

B.21.430

LBS 1005795

043
141

30

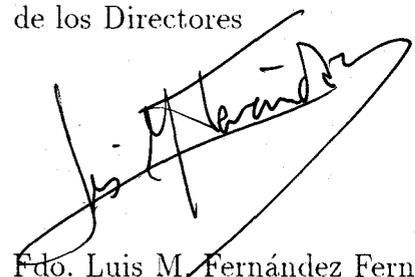
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología

TRANSVERSALIDAD EN 2-COMPLEJOS

Memoria presentada por
M. Trinidad Villar Liñán
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
de los Directores



Fdo. Luis M. Fernández Fernández
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de
Álgebra, Computación,
Geometría y Topología
de la Universidad de Sevilla



Fdo. Alberto Márquez Pérez
Catedrático de Universidad
del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad
de Sevilla

Sevilla, diciembre de 1996

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 243 número 107 del libro
correspondiente.
Sevilla, 29-10-96

El Jefe del Negociado de Tesis,


también

A MERCEDES LIÑÁN
Y A JUAN VILLAR

A CARMEN MARTÍNEZ,

*“Me voy al taller,
por si llega la inspiración,
que me encuentre trabajando.”*

PABLO PICASSO

Resumen

Si bien el problema de la Transversalidad ha sido ampliamente estudiado en la Teoría de Grafos, los 2-complejos de Euler han sido tratados, hasta el momento, dentro del marco de la Topología Algebraica. El objetivo central de esta memoria es estudiar propiedades combinatorias de los Complejos simpliciales de Euler en dimensión 2, estableciendo una comparación con el caso de dimensión 1 (también llamados Grafos Eulerianos).

Desde el comienzo de la investigación se observan diferencias entre unos y otros, por lo que se introduce la noción de 2-Complejo Par. Se prosigue el estudio para esta familia de 2-complejos que contiene estrictamente a los eulerianos. Se encuentra una caracterización topológica de los 2-complejos pares mediante la construcción de una 2-variedad conexa y cerrada y un morfismo. Los problemas de identificar un 2-complejo par y de dar la variedad y el morfismo asociado a él se pueden resolver por medio de algoritmos eficientes que aquí se describen. En el caso en que el 2-complejo sea fuertemente conexo, se puede construir la 2-variedad que conserve esta propiedad. También se detalla un algoritmo que la proporciona.

Además, se introduce el concepto de Recorrido Euleriano y se analiza cuándo es posible encontrarlo sobre un 2-complejo. También aquí aparecen situaciones distintas a las de dimensión 1. Para esta parte del trabajo ha sido muy importante el estudio del grafo dual y el de intersección de un 2-complejo. Se prueba una caracterización de las superficies cerradas y conexas que admiten recorrido euleriano.

Agradecimientos

Al ver finalizada esta memoria, he de reconocer el mérito de todos los que me han acompañado desde el comienzo de la tarea. Quiero dejar constancia de ello y mostrarles mi profundo agradecimiento, no siempre fácil de expresar, aunque sea con estas breves líneas.

A los profesores Luis Manuel Fernández y Alberto Márquez tengo que agradecerles su dedicación al dirigir mi trabajo. Pero no sólo esto, ellos han sido mis maestros ya desde mis años de estudiante en la Facultad de Matemáticas y como tales han sabido orientarme y han confiado en mí en todo momento.

A la profesora Ana Diánez, del Departamento de Matemática Aplicada I, quien tantas veces me ha ayudado, quiero agradecerle sus consejos siempre oportunos y acertados, de compañera y sobre todo de amiga.

A mis compañeros del Área de Geometría y Topología y de Arquitectura de los Computadores quiero agradecer la disponibilidad que han mostrado en tantas ocasiones en que me he visto en apuros. A los profesores Juan Núñez, Juan Carlos Benjumea, Francisco Ramírez y Eduardo Díaz he de dar las gracias por su apoyo, casi siempre “técnico” y también por su paciencia. También a los profesores Rafael Ayala y a Antonio Quintero por sus sugerencias teóricas y prácticas en alguna que otra “charla de autobús”.

A los profesores Juan Carlos Dana, del Departamento de Matemática Aplicada I y José Cáceres, del Área de Geometría y Topología de la Universidad de Almería, quiero agradecerles su concreta pero importante y oportuna ayuda.

Al profesor David Barnette, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de California (en Davis), quiero dedicarle unas líneas de homenaje

por su inmediata respuesta a mis preguntas, su incondicional interés por este trabajo y sus desinteresadas sugerencias para los futuros.

A la profesora Nina Lauder agradezco su labor, pues sin su apoyo me habría sido imposible acceder a los textos que me han servido como fuente de consulta en esta memoria y tampoco habría podido comunicar en otro idioma los resultados aquí reflejados.

A toda mi familia estoy agradecida, pues, como grande que es, grande ha sido el respaldo que me han dado con todas sus muestras de cariño. Tal vez ellos no sepan la importancia que han tenido en todo este tiempo y por ello quiero manifestarles aquí mi gratitud.

A mi hermana Mercedes quiero dedicarle también unas letras de agradecimiento por su confianza, sus consejos y sus constantes palabras de aliento y ánimo a lo largo de esta etapa y de tantos años.

A mis amigas Lola, Isabel y Beatriz les agradezco expresamente los ánimos que siempre me han dado y el tiempo que "les he robado". A los amigos que se han marchado pero que desde lejos me han seguido apoyando (Lola, Miguel Ángel, Neva, Rafa, etc); a todos, incluso a los que no menciono, quiero dar las gracias por su amistad. No puedo dejar atrás el reconocimiento a los compañeros de Tabolar-Andalucía (Reyes, José María, Manolo, Vicente, Amalia, etc), pues me temo que a veces no he cumplido con la aportación del 0,7 % de mi tiempo y ellos hicieron el trabajo por mí.

A Juan dejo reservadas estas líneas, para agradecerle esa disposición especial y continuada para contagiarme su buen sentido del humor cuando el mío me ha faltado. En los últimos momentos, su comprensión ha sido un estímulo aún más importante.

Introducción

El estudio de los *Complejos de Euler* tiene sus orígenes en dos problemas clásicos de la Matemática Combinatoria que son, probablemente, los más significativos en el nacimiento de la Topología como rama de la Matemática Moderna. Por un lado, René Descartes hacia 1620 [19] y Leonhard Euler en 1752 [24], [23] descubrieron independientemente la fórmula que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro en el espacio tridimensional. Hoy lleva el nombre de Fórmula de Euler: $V - A + C = 2$. Sin embargo, hay estudios sobre la posibilidad de que esta relación ya fuera conocida por Arquímedes (s. II a.C.) [40].

En 1861, J. B. Listing toma la fórmula como punto de partida de estudios más extensos y define nuevos objetos a los que llama *complejos* por estar contruidos a partir de piezas más simples [41]. Investigó sus propiedades topológicas y en especial aquellas que afectaban a la generalización de la Fórmula de Euler. Posteriormente, en 1899, H. Poincaré desarrolló el trabajo iniciado por Listing sobre construcción de objetos geométricos a partir de *células* y dio la generalización de la Fórmula de Euler para poliedros n -dimensionales en [48] y [49]. Hoy se conoce con el nombre de Fórmula de Euler-Poincaré y proporciona un invariante topológico intrínseco al espacio considerado, la Característica de Euler-Poincaré, χ . Finalmente, en 1935, P. Alexandroff y H. Hopf, en [4], dan una prueba de la generalización de esta fórmula para cualquier espacio n -dimensional.

El otro problema, llamado de la Transversalidad, empieza a ser tratado a partir del conocido como *Problema de los Puentes de Königsberg* (que, “por excelencia”, da pie al comienzo de la Teoría de Grafos). La solución de éste fue enunciada y demostrada en parte por Euler en 1736 en [22]. Más de cien años después, C. Hierholzer completó la demostración que aparece en su artículo póstumo [33]. Con estos trabajos comienzan a estudiarse propiedades de los grafos

que admiten un recorrido cerrado que pasa por todas las aristas una sola vez y que reciben el nombre de *eulerianos*. Éste sería el otro pilar básico sobre el que se apoya el estudio de los Complejos de Euler de dimensión 1.

La noción general de *Espacio de Euler* surge en la primera mitad de este siglo. Según Grünbaum [29], "... el borde de cualquier d -politopo es una $(d-1)$ -variedad Euleriana ([39] y [34])..." Desde entonces, aparecen trabajos en los que se estudian los Complejos de Euler en el marco de la Topología Algebraica, entre los que se pueden citar: los de A. Kotzig (1955, [36] y 1963, [37]), el de S. Halperin y D. Toledo (1972, [30]), el de E. Akin (1975, [3]) y el de A. Matsui y H. Sato (1985, [45]). Incluso, hay trabajos como los de R. Benedetti y M. Dedó (1981, [13] y 1983, [14]) que tratan este tema desde el punto de vista de la Geometría Algebraica.

Hay que hacer referencia a algunos resultados sobre 2-complejos que se han obtenido mediante el uso de algoritmos y que abren un campo de investigación importante, no sólo por relacionar diversas ramas de la Matemática actual sino por el aporte de técnicas algorítmicas para demostrar resultados teóricos. Algunos de estos trabajos se deben a J. L. Gross y R. H. Rosen (1979, [28]), a J. Shawe-Taylor y T. Pisanski (1994, [52]) y a R. Ayala, J. Cáceres, A. Márquez y A. Quintero (por aparecer, [7]).

Por último, algunos autores, "volviendo a las raíces del problema", estudian los complejos de dimensión dos desde la perspectiva de la Topología Combinatoria. Como ejemplo, baste citar a F. Harary y E. Palmer (1968, [32]), a E. Woon (1985, [60]) y R. Ayala, M. J. Chávez, A. Márquez y A. Quintero (por aparecer [8]).

Con este marco histórico, la presente memoria se puede encuadrar dentro de la Matemática Combinatoria. El objetivo fundamental que se plantea es el estudio de los complejos simpliciales de Euler en dimensión 2 comparándolos con los de dimensión 1. Si se consulta la bibliografía existente, no se encuentran resultados relativos a complejos eulerianos con este enfoque. Por ello, este trabajo pretende llenar parte del vacío existente en la literatura.

Para conseguirlo, se relacionan conceptos de la Topología Algebraica y Combinatoria (complejos simpliciales de dimensión 2) y de la Teoría de Grafos. Algunos de los problemas que se plantean admiten una resolución mediante el uso

de algoritmos. Por tal motivo, en el Capítulo 0, se introducen las nociones básicas relativas a estas tres ramas de las Matemáticas, distintas pero muy relacionadas entre sí: Topología Algebraica, Teoría de Grafos y Diseño de Algoritmos.

Tras el Capítulo de Preliminares (Capítulo 0), el trabajo queda estructurado en otros cuatro capítulos. El Teorema de Caracterización de los Grafos Eulerianos, va marcando la pauta a seguir en la comparación entre los 2-complejos simpliciales de Euler y los grafos del mismo nombre.

Teorema de Caracterización de Grafos Eulerianos:

Dado un grafo conexo G , son equivalentes:

1. G es euleriano.
- 1'. G contiene un recorrido cerrado que pasa por todas sus aristas una única vez.
2. G tiene todos sus vértices de valencia par.
3. Existe un morfismo entre la circunferencia y el espacio topológico subyacente al grafo, $\varphi : S^1 \rightarrow |G|$ tal que $\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\alpha)) \rightarrow \text{int}(\alpha)$ es un homeomorfismo para cualquier arista $\alpha \in A(G)$.
4. El conjunto de aristas de G admite una partición en ciclos.

La condición 1' recoge la definición de grafo euleriano. En el Capítulo 1 se analiza la definición genérica de complejo de Euler conexo y se prueba que en dimensión 1 ésta es equivalente a la condición 2 del teorema citado.

Sin embargo, en dimensión 2 "tener todos los 1-símplices de valencia par" es condición necesaria pero no suficiente para que un 2-complejo sea euleriano. A partir de esta propiedad se introduce la noción de 2-complejo par y se prueba una condición análoga a la 3 del teorema. Es decir, para cualquier 2-complejo par K existen una 2-variedad cerrada M y un morfismo φ entre M y $|K|$ tal que $\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\sigma)) \rightarrow \text{int}(\sigma)$ es un homeomorfismo para cualquier 2-símplice $\sigma \in K$.

Para demostrar esta propiedad, se describe un proceso que consta de dos etapas fundamentales: en primer lugar, se obtiene, por medio del Proceso de

Separación de Símplices, un par de triangulación asociado a K , formado por una 2-seudovariiedad y un morfismo γ , en segundo lugar, por el Proceso de Desingularización se obtiene el par de desingularización, (M, φ) , asociado a K . Este par sirve para caracterizar a los 2-complejos pares.

En el Capítulo 2 se dan algoritmos eficientes que resuelven los dos problemas planteados en el primer capítulo. Éstos son: identificar si un 2-complejo es par γ , en caso afirmativo, construir la 2-variedad cerrada de un par asociado al 2-complejo inicial.

El Algoritmo de Identificación realiza el recuento de las valencias de los 1-símplices. Los demás algoritmos (el de Separación y el de Eliminación de un Punto Singular), están basados en los procesos de Separación y Desingularización dados en el Capítulo 1. Además, a partir de los datos de salida que estos algoritmos proporcionan, se obtiene el morfismo entre la 2-variedad y el 2-complejo par inicial γ , por último, se puede reconstruir dicho 2-complejo.

En el Capítulo 3 se estudia la propiedad de “contener recorrido euleriano” en dimensión 2 comparándola con la que se tiene en dimensión 1. Para ello, hay que empezar definiendo la idea de recorrido euleriano sobre 2-complejos simpliciales, como caso particular de la de 1,2-recorrido (que ya aparece en la literatura [32]) y, a la vez, como generalización de la conocida en Teoría de Grafos.

En contraste con la situación que se da en los 1-complejos simpliciales, en dimensión 2 no se puede dar una condición análoga a la 1 del Teorema de Caracterización, ni para 2-complejos pares ni para los de Euler. Se encuentran ejemplos de 2-complejos que verifican la propiedad de ser euleriano y no contienen recorrido euleriano, así como 2-complejos con recorrido euleriano que no son eulerianos. Como todo 2-complejo euleriano es par, de éstos y otros ejemplos, se deduce que tampoco están relacionadas las propiedades de “tener recorrido euleriano” y “ser par”.

Por otra parte, si un 2-complejo contiene un recorrido euleriano, su conjunto de 2-símplices admite una partición en 1,2-ciclos, pero el recíproco no es cierto siempre. Por tanto, tampoco puede enunciarse una condición análoga a la 4 del Teorema de Caracterización a partir de estos conceptos.

En el desarrollo de este capítulo se considera como herramienta básica

el grafo dual de un 2-complejo puro. Éste permite caracterizar a la familia de 2-seudovarietades (contenida en la de los 2-complejos de Euler) que admiten recorrido euleriano. Finalmente, se construye un grafo intersección “especial” que permite caracterizar a los 2-complejos que contienen recorrido euleriano.

Puesto que en el Capítulo 1 se muestra que el par de triangulación asociado a un 2-complejo par K puede no ser único, tiene sentido preguntarse si hay propiedades de K que pueden conservarse tras aplicar a K el proceso de separación de símlices. La conexión se conserva, así como la paridad de las valencias de los 1-símlices. Entonces, la siguiente propiedad que puede analizarse es la de la conexión fuerte y a esto se dedica el Capítulo 4.

En concreto, se prueba que si el 2-complejo K es par y fuertemente conexo, es posible encontrar un par de triangulación asociado a K en el que la 2-seudovarietad es también fuertemente conexa. Para demostrar este enunciado se utiliza el grafo dual de K y se busca en él un emparejamiento adecuado. Esto permite además, el diseño del Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa, por el que se obtiene dicha pseudovarietad. Este resultado mejora a los dados en los Capítulos 1 y 2, al menos para una familia de 2-complejos de Euler.

A lo largo de la investigación han ido apareciendo muchos problemas relacionados con cada uno de los que se han recogido en esta memoria. Los que han quedado abiertos se han detallado al final de cada capítulo, para conservarlos en el contexto en el que surgieron y darle su justa importancia.

Indice

Resumen	iii
Agradecimientos	v
Introducción	vii
0 Preliminares	1
0.1 Complejos simpliciales	1
0.2 Grafos	6
0.3 Conceptos Algorítmicos	9
1 2-Complejos Eulerianos y 2-Complejos Pares	13
1.1 Introducción	13
1.2 Preliminares	16
1.3 2-Complejos de Euler	17
1.4 El Proceso de Separación de Símplices	21
1.5 El Proceso de Desingularización	26
1.6 Teorema de Caracterización de 2-Complejos Pares	33

1.7	Conclusiones y Problemas Abiertos	35
2	Algoritmos sobre 2-Complejos Pares	41
2.1	Introducción	41
2.2	Algoritmo de identificación	43
2.3	2-Seudovariedad asociada a un 2-Complejo Par	46
2.4	2-Variedad asociada a un 2-Complejo Par	53
2.5	Conclusiones y Problemas Abiertos	64
3	Recorridos Eulerianos sobre 2-Complejos	67
3.1	Introducción	67
3.2	1,2-Recorridos sobre 2-Complejos. Recorrido Euleriano	69
3.3	Recorrido Euleriano y Grafo Dual	71
3.4	Recorridos Eulerianos sobre 2-Pseudovariedades	75
3.5	Recorrido Euleriano y Grafo Intersección	82
3.6	Conclusiones y Problemas abiertos	88
4	Separación Fuertemente Conexa	91
4.1	Introducción	91
4.2	El Proceso de Separación Fuertemente Conexa	93
4.3	Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa	104
4.4	Conclusiones y Problemas Abiertos	113
	Bibliografía	115

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se recogen las definiciones y resultados generales que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo.

Dado el carácter de esta memoria, son necesarios conceptos de distintas ramas de las Matemáticas, como la Topología Algebraica, la Teoría de Grafos y el Diseño de Algoritmos. Cualquier texto introductorio a cada una de ellas contiene los conceptos con los que se trabajará.

Para fijar la terminología y la notación empleadas, se citan algunos de los manuales consultados. Estos son: el texto de Agoston ([1]), para la mayoría de las nociones topológicas básicas relativas a complejos simpliciales; el de Harary ([31]), para lo que concierne a Teoría de Grafos y, para Algorítmica, los libros de Aho, Hopcroft y Ullman ([2]) y de Garey y Johnson ([27]).

0.1 Complejos simpliciales

En toda esta memoria se plantean y resuelven problemas relativos a complejos simpliciales de dimensión 2 desde el punto de vista combinatorio. Las definiciones generales que se recogen a continuación son las clásicas de la Topología Algebraica y, como ya se ha señalado, están tomadas del libro de Agoston ([1]).

Sea k un entero no negativo. Se llama *simplex k -dimensional* o *k -simplex*

al cierre convexo de $k + 1$ puntos linealmente independientes $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$. Se denota por $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$ o bien por $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. A los puntos v_i se les llama *vértices* de σ . Si no hay confusión, entonces se puede prescindir de la dimensión y llamar a σ *símplice*.

Una *cara h-dimensional* o *h-cara* de σ es un h -símplice cuyos vértices son $h + 1$ vértices distintos de σ . A las 1-caras también se les llama *aristas* de σ .

Los puntos que forman un k -símplice se caracterizan en virtud del siguiente teorema (cuya prueba se omite aquí y puede encontrarse en [1]).

Teorema 0.1.1 *Cualquier punto w de un símplice $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$ puede expresarse de una única forma según:*

$$w = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Si todos los coeficientes λ_i son positivos, w es un punto *interior* de σ . El conjunto de todos los puntos interiores de σ se llama *interior de σ* y se denota por $\text{int}(\sigma)$.

Un punto interior especial de un k -símplice es el *baricentro*, cuyos coeficientes son $\lambda_i = \frac{1}{k+1}$ para $i = 0, 1, \dots, k$.

Un *complejo simplicial* K es una colección finita de símplices en algún \mathbf{R}^n que satisfacen:

1. Si $\sigma \in K$, entonces todas las caras de σ están en K .
2. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ o bien $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común a σ_1 y σ_2 .

También se puede definir *complejo simplicial infinito* sustituyendo la expresión “colección finita” por “colección numerable” en la definición anterior.

La *dimensión* de K , $\text{dim}K$, se define como -1 , si $K = \emptyset$ y, en otro caso, como el máximo de las dimensiones de los símplices de K . De este modo, si $\text{dim}K = n$, se dice que K es un *n -complejo simplicial* y si no hay confusión, para abreviar, se dice que K es un *complejo*.

Como ejemplo especial hay que citar a los grafos, que son 1-complejos simpliciales.

La noción de valencia de un vértice en un 1-complejo y de un 1-símplice en un 2-complejo ([31] y [60]) puede generalizarse para símlices de cualquier dimensión. Entonces, se llama *valencia* o *grado* de un k -símplice σ y se denota por $val(\sigma)$ o por $\delta(\sigma)$, al número de $(k+1)$ -símlices de K que lo contiene como cara.

El subconjunto $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbf{R}^n$ es el *espacio subyacente* de K . Obsérvese la distinción formal entre el complejo K (colección de símlices) y su espacio subyacente $|K|$ (subconjunto de \mathbf{R}^n). Por abuso de lenguaje, a veces se confunden ambos términos; de modo especial, si hay que dar una representación de K mediante una figura, ésta será una representación de $|K|$.

Un *subcomplejo* de K es un complejo simplicial L tal que $L \subset K$. El *borde* de K , denotado por ∂K , es el subcomplejo formado por los símlices $\tau \in K$ que son cara de algún k -símplice $\sigma \in K$ que pertenece a un único $(k+1)$ -símplice de K .

Por ejemplo, si K es un 2-complejo, ∂K está formado por los 1-símlices que sean cara de un único 2-símplice y por los vértices que estén en un único 1-símplice.

Una *subdivisión* de K es un complejo sdK que verifica:

1. $|sdK| = |K|$.
2. Para cualquier símplice σ' de sdK existe otro símplice σ de K tal que $\sigma' \subseteq \sigma$.

Un n -complejo se dice *puro* si todo símplice está contenido en alguno de dimensión n . Se llama *h -esqueleto* de K al subcomplejo formado por todos los símlices de K que tienen dimensión menor o igual que h .

Se dice que un complejo K es *conexo* si para cualquier par de vértices $v, w \in K$, existe una secuencia v_0, v_1, \dots, v_n de vértices de K tal que $v_0 = v, v_n = w$ y $v_i v_{i+1}$ es un 1-símplice de K , para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$ (se puede comprobar que K es conexo si y sólo si $|K|$ es conexo).

Las aplicaciones naturales entre complejos simpliciales son los *morfismos* o *aplicaciones simpliciales* que se definen a continuación.

Si K y L son complejos simpliciales, una aplicación simplicial $f : K \rightarrow L$ es una aplicación que verifica:

1. La imagen de cada vértice de K es un vértice de L ;
2. Si $v_0v_1 \dots v_n$ es un símplice de K , entonces $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ son los vértices de un símplice de L .

Si f es biyectiva, entonces se le llama *isomorfismo* y K y L son *isomorfos*. La aplicación simplicial f induce una aplicación continua entre los espacios subyacentes del siguiente modo:

$|f| : |K| \rightarrow |L|$ tal que si $x = \sum \lambda_i v_i$ es un punto del símplice $v_0v_1 \dots v_n$ de K , entonces $|f|(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$.

Por abuso de lenguaje, a esta aplicación también se le llama morfismo simplicial entre $|K|$ y $|L|$. Obviamente, la composición de aplicaciones simpliciales es también una aplicación simplicial.

Una *triangulación* de un espacio X es un par (K, φ) , donde K es un complejo simplicial y $\varphi : |K| \rightarrow X$ es un homeomorfismo. Se dice que K *triangula* a X . Un *poliedro* es un espacio que admite una triangulación.

En general, si K es un complejo o un espacio triangulado y x es un punto de $|K|$, se define el *entorno* de x y se denota por $N(x; |K|)$, como el subcomplejo formado por los símplices de K que contienen a x . También recibe el nombre de *estrella* de x . El *link* de x no es más que el conjunto de símplices de $N(x; |K|)$ que no contienen a x y se denota por $Lk(x; |K|)$, esto es:

$$Lk(x; |K|) = \{\sigma \in K \mid \text{existe } \tau \in K \text{ con } x \in \tau - \sigma \text{ y } \sigma \text{ es cara de } \tau\};$$

Todo complejo simplicial K tiene asociado un número que es un invariante para su espacio subyacente. Es la *Característica de Euler* del complejo simplicial K , cuya expresión combinatoria viene dada por

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q n_q(K),$$

donde $n_q(K)$ representa el número de q -símplices de K .

Si X es un poliedro (espacio triangulado por K), la expresión de $\chi(X)$ coincide con la de K , $\chi(K)$. En [1] se demuestra que la Característica de Euler es intrínseca al espacio, es decir, no depende de la triangulación de éste.

Una *superficie (sin borde)* es un poliedro $S \subset \mathbf{R}^n$ que admite una triangulación (K, φ) que verifica:

1. K es un 2-complejo simplicial conexo.
2. Cada 1-símplice de K es de valencia 2.
3. Para cada vértice $v \in K$, los distintos 2-símplices $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ a los que v pertenece pueden ordenarse de forma que σ_i y σ_{i+1} comparten exactamente un 1-símplice ($1 \leq i \leq s$) y $\sigma_1 = \sigma_{s+1}$.

De esta definición se deduce que S es *conexa* y en lo que sigue, si S no es conexa se especificará oportunamente.

Si $\chi(S)$ es la característica de Euler de S , al número $\gamma(S)$ tal que $\chi(S) = 2 - 2\gamma(S)$ se la llama *género* de S .

A partir de la definición es fácil probar que todo punto de una superficie tiene un entorno (euclídeo) homeomorfo a \mathbf{R}^2 y recíprocamente. Radó probó en 1925 el siguiente teorema.

Teorema 0.1.2 ([50]), *Si $S \subset \mathbf{R}^n$ es compacto y todo punto de S tiene un entorno homeomorfo a \mathbf{R}^2 , entonces S admite una triangulación.*

Este resultado permite hablar de superficie triangulada incluso cuando no sea necesario especificar la triangulación, como se hará en el Capítulo 3.

Las superficies son ejemplos de variedades topológicas. Una *variedad n -dimensional* o *n -variedad* es un espacio en el que cualquier punto tiene un entorno homeomorfo a \mathbf{R}^n . La mayoría de las veces se utiliza el término "superficie" en sentido amplio y por superficie o variedad cerrada se entiende una que es compacta y sin borde.

Para simplificar la notación y por abuso de lenguaje, en todo lo que sigue se utilizará el término 2-variedad para designar indistintamente a un 2-complejo simplicial, finito, puro y que verifica las tres condiciones anteriores; o bien para designar a una superficie cerrada homeomorfa a tal 2-complejo.

Toda superficie se puede formar a partir de otras "más simples" como son la esfera, el toro y el plano proyectivo. La operación que permite hacerlo es la *suma conexa*. Intuitivamente, la suma conexa de dos superficies S_1 y S_2 se define como la superficie obtenida al cortar un disco de cada una de ellas y pegar lo que queda a lo largo de los bordes de los agujeros. Se denota por $S_1 \# S_2$ y se demuestra que el resultado es una superficie.

De momento no será necesario dar la definición formal de esta operación, pero puede consultarse [1] para obtener también más información sobre las propiedades de la suma conexa de variedades (conmutativa, asociativa y elemento neutro).

Asímismo, en [44] se puede encontrar una demostración del Teorema de Clasificación de las superficies compactas.

Teorema 0.1.3 *Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Por último, se define *seudovariedad n-dimensional* o *n-seudovariedad* como un poliedro conexo X que admite una triangulación (K, φ) que verifica:

1. K es puro.
2. Todo $(n-1)$ -símplice tiene valencia menor o igual que 2.

Si $\partial X = \emptyset$, entonces X es una n -seudovariedad cerrada. Algunos autores incluyen una tercera condición:

3. Si σ y σ' son dos n -símplices distintos de K , entonces existe una secuencia $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ de n -símplices en K tal que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_k = \sigma'$ y σ_i comparte con σ_{i+1} un $(n-1)$ -símplice, para cada $1 \leq i < k$.

Pero en este trabajo, si K verifica esta propiedad, se dirá que X es una n -seudovariedad *fuertemente conexa*.

0.2 Grafos

En la sección anterior se ha definido grafo como un complejo simplicial de dimensión 1. En ésta se introduce la definición combinatoria y otras nociones y resultados relacionados con ella. Todos serán necesarios para el desarrollo de capítulos posteriores, ya que muchos de los problemas que se plantean para 2-complejos encuentran su solución en la de un problema de Teoría de Grafos o bien utilizan para su resolución un grafo como herramienta fundamental.

Según se recoge en el libro de Harary ([31]), un *grafo* G consiste en un conjunto finito no vacío de *vértices*, $V = V(G)$, y un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, $A = A(G)$ (que puede ser vacío). Cada par $x = \{u, v\}$ es una arista de G , se dice que x *une* a u y v y que u y v son *adyacentes*. La arista x es *incidente* con cada uno de los vértices que la forman. Dos aristas distintas x e y son *incidentes* si tienen un vértice común.

En estas condiciones, se denota $G = (V, A)$ y es frecuente representarlo mediante un diagrama que contiene un punto por cada vértice y una línea entre dos vértices siempre que exista una arista que los une.

Un *subgrafo* de G es un grafo formado por vértices y aristas de G . Un subgrafo "*spanning*" de G es un subgrafo cuyo conjunto de vértices es V . Si $S \subset V$, el *subgrafo inducido por S* es aquel que tiene a S como conjunto de vértices y todas las aristas posibles que aparezcan entre ellos en G ; es decir, es el subgrafo maximal de G con conjunto de vértices S .

Algunas operaciones que se pueden realizar sobre un grafo son las siguientes: *eliminar* un vértice v de G consiste en considerar el subgrafo de G inducido por $V - \{v\}$ y se denota por $G - v$. Análogamente, *eliminar* una arista x de G consiste en considerar el subgrafo maximal de G que no contiene a x y se denota por $G - x$.

Un *camino* sobre G es una secuencia alternada de vértices y aristas de G , $v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n$, que empieza y termina por vértices y tal que cada arista a_i es incidente con el vértice inmediatamente anterior, v_{i-1} y con el posterior v_i . Se dice que este camino *une* a v_0 y v_n . Si $v_0 = v_n$ se dice que el camino es *cerrado* y es *abierto* en otro caso (aunque en general, si no se especifica,

el camino será abierto). Si todas las aristas son distintas, se dirá que la secuencia anterior es un *recorrido* y si todos los vértices son distintos, se llamará *arco*. Un recorrido cerrado es un *circuito* y un arco cerrado es un *ciclo*.

Una *subdivisión* de G es el grafo obtenido al sustituir en G una arista $\{u, v\}$ por un arco que une a u y v . Es fácil comprobar que el grafo obtenido es homeomorfo a G .

Al número de aristas que componen el camino se le llama *longitud* del camino. El ciclo de longitud n se denota por C_n y si $n = 3$, a C_3 se le llama *triángulo*.

El grafo G se dice *conexo* si dos vértices cualesquiera están unidos por un arco en G (y esto es coherente con la definición de 1-complejo simplicial conexo dada en la sección anterior). Un subgrafo conexo maximal de G es una *componente conexa* de G . Si G tiene más de una componente conexa, entonces es *disconexo* o *no conexo*. Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos.

Recuérdese que la valencia o grado del vértice v ($\delta(v)$), es el número de aristas incidentes en v . El primer teorema de Teoría de Grafos se debe a Euler ([25]) y dice lo siguiente:

Teorema 0.2.1 *La suma de las valencias de los vértices de un grafo $G = (V, A)$ es dos veces el número de aristas de G .*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#A(G).$$

Como consecuencia, se tiene el resultado conocido con el nombre de *Lema del apretón de manos* (también se debe a Euler), que se da a continuación.

Corolario 0.2.2 *En cualquier grafo, el número de vértices de valencia impar es par.*

Un vértice de valencia 0 se llama *aislado*. Si todos los vértices de G tienen la misma valencia r , G se dice *regular* de valencia r o *r -regular*. Si $r = 0$ y G tiene más de un vértice, éste se dirá *totalmente disconexo* y si $r = 3$, G será un grafo *cúbico*.

El *grafo completo* K_n es el grafo de n vértices y todas las aristas posibles entre ellos; es decir, es el grafo regular de valencia $n-1$ (con n vértices y $n(n-1)/2$ aristas).

Se dice que un grafo G es *bipartito* o que es un *bigrafo* si su conjunto de vértices V admite una partición en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que toda arista de G une un vértice de V_1 con otro de V_2 . Si V_1 tiene n vértices, V_2 tiene m y $A(G)$ contiene todas las aristas posibles entre ellos, G es el grafo *bipartito completo* $K_{m,n}$. En caso de que sea $m = 1$ ($n > 1$), a $K_{1,n}$ se le llama *estrella*.

Dado que Euler abordó el Problema de los Puentes de Königsberg y dió la respuesta, iniciando así la Teoría de Grafos ([22]), es natural que los grafos que contienen un recorrido cerrado que pase por todas las aristas lleven su nombre. Así, a tal recorrido se le llama *circuito euleriano* y al grafo que lo contiene, *euleriano*.

Sir W. Hamilton sugirió otra clase de grafos al proponer el Juego del Dodecaedro, que consistía en encontrar un ciclo que pasara por todos los vértices de tal poliedro (para más detalles se puede consultar [16]). Si un grafo G contiene un ciclo C con esta propiedad, se dice que G es *hamiltoniano* y a C se le llama *ciclo hamiltoniano*.

Para finalizar esta sección, se introduce el concepto de *emparejamiento*, que no es más que un conjunto de aristas independientes (esto es, no adyacentes dos a dos) de G .

Para profundizar en el tema de los emparejamientos se pueden consultar también el texto de Biggs ([15]) y el de Clark y Holton ([18]).

0.3 Conceptos Algorítmicos

Un algoritmo es un concepto matemático del que la Lógica Matemática da una definición formal. Sin embargo, para el desarrollo de este trabajo no es necesario recurrir a tal definición abstracta siendo suficiente una más informal (tal como aparece en [27]):

“En general, un algoritmo es la descripción paso a paso de un proceso para resolver un cierto problema. En concreto, se puede pensar en un algoritmo simplemente como en un programa de ordenador escrito en un determinado lenguaje. Se dice que un algoritmo resuelve un problema Π si puede aplicarse a cualquier caso particular $I \in \Pi$ y siempre está garantizada la solución para I .”

