasta que Gaster (1965) y, posteriormente, otros autores como Huerre y Monkewitz (1985, 1990) demostraron que dichos análisis pueden obtenerse como un caso límite del problema más general consistente en la resolución de las ecuaciones linealizadas con términos fuentes armónicos. La resolución de este problema se ha ilustrado en §2.3, donde se ha demostrado de forma tanto analítica como numérica, que existe una zona espacio-temporal del dominio fluido en la cual las perturbaciones evolucionan con una frecuencia constante e igual a la de la excitación, creciendo la amplitud de las oscilaciones exponencialmente con la distancia a la fuente, lo que coincide con el resultado clásico de los análisis de estabilidad espacial. En esta tesis, se proporciona un método sencillo, no descrito anteriormente en la literatura, para determinar la región espacio-temporal en la que las perturbaciones se amplifican exponencialmente con la distancia a la fuente; también se ha probado que las perturbaciones han de decaer a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . Debe indicarse que nuestros resultados contradicen los publicados en trabajos anteriores (Huerre y Monkewitz 1990, Huerre 2000), puesto que se ha demostrado que la integral responsable de que exista una región del espacio-tiempo en la que las perturbaciones son periódicas, es distinta a la propuesta por estos autores. El procedimiento seguido en esta tesis para tratar asintóticamente el problema de la señal, fundamentado sólo en la aplicación correcta del método de la pendiente máxima es, bajo nuestro criterio, más transparente (y exacto) que el propuesto por autores como Gaster (1965), Huerre y Monkewitz (1990) y Huerre (2000).

Finalmente, hay que indicar que las conclusiones extraídas de este capítulo serán de gran utilidad en los dos capítulos siguientes, en los que se llevarán a cabo estudios de estabilidad de flujos correspondientes a situaciones experimentales de atomización y de generación de burbujas, que se describirán en los capítulos tercero y cuarto respectivamente. Para el caso de la atomización se va a llevar a cabo un estudio de estabilidad temporal, cuya validez se justificará en el capítulo tercero, y que permite explicar y predecir modos de atomización no descritos anteriormente en la literatura. En el caso de la generación de micro-burbujas, se resolverá en el capítulo cuarto el problema de valores iniciales, ilustrado en §2.2, con el objeto de determinar si las inestabilidades que aparecen en este caso son absolutas o convectivas, para lo cual, se empleará el criterio de Briggs.

# Capítulo 3

## Estabilidad lineal de un chorro líquido rodeado por una corriente coaxial de gas

### 3.1. Introducción

El fenómeno de la rotura de chorros líquidos en gotas ha sido investigado tanto teórica como experimentalmente desde los tiempos de Rayleigh (Rayleigh 1878). Rayleigh, en su investigación pionera sobre el fenómeno, llevó a cabo el análisis de estabilidad temporal de un cilindro líquido que fluye a velocidad constante, y calculó los factores de crecimiento de las perturbaciones en función del número de onda. Los resultados deducidos de este modelo simplificado predicen con gran exactitud los resultados experimentales si las velocidades del chorro líquido son lo suficientemente bajas, puesto que entonces, la rotura está dominada por los efectos capilares siendo despreciable la influencia del medio exterior. Sin embargo, cuando las velocidades relativas entre el líquido y el aire aumentan, los resultados de Rayleigh dejan de ser válidos y el acoplamiento con el gas exterior debe considerarse en el análisis de estabilidad. El primer paso en esta dirección fue dado por Weber (Weber 1931), quien estudió la estabilidad de un chorro líquido rodeado por una corriente coaxial de gas, suponiendo que ambas corrientes fluyen con velocidades distintas pero uniformes. Sus resultados predecían mayores factores de crecimiento y menores tamaños de gotas que los observados experimentalmente, hecho que condujo a Sterling y Sleicher (1975) a modificar el análisis de Weber incluyendo en sus ecuaciones de estabilidad los efectos viscosos de la corriente externa a través de un coeficiente empírico,

determinado de manera que la predicción teórica ajustase con las curvas experimentales de longitud de rotura frente a velocidad de inyección. Un punto débil de los análisis de Weber y Sterling y Sleicher es el de considerar perfiles básicos de velocidad en exceso simplificados (uniformes) tanto para la corriente de líquido como para la de gas.

La estabilidad de chorros líquidos para los problemas de Rayleigh y de Weber ha sido tratada también en la literatura desde el punto de vista del análisis espacial. Como se ha demostrado en capítulo segundo, en el caso de corrientes paralelas, el análisis de estabilidad espacial es el apropiado para el estudio de la propagación de perturbaciones excitadas por una fuente externa armónica. Sin embargo, Keller, Rubinow y Tu (1973) encontraron que, para números de Weber suficientemente elevados, los resultados obtenidos mediante el análisis de estabilidad espacial, eran muy similares a los obtenidos por Rayleigh en su análisis de estabilidad temporal; a esta misma conclusión llegaron Lin y Kang (1987) al estudiar la influencia de la corriente exterior y comparar sus resultados con los del análisis de estabilidad temporal llevado a cabo por Taylor (1963). Una característica común a todos estos trabajos, bien sean de estabilidad temporal o espacial, es que en todos ellos se hace la simplificación de suponer perfiles básicos uniformes tanto para la corriente de líquido como para la de gas. Claramente, esto constituye una simplificación excesiva, puesto que los análisis de Rayleigh (1880) y Miles (1957, 1959 a,b) revelaron el papel esencial jugado por los perfiles básicos de velocidad en el desarrollo de las inestabilidades del tipo de capa de mezcla, tanto en el caso de un medio homogéneo (Rayleigh) como en el caso de uno no homogéneo, que se presenta, por ejemplo, en la generación de ondas por el viento (Miles). La importancia de los perfiles básicos de velocidad en el desarrollo de inestabilidades en chorros líquidos, ha sido tomada en consideración de manera sistemática sólo recientemente. En efecto, aunque la primera alusión a la influencia de los perfiles de velocidad en el proceso de atomización primaria puede encontrarse en el trabajo de Hoyt y Taylor (1977), el primer trabajo en el que se realiza un análisis teórico sobre la influencia del espesor de la capa de cortadura de gas en los procesos de atomización primaria es el de Villermaux (1998). En este trabajo se extiende, mediante la consideración del salto de densidad a través de la interfase, el análisis de estabilidad de un perfil de velocidad lineal a trozos llevado a cabo por Rayleigh (1880). Debido a que la cantidad de movimiento de la corriente gaseosa en la situación considerada en este trabajo es mucho mayor que la de líquido, Villermaux sólo considera la influencia del espesor de la capa de cortadura del gas en el desarrollo de la inestabilidad, encontrando muy buen acuerdo entre la frecuencia de generación de gotas predicha por su análisis y la observada experimentalmente.

En experimentos muy similares a este último, Lasheras, Villermaux y Hopfinger (1998) y Lasheras y Hopfinger (2000) han encontrado que las frecuencias del proceso de atomización primaria están íntimamente relacionadas con el espesor de la capa de cortadura del gas. Otro trabajo relevante, aunque de carácter mucho más teórico que los anteriores, es el de Lin y Chen (1998), quienes llevaron a cabo el análisis de estabilidad espacial de una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes, que presenta el inconveniente de ser poco realista. En este análisis se tienen en cuenta los perfiles básicos de velocidad de las corrientes de líquido y gas, así como la influencia de la viscosidad en el desarrollo de las perturbaciones, identificándose los rangos paramétricos correspondientes a los regímenes de atomización de Taylor y Rayleigh.

En este capítulo se va a tratar desde un punto de vista tanto teórico como experimental, el proceso de rotura de los ligamentos líquidos formados por el atomizador descrito en detalle en §1.4. Como fue anticipado entonces, dependiendo de las velocidades relativas entre el líquido y el gas, se observan distintos tipos de rotura del chorro líquido, lo que afecta de forma primordial a la dispersión en tamaños de las gotas generadas por el atomizador. Los tipos de rotura dependen, fundamentalmente, del número de Weber que, como es sabido, mide la relación entre los efectos de inercia (cuantificados haciendo uso de la velocidad relativa entre las dos corrientes) y los capilares. En la figura 3.1 (a), obtenida

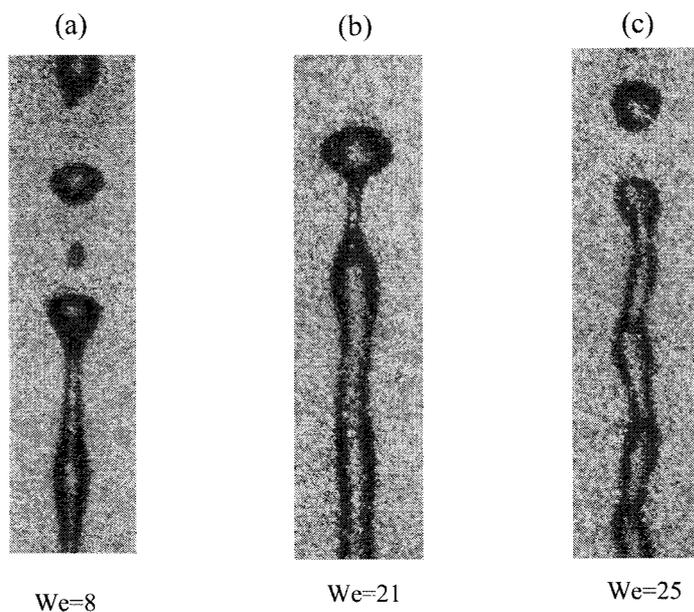


Figura 3.1: Distintos modos de rotura observados experimentalmente al variar el número de Weber.

mediante una cámara de alta velocidad, se observa que para bajos números de Weber, las predicciones del modelo de Rayleigh coinciden con lo observado experimentalmente. Sin embargo, al aumentar el número de Weber, se encuentra que las observaciones experimentales no pueden explicarse mediante ningún análisis de estabilidad que incluya la hipótesis de corrientes básicas uniformes. Incluso los modelos más completos que incluyen en el análisis el espesor de la capa de cortadura del gas, como el trabajo de Villermaux (1998) o el de Lin y Chen (1998), son incapaces de explicar las observaciones experimentales a altos números de Weber (ver figuras 3.1 b,c).

Los resultados anteriores sugieren que, para explicar nuestros experimentos, es necesario considerar un modelo de coflujo líquido-gas que responda más fielmente a las condiciones experimentales. Con este propósito, se calcularán aquí los perfiles básicos de velocidad necesarios para el análisis, de una forma autoconsistente mediante la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes en la aproximación parabólica y casi unidireccional. Una vez calculada la solución básica, se llevará a cabo un análisis de estabilidad temporal ya que, para altos números de Weber, como se ha indicado anteriormente, los análisis de estabilidad temporal y espacial conducen a resultados similares. De acuerdo con lo que es usual en los análisis clásicos de estabilidad de flujos paralelos en los que el mecanismo de inestabilidad es no viscoso, se despreciará la influencia de la viscosidad en el desarrollo de las perturbaciones. Esta simplificación está justificada para grandes valores del parámetro  $\omega\lambda^2/\nu_g$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de la perturbación,  $\lambda$  su longitud de onda y  $\nu_g$  la viscosidad cinemática del gas. Tampoco se considerará la influencia de la compresibilidad, ni en el flujo básico ni en el desarrollo de las perturbaciones en la corriente de gas. Estas hipótesis de partida han de ser validadas mediante la comparación de los resultados teóricos con los experimentales, lo que se llevará a cabo al final de este capítulo. Se mostrará entonces que, a pesar de las simplificaciones introducidas, nuestro modelo es capaz de explicar los distintos regímenes de atomización observados en los experimentos y que una variedad de modos, aparentemente inexplorados en la literatura, aparecerá como consecuencia de la consideración de la estructura de los perfiles de velocidad tanto del líquido como del gas. Los resultados para el caso de corrientes uniformes presentados previamente en la literatura, son recuperados como casos límites cuando el espesor característico de la capa de cortadura que se desarrolla en la interfase líquido-gas tiende a cero.

Teniendo en cuenta lo anterior, este capítulo se estructura de la forma que se expone a continuación. En §3.2 se describe la situación experimental a la que, finalmente, se aplicarán los resultados teóricos obtenidos, y se formulan las ecuaciones y condiciones de

contorno que gobiernan los flujos básicos de líquido y de gas, detallándose el procedimiento numérico seguido para resolver el problema. En §3.3 se analiza la influencia de los parámetros del problema y las condiciones de contorno en la estación inicial (salida de la cámara de presión) en la solución básica y se lleva a cabo la validación experimental de ésta. El análisis de estabilidad queda formulado en §3.4, donde se deducen las ecuaciones que gobiernan el desarrollo de las perturbaciones, y se describe el método para su integración, lo que permite hallar los autovalores del problema. A pesar de las simplificaciones hechas, el número de modos inestables que aparecen al resolver el problema hace difícil la interpretación de los resultados obtenidos. Por ello, y para un mejor entendimiento de los mecanismos físicos que conducen a la existencia de los diversos modos que aparecen en el análisis lineal de estabilidad de la solución hallada en §3.3, la resolución de las ecuaciones se ha llevado a cabo primeramente para dos modelos simplificados, que están descritos en §3.5.1 y §3.5.2. El primero de ellos considera la estabilidad de un chorro líquido con un perfil de velocidades uniforme, rodeado por una corriente de gas, cuya estructura básica se calcula numéricamente mediante el método descrito en §3.2. Para este modelo se encuentran tres familias distintas de modos: una familia capilar axilsimétrica, otra helicoidal con frecuencias del orden de las de la familia capilar, y un tercer grupo de autovalores, correspondientes a un tipo de modos que serán denominados *modos de estela*, y cuyas frecuencias de excitación son del orden de  $U_\infty/R$ , donde  $U_\infty$  es la velocidad del gas lejos de la interfase y  $R$  el radio del chorro líquido. En este modelo, los resultados de Rayleigh, para la inestabilidad capilar, y de Weber, para la inestabilidad del tipo de Kelvin-Helmholtz, son recuperados en los límites apropiados. En §3.5.2 se considera un segundo modelo simplificado en el que se permite el acoplamiento entre los flujos básicos del líquido y del gas y, por tanto, corresponde a perfiles básicos de velocidad más realistas que los considerados en el modelo anterior. La simplificación introducida en este modelo consiste en sólo perturbar el chorro líquido, manteniendo la corriente gaseosa no perturbada. Del análisis se obtienen, además de la familia de modos capilares encontrada en §3.5.1, dos familias distintas de modos, una axilsimétrica y otra helicoidal, ambas asociadas a la capa de cortadura que se desarrolla en el líquido. Las cinco familias de modos, identificadas previamente en los modelos simplificados de §3.5.1 y §3.5.2, están presentes en el modelo completo tratado en §3.5.3 donde, finalmente, se consideran los perfiles reales de velocidad, calculados y validados experimentalmente en §3.3. En §3.6 se compararán los resultados numéricos con los obtenidos experimentalmente y se mostrará cómo la teoría aquí desarrollada, explica las características generales observadas en

la rotura de los ligamentos líquidos formados en nuestros experimentos. Finalmente, las conclusiones se presentarán en §3.7.

## 3.2. Solución básica

El primer paso para realizar el análisis de estabilidad es calcular los perfiles básicos de velocidad de las corrientes de líquido y gas. En la figura 3.2 (a) se muestra, al igual que se hizo en el capítulo primero, un esquema del atomizador utilizado para realizar este estudio. En él puede verse que el diámetro del orificio de salida de la cámara de presión (del orden de las 200  $\mu\text{m}$ ) es mucho mayor que el del chorro de líquido formado (que es del orden de las diez micras), lo que permite despreciar, en primera aproximación, el efecto sobre el chorro líquido de la capa de cortadura que se desarrolla en la región donde las velocidades del gas caen a cero (véase la figura 3.2 b). Por tanto, de ahora en adelante, el análisis se centrará en el modelo simplificado representado en la figura 3.2 (c), donde las velocidades del gas en el infinito tienden a una constante distinta de cero.

Para escribir las ecuaciones que gobiernan la evolución aguas abajo de los flujos de líquido y gas, es conveniente usar el siguiente grupo de variables y parámetros adimensionales:

$$r = \frac{\hat{r}}{R_0}, \quad z = Re_g^{-1} \frac{\hat{z}}{R_0}, \quad u = \frac{\hat{u}}{U_\infty}, \quad v = Re_g \frac{\hat{v}}{U_\infty}, \quad f = \frac{\hat{f}}{R_0},$$

$$p_l = \frac{\hat{p}_l}{\rho_l U_\infty^2}, \quad We_0 = \frac{\rho_g U_\infty^2 R_0}{\sigma}, \quad M = \frac{\rho_l}{\rho_g}, \quad \nu = \frac{\nu_l}{\nu_g}, \quad \mu = \frac{\mu_l}{\mu_g}, \quad (3.1)$$

donde  $R_0$  es el radio del chorro en la estación inicial  $z = 0$ ,  $U_\infty$  es la velocidad del gas para  $r \rightarrow \infty$ ,  $\sigma$  es la tensión superficial entre el líquido y el gas,  $Re_g = U_\infty R_0 / \nu_g$  y  $We$  son respectivamente el número de Reynolds del flujo de gas y el número de Weber y  $\hat{f}(z)$  es el radio del chorro líquido. Ya que la geometría del problema es esbelta  $\delta/L \ll 1$ , donde  $\delta$  y  $L$  son longitudes características en la dirección radial y axial respectivamente, las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias que gobiernan la evolución aguas abajo de las corrientes de líquido y gas, pueden ser escritas en su aproximación casi unidireccional, lo que conduce al sistema de ecuaciones:

$$r \frac{\partial u_g}{\partial z} + \frac{\partial(rv_g)}{\partial r} = 0, \quad (3.2)$$

$$ru_g \frac{\partial u_g}{\partial z} + rv_g \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_g}{\partial r} \right), \quad (3.3)$$

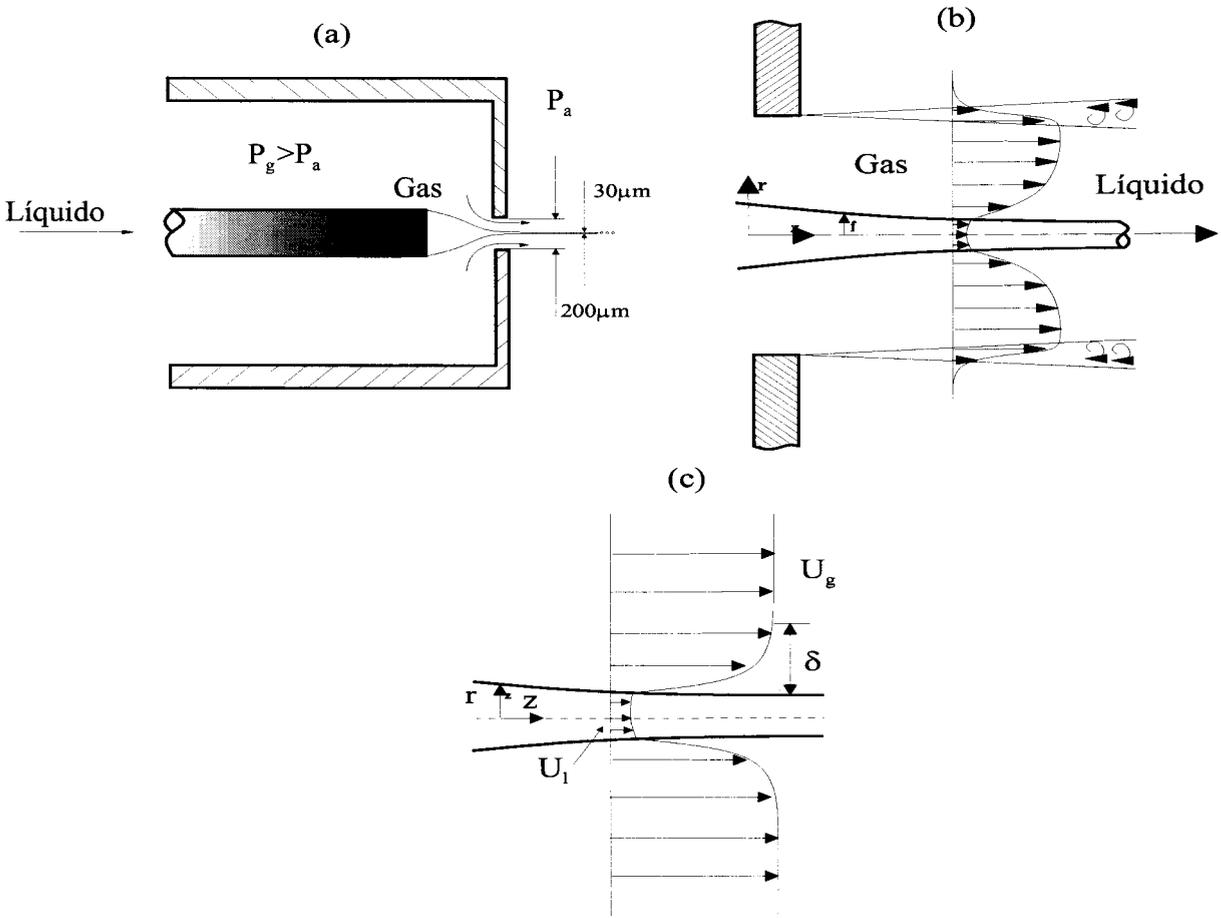


Figura 3.2: Esquema del atomizador y de los flujos de líquido y gas. a) Esquema del atomizador; b) Esquema de los perfiles de velocidad reales en una situación en la que el chorro de líquido está rodeado por la corriente de gas en la que se desarrolla una capa de mezcla en la zona exterior; c) Modelo simplificado considerado en este estudio

$$\frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_l)}{\partial r} = 0, \quad (3.4)$$

$$u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial r} = -\frac{\partial p_l}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_l}{\partial r} \right), \quad (3.5)$$

$$p_l - p_g = (MW e_0)^{-1} \frac{1}{f}, \quad (3.6)$$

donde se han usado las variables y parámetros definidos en (3.1). El sistema (3.2)-(3.6) debe resolverse sujeto a las siguientes condiciones de contorno:

$$z = 0 \quad u_l = u_l(r) \quad , \quad u_g = u_g(r), \quad (3.7)$$

$$r = 0 \quad v_l = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_l}{\partial r} = 0, \quad (3.8)$$

## CAPÍTULO 3. ESTABILIDAD LINEAL DEL CHORRO LÍQUIDO

$$v_l = \frac{\partial f}{\partial z} u_l, \quad (3.9)$$

$$r = f \quad u_g = u_l \quad , \quad v_g = v_l \quad , \quad \frac{\partial u_g}{\partial r} = \mu \frac{\partial u_l}{\partial r} \quad , \quad (3.10)$$

$$r \rightarrow \infty \quad u_g \rightarrow 1, \quad (3.11)$$

donde la condición (3.7) especifica los perfiles de velocidad de tanto el líquido como el gas en la estación inicial  $z = 0$ , (3.8) expresa la condición de regularidad en el chorro líquido debido a la simetría axial del problema, las ecuaciones (3.9) y (3.10) expresan respectivamente la condición de superficie libre y la condición de continuidad de velocidades y de esfuerzos tangenciales a través de la interfase, y (3.11) representa la condición de acoplamiento de las velocidades axiales del gas con las de la corriente externa cuando  $r \rightarrow \infty$ . A efectos computacionales, será conveniente en lo que sigue, eliminar las velocidades radiales  $v_l$  y  $v_g$  de las ecuaciones de cantidad de movimiento (3.3) y (3.5) usando las ecuaciones de continuidad (3.2) y (3.4) respectivamente; las ecuaciones (3.3) y (3.5) quedan por tanto en la forma:

$$r u_g \frac{\partial u_g}{\partial z} + \left( r v_g |_{r=f} - \int_f^r r \frac{\partial u_g}{\partial z} dr \right) \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_g}{\partial r} \right), \quad (3.12)$$

$$u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} - \frac{1}{r} \left( \int_0^r r \frac{\partial u_l}{\partial z} dr \right) \frac{\partial u_l}{\partial r} = -\frac{\partial p_l}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_l}{\partial r} \right). \quad (3.13)$$

