

Inmersiones isotrópicas pseudo-Riemannianas

Juan Salvador Gómez Casanueva

SEVILLA, 2008



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

INMERSIONES ISOTRÓPICAS
PSEUDO-RIEMANNIANAS

Memoria presentada por

Juan Salvador Gómez Casanueva

para optar al grado de

Doctor en Matemáticas

por la Universidad de Sevilla

Fdo: Juan Salvador Gómez Casanueva

Vº Bº

de los Doctores Directores:

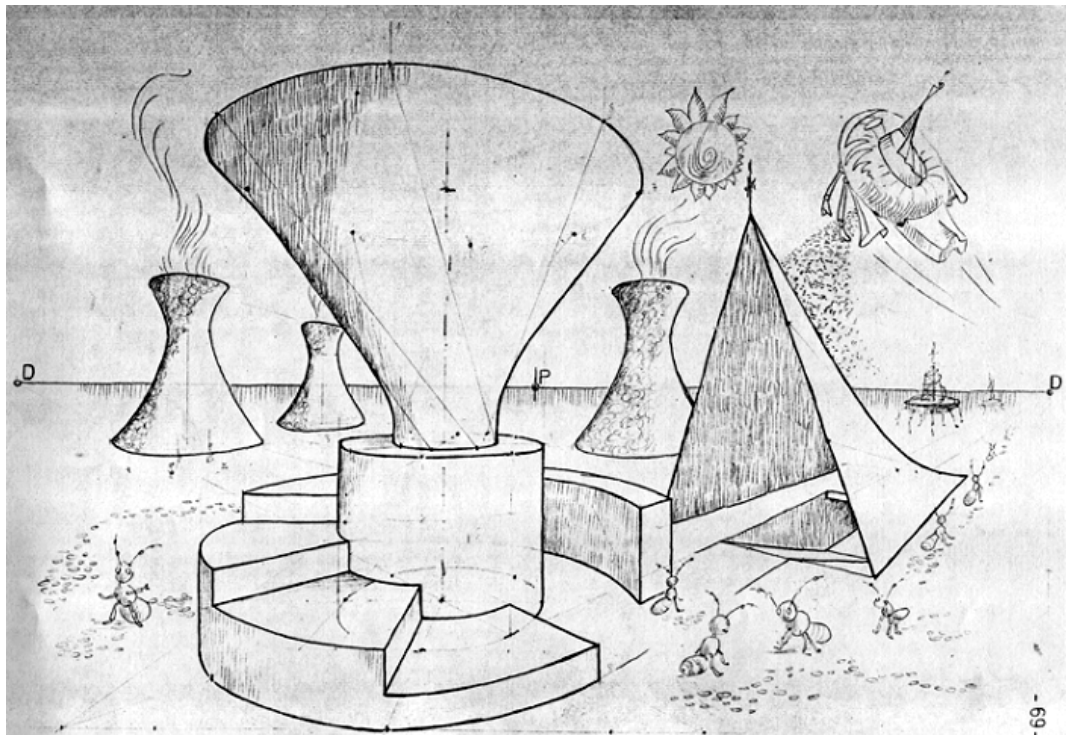
Jose Luis Cabrerizo Jaraíz

Manuel Fernández Andrés

Sevilla, 2008

A toda mi familia, a Juani.

*Recuerdo aquella noche que imaginamos
la inmensidad del Universo...
¡Todo un sueño!*



Olvera, 27 de agosto de 2008.

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares y resultados básicos	1
1.1. Preliminares lineales	1
1.2. Variedades pseudo-Riemannianas	6
1.2.1. Espacios modelos pseudo-Riemannianos	11
1.2.2. Variedades homogéneas e isotrópicas	15
1.2.3. Curvas en una variedad pseudo-Riemanniana	18
1.3. Inmersiones isométricas	20
1.3.1. Teorema de Congruencia	23
1.3.2. Algunos tipos de inmersiones isométricas	25
1.3.3. Inmersiones umbilicales del espacio pseudo-Euclídeo	27
1.3.4. Reducción de la codimensión	28
2. Inmersiones pseudo-Riemannianas isotrópicas	31
2.1. Definición, primeras propiedades y ejemplos	31
2.2. Tensor de isotropía. Fórmulas de O'Neill	42
2.3. Condición de Isotropía. Consecuencias	45
2.3.1. Inmersiones isotrópicas y circunferencias	51
2.4. Curvatura e isotropía	56
2.4.1. El discriminante de una inmersión isotrópica	56
2.4.2. El tensor de Ricci	62
2.4.3. Consecuencias	64
2.5. Geometría compleja e isotropía	70
2.5.1. Variedades de Kaehler no degeneradas	70
2.5.2. Inmersiones isotrópicas holomorfas	74
2.5.3. Inmersiones holomorfas y circunferencias	80
3. Rigidez de inmersiones isotrópicas	83
3.1. Ecuación Fundamental de Isotropía	83
3.2. Isotropía y simetría	85
3.3. Inmersiones isotrópicas extrínsecas	86
3.4. Rigidez de inmersiones isotrópicas con h sobreyectiva	93

3.4.1.	Fibrados vectoriales	93
3.4.2.	Teorema Fundamental de Unicidad	96
3.4.3.	Resultados	98
3.5.	Rigidez de inmersiones 0-isotrópicas	103
3.6.	Inmersiones isotrópicas de codimensión dos	106
3.6.1.	Superficies de Lorentz	109
3.6.2.	Inmersiones entre pseudo-esferas	114
4.	Subvariedades isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo	117
4.1.	Inmersiones con geodésicas planas	117
4.2.	Número de contacto	121
4.2.1.	Definición de número de contacto	121
4.2.2.	Isotropía y número de contacto	124
4.2.3.	Número de contacto espacial y temporal	127
4.2.4.	Caracterización del orden de contacto	127
4.2.5.	Propiedades	135
4.2.6.	Invariancia causal del número de contacto	141
4.2.7.	Resultados	143
4.3.	Subvariedades con secciones normales geodésicas	146
4.4.	Subvariedades helicoidales	149
	Bibliografía	153

Introducción

La noción de inmersión isotrópica Riemanniana fue introducida por B. O'Neill [O'N1] quien estudió propiedades generales de esta clase de inmersiones. Estas inmersiones pueden ser consideradas como una generalización del concepto de inmersión totalmente umbilical, y constituyen una familia distinguida en la teoría de subvariedades. La clase de inmersiones isotrópicas ha sido estudiada detalladamente por diversos autores en el caso Riemanniano (véase, por ejemplo, [Bo, BM, ChL, IO1, Ma, MU, Na1, Sak2]).

El concepto de inmersión isotrópica puede extenderse de forma natural al caso generalizado pseudo-Riemanniano [Kim]. El presente trabajo pretende fundamentalmente estudiar aquellas propiedades que verifica toda inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana, y la obtención de resultados que generalicen los Riemannianos correspondientes y otros resultados que permitan obtener diferencias significativas entre el caso definido e indefinido. Posibles aplicaciones a la Teoría General de la Relatividad podrían deducirse de este estudio.

Intuitivamente hablando, una inmersión pseudo-Riemanniana isotrópica está caracterizada por la propiedad extrínseca de mantener constante la longitud de la segunda forma fundamental. Formalmente, una inmersión pseudo-Riemanniana se dice *isotrópica en un punto p* si el valor de

$$g(h(u, u), h(u, u)) = \lambda(p) \tag{1}$$

es independiente de la dirección tangente unitaria u tomada, donde h es la segunda forma fundamental de la inmersión. Una inmersión se dice *isotrópica* si es isotrópica en cada punto; y *constantemente isotrópica* si es isotrópica y la función λ definida por (1) es constante. En este sentido, puede decirse que las

direcciones normales determinadas por la segunda forma fundamental de una inmersión isotrópica son equivalentes.

Es importante observar, como peculiaridad del caso indefinido, que es suficiente comprobar la condición (1) sólo para vectores tangentes unitarios espaciales o temporales para deducir la isotropía de la inmersión (Observación 2.2). Por otra parte, se deduce por continuidad de la expresión (1) que

$$g(h(x, x), h(x, x)) = 0 \quad (2)$$

para todo vector tangente luminoso x . Sin embargo, esta última *propiedad isotrópica luminosa* no es suficiente para deducir la isotropía de la inmersión, ya que por ejemplo, la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ definida por

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \phi(x, y) = & (\text{sen}(x), \text{cos}(x), \text{sen}(x), \text{cos}(x)) \\ & + y(\text{cos}(x), -\text{sen}(x), -\text{cos}(x), \text{sen}(x)), \end{aligned}$$

no es isotrópica en ningún punto y satisface esta propiedad isotrópica luminosa (2) como se establece en la Observación 2.4.

Nuestro principal interés se centrará en el estudio de las inmersiones isotrópicas pseudo-Riemannianas de codimensión $d > 1$, ya que toda hipersuperficie isotrópica es totalmente umbilical (Observación 2.5). Como precedente, notemos que en el caso Riemanniano son conocidos diversos ejemplos de subvariedades isotrópicas no totalmente umbilicales. Construcciones explícitas de este tipo de inmersiones (de un espacio simétrico de rango uno en un espacio ambiente homogéneo) son dadas en [Ts]. En nuestro caso, las inmersiones de Veronese indefinidas, las expansiones y cierto tipo de inmersiones entre pseudo-esferas, nos proporcionan ejemplos propios de inmersiones isotrópicas pseudo-Riemannianas. No obstante, dependiendo de los índices de las variedades involucradas, este tipo de construcción no siempre será posible. Por ejemplo, toda subvariedad de Lorentz isotrópica del espacio de Lorentz-Minkowski es totalmente umbilical (Observación 2.5).

Hemos estructurado el presente trabajo en cuatro capítulos cuyos contenidos fundamentales indicamos esquemáticamente a continuación:

En el primer Capítulo damos una recopilación acerca de los resultados y conceptos básicos necesarios para el posterior desarrollo de este trabajo. Tratamos, tanto la teoría de los espacios vectoriales métricos, como la geometría diferencial de las variedades e inmersiones pseudo-Riemannianas.

A continuación, en el Capítulo 2, pasamos a definir formalmente el concepto de inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana dando, en primer lugar, distintas definiciones equivalentes, propiedades elementales y ejemplos cruciales para la motivación y el desarrollo de nuestro estudio. En contraste con el caso Riemanniano, algunas diferencias y peculiaridades respecto a la isotropía de una inmersión son mostradas. Por otra parte, apoyándonos en la propiedad isotrópica luminosa (2), demostramos la siguiente *caracterización tensorial* del concepto de inmersión isotrópica:

Proposición 2.14 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica.*

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es isotrópica.
2. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$g(h(X, X), h(X, X)) = g(X, X)^2 \lambda$$

para todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

3. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$g(h(X, X), h(X, Y)) = g(X, X)g(X, Y)\lambda$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

4. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$\begin{aligned} &g(h(X, Y), h(Z, W)) + g(h(Y, Z), h(X, W)) + g(h(X, Z), h(Y, W)) \\ &= \lambda \{g(X, Y)g(Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, W)\} \end{aligned}$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, se verifica la condición 2, 3 o 4 con λ constante si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

Especial interés por sus aplicaciones tienen las anteriores condiciones equivalentes de isotropía cuando los campos de vectores se reemplazan por vectores tangentes ortonormales en un punto, ya que se obtienen las denominadas *fórmulas de O'Neill* generalizadas al caso pseudo-Riemanniano (Corolario 2.16).

El tercer párrafo del Capítulo 2 está dedicado fundamentalmente a la importante Condición de Isotropía por sus consecuencias:

Teorema 2.16 (Condición de Isotropía) *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Dado un punto $p \in M_s^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es isotrópica en p .
2. Para cada par de vectores tangentes ortonormales $u, v \in T_p M_s^n$ se verifica

$$g(h(u, u), h(u, v)) = 0. \quad (3)$$

3. Para cada par de vectores tangentes luminosos x, y en p se verifica

$$g(h(x, x), h(x, y)) = 0. \quad (4)$$

Esta condición generalizada de la isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana (3) nos permitirá realizar estrategias similares a las del caso Euclídeo para obtener resultados que extiendan los Riemannianos que involucran dicha condición. Cabe destacar que la prueba de esta condición difiere de la versión definida positiva [O'N1] precisando una mayor elaboración, pues en el caso indefinido el conjunto de vectores tangentes unitarios en un punto no es

necesariamente conexo. Obtenemos también una curiosa condición necesaria y suficiente (4) para determinar la isotropía de una inmersión indefinida a partir de vectores tangentes luminosos.

Como primera consecuencia de la Condición de Isotropía (3) y de forma similar al caso Riemanniano [ChL], obtenemos una caracterización de la noción de inmersión constantemente isotrópica atendiendo a la derivada covariante de la segunda forma fundamental (Corolario 2.18). En particular, toda inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela es constantemente isotrópica (Corolario 2.22).

En el caso definido, J. A. Little [L] y K. Sakamoto [Sak2] clasificaron aquellas subvariedades del espacio Euclídeo con la propiedad de que todas sus geodésicas son circunferencias del ambiente. La Condición de Isotropía nos permite relacionar esta propiedad geométrica extrínseca de las geodésicas con la isotropía y el paralelismo de la segunda forma fundamental de la subvariedad:

Teorema 2.23 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isométrica.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *ϕ es una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$.*
2. *ϕ transforma cada geodésica unitaria γ de M_s^n en una circunferencia propia $\phi \circ \gamma$ del ambiente.*

Notemos que, cuando el índice $0 < s < n$, es suficiente comprobar la condición 2 de este Teorema únicamente para geodésicas espaciales o temporales para obtener la misma conclusión (Observación 2.24).

La Condición de Isotropía (3) nos conduce también a interpretar geométricamente la noción de inmersión constantemente isotrópica mediante el comportamiento extrínseco de las circunferencias de la subvariedad inmersa:

Teorema 2.26 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica.*

Dado $\kappa > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *ϕ es constantemente isotrópica.*
2. *ϕ transforma cada circunferencia propia γ de curvatura κ de M_s^n en una curva $\beta = \phi \circ \gamma$ de la variedad ambiente $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ con curvatura constante $\tilde{\kappa} = \|\tilde{\nabla}_{\beta'}\beta'\|$.*

El resultado anterior, aparte de proporcionarnos una extensión de un resultado debido a S. Maeda [Ma], nos permite caracterizar la noción de inmersión 0-isotrópica mediante circunferencias (Corolario 2.28). Obviamente los conceptos de subvariedad totalmente geodésica y subvariedad 0-isotrópica son equivalentes en el caso definido positivo. Deducimos entonces en el Corolario 2.29 una caracterización de las inmersiones Riemannianas totalmente geodésicas mediante circunferencias. Como particularidad del caso indefinido $0 < s < n$, notemos que es suficiente comprobar la condición 2 en el Teorema 2.26 para circunferencias espaciales o temporales para deducir la isotropía de la inmersión.

En el cuarto párrafo del Capítulo 2, motivados por el trabajo de B. O'Neill [O'N1], estudiamos algunas de las propiedades que presenta toda inmersión isotrópica cuando exigimos restricciones sobre la “curvatura” de la subvariedad inmersa o del ambiente. En particular, cuando la diferencia $\Delta_p(\Pi) = \mathcal{K}(x, y) - \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ entre la curvatura seccional de la subvariedad inmersa $\mathcal{K}(x, y)$ y la del ambiente $\tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ no depende de la sección plana no degenerada Π elegida en un punto p , demostramos en el Teorema 2.31 la invariancia del valor de $g(h(x, y), h(z, w))$ por permutaciones de vectores ortogonales $x, y, z, w \in T_p M_s^n$. Consecuentemente:

Proposición 2.32 *Toda inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana con discriminante constante es pseudo-umbilical y satisface la igual-*

dad:

$$3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = (n + 2)\lambda + 2(n - 1)\Delta,$$

donde \mathbf{H} es el campo curvatura media y λ es la función de isotropía asociados.

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0$ si y sólo si $\Delta = -\{(n + 2)/2(n - 1)\}\lambda$.
- (2) $g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = \lambda$ si y sólo si $\Delta = \lambda$.

Esto nos permite obtener algunas consecuencias aplicando resultados conocidos que involucran condiciones sobre las curvaturas y el carácter pseudo-umbilical de la subvariedad (Corolarios 2.33—2.36). También obtenemos:

Corolario 2.37 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica y $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ una función diferenciable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ se verifica

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = \lambda g(X, Y)g(Z, W). \quad (5)$$

2. La inmersión ϕ es λ -isotrópica y en cada punto p de M_s^n , el discriminante es constantemente igual a $\Delta_p = \lambda(p)$.

Es interesante observar que, a diferencia del caso definido positivo, una inmersión isotrópica indefinida verificando la ecuación (5) no es necesariamente totalmente umbilical. Por ejemplo, dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$, la inmersión isométrica

$$\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+1}^{n+2}, \quad \phi(x) = (f(x), x, f(x)),$$

satisface la condición (5) con $\lambda = 0$. Se comprueba que ϕ es totalmente umbilical si y sólo si f es de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \left(- \sum_{i=1}^s x_i^2 + \sum_{i=s+1}^n x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

para $a, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$ (Ejemplo 2.7).

Por otra parte, en el cuarto párrafo del Capítulo 2, estudiamos el tensor de Ricci asociado a una inmersión isotrópica demostrando:

Teorema 2.40 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión λ -isotrópica. Entonces, el tensor de Ricci de M_s^n viene dado por*

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x, y) &= \{(n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2\}g(x, y) \\ &\quad + 3ng(h(x, y), \mathbf{H})/2, \end{aligned} \tag{6}$$

donde h es la segunda forma fundamental de la inmersión y \mathbf{H} es el campo curvatura media asociado.

Deducimos que si una inmersión es pseudo-umbilical o minimal satisfaciendo la condición (6), entonces la inmersión es Einstein. Por tanto, si la dimensión es $n \geq 3$, la inmersión es constantemente isotrópica si y sólo si tiene función curvatura media $g(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ constante (Corolarios 2.41, 2.42 y 2.44). Además, como aplicación del Teorema de Bonnet-Myers, de la técnica de Bochner y usando el significado de ciertas fórmulas integrales introducidas por L. J. Alías y A. Romero en [AR], obtenemos como consecuencia de la expresión del tensor de Ricci (6) anterior algunos resultados de obstrucción sobre la topología de la subvariedad isotrópica inmersa y la función de isotropía asociada (véanse los Corolarios 2.46 —2.57).

En el quinto y último párrafo del Capítulo 2, estudiamos la isotropía de una inmersión desde el punto de vista de la geometría compleja. Cuando en una inmersión isométrica las variedades involucradas son de Kaehler y la inmersión

es holomorfa, la noción de inmersión isotrópica tiene una sencilla interpretación en términos de la diferencia entre las curvaturas seccionales holomorfas (Teorema 2.60). Esto permite obtener nuevos ejemplos de inmersiones pseudo-Riemannianas isotrópicas y estudiar algunas de las propiedades que presenta toda inmersión isotrópica holomorfa (Teoremas 2.62 y 2.64). En particular, toda curva holomorfa $\gamma = \gamma(z)$ de una variedad de Kaehler puede verse como una inmersión isotrópica. Además, como aplicación de una extensión [R1] del conocido Teorema de Calabi de rigidez de inmersiones holomorfas, obtenemos:

Teorema 2.66 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_S^N(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica holomorfa y sustancial con dimensión compleja $n \geq 2$. Entonces, ϕ es localmente congruente a un k -ésimo embebimiento de Veronese de $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^n(\tilde{c}/k)$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}_{S(n,s,k)}^{N(n,k)}(\tilde{c})$ para algún entero positivo k .*

Otros resultados son deducidos en relación a inmersiones isotrópicas holomorfas y circunferencias (Teoremas 2.70, 2.71 y 2.72).

El tercer Capítulo de esta memoria está dedicado al estudio de la rigidez de la clase de inmersiones isotrópicas. En general, la obtención de *resultados de rigidez o unicidad* para cierta clase de inmersiones isométricas resulta imprescindible cuando queremos obtener una clasificación exhaustiva de dicha clase. Por ejemplo, T. Itoh y K. Ogiue [IO1] demostraron la rigidez de cierto tipo de inmersiones isotrópicas entre espacios Riemannianos de curvatura constante. Sus resultados fueron extendidos por K. Sakamoto [Sak2] demostrando que toda subvariedad isotrópica y paralela de un espacio Riemanniano de curvatura constante es rígida, lo que permitió obtener resultados de clasificación para esta clase. Se pretende estudiar la rigidez de las inmersiones isotrópicas que nos permita, por una parte, obtener resultados de rigidez que extienden a otros conocidos más débiles [IO1, Sak2] y, por otra parte, la determinación consecuente de *resultados de clasificación*.

Empezamos el Capítulo 3 dando una nueva caracterización de la isotropía de una inmersión en términos de los tensores de curvatura de la subvariedad inmersa y del ambiente:

Teorema 3.1 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Sean R y \tilde{R} los tensores de curvatura de Riemann de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es isotrópica.
2. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$\begin{aligned} 3g(h(X, Y), h(Z, W)) \\ = \lambda\{g(X, Y)g(Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\ + g(\tilde{R}(Y, Z)X, W) - g(R(Y, Z)X, W) \\ + g(\tilde{R}(X, Z)Y, W) - g(R(X, Z)Y, W) \quad (7) \end{aligned}$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, se verifica la condición 2 con λ constante si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

La condición necesaria y suficiente de isotropía (7), que denominamos *Ecuación Fundamental de Isotropía*, resulta imprescindible para las pruebas de algunos de los resultados de rigidez que tratamos en esta memoria. Así, dada la invariancia del tensor de curvatura de Riemann por isometrías, la condición (7) nos permite establecer una nueva interpretación extrínseca de la noción de inmersión isotrópica y determinar resultados de unicidad relacionados con la isotropía de una inmersión. Cabe destacar que técnica que presentamos para el estudio de la rigidez de inmersiones isotrópicas es esencialmente nueva, lo que nos permite obtener interesantes consecuencias. Muchas demostraciones relacionadas con la isotropía de una inmersión Riemanniana podrán ser reducidas y simplificadas a partir de nuestro estudio.

Damos en el segundo párrafo del Capítulo 3, como primera consecuencia de la Ecuación Fundamental de Isotropía (7), una extensión de un resultado Riemanniano [BM] debido a N. Boumuki y S. Maeda que relaciona la isotropía y el paralelismo de la segunda forma fundamental de una inmersión isométrica:

Lema 3.2 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión constantemente isotrópica. Entonces, si M_s^n es localmente simétrica y ϕ tiene segunda forma fundamental sobreyectiva, ϕ tiene segunda forma fundamental paralela.*

Notemos que existen otras dos nociones de isotropía que están estrechamente relacionadas con la noción de isotropía tratada en esta memoria: el concepto de *variedad isotrópica intrínseca* de J. A. Wolf [Wo] y su *versión extrínseca* natural en términos de inmersiones. Recordemos que una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice isotrópica intrínseca si para todo $r \in \mathbb{R}$ el subgrupo de isotropía $\text{Iso}_p(M_s^n)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores tangentes (no nulos) de longitud r en cada punto p . Si una subvariedad es isotrópica intrínseca y las isometrías de transitividad provienen de movimientos rígidos del ambiente, la subvariedad se dice *isotrópica extrínseca*. Las hipercuádricas del espacio pseudo-Euclídeo satisfacen esta propiedad isotrópica extrínseca [O’N2, Proposición 4.30]. Por otra parte, notemos que la noción de isotropía de J. A. Wolf está relacionada con la noción física de isotropía espacial para un espaciotiempo temporalmente orientable [SW].

Probamos en la Proposición 3.6 que toda variedad subvariedad isotrópica extrínseca es isotrópica intrínseca como variedad e isotrópica en el sentido de la definición (1). Esto hecho nos motiva el planteamiento de la siguiente conjetura:

Conjetura: *Toda inmersión isotrópica, con variedad inmersa isotrópica intrínseca, es isotrópica extrínseca.*

Bajo ciertas condiciones adicionales, damos respuesta afirmativa si el espacio ambiente es pseudo-Euclídeo. Explícitamente, apoyándonos en la Ecuación Fundamental de Isotropía y el Teorema de Congruencia de B. O'Neill (Teorema 1.10), obtenemos en el tercer párrafo del Capítulo 3:

Teorema 3.10 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es isotrópica intrínseca, h es paralela y ϕ es isotrópica extrínseca.*

También damos una versión del Teorema 3.10 en términos de referencias ortonormales (Teorema 3.12). Concretamente, si la variedad M_s^n del Teorema 3.10 tiene curvatura seccional constante c , entonces el grupo de movimientos rígidos $\text{Iso}(\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d})$ actúa transitivamente sobre el conjunto de referencias ortonormales de M_s^n . Como aplicación, al igual que ocurre con las hipercuádricas, las inmersiones de Veronese indefinidas satisfacen esta interesante propiedad de homogeneidad.

Seguidamente, en el cuarto párrafo del Capítulo 3, demostramos una serie de resultados que nos permiten determinar la rigidez de las subvariedades pseudo-Riemannianas isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo con segunda forma fundamental sobreyectiva:

Teorema 3.21 *Dos inmersiones isotrópicas $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con segundas formas fundamentales sobreyectivas y la misma función λ de isotropía son congruentes, es decir, existe un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi'$.*

Teorema 3.22 *Sean $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ dos inmersiones constantemente isotrópicas con segundas formas fundamentales sobreyectivas y la misma constante λ de isotropía. Entonces, toda isometría*

$f : M_s^n \rightarrow M_s^n$ proviene de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $A \circ \phi = \phi' \circ f$.

Es imprescindible en las pruebas de los resultados de rigidez anteriores la Ecuación Fundamental de Isotropía (7) y una versión indefinida del Teorema Fundamental de Unicidad (Lema 3.17), del que presentamos una nueva demostración reducida a partir del Teorema de Congruencia de O'Neill. Además, la técnica desarrollada nos permite deducir otros resultados de rigidez obteniéndose, en particular, la rigidez de las inmersiones isotrópicas Riemannianas con segunda forma fundamental paralela de una manera diferente a la establecida por K. Sakamoto [Sak2] (Corolario 3.24, Teorema 3.25 y Corolario 3.26).

Los dos últimos párrafos del Capítulo 3 están dedicados básicamente al estudio de las inmersiones 0-isotrópicas. Observemos que, en general, las inmersiones 0-isotrópicas no tienen segunda forma fundamental sobreyectiva y no es aplicable el Teorema 3.21. No obstante, deducimos la rigidez de cierto tipo de inmersiones 0-isotrópicas usando para ello una técnica diferente a la desarrollada en el cuarto párrafo del Capítulo 3. Cuando las inmersiones tienen segunda forma fundamental paralela probamos, bajo ciertas condiciones adicionales naturales, que las únicas inmersiones 0-isotrópicas son las expansiones (Teoremas 3.30 y 3.31).

A continuación, estudiamos las subvariedades de codimensión dos demostrando una serie de resultados, tales como el Lema 3.33, Teorema 3.34 y el Lema 3.35, que nos permiten comprobar y deducir de forma gradual los siguientes resultados de clasificación:

Teorema 3.36 *Sea ϕ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical de una variedad Riemanniana completa M^n en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+2} ($n \geq 2$). Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$ (Ejemplo 2.7).*

Teorema 3.39 *Sea ϕ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical de una variedad pseudo-Riemanniana completa M_s^n en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} con $n \geq 3$. Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$.*

Teorema 3.42 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ una inmersión constantemente isotrópica y no totalmente umbilical. Entonces, ϕ es 0-isotrópica. Además, si M_1^2 es completa, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_1^2 en $\mathbb{R}_{1,1}^3$.*

Además, un resultado de rigidez es probado para el interesante caso de superficies de Lorentz M_1^2 isotrópicas y no constantemente isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_2^4 :

Teorema 3.47 *Sean $\phi, \phi' : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dos inmersiones isotrópicas no totalmente umbilicales. Supongamos que M_1^2 tiene curvatura Gaussiana $\mathcal{K} \neq 0$ en todo punto. Entonces, ϕ y ϕ' son congruentes.*

Como consecuencia de las propiedades isotrópicas luminosas (2) y (4), una inmersión en las condiciones de este Teorema 3.47 es necesariamente minimal, sin puntos umbilicales y con segunda forma fundamental sobreyectiva en cada punto (Proposición 3.46). Notemos que una inmersión de este tipo no es 0-isotrópica porque M_1^2 no es llana.

Señalemos que la noción de subvariedad 0-isotrópica de codimensión dos está estrechamente relacionada con la noción de superficie (marginamente) atrapada [MaS], ya que el campo curvatura media de tales subvariedades satisface $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$. En esta dirección, cuando el campo curvatura media es no nulo probamos:

Teorema 3.48 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ una inmersión isotrópica no totalmente umbilical con campo curvatura media $\mathbf{H} \neq 0$ en todo punto. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(1) ϕ es marginalmente atrapada, es decir, en cada punto el campo curvatura media \mathbf{H} es luminoso.

(2) ϕ es 0-isotrópica.

Si además M_1^2 es completa, entonces ϕ es (bajo un movimiento rígido) una expansión de \mathbb{R}_1^2 en $\mathbb{R}_{1,1}^3$.

Por otra parte, motivados por el trabajo de M. Dajczer, L. Rodriguez [DR] y S. M. B. Kashani [Ka], terminamos el Capítulo 3 demostrando dos resultados de rigidez de inmersiones entre pseudo-esferas (Teoremas 3.49 y 3.50).

Finalmente, en el cuarto y último Capítulo estudiamos la isotropía de las subvariedades del espacio pseudo-Euclídeo dando otras interpretaciones geométricas de la noción de subvariedad isotrópica. Empezamos el Capítulo 4 relacionando la isotropía de una subvariedad inmersa en el espacio pseudo-Euclídeo con la propiedad geométrica extrínseca de que la subvariedad tenga *geodésicas planas*, es decir, si la imagen de cada geodésica de la subvariedad está contenida (localmente) en un 2-plano del ambiente. En virtud de la Condición de Isotropía (3) y de forma similar al caso Riemanniano [Ho] demostramos:

Lema 4.1 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica con geodésicas planas. Entonces, ϕ es constantemente isotrópica.*

Cuando la constante de isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana con geodésicas planas es no nula, $\lambda \neq 0$, entonces la inmersión tiene segunda forma fundamental paralela [B1]. Recíprocamente, demostramos en Teorema 4.4 que toda inmersión isotrópica $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$ tiene geodésicas planas. Observamos que, a diferencia del caso definido, una inmersión indefinida 0-isotrópica con geodésicas planas no tiene por qué tener segunda forma fundamental paralela. En efecto, la inmersión isométrica

$$\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+1}^{n+2}, \quad \phi(x) = (f(x), x, f(x)),$$

es 0-isotrópica con geodésicas planas, y tiene segunda forma fundamental paralela si y sólo si la función f es un polinomio cuadrático (Ejemplo 2.7).

Otra interpretación geométrica de la noción de subvariedad isotrópica viene dada por el *número de contacto*. El concepto de número de contacto fue introducido recientemente por B.- Y. Chen y S.- J. Li [ChL] para subvariedades del espacio Euclídeo. Generalizamos en el Capítulo 4 la noción de número de contacto al caso indefinido, estudiando algunas de las propiedades que presenta toda subvariedad con número de contacto determinado. En particular, demostramos la estrecha relación existente entre las nociones de número de contacto e isotropía de una subvariedad. Esta relación, que nos permite interpretar geoméricamente la isotropía de una subvariedad mediante el contacto ordinario existente entre ciertas curvas (geodésicas y secciones normales), la obtenemos utilizando la importante Condición de Isotropía (3):

Teorema 4.11 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana.*

Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (1) *El número de contacto $\mathbf{c}_\#(M_s^n)$ de M_s^n satisface $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 2$.*
- (2) *M_s^n es isotrópica si y sólo si $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 3$.*
- (3) *M_s^n es constantemente isotrópica si y sólo si $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 4$.*

Para una subvariedad pseudo-Riemanniana del espacio pseudo-Euclídeo con métrica inducida indefinida podemos definir las nociones de número de contacto espacial y número de contacto temporal de forma similar a la definición de número de contacto pero sólo usando direcciones unitarias espaciales o temporales, respectivamente. Después de mostrar algunas importantes propiedades técnicas por sus aplicaciones relacionadas con el contacto de una subvariedad, tales como los Teoremas 4.12 y 4.22, demostramos la sorprendente relación entre las tres nociones de orden de contacto:

Teorema 4.27 Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad con métrica inducida indefinida. Dado un natural $k \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M_s^n tiene contacto de orden k .
2. M_s^n tiene contacto espacial de orden k .
3. M_s^n tiene contacto temporal de orden k .

En particular, los números de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \mathbf{c}_{\sharp}^+(M_s^n) = \mathbf{c}_{\sharp}^-(M_s^n)$.

A continuación, y siguiendo la misma línea de resultados de Chen-Li [ChL], obtenemos dos destacables consecuencias que vislumbran el peculiar comportamiento que tienen las subvariedades del espacio de Lorentz-Minkowski respecto al número de contacto:

Corolario 4.29 Sea M_1^n una subvariedad de Lorentz del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+d} . Entonces, se verifica una de las siguientes situaciones excluyentes:

- (1) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_1^n) = 2$.
- (2) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_1^n) = \infty$ y M_1^n es un trozo abierto de un n -plano de Lorentz.
- (3) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_1^n) = \infty$ y M_1^n es un trozo abierto de un espaciotiempo de De Sitter $\mathbb{S}_1^n(r, c)$ contenido en un $(n+1)$ -plano de Lorentz.

Corolario 4.30 Sea $M^n \subseteq \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial completa. Entonces, se verifica una de las siguientes situaciones excluyentes:

- (1) $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = 2$.
- (2) $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = \infty$ y M^n es un n -plano \mathbb{R}^n de \mathbb{L}^{n+2} .

- (3) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es una n -esfera $\mathbb{S}^n(r, c) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de centro y radio determinados.
- (4) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es un espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(r, c) \subseteq \mathbb{L}^{n+1}$ de centro y radio determinados.
- (5) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$ totalmente umbilical y no totalmente geodésica.
- (6) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$ no totalmente umbilical.

Finalmente, analizamos en los dos últimos párrafos de esta memoria las subvariedades con *secciones normales geodésicas* y las subvariedades *helicoidales*. Demostramos en el Teorema 4.33 que toda subvariedad pseudo-Riemanniana del espacio pseudo-Euclídeo con secciones normales geodésicas es constantemente isotrópica y tiene número de contacto infinito, verificándose la implicación recíproca cuando la subvariedad es localmente simétrica o analítica (Teorema 4.34 y Observación 4.35). Además, toda subvariedad con geodésicas planas tiene secciones normales geodésicas como establecemos en el Teorema 4.38. Por último, para las subvariedades Riemannianas del espacio Euclídeo, demostramos como novedad el siguiente resultado de caracterización:

Teorema 4.41 *Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^m$ una subvariedad Riemanniana. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$.
2. M^n es helicoidal.
3. M^n tiene secciones normales geodésicas.

Para terminar sólo resta señalar que el estudio de la noción de inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana presenta interesantes novedades con respecto

al caso Euclídeo. Este trabajo supone una primera presentación de éstas diferencias, quedando abiertas líneas de investigación referentes a la isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana.

Quisiera aprovechar esta Introducción para manifestar mi más sincero agradecimiento al Profesor Dr. D. José Luis Cabrerizo Jaraíz y al Profesor Dr. D. Manuel Fernández Andrés por sus valiosos consejos, aportaciones y ayuda en la elaboración de este trabajo, y al Profesor Dr. D. Alfonso Romero Sarabia por sus sugerencias y comentarios.

Capítulo 1

Preliminares y resultados básicos

Para fijar conceptos, notación y exponer los resultados básicos para el desarrollo posterior de nuestro estudio, vamos a tomar como referencias básicas B. O'Neill [O'N2] y J. A. Wolf [Wo]. Las demostraciones de los resultados expuestos en este capítulo preliminar podrán consultarse en las referencias que se citen en cada caso.

1.1. Preliminares lineales

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Una *métrica* sobre V es una aplicación $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y simétrica. Al par (V, g) se le llama espacio vectorial métrico. Dada una métrica g sobre V , dos vectores u y v de V se dicen *ortogonales*, denotado por $u \perp v$, si $g(u, v) = 0$. Así, el vector $v = 0$ es ortogonal a todos los demás.

Las métricas sobre un espacio vectorial se clasifican de la siguiente forma: g es *no degenerada* si el único vector ortogonal a todos los demás es el vector cero, es decir, si se verifica $g(v, w) = 0$ para todo vector w de V entonces necesariamente $v = 0$. La métrica g es *definida positiva* si $g(v, v) > 0$ para todo vector $v \neq 0$ de V y *definida negativa* si $-g$ es definida positiva. Se dice que g es *semidefinida positiva* (respectivamente, *semidefinida negativa*) si $g(v, v) \geq 0$ (respectivamente, $g(v, v) \leq 0$) para cada vector v de V , e *indefinida*, si no es semidefinida.

Un vector v de un espacio vectorial métrico (V, g) se dice *espacial* si se verifica $g(v, v) > 0$ o $v = 0$, *luminoso* si $g(v, v) = 0$ y $v \neq 0$, y *temporal* si $g(v, v) < 0$. El *carácter causal* de un vector v es el tipo de vector que es v según la anterior clasificación.

Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de (V, g) , la matriz $n \times n$ de coeficientes reales $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ se llama *matriz de la métrica g asociada a la base $\{e_1, \dots, e_n\}$* . Como g es simétrica, la matriz (g_{ij}) es simétrica. Observemos que esta matriz determina unívocamente a la métrica g pues

$$g\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i w_j.$$

Además, g es no degenerada si y sólo si la matriz de la métrica asociada a una base (y por tanto para toda base) es regular.

Es importante notar que para un subespacio vectorial W de un espacio vectorial métrico (V, g) no degenerado, la restricción de la métrica $g|_{W \times W}$ puede ser degenerada. Por ejemplo, para un subespacio generado por un vector luminoso $g|_{W \times W}$ es degenerada. Diremos entonces que un subespacio vectorial W de un espacio vectorial métrico (V, g) es *no degenerado* si la métrica restricción $g|_{W \times W}$ no es degenerada.

El *índice* de un espacio vectorial métrico (V, g) se define como la mayor dimensión $ind(W)$ del subespacio W de V de forma que la métrica restricción $g|_{W \times W}$ es definida negativa. Es claro que el índice s de un espacio vectorial métrico n -dimensional satisface $0 \leq s \leq n$, y $s = 0$ o $s = n$ si y sólo si la métrica es definida.

Un espacio vectorial métrico (V, g) es de *Lorentz* si la métrica g no es degenerada, el espacio vectorial tiene dimensión $n \geq 2$ e índice $s = 1$.

Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales métricos. Un isomorfismo lineal $f : V \rightarrow V'$ se dice *isometría* si $g'(f(x), f(y)) = g(x, y)$ para cada par de vectores x e y de V . Dos espacios vectoriales métricos se dicen *isométricos* si

existe una isometría entre ellos. Es bien conocido que dos espacios vectoriales métricos (no degenerados) son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión y mismos índices. En particular, dos espacios vectoriales de Lorentz son isométricos si tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1.1 Sobre \mathbb{R}^n se considera la métrica definida por

$$\mathbf{b}_s^n(x, y) = - \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{i=s+1}^n x_i y_i,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $s \leq n$. Entonces $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}^n, \mathbf{b}_s^n)$ es un espacio vectorial métrico no degenerado de índice s , denominado *espacio pseudo-Euclídeo*. Si la dimensión $n \geq 2$, el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_1^n es un espacio vectorial de Lorentz llamado *espacio de Lorentz-Minkowski* y denotado por \mathbb{L}^n . Todo espacio vectorial métrico (V, g) no degenerado es isométrico al espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n donde $n = \dim V$ y $s = \text{ind } V$. En particular, todo espacio vectorial n -dimensional de Lorentz es isométrico al espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^n . †

Ejemplo 1.2 Sean n, s y ν enteros tales que $0 \leq s \leq n$, $0 \leq \nu \leq n$ y $0 \leq s + \nu \leq n$. Denotemos por $\mathbb{R}_{s,\nu}^n$ al espacio vectorial \mathbb{R}^n junto con la métrica dada por la matriz (en la base usual de \mathbb{R}^n)

$$\begin{pmatrix} -I_s & & \\ & I_{n-s-\nu} & \\ & & 0_\nu \end{pmatrix},$$

donde I_m y 0_m denotan, respectivamente, las matrices cuadradas identidad y nula de orden m . Entonces $\mathbb{R}_{s,\nu}^n$ es un espacio vectorial métrico de índice s , que es degenerado si $\nu \neq 0$. Cuando $\nu = 0$, el espacio vectorial métrico $\mathbb{R}_{s,0}^n$ coincide con el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n . Puede probarse que todo espacio vectorial métrico (V, g) es isométrico al espacio $\mathbb{R}_{s,\nu}^n$, siendo $n - \nu$ es el valor del rango de la matriz (g_{ij}) (asociada a cualquier base de V), $n = \dim V$ y $s = \text{ind } V$. †

Para un subespacio vectorial W de un espacio vectorial métrico (V, g) , el *complemento ortogonal* de W , denotado por W^\perp , es el subespacio vectorial de V definido por

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

En relación al complemento ortogonal de un subespacio vectorial se tienen las siguientes propiedades [O'N2]:

Lema 1.3 *Si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial métrico (V, g) no degenerado, entonces se verifican:*

- (1) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;
- (2) $(W^\perp)^\perp = W$;
- (3) W^\perp es no degenerado, si y sólo si, V puede descomponerse como suma directa $V = W \oplus W^\perp$.

Observemos que, en virtud de estas propiedades, W es no degenerado si W^\perp también lo es.

La norma $\|v\|$ de un vector se define como $|g(v, v)|^{1/2}$. Un vector v se dice *unitario* si $g(v, v) = \pm 1$. Un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales se dice *ortonormal*. El siguiente resultado es bien conocido:

Lema 1.4 *Para un espacio vectorial métrico no degenerado (V, g) se tienen las siguientes propiedades:*

- (1) *Existe una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , esto es, $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, donde $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$.*
- (2) *Cada vector v de V admite una única expresión de la forma*

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

(3) Para cada base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , el número de signos negativos en la signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ es igual al índice de V .