El diseño de un algoritmo consta de una serie de *pasos* o *instrucciones* fundamentales:

- Leer los *datos de entrada*.
- Operaciones que manipulan los datos de entrada para resolver el problema.
- Dar los *datos de salida* que serán la solución del problema.

Es claro que el proceso descrito mediante un algoritmo debe ser finito, tanto en el número de instrucciones como en las veces que éstas se pueden ejecutar. Además, en la práctica, los datos de entrada y el lenguaje en el que las instrucciones se dan deben estar adecuados a que la “máquina” que ejecute el algoritmo pueda entenderlos, es decir, deben expresarse en cierto lenguaje de programación.

Pero en el caso que aquí se estudia, se prescindirá de esta última condición, pues sólo se pretende dar algoritmos que resuelvan algunos problemas sobre Σ^* -complejos suponiendo que existe la “máquina” que entiende el lenguaje utilizado. Es decir, no se darán algoritmos en ningún lenguaje de programación específico, sino en un “seudocódigo” que incluye términos del lenguaje ordinario, del matemático y del lenguaje de programación.

Para poder aplicar los algoritmos que en capítulos posteriores se describen, sólo se requerirá que la máquina tenga suficiente memoria con una serie de registros donde almacenar todos los datos que vayan surgiendo según las distintas operaciones que se realicen en cada caso.

Hay diversos criterios para evaluar un algoritmo. Lo más frecuente es interesarse por el tiempo y el espacio necesarios para poder ejecutarlo. Si se quieren valorar estos parámetros, se asocia un entero a cada problema que dará una medida de la cantidad de datos de entrada. Este entero se llama *tamaño*

del problema. Así, por ejemplo, si se quiere resolver un problema sobre un grafo, el tamaño del grafo podría ser su número de aristas. Análogamente, el de un 2-complejo puro será el número de 2-símplices que lo forman.

Se llama *complejidad* de un algoritmo al tiempo que éste necesita para ser ejecutado (en el peor caso) expresado como una función del tamaño del problema. Si el algoritmo necesita tiempo $f(n)$ (en el peor caso) para resolver un problema de tamaño n , se dice que la complejidad de tal algoritmo es del orden de $f(n)$ y se denota por $O(f(n))$. Se dice que una función $g(n)$ es $O(f(n))$ si existe una constante c tal que $g(n) \leq cf(n)$ para todo valor no negativo de n salvo, tal vez, para un conjunto finito. Esta terminología fue popularizada por Knuth en 1976, [35].

Si $f(n)$ es un polinomio, se dice que el algoritmo es de tiempo *polinomial*; si $f(n)$ es $O(\log n)$, el algoritmo es de tiempo o complejidad *logarítmica* y si $f(n)$ es una función exponencial, el algoritmo es de complejidad *exponencial*.

En general, interesa diseñar el algoritmo “más eficiente” que resuelva un problema. En sentido amplio, esto significa que sea el “más rápido”. Se dirá que un algoritmo de complejidad $O(f(n))$ es *eficiente* u *óptimo* si no es posible encontrar otro de complejidad menor. Para más detalles sobre estos conceptos o para definiciones más rigurosas se puede consultar [27].

A continuación se detalla un algoritmo que tiene especial interés por su utilidad en gran variedad de problemas de Teoría de Grafos. Es el conocido con el nombre abreviado de DFS (Depth-First-Search). Este algoritmo proporciona una técnica para “explorar” todos los vértices del grafo y tiene complejidad $O(n)$ donde n es el número de aristas del grafo (como puede verse en [43]).

El algoritmo DFS lleva este nombre para indicar que siempre que sea posible se visitarán nuevas aristas y nuevos vértices, avanzando en “profundidad” en el grafo.

Según se describe en [46], la visita de los vértices puede hacerse del siguiente modo. Se empieza por un vértice elegido v . Después se elige cualquier arista (v, w) incidente con v . En general, si x es el último vértice visitado, la búsqueda continúa seleccionando una arista no explorada (x, y) incidente en x . Si y ha sido visitado previamente, se escoge otra arista incidente en x . Si y no había

sido visitado, entonces se visita y y se comienza una nueva búsqueda empezando en y . Tras completar el proceso a través de todos los caminos que comienzan en y , la búsqueda vuelve al vértice x desde donde se llegó hasta y . La selección de aristas incidentes en x y no exploradas prosigue hasta agotar la lista de estas aristas. Si $G = (V, A)$ es un grafo, los pasos del algoritmo DFS aplicado a G son los siguientes.

Algoritmo DFS([46])

0. Leer los datos de $G = (V, A)$.
Iniciar el árbol $T = \emptyset$.
 1. Marcar todos los vértices de V como “nuevo”.
 2. Mientras haya un vértice $v \in V$ marcado como “nuevo” hacer:
BUSCAR(v)
 3. Dar el árbol T y FIN.
-

Descripción del proceso “BUSCAR(v)”:

1. Empezar marcando v como “viejo”.
2. Para cada vértice w adyacente a v hacer:
Si w está marcado como “nuevo”, entonces:
 - (a) Añadir la arista (v, w) a T .
 - (b) BUSCAR(w).

El Algoritmo DFS proporciona, según se ha descrito, un árbol maximal en G . En caso de que G sea conexo, T contiene todos los vértices de G . En otro caso, se puede dar una versión de este proceso por la cual se obtengan las componentes conexas de G . Para ello, basta empezar por un vértice que haya quedado marcado como “nuevo” después de la primera vuelta del algoritmo DFS y ejecutarlo otra vez para dicho vértice (ver [43]).

Capítulo 1

2-Complejos Eulerianos y 2-Complejos Pares

En este capítulo se estudian propiedades de los 2-complejos simpliciales de Euler finitos y puros. A partir de la definición topológica de 2-complejo de Euler, se prueba que la condición “tener todos los 1-símplices de valencia par” es condición necesaria pero no suficiente para que un 2-complejo sea Euleriano. Por ello, se introduce la noción más general de 2-complejo par y se caracteriza asociándole un par formado por una 2-variedad y un morfismo entre la variedad y el complejo.

1.1 Introducción

Desde el comienzo de la Teoría de Grafos han sido ampliamente estudiadas las propiedades de Transversalidad. Así, un grafo finito se dice *euleriano* si admite un recorrido cerrado que contiene a todas las aristas del grafo.

Si bien la noción de grafo euleriano es ya clásica en Matemáticas, la de complejo de Euler ha sido poco estudiada y hasta el momento aparece poco citada en la literatura. Es bien conocida la *Fórmula de Euler* para un poliedro n -dimensional, X , que proporciona la Característica de Euler $\chi(X)$ ([24], [23] y [48]). Así, un complejo simplicial localmente finito de Euler debe su nombre, recisamente, a que la Característica de Euler del link de cualquiera de sus puntos

es un entero par o cero.

Dado que un grafo no es más que un complejo simplicial de dimensión 1, parece lógico y natural preguntarse qué ocurre si se aumenta la dimensión, empezando por dimensión 2. Es decir:

- ¿Qué propiedades de los grafos eulerianos se verifican también sobre los 2-complejos del mismo nombre y cuáles no?
- ¿En qué sentido los 2-complejos de Euler son la generalización natural de los 1-complejos de Euler?

Por otra parte, hay que decir que diversos autores han tratado el tema de los complejos eulerianos en el marco de la Topología Algebraica (en orden cronológico aparecen [36], [37], [3], [14] y [45]). Por ello, resulta interesante, entonces, profundizar en el estudio de la familia de 2-complejos simpliciales de Euler desde un punto de vista combinatorio. Esto es, se trata de buscar caracterizaciones expresadas estrictamente en términos de sus simplices y las intersecciones entre ellos, en vez de hacerlo en términos del invariante topológico χ del espacio subyacente.

Más tarde, esto permitirá diseñar algoritmos que resuelvan los mismos problemas que surjan teóricamente y que se irán desarrollando en capítulos posteriores.

El objetivo central de este capítulo se resume en establecer una comparación entre los grafos y los 2-complejos eulerianos, partiendo de las definiciones y analizando local y globalmente las propiedades de tales complejos. Además, se busca una caracterización de los 2-complejos de Euler lo más parecida posible a la que se tiene para los grafos eulerianos.

Recuérdese que los grafos Eulerianos fueron caracterizados por Euler ([22]) y Hierholzer ([33]) mediante el siguiente teorema (cuya prueba original puede verse en [16] y una resumida en [31]).

Teorema 1.1.1 *Dado un grafo conexo G , son equivalentes:*

1. G es euleriano.

2. G tiene todos sus vértices de valencia par.
3. El conjunto de aristas de G admite una partición en ciclos.

De este resultado se deduce una propiedad equivalente a las anteriores que, por ser menos frecuente en la literatura, se detalla aparte como condición 4:

4. Existe un morfismo entre la circunferencia y el espacio topológico subyacente al grafo, $\varphi : S^1 \rightarrow |G|$ tal que $\varphi : \varphi^{-1}(int(\alpha)) \rightarrow int(\alpha)$ es un homeomorfismo para cualquier arista $\alpha \in A(G)$.

Nótese que φ es biyectivo salvo en un conjunto formado por algunos vértices del grafo que pudiera ser vacío en caso de que G fuera un ciclo ([56]).

Además, de la condición 2 se deduce que todo grafo euleriano es un 1-complejo simplicial de Euler finito y conexo (se probará en la Sección 1.3).

No obstante, aunque, en un principio, pudiera parecer que existen fuertes relaciones entre la caracterización de los grafos eulerianos y la definición de los 2-complejos de Euler, a medida que se avanza y profundiza en el estudio surgen resultados sorprendentes que llevan a la conclusión de que la situación es bastante distinta al pasar de dimensión 1 a dimensión 2.

En primer lugar, se probará que, en dimensión 2, no se tiene la condición equivalente referida a la paridad de las valencias de los vértices. En un 2-complejo, los 1-símplices ocupan el lugar análogo al que ocupan los vértices en un grafo, pues son los símplices de una dimensión menor que la del complejo. Así, es natural cambiar la condición 2 del Teorema 1.1.1 enunciándola en términos de paridad de las valencias de los 1-símplices del 2-complejo.

Es necesario, por tanto, introducir la noción de 2-Complejo Par como aquel cuyos 1-símplices tienen valencia par y se prueba que el conjunto de los 2-Complejos de Euler está estrictamente contenido en el de los 2-Complejos pares.

A continuación, se busca una caracterización de los 2-complejos pares análoga a la condición 4. Es decir, se busca un morfismo entre una 2-variedad cerrada y conexa y el 2-complejo, que sea biyectivo salvo en un conjunto de "pocos" puntos del 2-complejo. Si en el caso de dimensión 1 la única variedad

conexa y cerrada es la circunferencia, al aumentar la dimensión hay más posibilidades para elegir la 2-variedad que se asocia al 2-complejo. Si el morfismo entre la circunferencia y el grafo es homeomorfismo restringido al interior de las aristas, el que se encuentre para el 2-complejo par será un homeomorfismo si se restringe al interior de los 2-símplices del complejo. Con todo ello, se consigue la caracterización deseada.

En todo el capítulo se seguirá la terminología básica recogida en los libros de Agoston [1], Lefschetz [39], Grünbaum [29] y Harary [31] y se utilizarán algunos de los resultados recogidos en el Capítulo 0.

1.2 Preliminares

Antes de entrar de lleno en el tema de este capítulo son necesarias algunas aclaraciones sobre la estructura que puede presentar un 2-complejo finito y puro.

En general, si K es un 2-complejo finito y x es un punto de $|K|$ y se considera el entorno x , $N(x; |K|)$ se obtiene que, según la clasificación de los 2-complejos finitos y puros dada por Whittlesey (en [59]), x puede ser un punto singular o regular. Si x es regular, dicho entorno $N(x; |K|)$ es homeomorfo a un disco del plano y su link es el ciclo formado por los 0-símplices y 1-símplices de $N(x; |K|)$ que no contienen al punto x .

Si x no es regular, se distinguen varios tipos de singularidades. En primer lugar, $N(x; |K|)$ puede ser homeomorfo a un conjunto finito de discos identificados por un punto interior de cada uno de ellos. En este caso a x se le llama *punto cónico* y a $N(x; |K|)$ se le llama *cono*. Obsérvese que un punto cónico siempre es un punto singular aislado, en el sentido de que es el único punto singular de K en un entorno abierto suyo. Por otra parte, $N(x; |K|)$ puede ser un haz de más de dos 2-símplices (que comparten un 1-símplice). Este tipo de entorno suele conocerse con el nombre de *libro* y a x se le llama *punto singular de línea*. Finalmente, si $N(x; |K|)$ no es un libro ni un cono, en x inciden varios 1-símplices formados por puntos singulares de línea y se dice que x es un *nodo* y que $N(x; |K|)$ es un *abanico*.

En la Figura 1.1 se observa que z es un punto cónico, y es un nodo y x_1

y x_2 son puntos singulares de línea. Todos los puntos de los 1-símplices $\{x_1, y\}$ y $\{x_2, y\}$, salvo y , son singulares de línea. Los demás puntos del 2-complejo son regulares.

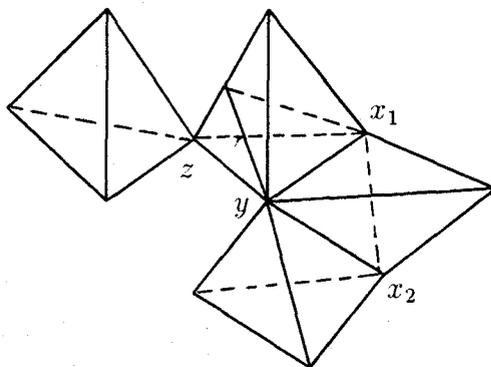


Figura 1.1: *Distintos tipos de puntos singulares sobre un 2-complejo finito, puro y sin borde.*

1.3 2-Complejos de Euler

La noción de espacio de Euler ha aparecido en la literatura como una clase de poliedro más general que la de variedad ([36], [3], [14] y [45]). Aunque este trabajo se centra en el estudio de los 2-complejos simpliciales de Euler finitos, la definición que ha servido de base es la que da E. Akin en 1975 para complejos simpliciales de Euler localmente finitos. Esta sección se dedica al análisis de las primeras propiedades de este tipo de 2-complejos y se introduce la noción de 2-complejo par.

Teniendo en cuenta la notación introducida en el Capítulo 0, se tiene la definición siguiente.

Definición 1.3.1 ([3]) Un complejo simplicial localmente finito K se llama *complejo de Euler* si para todo $x \in |K|$, $\chi(Lk(x; |K|)) \equiv 0$.

En primer lugar, se observa que si K es un 1-complejo simplicial finito y x es un vértice cualquiera de K , el $Lk(x; |K|)$ es el conjunto de vértices adyacentes

a x . Si x es un punto interior a una arista de K , el $Lk(x; |K|)$ es el par de vértices extremos de dicha arista. Por tanto, un 1-complejo simplicial de Euler finito y conexo no es más que un grafo euleriano, como se prueba en la proposición siguiente.

Proposición 1.3.2 *Un grafo es euleriano si y sólo si es un 1-complejo simplicial de Euler finito y conexo.*

Demostración: Un grafo K es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen valencia par, según se prueba en [31]. De aquí se deduce que para cualquier punto $x \in |K|$, el $Lk(x; |K|)$ está formado por un número par de vértices y, por tanto, tiene característica de Euler par (que puede ser un número negativo), con lo que K es un 1-complejo simplicial de Euler, finito y conexo. El recíproco es inmediato. \square

Nótese que un complejo simplicial de Euler puede ser conexo o no. Puesto que todo grafo euleriano es conexo ([31]), la definición anterior para dimensión 1 es más general que la clásica de Teoría de Grafos. Es decir, la Definición 1.3.1 engloba a los grafos no conexos que tienen todos sus vértices de valencia par.

En todo lo que sigue y por analogía con el caso de dimensión 1, se utilizarán indistintamente los términos *Complejo de Euler o Complejo Euleriano*. Con el propósito de tener una idea más concreta del concepto abstracto de 2-complejo euleriano, se prueban a continuación algunas propiedades importantes que se deducen de la definición.

Proposición 1.3.3 *Un 2-complejo de Euler no tiene borde.*

Demostración: Si K es un 2-complejo de Euler con borde, cualquier punto del borde está sobre un 1-símplice de valencia 1 y su link es un camino abierto formado por vértices y aristas que no puede tener característica de Euler par. Pero esto contradice la hipótesis de ser euleriano y, por tanto, K no puede tener borde. \square

Obsérvese que existen 2-complejos de Euler puros y no puros. Así por ejemplo, cualquier triangulación del "wedge" de una esfera y una circunferencia

es un 2-complejo de Euler no puro (donde el wedge de dos o más variedades es la unión por un punto de éstas, para más detalles, se puede consultar [1]). La proposición siguiente da una condición necesaria para 2-complejos de Euler puros.

Proposición 1.3.4 *Dado un 2-complejo simplicial K de Euler finito y puro y un punto $x \in |K|$, el $Lk(x; |K|)$ es, o bien un grafo euleriano, o bien una unión disjunta de ciclos.*

Demostración: Por ser K un 2-complejo simplicial finito, para cualquier $x \in |K|$ se verifica que $Lk(x; |K|)$ es un grafo finito. Si además K es euleriano, se tiene que $\chi(Lk(x; |K|)) = n_0 - n_1 \equiv 0 \pmod{2}$, siendo n_0 el número de vértices y n_1 el número de aristas de tal grafo.

El punto x puede ser un 0-símplice o estar en el interior de algún símlice de mayor dimensión. Parece cómodo entonces probar el enunciado atendiendo a los distintos casos que se pueden presentar. En cada caso se probará que si $Lk(x; |K|)$ es conexo tiene todos los vértices de valencia par y si que $Lk(x; |K|)$ no es conexo, es unión de ciclos disjuntos.

Caso 1: x es un punto interior de un 2-símplice σ .

En este caso, $Lk(x; |K|)$ es el ciclo formado por los 3 1-símplices y los 3 0-símplices cara de σ , por tanto es un grafo euleriano.

Caso 2: x es un punto interior de un 1-símplice μ .

Según la Proposición 1.3.3, μ debe ser cara de un número $n_2 \geq 2$ de 2-símplices. Trivialmente, el link de x es conexo pues el entorno de x está formado por dichos 2-símplices y todo punto de $Lk(x; |K|)$ se puede unir por un arco con cada vértice de μ . Además tiene $n_1 = 2n_2$ aristas. Por otra parte, $Lk(x; |K|)$ tiene un vértice por cada 2-símplice y los dos vértices de μ comunes para todos los 2-símplices; es decir: $n_0 = n_2 + 2$. Teniendo en cuenta la propiedad de la característica de Euler, se verifica que $n_0 - n_1 = 2p$ siendo p un número entero. En conclusión, $n_2 = 2 - 2p$ es un número par y μ es cara de un número par de 2-símplices.

Cada vértice de μ tiene valencia n_2 y los vértices restantes son de valencia

2, entonces, en virtud del teorema de caracterización de los grafos eulerianos (Teorema 1.1.1), $Lk(x; |K|)$ es un grafo euleriano.

Caso 3: x es un 0-símplice de K . Según se ha detallado en la Sección 1.2, x puede ser un punto regular o singular.

Si x es regular, $Lk(x; |K|)$ es el ciclo formado por los 0-símplices y 1-símplices de $N(x; |K|)$ que no contienen a x . En conclusión, es un grafo euleriano.

Si x es un punto cónico, $Lk(x; |K|)$ es no conexo; concretamente, es la unión disjunta de los ciclos formados por los 0-símplices y 1-símplices de $N(x; |K|)$ que no contienen a x .

Si x es singular de línea, x es cara de un 1-símplice μ común a todos los 2-símplices del libro que constituye el entorno de x . En tal situación, el libro debe estar formado por un número par de 2-símplices, pues de no ser así, $\chi(Lk(y; |K|))$ sería impar para cualquier punto y del interior de μ y esto contradice lo que se ha probado en el caso 2.

Por otra parte, x también puede ser cara de algún 1-símplice de valencia 2 (la valencia no puede ser mayor pues x es singular de línea) que aportará al link de x un vértice de valencia 2. Entonces, cada vértice de $Lk(x; |K|)$ tiene valencia par y, por la misma razón que en el caso 2, $Lk(x; |K|)$ es conexo, con lo cual, es un grafo euleriano.

Si x es un nodo, x es cara de varios 1-símplices de valencia mayor que 2 y, eventualmente, de algunos 1-símplices de valencia 2. Al igual que en el caso 2, $Lk(x; |K|)$ es un grafo conexo. Para cada 1-símplice incidente en x con valencia mayor que 2 se puede razonar como en el caso en que x es singular de línea, obteniéndose un subgrafo de $Lk(x; |K|)$ con todos sus vértices de valencia par. En conclusión, todos los vértices del link de x son de valencia par y éste es un grafo euleriano. \square

Las condiciones anteriores no son suficientes. La Figura 1.2 muestra un ejemplo de 2-complejo en el que todos los links son grafos eulerianos pero no todos tienen característica de Euler par.

Según se ha visto en la prueba de la Proposición 1.3.4 (caso 2), una condición necesaria para que un 2-complejo finito sea euleriano es que éste tenga

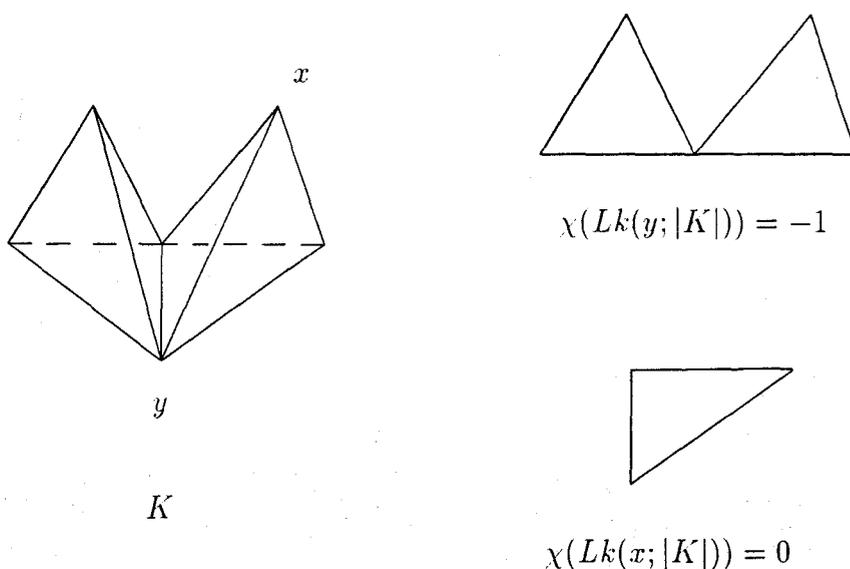


Figura 1.2: 2-Complejo no euleriano con todos sus links eulerianos.

todos sus 1-símplices de valencia par. Sin embargo, esta condición no es suficiente, como se puede comprobar con la Figura 1.2, en la que se da un 2-complejo no euleriano y con todos sus 1-símplices de valencia par. Entonces, conviene dar la siguiente definición:

Definición 1.3.5 Se dice que un 2-complejo es *Par* si tiene todos sus 1-símplices de valencia par.

Se puede enunciar el resultado siguiente:

Corolario 1.3.6 Todo 2-complejo euleriano, finito y puro es un 2-complejo par.

Obsérvese que esto también se puede demostrar a partir de la propiedad probada por Akin en [3] que afirma que si K es un 2-complejo de Euler finito, entonces el subcomplejo $C_i(K) = \sum \sigma_j^i$ (suma formal de i -símplices de K) es un ciclo, para $i = 1, 2$. Esto quiere decir, según la terminología recogida en [39], que $C_2(K)$ tiene borde nulo, donde el borde viene definido por:

$\partial C_2(K) = \sum [\sigma_i^2 : \sigma_j^1] \sigma_j^1$, siendo $[\sigma_i^2 : \sigma_j^1] = 0$ si los símplices no son incidentes y $[\sigma_i^2 : \sigma_j^1] = \epsilon$ si σ_i^2 y σ_j^1 son incidentes según la orientación $\epsilon = +1, -1$.

Por tanto, para que $\partial C_2(K) = 0$, todo 1-símplice debe ser cara de un número par de 2-símplices de K .

1.4 El Proceso de Separación de Símplices

Esta sección está dedicada a probar que a partir de cualquier 2-complejo K que tenga 1-símplices de valencia mayor que 2, es posible encontrar otro 2-complejo con todas sus aristas de valencia menor o igual que 2, esto es, una 2-seudovariedad. Asimismo, se demuestra la existencia de una aplicación simplicial entre ambos complejos. Como caso particular, se puede considerar un 2-complejo par y obtener una 2-seudovariedad cerrada. De este modo, se consigue una codificación del 2-complejo mediante un par formado por la 2-seudovariedad y la aplicación simplicial entre ambos.

En primer lugar, se describirá el proceso por el cual se construye, a partir de un 2-complejo K con un 1-símplice de valencia mayor que 2, otro 2-complejo en el que todos los 1-símplices tienen valencia menor o igual que 2 (y que no es homeomorfo a K). El proceso que proporciona tal 2-complejo se llama *Separación de Símplices*. Sea μ un 1-símplice de K tal que $val(\mu) = h \geq 3$. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h$ los 2-símplices de K que comparten μ . Se distinguirán dos casos según sea h par o impar.

A grandes rasgos, el método consiste en emparejar 2-símplices que contienen a μ como cara y subdividirlos para mantener la estructura de 2-complejo simplicial aunque no se requiere que el 2-complejo resultante sea homeomorfo al inicial. La subdivisión baricéntrica es la más usual, pero con ella se añaden cinco 2-símplices, seis 1-símplices y un 0-símplice por cada 2-símplice que se subdivide en el complejo de partida. Por tanto, si se quiere aumentar en el mínimo posible el número de símplices del complejo K , basta hacer una subdivisión por la mediana de algunos 2-símplices no siendo necesario subdividir $\sigma_{h-1} \cdot \sigma_h$ en el caso par ni σ_h en el caso impar. Esta forma de subdividir es un caso particular de la denominada *división de facetas* que aparece en la literatura (“Facet Splitting” en [9], por ejemplo).

El proceso de separación de símplices se describe como sigue, atendiendo

a los casos que se pueden presentar.

Caso 1: h es un número par

Se considera la subdivisión de σ_i ($i = 1, 2, \dots, h - 2$) usando su mediana sobre μ . A continuación se crean nuevos 1-símplices, μ_1, μ_2 y nuevos 2-símplices $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{(h-2)1}, \sigma_{(h-2)2}$, mientras que $\sigma_{(h-1)}$ y σ_h tienen a μ como cara común. Si $\mu = \{u_1, u_2\}$, siendo u_1 y u_2 sus 0-símplices cara, cada μ_i comparte con μ el 0-símplice u_i mientras que μ_1 y μ_2 tienen otro 0-símplice en común. La Figura 1.3 muestra este proceso para $h = 6$.

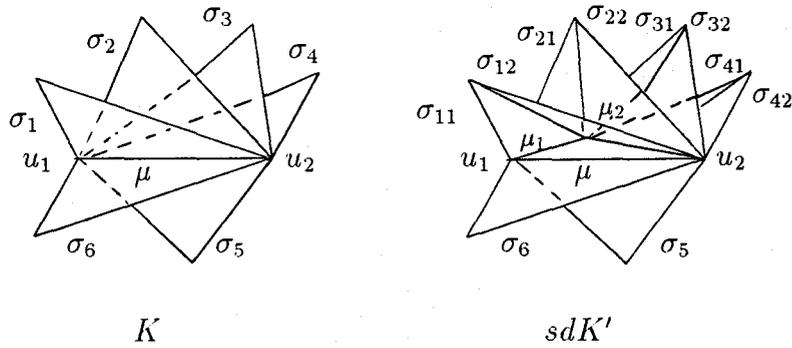


Figura 1.3: Subdivisión y separación de 6 2-símplices que comparten un 1-símplice.

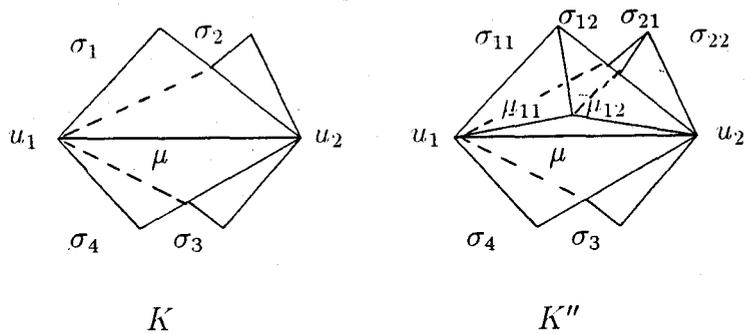


Figura 1.4: Los nuevos 1-símplices μ_{11} y μ_{12} tienen valencia 2.

En el paso siguiente se considera cada 4-upla

$$\{\sigma_{(2i-1)1}, \sigma_{(2i-1)2}, \sigma_{(2i)1}, \sigma_{(2i)2}\},$$

para $i = 1, 2, \dots, h/2 - 1$ y el par de 1-símplices $\{\mu_1, \mu_2\}$ se reemplaza por nuevos pares $\{\mu_{(2i-1)1}, \mu_{(2i-1)2}\}$ que se cortan en un 0-símplice. Además, estos 1-símplices comparten también uno de sus 0-símplices cara con μ . Concretamente, cada $\mu_{(2i-1)1}$ tiene a u_1 en común con μ y $\mu_{(2i-1)2}$ comparte con μ el vértice u_2 . Esto puede verse en la Figura 1.4.

Caso 2: h es un número impar

De manera análoga al caso anterior se considera la subdivisión de σ_i ($i = 1, 2, \dots, h-1$) usando su mediana sobre μ y se crean nuevos 1-símplices, μ_1, μ_2 y nuevos 2-símplices $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{(h-1)1}, \sigma_{(h-1)2}$, mientras que σ_h mantiene a μ como cara. La Figura 1.5 muestra este proceso para $h = 5$.

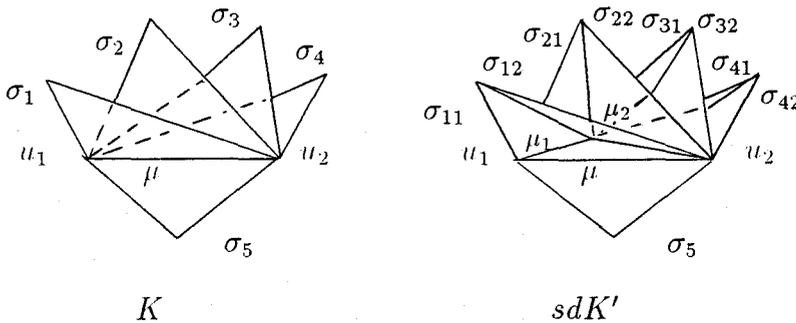


Figura 1.5: Subdivisión y separación de 5 2-símplices que comparten un 1-símplice.

Al considerar cada 4-upla

$$\{\sigma_{(2i-1)1}, \sigma_{(2i-1)2}, \sigma_{(2i)1}, \sigma_{(2i)2}\},$$

para $i = 1, 2, \dots, (h-1)/2 - 1$ y reemplazar el par de 1-símplices $\{\mu_1, \mu_2\}$ por los nuevos pares $\{\mu_{(2i-1)1}, \mu_{(2i-1)2}\}$, se obtiene un nuevo 2-complejo en el que estos 1-símplices comparten aún uno de sus 0-símplices cara con μ , como se ha visto en el caso 1 y puede comprobarse en la Figura 1.6 para $h = 3$.

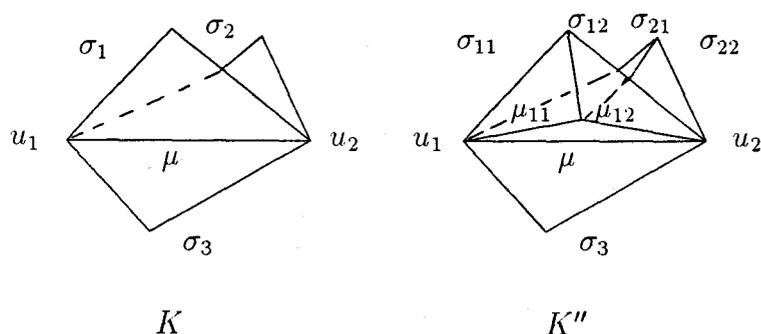


Figura 1.6: Aparecen nuevos 1-símplices con valencia 2, μ_{11} y μ_{12} , y una copia de μ con valencia 1.

Después de esta descripción, es posible enunciar el resultado principal de esta sección.

Proposición 1.4.1 *Sea K un 2-complejo con un 1-símplice de valencia mayor que 2. Existen una 2-seudovariiedad K'' y una aplicación simplicial sobreyectiva*

$$\varphi : |K''| \longrightarrow |K|$$

tal que

$$\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\sigma)) \longrightarrow \text{int}(\sigma)$$

es un homeomorfismo para cualquier 2-símplice $\sigma \in K$.

Demostración: Sea $\mu \in K$ el 1-símplice de valencia $h \geq 3$. Mediante el proceso de separación de símplices se construyen una separación de K , K' , una subdivisión de este 2-complejo, sdK' y un nuevo 2-complejo K'' en el que el 1-símplice μ se ha sustituido por otros de valencia menor o igual que dos, apareciendo así nuevos símplices.

Si se considera el 2-complejo K'' , se observa que cada 1-símplice ν'' de K'' proviene de un 1-símplice $\mu' \in sdK'$ que se ha obtenido de una de las formas siguientes:

1. μ' es "copia" de un 1-símplice $\gamma \in K$ de valencia menor o igual que 2.

2. μ' es "copia" de μ .
3. μ' proviene de la separación de μ , es decir, μ' es uno de los 1-símplices μ_{11} ó μ_{12} .

Por tanto, la aplicación $\varphi_1 : |K''| \longrightarrow |sdK'|$ dada por $\varphi_1(\nu'') = \mu'$, según el caso que corresponda, es simplicial y sobreyectiva. Además, la restricción al interior de cada 2-símplice es claramente un homeomorfismo.

También se puede dar otra aplicación simplicial con las mismas propiedades que φ_1 :

$$\varphi_2 : |sdK'| \longrightarrow |K|$$

$$\varphi_2(\mu') = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu' \text{ proviene de la separación de } \mu \\ \gamma & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, la composición de ambas es la aplicación buscada:

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : |K''| \longrightarrow |K|$$

□

Si K es un 2-complejo con más aristas de valencia mayor que 2, se puede repetir el método detallado para cada una de ellas, de manera inductiva. Así se obtiene una 2-seudovariedad.