Es también ventajoso desde el punto de vista numérico, reescribir la ecuación (3.12) en términos de las nuevas variables independientes

$$\zeta = \ln(z + z_0) \quad \eta = \frac{r - f}{(z + z_0)^{1/2}} \quad (3.14)$$

y la ecuación (3.13), en términos de las variables independientes

$$\zeta = \ln(z + z_0) \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{r^2}{f^2}, \quad (3.15)$$

donde  $z_0$  es una constante que será determinada de forma conveniente posteriormente en §3.3. En términos de las nuevas variables (3.14)-(3.15), las ecuaciones (3.12) y (3.13) toman la forma

$$\begin{aligned} & (f + \exp(0,5\zeta)\eta) u_g \frac{\partial u_g}{\partial \zeta} - \left[ \int_0^\eta (f + \exp(0,5\zeta)\eta) \frac{\partial u_g}{\partial \zeta} d\eta \right] \frac{\partial u_g}{\partial \eta} = \\ & = \left[ \exp(0,5\zeta) + 1/2 \int_0^\eta (f + 2 \exp(0,5\zeta)\eta) u_g d\eta \right] \frac{\partial u_g}{\partial \eta} + \\ & + (f + \exp(0,5\zeta)\eta) \frac{\partial^2 u_g}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left( \int_0^\eta u_g d\eta \right) \frac{\partial u_g}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$u_l \frac{\partial u_l}{\partial \zeta} - \left( \int_0^\xi \frac{\partial u_l}{\partial \zeta} d\xi \right) \frac{\partial u_l}{\partial \xi} = \frac{2 \exp(\zeta)}{f^2} \nu \left( \frac{\partial u_l}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 u_l}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{MW e_0 f^2} + \frac{2}{f} \left( \int_0^\xi u_l d\xi \right) \frac{\partial u_l}{\partial \xi} \right] \quad (3.17)$$

mientras que las condiciones de contorno (3.7) y (3.9)-(3.11) se escriben

$$\zeta = \zeta_0 = \ln(z_0) \quad u_g = u_g(\eta) \quad , \quad u_l = u_l(\xi), \quad (3.18)$$

$$\eta = 0, \xi = 1/2 \quad u_l = u_g \quad , \quad \frac{\partial u_g}{\partial \eta} = \mu \frac{\exp(0,5\zeta)}{f} \frac{\partial u_l}{\partial \xi} \quad (3.19)$$

$$2f \frac{\partial f}{\partial \zeta} \int_0^{1/2} u_l d\xi + f^2 \int_0^{1/2} \frac{\partial u_l}{\partial \zeta} d\xi = 0 \quad (3.20)$$

$$r \rightarrow \infty \quad u_g \rightarrow 1. \quad (3.21)$$

Obsérvese además, que la condición de superficie libre (3.20) puede ser escrita en la forma

$$2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} q + f^3 \int_0^{1/2} \frac{\partial u_l}{\partial \zeta} d\xi = 0, \quad (3.22)$$

donde  $q = \int_0^f r u_l dr = f^2 \int_0^{1/2} u_l d\xi$  es el caudal adimensional de líquido. Para resolver el sistema (3.16)-(3.17) se ha empleado un método de líneas sugerido por la naturaleza parabólica de las ecuaciones. De acuerdo con este método, al discretizar en (3.16)-(3.17) tanto las derivadas radiales como las integrales, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con  $\zeta$  como variable independiente. Dicho sistema puede integrarse en la dirección axial mediante un método explícito paso a paso, para cuyo propósito se ha usado un integrador Runge-Kutta de paso variable. La discretización de (3.16)-(3.17), usando diferencia finitas centradas para las derivadas radiales y la regla del trapecio para las integrales, proporciona, para el dominio gaseoso,

$$\begin{aligned} & (f + \exp(0,5\zeta)\eta_i) u_{gi} \frac{\partial u_{gi}}{\partial \zeta} - \\ & - \left[ \sum_{k=0}^{k=i} (1 - 0,5\delta_{k0} - 0,5\delta_{ki}) h_g (f + \exp(0,5\zeta)\eta_k) \frac{\partial u_{gk}}{\partial \zeta} \right] \frac{u_{g(i+1)} - u_{g(i-1)}}{2h_g} = \\ & = \exp(0,5\zeta) \frac{u_{g(i+1)} - u_{g(i-1)}}{2h_g} + \\ & + \left[ 1/2 \sum_{k=0}^{k=i} (1 - 0,5\delta_{k0} - 0,5\delta_{ki}) h_g (f + 2 \exp(0,5\zeta)\eta_k) u_{gk} \right] \frac{u_{g(i+1)} - u_{g(i-1)}}{2h_g} + \\ & + (f + \exp(0,5\zeta)\eta_i) \frac{u_{g(i+1)} - 2u_{gi} + u_{g(i-1)}}{h_g^2} + \\ & + \left[ \sum_{k=0}^{k=i} (1 - 0,5\delta_{k0} - 0,5\delta_{ki}) h_g u_{gk} \right] \frac{u_{g(i+1)} - u_{g(i-1)}}{2h_g} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad i = 1, \dots, G-1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\delta_{ij}$  representa la conocida  $\delta$  de Kroenecker,  $h_g$  es el paso de discretización en la región del gas y  $u_{gG} = 1$ ; asimismo, para el dominio líquido se obtiene

$$\begin{aligned}
& u_{lj} \frac{\partial u_{lj}}{\partial \zeta} - \left[ \sum_{k=0}^{k=j} (1 - 0,5\delta_{k0} - 0,5\delta_{kj}) h_l \frac{\partial u_{lk}}{\partial \zeta} \right] \frac{u_{l(j+1)} - u_{l(j-1)}}{2h_l} = \\
& = \frac{2\nu \exp(\zeta)}{f^2} \left( \frac{u_{l(j+1)} - u_{l(j-1)}}{2h_l} \right) + \frac{2\nu \exp(\zeta)}{f^2} \left( \xi_j \frac{u_{l(j+1)} - 2u_{lj} + u_{l(j-1)}}{h_l^2} \right) + \\
& + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{MW_{e_0} f^2} + \frac{2}{f} \left[ \sum_{k=0}^{k=j} (1 - 0,5\delta_{k0} - 0,5\delta_{kj}) h_l u_{lk} \right] \frac{u_{l(j+1)} - u_{l(j-1)}}{2h_l} \right] \\
& j = 1, \dots, L - 1,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

donde  $h_l$  es el paso de discretización y  $G$  y  $L$  son el número de puntos de discretización en la dirección radial (líneas) para el gas (indicado mediante el subíndice  $i$ ) y para el líquido (indicado mediante el subíndice  $j$ ) respectivamente. La ecuación para la evolución de la velocidad en el eje  $u_{l0}$ , correspondiente al nodo  $j = 0$ , puede ser obtenida de (3.17) haciendo  $\xi = 0$  y discretizando  $\partial u_l / \partial \xi$  mediante diferencias finitas de segundo orden tomadas hacia delante:

$$u_{l0} \frac{\partial u_{l0}}{\partial \zeta} = \left( \frac{2\nu \exp(\zeta)}{f^2} \right) \frac{4u_{l1} - 3u_{l0} - u_{l2}}{2h_l} + \frac{1}{MW_{e_0} f^2} \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \tag{3.25}$$

Asimismo, la ecuación para la evolución de la velocidad en la superficie del chorro ( $j=L$ ,  $i=0$ )  $u_{g0} = u_{lL}$  puede obtenerse tomando la derivada según  $\zeta$  de la segunda ecuación en (3.19) (continuidad del esfuerzo tangencial en la superficie),

$$\begin{aligned}
& \eta = 0, \xi = 1/2 : \\
& 4 \frac{\partial u_{1g}}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_{2g}}{\partial \zeta} - 3 \frac{\partial u_{0g}}{\partial \zeta} + F \left( 4 \frac{\partial u_{l(L-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_{l(L-2)}}{\partial \zeta} - 3 \frac{\partial u_{lL}}{\partial \zeta} \right) - \\
& - F (4u_{l(L-1)} - u_{l(L-2)} - 3u_{lL}) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \zeta} = -\frac{F}{2} (4u_{l(L-1)} - u_{l(L-2)} - 3u_{lL}),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde  $F = \mu h_g \exp(0,5\zeta) / (h_l f)$  y las derivadas según  $\eta$  en la superficie han sido discretizadas hacia delante para el dominio gaseoso mientras que las derivadas según  $\xi$  han sido discretizadas hacia atrás en el dominio líquido. Finalmente, la ecuación diferencial para  $f(\zeta)$  se obtiene de (3.22) como

$$f^3 \left[ \sum_{j=0}^{j=L} (1 - 0,5\delta_{j0} - 0,5\delta_{jL}) h_l \frac{\partial u_{lj}}{\partial \zeta} \right] + 2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} q = 0. \tag{3.27}$$

Finalmente, el sistema (3.23)-(3.27) debe ser integrado sujeto a la condición inicial

$$\zeta = \zeta_0 \quad u_{gi} = u_g(\eta_i) \quad , \quad u_{lj} = u_l(\xi_j), \quad i = 0 \dots G, \quad j = 0 \dots L. \quad (3.28)$$

Para obtener de manera eficiente la derivadas  $\partial u_{gi}/\partial \zeta$  y  $\partial u_{lj}/\partial \zeta$  en (3.23)-(3.27), obsérvese que estas ecuaciones pueden ser expresadas en forma matricial como

$$\underline{\underline{A}} \cdot \frac{\partial \underline{u}_g}{\partial \zeta} = \underline{b}_0 + \underline{b}_1 \frac{\partial u_{g0}}{\partial \zeta} + \underline{b}_2 \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad (3.29)$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \frac{\partial \underline{u}_l}{\partial \zeta} = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad (3.30)$$

donde  $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$  son matrices triangulares inferiores y  $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{c}_0$  y  $\underline{c}_1$  son vectores cuyos elementos dependen de los valores de  $\underline{u}_g$  y  $\underline{u}_l$  en una estación en concreto. Por tanto, la solución de (3.29) puede ser obtenida como función de  $\partial u_{g0}/\partial \zeta$  y  $\partial f/\partial \zeta$  en la forma

$$\frac{\partial \underline{u}_g}{\partial \zeta} = \frac{\partial \underline{u}_g^0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \underline{u}_g^1}{\partial \zeta} \frac{\partial u_{g0}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \underline{u}_g^2}{\partial \zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad (3.31)$$

donde  $\partial \underline{u}_g^0/\partial \zeta, \partial \underline{u}_g^1/\partial \zeta$  y  $\partial \underline{u}_g^2/\partial \zeta$  son las soluciones de  $\underline{\underline{A}} \cdot \partial \underline{u}_g^0/\partial \zeta = \underline{b}_0, \underline{\underline{A}} \cdot \partial \underline{u}_g^1/\partial \zeta = \underline{b}_1$  y  $\underline{\underline{A}} \cdot \partial \underline{u}_g^2/\partial \zeta = \underline{b}_2$  respectivamente. De forma análoga, las soluciones de (3.30) pueden ser obtenidas como función de  $\partial f/\partial \zeta$  como,

$$\frac{\partial \underline{u}_l}{\partial \zeta} = \frac{\partial \underline{u}_l^0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \underline{u}_l^1}{\partial \zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad (3.32)$$

donde  $\partial \underline{u}_l^0/\partial \zeta$  y  $\partial \underline{u}_l^1/\partial \zeta$  son las soluciones de  $\underline{\underline{B}} \cdot \partial \underline{u}_l^0/\partial \zeta = \underline{c}_0$  y  $\underline{\underline{B}} \cdot \partial \underline{u}_l^1/\partial \zeta = \underline{c}_1$  respectivamente. Finalmente, los valores de  $\partial u_{g0}/\partial \zeta$  y  $\partial f/\partial \zeta$  se obtienen de sustituir los resultados de (3.31) y (3.32) en las ecuaciones (3.26) y (3.27). Obsérvese que  $\partial \underline{u}_g^0/\partial \zeta, \partial \underline{u}_g^1/\partial \zeta, \partial \underline{u}_g^2/\partial \zeta$  y  $\partial \underline{u}_l^0/\partial \zeta, \partial \underline{u}_l^1/\partial \zeta$  pueden ser obtenidas de manera muy eficiente ya que  $\underline{\underline{A}}$  y  $\underline{\underline{B}}$  son matrices triangulares inferiores. Por supuesto, para realizar la integración numérica es preciso especificar los perfiles de velocidad tanto para el líquido como para el gas en la estación inicial  $z = 0$ . El problema de las condiciones iniciales será discutido en la próxima sección.

### 3.3. Resultados numéricos y experimentales para el flujo básico

Las ecuaciones (3.23)-(3.27) muestran que la evolución aguas abajo de los flujos de líquido y de gas depende del parámetro  $MWe_0$ , del cociente  $\mu$  de viscosidades dinámicas,

del cociente  $\nu$  de viscosidades cinemáticas, y de las condiciones iniciales en la posición axial inicial  $z = 0$ . Con objeto de reducir la dimensión del espacio paramétrico, el estudio se restringirá, sin pérdida de generalidad, al caso representativo de la atomización de agua en aire. Por tanto, el parámetro  $\mu$  queda fijado y, para simplificar aún más el modelo, se supondrá también fijado el parámetro  $\nu$ , por lo que se despreciarán las variaciones en la densidad del gas provocadas por las diferentes presiones usadas en la cámara del atomizador. Por tanto, en el desarrollo del flujo básico sólo se considerará la influencia del parámetro  $MW_{e0}$  y de las condiciones iniciales, que se considerarán a continuación.

Para obtener las condiciones de partida exactas en la posición axial inicial, habría que resolver el problema, bastante complicado, de la evolución de los flujos de líquido y gas desde la cámara a presión hasta el orificio de salida, que es la estación inicial  $z = 0$ . Esta es una tarea que, claramente, está fuera de los objetivos de este trabajo y, en su lugar, los perfiles básicos en  $z = 0$  se han obtenido, indirectamente, a partir de medidas experimentales. Para ello, estos perfiles de velocidad se han caracterizado mediante dos parámetros libres, relacionados con los espesores de las capas de cortadura del gas y del líquido respectivamente, y se han ajustado dichos parámetros de tal forma que el radio del chorro calculado numéricamente presente el máximo acuerdo con el medido experimentalmente. Para relacionar los resultados experimentales y numéricos se ha tenido en cuenta que la aceleración del flujo desde la cámara a presión hasta el orificio de salida (véase la figura 3.2 a) es prácticamente isentrópica, puesto que el tiempo de residencia de las partículas fluidas en la región de entrada es tan corto que los efectos viscosos quedan confinados a una estrecha región situada en la entrefase líquido-gas. Por el mismo motivo, puede suponerse que el perfil inicial de líquido es uniforme excepto en una estrecha región anular adyacente a la entrefase, en cuyo interior se ha supuesto un perfil de velocidades parabólico dado por

$$u_l = u_c, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}(1 - \Delta)^2, \quad (3.33)$$

$$u_l = u_c + A \left[ \xi - \frac{1}{2}(1 - \Delta)^2 \right], \quad \frac{1}{2}(1 - \Delta)^2 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad (3.34)$$

donde  $u_c$  está determinado por la diferencia de presiones entre la cámara y el exterior a través de la ley de Bernouilli (ecuación 1.1),  $\Delta$  es un parámetro libre que determina el espesor de la región anular, y  $A$  será determinada de la condición de igualdad de esfuerzos tangenciales en la superficie del chorro. Por otra parte, se supondrá que el perfil de velocidades inicial es del tipo de Blasius para el gas, puesto que la capa límite es muy estrecha al haber recorrido una distancia muy pequeña desde la cámara de presión; las

ecuaciones para este perfil se obtienen al tomar el límite  $\zeta \rightarrow -\infty$  y  $\partial f/\partial \zeta = 0$  en (3.16), lo que proporciona

$$\frac{\partial^2 u_g}{\partial \eta^2} + 1/2 \left( \int_0^\eta u_g \, d\eta \right) \frac{\partial u_g}{\partial \eta} = 0 \quad \eta > 0. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) debe integrarse en la variable  $\eta$  con las condiciones de contorno obtenidas de (3.19),

$$\eta = 0 \quad u_g = u_l = u_c + A \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \Delta)^2 \right], \quad \frac{\partial u_g}{\partial \eta} = \frac{\exp(0,5\zeta_0)}{f} \mu \frac{\partial u_l}{\partial \xi} = \frac{A}{f} \exp(0,5\zeta_0) \mu, \quad (3.36)$$

donde  $f = 1$  en las fórmulas anteriores. Obsérvese que la condición  $u_g(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  determina  $A$  en (3.36) para valores fijos de los parámetros libres  $\Delta$  y  $\zeta_0$  ( $z_0 = \exp(\zeta_0)$ ). Nótese además que la velocidad del gas en el infinito es conocida, y viene determinada por la expansión isentrópica desde la presión de remanso en la cámara hasta la presión atmosférica en el orificio de salida. Partiendo del perfil inicial especificado por la ecuación

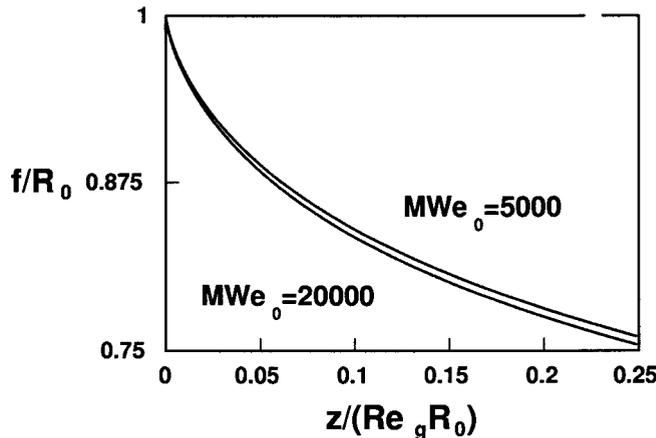


Figura 3.3: Evolución del radio del chorro aguas abajo para distintos valores del parámetro  $MWe_0$ .

y condiciones de contorno (3.35)-(3.36), se procede a la integración numérica de las ecuaciones (3.23)-(3.27) para estudiar la sensibilidad del flujo básico respecto del número de Weber ( $MWe_0$ ) y respecto de los parámetros que caracterizan el perfil inicial ( $\Delta$  y  $\zeta_0$ ), lo que permitirá escoger apropiadamente dichos parámetros de acuerdo con las observaciones experimentales.

La influencia del número de Weber en el flujo básico es muy débil como se muestra en la figura 3.3, que representa la evolución aguas abajo del radio del chorro para  $5000 < MWe_0 < 20000$ ; se tomará por tanto un valor intermedio  $MWe_0 = 10000$  que se

mantendrá fijo en lo que sigue, y se centrará el estudio de sensibilidad en los parámetros  $\Delta$  y  $\zeta_0$ . La figura 3.4 (b) muestra la evolución del radio del chorro para un valor fijo

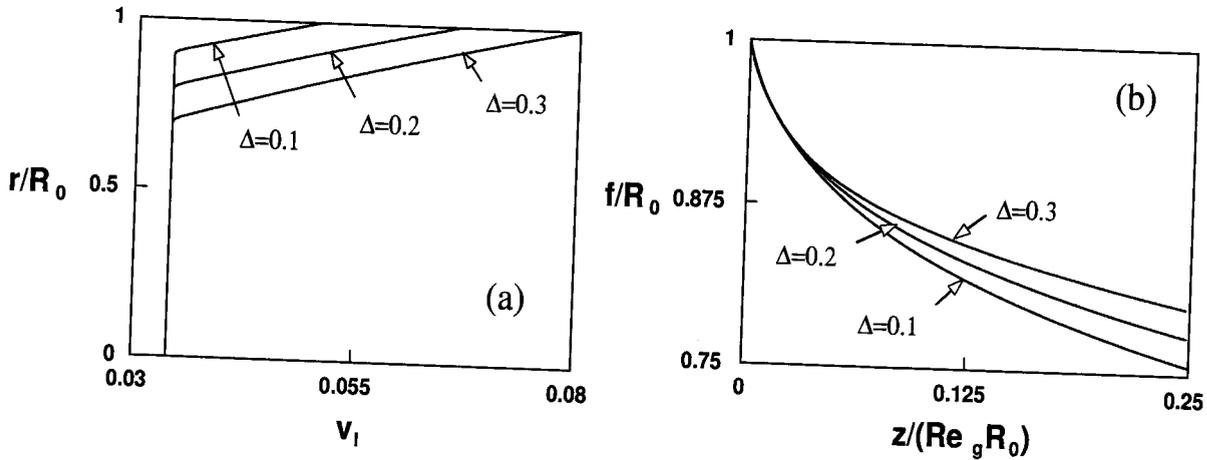


Figura 3.4: (a) perfiles iniciales de velocidad para el chorro líquido; (b) evolución del radio del chorro líquido aguas abajo para las condiciones iniciales dadas en (a) y para un valor fijo de  $\zeta_0$ .

de  $\zeta_0$  y diferentes valores de  $\Delta$ , correspondientes a los perfiles de velocidad en el líquido mostrados en la figura 3.4 (a). Se observa que el radio del chorro líquido decrece de forma

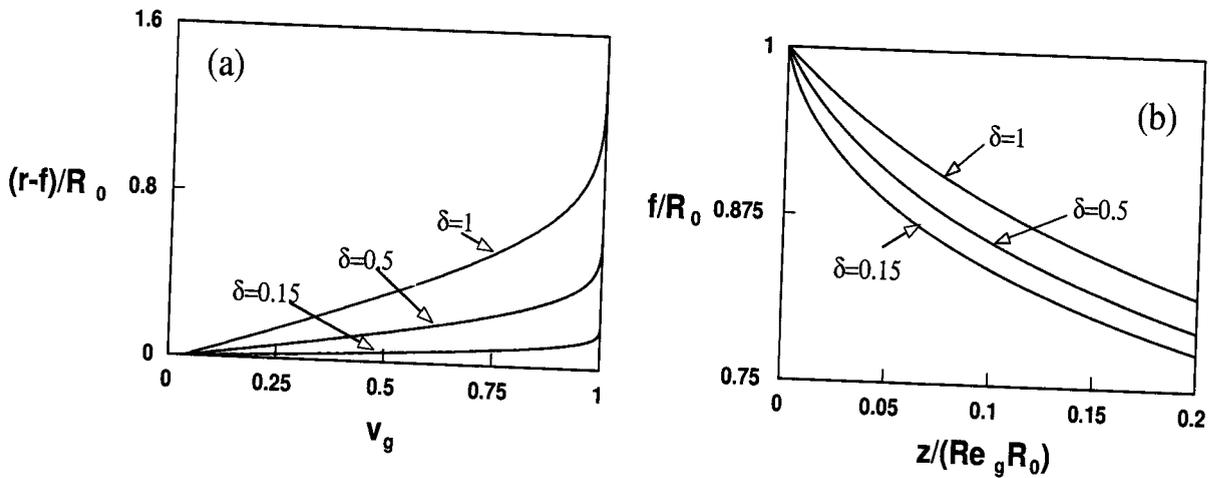


Figura 3.5: (a) perfiles iniciales de velocidad para la corriente de gas; (b) evolución del radio del chorro líquido aguas abajo para las condiciones iniciales dadas en (a) y para  $\Delta=0.1$

más lenta para mayores valores de  $\Delta$ , que se corresponden con un mayor momento axial de la capa de cortadura en el líquido (véase figura 3.4 a). Por otra parte en la figura 3.5 (b), se representa la evolución del radio del chorro para los perfiles iniciales de velocidad

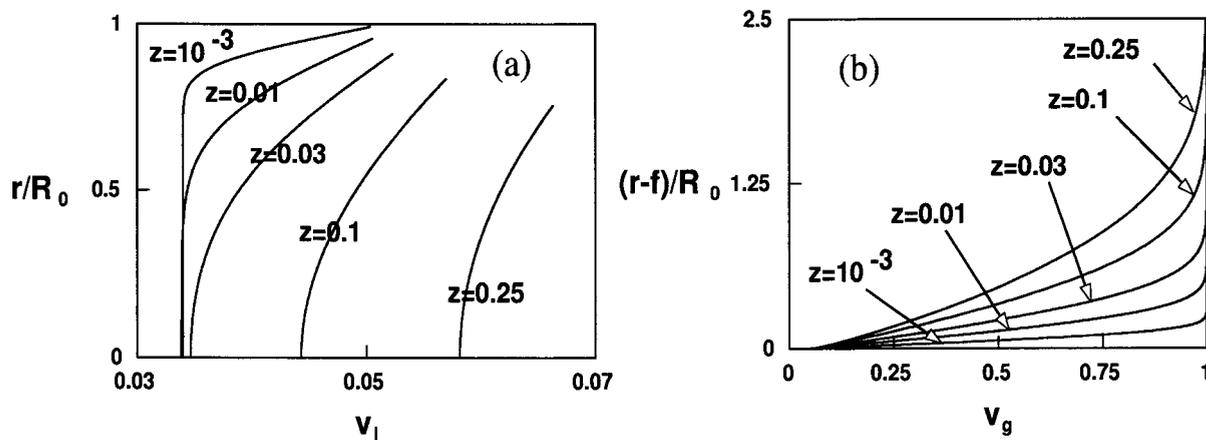


Figura 3.6: (a) Evolución de los perfiles de velocidad del líquido para  $\delta=0.15$  y  $\Delta=0.1$ ; (b) Evolución de los perfiles de velocidad del gas para las mismas condiciones iniciales que en (a).

del gas mostrados en 3.5 (a), y que corresponden a diferentes valores de  $\zeta_0$  o, lo que es equivalente, a diferentes valores del espesor típico de la capa límite  $\delta$  (parámetro usado en la figura 3.5 a), definido aquí mediante la condición  $\bar{u}_g(\bar{r} = \bar{f}(1 + \delta)) = 0,99 U_{g\infty}$ . Las evoluciones aguas abajo de los perfiles de velocidad del líquido y gas están representadas en las figuras 3.6 (a-b) para los casos  $\Delta = 0,1$  y  $\delta = 0,15$  que, como será comprobado en breve, reproducen bien los experimentos. Finalmente, es de interés notar en las figuras 3.6 (a-b), el crecimiento de la capa límite de gas, la aceleración del líquido debido a la transferencia de cantidad de movimiento axial desde el gas hacia el líquido, y la creciente homogeneización de velocidades en el seno del líquido debido a los efectos de difusión viscosa. Otras magnitudes de interés tales como los esfuerzos tangenciales y la velocidad en la superficie del chorro se representan en la figura 3.7.

### 3.3.1. Montaje experimental y comparación con los resultados numéricos

Para determinar los perfiles iniciales de velocidad a través de los experimentos, se han realizado medidas de la evolución aguas abajo del diámetro del chorro líquido para diferentes caídas de presión entre la cámara presurizada y el exterior, así como para diferentes caudales de agua. La presión en la cámara del atomizador se regula mediante una válvula reductora de presión y es medida a través de un lector de presión de la marca Delta-Ohm, modelo HD9220. El caudal de líquido es suministrado haciendo uso de una

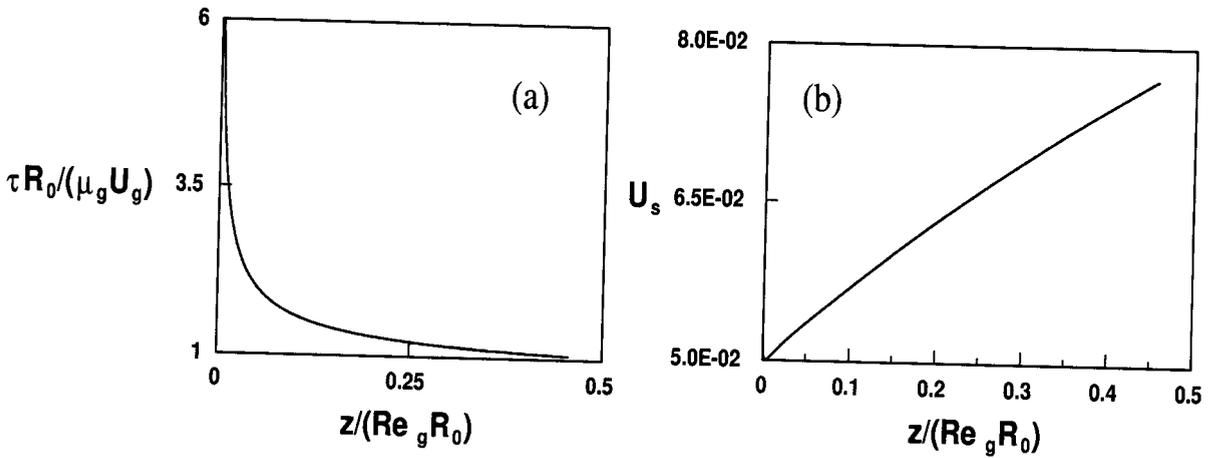


Figura 3.7: (a) Evolución aguas abajo de los esfuerzos tangenciales sobre la superficie; (b) Evolución aguas abajo de la velocidad en la superficie libre.

bomba de jeringa de precisión de la marca Cole Palmer, modelo 74900. La forma del chorro líquido se visualiza haciendo uso de una cámara CCD en blanco y negro, marca Kappa y modelo CF 8/4, de 740 líneas de precisión conectada a un microscopio Nikon SMZ-2T, regulado a la máxima amplificación ( $\times 360$ ), con el objeto de poder observar el diámetro del chorro líquido con la mayor resolución posible. Puesto que el chorro no puede recogerse en toda su longitud en la misma imagen, el atomizador se sitúa en un micro-posicionador de la marca Newport, modelo MM2500, y que posee una precisión de  $0.1 \mu\text{m}$ ; de esta forma se puede generar la imagen completa del chorro líquido superponiendo imágenes consecutivas y se pueden medir distancias de manera muy precisa. El esquema del montaje experimental y una imagen del atomizador utilizado se muestra en las figuras 3.8 y 3.9 respectivamente. A continuación, se mide el diámetro del chorro a través del número de pixels de la imagen obtenida. Para ello, las imágenes han sido procesadas fijando un nivel de intensidad en la escala de grises, de forma que todos los grises que quedan por encima de ese nivel son considerados como negro, mientras que aquellos por debajo son considerados como blanco. Al guardar estas imágenes usando un formato Post Script adecuado, se puede medir fácilmente el número de pixels del chorro líquido en cada posición axial y, una vez superpuestas las imágenes, se obtiene una forma para el chorro líquido como la mostrada en la figura 3.10. Puesto que el propósito es comparar con los resultados numéricos, se ha aproximado la forma experimental del chorro mediante un ajuste hiperbólico de cuarto orden. La figura 3.11 (a) muestra la solución numérica y el resultado experimental del diámetro del chorro líquido para una caída de presión de

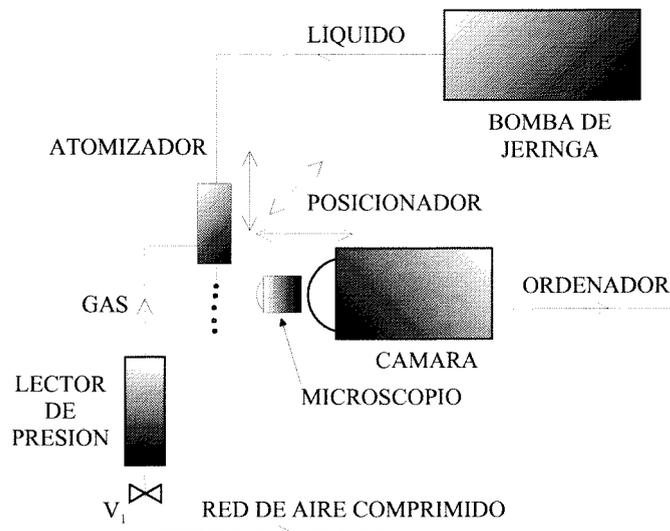


Figura 3.8: Esquema del montaje experimental.

