UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

MONOTONICIDAD GENERALIZADA

Tesis presentada por

Gabriel Ruiz Garzón

para optar al Grado de Doctor

por la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Junio 1999

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ Los directores de la tesis

Prof. Dr. D. Antonio Rufián Lizana Prof. Dra. Dña. Rafaela Osuna Gómez

Rafi Osuna

el Dpto. de Estadística e I.O.
Facultad de Matemáticas
28 de Junio
15 de Septiembre
15 Septiembre de 1999

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA · UNIVERSIDAD DE SEVILLA

161 92

Índice

INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones convexas y afines, convexidad generalizada, ha sido de gran importancia en los últimos años.

Dado el Problema de Programación Matemática escalar

$$(MP) \qquad \min \theta(x)$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in X$$

donde $\theta : X \subseteq I\!R^n \to I\!R$.

La convexidad generalizada nos ayuda en la búsqueda de condiciones de optimalidad para soluciones del Problema de Programación Matemática (MP).

Es importante poder asegurar la convexidad del modelo (MP), es decir, que $X \subseteq I\!R^n$ sea convexo y la función objetivo θ sea convexa, puesto que con ello se consiguen importantes resultados, como por ejemplo:

1. El conjunto de soluciones óptimas es convexo.

2. Todo mínimo local es global.

3. Un punto que verifique las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker es un mínimo.

4. Si existe un mínimo y θ es estrictamente convexa, entonces el mínimo es único.

Algunas de estas propiedades son compartidas por clases de funciones más generales que las convexas, lo que ha dado lugar al estudio de la convexidad generalizada y posteriormente al de la monotonicidad generalizada.

Al igual que en Karamardian, S. y Schaible, S. [17], se demostraba que la convexidad generalizada de θ era equivalente a la monotonicidad generalizada de $\nabla\theta$, en esta memoria estableceremos las relaciones existentes entre la invexidad generalizada de la función θ y la invex monotonicidad generalizada de la función gradiente.

En el Problema de Desigualdad Variacional (VIP), y que estudiaremos más detenidamente después, se trataría de encontrar $\bar{x} \in \mathcal{A}$, tal que,

$$(y - \bar{x})^t F(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{A}$$

donde $F : \mathcal{A} \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$.

En el Problema de Desigualdad Variacional (VIP), que engloba al Problema de Programación Matemática (MP), es la monotonicidad de $F = J = \nabla\theta$, la que nos asegura importantes resultados como:

1. Si F es monótona, entonces el conjunto de soluciones del Problema de Desi-

gualdad Variacional (VIP) es convexo.

2. Si existe una solución del problema (VIP), y F es estrictamente monótona, entonces la solución es única.

3. Si F es fuertemente monótona, entonces existe una solución del problema (VIP), y ésta es única.

Además, desde un punto de vista computacional, la monotonicidad también es fundamental, ya que si F es monótona, muchos algoritmos convergen a la solución. De ahí, la importancia del estudio de la monotonicidad. En esta memoria trataremos, al igual que en el caso de la convexidad, de encontrar funciones más generales que aseguren el cumplimiento de algunas de esas propiedades.

Aplicaremos los nuevos conceptos de invex monotonicidad generalizada a los problemas variacionales. La existencia de soluciones de los problemas variacionales nos la garantizará la invex monotonicidad generalizada. Los Problemas Variacionales tuvieron sus orígenes en la Teoría de Juegos y tienen importantes aplicaciones. En el mundo de la Mecánica y la Física, en el estudio del paso de líquidos a través de membranas. En el campo de la Economía, en la búsqueda de los llamados puntos de equilibrio en el cálculo del flujo sostenido de mercancías en redes urbanas, etc...

El principal objetivo de esta memoria es utilizar estos problemas variacionales con objeto de alcanzar los puntos óptimos de los problemas de programación, a través de la invex monotonicidad generalizada.

Todas estas razones son las que han motivado la dedicación de esta memoria a la monotonicidad generalizada.

Este trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos. En el capítulo 1, definiremos los nuevos conceptos de funciones fuertemente invex $(SGIX)$ y fuertemente pseudo invex $(SGPIX)$, que junto con las anteriores definiciones de funciones pseudo invex (PIX) o cuasi invex (QIX), nos sirven para establecer las relaciones entre la invexidad generalizada de θ y la invex monotonicidad de $\nabla\theta$, siguiendo el modelo de Karamardian, S. y Schaible, S. [17], para el caso convexo.

En Parida, J. y Sen, A. [34] aparecía el concepto de función invex monótona, allí llamada η-monótona, como una generalización del concepto de función monótona (M). En el capítulo 2, extenderemos el concepto de función invex monótona (IM) y definiremos las funciones pseudo invex monótonas (PIM), cuasi invex monótonas (QIM), etc...

Aprovechando las nuevas definiciones de funciones invex e invex monotonicidad generalizada, relacionaremos ambos conceptos y conseguiremos condiciones suficientes y necesarias de invex monotonicidad generalizada.

En el capítulo 2, nos ocupamos de las bifunciones. Estas funciones desempeñan un papel muy importante en los llamados Problemas de Equilibrio (EP). Estos problemas engloban, entre otros, al Problema de Programación Matemática (MP) y a los problemas variacionales. Además, si relajamos la condición de que θ sea diferenciable aparecen un tipo especial de bifunciones: las derivadas generalizadas.

Recordaremos las definiciones de invexidad para bifunciones, basándonos en las funciones D-invex de Ye, J.L. [45] y las de Liu, J.C. [23], y paralelamente definiremos las funciones D-invex monótonas y trataremos de relacionarlas, al igual que con la invexidad y la invex monotonicidad. Daremos condiciones suficientes para las funciones D-invex monótonas generalizadas a través de las funciones D-invex generalizadas.

Pasaremos de estudiar funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y bifunciones $h : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a trabajar con funciones conjunto valuadas, multifunciones, $V : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que aplican puntos en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, donde D es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$. Dada una bifunción $h(x, y - x)$, se considera a esta h como una función soporte de un conjunto convexo llamado subdiferencial y denotado por $\delta h(x)$. La aplicación $V : x \to \delta h(x)$ es una multifunción. La monotonicidad de estas multifunciones se halla ligada a la monotonicidad de las bifunciones(derivadas generalizadas). A través de las multifunciones se consiguen teoremas de existencia de soluciones de algunos problemas de desigualdades variacionales generalizados.

Introduciremos también las nuevas definiciones de invex monotonicidad para multifunciones, con objeto de que posteriormente nos sirvan para formular distintos teoremas de existencia del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$.

En el capítulo 3, expondremos una serie de problemas variacionales que generalizan el problema clásico de programación matemática. El más importante de todos es quizás el Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$. Su relevancia consiste en que podemos estudiar la existencia de soluciones, a través de la invex monotonicidad generalizada.

Relajaremos la condición de invex monotonicidad (IM) de la función F, primero a la pseudo invex monotonicidad (PIM), y después a la cuasi invex monotonicidad (QIM), para demostrar la existencia de solución de los problemas $(VLIP)$.

Demostraremos que si θ es invex, toda solución de un problema $(VLIP)$ es una solución del problema (MP). Luego en condiciones de invexidad, probaremos que se pueden alcanzar las soluciones de los problemas de programación (MP), a través de los problemas cuasi variacionales $(VLIP)$.

Y casi recíprocamente, gracias al teorema de la Alternativa, demostraremos que si tenemos una solución de un Problema de Programación Restringido (RMP), con conjuntos y funciones invex, entonces es una solución del problema $(VLIP)$. Así pues, se puede justificar el estudio de este Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, como un paso intermedio para el estudio del Problema de Programación (MP), o el estudio del Problema de Programación Restringido (RMP).

La pseudo invex monotonicidad (PIM) nos servirá para conseguir soluciones del Problema de Programación (MP) a través de las soluciones de un Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$. Si exigimos la estricta pseudo invex monotonicidad $(SPIM)$ de la función $J = \nabla\theta$, conseguiremos también la unicidad de la citada solución.

Estos resultados son claves ya que se relacionan las soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$ y el de Programación Matemática (MP), a través de la invex monotonicidad generalizada. Además, demostraremos que bajo condiciones de pseudo invex monotonicidad (PIM), el conjunto de soluciones de un Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$ es invex.

Extenderemos para multifunciones pseudo invex monótonas (PIM), los resultados de existencia del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$, conseguidos bajo la invex monotonicidad (IM). Utilizando la pseudo invex monotonicidad (PIM), llegaremos a que toda solución de un problema $(GVLIP)$ es una solución de un problema punto de silla y por tanto de un problema de programación matemática.

También probaremos que las funciones invex en un punto, bajo alguna condición, son equivalentes a las soluciones de los Problemas Pre-Variacionales $(PVIP)$ en ese punto.

En Osuna, R. [29], se relaciona la invexidad de las funciones objetivo θ y de restricciones g y los puntos de Kuhn-Tucker, con las soluciones del Problema de Programación Restringido (RMP). En este trabajo trasladaremos las condiciones de invexidad al caso de los problemas $(PVIP)$, y así, demostraremos que las soluciones del problema $(PVIP)$ que sean puntos de Kuhn-Tucker son los mínimos del Problema de Programación Restringido (RMP). Recordemos que los problemas KT-invex quedan caracterizados porque todo punto de Kuhn-Tucker de (RMP) es un mínimo global de (RMP). Daremos también una caracterización de un problema KT-invex basándonos en la solución de problemas pre y cuasi variacionales $(PVIP)$ y $(VLIP)$.

Por último, estudiaremos el Problema Pre-Variacional Generalizado $(GPVIP)$. Conocemos en primer lugar que, si el problema generalizado $(GPVIP)$ tiene solución y la multifunción V es simple valuada, también tendrá solución el problema $(PVIP)$, todo ello gracias a la invex monotonicidad. En segundo lugar, sabemos que si tenemos un punto que es una solución de un problema $(PVIP)$ y que es un punto crítico, entonces es un mínimo del Problema de Programación (MP). Luego, gracias a la invex monotonicidad (IM), transformaremos los puntos estacionarios que sean soluciones del Problema Pre-Variacional $(PVIP)$, en soluciones del Problema de

Programación (MP). Este teorema es de gran importancia porque se relaciona el Problema Pre-Variacional con el de Programación Matemática, a través de la invex monotonicidad. Antes habíamos llegado a una solución del problema (MP) a través del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, exigiendo la condición de que F sea pseudo invex monótona (PIM) y a la unicidad de la citada solución a través de la estricta pseudo invex monotonía $(SPIM)$. Ahora llegamos al mismo sitio a través del Problema Pre-Variacional $(PVIP)$, pero al exigir sólo la invex monotonicidad (IM), no tenemos asegurada la unicidad de la solución.

Las desigualdades variacionales vectoriales son las que ocupan el capítulo 4. En dicho capítulo, generalizamos las distintas definiciones de invex monotonicidad al caso vectorial. Al igual que en el caso escalar, también gracias a la pseudo invex monotonía (PIM) de una función F, se consigue demostrar la existencia de soluciones del Problema Vectorial Cuasi Variacional Débil $(WVVLIP)$.

En Osuna-Gómez, R., Rufián-Lizana, A. y Ruiz-Canales, P. [32] se establecía la definición de punto crítico vectorial y se demostraba que todo punto crítico vectorial es débilmente eficiente si y sólo si la función objetivo es pseudo invex (PIX). A la vista de este resultado nosotros relacionaremos los puntos críticos con las soluciones de los problemas de desigualdad cuasi variacional vectorial débil. Demostraremos que si la función objetivo es pseudoinvex y $F = \nabla f$, entonces son equivalentes los puntos críticos vectoriales, los puntos débilmente eficientes y las soluciones de los problemas $(WVVLIP)$.

Capítulo 1

CONVEXIDAD E INVEXIDAD GENERALIZADA

1.1 Funciones convexas diferenciables

Esta primera sección la dedicaremos a recordar conceptos clásicos de convexidad. El estudio de la convexidad es de gran importancia en la Teoría de la Optimización. Nos interesa que las funciones y los conjuntos que intervienen en la Programación Matemática, verifiquen un conjunto de propiedades que están comprendidas en lo que denominamos convexidad. Las técnicas clásicas de búsqueda de óptimos, que utilizan diferenciabilidad, nos proporcionan solamente óptimos locales; pues bien, a través de la convexidad es inmediato llegar a óptimos globales, que son los que en general interesan, y de manera muy especial en problemas de tipo económico.

Dada $\theta : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde S es un convexo, recordemos algunas definiciones clásicas de convexidad,

DEFINICIÓN 1.1 *θ es convexa (CX) en $S \iff \forall x, y \in S$*

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\theta(x) + (1-\lambda)\theta(y), \quad \lambda \in [0,1]$$

Si $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, donde C es un abierto y convexo, la anterior definición es equivalente a

DEFINICIÓN 1.2 *θ es convexa (CX) en $C \iff \forall x, y \in C$*

$$\theta(y) \geq \theta(x) + (y-x)^t \nabla\theta(x)$$

DEFINICIÓN 1.3 *θ es estrictamente convexa (SCX) en $S \iff \forall x, y \in S$*

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\theta(x) + (1-\lambda)\theta(y), \quad \lambda \in [0,1]$$

De igual manera que antes se tiene,

DEFINICIÓN 1.4 *Diremos que la función diferenciable θ es estrictamente convexa (SCX) en $C \iff \forall x, y \in C, \quad x \neq y, \quad \theta(y) > \theta(x) + (y-x)^t \nabla\theta(x)$*

La convexidad del conjunto y de la función objetivo, garantizan que los óptimos locales de un problema son también óptimos globales. Además, si la función es estrictamente convexa, dicho óptimo global es único.

S. Karamardian introdujo las funciones fuertemente convexas $(SGCX)$, pero con el nombre de uniformemente convexas, aquí recordamos su definición,

DEFINICIÓN 1.5 *θ es fuertemente convexa $(SGCX)$ en $S \iff \forall x, y \in S$, $\exists \alpha > 0$, tal que*

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\theta(x) + (1-\lambda)\theta(y) + \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha\|y-x\|^2, \quad \lambda \in [0,1]$$

DEFINICIÓN 1.6 *Diremos que la función diferenciable θ es fuertemente convexa $(SGCX)$ en $C \iff \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y \in C,$*

$$\theta(y) \geq \theta(x) + (y-x)^t \nabla\theta(x) + \alpha\|y-x\|^2$$

Recordemos que:

DEFINICIÓN 1.7 *La función diferenciable θ es pseudoconvexa (PCX) en $C \iff \forall x, y \in C$, tenemos que*

$$(y-x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) \geq \theta(x)$$

De la definición anterior se deduce fácilmente que si x es un punto crítico de la función pseudoconvexa (PCX) θ, esto es, $\nabla\theta(x) = 0$, entonces x es un mínimo global de θ en C.

DEFINICIÓN 1.8 *La función diferenciable θ es estrictamente pseudoconvexa $(SPCX)$ en $C \iff \forall x, y \in C$, $x \neq y$, tenemos que*

$$(y-x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) > \theta(x)$$

S. Karamardian y S. Schaible dan la siguiente definición de función fuertemente pseudoconvexa,

DEFINICIÓN 1.9 *La función diferenciable θ es fuertemente pseudoconvexa $(SGPCX)$ en $C \iff \exists \alpha > 0$, tal que $\forall x, y \in C$, tenemos que*

$$(y-x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) \geq \theta(x) + \alpha \|y-x\|^2$$

Veamos otra extensión del concepto de convexidad:

DEFINICIÓN 1.10 *Sea una función $\theta : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde S es un convexo. Se dice que es cuasiconvexa (QCX) en S, si $\forall\, x, y \in S \quad y \quad \forall z \in [x, y]$, tenemos que*

$$\theta(x) \leq \theta(y) \Rightarrow \theta(z) \leq \theta(y)$$

Para el caso en que θ sea diferenciable:

DEFINICIÓN 1.11 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y abierto, se dice que $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi convexa (QCX), si y solo si, $\forall x, y \in C$, tenemos que*

$$\theta(y) \leq \theta(x) \Rightarrow (y - x)^t \nabla\theta(x) \leq 0$$

DEFINICIÓN 1.12 *Sea $\theta : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde S es un convexo. Se dice que es semiestrictamente cuasiconvexa $(SSQCX)$, si $\forall\, x, y \in S \quad y \quad \forall z \in (x, y)$*

$$\theta(x) < \theta(y) \Rightarrow \theta(z) < \theta(y)$$

DEFINICIÓN 1.13 *Sea $\theta : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde S es un convexo. Se dice que es estrictamente cuasiconvexa $(SQCX)$, si $\forall\, x, y \in C$, con $x \neq y \quad y \quad \forall z \in (x, y)$*

$$\theta(x) \leq \theta(y) \Rightarrow \theta(z) < \theta(y)$$

Conocemos que para funciones diferenciables $\theta : C \subseteq I\!R^n \to I\!R$, se dan las siguientes relaciones:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(CX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PCX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QCX)}} \\
 & & & & \Uparrow \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \boxed{\text{(SSQCX)}} \\
 & & & & \Uparrow \\
\boxed{\text{(SCX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SPCX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SQCX)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SGCX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SGPCX)}} & &
\end{array}
$$

1.2 Funciones invex

Las funciones invex fueron introducidas por M.A. Hanson como una generalización de las funciones convexas diferenciables. Sea $\Gamma \subseteq I\!R^n$ un abierto,

DEFINICIÓN 1.14 *Una función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \rightarrow I\!R$ diferenciable es invex (IX) $\Longleftrightarrow \forall x, y \in I\!R^n$, existe $\eta(y, x) \in I\!R^n$, tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) \geq \eta(y, x)^t \nabla \theta(x)$$

Estas funciones son más generales que las convexas y que las pseudoconvexas. A diferencia de las funciones convexas, no necesitan convexidad en el conjunto de definición. El nombre de "invex" viene de la contracción de "invariant convex", ya que se observa que a diferencia de la convexidad, la invexidad no se destruye ante transformaciones biyectivas.

Las funciones invex se caracterizan porque todo punto estacionario es un mínimo. Es decir, la clase de las funciones invex es equivalente a la clase de las funciones cuyos puntos estacionarios son mínimos globales. Obviamente, si θ no tiene puntos estacionarios, entonces es invex.

Otros autores como P. Kanniappan y P. Pandian o en S. Kaur y S. Gupta (donde la invexidad se denomina η-convexidad), debilitan el concepto de invexidad, buscando funciones más generales que sigan verificando las propiedades de optimalidad probadas anteriormente, para las funciones convexas generalizadas.

DEFINICIÓN 1.15 *Una función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ diferenciable, es estrictamente invex* (SIX) $\iff$ $\forall x, y \in I\!R^n$, $x \neq y$, $\exists$ *una función vectorial* $\eta(y, x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) > \eta(y, x)^t \nabla \theta(x)$$

DEFINICIÓN 1.16 *Una función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ diferenciable es pseudoinvex* (PIX) $\iff$ $\forall x, y \in I\!R^n$, $\exists$ *una función vectorial* $\eta(y, x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$\eta(y, x)^t \nabla \theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) \geq 0$$

M.A. Hanson demuestra que no existe distinción entre la pseudo invexidad y la invexidad. En el caso escalar, ambos conceptos coinciden.

DEFINICIÓN 1.17 *Una función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ diferenciable, es estrictamente pseudoinvex* $(SPIX)$ $\iff$ $\forall x, y \in I\!R^n$, $x \neq y$, $\exists$ *una función* $\eta(y, x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$\eta(y, x)^t \nabla \theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) > 0$$

DEFINICIÓN 1.18 *Una función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ diferenciable es cuasinvex*

$(QIX) \iff \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) \leq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \leq 0$$

Trivialmente las funciones convexas diferenciables son invex con $\eta(y,x) = y - x$, y lo mismo ocurre con las estrictamente invex (SIX), las pseudoinvex (PIX), las estrictamente pseudo invex $(SPIX)$ y las cuasinvex (QIX).

Vamos a generalizar los conceptos de funciones fuertemente convexa $(SGCX)$ y fuertemente pseudo convexa $(SGPCX)$, dados por Karamardian, S. y Schaible, S. [17], al campo de la invexidad.