En particular, si K es par, el resultado será una 2-seudovariedad cerrada, K'' . Al par (K'', φ) se le llama *Par de Triangulación asociado a K* y se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.2 *Cualquier 2-complejo par tiene asociado un Par de Triangulación.*

1.5 El Proceso de Desingularización

En esta sección se describirá un método por el cual se "eliminan" puntos singulares en una 2-seudovariedad construyendo para ello una 2-variedad y una

aplicación simplicial sobreyectiva entre ambas que es un homeomorfismo salvo en los puntos singulares. A este proceso se le llama *Desingularización* y al par formado por la 2-variedad y el morfismo, *Par de Desingularización*. Este par permite codificar la 2-seudovariedad de partida.

Tras la aplicación del proceso de separación de símlices sobre un 2-complejo K con 1-símlices de valencia mayor que 2 se obtiene un 2-complejo K'' con "todos o casi todos" sus puntos regulares. Es decir, el conjunto de puntos singulares es vacío o finito, pues provienen de un número finito de 1-símlices formados por puntos singulares de línea. Según se ha descrito en la Sección 1.2 y dado que todos los 1-símlices de K'' tienen valencia menor o igual que 2, los puntos singulares de K'' sólo pueden ser de tipo cónico. Si K tiene puntos singulares de línea o nodos, éstos no aparecen en el nuevo 2-complejo. Es más, si en K'' aparecen puntos singulares, éstos provienen de puntos singulares de K y cada punto regular de K da lugar a un punto regular en K'' .

En el caso particular de que K sea un 2-complejo par, K'' es una 2-seudovariedad con un conjunto finito (tal vez vacío) de puntos singulares cónicos. Por definición, si p es un punto cónico, existe un entorno euclídeo abierto de p donde todos los puntos, salvo p , son regulares.

De forma análoga a como se hizo para el proceso de separación de símlices, sólo es necesario hacer la descripción del proceso de desingularización para el caso en que la 2-seudovariedad tenga un único punto singular. Si hay que desingularizar una 2-seudovariedad con más puntos singulares, como éstos forman un conjunto finito, bastará aplicar una inducción.

Antes de entrar en detalles, hay que recordár que una 2-seudovariedad no es más que un 2-complejo con todos sus 1-símlices de valencia 2 y en el que sus únicos puntos singulares son de tipo cónico. De este modo, si K es una 2-seudovariedad con un punto cónico p , en [42], Lu demuestra que cualquier entorno (euclídeo) de p es homeomorfo a una familia finita de discos circulares con los centros identificados. El borde de dicho entorno es homeomorfo a una familia finita de circunferencias disjuntas. Además, da un teorema de caracterización de 2-seudovariedades con un único punto singular que será básico en el desarrollo del proceso de desingularización.

Teorema 1.5.1 ([42]) *Toda 2-seudovariiedad con un punto singular es suma de un número finito de 2-variedades mediante identificación de un conjunto finito de puntos de éstas.*

Es decir, una 2-seudovariiedad M con un punto singular es homeomorfa al espacio cociente de la unión de un número finito de 2-variedades $\{M_i\}_{i=1}^r$ sobre un conjunto finito de puntos $A \subset \bigcup_{i=1}^r M_i$:

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^r M_i \right) / A.$$

En pocas palabras, desingularizar consiste en eliminar el punto singular de la 2-seudovariiedad y hacer la suma conexa entre el espacio obtenido (la seudovariiedad con agujeros) y una esfera con igual número de agujeros. Esto queda reflejado en la Figura 1.7.

Sean p_{ij} ($j = 1, 2, \dots, m_i$) los puntos de $M_i \cap A$. Para cada p_{ij} , puede considerarse en M_i un entorno homeomorfo a un disco abierto, V_{ij} . Estos entornos pueden escogerse prescindiendo de la estructura de 2-complejo pues su importancia radica en que cualquiera de ellos es homeomorfo a un disco de \mathbf{R}^2 y no en su estructura simplicial. Así pues, a partir de este momento se trabajará con los espacios topológicos subyacentes a los 2-complejos que aparezcan.

A continuación, se toman los discos abiertos sobre la esfera $D_{ij} \subseteq S^2$, para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, m_i$ que serán eliminados, obteniéndose

$$Q = S^2 \setminus \bigcup_{i,j} D_{ij}$$

(una esfera con un agujero por cada entorno V_{ij}). Sobre cada 2-variedad M_i también se eliminan los entornos abiertos V_{ij} :

$$S = \bigsqcup_{i=1}^r (M_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{ij}).$$

Identificando el borde de D_{ij} sobre Q con el de V_{ij} sobre M_i . ($i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, m_i$), se obtiene una 2-variedad que es la suma conexa de Q y S .

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, se va a probar un lema que garantiza la existencia de una aplicación simplicial entre una corona

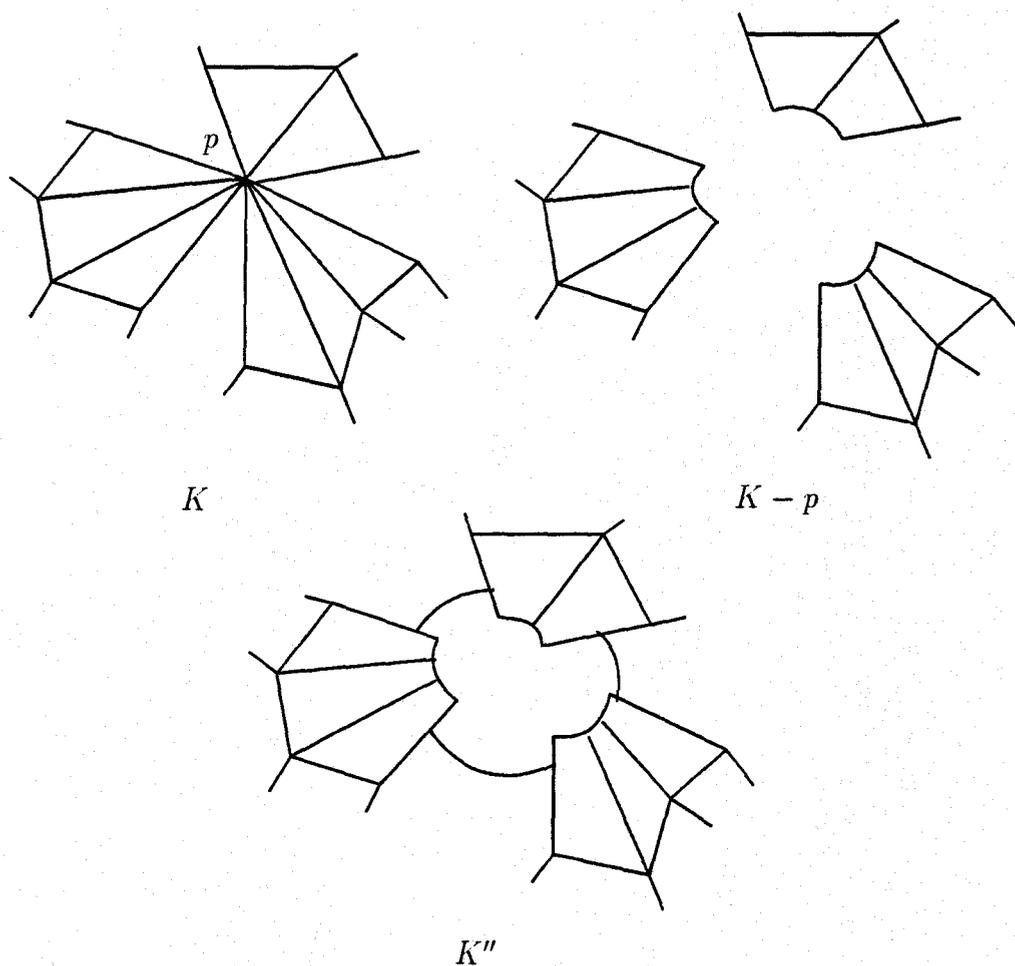


Figura 1.7: Idea de la desingularización para un punto singular aislado.

circular triangulada y un disco triangulado y que será utilizado en la “reconstrucción” del 2-complejo a partir de la variedad obtenida tras la desingularización.

Se dice que una corona circular, con circunferencias C y c como frontera, está *triangulada en forma de estrella* si tiene un número par de triángulos $T_1, T_2, \dots, T_n, t_1, t_2, \dots, t_n$ dispuestos de modo que:

- Cada T_i tiene un lado sobre la circunferencia C y el vértice opuesto sobre c , la unión de estos lados cubren totalmente a C y dos triángulos T_i y T_j no tienen aristas comunes.
- Cada t_i tiene un lado sobre la circunferencia c y el vértice opuesto sobre C y es adyacente a T_i y a T_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ y t_n es adyacente a T_n y T_1 .

De forma análoga se puede decir que un disco tiene una *triangulación estrella* si tiene n triángulos dispuestos de tal modo que cada triángulo tiene un lado sobre la circunferencia frontera del disco y el vértice opuesto sobre el centro del disco y los triángulos son adyacentes dos a dos. La Figura 1.8 incluye un ejemplo para $n = 5$ sobre una corona circular y sobre un disco.

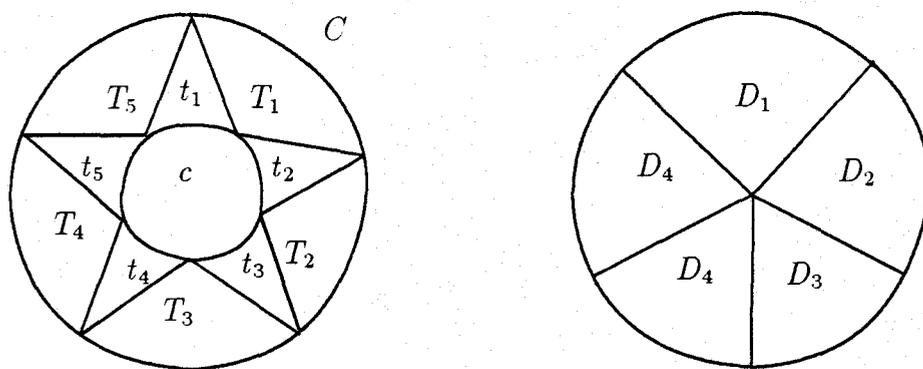


Figura 1.8: *Triangulaciones estrellas sobre una corona circular y un disco.*

Lema 1.5.2 *Existe una aplicación simplicial sobreyectiva entre una corona circular triangulada en forma de estrella con $2n$ triángulos y un disco triangulado en forma de estrella con n triángulos y tal que la circunferencia menor de la corona tiene como imagen un punto interior del disco.*

Demostración: Sean $T_1, T_2, \dots, T_n, t_1, t_2, \dots, t_n$ los triángulos sobre la corona circular, Γ y sean D_1, D_2, \dots, D_n los triángulos sobre el disco Δ . La aplicación simplicial que verifica el enunciado está definida por:

$$\psi : \Gamma \longrightarrow \Delta$$

tal que

$$\begin{cases} \psi(T_i) = D_i & \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ \psi(t_i) = D_i \cap D_{i+1} & \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \psi(t_n) = D_n \cap D_1 \end{cases}$$

□

Proposición 1.5.3 *Si K es una 2-seudovariiedad con un punto singular, existen una 2-variedad M y un morfismo sobreyectivo*

$$\varphi : M \longrightarrow |K|$$

tal que

$$\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\sigma)) \longrightarrow \text{int}(\sigma)$$

es un homeomorfismo para cualquier 2-símplice $\sigma \in K$.

Demostración: Sea p el punto singular aislado de K . Mediante el proceso de desingularización se puede construir una 2-variedad M tal como se ha detallado más arriba. Conocida dicha variedad es posible describir el proceso inverso para reconstruir de nuevo la 2-seudovariiedad de partida K . Para ello, será necesario dar una triangulación “especial” sobre M .

La triangulación sobre cada variedad M_i queda inducida por la de K ; esto es posible si se consideran los entornos V_{ij} que respetan la estructura simplicial.

Para $Q = S^2 \setminus \bigcup_{i,j} D_{ij}$ puede escogerse una triangulación de modo que sobre el borde de cada D_{ij} tenga tantos 1-símplices como triángulos aparecen en

el correspondiente V_{ij} . Esto se consigue mediante la triangulación estrella de una corona circular C_{ij} sobre Q cuyo círculo interior coincida con el borde de D_{ij} . A los 2-símplices que tengan un 1-símplice sobre dicho borde se les llama *copias* de los de $N(p; |K|)$. Los 2-símplices restantes se toman de cualquier forma siempre que la estructura que resulte sea coherente con las triangulaciones de las coronas.

La Figura 1.9 muestra este procedimiento para el caso en que $N(p; |K|)$ esté formado por dos discos.

En virtud del Lema 1.5.2, para cada corona circular C_{ij} existe una aplicación simplicial ψ_{ij} que transforma dicha corona en un disco sobre $S^2 - Q$.

$$\varphi : M \longrightarrow |K|$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in Q - (\cup_{ij} C_{ij}) \\ x & \text{si } x \in M - Q \\ \psi_{ij}(x) & \text{si } x \in C_{ij} \end{cases}.$$

Además, si σ es un 2-símplice de K , cualquier punto interior de σ se transforma, por el proceso de desingularización, en un punto interior de un 2-símplice de $M - Q$ y recíprocamente. Luego $\text{int}(\sigma)$ y $\varphi^{-1}(\text{int}(\sigma))$ son homeomorfos mediante φ . \square

Por último, si K es una 2-seudovariiedad con más de un punto singular aislado, por ejemplo $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$, el proceso descrito puede aplicarse de manera inductiva eliminando uno a uno los puntos singulares de K .

Razonando de modo análogo al caso de un único punto singular, K puede considerarse como el espacio cociente de una unión de 2-seudovariiedades sobre un subconjunto finito de puntos de éstas. En un primer paso se eliminan entornos abiertos de q^1 sobre K escogidos de manera que éstos no contengan a otros puntos singulares. Luego se elimina el mismo número de discos abiertos sobre la esfera y se realiza la suma conexa de los espacios resultantes. Este espacio contiene $n - 1$ puntos singulares cónicos. Aplicando el mismo proceso para el punto siguiente, q^2 , se obtiene un 2-complejo con $n - 2$ puntos singulares. En pasos sucesivos se eliminan los demás puntos singulares. De este modo, tras eliminar el punto q^{n-1} se tiene una 2-seudovariiedad con un solo punto singular a la que se aplica el proceso de desingularización para obtener la 2-variedad buscada M . Este proceso se recoge en el siguiente corolario:

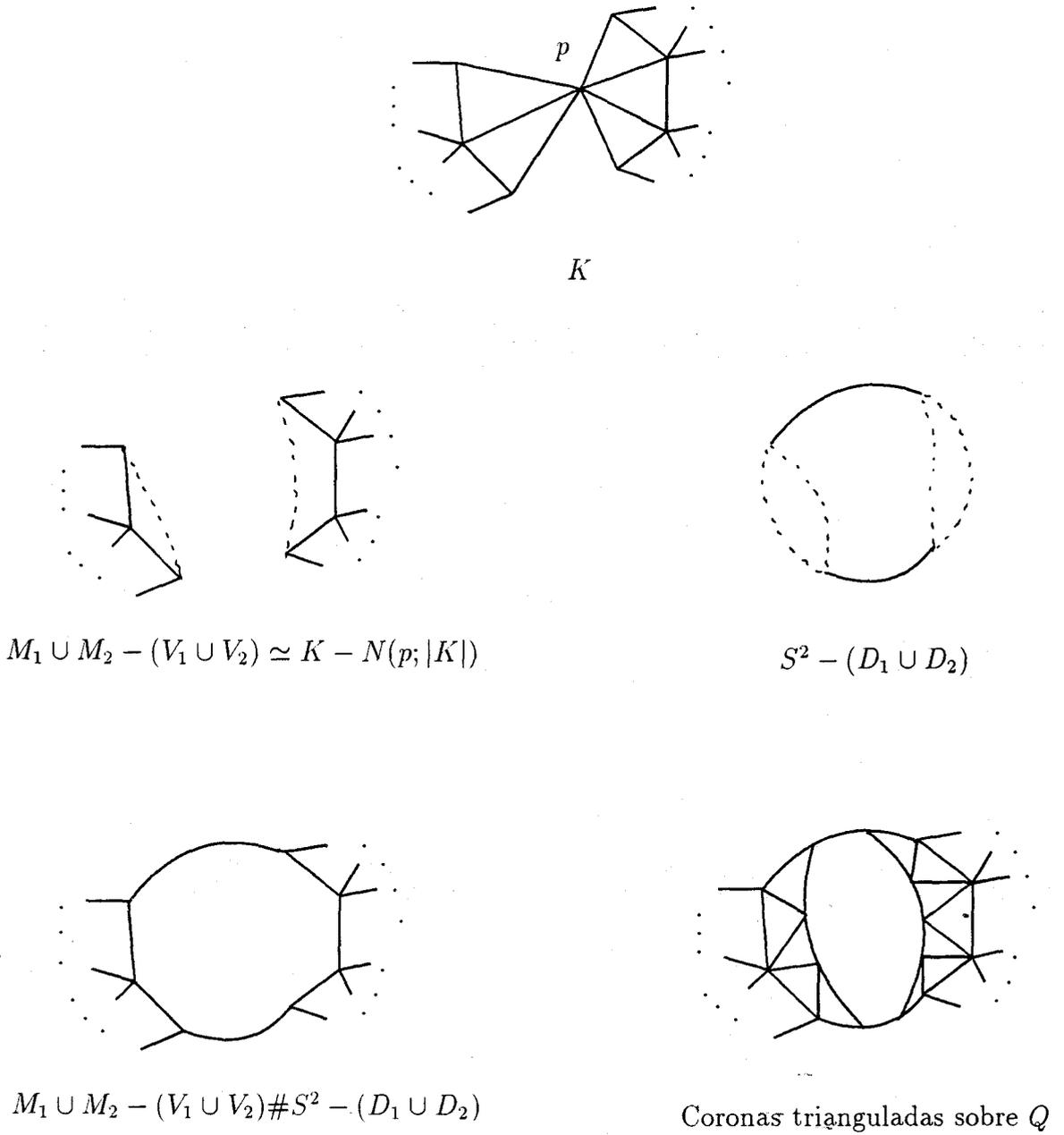


Figura 1.9: Desingularización de K y triangulación sobre M .

Corolario 1.5.4 *Si K es una 2-seudovariiedad, existe una 2-variedad M y una aplicación $\varphi : M \rightarrow |K|$ tal que $\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\sigma)) \rightarrow \text{int}(\sigma)$ es un homeomorfismo para cualquier 2-símplice $\sigma \in K$.*

En todo lo que sigue y con la notación anterior, al par (M, φ) se le llamará *Par de Desingularización asociado a K* .

1.6 Teorema de Caracterización de 2-Complejos Pares

Tal y como se ha detallado en la Sección 1.1, el Teorema 1.1.1, afirma que los grafos eulerianos se caracterizan por tener todos sus vértices de valencia par, pero además, por la existencia de una partición del conjunto de aristas en ciclos. Esta partición proporciona un morfismo sobreyectivo entre la circunferencia y el grafo de forma que es homeomorfismo sobre los interiores de las aristas ([56]).

En esta sección se prueba que existen una 2-variedad conexa y cerrada y un morfismo entre ésta y el 2-complejo tal que es un homeomorfismo sobre los interiores de los 2-símplices. Dicha propiedad es una condición necesaria y suficiente para que el 2-complejo sea par.

Teorema 1.6.1 (Caracterización de 2-complejos pares)

Cualquier 2-complejo simplicial conexo, finito, puro y par tiene asociado un par de desingularización.

Demostración: Si K tiene todos los 1-símplices de valencia par, mediante separación de símplices se obtiene un par de triangulación (K', φ) donde K' es una 2-seudovariiedad y φ es el morfismo dados en el Corolario 1.4.2. Si K' no tiene puntos singulares, entonces $K' = M$ y (M, φ) es el par de desingularización asociado a K . En otro caso, mediante el proceso de desingularización se puede obtener la 2-variedad M . Sea φ_1 el morfismo dado en el Corolario 1.4.2 que actúa entre K' y K y sea φ_2 el morfismo dado en el Corolario 1.5.4 que actúa entre M

y K' . La composición de ambos morfismos, proporciona el buscado

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 : M \longrightarrow |K|,$$

tal que $\varphi^{-1}(\text{int}(\sigma))$ es homeomorfo a $\text{int}(\sigma)$ para todo 2-símplice $\sigma \in K$. \square

Tanto la variedad M como la aplicación φ del teorema anterior se han construido a partir del 2-complejo par K . Según el desarrollo de las secciones anteriores, la aplicación φ actúa unas veces como aplicación cociente y otras como la identidad, dependiendo de la estructura de K , de la elección de las parejas de 2-símplices en la desingularización y de la 2-seudovariedad obtenida K'' . En cualquier caso, M es una 2-variedad triangulada y la aplicación φ es simplicial.

Un 1-símplice de K tiene como contraimagen en M bien un 2-símplice, bien un número par de 1-símplices o bien él mismo. Como M tiene todos los 1-símplices de valencia dos, en K todos los 1-símplices tienen valencia par. Se puede decir que φ no cambia la paridad de las valencias de los 1-símplices de M . En conclusión, K es par y la condición dada en el Teorema 1.6.1 es también suficiente una vez que se conocen la 2-variedad M y la aplicación φ .

En [3], Akin prueba que para todo espacio compacto de Euler X , existe una unión disjunta Y de variedades de dimensión menor que la de X y existe un morfismo $r : Y \longrightarrow X$ que es cobordante con 1_X . Se entiende que 1_X es la aplicación identidad sobre X y se considera la definición de variedades cobordantes recogida en [51]:

Si M_1 y M_2 son variedades n -dimensionales y $f_i : M_i \longrightarrow X$ son morfismos, $i = 1, 2$, se dice que f_1 y f_2 son cobordantes si existe un morfismo $g : W \longrightarrow X$, donde W es una variedad con borde tal que $\partial W = M_1 \cup M_2$ y $g|_{M_i} = f_i$ para $i = 1, 2$.

Con el Teorema 1.6.1 se mejora el resultado de Akin para el caso de los 2-complejos, pues la variedad M es conexa y tiene la misma dimensión que el complejo de Euler K (que también es par).

Para finalizar este capítulo, hay que destacar que la 2-variedad M , construida mediante la separación de símplices y posterior desingularización de un 2-complejo par K , no es única, en general. En principio, M depende de la

elección de las parejas de 2-símplices que se separan. La Figura 1.10 presenta dos posibilidades para la 2-variedad M , el Toro y la Esfera, que no son homeomorfas.

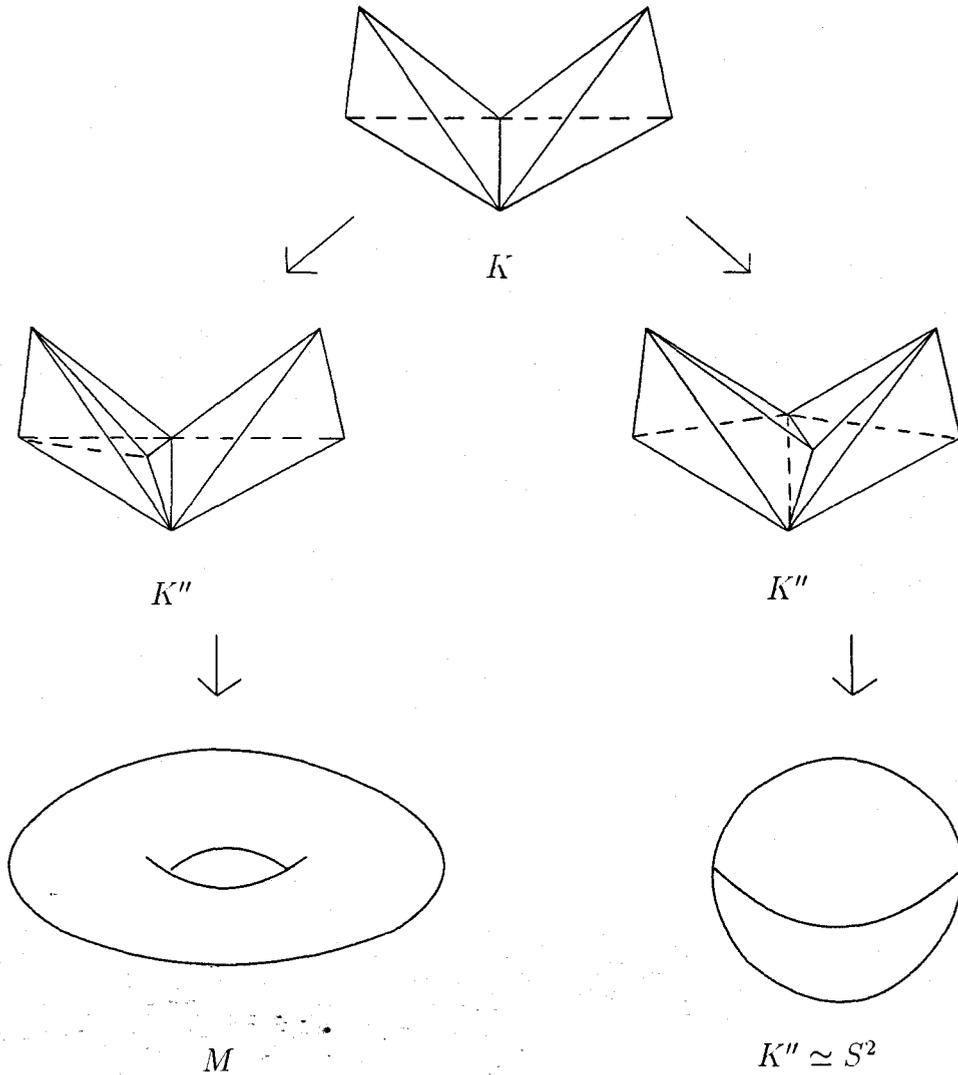


Figura 1.10: La 2-variedad depende de la elección de las parejas de 2-símplices en K .

Por otra parte, también es posible que 2-complejos pares homeomorfos den lugar a 2-variedades no homeomorfas. Así, el 2-complejo de la Figura 1.11 es homeomorfo al de la Figura 1.10 y las variedades que se obtienen no siempre son homeomorfas, como también puede comprobarse con la Figura 1.12.

No obstante, en el Capítulo 4 se demostrará que hay elecciones de 2-

símplices, en el proceso de separación de símplices, que permiten obtener la 2-seudovariiedad K'' del par de triangulación con el mínimo número de puntos singulares. A partir de K'' se obtendrá la 2-variedad M del par de desingularización con género menor. Para la Figura 1.10 sería la Esfera y para la Figura 1.11 sería el Toro.

Para terminar, hay que aclarar que son posibles otras formas de desingularizar un 2-complejo. Un ejemplo es la que describen Shawe-Taylor y Pisanski en [52], que no garantiza que la 2-variedad final sea conexa y cerrada, aunque puede ser unión disconexa de 2-variedades con género menor que las que se obtienen mediante el proceso de desingularización descrito en este capítulo.

1.7 Conclusiones y Problemas Abiertos

En este capítulo se ha analizado la propiedad de “ser euleriano” sobre complejos simpliciales finitos de dimensiones 1 y 2. Partiendo de las definiciones existentes en la literatura, se han estudiado las características fundamentales de los 2-complejos de Euler, comparándolas con las de los grafos eulerianos.

Si bien cualquier 2-complejo de Euler tiene todos sus 1-símplices de valencia par (según se prueba en la Proposición 1.3.4), la Figura 1.2 muestra que existen 2-complejos que verifican esta propiedad y no son eulerianos. Se introduce entonces la noción de 2-complejo par definiéndolo como aquel que tiene todos sus 1-símplices de valencia par. Esta nueva clase de 2-complejos contiene estrictamente a los eulerianos.

En pocas palabras, se puede decir que la conclusión más importante a la que se llega en este capítulo, es que la propiedad de “ser euleriano” no significa lo mismo en dimensión 1 que en dimensión 2.

Al profundizar en el estudio de los 2-complejos pares se demuestra que existe un método para codificarlos mediante la construcción de un par de triangulación primero y un par de desingularización después. Se obtiene así una caracterización análoga a la conocida para grafos eulerianos que garantiza la existencia de un morfismo entre la circunferencia (única 1-variedad conexa y cerrada) y el grafo que es homeomorfismo, salvo en un conjunto finito de puntos o, dicho de

otro modo, restringido al interior de las aristas del grafo es homeomorfismo. En el caso de dimensión 2, se obtiene la existencia de una 2-variedad compacta y una aplicación simplicial entre ésta y el 2-complejo tal que, restringida al interior de cada 2-símplice, es homeomorfismo.

Dar el par de desingularización asociado a un 2-complejo par es también una manera de codificar un 2-complejo euleriano. Sin embargo, de momento, no se ha encontrado una caracterización combinatoria de los 2-complejos de Euler distinta de la propia definición, problema interesante cuya resolución queda pendiente.

Por otra parte, recuérdese que en la definición de complejo de Euler que se ha manejado se requiere que éste sea localmente finito, aunque no se le exige la finitud global (ver [3]). Hay estudios sobre grafos infinitos, localmente finitos, que tienen la propiedad de ser euleriano, como son los estudios de Erdős, Grünwald y Weiszfeld ([21]), de Erdős, Grünwald y Vázasz ([20]), el que aparece en el texto de Ore ([47]), el trabajo de Boza, Diánez y Márquez (en [17]) y el de recopilación de Thomassen ([54]). La continuación natural de estos trabajos será estudiar “cómo son” los 2-complejos de Euler (y más en general, los 2-complejos pares) infinitos, localmente finitos.

Ya se han analizado diferencias y similitudes entre complejos de Euler de bajas dimensiones. Otra vía de investigación que se abre es la del estudio de los complejos de Euler de dimensión superior, buscando propiedades de los 2-complejos eulerianos que se verifiquen en complejos de dimensión $n > 2$. De manera natural, se define n -complejo par como aquel que tiene todos sus $(n-1)$ -símplices de valencia par. Entonces, es lógico abordar un estudio análogo al que se da en este capítulo, en dimensión genérica $n > 2$.

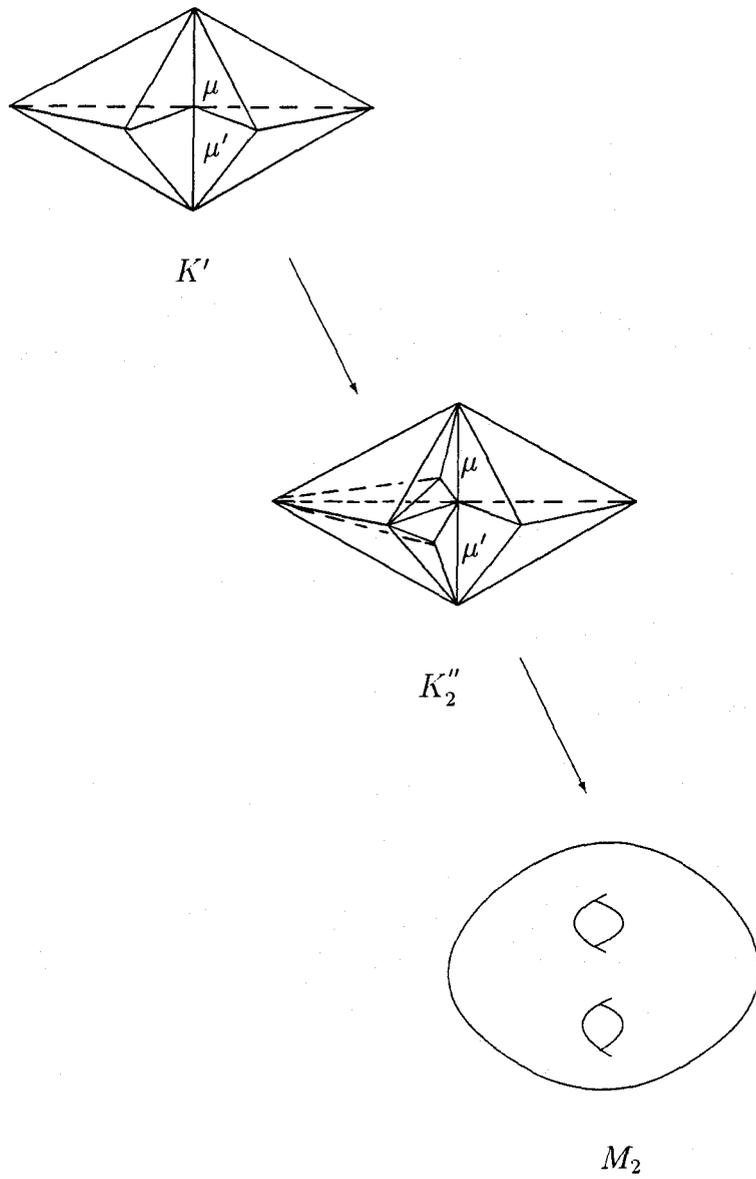


Figura 1.11: La 2-variedad M depende de la estructura simplicial.