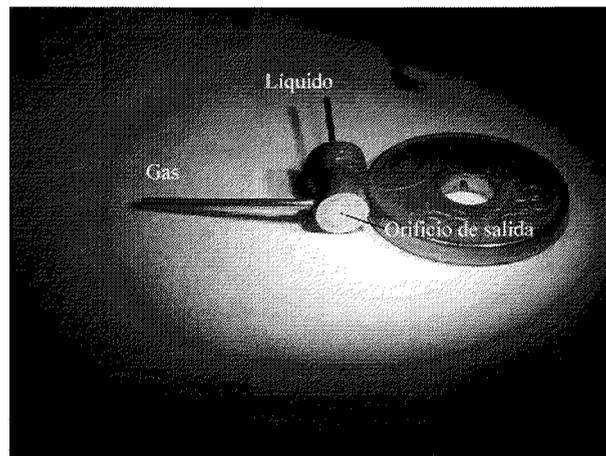


Figura 3.9: Atomizador utilizado en este estudio.

10 kPa, y para dos caudales de líquido  $Q$ . Fijados un caudal de líquido  $Q$  y una caída de presión (que determinan  $u_c$  a través de la ecuación 1.1), los parámetros  $\Delta$  y  $\delta$  se ajustan de manera que las fórmulas (3.33)-(3.36) proporcionen el caudal dado  $Q$  y de forma que la evolución experimental aguas abajo del chorro líquido, se aproxime lo más posible a la obtenida numéricamente. En la figura 3.11 (a) se representan las evoluciones de la forma del chorro para dos caudales diferentes y una caída de presión dada, con los correspondientes valores de los parámetros  $\Delta$  y  $\delta$  ajustados como se acaba de indicar. Lo

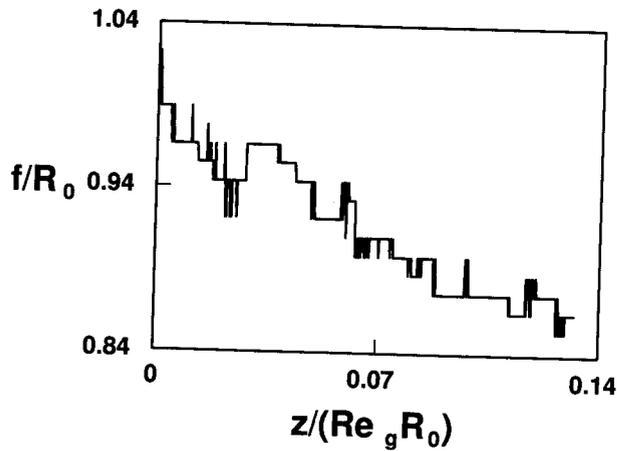


Figura 3.10: Radio del chorro antes de ser ajustado con una regresión hiperbólica de cuarto orden.

mismo se representa en la figura 3.11 (b) para una caída de presión diferente; se observa en ambas figuras que el acuerdo entre las formas numérica y experimental es muy bueno para valores de la coordenada axial menores que los correspondientes a la zona de rotura del chorro. Obsérvese que el acuerdo es especialmente bueno en la figura 3.11 (b) para el caso experimental de  $Q=30 \text{ ml h}^{-1}$ , que está muy bien reproducido numéricamente para valores de  $\Delta = 0,15$  y  $\delta = 0,5$ . En estas figuras se observan ciertas discrepancias entre lo numérico y lo experimental, relacionadas tanto con el proceso seguido para determinar el valor de los parámetros  $\Delta$ ,  $\delta$ , como con los errores en las medidas. Estos últimos pueden atribuirse a varias causas tales como: 1) que a pesar de usar un microscopio, el chorro líquido contiene un número limitado de pixels (50-100) y, por tanto, la resolución puede no ser suficiente, 2) que el pequeño diámetro de los chorros líquidos ( $\sim 30\text{-}60 \mu\text{m}$ ) hace difícil el enfocar la imagen, 3) que el nivel de grises adoptado, introduce errores en la medida del diámetro del chorro líquido. A pesar de estos factores, y puesto que nuestro principal objetivo es el de obtener una estimación realista de los parámetros que fijan las condiciones iniciales para las corrientes de líquido y del gas, se considera que el trabajo experimental descrito más arriba es suficiente para obtener la información necesaria.

### 3.4. Análisis de estabilidad

Una vez que los perfiles básicos de velocidad han sido calculados, se va a analizar la estabilidad de las soluciones estacionarias obtenidas. En una primera aproximación al

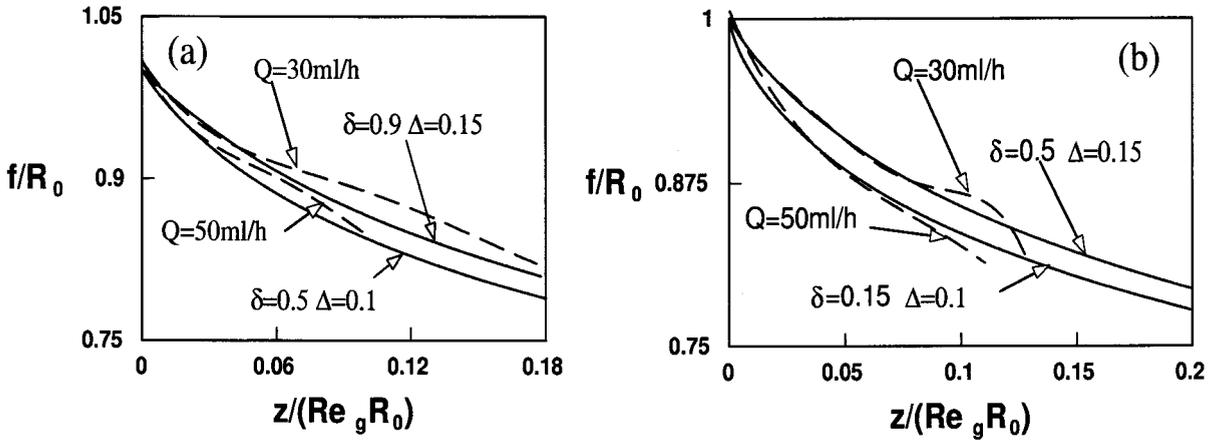


Figura 3.11: (a) Evolución de los radios del chorro obtenidos numéricamente para el par de parámetros  $(\delta, \Delta) = (0.9, 0.15)$  y  $(\delta, \Delta) = (0.5, 0.1)$  (líneas continuas) y formas del chorro experimentales (líneas discontinuas) para  $Q = 30, 50$  ml  $h^{-1}$  y  $\Delta p = 10$  kPa ( $U_l = 4.5$  m  $s^{-1}$  y  $U_g = 127$  m  $s^{-1}$ ); (b) Los mismo para  $(\delta, \Delta) = (0.5, 0.15)$ ,  $(\delta, \Delta) = (0.15, 0.1)$ ,  $Q = 30, 50$  ml  $h^{-1}$  y  $\Delta p = 20$  kPa. ( $U_l = 6.3$  m  $s^{-1}$  y  $U_g = 173$  m  $s^{-1}$ ).

problema, y con el objetivo de retener los mecanismos físicos relevantes de la forma más simplificada posible, se ha llevado a cabo aquí un análisis clásico de estabilidad temporal no viscoso de corrientes localmente paralelas. Aunque, como quedó explicado en el capítulo segundo, la solución exacta del problema forzado conduce, en general, a un análisis de estabilidad espacial, nuestro enfoque puede justificarse si se tiene en cuenta que, como se indicó anteriormente, los análisis de estabilidad temporal y espacial proporcionan resultados muy similares para velocidades de los flujos suficientemente altas (Keller, Rubinow y Tu 1973, Lin y Kang 1987); esto es especialmente cierto en lo que concierne a los factores de crecimiento y a las frecuencias de excitación de las perturbaciones. También, se hará aquí la hipótesis de que las viscosidades de los fluidos no afectan al desarrollo de las perturbaciones, lo que está justificado si se verifica que  $\omega \lambda^2 / \nu_g \gg 1$ , donde  $\omega$  y  $\lambda$  son la frecuencia típica y la longitud de onda de la perturbación respectivamente, y  $\nu_g$  es la viscosidad cinemática del gas (obsérvese que generalmente  $\nu_l < \nu_g$  para líquidos con viscosidades cercanas a la del agua). Se mostrará posteriormente que, en los casos considerados en nuestro análisis, el parámetro  $(\omega \lambda^2 / \nu_g)$  es del orden de 10. Finalmente, se hará la hipótesis de corrientes localmente paralelas, lo que requiere que la distancia axial típica para variaciones apreciables de los perfiles básicos de velocidad sea mucho mayor que la longitud de onda de la perturbación ( $\lambda / U_\infty \partial U_g / \partial z \ll 1$ ); esta hipótesis, que será confirmada posteriormente, permite considerar  $z$  como un parámetro que caracteriza

los valores del flujo básico en las ecuaciones para la evolución de la perturbación. Conviene indicar que tanto la hipótesis de perturbaciones no viscosas como la de corrientes localmente paralelas son usuales y bien conocidas en la literatura sobre estabilidad lineal.

Puesto que el análisis de estabilidad que se va a llevar a cabo es temporal, las ecuaciones linealizadas que gobiernan la evolución de las perturbaciones pueden obtenerse en un sistema de referencia Galileano que se mueva a la velocidad de la interfase para una determinada posición axial, lo que resulta conveniente para el análisis y no afecta ni a los factores de crecimiento ni a las frecuencias de excitación de las perturbaciones. La configuración geométrica del flujo en dicho sistema de referencia se representa de forma esquemática en la figura 3.12. Las ecuaciones linealizadas se obtienen de forma usual,

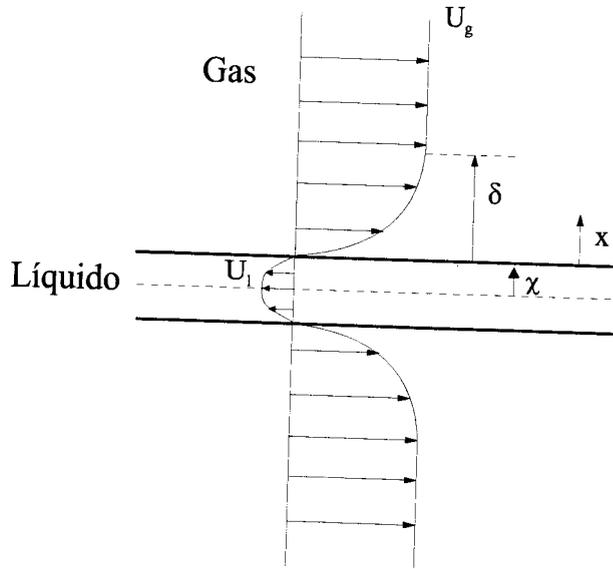


Figura 3.12: Esquema de los perfiles de velocidad y variables usadas en el análisis de estabilidad en una posición genérica aguas abajo de la salida de la cámara a presión.

descomponiendo los campos de velocidades y presiones del líquido y del gas como suma de la parte básica más la perturbación,

$$p = p_0(z) + \hat{p}(r, \theta, z, t) \quad R = R_0(z) + \hat{R}(\theta, z, t) \quad \vec{u}(r, \theta, z, t) = (\bar{U}_0(r) + \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}), \quad (3.37)$$

donde  $\bar{U}_0$ ,  $R_0$  y  $p_0$  son la distribución de velocidades, el radio del chorro y la presión en la estación  $z$  correspondientes al flujo básico,  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  son las componentes axial, radial y acimutal de las velocidades perturbadas respectivamente, y  $\hat{p}$  y  $\hat{R}$  denotan la perturbación de la presión y del radio del chorro. Las cantidades pertenecientes a las corrientes del

gas (líquido) se denotan a través del subíndice  $g$  (l). Obsérvese que  $z$  es una variable independiente para las perturbaciones, mientras que, como es usual en este tipo de análisis, se considera que  $U_0$  y  $R_0$  dependen paramétricamente de la distancia axial.

Las ecuaciones que gobiernan las cantidades perturbadas definidas en (3.37), pueden ser obtenidas de las ecuaciones de Navier-Stokes linealizadas de la forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.38)$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 \hat{p} = 2 \frac{d\hat{U}_0}{dr} \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta}, \quad (3.41)$$

donde, por conveniencia, la divergencia de la ecuación de cantidad de movimiento ha sustituido a la componente axial de dicha ecuación. Las ecuaciones (3.38)-(3.41) de las que, evidentemente, hay dos conjuntos, uno para el líquido y el otro para el gas, deben ser resueltas sujetas a las condiciones de contorno de regularidad en el eje y en el infinito

$$r = 0 \quad \tilde{\mathbf{u}} \neq \infty \quad \hat{p}_l \neq \infty, \quad (3.42)$$

$$r \rightarrow \infty \quad \tilde{\mathbf{u}}_g \rightarrow 0 \quad \hat{p}_g \rightarrow 0, \quad (3.43)$$

junto con las condiciones linealizadas en la superficie libre

$$r = R_0(z) \quad \hat{p}_l - \hat{p}_g = -\sigma \left( \frac{\hat{R}}{R_0^2} + \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{R}}{R_0^2 \partial \theta^2} \right), \quad (3.44)$$

$$\hat{v}_l = \hat{v}_g = \frac{\partial \hat{R}}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Como es usual, se buscarán soluciones a (3.38)-(3.45) de la forma

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{R}) = (\bar{u}(r), \bar{v}(r), \bar{w}(r), \bar{p}(r), \bar{R}) \exp(i(\bar{k}z - \bar{\Omega}t + m\theta)), \quad (3.46)$$

que, una vez introducidas en (3.39)-(3.40), y tras algunas manipulaciones algebraicas, proporcionan las ecuaciones para la presión del gas

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}_g}{dr} \right) - 2 \frac{\bar{k}}{(\bar{U}_{0g}\bar{k} - \bar{\Omega})} \frac{d\bar{U}_{0g}}{dr} \frac{d\bar{p}_g}{dr} - \left( \bar{k}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \bar{p}_g = 0, \quad (3.47)$$

y para la presión del líquido

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}_l}{dr} \right) - 2 \frac{\bar{k}}{(\bar{U}_{0l}\bar{k} - \bar{\Omega})} \frac{d\bar{U}_{0l}}{dr} \frac{d\bar{p}_l}{dr} - \left( \bar{k}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \bar{p}_l = 0. \quad (3.48)$$

En (3.47)-(3.48) se ha eliminado  $\bar{v}_r$  haciendo uso de (3.40). Las condiciones de contorno (3.44)-(3.45) pueden expresarse en términos de las presiones del líquido y del gas haciendo uso de nuevo de la ecuación de cantidad de movimiento radial (3.40), obteniéndose

$$\bar{p}_l = \bar{p}_g - \frac{\sigma}{R_0^2} (1 - k^2 R_0^2 - m^2) \frac{1}{\rho_g \bar{\Omega}^2} \frac{d\bar{p}_g}{dr}, \quad (3.49)$$

y

$$\frac{d\bar{p}_l}{dr} = \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{d\bar{p}_g}{dr}. \quad (3.50)$$

Para la resolución de las ecuaciones (3.47)-(3.48) junto con las condiciones de contorno (3.49)-3.50), es conveniente introducir los parámetros y variables adimensionales

$$M = \frac{\rho_l}{\rho_g}, \quad We = \frac{\rho_g U_\infty^2 R_0}{\sigma}, \quad \kappa = \bar{k} R_0, \\ x = \frac{r - R_0}{R_0 \delta(z)}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho_g U_\infty^2}, \quad \omega = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k} U_\infty}, \quad U(r) = \frac{\bar{U}_0(r)}{U_\infty} \quad \chi = \frac{r}{R_0}, \quad (3.51)$$

en términos de los cuales (3.47)-(3.48) y (3.42)-(3.43) y (3.49)-(3.50) se escriben

$$\frac{d^2 p_g}{dx^2} + \left( \frac{\delta}{1 + \delta x} - \frac{2}{U_g - \omega} \frac{dU_g}{dx} \right) \frac{dp_g}{dx} - \left( \kappa^2 \delta^2 + \frac{m^2 \delta^2}{(1 + \delta x)^2} \right) p_g = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{d^2 p_l}{d\chi^2} + \left( \frac{1}{\chi} - \frac{2}{U_l - \omega} \frac{dU_l}{d\chi} \right) \frac{dp_l}{d\chi} - \left( \kappa^2 + \frac{m^2}{\chi^2} \right) p_l = 0, \quad (3.53)$$

$$x = 0, \quad \chi = 1: \quad \kappa^2 \omega^2 \left( M \frac{p_l(1)}{dp_l/d\chi(1)} - \delta \frac{p_g(0)}{dp_g/dx(0)} \right) + We^{-1} (1 - \kappa^2 - m^2) = 0 \quad (3.54)$$

$$x \rightarrow \infty \quad p_g \rightarrow 0, \quad \chi = 0 \quad p_l \text{ finita.} \quad (3.55)$$

donde la condición (3.54), que ha sido obtenida al dividir (3.49) entre (3.50), elimina las constantes libres haciendo uso de la linealidad del problema. El parámetro  $We$  en (3.54) es el número de Weber, que representa la relación entre las presiones dinámica y capilar; obsérvese que este parámetro está basado en la velocidad relativa al sistema móvil de referencia  $U_\infty(z)$  de la corriente gaseosa en el infinito, y en el radio no perturbado del chorro líquido  $R_0(z)$ . El parámetro  $\delta(z)$  es el espesor adimensional de la capa de cortadura en la fase gaseosa, y se obtiene de la solución del problema básico llevada a cabo en

§3.3. El problema (3.52)-(3.55) no posee soluciones distintas de la trivial excepto para ciertos valores complejos de  $\omega$  que satisfacen la relación de dispersión (3.54) para valores reales dados de  $\kappa$ ,  $We$  y  $M$ . La relación de dispersión también contiene los valores de  $p_l(1)/[dp_l/d\chi(1)]$  y  $p_g(0)/[dp_g/dx(0)]$  que, a su vez, se determinan mediante la integración de (3.52)-(3.53) sujeta a las condiciones de contorno (3.55). Para obtener  $p_l(\chi)$ , la ecuación (3.53) ha sido integrada numéricamente desde  $\chi = \chi_0 \ll 1$  (para evitar la singularidad en  $\chi = 0$ ) hasta  $\chi = 1$  usando los comportamientos cerca del eje  $\chi = 0$ ,

$$p_l = 1 + \chi_0^2 \frac{\kappa^2}{4}, \quad \frac{dp_l}{d\chi} = \chi_0 \frac{\kappa^2}{2} \quad \text{si } m = 0, \quad (3.56)$$

$$p_l = \chi_0^m, \quad \frac{dp_l}{d\chi} = m\chi_0^{m-1} \quad \text{si } m \neq 0. \quad (3.57)$$

Para obtener  $p_g(x)$ , la ecuación (3.52) se integra desde  $x = 0$  hasta  $x = \infty$  teniendo en cuenta que, excepto para una pareja excepcional de valores  $p_g(0)$  y  $dp_g/dx(0)$ , que deberían ser conocidos *exactamente*, la solución numérica tenderá, de forma inevitable, a la función modificada de Bessel de la primera clase,  $I_m[\kappa(1 + \delta x)]$ , que es el atractor de la ecuación en el infinito, y que no satisface allí las condiciones de contorno. La solución correcta puede obtenerse directamente sin necesidad de un método de disparo, haciendo uso de un resultado bien conocido de la teoría de las ecuaciones ordinarias lineales de segundo orden (Arfken y Weber 1995). De acuerdo con dicho resultado, dada cualquier solución particular  $n(x)$  de (3.52), obtenida por ejemplo al integrar (3.52) desde  $x=0$  con las condiciones iniciales

$$n(0) = 1 \quad \frac{dn}{dx}(0) = 0, \quad (3.58)$$

otra solución independiente que cumpla las condiciones de contorno deseadas en el infinito, puede ser construida numéricamente en la forma

$$p_g(x) = n(x) \int_{\infty}^x \frac{\exp(-\int_0^z (\frac{\delta}{\delta s+1} - \frac{2dU_g/ds}{U_g-\omega}) ds)}{n(z)^2} dz. \quad (3.59)$$

Para  $x = 0$ , (3.59) proporciona

$$\frac{p_g(0)}{dp_g/dx(0)} = -\frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} \frac{(U_g - \omega)^2}{n(x)^2 (1 + \delta x)} dx. \quad (3.60)$$

### 3.5. Resultados numéricos

El objetivo en esta sección es el de mostrar que la solución del problema de estabilidad planteado en §3.4, puede describir la aparición de los distintos regímenes de atomización observados en nuestros experimentos, así como revelar los mecanismos físicos que conducen a la aparición de los distintos modos de inestabilidad. Como se verá, van a aparecer una variedad de modos que no habían sido explorados anteriormente en la literatura, por lo que es conveniente, con el objeto de entender mejor los mecanismos físicos que dan lugar a dichos modos, proceder de una forma gradual. Para ello, antes de considerar el caso general, se resolverán previamente dos modelos simplificados que son:

-Modelo *A*: consistente en un chorro líquido de radio constante y con perfil uniforme de velocidad rodeado por una corriente gaseosa cuyo perfil básico de velocidad se obtiene de la integración numérica de las ecuaciones (3.16) según el método numérico descrito en §3.2. En este modelo, son identificados tanto los regímenes de atomización de Rayleigh como el de Taylor. En el régimen de Rayleigh, las longitudes de onda de rotura son del orden del radio del chorro líquido y la inestabilidad está promovida por la tensión superficial, mientras que en el régimen de Taylor, las longitudes de onda de las perturbaciones son mucho más pequeñas que el radio del chorro líquido, y el mecanismo de inestabilidad es el trabajo realizado por las fluctuaciones de presión del gas sobre la superficie líquida (Lin and Chen 1998). Estos regímenes aparecen para diferentes rangos del valor del único parámetro libre  $\delta$  (espesor de la capa de cortadura del gas), puesto que, en este modelo simplificado, los parámetros  $We$  y  $M$  se mantienen constantes. Además de los modos clásicos, se encuentra un nuevo tipo de modo helicoidal que está relacionado con la estructura de la capa de cortadura del gas. Debe indicarse que el modelo *A*, que no es más que la extensión a una geometría cilíndrica del usado con éxito por Villermaux (1998), es incapaz de explicar los distintos regímenes de atomización que aparecen en los experimentos llevados a cabo en esta tesis. Esto es debido a que, contrario a la situación considerada por Villermaux, en el caso considerado aquí el cociente de momentos de las corrientes de gas y líquido ( $M_r = \rho_g U_g^2 / \rho_l U_l^2$ ) es muy próximo a la unidad, lo que hace que el perfil básico de velocidades del líquido juegue un papel esencial para explicar la aparición de los modos que conducen a la rotura del chorro. Este aspecto se recogerá en el modelo siguiente.

-Modelo *B*: en este modelo se consideran las corrientes coaxiales de líquido y gas con perfiles básicos de velocidad realistas, calculados numéricamente y validados experimentalmente en §3.3. La simplificación introducida en este modelo consiste en que sólo se

perturba el flujo líquido, manteniéndose la corriente de gas sin perturbar. El interés de este caso radica en el hecho de que, como se indicó anteriormente, cuando los momentos de las corrientes de gas y de líquido son del mismo orden, un perfil no uniforme de velocidades en el líquido modifica sustancialmente los resultados de Rayleigh y aparecen nuevos modos asociados a la existencia de una capa de cortadura, tanto en el líquido como en el gas, en la zona próxima a la interfase. No se tiene conocimiento de que estos modos hayan sido explorados previamente en la literatura.

### 3.5.1. Modelo A: Estabilidad de un chorro líquido de radio constante con perfil uniforme de velocidad confluyendo con una corriente coaxial de gas.