DEFINICIÓN 1.19 *Una función* $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, es fuertemente invex* $(SGIX) \iff \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, *y existe un escalar* $\alpha > 0$, *tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) \geq \eta(y,x)^t \nabla\theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2$$

DEFINICIÓN 1.20 *Una función* $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, es fuertemente pseudoinvex* $(SGPIX) \iff \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) \geq \theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2$$

La importancia de todas estas definiciones radica en que, al igual que en Karamardian, S. y Schaible, S. [17] se relacionan las definiciones de convexidad generalizada de θ con la monotonicidad generalizada de $\nabla\theta$, con estas nuevas definiciones estableceremos las relaciones entre la invexidad generalizada de θ y la invex monotonicidad de $\nabla\theta$.

Para funciones escalares diferenciables $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se comprueba fácilmente que podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(IX)}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{(PIX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QIX)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SIX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SPIX)}} & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SGIX)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SGPIX)}} & &
\end{array}$$

Como paso previo a la definición de invexidad, en el caso vectorial, acordamos la siguiente notación:

Dado $x, y \in \mathbb{R}^n$ se pueden definir las siguientes relaciones de orden:

1. $x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad i = 1, \cdots, n$, cumpliéndose la desigualdad estricta en al menos un i, es decir, $x \neq y$

2. $x \leqq y \iff x_i \leq y_i \quad i = 1, \cdots, n$

3. $x = y \iff x_i = y_i \quad i = 1, \cdots, n$

4. $x < y \iff x_i < y_i \quad i = 1, \cdots, n$

DEFINICIÓN 1.21 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R^p$ diferenciable. Entonces, se dice que f es invex (IX), si y sólo si, existe una función $\eta : \Gamma \times \Gamma \to I\!R^n$, tal que*

$$f(y) \geqq f(x) + \nabla f(x)\eta(y, x), \quad \forall x, y \in I\!R^n$$

donde $\nabla f(x)$ es el jacobiano de f, es decir, una matriz $p \times n$, y Γ es un abierto de $I\!R^n$.

DEFINICIÓN 1.22 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R^p$ diferenciable. Entonces se dice que f es estrictamente invex (SIX), si y sólo si, existe una función $\eta : \Gamma \times \Gamma \to I\!R^n$, tal que*

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)\eta(y, x), \quad \forall x, y \in I\!R^n$$

DEFINICIÓN 1.23 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R^p$ diferenciable. Entonces, se dice que f es pseudo invex (PIX), si y sólo si, existe una función $\eta : \Gamma \times \Gamma \to I\!R^n$, tal que*

$$\nabla f(x)\eta(y, x) \geqq 0 \Rightarrow f(y) \geqq f(x), \quad \forall x, y \in I\!R^n$$

DEFINICIÓN 1.24 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ diferenciable. Entonces, se dice que f es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$, si y sólo si, existe una función $\eta : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\nabla f(x)\eta(y,x)\geqq 0 \Rightarrow f(y) > f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Para funciones escalares se puede comprobar que las dos definiciones anteriormente descritas de invexidad (IX) y de pseudo invexidad (PIX), son equivalentes. No ocurre así en el caso vectorial.

Capítulo 2

MONOTONICIDAD E INVEX MONOTONICIDAD GENERALIZADA

2.1 Invex Monotonicidad Generalizada

2.1.1 Funciones invex monótonas generalizadas

El concepto de monotonicidad se generó a partir de la definición clásica de monotonía de una función real de variable real $\psi : I\!R \to I\!R$.

DEFINICIÓN 2.1 *Diremos que una función ψ es monótona si se verifica que*

$$(y-x)^t(\psi(y)-\psi(x)) \geq 0, \quad \forall\, x, y \in I\!R$$

S. Karamardian introduce otra definición que extiende el concepto original de monotonía. Sea $C \subseteq I\!R^n$ un subconjunto convexo y abierto:

DEFINICIÓN 2.2 $F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es monótona* (M) *en* $C \iff \forall x, y \in C,$

$$(y-x)^t(F(y)-F(x)) \geq 0$$

Karamardian, S. [13], estableció que existía una relación entre la convexidad generalizada de la función $\theta : C \subseteq I\!R^n \to I\!R$ y los conceptos de monotonicidad de la función gradiente, $J = \nabla\theta : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$, a través del siguiente resultado.

TEOREMA 2.1 *Sea $\theta : C \subseteq I\!R^n \to I\!R$ diferenciable en un abierto convexo C. La función θ es convexa (CX) en $C \iff \forall x, y \in C, \quad (y-x)^t\,[\nabla\theta(y) - \nabla\theta(x)] \geq 0.$*

Luego el teorema anterior se podría poner como:

TEOREMA 2.2 *Una función diferenciable θ es convexa en un abierto y convexo $C \subseteq I\!R^n \iff \nabla\theta$ es monótona en C.*

Este teorema abre la puerta al estudio de la monotonicidad generalizada ligada al estudio de la convexidad generalizada. El concepto de monotonicidad para la función derivada, $\nabla\theta$, desempeña un papel equivalente al de la convexidad de θ.

S. Karamardian y S. Schaible, introducen también las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.3 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es estrictamente monótona (SM) en C $\iff \quad \forall x, y \in C, \quad x \neq y,$*

$$(y-x)^t(F(y)-F(x)) > 0$$

DEFINICIÓN 2.4 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es fuertemente monótona (SGM) en C $\iff \quad \forall x, y \in C, \quad \exists \beta > 0,$*

$$(y-x)^t(F(y)-F(x)) \geq \beta \|y-x\|^2$$

DEFINICIÓN 2.5 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es pseudomonótona (PM) en C $\iff$ $\forall x, y \in C,$*

$$(y-x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow (y-x)^t F(y) \geq 0$$

ó

$$(y-x)^t F(x) > 0 \Rightarrow (y-x)^t F(y) > 0$$

ó

$$(y-x)^t F(y) < 0 \Rightarrow (y-x)^t F(x) < 0$$

DEFINICIÓN 2.6 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es estrictamente pseudomonótona (SPM) en $C \iff \forall x, y \in C, \quad x \neq y,$*

$$(y-x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow (y-x)^t F(y) > 0$$

DEFINICIÓN 2.7 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es fuertemente pseudomonótona $(SGPM)$ en $C \iff \forall x, y \in C, \quad \exists \beta > 0$, tenemos que*

$$(y-x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow (y-x)^t F(y) \geq \beta \|y-x\|^2$$

DEFINICIÓN 2.8 *$F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es cuasimonótona (QM) en $C \iff$ $\forall x, y \in C,$*

$$(y-x)^t F(x) > 0 \Rightarrow (y-x)^t F(y) \geq 0$$

N. Hadjisavvas y S. Schaible, introducen además las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.9 $F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es semi estrictamente cuasimonótona* $(SSQM)$ *en* $C \iff$

1. F *es cuasimonótona.*

2. *Si* $\forall x, y \in C,\quad x \neq y,$ *tal que* $(y-x)^t F(x) > 0$ *entonces,*

$$\exists z \in \left[\frac{x+y}{2}, y\right] \quad \text{tal que} \quad (y-x)^t F(z) > 0.$$

DEFINICIÓN 2.10 $F : C \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es estrictamente cuasimonótona* (SQM) *en* $C \iff$

1. F *es cuasimonótona.*

2. *Si* $\forall x, y \in C,\quad x \neq y,$ *para algún* $z \in (x,y),\quad (y-x)^t F(z) \neq 0.$

Se puede establecer el siguiente cuadro de relaciones entre las anteriores definiciones de monotonicidad generalizada:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\text{(M)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SSQM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QM)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SPM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SQM)}} & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & & & \\
\boxed{\text{(SGM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SGPM)}} & & & &
\end{array}$$

En el siguiente resultado, dado en Karamardian, S. y Schaible, S. [17], podemos ver como la convexidad generalizada de θ puede caracterizarse a partir de la monotonicidad de $\nabla\theta$, esto es,

TEOREMA 2.3 *θ es convexa (estictamente convexa, fuertemente convexa, pseudo convexa, estrictamente pseudo convexa, cuasi convexa) en C, si y sólo si, $\nabla\theta$ es monótona (estrictamente monótona, fuertemente monótona, pseudo monótona, estrictamente pseudo monótona, cuasi monótona) en C.*

En esta sección, siguiendo la línea del teorema anterior, buscamos caracterizar a las funciones invex a través de las condiciones de invex monotonicidad generalizada de las funciones gradientes.

J. Parida y A. Sen, introducen la siguiente definición de invex monotonicidad bajo el nombre de función η-monótona.

DEFINICIÓN 2.11 *$F : X \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ es invex-monótona (IM) en X $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in X, \quad \exists\, \eta : X \times X \to I\!R^n$, tal que*

$$\eta(y,x)^t(F(y) - F(x)) \geq 0$$

Observemos que una función monótona es un caso particular de una función invex-monótona sin más que considerar $\eta(y,x) = y - x, \quad \forall x, y$. Igual ocurrirá con las siguientes definiciones de invex monotonicidad. Nosotros extenderemos el concepto de invex-monótona (IM), a otros más generales y las relacionaremos con las funciones invex. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$,

DEFINICIÓN 2.12 *$F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es estrictamente invex monótona (SIM) en $X \iff \forall x, y \in X, \quad x \neq y, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\eta(y,x)^t(F(y) - F(x)) > 0$$

DEFINICIÓN 2.13 *$F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es fuertemente invex monótona $(SGIM)$ en $X \iff \forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad \exists \beta > 0$, tal que*

$$\eta(y,x)^t(F(y) - F(x)) \geq \beta \|\eta(y,x)\|^2$$

DEFINICIÓN 2.14 *$F : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) en X $\iff \forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

ó

$$\eta(y,x)^t F(x) > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) > 0$$

ó

$$\eta(y,x)^t F(y) < 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(x) < 0$$

DEFINICIÓN 2.15 $F : X \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es estrictamente pseudo invex monótona* $(SPIM)$ *en* $X \iff \forall x, y \in X, \quad x \neq y, \quad \exists \eta : X \times X \to I\!R^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) > 0$$

DEFINICIÓN 2.16 $F : X \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es fuertemente pseudo invex monótona* $(SGPIM)$ *en* $X \iff \forall x, y \in X, \quad \exists \beta > 0, \quad y \quad \eta : X \times X \to I\!R^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq \beta \|\eta(y,x)\|^2$$

DEFINICIÓN 2.17 $F : X \subseteq I\!R^n \to I\!R^n$ *es cuasi invex monótona* (QIM) *en* X $\iff \forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to I\!R^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

Veamos ahora una serie de funciones como ejemplos de las anteriores definiciones:

EJEMPLO 2.1 $F(x) = x^2$ *es* (SIM) *estrictamente invex monótona en el conjunto* $X = \{x \in I\!R, \quad x \geq 0\}$, *respecto de* $\eta(y,x) = e^y - e^x$, *ya que,*

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y, \quad \exists \eta : X \times X \to I\!R^n,$$

tal que

$$\eta(y,x)^t (F(y) - F(x)) = (e^y - e^x)(y^2 - x^2) > 0$$

EJEMPLO 2.2

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 0 \\ x \ si \ x > 0 \end{cases}$$

es pseudo invex monótona (PIM), *respecto de* $\eta(y,x) = e^y - e^x$ *en* $X = \mathbb{R}$, *ya que se verifica que* $\forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

EJEMPLO 2.3 $F(x) = x^2$ *es cuasi invex monótona* (QIM), *respecto de* $\eta(y,x) = e^y - e^x$ *en* $X = \mathbb{R}$, *ya que se verifica que* $\forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) = (e^y - e^x)x^2 > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) = (e^y - e^x)y^2 \geq 0$$

Al igual que:

EJEMPLO 2.4

$$F(x) = \begin{cases} -x \ si \ x \leq 0 \\ 0 \ si \ x > 0 \end{cases}$$

es cuasi invex monótona (QIM) *respecto de* $\eta(y,x) = e^y - e^x$ *en* $X = \mathbb{R}$, *ya que se verifica que* $\forall x, y \in X, \quad \exists \eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\eta(y,x)^t F(x) > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t F(y) \geq 0$$

De acuerdo con las definiciones anteriores se establece el siguiente cuadro de relaciones entre los distintos conceptos de invex monotonicidad generalizada:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(IM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QIM)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SPIM)}} & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SGIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(SGPIM)}} & &
\end{array}
$$

2.1.2 Relaciones entre la invexidad generalizada de θ y la invex monotonicidad generalizada de $\nabla\theta$

Nuestro objetivo al definir un nuevo tipo de funciones invex monótonas generalizadas, es extender las relaciones entre la convexidad generalizada de θ y la monotonicidad generalizada de $J = \nabla\theta$, al caso de la invexidad de θ y la invex monotonicidad generalizada de J.

DEFINICIÓN 2.18 *Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que la función $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ es antisimétrica si $\eta(x, y) + \eta(y, x) = 0, \quad \forall x, y \in X$.*

Sea Γ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.4 *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es invex (IX) en Γ con respecto a una función $\eta : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ antisimétrica, entonces $J = \nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invex monótona (IM), con respecto a la misma η.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que θ es invex en Γ, entonces $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $\eta(x, y) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\theta(x) - \theta(y) - \eta(x, y)^t \nabla\theta(y) \geq 0$$

cambiando la x por la y,

$$\theta(y) - \theta(x) - \eta(y, x)^t \nabla\theta(x) \geq 0$$

por la antisimetría de η, y sumando estas dos desigualdades se tiene

$$\eta(x,y)^t(J(x)-J(y))\geq 0$$

ya que $J=\nabla\theta$, por lo que es invex monótona (IM) con respecto a la misma η. ∎

En el siguiente ejemplo vemos la necesidad de la hipótesis de que η sea antisimétrica.

EJEMPLO 2.5 *Sea $\theta:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow I\!R$, tal que $\theta(x)=x+\operatorname{sen}x$ es invex (IX) en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, respecto de $\eta(y,x)=\frac{\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$, ya que, $\forall x,y\in I\!R^n$, se verifica que*

$$y+\operatorname{sen}y-x-\operatorname{sen}x-(\frac{\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}x}{1+\cos x})(1+\cos x)\geq 0$$

Por tanto, θ es invex en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Como η no es antisimétrica, vemos que $\nabla\theta$ no es invex monótona (IM), ya que

$$(\frac{\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}x}{1+\cos x})(1+\cos y-1-\cos x)<0$$

De manera similar al anterior teorema se puede probar:

TEOREMA 2.5 *Si la función $\theta:\Gamma\subseteq I\!R^n\rightarrow I\!R$ es estrictamente invex (SIX) en Γ, respecto de η antisimétrica, entonces $J=\nabla\theta:I\!R^n\rightarrow I\!R^n$ es estrictamente invex monótona (SIM) con respecto a la misma η.*

TEOREMA 2.6 *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es fuertemente invex $(SGIX)$ en Γ, respecto de η antisimétrica, entonces $J = \nabla\theta : I\!R^n \to I\!R^n$ es fuertemente invex monótona $(SGIM)$ con respecto a la misma η.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que θ es fuertemente invex $(SGIX)$ en Γ, entonces $\forall x, y \in \Gamma$, $\exists$ una función vectorial $\eta(y,x) \in I\!R^n$ y existe un escalar $\alpha > 0$, tal que

$$\theta(y) - \theta(x) \geq \eta(y,x)^t \nabla\theta(x) + \alpha\|\eta(y,x)\|^2$$

cambiando la x por la y, $\exists \beta > 0$, tal que

$$\theta(x) - \theta(y) \geq \eta(x,y)^t \nabla\theta(y) + \beta\|\eta(x,y)\|^2$$

por la antisimetría de η y sumando estas dos desigualdades se tiene que

$$\eta(x,y)^t(J(x) - J(y)) \geq (\alpha + \beta)\|\eta(y,x)\|^2$$

ya que $J = \nabla\theta$, por lo que J es fuertemente invex monótona $(SGIM)$ con respecto a la misma η. ■

COROLARIO 2.1 *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es invex (IX) con respecto a η antisimétrica, entonces $J = \nabla\theta : I\!R^n \to I\!R^n$ es pseudo invex monótona (PIM) en Γ con respecto a la misma η.*

DEMOSTRACIÓN:

Si θ es invex entonces por el teorema 2.4, J es invex monótona (IM), y por tanto (PIM) por las relaciones existentes. ■

TEOREMA 2.7 *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$ en Γ, respecto de η antisimétrica, entonces $J = \nabla\theta : I\!R^n \to I\!R^n$ es estrictamente pseudo invex monótona $(SPIM)$ en Γ con respecto a la misma η.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\theta(x)$ estrictamente pseudo invex $(SPIX)$ entonces $\forall x, y \in \Gamma, \quad x \neq y, \quad \exists$ una función $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$\eta(x,y)^t J(y) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) < \theta(x)$$

Probaremos que $\forall x, y \in \Gamma, \quad x \neq y, \quad$ existe $\quad \eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$\eta(x,y)^t J(y) \geq 0 \Rightarrow \eta(x,y)^t J(x) > 0,$$

Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\eta(x,y)^t J(x) \leq 0,$$

como $\eta(y,x) + \eta(x,y) = 0$, entonces

$$\eta(y,x)^t J(x) \geq 0$$

por lo que por ser θ $(SPIX)$, tenemos que $\theta(x) < \theta(y)$, que es una contradicción.

■

TEOREMA 2.8 *Si la función $\theta : \Gamma \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es cuasi invex (QIX) en Γ respecto de η antisimétrica, entonces $J = \nabla\theta : I\!R^n \to I\!R^n$ es cuasi invex monótona (QIM) en Γ con respecto a la misma η.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\forall x, y \in \Gamma$, existe $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$\eta(x,y)^t J(y) > 0 \Rightarrow \eta(x,y)^t J(x) \geq 0$$

Sea θ cuasi invex (QIX), luego $\forall x, y \in \Gamma$, $\exists$ una función vectorial $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$\theta(x) \leq \theta(y) \Rightarrow \eta(x,y)^t J(y) \leq 0$$

Sean $x, y \in \Gamma$, tales que $\eta(x,y)^t J(y) > 0$ entonces $\theta(x) > \theta(y)$. Por ser θ (QIX) se tiene que

$$\eta(y,x)^t J(x) \leq 0$$

Por la antisimetría de η entonces $\eta(x,y)^t J(x) \geq 0$. ■

Igual que se han conseguido condiciones suficientes, interesan también condiciones necesarias. En principio, las condiciones necesarias no son ciertas en general, debemos establecer ciertas premisas para poder asegurar esas condiciones.

TEOREMA 2.9 *Sea C un conjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que:*

1. *La función $J = \nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es estrictamente pseudo invex monótona $(SPIM)$ respecto de $\eta(y,x) > 0 \quad \forall x, y \in C$,*

2. *η es una función lineal en el primer argumento y antisimétrica,*

entonces, $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$ en C, respecto de η.

DEMOSTRACIÓN:

Queremos probar que $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente pseudoinvex $(SPIX)$ respecto de η, esto es, $\forall x, y \in C$, existe una función $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) > \theta(x)$$

Supongamos que $J : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es estrictamente pseudo invex monótona $(SPIM)$ respecto de η en C convexo, esto es, $\forall x, y \in C$, y $\eta : C \times C \to \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\eta(y,x)^t J(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t J(y) > 0.$$

Sea $x, y \in C$ y definimos $x(\lambda) = x + \lambda(y - x) \in C$, para $0 < \lambda < 1$, por ser C convexo.