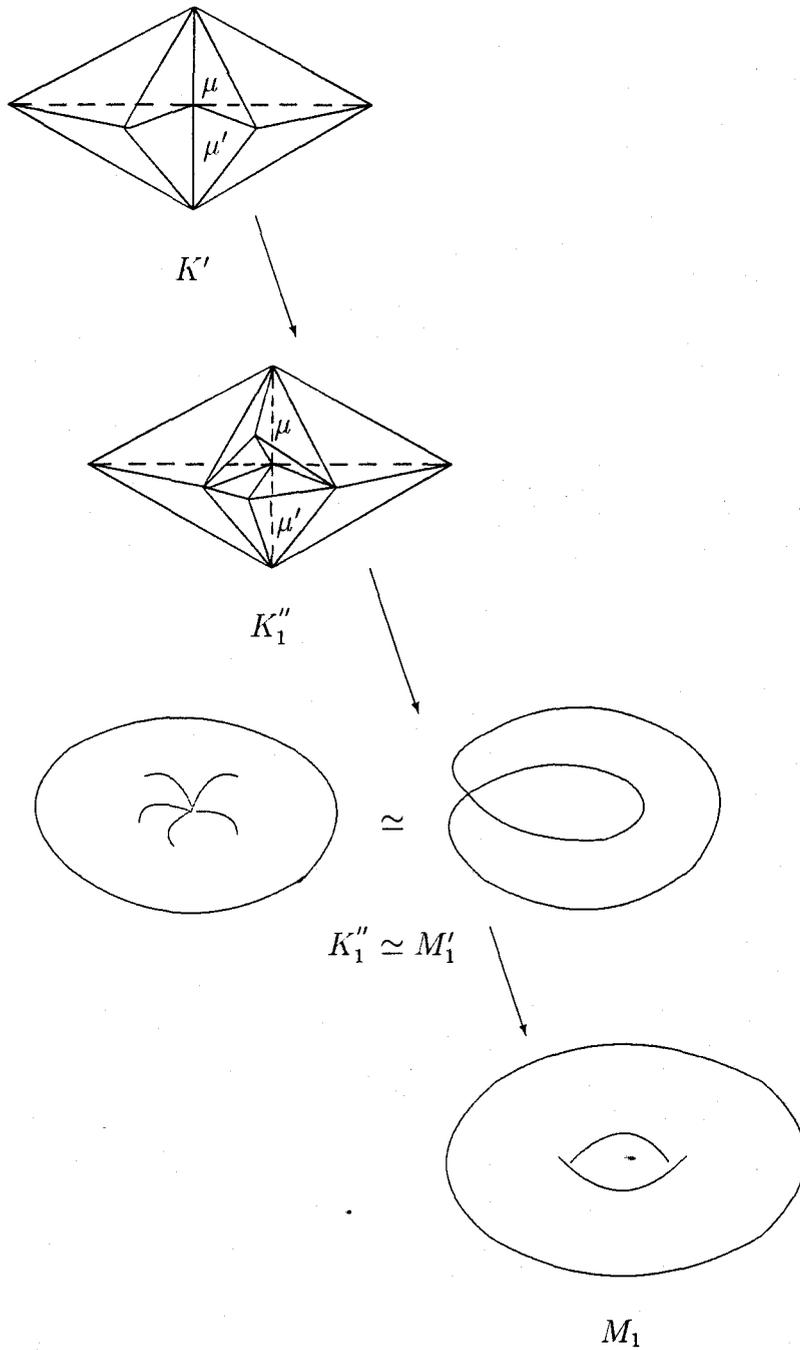


Figura 1.12: La 2-variedad M depende de la estructura simplicial y de la elección de las parejas de 2-símplices en K .

Capítulo 2

Algoritmos sobre 2-Complejos Pares

En este capítulo se da un algoritmo eficiente que permite reconocer si un 2-complejo es par o no y que proporciona además la lista de 1-símplices con valencia mayor que dos. Utilizando dicha lista junto con la de 2-símplices del 2-complejo, se puede construir la 2-seudovariiedad de un par de triangulación asociado a éste mediante el Algoritmo de Separación que aquí se da. Por último, el Algoritmo de Eliminación proporciona la 2-variedad de un par de desingularización asociado al 2-complejo inicial.

2.1 Introducción

El objetivo principal de este capítulo es dar un tratamiento algorítmico a los problemas resueltos de forma teórica en el Capítulo 1.

Es un hecho que en la literatura no se encuentran fácilmente monografías sobre 2-complejos desde el punto de vista algorítmico y los estudios que aparecen suelen ser parciales y aislados. Esto es un estímulo para emprender la tarea de elaborar algoritmos que den respuestas a las mismas preguntas que se plantearon en el Capítulo 1 ampliando, por otra parte, la bibliografía existente con esta aportación.

Como ya se ha señalado en la Sección 1.7, no se tiene aun una carac-

terización combinatoria de los 2-complejos eulerianos. Es por esto que intentar dar algoritmos que trabajen directamente con la definición topológica dada por Akin en [3] y recogida en la Definición 1.3.1 resulta, de momento una tarea poco fructífera.

Sin embargo, para la clase más amplia de los 2-complejos pares se han dado una definición combinatoria (Definición 1.3.5) y un teorema (Teorema 1.6.1) gracias a los cuales se obtiene un método para clasificarlos. Primero se codifican mediante un par de triangulación (Corolario 1.4.2) y después mediante un par de desingularización asociado al 2-complejo (Sección 1.5). Entonces, resulta interesante elaborar algoritmos que construyan la 2-seudovariedad y la 2-variedad de tales pares.

En primer lugar (en la Sección 2.2), se da un algoritmo que permite identificar si un 2-complejo es par o no. Esta vez lo natural funciona. Es decir: basta aplicar la definición y contar las valencias de los 1-símplices del 2-complejo para saber si éste es par o no. Además, se puede diseñar este algoritmo de forma que se construyan simultáneamente las listas de 2-símplices que inciden en un 1-símplice. Si aparece un 1-símplice con valencia mayor que 2, la lista de 2-símplices que lo comparten se utilizará como dato de entrada en algoritmos que se aplicarán en etapas posteriores.

A continuación (en la Sección 2.3), se da un algoritmo eficiente que construye la 2-seudovariedad de un par de triangulación asociado al 2-complejo par. Esta construcción es posible gracias a que se mantiene la estructura simplicial a lo largo del proceso de separación de símplices descrito en la Sección 1.4.

Para finalizar (en la Sección 2.4), en virtud del Teorema 1.6.1, y utilizando el Algoritmo de Gross y Rosen (en [28]), se puede dar otro algoritmo eficiente que proporciona la 2-variedad de un par de desingularización asociado al 2-complejo par del que se parte. En líneas generales, se basa en el proceso de desingularización, aunque, como se podrá comprobar, la construcción de la variedad no es idéntica a la que se describe en dicho proceso.

Antes de entrar en el desarrollo propiamente dicho de este capítulo, hay que hacer algunas aclaraciones sobre la forma en que se introducen los datos del 2-complejo al que se va a aplicar alguno de los algoritmos. Siempre que se pueda trabajar con la información de los 2-símplices del 2-complejo, se tendrá una

estructura fácil de manejar por un ordenador. Entonces, podrán darse algoritmos que tomen como dato de entrada la lista de 2-símplices del 2-complejo que se vaya a analizar. Así, por ejemplo, la lista $\{v_1, v_2, v_3\}$ representa el 2-símplice cuyos vértices son los puntos v_1, v_2 , y v_3 de R^3 , que, a su vez, pueden expresarse según sus tres coordenadas cartesianas.

De este modo, se entiende que el ordenador que vaya a ejecutar los algoritmos aquí descritos es capaz de reconocer los datos en la forma que éstos se introducen, es decir, como listas de puntos del espacio tridimensional expresados mediante sus coordenadas cartesianas.

Los conceptos y resultados relativos a Algorítmica que se utilizarán aquí están recogidos en el Capítulo 0, en el libro de Aho, Hopcroft y Ullmann [2] y en el texto de Manber [43].

2.2 Algoritmo de identificación

En el Capítulo 1 se define 2-complejo simplicial K par como aquel que tiene todos sus 1-símplices de valencia par. Esta propiedad de tipo combinatorio permite construir un algoritmo que “cuenta” las valencias de todos los 1-símplices de K y que dé como respuesta “ K es par” o bien “ K no es par”.

En todo el capítulo, K será un 2-complejo con n 0-símplices, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y N 2-símplices: $C = \{\{v_i, v_j, v_k\}, i \neq j \neq k, i \neq k\}$.

El algoritmo siguiente toma como dato de entrada la lista C y da como salida la respuesta a la pregunta “¿Es K par?”. Para ello, se recorre la lista C y se introduce un contador para cada 1-símplice de K . A dicho contador se irá sumando 1 cada vez que tal 1-símplice aparezca como cara de un nuevo 2-símplice. Cuando se han considerado todos los elementos de C , cada contador alcanza un valor igual al número de 2-símplices que contienen al 1-símplice para el que ha sido creado, es decir, la valencia de tal 1-símplice en K . La lista B da las valencias de todos los 1-símplices de K según el orden en que han ido apareciendo al recorrer C . Para saber si K es par bastará comprobar la paridad de los elementos de B . El algoritmo queda descrito a continuación.

Algoritmo de Identificación

0. Leer la lista C .
 1. Construir la lista A de los 1-símplices de K .
 2. Para cada 2-símplice $\sigma \in C$:
 Construir la lista $a(\sigma)$ formada por los 3 1-símplices cara de σ .
 3. Para cada 1-símplice $\mu \in A$, construir la lista $f(\mu)$ formada por los 2-símplices que contienen a μ como cara:
 - 3.1. Iniciar $f(\mu) = \emptyset$, $c_\mu = 0$.
 - 3.2. Si $\mu \in a(\sigma)$, entonces hacer: $f(\mu) = f(\mu) \cup \{\sigma\}$ y $c_\mu = c_\mu + 1$.
 NOTA: Obsérvese que formar las listas $f(\mu)$ para cada μ requiere tiempo $O(N^2)$ pues para construir $f(\mu)$ para el 1-símplice μ es necesario recorrer la lista C , cuya longitud es N . Como hay $O(N)$ 1-símplices en A , el tiempo total será $O(N^2)$. Para evitar esto, se pueden construir simultáneamente todas las listas $f(\mu)$, así se requerirá un tiempo de ejecución de orden $O(N)$. Esto mismo se hace en [28].
 4. Dar la lista B de los valores finales de los contadores.
 - 4.1. Si todos los elementos de B son números pares, entonces K es par.
 - 4.2. Si algún elemento de B es impar, entonces K no es par.
 FIN.
-

Proposición 2.2.1 *Se puede detectar si un 2-complejo con N 2-símplices es par en tiempo óptimo $O(N)$.*

Demostración: Si el conjunto de 2-símplices de K tiene N elementos, la lista de 1-símplices de K dada por el Algoritmo de Identificación tiene, a lo más, $3N$ elementos. Entonces, construir la lista A requiere tiempo $O(N)$. Según se ha detallado al describir el algoritmo, las listas $f(\mu)$ se construyen simultáneamente. Así, el paso 3 requiere un tiempo de ejecución $O(N)$. El resto de las operaciones

del Algoritmo de Identificación son: crear la lista B y comprobar si en ella hay números impares. Todas son de complejidad $O(N)$ en el peor caso y, por tanto, no alteran el orden de complejidad total del Algoritmo de Identificación, que será $O(N)$. Es fácil ver que este algoritmo es eficiente pues todos los pasos se realizan en tiempo óptimo. \square

A partir del Algoritmo de Identificación se puede describir otro que, además de reconocer si un 2-complejo K tiene todos sus 1-símplices de valencia par, proporcione, como dato de salida, el conjunto ordenado de 1-símplices de valencia mayor que 2 y los 2-símplices que los contienen. Este nuevo algoritmo es una versión del de identificación que se obtiene añadiendo un paso más después de la construcción de la lista B y de decidir si el 2-complejo es par o no.

Concretamente, el nuevo paso queda enunciado como sigue:

4.1. Si todos los elementos de B son pares, entonces K es par y hacer:

4.1.1. Para cada $c_\mu > 2$, considerar la lista $f(\mu)$.

4.1.2. Dar la lista $D = \cup\{f(\mu) : \mu \in A/c_\mu > 2\}$.

Obsérvese que el paso que se introduce, no modifica la complejidad del Algoritmo de Identificación, pues la construcción de la familia D requiere, como máximo, tiempo $O(N)$.

En lo que sigue, las listas de 2-símplices que contienen a un 1-símplice μ de valencia p se denotarán por $f(\mu) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$. Los datos de la lista D serán necesarios para aplicar posteriormente un algoritmo que construya una 2-seudovariedad que será fuertemente conexa siempre que el 2-complejo de partida goce de dicha propiedad (se detallará en el Capítulo 4).

2.3 2-Seudovariedad asociada a un 2-Complejo Par

Una vez que se ha comprobado, aplicando cualquiera de los dos algoritmos descritos en la sección anterior, que K es un 2-complejo par, se puede dar un

método para codificar 2-complejos pares. Como ya se ha probado en el Capítulo 1, todo 2-complejo par K lleva asociado un par de triangulación (P, φ) donde P es una 2-seudovariedad triangulada y φ es un morfismo sobreyectivo entre P y $|K|$ tal que $\varphi : \varphi^{-1}(\text{int}(\sigma)) \rightarrow \text{int}(\sigma)$ es homeomorfismo para todo 2-símplice $\sigma \in K$ (Proposición 1.4.1).

Aunque dicho par no tiene por qué ser único, el método que aquí se propone consiste en construir la 2-seudovariedad de un par de triangulación asociado a K mediante un algoritmo que se basa en el proceso de separación de símlices dado en el capítulo anterior (Sección 1.4).

Como datos de entrada hay que considerar la lista ordenada C , formada por los 2-símlices de K y la lista A , formada por los 1-símlices de K y dada por el Algoritmo de Identificación. Se utilizan también distintos registros auxiliares en los que se guarda información provisional necesaria para la ejecución del algoritmo. En cada paso en que se usen estos registros se harán comentarios oportunos que aclaren sus funciones. También se crea un contador para cada 1-símplice (de modo análogo a como se hace en el Algoritmo de Identificación) que servirá para indicar qué 2-símlices hay que separar. Finalmente, como salida, el algoritmo proporciona la lista F de 2-símlices de un nuevo 2-complejo con todos sus 1-símlices de valencia 2, que es la 2-seudovariedad buscada.

Además, en una etapa posterior, los datos obtenidos se utilizarán para dar el morfismo de un par de triangulación asociado a K cuya 2-seudovariedad es la construida.

Algoritmo de Separación

0. Leer los datos de K : las listas C y A .

Iniciar $D = H = \emptyset$, $L = C$.

En H se irán incluyendo los 2-símlices de K que hay que separar y que se eliminarán de C . En D se incluyen los nuevos 2-símlices creados por separación y subdivisión de los de H . L es una lista auxiliar que en cada paso contiene los 2-símlices que quedan por considerar.

1. Para cada elemento $\nu = \{v_i, v_j\} \in A$, iniciar un contador $c_\nu = 0$ y hacer $q_\nu = \emptyset$.
2. Sea $\sigma = \{v_l, v_m, v_n\}$ el primer elemento de L . Para cada 1-símplice cara de σ , μ , hacer $c_\mu = c_\mu + 1$.
 $L = L - \{\sigma\}$.
 - 2.1. Si todo $c_\mu = 1$ ($\mu = \{v_i, v_j\}$ es cara de σ ; para $i, j \in \{l, m, n\}$), volver al Paso 2.
 - 2.2. Si algún c_μ es par y los demás son menores o iguales que 1, para cada c_μ par ($\mu = \{v_i, v_j\}$), hacer:
 - 2.2.1. Si $L \neq \emptyset$ y $q_\mu \neq \emptyset$, volver al Paso 2.
 - 2.2.2. Si $L \neq \emptyset$ y $q_\mu = \emptyset$, hacer $q_\mu =$ único vértice de $\sigma - \mu$ y volver al Paso 2.
 - 2.2.3. Si $L = \emptyset$, continuar.

Cuando c_μ alcanza el valor 2 debido a que es cara de un 2-símplice σ , en q_μ se guarda provisionalmente el único vértice de σ que no está en μ . Este registro será utilizado sólo en el caso de que aumente la valencia de μ .

- 2.3. Si algún c_μ es impar mayor que 1, para cada c_μ impar, hacer:

$r_\mu =$ único vértice de $\sigma - \mu$,

$u_\mu =$ baricentro del triángulo cuyos vértices son los de μ y r_μ (es decir: v_i, v_j, r_μ).

Si c_μ aumenta a 3, por ser K par, c_μ alcanzará también el valor 4 y los 2-símplices σ y σ' que dan lugar a estos valores de c_μ tendrán que subdividirse y separarse de los restantes 2-símplices que contienen a μ . El único vértice de σ' que no está en μ se guardará en el registro provisional r_μ .

En general, si c_μ alcanza un valor par $2p > 2$ y después toma el valor $2p + 1$, significa que ya se han realizado $p - 1$ separaciones por un proceso similar. Así, tras la subdivisión y separación de la primera pareja de 2-símplices, los registros q_μ y r_μ deben quedar vacíos por si fuera necesario volverlos a utilizar con vértices de otros 2-símplices que hubiera que separar en un paso posterior. Esto habrá que repetirlo tras cada separación.

- 2.3.1. $D = D \cup \{\{v_i, u_\mu, q_\mu\}, \{v_i, u_\mu, r_\mu\}, \{v_j, u_\mu, q_\mu\}, \{v_j, u_\mu, r_\mu\}\}$
 $H = H \cup \{\{v_i, v_j, q_\mu\}, \{v_i, v_j, r_\mu\}\}$

El 2-símplice $\sigma = \{v_i, v_j, q_\mu\}$ con un 1-símplice $\mu = \{v_i, v_j\}$ de valencia mayor que 2 se subdivide dando lugar a los 2-símplices $\{v_i, u_\mu, q_\mu\}$

y $\{v_j, u_\mu, q_\mu\}$. El otro par de 2-símplices $\{v_i, u_\mu, r_\mu\}$ y $\{v_j, u_\mu, r_\mu\}$ resulta de la subdivisión del otro 2-símplice que contiene a μ , $\sigma' = \{v_i, v_j, r_\mu\}$.

2.3.2. $r_\mu = q_\mu = \emptyset$.

Para cada 1-símplice cara de σ , ν distinto de μ y tal que $q_\nu \neq \emptyset$, hacer $q_\nu = u_\mu$.

Con esto se consigue que, a partir de este paso, el nuevo vértice u_μ sea considerado en las próximas subdivisiones dado que, según se ha indicado se han eliminado 2-símplices que han sido sustituidos por otros nuevos que contienen a dicho vértice.

2.3.3. Si $L \neq \emptyset$, volver al Paso 2.

Si $L = \emptyset$, continuar.

3 Dar las listas:

$E = C \setminus H$ (2-símplices de K cuyos 1-símplices son todos de valencia 2 y, por tanto, no han sido subdivididos).

$F = E \cup D$ (2-símplices de la 2-seudovariedad asociada a K).

Ejemplo 2.3.1 Para ilustrar los distintos pasos que sigue el Algoritmo de Separación, se incluye un ejemplo en el que aparece un 2-complejo con dos 1-símplices de valencia 4. Este complejo puede ser parte de otro mayor en el que todos los 1-símplices sean de valencia par. Para mostrar cómo funciona el algoritmo, es suficiente considerar sólo el siguiente conjunto de símplices:

Paso 0.: $C = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_2, v_5, v_7\},$
 $\{v_2, v_5, v_8\}, \{v_2, v_5, v_9\}\};$
 $D = H = \emptyset; L = C.$

Paso 1.: Para cada $\nu = \{v_i, v_j\}$, $c_\nu = 0$ y $q_\nu = \emptyset$.

Paso 2.: $\sigma = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mu = \{v_1, v_2\}$, $c_\mu = 1$. (Para $\nu = \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\};$
 $c_\nu = 1$). $L = L - \{\sigma\}$.

2.1.: Todo $c_\mu = 1$, entonces volver al Paso 2:

$\sigma = \{v_1, v_2, v_4\}$, $c_\mu = 2$. (Para $\nu = \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}; c_\nu = 1$).

$L = L - \{\sigma\}$.

2.2.: c_μ es par y los demás son menores o iguales que 1.

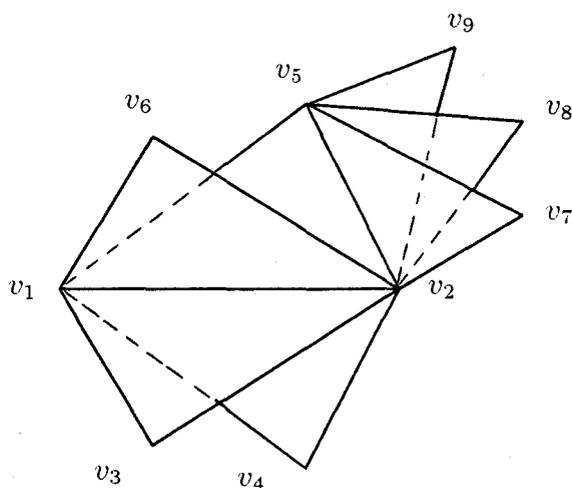


Figura 2.1: 2-complejo al que se aplica el Algoritmo de Separación.

2.2.2.: $L \neq \emptyset$ y $q_\mu = \emptyset$, entonces $q_\mu = v_4$ y volver al Paso 2.

$\sigma = \{v_1, v_2, v_5\}$, $c_\mu = 3$. (Para $\nu = \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}$; $c_\nu = 1$).

$L = L - \{\sigma\}$.

2.3.: $c_\mu = 3$, es impar mayor que 1, entonces $r_\mu = v_5$ y u_μ es el baricentro del 2-símplice $\{v_1, v_2, v_5\}$.

2.3.1.: $D = \{\{v_1, u_\mu, v_4\}, \{v_1, u_\mu, v_5\}, \{v_2, u_\mu, v_4\}, \{v_2, u_\mu, v_5\}\}$

$H = \{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}\}$;

2.3.2.: $r_\mu = q_\mu = \emptyset$. Como $q_\nu = \emptyset$ para $\nu = \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}$, continúa.

2.3.3.: $L \neq \emptyset$, entonces vuelve al Paso 2.

$\sigma = \{v_1, v_2, v_6\}$, $c_\mu = 4$ (Para $\nu = \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_6\}$; $c_\nu = 1$).

$L = L - \{\sigma\}$.

2.2.: c_μ es par y los demás $c_\nu = 1$, entonces:

2.2.2.: $L \neq \emptyset$ y $q_\mu = \emptyset$, entonces $q_\mu = v_6$ y vuelve al Paso 2.

$\sigma = \{v_2, v_5, v_7\}$, $\mu = \{v_2, v_5\}$, ($c_\mu = 1$ y para $\nu = \{v_2, v_7\}, \{v_5, v_7\}$; $c_\nu = 1$). $L = L - \{\sigma\}$.

$c_\mu = 1 + 1$, entonces:

2.2.: c_μ es par y los demás contadores valen 1.

2.2.2.: $L \neq \emptyset$ y $q_\mu = \emptyset$, entonces $q_\mu = v_7$ y vuelve al Paso 2.

$\sigma = \{v_2, v_5, v_8\}$, $\mu = \{v_2, v_5\}$, $c_\mu = 3$. (Para $\nu = \{v_2, v_8\}, \{v_5, v_8\}$; $c_\nu = 1$). $L = L - \{\sigma\} = \{v_2, v_5, v_9\}$.

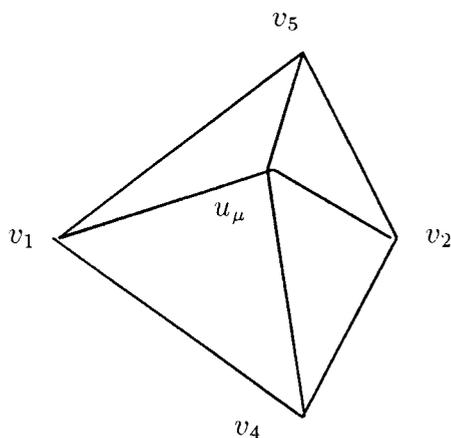


Figura 2.2: 2-símplices que forman el conjunto D tras la primera separación, $\mu = \{v_1, v_2\}$.

2.3.: $c_\mu = 3$ es impar mayor que 1, entonces:

$r_\mu = v_8$ y u'_μ es el baricentro del 2-símplice $\{v_2, v_5, v_8\}$.

2.3.1.: $D = DU\{\{v_2, u'_\mu, v_7\}, \{v_2, u'_\mu, v_8\}, \{v_5, u'_\mu, v_7\}, \{v_5, u'_\mu, v_8\}\}$.

$H = H \cup \{\{v_2, v_5, v_7\}, \{v_2, v_5, v_8\}\}$.

2.3.2.: $r_\mu = q_\mu = \emptyset$. Como $q_\nu = \emptyset$, para $\nu = \{v_2, v_8\}, \{v_5, v_8\}$, continúa.

2.3.3.: $L \neq \emptyset$, entonces vuelve al Paso 2.

$\sigma = \{v_2, v_5, v_9\}$, $\mu = \{v_2, v_5\}$, $c_\mu = 4$. (Para $\nu = \{v_2, v_9\}, \{v_5, v_9\}$;

$c_\nu = 1$). $L = L - \{\sigma\} = \emptyset$.

2.2.: c_μ es par y los demás contadores son 1.

2.2.3.: $L = \emptyset$, entonces continúa.

Paso 3.: Da las listas: $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_2, v_5, v_9\}$ y

$F = E \cup D$.

Proposición 2.3.2 Dado un par de triangulación asociado a un 2-complejo par con N 2-símplices, es posible obtener la 2-seudovariedad de dicho par en tiempo óptimo $O(N)$.

Demostración: Si C es la lista de los N 2-símplices del 2-complejo K , A tiene,

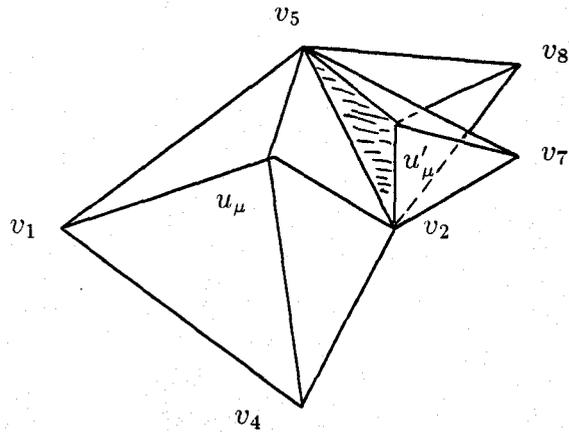


Figura 2.3: 2-símplices que forman el conjunto D tras la segunda separación, $\mu = \{v_2, v_5\}$. El espacio sombreado no representa un 2-símplice.

a lo sumo, $3N/2$ 1-símplices, por tanto, habrá también $3N/2$ contadores. El Algoritmo de Separación considera cada elemento de C una sola vez, a partir del cual realiza un número de operaciones (comparaciones, asignaciones y cálculo de baricentros) que no dependen de N . Entonces, la complejidad de este algoritmo viene determinada por el cardinal de la lista C . Luego se necesita un tiempo del orden $O(N)$, que es óptimo, para separar todos los 1-símplices de valencia $2p > 2$ y obtener la 2-seudovariedad asociada a K . \square

La proposición siguiente describe el morfismo de un par de triangulación para el 2-complejo K , a partir de los datos de salida del Algoritmo de Separación.

Proposición 2.3.3 Si K es un 2-complejo par y F es la lista de 2-símplices de la 2-seudovariedad de un par de triangulación (P, φ) asociado a K , entonces es posible obtener K a partir de F .

Demostración: Si C es la lista de 2-símplices de K , el Algoritmo de Separación construye una 2-seudovariedad P cuya lista de 2-símplices es F . A partir de F se puede obtener la lista W de los 0-símplices de P . En W hay puntos de dos clases:

- (a) Puntos etiquetados por v_i , para $i = 1, 2, \dots, n$ (que son 0-símplices de K). Sea W_1 el conjunto de estos vértices.

- (b) Puntos etiquetados por u_μ , que son baricentros de 2-símplices de K que han sido subdivididos y μ representa a los distintos 1-símplices de valencia mayor que 2 en K . Sea W_2 el conjunto de estos vértices.

De este modo, $W = W_1 \cup W_2$. Además, se puede considerar el conjunto de puntos de K formado por los vértices de K , V y los puntos medios de cada 1-símplice μ de valencia mayor que 2, que se denotarán por u'_μ . Sea pues $V' = V \cup \{u'_\mu : u_\mu \in W_2\}$ dicho conjunto. Obsérvese que existe una subdivisión de K , sdK , cuyo conjunto de vértices es V' sin más que trazar la mediana de cada 2-símplice que contiene a uno de los 1-símplices μ .

Ahora es posible dar un morfismo entre los conjuntos W y V' tal como sigue:

$$\tilde{\varphi}_1 : W \mapsto V'; \tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in W_1 \\ u'_\mu & \text{si } v = u_\mu \in W_2 \end{cases}.$$

Es obvio que $\tilde{\varphi}_1$ induce un morfismo simplicial entre P y $|sdK|$, que se denotará por φ_1 . Dado que $\tilde{\varphi}_1(W) = V'$, φ_1 es sobreyectivo.

Finalmente, se puede dar la aplicación identidad entre los espacios topológicos subyacentes, $|sdK|$ y $|K|$ y la composición de éste con φ_1 resulta ser el morfismo sobreyectivo $\varphi : P \mapsto |K|$. La imagen inversa de un 2-símplice $\sigma \in K$ es un 2-símplice, si σ tiene todos los 1-símplices cara de valencia 2; o bien, es unión de varios 2-símplices adyacentes en P (a lo más 4), si σ tiene algún 1-símplice cara con valencia mayor que 2. En cualquier caso, la imagen inversa del interior de cualquier 2-símplice de K es el interior de la unión finita de 2-símplices adyacentes y, por tanto son homeomorfos mediante φ . \square

2.4 2-Variedad asociada a un 2-Complejo Par

Después de obtener la 2-seudovariedad P asociada al 2-complejo par K , es necesario conocer el conjunto de puntos singulares aislados de P que serán eliminados para obtener finalmente la 2-variedad M del par de desingularización asociado a K . El proceso de desingularización dado en el capítulo anterior (Sección 1.5) proporciona el soporte teórico para la elaboración de los algoritmos que se desarrollan en esta sección y que permiten obtener M a partir de P .

Según la clasificación de puntos singulares de un 2-complejo puro, la 2-pseudovariedad P sólo tiene un conjunto finito de puntos singulares cónicos. Estos puntos se caracterizan por tener link no conexo, formado por la unión disjunta de ciclos.

En [28] Gross y Rosen dan un algoritmo que determina si un 2-complejo simplicial es planar analizando si el link de cada vértice admite una inmersión en la circunferencia. Si bien la situación que aquí se estudia es distinta a la de la planaridad de un 2-complejo, se puede utilizar la parte del algoritmo de Gross y Rosen en la que se construyen simultáneamente todos los links de todos los 0-símplices del 2-complejo de partida. Así se detectan, de modo eficiente, todos los puntos singulares de P junto con la familia de ciclos que constituyen sus respectivos links.

A continuación se detalla una versión resumida del Algoritmo de Gross y Rosen en la que se omiten los pasos que no son necesarios debido a que el 2-complejo particular sobre el que se aplicará es la 2-seudovariedad P .

Si V es la lista de los p 0-símplices, E es la lista de 1-símplices y F es la de 2-símplices de P , el algoritmo siguiente proporciona como datos de salida la lista ordenada formada por cada vértice y su link en P .

Algoritmo de Gross y Rosen [Gross y Rosen, 1979]

0. Leer los datos de P : las listas V , E y F . Construir las listas auxiliares:
 - 0.1. Para cada $e \in E$, $V(e) =$ vértices extremos de e .
 - 0.2. Para cada $f \in F$, $E(f) =$ aristas de f .
 - 0.3. Para cada $f \in F$, $V(f) =$ vértices incidentes en f .
 - 0.4. Para cada $v \in V$, $E(v) =$ aristas incidentes en v :
 $v \in V$, hacer $E(v) = \emptyset$
 Para cada $e \in E$, si $v \in V(e)$ hacer $E(v) = E(v) \cup \{e\}$.
 - 0.5. Para cada $v \in V$, $F(v) =$ regiones que contienen a v :
 $v \in V$, hacer $F(v) = \emptyset$

Para cada $f \in F$, si $v \in V(f)$ hacer $F(v) = F(v) \cup \{f\}$.

0.6. Para cada $e \in E$, $F(e) =$ regiones incidentes en e :

$e \in E$, hacer $F(e) = \emptyset$

Para cada $f \in F$, si $e \in E(f)$ hacer $F(e) = F(e) \cup \{f\}$.

NOTA: Obsérvese que construir las listas $E(v)$ para cada v requiere tiempo $O(p^2)$ pues para construir $E(v)$ para el vértice v es necesario recorrer la lista E , cuya longitud es $O(p)$. Como hay p vértices, el tiempo total será $O(p^2)$. Para evitar esto, se pueden construir simultáneamente todas las listas, así se requerirá un tiempo de ejecución de orden $O(p)$.

1. Construcción simultánea de $Lk(v; P)$ para cada $v \in V$:

1.1. Para cada $x \in V \cup E$, construir la lista $x^* =$ vértices $v \in V$ tal que $x \in Lk(v; P)$:

1.1.1. Para cada $x \in V \cup E$, iniciar $x^* = \emptyset$.

1.1.2. Para cada $e \in E$ y para cada $f \in F(e)$, $V(f) - V(e)$ contiene un único vértice v . Hacer $e^* = e^* \cup \{v\}$.

1.1.3. Para cada $v \in V$ y para cada $e \in E(v)$, $V(e) - v$ contiene un único vértice u . Hacer $v^* = v^* \cup \{u\}$.

1.2. Construir simultáneamente $Lk(v; P)$, (para cada $v \in V$) como sigue:

1.2.1. Para cada $v \in V$ iniciar $Lk(v; P) = \emptyset$.

1.2.2. Para cada $e \in E$ y para cada $v \in e^*$, hacer $Lk(v; P) = Lk(v; P) \cup \{e\}$.

1.3. Para cada $v \in V$, aplicar DFS sobre $Lk(v; P)$ y dar las componentes conexas: $C_{Lk(v)} = \{C_1, C_2, \dots, C_{n(v)}\}$.

En este caso, $Lk(v; P)$ es el grafo sobre el que actúa el algoritmo DFS (Paso 1.3.). Por ser un conjunto de ciclos disjuntos, este grafo tiene el mismo número de aristas que de vértices, que coincide con la valencia de v en el 1-esqueleto de P , $\delta(v)$. El algoritmo DFS es óptimo en esta situación y tiene complejidad $O(\delta(v))$, pues en el caso general es de complejidad $O(n)$, siendo n el número de aristas del grafo al que se aplica (como se puede ver en [43]).

Si se aplica el algoritmo DFS a todos los $Lk(v; P)$, el total de operaciones que se realizan en el Paso 1.3. es del orden $O(\sum_{v \in V} \delta(v))$. Considerando el 1-esqueleto de P , se tiene un grafo sobre el que se verifica el Lema del Apretón de Manos ([31]). Es decir: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#(E)$. Como $\#(E) \sim O(p^2)$ (siendo p el número de vértices de P), es necesaria la construcción simultánea de todos los $Lk(v; P)$, según se describe en el Algoritmo de Gross y Rosen, para evitar complejidad cuadrática y obtener un algoritmo de tiempo lineal.

Hay que destacar que el Algoritmo de Gross y Rosen se ha diseñado para estudiar la planaridad de un 2-complejo de p vértices. Para detectar la planaridad local en v , basta conocer si $n(v)$ toma el valor 1 o mayor que 1 y no es necesario obtener todas las componentes de $Lk(v; P)$ en el Paso 1.3.

No obstante, dado que el algoritmo que se aplicará, en una fase posterior, para obtener la 2-variedad asociada a P , trabaja con la lista completa de los ciclos que constituyen el $Lk(v; P)$, es necesario ejecutar todas las operaciones del Paso 1.3. del algoritmo anterior.