La solución básica a este problema, obtenida mediante el método de líneas descrito en §3.2 está representado en la figura 3.13; la solución numérica ha sido validada con éxito usando los resultados asintóticos de Glauert y Lighthill (Rosenhead 1963) para el mismo problema. Como se muestra en la figura, los perfiles de velocidad con  $\delta \lesssim 0,1$  se aproximan

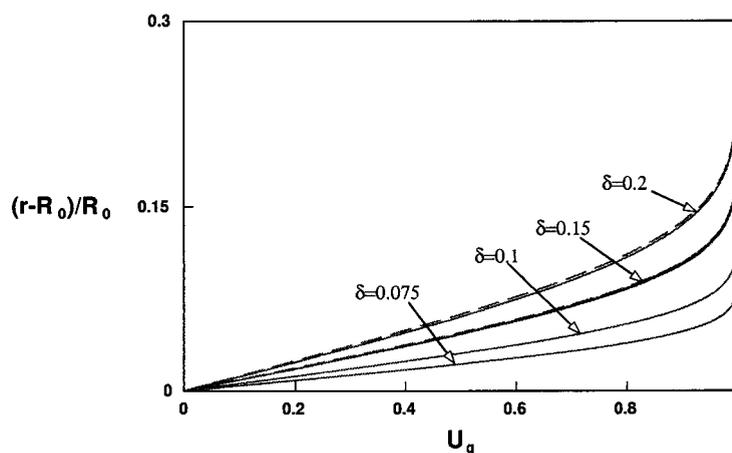


Figura 3.13: Perfiles de velocidad del gas del modelo A calculados numéricamente (línea discontinua) y perfiles de velocidad de Blasius (línea continua).

de forma clara al de Blasius, mientras que para mayores valores de  $\delta$ , los perfiles difieren del de Blasius debido los efectos de curvatura. En la figura 3.14 (a-b) se representan, para el modo de inestabilidad axilsimétrico  $m = 0$ , las partes real e imaginaria de las frecuencias propias adimensionales,  $\Omega = \omega\kappa = \bar{\Omega}R_0/U_\infty$ , frente al número de onda adimensional  $\kappa = \bar{k}R_0$ . Nótese que las frecuencias de excitación ( $\Omega_r$ ) de los modos inestables, aumentan

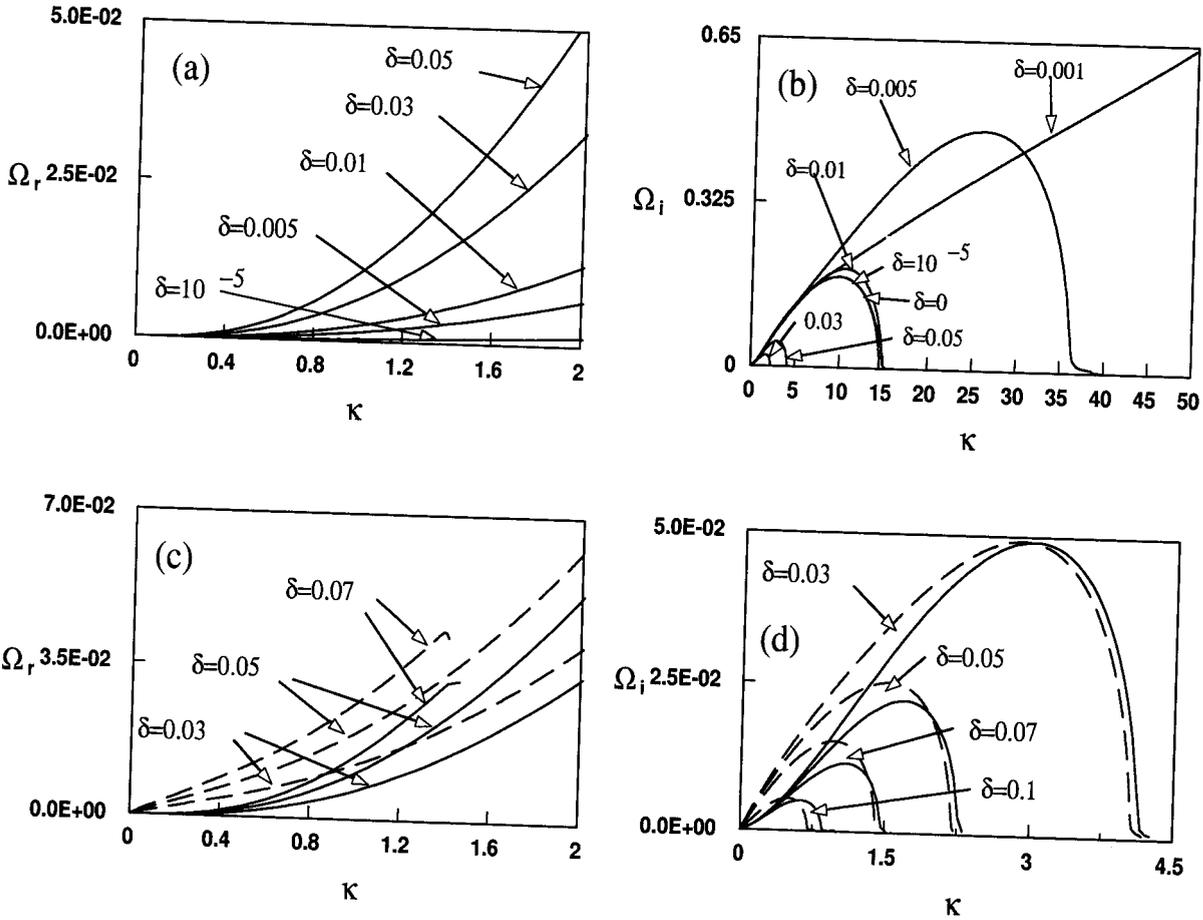


Figura 3.14: (a)-(b) Partes real e imaginaria de las frecuencias propias para diferentes valores de  $\delta$ ; (c)-(d) Partes real e imaginaria de las frecuencias propias de los modos axilsimétricos (línea continua) y de los helicoidales (línea discontinua) para diferentes valores de  $\delta$ . En las figuras (a-d)  $We = 15$  y  $M = 850$ .

tanto con el espesor de la capa de cortadura del gas ( $\delta$ ) como con el número de onda  $\kappa$  (véase la figura 3.14 a). Sin embargo, el comportamiento con  $\delta$  del factor de amplificación temporal  $\Omega_i$  es más complicado. En efecto, como se muestra en la figura 3.14 (b), el área bajo las curvas  $\Omega_i = \Omega_i(\kappa)$ , primero aumenta drásticamente desde  $\delta = 0$  hasta  $\delta = 0,001$ , decreciendo monótonamente para valores mayores de  $\delta$ . Los valores correspondientes al modelo de Kelvin-Helmholtz (K-H) están situados sobre la curva marcada como  $\delta = 0$  en la figura 3.14 (b). Obsérvese en esta figura que, a pesar de que en todos los casos  $\delta \ll 1$ , los resultados de K-H no se reproducen en todo el rango de longitudes de onda sino sólo para los valores de  $\delta$  más pequeños ( $\delta \lesssim 10^{-5}$ ). Para valores mayores de  $\delta$ , los factores de crecimiento se desvían sustancialmente del modelo K-H, excepto para las

mayores longitudes de onda. En efecto, se observa que, para una longitud de onda dada y no muy larga, los factores de crecimiento son mayores que los correspondientes a K-H para valores del espesor de la capa de cortadura en el rango  $0 < \delta \leq 0,015$ , siendo menores para  $\delta \geq 0,015$ . Este hecho sugiere que, incluso para pequeños espesores, la estructura de la capa de cortadura del gas juega un papel crucial en el desarrollo de la inestabilidad de perturbaciones de corta longitud de onda, debido quizás a la existencia de una capa crítica (Miles 1957, Landau y Lifshitz 1959) que se encuentra localizada en un radio tal que  $U_g \kappa \simeq \Omega_r$ , donde la transferencia de energía entre el flujo básico y la perturbación modifica sustancialmente los fenómenos dinámicos involucrados en el mecanismo de K-H. Con objeto de comparar los modos axilsimétricos con los helicoidales, las figuras 3.14 (c-d) muestran, para pequeños valores del parámetro  $\delta$ ,  $\Omega_r$  y  $\Omega_i$  como funciones de  $\kappa$  para los modos inestables axilsimétricos y para los modos helicoidales ( $m = 1$ ); sólo están representados los resultados para  $\delta > 0,01$ , puesto que para menores valores de  $\delta$ , los factores de crecimiento de los modos axilsimétricos y helicoidales son muy similares. Nótese en la figura 3.14 (d) que las perturbaciones helicoidales crecen más rápido que las axilsimétricas para longitudes de onda largas, hecho que fue reportado por primera vez por Yang (1992).

Los casos discutidos en el párrafo anterior corresponden a espesores de la capa de cortadura del gas tan pequeños comparados con el radio del chorro de líquido, que no se presentan en muchas situaciones prácticas ni, en particular, en nuestros experimentos. En efecto, como es sabido,  $\delta$  decrece al aumentar el número de Reynolds,  $Re = U_\infty R_0 / \nu_g$ , cuyo valor es del orden de  $Re \sim 500$  para una situación típica con  $R_0 \sim 50 \mu\text{m}$  y  $U_\infty \sim 100 \text{ m s}^{-1}$ ; dicho valor es demasiado bajo para obtener valores muy pequeños de  $\delta$ . Esto se confirma en los resultados experimentales mostrados en la figura 3.11 (a-b), que indican que los valores de  $\delta$  son mayores que 0.1. Por tanto, se considerará ahora el caso en el que el espesor de la capa de cortadura es del orden del radio del chorro,  $\delta \sim O(1)$ , y se ha llevado a cabo el análisis de estabilidad para tres perfiles básicos de velocidad correspondientes a las estaciones  $z=0.01$ ,  $z=0.05$  y  $z=0.1$ , con valores de  $\delta$  de  $\delta = 0,46$ ,  $\delta = 0,98$  y  $\delta = 1,35$  respectivamente. Obsérvese primero que la condición de flujo localmente paralelo se cumple para estos valores, puesto que es posible estimar de ellos que  $(\lambda/\bar{\delta})d\bar{\delta}/d\bar{z} = \lambda/(\delta R_0 Re)d\delta/dz \sim 0,1$ , donde  $\bar{\delta} = \delta R_0$ ,  $\bar{z} = R_0 Re z$  son el espesor adimensional de la capa de mezcla y la distancia axial. En estos casos se han encontrado tres familias distintas de modos inestables, a saber: una familia de modos axilsimétricos ( $m = 0$ ), y dos familias de modos helicoidales ( $m = 1$ ), estas últimas con muy distintas frecuencias de excitación

y factores de crecimiento. La figura 3.15 (a-b) muestra, para una pareja dada de valores de  $M$  y  $We$ , las frecuencias y los factores de crecimiento de los modos axilsimétricos, y de la familia de modos helicoidales que posee frecuencias de excitación del orden de la capilar  $\Omega_r \sim (MWe)^{-1/2}$ . Obsérvese en la figura 3.15 (b) que los factores de crecimiento de los

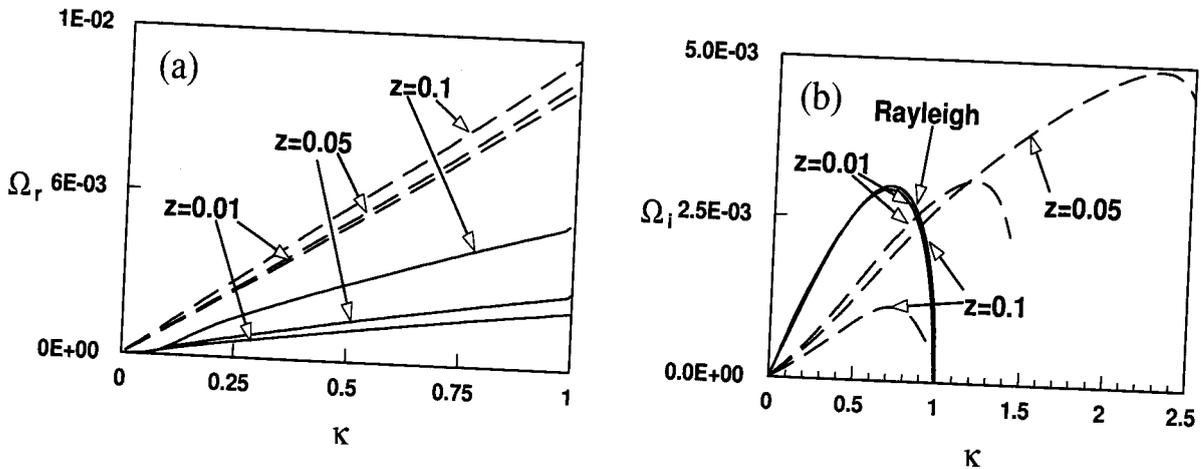


Figura 3.15: Parte real de las frecuencias propias de los modos axilsimétricos (línea continua) y de los modos helicoidales en diferentes posiciones axiales; (b) Parte imaginaria de las frecuencias propias en diferentes posiciones axiales para los modos axilsimétricos (línea continua) y para los helicoidales (los factores de crecimiento de los modos helicoidales están multiplicados por un factor de 100). En ambas figuras  $We = 15$  y  $M = 850$ .

modos helicoidales son mucho menores que los de los axilsimétricos, y que los últimos prácticamente coinciden para todos los valores de  $\kappa$  con los correspondientes a los del modelo de Rayleigh. Las frecuencias y factores de crecimiento de la segunda familia de modos helicoidales inestables están representados en la figura 3.16 (a-b). Obsérvese que sus frecuencias adimensionales de excitación, son del orden de  $\Omega \sim O(1)$ , mucho mayores que las capilares, lo que indica que estos modos tienen una naturaleza hidrodinámica, por lo que se denominarán *modos de estela* puesto que son análogos a los encontrados por Batchelor y Gill (1962) en su estudio de la estabilidad de un chorro axilsimétrico con perfil de velocidad gaussiano. Como se muestra en la figura 3.16 (b), los factores de crecimiento de los modos de estela son del mismo orden de magnitud que los de los modos axilsimétricos; sin embargo, como puede estimarse de la figura 3.16 (a), su velocidad de grupo es del orden de  $c_g/U_\infty = d\Omega_r/d\kappa \sim 0,3$ , alrededor de veinte veces mayor que la de los modos axilsimétricos. Por tanto, los modos de estela viajan tan rápido aguas abajo que no tienen tiempo de crecer tanto como los modos capilares antes de que se

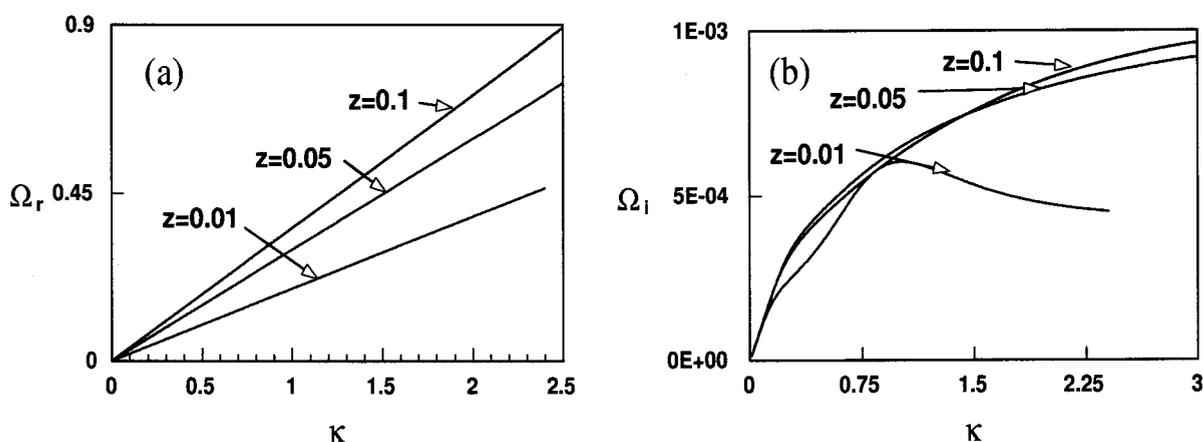


Figura 3.16: (a) Parte real de las frecuencias propias para los modos de estela en distintas posiciones axiales; (b) Parte imaginaria de las frecuencias propias de los modos de estela. En ambas figuras  $We = 15$  y  $M = 850$ .

rompa el chorro líquido. De lo anterior se deduce que, el modelo *A* predice siempre una rotura axilsimétrica del chorro líquido, puesto que los modos helicoidales bien poseen un bajo factor de crecimiento, o bien muy alta velocidad de grupo. La razón por la que este modelo predice una rotura del tipo de Rayleigh, radica en que para los números de  $We$  y  $M$  considerados, la capa de cortadura posee un espesor tal que los efectos dinámicos de la corriente gaseosa apenas influyen en el mecanismo de inestabilidad del chorro líquido. Por tanto, como también se ha eliminado de este modelo el efecto dinámico de la capa de cortadura del líquido (perfil de velocidades no uniforme), el mecanismo de rotura predicho es, necesariamente, capilar. Las limitaciones de este modelo tratarán de superarse mediante el siguiente modelo simplificado.

### 3.5.2. Modelo *B*: Estabilidad de un chorro líquido con perfil de velocidad no uniforme rodeado por una corriente coaxial de gas no perturbada

En este modelo simplificado, los perfiles de velocidad del líquido y del gas son perfiles realistas, calculados numéricamente y validados experimentalmente como se indicó en §3.3, y son los mostrados en la figura 3.11 (b) correspondientes a los valores  $\delta = 0,5$  y  $\Delta = 0,15$ . La simplificación consiste en que, en este modelo, sólo se consideran perturbaciones en la fase líquida, manteniéndose el gas sin perturbar. Se encuentran entonces dos familias de

modos inestables axilsimétricos ( $m = 0$ ), y una familia de modos inestables helicoidales ( $m = 1$ ). Como se verá, los modos helicoidales sólo aparecen para números de Weber suficientemente elevados.

Las frecuencias y el factor de crecimiento de la primera familia de modos inestables, cuyo origen es capilar, están representados para diferentes estaciones aguas abajo en la figura 3.17 (a-b). Obsérvese en la figura 3.17 (a) que las frecuencias de excitación crecen

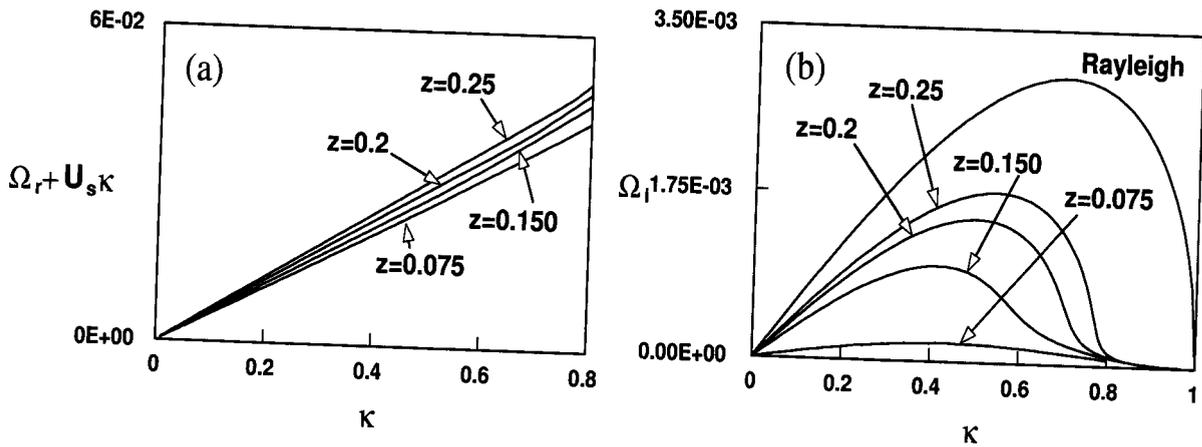


Figura 3.17: (a)-(b): Partes real e imaginaria de las frecuencias propias de los modos capilares axilsimétricos en diferentes posiciones axiales.  $We = 15$ ,  $M = 850$ ;  $U_s$  representa la velocidad en la interfase.

con el número de onda  $y$ , en la figura 3.17 (b), que los factores de crecimiento tienden a los de Rayleigh a medida que aumenta  $z$ , puesto que el perfil de velocidades del líquido se suaviza aguas abajo debido a los efectos de difusión viscosa. La atenuación de los factores de crecimiento que se muestra en la figura 3.17 (b) al disminuir  $z$  (aumento de los gradientes de velocidades en el líquido), confirma los resultados de Leib y Goldstein (1986) en su análisis del problema de Rayleigh para un chorro con perfil básico de velocidades parabólico.

La segunda familia de modos inestables es también de naturaleza axilsimétrica, y sus frecuencias y factores de crecimiento se representan en la figura 3.18 (a-b). Obsérvese que, al contrario de lo que ocurre con los modos capilares, los factores de crecimiento decrecen ahora a medida que los perfiles de velocidad se uniformizan (mayores valores de  $z$ ), por lo que los modos de esta familia serán denominados *modos hidrodinámicos axilsimétricos*, estando su existencia asociada a la capa de cortadura que existe en el chorro líquido adyacente a la superficie libre y no a efectos capilares. Obsérvese que, a pesar de que tanto los modos capilares como los hidrodinámicos axilsimétricos coexisten, sus factores

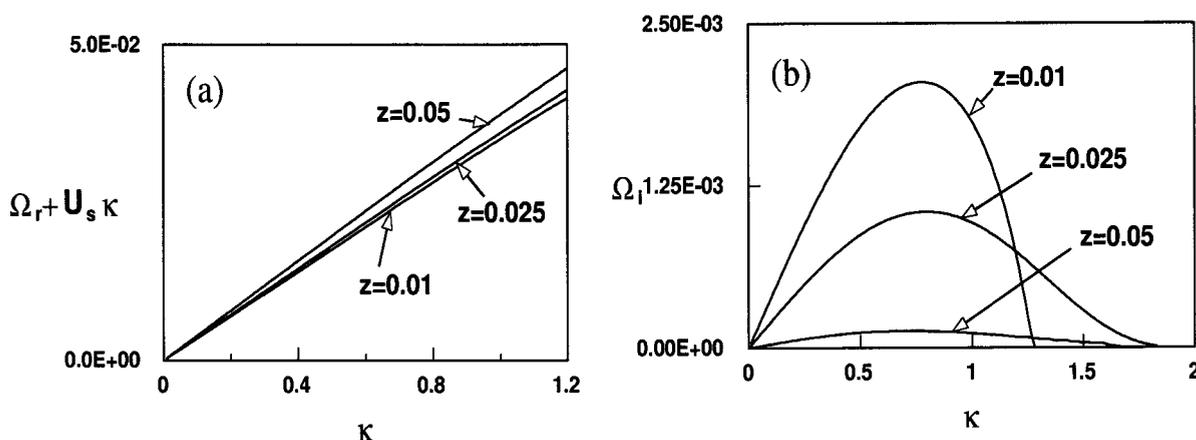


Figura 3.18: (a)-(b): Partes real e imaginaria de las frecuencias propias de los modos hidrodinámicos axilsimétricos en diferentes posiciones axiales.  $We = 15$  y  $M = 850$ .

de crecimiento son marcadamente distintos dependiendo del valor de  $z$ .

Finalmente, para números de Weber suficientemente elevados, aparece una tercera familia de modos inestables, y cuyos factores de crecimiento están representados, para distintos números de Weber, por las líneas continuas en la figura 3.19. Con propósito de comparación, en dicha figura se han representado también los factores de crecimiento de los modos hidrodinámicos axilsimétricos (línea a trazos). Obsérvese que a medida

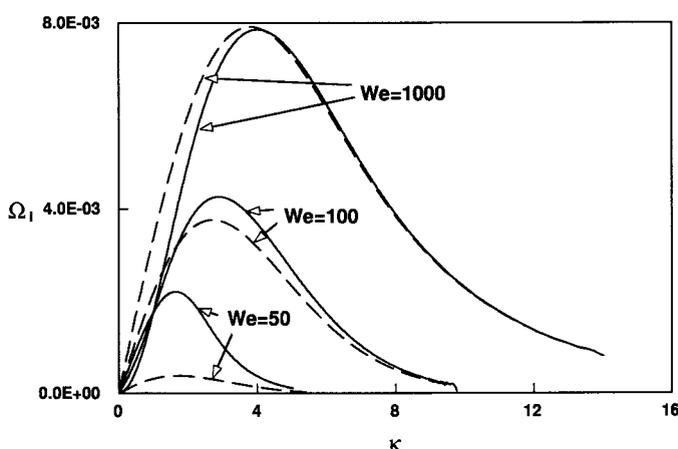


Figura 3.19: Factores de crecimiento de los modos hidrodinámicos y helicoidales para distintos valores del número de Weber en  $z = 0,01$ . Las líneas continuas representan los modos axilsimétricos y, como en los casos anteriores,  $We = 15$ ,  $M = 850$  y  $U_s$  representa la velocidad en la interfase.

que  $We$  aumenta (la importancia relativa de los efectos capilares disminuye) los factores de crecimiento de los modos helicoidales aumentan, haciéndose del mismo orden que los de los modos hidrodinámicos axilsimétricos. Esto indica que la naturaleza de estos modos es también hidrodinámica, por lo que serán denominados modos *hidrodinámicos helicoidales*. Sin embargo, a medida que el  $We$  decrece, las diferencias entre las familias axilsimétrica y helicoidal se acentúan, pudiéndose ver en la figura 3.19 que, mientras que existe un valor mínimo del  $We$  a partir del cual los modos helicoidales se vuelven estables, no se encuentra tal comportamiento para los modos hidrodinámicos axilsimétricos. La diferencia de comportamiento para bajos valores del número de Weber puede explicarse en términos físicos si se tiene en cuenta que, cuando los efectos capilares son importantes, las fuerzas de tensión superficial tienden a inhibir la aparición de formas helicoidales mientras que favorecen el crecimiento de perturbaciones axilsimétricas. De lo anterior se concluye que, la consideración del modelo simplificado B ha permitido desvelar dos familias de modos inestables, hasta ahora desconocidos, cuyo origen es completamente distinto al de los modos de Rayleigh y Taylor. La relación entre la capa de cortadura existente en el líquido y el origen hidrodinámico de estos modos se muestra de forma esquemática en la figura 3.20. Se observa que el mecanismo de inestabilidad es el bien conocido de Kelvin-Helmholtz (Chandrasekhar 1961), que se produce cuando existen gradientes transversales de velocidad en corrientes paralelas.

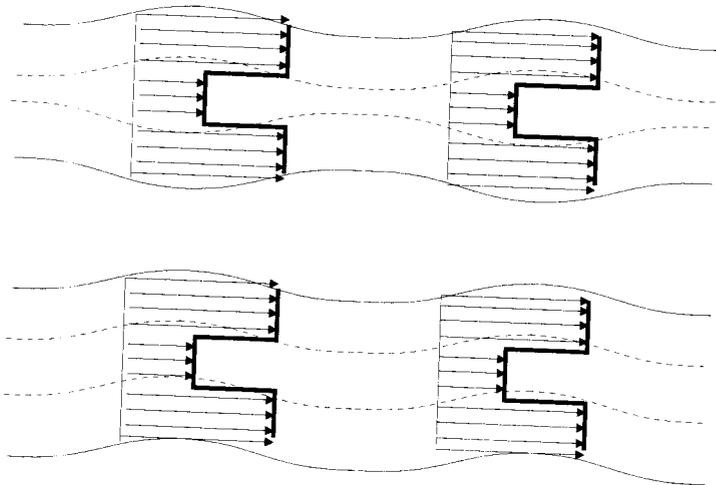


Figura 3.20: Mecanismo de inestabilidad de los modos hidrodinámicos axilsimétricos y helicoidales.