Dado $x(\lambda) = x + \lambda(y - x)$ si

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x) \geq 0$$

Por ser $J = \nabla\theta$ $(SPIM)$ implica que

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) > 0$$

Como η es antisimétrica y ser η lineal respecto al primer argumento

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) = (1 - \lambda)\eta(x, x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) + \lambda\eta(y, x)^t \nabla\theta(x(\lambda))$$

luego

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) = \lambda\eta(y, x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) > 0$$

Al ser λ y $\eta(y, x) > 0, \quad \forall x, y \in C$, entonces

$$\nabla\theta(x + \lambda(y - x)) > 0$$

que si integramos la anterior expresión entre 0 y 1, tenemos que

$$\int_0^1 \nabla\theta(x + \lambda(y - x))\, d\lambda > 0$$

entonces

$$\theta(y) - \theta(x) > 0$$

θ es $(SPIX)$ respecto de η en C. ■

De igual manera se puede demostrar que:

TEOREMA 2.10 *Sea C un conjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que:*

1. $J = \nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es pseudo invex monótona* (PIM) *respecto de* $\eta(y,x) > 0$ $\forall x, y \in C$,

2. η *es una función lineal en el primer argumento y antisimétrica,*

entonces, $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es pseudo invex ó invex* $(PIX) = (IX)$*, en* C *respecto de* η.

DEMOSTRACIÓN:

Queremos probar que $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es pseudoinvex (PIX) respecto de η, esto es, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, existe una función $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) \geq \theta(x)$$

Supongamos que $J : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) respecto de η en C convexo, esto es, $\forall x, y \in C$, y $\eta : C \times C \to \mathbb{R}^n$ antisimétrica, tenemos que

$$\eta(y,x)^t J(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t J(y) \geq 0.$$

Como C es convexo entonces $x(\lambda) = x + \lambda(y - x) \in C, \quad \forall \lambda \in [0,1]$.

Dado $x(\lambda) = x + \lambda(y - x)$, entonces si

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x) \geq 0,$$

Por ser $J = \nabla\theta$ es (PIM) implica que

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) \geq 0 \quad \forall\lambda \in [0, 1]$$

Como η es antisimétrica y lineal respecto al primer argumento

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) = (1 - \lambda)\eta(x, x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) + \lambda\eta(y, x)^t \nabla\theta(x(\lambda))$$

luego

$$\eta(x(\lambda), x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) = \lambda\eta(y, x)^t \nabla\theta(x(\lambda)) \geq 0$$

Como $\lambda \in [0, 1]$ y $\eta(y, x) > 0 \quad \forall x, y \in C$ entonces

$$\nabla\theta(x + \lambda(y - x)) \geq 0, \quad \forall\lambda \in [0, 1]$$

si integramos la última expresión entre 0 y 1, tenemos

$$\int_0^1 \nabla\theta(x + \lambda(y - x))\, d\lambda \geq 0$$

entonces

$$\theta(y) - \theta(x) \geq 0$$

θ es $(PIX) = (IX)$ respecto de η en C. ■

Como la invex monotonicidad (IM) implica la pseudo invex monotonicidad (PIM), tenemos que:

COROLARIO 2.2 *Sea C un conjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que:*

1. $J = \nabla\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es invex monótona* (IM) *respecto de* $\eta(y,x) > 0$ $\forall x, y \in C$,

2. η *es una función lineal en el primer argumento y antisimétrica,*

entonces $\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es invex* (IX) *en* C *respecto de* η.

2.2 Invex Monotonicidad Generalizada para Bifunciones y Multifunciones

2.2.1 Invexidad Generalizada para Bifunciones

Las bifunciones juegan un papel muy importante en la monotonicidad generalizada por dos motivos:

1. Por estar presente en los Problemas de Equilibrio (EP), que veremos posteriormente. Estos problemas engloban, entre otros, al Problema de Programación Matemática.

2. Muchos conceptos de monotonicidad dados en el caso diferenciable para gradientes, pueden ser extendidos a derivadas generalizadas, como la derivada superior de Dini de θ en el punto x y en la dirección d, $\theta^D(x,d)$, o la derivada direccional $\theta'(x,d)$, y éstas pueden ser consideradas como bifunciones. En el caso en que θ sea diferenciable

$$\theta'(x,d) = \theta^D(x,d) = d^t\nabla\theta(x)$$

Recordemos que las funciones invex fueron introducidas como una generalización de las funciones convexas diferenciables. Si debilitamos la condición de que θ sea diferenciable y exigimos que sea diferenciable direccionalmente, aparecen estas extensiones del concepto de invexidad.

Sea $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y sea θ' la derivada direccional de θ en la dirección de $\eta(y,x)$, donde Γ un abierto de $\mathbb{R}^n$, Ye, J.L., define:

DEFINICIÓN 2.19 *$\theta : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es D-invex (DIX) $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) \geq \theta'(x, \eta(y,x))$$

Nosotros optaremos por un tratamiento general, y por tanto consideramos esta derivada direccional $\theta'(x,\eta(y,x))$, ó la derivada superior de Dini $\theta^D(x,\eta(y,x))$, ó la derivada direccional de Clarke $\theta^0(x,\eta(y,x))$, como bifunciones, representándolas genéricamente por la bifunción $h(x,\eta(y,x))$, es decir, como funciones $h : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, con $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

Podemos, por tanto, extender anteriores definiciones de funciones invex diferenciables a otras nuevas definiciones, donde no hace falta la diferenciabilidad de la función. Con estas definiciones y las nuevas que introduciremos de funciones D-invex monótonas, trataremos, al igual que con la invexidad (IX) y la invex monotonicidad (IM), de relacionarlas mediante condiciones suficientes.

Sea $\theta : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ su bifunción asociada, con $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto:

DEFINICIÓN 2.20 *Diremos que θ es estrictamente D-invex $(SDIX)$ $\Longleftrightarrow$*

$\forall x, y \in \Gamma, \quad x \neq y, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) > h(x, \eta(y,x))$$

DEFINICIÓN 2.21 *Diremos que la aplicación θ es pseudo D-invex* $(PDXI) \iff$ $\forall x, y \in \Gamma, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$h(x, \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) \geq 0$$

donde $h : \Gamma \times \Gamma \to I\!R$, *con* $\Gamma \subseteq I\!R^n$ *abierto.*

DEFINICIÓN 2.22 *Diremos que θ es estrictamente pseudo D-invex* $(SPDIX)$ $\iff \forall x, y \in \Gamma, \quad x \neq y, \quad \exists$ *una función vectorial* $\eta(y,x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$h(x, \eta(y,x)) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) > 0$$

DEFINICIÓN 2.23 *Diremos que θ es cuasi D-invex* $(QDIX) \iff \forall x, y \in \Gamma$, *existe una función vectorial* $\eta(y,x) \in I\!R^n$, *tal que*

$$\theta(y) - \theta(x) \leq 0 \Rightarrow h(x, \eta(y,x)) \leq 0$$

2.2.2 D-invex Monotonicidad Generalizada para Bifunciones

Sea $h(x;d)$ una bifunción donde $x \in C \subseteq \mathbb{R}^n$, con C abierto y convexo. Sea $h : C \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para estas funciones, S. Komlósi da las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.24 *Diremos que h es monótona (M) en C, si $\forall x, y \in C$,*

$$h(y; x-y) + h(x; y-x) \leq 0$$

Se puede probar fácilmente que esta definición de monotonicidad para bifunciones coincide con la dada para funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pero como ya hemos advertido, su uso en los problemas de equilibrio y con las derivadas generalizadas avalan su estudio.

Continuando con las definiciones dadas por S. Komlósi:

DEFINICIÓN 2.25 *Diremos que h es estrictamente monótona (SM) en C $\Longleftrightarrow$*

$$\forall x, y \in C, \quad x \neq y, \quad h(y; x-y) + h(x; y-x) < 0$$

DEFINICIÓN 2.26 *La bifunción h es pseudomonótona (PM) en C $\Longleftrightarrow$*

$$\forall x, y \in C, \quad h(y; x-y) \geq 0 \Rightarrow h(x; y-x) \leq 0$$

DEFINICIÓN 2.27 *La bifunción h es estrictamente pseudomonótona (SPM) en $C \iff \forall x, y \in C, \quad x \neq y,$*

$$h(y; x-y) \geq 0 \Rightarrow h(x; y-x) < 0$$

DEFINICIÓN 2.28 *Diremos que la bifunción h es cuasimonótona (QM) en C $\iff \forall x, y \in C,$*

$$h(y; x-y) > 0 \Rightarrow h(x; y-x) \leq 0$$

DEFINICIÓN 2.29 *Diremos que la bifunción h es estrictamente cuasimonótona (SQM) en C $\iff$*

1. *h es cuasi monótona (QM),*

2. *$\forall x, y \in C, \quad x \neq y, \quad \exists z \in (x, y)$ tal que*

$$h(z; y-z) \neq 0 \quad ó \quad h(z; x-z) \neq 0$$

Para estas bifunciones se cumple trivialmente que

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(M)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QM)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\text{(SM)}} & & \boxed{\text{(SPM)}} & & \boxed{\text{(SQM)}}
\end{array}$$

Komlósi relaciona la monotonicidad generalizada de las derivadas de Dini con la convexidad generalizada de la función θ. Nosotros daremos un paso más, relacionando los nuevos conceptos de funciones D-invex, ya vistos, y los nuevos que definiremos de funciones D-invex monótonas.

Previamente, definiremos los conjuntos invex como una extensión de los conjuntos convexos, es decir:

DEFINICIÓN 2.30 *Diremos que un subconjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ es invex en $u \in H$ con respecto a η, si* $\forall v \in H, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u + t\eta(v,u) \in H.$

DEFINICIÓN 2.31 *Diremos que H es un conjunto invex con respecto a η, si H es invex en cada $u \in H$.*

Si $\eta(v,u) = v - u$ el conjunto H es convexo.

Supongamos un conjunto H invex respecto de una función vectorial $\eta(x,y) \in \mathbb{R}^n$:

DEFINICIÓN 2.32 *Diremos que la bifunción $h : H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es D-invex monótona (DIM) en H invex, respecto de $\eta \iff \forall x, y \in H$, existe una función $\eta(y,x) \in R^n$, tal que:*

$$h(y; \eta(x,y)) + h(x; \eta(y,x)) \leq 0$$

Obviamente estas funciones engloban a las monótonas sin más que tomar $\eta(y,x) = y - x$.

DEFINICIÓN 2.33 *Diremos que h es estrictamente D-invex monótona $(SDIM)$ en H, respecto de η, si* $\forall x, y \in H,\quad x \neq y$, *existe una función $\eta(y,x) \in R^n$, tal que:*

$$h(y;\eta(x,y)) + h(x;\eta(y,x)) < 0$$

DEFINICIÓN 2.34 *La bifunción h es pseudo D-invex monótona $(PDIM)$ en H, respecto de $\eta \iff \forall x, y \in H$, existe una función $\eta(y,x) \in R^n$, tal que:*

$$h(y;\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) \leq 0$$

DEFINICIÓN 2.35 *La bifunción h es estrictamente pseudo D-invex monótona $(SPDIM)$ en H, respecto de $\eta \iff \forall x, y \in H,\quad x \neq y$, existe una función $\eta(y,x) \in R^n$, tal que:*

$$h(y;\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) < 0$$

DEFINICIÓN 2.36 *Diremos que la bifunción h es cuasi D-invex monótona $(QDIM)$ en H, respecto de $\eta \iff \forall x, y \in H$, existe una función $\eta(y,x) \in R^n$, tal* *que:*

$$h(y;\eta(x,y)) > 0 \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) \leq 0$$

Para estas bifunciones se cumple, sin más que comparar las distintas definiciones, que:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(DIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PDIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QDIM)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SDIM)}} & & \boxed{\text{(SPDIM)}} & &
\end{array}$$

2.2.3 Condiciones suficientes de D-invex Monotonicidad Generalizada

En esta sección conseguiremos condiciones suficientes de D-invex monotonicidad generalizada.

TEOREMA 2.11 *Si la función $\theta : H \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es D-invex (DIX) en H, respecto de η, entonces $h(x, \eta(x, y))$ es D-invex monótona (DIM) respecto de la misma η, donde $h : H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la bifunción asociada a θ.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que θ es D-invex en H, entonces $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $\eta(y, x) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\theta(x) - \theta(y) - h(y, \eta(x, y)) \geq 0$$

cambiando la x por la y,

$$\theta(y) - \theta(x) - h(x, \eta(y, x)) \geq 0$$

sumando estas dos desigualdades se tiene que

$$-h(x, \eta(y, x)) - h(y, \eta(x, y)) \geq 0$$

$$h(x, \eta(y, x)) + h(y, \eta(x, y)) \leq 0$$

esto es, h es D-invex monótona (DIM) respecto de la misma η. ∎

Hemos visto por el teorema anterior que condiciones suficientes de invex monotonicidad generalizada para funciones diferenciables, las podemos extender nosotros a bifunciones.

De igual manera se puede probar que:

TEOREMA 2.12 *Si la función $\theta : H \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente D-invex $(SDIX)$ en H, respecto de η, entonces $h(x, \eta(x, y))$ es estrictamente D-invex monótona $(SDIM)$ respecto de la misma η, donde $h : H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la bifunción asociada a θ.*

TEOREMA 2.13 *Si la función $\theta : H \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es pseudo D-invex $(PDIX)$ en H, respecto de η, entonces $h(x; \eta(x, y))$ es pseudo D-invex monótona $(PDIM)$ en H respecto de la misma η, donde $h : H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la bifunción asociada a θ.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $\eta(x, y) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$h(y; \eta(x, y)) \geq 0 \Rightarrow h(x; \eta(y, x)) \leq 0$$

Sea θ pseudo D-invex $(PDIX)$ $\iff$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ una función vectorial $\eta(x, y) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$h(x; \eta(x, y)) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) \leq \theta(x)$$

Consideramos $x, y \in H$, y asumimos que existe $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$h(y;\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow$ no se puede dar $\theta(x) < \theta(y)$.

Luego, supongamos que se da que $\theta(y) \leq \theta(x) \Rightarrow$ por la $(PDIX)$ si negamos la tesis, esto es,

$$\theta(y) > \theta(x) \Rightarrow h(y;\eta(x,y)) < 0$$

Si cambiamos la x por la y, tenemos que

$$h(x;\eta(y,x)) < 0$$

Luego, h es pseudo D-invex monótona $(SPDIM)$ respecto de la misma η. ■

TEOREMA 2.14 *Si la función $\theta : H \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es estrictamente pseudo D-invex $(SPDIX)$ en H, respecto de η, entonces $h(x;\eta(x,y))$ es estrictamente pseudo D-invex monótona $(SPDIM)$ en H respecto de la misma η, donde $h : H \times I\!R^n \to I\!R$ es la bifunción asociada a θ.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\forall x, y \in I\!R^n$, $x \neq y$, existe $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$h(y,\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) < 0$$

Sea θ estrictamente pseudo D-invex $(SPDIX)$ $\iff$ $\forall x, y \in I\!R^n$, $x \neq y$, existe una función vectorial $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$h(y;\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) < \theta(x)$$

Consideramos $x, y \in H$, $x \neq y$, y asumimos que $\exists$ $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que $h(y;\eta(x,y)) \geq 0 \Rightarrow$ no se puede dar $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Luego supongamos que se da que $\theta(y) < \theta(x) \Rightarrow$ por la $(SPDIX)$ si negamos la tesis, esto es, si

$$\theta(y) \geq \theta(x) \Rightarrow h(y;\eta(x,y)) < 0$$

Si cambiamos la x por la y, tenemos que

$$h(x;\eta(y,x)) < 0$$

Luego, h es estrictamente pseudo D-invex monótona $(SPDIM)$ respecto de la misma η. ■

TEOREMA 2.15 *Si la función $\theta : H \subseteq I\!R^n \to I\!R$ es cuasi D-invex $(QDIX)$ en H, respecto de η, entonces $h(x;\eta(y,x))$ es una bifunción cuasi D-invex monótona $(QDIM)$ en H respecto de la misma η, donde $h : H \times I\!R^n \to I\!R$ es la bifunción asociada a θ.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\forall x, y \in I\!R^n$, existe $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$h(y;\eta(x,y)) > 0 \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) \leq 0$$

Sea θ cuasi D-invex $(QDIX)$ $\iff$ $\forall x, y \in I\!R^n$, $\exists$ una función vectorial

$\eta(x,y) \in I\!R^n$, tal que

$$\theta(x) \leq \theta(y) \Rightarrow h(y;\eta(x,y)) \leq 0$$

Consideramos $x, y \in H$ y asumimos que existe $\eta(x,y) \in I\!R^n$, tenemos que $h(y;\eta(x,y)) > 0$ entonces no se puede dar $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Luego supongamos que se da que $\theta(x) > \theta(y) \Rightarrow$ por la $(QDIX)$, si

$$\theta(y) \leq \theta(x) \Rightarrow h(x;\eta(y,x)) \leq 0$$

Luego, h es cuasi D-invex monótona $(QDIM)$ respecto de la misma η. ■

2.2.4 Invex Monotonicidad Generalizada para Multifunciones

Hemos trabajado con funciones $F : I\!R^n \to I\!R^n$, con bifunciones $h : D \times I\!R^n \to I\!R$, y ahora pasamos a trabajar con funciones conjunto valuadas (multifunciones) $V : D \subset I\!R^n \to I\!R^n$, que aplican puntos en subconjuntos de $I\!R^n$, donde D es un subconjunto cerrado y convexo. Los motivos que explican la necesidad la introducción de estas multifunciones son:

1. Dada una bifunción $h(x, y - x)$, se considera a esta h como una función soporte de un conjunto convexo llamado subdiferencial y denotado por $\delta h(x)$. La aplicación $V : x \to \delta h(x)$ es una multifunción, donde

   $$\delta h(x) = \left\{ g \in I\!R^n / \quad (y - x)^t g \leq h(x, y - x), \quad \forall d = y - x \in I\!R^n \right\}$$

   O dicho de otra manera,

   $$h(x, y - x) = \sup \left\{ (y - x)^t g, \quad g \in I\!R^n \right\}$$

   Como veremos posteriormente, la monotonicidad de la multifunción δh está ligada a la monotonicidad de la bifunción h.

2. Las multifunciones se utilizarán para conseguir resultados de existencia de soluciones del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$, que veremos posteriormente.

Sea $V : D \subset I\!\!R^n \to I\!\!R^n$ una multifunción. S. Komlósi, da las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.37 *Diremos que V es monótona (M) en D si $\forall x, y \in D$, tenemos*

$$\forall u \in V(x), \forall v \in V(y), \quad (y-x)^t(v-u) \geq 0,$$

ó lo que es lo mismo

$$\forall u \in V(x), \forall v \in V(y), \quad (y-x)^t v + (x-y)^t u \leq 0$$

DEFINICIÓN 2.38 *Diremos que V es estrictamente monótona (SM) en D si $\forall x, y \in D, \quad x \neq y$, tenemos*

$$\forall u \in V(x), \forall v \in V(y), \quad (y-x)^t(v-u) > 0$$

ó lo que es lo mismo

$$\forall u \in V(x), \forall v \in V(y), \quad (y-x)^t v + (x-y)^t u < 0$$

DEFINICIÓN 2.39 *La multifunción V es pseudomonótona (PM) en $D \iff \forall x, y \in D, \quad \exists u \in V(x), \quad$ tal que*

$$(y-x)^t u \geq 0 \Rightarrow (y-x)^t v \geq 0, \quad \forall v \in V(y)$$

DEFINICIÓN 2.40 *La multifunción V es estrictamente pseudomonótona (SPM) en D $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in D, \quad \exists u \in V(x), \quad$ tal que*

$$(y-x)^t u \geq 0 \Rightarrow (y-x)^t v > 0, \quad \forall v \in V(y)$$

DEFINICIÓN 2.41 *La multifunción $V : D \subset I\!R^n \to I\!R^n$ es cuasimonótona (QM) en D $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in D, \quad \exists u \in V(x), \quad$ tal que*

$$(y-x)^t u > 0 \Rightarrow (y-x)^t v \geq 0, \quad \forall v \in V(y)$$

Para estas multifunciones se cumple que

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{(M)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QM)}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\boxed{\text{(SM)}} & & \boxed{\text{(SPM)}} & &
\end{array}$$

En Komlòsi, S. [21], se demuestra el siguiente teorema que relaciona la cuasi monotonicidad de una multifunción con la de su bifunción soporte:

TEOREMA 2.16 *Sea $\delta h(x)$ una aplicación subdiferencial definida en un convexo C con función soporte $h(x,d)$. La multifunción $\delta h(x)$ es cuasi monótona (QM) en C $\Longleftrightarrow$ la bifunción $h(x,d)$ es cuasi monótona (QM) en C.*

Además, si $h(x,d)$ es una cierta derivada generalizada de una cierta función θ, podemos dar un paso más, y ver que la cuasi monotonía (QM) de $\delta h(x)$ es equivalente a la (QM) de h, que a su vez es equivalente a la cuasi convexidad (QCX) de θ.