Como aplicación del Algoritmo de Gross y Rosen, se describe a continuación otro que proporciona sólo la lista ordenada de puntos singulares de P con sus respectivos links.

Algoritmo de Puntos Singulares

0. Iniciar la familia $S = \emptyset$.
 1. Aplicar el Algoritmo de Gross y Rossen a P
 2. Para cada $v \in V$ considerar $C_{Lk(v)} = \{C_1, C_2, \dots, C_{n(v)}\}$
 - 2.1. Si $n(v) = 1$, v es un punto regular de P .
 - 2.2. Si $n(v) > 1$, v es un punto singular cónico de P y hacer:

$$S = S \cup \{v; C_{Lk(v)} = \{C_1, C_2, \dots, C_{n(v)}\}\}.$$
 3. Dar la lista S de los puntos singulares de P y sus links.
-

Proposición 2.4.1 *Es posible obtener el conjunto de puntos singulares de una 2-seudovariedad con p 0-símplices y la lista ordenada de ciclos que constituyen sus respectivos links en tiempo $O(p)$.*

Demostración: La complejidad del Algoritmo de Puntos Singulares viene determinada por la del Paso 1 en que se aplica el Algoritmo de Gross y Rosen. Si la 2-seudovariedad P tiene p vértices, ya se ha probado que este paso requiere tiempo de orden $O(p)$, en el peor caso. Los pasos restantes no aumentan la complejidad del algoritmo, con lo que queda probado el enunciado. \square

Si la 2-seudovariedad P tiene un único punto singular, mediante el Algoritmo de Eliminación de un Punto Singular se obtiene la 2-variedad M asociada a P . En caso de que P tenga más de un punto cónico, bastará aplicar dicho algoritmo para cada uno de ellos, de modo análogo a como se ha descrito el Proceso de Desingularización en el Capítulo 1. Es decir, si $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ (con $m > 1$) es el conjunto de puntos singulares de P , se aplica el Algoritmo de Eliminación para eliminar v_1 y se obtiene una 2-seudovariedad con $m - 1$ puntos singulares sobre la que se puede volver a aplicar el algoritmo y eliminar v_2 . Así, por un proceso inductivo, en el paso $(m - 1)$ -ésimo se obtiene una 2-seudovariedad con un único punto singular (v_m) que puede ser eliminado para obtener finalmente la 2-variedad asociada a P .

Sea v un punto singular de P y sea $C_{Lk(v)} = \{C_1, C_2, \dots, C_{n(v)}\}$ el conjunto de ciclos que forman $Lk(v; P)$, dado por el Algoritmo de los Puntos Singulares (cada C_i es una lista ordenada de aristas). En el Algoritmo de Eliminación se construye la lista de 0-símplices de cada C_i y se trabaja con la lista de 2-símplices de P .

Como salida, este algoritmo proporciona la lista de 2-símplices de una nueva 2-seudovariedad que tiene en común con P el conjunto de 2-símplices que no contienen al punto singular v . Estos 2-símplices se sustituyen por los de $n(v)$ coronas circulares sobre una esfera con $n(v)$ agujeros. Para simplificar la notación, se considera $n = n(v)$ en la descripción del algoritmo, siempre que no haya confusión y se utilizará el término *cilindro conector* para designar a cada una de las coronas circulares de la esfera que sirve para conectar $P - v$.

Algoritmo de Eliminación de un Punto Singular

0. Leer los datos de P :

0.1. Leer la lista F de 2-símplices de P .

Para el punto singular $v \in V$ que se va a eliminar, construir el conjunto formado por los 2-símplices que contienen a v , $F(v)$, y hacer $F = F - F(v)$.

0.2. Para el punto singular $v \in V$ que se va a eliminar, leer $C_{Lk(v)} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ la lista de ciclos disjuntos de $Lk(v; P)$.

Para $C_i = \{e_1^i, e_2^i, \dots, e_{l_i}^i\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$ (donde $e_j^i = \{w_{j-1}^i, w_j^i\}$ para $j = 1, 2, \dots, l_i - 1$, $e_{l_i}^i = \{w_{l_i}^i, w_0^i\}$), construir la lista de vértices de C_i , dada por:

$$\hat{C}_i = \{w_0^i, w_1^i, \dots, w_{l_i}^i, w_0^i\}.$$

1. Iniciar la lista de nuevos 2-símplices $D = \emptyset$.

2. Eliminar v . (Hacer la suma conexa del 2-complejo $P - v$ y una esfera triangulada con el mínimo número de triángulos).

2.1. Si $n \leq 4$, hacer:

2.1.1. Si $n = 2$, sea $\{u_1, u_2, w_0^v, u_1\}$ un ciclo sobre el ecuador del cilindro Q triangulado por el conjunto de 2-símplices:

$$Q = Q_1 \cup Q_2, \text{ donde para cada } i = 1, 2.$$

$$Q_i = \{\{u_1, w_0^i, w_1^i\}, \{u_1, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_1, w_{l_i-1}^i, w_{l_i}^i\}, \\ \{u_1, u_2, w_{l_i}^i\}, \{u_2, w_{l_i}^i, w_0^i\}, \{u_2, w_0^v, w_0^i\}, \{w_0^i, u_1, w_0^v\}\}.$$

$$\text{Hacer } D = D \cup Q$$

Según los valores de n , la triangulación de la esfera se hace de distinta manera. Si $n = 2$, $P - v$ se pega sobre un cilindro abierto triangulado de forma que sobre su ecuador aparece un ciclo de longitud 3 y sobre cada borde uno de los ciclos C_1 y C_2 , según se ve en la Figura 2.4.

2.1.2. Si $3 \leq n \leq 4$, dar una triangulación de la esfera de centro v y radio $r = \frac{1}{2} \text{mín} \{\text{longitudes de los 1-símplices que contienen a } v \text{ como cara}\}$, de forma que resulte un tetraedro cuyos 2-símplices son: $\{\{u_1, u_2, w_0^v\}, \{u_2, u_3, w_0^v\}, \{u_1, u_3, w_0^v\}, \{u_1, u_2, u_3\}\}$.

$$G = \{\{u_1, u_2, u_3\}\}.$$

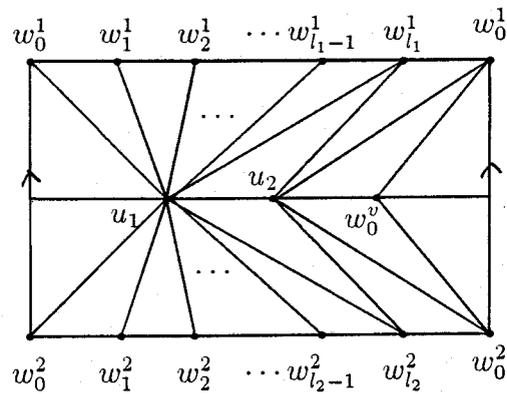


Figura 2.4: *Triangulación del cilindro que se conecta con $P - v$.*

2.1.2.1. Si $n = 4$, hacer:

- $Q_4 = \{\{u_1, w_0^4, w_1^4\}, \{u_1, w_1^4, w_2^4\}, \dots, \{u_1, w_{l_4-1}^4, w_{l_4}^4\}, \{u_1, u_2, w_{l_4}^4\}, \{u_2, w_{l_4}^4, w_0^4\}, \{u_2, u_3, w_0^4\}, \{w_0^4, u_1, u_3\}\}$.
- $D = D \cup Q_4$.
- $G = \emptyset$.
- $C_{Lk(v)} = C_{Lk(v)} - C_4$ y continuar.

2.1.2.2. Si $n = 3$, hacer:

- Para $i = 1, 2$, hacer:

$$Q_i = \{\{u_i, w_0^i, w_1^i\}, \{u_i, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_i, w_{l_i-1}^i, w_{l_i}^i\}, \{u_i, u_{i+1}, w_{l_i}^i\}, \{u_{i+1}, w_{l_i}^i, w_0^i\}, \{u_{i+1}, w_0^i, w_0^v\}, \{w_0^i, u_i, w_0^v\}\}$$

$$D = D \cup Q_i.$$
- Para $i = 3$, hacer:

$$Q_i = \{\{u_3, w_0^i, w_1^i\}, \{u_3, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_3, w_{l_i-1}^i, w_{l_i}^i\}, \{u_3, u_1, w_{l_i}^i\}, \{u_1, w_{l_i}^i, w_0^i\}, \{u_1, w_0^i, w_0^v\}, \{w_0^i, u_3, w_0^v\}\}$$

$$D = D \cup Q_i \cup G$$

En el caso en que el número de ciclos sea 3 ó 4, se utiliza el 1-esqueleto del tetraedro que sirve para triangular la esfera sobre la que se hace la suma conexa de $P - v$. En la Figura 2.5 se muestran los distintos cilindros conectores triangulados de forma compatible con el tetraedro. Para ello, basta colocar en uno de sus bordes un ciclo C_i y en el otro, el ciclo de una cara del tetraedro. Si $n = 3$, no hay que construir el cilindro Q_4 pero habrá que añadir la cara del tetraedro sobre la que no se conecta ninguno de los demás Q_i .

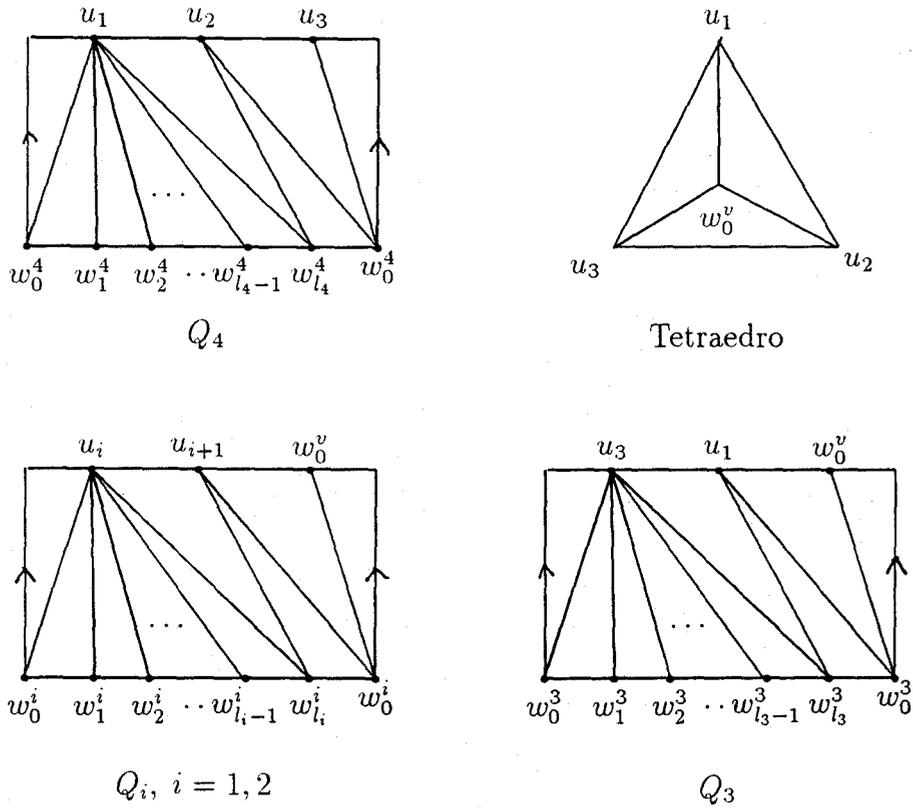


Figura 2.5: Cilindros conectores en caso de que el número de ciclos sea 3 ó 4.

2.2. Si $n \geq 5$, se construye un cilindro conector para cada ciclo del $Lk(v; P)$ de manera análoga al caso de $n \leq 4$. Aquí, la triangulación de la esfera debe tener n triángulos, si n es par y $n + 1$ si n es impar.

2.2.1. Si n es par, dar una triangulación de la esfera de centro v y radio $r = 1/2$ mín {longitudes de los 1-símplices que contienen a v }, de forma que en cada hemisferio aparezca una triangulación estrella de $n/2$ triángulos que se denotarán por:

$\{\{u_i, u_{i+1}, w_0^v\}\}$ (para $i = 1, 2, \dots, n/2 - 1$) y $\{\{u_{n/2}, u_1, w_0^v\}\}$ en el hemisferio norte (siendo w_0^v el polo norte) y

$\{\{u_i, u_{i+1}, w_1^v\}\}$ (para $i = 1, 2, \dots, n/2 - 1$) y $\{\{u_{n/2}, u_1, w_1^v\}\}$ en el hemisferio sur (siendo w_1^v el polo sur).

2.2.1.1. Para $i = 1, 2, \dots, n/2 - 1$, hacer:

$$Q_i = \{\{u_i, w_0^i, w_1^i\}, \{u_i, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_i, w_{l_i-1}^i, w_{l_i}^i\}, \\ \{u_i, u_{i+1}, w_{l_i}^i\}, \{u_{i+1}, w_{l_i}^i, w_0^i\}, \{u_{i+1}, w_0^i, w_0^i\}, \{w_0^i, u_i, w_0^i\}\}.$$

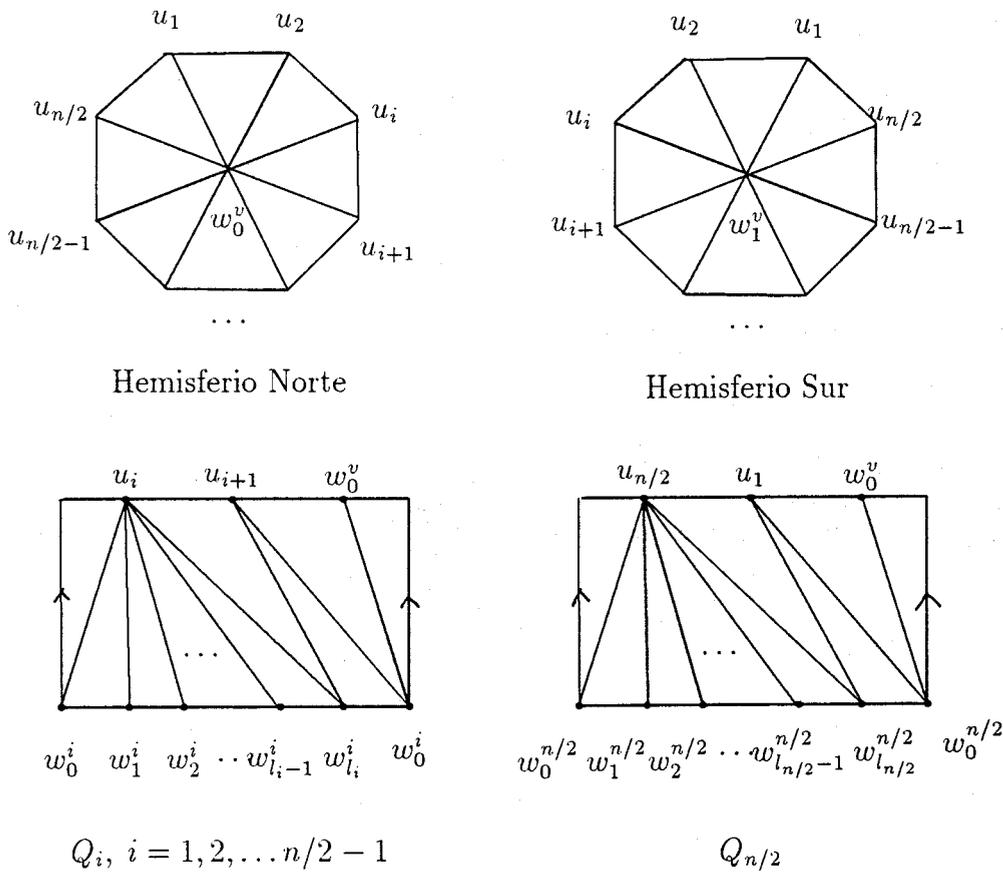


Figura 2.6: Cilindros conectores en caso de que el número de ciclos sea par y triangulación de la esfera.

$$D = D \cup Q_i.$$

2.2.1.2. Para $i = n/2$, hacer:

$$Q_i = \{\{u_i, w_0^i, w_1^i\}, \{u_i, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_i, w_{i-1}^i, w_i^i\}, \\ \{u_i, u_1, w_i^i\}, \{u_1, w_i^i, w_0^i\}, \{u_1, w_0^v, w_0^i\}, \{w_0^i, u_i, w_0^v\}\}.$$

$$D = D \cup Q_i.$$

2.2.1.3. Para $j = 1, 2, \dots, n/2 - 1$, hacer:

$$i = j + n/2$$

$$Q_i = \{\{u_j, w_0^i, w_1^i\}, \{u_j, w_1^i, w_2^i\}, \dots, \{u_j, w_{i-1}^i, w_i^i\}, \\ \{u_j, u_{j+1}, w_i^i\}, \{u_{j+1}, w_i^i, w_0^i\}, \{u_{j+1}, w_1^v, w_0^i\}, \{w_0^i, u_j, w_1^v\}\}.$$

$$D = D \cup Q_i.$$

2.2.1.4. Para $i = n$, hacer:

$$Q_n = \{\{u_{n/2}, w_1^n, w_1^n\}, \{u_{n/2}, w_1^n, w_2^n\}, \dots, \{u_{n/2}, w_{i_{n-1}}^n, w_{i_n}^n\}, \\ \{u_{n/2}, u_1, w_{i_n}^n\}, \{u_1, w_{i_n}^n, w_1^n\}, \{u_1, w_1^v, w_1^n\}, \{w_1^n, u_{n/2}, w_1^v\}\}. \\ D = D \cup Q_n.$$

2.2.2. Si n es impar, hacer:

$$C_{Lk(v)} = C_{Lk(v)} \cup \{C_{n+1} = \{w_1^{n+1}, w_2^{n+1}, w_3^{n+1}\}\} \\ F = F \cup \{\{w_1^{n+1}, w_2^{n+1}, w_3^{n+1}\}\} \text{ y Paso 2.}$$

Se añade el ciclo auxiliar C_{n+1} para tener un número par de ciclos y poder ejecutar los pasos para n par. El 2-símplice que tiene a C_{n+1} como frontera se une a la lista final F de 2-símplices de la 2-variedad M .

3. Dar la lista de 2-símplices del nuevo 2-complejo: $F = F \cup D$.

Proposición 2.4.2 *Se puede eliminar un punto singular de una 2-seudovariedad con N 2-símplices en tiempo óptimo $O(N)$.*

Demostración: Sea P la 2-seudovariedad y sea v el punto singular que hay que eliminar de P . Si n es el número de ciclos de $Lk(v; P)$, se comprueba, por simple inspección, que el Algoritmo de Eliminación de un Punto Singular necesita tiempo $O(n)$ para ser ejecutado. Esto se debe a que las operaciones que determinan la complejidad son: contar el número de ciclos n y construir n listas de 2-símplices a partir de los vértices que forman los ciclos. Como N es el número de 2-símplices de P y cada ciclo tiene longitud mayor o igual que 3, entonces $n \leq N/3$. Por tanto, el algoritmo es eficiente y tiene complejidad de orden $O(N)$. \square

Como consecuencia de las Proposiciones 2.3.2, 2.4.1 y 2.4.2 y teniendo en cuenta el desarrollo de las secciones anteriores, se enuncia el siguiente resultado:

Corolario 2.4.3 *Dado un par de desingularización asociado a un 2-complejo par con N 2-símplices, es posible obtener la 2-variedad de dicho par en tiempo óptimo $O(N)$.*

Los datos que aporta el Algoritmo de Eliminación aplicado a la 2-seudovariiedad P pueden utilizarse para describir el morfismo de un par de desingularización asociado a P que tiene como 2-variedad la que se construye mediante dicho algoritmo. La siguiente proposición recoge este resultado.

Proposición 2.4.4 *Si P es una 2-seudovariiedad con un punto singular v y M es la 2-variedad obtenida por eliminación de v , entonces existe un morfismo entre las triangulaciones de M y de P que verifica las propiedades del Teorema de Caracterización de 2-complejos pares (Teorema 1.6.1).*

Demostración: Sea V el conjunto de vértices de P . A partir de la lista F de 2-símplices de M (dada tras la aplicación del Algoritmo de Eliminación), se puede obtener la lista de 0-símplices de M , que se denotará por U . En U se pueden distinguir dos clases de puntos:

- (a) El conjunto U_1 , formado por los puntos etiquetados por w_j^i (vértices de los ciclos de $Lk(v; P)$).
- (b) El conjunto U_2 de puntos etiquetados por u_j , w_0^v y w_1^v (vértices que se añaden al hacer la suma conexa de $P - v$ con una esfera).

Como $U = U_1 \cup U_2$, la aplicación dada por

$$\tilde{\varphi}_2 : U \mapsto V; \tilde{\varphi}_2(u) = \begin{cases} u & \text{si } u \in U_1 \\ v & \text{si } u \in U_2 \end{cases}$$

induce un morfismo sobreyectivo entre M y P , que se denotará por φ_2 , que verifica el Teorema de Caracterización de 2-complejos pares. Esto se debe a que la imagen inversa (mediante φ_2) de un 2-símplice $\sigma \in P$ es un 2-símplice $\sigma' \in M$, por tanto, $\varphi_2^{-1}(\text{int}(\sigma)) = \text{int}(\sigma')$ y son homeomorfos. \square

Este último resultado puede extenderse por inducción a una 2-seudovariiedad P que tenga un conjunto finito de puntos singulares cónicos. En este caso, se obtiene una aplicación φ_2^v para cada punto singular v y sucesivas 2-seudovariiedades. Componiendo todas estas aplicaciones, se obtiene un morfismo entre P y la 2-variedad final M , que también se puede denotar por φ_2 .

Finalmente, se recoge la conclusión de este capítulo que no es más que una consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.3.3 y 2.4.4.

Corolario 2.4.5 *Si K es un 2-complejo par y M es la 2-variedad obtenida a partir de K mediante los Algoritmos de Separación y Eliminación, entonces el morfismo*

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 : M \mapsto |K|$$

verifica las condiciones dadas en el Teorema de Caracterización de 2-Complejos Pares (Teorema 1.6.1).

2.5 Conclusiones y Problemas Abiertos

El problema de identificar un 2-complejo par se ha resuelto de manera algorítmica gracias a la caracterización combinatoria que se tiene de ellos. Se ha dado un algoritmo eficiente (el Algoritmo de Identificación) que permite decidir si un 2-complejo es par o no. Con este resultado se cumple uno de los objetivos inicialmente marcados.

Para obtener la 2-seudovariedad de un par de triangulación asociado a un 2-complejo par, se ha descrito el Algoritmo de Separación, basado en el proceso de separación de símlices que se dio en el Capítulo 1. Se puede conocer el conjunto de puntos singulares de la 2-seudovariedad obtenida mediante el algoritmo del mismo nombre. Después, se le puede aplicar el Algoritmo de Eliminación de un Punto Singular (de manera recurrente, si fuera necesario), para obtener finalmente la 2-variedad de un par de desingularización asociado al 2-complejo inicial. Estos algoritmos son eficientes. Además, los datos de salida permiten describir los morfismos de los pares asociados al 2-complejo. Con lo cual, queda realizado el estudio algorítmico completo que se propuso al comienzo.

Por último, es importante señalar que este Capítulo se ha centrado en el tratamiento algorítmico de los 2-complejos pares. Dado que todo 2-complejo de Euler es par, los algoritmos aquí descritos pueden aplicarse a un 2-complejo euleriano para obtener la 2-variedad de uno de sus pares de desingularización asociados.

Sin embargo y esto enlaza con los problemas abiertos del Capítulo 1, al no tener aún una caracterización combinatoria de los 2-complejos de Euler (distinta de la definición propiamente dicha), no se ha elaborado un algoritmo que

identifique si un 2-complejo par es también euleriano. Surgen de inmediato las siguientes preguntas:

- ¿Existe un algoritmo eficiente que reconozca cuándo un 2-complejo par es euleriano?
- ¿Es necesario buscar una caracterización o se puede diseñar tal algoritmo utilizando directamente la Definición 1.3.1 dada por Akin ([3])?

Capítulo 3

Recorridos Eulerianos sobre 2-Complejos

En este capítulo se introduce el concepto de recorrido euleriano para 2-complejos como una generalización del ya conocido para grafos. Se demuestra que, en dimensión 2, no existe relación alguna entre las propiedades “ser euleriano” y “contener recorrido euleriano”, como tampoco la hay entre “ser par” y “contener recorrido euleriano”. Se dan caracterizaciones de los 2-complejos que admiten 1,2-recorridos de este tipo, utilizando distintos grafos construidos a partir del complejo. En el caso de las 2-seudovariedades la situación es algo distinta y por ello se dedica una sección a ellas.

3.1 Introducción

El concepto de recorrido, estudiado en profundidad desde el comienzo de la Teoría de Grafos, puede definirse también para complejos simpliciales de dimensión superior ([32]). Asimismo, se puede dar la noción de recorrido euleriano sobre 2-complejos (como se verá en la Sección 3.2).

En conexión con el problema de establecer una comparación entre los grafos eulerianos y los 2-complejos del mismo nombre (planteado en el Capítulo 1), el propósito de este capítulo es analizar si existe relación entre las propiedades “ser 2-complejo de Euler” y “contener recorrido euleriano”.

La primera cuestión que se aborda es la de definir recorrido euleriano sobre un 2-complejo y se obtiene un resultado análogo a la condición 3 del Teorema de Caracterización de los Grafos Eulerianos (Teorema 1.1.1). En concreto, si el 2-complejo contiene un recorrido euleriano, entonces se puede dar una partición en ciclos del conjunto de sus 2-símplices.

Aparece la primera diferencia entre 2-complejos con recorrido euleriano y grafos eulerianos cuando se encuentra un 2-complejo que admite partición en ciclos pero que no tiene recorrido euleriano. Por tanto, para 2-complejos no se puede dar una condición análoga a la del teorema citado. Es más, dicho complejo es euleriano. También se encuentran ejemplos de 2-complejos no eulerianos que admiten recorrido euleriano. De esto se deduce que las condiciones “ser euleriano” y “contener recorrido euleriano” son independientes. Dado que todo 2-complejo de Euler es par, tampoco existe equivalencia entre esta propiedad y la existencia de recorrido euleriano sobre el complejo.

Para llegar a todos estos resultados se utiliza como herramienta principal el grafo dual de un 2-complejo puro. Así, el problema planteado en dimensión 2 puede traducirse a un problema de Teoría de Grafos, donde es más cómoda su resolución.

De las propiedades del grafo dual de un 2-complejo se deducen algunas condiciones sobre este grafo que son necesarias, pero no suficientes, para que el 2-complejo del que proviene tenga recorrido euleriano. La más significativa es la de ser hamiltoniano, pero no todo grafo hamiltoniano es dual de algún 2-complejo con recorrido euleriano. Se observa pues, que el grafo dual no es el más idóneo para buscar una caracterización de los 2-complejos con recorrido euleriano.

Sin embargo, para el caso de las 2-seudovarietades (que son 2-complejos eulerianos), se tiene un teorema que caracteriza cuándo éstas tienen recorrido euleriano. Además, se da un método para construir, sobre una superficie compacta cualquiera, orientable o no, una triangulación que contenga un recorrido euleriano.

Con el objetivo de dar condiciones necesarias y suficientes para que un 2-complejo admita recorrido euleriano, se construyen otros grafos asociados a él con menos aristas que el grafo dual, pero con mejores propiedades que éste. Son el Grafo Intersección y el Grafo Intersección de 1-símplices de ramificación. Este

último grafo caracteriza a los 2-complejos que admiten recorrido euleriano.

Finalmente, como caso particular de recorrido euleriano, se introduce la noción de 1,2-circuito hamiltoniano, análoga a la clásica de circuito hamiltoniano para grafos. El grafo intersección de 1-símplices de ramificación también caracteriza a los 2-complejos que contienen un circuito de este tipo.

3.2 1,2-Recorridos sobre 2-Complejos. Recorrido Euleriano

Para comenzar, se introducen los conceptos de camino, recorrido, arco, circuito y ciclo para el caso de los 2-complejos, que serán la generalización natural de los conocidos para grafos.

Si K es un 2-complejo arbitrario, a lo largo de todo el capítulo se utilizarán las definiciones de Harary y Palmer ([32]) detalladas a continuación.

Se dice que un *1,2-camino* en K es una secuencia alternada

$$x_0, \sigma_1, x_1, \sigma_2, \dots, x_{n-1}, \sigma_n, x_n$$

de 1-símplices x_i y 2-símplices σ_i tal que cada 1-símplice x_i es incidente con los 2-símplices σ_i y σ_{i+1} . El camino se dice *cerrado* si $x_0 = x_n$ y *abierto* en otro caso. Si todos los 2-símplices son distintos y $x_i \neq x_{i+1}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces se dice que es un *1,2-recorrido*. Si tanto los 1-símplices como los 2-símplices no se repiten, se llama *1,2-arco*. Un 1,2-arco cerrado se llama *1,2-ciclo* o simplemente *ciclo*.

Se dice que K es *fuertemente conexo* (o *1,2-conexo*), si dos 1-símplices cualesquiera pueden unirse por un 1,2-arco en K . Especial mención merece la idea de recorrido euleriano sobre un 2-complejo que, de manera totalmente análoga a la definición de recorrido euleriano sobre un grafo, no es más que un camino cerrado que atraviesa una única vez todos y cada uno de los símplices de dimensión máxima del complejo.

Definición 3.2.1 Un *Recorrido Euleriano* sobre un 2-complejo K es un 1,2-recorrido cerrado que contiene a todos los 2-símplices de K .

En primer lugar, obsérvese que de la definición de 1,2-recorrido se deduce que un 2-complejo que admite un recorrido euleriano es fuertemente conexo.

Por otra parte, aunque no se sabe si todo 2-complejo orientable es realizable en \mathbf{R}^3 , se verifica que toda superficie compacta triangulada es homeomorfa a un 2-complejo (para más detalles se puede consultar [5] y [10]). De este modo, es natural definir 1,2-recorrido y recorrido euleriano sobre una superficie compacta triangulada utilizando el 2-complejo homeomorfo a ésta. Es decir, una superficie compacta triangulada contiene recorrido euleriano si y sólo si el 2-complejo homeomorfo a ésta lo contiene y el recorrido sobre la triangulación está inducido naturalmente por el recorrido sobre el 2-complejo. En general, el término recorrido euleriano se usará tanto para 2-complejos como para superficies compactas trianguladas. El caso particular de las 2-seudovariedades y de las superficies compactas será abordado de modo independiente en una sección posterior.

En general, el conocer la existencia de un recorrido euleriano sobre un 2-complejo cualquiera (ya sea homeomorfo o no a una superficie compacta triangulada) requiere un estudio detallado. Si bien no siempre se puede encontrar tal recorrido, sí hay garantía de hallar un ciclo contenido en un 2-complejo al que se exigen ciertas propiedades, como se prueba a continuación.

Proposición 3.2.2 *Todo 2-complejo puro, conexo y sin borde contiene un ciclo.*

Demostración: Sea K tal 2-complejo. Dado un 1-símplice de K es posible encontrar un 1,2-arco en K que lo contiene en su interior y no pasa por todos los 2-símplices de K . Por la conexión del 2-complejo, este 1,2-arco puede aumentarse por sus 1-símplices extremos. Como K es finito, el proceso de aumentar el 1,2-arco termina cuando aparece un 1-símplice que ya se ha utilizado, obteniéndose un ciclo en K . □

Como consecuencia inmediata, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3 *El conjunto de 2-símplices de un 2-complejo puro, sin borde y con recorrido euleriano admite una partición en ciclos.*

El recíproco del resultado anterior no es cierto en general, como se mostrará con el Ejemplo 3.4.3. Esto es, existen 2-complejos sin recorrido euleriano y cuyo conjunto de 2-símplices admite una partición en ciclos. Los resultados que se recogen en la sección siguiente facilitarán la construcción del citado ejemplo.

3.3 Recorrido Euleriano y Grafo Dual

El estudio de un 2-complejo se puede simplificar a través del análisis de un grafo formado a partir de él: el grafo dual. De este modo, se relacionan propiedades de los 2-complejos con las de los grafos correspondientes, pasando de un problema en dimensión 2 a su “traducción” en dimensión 1. Antes de definir el concepto de grafo dual que se manejará en este trabajo, conviene hacer un breve repaso de algunas apariciones de esta noción en la literatura.

En todo lo que sigue, se entenderá que un grafo G admite una *inmersión* en una superficie si puede ser dibujado sobre ella de forma que dos aristas nunca se corten, salvo que éstas sean incidentes y lo hagan en el vértice común. Al menor de los géneros de las superficies en que G puede ser inmerso se le llama *genero de G* . Si el género de G es 0, se dice que G es *plano* [31].

En primer lugar, teniendo en cuenta que un *mapa* M sobre una superficie compacta S es una inmersión de un grafo finito sobre M tal que cada componente conexa de $S \setminus M$ es homeomorfa a un disco, Altshuler define en [6] el *mapa dual* de M , M^* , de manera análoga a como lo hace Whitney para el *dual geométrico* de un grafo planar. Es decir, M^* se construye colocando un vértice en el interior de cada región de M (incluyendo la región exterior) y si dos regiones comparten una arista x , los vértices correspondientes son adyacentes mediante una arista x^* que atraviesa sólo a x ([57] y [58]).

Por otra parte, también es conocido el concepto de *dual* de un 2-complejo celular homeomorfo a una 2-variedad con borde, utilizado por Barnette ([12]). En concreto, si M es una 2-variedad con tales condiciones, se dice que una 2-variedad con borde M^* es *dual* de M si existe una correspondencia biyectiva entre los vértices de M^* y las caras de M de forma que dos vértices de M^* están unidos por una arista si y sólo si las caras correspondientes en M comparten una arista.

Estos conceptos están ligados, de una u otra manera, al de inmersión de un grafo en una superficie compacta. Sin contradecir las definiciones anteriores, se puede dar una noción algo más abstracta de *grafo dual* de un 2-complejo puro K , prescindiendo de la inmersión que su 1-esqueleto admita en alguna superficie compacta. Diversos autores han definido el *grafo de línea* de un grafo G como aquel que tiene un vértice por cada arista de G y dos vértices son adyacentes si y sólo si las aristas correspondientes son incidentes en G (ver [31]). De forma análoga se puede definir el grafo dual de un 2-complejo puro.

Así, si K es un 2-complejo puro, se define el *grafo dual* de K y se denota por $G(K)$, como el grafo obtenido al considerar un vértice por cada 2-símplice de K y tomar una arista entre dos vértices siempre que los 2-símplices correspondientes tengan un 1-símplice en común. Si K es un 2-complejo sin borde, se deduce de manera inmediata que $G(K)$ tiene valencia mínima tres, debido a que cada 2-símplice de K es adyacente al menos a otro 2-símplice por cada uno de sus 1-símplices cara.