### 3.5.3. Modelo C: Análisis de estabilidad del problema completo

En esta sección se presentan los resultados de los análisis de estabilidad realizados al tener en cuenta los perfiles realistas de velocidad, ya considerados en el modelo B, pero introduciendo ahora perturbaciones tanto en la corriente de líquido como en la de gas. Las frecuencias típicas y factores de crecimiento de los modos que aparecen en este caso están representadas en las figuras 3.21 y 3.22. La figura 3.21 (a) muestra los factores de

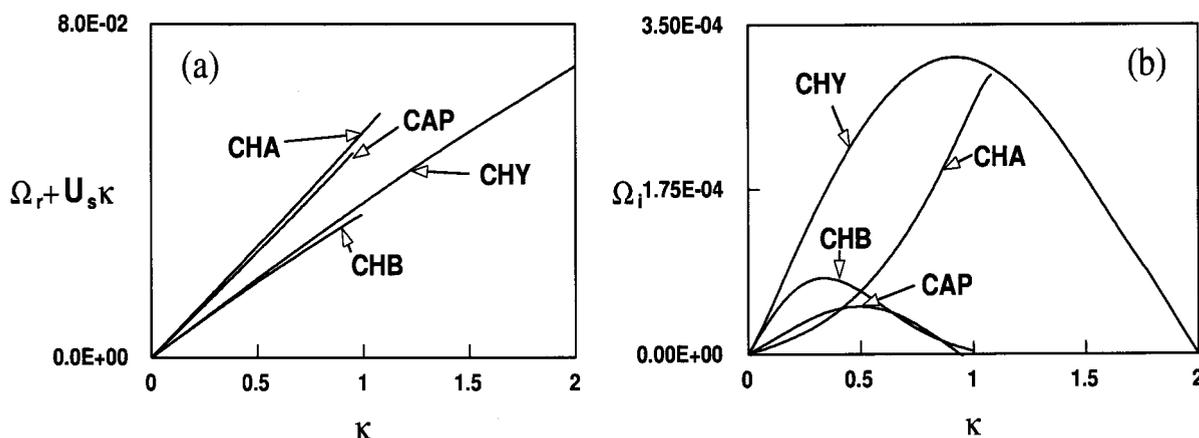


Figura 3.21: (a)-(b): Partes real e imaginaria de los distintos autovalores excitados a frecuencias del orden de  $U_l/R_0$  en la posición axial  $z = 0,025$  para  $We = 15$  y  $M = 850$  (los factores de amplificación temporal de los modos helicoidales del tipo A (CHA) han sido multiplicados por un factor de 100, y los modos axilsimétricos hidrodinámicos (CHY) están divididos por un factor de 5).

crecimiento de modos cuyas frecuencias de excitación son del orden de la capilar ( $U_l/R_0$ ). Dentro de este grupo de modos, existen dos familias axilsimétricas, que se denotarán por CAP y CHY respectivamente, y dos familias de modos helicoidales denotadas por CHA y CHB respectivamente. Como se verá en breve, y es lo que justifica la notación empleada, los modos CAP están relacionados con los modos capilares axilsimétricos encontrados previamente en los modelos A y B, los modos del tipo CHY están relacionados con los modos hidrodinámicos axilsimétricos del modelo B, y los modos CHA y CHB con los modos helicoidales de los modelos simplificados A y B respectivamente. Los factores de crecimiento de estos modos están representados en la figura 3.21 (b). La figura 3.22 (a-b) muestra la quinta familia de modos encontrados en el modelo C, que serán identificados por CWK, siendo sus frecuencias y factores de crecimiento del orden de la de los modos de estela encontrados en el modelo A (véase la figura 3.16). A continuación se analizará con mayor detalle la relación entre los modos encontrados en los modelos simplificados A y

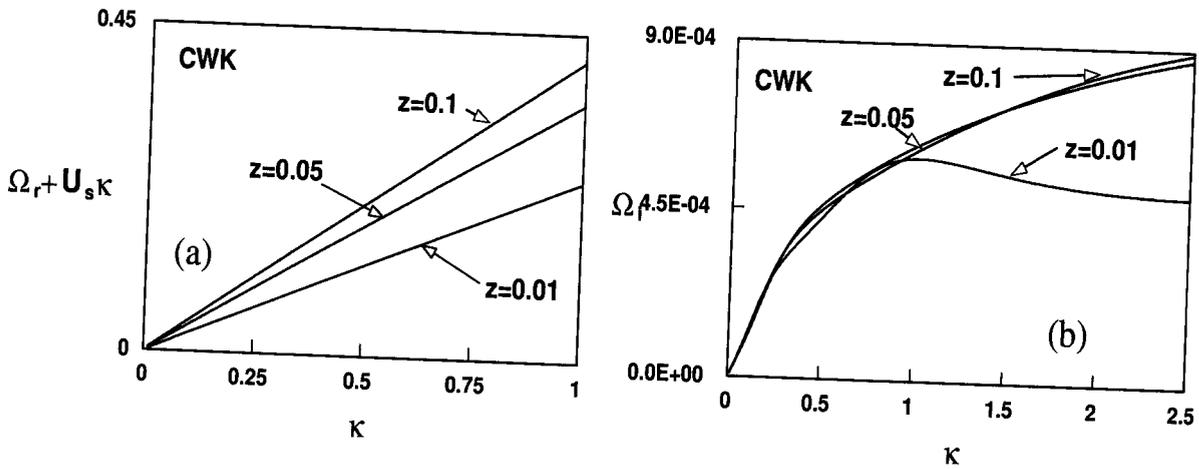


Figura 3.22: Partes real e imaginaria de los *modos de estela* para el modelo C.

$B$ , y en el modelo completo  $C$ .

La figura 3.23 muestra los factores de crecimiento de los modos capilares axilsimétricos calculados para perfiles básicos de velocidad en diferentes secciones  $z$ , tanto para el modelo  $A$  como para los modos del tipo CAP del modelo  $C$ . Se observa que, mientras que el

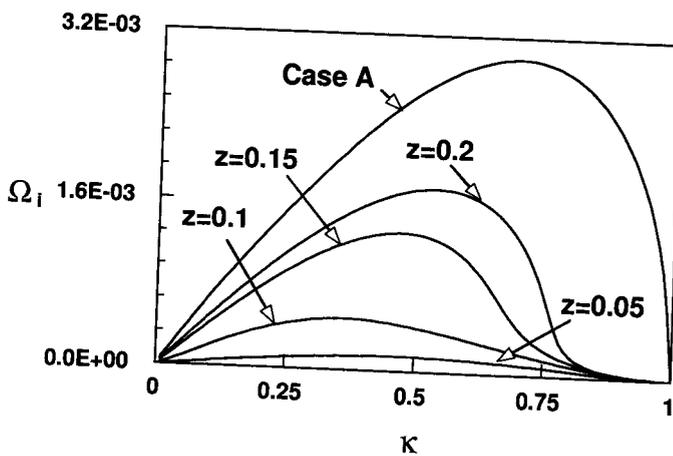


Figura 3.23: Factores de crecimiento de los modos axilsimétricos capilares de los modelos A y C para diferentes posiciones axiales para  $We = 15$  y  $M = 850$ .

modelo  $A$  proporciona únicamente la solución de Rayleigh en todas las posiciones axiales, los factores de crecimiento para los modos del modelo  $C$  son sustancialmente menores, y dependen del perfil de velocidad sólo aproximándose a la solución de Rayleigh en el límite  $z \rightarrow \infty$ . Los modos CHA representados en la figura 3.21 son claramente análogos

a los modos helicoidales identificados en el modelo *A* (véase la figura 3.15), y no serán considerados de nuevo en lo que sigue debido a que no son de interés desde el punto de vista experimental por sus pequeños factores de crecimiento.

Los factores de crecimiento de los modos capilares axilsimétricos del modelo *B* y de los modos CAP del modelo *C* se muestran en la figura 3.24 (a) para diferentes estaciones *z*. Los factores de crecimiento son mayores para el modelo *C*, lo que puede atribuirse a la

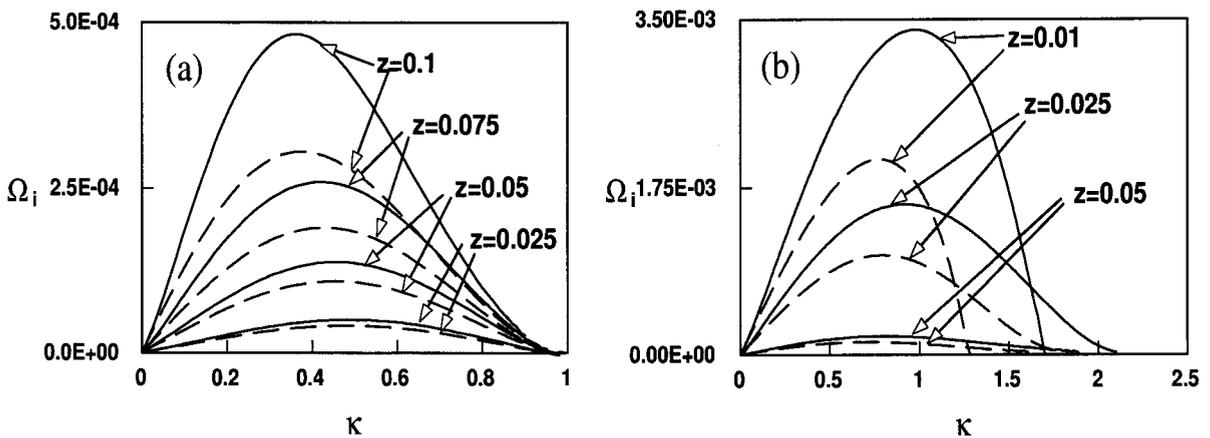


Figura 3.24: Factores de crecimiento de los modos capilares axilsimétricos (a) y de los hidrodinámicos axilsimétricos (b) en el caso de la ausencia de corriente gaseosa externa (modelo *B*, línea discontinua) y considerándola (modelo *C*, línea continua) para diferentes posiciones axiales. Para estas figuras,  $We = 15$  y  $M = 850$ .

energía aportada al líquido por las perturbaciones de presión originadas por la corriente de gas, mecanismo que, por definición, está ausente en el modelo *B*. Este efecto puede observarse también en la figura 3.24 (b) donde se representan los modos CHY del modelo *C* y los modos hidrodinámicos axilsimétricos del modelo *B*. La figura 3.25 es análoga a la 3.19, y muestra el comportamiento con el número de Weber de los modos hidrodinámicos helicoidales del modelo *B* y los del modelo *C* (modos del tipo CHB). Obsérvese que, como se vio en la sección §3.5.2, existe un valor mínimo del número de Weber por debajo del cual los modos helicoidales del modelo *B* son estables, y lo mismo ocurre para los modos del tipo CHB del modelo *C*, pero para un número de Weber límite menor que para el del modelo *B*. Esto puede atribuirse, de nuevo, al efecto de las perturbaciones en la corriente de gas que hacen que los factores de crecimiento de los modos CHB sean mayores que los del modelo *B*.

Finalmente, se analizará el comportamiento de los modos del modelo *C* a variaciones

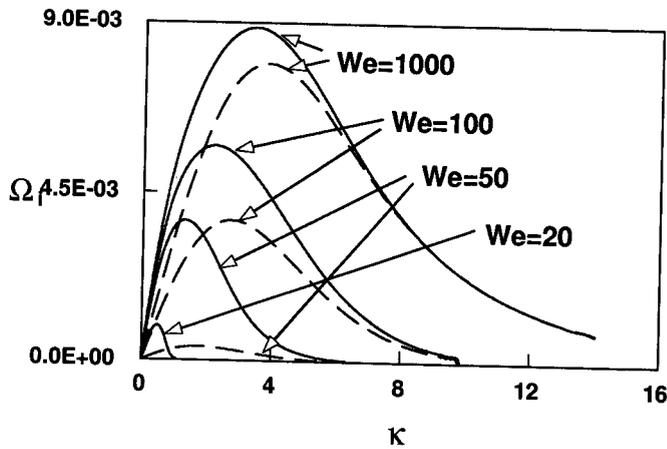


Figura 3.25: Factores de crecimiento de los modos helicoidales en el caso de no considerar la corriente externa de gas (modelo B, línea discontinua) y considerándola para diferentes valores del número de Weber en un posición axial fija ( $z = 0,01$ ) y para  $M = 850$ .

de  $z$ , del número de Weber  $We$  y del cociente de densidades  $M$ . La figura 3.26 muestra las frecuencias y factores de crecimiento de los modos CAP, CHY y CHB para diferentes estaciones  $z$ . A medida que los perfiles de velocidad se uniformizan, los factores de crecimiento de los modos capilares axilimétricos (CAP) aumentan, lo que refleja la naturaleza capilar de estos modos, mientras que los factores de crecimiento de los modos helicoidales y axilimétricos hidrodinámicos (modos CHB y CHY respectivamente) disminuye, lo que refleja su naturaleza hidrodinámica. La figura 3.27 muestra los factores de crecimiento de los modos capilares y de los hidrodinámicos, tanto axilimétricos como helicoidales, para diferentes valores del número de Weber y en una estación fija  $z = 0,05$ . El tipo de modo con mayor factor de crecimiento depende del número de Weber, o lo que es lo mismo, de la importancia relativa de la tensión superficial. Así, por ejemplo, los modos capilares axilimétricos poseen los mayores factores de amplificación para  $We = 10$ , mientras que para  $We = 15$ , esto ocurre para los modos hidrodinámicos axilimétricos y para  $We = 20$ , son los modos helicoidales los de mayor factor de crecimiento. La figura 3.28 muestra la influencia del cociente de densidades  $M$  en el factor de crecimiento de los modos CAP, CHB y CHY. A medida que  $M$  aumenta, los factores de crecimiento de los modos CAP y CHY disminuyen, mientras que los de los modos CHB crecen. Este tipo de comportamiento, que es el que se espera para los modos capilares, revela que la inercia del líquido favorece el desarrollo de las inestabilidades hidrodinámicas del tipo helicoidal en vez de las axilimétricas.

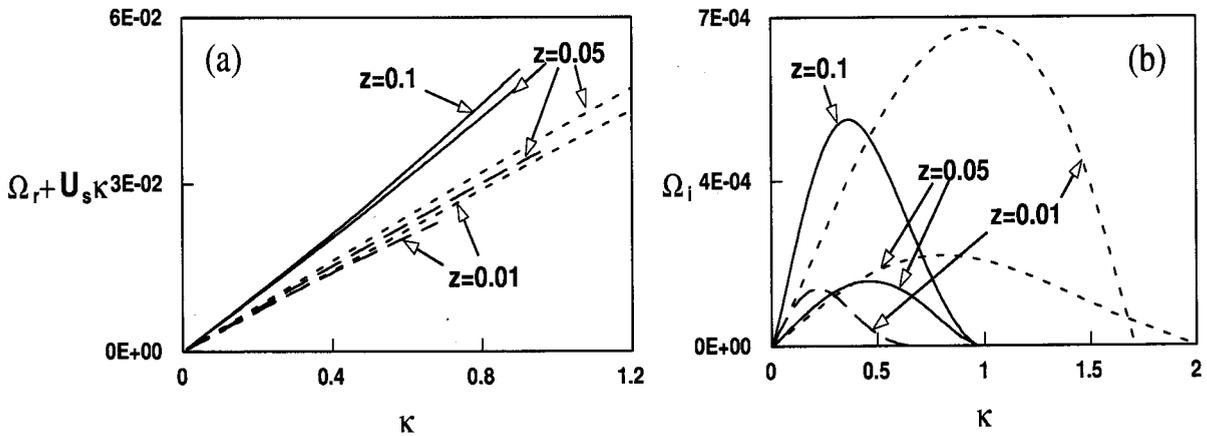


Figura 3.26: Partes real e imaginaria de las frecuencias propias de los modos capilares axilsimétricos (línea continua), modos helicoidales hidrodinámicos (línea discontinua) y modos hidrodinámicos axilsimétricos (puntos), para diferentes posiciones axiales y para valores del número de Weber y de la relación de densidades  $We = 15$  y  $M = 850$ . Nótese que los factores de crecimiento de los modos hidrodinámicos axilsimétricos en (b) han sido divididos por un factor de 5.

### 3.6. Comparación con los experimentos

En esta sección los resultados numéricos presentados en §3.5 serán comparados con los obtenidos experimentalmente y que se muestran en la serie de fotografías 3.29 (a-f). Los experimentos han sido realizados para un caudal fijo de agua de  $Q = 30mlh^{-1}$ , y diferentes caídas de presión  $\Delta p$  entre la cámara de aire y la atmósfera. Las imágenes fueron capturadas haciendo uso de una cámara de alta velocidad de la marca Stanford Computer Optics, modelo 4Quick-05; dicha cámara posee un intensificador de luz tal que permite tiempos de exposición tan cortos como  $10ns$ . En la figura 3.29, las fotografías (a-c,f) muestran una rotura axilsimétrica, mientras que en las (d) y (e) se muestra cómo el chorro se rompe de una manera helicoidal. Para el menor valor de  $\Delta p$  usado en los experimentos, que corresponde a la fotografía 3.29 (a), la longitud de onda de rotura medida está muy próxima a la predicha por el modelo de Rayleigh, lo que indica un mecanismo de inestabilización capilar. Esto puede explicarse si se tiene en cuenta que los perfiles de velocidad en el líquido y en el gas son tanto más uniformes cuanto menor sea  $\Delta p$ , por lo que para  $\Delta p$  muy bajos no existen gradientes radiales de velocidad suficientemente intensos como para promover la aparición de modos hidrodinámicos. A medida que  $\Delta p$  aumenta en la figura 3.29 (b), las corrientes de líquido y de gas se aceleran y se forman capas de cortadura más estrechas en ambos fluidos, lo que hace que las longitudes de onda

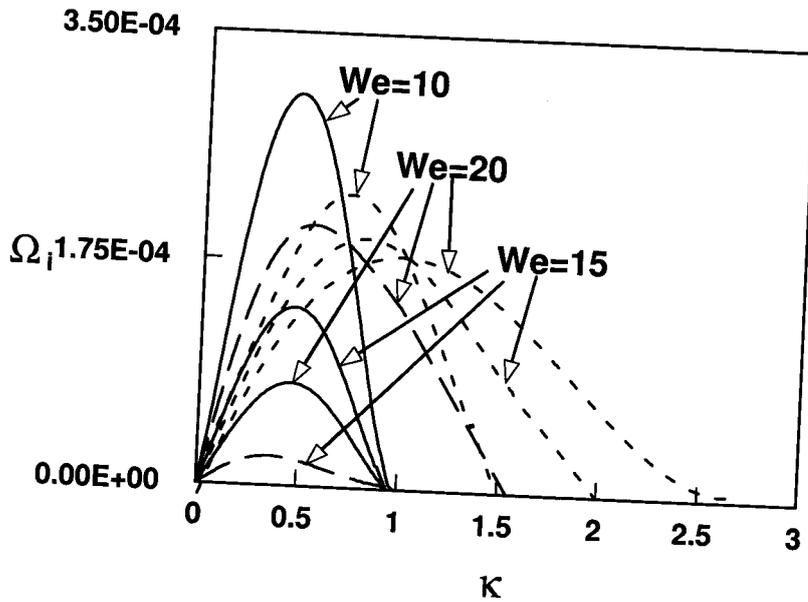


Figura 3.27: Factores de crecimiento de los modos capilares axilsimétricos (línea continua) de los hidrodinámicos helicoidales (línea discontinua) y los hidrodinámicos axilsimétricos (puntos) para distintos valores del número de Weber en la posición axial  $z = 0,05$  y para  $M = 850$ . Los modos helicoidales para  $We = 10$  no se muestran ya que sus factores de crecimiento son despreciables dentro de la escala de la figura.

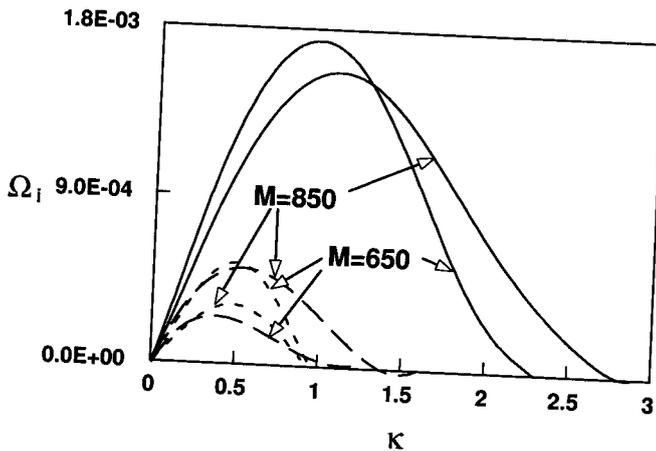


Figura 3.28: Factores de crecimiento de los modos capilares (puntos), de los helicoidales hidrodinámicos (línea discontinua) y de los hidrodinámicos axilsimétricos (línea continua) para dos valores  $M$  en la posición axial  $z = 0,025$  y para  $We = 20$  (los factores de crecimiento de los modos capilares axilsimétricos han sido multiplicados por un factor de 10).

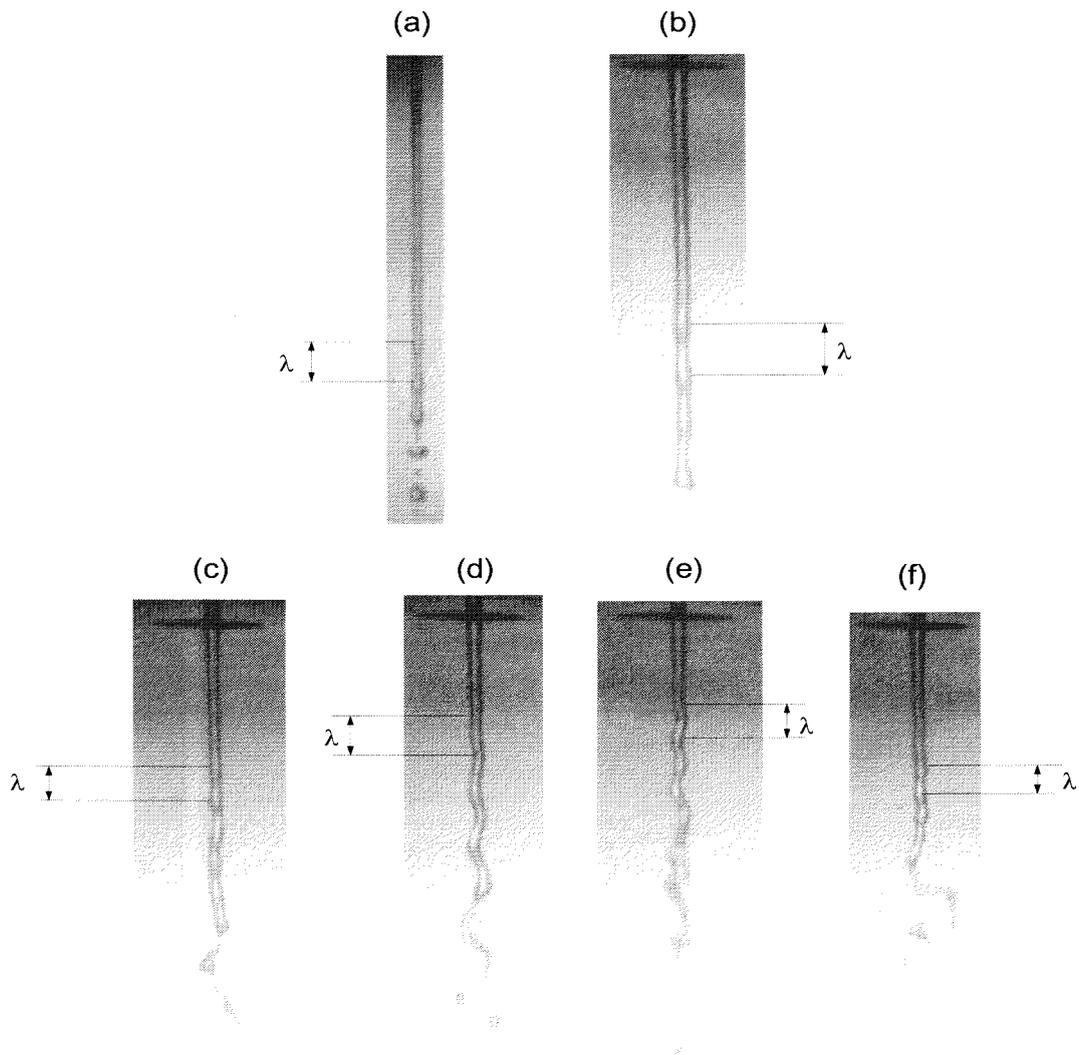


Figura 3.29: Fotografías que muestran los distintos regímenes de atomización para un valor constante de  $Q=30 \text{ ml h}^{-1}$ . Los valores de los diferentes parámetros para cada una de las imágenes son: (a)  $\Delta p=5 \text{ kPa}$ ;  $U_l=3.2 \text{ m s}^{-1}$ ;  $U_g=92 \text{ m s}^{-1}$ ;  $M=800$ ;  $Re=233$ ;  $We_0=6.3$ ;  $\kappa=0.68$ ;  $z_r > 0.3$ . (b)  $\Delta p=10 \text{ kPa}$ ;  $U_l=4.5 \text{ m s}^{-1}$ ;  $U_g=127 \text{ m s}^{-1}$ ;  $M=739$ ;  $Re=295$ ;  $We_0=11$ ;  $\kappa=0.77$ ;  $z_r \sim 0.17$ . (c) and (d)  $\Delta p=20 \text{ kPa}$ ;  $U_l=6.3 \text{ m s}^{-1}$ ;  $U_g=173 \text{ m s}^{-1}$ ;  $M=638$ ;  $Re=387$ ;  $We_0=20$ ;  $\kappa(c)=1.02$ ;  $z_r(c) \sim 0.13$   $\kappa(d)=0.66$ ;  $z_r(d) \sim 0.12$ ; (e) and (f)  $\Delta p=30 \text{ kPa}$ ;  $U_l=7.75 \text{ m s}^{-1}$ ;  $U_g=208 \text{ m s}^{-1}$ ;  $M=556$ ;  $Re=454$ ;  $We_0=28$ ;  $\kappa(e)=0.68$ ;  $z_r(e) \sim 0.085$ ;  $\kappa(f)=1.21$ ;  $z_r(f) \sim 0.09$ . Nótese que  $z_r$  es la distancia adimensional de rotura del chorro líquido.

de rotura sean menores que las de Rayleigh, características de los modos hidrodinámicos asociados a la capa de cortadura que se desarrolla en el líquido que controla, entonces, el proceso de rotura. Nuestros resultados numéricos presentados en la figura 3.26 confirman este hecho experimental, puesto que el efecto de mayores gradientes de velocidades axiales en el líquido es equivalente a considerar menores valores de  $z$ , en cuyo caso se observa en dicha figura, cómo los modos hidrodinámicos axilsimétricos crecen de manera más rápida que los capilares y los helicoidales. En las figuras 3.29 (c-d) se observa cómo, para valores crecientes de  $\Delta p$ , se incrementa el efecto de la no uniformidad de los perfiles de velocidad y aparecen longitudes de onda de rotura más cortas. Esto también puede deducirse de los resultados numéricos de las figuras 3.26-3.27 cuando se consideran bajos valores de  $z$  y altos valores del número de Weber, correspondientes a los elevados gradientes de velocidad y altas velocidades que se producen para  $\Delta p$  elevados. En efecto, en dichas figuras se observa entonces cómo los modos capilares poseen un factor de crecimiento tan bajo que no deben jugar ningún papel en el proceso de rotura, estando ésta dominada por el crecimiento de perturbaciones de tipo hidrodinámico, ya sean axilsimétricas o bien helicoidales. De hecho, para el número de Weber  $We = 20$  correspondiente a la situación mostrada en las figuras 3.29 (c-d), se observa que el modo de rotura del chorro alterna entre el axilsimétrico (figura 3.29 c) y el helicoidal (figura 3.29 d), con predominancia del primero; se observa, además, que la rotura axilsimétrica tiene lugar con un número de onda  $\kappa \simeq 1$ , mientras que el número de onda medido para la rotura helicoidal es  $\kappa \simeq 0,66$ . De nuevo, esto concuerda con los resultados numéricos mostrados en la figura 3.30, donde se observa que, para  $We = 20$ , el factor de crecimiento de los modos axilsimétricos supera, aun siendo del mismo orden de magnitud, al de los modos helicoidales; además, el número de onda correspondiente al máximo factor de crecimiento de los modos axilsimétricos se presenta en torno a 1, mientras que el de los modos helicoidales está en torno a 0.5. Para mayores números de Weber se observa en 3.30 que el máximo factor de crecimiento de los modos helicoidales crece rápidamente, llegando a superar al de los modos axilsimétricos, que depende muy débilmente del número de Weber; los números de onda correspondientes a los máximos factores de crecimiento aumentan ligeramente con el número de Weber para los dos tipos de modos, manteniéndose en torno a 0.6 y 1 respectivamente. Esto concuerda bien con lo observado en el experimento correspondiente a las figuras 3.29 (e-f), obtenidas para  $We = 28$ , donde se observan, de forma alternada, la rotura axilsimétrica (3.29 f) y la helicoidal (3.29 e), siendo más frecuente esta vez esta última; las longitudes de onda experimentales son  $\kappa \simeq 1,21$  para la rotura axilsimétrica y  $\kappa \simeq 0,68$  para la helicoidal.