Las nuevas definiciones de invex monotonicidad para multifunciones que posteriormente veremos, se utilizarán fundamentalmente en la solución del llamado Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$, que trataremos más tarde.

Podemos generalizar las definiciones de anteriores secciones, suponiendo que existe una función vectorial antisimétrica $\eta : D \times D \rightarrow I\!R^n$, tal que $\eta(x,y) \in I\!R^n$, donde $I\!R^n$ es un espacio vectorial, D es un subconjunto cerrado y la aplicación punto conjunto $V : D \subset I\!R^n \rightarrow I\!R^n$, a:

DEFINICIÓN 2.42 *Diremos que V es invex monótona (IM) respecto de $\eta(y,x)$ antisimétrica en D, si $\forall x, y \in D, \quad \exists \eta(y,x)$, tal que*

$$\forall u \in V(x),\, \forall v \in V(y), \quad \eta(y,x)^t(v-u) \geq 0,$$

ó lo que es lo mismo,

$$\forall u \in V(x),\, \forall v \in V(y), \quad \eta(y,x)^t v + \eta(x,y)^t u \leq 0$$

EJEMPLO 2.6 *Sea $D = I\!R$, $V(x) = \{2x\}$, y $\eta(x,y) = e^x - e^y$ entonces V es invex-monótona (IM) en $I\!R$.*

DEFINICIÓN 2.43 *Diremos que V es estrictamente invex monótona (SIM) respecto de $\eta(y,x)$ antisimétrica en D, si $\forall x, y \in D$, $\quad x \neq y$, $\quad \exists\eta(y,x)$, tal que*

$$\forall u \in V(x),\ \forall v \in V(y), \quad \eta(y,x)^t(v-u) > 0,$$

ó lo que es lo mismo,

$$\forall u \in V(x),\ \forall v \in V(y), \quad \eta(y,x)^t v + \eta(x,y)^t u < 0$$

DEFINICIÓN 2.44 *La multifunción V es pseudo invex monótona (PIM) respecto de $\eta(y,x) \in I\!R^n$ antisimétrica en $D \iff \forall x, y \in D$, $\exists\eta(y,x)$, $\exists u \in V(x)$, tal que*

$$\eta(y,x)^t u \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t v \geq 0, \quad \forall v \in V(y)$$

DEFINICIÓN 2.45 *La multifunción V es estrictamente pseudo invex monótona $(SPIM)$ respecto de $\eta(y,x) \in I\!R^n$ antisimétrica en D, si y sólo si, $\forall x, y \in D$, $x \neq y$, $\quad \exists\eta(y,x)$, $\quad \exists u \in V(x)$, tal que*

$$\eta(y,x)^t u \geq 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t v > 0, \quad \forall v \in V(y)$$

DEFINICIÓN 2.46 *La multifunción V es cuasi invex monótona (QIM) respecto de $\eta(y,x) \in \mathbb{R}^n$ antisimétrica en D, si y sólo si, $\forall x, y \in D \quad \exists \eta(y,x), \quad \exists u \in V(x)$, tal que*

$$\eta(y,x)^t u > 0 \Rightarrow \eta(y,x)^t v \geq 0, \quad \forall v \in V(y)$$

Para estas multifunciones se cumple por la simple observación de las definiciones que:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{(IM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(PIM)}} & \Rightarrow & \boxed{\text{(QIM)}} \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \\ \boxed{\text{(SIM)}} & & \boxed{\text{(SPIM)}} & & \end{array}$$

Capítulo 3

APLICACIÓN A LOS PROBLEMAS VARIACIONALES

3.1 Los problemas variacionales

Históricamente, los problemas de desigualdad variacional fueron introducidos por Hartman, P. y Stampacchia, G. [10]. Los primeros estudios de los problemas variacionales estuvieron ligados al Cálculo de Variaciones, problemas de valores de frontera que se pueden formular en forma de ecuaciones en derivadas parciales y problemas físicos ligados al estudio del paso de líquidos a través de membranas.

La importancia de estos problemas variacionales radica en que expresan las condiciones necesarias de optimalidad para el Problema de Programación Matemática (MP). Tanto las condiciones de Kuhn-Tucker, como las de punto de silla de un Problema de Programación Matemática (MP), admiten una formulación de problema variacional.

Seguidamente, expondremos una serie de problemas que generalizan el problema clásico de programación matemática y que quedan englobados dentro de los problemas variacionales. Veremos que la monotonicidad da condiciones para la existencia de soluciones de dichos problemas. Nuestro objetivo será extender dichas condiciones de monotonicidad, a las de invex monotonicidad generalizada.

Consideremos

DEFINICIÓN 3.1 *El Problema de Programación Matemática:*

$$(MP) \qquad \min \theta(x)$$

$$\textit{sujeto a} \quad x \in X$$

donde $\theta : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

El concepto de monotonicidad nació históricamente con problemas como el Problema de Complementariedad (CP).

DEFINICIÓN 3.2 *El Problema de Complementariedad* (CP) *consiste en encontrar un* $\bar{x} \geq 0$, *tal que*

$$F(\bar{x}) \geq 0, \quad \bar{x}^t F(\bar{x}) = 0$$

donde $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$.

Una generalización del anterior problema es el Problema de Complementariedad Generalizado (GCP):

DEFINICIÓN 3.3 *El Problema de Complementariedad Generalizado* (GCP), *trataría de encontrar un* $\bar{x}$, *tal que*

$$\bar{x} \in K, \quad F(\bar{x}) \in K^* \quad y \quad \bar{x}^t F(\bar{x}) = 0$$

donde K *es un cono convexo y cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *y* K^* *es el cono dual definido por*

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad y^t x \geq 0 \quad \forall x \in K \right\}$$

Consideremos ahora

DEFINICIÓN 3.4 *El Problema de Programación Matemática No Negativo:*

$$(NMP) \quad \min \theta(x)$$

$$\textit{sujeto a} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

donde $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funciones convexas diferenciables.*

Es fácil ver que tanto las condiciones de Kuhn-Tucker, como las de punto de silla de un Problema de Programación Matemática No Negativo (NMP), admiten una formulación de Problema de Complementariedad (CP). Esto hace que podamos relacionar las soluciones del Problema de Minimización No negativo (NMP), con las las soluciones de un Problema de Complementariedad (CP).

Una condición necesaria y suficiente, para que x sea solución del problema de minimización (NMP), supuesto que se verifica la cualificación de restricciones de Slater, y θ y g_i sean convexas y diferenciables $\forall i = 1, \ldots, m$, es que $\exists\, u \in \mathbb{R}^m$, tal que (x, u) verifiquen las condiciones de Kuhn-Tucker, o lo que es lo mismo, (x, u) solucionen un Problema de Complementariedad (CP), donde

$$F(x, u) = \begin{pmatrix} \nabla\theta(x) + u^t \nabla g(x) \\ -g(x) \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 3.5 *El Problema de Desigualdad Variacional* (VIP)*, trata de encontrar un* $\bar{x} \in D$*, tal que*

$$(y - \bar{x})^t F(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall y \in D$$

donde $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *y* D *es un subconjunto cerrado y convexo.*

Si D es un cono convexo, entonces el Problema de Desigualdad Variacional (VIP) y el Problema de Complementariedad Generalizado (GCP) coinciden.

En Mancino, O.G. y Stampacchia, G.S. [24], se demuestra que en el caso de que $F = J = \nabla\theta$, el problema (VIP) expresa las condiciones necesarias de optimalidad para el Problema de Programación Matemática (MP). Sea D un conjunto no vacío, convexo y cerrado de $\mathbb{R}^n$, y θ una aplicación convexa y diferenciable en D, el punto $\bar{x}$ resuelve el problema (VIP) con $F = J = \nabla\theta \iff \bar{x}$ resuelve el Problema de Programación Matemática (MP). Así pues, el problema de desigualdad variacional va ligado al problema de minimización.

Se han desarrollado diversos esfuerzos para conseguir condiciones suficientes para asegurar la existencia de soluciones del Problema de Desigualdad Variacional (VIP). En Karamardian, S. [15], se asegura la existencia de solución del Problema Variacional (VIP), a través de la continuidad de F. En un paso siguiente se pudo asegurar la existencia de solución del Problema de Desigualdad Variacional (VIP), a través de la monotonicidad de la función F, como se puede ver en Harker, P.T. y Pang, J.S. [9]:

TEOREMA 3.1 *Para un problema* (VIP) *se cumplen las propiedades siguientes:*

1. *Si* F *es monótona* (M) $\Rightarrow$ *el conjunto de soluciones es convexo (puede ser vacío).*

2. *Si* F *es estrictamente monótona* (SM) $\Rightarrow$ *existe como mucho una solución.*

3. *Si* F *es fuertemente monótona* (SGM) $\Rightarrow$ *existe solución y es única.*

Posteriormente, Karamardian, S. [16], debilitó las condiciones de monotonicidad (M) o estrictamente monotonicidad (SM), sustituyéndolas por la pseudomonotonicidad (PM).

Por tanto, cuando la aplicación F es pseudo monótona (PM) ó monótona (M), el Problema de Desigualdad Variacional (VIP), no tiene necesariamente una solución. No obstante, si cierta condición de cualificación de restricciónes del tipo Slater se cumple, entonces la pseudo monotonicidad (PM) es una condición suficiente para establecer la existencia de una solución del (VIP).

Asociado al Problema de Desigualdad Variacional (VIP), encontramos el llamado Problema de Equilibrio (EP).

DEFINICIÓN 3.6 *El Problema de Equilibrio (EP) consistente en, dado D un subconjunto cerrado y convexo de $I\!R^n$, encontrar un $x^* \in D$, tal que*

$$g(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in D \subseteq I\!R^n$$

con $g : D \times D \to I\!R$ una bifunción, tal que $g(z, z) = 0 \quad \forall z \in D$.

Vemos que el Problema de Equilibrio (EP) incluye al Problema de Desigualdad Variacional (VIP) como caso particular, sin más que considerar

$$g(x, y) = (y - x)^t F(x)$$

siendo $F : I\!R^n \to I\!R^n$.

Se puede ver fácilmente que las soluciones de un Problema de Desigualdad Variacional (VIP) son equivalentes a las soluciones del Problema de Equilibrio (EP).

Estos problemas de Equilibrio (EP) engloban a los demás y por tanto se tiene el siguiente esquema, bajo ciertas condiciones:

$$\boxed{\text{(MP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(CP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(GCP)}} \iff \boxed{\text{(VIP)}} \iff \boxed{\text{(EP)}}$$

Los problemas de equilibrio nacen de la búsqueda de los puntos de equilibrio en los juegos n personales no cooperativos. Un punto de equilibrio representa la existencia de un resultado estable del juego, asociado a n estrategias. Se considera estable porque cualquier jugador que modificase unilateralmente su estrategia, se vería perjudicado con el cambio.

La búsqueda de estos puntos de equilibrio tiene importantes aplicaciones en Economía, por ejemplo en el modelo de equilibrio walrasiano. El propósito de este modelo es predecir la actividad económica en una economía cerrada, esto es, calcular el equilibrio de actividades y precios en una economía, cuando se incorporan todas las interacciones entre los artículos. Esto llega a ser de utilidad para analizar políticas de impuestos, intercambios internacionales, etc...

Intuitivamente, el equilibrio está caracterizado por la siguiente propiedad: Dado un vector de precios, se asignan los artículos o bienes, tal que cada agente maximice su función de utilidad dentro del límite de su presupuesto.

También en problemas de asignación de tráfico o modelos de equilibrio de redes, la búsqueda de los puntos de equilibrio se usa para predecir el volumen sostenido de tráfico en redes de transporte urbano. En Mecánica, en el paso de líquidos a través de diversas superficies, etc...

3.2 El Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar un problema más general que el problema (VIP). Es el llamado Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$. Trataremos de caracterizar las soluciones del $(VLIP)$, a través de la invex monotonicidad generalizada de las funciones que definen el problema.

DEFINICIÓN 3.7 *Sea $D \subseteq I\!R^n$ un conjunto no vacío, convexo y cerrado. Sean $F : D \to I\!R^n$ y $\eta : D \times D \to I\!R^n$ dos aplicaciones continuas. El Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$, consiste en encontrar un $\bar{x} \in D$, tal que*

$$\eta(x, \bar{x})^t F(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

Como vemos, el problema

$$\boxed{\text{(VIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(VLIP)}}$$

Si consideramos que $\eta(x, \bar{x}) = (x - \bar{x})$, entonces el Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$ coincide con el Problema de Desigualdad Variacional (VIP).

3.2.1 Teoremas de existencia de soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$

En Parida, J., Sahoo, M. y Kumar, A. [35], se prueba la existencia de soluciones del problema $(VLIP)$, basándonos en la continuidad de la función $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde M es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$.

En otros trabajos se prueba que la condición de que F sea continua es excesiva. Así la podemos rebajar a que F sea hemicontinua, es decir, continua en cualquier segmento lineal de M.

DEFINICIÓN 3.8 *F es hemicontinua si $\forall u, v \in D$ la aplicación $t \rightarrow v^t F(u + tv)$ es continua, con $0 \leq t \leq 1$.*

En Siddiqi, A.H., Khaliq, A. y Ansari, Q.H. [38], se estudia la existencia de soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, exigiendo que F sea invex monótona (IM).

En esta sección demostraremos que es posible asegurar la existencia de soluciones de un Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, bajo hipotesis más débiles que las impuestas en la literatura. Para esto necesitamos algunas definiciones y lemas previos.

En primer lugar, introduciremos el concepto de aplicación KKM:

DEFINICIÓN 3.9 *Diremos que una aplicación punto conjunto, o conjunto valuada, o multifunción $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una aplicación Knaster-Kuratowsky-Mazurkiewcz (KKM-aplicación), si para cada subconjunto finito $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de*

$\mathbb{R}^n$, su envolvente convexa

$$conv(\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(u_i)$$

LEMA 3.1 (Fan, K. [6]) *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una KKM-aplicación. Si $V(u)$ es compacto $\forall u \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\bigcap_{u \in \mathcal{A}} V(u) \neq \emptyset$$

El siguiente lema será usado posteriormente para probar la existencia de soluciones de un problema $(VLIP)$.

LEMA 3.2 *Sea C un subconjunto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. *$F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) respecto de η y hemicontinua en C,*

2. *$\eta : C \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ es antisimétrica,*

3. *η lineal en el primer argumento.*

Entonces $\forall u \in C$ se tiene:

$$\eta(v, u)^t F(u) \geq 0 \quad \forall v \in C \tag{3.1}$$

si y sólo si

$$\eta(v, u)^t F(v) \geq 0 \quad \forall v \in C \tag{3.2}$$

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Sea $u \in C$ una solución de 3.1. Puesto que F es (PIM) respecto de η, para cada $v \in C$, tenemos

$$\eta(v,u)^t F(u) \geq 0 \Rightarrow \eta(v,u)^t F(v) \geq 0$$

$\Leftarrow$) Sea $v, u \in C$ y consideremos $w = tv + (1-t)u \in C$, con $0 < t < 1$. Por 3.2,

$$\eta(tv + (1-t)u, u)^t F(u + t(v-u)) \geq 0.$$

Puesto que η es lineal en el primer argumento y además η es antisimétrica

$$\eta(u,u)^t F(u) = 0 \quad \forall u \in C$$

tenemos que

$$t\eta(v,u)^t F(u + t(v-u)) \geq 0.$$

Dividiendo por t,

$$\eta(v,u)^t F(u + t(v-u)) \geq 0$$

Como F es hemicontinua en C, cuando tomamos $t \to 0^+$, obtenemos

$$\eta(v,u)^t F(u) \geq 0, \quad \forall v \in C$$

■

A partir de las hipótesis de la pseudo invex monotonicidad (PIM) de F y a la linealidad de η, demostraremos el siguiente teorema de existencia:

TEOREMA 3.2 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. *$F : M \to \mathbb{R}^n$ es pseudo invex monótona (PIM) respecto de η y hemicontinua en M,*

2. *$\eta : M \times M \to \mathbb{R}^n$ es continua y antisimétrica,*

3. *η lineal en el primer argumento.*

Entonces existe $u_0 \in M$, tal que

$$\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea la función punto-conjunto $V_1 : M \to M$, tal que

$$V_1(v) = \left\{u \in M : \quad \eta(v, u)^t F(u) \geq 0\right\}, \quad \forall v \in M$$

Probaremos primero que V_1 es una KKM-aplicación.

Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset M$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$ y

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \notin \bigcup_{i=1}^n V_1(v_i)$$

Tenemos entonces que

$$\eta(v_i, v)^t F(v) < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta(v_i, v)^t F(v) < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Al ser η lineal en el primer argumento,

$$\eta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, v)^t F(v) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \eta(v_i, v)^t F(v) < 0$$

entonces

$$\eta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)^t F(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i) < 0$$

en contradicción con la hipótesis de antisimetría que exige que

$$\eta(v,v)^t F(v) = 0, \quad \forall v \in M.$$

Por tanto

$$conv(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1(v_i)$$

y así pues, V_1 es una KKM-aplicación.

Sea la función punto-conjunto $V_2 : M \to M$, tal que

$$V_2(v) = \left\{u \in M : \quad \eta(v,u)^t F(v) \geq 0\right\}, \quad \forall v \in M$$

Probaremos que $V_1(v) \subset V_2(v), \quad \forall v \in M.$

Sea $u \in V_1(v)$, esto es, $\eta(v,u)^t F(u) \geq 0$, por la (PIM) tenemos que

$$\eta(v,u)^t F(v) \geq 0$$

luego $u \in V_2(v)$.

Por tanto, como $V_1 \subset V_2$ y V_1 es una KKM-aplicación entonces V_2 es una KKM-aplicación.

Por el lema 3.2,

$$\bigcap_{v\in M} V_1(v) = \bigcap_{v\in M} V_2(v).$$

Además, $V_2(v)$ para cada v es cerrado, ya que F y η son continuas.

Así pues, para cualquier $v \in M$ $V_2(v)$ es cerrado, y por ser M un acotado, entonces $V_2(v)$ es acotado, y por tanto compacto. Por el lema 3.1

$$\bigcap_{v\in M} V_1(v) = \bigcap_{v\in M} V_2(v) \neq \emptyset.$$

Por lo que existe $u_0 \in M$, tal que

$$\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

■

Luego, hemos conseguido demostrar la existencia de soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, exigiendo la pseudo invex monotonicidad (PIM) de F, hipótesis más débil que la simple invex monotonicidad (IM).

Es conocido que el conjunto solución del Problema de Programación convexo (MP), (θ convexa y X convexo), es convexo. Probaremos que también lo es el conjunto de soluciones Y, de un Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$, bajo ciertas condiciones.

TEOREMA 3.3 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. $F : M \rightarrow I\!R^n$ es pseudo invex monótona (PIM) respecto de η y hemicontinua en M,

2. $\eta : M \times M \rightarrow I\!R^n$ es continua y antisimétrica,

3. η lineal en los dos argumentos.

Entonces el conjunto de soluciones Y de un problema $(VLIP)$, es convexo y cerrado.

DEMOSTRACIÓN:

Sea Y el conjunto de soluciones de $(VLIP)$. Veamos primero que Y es un conjunto convexo. Sean $u_1, u_2 \in Y$ y $0 \leq t \leq 1$, tendremos que probar que

$$u_t = u_1 + t(u_2 - u_1) \in Y, \quad \forall t \in [0,1]$$

Por ser u_1, u_2 soluciones de $(VLIP)$ se tiene que

$$\eta(v, u_1)^t F(u_1) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

$$\eta(v, u_2)^t F(u_2) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

Por otro lado, por ser η lineal

$$\eta(v, u_t)^t F(v) = (1-t)\eta(v, u_1)^t F(v) + t\eta(v, u_2)^t F(v) \geq 0$$

siendo la última desigualdad cierta por estar en las hipótesis del lema 3.2.