A continuación, se muestran algunas propiedades del grafo dual dependiendo de las del 2-complejo del que proviene. La primera relaciona la conexión de ambos complejos.

Proposición 3.3.1 *Un 2-complejo es fuertemente conexo si y sólo si su grafo dual es conexo.*

Demostración: Sean v y v' dos vértices cualesquiera de $G(K)$ y sean σ y σ' los 2-símplices correspondientes en K . Debido a la conexión fuerte de K , existe un 1,2-arco en K entre un 1-símplice de σ y otro de σ' . Este 1,2-arco da lugar a un arco en $G(K)$ entre los vértices v y v' . Recíprocamente, si K no es fuertemente conexo, existen dos 1-símplices de K que no pueden ser unidos por un 1,2-arco. Entonces, existen en $G(K)$ dos vértices que no pueden unirse por un arco. \square

También se pueden relacionar las valencias de los 1-símplices del 2-complejo con las de los vértices de su grafo dual.

Proposición 3.3.2 *El grafo dual de un 2-complejo euleriano no contiene vértices de valencia par.*

Demostración: Sea K un 2-complejo euleriano. Si $G(K)$ tiene un vértice de valencia par, por ejemplo $2p$, se debe a que existe un 2-símplice σ en K que es adyacente a $2p$ 2-símplices. Entonces, σ tiene, al menos, un 1-símplice de valencia impar, lo cual es imposible pues K es euleriano y tiene todos sus 1-símplices de valencia par (ver Proposición 1.3.6). \square

Corolario 3.3.3 K_5 no es el grafo dual de ningún 2-complejo euleriano.

En general, no resulta fácil determinar si un grafo G es el dual de un 2-complejo euleriano. Así, las condiciones de conexión y de tener todos los vértices de valencia impar no son suficientes para que un grafo sea dual de un 2-complejo euleriano. Es más, si se añade la condición de planaridad, tampoco hay garantía de que exista un 2-complejo euleriano cuyo grafo dual sea G . Esto puede observarse en la Figura 3.1, en la que G está representado en trazo grueso y en trazo discontinuo aparece su dual geométrico. Este último no puede ser 2-complejo pues aparecen aristas múltiples.

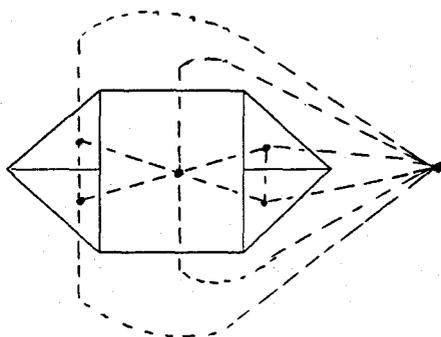


Figura 3.1: El dual de G no es un 2-complejo.

Con los siguientes resultados se relacionan las propiedades de transversalidad en el 2-complejo y en su grafo dual.

Proposición 3.3.4 Si un 2-complejo puro admite un recorrido euleriano, entonces su grafo dual es hamiltoniano.

Demostración: Si K admite un recorrido euleriano, K es fuertemente conexo y $G(K)$ es conexo. El recorrido euleriano pasa por todos los 2-símplices de K dando lugar en $G(K)$ a un circuito que contiene a todos los vértices y, por tanto, hamiltoniano. \square

Aunque el 2-complejo K no sea fuertemente conexo, se puede considerar por separado cada una de sus componentes fuertes, K_i . Si en cada K_i existe un 1,2-recorrido cerrado que contiene a todos los 2-símplices de K_i , éste se llamará también, por abuso de lenguaje, recorrido euleriano sobre la componente K_i . Como consecuencia de las proposiciones anteriores y teniendo en cuenta que todo grafo hamiltoniano es 2-conexo (ver [31]), se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.3.5 1. Si K es un 2-complejo tal que cada una de sus componentes fuertes admite un recorrido euleriano, entonces cada componente conexa de $G(K)$ es un grafo hamiltoniano.

2. Si K es un 2-complejo puro que admite un recorrido euleriano, entonces $G(K)$ es 2-conexo.

Ejemplo 3.3.6 Obsérvese que el grafo dual puede contener un circuito hamiltoniano que no proceda de un recorrido euleriano en el 2-complejo de partida. En el grafo $G(K)$ de la Figura 3.2, el circuito hamiltoniano

$$\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 5\},$$

no proviene de un recorrido euleriano en K , pues, si así fuera, en el recorrido sobre K aparecería la secuencia $\dots\{1, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \dots$ y esto es imposible, según la definición de 1,2-recorrido.

Sin embargo, el circuito hamiltoniano

$$\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\},$$

proviene del recorrido euleriano sobre K dado por

$$\{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \\ \{2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4\}.$$

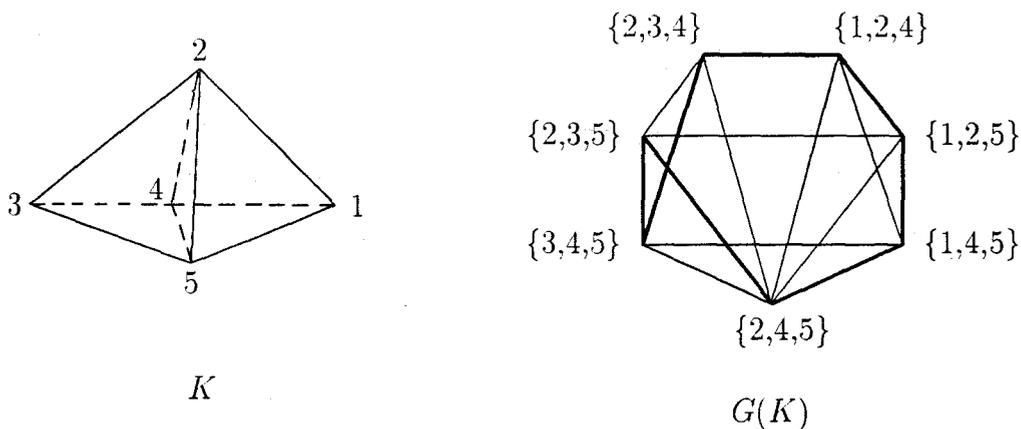


Figura 3.2: Circuito hamiltoniano en $G(K)$ que proviene de un recorrido euleriano en K .

Si se prescinde de la hipótesis “sin borde”, se pueden encontrar 2-complejos con borde que admiten recorrido euleriano. También existen 2-complejos fuertemente conexos, sin recorrido euleriano y cuyo grafo dual es hamiltoniano. En la Figura 3.3, K y K' son ejemplos de 2-complejos que gozan de estas propiedades y tienen el mismo grafo dual: K_3 .

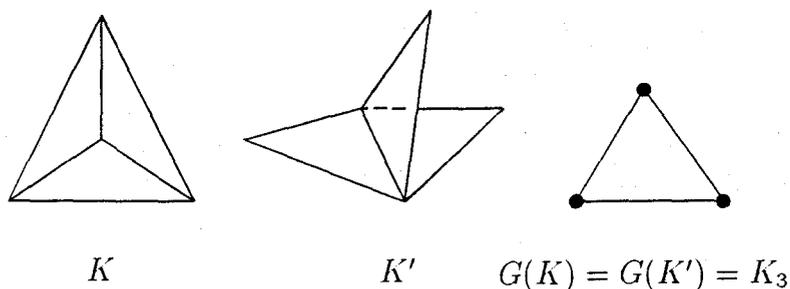


Figura 3.3: 2-Complejos con borde con un mismo grafo dual.

Se concluye, por tanto, que hay casos en los que el grafo dual no proporciona suficiente información sobre la existencia de recorrido euleriano en un 2-complejo. No obstante, en el caso particular de las 2-seudovariedades, se tiene un teorema que da una condición necesaria y suficiente para la existencia de recorrido euleriano sobre éstas.

3.4 Recorridos Eulerianos sobre 2-seudovarietades

En esta sección se demuestra un teorema que caracteriza las 2-seudovarietades con recorrido euleriano. Además se construye un 2-complejo que no admite recorrido euleriano pero cuyo conjunto de 2-símplices sí puede partirse en ciclos. Por último, se da una forma de generar triangulaciones de superficies compactas que contengan recorrido euleriano. Se comienza por el teorema de caracterización que facilitará la deducción de los resultados posteriores.

Teorema 3.4.1 *Una 2-seudovarietad admite un recorrido euleriano si y sólo si su grafo dual es hamiltoniano.*

Demostración: En esta prueba, σ denotará indistintamente un 2-símplice de la 2-seudovarietad K o su vértice correspondiente en $G(K)$; el par (σ, σ') denotará una arista de $G(K)$ y $\sigma \cap \sigma'$ el 1-símplice de K común a los 2-símplices σ y σ' .

Si K es 2-seudovarietad con recorrido euleriano, $G(K)$ es hamiltoniano según se ha probado en la Proposición 3.3.4.

Para probar el recíproco hay que tener en cuenta que si K es 2-seudovarietad, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de 1-símplices de K y el conjunto de aristas de $G(K)$. Esto se debe a que cada 1-símplice de K tiene valencia dos y, como consecuencia, dos aristas de $G(K)$, (σ, σ') y (σ'', σ''') , son distintas si y sólo si los 1-símplices de K , $\sigma \cap \sigma'$ y $\sigma'' \cap \sigma'''$, son distintos.

Sea C el circuito hamiltoniano de $G(K)$. El recorrido euleriano de K se obtiene eligiendo, en un primer paso, los 2-símplices y 1-símplices a partir de los vértices y aristas de C (en el mismo orden en que éstos aparecen), salvo el último vértice. El 1,2-camino así construido pasa por todos los 2-símplices de K y es un 1,2-recorrido pues no repite 2-símplices. Además, se puede cerrar colocando en primer lugar el 1-símplice correspondiente a la última arista de C , dando lugar al recorrido euleriano sobre K que se buscaba. \square

Un caso particular de 2-seudovarietades es el de las superficies compactas. Merece la pena detenerse en el estudio de la Esfera y posteriormente se hará

referencia también al caso del Toro. Recuérdese que un grafo es 3-conexo si al eliminar cualquier par de vértices en él el grafo resultante sigue siendo conexo. Un 3-politopo convexo es subconjunto compacto y conexo de \mathbf{R}^3 construido como el cierre convexo de un conjunto finito de puntos de \mathbf{R}^3 .

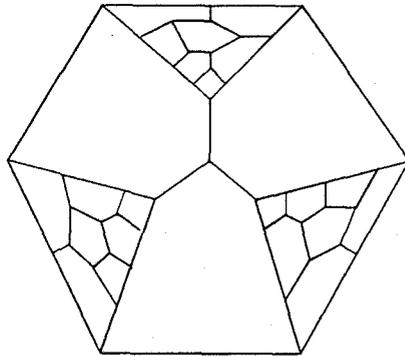
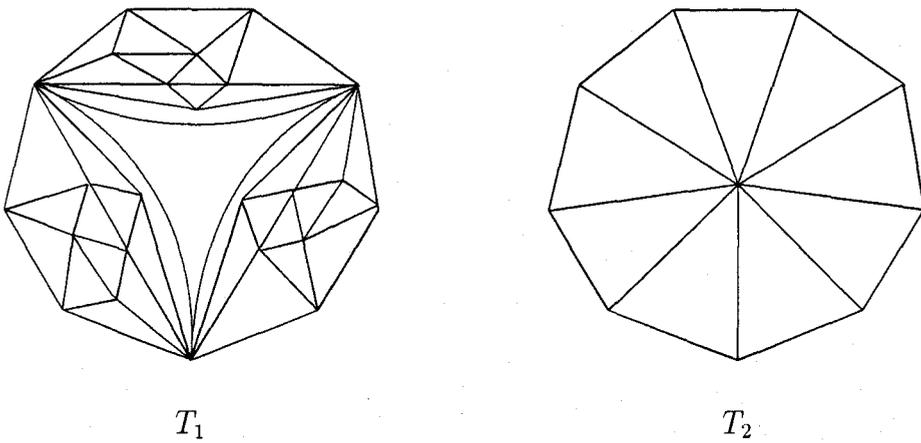
El Teorema de Steinitz ([53]) afirma que todo mapa 3-conexo sobre la esfera es isomorfo al grafo de vértices y aristas de algún 3-politopo convexo. Como consecuencia de este resultado, si un 2-complejo es homeomorfo a una esfera triangulada, su grafo dual es un 3-politopo simple (es decir, un politopo convexo, tridimensional con todos los vértices de valencia 3). Barnette ([11]) ha probado que todo 3-politopo simple con 34 vértices o menos es hamiltoniano. A partir de un 3-politopo simple P se puede construir el 2-complejo cuyo grafo dual es P , sin más que considerar el grafo dual del mapa que describe P sobre la esfera. De este modo, el resultado de Barnette ([11]) es equivalente al que se da a continuación.

Corolario 3.4.2 *Toda triangulación de la esfera con 34 caras o menos contiene un recorrido euleriano.*

Es sabido que el menor grafo 3-conexo, 3-regular y no hamiltoniano tiene 38 vértices (tal como cita Grünbaum en [29], esto fue probado independientemente por distintos autores, Bosak y Lederberg, [38]). Si P es el correspondiente 3-politopo simple y no hamiltoniano de 38 vértices, el 2-complejo cuyo grafo dual es P no puede contener un recorrido euleriano. Partiendo de esta idea, se encuentran numerosos ejemplos de 2-complejos sin recorrido euleriano.

Ejemplo 3.4.3 En este ejemplo se ha escogido el Grafo de Tutte [55] (ver Figura 3.4) como 3-politopo simple y no hamiltoniano (de 46 vértices) para mostrar que es posible encontrar un 2-complejo puro, fuertemente conexo y sin borde que no contiene recorrido euleriano y cuyo conjunto de 2-símplices admite una partición en ciclos. Tal 2-complejo es homeomorfo a la triangulación de la esfera cuyo grafo dual es el Grafo de Tutte.

Cada hemisferio de la esfera queda triangulado según se ve en los discos planos T_1 y T_2 de la Figura 3.5. Identificando los bordes de estos discos y haciendo que coincidan con el ecuador de la esfera, se obtiene la triangulación adecuada.

Figura 3.4: *Grafo de Tutte*Figura 3.5: *Discos triangulados.*

A continuación, se detalla, en trazo discontinuo, una partición en ciclos del conjunto de 2-símplices de dicha triangulación (Figura 3.6).

Igual puede darse una partición del conjunto de vértices del Grafo de Tutte de forma que el subgrafo inducido por cada elemento de la partición resulta ser hamiltoniano, según se ve en la Figura 3.7.

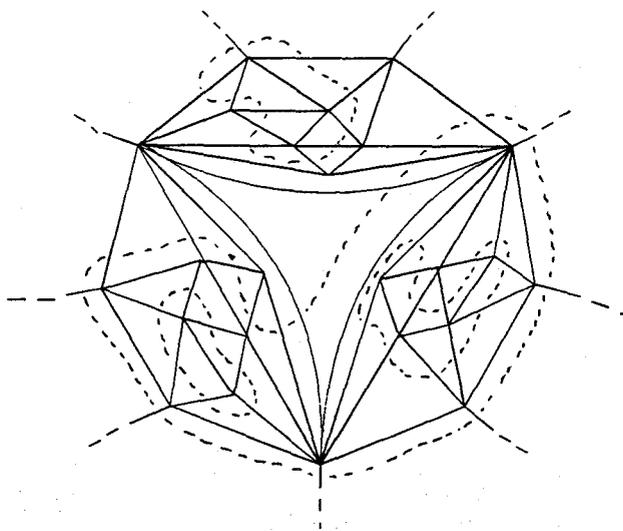


Figura 3.6: *Partición en ciclos sobre la esfera triangulada*

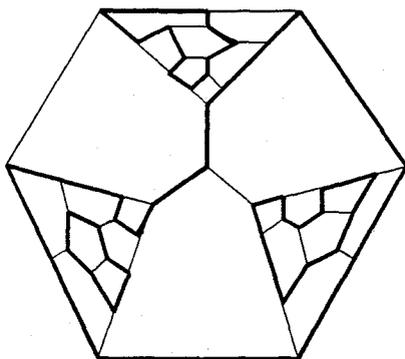


Figura 3.7: *Ciclos sobre el Grafo de Tutte*

Como es sabido, un grafo es plano si y sólo si tiene dual geométrico (tal como prueba Whitney en [57]). Además, un grafo es plano si y sólo si admite una inmersión en la esfera. Estos dos resultados subyacen en todo el desarrollo anterior, permitiendo razonar con el dual geométrico del grafo tanto en la esfera como en el plano para pasar del politopo al grafo dual y recíprocamente. En el caso en que el grafo admita una inmersión en una superficie de género mínimo > 0 , no es tan claro que, a partir de la inmersión en esta superficie, pueda considerarse su dual y que éste proporcione una triangulación de dicha superficie.

La proposición siguiente da un ejemplo de un grafo hamiltoniano con todos los vértices de valencia impar pero que no es dual de un 2-complejo euleriano.

Proposición 3.4.4 $K_{3,3}$ no es el dual de ningún 2-complejo euleriano.

Demostración: Si existe un 2-complejo K cuyo grafo dual es $K_{3,3}$, entonces K tiene 6 2-símplices. Como $K_{3,3}$ es cúbico y bipartito, K tiene 9 1-símplices. Más aún, por ser $K_{3,3}$ un grafo de género 1, K debe ser una triangulación del Toro. Usando la Fórmula de Euler-Poincaré resulta que K tiene 3 0-símplices. De aquí se deduce que todas las caras tienen en común a estos tres vértices, pero esto es imposible y, por tanto, no existe el 2-complejo K . \square

En resumen, con este ejemplo se vislumbra el amplio estudio que requeriría el caso de las superficies compactas con género > 0 , lo cual se aparta de los objetivos más concretos de este capítulo.

Volviendo entonces al estudio de los recorridos eulerianos sobre las 2-seu-dovariedades y recopilando lo expuesto hasta ahora, se deducen algunas conclusiones importantes que motivan el desarrollo de los próximos resultados que aparecen.

En primer lugar, recuérdese el resultado clásico de Teoría de Grafos (Teorema 1.1.1) que establece la equivalencia entre la propiedad de ser euleriano y la existencia de una partición del conjunto de las aristas del grafo en ciclos (dado por Hierholzer en [33]). En otras palabras, encontrar un recorrido euleriano en un complejo simplicial de dimensión 1 equivale a dar una partición del conjunto de sus 1-símplices de forma que cada subconjunto de la partición constituye un ciclo del 1-complejo.

En contra de lo que pudiera pensarse de manera natural, el Ejemplo 3.4.3 muestra que no sucede lo mismo al aumentar la dimensión. Así, para el 2-complejo del ejemplo puede darse una partición del conjunto de sus símplexes de mayor dimensión de manera que cada subconjunto de la partición forma un ciclo en el 2-complejo, mientras que es imposible encontrar el recorrido euleriano.

Además, volviendo al Teorema de Caracterización de los Grafos Eulerianos (Teorema 1.1.1), la condición 2 afirma que un grafo conexo admite un recorrido

euleriano si y sólo si todos sus vértices son de valencia par. En el Capítulo 1 se ha demostrado que los 2-complejos eulerianos tienen todos los 1-símplices de valencia par (Corolario 1.3.6). Entonces, los ejemplos anteriores dejan constancia de que no existe relación alguna entre los 2-complejos eulerianos y los 2-complejos que admiten recorrido euleriano. Esto es, existen 2-complejos eulerianos con y sin recorrido euleriano, así como 2-complejos no eulerianos que admiten recorrido euleriano. Más en general, estos mismos ejemplos permiten deducir que las condiciones “ser par” y “contener recorrido euleriano” también son independientes cuando se trabaja con 2-complejos.

Hasta ahora se ha estudiado la existencia de recorrido euleriano sobre un 2-complejo o una superficie compacta con una triangulación dada. El último resultado de esta sección permite generar triangulaciones sobre superficies compactas, orientables y no orientables, con recorrido euleriano.

Teorema 3.4.5 *Cualquier superficie compacta admite una triangulación que contiene un recorrido euleriano.*

Demostración: Para la esfera se puede considerar la triangulación dada por el tetraedro que contiene un recorrido euleriano de forma inmediata. Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran, en trazo grueso, las triangulaciones adecuadas para el toro y el plano proyectivo. Los trazos discontinuos marcan sendos recorridos eulerianos.

El Teorema de Clasificación de las Superficies Compactas (Teorema 0.1.3) afirma que cualquier superficie compacta es homeomorfa a una esfera, o bien a una suma conexa de toros, o bien a una suma conexa de planos proyectivos. Por consiguiente, para completar la demostración, basta probar que la suma conexa de dos superficies compactas trianguladas con recorrido euleriano es otra superficie triangulada que también contiene recorrido euleriano y aplicar posteriormente el principio de inducción.

Sean M_1 y M_2 dos superficies trianguladas con recorridos eulerianos dados por:

$$E_i : \mu_{i1}, \sigma_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ir_i}, \sigma_{ir_i}, \mu_{i1}, \quad i = 1, 2.$$

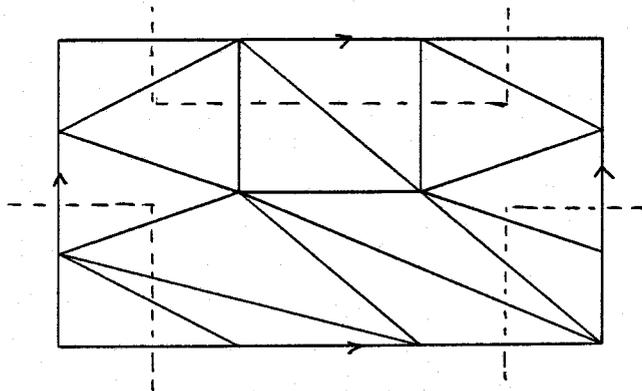


Figura 3.8: *Poliedro de Császár con recorrido euleriano.*

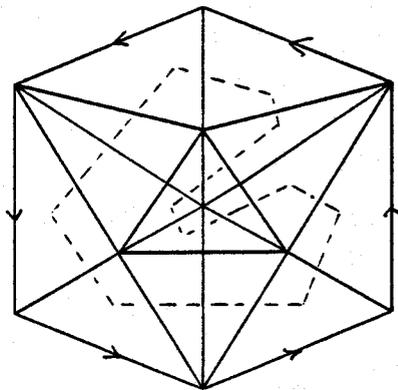


Figura 3.9: *Recorrido euleriano sobre el plano proyectivo triangulado*

Si se toma la suma conexa $M_1 \# M_2$ usando los 2-símplices σ_{11} y σ_{21} e identificando los 1-símplices $\mu_{11} \equiv \mu_{21}$ y $\mu_{12} \equiv \mu_{22}$, el recorrido

$$E : \mu_{12} \equiv \mu_{22}, \sigma_{22}, \mu_{23}, \dots, \mu_{2r_2}, \sigma_{2r_2}, \mu_{21} \equiv \\ \mu_{11}, \sigma_{1r_1}, \mu_{1r_1}, \dots, \mu_{13}, \sigma_{12}, \mu_{12}$$

es euleriano en la superficie $M_1 \# M_2$. □

3.5 Recorrido Euleriano y Grafo Intersección

A la luz de los resultados obtenidos en la sección anterior, es obvia la necesidad de profundizar en las propiedades de los 2-complejos que admiten recorrido euleriano. En esta sección se introducen las nociones de otros grafos que luego permitirán dar caracterizaciones de dichos 2-complejos.

Además del grafo dual, se puede asociar a un 2-complejo K el *grafo intersección* de un subconjunto de símlices de K . La definición más extendida de este concepto es la que se recoge en el libro de Harary ([31]). En general, si $F = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de un conjunto S , tal que

$$\bigcup_{i=1}^{i=p} S_i = S,$$

se llama *grafo intersección* de F al grafo cuyo conjunto de vértices coincide con F y dos vértices S_i y S_j son adyacentes siempre que $i \neq j$ y $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

En este trabajo, se utiliza, para un 2-complejo K , un subgrafo del grafo intersección del conjunto formado por los 1-símlices y 2-símlices de K . Por abuso de lenguaje, se le llamará también grafo intersección. En concreto, si K es un 2-complejo puro y S el conjunto de sus 1-símlices y 2-símlices, se llama *Grafo Intersección de S* y se denota por $I(S, K)$, al grafo obtenido al considerar un vértice por cada elemento de S y tomar una arista entre dos vértices correspondientes a símlices de distinta dimensión tales que el 1-símlice es cara del 2-símlice en K .

Para facilitar el estudio del 2-complejo a partir de las propiedades de un grafo, conviene escoger un grafo con “pocos” vértices. Por tal motivo se ha escogido un grafo con propiedades análogas a las del grafo intersección pero con menos vértices, el *Grafo Intersección de 1-símlices de ramificación*.

Definición 3.5.1 Sean K un 2-complejo puro y T el conjunto formado por todos los 2-símlices de K y los 1-símlices con valencia mayor que dos. Se llama *Grafo Intersección de 1-símlices de ramificación de K* y se denota por $\tilde{I}(K)$, al grafo obtenido al considerar un vértice por cada elemento de T y tomar una arista entre dos vértices siempre que:

- (a) Los vértices corresponden a dos 2-símplices con un 1-símplice común de valencia ≤ 2 .
- (b) Los vértices corresponden a símplices de distinta dimensión y el 1-símplice es cara del 2-símplice.

Obsérvese que un vértice que corresponde a un 2-símplice de K tiene valencia 3 tanto en $I(S, K)$ como en $\tilde{I}(K)$. Sin embargo, no todo vértice de valencia 3 en alguno de estos grafos proviene siempre de un 2-símplice de K . Esto se deduce del hecho de que K puede contener algún 1-símplice de valencia 3 que da lugar a un vértice de valencia 3 en $\tilde{I}(K)$ y en $I(S, K)$ (ver Figura 3.10).

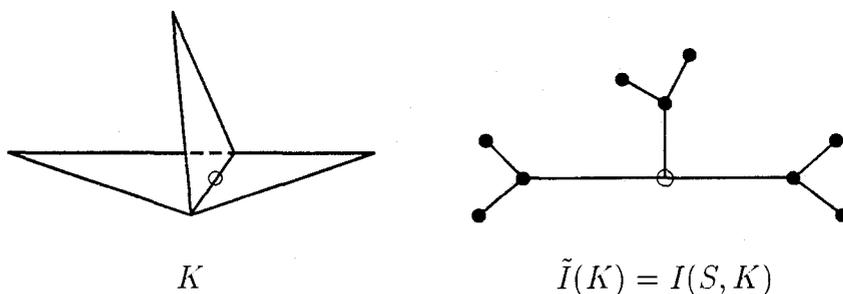


Figura 3.10: En $\tilde{I}(K)$ y en $I(S, K)$ hay vértices de valencia 3 que provienen de 1-símplices de valencia 3 en K .

También se tiene, a partir de las definiciones anteriores, que si K es una 2-seudovariiedad, entonces $G(K)$ e $\tilde{I}(K)$ son grafos isomorfos, ya que todos los 1-símplices de K tienen valencia dos y el conjunto T estará formado sólo por los 2-símplices de K . En la Figura 3.11 se ilustra esta situación.

Si se compara $G(K)$ con $I(S, K)$ cuando K es 2-seudovariiedad, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.5.2 *Si K es una 2-seudovariiedad, $G(K)$ e $I(S, K)$ son grafos homeomorfos.*

Demostración: Basta probar que $I(S, K)$ es una subdivisión de $G(K)$. Por ser K una 2-seudovariiedad, tiene todos sus 1-símplices de valencia dos y $G(K)$ es

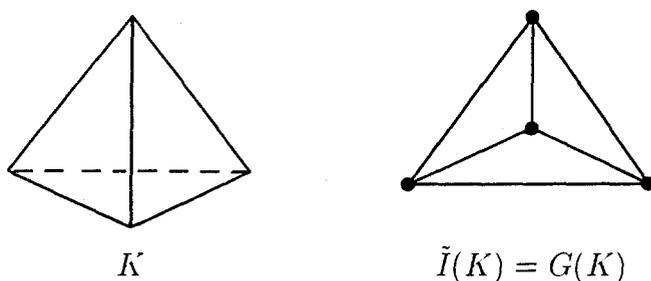


Figura 3.11: $G(K)$ e $\tilde{I}(K)$ son isomorfos cuando K es 2-seudovariiedad

cúbico. Además existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de 1-símplices de K y el de las aristas de $G(K)$. Insertando un vértice en cada arista de $G(K)$ se obtiene el grafo $I(S, K)$. \square

Más en general, si K es un 2-complejo puro cualquiera, se deduce que $I(S, K)$ e $\tilde{I}(K)$ son grafos homeomorfos y esta es la razón que permite elegir el segundo grafo, por contener la misma información que el primero pero menor número de vértices.

Proposición 3.5.3 *Si K es cualquier 2-complejo puro, entonces $I(S, K)$ e $\tilde{I}(K)$ son grafos homeomorfos.*

Demostración: Basta probar que $I(S, K)$ es una subdivisión de $\tilde{I}(K)$. Para ello, téngase en cuenta que, por cada 1-símplice de K , de valencia $r > 2$, aparecen un vértice en $I(S, K)$ y otro en $\tilde{I}(K)$, ambos de valencia r . Además, por cada 1-símplice μ de valencia 2 de K , aparece en $I(S, K)$ un vértice de valencia 2, mientras que en $\tilde{I}(K)$ aparece una arista que une los dos vértices correspondientes a los 2-símplices que comparten μ . Insertando un vértice en cada una de estas aristas se obtiene la subdivisión de $\tilde{I}(K)$ que es isomorfa al grafo $I(S, K)$. \square

En la Proposición 3.3.1 se ha probado que la conexión fuerte de un 2-complejo es equivalente a la conexión de su grafo dual. Análogamente, se de-

muestra que dicha propiedad también se verifica para ambos grafos intersección.

Proposición 3.5.4 *Un 2-complejo K es fuertemente conexo si y sólo si $I(S, K)$ e $\tilde{I}(K)$ son conexos.*

Demostración: Puesto que los dos grafos son homeomorfos, basta probar que $\tilde{I}(K)$ es conexo. Pero esto es obvio pues, por un razonamiento similar al que se hizo en la prueba de la Proposición 3.3.1, todo 1,2-arco entre símlices de K da lugar a un arco entre los vértices correspondientes en $\tilde{I}(K)$. Recíprocamente, todo arco entre vértices del grafo proviene de un 1,2-arco entre símlices del 2-complejo. \square

En estas condiciones, es posible dar una caracterización de los 2-complejos que admiten recorrido euleriano, relacionándolos con una familia de grafos, “casi eulerianos”.

Teorema 3.5.5 *K es un 2-complejo puro que admite recorrido euleriano si y sólo si $\tilde{I}(K)$ contiene un subgrafo euleriano \mathcal{E} tal que $V(\mathcal{E}) = V(\tilde{I}(K))$.*

Demostración: El recorrido euleriano en K da lugar en $\tilde{I}(K)$ a un recorrido cerrado E que pasa por todos los vértices de $\tilde{I}(K)$. El subgrafo \mathcal{E} tiene como conjunto de vértices $V(\mathcal{E}) = V(E) = V(\tilde{I}(K))$ y su conjunto de aristas es $A(\mathcal{E}) = A(E)$. De este modo, el recorrido E es euleriano en este subgrafo.

Recíprocamente, a partir del subgrafo \mathcal{E} se puede construir el recorrido euleriano sobre K .

Para simplificar la notación, se usará el mismo nombre para cada símlice de K y el vértice correspondiente en $\tilde{I}(K)$. De este modo, μ representará indistintamente un 1-símlice de valencia mayor que dos en K o un vértice en $\tilde{I}(K)$, σ será un 2-símlice o un vértice y los 1-símlices de valencia dos en K se denotarán como intersección de los 2-símlices que lo contienen.

Considérense los símlices de K según la secuencia en que aparecen los vértices del mismo nombre en el recorrido euleriano sobre \mathcal{E} , por ejemplo:

$$\dots, \mu, \sigma, \sigma', \mu', \sigma'', \mu'' \dots$$

Si en esta lista de símplices aparecen dos 2-símplices consecutivos, σ y σ' , se debe a que ambos comparten un 1-símplice, $\sigma \cap \sigma'$. De manera natural se obtiene el recorrido euleriano sobre K sólo con introducir un 1-símplice del tipo $\sigma \cap \sigma'$ siempre que en el recorrido euleriano sobre \mathcal{E} aparezca tal par de vértices adyacentes. Entonces, la secuencia de símplices en K será del tipo:

$$\dots, \mu, \sigma, \sigma \cap \sigma', \sigma', \mu', \sigma'', \mu'', \dots$$

□

Ejemplo 3.5.6 Se muestra con la Figura 3.12 que $\tilde{I}(K)$ no es euleriano, en general, aunque K contenga recorrido euleriano. Es decir, el subgrafo \mathcal{E} está estrictamente contenido en $\tilde{I}(K)$, aunque los conjuntos de vértices de ambos coincidan, no ocurre lo mismo con las aristas.

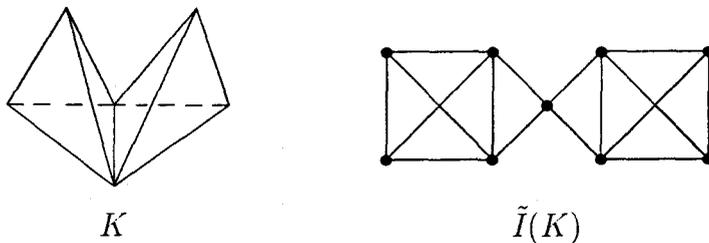


Figura 3.12: $\tilde{I}(K)$ no es euleriano pues tiene vértices de valencia impar.

El concepto de circuito hamiltoniano conocido para grafos también tiene su análogo en el ámbito de los 2-complejos. Concretamente, si K es un 2-complejo puro, se llama *1,2-Circuito Hamiltoniano* en K a un recorrido euleriano sobre K en el que todos los 1-símplices son distintos. Dicho de otra manera, un 1,2-circuito hamiltoniano en K es un ciclo que contiene a todos los 2-símplices de K .

Hay que hacer notar que esta noción es distinta de la de circuito hamiltoniano sobre mapas regulares y 3-politopos estudiada por otros autores (Alshuler, [6] y Barnette, [11]). Concretamente, éstos han trabajado con circuitos hamiltonianos sobre el grafo de vértices y aristas de 2-complejos celulares (no necesariamente simpliciales).