Para concluir, debe indicarse, que al seguir aumentando el número de Weber no se han observado tipos de rotura diferentes a los que se acaban de describir.

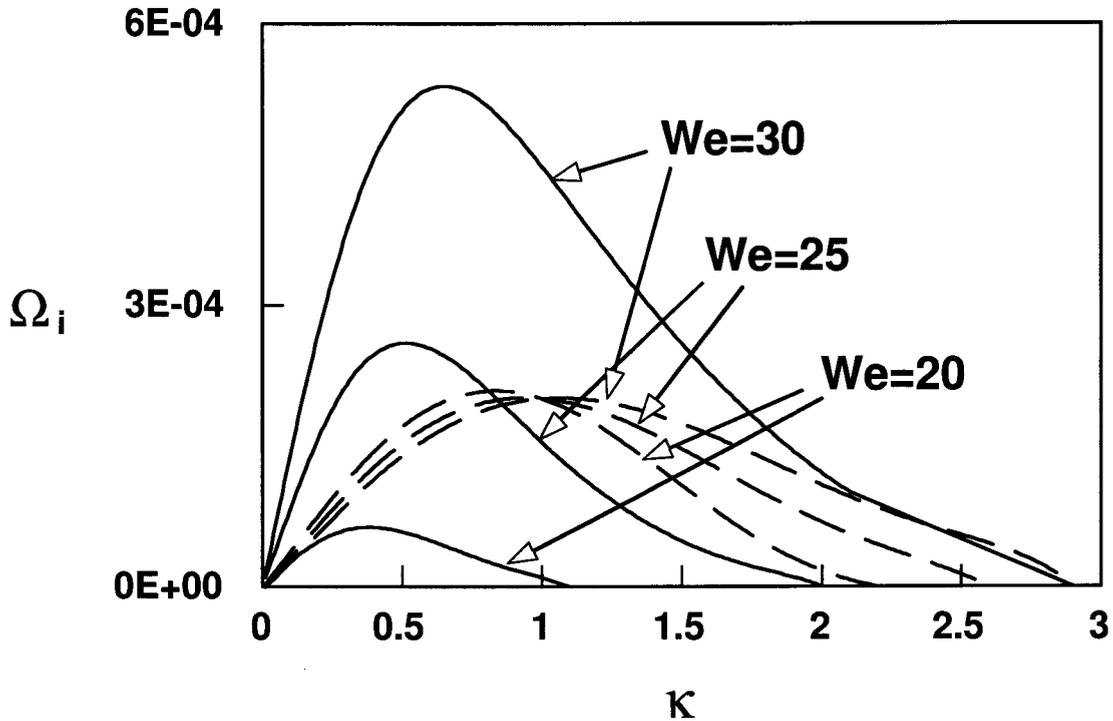


Figura 3.30: Factores de crecimiento de los modos hidrodinámicos axilsimétricos (línea discontinua) y de los hidrodinámicos helicoidales (línea continua) para diferentes valores del número de Weber y para una valor fijo de  $M = 650$  en la posición axial  $z = 0,05$ .

### 3.7. Conclusiones

En este capítulo se ha realizado un análisis de estabilidad lineal no viscoso y temporal de un chorro líquido cofluyendo con una corriente coaxial de gas. Para el análisis se han empleado perfiles básicos de velocidad, que han sido calculados numéricamente de manera autoconsistente a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (§3.2), y que han sido validados experimentalmente (§3.3); de hecho, se ha usado información obtenida experimentalmente para obtener los perfiles de velocidad iniciales apropiados para llevar a cabo la integración aguas abajo de las ecuaciones fluidomecánicas. Una vez calculada la solución básica del problema, se han obtenido de forma convencional en §3.4 las ecuaciones linealizadas que

permiten realizar el análisis de estabilidad. Estas ecuaciones se han resuelto primero para dos modelos simplificados (modelo A y modelo B), cuyo interés es puramente teórico, pero que, además de proporcionar tipos de modos inexplorados previamente en la literatura, permiten un mejor entendimiento de los diferentes tipos de modos y mecanismos de inestabilidad que aparecen en el modelo completo, más realista, que se ha denominado modelo C.

El primer modelo (modelo A), analizado en §3.5.1, es el de un chorro líquido de radio constante y velocidad uniforme cofluyendo con una corriente gaseosa que desarrolla un perfil de velocidades del tipo de capa límite. Usando este modelo se han encontrado los mismos tipos de modos, capilares y helicoidales, que los ya reportados en la literatura, pero se ha obtenido que sus factores de crecimiento dependen fuertemente de la estructura del perfil de velocidades del gas, en particular, del espesor de la capa límite. De hecho, para espesores de capa límite del orden del radio del chorro líquido (que es el caso de nuestros experimentos), el modelo A proporciona que el mecanismo de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz no es relevante, y los factores de crecimiento siguen fielmente la relación de dispersión de Rayleigh en el caso de perturbaciones axilsimétricas (modos capilares), siendo despreciable el factor de crecimiento de los modos helicoidales. La clásica relación de dispersión de Kelvin-Helmholtz se obtiene únicamente para los menores espesores de capa límite; para mayores espesores, pero aún pequeños en comparación con el radio del chorro líquido, los factores de crecimiento difieren apreciablemente de los resultados de Kelvin-Helmholtz. Además de los modos capilares y helicoidales existe una tercera familia de modos, que se han denominado *modos de estela*, cuyas frecuencias de excitación son del orden de  $U_\infty/R$ , lo que denota su origen hidrodinámico, y sus factores de amplificación temporal, que son del orden de los de los modos capilares, no están muy influenciados ni por el número de Weber ni por el espesor de la capa límite. Estos modos no habían sido reportados previamente en la literatura.

En §3.5.2 se ha considerado un segundo modelo simplificado (modelo B), consistente en un chorro líquido con perfil de velocidades no uniforme acoplado a una corriente externa de gas. En este caso, los perfiles básicos de velocidad son realistas y se han calculado de forma autoconsistente en §3.3. La simplificación consiste en que se ha supuesto que la fase gaseosa permanece sin perturbar, existiendo perturbaciones sólo en el líquido. En este caso, el análisis de estabilidad revela que existen tres familias de modos inestables, dos de ellas axilsimétricas, y la tercera helicoidal. La primera familia de modos axilsimétricos tiene un origen capilar y aparecía ya en el modelo previo (modelo A). La segunda familia

de modos axilsimétricos, al igual que la de los modos helicoidales, tiene un origen hidrodinámico, como puede deducirse del comportamiento de sus factores de crecimiento, que aumentan tanto al incrementarse el número de Weber como al decrecer el espesor de la capa de cortadura en el líquido. Estos modos, en lo que alcanza nuestro conocimiento, tampoco habían sido previamente descritos en la literatura.

Finalmente, en §3.5.3 se ha considerado el modelo que reproduce más fielmente las condiciones experimentales mostradas en la figura 3.29 (modelo C). Se han encontrado, esencialmente, los mismos tipos de modos descritos en los dos modelos simplificados anteriores, aunque los factores de crecimiento se modifican sustancialmente con respecto a los de aquéllos debido a la influencia de la estructura de los perfiles básicos de velocidad y, también, debido a que se incluyen perturbaciones en ambas corrientes. Los resultados de este modelo se han utilizado para explicar los experimentos mostrados en las fotografías 3.29 (a-f). Se concluye entonces que, mientras que para bajas velocidades del gas el proceso de rotura es capilar de acuerdo con los resultados de Rayleigh, para velocidades mayores, los modos hidrodinámicos tanto axilsimétricos como helicoidales, entran en juego y dominan el proceso de rotura. Puesto que los modos de origen hidrodinámico están íntimamente ligados a la existencia de una capa de cortadura en el chorro líquido, puede concluirse que, cualquier modelo con perfiles básicos de velocidad uniformes en el líquido, no podrá describir de forma correcta los procesos de rotura en los experimentos de atomización, al menos, en el caso en que la relación de momentos de las dos corrientes sea próxima a la unidad.

# Capítulo 4

## Generación de burbujas micrométricas

### 4.1. Introducción

Al contrario de lo que ocurre con los chorros líquidos en aire, las corrientes gaseosas en el seno de un coflujo líquido son altamente inestables. Se observa que, cuando estos chorros gaseosos son lo suficientemente pequeños, su rotura en micro burbujas se produce a una frecuencia propia del sistema, que no está influenciada por ningún ruido externo, con lo que las burbujas formadas poseen tamaños idénticos (véase la figura 4.1). Como se indicó en el primer capítulo, no son muchos los trabajos dedicados al estudio de la formación de burbujas, tanto en lo que concierne al proceso de generación primaria como a la generación secundaria. La diferencia entre los dos procesos es que el primero aprovecha la tendencia natural del sistema a imponer una frecuencia propia de generación, que no está afectada por factores externos, lo que permite obtener burbujas de tamaños homogéneos. Entre los trabajos que tratan la generación primaria de burbujas cabe destacar el de Oguz y Prosperetti (1993), en el que se estudia el proceso de formación de burbujas desde el extremo de un tubo capilar al que se suministra una corriente continua de gas. En este análisis, no lineal, se considera la interacción del gas con el líquido exterior suponiendo que éste es no viscoso, mientras que se desprecia la cantidad de movimiento del gas inyectado en la burbuja; como se ha indicado repetidamente a lo largo de esta tesis, este efecto no puede despreciarse en nuestros experimentos realizados con el generados de micro-burbujas descrito en §1.4, puesto que las corrientes de líquido y de gas poseen la misma cantidad de movimiento. En cuanto a la generación secundaria de burbujas, hay que destacar los

trabajos de Martínez-Bazán, Montañés y Lasheras (1999 a,b), en los que se proporciona una teoría que predice la distribución de tamaños de burbujas formadas en el seno de una corriente líquida turbulenta, y que concuerda de manera excelente con los experimentos.

En este capítulo se va a describir de forma teórica algunos aspectos esenciales del fenómeno de generación de micro-burbujas mediante un análisis de estabilidad lineal, cuya validez se comprobará a posteriori mediante la comparación con los experimentos. Se va a poner de manifiesto que en los chorros gaseosos rodeados por una corriente coaxial de líquido las perturbaciones inestables no pueden ser convectadas aguas abajo y, por tanto, el sistema desarrolla una inestabilidad absoluta (véanse §2.1-§2.2). Como se verá, este resultado explica el carácter extremadamente elusivo de los chorros gaseosos, que contrasta con el comportamiento de los chorros líquidos; en efecto, en el seno del aire, los chorros líquidos pueden llegar a tener longitudes de rotura del orden de 100 veces su diámetro, mientras que en el caso de gases nunca se observan ligamentos de más de dos o tres diámetros de longitud. Asimismo, los resultados del análisis van a permitir inferir algunas características de los procesos no lineales que tienen lugar en la generación, tales como el establecimiento de una frecuencia propia de producción (frequency locking), que está relacionada con la enorme monodispersidad observada de las burbujas.

Nuestro análisis de estabilidad se va a llevar a cabo teniendo en cuenta las condiciones experimentales que se dan en el dispositivo descrito en §1.4, cuando éste se usa como generador de burbujas. En este caso, un caudal dado de gas se inyecta a través del capilar situado dentro de la cámara que contiene el líquido. Se forma entonces una burbuja de gas en el extremo del capilar y, debido a la diferencia de presión existente entre la cámara y el ambiente, los flujos coaxiales de gas y de líquido salen a través de un orificio practicado en la cámara concéntrico con el capilar (véase figura 4.1). El chorro de gas, una vez formado, se disgrega inmediatamente en una corriente continua de micro-burbujas de tamaños homogéneos como puede verse en la figura 4.1 (b).

## 4.2. Análisis de estabilidad lineal

Como se ha indicado en la sección anterior, y como se verá más adelante, el carácter de la inestabilidad de chorros gaseosos está íntimamente relacionado con el hecho de que las perturbaciones no se convectan aguas abajo, lo que da lugar a una inestabilidad absoluta. Esto sugiere que el simple análisis de estabilidad temporal del problema sea, en este caso, insuficiente para describir el fenómeno, por lo que se llevará a cabo aquí la resolución del

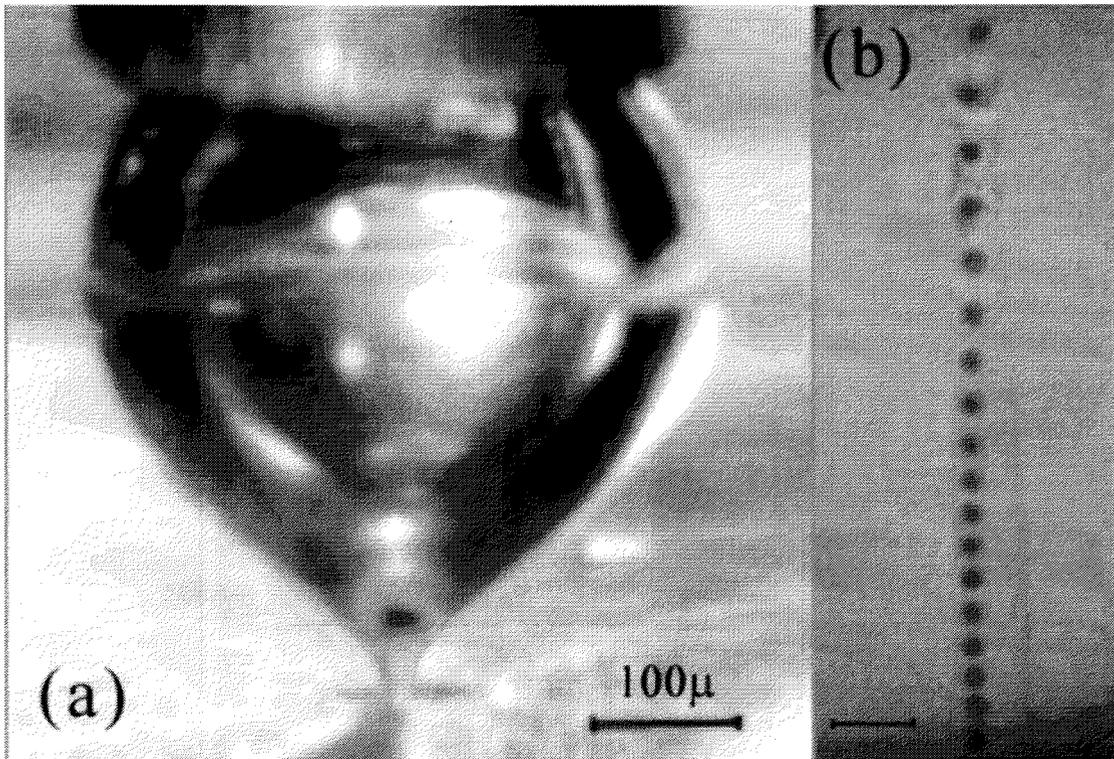


Figura 4.1: (a) Vista típica del chorro de gas partiendo del vértice de la burbuja que se forma en el extremo de la aguja inyectora. (b) Vista de la región próxima al orificio de salida. La imagen ha sido tomada haciendo uso de una cámara de alta velocidad con un tiempo de exposición de  $150 \text{ ns}$ . Obsérvese la sorprendente homogeneidad de tamaños de las burbujas y que éstas se forman en el límite de la cámara a presión con el exterior.

problema de valores iniciales, del que, como se discutió en el capítulo segundo, el análisis temporal es sólo un caso particular. Las ecuaciones y condiciones de contorno linealizadas que gobiernan la evolución de las perturbaciones son las mismas que las deducidas en el capítulo anterior, (3.38)-(3.45). Para la resolución de dichas ecuaciones sujetas a un pulso inicial localizado espacialmente en torno a  $r = R_p$  y  $z = 0$ , se tomarán la transformada de Laplace en tiempo y la transformada de Fourier según la coordenada axial  $z$  lo que, tras las manipulaciones algebraicas descritas en el capítulo tercero, proporciona la ecuación para las perturbaciones de presión en el líquido y en el gas

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dp_{(l,g)}}{d\xi} \right) - 2 \frac{\kappa}{(U_{0(l,g)}\kappa - \Omega)} \frac{dU_{0(l,g)}}{d\xi} \frac{dp_{(l,g)}}{d\xi} - \kappa^2 p_{(l,g)} = \delta(r - R_p), \quad (4.1)$$

donde los subíndices  $l$  y  $g$  identifican al líquido y al gas respectivamente y el subíndice 0 denota el estado básico. Es conveniente introducir en el análisis el siguiente conjunto de

parámetros y variables adimensionales

$$M = \frac{\rho_l}{\rho_g}, \quad We = \frac{\rho_l U_{l\infty}^2 R_0}{\sigma}, \quad \kappa = \bar{k} R_0, \quad \Omega = \frac{\bar{\omega} R_0}{U_{l\infty}},$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho_l U_{l\infty}^2}, \quad U_0(r) = \frac{\bar{U}_0(r)}{U_{l\infty}}, \quad \xi = \frac{r}{R_0}, \quad (4.2)$$

donde  $M$  es el cociente de densidades de las corrientes de líquido y de gas,  $We$  es el número de Weber, y  $r$ ,  $\bar{k}$  y  $\bar{\omega}$ , representan la coordenada radial, el número de onda y la frecuencia compleja respectivamente;  $R_0$  es el radio del chorro gaseoso sin perturbar, y  $U_{l\infty}$  es la velocidad del líquido para  $\xi \rightarrow \infty$ . Las soluciones a las ecuaciones en (4.1) deben satisfacer las condiciones de regularidad en el eje de simetría y en el infinito

$$\xi = 0 \quad p_g \neq \infty, \quad \xi \rightarrow \infty \quad p_l \neq \infty, \quad (4.3)$$

así como las condiciones en la superficie libre  $\xi = 1$ , análogas a las del capítulo tercero,

$$\frac{dp_l}{d\xi} = M \frac{dp_g}{d\xi}, \quad (4.4)$$

$$p_g = p_l - \frac{We^{-1}}{(U_s \kappa - \Omega)^2} (1 - \kappa^2) \frac{dp_l}{d\xi}. \quad (4.5)$$

La ecuación (4.4) expresa la continuidad de la componente radial de la velocidad a través de la interfase, y la ecuación (4.5), donde  $U_s$  es la velocidad axial del flujo básico en  $\xi = 1$ , expresa el balance de esfuerzos normales a través de la interfase. La ecuación característica, o relación de dispersión del problema, se obtiene imponiendo que la parte homogénea del sistema de ecuaciones (4.1)-(4.5) admita solución distinta de la trivial, lo que requiere que (4.4)-(4.5) deben ser linealmente dependientes, condición que proporciona la ecuación

$$D(\Omega, \kappa) = \frac{1}{M} \frac{p_g(1)}{dp_g(1)/d\xi} - \frac{p_l(1)}{dp_l(1)/d\xi} + \frac{We^{-1}}{(U_s \kappa - \Omega)^2} (1 - \kappa^2) = 0. \quad (4.6)$$

### 4.2.1. Flujo básico

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad, es necesario primero especificar los perfiles básicos de velocidad tanto para la corriente de gas como para la de líquido. Aunque en el capítulo anterior se calculó la solución básica de forma autoconsistente, no se va a seguir aquí el mismo procedimiento debido a que, como se verá, las perturbaciones se desarrollan tan rápido que es imposible realizar ninguna observación experimental del flujo básico.

Por tanto, para proseguir el análisis, se supondrá un flujo básico plausible de acuerdo con la situación experimental considerada, debiéndose validar experimentalmente a posteriori las conclusiones obtenidas con el mismo. En la literatura pueden encontrarse numerosos ejemplos en los que los perfiles de velocidad se modelan como tangentes hiperbólicas que son función de la coordenada radial y de los diversos parámetros que caracterizan el problema (Michalke y Hermann 1982, Jendoubi y Strykowski 1994). En vez de usar tangentes hiperbólicas o polinomios, se ha pretendido aquí llevar a cabo un cálculo más realista de los perfiles básicos de velocidad basado, en la mayor medida posible, en argumentos físicos. Para ello, se ha tenido en cuenta que para el caso de capas de cortadura bidimensionales que se desarrollan entre dos fluidos diferentes, existe una solución de semejanza al problema (Lock 1951), obtenida al integrar la ecuación de Blasius para la función de corriente sujeta a las condiciones de continuidad de velocidades y esfuerzos tangenciales en la interfase. Por tanto, se ha optado aquí por definir los perfiles básicos de velocidad para el líquido y para el gas mediante las relaciones

$$U_{l0} = \frac{d\phi}{d\eta}[\eta = (\xi - 1)/\delta_l] \quad , \quad U_{g0} = \frac{d\phi}{d\eta}[\eta = (1 - \xi)/\delta_g] \quad , \quad (4.7)$$

donde,  $\delta_l$  y  $\delta_g$  son parámetros que se fijarán posteriormente, y  $\phi$  es una función que satisface la ecuación diferencial de Blasius, con variable independiente  $\eta$ ,

$$2 \frac{d^3\phi}{d\eta^3} + \phi \frac{d^2\phi}{d\eta^2} = 0 \quad , \quad (4.8)$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$\eta \rightarrow \infty \quad \phi' \rightarrow \beta \quad , \quad \eta = 0 \quad \phi' = U_s \quad , \quad (4.9)$$

siendo los valores de  $\beta$  para el líquido y para el gas  $\beta = 1$  y  $\beta = \sqrt{\rho_l/\rho_g}$  respectivamente. Los valores del parámetro  $\beta$  se han fijado teniendo en cuenta que las corrientes de líquido y de gas alcanzan de forma isentrópica la presión atmosférica partiendo de la misma presión de remanso, lo que proporciona una velocidad para el gas que es  $\sqrt{\rho_l/\rho_g}$  veces la del líquido. Los parámetros libres  $\delta_l$  y  $\delta_g$  caracterizan los espesores de las capas de cortadura adyacentes a la interfase, tanto en el líquido como en el gas. Los parámetros  $\delta_l$ ,  $R_0$  y  $U_s$  pueden relacionarse con  $\delta_g$  haciendo uso de que los perfiles básicos de velocidad  $U_{l0}$  y  $U_{g0}$ , definidos en (4.7), deben satisfacer el equilibrio de esfuerzos tangenciales en la interfase y, además, las dos condiciones integrales de conservación de la masa y del momento axial. Se obtiene así la familia uniparamétrica de perfiles de velocidad mostrada en la figura 4.2, donde se ha tomado  $\rho_l/\rho_g = 870$  y  $\mu_l/\mu_g = 55,5$ , que son los valores para el agua y el aire a presión atmosférica y a 293K.

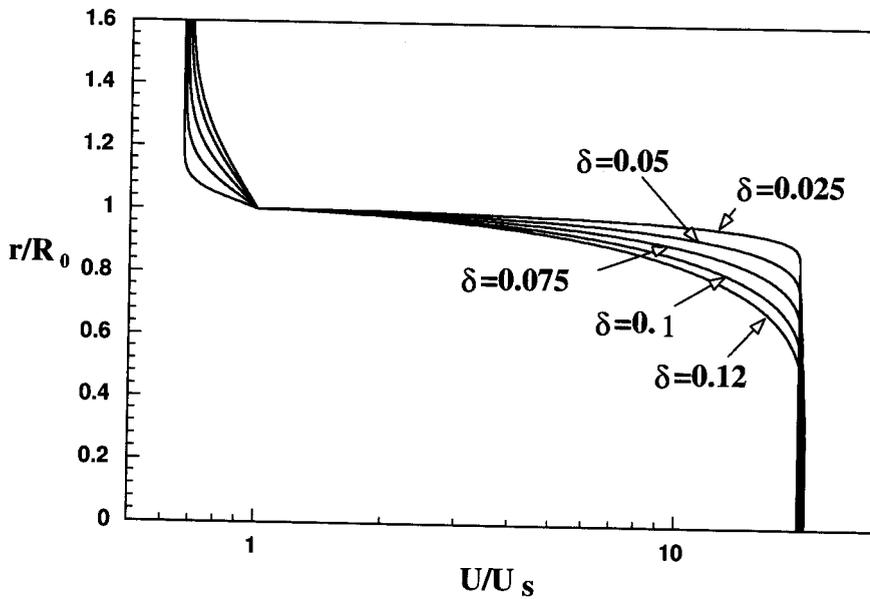


Figura 4.2: Familia uniparamétrica de perfiles básicos de velocidad empleados en este estudio para distintos valores de  $\delta_g$ .