Por tanto u_t es la solución de $(VLIP)$ $\forall t \in [0,1]$ y por tanto Y es convexo.

Veamos ahora que el conjunto Y es cerrado.

Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y convergente a un punto u. Entonces

$$\eta(v, u_n)^t F(u_n) \geq 0, \quad \forall v \in X$$

que es equivalente a

$$\eta(v, u_n)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in X$$

por el lema 3.2.

Tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$\eta(v, u)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in X$$

por ser η continua.

Lo que implica que u pertenece a Y. Por tanto, Y es un conjunto cerrado. ■

Luego, hemos comprobado que el conjunto Y de soluciones de un Problema Cuasi Variacional es convexo y cerrado, bajo la hipótesis de la pseudo invex monotonicidad (PIM).

Hemos visto que la pseudo invex monotonicidad (PIM), nos asegura la existencia de solución de un Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, pero no nos asegura la unicidad de la citada solución. Para conseguirlo exigiremos la estricta pseudo invex monotonicidad $(SPIM)$.

COROLARIO 3.3 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. *$F : M \to \mathbb{R}^n$ es estrictamente pseudo invex monótona $(SPIM)$ respecto de η y hemicontinua en M,*
2. *$\eta : M \times M \to \mathbb{R}^n$ es continua y antisimétrica,*
3. *η lineal en el primer argumento.*

Entonces existe un único $u_0 \in M$, tal que

$$\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

DEMOSTRACIÓN:

Como $(SPIM) \Rightarrow (PIM)$ y por el teorema anterior tendríamos asegurada la existencia de solución del $(VLIP)$. Veamos ahora la unicidad.

Supongamos que $(VLIP)$ tiene dos soluciones, u_0 y u_1, entonces

$$\eta(u_1, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \tag{3.3}$$

y

$$\eta(u_0, u_1)^t F(u_1) \geq 0, \quad \forall u_0 \in M \tag{3.4}$$

Puesto que F es $(SPIM)$ de (3.3) se sigue que $\eta(u_1, u_0)^t F(u_1) > 0, \quad \forall u_0 \in M$, entonces por la antisimetría, $\eta(u_0, u_1)^t F(u_1) < 0$, lo que contradice (3.4). ■

Siguiendo nuestro propósito de debilitar las hipótesis necesarias para asegurar la existencia de soluciones de un Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, probaremos que es posible sustituir la pseudo invex monotonicidad (PIM) por la cuasi invex monotonicidad (QIM).

Empezaremos demostrando el siguiente lema:

LEMA 3.4 *Sea $F : C \to \mathbb{R}^n$ una función hemicontinua y $\eta : C \times C \to \mathbb{R}^n$ continua, lineal en el primer argumento y antisimétrica. Sea $y \in C$ convexo, supongamos que F es cuasi invex monótona (QIM) respecto de η. Si para algún $x_1 \in C$ se tiene que $\eta(x_1, y)^t F(y) \geq 0$ entonces*

$$\eta(x_1, y)^t F(x_1) \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x_t = x_1 + t(x - x_1), \quad \forall 0 < t \leq 1$, entonces obviamente $\eta(x_t, y)^t F(y) > 0$. Ya que F es (QIM) entonces tenemos que $\eta(x_t, y)^t F(x_t) \geq 0$.

Por ser η continua, cuando $x_t \to x_1 \Rightarrow \eta(x_t, y) \to \eta(x_1, y) \Rightarrow \eta(x_1, y)^t F(x_t) \geq 0$ y por la hemicontinuidad de F, tenemos que

$$\eta(x_1, y)^t F(x_1) \geq 0$$

■

El siguiente teorema asegura la existencia de solución de un Problema Cuasi

Variacional $(VLIP)$, si relajamos la pseudo invex monotonicidad (PIM) de F a la cuasi invex monotonicidad (QIM).

TEOREMA 3.4 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $I\!R^n$, tal que*

1. *$F : M \to I\!R^n$ es cuasi invex monótona (QIM) respecto de η y hemicontinua en M,*
2. *$\eta : M \times M \to I\!R^n$ es continua y antisimétrica,*
3. *η es lineal en el primer argumento*

Entonces existe $u_0 \in M$, tal que

$$\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea la función punto-conjunto $V_1 : M \to M$, tal que

$$V_1(v) = \Big\{u \in M : \quad \eta(v, u)^t F(u) \geq 0\Big\}, \quad \forall v \in M$$

Probaremos, primero que V_1 es una KKM-aplicación.

Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset M$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$ y

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \notin \bigcup_{i=1}^n V_1(v_i)$$

Tenemos entonces que

$$\eta(v_i, v)^t F(v) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por ser η lineal en el primer argumento,

$$\eta(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v)^t F(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta(v_i, v)^t F(v) < 0$$

$$\eta(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i)^t F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) < 0$$

en contradicción con la hipótesis de antisimetrìa.

Por tanto

$$conv(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1(v_i)$$

y así pues, V_1 es una KKM-aplicación.

Sea la función punto-conjunto $V_2 : M \to M$, tal que

$$V_2(v) = \left\{ u \in M : \quad \eta(v, u)^t F(v) \geq 0 \right\}, \quad \forall v \in M$$

Probaremos que $V_1(v) \subset V_2(v) \quad \forall v \in M$.

Sea $u \in V_1(v)$, esto es,

$$\eta(v, u)^t F(u) \geq 0$$

Por el lema anterior 3.4, al ser F cuasi invex monótona (QIM), tenemos que

$$\eta(v, u)^t F(v) \geq 0$$

luego $u \in V_2(v)$.

Por tanto, como $V_1 \subset V_2$ y V_1 es una KKM-aplicación, entonces V_2 es una KKM-aplicación.

Por el lema 3.4, se tiene que

$$\bigcap_{v \in M} V_1(v) = \bigcap_{v \in M} V_2(v).$$

Además, $V_2(v)$ para cada v es cerrado ya que F y η son continuas. Luego $V_2(v)$ es cerrado, y por ser M un acotado, entonces $V_2(v)$ es también acotado y por tanto compacto. Por el lema 3.1

$$\bigcap_{v \in M} V_1(v) = \bigcap_{v \in M} V_2(v) \neq \emptyset.$$

Así pues, existe $u_0 \in M$, tal que

$$\eta(v, u_0)^t F(u_0) \geq 0, \quad \forall v \in M$$

■

Luego, hemos debilitado las condiciones necesarias para asegurar las soluciones del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$, primero exigiendo sólo pseudo invex monotonicidad (PIM), y después, cuasi invex monotonicidad (QIM).

A continuación probaremos que, bajo la hipótesis de pseudo invex monótona (PIM), el conjunto de soluciones de un Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$ es un conjunto invex y cerrado.

Para ello voy a necesitar extender el concepto de hemicontinuidad al de invex-hemicontinuidad. Veremos que es la extensión natural del citado concepto al caso de conjuntos invex.

DEFINICIÓN 3.10 *Se dice que el operador* $F : H \to \mathbb{R}^n$ *es invex-hemicontinuo, donde* H *es un conjunto invex respecto de* η, *si* $\forall u, v \in H, \quad 0 \leq t \leq 1$, *la aplicación*

$$T(t) = \eta(v,u)^t F(u + t\eta(v,u))$$

es continua en t.

Observamos que si $\eta(v,u) = v - u$ entonces la invex-hemicontinuidad es la hemicontinuidad.

DEFINICIÓN 3.11 *Diremos que la función* $\theta : H \to R$ *es preinvex con respecto a* η, *si* $\quad \forall u, v \in H, \quad t \in [0,1]$,

$$\theta(u + t\eta(v,u)) \leq (1-t)\theta(u) + t\theta(v)$$

DEFINICIÓN 3.12 *Diremos que la función* θ *es precóncava si* $-\theta$ *es preinvex.*

DEFINICIÓN 3.13 *Diremos que la función* $\theta : H \to \mathbb{R}$ *es prelineal con respecto a* η *si* $\quad \forall u, v \in H, \quad t \in [0,1]$,

$$\theta(u + t\eta(v,u)) = (1-t)\theta(u) + t\theta(v)$$

Es decir, una función prelineal es preinvex y precóncava. Si $\eta(v,u) = v - u$ la función es lineal.

LEMA 3.5 *Sea el operador* $F : H \to \mathbb{R}^n$*, siendo* H *un conjunto invex respecto de* η*,*

1. F *es pseudo invex monótona* (PIM) *respecto de* η *e invex-hemicontinua en* H*,*

2. $\eta : H \times H \to \mathbb{R}^n$ *es antisimétrica,*

3. η *es prelineal en el primer argumento.*

Entonces $u \in H$ *es solución de*

$$\eta(v,u)^t F(u) \geq 0, \quad \forall v \in H \tag{3.5}$$

si y sólo si

$$\eta(v,u)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in H \tag{3.6}$$

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Es inmediata por la pseudo invex monotonicidad (PIM) de F.

$\Leftarrow$) Supongamos que $u \in H$ una solución de 3.6, esto es,

$$\eta(v,u)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

Ya que H es invex, entonces $v_t = u + t\eta(v,u) \in H, \quad 0 \leq t \leq 1$.

Tomando $v = v_t$ en la desigualdad de arriba, tenemos al ser η prelineal en el primer argumento y antisimétrica

$$0 \leq \eta(v_t, u)^t F(v_t) = (1-t)\eta(u,u)^t F(v_t) + t\eta(v,u)^t F(v_t) =$$

$$= t\eta(v,u)^t F(v_t)$$

como $0 \leq t \leq 1$, tenemos que

$$\eta(v,u)^t F(v_t) \geq 0$$

Ya que F es invex hemicontinua, tomando $t \to 0^+$ tenemos el resultado requerido

$$\eta(v,u)^t F(u) \geq 0$$

■

El siguiente resultado es una extensión a funciones pseudo invex monótonas (PIM) de un resultado que Noor, M.A. [27], da para funciones invex monótonas (IM). Demostraremos que si H es invex, el conjunto de soluciones del problema cuasi variacional $(VLIP)$ es invex.

TEOREMA 3.5 *Sea H un conjunto invex respecto de η y sea $F : H \to I\!R^n$ una función,*

1. F es pseudo invex monótona (PIM) respecto de η e invex-hemicontinua en H, *2.* $\eta : H \times H \to I\!R^n$ *es continua y antisimétrica,*

3. η *es prelineal en el primer y segundo argumento,*

entonces el conjunto de todas las soluciones del problema $(VLIP)$*, es un conjunto invex y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea Y el conjunto de soluciones de $(VLIP)$. Veamos primero que Y es un conjunto invex respecto de η.

Sea $u_1, u_2 \in Y$ y $0 \leq t \leq 1$. Queremos probar que $u_t = u_1 + t\eta(u_2, u_1) \in Y$.

Puesto que F es pseudo invex monótona (PIM) e invex-hemicontinua, y η es antisimétrica y prelineal en el primer y segundo argumento, entonces por el lema anterior 3.5, tomando $u = u_t$ en la desigualdad 3.6 tenemos,

$$\eta(v, u_t)^t F(v) = \eta(v, u_1 + t\eta(u_2, u_1))^t F(v) =$$

$$= (1-t)\eta(v, u_1)^t F(v) + t\eta(v, u_2)^t F(v) \geq 0$$

porque $u_1, u_2 \in Y$ son soluciones de la desigualdad 3.6. Por tanto, $u_1 + t\eta(u_2, u_1)$ es una solución de la desigualdad 3.5, esto es, $\forall u_1, u_2 \in Y$ y $0 \leq t \leq 1$, implica que $u_1 + t\eta(u_2, u_1) \in Y$, y como consecuencia Y es un conjunto invex.

Veamos ahora que el conjunto Y es cerrado.

Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y convergente a u. Entonces

$$\eta(v,u_n)^t F(u_n) \geq 0, \quad \forall v \in I\!R^n$$

que es equivalente a

$$\eta(v,u_n)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in I\!R^n$$

por el lema 3.5.

Tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que por ser η continua

$$\eta(v,u)^t F(v) \geq 0, \quad \forall v \in I\!R^n$$

lo que implica que u también pertenece a Y, luego Y es un conjunto cerrado. ■

3.2.2 Relación del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$ con los Problemas de Programación

En este apartado relacionaremos el estudio del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$ primero con el Problema de Programación Matemática no lineal (MP), usando conjuntos y funciones invex, y posteriormente con el Problema de Programación Restringido (RMP).

Consideramos el Problema de Programación no restringido (MP), (ver definición 3.1), donde el conjunto $X = H$ es un conjunto invex. El siguiente teorema prueba que toda solución de un Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$ es solución de un Problema de Programación (MP) asociado.

TEOREMA 3.6 *Sea $\theta : H \to I\!R$ es una función invex con respecto a η, donde H es un conjunto invex. El elemento $u \in H$ satisface la desigualdad cuasi variacional*

$$\eta(v,u)^t\nabla\theta(u) \geq 0, \quad \forall v \in H, \tag{3.7}$$

si y sólo si, u es un mínimo del problema (MP).

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Por ser θ invex, se verifica que

$$\theta(v) - \theta(u) \geq \eta(v,u)^t\nabla\theta(u) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

con lo que la función θ tiene un mínimo en u.

$\Leftarrow$) Supongamos que u es un mínimo de la función θ. Entonces, para cada $v \in H, \quad \alpha \in (0,1], \quad u + \alpha\eta(v,u) \in H,$

$$\theta(u + \alpha\eta(v,u)) - \theta(u) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

Puesto que θ es invex en u, dividiendo la expresión anterior por α cuando $\alpha \to 0^+$, tenemos

$$\eta(v,u)^t \nabla\theta(u) \geq 0$$

De lo que se deduce que u es solución de $(VLIP)$. ■

Por tanto, u es una solución de un problema $(VLIP)$, si y sólo si, u es el mínimo del Problema de Programación (MP), cuando θ es invex. Por consiguiente, en entornos invex, las soluciones del $(VLIP)$ son equivalentes a los mínimos de (MP).

En los siguientes teoremas, utilizaremos la invex monotonicidad para caracterizar soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$ y, por ende, determinar los mínimos del Problema de Programación (MP).

TEOREMA 3.7 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, tal que*

1. $F = J = \nabla\theta$ *es pseudo invex monótona* (PIM) *respecto de* $\eta(y,x) > 0$ $\forall x, y \in M$ *y hemicontinua en* M,

2. $\eta : M \times M \to \mathbb{R}^n$ *es continua y antisimétrica,*

3. η *lineal en el primer argumento.*

Entonces, toda solución $u_0 \in int(M)$ *del Problema Cuasi Variacional* $(VLIP)$*, será también solución del Problema de Programación* (MP) *asociado.*

DEMOSTRACIÓN:

Como F es pseudo invex monótona (PIM), por el teorema 3.2, $u_0 \in M$ es solución del problema $(VLIP)$. Al ser M convexo, tenemos que el interior del mismo, $int(M)$, es convexo y abierto. $\nabla\theta$ es (PIM) y η lineal en el primer argumento y antisimétrica, entonces por la condición necesaria 2.10, θ es (PIX) en int(M) y por tanto invex $(PIX) = (IX)$. Usando el teorema 3.6, $u_0 \in int(M)$ es solución de (MP). ■

En el teorema anterior, hemos probado que podemos alcanzar las soluciones de un Problema de Programación, a través de un Problema Cuasi Variacional, utilizando la pseudo invex monotonicidad (PIM) de la función F.

Así como la pseudo invex monotonicidad (PIM) nos asegura la existencia de solución. En el próximo teorema es la estricta pseudo invex monotonicidad $(SPIM)$, la que nos asegura la unicidad de dicha solución.

TEOREMA 3.8 *Sea* M *un subconjunto no vacío, compacto y convexo de* $\mathbb{R}^n$*, tal que*

1. $F = J = \nabla\theta$ *es estrictamente pseudo invex monótona* $(SPIM)$ *respecto de*

$\eta(y,x) > 0 \quad \forall x, y \in M$, *y hemicontinua en M,*

2. $\eta : M \times M \to I\!R^n$ *es continua y antisimétrica,*

3. η *lineal en el primer argumento.*

Entonces, si la única u_0 *del Problema Cuasi Variacional* $(VLIP)$ *pertenece a* $int(M)$, *será también la única solución del Problema de Programación* (MP).

DEMOSTRACIÓN:

Como F es $(SPIM)$, por el corolario 3.3, $u_0 \in M$ es la única solución del problema $(VLIP)$. M es convexo, entonces el interior del mismo, $int(M)$, es convexo y abierto. $\nabla\theta$ es $(SPIM)$ y η lineal en el primer argumento y antisimétrica, entonces por la condición necesaria 2.9, θ es $(SPIX) \Rightarrow (PIX) = (IX)$ en int(M). Por lo que si suponemos que $u_0 \in int(M)$, entonces por el teorema 3.6, u_0 es la única solución de (MP). ■

Seguidamente demostraremos que la resolución de los problemas de optimización con restricciones, también está relacionada con la resolución de los problemas $(VLIP)$.

Hanson, M.A. [11], demuestra que las condiciones suficientes de Kuhn-Tucker en el Problema de Programación Restringido (RMP), se cumplen con condiciones de invexidad.

También bajo las condiciones de invexidad de $\theta, g_i, i = 1, \ldots, m$ y las condiciones de Kuhn-Tucker, $(\bar{x}, u)$ es el óptimo del problema dual y los valores extremos son iguales en los dos problemas, es decir, se verifica la dualidad débil.

Consideremos por tanto el problema

DEFINICIÓN 3.14 *Sea el Problema de Programación Restringido*

$$(RMP) \qquad \min \theta(u)$$

$$\textit{sujeto a} \quad g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad u \in X$$

donde $\theta, g_i : X \subset I\!R^n \to I\!R$.

Consideraremos que el conjunto de restricciones $X = H$ es un conjunto invex. Además necesitaremos resultados del tipo que los tratados por Osuna, R. [29],

LEMA 3.6 (Teorema de Alternativa) *Sean* $h_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ *funciones invex. Entonces, sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:*

1. $\exists u \in H, \quad h_1(u) < 0, \ldots, h_k(u) < 0$

2. $\exists \lambda \in I\!R^k_+ / \{0\}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(H) \subset I\!R_+$

Es decir, el Teorema de Alternativa es válido para funciones invex.

El siguiente teorema relaciona las soluciones del Problema de Programación Restringido (RMP), con las soluciones del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$.

TEOREMA 3.9 *Consideramos el problema* (RMP). *Supongamos que* θ *y las* g_i *son funciones diferenciables invex respecto de* η. *Si* u *es un mínimo de* (RMP), *entonces existen multiplicadores de Lagrange* $\tau \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$, *no todos cero, tal que*

$$\eta(v,u)^t(\tau\nabla\theta(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(u)) \geq 0, \quad \forall v \in H, \tag{3.8}$$

donde H *es un conjunto invex.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea u un mínimo del problema (RMP), entonces el sistema

$$\left.\begin{array}{c} \theta(v) - \theta(u) < 0 \\ g_i(u) < 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ v \in H \end{array}\right\}$$

no tiene solución, por lo que por el teorema de la Alternativa, $\exists \tau \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, no todos ceros, tal que

$$\tau(\theta(v) - \theta(u)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

Si hacemos $v = u$ entonces nos queda que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u) \geq 0, \quad \forall v \in H.$

Ya que $\lambda_i \geq 0$, $g_i(u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$, entonces $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u) = 0$.

Ya que H es un conjunto invex, existe una función $\eta : H \times H \to I\!R^n$, tal que,

$\forall u, v \in H$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\tau(\theta(u + t\eta(v,u)) - \theta(u)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(g_i(u + t\eta(v,u) - g_i(u)) \geq 0$$

Por la diferenciabilidad e invexidad de la funciones θ y g_i, $i = 1, \ldots, m$ en u, obtenemos

$$\eta(v,u)^t(\tau\nabla\theta(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(u)) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

■

Por lo que, si u es una solución del Problema de Minimización Restringido (RMP) en condiciones de invexidad, entonces u es una solución del Problema de Desigualdad Variacional $(VLIP)$.