Como ya se ha dicho, un 1,2-circuito hamiltoniano es un caso particular de recorrido euleriano; sin embargo, la Figura 3.12 muestra que no todo recorrido

euleriano es 1,2-circuito hamiltoniano. Sólo hay seguridad de que los dos conceptos coincidan cuando los 1-símplices del 2-complejo tengan valencia máxima 3.

Proposición 3.5.7 *Si K tiene todos sus 1-símplices de valencia menor o igual que tres, todo recorrido euleriano en K es un 1,2-circuito hamiltoniano.*

Demostración: Si K es 2-seudovariedad, todos sus 1-símplices tienen valencia 2 y el recorrido euleriano sólo puede pasar una vez por cada uno de ellos. Por tanto, es inmediato el resultado en este caso.

En el caso general, para probar que todo recorrido euleriano E sobre K que contenga 1-símplices de valencia 3 es un 1,2-circuito hamiltoniano, téngase en cuenta que cada 1-símplice de valencia 3 puede aparecer en E sólo una vez. De no ser así, se repetirían 2-símplices en E , lo cual contradice la definición de recorrido euleriano. \square

Y para terminar esta sección, se demuestra un teorema de caracterización para 2-complejos con 1,2-circuito hamiltoniano, relacionándolos con grafos hamiltonianos.

Teorema 3.5.8 *Un 2-complejo K contiene un 1,2-circuito hamiltoniano si y sólo si $\tilde{I}(K)$ es hamiltoniano.*

Demostración: Si K contiene un 1,2-circuito hamiltoniano, C , por el Teorema 3.5.5, $\tilde{I}(K)$ contiene un subgrafo euleriano \mathcal{E} cuyo conjunto de vértices coincide con el de $\tilde{I}(K)$. Como C no repite 1-símplices, el recorrido euleriano en \mathcal{E} no repite vértices y es, por tanto, un circuito hamiltoniano en $\tilde{I}(K)$.

Recíprocamente, si C es el circuito hamiltoniano en $\tilde{I}(K)$, se puede construir un 1,2-circuito hamiltoniano de forma similar a como se hizo en el Teorema 3.5.5 para el recorrido euleriano. \square

La última figura (Figura 3.13) da el grafo intersección de 1-símplices de ramificación del 2-complejo de la Figura 3.2. A la hora de encontrar un recorrido euleriano sobre K , parece clara la comodidad de usar este grafo en lugar del grafo dual.

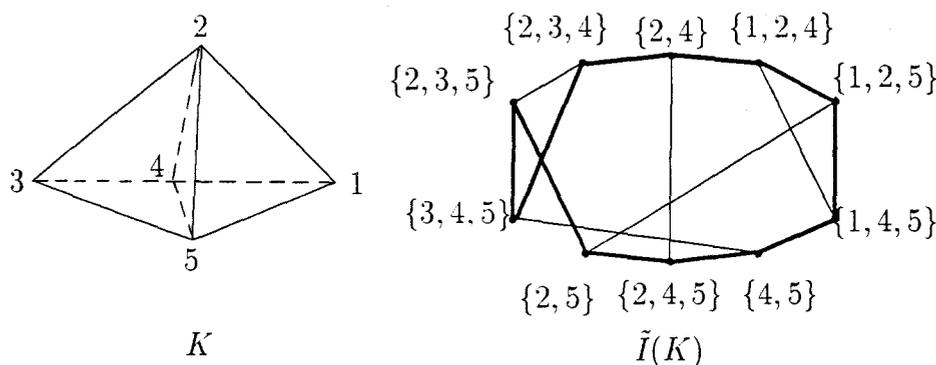


Figura 3.13: *Todo circuito hamiltoniano en $\tilde{I}(K)$ proviene de un recorrido euleriano en K , que es además 1,2-circuito hamiltoniano.*

3.6 Conclusiones y Problemas abiertos

En este capítulo se ha definido el concepto de recorrido euleriano sobre un 2-complejo simplicial (usando la noción de 1,2-recorrido dada por Harary y Palmer en [32]), como extensión natural de recorrido de Euler en dimensión 1. Como primera conclusión se obtiene que, para 2-complejos, contener un recorrido euleriano no es equivalente a ser euleriano ni a ser par, en ningún sentido. Dicho de otro modo, “ser euleriano” es una propiedad que representa algo distinto en dimensión 1 y en dimensión 2. Esta idea ya se ha señalado en el Capítulo 1, pero conviene volver sobre ella para insistir en que ninguna de las dos propiedades que caracterizan a los grafos eulerianos se verifican al aumentar la dimensión.

Para estudiar los recorridos sobre un 2-complejo ha sido útil analizar su grafo dual obteniendo condiciones necesarias para que un grafo hamiltoniano sea el dual de algún 2-complejo con recorrido euleriano. Sin embargo, cualquier circuito hamiltoniano en el grafo dual no proviene de un recorrido euleriano sobre el 2-complejo. Por ello, el grafo dual no es el más adecuado para decidir si un 2-complejo contiene un recorrido euleriano.

El Teorema 3.4.1 da una condición necesaria y suficiente para que una clase particular de 2-complejo (una 2-seudovariedad), contenga un recorrido euleriano. Al menos en este caso, el grafo dual caracteriza a las 2-seudovariedades con tal recorrido. En el caso general, se tiene también un teorema de caracterización que utiliza el grafo de intersección de 1-símplices de ramificación. El Teorema 3.5.5 garantiza la existencia de recorrido euleriano sobre un 2-complejo

siempre y cuando su grafo intersección de 1-símplices de ramificación contenga un subgrafo euleriano “que pasa” por todos los vértices del grafo.

El primer problema que se plantea a continuación es encontrar mejores caracterizaciones de los 2-complejos que admiten recorrido euleriano. Aunque las que aquí se dan en términos de Teoría de Grafos son prácticas en el sentido de que permiten trasladar el problema a uno de dimensión menor, conviene buscar otras en las que no intervengan los grafos hamiltonianos, pues para éstos no se conoce aún una caracterización cómoda.

En líneas generales, se dice que un problema de decisión es *NP* si existe un algoritmo no determinista que lo resuelve en tiempo polinomial. Un problema es *NP-completo* si es *NP* y cualquier otro problema *NP* se puede reducir a él mediante un algoritmo de tiempo polinomial. Como puede consultarse en el libro de Garey y Johnson [27], decidir si un grafo es hamiltoniano es un problema *NP-completo*. Asimismo, analizar los subgrafos de un grafo dado es un problema de tipo exponencial. He aquí otro motivo por el cual es interesante seguir profundizando en el estudio de los 2-complejos con recorrido euleriano: decidir si existe un algoritmo eficiente que responda si un 2-complejo contiene recorrido euleriano y si es posible construir dicho recorrido. En caso afirmativo, habrá que diseñarlo.

También aparece otra vía de investigación como es la de avanzar en la búsqueda de una familia de grafos hamiltonianos que sean duales de algún 2-complejo con recorrido euleriano, pues, como se ha apuntado en la Sección 3.4, éste no es un problema inmediato.

Capítulo 4

Separación Fuertemente Conexa

En el Capítulo 1 se ha descrito el proceso de separación de símlices para un 2-complejo con 1-símlices de valencia mayor que 2 y en el Capítulo 2 se dan algoritmos eficientes que lo realizan. En este capítulo se prueba que si el 2-complejo de partida es fuertemente conexo, se puede dar una separación de símlices tal que el 2-complejo resultante también es fuertemente conexo. Basta estudiar esto localmente, sin necesidad de analizar todo el 2-complejo. Además, se da un algoritmo que construye la 2-pseudovariedad fuertemente conexa de un par de triangulación asociado al 2-complejo.

4.1 Introducción

En capítulos anteriores se ha estudiado que el proceso de separación de símlices permite obtener un 2-complejo con todos sus 1-símlices de valencia menor o igual que 2 a partir de un 2-complejo que tenga 1-símlices de valencia estrictamente mayor que 2. Si el 2-complejo de partida es par, se obtendrá una 2-pseudovariedad (ver Sección 1.4).

También se han dado ejemplos en los que la separación de símlices da lugar a distintos 2-complejos (en el sentido de que no son homeomorfos) dependiendo de la elección de las parejas de 2-símlices que se separan (ver Figura 1.10).

Como ya se ha dicho, un 2-complejo simplicial es fuertemente conexo (o 1,2-conexo) si entre dos 1-símlices cualesquiera existe un 1,2-recorrido total-

mente contenido en él ([32]).

Uno de los objetivos de este capítulo es probar que se puede dar una separación de símplexes de tal manera que si el 2-complejo de partida es fuertemente conexo y par, también lo es el 2-complejo resultante después de la separación. De este modo, se consigue que no aumente el número de puntos singulares cónicos al aplicar la separación. A esta variante del proceso de separación se le llamará *Separación Fuertemente Conexa*.

El otro objetivo que se persigue en este capítulo es resolver este mismo problema mediante un algoritmo eficiente. Se trata pues de encontrar la 2-seudovariedad fuertemente conexa de un par de triangulación asociado al 2-complejo aplicando un algoritmo adecuado.

Para describir el proceso de separación fuertemente conexa, se utilizará como herramienta fundamental el grafo dual asociado al 2-complejo que se quiere separar. Según se ha definido el grafo dual de un 2-complejo (Sección 3.3), existe una correspondencia biyectiva entre los 2-símplexes del primero y los vértices del segundo. Además, dos vértices del grafo son adyacentes si y sólo si sus 2-símplexes correspondientes tienen un 1-símplex en común.

Por otra parte, se ha demostrado que si K es un 2-complejo fuertemente conexo, su grafo dual, $G(K)$, es conexo y recíprocamente (ver Proposición 3.3.1). Con estas propiedades, elegir una pareja de 2-símplexes para separar en K equivale a elegir una pareja de vértices adyacentes en $G(K)$. De este modo, si el grafo dual del 2-complejo obtenido tras la separación es conexo, entonces ha sido una “buena elección” de 2-símplexes, pues se ha conservado la conexión fuerte.

Así, el problema de separar los 2-símplexes de un 2-complejo fuertemente conexo y par, K , puede transformarse en un problema de Teoría de Grafos. Concretamente, se trata de dar un emparejamiento sobre el subgrafo de $G(K)$ inducido por los vértices que se corresponden con los 2-símplexes que hay que separar. En otras palabras, la clave para obtener un 2-complejo fuertemente conexo después de separar los 2-símplexes que comparten un 1-símplex (de valencia $2p > 2$) está en dar una elección adecuada de pares de vértices adyacentes en el grafo dual que se corresponden con tales 2-símplexes.

Para diseñar el algoritmo que construye la 2-seudovariedad fuertemente

conexa también se hace uso del grafo dual y se toma como base el estudio teórico realizado anteriormente, de ahí su nombre: Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa.

Este algoritmo utiliza otros auxiliares, como son el Algoritmo del Grafo Dual, el del Mínimo Subgrafo, el de Conexión y el de Ordenación de Vértices, que también se describen en modo detallado. Finalmente, se analiza la complejidad de cada uno de estos procesos.

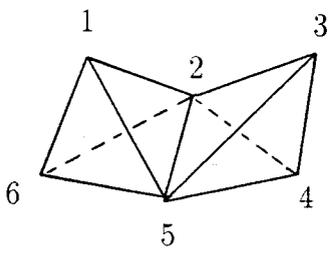
4.2 El Proceso de Separación Fuertemente Conexa

Por todo lo dicho, es clara la importancia de mejorar los resultados de los Capítulos 1 y 2 sobre el proceso de separación de símplices. Antes de describir formalmente en qué consiste este proceso, conviene comenzar dando la definición con la que se trabajará en todo lo que sigue.

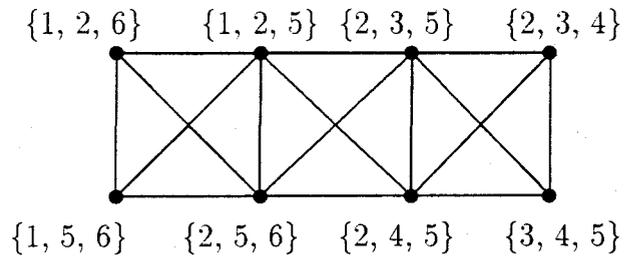
Definición 4.2.1 Se dice que el proceso de separación de símplices es una *Separación Fuertemente Conexa* si conserva la propiedad de la conexión fuerte.

En el siguiente ejemplo se detallan dos separaciones de un mismo 2-complejo y los grafos duales tanto de éste como de los complejos resultantes tras la separación.

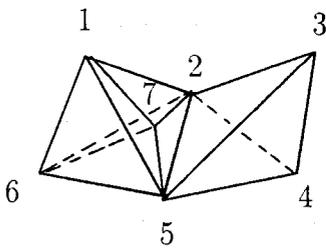
Ejemplo 4.2.2 En la Figura 4.1 se ilustran dos posibles elecciones de pares de 2-símplices en el Proceso de Separación. Puede observarse que en la primera opción se genera el 2-complejo K_1 que no es fuertemente conexo, mientras que con la otra elección se obtiene el 2-complejo fuertemente conexo K_2 . En el 2-complejo K_1 aparecen puntos singulares cónicos que se han originado con la separación y en K_2 han desaparecido todos los puntos singulares de línea sin generarse puntos cónicos. Se acompañan también de sus respectivos grafos duales y, como era de esperar, $G(K_2)$ es conexo y $G(K_1)$ no.



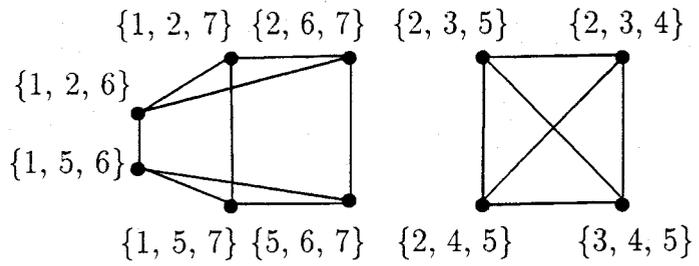
K



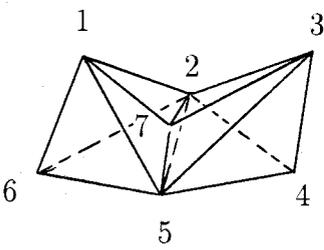
$G(K)$



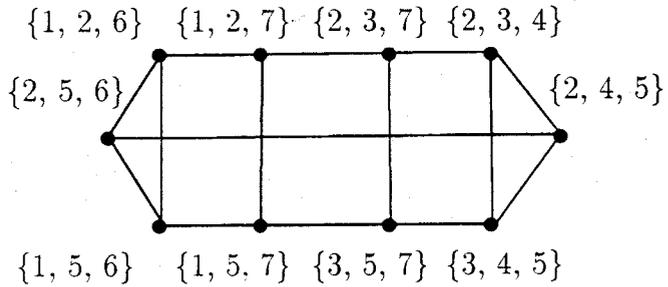
K_1



$G(K_1)$



K_2



$G(K_2)$

Figura 4.1: Dos separaciones de símplexes, 2-complejos resultantes y grafos duales asociados.

Por consiguiente, parece necesario profundizar en las propiedades del grafo dual de un 2-complejo par y cómo cambia éste después de separar simplices en K .

Si K es un 2-complejo par y μ es un 1-símplice de valencia $2p > 2$, se denotará por K_μ el subcomplejo de K formado por todos los 2-simplices que tienen intersección no vacía con μ (obsérvese que en K_μ pueden aparecer 2-simplices que sólo comparten con μ un 0-símplice y que puede ser un complejo con borde).

Si $G(K)$ es el grafo dual de K , entonces el dual de K_μ , $G(K_\mu)$, es subgrafo de $G(K)$ y contiene, a su vez, como subgrafo, al grafo completo K_{2p} (inducido por los $2p$ 2-simplices que comparten μ). Con esta notación, la proposición siguiente informa sobre la estructura local de $G(K_\mu)$.

Proposición 4.2.3 *Cada componente conexa de $G(K_\mu) - K_{2p}$ se conecta con K_{2p} mediante un número par de vértices de K_{2p} .*

Demostración: El 1-símplice $\mu = \{u, v\}$ está formado por puntos singulares de línea y en él inciden $2p$ 2-simplices de K . El $Lk(u, |K|)$ contiene como subgrafo a la estrella $K_{1,2p}$ según se muestra en la Figura 4.2.

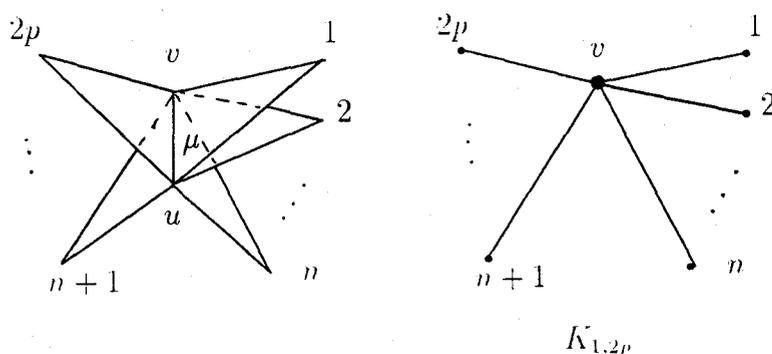


Figura 4.2: 2-simplices que inducen K_{2p} en $G(K_\mu)$ y $K_{1,2p} \subset Lk(u, K)$.

Sea H una componente conexa de $G(K_\mu) - K_{2p}$ que se conecta con n vértices de K_{2p} . Esto es lo mismo que decir que los vértices $1, 2, \dots, n$ están en

una misma componente conexa de $Lk(u, |K|) - v$ que no contiene a los demás $(n + 1, n + 2, \dots, 2p)$. Por ser K un 2-complejo par, $Lk(u, |K|)$ es un grafo euleriano o unión de ciclos disjuntos (Proposición 1.3.4) y todos sus vértices son de valencia par. De aquí, se tiene garantizado que todos los vértices del subgrafo

$$H' = Lk(u, |K|) - \{n + 1, n + 2, \dots, 2p\},$$

salvo v , tienen valencia par. Según se ha construido H' , es claro que $\delta_{H'}(v) = n$.

Por otra parte, en H' se verifica la relación:

$$2\#A(H') = \sum_{w \in V(H')} \delta(w) = \sum_{w \in V(H') - v} \delta(w) + \delta(v).$$

Como $\delta(w)$ es par, para todo $w \neq v$, se tiene que

$$n = \delta(v) = 2\#A(H') - \sum_{w \in V(H') - v} \delta(w)$$

es un número par y, por tanto, H se conecta con un número par n de vértices de K_{2p} . \square

Como consecuencia inmediata, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 4.2.4 *El máximo número de componentes conexas de $G(K_\mu) - K_{2p}$ es p .*

Antes de probar el resultado principal de esta sección, el Teorema de Separación Fuertemente Conexa, es necesario hacer algunas aclaraciones sobre cómo se modifica el grafo dual de K una vez que se ha realizado la separación de un 1-símplice. La Figura 4.3 muestra la situación para el caso en que el 1-símplice tiene valencia 4.

La separación de μ provoca la separación de vértices en $G(K)$ y las valencias de los vértices σ_1 y σ_2 se reparten entre los nuevos vértices σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} y σ_{22} . Este proceso se conoce con el nombre de "vertex splitting" en la literatura (ver [26] y [12], por ejemplo). Los vértices del grafo dual que no fueran adyacentes a alguno de los que se han separado permanecen invariantes.

Con estos resultados ya se tienen todas las condiciones para probar el teorema.

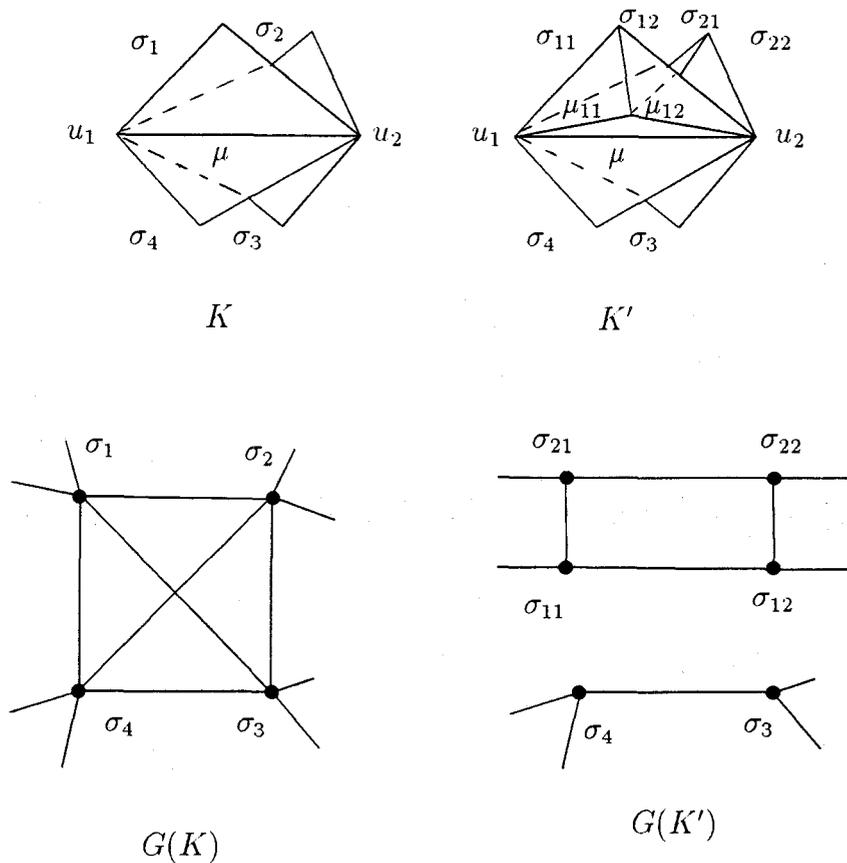


Figura 4.3: Separación de μ y separación de vértices en el grafo dual.

Teorema 4.2.5 (Teorema de Separación Fuertemente Conexa)

Es posible dar una separación fuertemente conexa para cualquier 2-complejo par fuertemente conexo.

Demostración: Sea K un 2-complejo par y fuertemente conexo. Sea μ un 1-símplice de valencia $2p > 2$ de K que se va a separar. Siguiendo con la notación anterior, K_μ es el subcomplejo formado por los 2-símplices de K que tienen intersección no vacía con μ . Los 2-símplices de K que comparten con μ un único vértice forman un subcomplejo de K_μ que se denotará por \tilde{K}_μ . El subcomplejo de K_μ formado por los $2p$ 2-símplices que contienen a μ , se denotará por S_{2p} . Así, se verifica la igualdad:

$$K_\mu = \tilde{K}_\mu \cup S_{2p}.$$

Como ya se ha señalado, se puede razonar sobre el grafo dual de K_μ y dar un emparejamiento de las aristas de $K_{2p} \subset K_\mu$ que será el que proporcione las parejas de 2-símplices en el complejo $S_{2p} \subset K$. Se dará el emparejamiento de distinta forma, atendiendo a la conexión del grafo $G(K_\mu) - K_{2p} = G(\tilde{K}_\mu)$.

Caso 1: Si $G(\tilde{K}_\mu)$ es conexo, la situación en $G(K_\mu)$ puede representarse como se ve en la Figura 4.4

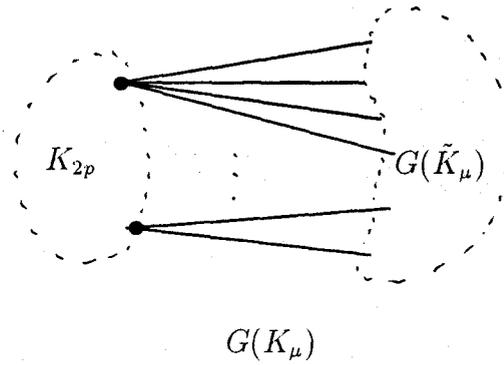


Figura 4.4: $G(K_\mu)$ cuando $G(\tilde{K}_\mu)$ es conexo.

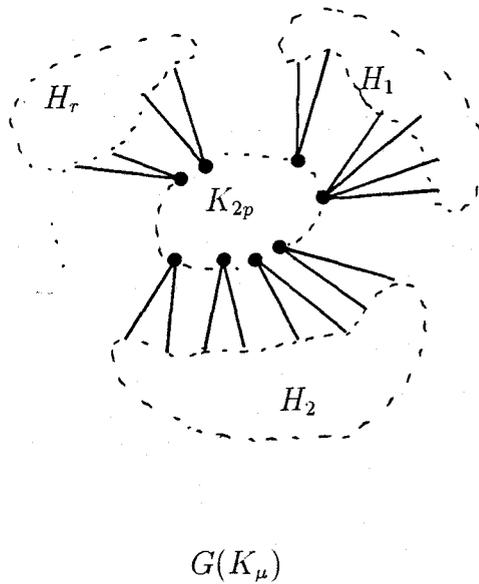


Figura 4.5: $G(K_\mu)$ cuando $G(\tilde{K}_\mu)$ no es conexo.

Por tanto, cualquier emparejamiento en K_{2p} es válido para obtener, tras la separación de los correspondientes 2-símplices, un 2-complejo fuertemente conexo. Esto es debido a que los vértices de $G(\tilde{K}_\mu)$ no se han modificado y entre dos nuevos vértices obtenidos por separación de los de K_{2p} existirá un arco que, eventualmente puede contener vértices de $G(\tilde{K}_\mu)$. Es decir, el nuevo grafo dual es conexo y queda probado el enunciado en este caso.

Caso 2: Si $G(\tilde{K}_\mu)$ no es conexo, sean H_1, H_2, \dots, H_r sus componentes conexas. Según se prueba en la Proposición 4.2.3, cada H_i se conecta con un número par de vértices de K_{2p} . Además, por ser K un 2-complejo par, todos los vértices de $G(K)$ tienen valencia impar (Proposición 3.3.2). En particular, los vértices de K_{2p} serán adyacentes a un número par de vértices de $G(\tilde{K}_\mu)$ y a los $2p-1$ vértices de K_{2p} . La Figura 4.5 da una representación aproximada de lo que ocurre en este caso.

Según el Corolario 4.2.4, el máximo valor que puede alcanzar r es p . Entonces, pueden distinguirse dos subcasos atendiendo a que r alcance o no dicho valor.

Caso 2.a: $r = p$

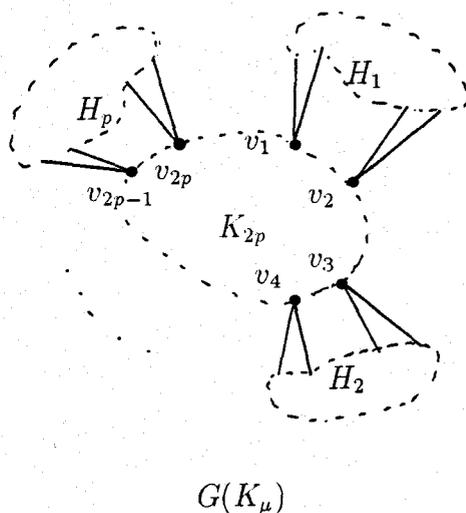


Figura 4.6: $G(K_\mu)$ cuando $G(\tilde{K}_\mu)$ tiene p componentes conexas.

La única posibilidad es que cada H_i se conecte con dos vértices de K_{2p} . En este caso se pueden ordenar los vértices de K_{2p} , $\{v_1, v_2, \dots, v_{2p}\}$ de manera

que el par $\{v_i, v_{i+1}\}$ está conectado con H_i con $i = 2l - 1$, para $l = 1, 2, \dots, p$. La Figura 4.6 ilustra esta situación.

Así, el emparejamiento dado por

$$\mathcal{M} = \{v_{i+1}v_{i+2} : i = 2l - 1, l = 1, 2, \dots, p\} \cup \{v_{2p}v_1\} \subset A(K_{2p}),$$

determina la parejas de 2-símplices que hay que escoger en el complejo K . Teniendo en cuenta la separación de vértices que se produce en el grafo dual tras la separación de símlices en el 2-complejo (ver Figura 4.3), en el grafo $G(K_\mu)$ sólo se separarán los vértices de K_{2p} , como puede verse en la Figura 4.7. El grafo resultante es conexo y queda probado que la separación de símlices según \mathcal{M} es fuertemente conexa.

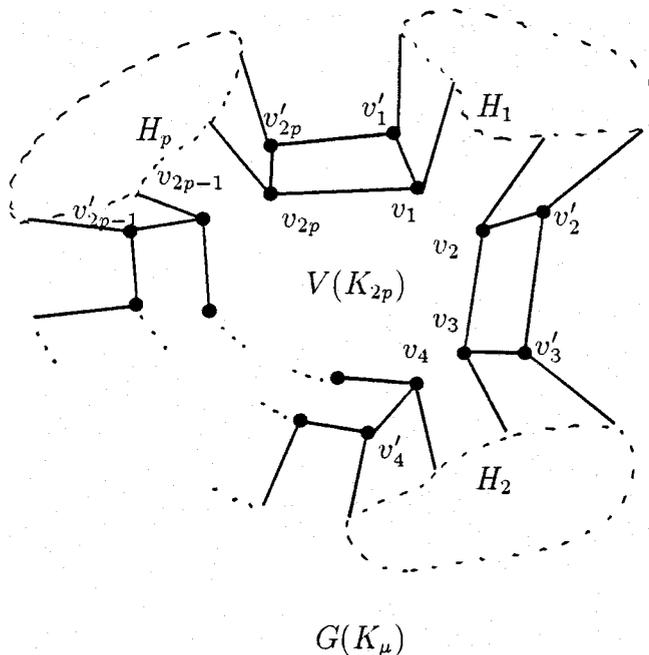


Figura 4.7: Separación de vértices en $G(K_\mu)$ tras la separación de símlices en K siguiendo el emparejamiento \mathcal{M} .

Caso 2.b: $r < p$

Cada componente H_i es adyacente a un número $2p_i$ de vértices de K_{2p} , que pueden denotarse por $\{v_1^i, v_2^i, \dots, v_{2p_i}^i\} \subset V(K_{2p})$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Como $r < p$, existe algún índice i tal que $p_i > 1$. Para cada i en tal condición, pueden tomarse dos vértices de K_{2p} adyacentes a H_i que, sin pérdida de generalidad, se denotarán por $\{v_1^i, v_2^i\}$.

Si algún índice j es tal que $p_j = 1$, se denotará el par vértices de K_{2p} adyacentes a H_j por $\{v_1^j, v_2^j\}$. Entonces, el conjunto de vértices

$$\{v_1^i, v_2^i : p_i > 1\} \cup \{v_1^j, v_2^j : p_j = 1\} \subset V(K_{2p})$$

induce un grafo completo K_{2r} que es subgrafo de K_{2p} . Puede verse en la Figura 4.8 un esquema de esta situación.

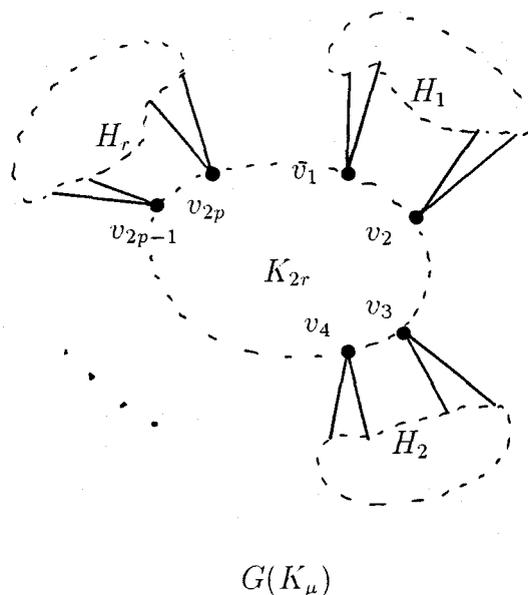


Figura 4.8: Adyacencias de $G(\tilde{K}_\mu)$ con $K_{2r} \subset K_{2p}$.

Los vértices de K_{2r} admiten una ordenación análoga a la que se da en el caso 2.a para los vértices de K_{2p} . Esta ordenación permite dar el siguiente conjunto \mathcal{M}_1 que es un emparejamiento en K_{2r} y que forma parte del emparejamiento buscado en K_{2p} :

$$\mathcal{M}_1 = \{(v_2^j, v_1^{j+1}) : j = 1, 2, \dots, r-1\} \cup \{(v_2^r, v_1^1)\} \subset A(K_{2r}).$$

Para completar el emparejamiento buscado en K_{2p} , se escogen las aristas de $K_{2p} - K_{2r}$,

$$\mathcal{M}_2 = \{(v_k^i, v_{k+1}^i) : 3 \leq k \leq 2p_i - 1, k \text{ impar y } p_i > 1\}.$$

que forman también un emparejamiento.

Entonces, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es un emparejamiento en K_{2p} y la elección de 2-símplices en la separación de K según indica \mathcal{M} da lugar a una separación fuertemente conexa.

En el grafo $G(K_\mu)$ quedan separados los vértices de K_{2r} de forma similar a como quedan los de K_{2p} en la Figura 4.7. La separación de los demás vértices de K_{2p} , los de \mathcal{M}_ϵ , no modifican la conexión del grafo dual. Esta es la razón por la cual el 2-complejo resultante es fuertemente conexo y concluye la prueba. \square

Es importante señalar que la Separación Fuertemente Conexa de un 2-complejo par requiere un estudio local de éste. Tal como se ha visto en la demostración del teorema, basta analizar el subcomplejo formado por los 2-símplices que tienen intersección no vacía con el 1-símplice de valencia mayor que 2 que se quiere separar y no es necesario considerar todo el 2-complejo después de la separación.

La condición “ser par” es necesaria pues, en caso de que el 2-complejo tenga algún 1-símplice de valencia impar, el 2-complejo que se obtiene después de separar los símplices puede tener nuevos 1-símplices borde y no ser fuertemente conexo. La Figura 4.9 muestra un ejemplo donde ocurre esta situación.