(4) Si W es un subespacio no degenerado, entonces

$$\text{ind } V = \text{ind } W + \text{ind } W^\perp.$$

Observación 1.5 Dado un espacio vectorial métrico (V, g) , el conjunto Λ de todos los vectores luminosos se llama *cono de luz*. Si (V, g) es indefinido, no degenerado y de índice s , podemos obtener todos los vectores luminosos como límite de una sucesión de vectores espaciales o temporales. Explícitamente, para una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_n\}$ de V , definimos la siguiente isometría entre espacios vectoriales métricos

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}_s^n, \quad v \mapsto (v_1, \dots, v_n),$$

donde $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Consideramos sobre \mathbb{R}_s^n la topología usual de \mathbb{R}^n y dotamos a V de la única topología que hace a $\Phi_{\mathcal{B}}$ homeomorfismo¹. Así, una sucesión $\{v^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de vectores de V converge a un vector $v \in V$ si la sucesión de coordenadas en la base \mathcal{B} de $\{v^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a las coordenadas de v en la misma base. Para la convergencia escribiremos $v^k \rightarrow v$ y $\lim_k v^k = v$ como es usual. Como el cono de luz Λ de (V, g) se transforma mediante la isometría $\Phi_{\mathcal{B}}$ en el conjunto

$$\Lambda \cong \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\} : -x_1^2 - \dots - x_s^2 + x_{s+1}^2 + \dots + x_n^2 = 0\},$$

y éste es frontera del conjunto de las coordenadas de los vectores espaciales, cada vector luminoso admite una sucesión de vectores espaciales que converge hacia él. De la misma forma, cada vector luminoso puede ser obtenido como límite de una sucesión de vectores temporales. \diamond

El siguiente resultado nos informa sobre la proporcionalidad de dos métricas mediante la propiedad de conservación de los vectores luminosos [DN]:

¹Observemos que esta topología sobre V así construida no depende de la base \mathcal{B} elegida.

Lema 1.6 *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico no degenerado e indefinido. Si b es una métrica arbitraria sobre V , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $b = c g$ con $c \in \mathbb{R}$.
2. $b(x, x) = 0$ para todo vector luminoso $x \in V$.

Dicho de otra forma, el cono de luz determina la métrica salvo un factor conforme. La idea básica de la prueba es, siguiendo la argumentación de S. W. Hawking y G. F. R. Ellis [HE, p. 61], construir el polinomio

$$P(t) = g(u + tv, u + tv) = g(u, u) + 2tg(u, v) + t^2g(v, v),$$

para ciertos vectores u, v de determinado carácter causal, y estudiar su comportamiento. Esta técnica es especialmente fructífera en el desarrollo de este trabajo y la denominamos *Argumentación del Polinomio de Hawking-Ellis*.

1.2. Variedades pseudo-Riemannianas

Todos los objetos geométricos de nuestro interés se supondrán de clase infinito. Salvo mención explícita de lo contrario, las variedades diferenciables se tomarán sin borde, verificando el segundo axioma de numerabilidad, conexas y de dimensión $n \geq 2$. Para una variedad diferenciable M de dimensión n denotaremos por $C^\infty(M)$ al álgebra de las funciones diferenciables sobre M , por $\mathfrak{X}(M)$ al álgebra de Lie de sus campos de vectores tangentes, por T_pM al espacio tangente a M en el punto p de M y por $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ al fibrado tangente.

Un campo tensorial tipo $(0, 2)$ simétrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ se dice *tensor métrico* sobre M si para cada punto p de M el espacio vectorial métrico inducido (T_pM, g_p) es no degenerado y de índice constante s . El par

(M, g) se dirá una variedad *pseudo-Riemanniana* y al valor de s se le llama el índice de la variedad pseudo-Riemanniana (M, g) . Si $s = 0$ entonces (M, g) es una variedad Riemanniana, y si $s = 1$, se dice que (M, g) es de Lorentz. Por simplicidad, denotaremos por M_s^n a una variedad pseudo-Riemanniana n -dimensional con tensor métrico g de índice s .

Toda variedad diferenciable (en la terminología de [KN], es decir, sin la suposición de que su topología verifique el segundo axioma de numerabilidad) que admita un tensor métrico es paracompacta. Más concretamente, una variedad diferenciable es paracompacta si admite la existencia de una conexión afín sobre la variedad [Sp, Vol. 2, Cor. 8.25]. Por otro lado, es bien conocido que una variedad diferenciable paracompacta admite un tensor métrico Riemanniano. Pero en general, el mismo procedimiento de construcción no es válido para concluir la existencia de tensores métrico de índice $s \neq 0$. De hecho, una variedad diferenciable paracompacta admite un tensor métrico de índice s si y sólo si admite una distribución diferenciable s -dimensional [St, Teorema 40.11].

Como caso particular [PR] tenemos que toda variedad no compacta admite una distribución 1-dimensional y, en consecuencia, admite un tensor métrico de Lorentz. Por otra parte, una variedad compacta M admite una distribución diferenciable 1-dimensional si y sólo si la característica de Euler $\chi(M) = 0$, o lo que es lo mismo, admite un campo global $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p \neq 0$ para cada punto p de M . En una variedad simplemente conexa (compacta o no), toda distribución 1-dimensional proviene de un campo tangente global sin ceros. Por tanto, una variedad simplemente conexa M admite un tensor métrico de Lorentz si y sólo si admite un campo global que no se anula en ningún punto.

Dadas dos variedades pseudo-Riemannianas (M, g) y (M', g') , un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M'$ que cumpla $\phi^*g' = fg$ para alguna función diferenciable

$f > 0$ o $f < 0$, se dirá conforme. Si f es una función constante c no nula se dice que ϕ es una homotecia de razón c . Si además $c = 1$ diremos que ϕ es una isometría, y si $c = -1$, ϕ se dice anti-isometría.

Una aplicación diferenciable ϕ entre dos variedades pseudo-Riemannianas (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) se dice *inmersión isométrica* si $\phi^*\tilde{g} = g$. Un *embebimiento isométrico* es una inmersión isométrica tal que la aplicación $\phi : M \rightarrow \phi(M)$ es un homeomorfismo, considerando sobre la imagen $\phi(M) \subseteq \tilde{M}$ la topología relativa. Toda inmersión isométrica define localmente un embebimiento isométrico. Si la inclusión $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$ es un embebimiento isométrico entonces M se dice *subvariedad pseudo-Riemanniana* de \tilde{M} .

Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a su tensor métrico g , esto es, la única conexión definida sobre el fibrado vectorial tangente TM_s^n compatible con el tensor métrico g y libre de torsión. Escribiremos R para su tensor de curvatura de Riemann:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Si γ es una curva en M_s^n y $\mathfrak{X}(\gamma)$ denota conjunto de campos diferenciables sobre γ , la conexión ∇ proporciona una aplicación $V \mapsto \frac{DV}{dt}$, de $\mathfrak{X}(\gamma)$ sobre sí mismo, llamada la derivada covariante inducida. Un campo de vectores V de $\mathfrak{X}(\gamma)$ se dice *paralelo* si $\frac{DV}{dt} = 0$, y una curva γ se dice *geodésica* si el campo γ' es paralelo. Dado un punto $p \in M_s^n$ y un vector tangente $v \in T_p M_s^n$, la única geodésica que pasa por p con velocidad inicial v se escribe γ_v , es decir, la curva γ_v es la única geodésica de M_s^n satisfaciendo $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$. Una variedad pseudo-Riemanniana se dice *completa* si toda geodésica maximal está definida en toda la recta real \mathbb{R} .

Puesto que, para cada geodésica γ se tiene que $g(\gamma', \gamma') = cte$, podremos hablar de geodésicas temporales, luminosas o espaciales.

La derivada covariante inducida permite además definir un transporte paralelo a lo largo de una curva arbitraria γ del siguiente modo: para cada

$a, b \in \text{Dom}(\gamma)$, $a < b$,

$$P : T_{\gamma(a)}M_s^n \longrightarrow T_{\gamma(b)}M_s^n, v \longmapsto V(b),$$

donde V es el único campo de vectores a lo largo de γ que es paralelo y cumple $V(a) = v$. Se tiene que P es una isometría lineal.

Un subespacio vectorial bidimensional Π del espacio tangente $T_pM_s^n$ se denomina sección plana en p . Si Π es una sección plana no degenerada en p y $\{x, y\}$ es una base de Π , la *curvatura seccional* de la sección Π viene dada por

$$\mathcal{K}(p, \Pi) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}. \quad (1.1)$$

No obstante, es posible definir una adaptación de este concepto para planos degenerados en variedades de Lorentz [PR]. Una variedad pseudo-Riemanniana se dice de *curvatura seccional constante* si la función $\mathcal{K}(p, \Pi)$ es constante para cada sección plana no degenerada Π y cada punto p . Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n con curvatura seccional constante c la designaremos por $M_s^n(c)$. Si en cada punto $p \in M_s^n$ las curvaturas seccionales $\mathcal{K}(p, \Pi)$ tienen el mismo valor $\mathcal{K}(p)$ entonces, el tensor curvatura de Riemann R de M_s^n puede escribirse

$$R(X, Y)Z = \mathcal{K}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y). \quad (1.2)$$

Cuando $n \geq 3$ y $\mathcal{K}(p, \Pi) = \mathcal{K}(p)$ para cada sección plana Π no degenerada, el *Teorema de Schur* nos asegura que M_s^n tiene curvatura seccional constante ([Wo, p. 57]). Recordemos también que una variedad pseudo-Riemanniana en la cual el tensor de curvatura R es nulo se dice *llana*.

Señalemos que para variedades pseudo-Riemannianas indefinidas de dimensión $n \geq 3$, R. Kulkarni [Ku] demostró que si la curvatura seccional está acotada superior o inferiormente, entonces debe ser constante. Esto contrasta notablemente con resultados Riemannianos que involucran la acotación de la curvatura seccional. Por ejemplo, es bien conocido que la curvatura seccional de una variedad Riemanniana compacta está siempre acotada.

Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *localmente simétrica* si su tensor curvatura de Riemann R es paralelo, es decir, si su diferencial covariante $\nabla R = 0$. En particular, toda variedad pseudo-Riemanniana de curvatura seccional constante es localmente simétrica. Puede probarse que una variedad pseudo-Riemanniana es localmente simétrica si y sólo si la curvatura seccional es invariante bajo el transporte paralelo [Wo, Corolario 2.3.9].

Observemos que la diferencial de una isometría conserva la curvatura. Para variedades localmente simétricas se verifica también el recíproco [O'N2], ya que se demuestra que toda isometría lineal que conserva la curvatura es la diferencial de una isometría local. Se deduce sin dificultad de este hecho la siguiente interpretación geométrica de la simetría local: una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n es localmente simétrica si y sólo si todo punto $p \in M_s^n$ admite un entorno abierto $U \subseteq M_s^n$ y una isometría local $\sigma_p : U \rightarrow U$ con diferencial $d\sigma_p(v) = -v$. La aplicación σ_p se llama *simetría local* en p .

Si en cada punto p la simetría σ_p está definida en toda la variedad, M_s^n se dice *simétrica*. Una variedad localmente simétrica no es necesariamente completa, ya que toda subvariedad abierta de una variedad localmente simétrica también es localmente simétrica. No obstante, un espacio pseudo-Riemanniano simétrico es completo. Es también conocido que toda variedad pseudo-Riemanniana localmente simétrica, simplemente conexa y completa es simétrica.

El tensor de *curvatura de Ricci* o tensor de Ricci, Ric, es el tensor tipo $(0, 2)$ dado por $\text{Ric}(X, Y) = \text{traza}_g\{Z \mapsto R(Z, X)Y\}$ donde hemos escrito *traza_g* para la traza. Respecto a un campo de referencias ortonormal, es decir, una base de campos tangentes locales $\{e_1, \dots, e_n\}$ verificando $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ donde $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, el tensor de Ricci se escribe

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i), \quad (1.3)$$

de donde se deduce que Ric es un tensor simétrico.

Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *Einstein* si su tensor de Ricci satisface $\text{Ric}(X, Y) = \rho \cdot g(X, Y)$ para ρ constante real. Toda variedad pseudo-Riemanniana con curvatura seccional constante c es Einstein, pues de las expresiones (1.2) y (1.3) se deduce fácilmente que $\text{Ric} = c(n-1)g$. Las superficies pseudo-Riemannianas satisfacen $\text{Ric} = \mathcal{K}g$. Por tanto, una superficie pseudo-Riemanniana es Einstein si y sólo si tiene curvatura Gaussiana constante. Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión $n = 3$ es Einstein si y sólo si tiene curvatura seccional constante. Además, toda variedad pseudo-Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ satisfaciendo $\text{Ric} = \rho \cdot g$, para alguna función diferenciable $\rho \in C^\infty(M_s^n)$, es Einstein [Be1].

Ya que las homotecias conservan la conexión de Levi-Civita también conservan las nociones geométricas que derivan sólo de ∇ . Por ejemplo, la derivada covariante inducida sobre una curva, el transporte paralelo, las geodésicas, la curvatura de Riemann y la curvatura de Ricci son invariantes homotéticos. Sin embargo, la curvatura seccional no es invariante por homotecias. De hecho, para una homotecia ϕ de razón c es fácil probar que

$$\mathcal{K}(d\phi(\Pi)) = \frac{1}{c}\mathcal{K}(\Pi),$$

siendo Π una sección plana no degenerada en un punto del dominio de ϕ .

1.2.1. Espacios modelos pseudo-Riemannianos

Un espacio modelo de la geometría pseudo-Riemanniana es una variedad pseudo-Riemanniana de curvatura seccional constante, simplemente conexa y completa. Una condición necesaria y suficiente para que dos espacios modelos pseudo-Riemannianos sean isométricos es que tengan la misma dimensión, índice y curvatura c [O'N2, p. 227]. Por tanto, salvo isometrías, existe a lo sumo un espacio modelo $\mathbb{M}_s^n(c)$ de dimensión n , índice s y curvatura c .

Damos a continuación ejemplos de espacios modelos pseudo-Riemannianos $\mathbb{M}_s^n(c)$ para todos los posibles valores de n , s y c :

1. Consideremos el espacio \mathbb{R}^n con el sistema coordenado global habitual (x_1, \dots, x_n) , $0 \leq s \leq n$ y el tensor métrico

$$\mathbf{g}_s^n = - \sum_{i=1}^s dx_i^2 + \sum_{i=s+1}^n dx_i^2.$$

Por convenio, si $s = 0$ definimos \mathbf{g}_s^n como el tensor métrico Riemanniano usual de \mathbb{R}^n . Entonces $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_s^n)$ es una variedad pseudo-Riemanniana n -dimensional de índice s conocida con el nombre de *espacio pseudo-Euclídeo*. El espacio pseudo-Euclídeo n -dimensional de índice s , denotado por \mathbb{R}_s^n , es una variedad pseudo-Riemanniana de curvatura seccional constante $c = 0$, simplemente conexa y completa.

En el caso particular $s = 1$ y $n \geq 2$, el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_1^n , designado por \mathbb{L}^n , es una variedad de Lorentz denominada *espacio de Lorentz-Minkowski*.

2. Sea c un punto de \mathbb{R}^{n+1} y $r > 0$. La *pseudo-esfera* de radio r y centro c de \mathbb{R}_s^{n+1} es la hipercuádrice

$$\mathbb{S}_s^n(r, c) = \{x \in \mathbb{R}_s^{n+1} : \mathbf{b}_s^{n+1}(x - c, x - c) = r^2\}.$$

Llamamos *espacio pseudo-hiperbólico* de radio $r > 0$ y centro c de \mathbb{R}_{s+1}^{n+1} a la hipercuádrice

$$\mathbb{H}_s^n(r, c) = \{x \in \mathbb{R}_{s+1}^{n+1} : \mathbf{b}_{s+1}^{n+1}(x - c, x - c) = -r^2\}.$$

La pseudo-esfera y el espacio pseudo-hiperbólico de radio r y centro $c = 0$ son denotados, respectivamente, por $\mathbb{S}_s^n(r)$ y $\mathbb{H}_s^n(r)$. Si $r = 1$ y $c = 0$ entonces designamos por \mathbb{S}_s^n y \mathbb{H}_s^n a la pseudo-esfera y espacio pseudo-hiperbólico correspondiente. Observemos que la pseudo-esfera $\mathbb{S}_0^n(c, r)$ es la esfera ordinaria $\mathbb{S}^n(r, c)$ en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^{n+1} . La pseudo-esfera \mathbb{S}_1^n se denomina *espaciotiempo de De Sitter*.

Es conocido que $\mathbb{S}_s^n(r, c)$ y $\mathbb{H}_s^n(r, c)$ son variedades pseudo-Riemannianas completas de dimensión n e índice s que, respectivamente, tienen curvatura seccional constante r^{-2} y $-r^{-2}$. Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}_s^n(r, c)$ es simplemente conexa para $0 \leq s \leq n - 2$; la pseudo-esfera $\mathbb{S}_{n-1}^n(r, c)$ es conexa y con grupo fundamental cíclico infinito; y $\mathbb{S}_n^n(r, c)$ tiene dos componentes simplemente conexas.

Nótese que la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}_s^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-s+1}^{n+1}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_{s+1}, \dots, x_{n+1}, x_1, \dots, x_s)$$

es una anti-isometría, que transforma la pseudo-esfera \mathbb{S}_s^n en el espacio pseudo-hiperbólico \mathbb{H}_{n-s}^n . En consecuencia, $\mathbb{H}_s^n(r, c)$ es simplemente conexa para valores del índice $2 \leq s \leq n$; el espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_1^n(r, c)$ es conexo y con grupo fundamental cíclico infinito; y $\mathbb{H}_0^n(r, c)$ tiene dos componentes simplemente conexas difeomorfas. El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$ se define por

$$\mathbb{H}^n(r) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, x \rangle = -r^2, t > 0\},$$

donde $t = x_1$ es la primera coordenada en \mathbb{L}^{n+1} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica usual \mathbf{b}_1^n del espacio vectorial métrico \mathbb{L}^n . Entonces $\mathbb{H}^n(r)$ es una variedad Riemanniana completa y simplemente conexa de curvatura seccional constante $c = -1/r^2$. †

El *Teorema de Riemann* nos asegura que toda variedad pseudo-Riemanniana $M_s^n(c)$ de curvatura seccional constante c es localmente conforme a un trozo abierto de \mathbb{S}_s^n si $c > 0$, \mathbb{R}_s^n si $c = 0$, o \mathbb{H}_s^n si $c < 0$.

Las únicas variedades pseudo-Riemannianas 1-dimensionales simplemente conexas, completas y de curvatura constante son \mathbb{R}^1 y \mathbb{R}_1^1 . Todo espacio modelo

pseudo-Riemanniano $M_s^n(c)$ de dimensión $n \geq 2$ es isométrico a

$$M_s^n(c) = \begin{cases} \mathbb{S}_s^n(r) & \text{si } c = 1/r^2 \text{ y } 0 \leq s \leq n-2, \\ \mathbb{R}_s^n & \text{si } c = 0, \\ \mathbb{H}_s^n(r) & \text{si } c = -1/r^2 \text{ y } 2 \leq s \leq n. \end{cases}$$

El espacio modelo $M_n^n(1/r^2)$ es isométrico a una componente conexa $c(\mathbb{S}_n^n(r))$ de $\mathbb{S}_n^n(r)$; $M_0^n(-1/r^2)$ es isométrico al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$; $M_{n-1}^n(1/r^2)$ es isométrico al recubrimiento simplemente conexo $\tilde{\mathbb{S}}_{n-1}^n(r)$ de $\mathbb{S}_{n-1}^n(r)$; y el espacio $M_1^n(-1/r^2)$ es isométrico a $\tilde{\mathbb{H}}_1^n(r)$, el recubrimiento simplemente conexo de $\mathbb{H}_{n-1}^n(r)$.

El espacio \mathbb{H}_1^n puede ser considerado como una hipersuperficie de revolución en $\mathbb{R}_2^{n+1} = \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Desarrollando los círculos de revolución obtenemos una aplicación recubridora

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}_1^n, \quad \pi(t, x) = (\sqrt{1 + \langle x, x \rangle} \cos t, \sqrt{1 + \langle x, x \rangle} \sin t, x).$$

Dotado con la métrica “pull-back”, \mathbb{R}^n se convierte en un espacio recubridor pseudo-Riemanniano simplemente conexo de \mathbb{H}_1^n , obteniéndose un modelo explícito para el recubridor universal $\tilde{\mathbb{H}}_1^n$.

Si escribimos $\tilde{\mathbb{S}}_s^n = \mathbb{S}_s^n$ para $s \neq n-1, n$ y $\tilde{\mathbb{H}}_s^n = \mathbb{H}_s^n$ para $s \neq 0, 1$, entonces toda variedad pseudo-Riemanniana M_s^n de dimensión $n \geq 2$ e índice $0 \leq s \leq n$, que sea completa, conexa y de curvatura seccional constante c , es isométrica a un cociente [Wo, Teorema 2.4.9]

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{S}}_s^n(r)/\Gamma & \text{si } c > 0, \\ \mathbb{R}_s^n/\Gamma & \text{si } c = 0, \\ \tilde{\mathbb{H}}_s^n(r)/\Gamma & \text{si } c < 0, \end{cases}$$

donde Γ es un grupo de isometrías que define una acción libre y propiamente discontinua sobre el recubridor universal del espacio $M_s^n(c)$ en cada caso.

1.2.2. Variedades homogéneas e isotrópicas

En 1922 A. Friedmann encontró por primera vez las soluciones cosmológicas adecuadas para las ecuaciones de Einstein que pueden utilizarse para aproximar una distribución de galaxias uniforme a gran escala. Los modelos cosmológicos que estudió Friedmann son conocidos como modelos de Friedmann-Robertson-Walker, debido a las contribuciones y generalizaciones de estos otros. Básicamente un modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker se caracteriza por el hecho de ser espacialmente homogéneo e isotrópico. En general, isotrópico significa que el universo parece igual en todas las direcciones. Del mismo modo, espacialmente homogéneo significa que el universo parece igual en cada punto del espacio y en cualquier instante. Este par de hipótesis está en buen acuerdo con las observaciones de la distribución de materia a muy gran escala y con la naturaleza del fondo de partículas, por lo que los modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos son excelentes aproximaciones a la estructura del universo real [Pe].

Si M_s^n es una variedad pseudo-Riemanniana, una isometría de M_s^n en si mismo se dice isometría de M_s^n . Como la composición de isometrías y la inversa de una isometría son isometrías de la variedad, el conjunto $\text{Iso}(M_s^n)$ de isometrías de M_s^n es un grupo, llamado *grupo de isometrías* de M_s^n . El Teorema de Myers-Steenrod [MS] nos asegura que:

Teorema 1.7 *Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- (1) *El grupo de las isometrías $\text{Iso}(M_s^n)$ es un grupo de Lie que actúa (diferenciabilmente) sobre M_s^n .*
- (2) *Para cada punto p de M_s^n , el subgrupo de isotropía*

$$\text{Iso}_p(M_s^n) = \{\phi \in \text{Iso}(M_s^n) : \phi(p) = p\}$$

es un subgrupo cerrado de $\text{Iso}(M_s^n)$. Además, si denotamos por

$$\rho : \text{Iso}_p(M_s^n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \phi \mapsto \rho(\phi) = d\phi_p$$

la representación isotrópica, entonces ρ define un isomorfismo de $\text{Iso}_p(M_s^n)$ en un subgrupo cerrado de $O^s(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, donde $O^s(n)$ es el conjunto formado por todas las isometrías vectoriales de \mathbb{R}_s^n .

Puede comprobarse que $\dim(\text{Iso}(M_s^n)) \leq n(n+1)/2$ dándose la igualdad sólo si M_s^n tiene curvatura seccional constante [Be1, p. 40].

Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *homogénea* si el grupo de isometrías $\text{Iso}(M_s^n)$ actúa transitivamente sobre M_s^n , es decir, para cada par de puntos p y q de M_s^n existe una isometría ϕ de M_s^n tal que $\phi(p) = q$. En un espacio pseudo-Riemanniano homogéneo M_s^n toda propiedad geométrica en un punto de M_s^n se verifica en todo punto. Toda variedad simétrica es homogénea, pero un espacio homogéneo no es necesariamente simétrico [O'N2, Ejemplo 7.14]. Por otra parte, es conocido que toda variedad Riemanniana homogénea o compacta es completa; pero ninguna de estas condiciones en solitario son suficientes para el caso general de métricas indefinidas. Sin embargo, el resultado de Marsden [Mar] nos determina que toda variedad compacta y homogénea es completa.

Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *isotrópica intrínseca en un punto* $p \in M_s^n$ si, dado un número real $r \in \mathbb{R}$ arbitrario, el subgrupo de isotropía $\text{Iso}_p(M_s^n)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores tangentes $\Sigma_p^*(r) = \{v \in T_p M_s^n : g(v, v) = r, v \neq 0\}$, es decir, si para cada $u, v \in T_p M_s^n$ no nulos con $g(u, u) = g(v, v)$ existe una isometría ϕ de M_s^n tal que $\phi(p) = p$ y $d\phi(u) = v$. Una variedad pseudo-Riemanniana se dice *isotrópica intrínseca* si es isotrópica intrínseca en todo punto. La noción de variedad pseudo-Riemanniana *localmente isotrópica intrínseca* es clara. Intuitivamente hablando, una variedad isotrópica intrínseca es geoméricamente la misma en cada una de sus direcciones tangentes.

Las variedades pseudo-Riemannianas isotrópicas intrínsecas fueron estudiadas y clasificadas por J. A. Wolf en [Wo]. En este libro se demuestra que toda variedad pseudo-Riemanniana localmente isotrópica intrínseca es localmente simétrica y localmente homogénea. Asimismo, una variedad isotrópica intrínseca es simétrica y homogénea. En el caso Riemanniano toda variedad isotrópica intrínseca es un espacio Euclídeo o un espacio simétrico de rango uno. Nótese que el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ nos proporciona un ejemplo de variedad isotrópica intrínseca sin curvatura seccional constante. Sin embargo, una variedad M_s^n localmente isotrópica intrínseca tiene curvatura seccional constante si tiene índice s impar, o $n - s$ impar.

Una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *fuertemente isotrópica intrínseca* si, para todo punto p de M_s^n , el subgrupo de isotropía $\text{Iso}_p(M_s^n)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de referencias ortonormales en p , es decir, para cada par de bases ortonormales ordenadas $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ de $T_p M_s^n$ existe una isometría ϕ de M_s^n tal que $\phi(p) = p$ y $d\phi(e_i) = e'_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Una variedad pseudo-Riemanniana es fuertemente isotrópica intrínseca si y sólo si es isotrópica intrínseca con curvatura seccional constante. Para una de tales variedades M_s^n el subgrupo de isotropía $\text{Iso}_p(M_s^n) \cong O^s(n)$, que es el de mayor amplitud posible. Además, una variedad pseudo-Riemanniana completa M_s^n es fuertemente isotrópica intrínseca si y sólo si $\dim(\text{Iso}(M_s^n)) = n(n+1)/2$ [O'N2, p. 260]. Nótese que en el caso Riemanniano toda variedad M^n fuertemente isotrópica intrínseca es homotética a \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n o $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. En el caso general indefinido la situación es sustancialmente más complicada [Wo]:

Teorema 1.8 *Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana de curvatura seccional constante $c \neq 0$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. M_s^n es fuertemente isotrópica intrínseca.
2. M_s^n es isotrópica intrínseca.

3. M_s^n es simétrica.
4. M_s^n es un recubridor pseudo-Riemanniano del espacio $\mathbb{RP}_s^n = \mathbb{S}_s^n / \{\pm 1\}$ si $c > 0$, o de $\mathbb{RH}_s^n = \mathbb{H}_s^n / \{\pm 1\}$ si $c < 0$.
5. M_s^n es completa, y el grupo de automorfismos del recubridor universal pseudo-Riemanniano $\pi : \tilde{\mathbb{S}}_s^n \rightarrow M_s^n$ (resp. $\pi : \tilde{\mathbb{H}}_s^n \rightarrow M_s^n$) es un subgrupo normal de $\text{Iso}(\tilde{\mathbb{S}}_s^n)$ (resp. $\text{Iso}(\tilde{\mathbb{H}}_s^n)$).

Teorema 1.9 Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana llana. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M_s^n es isométrica a \mathbb{R}_s^n .
2. M_s^n es fuertemente isotrópica intrínseca.
3. M_s^n es isotrópica intrínseca.

Además, M_s^n es simétrica si y sólo si es isométrica a un cociente \mathbb{R}_s^n / Γ de \mathbb{R}_s^n por un subgrupo discreto de traslaciones.

1.2.3. Curvas en una variedad pseudo-Riemanniana

Una curva $\gamma = \gamma(t)$ en una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *parametrizada naturalmente* o *parametrizada por el arco* si el campo de velocidades $T = \gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es unitario, es decir, si se cumple

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \varepsilon = \pm 1$$

para cada $t \in \text{Dom}(\gamma)$. Una curva $\gamma = \gamma(t)$ parametrizada naturalmente se llama *curva de Frenet de orden propio* $d \geq 1$ si, para cada $t \in \text{Dom}(\gamma)$, el conjunto

$$\{T(t), \nabla_T T(t), \dots, \nabla_T^{d-1} T(t)\}$$

es linealmente independiente en $T_{\gamma(t)} M_s^n$, mientras que el conjunto

$$\{T(t), \nabla_T T(t), \dots, \nabla_T^d T(t)\}$$

es linealmente dependiente en $T_{\gamma(t)}M_s^n$, donde hemos escrito $\nabla_T^0 T = T$, $\nabla_T^1 T = \nabla_T T$, $\nabla_T^2 T = \nabla_T(\nabla_T T)$, $\nabla_T^3 T = \nabla_T(\nabla_T^2 T)$, etc, indicando a las derivadas covariantes sucesivas a lo largo de γ respecto a la conexión de Levi-Civita ∇ de M_s^n . Una curva $\gamma = \gamma(t)$ es una *curva de Frenet de orden d* si es una curva de Frenet de orden propio $d' \leq d$. Observemos que las curvas de Frenet de orden $d = 1$ son precisamente las geodésicas de velocidad unitaria.

Supongamos que para una curva de Frenet $\gamma = \gamma(t)$ de orden propio $d \geq 2$ el conjunto $\{T(t), \nabla_T T(t), \dots, \nabla_T^{d-1} T(t)\}$ está constituido únicamente por vectores tangentes independientes y no luminosos de $T_{\gamma(t)}M_s^n$. Entonces, a partir del procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt, existe un campo de referencias ortonormal $\{V_1 = T, \dots, V_d\}$ a lo largo de γ y unas funciones diferenciables positivas $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{d-1}(t)$ satisfaciendo el siguiente sistema ordinario de ecuaciones diferenciales [Sp, Vol. 4, p. 29]:

$$\begin{cases} \nabla_T V_1 = \kappa_1 V_2, \\ \nabla_T V_j = -\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \kappa_{j-1} V_{j-1} + \kappa_j V_{j+1}, & j = 2, \dots, d-1, \\ \nabla_T V_d = -\varepsilon_d \varepsilon_{d-1} \kappa_{d-1} V_{d-1}, \end{cases} \quad (1.4)$$

si el orden propio $d \geq 3$, y el sistema de ecuaciones diferenciales ($d = 2$)

$$\begin{cases} \nabla_T V_1 = \kappa V_2, \\ \nabla_T V_2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \kappa V_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $\varepsilon_j = g(V_j, V_j) = \pm 1$ para $j = 1, \dots, d$. Las funciones $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{d-1}(t)$ y el campo de referencias ortonormal $\{V_1, \dots, V_d\}$ se llaman *curvaturas* y *referencia de Frenet* de γ , respectivamente. Si las curvaturas $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{d-1}(t)$ de una curva de Frenet γ son funciones constantes, entonces la curva γ se llama *hélice propia de orden d* . Una *circunferencia propia* es una hélice propia γ de orden $d = 2$, y la constante κ definida por (1.5) se llama *curvatura* de la circunferencia.

La unicidad local de las curvas de Frenet está asegurada. En efecto, a partir de la unicidad determinada por el sistema de ecuaciones diferenciales

(1.4) y (1.5), se deduce que para cada punto $p \in M_s^n$, cada referencia ortonormal $\{v_1, \dots, v_d\}$ de vectores tangentes en p y cada colección $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1} \in C^\infty(M_s^n)$ de funciones diferenciables positivas, existe una única curva de Frenet γ definida en algún intervalo abierto $(-\delta, \delta)$ tal que $\gamma(0) = p$, sus curvaturas de Frenet son $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ y tiene referencia de Frenet $\{V_1, \dots, V_d\}$ satisfaciendo las condiciones iniciales $V_j(0) = v_j$ para cada $j = 1, \dots, d$.

A título de ejemplo, describimos las circunferencias propias del plano pseudo-Euclídeo:

1. En el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 , las circunferencias (propias) son de la forma

$$\gamma(t) = (c_1 + r \cos(t/r), c_2 + r \sin(t/r)),$$

que parametrizan las circunferencias de centro $c = (c_1, c_2)$ y radio r usuales de \mathbb{R}^2 .

2. Las circunferencias propias γ en el plano de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 son ramas conexas de hipérbolas, esencialmente del tipo:

$$t \mapsto (c_1 + r \cosh(t/r), c_2 + r \sinh(t/r)) \in \mathbb{H}^1(c, r) \subseteq \mathbb{R}_1^2,$$

$$t \mapsto (c_1 + r \sinh(t/r), c_2 + r \cosh(t/r)) \in \mathbb{S}_1^1(c, r) \subseteq \mathbb{R}_1^2,$$

donde $c = (c_1, c_2)$ y r es el radio de γ .

1.3. Inmersiones isométricas

Sea $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ una inmersión isométrica entre dos variedades pseudo-Riemannianas. Denotamos de la misma forma al tensor métrico g de M y \tilde{M} . Para todas las fórmulas y cálculos locales podemos asumir que la inmersión ϕ es un embebimiento, por lo que podemos identificar un punto p de M con su imagen $\phi(p)$. El espacio tangente $T_p M$ se identifica con el subespacio $d\phi(T_p M)$ de $T_{\phi(p)} \tilde{M}$.

Como para cada punto $p \in M$ el espacio tangente $T_p M$ es un subespacio vectorial métrico no degenerado de $T_p \tilde{M}$, se verifica la siguiente descomposición en suma ortogonal:

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M.$$

El espacio $T_p^\perp M$ se llama *espacio normal* a ϕ en p . La dimensión d y el índice ℓ de $T_p^\perp M$ se llaman *codimensión* y *coíndice* de ϕ , respectivamente. Es claro que si M tiene dimensión n e índice s , la variedad ambiente \tilde{M} tiene dimensión $n + d$ e índice $s + \ell$.

Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Entonces, si ∇ y $\tilde{\nabla}$ son las respectivas conexiones de Levi-Civita de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, la *fórmula de Gauss* viene dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (1.6)$$

donde h denota la *segunda forma fundamental* de la inmersión ϕ . Para un campo normal $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ se tiene la siguiente descomposición ortogonal, denominada *fórmula de Weingarten*:

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \quad (1.7)$$

donde A_ξ es un tensor tipo $(1, 1)$ denominado *endomorfismo de Weingarten* asociado a ξ , y D es la conexión normal asociada al fibrado vectorial normal $T^\perp M_s^n$. El endomorfismo de Weingarten y la segunda forma fundamental verifican

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi). \quad (1.8)$$

Como la segunda forma fundamental h es simétrica, se sigue de la ecuación (1.8) que el endomorfismo de Weingarten A_ξ es autoadjunto.

La *ecuación de Gauss* relaciona los tensores de curvatura de Riemann R de M_s^n y \tilde{R} de $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &+ g(h(X, Z), h(Y, W)) - g(h(X, W), h(Y, Z)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Puesto que (1.9) es una ecuación tensorial, la ecuación de Gauss sigue siendo válida si sus campos de vectores se reemplazan por vectores tangentes en un punto. Así se tiene la siguiente relación entre la curvatura seccional \mathcal{K} de M_s^n y $\tilde{\mathcal{K}}$ de $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$:

$$\mathcal{K}(x, y) = \tilde{\mathcal{K}}(x, y) + \frac{g(h(x, x), h(y, y)) - g(h(x, y), h(x, y))}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}, \quad (1.10)$$

si los vectores $\{x, y\}$ forman una base de una sección plana no degenerada de M_s^n .

La derivada covariante $\bar{\nabla}h$ de h se define por

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}h)(X, Y, Z) &= D_Z(h(X, Y)) - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y) \\ &= (\bar{\nabla}_Z h)(X, Y). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pongamos $\bar{\nabla}^0 h = h$ y $\bar{\nabla}^1 h = \bar{\nabla}h$. Inductivamente, definimos la k -ésima derivada covariante $\bar{\nabla}^k h$ de h como el tensor tipo $(0, k+2)$ con valores en $\mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ dado por

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}^k h)(X_1, \dots, X_{k+2}) &= D_{X_{k+2}}((\bar{\nabla}^{k-1} h)(X_1, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k+1} (\bar{\nabla}^{k-1} h)(X_1, \dots, \nabla_{X_{k+2}} X_i, \dots, X_{k+1}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para simplificar la notación pondremos $(\bar{\nabla}^k h)(X, \dots, X) = (\bar{\nabla}^k h)(X^{k+2})$ y $(\bar{\nabla}^k h)(X, \dots, X, Y, \dots, Y, Z, \dots, Z) = (\bar{\nabla}^k h)(X^i, Y^j, Z^\ell)$ si $i + j + \ell = k + 2$ y los argumentos X, Y y Z se repiten i, j y ℓ veces, respectivamente. Por convenio escribiremos $(\bar{\nabla}^k h)(X^0, Y^j, Z^\ell) = (\bar{\nabla}^k h)(Y^j, Z^\ell)$ y análogamente para los argumentos Y y Z .

La ecuación de Codazzi relaciona el tensor de curvatura \tilde{R} de $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ y la derivada covariante de la segunda forma fundamental:

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}h)(Z, Y, X) - (\bar{\nabla}h)(Z, X, Y), \quad (1.13)$$

donde $(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp$ denota la componente normal de $\tilde{R}(X, Y)Z$. Si la variedad ambiente tiene curvatura seccional constante deducimos de la ecuación (1.2) que $\tilde{R}(X, Y)Z$ es tangente y, en consecuencia, la ecuación de Codazzi (1.13) se reduce a

$$(\bar{\nabla}h)(Z, Y, X) = (\bar{\nabla}h)(Z, X, Y). \quad (1.14)$$

Deducimos de la definición (1.11) y de la ecuación (1.14) anterior que la derivada covariante $\bar{\nabla}h$ es un tensor simétrico siempre que $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ tenga curvatura seccional constante.

La *ecuación de Ricci* viene dada por

$$g(\tilde{R}(X, Y)\xi, \eta) = g(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) - g([A_\xi, A_\eta]X, Y), \quad (1.15)$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$, $\eta, \xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$, R^\perp es el tensor de curvatura del fibrado normal definido por $R^\perp(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]}$, y el producto corchete $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$. También necesitaremos la denominada *identidad de Ricci* dada para cada natural $i \geq 3$:

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}^{i-1}h)(Z^{i-1}, Y, X) - (\bar{\nabla}^{i-1}h)(Z^{i-1}, X, Y) \\ &= R^\perp(X, Y)(\bar{\nabla}^{i-3}h)(Z^{i-1}) - \sum_{t=0}^{i-2} (\bar{\nabla}^{i-3}h)(Z^t, R(X, Y)Z, Z^{i-2-t}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

1.3.1. Teorema de Congruencia

Si M es una variedad pseudo-Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad pseudo-Riemanniana ambiente \tilde{M} , la geometría usual de M se llama geometría intrínseca, para resaltar la independencia del hecho de que esté inmersa en \tilde{M} . Hablando sin rigor, la geometría extrínseca de M es la que vería un observador en \tilde{M} . Formalmente, los rasgos de M que se conservan por todos los pares isométricos y que no pertenecen a la geometría intrínseca constituyen

la geometría extrínseca de M . Notemos que si M y N son variedades pseudo-Riemannianas isométricamente inmersas respectivamente en \tilde{M} y \tilde{N} , un par isométrico es una isometría $A : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ tal que la restricción $A|_M$ es una isometría de M en N . Por ejemplo, la segunda forma fundamental de una subvariedad pseudo-Riemanniana es un invariante extrínseco.

Se dice que dos subvariedades pseudo-Riemannianas M_1 y M_2 de \tilde{M} son *congruentes* si existe una isometría $A : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ tal que la restricción $A|_{M_1}$ es una isometría de M_1 sobre M_2 . Se dice entonces que M_1 y M_2 tienen la misma geometría intrínseca y extrínseca.

Cuando el espacio ambiente $\tilde{M} = \mathbb{R}_\nu^m$, puede comprobarse que dos subvariedades isométricas son congruentes si y sólo si tienen “*la misma segunda forma fundamental*” [O’N2, Teorema 4.41], más precisamente:

Teorema 1.10 (de Congruencia) *Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una isometría entre dos subvariedades pseudo-Riemannianas del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m . Sean h_1 y h_2 la segunda forma fundamental de M_1 y M_2 , respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una isometría (movimiento rígido) A de \mathbb{R}_ν^n tal que $A|_{M_1} = f$.*
2. *En un punto p de M_1 , existe una isometría lineal $F_p : T_p^\perp M_1 \rightarrow T_{f(p)}^\perp M_2$ tal que, para toda curva γ de M_1 que pase por p , la isometría lineal*

$$F_{\gamma(t)} = P_{f \circ \gamma}^\perp \circ F_p \circ (P_\gamma^\perp)^{-1} : T_{\gamma(t)}^\perp M_1 \rightarrow T_{f(\gamma(t))}^\perp M_2$$

(donde P^\perp denota el transporte paralelo normal) preserva las segundas formas fundamentales, esto es,

$$F_{\gamma(t)}(h_1(v, w)) = h_2(df(v), df(w)) \quad \text{para todo } v, w \in T_{\gamma(t)} M_1.$$

Observemos que la conexión normal D se adapta a campos normales a lo largo de una curva γ . En efecto, si V es un campo de vectores normal a

lo largo de γ , entonces la derivada covariante normal inducida está definida por la componente normal de su derivada covariante inducida. La derivada covariante normal permite definir un *transporte paralelo normal* a lo largo de una curva arbitraria γ del siguiente modo: para cada $a, b \in \text{Dom}(\gamma)$, $a < b$,

$$P^\perp : T_{\gamma(a)}^\perp M \longrightarrow T_{\gamma(b)}^\perp M, \xi \longmapsto V(b),$$

donde V es el único campo de vectores a lo largo de γ que es D -paralelo y cumple $V(a) = \xi$. Se tiene que P^\perp es una isometría lineal.

1.3.2. Algunos tipos de inmersiones isométricas

Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Como la segunda forma fundamental de la inmersión $h : \mathfrak{X}(M_s^n) \times \mathfrak{X}(M_s^n) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ es una aplicación $C^\infty(M_s^n)$ -bilineal, su traza está unívocamente determinada y tiene sentido considerar la función diferenciable sobre M_s^n dada por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} \text{traza}_g(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i, e_i), \quad (1.17)$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un campo de referencias ortonormal de M_s^n y $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. A \mathbf{H} se le llama *campo curvatura media* de ϕ . Una inmersión isométrica se dice *minimal* si el campo curvatura media es idénticamente nulo, $\mathbf{H} = 0$, o equivalentemente, si la traza $\text{traza}_g(A_\xi) = 0$ para todo campo normal $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$.