#### 4.2.2. Análisis de estabilidad

Las ecuaciones (4.1)-(4.5) para las perturbaciones, se han resuelto de forma convencional integrando numéricamente hacia la superficie libre  $\xi = 1$  tanto en la zona del líquido como en la del gas. Para ello se han usado los comportamientos de las soluciones de (4.1) para pequeños y grandes  $\xi$  dados por

$$\xi \rightarrow 0: \quad p_g = 1 + \frac{(\xi\kappa)^2}{4}, \quad \xi \rightarrow \infty: \quad p_l = K_0(\xi\kappa). \quad (4.10)$$

Como se vio en el capítulo segundo, para determinar si la naturaleza de la inestabilidad del sistema es convectiva o absoluta, basta con analizar su respuesta al impulso inicial a lo largo del rayo  $x/t = 0$ . Asimismo, también se concluyó en dicho capítulo que el método del descenso máximo permite calcular de forma muy aproximada la evolución de las perturbaciones para tiempos grandes pudiéndose, por tanto, analizar su estabilidad según el criterio de Briggs. Para aplicar este criterio es necesario hallar el valor  $\Omega^*$  que sea un punto de silla de la relación de dispersión (4.6), es decir, que satisfaga las condiciones

$$D(\Omega, \kappa) = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \kappa} = 0, \quad (4.11)$$

que, como puede comprobarse fácilmente, son equivalentes a las siguientes:

$$D(\Omega, \kappa) = 0 \quad , \quad \frac{\partial D(\Omega, \kappa)}{\partial \kappa} = 0 . \quad (4.12)$$

El criterio de Briggs proporciona entonces que si la parte imaginaria de  $\Omega^*$  es positiva ( $\Omega_i^* > 0$ ), la inestabilidad será absoluta, mientras que en el caso contrario será convectiva. Para una pareja dada de  $We$  y  $\delta_g$  (los únicos parámetros considerados en este análisis), los valores complejos de  $\kappa^*$  y  $\Omega^*$  que satisfacen las condiciones (4.12) pueden determinarse dibujando los isocontornos, en el plano  $\kappa$  complejo, de la función  $\Omega_i = \Omega_i(\kappa)$ , hallada a partir de la relación de dispersión (4.6) como se muestra en las figuras 4.3-4.4. Se observa en dichas figuras cómo los puntos de silla de la función  $\Omega_i(\kappa)$ , denotados por 1 y 2, determinan los valores buscados de  $\Omega_i^*$  y  $\kappa^*$ , hallándose  $\Omega_r^*$  a través de la relación de dispersión (4.6). Los valores de estas cantidades para otra pareja de parámetros  $We$  y  $\delta_g$ , suficientemente próxima a las anteriores, pueden obtenerse mediante un esquema de Newton-Raphson, usando como estimaciones iniciales para la iteración los valores calculados anteriormente. Como se ha indicado, para una pareja dada de  $We$  y  $\delta_g$ , existen dos puntos de silla de la relación de dispersión,  $\Omega_1^*$  y  $\Omega_2^*$ . Se observa, además, que ambos poseen partes imaginarias positivas, lo que implica que las perturbaciones crecen temporalmente a lo largo del rayo  $x/t = 0$ , por lo que el sistema considerado es absolutamente inestable. El hecho de que aparezcan dos puntos de silla significa que la evolución de las perturbaciones a lo largo del rayo  $x/t = 0$  estará determinada por la superposición de dos paquetes de ondas, cuyos factores de amplificación temporal y números de onda son  $(\Omega_{i1}^*, \kappa_{r1}^*)$  y  $(\Omega_{i2}^*, \kappa_{r2}^*)$  respectivamente; en lo que sigue estas ondas se denominarán de tipo 1 y de tipo 2. La topología de las curvas de las figuras 4.3-4.4 en torno al punto de silla 1 es muy similar a la obtenida por Monkewitz y Shon (1988) en su estudio de la estabilidad de *hot jets* (chorros con una densidad inferior a la del ambiente en el que descargan). Esto permite inferir que las ondas del tipo 1 están relacionadas con inestabilidades hidrodinámicas del tipo de las de capa de cortadura, que son las que aparecen en el trabajo de dichos autores. Por otra parte, si se suprimen en el análisis los efectos hidrodinámicos y se dejan sólo los capilares, se observa numéricamente que sólo se obtiene el punto de silla denotado por 2 en las figuras 4.3-4.4. Esto sugiere que las ondas del tipo 2 pueden relacionarse con modos inestables capilares, del tipo de los encontrados por Rayleigh (1902) en su estudio de la estabilidad de un cilindro hueco rodeado de líquido. Los números de onda y los factores de crecimiento característicos de los dos tipos de inestabilidades, dependen tanto del número de Weber como del espesor característico de la capa de cortadura. Así, por ejemplo, en la figura 4.3, obtenida para  $We = 4,5$  y  $\delta_g = 0,1$ , las ondas del tipo 2 se

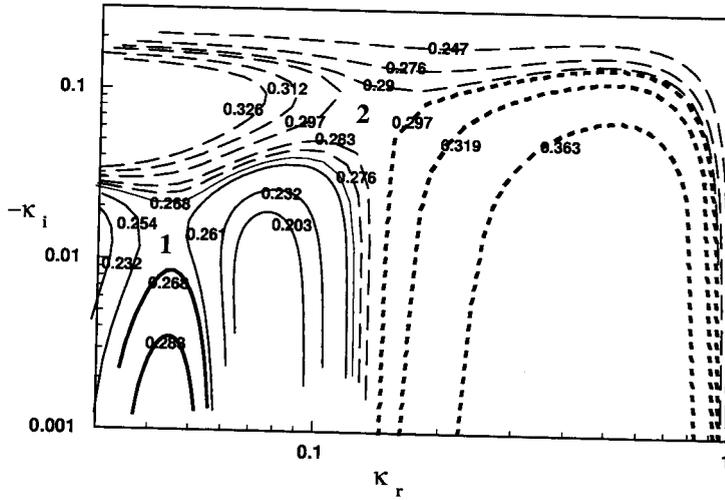


Figura 4.3: Isocontornos de  $\Omega_i$  en el plano  $\kappa$  complejo para  $We = 4,5$  y  $\delta_g = 0,1$ . Las ramas con velocidad de grupo positivas están dibujadas con líneas más gruesas: la correspondiente a los modos de capa de cortadura con línea continua y la correspondiente a los modos capilares con líneas discontinuas.

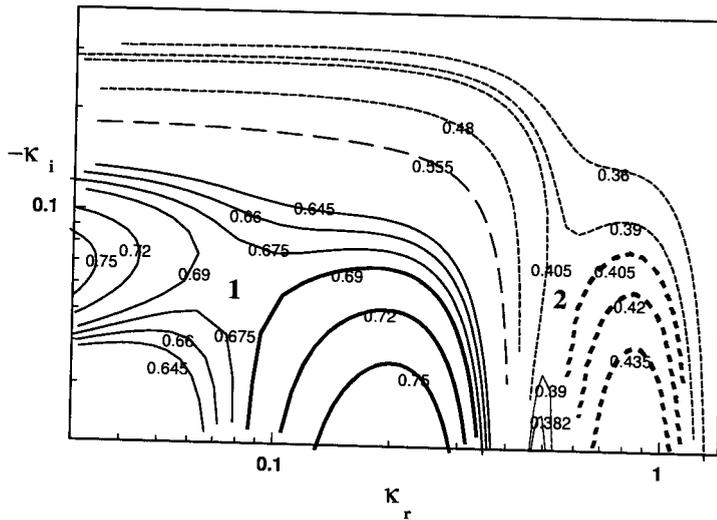


Figura 4.4: Figura análoga a 4.3, pero con valores de los parámetros  $We = 9,2$  y  $\delta_g = 0,025$ , escogidos de manera que el modo de capa de cortadura crezca de manera más rápida que el capilar.

amplifican ligeramente más rápido que las del tipo 1, mientras que para los valores Weber  $We = 9,2$  y  $\delta_g = 0,025$  correspondientes a la figura 4.4, las ondas del tipo 1 se amplifican más rápidamente que las del tipo 2. En la figura 4.5 se representa, para las ondas de tipo 1 y tipo 2, la variación de  $\Omega_i^*$  y  $\kappa_r^*$  con el número de Weber para dos espesores característicos

de la capa de cortadura del gas. Asimismo, en la figura 4.6 se representa, para las ondas de tipo 1 y tipo 2, la variación de  $\Omega_i^*$  y  $\kappa_r^*$  con el espesor característico de la capa de cortadura del gas para varios valores del número de Weber. Se observa en estas figuras

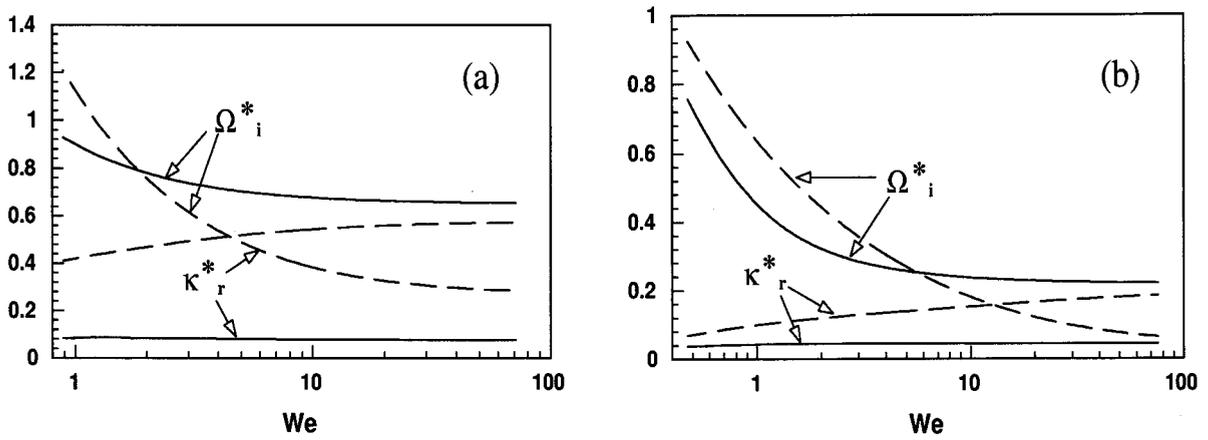


Figura 4.5: Variación de la frecuencia imaginaria y del número de onda real de los dos puntos de silla al variar el número de Weber para los casos de (a)  $\delta_g = 0,025$  y (b)  $\delta_g = 0,1$ . El modo 1 (capa de mezcla) está representado por líneas continuas mientras que el modo 2 (modo capilar) está representado por líneas discontinuas.

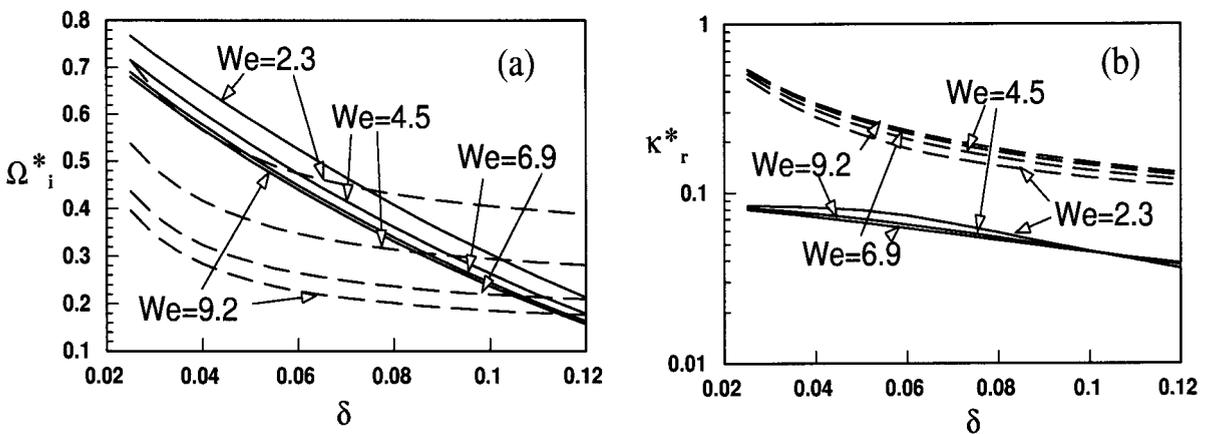


Figura 4.6: Variación de (a) la frecuencia compleja y (b) el número de onda real al variar el parámetro  $\delta$  y para distintos valores del número de Weber. El modo 1 (capa de mezcla) está representado mediante líneas continuas y el modo 2 (capilar) por líneas discontinuas.

que los modos de tipo 1 crecen más rápidamente que los del tipo 2 cuando aumenta el

número de Weber y/o cuando disminuye el espesor de la capa de cortadura, invirtiéndose los términos cuando el número de Weber es bajo y el espesor característico  $\delta_g$  aumenta; también se observa que los números de onda característicos de las ondas del tipo 1 son siempre menores que las del tipo 2. Todo esto confirma el carácter hidrodinámico de las ondas del tipo 1, y el carácter capilar de las ondas del tipo 2.

Hay que indicar que los resultados encontrados son completamente consistentes con el hecho de que en el seno de líquidos no se observen chorros gaseosos con longitudes mucho mayores que su diámetro, ya que el que exista una inestabilidad absoluta impide que las perturbaciones se convecten aguas abajo y que éstas pronto contaminen todo el dominio fluido. Además, la evidencia experimental muestra que la frecuencia de producción de burbujas es fija (lo que se manifiesta en la homogeneidad de tamaños de las burbujas) e independiente de perturbaciones externas. Esto pone de manifiesto que la dinámica no lineal del sistema ha de estar de alguna forma influenciada por el hecho de que las inestabilidades predichas por el análisis lineal sean absolutas, no pudiéndose convectar aguas abajo por el chorro. Este fenómeno, inicialmente lineal, puede condicionar el desarrollo de procesos no lineales posteriores, que conducen al flujo a un régimen un régimen oscilatorio de frecuencia fija y propia del sistema.

### 4.3. Resultados experimentales

Los resultados teóricos expuestos hasta ahora, basados en un análisis de estabilidad lineal, justifican la aparición de un régimen periódico de producción de burbujas como consecuencia de una inestabilidad absoluta del flujo básico. El hecho de que el fenómeno esté producido por el crecimiento de una inestabilidad hidrodinámica sugiere que debe ser posible caracterizar los tamaños de las burbujas obtenidas experimentalmente mediante los parámetros que, según el análisis lineal, controlan la inestabilidad. Esta sección se dedicará a la consecución de dicho objetivo.

El fenómeno de la generación periódica de microburbujas ha sido observado experimentalmente usando orificios de salida de diámetros comprendidos entre las 500 y 30  $\mu\text{m}$ , y líquidos con viscosidades  $\mu_l$  en el rango de los  $10^{-3}$  a los  $10^{-1}$  Pa·s. No obstante, aquí sólo se expondrán los resultados experimentales correspondientes a 280 tamaños de burbujas  $d_b$  obtenidos con orificios de salida de diámetros  $D = 100$  y  $210 \mu\text{m}$ , caudales de líquido  $Q_l$  que varían entre los 24 y los 310  $\mu\text{l/s}$ , y caudales de aire  $Q_g$  comprendidos en el rango de 0.2 a 40  $\mu\text{l s}^{-1}$ , estando estos últimos medidos a la presión atmosférica y a una tempe-

ratura de 298K ( $\pm 0.5$ K); para esta presión y temperatura, la densidad del aire es  $\rho_g = 1,2$  kg m<sup>-3</sup> y su viscosidad de  $\mu_g = 1,8 \times 10^{-5}$  Pa·s. Los caudales de gas han sido introducidos a través de una bomba de jeringa de alta precisión de la marca Harvard Apparatus, usándose jeringuillas Hamilton Gastight de 0.1, 0.5 y 3 ml. En algunos casos, el líquido es suministrado desde un recipiente cuya presión es controlada a través de una válvula de precisión Rexroth, midiéndose el caudal de líquido mediante un peso digital y un reloj. Para llevar a cabo los experimentos se han empleado siete líquidos diferentes (mezclas de agua y etanol y de agua con glicerol), que poseen viscosidades  $\mu_l$  comprendidas en el rango entre los 1.2 y los 30 mPa·s, y tensiones superficiales y densidades que varían entre los 35 a los 57 mN m<sup>-1</sup> y los 795 a 1200 kg m<sup>-3</sup> respectivamente. El tamaño de las burbujas obtenidas en estas condiciones antes señaladas oscila entre las 5  $\mu$ m y las 120  $\mu$ m. Las medidas han sido realizadas usando un zoom Nikon con una magnificación máxima de 360 aumentos, acoplado ya sea a una cámara de alta velocidad 4Quick de Stanford Computer Optics (véase la figura 4.7) o a una cámara Sony IRIS CCD, siendo medidos los diámetros  $d_b$  en un monitor Sony de 14". Con la cámara de alta velocidad, el movimiento

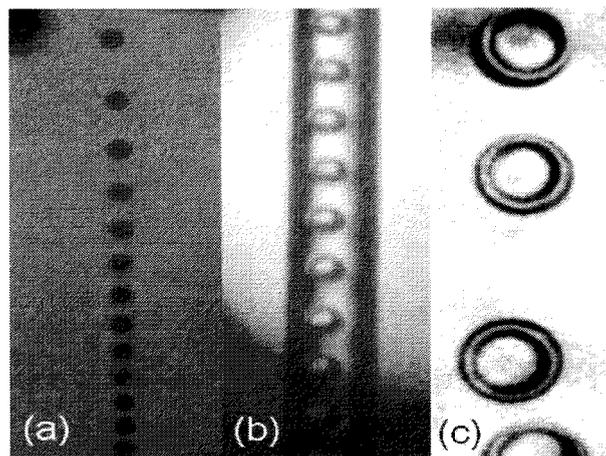


Figura 4.7: a) Imagen de la hilera de burbujas, todas exactamente iguales unas a otras; b) Chorro líquido relleno de burbujas de aire; c) Gotas huecas generadas a partir de la rotura del chorro anterior.

de la burbuja puede ser congelado y, de esta manera, es inmediato determinar su diámetro en la pantalla. Sin embargo, cuando se usa la cámara Sony, el desplazamiento de la hilera de burbujas, de tamaños idénticos, genera una imagen cilíndrica de suficiente contraste como para poder medir los diámetros  $d_b$  de las burbujas directamente en el monitor.

Con objeto de relacionar los diámetros medidos experimentalmente con los resultados teóricos presentado en la sección anterior, téngase en cuenta que éstos últimos revelan

que la frecuencia de producción de burbujas está altamente influenciada por los perfiles básicos de velocidad de las corrientes de líquido y de gas. Dichos perfiles dependen, a su vez, de los números de Reynolds de cada una de las corrientes. El número de Reynolds del líquido se define como  $Re_l = \rho_l Q_l / (\mu_l D)$ , mientras que en el caso del gas el número de Reynolds  $Re_g$  se define como  $Re_g = [\rho_g (Q_g / d_j^2) d_j / \mu_g] x d_j / D = (\rho_g Q_g) / (\mu_g D)$ , siendo  $d_j$  el diámetro del chorro estacionario de gas en el orificio de salida. Obsérvese que  $Re_g$  representa una *longitud de entrada adimensional* del chorro de gas desde su formación hasta su rotura, puesto que la longitud característica en la que el ligamento es estacionario escala como el diámetro del orificio de salida  $D$ ; este número, por tanto, mide el grado de desarrollo del perfil de velocidades del gas y, puesto que en nuestros experimentos varía entre 0.07 y 14, la forma del perfil de velocidades variará desde uniforme (flujo potencial) a aproximadamente parabólica. Por otra parte,  $Re_l$  varía de 40 a 1000 en nuestros experimentos, por lo que resulta plausible suponer que antes de la rotura el chorro de líquido es no viscoso. Con objeto de hallar la relación entre  $d_b$  y  $Re_g$  que sugiere el análisis lineal, se hará uso del resultado de la sección anterior que establece que, en el caso de que el fenómeno esté controlado por el desarrollo de una inestabilidad hidrodinámica, el tiempo característico de generación de burbujas es  $t_c = d_j / U_l \sim d_j D^2 / Q_l$ . De acuerdo con los resultados del análisis teórico de estabilidad lineal obtenidos de la sección anterior, la frecuencia adimensional de rotura  $\Omega = \omega \cdot t_c$  ha de ser una función creciente del número de Reynolds del gas,  $\Omega = \Omega(Re_g)$ , en el límite  $Re_g \gg 1$ ; en el límite opuesto  $Re_g \ll 1$ ,  $\Omega$  debería ser independiente de  $Re_g$  al ser el perfil de velocidades parabólico. Estas consideraciones sugieren que el diámetro de la burbuja,  $d_b$ , viene dado por la expresión

$$d_b = \left( \frac{6Q_g}{\pi\omega} \right)^{1/3} = \left( \frac{Q_g}{Q_l} \right)^{1/3} D^{2/3} d_j^{1/3} f(Re_g), \quad (4.13)$$

donde  $\omega \sim 1/t_c$  y  $f = [6Q_g / (\pi\omega)]^{1/3}$ ; obsérvese que la primera igualdad en (4.13) resulta de la definición de caudal de gas, mientras que la segunda igualdad hace uso del escalado para  $t_c$ .

La expresión (4.13) requiere hallar una expresión para el cálculo del diámetro del ligamento gaseoso,  $d_j$ , en función del caudal de gas y de la caída de presión a través de la cámara. Para ello, debe tenerse en cuenta que la caída de presión del líquido a través de la cámara puede expresarse como

$$\Delta P_l = 1/2 \rho_l \left( \frac{4Q_l}{\pi D^2} \right)^2 \phi_l(Re_l, L/D), \quad (4.14)$$

donde  $L$  es el espesor de la placa con el orificio y  $\phi_l = 1 + 29,6/Re_l(1 + 1,7L/D)$  (Dagan *et al* 1982). Por otra parte, si se tiene en cuenta el efecto de la tensión superficial, la caída de presión en el gas a través de la cámara vendrá dada por  $\Delta P_g = \Delta P_l - 2\gamma/d_j$ . Por tanto, si se desprecian los efectos de compresibilidad al ser pequeños los incrementos de presión que experimenta el gas hasta la salida de la cámara, puede escribirse

$$\Delta P_g = 1/2\rho_g \left( \frac{4Q_g}{\pi d_j^2} \right)^2 \phi_g(Re_g), \quad (4.15)$$

donde la función  $\phi_g$  recoge los efectos viscosos en el flujo de gas. La expresión para el diámetro del chorro gaseoso  $d_j$  se obtiene ahora de forma inmediata a partir de (4.14)-(4.15),

$$d_j = \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/4} \left( \frac{Q_g}{Q_l} \right)^{1/2} D \left( 1 - \frac{\pi^2 \gamma D^4}{4d_j \rho_l Q_l^2} \right)^{-1/4} \left( \frac{\phi_g}{\phi_l} \right)^{1/4}. \quad (4.16)$$

donde  $\phi_g \sim O(1)$  depende sólo del  $Re_g$ . Puesto que, como se muestra en la ecuación (4.13), la dependencia de  $d_b$  con  $\phi_g$  es bastante débil [ $d_b \sim (\phi_g/\phi_l)^{1/12}$ ], se supondrá que  $\phi_g = 1$  aunque, en cualquier caso, la función  $f(Re_g)$  puede absorber las ligeras variaciones que  $\phi_g^{1/12}$  experimenta frente a la unidad.

La dependencia de la función  $f$  con  $Re_g$  ha sido hallada experimentalmente, haciendo uso

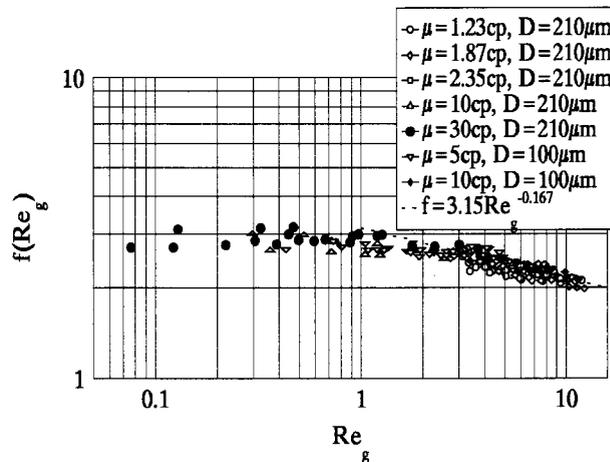


Figura 4.8: Función  $f(Re_g)$  adimensional hallada a través de los resultados experimentales. La pequeña dispersión en los datos refleja la validez de las hipótesis hechas sobre la frecuencia característica de rotura y de la dependencia de ésta con el Reynolds del gas.

de la expresión (4.13). Los resultados de la figura 4.8 muestran que,  $f \simeq 2,9$  para pequeños valores de  $Re_g$ , mientras que esta función tiende suavemente a  $f = 3,15Re_g^{-0,167 \pm 0,003}$  para

$Re_g > 6$  (coeficiente de regresión por encima del 98%). Obsérvese, por tanto, que  $f$  es una función de orden unidad independiente de  $Re_g$  para bajos números de Reynolds, y decreciente con  $Re_g$  para Reynolds mayores que la unidad. Esto valida plenamente las hipótesis sobre el tiempo característico que controla el proceso de formación de burbujas, así como su dependencia con  $Re_g$ , que fueron sugeridas por el análisis lineal y que condujeron a (4.13). Para finalizar, obsérvese que, debido a que (4.13) es bastante insensible a las propiedades de los fluidos, a partir de (4.13) y de (4.16) puede obtenerse una expresión muy simple para el cálculo del tamaño de las burbujas:

$$d_b/D = \left( \frac{Q_g}{Q_l} \right)^{0,37 \pm 0,005}, \quad (4.17)$$

que resulta de gran utilidad a la hora de realizar cálculos ingenieriles y que, como puede observarse de la figura 4.9, posee errores inferiores al 15%.

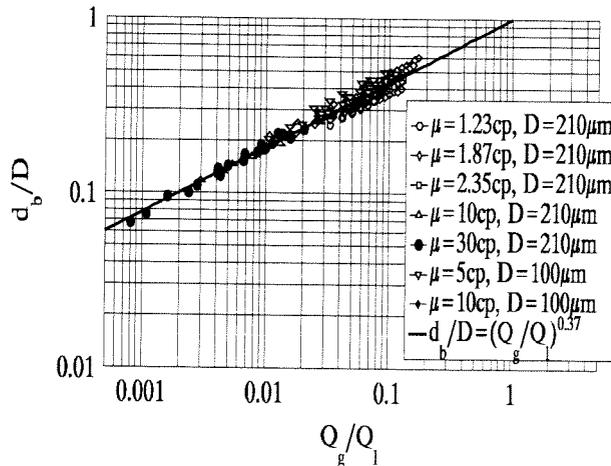


Figura 4.9: Comparación entre los resultados experimentales y los predichos por la fórmula reducida (4.17).