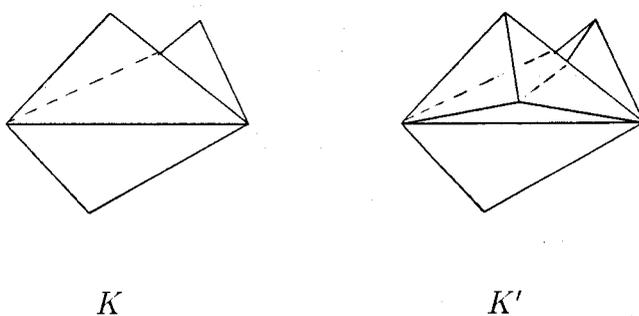


Figura 4.9: *Cualquier elección de 2-símplices en K da lugar a un 2-complejo no fuertemente conexo.*

Si el 2-complejo de partida no tiene borde y alguno de sus 1-símplices tiene valencia impar mayor que 1, tampoco hay garantía de que exista separación

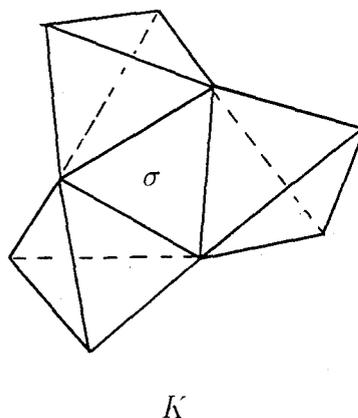


Figura 4.10: *No existe Separación Fuertemente Conexa de K .*

fuertemente conexas. La Figura 4.10 muestra un ejemplo en que esto sucede. El 2-símplexe σ tiene todos sus 1-símplices cara de valencia 3 y cualquier elección de pares de 2-símplices para hacer la separación da lugar a puntos singulares cónicos.

4.3 Algoritmo de Separación Fuertemente Conexas

En el Capítulo 2 se dan distintos algoritmos que permiten obtener una 2-variedad asociada a un 2-complejo par. A partir de la lista de 1-símplices de valencia mayor que 2 y sus 2-símplices cara que proporciona el Algoritmo de Identificación, se puede aplicar el Algoritmo de Separación y encontrar una 2-pseudovariedad asociada al 2-complejo en estudio. El Teorema de Separación Fuertemente Conexas garantiza la existencia de una 2-pseudovariedad fuertemente conexas. Puesto que en la demostración de este teorema se utiliza el grafo dual del 2-complejo, parece lógico usarlo también a la hora de resolver el mismo problema mediante un algoritmo.

En esta sección se recogen distintos algoritmos que proporcionan la in-

formación necesaria para poder aplicar finalmente el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa.

En primer lugar, se describe el algoritmo que calcula el grafo dual de un 2-complejo puro. Si K es tal 2-complejo, el algoritmo toma como datos de entrada la lista C de 2-símplices de K y da como salida los conjuntos V y A , de vértices y aristas del grafo dual de K .

Algoritmo del Grafo Dual

0. Leer los datos de K : la lista C .
 1. Iniciar $A = \emptyset$, $H = C$ y $V = C$.
 2. Para el primer elemento $\sigma \in H$, hacer: $H = H - \{\sigma\}$, $L = H$ y:
 - 2.1. Para el primer elemento $\sigma' \in L$, hacer $L = L - \{\sigma'\}$ y $\sigma \cap \sigma'$.
 - Si $\sigma \cap \sigma' = 1$ -símplice, entonces $A = A \cup \{(\sigma, \sigma')\}$
 - En otro caso, continuar.
 - 2.2. Si $L \neq \emptyset$, volver al Paso 2.1.
 Si $L = \emptyset$ y $H \neq \emptyset$, volver al Paso 2.
 Si $L = H = \emptyset$, continuar.
 3. $G = (V, A)$ es el grafo dual de K .
-

Proposición 4.3.1 *Se puede obtener el grafo dual de un 2-complejo puro con N 2-símplices en tiempo óptimo $O(N^2)$.*

Demostración: Si K es un 2-complejo puro con N 2-símplices, el Algoritmo del Grafo Dual construye el grafo dual de K . La complejidad de este algoritmo viene determinada por las operaciones que se realizan en el paso 2. Cuando se considera el elemento i -ésimo de la lista C de 2-símplices de K , σ , la lista L contiene $N - i$

elementos. Para cada $\sigma' \in L$ se obtiene $\sigma \cap \sigma'$. Entonces, el número de operaciones que se realizan en el paso 2 es del orden de

$$\sum_{i=1}^{N-1} (N-i) = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Obsérvese que se puede analizar el algoritmo anterior y deducir que es lineal en el número de aristas de $G(K)$, pero este número es del orden de $\binom{N}{2}$ y se llega a que el Algoritmo del Grafo Dual es eficiente y requiere tiempo $O(N^2)$, como se quería probar. \square

Según la prueba del Teorema de Separación Fuertemente Conexa (Teorema 4.2.5), para cada 1-símplice que hay que separar sólo se requiere un estudio local del 2-complejo y, por tanto, de un subgrafo de su grafo dual. Concretamente, si K es el 2-complejo y μ es el 1-símplice de valencia $2p > 2$ que se va a separar, basta considerar el subcomplejo K_μ de los 2-símplices de K que comparten alguna cara con μ .

Siguiendo la notación del Teorema 4.2.5, el grafo dual de K_μ , $G(K_\mu)$, contiene a K_{2p} como subgrafo. Sin embargo, una vez que se conocen los vértices de K_{2p} , como todos son adyacentes entre sí, se puede prescindir de las aristas de K_{2p} .

Con esto se observa que es posible considerar un subgrafo de $G(K_\mu)$ con el mínimo número de aristas pero con toda la información necesaria para hacer la separación fuertemente conexa. En este subgrafo son imprescindibles las aristas entre vértices de K_{2p} y vértices de $G(\tilde{K}_\mu)$. En lo que sigue, este subgrafo bipartito se denotará por G_μ .

Las aristas del subgrafo $G(K_\mu) - K_{2p} = G(\tilde{K}_\mu)$ permiten conocer la conexión del grafo que resulta después de la separación de μ . Sin embargo, no es necesario obtenerlas en esta etapa del proceso, pues los vértices de $G(\tilde{K}_\mu)$ contienen la información suficiente para reconstruir después el subgrafo $G(K_\mu) - A(K_{2p})$.

El algoritmo que se da a continuación construye el subgrafo G_μ con el mínimo número de aristas que hacen falta para estudiar la conexión después de la separación, de ahí el nombre: *Algoritmo del Mínimo Subgrafo*. Además, este

subgrafo es bipartito pues su conjunto de vértices está formado por los de K_{2p} y los de $G(\tilde{K}_\mu)$ y cada arista tiene un vértice en cada uno de estos conjuntos.

Si K es el 2-complejo par y μ es el 1-símplice que se quiere separar, el algoritmo trabaja con la lista C de 2-símplices de K y con la lista D_μ construida mediante el Algoritmo de Identificación. Aunque $D_\mu = \{\mu, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}\}$, una vez fijado μ , se puede considerar, sin pérdida de información, el conjunto $D_\mu = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}\}$,

Como salida, el Algoritmo del Mínimo Subgrafo da el subgrafo bipartito $G = (X \cup Y, A)$, donde:

- X es el conjunto de vértices correspondientes a los 2-símplices de K que contienen a μ (en $G(K)$ inducen K_{2p}),
- Y es el conjunto de vértices correspondientes a los 2-símplices de K que comparten con μ un 0-símplice (vértices de $G(K_\mu) - K_{2p}$).
- A es el conjunto de aristas que existen entre vértices de X y vértices de Y , según las adyacencias en K .

Algoritmo del Mínimo Subgrafo

0. Leer los datos de K : la lista C , el 1-símplice μ y el conjunto $D_\mu = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}\}$,
1. Hacer $X = D_\mu$, $Y = \emptyset$, $A = \emptyset$ y $D = C - D_\mu$
2. Mientras $D \neq \emptyset$, para el primer elemento $\sigma \in D$, hacer: $\sigma \cap \mu$, $D = D - \{\sigma\}$.
 - Si $\sigma \cap \mu = \emptyset$, volver al Paso 2.
 - Si $\sigma \cap \mu = 0$ -símplice, hacer $Y = Y \cup \{\sigma\}$ y
Para $i = 1, 2, \dots, 2p$, si $\sigma \cap \sigma_i \neq \emptyset$, hacer $A = A \cup \{(\sigma_i, \sigma)\}$.
Volver al Paso 2.
3. Dar el Grafo $G_\mu = (V, A)$, donde $V = X \cup Y$.

Con la notación seguida hasta el momento, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3.2 *Si K es un 2-complejo par con N 2-símplices y μ es un 1-símplice de valencia $2p > 2$, se puede construir el subgrafo $G_\mu \subset G(K)$ en tiempo $O((2p + 1)N)$.*

Demostración: El Algoritmo del Mínimo Subgrafo permite obtener G_μ , a partir de K , μ y el conjunto de los $2p$ 2-símplices que contienen a μ . D_μ .

Las operaciones más costosas son las intersecciones que se realizan en el paso 2. Inicialmente, D tiene $N - 2p$ elementos, luego $\sigma \cap \mu$ se realiza $N - 2p$ veces. Para cada $\sigma \in Y$ hay que ejecutar $\sigma \cap \sigma_i$ desde $i = 1$ hasta $2p$. En el peor caso, Y tiene tantos elementos como D , por tanto, $\sigma \cap \sigma_i$ se realizará, a lo sumo, $2p(N - 2p)$ veces.

En conclusión, el total de operaciones es del orden de $N - 2p + 2p(N - 2p)$ y el Algoritmo del Mínimo Subgrafo tiene complejidad $O((2p + 1)N)$. \square

El Algoritmo del Mínimo Subgrafo no da información sobre la conexión del subgrafo inducido por los vértices de Y , que no es otro que $G(\tilde{K}_\mu)$. Tal como se advirtió en el Capítulo 0, se puede dar una variante del algoritmo DFS que proporcione el número de componentes conexas de un grafo y que, en caso de ser no conexo, dé una partición del conjunto de vértices, $V = \cup_{i=1}^r W_i$, tal que cada W_i es el conjunto de vértices de una componente conexa.

Aunque en G_μ no aparecen las aristas de $G(\tilde{K}_\mu)$, éstas se pueden obtener aplicando el Algoritmo del Grafo Dual al conjunto Y que viene expresado como lista de 2-símplices del complejo de partida K . La importancia de considerar estas aristas reside en que permitirán dar las componentes conexas de $G(\tilde{K}_\mu)$ y, más tarde, la partición del conjunto de vértices Y . Además, al dar la partición de Y también se obtiene una ordenación. El paso siguiente será ordenar los vértices de X mediante otra partición $X = \cup_{i=1}^r X_i$ tal que los vértices de X_i son adyacentes sólo a los de W_i pero no a los de otro conjunto de la partición. En definitiva, se trata de expresar el mínimo subgrafo $G = (V, A)$ como un grafo r -partito.

A continuación, se describe el Algoritmo de Conexión, que toma como

datos de entrada los conjuntos de vértices y aristas del grafo G y da como salida el número de componentes conexas de G junto con la partición de V .

Algoritmo de Conexión

0. Leer los datos de $G = (V, A)$.
 1. Iniciar el contador $i = 1$ y la lista $\mathcal{V} = \emptyset$ que contendrá la partición del conjunto de vértices.
 2. Aplicar el algoritmo DFS a G para obtener el árbol maximal $T = (W, A')$. Hacer $W_i = W$, $A_i = A'$, $V = V - W_i$, $A = A - A_i$, $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \{W_i\}$,
 - 2.1. Si $V \neq \emptyset$, Hacer $G = (V, A)$, $i = i + 1$ y volver al Paso 2.
 - 2.2. Si $V = \emptyset$, continuar.
 3. $r = i$ es el número de componentes conexas de G y $\mathcal{V} = \cup_{i=1}^r W_i$ es la partición de V . FIN.
-

Proposición 4.3.3 *Se puede obtener el número de componentes conexas de un grafo y la partición que éstas inducen sobre el conjunto de vértices en tiempo $O(N)$, donde N es el número de aristas del grafo.*

Demostración: Si G es un grafo con N aristas, mediante el Algoritmo de Conexión se pueden obtener tanto las componentes conexas de G como la partición del conjunto de vértices que estas componentes inducen.

El coste del algoritmo viene determinado por las operaciones que se realizan en el paso 2. Como ya se ha dicho, el algoritmo DFS es de complejidad lineal en el número de aristas del grafo al que se aplica, siempre que éste sea conexo. Si el grafo G tuviera $r > 1$ componentes conexas, el Algoritmo de Conexión ejecuta el DFS por cada una de ellas. Entonces, en cada componente se requiere un número de operaciones del orden de $O(N_i)$, siendo N_i el número de aristas de la componente i -ésima. Como el total de aristas de G es $N = \sum_{i=1}^r N_i$, la complejidad total del Algoritmo de Conexión es $O(N)$. \square

El último algoritmo que se necesita antes de aplicar el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa es el Algoritmo de Ordenación de Vértices. Este algoritmo parte de los datos del subgrafo G_μ (vértices $X \cup Y$ y aristas A), calcula el grafo dual del conjunto de 2-símplices Y , $G(Y)$ y aplica a éste el algoritmo de conexión para obtener sus componentes conexas, $\mathcal{V} = \cup_{i=1}^r W_i$. Después compara los elementos de X ($X = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}\}$) con los de cada componente de Y para ordenarlos según las adyacencias. Finalmente, da la lista ordenada de vértices de X distribuidos según la partición buscada, $X = \cup_{i=1}^r X_i$, donde cada vértice de X_i es adyacente sólo a vértices de W_i .

Algoritmo de Ordenación de Vértices

0. Leer los datos $G_\mu = (X \cup Y, A)$. (Leer X e Y como listas de 2-símplices y los elementos de A como pares de 2-símplices.)
 1. Mediante el Algoritmo del Grafo Dual, obtener el grafo dual de Y , $G(Y)$. Iniciar $Orden(X) = \emptyset$.
 2. Aplicar el Algoritmo de Conexión a $G(Y)$ y obtener la partición de vértices $\mathcal{V} = \cup_{i=1}^r W_i$.
 - 2.1. Si $r = 1$, $Orden(X) = X$ y Paso 3.
 - 2.2. Si $r > 1$, desde $i = 1$ hasta r , hacer:
 - $X_i = \emptyset$.
Para cada $\sigma \in W_i$, desde $j = 1$ hasta $2p$:
si $(\sigma_j, \sigma) \in A$, hacer $X_i = X_i \cup \{\sigma_j\}$.
 - $Orden(X) = Orden(X) \cup \{X_i\}$.
 3. $Orden(X)$ es la partición de X y FIN.
-

Proposición 4.3.4 Si K es un 2-complejo par con N 2-símplices y μ es un 1-símplice de K con valencia mayor que 2, se puede expresar el grafo G_μ como un grafo r -partito en tiempo $O(N^2)$.

Demostración: Para probar el enunciado es suficiente considerar el grafo $G_\mu = (X \cup Y, A)$ dado por el Algoritmo del Mínimo Subgrafo y aplicarle el Algoritmo de Ordenación de Vértices para obtener las particiones tanto de X como de Y .

Analizando los pasos del algoritmo, se tiene que el Paso 1 tiene coste $O((N - 2p)^2)$. Esto se debe a que la lista Y consta, a lo más, de $N - 2p$ elementos y a que el Algoritmo del Grafo Dual es de complejidad cuadrática en el número de 2-símplices del 2-complejo (ver Proposición 4.3.1).

En el paso 2, obtener la partición de Y es de complejidad lineal en el número de aristas de $G(Y)$, según se prueba en la Proposición 4.3.3. Por tanto, requiere tiempo $O((N - 2p)^2)$. Con el paso 2.2., el costo aumenta pues deben compararse todos los elementos de Y con todos los de X . Es decir, hay que realizar $2p(N - 2p)$ intersecciones, ya que decidir si el par (σ_j, σ) está en A es equivalente a ver si los dos 2-símplices que lo forman comparten un 1-símplice. Entonces, el paso 2 requiere un total de operaciones del orden de

$$(N - 2p)^2 + 2p(N - 2p) = N(N - 2p),$$

y sumando todas las operaciones:

$$(N - 2p)^2 + N(N - 2p) = 2(N^2 - 3Np + 2p^2).$$

En definitiva, el Algoritmo de Ordenación de vértices necesita tiempo $O(N^2)$. \square

Ya se tienen todos los requisitos para poder procesar el algoritmo al que se dedica esta sección. Este algoritmo se basa en el proceso de separación que se dio en un capítulo anterior, aunque tiene en cuenta de manera fundamental el orden obtenido sobre el conjunto de vértices X en el momento de elegir las parejas de 2-símplices que se van a separar.

El Algoritmo de Separación (detallado en el Capítulo 2) analiza la lista completa de 2-símplices del 2-complejo K , va contando las valencias de los 1-símplices y, conforme éstas van alcanzando valores mayores que 2, separa los 2-símplices por parejas, sin atender a otro orden que el que surge de la lista inicial. De este modo, si K es fuertemente conexo, no hay seguridad de que en el 2-complejo resultante se conserve tal propiedad. En el Algoritmo de Separación

se trabaja globalmente, de manera que el resultado final es una 2-pseudovariiedad que puede tener más puntos singulares cónicos que el complejo inicial.

El nuevo algoritmo trabajará de forma local sobre el 2-complejo K , es decir, considerando el 1-símplice μ de valencia mayor que 2 que se va a separar y el conjunto de 2-símplices que tienen a μ como cara (datos obtenidos por aplicación del Algoritmo de Identificación Modificado). Como respuesta, el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa da la lista de 2-símplices de un 2-complejo fuertemente conexo cuya lista de 1-símplices de valencia mayor que 2 tiene un elemento menos que la de K .

En la descripción del algoritmo se denotará $\mu = \{u, v\}$, donde u y v son los vértices de μ y cada 2-símplice de D_μ se representará por $\sigma_i = \{u, v_i, v\}$ para $i = 1, 2, \dots, 2p$.

Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa

0. Leer los datos de K :

Lista C de 2-símplices, 1-símplice $\mu = \{u, v\}$, $D_\mu = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}\}$.

Iniciar $D = C - D_\mu$, $E = \emptyset$.

1. Obtener el subgrafo $G_\mu = (X \cup Y, A)$ mediante el Algoritmo del Mínimo Subgrafo.

2. Aplicar a G_μ el Algoritmo de Ordenación de Vértices y obtener $Orden(X)$.

2.1. Si $Orden(X) = X$, hacer:

Para cada $i = 1, 3, \dots, 2p - 1$, obtener el baricentro del 2-símplice σ_i , w_i , y añadir a E los nuevos 2-símplices:

$\{\{u, v_i, w_i\}, \{w_i, v_i, v\}, \{u, v_{i+1}, w_i\}, \{w_i, v_{i+1}, v\}\}$

Continuar.

2.2. Si $Orden(X) = \cup_{i=1}^r X_i$ y $\{\sigma_1^i, \sigma_2^i, \dots, \sigma_{2p_i}^i\}$ es el conjunto X_i , para $i = 1, 2, \dots, r$, hacer:

- Para $i = 1, 2, \dots, r - 1$, considerar el último elemento de X_i , $\sigma_{2p_i}^i = \{u, v_{2p_i}^i, v\}$ y el primero de X_{i+1} , $\sigma_1^{i+1} = \{u, v_{i+1}^{i+1}, v\}$.

Obtener el baricentro de $\sigma_{2p_i}^i$, w_i y añadir en E los nuevos 2-

símplices:

$$\{\{u, v_{2p_i}^i, w_i\}, \{w_i, v_{2p_i}^i, v\}, \{u, v_i^{i+1}, w_i\}, \{w_i, v_i^{i+1}, v\}\}$$

- Para $i = r$, considerar el último elemento de X_r , $\sigma_{2p_r}^r = \{u, v_{2p_r}^r, v\}$ y el primero de X_1 , $\sigma_1^1 = \{u, v_1^1, v\}$.

Obtener el baricentro de $\sigma_{2p_r}^r$, w_r y añadir en E los nuevos 2-símplices:

$$\{\{u, v_{2p_r}^r, w_r\}, \{w_r, v_{2p_r}^r, v\}, \{u, v_1^1, w_r\}, \{w_r, v_1^1, v\}\}$$

- Si quedan 2-símplices por considerar en $\text{Orden}(X)$, sea $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{2p-2r}\}$ el conjunto de tales elementos.

Para $i = 1, 3, \dots, 2p - 2r - 1$, considerar el baricentro de σ'_i , w'_i y añadir en E los nuevos 2-símplices:

$$\{\{u, v'_i, w'_i\}, \{w'_i, v'_i, v\}, \{u, v'_{i+1}, w'_i\}, \{w'_i, v'_{i+1}, v\}\}$$

En otro caso, continuar.

3. Dar la lista $D = D \cup E$ de los 2-símplices del nuevo 2-complejo.

Proposición 4.3.5 *Es posible obtener una separación fuertemente conexa de un 2-complejo par, fuertemente conexo, con N 2-símplices y un 1-símplice de valencia mayor que 2, en tiempo $O(N^2)$.*

Demostración: Si K es el 2-complejo en cuestión, se le puede aplicar el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa y obtener otro 2-complejo fuertemente conexo que no contiene al 1-símplice que se ha separado.

Analizando este algoritmo, se puede hacer el cómputo total de operaciones que éste requiere. Si μ es el 1-símplice de valencia $2p > 2$ que se va a separar, el paso 1 requiere tiempo $O((2p + 1)N)$ (según se ha probado en la Proposición 4.3.2). El paso 2 requiere costo de $O(N^2)$ debido a que la ordenación de G es de complejidad cuadrática y la construcción de la lista E tiene costo $O(2p)$.

En conclusión, la complejidad total del Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa es $O(N^2)$ y queda probado el resultado. \square

Si el 2-complejo fuertemente conexo tiene más de un 1-símplice de valencia mayor que 2, se puede aplicar el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa de forma inductiva y obtener finalmente una 2-pseudovariiedad fuertemente conexa asociada al complejo. En cada separación el número de 2-símplices del complejo inicial aumenta dependiendo del número de 1-símplices que se vayan a separar y de las valencias de éstos. Entonces, es fácil ver que la complejidad total del proceso puede aumentar hasta $O(N^3)$, como queda recogido en el siguiente corolario:

Corolario 4.3.6 *Es posible obtener una separación fuertemente conexa de cualquier 2-complejo par fuertemente conexo con N 2-símplices en tiempo $O(N^3)$.*

4.4 Conclusiones y Problemas Abiertos

El resultado principal de este capítulo, el Teorema de Separación Fuertemente Conexa (Teorema 4.2.5) mejora los que se recogen en los Capítulos 1 y 2 para el caso en que el 2-complejo de partida sea par y goce de la propiedad de la conexión fuerte. Ya se ha comprobado, mediante algunos ejemplos (Figuras 4.9 y 4.10), que la condición de ser par es necesaria para garantizar la conexión fuerte del 2-complejo final. Con esto queda resuelto el problema inicialmente propuesto.

Es importante destacar que con la separación fuertemente conexa se consigue que el número de puntos singulares cónicos del 2-complejo resultante sea mínimo.

Por otra parte, cabe hacer notar que estos resultados están muy relacionados con los del Capítulo 1 y hay que volver sobre algunos ejemplos que se dieron en aquél.

En la Figura 4.11 se da un ejemplo en el que se ve cómo un 2-complejo par K puede tener asociados distintos pares de desingularización. Dependiendo de la elección de 2-símplices que se realice en la separación, el 2-complejo resultante será fuertemente conexo o no.

Este 2-complejo es fuertemente conexo y admite una separación fuertemente conexa. Sin embargo, el 2-complejo K' de la Figura 4.12 es homeomorfo a K y admite una separación fuertemente conexa que da lugar a un 2-complejo

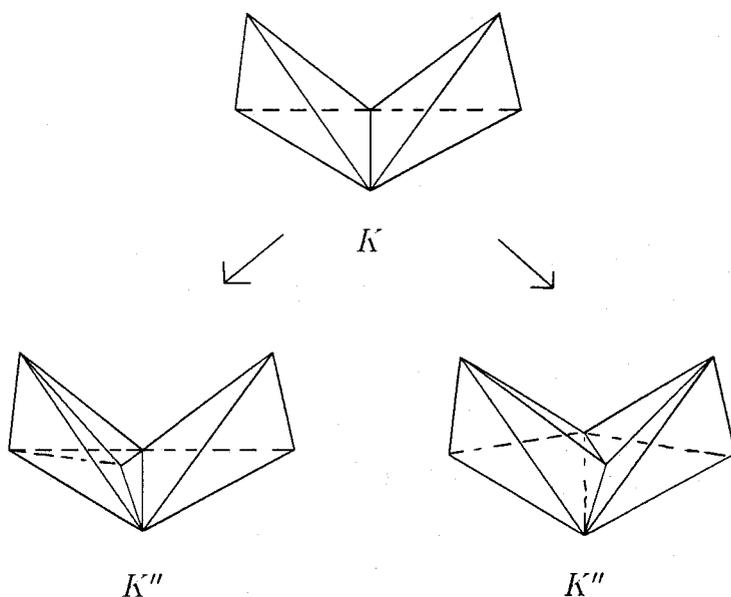


Figura 4.11: 2 separaciones de símlices sobre K .

no homomorfo a ninguno de los asociados a K . Esto indica que es imprescindible el morfismo del par de desingularización asociado al 2-complejo de partida.

Surge, entonces, un problema interesante: estudiar otro tipo de desingularización que permita caracterizar a un 2-complejo par (fuertemente conexo o no) sin tener que utilizar el morfismo. En otras palabras, queda como problema abierto dar condiciones bajo las cuales la 2-variedad asociada a un 2-complejo par es única, si tales condiciones existen.

Por último, en cuanto a los algoritmos, se concluye que son “mejores” que los que se dan en el Capítulo 2 en el sentido de que conservan la propiedad de la conexión fuerte del 2-complejo sobre el que se aplican. En otro aspecto, en el de la complejidad, no se puede decir aun que sean eficientes.

Por tanto, el siguiente reto que hay que abordar es el de buscar algoritmos que resuelvan este mismo problema en “menos” tiempo. Ha quedado por decidir si el Algoritmo de Separación Fuertemente Conexa es eficiente o si, por el contrario, puede optimizarse su complejidad.

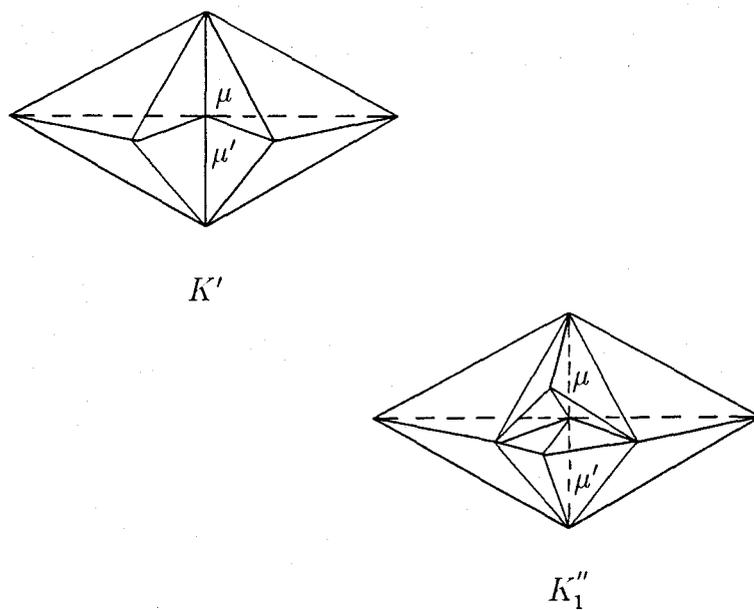


Figura 4.12: Separación fuertemente conexas sobre K' .

Bibliografía

- [1] M. K. Agoston. *Algebraic Topology. A first course*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1976.
- [2] A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- [3] E. Akin. Stiefel – Whitney homology classes and bordism. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205:341–359, 1975.
- [4] P. Alexandroff y H. Hopf. *Topologie*. Berlin, 1935.
- [5] A. Altshuler. Polyhedral realization in R^3 of triangulations of the torus and 2-manifolds in cyclic 4-polytopes. *Discrete Mathematics*, 1(3):211–238, 1971.
- [6] A. Altshuler. Hamiltonian Circuits in some maps on the Torus. *Discrete Mathematics*, 1(4):299–314, 1972.
- [7] R. Ayala, J. Cáceres, A. Márquez y A. Quintero. Linear planarity in 2-complexes. *Congressus Numeratium*. Por aparecer.
- [8] R. Ayala, M. J. Chávez, A. Márquez y A. Quintero. On the connectivity of infinite graphs and 2-complexes. Por aparecer.
- [9] D. Barnette. Generalized combinatorial cells and facet splitting. *Pacific J. Math.*, 57(1):33–45, 1975.
- [10] D. Barnette. Polyhedral maps on 2-manifolds. En *Convexity and related Combinatorial Geometry*, pages 7–19. New York, 1982. Marcel Dekker, Ink.
- [11] D. Barnette. Every simple 3-polytope with 34 vertices is hamiltonian. *Discrete Mathematics*, 62:1–20, 1986.

- [12] D. Barnette. Generating the 4-connected and strongly 4-connected triangulations on the torus and projective plane. *Discrete Mathematics*, 85:1–16, 1990.
- [13] R. Benedetti y M. Dedó. The Topology of a two-dimensional real algebraic varieties. *Ann. Mat. Pura-Appl.*, 127(4):141–171, 1981.
- [14] R. Benedetti y M. Dedó. A cycle is the fundamental class of an Euler space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(1):169–174, 1983.
- [15] N. L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [16] N. L. Biggs, E. K. Lloyd y R. J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [17] L. Boza, A. Diánez y A. Márquez. A link between Menger's Theorem and Infinite Euler Graphs. *Acta Math. Hungarica*, 74, 1997. Por aparecer.
- [18] J. Clark y D. A. Holton. *A first look at Graph Theory*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [19] R. Descartes. *De solidorum elementis*, volumen 10 de *Oeuvres de Descartes*. C. Adam and P. Tannery, Paris, 1908.
- [20] P. Erdős, T. Grünwald y E. Vásonyi. Über Euler - Linien unendlicher Graphen. *J. Math. Phys. Massachussets Inst. of Tecnology*, 17:203–217, 1938.
- [21] P. Erdős, T. Grünwald y E. Weiszfeld. Über Eulersche Linien unendlicher Graphen. *Mat. Fiz. Lapok*, 43:129–140, 1936.
- [22] L. Euler. Solutio problematis ad Geometriam Situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanæ*. 8:128–140, 1736.
- [23] L. Euler. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.*, 4:141–160, 1752/53.
- [24] L. Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.*, 4:109–140, 1752/53.
- [25] L. Euler. The Königsberg bridges. *Sci. Amer.*, 189:66–70. 1753.

- [26] H. Fleischner. *Eulerian Graphs and Related Topics*, volumen 1, Part 1 de *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier Science, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [27] M. R. Garey y D. S. Johnson. *Computers and Intractability. A guide to the Theory of NP-Completeness*. Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1979.
- [28] J. L. Gross y R. H. Rosen. A linear time planarity algorithm for 2-complexes. *J. of the Association for Computer Machinery*, 26(4):611-617, 1979.
- [29] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, London, 1967.
- [30] S. Halperin y D. Toledo. Stiefel - Whitney homology classes. *Ann. of Math.*, 96:511-525, 1972.
- [31] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [32] F. Harary y E. Palmer. On acyclic simplicial complexes. *Mathematika*, 15:115-122, 1968.
- [33] C. Hierholzer. Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu unfahren. *Mathematische Annalen*, 6:30-32, 1873.
- [34] V. Klee. A combinatorial analogue of Poincaré Duality Theorem. *Can. J. Math.*, 16:517-531, 1964.
- [35] D. E. Knuth. Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News*, 8(2):18-24, 1976.
- [36] A. Kotzig. Contribution to the theory of eulerian polyhedra. *Mat. Fyz. Casopis-Slovensk-Akad. Vied*, 5:101-113, 1955.
- [37] A. Kotzig. On the theory of Euler Polyhedra. *Mat. Fyz. Casopis-Slovensk-Akad. Vied*, 13:20-31, 1963.
- [38] J. Lederberg. Systematics of organic molecules, Graph Topology and Hamilton circuits. Instrumentation Res. Lab. Rept. 1040, Standford University, 1966.

- [39] S. Lefschetz. *Introduction to Topology*. Princeton University Press, New Jersey, 1949.
- [40] W. Lietzmann. *Visual Topology*. American Elsevier, New York, 1965.
- [41] J. B. Listing. Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. *Abh. K. Ges. Wiss. Göttingen Math. Cl.*, 10:97–182, 1861/62.
- [42] C. K. Lu. Classification of 2-manifolds with singular points. *Bull. Am. Math. Soc.*, 55:1093–1098, 1949.
- [43] U. Manber. *Introduction to Algorithms. A creative approach*. Addison Wesley, Reading, Mass., 1989.
- [44] W. S. Massey. *Introducción a la Topología Algebraica*. Reverté, Barcelona, 1982.
- [45] A. Matsui y H. Sato. Stiefel–Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3):437–453, 1985.
- [46] T. Nishizeki y N. Chiba. *Planar Graphs. Theory and Algorithms*. Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [47] O. Ore. *Theory of Graphs*, volumen 38 de *Colloquium Publications*. AMS, 1962.
- [48] H. Poincaré. Complément à l' Analisis Situs. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 13:285–343, 1899.
- [49] H. Poincaré. Second complément à l' Analisis Situs. *Proc. London Math. Soc.*, 32:277–308, 1900.
- [50] T. Radó. Über des Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta. Sci. Math. Szeged.*, 2:101–121, 1925.
- [51] D. C. Ravenel. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*. Academic Press, Inc., London, 1986.
- [52] J. Shawe-Taylor y T. Pisanski. Homeomorphism of 2-complexes is graph isomorphism complete. *SIAM J. Comput.*, 23(1):120–132, 1994.

- [53] E. Steinitz y H. Rademacher. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*. Springer-Verlag, Berlin, 1934.
- [54] C. Thomassen. Infinite graphs. En *Selected Topics in Graph Theory*, volumen 2, pages 129–160. Academic Press, 1983.
- [55] W. T. Tutte. On hamiltonian circuits. *J. London Math. Soc.*, 21:98–101, 1946.
- [56] O. Veblen. *Analysis Situs*, volumen 5, Part II de *Colloquium Publications*. AMS, 1931.
- [57] H. Whitney. Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34:339–362, 1932.
- [58] H. Whitney. Planar graphs. *Fund. Math.*, 21:73–84, 1933.
- [59] E. F. Whittlesey. Classification of finite 2-complexes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:841–845, 1958.
- [60] E. Y. Woon. n -Connectedness in pure 2-complexes. *Israel J. Math.*, 52(3):177–192, 1985.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal convocada por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. MARIA TRINIDA VILLAR LINAN
titulada TRANSVERSALIDAD EN Z-COMPLEJOS

APTO CUM LAUDE

acordó calificar la Tesis Doctoral

POR UNANIMIDAD

DICIEMBRE

19 de 6

Sevilla, 19 de

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Secretario,

El Doctorado,