Un punto $p \in M_s^n$ se dice *umbilical* si existe un vector normal $\xi_p \in T_p^\perp M_s^n$ tal que $h(x, y) = g(x, y)\xi_p$ para cada $x, y \in T_p M_s^n$. Una inmersión isométrica se dice *totalmente umbilical* si todo punto es umbilical. Para una inmersión totalmente umbilical se verifica $h(X, Y) = g(X, Y)\mathbf{H}$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Teniendo en cuenta la relación (1.8), una inmersión es totalmente umbilical si y sólo si para cada campo normal $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ el endomorfismo de Weingarten A_ξ asociado a ξ es proporcional a la identidad. Se comprueba fácilmente que:

Lema 1.11 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Dado un punto $p \in M_s^n$, las siguientes condiciones (cuando tengan sentido) son equivalentes:

1. ϕ es umbilical en p .
2. $h(x, x) = 0$ para todo vector luminoso $x \in T_p M_s^n$.
3. $h(u, v) = 0$ para cada par de vectores ortonormales $u, v \in T_p M_s^n$ del mismo carácter causal.
4. $h(u, v) = 0$ para cada par de vectores ortonormales $u, v \in T_p M_s^n$ de carácter causal opuesto.

Una inmersión isométrica se dice *totalmente geodésica* si tiene segunda forma fundamental $h = 0$. Toda inmersión totalmente geodésica es totalmente umbilical. Además, una inmersión totalmente umbilical es totalmente geodésica si y sólo si es minimal. Puede probarse sin dificultad que una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ es totalmente geodésica si y sólo si ϕ transforma cada geodésica de la variedad M_s^n en una geodésica del ambiente $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$.

Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice *pseudo-umbilical* si existe una función diferenciable ρ sobre M_s^n tal que $g(h(X, Y), \mathbf{H}) = \rho g(X, Y)$, o lo que es lo mismo, el endomorfismo de Weingarten $A_{\mathbf{H}}$ es proporcional a la identidad. Para una inmersión pseudo-umbilical necesariamente se verifica $\rho = g(\mathbf{H}, \mathbf{H})$. Evidentemente toda inmersión totalmente umbilical es pseudo-umbilical.

Un campo normal ξ se dice *paralelo* si $D_X \xi = 0$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Así, todo campo normal paralelo ξ satisface $g(\xi, \xi) = cte$. Diremos que una inmersión isométrica tiene *curvatura media constante* si el campo curvatura media \mathbf{H} satisface $g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = cte$.

La segunda forma fundamental h de una inmersión isométrica se dice *paralela* si $\bar{\nabla} h = 0$. Las subvariedades Riemannianas con segunda forma paralela del espacio Euclídeo fueron clasificadas por Ferus [F1]. Sus resultados

fueron extendidos al caso pseudo-Riemanniano por Blomstrom [B2] y Naitoh [Na3], quienes independientemente clasificaron algunos tipos importantes de subvariedades pseudo-Riemannianas con segunda forma fundamental paralela en ambientes de curvatura constante. Otros tipos especiales de subvariedades fueron descritos por Magid [M] en ambientes pseudo-Euclídeos \mathbb{R}_1^n y \mathbb{R}_2^n .

Lema 1.12 *Toda inmersión isométrica totalmente umbilical de una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n en un espacio de curvatura constante $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ tiene segunda forma fundamental paralela, curvatura seccional constante y curvatura media constante.*

1.3.3. Inmersiones umbilicales de \mathbb{R}_ν^m

Si W es un subespacio k -dimensional no degenerado del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m , a cada conjunto trasladado $p + W$ se le denomina k -plano (no degenerado) en \mathbb{R}_ν^m . A los k -planos de codimensión uno lo llamaremos hiperplanos. Es fácil ver que los k -planos no degenerados son subvariedades totalmente geodésicas del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m . El siguiente resultado demuestra que éstas son las únicas (véase [O'N2, p. 105]):

Proposición 1.13 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión totalmente geodésica. Entonces, $\phi(M_s^n)$ es un trozo abierto de un n -plano no degenerado Π de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$.*

Como toda subvariedad totalmente geodésica conexa del espacio pseudo-Euclídeo es un conjunto abierto de un k -plano, para clasificar las subvariedades pseudo-Riemannianas conexas y totalmente umbilicales, basta con determinar aquellas que no son totalmente geodésicas.

Teorema 1.14 [M] *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica totalmente umbilical y no totalmente geodésica. Entonces ocurre, salvo una isometría, alguna de las siguientes situaciones excluyentes:*

1. $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle > 0$ y $\phi(M_s^n)$ es un trozo abierto de una pseudo-esfera $\mathbb{S}_s^n \subseteq \mathbb{R}_s^{n+1}$, de centro y radio determinados.
2. $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle < 0$ y $\phi(M_s^n)$ es un trozo abierto de un espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+1}$, de centro y radio determinados.
3. $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$, $\phi(M_s^n)$ es un trozo abierto de una subvariedad pseudo-Riemanniana $\mathbb{U}_s^n = \widehat{\phi}(\mathbb{R}_s^n)$ contenida en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$, determinada por una inmersión del tipo

$$\widehat{\phi}(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, a \left(-\sum_{i=1}^s x_i^2 + \sum_{i=s+1}^n x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right),$$

para $a, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$. El espacio $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$ se embebe canónicamente en \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} mediante $(y_1, \dots, y_{n+1}) \hookrightarrow (y_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})$.

Observación 1.15 En el Teorema anterior, y como denotaremos normalmente a lo largo de este trabajo, hemos escrito $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indicando al tensor métrico usual del espacio pseudo-Euclídeo. Además, en el apartado 3, es requerida la completitud de la subvariedad inmersa. \diamond

1.3.4. Reducción de la codimensión

Dada una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \widetilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, se define el *primer espacio norma de ϕ en $p \in M_s^n$* como el subespacio $N_1(p) \subseteq T_p^\perp M_s^n$ generado por la segunda forma fundamental h de ϕ en p , es decir,

$$N_1(p) = \text{Span}\{h(x, y) : x, y \in T_p M_s^n\} = \text{Im}(h).$$

Se demuestra sin dificultad que

$$\text{Im}(h) = \{\xi \in T_p^\perp M_s^n : A_\xi = 0\}^\perp.$$

Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{M}_{s+\ell}^{n+d}(c)$ admite una *reducción de la codimensión* a k , $k < d$, si existe una subvariedad totalmente geodésica Π en

$M_{s+\ell}^{n+d}(c)$ de dimensión $n+k$ tal que $\phi(M_s^n) \subseteq \Pi$. Recordemos que la noción de subvariedad totalmente geodésica es una noción afín (sólo depende de la conexión de Levi-Civita del ambiente), por lo que la subvariedad totalmente geodésica Π puede ser degenerada. Siguiendo la terminología de M. Dajczer [D2], la inmersión ϕ es *sustancial* si la codimensión de ϕ no puede ser reducida.

El siguiente resultado es una generalización del conocido Teorema de Allendoerfer-Erbacher [E] de reducción de la codimensión de una inmersión. La demostración de esta extensión puede consultarse en [M] (véase también [B1]).

Teorema 1.16 (Allendoerfer-Erbacher) *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica, y supongamos que existe un subfibrado normal paralelo N de rango k tal que $Im(h) \subseteq N(p)$ para cada $p \in M_s^n$. Entonces, para cada $p \in M_s^n$, $\phi(M_s^n)$ está contenida en el $(n+k)$ -plano (posiblemente degenerado) $d\phi(T_p M_s^n) \oplus N(p)$ de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$.*

Recordemos que un *subfibrado normal* N de rango k es una elección de un subespacio $N(p)$ de $T_p^\perp M_s^n$ de la misma dimensión k para cada $p \in M_s^n$, con la siguiente propiedad: para cada $q \in M_s^n$, existe un entorno abierto U de q y k campos diferenciables $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}^\perp(U)$ tales que $\xi_1(p), \dots, \xi_k(p)$ genera a $N(p)$ para cada $p \in U$. Notemos que, si la dimensión del primer espacio normal $Im(h)$ es constante en cada punto, la familia $Im(h)$ es un subfibrado normal.

Un campo normal $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ pertenece a un subfibrado normal N , denotado por $\xi \in N$, si $\xi_p \in N(p)$ para cada $p \in M_s^n$. Un subfibrado normal N se dice *paralelo* si para cada campo normal $\xi \in N$ se verifica $D_X \xi \in N$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Esto significa que el subfibrado normal N es invariante bajo el transporte paralelo normal, es decir, para cada $p, q \in M_s^n$ y cada curva γ uniendo p y q en M_s^n se verifica: $P_\gamma^\perp(N(p)) = N(q)$.

Observemos que, si la inmersión ϕ tiene segunda forma fundamental paralela, podemos aplicar el anterior resultado con $N = Im(h)$, ya que la dimensión

del primer espacio normal es constante en cada punto y el subfibrado normal $Im(h)$ es paralelo. En efecto, de forma similar al caso Riemanniano [Sak2], el siguiente Lema garantiza la reducción de codimensión para una inmersión pseudo-Riemanniana con segunda forma fundamental paralela:

Lema 1.17 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica con segunda forma fundamental paralela. Entonces, la dimensión, el índice y el rango del primer espacio normal son constantes.*

Demostración: Sean p y q dos puntos arbitrarios de M_s^n y γ una curva uniendo p y q en M_s^n . Consideremos una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M_s^n$ y transportemos paralelamente este referencial a lo largo de la curva γ respecto a la conexión de Levi-Civita de M_s^n . Obtenemos de esta forma un campo de referencias ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ a lo largo de γ . Entonces $h(E_i, E_j)$ es un campo normal D -paralelo a lo largo de γ para cada $i, j = 1, \dots, n$, porque

$$D_{\gamma'}(h(E_i, E_j)) = (\bar{\nabla}_{\gamma'} h)(E_i, E_j) + h(\nabla_{\gamma'} E_i, E_j) + h(E_i, \nabla_{\gamma'} E_j) = 0.$$

Como $\{h(E_i(q), E_j(q)) : i, j = 1, \dots, n\}$ genera al primer espacio normal en q , entonces el transporte paralelo a lo largo γ de p a q respecto a la conexión normal D nos proporciona un isomorfismo entre el primer espacio normal en p y q . Esto demuestra el resultado. \square

Capítulo 2

Inmersiones pseudo-Riemannianas isotrópicas

La noción de subvariedad isotrópica de una variedad Riemanniana fue introducida por B. O'Neill [O'N1] quién estudió propiedades generales de este tipo de subvariedades.

Estas subvariedades, que pueden ser consideradas como una generalización de la noción de subvariedad totalmente umbilical, han sido estudiadas detalladamente por diversos autores en el caso Riemanniano.

De forma natural el concepto de subvariedad isotrópica puede ser generalizado al caso pseudo-Riemanniano. Se pretende estudiar aquellas propiedades que presenta toda subvariedad pseudo-Riemanniana isotrópica.

2.1. Definición, primeras propiedades y ejemplos

Sea ϕ una inmersión isométrica de una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n en otra variedad pseudo-Riemanniana $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. La inmersión ϕ se dice *isotrópica en un punto p* de M_s^n si para cada vector tangente unitario $u \in T_p M_s^n$ el valor

$$g(h(u, u), h(u, u)) = \lambda(p) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

no depende de la dirección unitaria u tomada, donde h denota la segunda forma fundamental de la inmersión. Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice *inmersión isotrópica* si ϕ es isotrópica en todo punto p de M_s^n .

Para una inmersión isotrópica, la función diferenciable $\lambda : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (2.1) se llama *función de isotropía*. Una inmersión se dice λ -*isotrópica* si es isotrópica con función de isotropía igual a λ , y *constantemente isotrópica* si la inmersión es isotrópica con función de isotropía λ constante real.

Los anteriores conceptos se particularizan al caso de subvariedades pseudo-Riemannianas. Así, una subvariedad pseudo-Riemanniana $M_s^n \subseteq \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice *subvariedad isotrópica* (resp. *subvariedad constantemente isotrópica*) si la inclusión canónica $\iota : M_s^n \hookrightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ es una inmersión isotrópica (resp. inmersión constantemente isotrópica).

La Observación 1.5 nos permite dar una definición equivalente de inmersión isotrópica en los siguientes términos:

Lema 2.1 (Definición alternativa de isotropía) *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es isotrópica.
2. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$g(h(X, X), h(X, X)) = g(X, X)^2 \lambda \quad (2.2)$$

para todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, se verifica la condición 2 con λ constante si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

Demostración: Supongamos que ϕ es isotrópica. Fijemos un punto $p \in M_s^n$ y un vector tangente $v \in T_p M_s^n$ con $g(v, v) \neq 0$. Entonces, desarrollando la ecuación (2.1) para el vector normalizado $u = v/||v||$, obtenemos

$$g(h(v, v), h(v, v)) = \lambda(p)g(v, v)^2. \quad (2.3)$$

Si $x \in T_p M_s^n$ es un vector tangente luminoso y $\{v^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores tangentes temporales tal que $\lim_k v^k = x$, de la ecuación (2.3) se sigue

$$g(h(v^k, v^k), h(v^k, v^k)) = \lambda(p)g(v^k, v^k)^2 \quad (2.4)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando límite $k \rightarrow \infty$ en la expresión (2.4) deducimos por continuidad que

$$g(h(x, x), h(x, x)) = 0. \quad (2.5)$$

Entonces, se verifica la ecuación (2.3) para todo vector tangente $v \in T_p M_s^n$ independientemente de su carácter causal. El resto es claro. \square

Observación 2.2 La noción de inmersión isotrópica para una inmersión con métrica inducida indefinida puede ser mejorada. En efecto, para deducir la isotropía, es suficiente que la aplicación (definida sólo para vectores unitarios espaciales o temporales)

$$f(u) = g(h(u, u), h(u, u))$$

sea constante como la siguiente argumentación demuestra. Supongamos que, dado un punto $p \in M_s^n$, la igualdad

$$g(h(u, u), h(u, u)) = \lambda(p)g(u, u)^2$$

es cierta para de cada vector temporal $u \in T_p M_s^n$. Sea v un vector tangente arbitrario (de cualquier carácter causal) de $T_p M_s^n$ y consideremos la curva u_t , $u_t = u + tv$, donde u es un vector temporal fijo de $T_p M_s^n$. Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $g(u_t, u_t) < 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, y consecuentemente

$$g(h(u_t, u_t), h(u_t, u_t)) = \lambda(p)g(u_t, u_t)^2,$$

que es una igualdad entre dos polinomios de grado 4. Por tanto, sus coeficientes del mismo grado coinciden y, en particular, obtenemos que

$$g(h(v, v), h(v, v)) = \lambda(p)g(v, v)^2$$

para todo $v \in T_p M_s^n$. Concluimos similarmente que una inmersión indefinida es isotrópica si se verifica $g(h(u, u), h(u, u)) = \lambda(p)g(u, u)^2$ para cada vector tangente espacial u en cada punto $p \in M_s^n$. \diamond

Tenemos de esta forma la siguiente caracterización de la isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana indefinida:

Lema 2.3 (Isotropía para inmersiones indefinidas) *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica tal que el índice $0 < s < n$. Dado $\varepsilon = 1$ o -1 , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es isotrópica.
2. Para cada punto p de M_s^n el valor $g(h(u, u), h(u, u)) = \lambda(p)$ es independiente de cada vector tangente $u \in T_p M_s^n$ con $g(u, u) = \varepsilon$.

Además, se verifica la condición 2 con λ independiente de cada punto si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

Observación 2.4 No existe un resultado general análogo al Lema 2.3 para vectores luminosos. Notemos que toda inmersión isotrópica indefinida necesariamente cumple la *propiedad isotrópica luminosa* (2.5)

$$g(h(x, x), h(x, x)) = 0$$

para cada vector tangente luminoso x en cada punto. Sin embargo, la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ definida por

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \phi(x, y) &= (\text{sen}(x), \cos(x), \text{sen}(x), \cos(x)) \\ &\quad + y(\cos(x), -\text{sen}(x), -\cos(x), \text{sen}(x)), \end{aligned}$$

no es isotrópica en ningún punto y satisface esta propiedad isotrópica luminosa. En efecto, $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ es una base pseudo-ortonormal; es decir, $\langle \partial/\partial x, \partial/\partial x \rangle = 0$, $\langle \partial/\partial y, \partial/\partial y \rangle = 0$ y $\langle \partial/\partial x, \partial/\partial y \rangle = -1$. Esta aplicación

tiene segunda forma fundamental h ,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= -\phi(x, y), \\ h\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= 0, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= (-\sin(x), -\cos(x), \sin(x), \cos(x))/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Observemos que $h(\partial/\partial x, \partial/\partial x)$ y $h(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ son dos vectores normales luminosos verificando

$$\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right), h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle = -1.$$

Entonces, la inmersión ϕ no es isotrópica (como consecuencia del Teorema 2.16 que veremos más adelante) y satisface la propiedad $\langle h(z, z), h(z, z) \rangle = 0$ para todo vector tangente luminoso z en cada punto. \diamond

Observación 2.5 Destaquemos los siguientes hechos elementales:

1. *Toda inmersión totalmente umbilical es isotrópica.* En efecto, como la segunda forma fundamental h de una inmersión totalmente umbilical $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ satisface $h(X, Y) = g(X, Y)\mathbf{H}$, entonces

$$g(h(X, X), h(X, X)) = g(X, X)^2 g(\mathbf{H}, \mathbf{H})$$

para cada campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$, y ϕ es $g(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ -isotrópica como consecuencia del Lema 2.1.

2. *Toda inmersión isotrópica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ con índice $0 < s < n$ y coíndice $\ell = 0$ o $\ell = d$ es totalmente umbilical,* porque en este caso cada espacio normal $T_p^\perp M_s^n$ es un espacio métrico definido y de la condición necesaria y suficiente de isotropía (2.2) se sigue que $h(x, x) = 0$ para cada vector tangente luminoso x en cada punto p de M_s^n (ver Lema 1.11).

En particular, *toda inmersión isotrópica de una variedad de Lorentz M_1^n en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+d} es totalmente umbilical.*

3. Toda inmersión isotrópica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+1}$ de codimensión $d = 1$ es totalmente umbilical. Observemos en primer lugar que los únicos valores posibles para el coíndice de la inmersión son $\ell = 0$ o $\ell = 1$. Por tanto, si el índice s de M_s^n satisface $0 < s < n$, la inmersión es totalmente umbilical, como en la justificación precedente. El caso definido $s = 0, n$ se prueba también sin dificultad [ChL].
4. La composición de inmersiones isotrópicas es isotrópica. Puesto que la noción de isotropía es un concepto local, podemos trabajar con subvariedades y obtener la misma conclusión. Sea M una subvariedad pseudo-Riemanniana isotrópica de \tilde{M} que a su vez es subvariedad isotrópica de otra variedad pseudo-Riemanniana \hat{M} . Sean $\nabla, \tilde{\nabla}$ y $\hat{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita respectivas de M, \tilde{M} y \hat{M} . Si h' denotan las segunda forma fundamental de M en \tilde{M} y h'' la de \tilde{M} en \hat{M} , entonces aplicando dos veces la fórmula de Gauss (1.6):

$$\hat{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + h''(X, Y) = \nabla_X Y + h'(X, Y) + h''(X, Y),$$

para cada X, Y campos tangente sobre M . Entonces, la segunda forma fundamental h de M en \hat{M} está dada por

$$h(X, Y) = h'(X, Y) + h''(X, Y),$$

siendo $h'(X, Y)$ y $h''(X, Y)$ vectores ortogonales. Por tanto, para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} g(h(X, X), h(X, X)) &= g(h'(X, X), h'(X, X)) + g(h''(X, X), h''(X, X)) \\ &= g(X, X)^2(\lambda' + \lambda''), \end{aligned}$$

donde λ' y λ'' son las funciones de isotropía de $M \subseteq \tilde{M}$ y $\tilde{M} \subseteq \hat{M}$, respectivamente.

5. La noción de inmersión isotrópica es un concepto geométrico extrínseco que es preservado por pares isométricos, pues los pares isométricos conservan la segunda forma fundamental y por tanto sus longitudes.
6. El concepto de inmersión isotrópica es invariante por homotecias y, en general, no es invariante por transformaciones conformes. En efecto, sean $\phi_1 : M \rightarrow (\tilde{M}, g_1)$ y $\phi_2 : M \rightarrow (\tilde{M}, g_2)$ dos inmersiones isométricas tales que $\phi_1(p) = \phi_2(p)$ para todo $p \in M$. Supongamos que existe una función diferenciable $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_1 = fg_2$, $f > 0$ o $f < 0$. Entonces, si h_1 y h_2 denotan las respectivas segundas formas fundamentales de ϕ_1 y ϕ_2 , se comprueba fácilmente que

$$h_1(X, Y) = h_2(X, Y) - \frac{1}{2f}g_2(X, Y)(\text{grad}_2 f)^\perp,$$

donde $\xi = (\text{grad}_2 f)^\perp$ denota la parte normal del gradiente de f asociado al tensor métrico g_2 . Entonces, cuando f es constante, las segundas formas fundamentales $h_1 = h_2$. En otro caso, tomando producto en la expresión anterior, resulta

$$\begin{aligned} g_1(h_1(X, X), h_1(X, X)) &= fg_2(h_2(X, X), h_2(X, X)) \\ &\quad + \frac{1}{4f}g_2(\xi, \xi)g_2(X, X)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}g_2(h_2(X, X), \xi)g_2(X, X), \end{aligned}$$

para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo que, si la inmersión ϕ_1 es isotrópica, ϕ_2 es isotrópica si y sólo si la dirección $\xi = (\text{grad}_2 f)^\perp$ es umbilical para ϕ_2 , es decir, el endomorfismo de Weingarten A_ξ respecto al tensor métrico g_2 es proporcional a la identidad (para deducir esta última afirmación, téngase en cuenta la condición 2 del Teorema 2.16 que veremos más adelante). Observemos, por curiosidad, que la propiedad isotrópica luminosa (2.5) si es en cambio invariante por transformaciones conformes cualesquiera. \diamond

Damos a continuación ejemplos explícitos de inmersiones isotrópicas pseudo-Riemannianas:

Ejemplo 2.6 Como toda inmersión totalmente umbilical es isotrópica, los k -planos no degenerados, las pseudo-esferas $\mathbb{S}_s^n(r, c)$ y los espacios pseudo-hiperbólicos $\mathbb{H}_s^n(r, c)$ son subvariedades constantemente isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo. †

Ejemplo 2.7 Expansiones de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$ [B1]. Dada $f : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable, la inmersión isométrica

$$\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+1}^{n+2}, \quad \phi(x) = (f(x), x, f(x)).$$

es 0-isotrópica. En efecto, si (x_1, \dots, x_n) son las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^n , la segunda forma fundamental h viene dada por

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

siendo $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ un campo (global) de referencias ortonormal a ϕ .

Consecuentemente, todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_s^n)$ satisface

$$\langle h(X, X), h(X, X) \rangle = 0.$$

Observemos que la imagen $\phi(\mathbb{R}_s^n)$ está contenida en el subespacio vectorial $\Pi = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) : x_1 = x_{n+2}\}$ de \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} , que es isométrico al espacio vectorial métrico degenerado $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$. Identifiquemos en lo que sigue los espacios Π y $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$. Si la función f no es afín, entonces la inmersión ϕ es *sustancial* en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$, es decir, la imagen $\phi(\mathbb{R}_s^n)$ no está contenida en ningún n -plano de $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$.

Si ϕ es una inmersión con segunda forma fundamental paralela, las geodésicas son transformadas en parábolas (o segmentos de rectas), así que f debe ser un polinomio cuadrático. Entonces, salvo una isometría de $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$, $f = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, por lo que la imagen $\phi(\mathbb{R}_s^n)$ (vista en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$) es un paraboloide

elíptico, un paraboloides hiperbólico o un cilindro ortogonal sobre uno de estos dos paraboloides.

Nótese que ϕ es totalmente geodésica si y sólo si f es una función afín, y es totalmente umbilical si y sólo si f es de la forma (véase el Teorema 1.14)

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \left(- \sum_{i=1}^s x_i^2 + \sum_{i=s+1}^n x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

para $a, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$. Además, si ϕ no es totalmente geodésica el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos y $dim(Im(h)) = 1$. En particular, el campo curvatura media \mathbf{H} de ϕ satisface $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$. †

Ejemplo 2.8 Expansiones de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,\ell}^{n+\ell}$. Sean f_1, \dots, f_ℓ funciones diferenciables sobre el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n . Entonces la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ definida por

$$\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_\ell(x), x, f_1(x), \dots, f_\ell(x))$$

es 0-isotrópica, ya que la segunda forma fundamental h viene dada por

$$h \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \right),$$

$i, j = 1, \dots, n$, siendo (x_1, \dots, x_n) las coordenadas usuales de \mathbb{R}_s^n . Observemos que la imagen $\phi(\mathbb{R}_s^n)$ está contenida en un $(n + \ell)$ -plano de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ isométrico al espacio $\mathbb{R}_{s,\ell}^{n+\ell}$. Es fácil verificar que el campo curvatura media de ϕ satisface $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$, y $\mathbf{H} = 0$ si y sólo si

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_s^2} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_{s+1}^2} + \dots + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_n^2}$$

para todo $j = 1, \dots, \ell$. Además, ϕ es totalmente umbilical si y sólo si f_j viene dado por

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = a_j \left(- \sum_{i=1}^s x_i^2 + \sum_{i=s+1}^n x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n b_j^i x_i + c_j,$$

con $a_j, b_j^1, \dots, b_j^n, c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, \ell$. Observemos que, en general, dos expansiones de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,\ell}^{n+\ell}$ no son congruentes. †

Ejemplo 2.9 Inmersiones de Veronese indefinidas [Kim]. Si I_n denota la matriz identidad de orden n , entonces definimos para los enteros $p, q \geq 1$ la matriz

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las matrices reales $n \times n$ de traza 0. Vamos a considerar los elementos del espacio pseudo-Euclídeo como vectores columnas. Las inmersiones de Veronese de signatura $(s, n-s)$ están dadas por

$$x \in \mathbb{S}_s^n \left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \right) \subseteq \mathbb{R}_s^{n+1} \xrightarrow{\psi_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(x^* x - \frac{2}{n} I_{n+1} \right) \in \mathfrak{so}(s, n+1-s)$$

donde $*x = x^T I_{s, n+1-s}$, y

$$x \in \mathbb{H}_s^n \left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \right) \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+1} \xrightarrow{\psi_2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(x^* x + \frac{2}{n} I_{n+1} \right) \in \mathfrak{so}(s+1, n-s),$$

donde $*x = x^T I_{s+1, n-s}$, y

$$\mathfrak{so}(p, q) = \{A \in \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R}) : I_{p,q} A^T I_{p,q} = A\}.$$

En el primer caso, tomando sobre $\mathfrak{so}(s, n+1-s)$ la métrica $\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB)$, se tiene que $\mathfrak{so}(s, n+1-s)$ es isométrico al espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s(n+1-s)}^N$, con $N = n(n+3)/2$. La imagen de $\mathbb{S}_s^n(\sqrt{2(n+1)/n})$ está contenida en la pseudo-esfera $\mathbb{S}_{s(n+1-s)}^{N-1}$ como una subvariedad minimal. En el segundo caso, considerando la métrica $\langle A, B \rangle = -\text{traza}(AB)$, $\mathfrak{so}(s+1, n-s)$ es isométrico al espacio $\mathbb{R}_{N-(s+1)(n-s)}^N$, y la imagen de $\mathbb{H}_s^n(\sqrt{2(n+1)/n})$ está contenida en el espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_{N-(s+1)(n-s)-1}^{N-1}$ también como subvariedad minimal. Ambas inmersiones gozan de la propiedad de transformar cada geodésica unitaria en una circunferencia propia del ambiente [B1]; lo que implica, como veremos en el Teorema 2.23, que ambas inmersiones son isotrópicas con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$. Nótese que una inmersión de Veronese tiene segunda forma fundamental h sobreyectiva. †

Ejemplo 2.10 Inmersión de \mathbb{S}^n en \mathbb{S}_1^{n+2} [DF]. Consideremos la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2}$ definida por

$$\phi(x) = (f(x), f(x), \iota(x)),$$

donde $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ denota la inclusión canónica. Se comprueba fácilmente que la segunda forma fundamental asociada h viene dada por

$$h(X, Y) = (H_f(X, Y) + \langle X, Y \rangle \phi) (1, 1, 0, \dots, 0),$$

donde H_f denota el Hessiano de f en \mathbb{S}^n . Entonces, al ser $(1, 1, 0, \dots, 0)$ un vector normal luminoso, la inmersión ϕ es 0-isotrópica. Obviamente, existe una función diferenciable $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ tal que $h \neq 0$ en todo punto. En tal caso, la inmersión ϕ no es totalmente geodésica con primer espacio normal $Im(h)$ formado únicamente por vectores luminosos y $dim(Im(h)) = 1$. Notemos que M. Dajczer y S. Fornari demostraron en [DF] que toda inmersión isométrica $\phi : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{S}_s^{n+d}$ con $1 \leq d \leq n - s - 1$ es totalmente geodésica. †

Ejemplo 2.11 Inmersión de \mathbb{S}^n en \mathbb{S}_ℓ^{n+d} . Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_\ell^{n+d}$ ($0 < \ell < d$) definida por [Ka]

$$\phi(x) = \left(\underbrace{\frac{\sqrt{d-\ell}}{\sqrt{\ell}} f(x), \dots, \frac{\sqrt{d-\ell}}{\sqrt{\ell}} f(x)}_\ell, \underbrace{f(x), \dots, f(x)}_{d-\ell}, \iota(x) \right),$$

donde $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión canónica. Entonces, ϕ es una inmersión 0-isotrópica, ya que su segunda forma fundamental h viene dada por

$$h(X, Y) = (H_f(X, Y) + \langle X, Y \rangle \phi) \left(\underbrace{\frac{\sqrt{d-\ell}}{\sqrt{\ell}}, \dots, \frac{\sqrt{d-\ell}}{\sqrt{\ell}}}_\ell, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-\ell}, 0 \right),$$

donde H_f denota el Hessiano de f en \mathbb{S}^n . Notemos que, tomando una función $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ tal que $h \neq 0$ en todo punto, el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos y $dim(Im(h)) = 1$. †

Ejemplo 2.12 Inmersión 0-isotrópica de \mathbb{S}_s^n en \mathbb{S}_{s+1}^{n+2} . Sea la inmersión isométrica $\psi : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{n+2}$ definida por

$$\psi(x) = (f(x), \iota_1(x), \dots, \iota_s(x), f(x), \iota_{s+1}(x), \dots, \iota_{n+1}(x)),$$

donde $f : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\iota : \mathbb{S}_s^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ denota la inclusión canónica, $\iota(x) = (\iota_1(x), \dots, \iota_{n+1}(x))$. Entonces, ψ es 0-isotrópica ya que su segunda forma fundamental h viene dada por

$$h(X, Y) = (H_f(X, Y) + \langle X, Y \rangle \psi) \left(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_s, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-s+1} \right).$$

Observemos que una inmersión isométrica $\phi : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{n+2}$ ($n - s \geq 4$) tal que el conjunto de puntos totalmente geodésicos no desconecte a \mathbb{S}_s^n es 0-isotrópica, puesto que M. Dajczer y L. Rodríguez demostraron en [DR] que, en estas circunstancias, la inmersión ϕ es congruente a una inmersión ψ del tipo anterior para alguna función diferenciable $f : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$. †

2.2. Tensor de isotropía. Fórmulas de O'Neill

Sea M_s^n variedad pseudo-Riemanniana isométricamente inmersa en una variedad pseudo-Riemanniana $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ y $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ una función diferenciable. Definimos sobre M_s^n el campo tensorial T_λ tipo $(0, 4)$, que llamamos *tensor de λ -isotropía*, como

$$T_\lambda(X, Y, Z, W) = g(h(X, Y), h(Z, W)) - g(X, Y)g(Z, W)\lambda$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Por construcción, dada la bilinealidad del tensor métrico g y de la segunda forma fundamental h de la inmersión, el tensor T_λ de λ -isotropía satisface las dos siguientes propiedades de simetría:

$$S1. T_\lambda(X, Y, Z, W) = T_\lambda(Z, W, X, Y),$$

$$S2. T_\lambda(Y, X, Z, W) = T_\lambda(X, Y, Z, W),$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Necesitamos el siguiente lema algebraico para caracterizar la isotropía de una inmersión mediante el tensor T_λ :

Lema 2.13 *Sea V un espacio vectorial real y T un tensor tipo $(0, 4)$ sobre V cumpliendo las dos siguientes propiedades de simetría:*

$$S1. \quad T(x, y, z, w) = T(z, w, x, y) \text{ para cada } x, y, z, w \in V.$$

$$S2. \quad T(y, x, z, w) = T(x, y, z, w) \text{ para cada } x, y, z, w \in V.$$

Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:

$$(a) \quad T(x, x, x, x) = 0 \text{ para todo vector } x \in V.$$

$$(b) \quad T(x, x, x, y) = 0 \text{ para cada } x, y \in V.$$

$$(c) \quad T(x, y, z, w) + T(y, z, x, w) + T(z, x, y, w) = 0 \text{ para cada } x, y, z, w \in V.$$

Demostración: En primer lugar, de las propiedades de simetría $S1$ y $S2$ se deduce $S3$: $T(x, y, w, z) = T(x, y, z, w)$ para cada $x, y, z, w \in V$.

Las implicaciones $(c) \Rightarrow (b)$ y $(b) \Rightarrow (a)$ son evidentes. Supongamos que $T(x, x, x, x) = 0$ para todo vector $x \in V$. Si denotamos $B(x) = T(x, x, x, x)$, desarrollando la igualdad $B(x + y) + B(x - y) = 0$ obtenemos que

$$T(x, x, y, y) + 2T(x, y, x, y) = 0 \tag{2.6}$$

para cada $x, y \in V$. Sustituyendo $y + z$ por y en la ecuación (2.6) se tiene que

$$T(x, x, y, z) + 2T(x, y, x, z) = 0 \tag{2.7}$$

para todo $x, y, z \in V$. De esta manera, tomando en (2.7) $x + w$ en lugar de x se obtiene la propiedad (c) , quedando así demostrado el resultado. \square

Como consecuencia directa de la definición del tensor de λ -isotropía asociado a una inmersión λ -isotrópica, del Lema 2.1 y del resultado algebraico anterior, tenemos:

Proposición 2.14 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es isotrópica.
2. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$g(h(X, X), h(X, X)) = g(X, X)^2 \lambda \quad (2.8)$$

para todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

3. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$g(h(X, X), h(X, Y)) = g(X, X)g(X, Y)\lambda \quad (2.9)$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

4. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$\begin{aligned} &g(h(X, Y), h(Z, W)) + g(h(Y, Z), h(X, W)) + g(h(X, Z), h(Y, W)) \\ &= \lambda \{g(X, Y)g(Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, W)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, se verifica la condición 2, 3 o 4 con λ constante si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

Corolario 2.15 (Fórmulas de O'Neill) Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica. Entonces, se verifican las siguientes igualdades:

$$g(h(u, u), h(u, v)) = 0, \quad (2.11)$$

$$g(h(u, u), h(v, v)) + 2g(h(u, v), h(u, v)) = \lambda(p)g(u, u)g(v, v), \quad (2.12)$$

$$g(h(u, u), h(v, w)) + 2g(h(u, v), h(u, w)) = 0, \quad (2.13)$$

para cada u, v, w vectores tangentes ortogonales en un punto.

2.3. Condición de Isotropía. Consecuencias

Para seguir estudiando la isotropía necesitamos el siguiente resultado que generaliza la versión Riemanniana dada por O'Neill [O'N1]. Esta condición generalizada de la isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana nos permitirá realizar estrategias similares a las del caso Euclídeo para obtener resultados que generalicen los Riemannianos que involucran dicha condición. Cabe destacar que la prueba de esta condición difiere de la versión definida, pues en el caso indefinido el conjunto de vectores tangentes unitarios en un punto no es necesariamente conexo.

Teorema 2.16 (Condición de Isotropía) *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Dado un punto $p \in M_s^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es isotrópica en p .
2. Para cada par de vectores tangentes ortonormales $u, v \in T_p M_s^n$ se verifica

$$g(h(u, u), h(u, v)) = 0. \quad (2.14)$$

3. Para cada par de vectores tangentes luminosos x, y en p se verifica

$$g(h(x, x), h(x, y)) = 0. \quad (2.15)$$

Demostración: Las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $1 \Rightarrow 3$ son consecuencia directa de la fórmula (2.9). Vamos a considerar en el resto de la prueba sólo el caso indefinido $0 < s < n$, ya que en el caso definido —donde evidentemente no tiene sentido la propiedad (2.15)— se sigue la equivalencia $1 \Leftrightarrow 2$ de [O'N1].

$3 \Rightarrow 2$. Sean u y v dos vectores tangentes ortonormales de carácter causal opuesto. Entonces, $x = u + v$ e $y = u - v$ son dos vectores luminosos y, desarrollando la igualdad $g(h(x, x), h(x, x)) = g(h(y, y), h(y, y)) = 0$, obtenemos

$$g(h(u, u), h(u, v)) + g(h(v, v), h(v, u)) = 0. \quad (2.16)$$

Por otra parte, como $g(h(x, x), h(x, y)) = g(h(y, y), h(y, x)) = 0$, tenemos

$$g(h(u, u), h(u, v)) - g(h(v, v), h(v, u)) = 0. \quad (2.17)$$

Así, las ecuaciones (2.16) y (2.17) implican que $g(h(u, u), h(u, v)) = 0$. Si $n = 2$ hemos acabado. Supongamos que $n \geq 3$ y consideremos la curva $u_t = u + tv$. Entonces, por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $g(u_t, u_t) \cdot g(u, u) > 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$ y, por tanto,

$$P(t) = g(h(u_t, u_t), h(u_t, w)) = 0 \quad \text{para todo } t \in (-\delta, \delta),$$

donde w es un vector ortogonal a u y v que podemos suponer sin pérdida de generalidad del mismo carácter causal que v . Como $P(t)$ es un polinomio de grado tres y $P(t) = 0$, su coeficiente $g(h(v, v), h(v, w)) = 0$, obteniéndose el resultado buscado.

2 \Rightarrow 1. Dado $\varepsilon = \pm 1$, definimos el conjunto $\Sigma_p(\varepsilon)$ por

$$\Sigma_p(\varepsilon) = \{u \in T_p M_s^n : g(u, u) = \varepsilon\},$$

que es una subvariedad de $T_p M_s^n \cong \mathbb{R}_s^n$ con espacio tangente en cada $u \in \Sigma_p(\varepsilon)$

$$T_u(\Sigma_p(\varepsilon)) = \{v \in T_p M_s^n : g(u, v) = 0\}.$$

Consideremos la función diferenciable $f : \Sigma_p(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(w) = g(h(w, w), h(w, w))$$

para cada $w \in \Sigma_p(\varepsilon)$. Entonces, en virtud del Lema 2.3, para deducir la isotropía de ϕ en p bastará con demostrar que f es constante en $\Sigma_p(\varepsilon)$.

Tomemos un vector tangente $v \in T_u(\Sigma_p(\varepsilon))$ y una curva diferenciable $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \Sigma_p(\varepsilon)$ tal que $\alpha(0) = u$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces, la derivada direccional

$$v(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = 4g(h(u, u), h(u, v)) = 0, \quad (2.18)$$

y la función f es constante en cada componente conexa de $\Sigma_p(\varepsilon)$.

Es importante observar que $\Sigma_p(\varepsilon)$ puede ser no conexa, formada exactamente por dos componentes conexas. En efecto, si $\varepsilon = 1$ entonces la variedad $\Sigma_p(1)$ es difeomorfa a la pseudo-esfera \mathbb{S}_s^{n-1} , que no es conexa cuando $s = n - 1$; y si $\varepsilon = -1$ entonces $\Sigma_p(-1)$ es difeomorfa al espacio pseudo-hiperbólico \mathbb{H}_{s-1}^{n-1} , que no es conexo cuando $s = 1$. En todos los demás casos la variedad $\Sigma_p(\varepsilon)$ es conexa. Distinguiamos dos casos:

Caso (a): Si la dimensión $n \geq 3$, entonces o bien la variedad $\Sigma_p(\varepsilon)$ o bien $\Sigma_p(-\varepsilon)$ es conexa. Se sigue pues de (2.18) la isotropía de ϕ en p .

Caso (b): Si $n = 2$ entonces tanto $\Sigma_p(\varepsilon)$ como $\Sigma_p(-\varepsilon)$ tienen exactamente dos componentes conexas y no es válida la argumentación anterior. Sean Σ^+ y Σ^- una componente conexa de $\Sigma_p(\varepsilon)$ y $\Sigma_p(-\varepsilon)$, respectivamente. Denotemos por λ^+ y $\lambda^- \in \mathbb{R}$ las correspondientes constantes definidas por f en Σ^+ y Σ^- . Entonces, para cada $v \in T_p M_s^n$ tal que $g(v, v) \cdot \varepsilon > 0$ tenemos la igualdad

$$g(h(v, v), h(v, v)) = g(v, v)^2 \lambda^+.$$

Denotemos por \mathcal{T}^+ al conjunto de vectores tangentes tales que $g(v, v) \cdot \varepsilon > 0$. Notemos que \mathcal{T}^+ es una subvariedad abierta de $T_p M_s^n$ con plano tangente en $v \in \mathcal{T}^+$ el propio $T_p M_s^n$. Entonces, si $w \in T_p M_s^n$ es un vector tangente, derivando

$$w[g(h(v, v), h(v, v))] = 4\lambda^+ g(v, v)g(v, w)$$

para cada $v \in \mathcal{T}^+$. Como también se tiene la igualdad

$$w[g(h(v, v), h(v, v))] = 4g(h(v, v), h(v, w)),$$

deducimos que

$$g(h(v, v), h(v, w)) = \lambda^+ g(v, v)g(v, w) \tag{2.19}$$

para cada $v \in \mathcal{T}^+$ y $w \in T_p M_s^n$. Similarmente se obtiene que

$$g(h(v, v), h(v, w)) = \lambda^- g(v, v)g(v, w) \tag{2.20}$$

para cada $v \in \mathcal{T}^-$ y $w \in T_p M_s^n$, siendo \mathcal{T}^- el conjunto de vectores tangentes tales que $g(v, v) \cdot \varepsilon < 0$. Entonces, por continuidad, se deduce de las ecuaciones (2.19) y (2.20) que $g(h(x, x), h(x, w)) = 0$ para cada x luminoso y $w \in T_p M_s^n$. En particular, $g(h(x, x), h(x, y)) = 0$ para cada $x, y \in T_p M_s^n$ luminosos. Por lo que tomando dos vectores ortonormales $u, v \in T_p M_s^n$, que claramente tienen carácter causal opuesto, resulta

$$0 = g(h(u + v, u + v), h(u + v, u - v)) = \pm(\lambda^+ - \lambda^-),$$

obteniéndose finalmente la isotropía de ϕ en p . \square

Observación 2.17 De la demostración de Teorema 2.16 anterior se desprende que, cuando tenga sentido, es suficiente comprobar la condición 2 sólo para vectores tangentes ortonormales del mismo carácter causal. Lo mismo ocurre para vectores tangentes ortonormales de carácter causal opuesto. \diamond

Como consecuencia del resultado anterior y de forma similar al caso Riemanniano [ChL], se tiene la siguiente caracterización de la noción de inmersión constantemente isotrópica atendiendo a la derivada covariante de la segunda forma fundamental:

Corolario 2.18 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La inmersión es constantemente isotrópica.*
2. *$g((\bar{\nabla}h)(u, u, u), h(u, v)) = 0$ para cada par de vectores tangentes ortonormales u, v en cada punto.*
3. *$A_{(\bar{\nabla}h)(v, v, v)}v = 0$ para cada vector tangente v en cada punto.*

Demostración: Sea $p \in M_s^n$ y u, v dos vectores tangentes ortonormales en p . Es conocido que existen dos campos diferenciables ortonormales definidos

sobre un cierto entorno O_p de $p \in M_s^n$ verificado que $X_p = u$, $Y_p = v$ y $\nabla_w X = \nabla_w Y = 0$ para cada $w \in T_p M_s^n$. Si la inmersión es λ -isotrópica, entonces la función de isotropía se puede escribir como $\lambda = g(h(X, X), h(X, X))$ en O_p . Entonces, teniendo en cuenta la fórmula de Weingarten (1.7), las ecuaciones (1.8) y (1.11), la ecuación de Codazzi (1.14) y la Condición de Isotropía (2.14):

$$\begin{aligned}
 v(\lambda) &= v\{g(h(X, X), h(X, X))\} = 2g(D_v h(X, X), h(u, u)) \\
 &= 2g((\bar{\nabla} h)(u, u, v), h(u, u)) = 2g((\bar{\nabla} h)(u, v, u), h(u, u)) \\
 &= 2g(D_u h(X, Y), h(u, u)) = -2g(D_u h(X, X), h(u, v)) \\
 &= -2g((\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, v)) = -2g(A_{(\bar{\nabla} h)(u^3)} u, v). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

1 \Rightarrow 2. Es evidente a partir de la ecuación (2.21) anterior.