## 4.4. Conclusiones

Mediante los conceptos de inestabilidades convectivas y absolutas, en este capítulo se ha intentado explicar la generación de burbujas de tamaños homogéneos mediante un modelo simplificado consistente en un chorro gaseoso rodeado por una corriente coaxial de líquido. Para este propósito, se ha estudiado la evolución lineal de un pulso inicial introducido en un flujo básico estacionario, que ha sido determinado de manera que reproduzca de

una forma aproximada los flujos de gas y líquido en el inyector. Los resultados muestran que la perturbación no es convectada aguas abajo, dando lugar a una inestabilidad absoluta que, con el transcurso del tiempo, debe inestabilizar completamente el flujo básico. Las fuentes de la inestabilidad son la capa de mezcla que se forma en la interfase líquido-gas, y la tensión superficial. Aunque el modelo considerado aquí es sumamente simple, puede explicar cualitativamente los mecanismos físicos que subyacen tras la producción de burbujas de tamaños homogéneos, y que se forman a una frecuencia intrínseca al sistema, independiente de las condiciones externas. La situación es análoga a la presentada en los trabajos de Monkewitz y Sohn (1988) y Monkewitz *et al.* (1990) sobre la estabilidad de *hot jets*, donde se demuestra la relevancia de la teoría lineal para predecir la auto excitación de estos sistemas, a pesar de que el régimen real es fuertemente no lineal. En efecto, en estos análisis de estabilidad se determina una condición límite para el cociente entre las densidades de los flujos interno y externo, que establece cuándo la inestabilidad pasa de convectiva a absoluta. Precisamente para las condiciones para las que el análisis lineal predice una inestabilidad absoluta, se observa experimentalmente que el chorro oscila a una frecuencia propia e independiente de agentes externos. Además, el hecho de que el origen de la inestabilidad en *hot jets* se deba al crecimiento de un modo de capa de mezcla, que es completamente análogo al encontrado en nuestro análisis, refuerza aún más la analogía física que se establece entre la situación considerada por estos autores y la que se presenta en nuestros experimentos. Esta analogía existe debido a que, para los dos casos, existe un fluido interior de baja densidad, lo que hace que, en la ecuación de cantidad de movimiento para el fluido ligero, la magnitud del término local de aceleración sea mucho mayor que la de los términos convectivos. En efecto, se tiene entonces que los gradientes de presión asociados con cualquier distorsión de la interfase que separa ambos fluidos son, necesariamente, del orden de magnitud del término de aceleración convectiva del fluido pesado y, por consiguiente, mucho mayores que el término convectivo del fluido ligero. Esto implica que, en el fluido interior, los gradientes de presión deben estar compensados por el término local de aceleración, lo que hace que el tiempo característico de respuesta a las perturbaciones sea mucho menor que el tiempo convectivo. Explícitamente, se tiene

$$\frac{\partial p_l}{\partial x} \sim \rho_l v \frac{dU_{l0}}{dr} \sim \rho_l R_0 \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{U_{l0}}{R_0} \sim \rho_l U_{l0} \frac{\partial u_g}{\partial x}, \quad (4.18)$$

donde se ha empleado la ecuación de continuidad en el chorro gaseoso. Ya que los términos convectivos en la ecuación de cantidad de movimiento axial para el gas son del orden de

$\rho_g U_{g0} \partial u_g / \partial x \ll \rho_l U_{l0} \partial u_g / \partial x$  se tiene la estimación

$$\rho_g U_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} \ll \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} \sim \rho_l U_{l0} \frac{\partial u_g}{\partial x}, \quad (4.19)$$

lo que implica que  $t_0 \ll L/U_{g0}$  donde  $t_0$  es el tiempo característico de crecimiento de la perturbación y  $L/U_{g0}$  es el tiempo convectivo característico. Con esto se demuestra que la perturbación crece de manera más rápida que es convectada, que es la condición que ha de darse para que el sistema desarrolle una inestabilidad absoluta y, por tanto, que exhiba el mecanismo de auto excitación.

Con el objeto de comprobar la validez de nuestro análisis lineal, se han llevado a cabo experimentos para medir los tamaños de las burbujas. Estos experimentos fueron realizados con sumo cuidado para siete líquidos distintos y dos geometrías diferentes, en amplios rangos de los caudales de líquido y de gas. Los resultados experimentales, tal y como se mostró en la sección anterior, validan las hipótesis hechas sobre la naturaleza física del fenómeno y sobre los parámetros controlantes del problema. Además, haciendo uso de los datos experimentales, se obtiene una expresión cerrada que predice con gran precisión el tamaño de las burbujas en función de los parámetros controlantes del problema.

# Capítulo 5

## Conclusiones y líneas futuras de investigación

### 5.1. Conclusiones

En esta tesis se ha proporcionado la explicación a ciertos fenómenos observados en los procesos de atomización y de generación de burbujas al utilizar el dispositivo descrito en §1.4. Esto ha sido posible gracias al estudio de la estabilidad lineal de soluciones estacionarias que modelan con gran aproximación las situaciones encontradas experimentalmente en el caso de la atomización, y que son al menos realistas en el caso de la generación de burbujas. Puesto que el análisis de estabilidad lineal ha sido el pilar básico sobre el que se fundamentan los resultados de esta tesis, se ha dedicado el capítulo segundo a una revisión en profundidad de los diferentes enfoques tradicionales al problema de estabilidad lineal, relacionando los resultados de los problemas que modelan las situaciones físicas de interés (problemas de valores iniciales y de la señal), con los de los análisis clásicos de estabilidad que se limitan a calcular los autovalores temporales o espaciales de estos tipos de flujos. Estos aspectos se han ilustrado mediante la resolución del problema clásico de propagación de un pulso en un flujo de cortadura bidimensional entre dos corrientes de densidades y velocidades distintas. Como es bien sabido, estos flujos presentan una inestabilidad de tipo Kelvin-Helmholtz, que es la que se presenta con más frecuencia en el estudio de la estabilidad de corrientes paralelas. La evaluación de las integrales que proporciona la solución del problema se ha llevado a cabo tanto numérica como asintóticamente, comprobándose que el método del camino de máxima pendiente reproduce con gran exactitud los resultados numéricos, tanto más cuanto mayor sea el tiempo transcurrido desde la

aplicación del pulso. La solución asintótica para la evolución de la respuesta del sistema a un pulso inicial demuestra que el análisis clásico de estabilidad temporal proporciona el criterio que determina cuándo un flujo es inestable: que la parte imaginaria del autovalor con mayor amplificación temporal sea positiva. Además, se demuestra que los resultados del análisis clásico de estabilidad temporal permiten determinar la evolución a lo largo del rayo en el que la amplificación temporal de la perturbación es máxima. También se deduce de la solución asintótica al pulso inicial que la relación de dispersión temporal, cuando se extiende a números de onda complejos, permite determinar si la inestabilidad que se desarrolla es de tipo absoluto o convectivo; para ello basta conocer si la parte imaginaria de la función  $\omega(\kappa)$  en el punto donde la velocidad de grupo es nula, es positiva (absoluta) o negativa (convectiva). Esto constituye el criterio de Briggs (1964), el cual se basa en la forma asintótica de la solución, y su validez se apoya, por tanto, en el excelente acuerdo entre los resultados asintóticos y numéricos.

También en el capítulo segundo, se ha tratado el problema de la respuesta del flujo a una excitación periódica (problema de la señal), que es de gran interés práctico. Al igual que ocurre en el caso del pulso inicial, los resultados numéricos son reproducidos para este problema con gran aproximación por el método asintótico de la pendiente máxima. Este método permite encontrar una forma aproximada de la solución en la que aparecen separadas las contribuciones debidas al encendido de la señal (transitorio inicial) y las correspondientes al régimen periódico que se acaba estableciendo en un punto fijo para tiempos suficientemente grandes. Se demuestra que las contribuciones a la respuesta periódica provienen de números de onda que coinciden con los autovalores espaciales  $\kappa(\omega)$  calculados en los análisis tradicionales de estabilidad espacial (Michalke 1965). Conviene indicar que la solución al problema forzado que se acaba de describir, se ha obtenido aquí mediante un procedimiento distinto, en nuestra opinión más directo y transparente, que el seguido en los artículos de referencia sobre este tema (Huerre y Monkewitz 1985, 1990, Huerre 2000). Los resultados obtenidos aquí complementan los de estas referencias y, al mismo tiempo, ponen de manifiesto algunas deficiencias en la metodología seguida por estos autores. En particular, se ha determinado la región del espacio-tiempo en la que la perturbación evoluciona de forma periódica con el tiempo, que viene determinada por un criterio de carácter general aparentemente desconocido hasta ahora en la literatura. Por otra parte, nuestra expresión asintótica para la contribución periódica a la respuesta, que proporciona resultados en excelente acuerdo con los cálculos numéricos, discrepa de la expresión publicada repetidamente en los trabajos de Huerre y Monkewitz.

En el capítulo tercero se presentan los resultados correspondientes a experimentos de atomización, así el desarrollo teórico seguido para describir los distintos fenómenos en ellos observados. Puesto que el principal objetivo de este capítulo es el de entender y explicar los distintos regímenes de atomización observados en nuestros experimentos se ha realizado, como primera aproximación al problema, el análisis de estabilidad lineal de las soluciones básicas estacionarias observadas experimentalmente. Los perfiles básicos de velocidad se han calculado numéricamente integrando de forma acoplada las ecuaciones de Navier-Stokes para el líquido y el gas en la aproximación esbelta; las condiciones en la estación inicial, necesarias para realizar la integración aguas abajo, han sido halladas de forma que los resultados numéricos reproduzcan los experimentales. El análisis de estabilidad muestra que, en los regímenes de atomización considerados, son posibles cinco tipos de modos, dos axilsimétricos y tres helicoidales. Uno de los modos axilsimétricos es de origen capilar, mientras que el segundo de ellos es de tipo hidrodinámico, asociado a una inestabilidad de tipo de capa de cortadura que se desarrolla en el seno del líquido. De los tres modos helicoidales, existen dos debidos a la corriente gaseosa (asociados a inestabilidades de tipo de estela y de capa de cortadura respectivamente), mientras que el tercero de ellos tiene su origen en la capa de cortadura existente en el seno del líquido. Los modos observados para las condiciones de nuestros experimentos son precisamente los debidos a la capa de cortadura en el seno del líquido, y no habían sido descritos ni teórica ni experimentalmente en la literatura existente, donde por norma se habían considerado perfiles muy simplificados de velocidad para el chorro líquido. Con esto se concluye que los perfiles básicos de velocidad juegan un papel esencial en los distintos modos que resulten de un análisis de estabilidad, por lo que es de importancia primordial considerar flujos básicos que se correspondan lo mejor posible a las situaciones experimentales consideradas.

El objetivo del capítulo cuarto es proporcionar una explicación sencilla a ciertas evidencias experimentales que se presentan en chorros gaseosos en el seno de un coflujo líquido. En particular, se observa que la longitud de estos chorros es siempre mucho menor que la de los chorros líquidos en aire, así como que la formación de burbujas ocurre a una frecuencia fija e independiente de las fuentes externas de excitación, lo que da lugar a tamaños muy homogéneos. Para explicar estos fenómenos, se ha llevado a cabo al igual que en el capítulo anterior, un análisis de estabilidad lineal de una solución básica estacionaria plausible en este tipo de experimentos, aunque no ha sido determinada de una forma tan autoconsistente como la del capítulo anterior. El análisis de estabilidad lineal muestra

que el sistema es absolutamente inestable según el criterio de Briggs, identificándose dos causas y, por tanto, dos modos distintos de inestabilidad absoluta: el modo de capa de cortadura, similar al encontrado en estudios previos de inestabilidad de chorros de baja densidad (Monkewitz y Sohn 1988), y el modo capilar, relacionado con el descrito por Rayleigh al tratar la estabilidad de un cilindro hueco rodeado por un dominio líquido infinito (Chandrasekhar 1961). La existencia de dos mecanismos que conducen al sistema a desarrollar una inestabilidad absoluta es, claramente, la causa de que los chorros gaseosos no se desarrollen más que varios diámetros aguas abajo, puesto que en este caso las perturbaciones crecen más de prisa que son convectadas. Además, la existencia de una frecuencia intrínseca al sistema, que fija la producción de burbujas, está también asociada a la inestabilidad absoluta que se desarrolla en estos flujos. Estas conclusiones se ven confirmadas por los resultados experimentales expuestos en este capítulo; en ellos se muestra también que tanto el escalado para el tiempo característico de producción de burbujas, como el parámetro fundamental que controla el proceso de generación, que resulta ser el número Reynolds del gas, están sugeridos por un análisis tan simplificado como el lineal.

## **5.2. Líneas futuras de investigación**

Una conclusión general del trabajo desarrollado en esta tesis, podría ser la gran relevancia que, a pesar de su simplicidad, poseen los estudios de estabilidad lineal para explicar fenómenos experimentales complejos como los que se dan en atomización o en la generación de burbujas. No obstante, los análisis lineales llevados a cabo aquí podrían completarse y perfeccionarse en varios aspectos. En primer lugar, obsérvese que para todos los estudios de estabilidad realizados en esta tesis, se ha partido de la hipótesis de que las corrientes son paralelas y no viscosas, lo que limita el rango de longitudes de onda y frecuencias para los que los resultados obtenidos son válidos. El efecto de la divergencia de las corrientes en el desarrollo de las inestabilidades convectivas, puede ser corregida de manera fácil si se emplea el método conocido como PSE (Parabolized Stability Equations), introducido por Bertolotti y Herbert (1992), en el que se resuelven de manera acoplada la evolución del flujo básico y el crecimiento espacial de las perturbaciones, con la ventaja de que el método numérico es muy fácil de implementar al ser el sistema de ecuaciones resultante de naturaleza parabólica. Este método, en el que pueden incluirse de manera fácil los efectos de la viscosidad en el desarrollo de las perturbaciones, es muy apropiado para el estudio del problema de atomización tratado en el capítulo tercero, en

el que únicamente se ha realizado un estudio de estabilidad temporal. Con este método se podría predecir, suponiendo que la amplitud inicial de los distintos modos de inestabilidad es la misma, el modo que más se amplifica aguas abajo y, con ello, el régimen de atomización que se dará en cada situación experimental. Sería también interesante investigar, utilizando esta técnica o simplemente, realizando un análisis de estabilidad temporal, si el origen de la rotura helicoidal que se da en los atomizadores de presión, está originada por el crecimiento de los modos de estela o de los hidrodinámicos helicoidales, ambos identificados por primera vez en este estudio.

Para entender mejor el proceso de generación de burbujas, no tiene sentido hacer un estudio más sofisticado de estabilidad, ya que en la situación real, la producción de burbujas se produce en un régimen en el que los efectos no lineales se desarrollan muy rápidamente y son muy importantes. Una forma de tratar el problema de manera más precisa, sería implementar un código similar al empleado por Oguz y Prosperetti (1993). La diferencia fundamental con el trabajo de estos autores consistiría en retener el efecto del motor de la generación de burbujas de estos experimentos, que no es más que la cantidad de movimiento del gas inyectado en la burbuja. Reteniendo este efecto, podrían estudiarse los casos en los que el número de Reynolds del líquido fuese mucho menor o mucho mayor que la unidad, ya que en ambos límites, existen métodos integrales para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, que harían este problema tratable.

# Bibliografía

- ARFKEN, G.B., WEBER, H.J. (1995): *Mathematical Methods for Physicists, Academic*, 483-501.
- BATCHELOR, G.K., GILL, A.E. (1962): Analysis of the stability of axisymmetric jets, *JFM* **14**, 529-551.
- BERS, A. (1983): *Handbook of Plasma Physics*, 451-517 *North -Holland*.
- BERTOLOTTI, F.P., HERBERT, TH. Y SPALART, P.R. (1992): Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer, *JFM* **242** , 441-474.
- BETCHOV, R., CRIMINALE, W.O. (1967): Stability of parallel flows, *Academic*.
- BLEISTEIN, N. (1984): *Mathematical methods for wave phenomena, Academic*.
- BRIGGS, R.J. (1964): *Electron-Stream interaction with plasmas, MIT Press*.
- BROWAND, F.K. (1966): An experimental investigation of the instability of an incompressible, separated shear layer, *JFM* **26**, 281.
- CASTELMAN, R.A. (1931): The mechanism of the atomization of liquids, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **6**-(281), 369-376.
- CHANDRASEKHAR, S. (1961): *Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford*.
- DAGAN, Z., WEINBAUM, S., PFEFFER, R. (1982): An infinite-series solution for the creeping motion through an orifice of finite length, *JFM* **115**, 505-523.
- DEJUHASZ, K.J. (1931): *Trans. ASME*, **53**, 65.
- DRAZIN, P.G., REID, W.H (1987): *Hydrodynamic stability, 22-25 Cambridge*.
- EGGERS, J. (1993): Universal pinching of 3D axisymmetric free-surface flow, *Phys. Rev. Lett.* **71**-(21) 3458-3460.
- EGGERS, J., DUPONT, T.F. (1994): Drop formation in one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equations, *JFM* **262**, 205.
- ENTOV, V.M., YARIN, A.L. (1984): The dynamics of thin liquid jets in air, *JFM* **140**, 91-111.
- EROGLU, H., CHIGIER, N., FARAGO, Z. (1991): Coaxial atomizer liquid intact lengths,

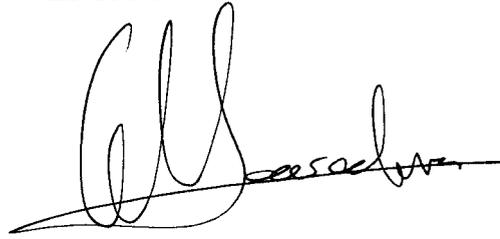
- Phys. Fluids A* **3**-(2), 303-308.
- FARAGO, Z., CHIGIER, N. (1992): Morphological classification of disintegration of round jets in a coaxial airstream, *Atom. Sprays* **2**, 137-153.
- FENN, R.W., MIDDLEMAN S. (1969): *AIChE J.*, **15**, 379.
- FREYMUTH, P. (1966): On transition in a separated laminar boundary layer, *JFM* **25**, 683-704.
- GAÑÁN-CALVO, A.M, BARRERO, A. (1996): Patente española nº P9601101.
- GAÑÁN-CALVO, A.M (1998): Generation of steady liquid microthreads and micron-sized monodisperse sprays in gas streams, *Phys. Rev. Lett.* **80**-(2), 285-288.
- GASTER, M. (1965): On the generation of spatially growing waves in a boundary layer, *JFM* **22**, 433-441.
- GASTER, M. (1968): Growth of disturbances in both space and time, *Phys. of Fluids* **11**-(4), 723-727.
- GRANT, R.P., MIDDLEMAN S. (1966): Newtonian jet stability, *AIChE J.*, **12**-(4), 669-678.
- HAENLEIN, A. (1932): Disintegration of a liquid jet, *NACA Tech. Rep.* **659**.
- HELMHOLTZ, H. (1868): On discontinuous movements of fluids, *Phil. Mag.* **36**, 337-346.
- HOYT, J.W., TAYLOR, J.J. (1977): Waves on water jets, *JFM* **83**, 119-127.
- HUERRE, P., MONKEWITZ, P.A. (1985): Absolute and convective instabilities in free shear layers, *JFM* **159**, 151-168.
- HUERRE, P, MONKEWITZ, P.A. (1990): Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473.
- HUERRE, P. (2000): Open shear flows instabilities en *Perspectives in fluid dynamics*, Cambridge.
- JENDOUBI, S., STRYKOWSKI, P.J. (1994): Absolute and convective instabilities of axisymmetric jets with external flow, *Phys. of Fluids* **6**-(9), 3000-09.
- KELLER, J.B., RUBINOW, S.I., TU, Y.O. (1973): Spatial instability of a jet, *Phys. of Fluids* **16**-(12), 2052-2055.
- KELVIN, LORD (1871): Hidrokinetic solutions and observations, *Phil. Mag.* **42**, 362-377.
- KOSCHMIEDER, E.L. (1993): Bénard cells and Taylor vortices, Cambridge.
- LANDAU, L., LIFSHITZ, E.M. (1959): Fluid Mechanics, Pergamon.
- LASHERAS, J.C., HOPFINGER, E.J. (2000): Liquid jet instability and atomization in a coaxial gas stream, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 275-308.

- LASHERAS, J.C., VILLERMAUX, E., HOPFINGER, E.J. (1998): Break-up and atomization of a round water jet by a high-speed annular air jet, *JFM* **357**, 351-379.
- LEE, H.C. (1974): Drop formation in liquid jets, *IBM J. Res. Delelop.* **18**, 364-369.
- LEFEBVRE (1989): Atomization and sprays, *Taylor and Francis*.
- LEIB S.J., GOLDSTEIN, M.E. (1986): The generation of capillary instabilities on a liquid jet, *JFM* **168**, 479-500.
- LI, X. (1995): Mechanism of atomization of a liquid jet, *At. Sprays* **5**, 89-105.
- LIGHTHILL, J. (1978): Waves in fluids, *Cambridge*.
- LIN, C.C. (1955): The theory of hydrodynamic stability, *Cambridge*.
- LIN, S.P., CHEN, J.N. (1998): Role played by the interfacial shear in the instability mechanism of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a pipe, *JFM* **376**, 37-50.
- LIN, S.P., KANG, D.J. (1987): Atomization of a liquid jet, *Phys. of Fluids* **30**-(7), 2000-2006.
- LIN, S.P., REITZ R.D. (1998): Drop and spray formation from a liquid jet, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 85-105.
- LOCK, R.C. (1951): The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **230**, 365-390.
- LONGUETT-HIGGINS, M.S., KERMAN B.R., LUNDE, K. (1991): The release of air bubbles from an underwater nozzle, *JFM* **230**, 365-390.
- LUNDTH, M., JONSSON, L., DAHLQUIST, J. (2000): *Water Res.* **34**, 21.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., MONTAÑÉS, J.L., LASHERAS, J.C. (1999 a): On the breakup of an air bubble injected into a fully developed turbulent flow, *JFM* **401**, 157-182.
- MARTÍNEZ-BAZÁN, C., MONTAÑÉS, J.L., LASHERAS, J.C. (1999 b): On the size pdf resulting from the break up of an air bubble immersed into a turbulent liquid flow, *JFM* **401**, 183-207.
- MICHALKE, A. (1964): On the inviscid instability of the hyperbolictangent velocity profile, *JFM* **19**, 543-556.
- MICHALKE, A. (1965): On spatially growing disturbance in an inviscid shear layer, *JFM* **23**, 521-544.
- MICHALKE, A., HERMANN, G. (1982): On the inviscid instability of a circular jet with external flow, *JFM* **114**, 343-359.
- MIESESE, C.C. (1955): Correlation of experimental data on the disintegration of liquid jets, *Ind. Eng. Chem.*, **47**-(9), 1609-1701.

- MILES, J.W. (1957): On the generation of surface waves by shear flows. Part 1, *JFM* **3**, 185-204.
- MILES, J.W. (1959 a): On the generation of surface waves by shear flows. Part 2, *JFM* **6**, 568-582.
- MILES, J.W. (1959 b): On the generation of surface waves by shear flows. Part 3, *JFM* **6**, 583-598.
- MONKEWITZ, P.A., BECHERT, D.W., BERSIKOW, B., LEHMANN B. (1990): Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet, *JFM* **213**, 611.
- MONKEWITZ, P.A., HUERRE, P., (1982): Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers, *Phys. Fluids* **25**-(7), 1137-1143.
- MONKEWITZ, P.A., SOHN, K.D. (1988): Absolute instability in hot jets, *AIAA J.* **26**, 911-916.
- OGUZ, H., PROSPERETTI, A., (1993): Dynamics of bubble growth and detachment from a needle, *JFM* **257**, 111-145.
- OHNESORGE, W. (1936): Formation of drops by nozzles and the breakup of liquid jets, *Z. Angew. Math. Mech.*, **16**, 355-358.
- PARTHASARATHY, R.N., CHIANG K.M. (1998): Temporal instability of gas jets injected in viscous liquids to three dimensional disturbances, *Phys. of Fluids* **10**, 2105.
- PLATEAU, J. (1873): *Statistique expérimentale et théorique des liquides soumise aux seules forces moléculaires*, *Chantier Vallars*.
- RAYLEIGH, W.S. (1878): On the instability of jets, *Proc. of the London Math. Soc.* **10**, 4-13.
- RAYLEIGH, W.S. (1880): On the stability or instability of certain fluid motions, *Proc. of the London Math. Soc.* **11**, 57-70.
- RAYLEIGH, W.S. (1902): *Scientific Papers*, **3** 594-596 *Cambridge*.
- REITZ, R.D. (1978): Atomization and other breakup regimes of a liquid jet, *Ph. D. Thesis, Princeton University*.
- REITZ, R.D., BRACCO, F.V. (1982): Mechanism of atomization of a liquid jet, *Phys. Fluids*, **25**-(2), 1730-1741.
- ROSENHEAD, L. (1963): *Laminar Boundary Layers*, *Dover* 446-451.
- SAVART, F. (1833): *Ann. Chim. Phys.*, **53**, 337-386.
- SCHUBAUER, G.B., SKRAMSTAD, H.K. (1947): *Nat Bur. Stand. Res. Paper RP-1772*.
- SCHWEITZER, P.H. (1937): Mechanism of disintegration of liquid jets, *J. Appl. Phys.*, **8** 513-521.

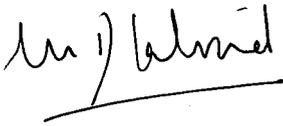
- SPANGLER, C.A., HILBING, J.H., HEISTER, S.D. (1995): Nonlinear modeling of jet atomization in the wind-induced regime, *Phys. of Fluids A* **7**, 964-971.
- STERLING, A.M., SLEICHER, C.A. (1975): The instability of capillary jets, *JFM* **68**, 477-495.
- STURROCK, P.A. (1961): Amplifying and evanescent waves, convective and non-convective instabilities, en *Plasma Physics*, McGraw-Hill.
- SUBRAMANIAM, K., PARTHASARATHY, R.N. (2000): Effects of confinement on the temporal instability of gas jets injected in viscous liquids, *Phys. of Fluids* **12**, 89-91.
- TAYLOR, G.I. (1963): Generation of ripples by wind blowing over a viscous liquid, *Scientific Papers of Sir G.I. Taylor*, Cambridge **3**, 244-254.
- TRYGGVASON, G., UNVERDI, S.O. (1999): Fluid dynamics at interfaces, **6 Cambridge**.
- VILLERMAUX, E. (1998): Mixing and spray formation in coaxial jets, *J. Prop. Pow.* **14**(5), 807-817.
- WEBER, C. (1931): On the breakdown of a fluid jet, *Z. Angew. Math. Mech.* **11**, 136-141.
- YANG, H.Q. (1992): Asymmetric instability of a liquid jet *Phys. of Fluids A* **4**(4), 681-689.

El doctorando

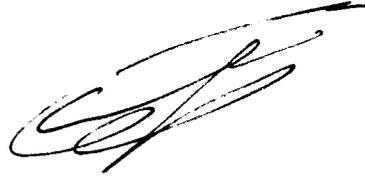
A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke at the end.

José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

Los directores de la Tesis

A handwritten signature in black ink, featuring a prominent loop and a long horizontal stroke.

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor  
Profesor Titular de Mecánica de Fluidos

A handwritten signature in black ink, with a large, sweeping loop and a long horizontal stroke.

Alfonso Miguel Gañán Calvo  
Catedrático de Mecánica de Fluidos