3.2.3 El Problema Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$

Tras generalizar el Problema de Desigualdad Variacional (VIP), al Problema de Desigualdad Cuasi Variacional $(VLIP)$, daremos un paso más y generalizaremos el anterior problema, al llamado Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$, donde trabajaremos con funciones punto conjunto.

DEFINICIÓN 3.15 *Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Dadas dos bifunciones $h : X \times Y \to \mathbb{R}^n$ y $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, y una aplicación punto-conjunto $V : X \to Y$, el Problema de Desigualdad Cuasi-Variacional Generalizado, denotado por $(GVLIP)$, consiste en encontrar los vectores $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in V(\bar{x})$ tales que*

$$\eta(x, \bar{x})^t h(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

Como vemos, se tiene que

$$\boxed{\text{(VIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(VLIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(GVLIP)}}$$

Si $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$ y V es simple valuada, entonces $(GVLIP) = (VLIP)$.

En Parida, J. y Sen, A. [34] se prueba el siguiente resultado, donde se denota por $P(E)$ el conjunto de todos los subconjuntos convexos compactos de E.

TEOREMA 3.10 *Sean D y E dos conjuntos convexos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Supongamos que:*

1. *La multifunción* $V : D \to P(E)$ *es semicontinua superiormente y* $h : D \times E \to I\!R^n$ *continua,*

2. η *es antisimétrica y continua.*

3. *Para cada fijo* $(x, y) \in D \times E$*, la función* $\eta(u, x)^t h(x, y)$ *es convexa en* $u \in D$.

Si existe un $\bar{u} \in D$ *y una constante* $r > \|\bar{u}\|$ *tal que*

$$\max_{y \in V(x)} \eta(\bar{u}, x)^t h(x, y) \leq 0 \tag{3.9}$$

para todo $x \in D$ *con* $\|x\| = r$*, entonces existe una solución del problema* $(GVLIP)$.

El siguiente teorema es una extensión de un resultado de Parida, J. y Sen, A. [34]. Debilitaremos la condición de invex monotonicidad (IM) a la de pseudo invex monotonicidad (PIM).

TEOREMA 3.11 *Sean* D *y* E *dos conjuntos convexos y cerrados de* $I\!R^n$ *y* $I\!R^m$*, respectivamente. Supongamos que:*

1. *La multifunción* $V : D \to P(E)$ *es semicontinua superiormente y* $h : D \times E \to I\!R^n$ *continua.*

2. *La multifunción* $x \mapsto \{h(x, y) : \quad y \in V(x)\}$ *es pseudo invex monótona* (PIM) *en* D *respecto de* η *antisimétrica y continua.*

Si existe $\bar{u} \in D$, $\bar{v} \in V(\bar{u})$, *tal que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \eta(x, \bar{u})^t h(\bar{u}, \bar{v}) > 0,$$

entonces el Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$ *tiene solución.*

DEMOSTRACIÓN:

La hipótesis de que el límite sea estrictamente positivo, implica que $\exists\, r > \|\bar{u}\|$, tal que

$$\eta(x, \bar{u})^t h(\bar{u}, \bar{v}) > 0 \quad \forall x \in D \quad \text{con} \quad \|x\| = r.$$

De la antisimetría de η se sigue que $\forall x$

$$\eta(\bar{u}, x)^t h(\bar{u}, \bar{v}) < 0$$

entonces, por la pseudo invex monotonía (PIM), tenemos que $\forall y \in V(x)$

$$\eta(\bar{u}, x)^t h(x, y) < 0.$$

Luego, por el teorema anterior, el Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$ tiene solución. ■

El Problema Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$ y el Problema Punto de Silla

Veamos ahora como es posible caracterizar las soluciones de un Problema de Punto de Silla (SPP) y como consecuencia, de un Problema de Programación No lineal (P), a través de un Problema Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP)$, utilizando la definición de pseudo invex monotonicidad (PIM) para aplicaciones punto conjunto.

Consideramos, por tanto, los problemas siguientes:

DEFINICIÓN 3.16 *El Problema de Punto de Silla* (SPP) *consiste en encontrar* $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in W$, *tales que* $\forall x \in X,\ y \in W$

$$L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y})$$

donde $L(x,y) = \theta(x) + y^t g(x)$ *es la función lagrangiana.*

DEFINICIÓN 3.17 *El Problema de Programación no lineal consiste en:*

$$(P) \qquad \min L(x,y)$$

$$\textit{sujeto a} \quad (x,y) \in U$$

donde

$$U = \left\{ (x,y) : \quad x \in X, \quad y \in W, \quad L(x,y) = \max_{v \in W} L(x,v) \right\}$$

Asociado al Problema de Punto de Silla (SPP) podemos definir el siguiente Problema Cuasi Variacional Generalizado:

DEFINICIÓN 3.18 *El problema $(GVLIP1)$ consiste en encontrar $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y(\bar{x})$, tal que*

$$\eta(x, \bar{x})^t \nabla_x L(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

donde

$$Y(\bar{x}) = \left\{ y \in W, \quad L(\bar{x}, y) = \max_{v \in W} L(\bar{x}, v) \right\}$$

La demostración de la siguiente proposición es inmediata.

PROPOSICIÓN 3.12 *Sea $L(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$, $L(x, y)$ es invex en $x \in X$ para cada $y \in W$ fijo. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución del Problema Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP1)$ entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es solución del Problema Punto de Silla (SPP).*

Es bien conocido que todo punto de silla del lagrangiano es un óptimo del Problema de Programación asociado.

Como consecuencia, tenemos que se puede estudiar la existencia de soluciones del Problema Punto de Silla (SPP), y por ende las del Problema de Programación (P), a través de las soluciones del Problema Cuasi-variacional Generalizado $(GVLIP)$.

TEOREMA 3.13 *Sea D un conjunto convexo y cerrado de R^n, y sea M un conjunto convexo y compacto de R^p. Supongamos que:*

1. $L(x, x) = 0, \quad \forall x \in D$

2. $L(x,y)$ es invex en $x \in D$ para cada $y \in M$ fijo, siendo cóncava en $y \in M$ para cada $x \in D$ fijo.

3. Para cada $(x,y) \in D \times M$ fijo, $\eta(u,x)^t \nabla_x L(x,y)$ es convexa en $u \in D$, siendo η antisimétrica y continua.

Si existen $\bar{u} \in D$, $\bar{v} \in Y(\bar{u})$, tales que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \eta(x,\bar{u})^t \nabla_x L(\bar{u},\bar{v}) > 0,$$

entonces el Problema Punto de Silla (SPP) tiene solución, y por tanto también el Problema de Programación (P).

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que M es compacto y convexo, siendo $L(x,y)$ es cóncava en $y \in W$, entonces $Y(x)$ es compacto y convexo.

Se puede probar fácilmente que la aplicación $Y : D \to Y(x)$ es semicontinua superiormente. Por supuesto, $h = \nabla_x L(x,y)$ es continua. De la invexidad de L, tenemos que $\forall y \in Y(x)$, $v \in Y(u)$

$$L(x,y) - L(u,v) \geq L(x,v) - L(u,v) \geq \eta(x,u)^t \nabla_x L(u,v)$$

$$L(u,v) - L(x,y) \geq L(u,y) - L(x,y) \geq \eta(u,x)^t \nabla_x L(x,y)$$

De lo que se sigue que la aplicación $x \mapsto \{\nabla_x L(x,y) : y \in Y(x)\}$ es invex monótona (IM) y por tanto pseudo invex monótona (PIM) en D respecto de η antisimétrica y continua. Así pues por el teorema anterior 3.11 el Problema Cuasi Variacional Generalizado $(GVLIP1)$ tiene solución, y por tanto, el Problema Punto de Silla (SPP) y el Problema de Programación (P). ■

Así pues, la pseudo invex monotonicidad (PIM) permite estudiar la existencia de soluciones del Problema Cuasi Variacional Generalizado, y a su vez del Problema de Punto de Silla, y por medio de éstos, al Problema de Programación Matemática.

3.3 El Problema Pre Variacional $(PVIP)$

El siguiente problema que planteamos es una generalización del Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, el Problema de Desigualdad Pre-Variacional $(PVIP)$ se formula como sigue:

DEFINICIÓN 3.19 *Dado un conjunto $\mathcal{A} \subseteq I\!R^n$ y las aplicaciones $F : \mathcal{A} \to I\!R^n$, $\eta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to I\!R^n$ y $\theta : \mathcal{A} \to I\!R$, el Problema de Desigualdad Pre-Variacional $(PVIP)$ consiste en encontrar $\bar{x} \in \mathcal{A}$, tal que*

$$\eta(y, \bar{x})^t F(\bar{x}) \geq \theta(\bar{x}) - \theta(y), \quad \forall y \in \mathcal{A}$$

Es obvio que

$$\boxed{\text{(VIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(VLIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(PVIP)}}$$

Si $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (PVIP) = (VLIP)$.

Dien, N. H. [5], demuestra la existencia de soluciones del Problema Pre Variacional $(PVIP)$, utilizando el teorema del punto fijo de Kakutani.

Nosotros demostraremos teoremas de existencia para el Problema Pre-Variacional $(PVIP)$, considerándolo como un caso particular del Problema Pre-Variacional Generalizado $(GPVIP)$, que posteriormente definiremos.

3.3.1 El problema Pre-Variacional $(PVIP)$ y el Problema de Programación Matemática Restringido (RMP)

En esta sección veremos que el concepto de función invex en un punto, es equivalente al de solución de un Problema Pre-Variacional $(PVIP)$. También relacionaremos los puntos estacionarios que sean soluciones de un problema $(PVIP)$ con las soluciones de un Problema de Programación Restringido (RMP), (ver definición 3.14).

El siguiente teorema se obtiene de una manera inmediata:

TEOREMA 3.14 *Sea $\bar{x} \in X$ y $F(\bar{x}) = -\nabla\theta(\bar{x})$. Entonces son equivalentes las dos condiciones siguientes:*

1. *$\bar{x}$ es una solución del problema pre-variacional $(PVIP)$.*

2. *θ es invex con respecto a $\eta(y, \bar{x})$ en $\bar{x}$.*

DEFINICIÓN 3.20 *El punto $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times I\!R^m$ con $\bar{x} \in X$ y $\bar{u}_j \geq 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$, es un punto estacionario de Kuhn-Tucker, si*

1. $\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{u}^t\nabla g(\bar{x}) = 0$

2. $\bar{u}g(\bar{x}) = 0$

En Osuna, R. [29], se relaciona la invexidad de las funciones θ y g y los puntos de Kuhn-Tucker, con los mínimos del Problema de Programación Restringido (RMP). Nosotros trasladaremos las condiciones de invexidad a relaciones con los problemas $(PVIP)$, y así, relacionaremos las soluciones del problema $(PVIP)$ y los citados puntos de Kuhn-Tucker con los mínimos del Problema de Programación Restringido (RMP).

Concretamente damos unas condiciones suficientes para que los puntos de Kuhn-Tucker sean mínimos del Problema de Programación Restringido (RMP), y dichas condiciones se concretan en que sean soluciones de problemas pre-variacionales $(PVIP)$. Esas condiciones suficientes las detallamos en los siguientes resultados.

TEOREMA 3.15 *Sean* $\theta : X \to I\!R$, $F(x) = -\nabla\theta(x)$, $g_j : X \to I\!R$, $G_j(x) = -\nabla g_j(x)$, $\forall j = 1, \ldots, m$, $\forall x \in X$. *Si se verifica que:*

1. $(x, u) \in X \times I\!R^m$ *es un punto de Kuhn-Tucker para el problema* (RMP),
2. x *es una solución de los problemas* $PVIP(X, F, \eta)$ *y* $PVIP(X, G_j, \eta)$, $\forall j = 1, \ldots, m$ *con respecto al mismo vector* η.

Entonces x *es una solución óptima para el problema* (RMP).

DEMOSTRACIÓN:

Si $(x, u) \in X \times I\!R^m$ es un punto de Kuhn-Tucker para el Problema de Programación con restricciones (RMP), entonces se cumple que:

1. $\nabla\theta(x) + u^t\nabla g(x) = 0$

2. $u^t g(x) = 0$

Como $u_j \geq 0$ y $g_j(x) \leq 0 \Rightarrow u_j^t g_j(x) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m.$

Por tanto, para que ocurra que $u^t g(x) = 0$, tendrá que ocurrir que si $u_j > 0$ $\forall j = 1, \ldots, m$, entonces $g_j(x) = 0$.

Las condiciones anteriores equivalen a

$$\nabla\theta(x) + \sum_{j\in I(x)} u_j^t \nabla g_j(x) = 0$$

Por el Teorema de la Alternativa de Moztkin, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \nabla\theta(x)^t u < 0 \\ \nabla g_j(x)^t u \leq 0 \quad j \in I(x) \end{array}\right\}$$

no tiene solución.

Supongamos que x no es la solución óptima, esto es, $\exists y$ tal que $\theta(y) < \theta(x)$. Por ser x una solución del problema $PVIP(X, G, \eta)$ con $G(x) = -\nabla g_j(x)$, se tiene que para las restricciones activas

$$g_j(x) = 0 \Rightarrow \nabla g_j(x)^t \eta(y, x) \leq g_j(y) - g_j(x) = g_j(y) \leq 0$$

Por otro lado, por ser x una solución del problema $PVIP(X, F, \eta)$ con $F(x) = -\nabla\theta(x)$, tenemos que

$$0 > \theta(y) - \theta(x) \geq \nabla\theta(x)^t \eta(y, x)$$

Luego existirá $\eta(y,x) \in I\!R^n$ verificando el sistema del teorema de la Alternativa, por lo que no puede existir x que verifique $\theta(y) < \theta(x)$, con lo que x será un mínimo. ■

Luego hemos probado que, bajo determinadas condiciones, las soluciones del problema $(PVIP)$ que sean puntos de Kuhn-Tucker, son los mínimos del Problema de Programación Restringido (RMP). Si cambiamos la segunda condición del teorema anterior, que exige tener el mismo vector η para todos los problemas Pre-Variacionales $(PVIP)$, por otra nueva, obtenemos la misma conclusión, como probamos en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.16 *Sean $\theta : X \to I\!R$, $F(x) = -\nabla\theta(x)$, $g_j : X \to I\!R$, $G_j(x) = -\nabla g_j(x)$, $\forall j = 1, \ldots, m$, $\forall x \in X$. Si se verifica que:*

1. *$(x,u) \in X \times I\!R^m$ es un punto de Kuhn-Tucker para el problema (RMP),*
2. *x es una solución de los problemas $PVIP(X, F, \eta)$ y $PVIP(X, G_j, \rho)$, $\forall j = 1, \ldots, m$ con $\eta(y,x)$, $\rho(y,x) > 0$, $\forall x, y \in X$.*

Entonces x es una solución óptima para el problema (RMP).

DEMOSTRACIÓN:

Si $(x,u) \in X \times I\!R^m$ es un punto de Kuhn-Tucker para el Problema de Programación Restringido (RMP), entonces se cumple que

1. $\nabla\theta(x) + u^t\nabla g(x) = 0$

2. $u^t g(x) = 0$

Supongamos que x no es la solución óptima, esto es, $\exists y$ tal que $\theta(y) < \theta(x)$. Por ser x una solución del problema $PVIP(X, F, \eta)$ con $F(x) = -\nabla\theta(x)$, tenemos que

$$0 > \theta(y) - \theta(x) \geq \eta(y,x)^t\nabla\theta(x)$$

$$\eta(y,x)^t\nabla\theta(x) + \eta(y,x)^t u^t\nabla g(x) = 0$$

Combinando las dos desigualdades anteriores, se verifica

$$\eta(y,x)^t u^t\nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1,\ldots,m$$

Como $\eta(y,x) > 0$ tendríamos que $u^t\nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1,\ldots,m$.

Por otro lado, al ser x una solución del problema $PVIP(X, G_j, \rho)$ con $G_j(x) = -\nabla g_j(x)$, $\forall j = 1,\ldots,m$, tendremos que

$$g_j(y) - g_j(x) \geq \rho(y,x)^t\nabla g_j(x), \quad \forall j = 1,\ldots,m$$

$$u^t g_j(y) - u^t g_j(x) \geq u^t\rho(y,x)^t\nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1,\ldots,m$$

$$0 \geq u^t g_j(y) > u^t g_j(x) \Rightarrow u^t g_j(x) < 0, \quad \forall j = 1,\ldots,m$$

lo que contradice la segunda condición de Kuhn-Tucker.

■

Si volvemos a cambiar esa segunda condición, que involucra a η y ρ, por otra distinta, el teorema se sigue cumpliendo:

TEOREMA 3.17 *Sean* $\theta : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\nabla\theta(x)$, $g_j : X \to \mathbb{R}$, $G_j(x) = -\nabla g_j(x)$, $\forall j = 1, \ldots, m$, $\forall x \in X$. *Si se verifica que:*

1. $(x, u) \in X \times \mathbb{R}^m$ *es un punto de Kuhn-Tucker para el problema* (RMP),

2. x *es una solución de los problemas* $PVIP(X, F, \eta)$ *y* $PVIP(X, G_j, \rho)$, $\forall j = 1, \ldots, m$ *con* $\rho(y, x)G(x) \leq \eta(y, x)G(x)$, $\forall y \in X$.

Entonces x *es una solución óptima para el problema* (RMP).

DEMOSTRACIÓN:

Por reducción al absurdo. Supongamos que x no es la solución óptima, esto es, $\exists y$ tal que $\theta(y) < \theta(x)$. Por ser x una solución del problema $PVIP(X, F, \eta)$ con $F(x) = -\nabla\theta(x)$, tenemos que,

$$0 > \theta(y) - \theta(x) \geq \eta(y, x)^t \nabla\theta(x)$$

$$\eta(y, x)^t \nabla\theta(x) + \eta(y, x)^t u^t \nabla g_j(x) = 0$$

Combinando las dos desigualdades anteriores se tiene que,

$$\eta(y, x)^t u^t \nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

Como $\eta(y,x) > 0$ tendríamos que $u^t\nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m.$

Por hipótesis,

$$u^t\rho(y,x)^t\nabla g_j(x) \geq u^t\eta(y,x)^t\nabla g_j(x) > 0$$

entonces,

$$u^tg_j(y) - u^tg_j(x) \geq u^t\rho(y,x)^t\nabla g_j(x) > 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

$$0 \geq u^tg_j(y) > u^tg_j(x) \Rightarrow u^tg_j(x) < 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

lo que contradice la segunda condición de Kuhn-Tucker.

■

A modo de resumen, exponemos el siguiente corolario:

COROLARIO 3.7 *Sean* $\theta : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\nabla\theta(x)$, $g_j : X \to \mathbb{R}$, $G_j(x) = -\nabla g_j(x)$, $\forall j = 1, \ldots, m$, $\forall x \in X$. *Si* $(x,u) \in X \times \mathbb{R}^m$ *es un punto de Kuhn-Tucker para el problema* (RMP), *y se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

1. x *es una solución de los problemas* $PVIP(X, F, \eta)$ *y* $PVIP(X, G_j, \eta)$, $\forall j = 1, \ldots, m$ *con respecto al mismo vector* η.

2. x *es una solución de los problemas* $PVIP(X, F, \eta)$ *y* $PVIP(X, G_j, \rho)$, $\forall j = 1, \ldots, m$ *con* $\eta(y,x) > 0$ *y* $\rho(y,x) > 0$, $\forall x, y \in X$.

3. x es una solución de los problemas $PVIP(X, F, \eta)$ y $PVIP(X, G_j, \rho)$,

$\forall j = 1, \ldots, m$ *con* $\rho(y,x)G(x) \leq \eta(y,x)G(x), \quad \forall y \in X.$

Entonces x es una solución óptima para el problema (RMP).

Martin, D.H. [26] introduce el siguiente tipo de convexidad generalizada: los problemas KT-invex.