2 \Rightarrow 1. De la ecuación (2.21), $v(\lambda) = 0$ para cada vector tangente unitario v y, en consecuencia, la función de isotropía λ es localmente constante. Resulta pues de la conexión de M_s^n que λ es globalmente constante.

1 \Rightarrow 3. Si la inmersión es constantemente isotrópica resulta de la equivalencia 1 \Leftrightarrow 2 que $g((\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, v)) = 0$. Como también se verifica $u(\lambda) = -2g((\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, u)) = 0$ para cada vector tangente unitario u , obtenemos, considerando un referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$A_{(\bar{\nabla} h)(e_j^3)} e_j = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g((\bar{\nabla} h)(e_j^3), h(e_j, e_i)) e_i = 0,$$

siendo $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Luego $A_{(\bar{\nabla} h)(u^3)} u = 0$ para cada vector u unitario y, por continuidad, $A_{(\bar{\nabla} h)(x^3)} x = 0$ para todo vector luminoso x . En consecuencia, $A_{(\bar{\nabla} h)(v^3)} v = 0$ para todo vector tangente v como queríamos probar.

3 \Rightarrow 1. Si se verifica $A_{(\bar{\nabla} h)(u^3)} u = 0$ para todo vector tangente u entonces $g((\bar{\nabla} h)(u, u), h(u, v)) = 0$ para cada par de vectores tangentes ortonormales u, v en cada punto. □

Observación 2.19 Para deducir que una inmersión isotrópica de índice $0 < s < n$ es constantemente isotrópica es suficiente que, fijada la signatura $\varepsilon = \pm 1$, se cumpla

$$g((\bar{\nabla}h)(u^3), h(u, v)) = 0$$

para u, v vectores tangentes ortonormales con $g(u, u) = \varepsilon$ (véase la demostración del Corolario 2.18). \diamond

Sin exigir que la curvatura seccional del espacio ambiente sea constante, obtenemos de forma similar al resultado anterior que:

Corolario 2.20 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica. Entonces, ϕ es constantemente isotrópica si y sólo si $g((\bar{\nabla}h)(u^3), h(u, u)) = 0$ para cada vector tangente unitario u en cada punto.*

Observación 2.21 El resultado anterior puede ser mejorado si la inmersión isotrópica tiene métrica inducida indefinida. En efecto, es suficiente que

$$g((\bar{\nabla}h)(u^3), h(u, u)) = 0$$

para cada vector tangente unitario u espacial (o temporal) para deducir que la función de isotropía asociada es constante como la siguiente argumentación general, basada en la Argumentación del Polinomio de Hawking-Ellis, demuestra. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico indefinido y $\varepsilon = \pm 1$. Supongamos que un tensor $T : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo $(0, r)$ verifica $T(u, \dots, u) = 0$ para todo vector u con $g(u, u) = \varepsilon$. Consideremos la curva $u_t = u + tv$ donde u, v son dos vectores fijos con $g(u, u) = \varepsilon$. Entonces, por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $g(u_t, u_t) \cdot g(u, u) > 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. En consecuencia, el polinomio $P(t) = T(u_t, \dots, u_t) = 0$ y su coeficiente de grado r es $T(v, \dots, v) = 0$. \diamond

Corolario 2.22 *Toda inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana con segunda forma fundamental paralela es constantemente isotrópica.*

2.3.1. Inmersiones isotrópicas y circunferencias

En el caso definido J. A. Little [L] clasificó aquellas subvariedades del espacio Euclídeo con la propiedad de que todas sus geodésicas son circunferencias del ambiente. Sus resultados fueron extendidos por K. Sakamoto [Sak2] para ambientes Riemannianos de curvatura constante, relacionando, en particular, esta propiedad geométrica extrínseca de las geodésicas con la isotropía y el paralelismo de la segunda forma fundamental de la subvariedad; relación que puede generalizarse al caso pseudo-Riemanniano como sigue:

Teorema 2.23 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isométrica. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$.
2. ϕ transforma cada geodésica unitaria γ de M_s^n en una circunferencia propia $\phi \circ \gamma$ del ambiente.

Demostración: Fijemos un punto $p \in M_s^n$ y un vector tangente unitario $u \in T_p M_s^n$. Sea $\gamma = \gamma(t)$ la única geodésica parametrizada por el arco de M_s^n tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = u$. Para simplificar notación, vamos a designar por T tanto al campo de velocidades de γ como al de su transformada $\phi \circ \gamma$. Entonces, teniendo en cuenta la fórmula de Gauss (1.6), la fórmula de Weingarten (1.7) y la ecuación (1.11),

$$\tilde{\nabla}_T T = h(T, T), \quad (2.22)$$

$$\tilde{\nabla}_T^2 T = -A_{h(T, T)} T + (\bar{\nabla} h)(T, T, T). \quad (2.23)$$

Supongamos que la condición 2 anterior es cierta. Si $\{V_1 = T, V_2\}$ es el referencial de Frenet de la circunferencia propia $\phi \circ \gamma$, entonces se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_T V_1 = \kappa V_2, \\ \tilde{\nabla}_T V_2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \kappa V_1, \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $\varepsilon_1 = g(V_1, V_1) = \pm 1$, $\varepsilon_2 = g(V_2, V_2) = \pm 1$ y κ es la curvatura de la circunferencia $\phi \circ \gamma$ que viene dada por $\kappa = \|\tilde{\nabla}_T T\| > 0$. De las ecuaciones (2.23) y (2.24) se sigue que

$$A_{h(u,u)}u = \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 u, \quad (2.25)$$

$$(\bar{\nabla}h)(u, u, u) = 0. \quad (2.26)$$

Como la variedad ambiente tiene curvatura seccional constante, la ecuación de Codazzi (1.14) junto con (2.26) implican que la inmersión tiene segunda forma fundamental paralela. Sea v un vector tangente unitario en p tal que $g(u, v) = 0$. Tomando producto con v , la ecuación (2.25) se reduce a

$$g(h(u, u), h(u, v)) = 0.$$

Entonces, el Teorema 2.16 y el Corolario 2.22 nos dicen que ϕ es constantemente isotrópica. Además, la constante de isotropía $\lambda \neq 0$ ya que, por la ecuación (2.22), $\kappa = |\lambda|^{1/2} > 0$.

Recíprocamente, si ϕ es una inmersión $\lambda(\neq 0)$ -isotrópica con segunda forma fundamental paralela, las ecuaciones (2.22) y (2.23) quedan

$$\tilde{\nabla}_T T = h(T, T),$$

$$\tilde{\nabla}_T^2 T = -A_{h(T,T)}T = -\lambda g(T, T)T.$$

De donde se sigue claramente que la curva transformada $\phi \circ \gamma$ es una circunferencia propia del ambiente de curvatura $\kappa = \|h(T, T)\|$. \square

Observación 2.24 Cuando el índice $0 < s < n$, es suficiente comprobar la condición 2 del Teorema 2.23 anterior sólo para geodésicas espaciales (resp. temporales) para obtener las mismas conclusiones. \diamond

Observación 2.25 A diferencia del caso definido, una inmersión no totalmente geodésica con segunda forma fundamental paralela no satisface necesariamente la condición 2 del Teorema anterior. Por ejemplo, la inmersión

isométrica $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ definida por

$$\phi(x, y) = (x^2, x, y, x^2)$$

no es totalmente geodésica, tiene segunda forma fundamental paralela y no cumple la condición 2 del Teorema, ya que la curva transformada $(\phi \circ \gamma)(t) = \phi(t, 0) = (t^2, t, 0, t^2)$ no es una circunferencia del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 . Nótese que la inmersión ϕ es 0-isotrópica. \diamond

Recientemente S. Maeda [Ma] caracterizó las inmersiones Riemannianas constantemente isotrópicas mediante el comportamiento extrínseco de las circunferencias de la subvariedad inmersa. Es importante observar que resulta imprescindible en la prueba de esta caracterización la versión definida positiva de la Condición de Isotropía (2.14). Por tanto, de forma similar al caso definido se tiene:

Teorema 2.26 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Dado $\kappa > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es constantemente isotrópica.
2. ϕ transforma cada circunferencia propia γ de curvatura κ de M_s^n en una curva $\beta = \phi \circ \gamma$ de la variedad ambiente $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ con curvatura constante $\tilde{\kappa} = \|\tilde{\nabla}_{\beta'}\beta'\|$.

Demostración: En lo que sigue vamos a denotar por simplicidad de la misma forma las curvas γ y $\phi \circ \gamma$. Sea $\{u, v\}$ un referencial ortonormal de vectores tangentes en $p \in M_s^n$ y $\gamma = \gamma(t)$ la circunferencia propia con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$ y $\nabla_T T(0) = \kappa v$, siendo T el campo de velocidades de γ . Entonces, se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \nabla_T T &= \kappa V, \\ \nabla_T V &= -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \kappa T, \end{cases} \quad (2.27)$$

donde $\varepsilon_1 = g(T, T) = \pm 1$, $\varepsilon_2 = g(V, V) = \pm 1$ y $\{T, V\}$ es el referencial de Frenet de γ con condiciones iniciales $T(0) = u$, $V(0) = v$. De la fórmula de Gauss (1.6) y (2.27) resulta

$$g(\tilde{\nabla}_T T, \tilde{\nabla}_T T) = \kappa^2 \varepsilon_2 + g(h(T, T), h(T, T)). \quad (2.28)$$

$1 \Rightarrow 2$. Si ϕ es constantemente λ -isotrópica, de la ecuación (2.28) obtenemos que

$$g(\tilde{\nabla}_T T, \tilde{\nabla}_T T) = \kappa^2 \varepsilon_2 + \lambda,$$

y, en consecuencia, la curva $\phi \circ \gamma$ tiene curvatura $\tilde{\kappa} = |\kappa^2 \varepsilon_2 + \lambda|^{1/2}$, que es constante en el dominio de $\phi \circ \gamma$.

$2 \Rightarrow 1$. La condición 2 y la ecuación (2.28) implican que $g(h(T, T), h(T, T))$ es constante en el dominio de la curva γ . Consecuentemente, teniendo en cuenta las ecuaciones (1.6), (1.7), (1.11) y (2.27)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} g(h(T, T), h(T, T)) = 2g(D_T(h(T, T)), h(T, T)) \quad (2.29) \\ &= 2g((\bar{\nabla} h)(T, T, T), h(T, T)) + 4\kappa g(h(T, T), h(T, V)). \end{aligned}$$

Evaluando la ecuación (2.29) en $t = 0$ obtenemos que

$$g((\bar{\nabla} h)(u, u, u), h(u, u)) + 2\kappa g(h(u, u), h(u, v)) = 0. \quad (2.30)$$

De forma análoga, para la circunferencia ρ determinada por las condiciones iniciales $\rho(0) = p$, $\rho'(0) = u$ y $\nabla_{T_\rho} T_\rho(0) = -\kappa v$, siendo $T_\rho = \rho'(t)$ el campo tangente de velocidades de ρ ,

$$g((\bar{\nabla} h)(u, u, u), h(u, u)) - 2\kappa g(h(u, u), h(u, v)) = 0. \quad (2.31)$$

Usando las ecuaciones (2.30) y (2.31), llegamos a que

$$\begin{aligned} 0 &= g(h(u, u), h(u, v)), \\ 0 &= g((\bar{\nabla} h)(u, u, u), h(u, u)), \end{aligned}$$

para cada punto $p \in M_s^n$ y cada par de vectores tangentes ortonormales u, v en p . Entonces, el Teorema 2.16 y el Corolario 2.20 nos aseguran que ϕ es constantemente isotrópica. \square

Observación 2.27 Cuando el índice $0 < s < n$, es suficiente comprobar la condición 2 del Teorema 2.26 anterior sólo para circunferencias espaciales (resp. temporales) para obtener las mismas conclusiones. \diamond

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos la siguiente caracterización de inmersiones indefinidas 0-isotrópicas mediante circunferencias:

Corolario 2.28 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica indefinida. Dado $\kappa > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es 0-isotrópica.
2. ϕ transforma cada circunferencia propia γ de curvatura κ de M_s^n en una curva $\beta = \phi \circ \gamma$ con curvatura constante $\tilde{\kappa} = \kappa$.

Demostración: La implicación $1 \Rightarrow 2$ es evidente a partir de la prueba del Teorema 2.26. Recíprocamente, supongamos que la condición 2 es cierta. Entonces, el Teorema 2.26 nos asegura que la inmersión ϕ es constantemente isotrópica. Sea λ es la constante de isotropía de ϕ . De la demostración del resultado anterior deducimos que, dados un vector tangente unitario v en un punto p , se satisface la igualdad

$$\kappa^2 = |\kappa^2 \varepsilon_2 + \lambda|,$$

donde $\varepsilon_2 = g(v, v)$. Como la inmersión es indefinida, eligiendo convenientemente la signatura ε_2 del vector v , tenemos que $|\lambda + \kappa^2| = |\lambda - \kappa^2|$ y, en consecuencia, la constante de isotropía $\lambda = 0$ puesto que $\kappa > 0$. \square

Como toda inmersión Riemanniana 0-isotrópica es totalmente geodésica, deducimos el siguiente:

Corolario 2.29 Sea $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+d}$ una inmersión isométrica entre dos variedades Riemannianas. Dado $\kappa > 0$, son equivalentes las siguientes condiciones:

1. ϕ es totalmente geodésica.
2. ϕ transforma cada circunferencia propia γ de curvatura κ de M^n en una curva $\beta = \phi \circ \gamma$ con curvatura extrínseca constante $\tilde{\kappa}_1 = \kappa$.

Demostración: Bastará comprobar la implicación $2 \Rightarrow 1$. Supongamos que la condición 2 es cierta. A partir del Teorema (2.26) (y su prueba), la inmersión ϕ es constantemente λ -isotrópica y se verifica la igualdad $\kappa^2 = |\kappa^2 + \lambda| = \kappa^2 + \lambda$. En consecuencia, $\lambda = 0$ como queríamos probar. \square

2.4. Curvatura e isotropía

Motivados por el trabajo de B. O'Neill [O'N1], estudiamos a continuación algunas de las propiedades que presenta toda inmersión isotrópica cuando exigimos restricciones sobre la “curvatura” de la subvariedad inmersa o del ambiente. Esto nos permitirá obtener algunas consecuencias aplicando resultados conocidos que involucran condiciones sobre las curvaturas y el carácter pseudo-umbilical de la subvariedad.

2.4.1. El discriminante de una inmersión isotrópica

Sea ϕ una inmersión isométrica de una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n en una variedad pseudo-Riemanniana $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. El *discriminante* Δ_p de ϕ en un punto $p \in M_s^n$ se define como

$$\Delta_p(\Pi) = \mathcal{K}(x, y) - \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$$

donde $\mathcal{K}(x, y)$ y $\tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ representan, respectivamente, la curvatura seccional de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ asociada a una sección plana no degenerada Π de base $x, y \in T_p M_s^n$. De la ecuación de Gauss (1.9) se sigue que

$$\Delta_p(\Pi) = \frac{g(h(x, x), h(y, y)) - g(h(x, y), h(x, y))}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}. \quad (2.32)$$

Notemos que una sección plana Π es no degenerada si y sólo si existe una base $\{x, y\}$ de Π (y por tanto para toda base de Π) tal que

$$Q(x, y) = g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2 \neq 0.$$

El discriminante $\Delta_p(\Pi)$ no depende de la base $\{x, y\}$ de Π elegida porque las curvaturas seccionales tampoco dependen de la elección de dicha base. Si el valor $\Delta_p(\Pi)$ no depende de la sección plana no degenerada Π , entonces se dice que el discriminante Δ_p es constante en $p \in M_s^n$.

El principal efecto del hecho de ser constante Δ_p sobre la segunda forma fundamental es la invariancia del valor de $g(h(x, y), h(z, w))$ por permutaciones de vectores ortogonales $x, y, z, w \in T_p M_s^n$. En efecto, de forma similar al caso Riemanniano [O'N4] tenemos:

Lema 2.30 *Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana isométricamente inmersa en otra variedad pseudo-Riemanniana $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. Dado un punto $p \in M_s^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El discriminante Δ_p es constante en p .*
2. *Para todo $x, y, z, w \in T_p M_s^n$ se verifica*

$$\begin{aligned} g(h(x, y), h(z, w)) - g(h(x, z), h(y, w)) = \\ \Delta_p \{g(x, y)g(z, w) - g(x, z)g(y, w)\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Demostración: Supongamos que el discriminante Δ_p es constante en p . Definimos el tensor 4-covariantes sobre $T_p M_s^n$

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) = & g(h(x, w), h(y, z)) - g(h(x, z), h(y, w)) \\ & - \Delta_p \{g(x, w)g(z, y) - g(x, z)g(y, w)\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

para cada $x, y, z, w \in T_p M_s^n$. Entonces T es un tensor de curvatura sobre $T_p M_s^n$, es decir, T verifica las siguientes propiedades:

- (i) $T(x, y, z, w) + T(y, z, x, w) + T(z, x, y, w) = 0$,
- (ii) $T(y, x, z, w) = -T(x, y, z, w)$,
- (iii) $T(x, y, w, z) = -T(x, y, z, w)$,
- (iv) $T(z, w, x, y) = T(x, y, z, w)$,

para cada $x, y, z, w \in T_p M_s^n$. De la ecuación (2.32) se sigue inmediatamente que $T(x, y, y, x) = 0$ para todo par de vectores tangentes $x, y \in T_p M_s^n$ tales que $Q(x, y) = g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2 \neq 0$. Esto implica [O'N2, p. 79] que el tensor $T = 0$, obteniéndose la expresión (2.33) buscada. El recíproco se verifica claramente. \square

Teorema 2.31 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión λ -isotrópica. Si la inmersión ϕ tiene discriminante Δ_p constante en un punto $p \in M_s^n$, entonces se satisface la siguiente ecuación:*

$$\begin{aligned} 3g(h(x, y), h(z, w)) &= (\lambda(p) - \Delta_p) \{g(x, w)g(y, z) + g(x, z)g(y, w)\} \\ &+ (\lambda(p) + 2\Delta_p) g(x, y)g(z, w), \end{aligned} \quad (2.35)$$

para cada $x, y, z, w \in T_p M_s^n$.

Demostración: Sean $x, y, z \in T_p M_s^n$. Del hecho de ser constante el discriminante obtenemos como en (2.33) la siguiente expresión

$$\begin{aligned} g(h(x, x), h(y, z)) - g(h(x, y), h(x, z)) &= \\ \Delta_p \{g(x, x)g(y, z) - g(x, y)g(x, z)\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por otra parte, de la condición de isotropía (2.10)

$$\begin{aligned} g(h(x, x), h(y, z)) + 2g(h(x, y), h(x, z)) &= \\ \lambda(p) \{g(x, x)g(y, z) + 2g(x, y)g(x, z)\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por tanto, restando las ecuaciones (2.37) y (2.36), llegamos a que

$$\begin{aligned} 3g(h(x, y), h(x, z)) &= (\lambda(p) - \Delta_p) g(x, x)g(y, z) \\ &+ (2\lambda(p) + \Delta_p) g(x, y)g(x, z) \end{aligned} \quad (2.38)$$

para cada $x, y, z \in T_p M_s^n$. Ahora, sustituyendo el valor de x por $x+w$ en (2.38), desarrollando y teniendo en cuenta (2.33), obtenemos finalmente la expresión buscada. \square

Proposición 2.32 *Toda inmersión isotrópica pseudo-Riemanniana con discriminante constante es pseudo-umbilical y satisface la igualdad:*

$$3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = (n + 2)\lambda + 2(n - 1)\Delta, \quad (2.39)$$

donde λ es la función de isotropía y \mathbf{H} es el campo curvatura media asociado. Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0$ si y sólo si $\Delta = -\{(n + 2)/2(n - 1)\}\lambda$.
- (2) $g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = \lambda$ si y sólo si $\Delta = \lambda$.

Demostración: Considerando un campo local de referencias ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de la variedad inmersa, de la expresión (2.35) resulta

$$g(\mathbf{H}, h(e_i, e_j)) = \begin{cases} \varepsilon_i \rho & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donde $\rho = ((n + 2)\lambda + (2n - 2)\Delta)/3n$, lo que implica que la inmersión es pseudo-umbilical con $3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = (n + 2)\lambda + 2(n - 1)\Delta$. El resto es claro. \square

Cuando la dimensión de la variedad pseudo-Riemanniana inmersa es $n = 2$ entonces sólo cabe una única posibilidad de elección de la sección plana no degenerada en cada espacio tangente: el propio espacio tangente. Por tanto, el discriminante es trivialmente constante en cada punto de una superficie

y se verifica (2.35) para toda superficie M_s^2 isotrópicamente inmersa en una variedad pseudo-Riemanniana ambiente $\tilde{M}_{s+\ell}^{2+d}$. Así se concluye fácilmente de la Proposición 2.32 anterior que:

Corolario 2.33 *Sea $\phi : M_s^2 \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{2+d}$ una inmersión λ -isotrópica. Entonces, ϕ es pseudo-umbilical y se cumple*

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = (\lambda - g(\mathbf{H}, \mathbf{H})) \{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\ + (2g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \lambda) g(X, Y)g(Z, W), \quad (2.40)$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^2)$.

Por otra parte, toda inmersión isotrópica $\phi : M_s^n(c) \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ entre espacios de curvatura constante verifica la ecuación (2.35), pues en este caso el discriminante es constantemente igual a $c - \tilde{c}$. Tenemos de esta forma:

Corolario 2.34 *Sea $\phi : M_s^n(c) \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión λ -isotrópica. Entonces, se verifica*

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = \frac{\lambda - (c - \tilde{c})}{3} \{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\ + \frac{\lambda + 2(c - \tilde{c})}{3} g(X, Y)g(Z, W), \quad (2.41)$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

En 1995 H. Sun [Sun] demostró que cualquier subvariedad Riemanniana pseudo-umbilical M^n de un ambiente pseudo-Riemanniano $\tilde{M}_d^{n+d}(\tilde{c})$ tiene curvatura media constante. Notemos que el cóndice ℓ y la codimensión d coinciden. Por tanto, de la Proposición 2.32 se deducen inmediatamente los dos siguientes resultados:

Corolario 2.35 *Sea ϕ una inmersión isotrópica de una variedad Riemanniana $M^n(c)$ de curvatura seccional constante en un espacio ambiente pseudo-Riemanniano de curvatura constante $\tilde{M}_d^{n+d}(\tilde{c})$. Entonces, ϕ es constantemente isotrópica.*

Corolario 2.36 *Sea ϕ una inmersión isotrópica de una superficie Riemanniana M^2 en un espacio ambiente pseudo-Riemanniano de curvatura constante $\tilde{M}_d^{2+d}(\tilde{c})$. Entonces, ϕ es constantemente isotrópica si y sólo si ϕ tiene curvatura Gaussiana constante.*

El siguiente resultado generaliza el equivalente Riemanniano [O'N1]. A diferencia del caso Euclídeo, una inmersión isotrópica indefinida verificando $\Delta_p = \lambda(p)$ para todo punto no es necesariamente totalmente umbilical.

Corolario 2.37 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica y $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ una función diferenciable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ se verifica*

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = \lambda g(X, Y)g(Z, W).$$

2. *La inmersión es λ -isotrópica y, en cada punto p de M_s^n , el discriminante es constantemente igual a $\Delta_p = \lambda(p)$.*

Demostración: Supongamos que la condición 1 es cierta. Fijado un punto p de M_s^n , entonces resulta de la ecuación (2.32) que

$$\Delta_p(\Pi) = \frac{g(h(x, x), h(y, y)) - g(h(x, y), h(x, y))}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2} = \lambda(p),$$

donde Π es una sección plana no degenerada de base $x, y \in T_p M_s^n$ como queríamos probar. El recíproco es consecuencia directa del Teorema 2.31. \square

Observación 2.38 La condición 1 del resultado anterior equivale a que el tensor de λ -isotropía sea idénticamente nulo $T_\lambda = 0$. Observemos que, a diferencia del caso definido, existen inmersiones pseudo-Riemannianas no totalmente umbilicales satisfaciendo $T_\lambda = 0$ (Ejemplo 2.7). \diamond

De forma similar al resultado anterior obtenemos:

Corolario 2.39 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica y $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ una función diferenciable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ se verifica

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = \lambda/2 \cdot \{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W)\}.$$

2. La inmersión es λ -isotrópica y, en cada punto p de M_s^n , el discriminante es constantemente igual a $\lambda(p) = -2\Delta_p(\Pi)$.

2.4.2. El tensor de Ricci

Teorema 2.40 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión λ -isotrópica. Entonces el tensor de Ricci de M_s^n viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x, y) &= \{(n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2\}g(x, y) \\ &\quad + 3ng(h(x, y), \mathbf{H})/2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde h es la segunda forma fundamental de la inmersión y \mathbf{H} es el campo curvatura media asociado.

Demostración: Dado un campo de referencias ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M_s^n el tensor de Ricci se escribe

$$\text{Ric}(x, y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, x)y, e_i), \quad (2.43)$$

donde $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Por otra parte, de la ecuación de Gauss (1.9) y la expresión (1.2) del tensor de curvatura se tiene

$$\begin{aligned} g(R(e_i, x)y, e_i) &= \tilde{c}\{\varepsilon_i g(x, y) - g(x, e_i)g(y, e_i)\} \\ &\quad + g(h(e_i, e_i), h(x, y)) - g(h(x, e_i), h(y, e_i)). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Y de la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} g(h(e_i, e_i), h(x, y)) + 2g(h(x, e_i), h(y, e_i)) \\ = \lambda\varepsilon_i g(x, y) + 2\lambda g(x, e_i)g(y, e_i). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por tanto, sustituyendo las expresiones (2.44) y (2.45) en (2.43) se obtiene el resultado buscado. \square

Corolario 2.41 *Si $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ es una inmersión isotrópica y pseudo-umbilical con $n \geq 3$, entonces ϕ es constantemente isotrópica si y sólo si ϕ tiene curvatura media constante.*

Demostración: Ya que ϕ es pseudo-umbilical, se sigue de la ecuación (2.42)

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x, y) &= \{(n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2\}g(x, y) \\ &\quad + 3ng(h(x, y), \mathbf{H})/2, \\ &= \{(n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2 + 3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H})/2\}g(x, y). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora, como la dimensión $n \geq 3$ entonces ϕ es Einstein [Be1], es decir, la función $\rho = (n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2 + 3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H})/2$ es constante, de donde se sigue el resultado. \square

Como consecuencia directa del Corolario anterior obtenemos la siguiente extensión al caso indefinido de un resultado Riemanniano debido a T. Itoh y K. Ogiue [IO2]:

Corolario 2.42 *Si $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ es una inmersión isotrópica minimal con $n \geq 3$, entonces ϕ es constantemente isotrópica.*

Observación 2.43 El resultado anterior no se verifica para $n = 2$, ya que existen inmersiones Riemannianas de superficies en el espacio Euclídeo minimales y no constantemente isotrópicas. En efecto, se puede comprobar [ChL] que toda curva holomorfa no plana en el espacio complejo \mathbb{C}^2 determina una inmersión isotrópica, no constantemente isotrópica y minimal. \diamond

Teniendo en cuenta que en el caso $n = 3$ una inmersión es Einstein si y sólo si la variedad inmersa tiene curvatura seccional constante, similarmente al Corolario 2.42 obtenemos:

Corolario 2.44 *Toda variedad pseudo-Riemanniana 3-dimensional minimal e isotrópicamente inmersa en un espacio pseudo-Riemanniano de curvatura constante tiene curvatura seccional constante.*

2.4.3. Consecuencias

El Teorema de Bonnet afirma que toda variedad Riemanniana completa con todas sus curvaturas seccionales acotadas inferiormente por una constante positiva, es compacta y tiene grupo fundamental finito. Como una generalización, el Teorema de Myers [O'N2] permite obtener las mismas conclusiones topológicas sobre la variedad si su tensor de Ricci es estrictamente positivo:

Lema 2.45 (Teorema de Myers) *Sea M^n una variedad Riemanniana completa con tensor de Ricci satisfaciendo la siguiente desigualdad para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ y cierta constante positiva $r > 0$:*

$$\text{Ric}(X, X) \geq \frac{n-1}{r^2} g(X, X).$$

Entonces, M^n es compacta con grupo fundamental finito y diámetro al menos πr .

Observemos que el Teorema de Myers es aplicable sólo a variedades Riemannianas, ya que en su demostración se utilizan propiedades que dependen directamente del carácter definido positivo de la métrica.

Corolario 2.46 *Sea $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}_\ell^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica y pseudo-umbilical con $n \geq 3$ y M^n variedad Riemanniana completa. Supongamos que la función λ de isotropía satisface (en cada punto) la desigualdad estricta*

$$\lambda < \frac{2(n-1)}{n+2} \tilde{c} + \frac{3n}{n+2} g(\mathbf{H}, \mathbf{H}). \quad (2.47)$$

Entonces, M^n es compacta (con grupo fundamental finito).

Demostración: Como en la prueba del Corolario 2.41, se tiene que la función $\rho = (n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2 + 3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H})/2$ es constante (positiva por la desigualdad (2.47)) y

$$\text{Ric}(X, X) = \rho g(X, X)$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M^n)$. Basta aplicar el Teorema de Myers para obtener el resultado buscado. \square

Corolario 2.47 *Sea M^2 una superficie Riemanniana completa que admite una inmersión constantemente isotrópica con curvatura media constante en un espacio $\tilde{M}_\ell^{2+d}(\tilde{c})$. Entonces, si la constante λ de isotropía asociada satisface la desigualdad estricta*

$$2\lambda < \tilde{c} + 3g(\mathbf{H}, \mathbf{H}), \quad (2.48)$$

M^2 es compacta (con grupo fundamental finito).

Demostración: Por la ecuación (2.39), la curvatura Gaussiana \mathcal{K} de M^2 viene dada por

$$\mathcal{K} = \tilde{c} - 2\lambda + 3g(\mathbf{H}, \mathbf{H}), \quad (2.49)$$

que es una constante positiva por la desigualdad (2.48). El Teorema de Bonnet nos asegura entonces que M^2 es compacta. \square

Es conocido [Ch1, O'N2] que no existen subvariedades compactas minimales en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m , ni en el espacio pseudo-hiperbólico \mathbb{H}_ν^m . Obtenemos como consecuencia de este hecho y de los dos resultados anteriores, las siguientes obstrucciones para la constante de isotropía:

Corolario 2.48 *Sea M^n una subvariedad Riemanniana completa, minimal y constantemente isotrópica del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ℓ^{n+d} . Entonces, la constante λ de isotropía satisface $\lambda \geq 0$.*

Corolario 2.49 *Sea M^n una subvariedad Riemanniana completa, minimal y constantemente isotrópica del espacio pseudo-hiperbólico \mathbb{H}_ℓ^{n+d} . Entonces, la constante λ de isotropía satisface $\lambda \geq 2(1 - n)/(n + 2)$.*

Usando el significado de ciertas fórmulas integrales introducidas por L. J. Alías y A. Romero en [AR], véase también [AER], fue probado el siguiente resultado:

Lema 2.50 *Sea M^n una subvariedad Riemanniana completa y minimal de la pseudo-esfera \mathbb{S}_ℓ^{n+d} de coíndice $1 \leq \ell \leq d$. Si el tensor de Ricci de M^n satisface*

$$\text{Ric}(v, v) \geq (n - 1)g(v, v)$$

para todo vector tangente v , entonces M^n es totalmente geodésica.

Como consecuencia tenemos:

Corolario 2.51 *Sea M^n , $n \geq 3$, una subvariedad Riemanniana completa, minimal e isotrópica de la pseudo-esfera \mathbb{S}_ℓ^{n+d} de coíndice $1 \leq \ell \leq d$. Entonces, o bien M^n es una subvariedad totalmente geodésica de \mathbb{S}_ℓ^{n+d} , o bien M^n es una subvariedad constantemente isotrópica de \mathbb{S}_ℓ^{n+d} con constante de isotropía $\lambda > 0$.*

Demostración: Como la dimensión $n \geq 3$, del Corolario 2.42 resulta que la subvariedad es constantemente isotrópica. Supongamos que la constante de isotropía satisface $\lambda \leq 0$. De la ecuación (2.42) se sigue que el tensor de Ricci de M^n cumple

$$\text{Ric}(v, v) = ((n - 1) - \lambda(n + 2)/2)g(v, v) \geq (n - 1)g(v, v),$$

para cada vector tangente v en cada punto. Del Lema 2.50 se deduce entonces el resultado buscado. \square

Observación 2.52 Cuando $\ell = d$ entonces se sigue del conocido resultado de T. Ishihara [Ish] que toda subvariedad Riemanniana M^n completa y minimal de la pseudo-esfera \mathbb{S}_d^{n+d} (o del espacio \mathbb{R}_d^{n+d}) es totalmente geodésica. Por tanto, no tiene sentido estudiar las subvariedades Riemannianas $M^n \subseteq \mathbb{S}_d^{n+d}, \mathbb{R}_d^{n+d}$ completas, minimales e isotrópicas ya que éstas son totalmente geodésicas. \diamond

Corolario 2.53 Sea M^2 una superficie Riemanniana completa, minimal e isotrópicamente inmersa en la pseudo-esfera \mathbb{S}_ℓ^{2+d} ($1 \leq \ell \leq d$). Supongamos que la función de isotropía $\lambda(p) \leq 0$ para todo punto p de M^2 . Entonces, M^2 es totalmente geodésica.

Demostración: De forma análoga al Corolario anterior. \square

Recordemos que un campo de vectores tangentes X definido sobre una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n se dice *conforme* si el tensor métrico g de M_s^n satisface

$$L_X g = \rho g,$$

donde ρ es una función diferenciable sobre M_s^n y L_X denota la derivada de Lie en la dirección de X . Equivalentemente, esta condición puede ser escrita

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = \rho g(Y, Z),$$

para cada $Y, Z \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Un campo de vectores conforme se dice *campo de Killing* si $\rho = 0$. Un campo de vectores es conforme (resp. de Killing) si y sólo si su subgrupo uniparamétrico local de transformaciones está formado por difeomorfismos conformes (resp. isometrías).

Observemos que en una variedad pseudo-Riemanniana completa M_s^n todo campo de Killing está generado por un subgrupo uniparamétrico de isometrías [Be1]. Consecuentemente, el álgebra de Lie de los campos de Killing es el álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(M_s^n)$ del grupo de isometrías $\text{Iso}(M_s^n)$.

Lema 2.54 (Teorema de Bochner) *Sea M^n una variedad Riemanniana compacta con tensor de Ricci semi-definido negativo. Entonces, si existe un punto $p \in M^n$ tal que Ric_p es definido negativo, todo campo de Killing es idénticamente nulo y el grupo de isometrías $\text{Iso}(M^n)$ es finito.*

Corolario 2.55 *Sea $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}_\ell^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica y pseudo-umbilical con M^n variedad Riemanniana compacta, $n \geq 3$ y verificando alguna de las dos siguientes condiciones:*

1. *M^n admite un campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ no trivial (es decir, existe un punto $p \in M^n$ tal que $X_p \neq 0$).*
2. *El grupo de isometrías $\text{Iso}(M^n)$ es infinito.*

Entonces, la función λ de isotropía satisface la desigualdad

$$\lambda \leq \frac{2(n-1)}{n+2}\tilde{c} + \frac{3n}{n+2}g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \quad (2.50)$$

en cada punto.

Demostración: Basta aplicar el Teorema de Bochner teniendo en cuenta que $\text{Ric} = \rho g$ con $\rho = (n-1)\tilde{c} - \lambda(n+2)/2 + 3ng(\mathbf{H}, \mathbf{H})/2$ constante real. \square

Observación 2.56 En este Corolario la hipótesis inicial de que la subvariedad inmersa M^n sea pseudo-umbilical puede ser sustituida por la propiedad de que la subvariedad sea minimal (ver la ecuación 2.42). Por otra parte, si en un punto p se alcanza la igualdad en (2.50), entonces $\rho = 0$ y el tensor de Ricci es idénticamente nulo. Consecuentemente [Be1, p. 41], todo campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ es paralelo y el espacio de campos de Killing tiene dimensión exactamente el primer número de Betti $b_1(M^n, \mathbb{R})$ (que es distinto de 0 si imponemos la condición 1). Nótese que la condición 1 siempre es cierta para una variedad homogénea M^n . Recordemos también que toda variedad

Riemanniana homogénea con $\text{Ric} = 0$ es llana, y es isométrica al producto de un toro por un espacio Euclídeo [Be1, Teorema 7.61]. \diamond

La Técnica de Bochner para variedades de Lorentz ha sido detalladamente estudiada por A. Romero y M. Sánchez (véase [PR, R2] y referencias citadas). Ambos autores demuestran que si una variedad de Lorentz de dimensión $n \geq 3$ admite un campo de vectores conforme temporal y satisface $\text{Ric} = \rho g$ para cierta constante real $\rho \in \mathbb{R}$, entonces $\rho \leq 0$. Analizan también el caso particular $\rho = 0$. Obtenemos como consecuencia de este estudio:

Corolario 2.57 *Sea $\phi : M_1^n \rightarrow \tilde{M}_{1+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica y pseudo-umbilical con M_1^n variedad de Lorentz compacta, $n \geq 3$ y admitiendo un campo de vectores conforme temporal $X \in \mathfrak{X}(M_1^n)$. Entonces, la función λ de isotropía satisface la desigualdad*

$$\lambda \geq \frac{2(n-1)}{n+2}\tilde{c} + \frac{3n}{n+2}g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \quad (2.51)$$

en cada punto.

Si la igualdad se alcanza en un punto, entonces X es paralelo, el primer número de Betti de M_1^n es distinto de 0 y la conexión de Levi-Civita de M_1^n es Riemanniana. Además, si alguna de las siguientes condiciones es cierta:

- (1) M_1^n es homogénea,
- (2) M_1^n es llana (en particular si $n = 3$),
- (3) $n = 4$,

entonces, M_1^n es isométrica (salvo un recubridor finito) a un n -toro de Lorentz llano.

Demostración: Similar al resultado anterior, teniendo en cuenta [PR]. \square

Observación 2.58 Como en el Corolario 2.55, la hipótesis de que la subvariedad de Lorentz M_1^n sea pseudo-umbilical puede ser sustituida por el hecho de que la subvariedad sea minimal. Notemos, por curiosidad, que las desigualdades de obstrucción (2.50) y (2.51) tienen sentido opuesto. \diamond

2.5. Geometría compleja e isotropía

Cuando en una inmersión isométrica las variedades involucradas son de Kaehler y la inmersión es holomorfa, la noción de inmersión isotrópica tiene una sencilla interpretación en términos de la diferencia entre las curvaturas seccionales holomorfas. Esto nos permite obtener nuevos ejemplos de inmersiones pseudo-Riemannianas isotrópicas y estudiar algunas de las propiedades que presenta toda inmersión isotrópica holomorfa.

2.5.1. Variedades de Kaehler no degeneradas

En esta sección vamos a recordar algunas nociones básicas sobre variedades complejas y de Kaehler. Para una exposición más detallada puede consultarse [KN] y [RS].

Una *estructura casi-compleja* en una variedad diferenciable real M es un campo tensorial $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ satisfaciendo $J^2 = -I$, donde I denota el campo tensorial identidad. Una variedad diferenciable dotada de una estructura casi-compleja fija se llama *variedad casi-compleja*. Toda variedad casi-compleja tiene dimensión par y es orientable.

El espacio $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_k = x_k + iy_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}\}$ tiene una estructura casi-compleja J natural definida por

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \text{y} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Es fácil comprobar que una aplicación $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa si y sólo si $f_* \circ J = J \circ f_*$, que es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cada función coordenada.

Una *variedad compleja* M de dimensión n , es una variedad real de dimensión $2n$ que admite un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ con funciones de transición holomorfas. Una variedad compleja admite una estructura casi-compleja natural J_M : Para cada entorno coordenado $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se define

$$J_M = (d\varphi_\alpha)^{-1} \circ J \circ d\varphi_\alpha,$$

donde J es la estructura casi-compleja canónica de \mathbb{C}^n . Esta definición es independiente del entorno coordenado $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ elegido, por lo que J_M está globalmente definida.

Una estructura casi-compleja J sobre una variedad diferenciable M se dice *estructura compleja* si la estructura de variedad diferenciable de M proviene de una estructura de variedad compleja con estructura casi-compleja asociada $J_M = J$.

Una *variedad de Kaehler (no degenerada)* es una variedad casi-compleja (M, J) junto con una métrica no degenerada g tal que:

- (i) g es *hermítica*, es decir, $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- (ii) La estructura casi-compleja J es *paralela*, es decir, $\nabla_X JY = J(\nabla_X Y)$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, siendo ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a g .

En virtud del conocido Teorema de Newlander-Nirenberg [KN], la estructura casi-compleja de una variedad de Kaehler es una estructura compleja. Por otra parte, para una variedad de Kaehler $2n$ -dimensional (M, J, g) el índice de g es un número par $2s$, $0 \leq 2s \leq 2n$, puesto que J preserva el carácter causal. Al valor de s le llamamos *índice complejo* y denotamos por $M_s^n(\mathbb{C})$ para designar a una variedad de Kaehler de dimensión compleja n e índice complejo s . Cuando no exista posibilidad de confusión pondremos simplemente $M_s^n = M_s^n(\mathbb{C})$.

Sea (M, J, g) una variedad de Kaehler. Una *sección plana holomorfa* Π del espacio tangente $T_p M$ es una sección plana generada por $\{u, Ju\}$. Una sección plana holomorfa Π es no degenerada si y sólo si existe un vector $v \in \Pi$ tal que $g(v, v) \neq 0$. La curvatura seccional asociada a una sección plana no degenerada Π se llama *curvatura seccional holomorfa*, denotada por $\mathcal{H}(p, \Pi)$. Una variedad de Kaehler se dice de *curvatura seccional holomorfa constante* si la función $\mathcal{H}(p, \Pi)$ es constante para cada sección plana holomorfa y cada punto. Si en cada punto $p \in M$ las curvaturas seccionales holomorfas $\mathcal{H}(p, \Pi)$ tienen el mismo valor $\mathcal{H}(p)$ entonces, el tensor curvatura de Riemann R de M puede escribirse [BR]

$$R(X, Y)Z = \frac{\mathcal{H}}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(JY, Z)JX - g(JX, Z)JY + 2g(X, JY)JZ\}. \quad (2.52)$$

Además, si la dimensión compleja de M es $n \geq 2$, el Teorema de Schur nos asegura que \mathcal{H} es una función constante [KN], es decir, M es una variedad de Kaehler de curvatura seccional holomorfa constante. Denotamos por $M_s^n(c; \mathbb{C})$ para designar a una variedad de Kaehler de curvatura seccional holomorfa constante c , dimensión compleja n e índice complejo s .

Un espacio modelo de la geometría pseudo-Riemanniana compleja es una variedad de Kaehler completa, simplemente conexa y de curvatura seccional holomorfa constante. Denotamos por $\mathbb{C}M_s^n(c)$ para un espacio modelo complejo de dimensión compleja n , índice complejo s y curvatura seccional holomorfa c . Se prueba que dos modelos pseudo-Riemannianos complejos son holomorficamente isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión compleja n , índice complejo s y curvatura c . Modelos estándares de variedades de Kaehler de curvatura seccional constante fueron construidos independientemente por M. Barros, A. Romero [BR] y J. A. Wolf [Wo]:

1. La variedad compleja \mathbb{C}^n dotada con la parte real de la métrica hermítica

$$\mathbf{b}_s^n(z, w) = - \sum_{k=1}^s \bar{z}_k w_k + \sum_{k=s+1}^n \bar{z}_k w_k \quad \text{para } z, w \in \mathbb{C}^n$$

define una variedad de Kaehler completa, simplemente conexa, de índice complejo s y curvatura seccional constante $c = 0$, que se denota por \mathbb{C}_s^n . El *grupo unitario indefinido* $U^s(n)$ es el grupo de automorfismos de \mathbb{C}^n que deja invariante la métrica hermítica \mathbf{b}_s^n . El *grupo unitario especial indefinido* $SU^s(n)$ está constituido por los elementos de $U^s(n)$ con determinante igual a uno. Observemos que $\mathbb{C}_s^n = \mathbb{R}_{2s}^{2n}$ como variedad pseudo-Riemanniana real.

2. El *espacio proyectivo complejo indefinido* $\mathbb{CP}_s^n(c)$ ($c > 0$) se define de la siguiente forma [BR]: Como variedad compleja es la subvariedad abierta

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \mathbf{b}_s^{n+1}(z, z) > 0\} / \mathbb{C}^*$$

del espacio proyectivo complejo ordinario $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \mathbb{C}^*$. Para definir su métrica, consideramos el “Fibrado de Hopf”

$$\pi : \mathbb{S}_{2s}^{2n+1}(\sqrt{4/c}) \rightarrow \Omega, \quad z \mapsto z \cdot \mathbb{C}^*,$$

que es una sumersión diferenciable. Entonces, existe una única métrica pseudo-Riemanniana de índice $2s$ en Ω tal que π es una sumersión Riemanniana en el sentido de O’Neill [O’N3]. La variedad pseudo-Riemanniana $\mathbb{CP}_s^n(c)$ es una variedad de Kaehler simplemente conexa que tiene dimensión compleja n , índice complejo s y curvatura seccional holomorfa constante c . Observemos que el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}_s^n = \mathbb{CP}_s^n(1)$ puede verse como la variedad pseudo-Riemanniana homogénea

$$\mathbb{CP}_s^n = SU^s(n+1) / U^s(n),$$

que coincide con la definición de espacio proyectivo indefinido complejo dada por J. A. Wolf [Wo, p. 382].

3. Para $c < 0$, el *espacio hiperbólico indefinido complejo* $\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n(c)$ se define de forma similar al caso anterior, considerando esta vez el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \mathbf{b}_{s+1}^{n+1}(z, z) < 0\} / \mathbb{C}^*$ y la sumersión

$$\pi : \mathbb{H}_{2s}^{2n+1}(\sqrt{-4/c}) \rightarrow \Omega, \quad z \mapsto z \cdot \mathbb{C}^*.$$

La variedad pseudo-Riemanniana $\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n(c)$ es una variedad de Kaehler indefinida simplemente conexa que tiene dimensión compleja n , índice $2s$ y curvatura seccional holomorfa constante c . El espacio hiperbólico indefinido complejo $\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n = \mathbb{C}\mathbb{H}_s^n(1)$ puede verse como la variedad pseudo-Riemanniana homogénea

$$\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n = SU^{s+1}(n+1)/U^s(n).$$

†

En [BR] se demuestra, extendiendo el Teorema de Hawley-Igusa [KN], que toda variedad de Kaehler simplemente conexa, completa, de dimensión compleja n , índice complejo s y curvatura seccional holomorfa constante c , es isométricamente holomorfa a \mathbb{C}_s^n , $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^n(c)$ o $\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n(c)$ según sea $c = 0$, $c > 0$ o $c < 0$, respectivamente. Localmente, toda variedad de Kaehler M_s^n de curvatura seccional holomorfa constante c es isométricamente holomorfa a \mathbb{C}_s^n , $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^n(c)$ o $\mathbb{C}\mathbb{H}_s^n(c)$ si $c = 0$, $c > 0$ o $c < 0$.

2.5.2. Inmersiones isotrópicas holomorfas

Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa de una variedad de Kaehler M_s^n en una variedad ambiente de Kaehler $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. Las dimensiones y los índices correspondientes se consideran todos complejos. Denotamos de la misma forma al tensor métrico g de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. Asimismo, escribimos por J para designar tanto la estructura casi-compleja de la variedad inmersa como la del ambiente. Para todas las fórmulas y cálculos locales podemos asumir que las inmersiones isométricas son embebimientos y así podemos identificar

un punto p de M_s^n con su imagen $\phi(p)$ y el espacio tangente $T_p M_s^n$ con el subespacio $d\phi(T_p M_s^n)$ de $T_{\phi(p)} \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, etc.

Como en el caso definido tenemos:

Lema 2.59 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa. Entonces, la segunda forma fundamental h asociada verifica*

$$h(X, JY) = h(JX, Y) = Jh(X, Y) \quad (2.53)$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Demostración: Como $\tilde{\nabla}_X JY = J(\tilde{\nabla}_X Y)$, aplicando la fórmula de Gauss (1.6) se obtiene $\nabla_X JY + h(X, JY) - J\nabla_X Y - Jh(X, Y) = 0$, de donde se deduce inmediatamente el resultado. \square

Observemos que la propiedad (2.53) implica que $h(JX, JY) = -h(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Consecuentemente, el campo curvatura media asociado verifica $\mathbf{H} = 0$ y la inmersión es minimal.

Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa de una variedad de Kaehler M_s^n en una variedad ambiente de Kaehler $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$. Como una inmersión isométrica holomorfa preserva los planos holomorfos, podemos definir el *discriminante holomorfo* de ϕ en $p \in M_s^n$ como

$$\Delta_p^{\text{hol}}(\Pi) = \mathcal{H}(x) - \tilde{\mathcal{H}}(x),$$

donde $\mathcal{H}(x)$ y $\tilde{\mathcal{H}}(x)$ representan, respectivamente, la curvatura seccional holomorfa de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ asociada a una sección plana holomorfa no degenerada Π de base $\{x, Jx\} \subseteq T_p M_s^n$. Si el valor $\Delta_p^{\text{hol}}(\Pi)$ no depende de la sección plana holomorfa no degenerada Π , entonces se dice que el discriminante holomorfo Δ_p^{hol} es constante en $p \in M_s^n$.

Teorema 2.60 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es λ -isotrópica.
2. ϕ tiene discriminante holomorfo constantemente igual a $\Delta_p^{\text{hol}} = -2\lambda(p)$ en cada punto $p \in M_s^n$.

Demostración: Sean R y \tilde{R} los tensores curvatura de Riemann de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, respectivamente. Entonces, aplicando la ecuación de Gauss (1.9) y la propiedad (2.53) resulta

$$R(X, JX, JX, X) - \tilde{R}(X, JX, JX, X) = -2g(h(X, X), h(X, X)), \quad (2.54)$$

de donde se deduce el resultado claramente. \square

Cuando la dimensión compleja $n = 1$ el discriminante holomorfo es trivialmente constante. Por tanto, dado que toda inmersión isométrica holomorfa es minimal, obtenemos como consecuencia del Corolario 2.33:

Corolario 2.61 *Toda inmersión isométrica holomorfa $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ con dimensión compleja $n = 1$ es isotrópica y, si λ es la función de isotropía asociada, se cumple*

$$g(h(X, Y), h(Z, W)) = \lambda\{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W) - g(X, Y)g(Z, W)\}, \quad (2.55)$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Como generalización de un resultado Riemanniano debido a H. Naitoh [Na1] tenemos:

Teorema 2.62 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión λ -isotrópica holomorfa. Entonces, se satisface la siguiente ecuación:*

$$\begin{aligned} g(h(X, Y), h(Z, W)) &= \frac{\lambda}{2} \{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W) \\ &\quad + g(JX, W)g(Y, JZ) + g(JX, Z)g(Y, JW)\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Demostración: Consideremos el campo tensorial sobre M_s^n

$$\begin{aligned}
T(X, Y, Z, W) &= g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \\
&\quad \quad + g(JY, Z)g(JX, W) - g(JX, Z)g(JY, W) \\
&\quad \quad + 2g(X, JY)g(JZ, W)\}. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Entonces, T es un tensor de tipo curvatura verificando, por la condición de Isotropía (2.8), la propiedad de J invariancia de h (2.53) y (2.54), que

$$T(JX, JY, Z, W) = T(X, Y, Z, W)$$

y

$$T(X, JX, JX, X) = 0$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Esto implica [KN, Proposición IX.7.2] que el tensor $T = 0$. Basta considerar la Condición de Isotropía (2.10) de permutación circular para obtener el resultado buscado. \square

Observación 2.63 Como consecuencia directa del Teorema 2.60 obtenemos que toda inmersión isométrica holomorfa $\phi : M_s^n(c) \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ entre dos variedades de Kaehler de curvatura seccional holomorfa constante es constantemente isotrópica con $\lambda = (\tilde{c} - c)/2$. \diamond

Teorema 2.64 Si una variedad de Kaehler M_s^n ($n \geq 2$) admite una inmersión isotrópica holomorfa en una variedad de Kaehler $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ de curvatura seccional holomorfa constante, entonces se verifican:

- (1) M_s^n tiene curvatura seccional holomorfa constante $c \in \mathbb{R}$.
- (2) La inmersión es constantemente isotrópica con constante de isotropía dada por $\lambda = (\tilde{c} - c)/2$.

Demstración: Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión λ -isotrópica. Aplicando el Teorema 2.60 obtenemos que la curvatura seccional holomorfa \mathcal{H} de M_s^n satisface $\mathcal{H} = -2\lambda + \tilde{c}$. Como la dimensión compleja $n \geq 2$, el Teorema de Schur nos asegura que la función \mathcal{H} es constante, y el resultado se sigue claramente teniendo en cuenta la Observación anterior. \square

Una inmersión isométrica holomorfa $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{C}M_{s+\ell}^{n+d}(c)$ es *sustancial* si la imagen $\phi(M_s^n)$ no está contenida en ninguna subvariedad compleja propia y totalmente geodésica (degenerada o no) de $\mathbb{C}M_{s+\ell}^{n+d}(c)$. Recordemos que la noción de inmersión holomorfa sustancial es afín, es decir, sólo depende de la conexión de Levi-Civita del espacio ambiente.

Ejemplo 2.65 Embebimientos de Veronese indefinidos complejos.

Se demostró en [R1] que $\mathbb{C}P_s^n(c)$ admite una inmersión isométrica holomorfa sustancial en $\mathbb{C}P_S^N(\tilde{c})$ si y sólo si se verifican:

- (i) $\tilde{c} = kc$ para algún entero positivo k ,
- (ii) $N = \binom{n+k}{k} - 1$,
- (iii) $S = \sum_{j=0}^{[(k+1)/2]-1} \binom{s+2j}{2j+1} \binom{n-s+k-2j-1}{k-2j-1}$ si $s > 0$,

donde $[(k+1)/2]$ denota el mayor entero menor o igual que $(k+1)/2$, y $S = 0$ si $s = 0$. Por tanto, dado un entero positivo k , existe una inmersión isométrica holomorfa sustancial $\psi_{n,s,k} : \mathbb{C}P_s^n(c) \rightarrow \mathbb{C}P_{S(n,s,k)}^{N(n,k)}(kc)$ siendo

$$N(n, k) = \binom{n+k}{k} - 1$$

y

$$S(n, s, k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{[(k+1)/2]-1} \binom{s+2j}{2j+1} \binom{n-s+k-2j-1}{k-2j-1} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

La inmersión $\psi_{n,s,k}$ es constantemente isotrópica con constante de isotropía dada por $\lambda = c(k - 1)/2$. Una construcción explícita de este tipo de inmersiones podemos encontrarla en [R1], los denominados *k-ésimos embebimientos de Veronese de $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^n(c)$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}_{S(n,s,k)}^{N(n,k)}(kc)$* . †

Teorema 2.66 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_S^N(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica holomorfa y sustancial con dimensión compleja $n \geq 2$. Entonces, ϕ es localmente congruente a un *k-ésimo embebimiento de Veronese de $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^n(\tilde{c}/k)$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}_{S(n,s,k)}^{N(n,k)}(\tilde{c})$ para algún entero positivo k .**

Demostración: El resultado se sigue de las observaciones de [R1] ya que, por el Teorema 2.64, la variedad de Kaehler M_s^n tiene curvatura seccional holomorfa constante y la inmersión es sustancial. □

Observación 2.67 Es conocido [ANS] que, para una inmersión isométrica holomorfa $\phi : M_s^n(c) \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ entre dos variedades de Kaehler de curvatura seccional holomorfa constante, se verifican las siguientes propiedades:

- (a) $c = 0$ si y sólo si $\tilde{c} = 0$.
- (b) Si $\tilde{c} \neq 0$, entonces $\tilde{c} = kc$ y $n + d \geq \binom{n+k}{k} - 1$ para cierto entero positivo k . ◇

Como consecuencia directa del Teorema 2.64 y las anteriores propiedades tenemos:

Corolario 2.68 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica holomorfa con $n \geq 2$. Entonces, M_s^n tiene curvatura seccional holomorfa constante $c = 0$ y la inmersión ϕ es 0-isotrópica.*

Corolario 2.69 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isotrópica holomorfa con $n \geq 2$ y $\tilde{c} \neq 0$. Entonces, M_s^n tiene curvatura seccional holomorfa constante c y la inmersión ϕ es constantemente $c(k - 1)/2$ -isotrópica para cierto entero positivo k tal que $\tilde{c} = kc$ y $n + d \geq \binom{n+k}{k} - 1$.*

2.5.3. Inmersiones holomorfas y circunferencias

Recientemente K. Suizu [Sui] caracterizó, en el caso definido positivo, las inmersiones isométricas holomorfas totalmente geodésicas mediante el comportamiento extrínseco de las circunferencias de Kaehler de la subvariedad inmersa. Generalizando la noción equivalente Riemanniana, decimos que una circunferencia propia γ de curvatura $\kappa > 0$ de una variedad de Kaehler M_s^n es una *circunferencia de Kaehler* si

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \kappa J\gamma' \quad \text{o} \quad \nabla_{\gamma'}\gamma' = -\kappa J\gamma',$$

siendo ∇ la conexión de Levi-Civita y J la estructura casi-compleja de M_s^n . Observemos que dado un punto $p \in M_s^n$, un vector unitario $u \in T_p M_s^n$ y una constante positiva $\kappa > 0$, existen justamente dos circunferencias de Kaehler γ_1, γ_2 de curvatura κ con $\nabla_{\gamma'_1}\gamma'_1 = \kappa J\gamma'_1$, $\nabla_{\gamma'_2}\gamma'_2 = -\kappa J\gamma'_2$ satisfaciendo las condiciones iniciales $\gamma_i(0) = p$ y $\gamma'_i(0) = u$, para $i = 1, 2$.

Teorema 2.70 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+l}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa. Dado $\kappa > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es totalmente geodésica.
2. ϕ transforma cada circunferencia de Kaehler γ de curvatura κ de M_s^n en una circunferencia propia $\phi \circ \gamma$ del ambiente.

Demostración: Bastará comprobar la implicación $2 \Rightarrow 1$. Denotemos por simplicidad de la misma forma las curvas γ y $\phi \circ \gamma$. Sea u un vector unitario en un punto $p \in M_s^n$ y $\gamma = \gamma(t)$ la circunferencia de Kaehler con $\nabla_T T = \kappa J T$ y condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$, siendo T el campo de velocidades de γ . Entonces, teniendo en cuenta la Fórmula de Gauss (1.6), la Fórmula de Weingarten (1.7), el paralelismo de la estructura casi-compleja J y la J -invariancia de la segunda forma fundamental (2.53), resulta

$$\tilde{\nabla}_T T = \kappa J T + h(T, T), \quad (2.58)$$

$$\tilde{\nabla}_T^2 T = -\kappa^2 T - A_{h(T, T)} T + 3\kappa J h(T, T) + (\tilde{\nabla} h)(T, T, T). \quad (2.59)$$

Como por hipótesis, la curva transformada es una circunferencia del ambiente, tenemos

$$\tilde{\nabla}_T^2 T + g(\tilde{\nabla}_T T, \tilde{\nabla}_T T)g(T, T)T = 0. \quad (2.60)$$

Por tanto, de las expresiones (2.58)—(2.60), obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 = & -\kappa^2 T - A_{h(T, T)}T + 3\kappa Jh(T, T) + (\bar{\nabla}h)(T, T, T) \\ & + \kappa^2 g(T, T)^2 T + g(T, T)g(h(T, T), h(T, T))T. \end{aligned} \quad (2.61)$$

En particular, la parte normal del segundo término de (2.61) es nula y, evaluando en $t = 0$, resulta

$$3\kappa Jh(u, u) + (\bar{\nabla}h)(u, u, u) = 0. \quad (2.62)$$

De forma análoga, para la circunferencia de Kaehler ρ determinada por la ecuación $\nabla_{T_\rho} T_\rho = -\kappa J T_\rho$ y las condiciones iniciales $\rho(0) = p$, $\rho'(0) = u$, siendo T_ρ el campo tangente de velocidades de ρ , tenemos

$$-3\kappa Jh(u, u) + (\bar{\nabla}h)(u, u, u) = 0. \quad (2.63)$$

El resultado se sigue finalmente de (2.62) y (2.63). □

Cuando el espacio ambiente tiene curvatura seccional holomorfa constante deducimos de la ecuación de Codazzi (1.13) y la relación (2.52) que la derivada covariante $\bar{\nabla}h$ es un tensor simétrico. Por tanto, como en el Teorema 2.23 tenemos:

Teorema 2.71 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+l}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isométrica holomorfa.*

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$.
2. ϕ transforma cada geodésica unitaria γ de M_s^n en una circunferencia propia $\phi \circ \gamma$ del ambiente.

Como consecuencia del Corolario 2.28 y del Teorema 2.60 obtenemos la siguiente caracterización de inmersiones holomorfas indefinidas 0-isotrópicas mediante circunferencias:

Teorema 2.72 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica holomorfa con $0 < s < n$. Dado $\kappa > 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es 0-isotrópica.
2. $\mathcal{H}(v) = \tilde{\mathcal{H}}(v)$ para todo vector tangente no luminoso v en cada punto.
3. ϕ transforma cada circunferencia propia γ de curvatura κ de M_s^n en una curva $\beta = \phi \circ \gamma$ con curvatura constante $\tilde{\kappa} = \kappa$.

Capítulo 3

Rigidez de inmersiones isotrópicas

En el caso definido, T. Itoh y K. Ogiue [IO1] demostraron la rigidez de ciertas inmersiones isotrópicas entre espacios de curvatura constante. Sus resultados fueron extendidos por K. Sakamoto [Sak2] demostrando que toda variedad Riemanniana isotrópicamente inmersa en un espacio de curvatura constante con segunda forma fundamental paralela, es localmente isométrica a un espacio Euclídeo o a un espacio simétrico de rango uno y la inmersión es rígida. En el presente capítulo, se pretende estudiar la rigidez de las inmersiones pseudo-Riemannianas isotrópicas. Es importante observar que si bien algunos de los resultados que presentamos son de naturaleza definida, los procedimientos seguidos para sus pruebas son esencialmente nuevos. Esto nos permite obtener como consecuencia resultados de rigidez para inmersiones isotrópicas Riemannianas que extienden a otros conocidos más débiles [IO1, Sak2].

3.1. Ecuación Fundamental de Isotropía

Damos en el presente párrafo una nueva caracterización de la isotropía de una inmersión en términos de los tensores de curvatura de Riemann de la variedad inmersa y del ambiente. Esta caracterización resulta imprescindible para el estudio de la rigidez de las inmersiones isotrópicas que, por una parte, nos permite establecer una nueva interpretación extrínseca de la noción de inmersión isotrópica y, por otra parte, nos proporciona resultados de unicidad relacionados con la isotropía de una inmersión.

Teorema 3.1 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Sean R y \tilde{R} los tensores curvatura de Riemann de M_s^n y $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es isotrópica.
2. Existe una función diferenciable $\lambda \in C^\infty(M_s^n)$ tal que

$$\begin{aligned}
& 3g(h(X, Y), h(Z, W)) \\
&= \lambda\{g(X, Y)g(Z, W) + g(Y, Z)g(X, W) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\
&\quad + g(\tilde{R}(Y, Z)X, W) - g(R(Y, Z)X, W) \\
&\quad + g(\tilde{R}(X, Z)Y, W) - g(R(X, Z)Y, W) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, se verifica la condición 2 con λ constante si y sólo si ϕ es constantemente isotrópica.

Demostración: La implicación $2 \Rightarrow 1$ es clara. Veamos que $1 \Rightarrow 2$. De la ecuación de Gauss (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned}
& g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W)) \\
&= g(R(X, Y)Z, W) - g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Entonces, teniendo en cuenta la propiedad isotrópica de permutación circular (2.10), la igualdad (3.2) anterior y las propiedades elementales del tensor de curvatura de Riemann R y \tilde{R} , obtenemos fácilmente el resultado buscado. \square

Dicho de otra forma, la segunda forma fundamental h de una inmersión isotrópica está completamente determinada por la primera forma fundamental g . La expresión (3.1) anterior la denominamos *Ecuación Fundamental de Isotropía*.

3.2. Isotropía y simetría

Observemos que si una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ con ambiente localmente simétrico tiene segunda forma fundamental paralela entonces, por la ecuación de Gauss (1.9), M_s^n es localmente simétrica. Para inmersiones constantemente isotrópicas demostramos a continuación que, bajo ciertas condiciones, el recíproco también se cumple (obteniéndose de esta forma la extensión indefinida del resultado Riemanniano [BM] correspondiente):

Lema 3.2 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es localmente simétrica, ϕ tiene segunda forma fundamental paralela.*

Demostración: Como la segunda forma fundamental h es sobreyectiva, entonces en cada punto p el primer espacio normal satisface

$$Im(h) = \{h(u, v) : u, v \in T_p M_s^n\} = T_p^\perp M_s^n \cong \mathbb{R}_\ell^d.$$

Por otra parte, de la Ecuación Fundamental de Isotropía (3.1) y de la expresión (1.2), deducimos que

$$\begin{aligned} 3g(h(X, Y), h(Z, W)) &= -g(R(X, Z)Y, W) - g(R(Y, Z)X, W) \\ &\quad + (\lambda + \tilde{c})\{g(X, W)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, W)\} \\ &\quad + (\lambda - 2\tilde{c})g(X, Y)g(Z, W). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como λ es constante y M_s^n es localmente simétrica, derivando (3.3) con respecto a cualquier campo tangente T de M_s^n , resulta

$$g((\bar{\nabla}_T h)(X, Y), h(Z, W)) = -g(h(X, Y), (\bar{\nabla}_T h)(Z, W)). \quad (3.4)$$

Usando la expresión (3.4) y la ecuación de Codazzi (1.14) repetidamente, encontramos que

$$\begin{aligned} g((\bar{\nabla}_T h)(X, Y), h(Z, W)) &= -g(h(X, Y), (\bar{\nabla}_Z h)(T, W)) \\ &= g((\bar{\nabla}_X h)(Y, Z), h(T, W)) = -g(h(Z, Y), (\bar{\nabla}_W h)(X, T)) \\ &= g((\bar{\nabla}_Y h)(Z, W), h(X, T)) = -g(h(Z, W), (\bar{\nabla}_T h)(X, Y)). \end{aligned}$$

Así que $g((\bar{\nabla}_T h)(X, Y), h(Z, W)) = 0$, lo que implica, junto con la hipótesis de que el primer espacio normal genera a todo el espacio normal de la inmersión en cada punto, que la segunda forma fundamental es paralela. \square

Observación 3.3 El resultado anterior es igualmente cierto si la hipótesis de que el espacio ambiente sea de curvatura seccional constante la sustituimos por la hipótesis de que el espacio ambiente sea localmente simétrico y la derivada covariante $\bar{\nabla}h$ sea un tensor simétrico. \diamond

El siguiente resultado [B2] nos viene a decir que la noción de inmersión con segunda forma fundamental paralela es la versión natural en términos de inmersiones del concepto de variedad simétrica:

Lema 3.4 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isométrica. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. ϕ tiene segunda forma fundamental paralela.
2. Cada punto p de M_s^n admite un entorno abierto $U \subseteq M_s^n$ y una isometría σ_p del ambiente tal que $\sigma_p(\phi(p)) = \phi(p)$, $\sigma_p(\phi(U)) = \phi(U)$, $d\sigma_p(d\phi(v)) = -d\phi(v)$ para cada $v \in T_p M_s^n$ y $d\sigma_p(\xi) = \xi$ para cada $\xi \in T_{\phi(p)}^\perp M_s^n$.

Además, si se cumple la condición 1 o 2 con M_s^n completa, $\sigma_p(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$ en todo punto p de M_s^n .

3.3. Inmersiones isotrópicas extrínsecas

La noción de variedad pseudo-Riemanniana isotrópica intrínseca de J. A. Wolf motiva la siguiente definición natural dada en términos de inmersiones:

Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice *isotrópica extrínseca en un punto* $p \in M_s^n$ si para cada $u, v \in T_p M_s^n$ no nulos con $g(u, u) = g(v, v)$ existe una isometría A de $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que:

- (i) $A(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$,
- (ii) $A(\phi(p)) = \phi(p)$ y $d(A \circ \phi)(u) = d\phi(v)$.

Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice *isotrópica extrínseca* si es isotrópica extrínseca en todo punto. La noción de *subvariedad isotrópica extrínseca* es clara.

Asimismo, diremos que una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ es *fuertemente isotrópica extrínseca* si, para todo punto p de M_s^n , el subgrupo de isotropía $\text{Iso}_p(\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d})$ actúa transitivamente sobre el conjunto de referencias ortonormales en p , es decir, para cada par de bases ortonormales ordenadas $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ de $T_p M_s^n$ existe una isometría A de $\tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que:

- (i) $A(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$,
- (ii) $A(\phi(p)) = \phi(p)$ y $d(A \circ \phi)(e_i) = d\phi(e'_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Claramente, una inmersión fuertemente isotrópica extrínseca es isotrópica extrínseca.

Ejemplo 3.5 Las hipercuádricas del espacio pseudo-Euclídeo son subvariedades fuertemente isotrópicas extrínsecas [O'N2, Proposición 4.30]. Notemos que una hipercuádrica es una subvariedad constantemente isotrópica, cumpliendo la propiedad isotrópica intrínseca como variedad. †

Proposición 3.6 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica extrínseca. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (1) M_s^n es una variedad localmente isotrópica intrínseca y, en particular, localmente simétrica y localmente homogénea.
- (2) ϕ es una inmersión isotrópica (en el sentido de la definición (2.1)).

Demostración: Sea $p \in M_s^n$ y $u, v \in T_p M_s^n$ dos vectores tangentes no nulos con $g(u, u) = g(v, v)$. Por hipótesis, existe una isometría del ambiente A tal que $A(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$, $A(\phi(p)) = \phi(p)$ y $d(A \circ \phi)(u) = d\phi(v)$. Sea U un entorno abierto de p en M_s^n tal que la restricción $\phi|_U$ sea un embebimiento isométrico. Entonces, la aplicación $f = \phi^{-1} \circ A \circ \phi|_U$ es una isometría local en p tal que $f(p) = p$ y $df(u) = v$. Esto significa que la variedad M_s^n es localmente isotrópica intrínseca. En particular [Wo, Teorema 12.3.1], M_s^n es localmente simétrica y localmente homogénea, quedando probada la propiedad (1). La propiedad (2) se deduce fácilmente teniendo en cuenta que la segunda forma fundamental es un invariante extrínseco [O'N2, Lema 4.7] y aplicando el Lema 2.3. \square

Por la clasificación de J. A. Wolf [Wo] de las variedades localmente isotrópicas intrínsecas, deducimos de la Proposición anterior:

Corolario 3.7 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica extrínseca. Entonces, si el índice s es impar o $n-s$ es impar, ϕ es una inmersión isotrópica y M_s^n es localmente isométrica a \mathbb{R}_s^n , \mathbb{RP}_s^n o \mathbb{RH}_s^n . Si además M_s^n es completa, el recubridor universal de M_s^n es isométrico a \mathbb{R}_s^n , $\tilde{\mathbb{S}}_s^n$ o $\tilde{\mathbb{H}}_s^n$.*

Observación 3.8 Deducimos de la prueba de la Proposición 3.6 que, para un embebimiento isotrópico extrínseco $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}$, la subvariedad inmersa M_s^n es globalmente isotrópica intrínseca. Nótese que las variedades isotrópicas intrínsecas fueron clasificadas por J. A. Wolf [Wo, Teorema 12.4.5]. Por otra parte, el resultado anterior nos motiva el planteamiento de la siguiente conjetura:

Conjetura: *Toda inmersión isotrópica, con variedad inmersa isotrópica intrínseca, es isotrópica extrínseca.*

Bajo ciertas condiciones adicionales, damos respuesta afirmativa si el espacio ambiente es pseudo-Euclídeo. Nótese que toda variedad isotrópica intrínseca

es localmente simétrica. Además, para deducir el carácter isotrópico extrínseco de la inmersión, basta demostrar que toda isometría de la subvariedad inmersa proviene de una isometría del ambiente. \diamond

Apoyándonos en la Ecuación Fundamental de Isotropía (3.1) y en el Teorema 1.10 de Congruencia, obtenemos:

Teorema 3.9 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es localmente simétrica, h es paralela y toda isometría f de M_s^n proviene de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $A|_{M_s^n} = f$.*

Demostración: Fijemos una isometría $f : M_s^n \rightarrow M_s^n$, un punto $p \in M_s^n$ y una curva γ de M_s^n tal que $\gamma(0) = p$. Observemos que, por el Lema 3.2 anterior, la segunda forma fundamental h es paralela. Sea $\{E_1, \dots, E_n\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma)$ un campo local (entorno al punto p) de referencias ortonormal de campos paralelos a lo largo de γ . Como el primer espacio normal $Im(h)$ genera a todo el espacio normal en cada punto, podemos elegir (entorno al punto p) una base $\{\xi_1, \dots, \xi_d\} \subseteq \mathfrak{X}^\perp(\gamma)$ formada por campos normales a lo largo de γ de la forma:

$$\xi_\alpha = h(E_{i_\alpha}, E_{j_\alpha}), \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Cada campo ξ_α es paralelo ya que de la ecuación (1.11) se sigue que

$$D_T \xi_\alpha = D_T(h(E_{i_\alpha}, E_{j_\alpha})) = h(\nabla_T E_{i_\alpha}, E_{j_\alpha}) + h(E_{i_\alpha}, \nabla_T E_{j_\alpha}) = 0,$$

donde T denota el campo tangente de velocidades de la curva γ . Consideremos los campos normales a lo largo de $f \circ \gamma$:

$$\eta_\alpha = h(f_* E_{i_\alpha}, f_* E_{j_\alpha}), \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Como f es una isometría, conserva el paralelismo y, de forma similar al razonamiento anterior, los campos η_α son paralelos para cada $\alpha = 1, \dots, d$. Por

otra parte, de la Ecuación Fundamental de Isotropía (3.1) se sigue que

$$\begin{aligned} g(\eta_\alpha, \eta_\alpha) &= g(h(f_*E_{i_\alpha}, f_*E_{j_\alpha}), h(f_*E_{i_\alpha}, f_*E_{j_\alpha})) \\ &= g(h(E_{i_\alpha}, E_{j_\alpha}), h(E_{i_\alpha}, E_{j_\alpha})) \\ &= g(\xi_\alpha, \xi_\alpha), \end{aligned}$$

porque la subvariedad es constantemente isotrópica y la curvatura es invariante por isometrías. Por tanto, para cada $t \in \text{Dom}(\gamma)$, obtenemos la isometría lineal

$$F_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)}^\perp M_s^n \longrightarrow T_{f(\gamma(t))}^\perp M_s^n, \quad \xi_\alpha \longmapsto \eta_\alpha.$$

Por construcción, se satisface la igualdad $F_{\gamma(t)} \circ P_\gamma^\perp = P_{f \circ \gamma}^\perp \circ F_p$ (donde P^\perp denota el transporte paralelo normal). Además, se conserva la segunda forma fundamental, esto es,

$$F_{\gamma(t)}(h(v, w)) = h(df(v), df(w)) \quad \text{para todo } v, w \in T_{\gamma(t)} M_s^n.$$

En efecto, sean los campos paralelos $\xi_{ij} = h(E_i, E_j)$ y $\eta_{ij} = h(f_*E_i, f_*E_j)$ para cada $i, j = 1, \dots, n$. Entonces, existen dos grupos escalares $a_1^{ij}, \dots, a_d^{ij}$, $b_1^{ij}, \dots, b_d^{ij} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= a_1^{ij} \xi_1 + \dots + a_d^{ij} \xi_d, \\ \eta_{ij} &= b_1^{ij} \eta_1 + \dots + b_d^{ij} \eta_d, \end{aligned}$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$, que están unívocamente determinados, en virtud de (3.1), por el mismo sistema de ecuaciones lineal. Entonces, el Teorema 1.10 de Congruencia nos asegura finalmente la existencia de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A|_{M_s^n} = f$. Observemos que, por construcción [O'N2], el movimiento rígido A verifica $A_{*p}|_{T_p^\perp M_s^n} = F_p$. \square

Teorema 3.10 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es isotrópica intrínseca, h es paralela y ϕ es isotrópica extrínseca.*

Demostración: Sea $p \in M_s^n$ y $u, v \in T_p M_s^n$ dos vectores tangentes no nulos con $g(u, u) = g(v, v)$. Por hipótesis existe una isometría $f : M_s^n \rightarrow M_s^n$ tal que $f(p) = p$ y $df(u) = v$. Sea $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento por abiertos de M_s^n tal que la restricción $\phi|_{U_\alpha}$ sea un embebimiento. Entonces, como en el Teorema 3.9, la isometría $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U_\alpha) \rightarrow \phi(f(U_\alpha))$ proviene un movimiento rígido B^α de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $B^\alpha|_{\phi(U_\alpha)} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Ahora, en cada intersección no vacía de dos elementos del recubrimiento $\{U_\alpha\}$ los correspondientes movimientos rígidos $\{B^\alpha\}$ coinciden, porque en un punto coinciden y tienen la misma diferencial. Entonces, de la conexión de M_s^n , tenemos definido un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$, $A(\phi(p)) = \phi(p)$ y $d(A \circ \phi)(u) = d\phi(v)$. Esto demuestra el resultado. \square

Observación 3.11 En el siguiente párrafo obtenemos este mismo resultado como consecuencia de la rigidez de las inmersiones isotrópicas. \diamond

Teorema 3.12 Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es fuertemente isotrópica intrínseca, h es paralela y ϕ es fuertemente isotrópica extrínseca.

Demostración: Similar al Teorema anterior: \square

Ejemplo 3.13 Las inmersiones de Veronese indefinidas son inmersiones fuertemente isotrópicas extrínsecas, ya que este tipo de inmersiones está en las condiciones del Teorema 3.12. \dagger

Corolario 3.14 Sea $\phi : M_s^n(c) \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, h es paralela y toda isometría f de $M_s^n(c)$ proviene de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $A \circ \phi = \phi \circ f$.

Demostración: Basta observar que $M_s^n(c)$ es localmente simétrica y aplicar el Teorema 3.9. \square

Observación 3.15 En las mismas condiciones del Corolario 3.14, si exigimos que $M_s^n(c)$ sea completa, resulta que $M_s^n(c)$ es simétrica (Lema 3.4). Entonces, en virtud de los Teoremas 1.8 y 1.9, el espacio $M_s^n(c)$ es isométrico a:

- (1) Un recubridor pseudo-Riemanniano del espacio $\mathbb{RP}_s^n = \mathbb{S}_s^n / \{\pm 1\}$ si $c > 0$.
- (2) Un recubridor pseudo-Riemanniano de $\mathbb{RH}_s^n = \mathbb{H}_s^n / \{\pm 1\}$ si $c < 0$.
- (3) Un cociente \mathbb{R}_s^n / Γ de \mathbb{R}_s^n por un subgrupo discreto Γ de traslaciones si $c = 0$.

En los casos (1) y (2) anteriores la variedad $M_s^n(c)$ es fuertemente isotrópica intrínseca. En el caso (3) se da la isotropía intrínseca si y sólo si M_s^n es isométrica a \mathbb{R}_s^n . \diamond

Cuando la segunda forma fundamental es paralela:

Corolario 3.16 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental h paralela. Supongamos que, en un punto, el primer espacio normal $Im(h)$ es un subespacio no degenerado de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Entonces, toda isometría f de M_s^n proviene de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $A \circ \phi = \phi \circ f$.*

Demostración: Ya que h es paralela, el primer espacio normal $Im(h)$ tiene dimensión k e índice ν constantes. Luego, por hipótesis, $Im(h)$ es isométrico a \mathbb{R}_ν^k en cada punto. Entonces, aplicando el Teorema 1.16 de reducción de la codimensión, la imagen $\phi(M_s^n)$ está contenida en el espacio $\mathbb{R}_{s+\nu}^{n+k}$. Obtenemos de esta forma inmersión isotrópica $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\nu}^{n+k}$ con segunda forma fundamental sobreyectiva. El resultado se sigue del Teorema 3.9. \square

3.4. Rigidez de inmersiones isotrópicas con segunda forma fundamental sobreyectiva

Sea \mathcal{C} una clase de inmersiones isométricas, es decir, un conjunto de inmersiones isométricas definidas entre un par de variedades pseudo-Riemannianas fijas y cumpliendo cierta propiedad común. La clase \mathcal{C} se dice *rígida* si dos inmersiones cualesquiera de la clase $\phi, \phi' \in \mathcal{C}$ son *congruentes*, es decir, si existe una isometría A de la variedad ambiente asociada tal que $A \circ \phi = \phi'$.

En este párrafo estudiamos la rigidez de la clase \mathcal{C} de inmersiones isotrópicas con segunda forma fundamental sobreyectiva, demostrando la rigidez de \mathcal{C} cuando el ambiente es pseudo-Euclídeo. Resulta imprescindible para la prueba de este resultado la Ecuación Fundamental de Isotropía (3.1) y la versión indefinida del Teorema Fundamental de Unicidad, que viene dado en términos de la teoría de fibrados vectoriales.

3.4.1. Fibrados vectoriales

Vamos a recordar algunos conceptos y resultados básicos sobre fibrados vectoriales. Para ello tomaremos como referencia básica [Sp, Vol.1].

Sea E y M dos variedades diferenciables, y sea $\pi : E \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Recordemos que $\pi : E \rightarrow M$ es un *fibrado vectorial diferenciable de rango k* , o simplemente un *fibrado vectorial*, si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Cada preimagen $E_p := \pi^{-1}(p)$ (llamada *fibra de π en p*) es un espacio vectorial real de dimensión k .
- (ii) Para cada punto $p \in M$, existe un entorno abierto U de p en M , y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tal que la restricción a $\pi^{-1}(q)$ es un isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ para cada $q \in U$.

Un ejemplo simple de fibrado vectorial es justamente $M \times \mathbb{R}^n$ con la proyección $\pi_1 : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ del primer factor, y la obvia estructura de espacio vectorial en cada fibra. Este fibrado se denomina *fibrado vectorial trivial n -plano* sobre M . El fibrado tangente $T\mathbb{R}^n$ es justamente el fibrado vectorial trivial n -plano de \mathbb{R}^n .

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Una *sección local* de π es una aplicación diferenciable $\xi : U \rightarrow E$ definida sobre un abierto $U \subseteq M$ y tal que $\pi \circ \xi = Id_U$. Una *sección (global)* de π es una sección local con $U = M$. Se comprueba que el conjunto de secciones de π , $\Gamma(E)$, no es vacío.

Observemos que el fibrado tangente $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ de una variedad diferenciable M y el fibrado normal $T^\perp M = \bigcup_{p \in M} T_p^\perp M$ de una inmersión isométrica $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ son fibrados vectoriales con secciones $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}^\perp(M)$, respectivamente.

Dados dos fibrados vectoriales $\pi_1 : E^1 \rightarrow M_1$ y $\pi_2 : E^2 \rightarrow M_2$, y un difeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, se dice que una aplicación diferenciable $\tilde{\phi} : E^1 \rightarrow E^2$ es un *isomorfismo fibrado a lo largo de ϕ* si, para cada $p \in M_1$, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $\pi_2 \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi_1$ y $\tilde{\phi}(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(\phi(p))$.
- (ii) La restricción $\tilde{\phi}_p : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(\phi(p))$ de $\tilde{\phi}$ a la fibra $\pi_1^{-1}(p)$ es un isomorfismo vectorial.

Se deduce de la definición anterior que $\tilde{\phi}$ es un difeomorfismo. Además, para cada sección ξ de π_1 obtenemos una sección $\tilde{\phi}(\xi)$ de π_2 definida por $\tilde{\phi}(\xi) = \tilde{\phi} \circ \xi \circ \phi^{-1}$.

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Una *conexión lineal* es una aplicación \mathbb{R} -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E); \quad (X, \xi) \mapsto \nabla_X \xi$$

verificando las propiedades:

- (i) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$,
- (ii) $\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi$,

para cada $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \Gamma(E)$.