DEFINICIÓN 3.21 *El Problema de Programación Restringido (RMP) se dice KT-invex si existe una función $\eta : X \times X \to I\!R^n$ tal que $x, y \in X$, entonces*

1. $\theta(y) - \theta(x) - \eta(y,x)^t \nabla\theta(x) \geq 0$

2. *Si* $g_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad$ *entonces* $\quad -\eta(y,x)^t \nabla g_j(x) \geq 0.$

Estos problemas KT-invex quedan caracterizados porque todo punto de Kuhn-Tucker del Problema de Programación Restringido (RMP) es un mínimo global de (RMP).

Podemos relacionar cualquier problema KT-invex con soluciones de problemas pre y cuasi variacionales. El siguiente teorema, cuya demostración es inmediata, así lo hace.

TEOREMA 3.18 *Sean* $\theta : X \to I\!R$, $F(x) = -\nabla\theta(x)$, $g_j : X \to I\!R$, $G_j(x) =$

$-\nabla g_j(x), \quad \forall j = 1, \ldots, m, \quad \forall x \in X$. *Entonces son equivalentes las tres condiciones siguientes:*

1. x *es una solución del problema* $PVIP(X, F)$ *y si* $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, *entonces* x *es también solución del problema* $VLIP(X, G_j)$, $\forall j = 1, \ldots, m$.
2. *El problema* (RMP) *es KT-invex.*
3. *Todo punto de Kuhn-Tucker es un mínimo global del problema* (RMP).

3.3.2 El Problema Pre-Variacional Generalizado $(GPVIP)$

Seguidamente trabajaremos con multifunciones o funciones punto conjunto, y de esta manera podemos generalizar el Problema Pre-Variacional $(PVIP)$ al Problema Pre-Variacional Generalizado $(GPVIP)$.

DEFINICIÓN 3.22 *Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $V : X \to Y$ una aplicación punto-conjunto, $\theta : X \to \mathbb{R}$ y $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$. El Problema Pre-Variacional Generalizado $(GPVIP)$ se formula como: encontrar $x_0 \in X$, $u_0 \in V(x_0)$, tales que*

$$\eta(x_0, y)^t u_0 \geq \theta(x_0) - \theta(y), \quad \forall y \in X$$

Observamos que si V es simple-valuada, entonces $(GPVIP) = (PVIP)$.

Si además $\theta(x) = 0, \quad \forall x \in X$ entonces $(GPVIP) = (VLIP)$.

Teoremas de existencia de soluciones del problema $(GPVIP)$

Ahora demostraremos la existencia de soluciones del problema $(GPVIP)$ y por tanto del $(PVIP)$, utilizando condiciones de invex monotonía.

Para ello debemos recordar el siguiente resultado, que jugará un importante papel en la demostración del teorema de existencia de soluciones del problema $(GPVIP)$:

TEOREMA 3.19 (Kneser, H. [20]) *Sea X un conjunto no vacío y convexo en un espacio vectorial y sea Y un subconjunto convexo, compacto y no vacío de un* *espacio vectorial Hausdorff. Supongamos que f es una función real valuada en $X \times Y$, tal que para cada $x \in X$ fijo, $f(x, y)$ es semicontinua inferiormente y convexa en Y, y para cada $y \in Y$ fijo, $f(x, y)$ es cóncava en x.*

Entonces

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

Luego el anterior teorema me fija las condiciones para permutar mínimo y supremo de una cierta bifunción.

DEFINICIÓN 3.23 *V es hemicerrada si $\forall x, y \in X, \quad 0 < t < 1$, las condiciones $u_t \in V((1-t)y + tz) \quad y \quad \lim_{t_n \to 0} u_{t_n} = u$ implican que $u \in V(y)$.*

Este concepto, definido en Siddiqi, A.H., Khaliq, A. y Ahmad, R. [37], juega un papel similar al de la hemicontinuidad, pero su necesidad se debe a que ahora trabajamos con funciones punto conjunto.

Probaremos ahora un lema previo.

LEMA 3.8 *Sea $V : X \to Y$ una aplicación invex monótona (IM) y hemicerrada con la aplicación $\eta : X \times X \to R^n$ lineal y antisimétrica, siendo θ convexa y semicontinua inferiormente.*

Si X es un conjunto convexo, son equivalentes:

$$x \in X, \quad \inf_{u \in V(x)} \eta(x,y)^t u \leq \theta(y) - \theta(x), \quad \forall y \in X \tag{3.10}$$

$$x \in X, \quad \sup_{v \in V(y)} \eta(x,y)^t v \leq \theta(y) - \theta(x), \quad \forall y \in X \tag{3.11}$$

DEMOSTRACIÓN:

3.10 $\Rightarrow$ 3.11) Partamos de que x es una solución de 3.10. Entonces por la (IM) de la multifunción

$$\eta(x,y)^t u \geq \eta(x,y)^t v \quad \forall u \in V(x), v \in V(y)$$

esto implica que

$$\inf_{u \in V(x)} \eta(x,y)^t u \geq \sup_{v \in V(y)} \eta(x,y)^t v$$

con lo que tendríamos 3.11.

3.11 $\Rightarrow$ 3.10) Supongamos ahora que x es una solución de 3.11.

Para todo $y' \in X, \quad t \in (0,1)$ sea $y_t = x - t(x - y') \in X$. Sustituido en 3.11 tenemos

$$\eta(x,y_t)^t v_t \leq \theta(y_t) - \theta(x), \quad \forall v_t \in V(y_t)$$

Por la convexidad de θ

$$\theta(y_t) = \theta(ty' + (1-t)x) \leq t\theta(y') + (1-t)\theta(x)$$

Por lo que

$$\theta(y_t) - \theta(x) = t(\theta(y') - \theta(x))$$

Por tanto

$$\eta(x, ty' + (1-t)x)^t v_t \leq t(\theta(y') - \theta(x))$$

Como η es lineal y antisimétrica entonces se verifica que

$$\eta(x, y')^t v_t \leq (\theta(y') - \theta(x))$$

Por ser V hemicerrada, existe $u \in V(x)$ tal que

$$\eta(x, y')^t u \leq (\theta(y') - \theta(x))$$

$$\inf_{u \in V(x)} \eta(x, y)^t u \leq \theta(y) - \theta(x)$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

TEOREMA 3.20 *Sea X un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $I\!R^n$ e Y un subconjunto de $I\!R^n$. Sea $V : X \to Y$ es una función punto-conjunto invex monótona (IM), hemicerrada y sea $\eta : X \times X \to X$ una bifunción continua, lineal y antisimétrica y sea $\theta : X \to I\!R$ una aplicación semicontinua inferiormente y convexa.*

Entonces, existe $x_0 \in X$, *tal que*

$$\inf_{u \in V(x_0)} \eta(x_0, y)^t u \leq \theta(y) - \theta(x_0), \quad \forall y \in X$$

Si $V(x_0)$ *es convexo y compacto,* $\eta(x_0, y)^t v$ *es cóncava en* v *para cada* y *fijo, entonces existe* $u_0 \in V(x_0)$, *tal que*

$$\eta(x_0, y)^t u_0 \leq \theta(y) - \theta(x_0), \quad \forall y \in X$$

DEMOSTRACIÓN:

Para todo $y \in X$ definimos

$$F(y) = \left\{ x \in X, \quad \inf_{u \in V(x)} \eta(x, y)^t u \leq \theta(y) - \theta(x) \right\}$$

$$G(y) = \left\{ x \in X, \quad \sup_{v \in V(y)} \eta(x, y)^t v \leq \theta(y) - \theta(x) \right\}$$

Probaremos primero que F es una KKM aplicación en X.

Supongamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$ y

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \notin \bigcup_{i=1}^n F(x_i)$$

Tenemos entonces que

$$\inf_{u \in V(x)} \eta(x, x_i)^t u > \theta(x_i) - \theta(x), \quad \forall u$$

Como θ es convexa

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \theta(x_i) - \theta(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta(x_i) - \theta(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta(x_i) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta(x_i) = 0$$

Luego, en resumen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta(x_i) - \theta(x) \geq 0 \tag{3.12}$$

Al ser η lineal y antisimétrica, tenemos que

$$0 = \inf_{u \in V(x)} \eta(x,x)^t u = \inf_{u \in V(x)} \eta(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^t u$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \inf_{u \in V(x)} \eta(x, x_i)^t u > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta(x_i) - \theta(x)$$

lo que entra en contradicción con 3.12.

Por tanto

$$conv(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$$

así pues, F es una KKM-aplicación.

Como 3.10 implica 3.11 entonces $F(y) \subset G(y)$, como F es una KKM-aplicación entonces G es una KKM aplicación. Por el lema 3.8

$$\bigcap_{y \in X} F(y) = \bigcap_{y \in X} G(y)$$

$G(y)$ es cerrado $\forall y \in X$, ya que η es continua y θ es semicontinua inferiormente y convexa. $G(y)$ es convexa como se puede ver fácilmente. Así pues, $G(y)$ es cerrado $\forall y \in X$, convexo y acotado por serlo X, entonces $G(y)$ es compacto. Luego por el lema 3.1

$$\bigcap_{y \in X} F(y) = \bigcap_{y \in X} G(y) \neq \emptyset$$

Así pues, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\inf_{u\in V(x_0)} \eta(x_0,y)^t u \leq \theta(y) - \theta(x_0), \quad \forall y \in X$$

$$\inf_{u\in V(x_0)} \eta(x_0,y)^t u - \theta(y) + \theta(x_0) \leq 0, \quad \forall y \in X$$

$$\sup_{y\in X} \inf_{u\in V(x_0)} [\eta(x_0,y)^t u - \theta(y) + \theta(x_0)] \leq 0, \quad \forall y \in X$$

Añadimos ahora las restantes hipótesis de que $V(x_0)$ es convexo y compacto, $\eta(x_0,y)^t v$ es cóncava en v para cada y fijo y X es un convexo y compacto de $I\!R^n$. Consideremos la aplicación definida por $f(v,x) = \eta(x_0,x)^t v$.

Puesto que $f(v,.)$ es continua y lineal en X, entonces $f(v,.)$ es semicontinua inferiormente y convexa en X. Además $f(.,x)$ es cóncava en el primer parámetro. Luego por el teorema anterior 3.19 de Kneser

$$\inf_{u\in V(x_0)} \sup_{y\in X} [\eta(x_0,y)^t u - \theta(y) + \theta(x_0)] =$$

$$\sup_{y\in X} \inf_{u\in V(x_0)} [\eta(x_0,y)^t u - \theta(y) + \theta(x_0)] \leq 0$$

Puesto que $V(x_0)$ es compacto, existe $u_0 \in V(x_0)$, tal que

$$\sup_{y\in X} [\eta(x_0,y)^t u_0 - \theta(y) + \theta(x_0)] = \inf_{u\in V(x_0)} \sup_{y\in X} [\eta(x_0,y)^t u - \theta(y) + \theta(x_0)]$$

Por tanto, hemos encontrado $u_0 \in V(x_0)$, tal que

$$\eta(x_0, y)^t u_0 \leq \theta(y) - \theta(x_0), \quad \forall y \in X$$

■

Relación del Problema Pre Variacional $(PVIP)$ **con el Problema de Programación** (MP)

Seguidamente, relacionaremos las soluciones del Problema Pre-Variacional $(PVIP)$, que son puntos estacionarios, con los mínimos del Problema de Programación (MP).

DEFINICIÓN 3.24 *Un punto $\bar{x} \in X$ se dice estacionario si $\nabla\theta(\bar{x}) = 0$.*

TEOREMA 3.21 *Sea $\bar{x} \in X$, $F(\bar{x}) = -\nabla\theta(\bar{x})$ y sea $\theta(x)$ invex con respecto a $\eta(y, \bar{x})$ en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un punto estacionario $\Rightarrow \bar{x}$ es un mínimo de (MP).*

La demostración del anterior teorema también es inmediata.

Luego, podemos relacionar las soluciones del $(PVIP)$ que son puntos estacionarios, con los mínimos del (MP).

COROLARIO 3.9 *Sea $\bar{x} \in X$, $F(\bar{x}) = -\nabla\theta(\bar{x})$ y sea $\bar{x}$ una solución del problema $(PVIP)$. Si $\nabla\theta(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ es un mínimo de (MP).*

Obviamente, si la función escalar θ es invex no en un punto concreto, sino en cualquier punto, entonces todo punto estacionario es mínimo global de θ.

Lógicamente, si el problema generalizado $(GPVIP)$ tiene solución, y V es simple valuada, entonces también tendrá solución el problema $(PVIP)$. Sabemos por el corolario 3.9, que si tenemos una solución de un Problema Pre-Variacional $(PVIP)$ que es un punto crítico, entonces es un mínimo del Problema de Programación (MP). Gracias a la invex monotonicidad (IM), caracterizaremos los puntos estacionarios como soluciones del Problema Pre-Variacional $(PVIP)$ y por ende en soluciones del Problema de Programación (MP).

La demostración del siguiente resultado es trivial, usando el corolario 3.9 y el teorema 3.20.

TEOREMA 3.22 *Sea X un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ e Y un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Sea $V = \nabla\phi : X \to Y$ es una función simple valuada invex monótona (IM), hemicerrada y sea $\eta : X \times X \to X$ una bifunción continua, lineal y antisimétrica, sea $\theta : X \to \mathbb{R}$ una aplicación semicontinua inferiormente y convexa y $\phi : X \to \mathbb{R}$.*

Si $V(x_0)$ es convexo y compacto, $\eta(x_0, y)^t v$ es cóncava en v para cada y fijo, $-\nabla\phi(x_0) = u_0$ y $\nabla\phi(x_0) = 0$ entonces x_0 es un mínimo de (MP).

Este teorema es de gran importancia porque relaciona el Problema Pre Variacional $(PVIP)$ con el Programación Matemática (MP), a través de la invex monotonicidad (IM). Antes habíamos llegado a una solución del problema (MP) usando el Problema Cuasi Variacional $(VLIP)$, exigiendo (PIM) y la unicidad de la citada solución a través de de la estricta pseudo invex monotonicidad $(SPIM)$. Ahora como exigimos sólo la invex monotonicidad (IM), no tenemos asegurada la unicidad de la solución del Problema Pre-Variacional $(PVIP)$.

Capítulo 4

APLICACIÓN A LOS PROBLEMAS VARIACIONALES VECTORIALES

4.1 Desigualdades variacionales vectoriales

Diariamente, encontramos que hay situaciones de gestión de empresas, administración de recursos, diseño de estrategias, etc... que conllevan toma de decisiones. En estas decisiones es frecuente encontrar varios objetivos fijados como metas por el decisor. Incluso en los casos en que existe un solo objetivo, éste puede descomponerse en varios subobjetivos que se unen para conseguir un fin prefijado. Es por ello, que estudiaremos los problemas variacionales y de optimización con objetivos múltiples.

Siguiendo el modelo escalar y utilizando las nuevas definiciones de invex monotonicidad generalizada vectorial, probaremos teoremas de existencia de problemas variacionales vectoriales y los relacionaremos con los problemas de optimización vectoriales.

En Yang, X.Q. y Goh, C.J. [42], se definen los siguientes problemas:

DEFINICIÓN 4.1 *El Problema de Desigualdad Variacional Vectorial* $(VVIP)$, *consiste en encontrar* $x \in D$, *tal que no exista* $y \in D$, *tal que*

$$F(x)(y-x) \leq 0$$

donde D *es un subconjunto convexo y cerrado de* $I\!R^n$, *y* $F : D \to I\!R^{p\times n}$ *es una función matriz valuada.*

DEFINICIÓN 4.2 *El Problema de Desigualdad Variacional Vectorial Débil* $(WVVIP)$ *consiste en encontrar* $x \in D$, *tal que no exista* $y \in D$, *tal que*

$$F(x)(y-x) < 0$$

donde D *y* F *son los anteriores.*

Es obvio que

$$\boxed{\text{(VVIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(WVVIP)}}$$

Nosotros definimos:

DEFINICIÓN 4.3 *El Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Vectorial* $(VVLIP)$, *consiste en encontrar una función* $\eta : D \times D \to \mathbb{R}^n$ *y un punto* $x \in D$, *tal que no exista* $y \in D$, *tal que*

$$F(x)\eta(y,x) \leq 0$$

donde D *es un subconjunto convexo y cerrado de* $\mathbb{R}^n$, *y* $F : D \to \mathbb{R}^{p \times n}$ *es una función matriz valuada.*

DEFINICIÓN 4.4 *El Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Vectorial Débil* $(WVVLIP)$, *consiste en encontrar una función* $\eta : D \times D \to \mathbb{R}^n$ *y un punto* $x \in D$, *tal que no exista* $y \in D$, *tal que*

$$F(x)\eta(y,x) < 0$$

donde D y F son los anteriores.

Es obvio que

$$\boxed{\text{(VVLIP)}} \Rightarrow \boxed{\text{(WVVLIP)}}$$

Utilizando los nuevos conceptos de invex monotonicidad generalizada para el caso vectorial que definiremos en la sección siguiente, probaremos la existencia de soluciones del Problema $(WVVLIP)$, así como, la relación existente entre estos problemas variacionales vectoriales y los problemas de optimización vectoriales, llegando a identificar los puntos críticos vectoriales, los puntos débilmente eficientes y las soluciones del Problema Vectorial de Desigualdad Cuasi Variacional Débil $(WVVLIP)$.

4.2 Invex Monotonicidad generalizada en el caso vectorial

Ya hemos comentado que nuestro objetivo en esta sección es extender los conceptos de invex monotonicidad al caso vectorial. Para ello, introduciremos definiciones que nos permitan probar la existencia de soluciones del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Vectorial Débil $(WVVLIP)$.

Sea D un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$,

DEFINICIÓN 4.5 $F : D \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *es invex-monótona* (IM) *en* $D \iff$ $\forall x, y \in D, \quad \exists\, \eta : D \times D \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$(F(y) - F(x))\eta(y, x) \geqq 0$$

DEFINICIÓN 4.6 $F : D \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *es estrictamente invex monótona* (SIM) *en* D $\iff \forall x, y \in D, \quad x \neq y, \quad \exists \eta : D \times D \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$(F(y) - F(x))\eta(y, x) > 0$$

DEFINICIÓN 4.7 $F : D \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *es pseudo invex monótona* (PIM) *en* $D \iff$ $\forall x, y \in D, \quad \exists \eta : D \times D \to \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$F(x)\eta(y, x) \geqq 0 \Rightarrow F(y)\eta(y, x) \geqq 0$$

DEFINICIÓN 4.8 $F : D \rightarrow I\!R^{p\times n}$ *es estrictamente pseudo invex monótona* $(SPIM)$ *en* $D \iff \forall x, y \in D, \quad x \neq y, \quad \exists \eta : D \times D \rightarrow I\!R^n$, *tal que*

$$F(x)\eta(y,x) \geqq 0 \Rightarrow F(y)\eta(y,x) > 0$$

DEFINICIÓN 4.9 $F : D \rightarrow I\!R^{p\times n}$ *es cuasi invex monótona* (QIM) *en* $D \iff \forall x, y \in D, \quad \exists \eta : D \times D \rightarrow I\!R^n$, *tal que*

$$F(x)\eta(y,x) > 0 \Rightarrow F(y)\eta(y,x) \geqq 0$$

4.3 Teoremas de existencia de soluciones del $(WVVLIP)$

En Chen, G.Y. y Yang, X.Q. [4], se demuestra que bajo la hipótesis de monotonicidad de la función $F : D \to I\!R^{p\times n}$, el Problema Vectorial de Desigualdad Variacional Débil $(WVVIP)$ tiene solución.

Extenderemos la anterior afirmación dada para el Problema Vectorial Variacional Débil $(WVVIP)$ al Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Vectorial Débil $(WVVLIP)$, extendiendo la monotonicidad (M) a la pseudo invex monotonicidad (PIM) vectorial.

Para ello utilizaremos resultados obtenidos anteriormente para los problemas escalares cuasi variacionales $(VLIP)$ y los generalizaremos al caso vectorial débil $(WVVLIP)$.