De la propiedad (i) anterior se sigue que la aplicación $X \mapsto \nabla_X\xi$ es $C^\infty(M)$ -lineal y, consecuentemente, el valor de $\nabla_X\xi$ en $p \in M$ depende sólo del valor de X en p . Es fácil verificar que el operador $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es un operador local en el sentido de que el valor de $\nabla_X\xi$ en $p \in M$ depende sólo de los valores de ξ en un entorno de p .

El *tensor de curvatura* de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ con conexión lineal ∇ es la aplicación $C^\infty(M)$ -trilineal

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

definida por

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X, Y]}\xi.$$

Una *métrica pseudo-Riemanniana* g sobre un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es una aplicación bilineal, simétrica y no degenerada

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$$

sobre el álgebra $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables sobre M . Un fibrado vectorial dotado de una métrica pseudo-Riemanniana se llama *fibrado vectorial pseudo-Riemanniano*.

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial pseudo-Riemanniano con métrica g . Una conexión lineal ∇ se dice *compatible* con g si

$$Xg(\xi, \eta) = g(\nabla_X\xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X\eta)$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \eta \in \Gamma(E)$.

3.4.2. Teorema Fundamental de Unicidad

Estamos en las condiciones idóneas de enunciar y demostrar el Teorema Fundamental de Unicidad:

Lema 3.17 (Teorema Fundamental de Unicidad) *Consideremos dos inmersiones isométricas $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Sean E, h y D (resp., E', h' y D') el fibrado normal, la segunda forma fundamental y la conexión normal de ϕ (resp., ϕ'). Supongamos que existe una isometría $f : M_s^n \rightarrow M_s^n$ que puede recubrirse por un isomorfismo fibrado $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ de forma que \tilde{f} preserva las métricas fibradas, las conexiones normales y las segundas formas fundamentales, es decir, se verifica*

$$\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad \text{para todo } \xi, \eta \in E, \quad (3.5)$$

$$\tilde{f}(D_X \xi) = D'_{f_* X}(\tilde{f}(\xi)) \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M_s^n), \xi \in \Gamma(E), \quad (3.6)$$

$$\tilde{f}(h(X, Y)) = h'(f_* X, f_* Y) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n). \quad (3.7)$$

Entonces, existe un único movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi' \circ f$ y $A_*|_E = \tilde{f}$

Demostración: Observemos previamente que si el requerido movimiento rígido A existe, es único (ya que, en este caso, conocemos completamente la diferencial de A y su imagen en un punto [O'N2, Proposición 3.62]). Por tanto, será suficiente probar la existencia de A localmente y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las inmersiones son embebimientos y trabajar con subvariedades. Ahora, de las hipótesis (3.5)—(3.7), basta aplicar el Teorema 1.10 de Congruencia para deducir la existencia de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi' \circ f$ y $A_*|_E = \tilde{f}$, como mostramos a continuación: Denotemos por M_1 la subvariedad $\phi(M_s^n)$ y por M_2 la subvariedad $\phi'(M_s^n)$. Entonces, usando las usuales identificaciones, tenemos definida una isometría $f : M_1 \rightarrow M_2$. Sea $p \in M_1$ un punto fijo y γ una curva pasando por p de M_1 . Denotemos por F_p a la aplicación $F_p = \tilde{f}_p : T_p^\perp M_1 \rightarrow T_{f(p)}^\perp M_2$. Como

por (3.5), \tilde{f} preserva las métricas fibradas, F_p es un isomorfismo lineal. Sea $F_{\gamma(t)} = P_{f \circ \gamma}^\perp \circ F_p \circ (P_\gamma^\perp)^{-1} : T_{\gamma(t)}^\perp M_1 \rightarrow T_{f(\gamma(t))}^\perp M_2$ la isometría lineal inducida por los transportes paralelos normales a lo largo de γ . De la hipótesis (3.6) se tiene que \tilde{f} preserva las conexiones normales y, por tanto, el paralelismo normal. Esto significa que

$$\tilde{f}_{\gamma(t)} \circ P_\gamma^\perp = P_{f \circ \gamma}^\perp \circ F_p \quad \text{para todo } t \in \text{Dom}(\gamma),$$

y, consecuentemente, $F = \tilde{f}$ a lo largo de γ . Además, como por la hipótesis (3.7) se preservan las segundas formas fundamentales, resulta que

$$F_{\gamma(t)}(h(v, w)) = h'(df(v), df(w))$$

para todo $v, w \in T_{\gamma(t)} M_1$. El Teorema 1.10 de Congruencia nos asegura entonces la existencia de una isometría A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A|_{M_1} = f$. Lo que significa, por las usuales identificaciones anteriormente establecidas, que $A \circ \phi = \phi' \circ f$. Para terminar, basta observar que de la prueba del Teorema de Congruencia [O'N2, Teorema 4.41] se desprende que $A_{*p}|_{T_p^\perp M_1} = F_p = \tilde{f}_p$, por lo que

$$A_{*\gamma(t)}|_{T_{\gamma(t)}^\perp M_1} = P_{f \circ \gamma}^\perp \circ A_{*p} \circ (P_\gamma^\perp)^{-1} = \tilde{f}_{\gamma(t)}.$$

Esto demuestra, dada la arbitrariedad de la curva γ inicialmente elegida, que $A_*|_E = \tilde{f}$, quedando el resultado demostrado. \square

Observación 3.18 La demostración del Teorema Fundamental de Unicidad que hemos expuesto está basada en el Teorema de Congruencia de B. O'Neill. También se podría haber deducido este resultado de unicidad usando la versión indefinida del Teorema Fundamental de Existencia, cuya demostración puede basarse en la prueba del resultado Riemanniano correspondiente dado por H. Jacobowitz [J] (véase también [D2]). Otras demostraciones de la versión definida positiva del mismo resultado pueden encontrarse en [Sp, Sz]. \diamond

3.4.3. Resultados

Para una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n es bien conocido el “*Teorema Fundamental de la Geometría pseudo-Riemanniana*”, que nos determina la existencia y unicidad de una conexión sobre el fibrado tangente compatible con la métrica y libre de torsión. El siguiente Lema nos proporciona, bajo ciertas condiciones, una caracterización análoga de la conexión normal D asociada a una inmersión isométrica pseudo-Riemanniana. Su demostración es similar al caso definido [N].

Lema 3.19 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+\ell}^{n+d}(\tilde{c})$ una inmersión isométrica con segunda forma fundamental sobrejectiva. Entonces, la conexión normal D es la única conexión en el fibrado normal de ϕ tal que:*

- (1) *D es compatible con el tensor métrico g , es decir, para cada $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ y cada $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ se verifica*

$$X(g(\xi, \eta)) = g(D_X \xi, \eta) + g(\xi, D_X \eta).$$

- (2) *D satisface la ecuación de Codazzi, es decir, para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ se verifica*

$$(\bar{\nabla} h)(Z, Y, X) = (\bar{\nabla} h)(Z, X, Y).$$

Demostración: Sea D' una conexión en $T^\perp M_s^n$ compatible con la métrica y satisfaciendo la ecuación de Codazzi. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ definimos la aplicación $T(X) : \mathfrak{X}^\perp(M_s^n) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$ por

$$T(X)\xi = D_X \xi - D'_X \xi.$$

Claramente $T(X)$ es lineal sobre el anillo $C^\infty(M_s^n)$. Además, $T(X)$ es anti-simétrico porque, para cada $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M_s^n)$, se cumple

$$\begin{aligned} g(T(X)\xi, \eta) &= g(D_X \xi - D'_X \xi, \eta) \\ &= X(g(\xi, \eta)) - g(\xi, D_X \eta) - X(g(\xi, \eta)) + g(\xi, D'_X \eta) \\ &= -g(\xi, T(X)\eta). \end{aligned}$$

Como D y D' satisfacen la ecuación de Codazzi, tenemos que

$$T(X)h(Y, Z) = T(Y)h(X, Z) \quad (3.8)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Por tanto, para cada $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathfrak{X}(M_s^n)$, tenemos las igualdades

$$\left. \begin{aligned} g(T(X_1)h(X_2, X_3), h(X_4, X_5)) + g(T(X_1)h(X_4, X_5), h(X_2, X_3)) &= 0, \\ g(T(X_2)h(X_3, X_4), h(X_1, X_5)) + g(T(X_2)h(X_1, X_5), h(X_3, X_4)) &= 0, \\ g(T(X_3)h(X_1, X_2), h(X_4, X_5)) + g(T(X_3)h(X_4, X_5), h(X_1, X_2)) &= 0, \\ -g(T(X_4)h(X_5, X_1), h(X_2, X_3)) - g(T(X_4)h(X_2, X_3), h(X_5, X_1)) &= 0, \\ -g(T(X_5)h(X_1, X_2), h(X_3, X_4)) - g(T(X_5)h(X_3, X_4), h(X_1, X_2)) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

que siendo sumadas y teniendo en cuenta (3.8) nos da

$$2g(T(X_1)h(X_2, X_3), h(X_4, X_5)) = 0.$$

De donde resulta que $T = 0$ por ser $Im(h)$ todo el espacio normal en cada punto. \square

A partir de los Lemas 3.17 y 3.19 anteriores se demuestra, extendiendo el resultado análogo Riemanniano [Sp, Proposición 7.66, Vol. 4], lo siguiente:

Lema 3.20 Sean $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ dos inmersiones isométricas con respectivas segundas formas fundamentales h y h' sobreyectivas. Sea f una isometría de M_s^n tal que

$$\langle h(X, Y), h(Z, W) \rangle = \langle h'(f_*X, f_*Y), h'(f_*Z, f_*W) \rangle \circ f$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Entonces, existe un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi' \circ f$.

Demostración: Como f es una isometría entonces

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y \quad (3.9)$$

para todo X, Y campos tangentes a M_s^n . Sea p un punto de M_s^n , $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $T_p M_s^n$ y tomemos los vectores tangentes $v'_i = df(v_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Por hipótesis, tenemos

$$\langle h(v_i, v_j), h(v_k, v_\ell) \rangle = \langle h'(v'_i, v'_j), h'(v'_k, v'_\ell) \rangle.$$

Como las segundas formas fundamentales son sobreyectivas, entonces podemos considerar la isometría lineal definida por

$$h(v_i, v_j) \longmapsto h'(v'_i, v'_j)$$

entre los espacios normales asociados a las inmersiones ϕ y ϕ' en el punto p y $f(p)$, respectivamente. Repitiendo esta construcción para todo punto, obtenemos un isomorfismo fibrado $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ entre los fibrados normales E y E' de ϕ y ϕ' , respectivamente. Claramente \tilde{f} recubre a f conservando las métricas fibradas y las segundas formas fundamentales:

$$\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad (3.10)$$

$$\tilde{f}(h(X, Y)) = h'(f_*X, f_*Y), \quad (3.11)$$

para cada $\xi, \eta \in E$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. Veamos que \tilde{f} también conserva las conexiones normales D de ϕ y D' de ϕ' , esto es, para cada campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ y cada campo normal ξ a lo largo de ϕ se satisface la igualdad

$$\tilde{f}(D_X \xi) = D'_{f_*X}(\tilde{f}(\xi)). \quad (3.12)$$

Como cada campo normal a ϕ' es de la forma $\tilde{f}(\xi)$ y cada campo tangente a M_s^n es de la forma f_*X , podemos definir una conexión δ sobre E'

$$\delta_{f_*X}(\tilde{f}(\xi)) := \tilde{f}(D_X \xi).$$

Ahora, la conexión D es compatible con la métrica y satisface la ecuación de Codazzi; y por las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11), δ también es compatible con la métrica y satisface la ecuación de Codazzi. Del Lema 3.19 resulta que $\delta = D'$.

Esto demuestra (3.12). Finalmente basta aplicar el Teorema Fundamental de Unicidad (Lema 3.17) para concluir el resultado buscado. \square

Estamos en las condiciones idóneas para probar los dos siguientes resultados de rigidez de inmersiones isotrópicas pseudo-Riemannianas.

Teorema 3.21 *Dos inmersiones isotrópicas $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con segundas formas fundamentales sobreyectivas y la misma función λ de isotropía son congruentes, es decir, existe un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi'$.*

Demostración: Por la Ecuación Fundamental de Isotropía (3.1) se satisface la relación

$$\langle h(X, Y), h(Z, W) \rangle = \langle h'(X, Y), h'(Z, W) \rangle,$$

donde h y h' denotan la segunda forma fundamental de ϕ y ϕ' , respectivamente.

El resultado se sigue del Lema 3.20 anterior. \square

Teorema 3.22 *Sean $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ dos inmersiones constantemente isotrópicas con segundas formas fundamentales sobreyectivas y la misma constante λ de isotropía. Entonces, toda isometría $f : M_s^n \rightarrow M_s^n$ proviene de un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, es decir, $A \circ \phi = \phi' \circ f$.*

Demostración: Basta aplicar el Lema 3.20 ya que, por la ecuación (3.1), se satisface la relación

$$\langle h(X, Y), h(Z, W) \rangle = \langle h'(f_*X, f_*Y), h'(f_*Z, f_*W) \rangle \circ f$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$. \square

Corolario 3.23 *Sean $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión constantemente isotrópica con segunda forma fundamental h sobreyectiva. Entonces, si M_s^n es isotrópica intrínseca, h es paralela y ϕ es isotrópica extrínseca.*

Demostración: El paralelismo de la segunda forma fundamental h se sigue del Lema 3.2. Sea $p \in M_s^n$ y $u, v \in T_p M_s^n$ no nulos con $g(u, u) = g(v, v)$. Entonces, como M_s^n es isotrópica intrínseca, existe una isometría f de M_s^n tal que $f(p) = p$ y $df(u) = v$. Ahora, aplicando el Teorema 3.22, existe un movimiento rígido A de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tal que $A \circ \phi = \phi \circ f$. Es claro que el movimiento rígido A satisface $A(\phi(M_s^n)) = \phi(M_s^n)$, $A(\phi(p)) = \phi(p)$ y $d(A \circ \phi)(u) = d\phi(v)$, como queríamos probar. \square

Corolario 3.24 Sean $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ dos inmersiones λ -isotrópicas con segundas formas fundamentales paralelas. Supongamos que existe un punto tal que el primer espacio normal $Im(h)$ de ϕ e $Im(h')$ de ϕ' son subespacios no degenerados de la misma dimensión k e índice ν . Entonces, las inmersiones ϕ y ϕ' son congruentes.

Demostración: Como las inmersiones tienen segundas formas fundamentales paralelas, del Lema 1.17 resulta que el primer espacio normal $Im(h)$ de ϕ e $Im(h')$ de ϕ' son isométricos a un mismo espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^k en todo punto. Reduciendo la codimensión (Teorema 1.16) obtenemos dos inmersiones $\phi, \phi' : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\nu}^{n+k}$ λ -isotrópicas con segundas formas fundamentales sobreyectivas, y el resultado se sigue del Teorema 3.21. \square

Ya que es conocido un resultado Fundamental de Unicidad [Ch2, p. 49] para inmersiones definidas positivas con espacio ambiente un modelo Riemanniano, deducimos (siguiendo un procedimiento análogo al establecido a lo largo de este párrafo):

Teorema 3.25 Sean $\phi, \phi' : M^n \rightarrow \mathbb{M}^{n+d}(c)$ dos inmersiones isotrópicas con segundas formas fundamentales sobreyectivas y la misma función λ de isotropía. Entonces, las inmersiones ϕ y ϕ' son congruentes, es decir, existe un movimiento rígido A de $\mathbb{M}^{n+d}(c)$ tal que $A \circ \phi = \phi'$.

Corolario 3.26 *Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{M}^{n+d}(c)$ una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela. Entonces, ϕ es rígida.*

Observación 3.27 Obtenemos la rigidez de las inmersiones isotrópicas Riemannianas con segunda forma fundamental paralela de una manera diferente a la establecida por K. Sakamoto [Sak2]. Localmente, este tipo de inmersiones está completamente determinado salvo congruencias. \diamond

3.5. Rigidez de inmersiones 0-isotrópicas

En el Teorema 3.21 de rigidez de inmersiones isotrópicas es necesario que la segunda forma fundamental de las inmersiones involucradas sean sobreyectivas. Así, este resultado de rigidez no es aplicable a las expansiones (Ejemplos 2.7 y 2.8) ya que, en general, este tipo de inmersiones no tienen segunda forma fundamental sobreyectiva. No obstante, podemos deducir la rigidez de cierto tipo de inmersiones 0-isotrópicas usando para ello una técnica diferente a la desarrollada en el párrafo anterior.

Proposición 3.28 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión λ -isotrópica. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. ϕ es 0-isotrópica y M_s^n es llana.
2. En los puntos no totalmente geodésicos, el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos.
3. $\langle h(X, Y), h(Z, W) \rangle = 0$ para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$.

Además, si $n = 2$, las condiciones 1, 2 y 3 anteriores equivalen a que $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = \lambda = 0$.

Demostración: La equivalencia $1 \Leftrightarrow 3$ se sigue directamente del Corolario 2.37. Por otra parte, de la Ecuación de Gauss (1.9) y la condición de isotropía

(2.10) de permutación circular resulta

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \langle h(X, X), h(Y, Y) \rangle - \langle h(X, Y), h(X, Y) \rangle \\ &= -3\langle h(X, Y), h(X, Y) \rangle,\end{aligned}$$

de donde se sigue claramente la equivalencia $1 \Leftrightarrow 2$. Supongamos que $n = 2$ y $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = \lambda = 0$. Del Corolario 2.33 resulta

$$\begin{aligned}\langle h(X, Y), h(Z, W) \rangle &= (\lambda - \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle) \{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \} \\ &\quad + (2\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle - \lambda) \langle X, Y \rangle \langle Z, W \rangle\end{aligned}$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_s^n)$, y el resultado se sigue sin dificultad. \square

En [M] podemos encontrarnos el siguiente:

Lema 3.29 *Sea M_s^n una variedad pseudo-Riemanniana y $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell, \nu}^{n+d+\nu}$ una inmersión isométrica. Entonces, si $\pi : \mathbb{R}_{s+\ell, \nu}^{n+d+\nu} \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ es la proyección de las primeras $n + d$ coordenadas, $\pi \circ \phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ es una inmersión isométrica.*

Demostración: Sea $p \in M_s^n$ y U un entorno coordenado de p con coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Entonces, si g es el tensor métrico de M_s^n , tenemos que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \phi_* \frac{\partial}{\partial x_i}, \phi_* \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle (\pi \circ \phi)_* \frac{\partial}{\partial x_i}, (\pi \circ \phi)_* \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

para cada $i, j = 1, \dots, n + d$. \square

Teorema 3.30 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela. Supongamos que M_s^n es completa y, en un punto, el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos. Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_s^n (Ejemplos 2.7 y 2.8).*

Demostración: Como la inmersión ϕ tienen segunda forma fundamental paralela, del Lema 1.17, el primer espacio normal $Im(h)$ tienen dimensión constante k en todo punto. Por el Teorema 1.16 de reducción de la codimensión, la imagen $\phi(M_s^n)$ está contenida en un $(n+k)$ -plano de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ isométrico al espacio $\mathbb{R}_{s,k}^{n+k}$. Sea $\pi : \mathbb{R}_{s,k}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}_s^n$ la proyección de las primeras n coordenadas. Entonces, $\pi(\phi(M_s^n))$ es un subconjunto abierto del espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n por el Lema 3.29. En consecuencia, por completitud, existen k funciones diferenciables $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que ϕ (vista en $\mathbb{R}_{s,k}^{n+k}$) es de la forma $(x, f_1(x), \dots, f_k(x))$. Finalmente, es suficiente observar que la aplicación $\mathbb{R}_{s,k}^{n+k} \hookrightarrow \mathbb{R}_{s+k}^{n+2k}$ dada por $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) \mapsto (y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k})$ es un embebimiento isométrico. \square

Teniendo en cuenta Proposición 3.28, se tiene como consecuencia directa del Teorema 3.30 anterior:

Teorema 3.31 *Sea $\phi : M_s^2 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^m$ una inmersión 0-isotrópica con segunda forma fundamental paralela. Supongamos que M_s^2 es completa y el campo curvatura media satisface $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$. Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_s^2 (Ejemplos 2.7 y 2.8).*

Observación 3.32 De forma similar a la prueba del Teorema 3.30, una inmersión isotrópica $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ es congruente a una expansión cuando tenemos la siguiente situación general:

- (1) M_s^n es completa.
- (2) En los puntos no totalmente geodésicos, el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos.
- (3) En los puntos no totalmente geodésicos, $Im(h)$ tiene dimensión constante.
- (4) $Im(h)$ es D -paralelo.

Nótese que cuando $Im(h)$ tienen dimensión constante [D1], en los casos $s = 0$ o $s = 1$ la hipótesis (4) equivale a que $DR^\perp|_{Im(h)^\perp} = 0$ y $DH \in Im(h)$. \diamond

3.6. Inmersiones isotrópicas de codimensión dos

Lema 3.33 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \tilde{M}_{s+1}^{n+2}$ una inmersión 0-isotrópica. Entonces, en cada punto no totalmente geodésico, el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido únicamente por vectores luminosos y tiene dimensión $\dim(Im(h)) = 1$.*

Demostración: Como la inmersión tiene codimensión $d = 2$ y coíndice $\ell = 1$, cada espacio normal es isométrico al espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 . Sea p un punto no totalmente geodésico y tomemos un vector tangente unitario e_1 en p tal que $h(e_1, e_1) \neq 0$. Como $g(h(e_1, e_1), h(e_1, e_1)) = 0$, entonces $h(e_1, e_1)$ es un vector luminoso. Tomando e_2, \dots, e_n vectores tangentes en p tales que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal, de las Fórmulas de O'Neill (2.11), (2.12) y (2.13) se sigue sin dificultad que $g(h(e_i, e_j), h(e_1, e_1)) = 0$. Entonces, como $h(e_1, e_1)$ es un vector luminoso y cada espacio normal es un plano de Lorentz, se sigue de [O'N2] que $h(e_i, e_j)$ y $h(e_1, e_1)$ son linealmente dependientes, como queríamos probar. \square

Teorema 3.34 *Sea ϕ una inmersión 0-isotrópica de una variedad completa M_s^n en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} . Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$ (Ejemplo 2.7).*

Demostración: Ya que cualquier vector ortogonal a uno luminoso en un plano de Lorentz son proporcionales, de la Proposición 3.28 y del Lema 3.33 obtenemos que para cada vector unitario tangente $u \in T_p M_s^n$ los vectores $(\bar{\nabla}h)(u^3) \in Im(h)$ y $h(u, u)$ son linealmente dependientes. Esto junto a la ecuación de Codazzi (1.14) puede ser usado para probar que $(\bar{\nabla}h)(u, v, w) \in Im(h)$ para cada u, v, w vectores tangentes. Así, la codimensión puede ser reducida

de forma que $\phi(M_s^n)$ este contenida en un hiperplano degenerado de \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} (isométrico a $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$). El resultado se sigue finalmente de forma similar a la prueba del Teorema 3.30. \square

Lema 3.35 *Sea M^n una variedad Riemanniana isotrópicamente inmersa en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+2} . Entonces, si la inmersión no es totalmente umbilical, es 0-isotrópica.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{p \in M^n : h(u, v) \neq 0 \text{ para ciertos } u, v \in T_p M^n \text{ ortonormales}\}.$$

Claramente, $\mathcal{U} \subseteq M^n$ es un subconjunto abierto no vacío formado por todos los puntos no umbilicales de la inmersión (ver Lema 1.11). Tomemos $u, v \in T_p M^n$ ortonormales tales que $h(u, v) \neq 0$ y sean $e_1 = u$, $e_n = v$. Extendemos e_1, e_n a un referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en p . Como la inmersión es isotrópica existe $\lambda = \lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle h(u, u), h(u, u) \rangle = \lambda \quad (3.13)$$

para todo vector tangente unitario $u \in T_p M^n$. Veamos que $\lambda = 0$.

Caso (i). Supongamos que $\lambda > 0$. Como $\langle h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) \rangle = \lambda$, y de la Condición de Isotropía (2.14) tenemos $\langle h(e_1, e_1), h(e_1, e_n) \rangle = 0$, resulta que $h(e_1, e_1) \neq 0$ es espacial y $h(e_1, e_n)$ es temporal. Podemos escribir entonces

$$h(e_1, e_1) = \delta e_{n+1}, \quad (3.14)$$

$$h(e_1, e_n) = \mu e_{n+2}, \quad (3.15)$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ es un referencial ortonormal de \mathbb{L}^{n+2} (e_{n+2} es un vector unitario temporal), y $\delta = \sqrt{\lambda} > 0$, $\mu = \sqrt{-\langle h(e_1, e_n), h(e_1, e_n) \rangle} > 0$. Por otra parte, de la ecuación (2.14) tenemos que $\langle h(e_1, e_n), h(e_n, e_n) \rangle = 0$. Entonces, las ecuaciones (3.13) y (3.15) implican que $h(e_n, e_n) = \pm \delta e_{n+1}$. Si $h(e_n, e_n) = \delta e_{n+1}$, entonces de la ecuación (2.12) obtenemos

$$\langle h(e_1, e_1), h(e_n, e_n) \rangle + 2\langle h(e_1, e_n), h(e_1, e_n) \rangle = \lambda. \quad (3.16)$$

Por tanto, las ecuaciones (3.14) y (3.15) implican que $\langle h(e_1, e_n), h(e_1, e_n) \rangle = 0$, que es una contradicción porque $\mu > 0$. El caso $h(e_n, e_n) = -\delta e_{n+1}$ también es contradictorio porque de la ecuación (3.16) se deduce que $\mu^2 = -\lambda$.

Caso (ii). Asumamos que $\lambda < 0$. De forma similar al *Caso (i)*, llegamos a una contradicción tomando esta vez $h(e_1, e_1) = \delta e_{n+2}$, $h(e_1, e_n) = \mu e_{n+1}$, donde ahora $\delta = \sqrt{-\lambda}$, $\mu = \sqrt{\langle h(e_1, e_n), h(e_1, e_n) \rangle}$.

Ahora, sea $p \in \bar{\mathcal{U}}$ un punto umbilical de la frontera de \mathcal{U} y tomemos una sucesión $\{p_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ en M^n convergente a p de forma que cada punto p_N no sea umbilical. Sea X un campo tangente unitario definido en un entorno de p y consideremos la función $\langle h(X, X), h(X, X) \rangle$. Por continuidad resulta

$$\lambda(p) = \lim_N \langle h(X(p_N), X(p_N)), h(X(p_N), X(p_N)) \rangle = \lim_N \lambda(p_N) = 0.$$

Si \mathcal{U} es denso acabamos la demostración. Si \mathcal{U} no es denso, el conjunto $\mathcal{V} = M^n - \bar{\mathcal{U}}$ es una subvariedad abierta de M^n totalmente umbilical, y así constantemente isotrópica. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ la constante de isotropía. Ahora, tomando una sucesión de puntos umbilicales convergente a un punto de la frontera de \mathcal{U} , obtenemos finalmente que $\lambda = 0$. \square

Como consecuencia directa del Teorema 3.34 y del Lema 3.35:

Teorema 3.36 *Sea ϕ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical de una variedad Riemanniana completa M^n en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+2} ($n \geq 2$). Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$.*

Observación 3.37 La hipótesis de que la subvariedad sea completa es necesaria en el Teorema 3.36 anterior como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo: Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) las coordenadas canónicas de \mathbb{L}^4 y u_1, u_2 las coordenadas luminosas $u_1 = x_1 + x_2$ y $u_2 = x_1 - x_2$. Se define

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{L}^4 : 1 < x_3^2 + x_4^2 < 4, u_1 = u_2 = 0\}.$$

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f > 0$ en

$$U = \{(x_3, x_4) \in A : 2 - \sqrt{1 - x_3^2} < x_4 < \sqrt{4 - x_3^2}\}$$

y en

$$V = \{(x_3, x_4) \in A : -\sqrt{4 - x_3^2} < x_4 < -2 + \sqrt{1 - x_3^2}\},$$

mientras que $f = 0$ en $A - (U \cup V)$. Sea la inmersión isométrica $\phi : A \rightarrow \mathbb{L}^4$ dada por

$$\phi(x_3, x_4) = \begin{cases} (0, f(x_3, x_4), x_3, x_4) & \text{si } x_4 \geq 0 \\ (f(x_3, x_4), 0, x_3, x_4) & \text{si } x_4 < 0 \end{cases}$$

en (u_1, u_2, x_3, x_4) -coordenadas. Entonces, ϕ es 0-isotrópica pero no es ni completa ni totalmente umbilical [B1]. Además, como la superficie $\phi(A)$ no está contenida en ningún hiperplano de \mathbb{L}^4 , la inmersión no puede ser congruente a una expansión. \diamond

Observación 3.38 El Lema 3.35 también es cierto si tomamos una variedad pseudo-Riemanniana M_s^n de dimensión $n \geq 3$ isotrópicamente inmersa en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} y no totalmente umbilical. En efecto, basta elegir dos vectores tangentes ortonormales u, v en un punto no umbilical del mismo carácter causal tales que $h(u, v) \neq 0$ (que existen por el Lema 1.11 y porque $n \geq 3$) y proceder de forma análoga a la prueba del Lema 3.35. No obstante, este procedimiento no es válido para superficies de Lorentz M_1^2 isotrópicamente inmersas en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_2^4 . \diamond

Teorema 3.39 *Sea ϕ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical de una variedad pseudo-Riemanniana completa M_s^n en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_{s+1}^{n+2} con $n \geq 3$. Entonces, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_s^n en $\mathbb{R}_{s,1}^{n+1}$.*

3.6.1. Superficies de Lorentz

En esta sección vamos a estudiar la rigidez de las superficies de Lorentz M_1^2 isotrópicas y de codimensión dos en el espacio pseudo-Euclídeo. En primer

lugar, tenemos el siguiente simple criterio para determinar la isotropía de M_1^2 .

Lema 3.40 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^m$ una inmersión isométrica. Entonces, ϕ es isotrópica en un punto p si y sólo si existe una base pseudo-ortonormal $\{x, y\}$ de $T_p M_1^2$ tal que*

$$\langle h(x, x), h(x, x) \rangle = 0,$$

$$\langle h(y, y), h(y, y) \rangle = 0,$$

$$\langle h(x, x), \mathbf{H} \rangle = 0,$$

$$\langle h(y, y), \mathbf{H} \rangle = 0,$$

donde \mathbf{H} denota el campo curvatura media de ϕ .

Demostración: Una base pseudo-ortonormal $\{x, y\}$ de $T_p M_1^2$ satisface $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0$ y $\langle x, y \rangle = -1$. Si $u = (x - y)/\sqrt{2}$ y $v = (x + y)/\sqrt{2}$, entonces $\{u, v\}$ es una base ortonormal en p , y el campo curvatura media viene dado por $\mathbf{H} = (h(u, u) - h(v, v))/2 = -h(x, y)$. El resultado se sigue claramente del apartado 3 del Teorema 2.16, ya que todo vector luminoso en p es proporcional a x o y . \square

Corolario 3.41 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ inmersión λ -isotrópica no totalmente umbilical. Entonces, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ y $\mathcal{K} = -2\lambda$.*

Demostración: Observemos que, si p es un punto no umbilical, existe un vector luminoso $x \in T_p M_1^2$ tal que $h(x, x) \neq 0$. Ahora, como el espacio normal es un plano de Lorentz, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ en p por el Lema 3.40. Entonces, por continuidad, el campo curvatura media \mathbf{H} satisface $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ en cada punto y, por la ecuación (2.39), $\mathcal{K} = -2\lambda$. \square

Para inmersiones constantemente isotrópicas tenemos el siguiente:

Teorema 3.42 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ una inmersión constantemente isotrópica y no totalmente umbilical. Entonces, ϕ es 0-isotrópica. Además, si M_1^2 es completa, ϕ es congruente a una expansión de \mathbb{R}_1^2 en $\mathbb{R}_{1,1}^3$.*

Demostración: Observemos que el índice $\nu = 2$. En efecto, si $\nu = 1$ o 3 , para cada vector luminoso $x \in T_p M_1^2$ la condición isotrópica luminosa (2.5) implica que $h(x, x) = 0$ porque cada espacio normal tiene métrica inducida definida (positiva o negativa). Esto significa [DN] que ϕ es totalmente umbilical, lo que resulta contradictorio. Sea λ la constante de isotropía de la inmersión ϕ y consideremos el subconjunto $\mathcal{U} \subseteq M_1^2$ formado por todos los puntos no umbilicales de ϕ . Supongamos por reducción al absurdo que $\lambda \neq 0$. Dado un punto $p \in \mathcal{U}$ podemos elegir, en virtud del Lema 1.11, un par de vectores tangentes ortonormales u, v en p tales que $h(u, v) \neq 0$. Por otra parte, de la definición de isotropía (2.1), la Condición de Isotropía (2.14) y del Corolario 2.18 resulta

$$\langle h(u, u), h(u, u) \rangle = \langle h(v, v), h(v, v) \rangle = \lambda \neq 0 \quad (3.17)$$

$$\langle h(u, u), h(u, v) \rangle = \langle h(v, v), h(u, v) \rangle = 0, \quad (3.18)$$

$$\langle (\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, v) \rangle = 0, \quad (3.19)$$

$$\langle (\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, u) \rangle = 0. \quad (3.20)$$

Como cada espacio normal a ϕ es isométrico al plano de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 , se deduce de las ecuaciones (3.17)—(3.20), que $(\bar{\nabla} h)(u^3) = 0$. Por tanto, del Lema 1.12 y de la ecuación de Codazzi (1.14), la inmersión ϕ tiene segunda forma fundamental paralela y, como veremos en el Teorema 4.4, la inmersión ϕ tiene geodésicas planas. Teniendo en cuenta el trabajo de C. Blomstrom [B1], llegamos a una situación contradictoria con la suposición de que $\lambda \neq 0$. Entonces, la inmersión ϕ es 0-isotrópica y el resultado se sigue finalmente como consecuencia del Teorema 3.34. \square

Observación 3.43 Toda superficie de Lorentz M_1^2 del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 (o del espacio \mathbb{R}_3^4) es totalmente umbilical. Así, para determinar completamente la rigidez de las superficies de Lorentz isotrópicas de codimensión dos, es suficiente estudiar la rigidez de las superficies isotrópicas y no

constantemente isotrópicas del espacio \mathbb{R}_2^4 . \diamond

Corolario 3.44 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ es constantemente isotrópica.
2. La curvatura de Gauss \mathcal{K} de M_1^2 es constante.
3. ϕ es 0-isotrópica.
4. M_1^2 es llana.
5. En cada punto no totalmente geodésico el primer espacio normal $Im(h)$ está constituido por vectores luminosos.

Además, si la superficie M_1^2 es completa, ϕ es (bajo un movimiento rígido) una expansión de \mathbb{R}_1^2 en $\mathbb{R}_{1,1}^3$.

Corolario 3.45 *Sea ϕ una inmersión isotrópica de una superficie de Lorentz M_1^2 con curvatura constante $c \neq 0$ en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_2^4 . Entonces, ϕ es totalmente umbilical. En particular, $\phi(M_1^2)$ es un trozo abierto de un espacio de De Sitter \mathbb{S}_1^2 o un espacio pseudo-hiperbólico \mathbb{H}_1^2 .*

Para el caso de curvatura no constante tenemos los dos siguientes resultados.

Proposición 3.46 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ una inmersión isotrópica y no totalmente umbilical. Supongamos que M_1^2 tiene curvatura Gaussiana $\mathcal{K} \neq 0$ en todo punto. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- (1) ϕ no tiene puntos umbilicales.
- (2) La segunda forma fundamental h es sobreyectiva en todo punto.
- (3) ϕ es minimal.

Demostración: Observemos en primer lugar que, como $\lambda \neq 0$ en todo punto por el Corolario 3.41, ϕ no tiene puntos umbilicales. En efecto, si $p \in M_1^2$ es un punto umbilical, el Corolario 3.41 nos dice que $\lambda(p) = \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle(p) = 0$, que es una contradicción. Ahora, sea (x, y) una parametrización local luminosa, es decir, tal que la métrica de Lorentz g de la superficie viene dada localmente por $g = 2Bdx dy$ para alguna función real $B > 0$ (ver [W, p.13]). Como los campos coordenados $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ son luminosos, podemos suponer que $h(\partial/\partial x, \partial/\partial x) \neq 0$. Por otra parte, por la propiedad isotrópica (2.10) de permutación circular,

$$\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right), h\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle + 2 \left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle = 2\lambda B^2.$$

Como $\langle h(\partial/\partial x, \partial/\partial y), h(\partial/\partial x, \partial/\partial y) \rangle = 0$ por el Teorema 2.16, resulta

$$\left\langle h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right), h\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle = 2\lambda B^2. \quad (3.21)$$

Así, de la propiedad isotrópica luminosa (2.5), $h(\partial/\partial x, \partial/\partial x)$ y $h(\partial/\partial y, \partial/\partial y)$ son dos campos normales linealmente independientes [O'N2], y la segunda forma fundamental h es sobreyectiva. Ahora, de la propiedad 3 del Teorema 2.16 y la ecuación (3.21), obtenemos que $h(\partial/\partial x, \partial/\partial y) = 0$. Pero esto significa que nuestra inmersión ϕ es minimal. \square

Teorema 3.47 Sean $\phi, \phi' : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dos inmersiones isotrópicas no totalmente umbilicales. Supongamos que M_1^2 tiene curvatura Gaussiana $\mathcal{K} \neq 0$ en todo punto. Entonces, ϕ y ϕ' son congruentes.

Demostración: Esto es consecuencia del Teorema 3.21 de rigidez para inmersiones isotrópicas, pues las inmersiones tienen la misma función de isotropía $\lambda = -\mathcal{K}/2$ y, de la Proposición 3.46, segundas formas fundamentales sobreyectivas. \square

Cuando el campo curvatura media es no nulo, tenemos:

Teorema 3.48 *Sea $\phi : M_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ una inmersión isotrópica no totalmente umbilical con campo curvatura media $\mathbf{H} \neq 0$ en todo punto. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- (1) ϕ es marginalmente atrapada, es decir, en cada punto el campo curvatura media \mathbf{H} es luminoso.
- (2) ϕ es 0-isotrópica.

Si además M_1^2 es completa, entonces ϕ es (bajo un movimiento rígido) una expansión de \mathbb{R}_1^2 en $\mathbb{R}_{1,1}^3$.

Demostración: (1) Se sigue inmediatamente del Corolario 3.41. (2) Por un procedimiento similar al establecido en la prueba de la Proposición 3.46, deducimos que $\lambda(p) = 0$ en todo punto no umbilical p de M_1^2 . Ahora, si $p \in M_1^2$ es un punto umbilical, por el Corolario 3.41, $\lambda(p) = 0$. Así, ϕ es 0-isotrópica. Si M_1^2 es completa, el Teorema 3.42 nos asegura que ϕ es congruente a una expansión. \square

3.6.2. Inmersiones entre pseudo-esferas

Respecto a inmersiones isotrópicas entre pseudo-esferas tenemos, motivados por los trabajos de M. Dajczer, L. Rodríguez [DR] y S. M. B. Kashani [Ka], los siguientes resultados de rigidez:

Teorema 3.49 *Sea $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2}$ una inmersión isotrópica. Entonces, ϕ es congruente a una inmersión del siguiente tipo:*

$$\psi(x) = (f(x), f(x), \iota(x)),$$

donde $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ denota la inclusión canónica.

Demostración: Supongamos que ϕ no es totalmente geodésica. Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{S}^n$ el conjunto de puntos no totalmente geodésicos de ϕ . Entonces, en virtud del estudio realizado en la presente parágrafo, resulta que ϕ es 0-isotrópica e $Im(h)$ es una recta luminosa D -paralela en \mathcal{V} . Usando el transporte paralelo normal, construimos un subfibrado normal luminoso N sobre la esfera \mathbb{S}^n de dimensión uno y D -paralelo. En consecuencia, ya que \mathbb{S}^n es simplemente conexa, existe un campo normal η luminoso que genera al subfibrado N . Se prueba fácilmente que η es un vector constante de \mathbb{R}_1^{n+3} que, bajo un movimiento rígido de \mathbb{R}_1^{n+3} , puede suponerse de la forma $e_o + e_1$ donde $\{e_o, e_1, \dots, e_{n+2}\}$ es la base canónica de \mathbb{R}_1^{n+3} . Como η es tangente a \mathbb{S}_1^{n+2} , $0 = \langle \eta, \phi \rangle = -\phi_o + \phi_1$. Sea $f = \phi_o = \phi_1$. Finalmente, como $1 = \langle \phi, \phi \rangle = -\phi_o^2 + \phi_1^2 + \dots + \phi_{n+2}^2 = \phi_2^2 + \dots + \phi_{n+2}^2$, tenemos que $\iota(x) = (\phi_2(x), \dots, \phi_{n+2}(x))$ es la inclusión canónica de \mathbb{S}^n en \mathbb{R}^{n+1} . Esto concluye la demostración. \square

Teorema 3.50 Sea $\phi : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{n+2}$ una inmersión isotrópica con $n - s \geq 2$. Entonces, ϕ es congruente a una inmersión del siguiente tipo:

$$\psi(x) = (f(x), \iota_1(x), \dots, \iota_s(x), f(x), \iota_{s+1}(x), \dots, \iota_{n+1}(x)),$$

donde $f : \mathbb{S}_s^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\iota : \mathbb{S}_s^n \hookrightarrow \mathbb{R}_s^{n+1}$ denota la inclusión canónica, $\iota(x) = (\iota_1(x), \dots, \iota_{n+1}(x))$.

Demostración: Basta observar que al exigir $n - s \geq 2$ la pseudo-esfera \mathbb{S}_s^n es simplemente conexa y podemos proceder de forma similar a la prueba del resultado anterior. \square

Capítulo 4

Subvariedades isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo

Estudiamos a continuación las inmersiones isotrópicas del espacio pseudo-Euclídeo. La intención fundamental es obtener otras interpretaciones geométricas de la noción de subvariedad isotrópica. Algunos de los resultados que obtenemos son consecuencia del estudio realizado en los Capítulos anteriores.

4.1. Inmersiones con geodésicas planas

Las geodésicas de una subvariedad del espacio pseudo-Euclídeo pueden ser vistas como un espacio de curvas. Mientras más simples sean las geodésicas de la subvariedad, más simple es la *forma* de dicha subvariedad. Consecuencias importantes sobre la geometría de una subvariedad son deducidas imponiendo condiciones naturales sobre sus geodésicas. Por ejemplo, si las geodésicas de la subvariedad son geodésicas (respectivamente, circunferencias) del ambiente, entonces la subvariedad es totalmente geodésica (respectivamente, isotrópica con segunda forma fundamental paralela).

En 1973 S. L. Hong [Ho] estudió aquellas subvariedades del espacio Euclídeo verificando que todas sus geodésicas son curvas planas del ambiente, demostrando en particular que tales subvariedades son isotrópicas. Sus resultados fueron extendidos por J.A. Little [L] y K. Sakamoto [Sak2] quienes independientemente estudiaron y clasificaron este tipo de subvariedades en el caso Riemanniano. En el caso indefinido Blomstrom [B1] determinó todas

las superficies completas del espacio pseudo-Euclídeo con geodésicas planas y segunda forma fundamental paralela.

Una inmersión isométrica $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tiene *geodésicas planas* si, localmente, la imagen de cada geodésica de M_s^n está contenida en un 2-plano de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$, esto es, si $\gamma : (a, b) \rightarrow M_s^n$ es una geodésica, entonces para cada $t \in (a, b)$, existe un intervalo abierto I de (a, b) entorno de t tal que la imagen $\phi \circ \gamma(I)$ está contenida en un 2-plano Π_t de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Observemos que si las geodésicas espaciales y temporales son planas, entonces las geodésicas luminosas también serán planas por continuidad.

En virtud de la Condición de Isotropía (2.14) y de forma similar al caso Riemanniano [Ho], se tiene:

Lema 4.1 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica con geodésicas planas. Entonces, ϕ es constantemente isotrópica.*

Demostración: Como las nociones de inmersión isotrópica e inmersión con geodésicas planas son conceptos locales, podemos trabajar con subvariedades y obtener la misma conclusión. Sea u, v dos vectores ortonormales en un punto p de una subvariedad M_s^n del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Veamos que $\langle h(u, u), h(u, v) \rangle = 0$. Podemos suponer que $h(u, u) \neq 0$. Sea $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M_s^n$ una geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$ y $\gamma(t) \in \Pi$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$, donde Π es un 2-plano de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Ya que γ es una geodésica, $\nabla_T T = 0$. En consecuencia, por la fórmula de Gauss (1.6), la fórmula de Weingarten (1.7) y la ecuación (1.11)

$$\gamma''(t) = h(T, T), \quad (4.1)$$

$$\gamma'''(t) = \tilde{\nabla}_T(h(T, T)) = -A_{h(T, T)}T + (\tilde{\nabla}h)(T, T, T), \quad (4.2)$$

donde T es el campo de velocidades de la curva γ , y γ'' , γ''' denotan, respectivamente, la segunda y tercera derivada covariante inducida respecto a la conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Por otra parte, viendo a γ como una

curva en Π , se sigue que $\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}\Pi$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$. Ahora, como $h(u, u) \neq 0$ entonces, por continuidad y refinando el intervalo $(-\delta, \delta)$ si es necesario, resulta que $h(T(t), T(t)) \neq 0$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$. Por tanto el conjunto $\{T(t), h(T(t), T(t))\}$ forma una base del espacio tangente $T_{\gamma(t)}\Pi$. Así podemos escribir unívocamente la derivada covariante

$$\gamma'''(t) = aT + bh(T, T) \quad (4.3)$$

para algunas funciones diferenciables $a = a(t)$ y $b = b(t)$ en el intervalo $(-\delta, \delta)$. Extendamos el vector v a un campo tangente V a lo largo de γ . Entonces, por la fórmula de Gauss (1.6) y las ecuaciones (4.2) y (4.3)

$$\begin{aligned} \langle h(u, u), h(u, v) \rangle &= \langle h(T, T), h(T, V) \rangle(p) = \langle h(T, T), \tilde{\nabla}_T V \rangle(p) \\ &= -\langle \tilde{\nabla}_T (h(T, T)), V \rangle(p) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

El Teorema 2.16 nos asegura entonces que la inmersión ϕ es isotrópica. Sea λ la función de isotropía de ϕ . El hecho de ser constante λ resulta finalmente de las ecuaciones (2.21), (4.2) y (4.3). \square

Cuando la constante de isotropía de una inmersión pseudo-Riemanniana con geodésicas planas es $\lambda \neq 0$, entonces la inmersión tiene segunda forma fundamental paralela. En efecto:

Lema 4.2 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica con geodésicas planas. Supongamos que la constante de isotropía de ϕ tiene valor $\lambda \neq 0$. Entonces, ϕ tiene segunda forma fundamental paralela.*

Demostración: Sea u un vector tangente unitario en un punto p de M_s^n y γ la única geodésica parametrizada naturalmente tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = u$. Denotemos por T al campo γ' . Del Lema 4.1 anterior resulta que ϕ es constantemente isotrópica. Por tanto, como $\langle h(T, T), h(T, T) \rangle = \lambda$ es constante, se verifica la igualdad

$$\langle (\bar{\nabla} h)(T, T, T), h(T, T) \rangle = 0. \quad (4.5)$$

Por otro lado, como la inmersión tiene geodésicas planas, se sigue de (4.2) y (4.3) que

$$aT + bh(T, T) = -A_{h(T, T)}T + (\bar{\nabla}h)(T, T, T), \quad (4.6)$$

por lo que, igualando las partes normales, $(\bar{\nabla}h)(T, T, T) = bh(T, T)$. Consecuentemente, como $\lambda \neq 0$, la ecuación (4.5) implica que $b = 0$. Entonces $(\bar{\nabla}h)(u, u, u) = 0$ y, de la ecuación de Codazzi (1.14), ϕ tiene segunda forma fundamental paralela. \square

Observación 4.3 A diferencia del caso definido, una inmersión indefinida 0-isotrópica con geodésicas planas no tiene por qué tener segunda forma fundamental paralela (ver el Ejemplo 2.7). \diamond

Como en el caso Riemanniano [Sp, Vol. 4, Teorema 7.5] tenemos que toda circunferencia propia del espacio pseudo-Euclídeo es una curva plana. Por tanto, en virtud del Teorema 2.23, la implicación recíproca del Lema 4.2 también se verifica en el siguiente sentido:

Teorema 4.4 *Sea $\phi : M_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una inmersión isométrica. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ϕ tiene geodésicas planas y constante de isotropía $\lambda \neq 0$.
2. ϕ es una inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$.
3. ϕ transforma cada geodésica unitaria γ de M_s^n en una circunferencia propia $\phi \circ \gamma$ del ambiente.

Como consecuencia del Teorema anterior y del trabajo de C. Blomstrom [B1] sobre inmersiones de superficies con geodésicas planas, deducimos:

Corolario 4.5 *Sea $\phi : M_s^2 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^m$ una inmersión isométrica de una superficie completa M_s^2 en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m . Supongamos que ϕ es una*

inmersión isotrópica con segunda forma fundamental paralela y constante de isotropía $\lambda \neq 0$. Entonces, si ϕ no es totalmente umbilical, ϕ es congruente a una superficie de Veronese en $\mathbb{R}_{s(3-s)}^5$ o $\mathbb{R}_{5-(s+1)(2-s)}^5$ (Ejemplo 2.9).

Corolario 4.6 *Sea $\phi : M_s^2 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^m$ una inmersión isométrica de una superficie completa M_s^2 en el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_ν^m . Supongamos que ϕ transforma cada geodésica unitaria γ de M_s^2 en una circunferencia propia del ambiente. Entonces, si ϕ no es totalmente umbilical, ϕ es congruente a una superficie de Veronese en $\mathbb{R}_{s(3-s)}^5$ o $\mathbb{R}_{5-(s+1)(2-s)}^5$.*

4.2. Número de contacto

El concepto de número de contacto fue introducido recientemente por B.- Y. Chen y S.- J. Li [ChL] para subvariedades del espacio Euclídeo. Generalizamos a continuación la noción de número de contacto al caso indefinido, estudiando algunas de las propiedades que presenta toda subvariedad con número de contacto determinado.

Las nociones de número de contacto e isotropía de una subvariedad están estrechamente relacionadas. Esta relación, que nos permite interpretar geoméricamente la isotropía de una subvariedad mediante el contacto extrínseco existente entre ciertas curvas, la obtenemos utilizando técnicas similares a las del caso Euclídeo [ChL], gracias fundamentalmente a la importante Condición de Isotropía (2.14).

4.2.1. Definición de número de contacto

Sea M_s^n una subvariedad pseudo-Riemanniana del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario $u \in T_p M_s^n$ existe una única geodésica maximal γ_u parametrizada naturalmente (espacial o temporal) tal que $\gamma_u(0) = p$ y $\gamma_u'(0) = u$.

Para el mismo par (p, u) , definimos la *sección normal* β_u en (p, u) como sigue: Sea $E_\delta(p, u)$ el $(d + 1)$ -plano no degenerado de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ definido por

$$E_\delta(p, u) = p + (\text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n),$$

donde δ denota el índice de $E_\delta(p, u)$ que viene dado por $\delta = \ell$ si u es espacial o $\delta = \ell + 1$ si u es temporal. La intersección de M_s^n con $E_\delta(p, u)$ da lugar a una curva β_u definida en un intervalo que contiene a 0, que podemos tomar parametrizada naturalmente y verificando $\beta_u(0) = p$, $\beta_u'(0) = u$. El carácter causal de β_u está completamente determinado por el carácter causal de u .

La geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen *contacto de orden* $k \in \mathbb{N}$ si las derivadas covariantes sucesivas en \mathbb{R}_p^m verifican:

$$\gamma_u^{(i)}(0) = \beta_u^{(i)}(0) \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

Una subvariedad pseudo-Riemanniana M_s^n del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ se dice que tiene *contacto de orden* k si, para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario u en p , la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden k . Si una subvariedad M_s^n tiene contacto de orden k para todo número natural k , el *número de contacto* $\mathbf{c}_\#(M_s^n)$ de M_s^n se define por ∞ . En otro caso, el *número de contacto* $\mathbf{c}_\#(M_s^n)$ de M_s^n se define como el mayor número natural k tal que M_s^n tiene contacto de orden k y no tiene contacto de orden $k + 1$:

$$\mathbf{c}_\#(M_s^n) = \max\{k \in \mathbb{N} : M_s^n \text{ tiene contacto de orden } k\}.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de cálculo directo del número de contacto de una subvariedad:

Ejemplo 4.7 Un k -plano no degenerado Π de \mathbb{R}_p^m verifica $\mathbf{c}_\#(\Pi) = \infty$, ya que cada sección normal es una recta de Π y, por tanto, geodésica. †

Ejemplo 4.8 Consideremos la pseudo-esfera $\mathbb{S}_s^n \subseteq \mathbb{R}_s^{n+1}$. Sea $p \in \mathbb{S}_s^n$ y $u \in T_p \mathbb{S}_s^n$ tal que $\langle u, u \rangle = \pm 1$. Como $N(p) = p$ define un campo normal unitario

de \mathbb{S}_s^n entonces, el espacio afín $E_\delta(p, u) = \text{Span}(p, u)$. Por tanto, la curva

$$\beta_u(t) = \begin{cases} \cos(t) p + \text{sen}(t) u & \text{si } \langle u, u \rangle = 1, \\ \cosh(t) p + \sinh(t) u & \text{si } \langle u, u \rangle = -1. \end{cases}$$

es la sección normal en (p, u) , que coincide precisamente con la geodésica maximal γ_u con condiciones iniciales $\gamma_u(0) = p$ y $\gamma'_u(0) = u$ y, en consecuencia, $\mathbf{c}_\#(\mathbb{S}_1^n) = \infty$. Análogamente, el espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+1}$ tiene número de contacto infinito. †

Ejemplo 4.9 Consideremos la superficie de Lorentz definida por el cilindro recto

$$M_1^2 = \mathbb{L} \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 + z^2 = 1\}.$$

Como $(0, 0, 1)$ es un vector normal unitario en el punto $p = (0, 0, 1) \in M_1^2$, el espacio tangente $T_p M_1^2 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3 : v_3 = 0\}$. Tomemos el vector tangente unitario espacial $u = (\sqrt{3}, 2, 0) \in T_p M_1^2$. Resulta entonces que el 2-plano $E_\delta(p, u) = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : 2x - \sqrt{3}y = 0\}$, y la sección normal β_u es de la forma:

$$\beta_u(t) = (\sqrt{3}/2 \text{sen}(\varphi(t)), \text{sen}(\varphi(t)), \cos(\varphi(t))) \in M_1^2 \cap E_\delta(p, u),$$

donde φ es la inversa (en un entorno de cero) de la aplicación

$$\psi(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{1 - \frac{3}{4} \text{sen}^2 u} \, du.$$

Por otra parte, la hélice $\gamma_u(t) = (\sqrt{3}t, \text{sen}(2t), \cos(2t))$ es la geodésica maximal de M_1^2 con condiciones iniciales $\gamma_u(0) = p$ y $\gamma'_u(0) = u$. Es rutinario comprobar que $\gamma_u'''(0) \neq \beta_u'''(0)$; lo que implica, como veremos en el próximo Teorema 4.11, que el número de contacto $\mathbf{c}_\#(M_1^2) = 2$. Nótese que M_1^2 tiene segunda forma fundamental paralela. †

Observación 4.10 Sea $\gamma = \gamma(t)$ una curva arbitraria de una subvariedad M_s^n del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Denotemos por T al campo de velocidades

de la curva γ . Entonces, teniendo en cuenta la Fórmula de Gauss (1.6), la Fórmula de Weingarten (1.7), (1.11) y (1.12), resulta

$$\gamma''(t) = \nabla_T T + h(T, T), \quad (4.7)$$

$$\gamma'''(t) = \nabla_T^2 T + 3h(T, \nabla_T T) - A_{h(T, T)} T + (\bar{\nabla} h)(T, T, T), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{iv}(t) = & \nabla_T^3 T - 3A_{h(T, \nabla_T T)} T - \nabla_T(A_{h(T, T)} T) - A_{(\bar{\nabla} h)(T, T, T)} T \\ & + (\bar{\nabla}^2 h)(T, T, T, T) + 6(\bar{\nabla} h)(T, T, \nabla_T T) - h(T, A_{h(T, T)} T) \\ & + 4h(T, \nabla_T^2 T) + 3h(\nabla_T T, \nabla_T T), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\nabla_T^2 T = \nabla_T(\nabla_T T)$ y $\nabla_T^3 T = \nabla_T(\nabla_T^2 T)$ denotan las derivadas covariantes sucesivas a lo largo de γ respecto a la conexión de Levi-Civita ∇ de M_s^n . \diamond

4.2.2. Isotropía y número de contacto

Las nociones de número de contacto e isotropía de una subvariedad del espacio pseudo-Euclídeo están estrechamente relacionadas. En efecto, como en el caso Riemanniano [ChL] se tiene:

Teorema 4.11 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *El número de contacto $\mathbf{c}_\#(M_s^n)$ de M_s^n satisface $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 2$.*

(2) *M_s^n es isotrópica si y sólo si $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 3$.*

(3) *M_s^n es constantemente isotrópica si y sólo si $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq 4$.*

Demostración: Fijemos un punto $p \in M_s^n$ y un vector tangente unitario u en p . Consideremos la geodésica maximal γ_u y la sección normal β_u en (p, u) . Obviamente $\gamma_u(0) = \beta_u(0)$ y $\gamma'_u(0) = \beta'_u(0)$.

Veamos en primer lugar la propiedad (1). Como γ_u es geodésica entonces $\gamma''_u(0) = h(u, u)$. Por otro lado, como $\beta_u(t) \in E_\delta(p, u)$ para cada $t \in \text{Dom}(\beta_u)$, entonces

$$\beta'_u(t) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n.$$

Ya que β_u está parametrizada naturalmente, $\langle \beta_u''(t), \beta_u'(t) \rangle = 0$ y $\beta_u''(0)$ es normal. Por tanto, $\beta_u''(0) = h(u, u)$ por la ecuación (4.7), quedando demostrada la propiedad (1).

Comprobemos la propiedad (2). Supongamos que el número de contacto es al menos tres. Al ser γ_u geodésica se verifica

$$\gamma_u'''(0) = -A_{h(u,u)}u + (\bar{\nabla}h)(u, u, u) \quad (4.10)$$

por la ecuación (4.8). Como $\gamma_u'''(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$ y $A_{h(u,u)}u \in T_p M_s^n$, $A_{h(u,u)}u \in \text{Span}(u)$. Por tanto, si tomamos un vector v ortonormal a u , de la ecuación (4.10) anterior

$$0 = \langle A_{h(u,u)}u, v \rangle = \langle h(u, u), h(u, v) \rangle,$$

por lo que M_s^n es isotrópica como consecuencia de la Condición de Isotropía (2.14). Recíprocamente, si M_s^n es λ -isotrópica entonces del Teorema 2.16 deducimos que

$$A_{h(u,u)}u = \varepsilon \lambda u \quad (4.11)$$

donde $\varepsilon = \langle u, u \rangle = \pm 1$. De las ecuaciones (4.8) y (4.11) obtenemos que

$$\gamma_u'''(0) = -\varepsilon \lambda u + (\bar{\nabla}h)(u, u, u). \quad (4.12)$$

Por otra parte, para la sección normal β_u obtenemos de la igualdad $\beta_u''(0) = h(u, u)$ que $\nabla_u T_\beta = 0$, siendo T_β el campo de velocidades de la curva β_u . Luego de (4.8) y (4.11) deducimos

$$\beta_u'''(0) = \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta - \varepsilon \lambda u + (\bar{\nabla}h)(u, u, u) \quad (4.13)$$

y, en consecuencia,

$$\langle \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta, v \rangle = 0 \quad (4.14)$$

para cada vector v ortonormal a u . Como $T_\beta \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 2 \langle \nabla_{T_\beta} T_\beta, T_\beta \rangle$ y $\nabla_u T_\beta = 0$, resulta

$$2 \langle \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta, u \rangle = u(T_\beta \langle T_\beta, T_\beta \rangle) - 2 \langle \nabla_u T_\beta, \nabla_u T_\beta \rangle = 0. \quad (4.15)$$

Combinando (4.14) y (4.15) llegamos a que

$$\nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta = 0. \quad (4.16)$$

Finalmente, de las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.16) se deduce que $\beta_u'''(0) = \gamma_u'''(0)$, quedando demostrada la propiedad (2).

Comprobemos por último la propiedad (3). Supongamos que el número de contacto es al menos cuatro. Entonces, M_s^n es isotrópica por la propiedad (2) anterior y se obtiene de (4.9) y (4.11) la igualdad

$$\gamma_u^{iv}(0) = \varepsilon u(\lambda) u - A_{(\bar{\nabla}h)(u,u,u)} u - \varepsilon \lambda h(u, u) + (\bar{\nabla}^2 h)(u, u, u, u), \quad (4.17)$$

donde λ es la función de isotropía. Como $\beta^{iv}(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$ entonces $A_{(\bar{\nabla}h)(u,u,u)} u \in \text{Span}(u)$ y

$$\langle (\bar{\nabla}h)(u, u, u), h(u, v) \rangle = 0$$

para cada vector tangente v ortonormal a u , lo que implica que M_s^n es constantemente isotrópica por Corolario 2.18. Recíprocamente, si M_s^n es constantemente isotrópica, por el Corolario 2.18,

$$A_{(\bar{\nabla}h)(u,u,u)} u = 0. \quad (4.18)$$

Entonces, como λ es constante y $\nabla_u T_\beta = 0$, de las ecuaciones (4.9), (4.11), (4.16) y (4.18) se deduce que

$$\beta_u^{iv}(0) = \nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta - \varepsilon \lambda h(u, u) + (\bar{\nabla}^2 h)(u, u, u, u). \quad (4.19)$$

Como β_u es una curva de $E_\delta(p, u)$ entonces $\nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta$ es proporcional a u y

$$u(\langle \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, T_\beta \rangle) = u(T_\beta \langle \nabla_{T_\beta} T_\beta, T_\beta \rangle - \langle \nabla_{T_\beta} T_\beta, \nabla_{T_\beta} T_\beta \rangle) = 0.$$

Entonces,

$$\langle \nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, u \rangle = u(\langle \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, T_\beta \rangle) - \langle \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, \nabla_u T_\beta \rangle = 0,$$

de donde $\nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta = 0$. De las ecuaciones (4.17) y (4.19) concluimos finalmente que $\beta_u^{iv}(0) = \gamma_u^{iv}(0)$ como queríamos probar. \square

4.2.3. Número de contacto espacial y temporal

Para una subvariedad pseudo-Riemanniana M_s^n del espacio $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con métrica inducida indefinida ($0 < s < n$) podemos definir los conceptos de número de contacto espacial y número de contacto temporal de forma similar a la definición de número de contacto pero sólo utilizando direcciones unitarias espaciales o temporales, respectivamente.

Diremos que una subvariedad pseudo-Riemanniana M_s^n del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tiene *contacto espacial de orden k* si para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario espacial u en p , la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden k . Si M_s^n tiene contacto espacial de orden k para todo natural $k \in \mathbb{N}$ definimos el número de contacto espacial $\mathbf{c}_{\#}^+(M_s^n)$ de M_s^n por ∞ . En otro caso, llamaremos *número de contacto espacial* de la subvariedad M_s^n al mayor natural k tal que M_s^n tiene contacto espacial de orden k y no tiene contacto de orden $k + 1$:

$$\mathbf{c}_{\#}^+(M_s^n) = \max\{k \in \mathbb{N} : M_s^n \text{ tiene contacto espacial de orden } k\}.$$

Las nociones de *orden de contacto temporal* y *número de contacto temporal* $\mathbf{c}_{\#}^-(M_s^n)$ son obvias si intercambiamos el carácter causal espacial por el temporal en las definiciones correspondientes anteriores. Obsérvese que, por definición, se cumple:

$$\mathbf{c}_{\#}(M_s^n) = \min\{\mathbf{c}_{\#}^+(M_s^n), \mathbf{c}_{\#}^-(M_s^n)\}.$$

4.2.4. Caracterización del orden de contacto

Tenemos el siguiente criterio algebraico para determinar cuando una subvariedad pseudo-Riemanniana tiene contacto de orden $k \geq 3$. Su demostración es similar a la prueba del resultado Riemanniano correspondiente [ChL].

Teorema 4.12 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana. Dado un natural $k \geq 3$, se verifican las siguientes propiedades:*

(1) M_s^n tiene contacto espacial de orden k si y sólo si cada $u \in UM_s^n$ espacial es autovector de $A_{(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2})}$ para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$.

(2) M_s^n tiene contacto temporal de orden k si y sólo si cada $u \in UM_s^n$ temporal es autovector de $A_{(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2})}$ para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$

Demostración: Los casos $k = 3$ y $k = 4$ se siguen de la demostración del Teorema 4.11. Para la prueba del caso general $k \geq 5$, consideraremos los siguientes dos Lemas. \square

Lema 4.13 Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana. Sea $k \geq 3$ y $\varepsilon = 1$ o -1 . Supongamos que, para cada punto p de M_s^n y cada vector unitario $u \in U_p M_s^n$ tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$, la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden k . Entonces, cada vector tangente unitario u con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$ es autovector de $A_{(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2})}$ para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$.

Demostración: Estudiemos previamente el caso $k = 5$ y razonemos por inducción sobre el orden de contacto.

Caso $k = 5$. Sea u un vector tangente unitario en un punto $p \in M_s^n$ con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$. Como por hipótesis la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden $k = 5$ se verifica

$$A_{h(u,u)}u = \mu_0 u, \quad \mu_0 = \varepsilon\lambda, \quad (4.20)$$

$$A_{(\bar{\nabla} h)(u^3)}u = 0, \quad (4.21)$$

siendo λ la constante de isotropía asociada (véanse las Observaciones 2.17 y 2.19). Notemos que, al ser γ_u geodésica unitaria del mismo carácter causal que u , de las ecuaciones (4.9), (4.20) y (4.21) resulta

$$\gamma_u^{\text{iv}}(t) = -\mu_0 h(T, T) + (\bar{\nabla}^2 h)(T^4) \quad (4.22)$$

donde T denota el campo de velocidades de la curva $\gamma_u = \gamma_u(t)$. Derivando covariantemente la ecuación (4.22) y aplicando la fórmula de Gauss (1.6), la

formula de Weingarten (1.7), la ecuación (4.20) y que $\mu_0 = \varepsilon\lambda$ es constante a lo largo de γ_u ,

$$\gamma_u^v(t) = \mu_o^2 T - A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)} T - \mu_o (\bar{\nabla} h)(T^3) + (\bar{\nabla}^3 h)(T^5). \quad (4.23)$$

Como $\gamma_u^v(0) = \beta_u^v(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$ entonces $\langle A_{(\bar{\nabla}^2 h)(u^4)} u, v \rangle = 0$ para cada v ortonormal a u y, por tanto,

$$A_{(\bar{\nabla}^2 h)(u^4)} u = \mu_2 u$$

siendo $\mu_2 = \varepsilon \langle A_{(\bar{\nabla}^2 h)(u^4)} u, u \rangle$ el autovalor asociado a u que depende del punto p y la dirección unitaria u .

Caso $k > 5$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que para cada punto $p \in M_s^n$ y cada vector unitario $u \in U_p M_s^n$ tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$ se verifica

$$A_{h(u,u)} u = \mu_0 u, \quad A_{(\bar{\nabla} h)(u^3)} u = 0, \quad (4.24)$$

$$A_{(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2})} u = \mu_j u, \quad \text{para } j = 2, \dots, k-4, \quad (4.25)$$

$$\gamma_u^{(k)}(0) = \beta_u^{(k)}(0). \quad (4.26)$$

Sea p un punto de M_s^n y u un vector tangente unitario tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$. Veamos que $A_{(\bar{\nabla}^{k-3} h)(u^{k-1})} u = \mu_{k-3} u$ para cierto $\mu_{k-3} \in \mathbb{R}$. Por (4.25) se satisface $A_{(\bar{\nabla}^2 h)(T^4)} T = \mu_2 T$ siendo $\mu_2(t) = \mu_2(\gamma_u'(t))$ la restricción de μ_2 al campo unitario $T = \gamma_u'$ a lo largo de γ_u . Así, la ecuación (4.23) la podemos expresar

$$\gamma_u^v(t) = (\mu_o^2 - \mu_2) T - \mu_o (\bar{\nabla} h)(T^3) + (\bar{\nabla}^3 h)(T^5).$$

Derivando covariantemente esta última expresión, resulta:

$$\begin{aligned} \gamma_u^{vi}(t) &= -T(\mu_2)T - A_{(\bar{\nabla}^3 h)(T^5)} T + (\mu_o^2 - \mu_2)h(T, T) - \mu_o(\bar{\nabla}^2 h)(T^4) \\ &\quad + (\bar{\nabla}^4 h)(T^6). \end{aligned}$$

Denotando $f_6 = -\mu_2' = T(\mu_2)$ y $g_{0,6} = \mu_o^2 - \mu_2$ llegamos a que

$$\gamma_u^{vi}(t) = f_6 T - A_{(\bar{\nabla}^3 h)(T^5)} T + g_{0,6} h(T, T) - \mu_o(\bar{\nabla}^2 h)(T^4) + (\bar{\nabla}^4 h)(T^6).$$

Continuando el proceso $k - 6$ veces y aplicando (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_u^{(k-1)}(t) &= (f_{k-1} - \mu_{k-4})T + g_{0,k-1}h(T, T) + \cdots + g_{k-7,k-1}(\bar{\nabla}^{k-7}h)(T^{k-5}) \\ &\quad - \mu_0(\bar{\nabla}^{k-5}h)(T^{k-3}) + (\bar{\nabla}^{k-3}h)(T^{k-1}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{k-1} &= f_k(\mu_0, \mu_2, \dots, \mu_{k-5}), \\ g_{r,k-1} &= g_{r,k-1}(\mu_0, \mu_2, \dots, \mu_{k-5-r}), \quad r = 0, \dots, k-7, \end{aligned}$$

son funciones que dependen de $\mu'_j = T(\mu_j)$ y sus derivadas con respecto a T .

Entonces de (4.24), (4.25) y (4.27) deducimos que

$$\begin{aligned} \gamma_u^{(k)}(t) &= f_k T - A_{(\bar{\nabla}^{k-3}h)(T^{k-1})}T + g_{0,k-1}h(T, T) + \cdots + g_{k-6,k}(\bar{\nabla}^{k-6}h)(T^{k-4}) \\ &\quad - \mu_0(\bar{\nabla}^{k-4}h)(T^{k-2}) + (\bar{\nabla}^{k-2}h)(T^k), \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} f_k &= (f_{k-1} - \mu_{k-4})' + \mu_0 \mu_{k-5} - \sum_{t=0}^{k-7} \mu_t g_{t,k-1}, \\ g_{0,k} &= f_{k-1} - \mu_{k-4} + g'_{0,k-1}, \\ g_{r,k} &= g_{t-1,k-1} + g'_{t,k-1}, \quad r = 1, \dots, k-7, \\ g_{k-6,k} &= g_{k-7,k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.28), (4.29) y que $\beta_u^{(k)}(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$, se concluye que u es autovector $(\bar{\nabla}^{k-3}h)(u^{k-1})$, quedando demostrado lo que queríamos por inducción. \square

Lema 4.14 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana. Sea $k \geq 3$ y $\varepsilon = 1$ o -1 . Supongamos que, cada vector tangente unitario u tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$ es autovector de $A_{(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2})}$ para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$. Entonces, para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario u en p con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$, la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden k .*

Demostración: Los casos $k = 3$ y $k = 4$ se siguen de la demostración del Teorema 4.11. Vamos a razonar de nuevo por inducción sobre el orden de contacto k estudiando previamente el caso $k = 5$.

Caso $k = 5$. Sea u un vector tangente unitario en un punto $p \in M_s^n$ con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$. Por hipótesis, tenemos que

$$A_{h(u,u)}u = \mu_0 u, \quad A_{(\bar{\nabla}h)(u^3)}u = 0, \quad A_{(\bar{\nabla}^2h)(u^4)}u = \mu_2 u, \quad (4.30)$$

donde μ_0 es constante. Entonces considerando (4.9) y (4.30) llegamos a que la sección normal β_u satisface

$$\begin{aligned} \beta_u^{\text{iv}}(t) &= \nabla_T^3 T - 3A_{h(T, \nabla_T T)}T - \mu_0 \nabla_T T - \mu_0 h(T, T) + (\bar{\nabla}^2 h)(T^4) \\ &\quad + 3h(\nabla_T T, \nabla_T T) + 6(\bar{\nabla} h)(T, T, \nabla_T T) + 4h(T, \nabla_T^2 T), \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $T = T_\beta = \beta'_u$. Derivando (4.31) y teniendo en cuenta (4.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_u^{\text{v}}(t) &= \nabla_T^4 T + h(T, \nabla_T^3 T) - 3\nabla_T(A_{h(T, \nabla_T T)}T) - 3h(T, A_{h(T, \nabla_T T)}T) \\ &\quad - \mu_0 \nabla_T^2 T - \mu_0 h(T, \nabla_T T) + \mu_0^2 T - \mu_0 D_T h(T, T) - \mu_2 T \\ &\quad + D_T((\bar{\nabla}^2 h)(T^4)) - 3A_{h(\nabla_T T, \nabla_T T)}T + 3D_T(h(\nabla_T T, \nabla_T T)) \\ &\quad - 6A_{(\bar{\nabla}h)(T, T, \nabla_T T)}T + 6D_T((\bar{\nabla}h)(T, T, \nabla_T T)) \\ &\quad - 4A_{h(T, \nabla_T^2 T)}T + 4D_T(h(T, \nabla_T^2 T)). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando (1.11) y (1.12), la ecuación (4.32) podemos reescribirla

$$\beta_u^{\text{v}}(t) = \nabla_T^4 T + (\mu_0^2 - \mu_2)T - \mu_0(\bar{\nabla}h)(T^3) + (\bar{\nabla}^3 h)(T^5) + \phi_5, \quad (4.33)$$

siendo $\phi_5 = \phi_5(T)$ un campo tensorial que tiene cada uno de sus términos dependientes de algunos de los campos $\nabla_T T, \nabla_T^2 T$ y $\nabla_T^3 T$, e independientes de $\nabla_T^4 T$:

$$\begin{aligned} \phi_5 &= h(T, \nabla_T^3 T) - 3\nabla_T(A_{h(T, \nabla_T T)}T) - 3h(T, A_{h(T, \nabla_T T)}T) \\ &\quad - \mu_0 \nabla_T^2 T - \mu_0 h(T, \nabla_T T) + 2\mu_0 h(\nabla_T T, T) + \dots \end{aligned}$$

Además, de la demostración del Teorema 4.11, tenemos

$$(i) \quad \nabla_u T_\beta = \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta = 0,$$

$$(ii) \quad \nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta = 0.$$

De donde $\phi_5(0) = 0$ y la expresión (4.33) queda

$$\beta_u^v(0) = \nabla_u \nabla_{T_\beta}^3 T_\beta + (\mu_0^2 - \mu_2)u - \mu_0(\bar{\nabla}h)(u^3) + (\bar{\nabla}^3 h)(u^5). \quad (4.34)$$

Como la sección normal β_u verifica $\beta_u^v(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$, (4.34) implica que

$$\langle \nabla_u \nabla_{T_\beta}^3 T_\beta, v \rangle = 0$$

para cada vector v ortogonal a u . Por otra parte, de (i) y (ii):

$$\begin{aligned} \langle \nabla_u \nabla_{T_\beta}^3 T_\beta, u \rangle &= u(\langle \nabla_{T_\beta}^3 T_\beta, T_\beta \rangle) \\ &= u\{T_\beta \langle \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, T_\beta \rangle - \langle \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, \nabla_{T_\beta} T_\beta \rangle\} \\ &= \frac{1}{2}u\{T_\beta^3 \langle T_\beta, T_\beta \rangle - 3T_\beta \langle \nabla_{T_\beta} T_\beta, \nabla_{T_\beta} T_\beta \rangle\} \\ &= -3\langle \nabla_u \nabla_{T_\beta}^2 T_\beta, \nabla_u T_\beta \rangle - 3\langle \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta, \nabla_u \nabla_{T_\beta} T_\beta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Entonces $\nabla_u \nabla_{T_\beta}^3 T_\beta = 0$ y, usando las expresiones (4.23) y (4.34), $\gamma_u^v(0) = \beta_u^v(0)$ como queríamos probar.

Caso $k > 5$. Supongamos que para cada punto $p \in M_s^n$ y cada vector unitario $u \in U_p M_s^n$ tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$ se verifica

$$A_{(\bar{\nabla}h)^j(u^{j+2})}u = \mu_j u, \quad \text{para } j = 0, \dots, k-3, \quad (4.35)$$

y, por hipótesis de inducción, $\gamma_u^{(j)}(0) = \beta_u^{(j)}(0)$ para $j = 1, \dots, k-1$. Veamos que $\gamma_u^{(k)}(0) = \beta_u^{(k)}(0)$. Derivando (4.33) respecto a $T = T_\beta$ encontramos

$$\beta_u^{\text{vi}}(t) = \nabla_T^5 T - (f_6 + \mu_3)T + g_{0,6}h(T, T) - \mu_0(\bar{\nabla}^2 h)(T^4) + (\bar{\nabla}^4 h)(T^6) + \phi_6,$$

donde $f_6 = -\mu_2' = T(\mu_2)$, $g_{0,6} = \mu_0^2 - \mu_2$ y ϕ_6 tiene cada uno de sus términos dependientes de algunos de los campos $\nabla_T T, \nabla_T^2 T, \nabla_T^3 T$ y $\nabla_T^4 T$, e independientes de $\nabla_T^5 T$. Reiterando el proceso $k-6$ veces:

$$\begin{aligned} \beta_u^{(k)}(t) &= \nabla_T^{k-1} T + (f_k - \mu_{k-3})T + g_{0,k-1}h(T, T) + \dots + g_{k-6,k}(\bar{\nabla}^{k-6} h)(T^{k-4}) \\ &\quad - \mu_0(\bar{\nabla}^{k-4} h)(T^{k-2}) + (\bar{\nabla}^{k-2} h)(T^k) + \phi_k, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde $f_\ell, g_{0,k}, \dots, g_{k-6,k}$ están definidas de igual forma que en (4.29).

Ya que cada uno de los términos de ϕ_k depende de al menos uno de los campos $\nabla_T T, \nabla_T^2 T, \dots, \nabla_T^{k-2} T$ y no de $\nabla_T^{k-1} T$ tenemos que $\phi_k(0) = 0$. Entonces, de (4.28) y (4.36), bastará comprobar que $\nabla_u \nabla_{T_\beta}^{k-2} T_\beta = 0$. Ahora, esto último es cierto pues $\beta_u^{(k)}(0) \in \text{Span}(u) \oplus T_p^\perp M_s^n$ y

$$\begin{aligned} \langle \nabla_u \nabla_{T_\beta}^{k-2} T_\beta, u \rangle &= u(\langle \nabla_{T_\beta}^{k-2} T_\beta, T_\beta \rangle) \\ &= u\{T_\beta \langle \nabla_{T_\beta}^{k-3} T_\beta, T_\beta \rangle - \langle \nabla_{T_\beta}^{k-3} T_\beta, \nabla_{T_\beta} T_\beta \rangle\} \\ &= u(T_\beta \langle \nabla_{T_\beta}^{k-3} T_\beta, T_\beta \rangle) = u(T_\beta^2 \langle \nabla_{T_\beta}^{k-4} T_\beta, T_\beta \rangle) \\ &\quad \vdots \\ &= u(T_\beta^{k-2} \langle T_\beta, T_\beta \rangle) = 0, \end{aligned}$$

quedando finalmente demostrado el resultado. \square

Como consecuencias inmediatas del Teorema 4.12 obtenemos:

Corolario 4.15 *Una subvariedad pseudo-Riemanniana $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tiene contacto de orden k ($k \geq 3$) si y sólo si cada $u \in UM_s^n$ es autovector de $A_{(\nabla^j h)}(u^{j+2})$ para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$.*

Corolario 4.16 *Toda subvariedad isotrópica del espacio pseudo-Euclídeo con segunda forma fundamental paralela tiene número de contacto infinito.*

Observación 4.17 La hipótesis de isotropía es necesaria en el Corolario 4.16 anterior ya que, por ejemplo, el cilindro recto del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3

$$M_1^2 = \mathbb{L} \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie de Lorentz con segunda forma fundamental paralela y número de contacto $\mathbf{c}_\#(M_1^2) = 2$. \diamond

Corolario 4.18 *Toda subvariedad totalmente umbilical del espacio pseudo-Euclídeo tiene número de contacto infinito.*

Observación 4.19 La implicación recíproca en el Corolario 4.18 no es cierta como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo. Consideremos la inmersión isométrica dada por

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4 : (x, y) \mapsto (ax^2 + by^2, x, y, ax^2 + by^2),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq b$. La segunda forma fundamental h de ϕ verifica

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (2a, 0, 0, 2a), \quad h\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (2b, 0, 0, 2b) \text{ y } h\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0.$$

Entonces, $\phi(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{L}^4$ es una subvariedad 0-isotrópica con segunda forma fundamental paralela y número de contacto infinito, sin ser una subvariedad totalmente umbilical. \diamond

Como aplicación del Teorema 4.12 tenemos:

Ejemplo 4.20 Las expansiones tienen número de contacto infinito. En efecto, consideremos la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ definida por

$$\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_\ell(x), x, f_1(x), \dots, f_\ell(x)),$$

donde f_1, \dots, f_ℓ son funciones diferenciables reales sobre el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n . Se comprueba sin dificultad que la derivada covariante de cualquier orden de segunda forma fundamental h asociada verifica

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}^j h) \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^{j+2} f_1}{\partial x_\alpha \dots \partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^{j+2} f_\ell}{\partial x_\alpha \dots \partial x_\beta}, 0, \dots, 0, \frac{\partial^{j+2} f_1}{\partial x_\alpha \dots \partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^{j+2} f_\ell}{\partial x_\alpha \dots \partial x_\beta} \right) \end{aligned}$$

para cada $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, siendo (x_1, \dots, x_n) las coordenadas usuales de \mathbb{R}_s^n .

Entonces, para cada $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(X_1, \dots, X_{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(Y_1, \dots, Y_{j+2}) \rangle = 0$$

para todo campo $X_1, \dots, X_{i+1}, Y_1, \dots, Y_{j+2} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_s^n)$. Esto implica, junto al Teorema 4.12, que $\phi(\mathbb{R}_s^n) \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ tiene número de contacto infinito. \dagger

Ejemplo 4.21 Consideremos la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^8$ definida por

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(\cos(ax + by), \cos(ax - by), \operatorname{sen}(ax + by), \operatorname{sen}(ax - by), \right. \\ \left. \cos(bx + ay), \cos(bx - ay), \operatorname{sen}(bx + ay), \operatorname{sen}(bx - ay) \right),$$

donde $a = \sqrt{\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})}$ y $b = \sqrt{\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})}$. Se comprueba [ChL] que la segunda forma fundamental asociada h verifica

$$A_{h(e_\theta, e_\theta)} e_\theta = \frac{3}{2} e_\theta, \quad A_{(\bar{\nabla}^3 h)(e_\theta^3)} e_\theta = 0, \quad A_{(\bar{\nabla}^2 h)(e_\theta^4)} e_\theta = -\frac{1}{4} e_\theta, \\ A_{(\bar{\nabla}^3 h)(e_\theta^5)} e_\theta = 0, \quad A_{(\bar{\nabla}^4 h)(e_\theta^6)} e_\theta = \frac{1}{4} e_\theta - \frac{1}{8} ((\cos 7\theta) e_1 - (\operatorname{sen} 7\theta) e_2),$$

para cada vector unitario $e_\theta = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial y}$. El Teorema 4.12 nos asegura entonces que $\phi(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^8$ tiene número de contacto igual a $k = 6$. Notemos que el autovalor μ_j de $A_{(\bar{\nabla}^j h)(e_\theta^j)}$ es constante siempre que el orden de derivación j no exceda a $k - 3$. Además, $\mu_j = 0$ cuando j es impar. †

4.2.5. Propiedades

Estudiamos a continuación algunas de las propiedades que presenta toda subvariedad con orden de contacto determinado. En la prueba que damos de dichas propiedades, juega un papel fundamental la Argumentación del Polinomio de Hawking-Ellis.

Teorema 4.22 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana. Sea $k \geq 3$ y $\varepsilon = 1$ o -1 . Supongamos que, para cada punto p de M_s^n y cada vector unitario $u \in U_p M_s^n$ tal que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$, la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) tienen contacto de orden k . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *Para cada $i, j, a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i + j \leq k - 3$ y $0 \leq a \leq j$ se cumple*

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle = 0$$

siendo u, v vectores tangentes ortonormales en un punto con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$.

(2) Para cada $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i + j \leq k - 3$, el valor de

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \rangle = \lambda_{ij}(p)$$

no depende de la dirección unitaria u (espacial o temporal) tomada en cada punto $p \in M_s^n$.

Además, si el natural $i + j$ es impar, la función $\lambda_{ij} = 0$; y si $k \geq 4$ y $i + j \leq k - 4$, la función λ_{ij} es constante (independiente de cada punto).

Demostración: Veamos que en primer lugar que se verifica la propiedad (1).

Probemos por inducción la siguiente propiedad \mathcal{P}_r para $3 \leq r \leq k$:

“ Para cada $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i + j \leq r - 3$, cada punto $p \in M_s^n$ y cada par de vectores ortonormales u, v en p tales $\langle u, u \rangle = \varepsilon$ se cumple

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle = 0$$

donde $0 \leq a \leq j$. ”

Observemos que la propiedad \mathcal{P}_r es cierta para $r = 3$ ya que, por el Teorema 4.12 se verifica

$$0 = \langle A_{h(u,u)}u, v \rangle = \langle h(u, u), h(u, v) \rangle$$

para u, v vectores tangentes ortonormales en un punto p tales que $\langle u, u \rangle = \varepsilon$.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que la propiedad \mathcal{P}_r es cierta para cada $r = 3, \dots, k - 1$. Comprobamos que \mathcal{P}_k es cierta. Sean $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i + j \leq k - 3$ y u, v dos vectores ortonormales en un punto p con $\langle u, u \rangle = \varepsilon$.

Para $0 < a \leq j$ tenemos

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle \\ &= u \left(\langle (\bar{\nabla}^i h)(X^{i+2}), (\bar{\nabla}^{j-1} h)(X^a, Y, X^{j-a}) \rangle \right) \\ & \quad - \langle (\bar{\nabla}^{i+1} h)(u^{i+3}), (\bar{\nabla}^{j-1} h)(u^a, v, u^{j-a}) \rangle, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde X, Y son dos extensiones locales ortonormales de u y v , respectivamente, tales que $\nabla_w X = \nabla_w Y = 0$ para cada $w \in T_p M_s^n$. El primer sumando del

segundo miembro de igualdad (4.37) es cero por hipótesis de inducción pues $i + j - 1 \leq k - 4$. Por tanto, realizando el procedimiento anterior $j - a + 1$ veces resulta

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle \\ &= (-1)^{j-a+1} \langle (\bar{\nabla}^{i+j-a+1} h)(u^{i+j-a+3}), (\bar{\nabla}^{a-1} h)(u^a, v) \rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Si $a = 1$, la ecuación (4.38) se reduce a

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u, v, u^j) \rangle \\ &= (-1)^j \langle (\bar{\nabla}^{i+j} h)(u^{i+j+2}), h(u, v) \rangle = 0 \end{aligned}$$

por el Teorema 4.12. Cuando $a = 2$, de la ecuación de Codazzi (1.14), el Teorema 4.12 y la ecuación (4.38), resulta

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^2, v, u^{j-1}) \rangle \\ &= (-1)^{j-1} \langle (\bar{\nabla}^{i+j-1} h)(u^{i+j+1}), (\bar{\nabla} h)(u^2, v) \rangle \\ &= (-1)^{j-1} \langle (\bar{\nabla}^{i+j-1} h)(u^{i+j+1}), (\bar{\nabla} h)(u, v, u) \rangle \\ &= (-1)^j \langle (\bar{\nabla}^{i+j} h)(u^{i+j+2}), h(u, v) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Supongamos que $a \geq 3$. De la identidad de Ricci (1.16)

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}^{a-1} h)(u^a, v) - (\bar{\nabla}^{a-1} h)(u^{a-1}, v, u) \\ &= R^\perp(v, u)(\bar{\nabla}^{a-3} h)(u^{a-1}) - \sum_{t=0}^{a-2} (\bar{\nabla}^{a-3} h)(u^t, R(v, u)u, u^{a-2-t}). \end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación de Ricci (1.15) y del hecho de que $\langle R(v, u)u, u \rangle = 0$, llegamos a que

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^{a-1} h)(u^a, v) - (\bar{\nabla}^{a-1} h)(u^{a-1}, v, u), (\bar{\nabla}^{i+j-a+1} h)(u^{i+j-a+3}) \rangle \\ &= \langle [A_{(\bar{\nabla}^{a-3} h)(u^{a-1})}, A_{(\bar{\nabla}^{i+j-a+1} h)(u^{i+j-a+3})}]u, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

de nuevo por el Teorema 4.12. Entonces, siguiendo el procedimiento en (4.37), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle \\ &= (-1)^j \langle (\bar{\nabla}^{i+j} h)(u^{i+j+2}), h(u, v) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Igualmente, la propiedad (4.40) también se verifica para $a = 0$ como puede comprobarse sin dificultad. Hemos demostrado que la propiedad \mathcal{P}_r es cierta para $3 \leq r \leq k$, quedando demostrada la propiedad (1) buscada.

Comprobemos la propiedad (2). Dado un punto p de M_s^n y ciertos naturales $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i + j \leq k - 3$ definimos la aplicación

$$f_{ij} : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R} : w \mapsto \langle (\bar{\nabla}^i h)(w^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(w^{j+2}) \rangle,$$

donde Σ_p denota el conjunto de vectores tangentes unitarios en p . Bastará comprobar que la aplicación f_{ij} es constante. Consideremos el conjunto

$$\Sigma_p(\varepsilon) = \{u \in T_p M_s^n : \langle u, u \rangle = \varepsilon\} \subseteq \Sigma_p.$$

Sea $u \in \Sigma_p(\varepsilon)$, $v \in T_u(\Sigma_p(\varepsilon)) = \{v \in T_p M_s^n : \langle u, v \rangle = 0\}$ unitario y α una curva diferenciable $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \Sigma_p(\varepsilon)$ tal que $\alpha(0) = u$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces, la derivada direccional

$$\begin{aligned} v(f_{ij}) &= \left. \frac{d(f_{ij} \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{a=0}^{i+1} \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^a, v, u^{i-a+1}), (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \rangle \\ &\quad + \sum_{a=0}^{j+1} \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

por la propiedad (1). Esto significa que la aplicación f_{ij} es constante en cada componente conexa de $\Sigma_p(\varepsilon)$. Sea A una componente conexa de $\Sigma_p(\varepsilon)$ y λ_{ij} la constante definida por f_{ij} en A . Veamos que f_{ij} es constante en todo Σ_p . Distinguiamos dos casos:

Caso (a): Supongamos que el natural $i + j$ es par. Entonces, normalizando, la igualdad

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \rangle = \lambda_{ij} \langle u, u \rangle^{\frac{i+j}{2}+2}$$

es cierta para todo vector u tangente no luminoso tal que $u/\|u\| \in A$. Consideremos la curva $u_t = u + tv$ donde u es un vector tangente fijo (no luminoso) tal

que $u/\|u\| \in A$ y v es un vector tangente de carácter causal arbitrario. Entonces, por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $g(u_t, u_t) \cdot g(u, u) > 0$ y $u_t/\|u_t\| \in A$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Por tanto,

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(u_t^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u_t^{j+2}) \rangle = \lambda_{ij} \langle u_t, u_t \rangle^{\frac{i+j}{2}+2}.$$

Como tenemos una igualdad entre dos polinomios de grado $i + j + 4$, sus coeficientes del mismo grado coinciden y, en particular, se satisface

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(v^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(v^{j+2}) \rangle = \lambda_{ij} \langle v, v \rangle^{\frac{i+j}{2}+2}.$$

Esto último implica, junto a la arbitrariedad del carácter causal de v , que la función f_{ij} es constantemente igual a λ_{ij} en Σ_p .

Caso (b): Supongamos que el natural $i + j$ es impar. Consideremos la curva $u_t = u + tv$ donde u es un vector tangente (no luminoso) tal que $u/\|u\| \in A$ y v es un vector tangente de carácter causal arbitrario. De forma análoga al caso (a) anterior, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$ se verifica

$$P(t) = \lambda_{ij} \left(\sqrt{Q(t)} \right)^{i+j} Q^2(t), \quad (4.42)$$

donde $P(t) = \langle (\bar{\nabla}^i h)(u_t^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u_t^{j+2}) \rangle$ y $Q(t) = \varepsilon \langle u_t, u_t \rangle$. Elijamos el carácter causal de v de forma que $\text{Span}\{u, v\}$ sea un plano no degenerado de $T_p M_s^n$. Entonces, el polinomio

$$Q(t) = \varepsilon (\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle t^2)$$

no tiene raíces reales dobles, ya que tiene discriminante

$$4(\langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle) \neq 0.$$

En particular, si tomamos u, v ortonormales, $Q(t)$ es un polinomio de grado dos sin raíces reales dobles. Esto último, junto al hecho de que $i + j$ es impar y se verifica la ecuación (4.42), puede ser usado para deducir que necesariamente

$\lambda_{ij} = 0$ y, en consecuencia, el polinomio $P(t) = 0$. Por tanto, su coeficiente de grado $i + j + 4$ es

$$\langle (\bar{\nabla}^i h)(v^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(v^{j+2}) \rangle = 0.$$

Esto, junto a la arbitrariedad de elección del vector v , demuestra finalmente que λ_{ij} es constante en Σ_p .

Supongamos que $k \geq 4$ y $i + j \leq k - 4$. Sean u, v dos vectores ortonormales en un punto p . Entonces, si X es un campo tangente unitario tal que $X_p = u$ y $\nabla_w X = 0$ para todo $w \in T_p M_s^n$, tenemos

$$\begin{aligned} v(\lambda_{ij}) &= v(\langle (\bar{\nabla}^i h)(X^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(X^{j+2}) \rangle) \\ &= \langle (\bar{\nabla}^{i+1} h)(u^{i+2}, v), (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \rangle + \langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^{j+1} h)(u^{j+2}, v) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

por la propiedad (1) y, en consecuencia, la función λ_{ij} es constante al ser M_s^n conexa. \square

Como consecuencias inmediatas obtenemos:

Corolario 4.23 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana con número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) \geq k$ ($k \geq 3$). Entonces, existen $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-3} \in C^\infty(M_s^n)$ verificando las siguientes propiedades:*

- (1) $A_{(\bar{\nabla}^j h)(X^{j+2})} X = \lambda_j \langle X, X \rangle X$ para cada campo unitario $X \in \mathfrak{X}(M_s^n)$ y cada $j = 0, \dots, k - 3$.
- (2) Para cada j impar, la función $\lambda_j = 0$ donde $j = 0, \dots, k - 3$.
- (3) Si $k \geq 4$ y $j \leq k - 4$, la función λ_j es constante.

Corolario 4.24 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad pseudo-Riemanniana con número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) \geq k$ ($k \geq 3$). Entonces, para todo vector tangente $v \in TM_s^n$ y cada $j = 0, \dots, k - 3$ impar, $A_{(\bar{\nabla}^j h)(v^{j+2})} v = 0$.*

Corolario 4.25 *Para una subvariedad del espacio pseudo-Euclídeo con número de contacto infinito, el valor de $\langle (\bar{\nabla}^i h)(u^{i+2}), (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \rangle = \lambda_{ij}$ es independiente tanto de la dirección unitaria u como del punto elegidos para cada $i, j \geq 0$. Además, si el natural $i + j$ es impar, la función $\lambda_{ij} = 0$.*

Observación 4.26 Los tres Corolarios anteriores son igualmente ciertos si en la hipótesis intercambiamos el número de contacto por el número de contacto espacial (resp. temporal). \diamond

4.2.6. Invariancia causal del número de contacto

El siguiente resultado establece la estrecha relación existente entre las nociones de orden de contacto, orden de contacto espacial y temporal, obteniéndose como consecuencia inmediata que los tres conceptos de número de contacto coinciden.

Teorema 4.27 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad con métrica inducida indefinida. Dado un natural $k \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. M_s^n tiene contacto de orden k .
2. M_s^n tiene contacto espacial de orden k .
3. M_s^n tiene contacto temporal de orden k .

En particular, los números de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \mathbf{c}_{\sharp}^+(M_s^n) = \mathbf{c}_{\sharp}^-(M_s^n)$.

Demostración: Es evidente que se cumple $\mathbf{c}_{\sharp}^+(M_s^n) \geq k$ y $\mathbf{c}_{\sharp}^-(M_s^n) \geq k$ cuando el número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) \geq k$. Comprobemos la implicación $2 \Rightarrow 1$. La implicación $3 \Rightarrow 1$ se demuestra análogamente.

Razonemos por inducción sobre el orden de contacto k . Observemos que el resultado es cierto para $k = 3$. En efecto, por la propiedad (2) del Teorema 4.22, el valor de $\langle h(u, u), h(u, u) \rangle = \lambda(p)$ es independiente del vector unitario u elegido en cada punto p . Esto equivale, por el Teorema 4.11, a que $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) \geq 3$.

Sea $k > 3$. Supongamos que $\mathbf{c}_\#^+(M_s^n) \geq k$ y, por hipótesis de inducción, $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq k-1$. Dado un punto p de M_s^n definimos para cada $j = 0, 1, \dots, k-3$ la aplicación

$$f_j : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R} : w \mapsto \langle (\bar{\nabla}^j h)(w^{j+2}), h(w, w) \rangle,$$

donde Σ_p denota el conjunto de vectores tangentes unitarios en p . Sean u, v dos vectores tangentes ortonormales en p . Como f_j es constante por el Teorema 4.22, la derivada direccional

$$\begin{aligned} v(f_j) &= \sum_{a=0}^{j+1} \langle (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}), h(u, u) \rangle \\ &\quad + 2 \langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(u, v) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sean X e Y son dos extensiones locales ortonormales de u y v tales que $\nabla_w X = \nabla_w Y = 0$ para cada $w \in T_p M_s^n$. Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción resulta

$$\begin{aligned} &\langle (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}), h(u, u) \rangle \\ &= u \left(\langle (\bar{\nabla}^{j-1} h)(X^a, Y, X^{j-a}), h(X, X) \rangle \right) \\ &\quad - \langle (\bar{\nabla}^{j-1} h)(u^a, v, u^{j-a}), (\bar{\nabla} h)(u^3) \rangle \\ &= - \langle (\bar{\nabla}^{j-1} h)(u^a, v, u^{j-a}), (\bar{\nabla} h)(u^3) \rangle. \end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga a la prueba del Teorema 4.22, deducimos que

$$\begin{aligned} &\langle (\bar{\nabla}^j h)(u^a, v, u^{j-a+1}), h(u, u) \rangle \\ &= (-1)^j \langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(u, v) \rangle. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Entonces, las ecuaciones (4.43) y (4.44) implican que $\langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(u, v) \rangle = 0$; lo que significa, por el Corolario 4.15, que el número de contacto $\mathbf{c}_\#(M_s^n) \geq k$ como queríamos probar. \square

Dicho de otra forma, para determinar el contacto de una subvariedad bastará con estudiar su comportamiento solamente respecto a direcciones espaciales

o temporales. La curiosidad de este resultado radica en que, en general, la geometría pseudo-Riemanniana no conserva las mismas propiedades espaciales y temporales. Por ejemplo, véase [O'N2, p. 154], existen variedades de Lorentz con todas sus geodésicas espaciales completas y con geodésicas temporales incompletas. El número de contacto es, en este sentido, un *invariante causal*.

4.2.7. Resultados

Para hipersuperficies del espacio pseudo-Euclídeo tenemos, como una generalización de un resultado de B.- Y. Chen y S.- J. Li [ChL, Corolario 5.2]:

Corolario 4.28 *Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+1}$ una hipersuperficie pseudo-Riemanniana. Entonces, se verifica una de las siguientes situaciones excluyentes:*

- (1) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = 2$.
- (2) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ y M_s^n es un trozo abierto de un n -plano no degenerado Π de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+1}$.
- (3) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle > 0$ y M_s^n es un trozo abierto de una pseudo-esfera $\mathbb{S}_s^n \subseteq \mathbb{R}_s^{n+1}$ de centro y radio determinados.
- (4) $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle < 0$ y M_s^n es un trozo abierto de un espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+1}$ de centro y radio determinados.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) \geq 3$. Entonces, por el Teorema 4.11, M_s^n es una hipersuperficie isotrópica y, en consecuencia, totalmente umbilical (ver el apartado 3 de la Observación 2.5). Teniendo en cuenta la Proposición 1.13, el Teorema 1.14 y el Corolario 4.18 anterior, obtenemos finalmente el resultado buscado. \square

El comportamiento con respecto al número de contacto de una subvariedad de Lorentz en el espacio de Lorentz-Minkowski de cualquier codimensión es

similar al comportamiento de las hipersuperficies del espacio pseudo-Euclídeo, como el siguiente resultado establece:

Corolario 4.29 *Sea M_1^n una subvariedad de Lorentz del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+d} . Entonces, se verifica una de las siguientes situaciones excluyentes:*

- (1) $\mathbf{c}_\#(M_1^n) = 2$.
- (2) $\mathbf{c}_\#(M_1^n) = \infty$ y M_1^n es un trozo abierto de un n -plano de Lorentz.
- (3) $\mathbf{c}_\#(M_1^n) = \infty$ y M_1^n es un trozo abierto de un espaciotiempo de De Sitter $\mathbb{S}_1^n(r, c)$ contenido en un $(n + 1)$ -plano de Lorentz.

Demostración: De forma similar a la prueba del resultado anterior teniendo en cuenta esta vez el apartado 2 de la Observación 2.5. \square

Recordemos que una subvariedad del espacio de Lorentz-Minkowski se dice *espacial* si con la métrica inducida la subvariedad es Riemanniana. Siguiendo la misma línea de resultados, para las subvariedades espaciales de codimensión dos del espacio de Lorentz-Minkowski tenemos:

Corolario 4.30 *Sea $M^n \subseteq \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial completa. Entonces, se verifica una de las siguientes situaciones excluyentes:*

- (1) $\mathbf{c}_\#(M^n) = 2$.
- (2) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es un n -plano \mathbb{R}^n de \mathbb{L}^{n+2} .
- (3) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es una n -esfera $\mathbb{S}^n(r, c) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de centro y radio determinados.
- (4) $\mathbf{c}_\#(M^n) = \infty$ y M^n es un espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(r, c) \subseteq \mathbb{L}^{n+1}$ de centro y radio determinados.

(5) $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = \infty$ y M^n es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$ totalmente umbilical y no totalmente geodésica.

(6) $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = \infty$ y M^n es congruente a una expansión de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}_{0,1}^{n+1}$ no totalmente umbilical.

Demostración: De forma similar a la prueba de los dos resultados anteriores, teniendo en cuenta el Teorema 3.36 y el Ejemplo 4.20. \square

Si exigir completitud tenemos:

Lema 4.31 Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+2}$ una subvariedad 0-isotrópica. Entonces, M_s^n tiene número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$.

Demostración: Sea $p \in M_s^n$ un punto no totalmente geodésico. Por el Lema 3.33, el primer espacio normal $Im(h)$ es una recta luminosa. Veamos que $(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \in Im(h)$ siendo u un vector tangente unitario u en p . Si $h(u, u) \neq 0$, por el Corolario 2.18 tenemos

$$\langle (\bar{\nabla} h)(u^3), h(u, u) \rangle = 0$$

y, consecuentemente, $(\bar{\nabla} h)(u^3) \in Im(h)$. Si $h(u, u) = 0$, elegimos un vector unitario v tal que $h(v, v) \neq 0$. Sean X, Y extensiones locales ortonormales respectivas de u, v satisfaciendo $\nabla_w X = \nabla_w Y = 0$ para todo $w \in T_p M_s^n$. Como $\langle h(X, X), h(Y, Y) \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= u(\langle h(X, X), h(Y, Y) \rangle) \\ &= \langle (\bar{\nabla} h)(u^3), h(v, v) \rangle + \langle h(u, u), (\bar{\nabla} h)(v, v, u) \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla} h)(u^3), h(v, v) \rangle, \end{aligned}$$

y $(\bar{\nabla} h)(u^3) \in Im(h)$.

Por el método de inducción, supongamos que $(\bar{\nabla}^r h)(u^{r+2}) \in Im(h)$ para cada punto p no totalmente geodésico, cada $u \in U_p M_s^n$ y $r = 0, 1, 2, \dots, j-1$. Tomemos un par de vectores ortonormales $u, v \in U_p M_s^n$ tales que $h(v, v) \neq 0$.

Sea \mathcal{V} el conjunto de los punto no totalmente geodésicos de la subvariedad $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+1}^{n+2}$. Claramente \mathcal{V} es un abierto no vacío de M_s^n . Eligiendo convenientemente para u y v dos extensiones locales ortonormales X e Y definidas en un cierto entorno abierto de \mathcal{V} , obtenemos de la igualdad (cierta por hipótesis de inducción)

$$\langle (\bar{\nabla}^{j-1}h)(X^{j+1}), h(Y, Y) \rangle = 0$$

que

$$\begin{aligned} 0 &= u(\langle (\bar{\nabla}^{j-1}h)(X^{j+1}), h(Y, Y) \rangle) \\ &= \langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(v, v) \rangle + \langle (\bar{\nabla}^{j-1}h)(u^{j+1}), (\bar{\nabla}h)(v^2, u) \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(v, v) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $(\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}) \in \text{Im}(h)$, y en particular $\langle (\bar{\nabla}^j h)(u^{j+2}), h(u, v) \rangle = 0$.

Finalmente, el Teorema 4.12 nos asegura que $\mathbf{c}_\#(M_s^n) = \infty$. \square

Ejemplo 4.32 Consideremos la inmersión isométrica $\phi : A \rightarrow \mathbb{L}^4$ dada por

$$\phi(x_3, x_4) = \begin{cases} (0, f(x_3, x_4), x_3, x_4) & \text{si } x_4 \geq 0 \\ (f(x_3, x_4), 0, x_3, x_4) & \text{si } x_4 < 0, \end{cases},$$

como en la Observación 3.37. Entonces, ϕ define una subvariedad de \mathbb{L}^4 con número de contacto infinito (sin ser congruente a una expansión). \diamond

4.3. Subvariedades con secciones normales geodésicas

En [ChV] B.- Y. Chen y P. Verheyen estudiaron la geometría diferencial de aquellas subvariedades del espacio Euclídeo con secciones normales geodésicas probando, en particular, que tales subvariedades son constantemente isotrópicas.

Generalizando la noción equivalente Riemanniana, diremos que una subvariedad pseudo-Riemanniana M_s^n del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ tiene *secciones normales geodésicas* cuando, para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario $u \in T_p M_s^n$, la geodésica γ_u y la sección normal β_u en (p, u) coinciden en todo un entorno de 0.

Obviamente tenemos que cada subvariedad M_s^n de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con secciones normales geodésicas tiene número de contacto infinito. En particular, teniendo en cuenta la relación entre la isotropía y el número de contacto de una subvariedad (Teorema 4.11):

Teorema 4.33 *Cada subvariedad M_s^n de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ con secciones normales geodésicas es constantemente isotrópica y tiene número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$.*

Cuando la subvariedad es localmente simétrica se verifica el recíproco:

Teorema 4.34 *Sea M_s^n una subvariedad de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ localmente simétrica con número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$. Entonces, M_s^n tiene secciones normales geodésicas.*

Demostración: Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M_s^n . Como M_s^n es localmente simétrica y ∇ es libre de torsión entonces, respecto al atlas formado por los sistemas de entornos normales [KN, Teorema VI.7.7], M_s^n es una variedad analítica y la conexión ∇ es analítica. En particular, cada geodésica y cada sección normal de M_s^n es una curva analítica. Sea $p \in M_s^n$ y $u \in T_p M_s^n$ unitario. Como $\mathbf{c}_{\sharp}(M_s^n) = \infty$ resulta que, de la analiticidad y desarrollando en serie de Taylor, la geodésica γ_u y sección normal β_u en (p, u) coinciden en todo un entorno de 0, quedando de esta forma demostrado el resultado. \square

Observación 4.35 En el resultado anterior la hipótesis de que la subvariedad sea localmente simétrica podemos sustituirla por el hecho de que la subvariedad sea analítica, obteniéndose la misma conclusión. \diamond

Ejemplo 4.36 Toda subvariedad totalmente umbilical del espacio pseudo-Euclídeo tiene secciones normales geodésicas, ya que tales subvariedades son localmente simétricas y tienen número de contacto infinito por el Corolario 4.18. †

Ejemplo 4.37 Expansiones analíticas. Consideremos la inmersión isométrica $\phi : \mathbb{R}_s^n \rightarrow \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ definida por

$$\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_\ell(x), x, f_1(x), \dots, f_\ell(x)),$$

donde f_1, \dots, f_ℓ son funciones analíticas reales sobre el espacio pseudo-Euclídeo \mathbb{R}_s^n . Entonces, $\phi(\mathbb{R}_s^n) \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+2\ell}$ tiene secciones normales geodésicas, pues tiene número de contacto infinito. †

Teorema 4.38 *Cada subvariedad del espacio pseudo-Euclídeo con geodésicas planas tiene secciones normales geodésicas.*

Demostración: Sea $M_s^n \subseteq \mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$ una subvariedad con geodésicas planas. Del Lema 4.1 se tiene que la subvariedad es constantemente isotrópica y, si u es un vector unitario tangente en un punto p , la geodésica γ_u en (p, u) es una curva que está contenida en el 2-plano $p + \text{Span}\{u, h(u, u)\}$. En particular, esto demuestra que la curva γ_u está contenida en $E_\delta(p, u)$ y γ_u es sección normal en (p, u) . □

Ejemplo 4.39 Las inmersiones de Veronese indefinidas tienen secciones normales geodésicas, ya que este tipo de subvariedades tienen geodésicas planas (Ejemplo 2.9 y Teorema 4.4). †

Como en el caso definido [ChV], tenemos el siguiente resultado de caracterización:

Teorema 4.40 *Sea M_s^n una subvariedad de $\mathbb{R}_{s+\ell}^{n+d}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. M_s^n tiene secciones normales geodésicas.
2. Para cada punto p de M_s^n y cada vector tangente unitario u en p , la sección normal β_u en (p, u) satisface $\beta_u(t) \in E_\delta(\beta_u(t), \beta'_u(t))$ para cada $t \in \text{Dom}(\beta_u)$, donde el índice δ viene dado por $\delta = \ell$ si u es espacial o $\delta = \ell + 1$ si u es temporal

Demostración: La implicación $1 \Rightarrow 2$ se sigue de la unicidad de las geodésicas. Recíprocamente, supongamos que la condición 2 es cierta. Sea u un vector tangente unitario en $p \in M_s^n$. Consideremos la sección normal β_u en (p, u) . Entonces, para $t \in \text{Dom}(\beta_u)$ fijo, tenemos por hipótesis que la curva β_u está contenida en $E_\delta(\beta_u(t), \beta'_u(t))$. Así, de la igualdad $\beta''_u(t) = \nabla_{\beta_u(t)}\beta'_u + h(\beta'_u(t), \beta'_u(t))$, se deduce que $\nabla_{\beta_u(t)}\beta'_u = 0$ porque $\nabla_{\beta_u(t)}\beta'_u$ es ortogonal a $E_\delta(\beta_u(t), \beta'_u(t))$. Dada la arbitrariedad de elección de $t \in \text{Dom}(\beta_u)$, la sección normal β_u es geodésica. \square

Dicho de otra forma, para que una subvariedad tenga secciones normales geodésicas es necesario y suficiente que cualquier curva de la subvariedad γ que sea sección normal en $(\gamma(0), \gamma'(0))$ sea también sección normal en $(\gamma(t), \gamma'(t))$ para cada $t \in \text{Dom}(\gamma)$.

4.4. Subvariedades helicoidales

Una subvariedad Riemanniana M^n del espacio Euclídeo \mathbb{R}^{n+d} se dice *helicoidal* si cada geodésica unitaria γ de M^n , considerada como una curva de \mathbb{R}^{n+d} , tiene todas sus curvaturas constantes e independientes de la geodésica elegida. O equivalentemente, si cada geodésica unitaria γ de M^n es una hélice de \mathbb{R}^{n+d} con curvaturas independientes de la geodésica γ elegida. Observemos que es posible definir una adaptación de este concepto para subvariedades del espacio pseudo-Euclídeo [Fu]. No obstante, para lograr los objetivos propios de este párrafo, nos restringimos el caso definido.

El concepto de subvariedad helicoidal es debido a A. Besse [Be2]. En este libro, se demuestra que toda variedad fuertemente armónica admite una inmersión isométrica minimal en una esfera satisfaciendo la propiedad helicoidal. En efecto, recordemos que una variedad Riemanniana compacta M^n se dice *fuertemente armónica* si existe una función $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $K(p, q, t) = \Psi(\delta(p, q), t)$ para cada $p, q \in M^n$ y $t \in \mathbb{R}_0^+$, donde δ denota la función distancia en M^n y $K : M^n \times M^n \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la ecuación del calor. Los espacios simétricos de rango uno son ejemplos conocidos de variedades fuertemente armónicas [Be2, p. 158]. Sea λ_k el k -ésimo autovalor no nulo del Laplaciano Δ . Denotemos por V_k al subespacio propio asociado al autovalor λ_k . En V_k se define la métrica $\langle\langle f, h \rangle\rangle = \int_{M^n} fh * 1$. Entonces, V_k dotado con $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ es un espacio vectorial métrico Euclídeo finito-dimensional. Sea $\phi_k^1, \dots, \phi_k^m$ una base ortonormal de V_k . Entonces, la aplicación

$$\phi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^m : p \mapsto c_k(\phi_k^1(p), \dots, \phi_k^m(p))$$

define una inmersión isométrica helicoidal para una constante real conveniente c_k , que es minimal en una hipersfera de \mathbb{R}^m ([ChL, ChV, Sak1, V]).

Por otra parte, en el año 1984 B.-Y. Chen y P. Verheyen [ChV] demostraron, apoyándose en el estudio realizado por K. Sakamoto [Sak1] sobre subvariedades helicoidales, que toda subvariedad helicoidal tiene secciones normales geodésicas. Un año después P. Verheyen [V] demostró la implicación recíproca, que no resultaba ser tan inmediata.

El objetivo básico de este párrafo es dar una nueva interpretación geométrica de la noción de subvariedad helicoidal a partir del número de contacto, y obtener una nueva demostración del resultado de P. Verheyen como consecuencia:

Teorema 4.41 *Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^m$ una subvariedad Riemanniana. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = \infty$.
2. M^n es helicoidal.
3. M^n tiene secciones normales geodésicas.

Demostración: La implicación $3 \Rightarrow 1$ es obvia. Veamos que $2 \Rightarrow 3$ y $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 3$. Sea u un vector tangente unitario en un punto $p \in M^n$. Supongamos que la geodésica $\gamma = \gamma_u$ es una hélice de orden propio d en \mathbb{R}^m . Sea T el campo de velocidades de γ . Entonces [Sak1], el referencial de Frenet de γ viene dado por

$$\begin{aligned} V_1 &= T, \\ V_j &= \sum_i b_{ji} (\bar{\nabla}^{i-2} h)(T^i), \end{aligned}$$

donde $j \in \{1, \dots, d\}$ y donde i toma sus valores en $\{2, 4, \dots, j\}$ si j es par y valores en $\{3, 5, \dots, j\}$ si j es impar. Por convenio ponemos $(\bar{\nabla}^{-1} h)(T) = T$. Los coeficientes b_{ji} son funciones de las curvaturas de Frenet $\kappa_1, \dots, \kappa_{j-1}$ de γ (que son constantes). Esto demuestra, junto al hecho conocido de que la curva γ está contenida en un d -plano de \mathbb{R}^m [Sp, Vol. 4, Teorema 7.5], que la geodésica γ está contenida en el d -plano $p + \text{Span}\{V_1(0), \dots, V_{d-1}(0)\}$. En particular, γ está contenida en $E_0(p, u)$ y γ es sección normal, como queríamos probar.

$1 \Rightarrow 2$. Sea u un vector tangente unitario en un punto $p \in M^n$. Supongamos que la geodésica $\gamma = \gamma_u$ es una curva de Frenet de orden propio d en \mathbb{R}^m . Veamos que las curvaturas de Frenet $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ de γ son constantes e independientes tanto del punto p como del vector tangente unitario u elegidos. Como por hipótesis el número de contacto $\mathbf{c}_{\sharp}(M^n) = \infty$, de la ecuación (4.28)

podemos escribir

$$\gamma^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k a_{kj} (\bar{\nabla}^{j-2} h)(T^j) \quad (4.45)$$

para cada natural k . Además, los valores de a_{kj} determinados por (4.45) son independientes de p y u por los Corolarios 4.23 y 4.25. Para terminar basta observar que el referencial de Frenet $\{V_1, \dots, V_d\}$ de γ se obtiene de $\{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(d)}\}$ realizando el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt y tener en cuenta de nuevo el Corolario 4.25. \square

Como ejemplo de aplicación del Teorema 4.41 anterior y en virtud de la clasificación [HH] de las superficies helicoidales de \mathbb{R}^6 tenemos:

Corolario 4.42 *Sea M^2 una superficie isométricamente inmersa en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^6 . Entonces, $\mathbf{c}_{\#}(M^2) = \infty$ si y sólo si M^2 es un trozo abierto de una de las siguientes tres superficies:*

- (1) *Un 2-plano de \mathbb{R}^6 .*
- (2) *Una 2-esfera ordinaria contenida en un 3-plano de \mathbb{R}^6 .*
- (3) *Una superficie de Veronese contenida en un hiperplano de \mathbb{R}^6 determinada por una inmersión $\phi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}/a) \rightarrow \mathbb{S}^4(1/a)$ del tipo*

$$\phi(x, y, z) = a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} yz, \frac{1}{\sqrt{3}} xz, \frac{1}{\sqrt{3}} xy, \frac{1}{2\sqrt{3}} (x^2 - y^2), \frac{1}{6} (x^2 + y^2 - 2z^2) \right),$$

donde $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Observación 4.43 Terminemos señalando que el Corolario 4.42 puede ser también deducido del Teorema 7.1 de [ChL]. Nosotros lo hemos obtenido de una forma diferente y directa a través del Teorema 4.41 de caracterización de las subvariedades con secciones normales geodésicas o helicoidales mediante el número de contacto. \diamond

Bibliografía

Bibliografía

- [ANS] R. Aiyama, H. Nakagawa y Y. J. Suh, Semi-Kaehlerian submanifolds of an indefinite complex space form, *Kodai Math. J.* **11**(1988), 325-343.
- [AR] L. J. Alías y A. Romero, Integral formulas for compact spacelike submanifolds in de Sitter apaces. Applications to the parallel mean curvature vector case, *Manuscripta Math.* **87**(1995), 405–416.
- [AER] L. J. Alías, J. M. Estudillo y A. Romero, Spacelike submanifolds with parallel mean curvature in pseudo-Riemannian space forms, *Tsukuba J. Math.* **21**(1997), 169–179.
- [BR] M. Barros y A. Romero, Indefinite Kähler manifolds, *Math. Ann.* **261**(1982), 55–62.
- [Be1] A. L. Besse *Einstein Manifolds* Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Be2] A. L. Besse *Manifolds all of whose geodesic are closed* Ergebnisse der Mathematik, Bd. 93. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1978.
- [B1] C. Blomstrom, Planar geodesic immersions in pseudo-Euclidean space, *Math. Ann.* **274**(1986), 585–598.
- [B2] C. Blomstrom, Symmetric immersions in pseudo-Euclidean space forms, *Global differential geometry and global analysis.* **1156**(1985), 30–45.

- [Bo] N. Boumuki, Isotropic Immersions with Low Codimension of Complex Space Forms into Real Space Forms, *Canad. Math. Bull.* **47**(2004), 492–503.
- [BM] N. Boumuki y S. Maeda, Study of Isotropic Immersions, *Kyungpook Math. J.* **45**(2005), 363–394.
- [CFG1] J. L. Cabrerizo, M. Fernández y J. S. Gómez, Rigidity of pseudo-isotropic immersions, enviado para su posible publicación.
- [CFG2] J. L. Cabrerizo, M. Fernández y J. S. Gómez, The contact number of a pseudo-Euclidean submanifold, *Taiwanese J. Math.*, aceptado para su publicación.
- [Ch1] B.- Y. Chen, Finite type submanifolds in pseudo-Euclidean spaces and applications, *Koday Math. J.* **8**(1985), 358–374.
- [Ch2] B.- Y. Chen *Geometry of submanifolds* Ed. Pure and Applied Math, New York, 1973.
- [ChL] B.- Y. Chen y S.- J. Li, The contact number of a Euclidean submanifold, *Pro. Edinb. Math.* **47**(2004), 69–100.
- [ChV] B.- Y. Chen y P. Verheyen, Submanifolds with geodesic normal sections, *Math. Ann.* **269**(1984), 417–429.
- [D1] M. Dajczer, Reduction of codimension of isometric immersions between indefinite Riemannian manifolds, *Rev. Un. Mat. Arg.* **31**(1984), 167–178.
- [D2] M. Dajczer *Submanifolds and isometric immersions* Mathematics Lectures Series **13**, Publish and Perish, Houston, 1990.
- [DF] M. Dajczer y S. Fornari, Isometric immersions between indefinite Riemannian spheres, *Yokohama Math. J.* **35**(1987), 61–69.

- [DN] M. Dajczer y K. Nomizu, On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **11**(1980), 25–30.
- [DR] M. Dajczer y L. Rodriguez, Rigidity of codimension two indefinite spheres, *Geom. Dedicata* **34**(1990), 243–248.
- [E] J. Erbacher, Reduction of the codimension of an isometric immersion, *J. Diff. Geom.* **5**(1971), 343–340.
- [F1] D. Ferus, Immersions with parallel second fundamental form, *Math. Z.* **140**(1974), 87–92.
- [F2] D. Ferus, Symmetric Submanifolds of Euclidean Space, *Math. Ann.* **247**(1980), 81–93.
- [FS] D. Ferus y S. Schirmacher, Submanifolds in Euclidean Space with Simple Geodesic, *Math. Ann.* **260**(1982), 57–62.
- [Fu] S. Fueki, Pointed helical submanifolds of pseudo-Riemannian manifolds, *J. Geom.* **62**(1998), 129–143.
- [HE] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis *The large-scale structure of space-time* Cambridge-London-New York-Melbourne, Cambridge University Press, 1973.
- [H] S. Hegalson *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* Academic Press, New York, 1978.
- [Ho] S. L. Hong, Isometric immersions of manifolds with planar geodesics into Euclidean space, *J. Diff. Geom.* **8**(1983), 259–278.
- [HH] Y. Hong y C.-S. Houg, Helical immersions and normal sections, *Kodai Math. J.* **8**(1985), 259–278.

- [Ish] T. Ishihara, Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature, *Michigan Math. J.* **35**(1988), 345–352.
- [IO1] T. Itoh y K. Ogiue, Isotropic immersions, *J. Diff. Geom.* **8** (1973), 171–192.
- [IO2] T. Itoh y K. Ogiue, Isotropic immersions and Veronese submanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **209**(1975), 109–117.
- [IO3] T. Itoh y K. Ogiue, On 3 dimensional isotropic submanifolds of a space form, *Tr. J. Math.* **22**(1998), 461–473.
- [J] H. Jacobowitz, The Gauss-Codazzi equations, *Tensor* **39**(1982), 15–22.
- [Ka] S. M. B. Kashani, On some compact spacelike submanifolds of pseudo-sphere, *Geom. Dedicata* **108**(2004), 125–130.
- [Kim] Y. H. Kim, Minimal Surfaces of pseudo-Euclidean spaces with geodesic normal sections, *Diff. Geom. Applic.* **5**(1995), 321–329.
- [KN] S. Kobayashi y K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry* Wiley Inters. Publ. New York, 1963.
- [Ku] R. Kulkarni, The values of sectional curvature in indefinite metric, *Comment. Math. Helv.* **54**(1979), 173–176.
- [L] J. A. Little, Manifolds with planar geodesics, *J. Diff. Geom.* **11**(1976), 265–285.
- [Ma] S. Maeda, A caracterizacion of constant isotropic immersions by circles, *Arch. Math. (Basel)* **81**(2003), 90–95.
- [M] M. A. Magid, Isometric immersions of Lorentz Spaces with parallel second fundamental forms, *Tsukuba J. Math.* **8**(1984), 31–54.

- [MaS] M. Mars y J. M. M. Senovilla, Trapped surfaces and symmetries, *Class. Quantum Grav.* **20**(2003), 293–300.
- [Mar] J. E. Marsden, On completeness of pseudo-Riemannian manifolds, *Indiana Univ. Math. J.* **22**(1973), 1065–1066.
- [MU] S. Montiel y F. Urbano, Isotropic totally real submanifolds, *Math. Z.* **199**(1988), 55–60.
- [MS] S. B. Myers y N. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold, *Annals of Math.* **40**(1939), 400–416.
- [Na1] H. Naitoh, Isotropic submanifolds with parallel second fundamental form in symmetric spaces, *Osaka J. Math.* **17**(1980), 95–110.
- [Na2] H. Naitoh, Isotropic submanifolds with parallel second fundamental form in $P^m(c)$, *Osaka J. Math.* **18**(1981), 427–464.
- [Na3] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R-spaces, *Osaka J. Math.* **21**(1984), 733–764.
- [N] K. Nomizu, Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions, *Tôhoku Math. J.* **28**(1976), 613–617.
- [O’N1] B. O’Neill, Isotropic and Kaehler immersions, *Canad. J. Math.* **17**(1965), 907–915.
- [O’N2] B. O’Neill *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity* Ac. Press, New York, 1983.
- [O’N3] B. O’Neill, The fundamental equations of a submersion, *Mich. Math. J.* **13**(1966), 459–469.
- [O’N4] B. O’Neill, Umbilics of constant curvature immersions, *Duke Math. J.* **32**(1965), 149–160.

- [Pk] J. S. Pak, Planar geodesic submanifolds in complex space forms, *Kodai J. Math.* **1**(1978), 187–196.
- [PR] F. J. Palomo y A. Romero *Certain actual topics on modern Lorentzian Geometry* Handbook of Mathematics, Katholieke Univ. Leuven, 2005.
- [Pe] R. Penrose *El camino a la realidad* Ed. Debate, Barcelona, 2006.
- [R1] A. Romero, An extension of Calabi’s rigidity theorem to complex submanifolds of indefinite complex space form, *Manuscripta Math.* **59**(1987), 261–276.
- [R2] A. Romero, The introduction of Bochner’s technique on Lorentzian manifolds, *Nonlinear Analysis* **47**(2001), 3047–3059.
- [RS] A. Romero y Y. J. Suh, Differential geometry of indefinite complex submanifolds in indefinite complex space forms, *Extracta Mathematicae* Vol. 19 Núm. 3 (2004), 339–398.
- [SW] R. K. Sachs y H. Wu *General Relativity for Mathematicians* Springer-Verlag, 1977.
- [Sak1] K. Sakamoto, Helical immersions into a unit sphere, *Math. Ann.* **261**(1982), 63–80.
- [Sak2] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, *Tôhoku Math. J.* **29**(1977), 25–56.
- [Sp] M. Spivak *Differential Geometry* Publish or Perish, Berkeley, Vol. **1–5**, 1979.
- [St] N. Steenrod *The topology of fibre bundles* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

- [Sui] K. Suizu, Circles and totally geodesic Kähler submanifolds, *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ.* **35**(2002), 23–28.
- [Sun] H. Sun, On spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space form, *Note di Matematica* **15**(1995), 215–224.
- [Sz] R. H. Szczarba, On existence and rigidity of isometric immersions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75**(1969), 783–787.
- [Ts] K. Tsukada, Helical geodesic immersions of compact rank one symmetric spaces into spheres, *Tokyo J. Math.* **6**(1983), 267–285.
- [V] P. Verheyen, Submanifolds with geodesic normal sections are helical, *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino* **43**(1985), 511–527.
- [Vr] L. Vrancken, Some remark on isotropic submanifolds, *Publications de L'Institut Mathématique. Nouvelle série tome 51.* **65**(1992), 94–100.
- [W] T. Weinstein *An introduction to Lorentz surfaces* Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1996.
- [Wo] J. A. Wolf *Spaces of constant curvature* Fifth edition, Publish or Perish, 1984.