LEMA 4.1 *Sea C un subconjunto no vacío y convexo de $I\!R^n$, y además:*

1. *$F : I\!R^n \to I\!R^{p\times n}$ es pseudo invex monótona (PIM) y hemicontinua en C convexo,*
2. *$\eta : C \times C \to I\!R^n$ es una aplicación lineal en el primer argumento,*
3. *η es antisimétrica*

Entonces u satisface que no existe $v \in C$, tal que

$$F(u)\eta(v,u) < 0 \tag{4.1}$$

si y sólo si, se satisface que no existe $v \in C$ tal que

$$F(v)\eta(v,u) < 0 \tag{4.2}$$

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Sea $u \in C$ una solución de 4.1 y queremos probar que $u \in C$ es una solución de 4.2.

Por reducción al absurdo, supongamos que u no es solución de 4.2. Por tanto,

$$\exists v \in C, \quad \text{tal que} \quad F(v)\eta(v,u) < 0$$

Por la pseudo invex monotonía (PIM) de F,

$$\exists v \in C, \quad \text{tal que} \quad F(u)\eta(v,u) < 0.$$

Contradicción con que u satisface 4.1.

$\Leftarrow$) Sea $v \in C$ y pongamos que, para $0 < t < 1$, $\quad w = tv + (1-t)u \in C$, porque C es convexo. Así pues, por 4.2, para $t > 0$, no existe $v \in C$ tal que

$$F(u + t(v-u))\eta(tv + (1-t)u, u) < 0. \tag{4.3}$$

Puesto que η es lineal en el primer argumento, η antisimétrica y $t > 0$, tenemos que la expresión 4.3 queda como

$$F(u + t(v-u))\eta(v,u) < 0 \tag{4.4}$$

Como F es hemicontinua en C, cuando tomemos $t \to 0^+$, obtendremos que no existe $v \in C$ tal que $F(u)\eta(v,u) < 0$. ■

Igual que en el caso escalar, después del anterior lema, se formula el teorema de existencia de soluciones, basándonos en las KKM-aplicaciones y en el lema 3.1 de K. Fan:

TEOREMA 4.1 *Sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y además:*

1. *$F : M \to \mathbb{R}^{p\times n}$ es pseudo invex monótona (PIM) y hemicontinua en M,*
2. *$\eta : M \times M \to \mathbb{R}^n$ es continua y antisimétrica,*
3. *η es lineal respecto al primer argumento.*

Entonces existe $u_0 \in M$ tal que no existe $v \in M$, tal que

$$F(u_0)\eta(v, u_0) < 0$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $V_1(v) = \{u \in M : \quad \nexists\, v \in M, \text{ tal que } \quad F(u)\eta(v,u) < 0\}$. Probaremos, primero que V_1 es una KKM-aplicación.

Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset M$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$ y

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \notin \bigcup_{i=1}^n V_1(v_i)$$

Tenemos entonces que

$$F(v)\eta(v_i, v) < 0.$$

Al ser η lineal en el primer argumento,

$$F(v)\eta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, v) = \sum_{i=1}^{n} F(v)\alpha_i \eta(v_i, v) < 0$$

$$F(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)\eta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i) < 0$$

en contradicción con la hipótesis de antisimetría, que exige que

$$\eta(v, v)^t F(v) = 0, \quad \forall v \in M.$$

Por tanto

$$conv(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1(v_i)$$

y así pues V_1 es una KKM-aplicación.

Sea

$$V_2(v) = \{u \in M : \quad \nexists\, v \in M, \text{ tal que } \quad F(v)\eta(v, u) < 0\}$$

Probaremos que $V_1(v) \subset V_2(v), \quad \forall v \in M.$

Sea $u \in V_1(v)$, tal que $u \notin V_2(v)$ entonces $\exists v \in M$ tal que $F(v)\eta(v, u) < 0$ por la (PIM) tenemos que $\exists v \in M$ tal que $F(u)\eta(v, u) < 0$. Contradicción, luego $u \in V_2(v)$ y V_2 es una KKM-aplicación.

Por el lema 4.1,

$$\bigcap_{v \in M} V_1(v) = \bigcap_{v \in M} V_2(v).$$

Además, $V_2(v)$ para cada v es cerrado ya que F y η son continuas.

Ya que $V_2(v) \subset M$ y $V_2(v)$ es cerrado, al ser M acotado, entonces $V_2(v)$ es compacto. Por el lema 3.1

$$\bigcap_{v \in M} V_1(v) = \bigcap_{v \in M} V_2(v) \neq \emptyset.$$

Así pues, existe $u_0 \in M$ tal que $\nexists\, v \in M$, tal que

$$F(u_0)\eta(v, u_0) < 0$$

■

Veamos seguidamente un ejemplo donde se verifican las condiciones del teorema anterior.

EJEMPLO 4.1 *Sea $M = [0,1] \times [0,1]$ compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$, sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ dos puntos de M.*

Sea $F : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = \int_0^x t dt$ y

$$F(x)y = \left(\int_0^{x_1} y_1 t dt, \int_0^{x_2} y_2 t dt\right) = \frac{1}{2}(x_1^2 y_1, x_2^2 y_2)$$

Veamos que cumple las condiciones del teorema.

Comprobaremos que F es pseudo monótona (PM), por lo tanto F será pseudo invex monótona (PIM) respecto de $\eta(y,x) = y - x$.

Se cumple que $\forall x, y \in M$, $\quad \exists \eta : M \times M \to \mathbb{R}^2$ con $\eta(y,x) = y - x$, tal que

$$F(x)\eta(y,x) = \left(\int_0^{x_1} (y_1 - x_1) t dt, \int_0^{x_2} (y_2 - x_2) t dt\right) = \frac{1}{2}(x_1^2(y_1 - x_1), x_2^2(y_2 - x_2)) \geqq 0$$

y lo anterior sólo es verdad si $y_1 \geqq x_1$ *e* $y_2 \geqq x_2$,

entonces se verifica que

$$F(y)\eta(y,x) = (\int_0^{y_1}(y_1 - x_1)tdt, \int_0^{y_2}(y_2 - x_2)tdt) = \frac{1}{2}(y_1^2(y_1 - x_1), y_2^2(y_2 - x_2)) \geqq 0$$

luego F *es pseudo invex monótona.*

Por supuesto F *es continua y con más razón hemicontinua. Además, la función* $\eta(y,x) = y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ *es continua, lineal en el primer argumento y antisimétrica.*

Luego, por el teorema anterior, vemos que el punto $\bar{x} = (0,0)$ *es solución del* $(WVVLIP)$ *ya que se verifica la desigualdad y* $\nexists\, x \in M$, *tal que*

$$F(\bar{x})\eta(\bar{x},x) = (\int_0^{0}(0 - x_1)tdt, \int_0^{0}(0 - x_2)tdt) = \frac{1}{2}(0,0) < 0$$

4.4 Relación de los problemas variacionales y optimización vectoriales

Tras probar la existencia de soluciones del Problema Vectorial de Desigualdad Cuasi Variacional Débil $(WVVLIP)$, utilizando la pseudo invex monotonicidad (PIM) vectorial, identificaremos en esta sección, las soluciones de ése problema $(WVVLIP)$ con los puntos críticos vectoriales (VCP), definidos por Osuna-Gómez, R., Rufián-Lizana, A. y Ruiz-Canales, P. [32], y las soluciones del Problema de Optimización Vectorial Débil $(WVOP)$.

Empecemos recordando las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 4.10 *Dado $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Un punto $x \in \mathcal{A}$ se dice eficiente o de Pareto, si no existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $f(y) \leq f(x)$. El conjunto de todos los puntos eficientes se denota por $E(f, \mathcal{A})$.*

DEFINICIÓN 4.11 *Dado $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, el problema de optimización multiobjetivo o vectorial (VOP) consiste en encontrar los puntos $E(f, \mathcal{A})$ para*

$$(VOP) \qquad V - \min f(x)$$
$$\textit{sujeto a} \quad x \in \mathcal{A}$$

El concepto de solución eficiente fué introducido por Pareto(1896) en su artículo "Cours d'Economie Politique". Conceptualmente, un punto se considera eficiente cuando cualquier mejora en una de las funciones objetivo conlleva el empeoramiento en alguna de las otras. A diferencia de la programación con objetivo único, en la que puede existir una solución óptima en el sentido que minimiza la función objetivo, en los problemas múltiples no necesariamente existe un punto que sea óptimo para todos los objetivos. Ese "punto ideal" puede no existir, pues es común encontrar situaciones representadas por objetivos contrapuestos. En este sentido hay que entender el concepto de solución eficiente, Pareto-óptima, no dominada, etc... y que son el objeto de estudio de los problemas con objetivos múltiples.

No siempre es posible encontrar puntos eficientes, por lo que a veces interesa introducir un concepto de eficiencia más general:

DEFINICIÓN 4.12 *Dado $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Un punto $x \in \mathcal{A}$ se dice débilmente eficiente si no existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $f(y) < f(x)$. El conjunto de todos los puntos débilmente eficientes se denota por $WE(f, \mathcal{A})$.*

DEFINICIÓN 4.13 *Dado $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, el problema de optimización multiobjetivo o vectorial débil $(WVOP)$*

consiste en encontrar los puntos $WE(f,\mathcal{A})$ *para*

$$(WVOP) \quad W - \min f(x)$$

$$\text{sujeto a} \quad x \in \mathcal{A}$$

Se cumple que:

$$\boxed{\bar{x} \in E(f,\mathcal{A})} \Rightarrow \boxed{\bar{x} \in WE(f,\mathcal{A})}$$

En el caso estrictamente convexo se cumple que:

$$\boxed{\bar{x} \in E(f,\mathcal{A})} \iff \boxed{\bar{x} \in WE(f,\mathcal{A})}$$

DEFINICIÓN 4.14 *Sea* $f : I\!R^n \to I\!R^p$ *diferenciable. Entonces se dice que* f *es convexa si y sólo si,*

$$f(y) \geqq f(x) + \nabla f(x)(y-x), \quad \forall x, y \in I\!R^n$$

donde $\nabla f(x)$ *es el jacobiano de* f*, es decir, una matriz* $p \times n$*.*

DEFINICIÓN 4.15 *Sea* $f : I\!R^n \to I\!R^p$ *diferenciable. Entonces se dice que* f *es estrictamente convexa, si y sólo si,*

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)(y-x), \quad \forall x, y \in I\!R^n$$

En el caso escalar se sabe que si se obtiene un gradiente simétrico, el problema variacional (VIP) es equivalente al problema de optimización (MP).

En Yang, X.Q. y Goh, C.J. [42], se prueba que si suponemos que $F(x) = \nabla f(x)$, f es convexa y x resuelve $(VVIP)$, entonces x es una solución eficiente de (VOP). Por tanto, sabemos cuándo una solucion de un problema $(VVIP)$ es una solución de un problema (VOP). El siguiente ejemplo muestra que una solución eficiente de (VOP) puede no ser solución de $(VVIP)$.

EJEMPLO 4.2 *Consideramos el problema*

$$(VOP) \qquad V - \min f(x)$$

$$\textit{sujeto a} \quad x \in [-1, 0]$$

donde $f(x) = (x, x^2)^t$.

Es obvio que cualquier $x \in [-1, 0]$ *es un punto eficiente.*

Sea $x = 0$, *entonces* $\exists\, y = -1$, *tal que se tiene que*

$$\nabla f(x)(y - x) = (f_1'(x)(y - x), f_2'(x)(y - x)) = (-1, 0)^t \leq (0, 0)^t$$

Luego $\quad x = 0 \quad$ *no es solución de un problema* $(VVIP)$.

En Yang, X.Q. y Goh, C.J. [42] se prueba que, si se cumple que f es convexa y se cumple $F(x) = \nabla f(x)$, entonces resolver el problema $(WVOP)$ es equivalente a resolver $(WVVIP)$.

Además, supongamos que $F(x) = \nabla f(x)$ y que f es estrictamente convexa. Si x es débilmente eficiente para $(WVOP)$, entonces x es solución de (VOP).

Nosotros extenderemos los resultados dados por Yang, X.Q. y Goh, D.J. [42], de funciones convexas a funciones invex. Las distintas definiciones de funciones invex generalizadas, que utilizamos, están recogidas en el primer capítulo de esta memoria.

TEOREMA 4.2 *Supongamos que* $F(x) = \nabla f(x)$. *Si* f *es invex* (IX) *y* x *resuelve* $(VVLIP)$, *entonces es una solución eficiente de* (VOP).

DEMOSTRACIÓN:

Por reducción al absurdo, supongamos que x no es eficiente $\Rightarrow \exists y \in C$ tal que

$$f(y) - f(x) \leq 0$$

y por la invexidad de f tenemos asegurado que $\exists y \in C$, tal que

$$\nabla f(x)\eta(y,x) \leq 0$$

entonces x no es una solución del problema $(VVLIP)$. Contradicción. ■

TEOREMA 4.3 *Si* H *es un conjunto invex y* $F(x) = \nabla f(x)$, x *es débilmente eficiente para* $(WVOP)$ *entonces es solución de* $(WVVLIP)$.

Si f *es pseudo invex* (PIX) *y* x *resuelve* $(WVVLIP)$ *entonces es una solución débilmente eficiente de* $(WVOP)$.

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Si x es una solución de $(WVOP)$, como H es un conjunto invex, tenemos que no existe $y \in H$, tal que $f(x + t\eta(y,x)) - f(x) < 0, \quad 0 < t < 1$.

Dividiendo por t y tomando límite cuando t tiende a cero por la derecha, llegamos a que no existe $y \in H$ tal que $\nabla f(x)\eta(y,x) < 0$.

$\Leftarrow$) El recíproco lo probamos por reducción al absurdo. Si x no es débilmente eficiente entonces

$$\exists y \in H \quad \text{tal que} \quad f(y) < f(x)$$

Por la pseudo invexidad (PIX) tenemos asegurado que

$$\exists y \in H \quad \text{tal que} \quad \nabla f(x)\eta(y,x) < 0.$$

Contradicción con que x es una solución del problema $(WVVLIP)$. ■

Así pues, si se cumple que f es invex y se cumple $F(x) = \nabla f(x)$ entonces resolver el problema $(WVOP)$ es equivalente a resolver $(WVVLIP)$. Naturalmente, una solución de $(VVLIP)$ es una solución de $(WVVLIP)$, pero no al contrario, y una solución del problema (VOP) es una solución del $(WVOP)$, pero no al contrario. No obstante si se impone la siguiente condición se cumple que:

TEOREMA 4.4 *Supongamos que $F(x) = \nabla f(x)$ y que f es estrictamente invex (SIX). Si x es débilmente eficiente para $(WVOP)$ entonces es solución de (VOP).*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que x es una solución de $(WVOP)$, pero no de (VOP). Entonces existe $y \in H$ tal que $f(y) \leq f(x)$. Por ser f estrictamente invex (SIX) tenemos que

$$0 \geq f(y) - f(x) > \nabla f(x)\eta(y,x)$$

es decir, $\exists y \in C$, tal que $\nabla f(x)\eta(y,x) < 0$, por tanto, x no resuelve el problema $(WVVLIP)$.

La contradicción surge de que, por otra parte, por el teorema anterior, tenemos que si x es solución de $(WVOP)$ entonces es también una solución de $(WVVLIP)$.

■

TEOREMA 4.5 *Supongamos que $F(x) = \nabla f(x)$. Si $-f$ es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$. Si x resuelve $(WVOP)$ entonces x resuelve $(VVLIP)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que x resuelve $(WVOP)$ pero no $(VVLIP)$. Entonces $\exists y \in C$ tal que $\nabla f(x)\eta(y,x) \leq 0$.

Ya que $-f$ es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$, tenemos que

$$\nabla f(x)\eta(y,x) \leq 0 \Rightarrow f(y) < f(x)$$

lo que contradice que x sea un punto débilmente eficiente. ■

COROLARIO 4.2 *Supongamos que $F(x) = \nabla f(x)$. Si $-f$ es estrictamente pseudo invex $(SPIX)$. Si x resuelve (VOP) entonces x resuelve $(VVLIP)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Por ser todo punto eficiente débilmente eficiente y por el teorema anterior quedaría probado. ■

Luego en el caso invex (IX) se cumple que:

$$\boxed{\bar{x} \in E(f, D)} \Rightarrow \boxed{\bar{x} \in WE(f, D)}$$

En el caso estrictamente invex (SIX) se cumple que:

$$\boxed{\bar{x} \in E(f, D)} \iff \boxed{\bar{x} \in WE(f, D)}$$

En Osuna-Gómez, R., Rufián-Lizana, A. y Ruiz-Canales, P. [32] se establece la siguiente definición y el siguiente resultado:

DEFINICIÓN 4.16 *Un punto factible $\bar{x} \in D$ se llama un punto crítico vectorial (VCP) para (VOP) si existe un vector $\lambda \in I\!R^p$ con $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda^t \nabla f(\bar{x}) = 0$.*

TEOREMA 4.6 *Cada punto crítico vectorial es débilmente eficiente y resuelve un problema escalar ponderado, si y sólo si, la función objetivo es pseudo invex (PIX).*

A la vista de este resultado nosotros podríamos relacionar los puntos críticos con las soluciones de los problemas de desigualdad cuasi variacional vectorial débil.

COROLARIO 4.3 *Si la función objetivo es pseudo invex* (PIX) *y* $F = \nabla f$ *entonces son equivalentes los puntos críticos vectoriales, los puntos débilmente eficientes y las soluciones de los problemas* $(WVVLIP)$.

$$
\begin{tikzcd}
\text{VVLIP} \arrow[r, "{f\,(IX),\ F=\nabla f}"] \arrow[d] & \text{VOP} \arrow[d, shift right] & \\
\text{WVVLIP} \arrow[r, shift left, "{f\,(PIX),\ F=\nabla f}"] & \text{WVOP} \arrow[l, shift left, "{F=\nabla f}"] \arrow[u, shift right, "{f\,(SIX)}"'] \arrow[r, shift right] & \text{VCP} \arrow[l, shift right, "{f\,(PIX),\ F=\nabla f}"']
\end{tikzcd}
$$

Por tanto, gracias a la pseudo invexidad (PIX) de f y la pseudo invex monotonicidad (PIM) de $F = \nabla f$, hemos alcanzado las soluciones del Problema de Desigualdad Cuasi Variacional Vectorial Débil $(WVVLIP)$ y por ende demostrar que dichas soluciones son los puntos débilmente eficientes del Problema de Optimización Vectorial Débil $(WVOP)$ y que coinciden con los puntos críticos de los Problemas de Optimización Vectoriales.

La invex monotonicidad generalizada se ha demostrado como una herramienta eficaz para, antes en el caso escalar y ahora en el caso vectorial, alcanzar las soluciones de distintos problemas variacionales y, mediante éstos, llegar a las soluciones de diversos problemas de optimización.

Bibliografía

[1] AVRIEL, M. ET AL., *"Generalized Concavity"*, Ed. Plenum Press, New York, (1988).

[2] BIANCHI, M., *"Una classe di Funzioni Monotone Generalizzate"*, Rivista di Matemática per le Scienze Economiche e Sociali - Anno 16, Fascicolo 1, pp. 17-32, (1994).

[3] BIANCHI, M. Y SCHAIBLE, S., *"Generalized Monotone Bifunctions and Equilibrium Problems"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 90, No. 1, pp. 31-43, (1996).

[4] CHEN, G.Y. Y YANG, X.Q., *"The Vector Complementary Problem and its Equivalences with the Weak Minimal Element in Ordered Spaces"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 153, pp. 136-158, (1990).

[5] DIEN, N.H., *"Some remarks on Variational-like and Quasivariational-like Inequalities"*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 46, pp. 335-342, (1992).

[6] FAN, K., *"A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem"*, Math. Ann., vol. 142, pp. 305-310, (1961).

[7] HADJISAVVAS, N. Y SCHAIBLE, S., *"On Strong Pseudomonotonicity and (semi)strict Quasimonotonicity"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 79, No. 1, pp. 139-155, (1993).

[8] HADJISAVVAS, N. Y SCHAIBLE, S., *"Quasimonotone Variational Inequalities in Banach Spaces"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 90, No. 1, pp. 95-111, (1996).

[9] HARKER, P.T. Y PANG, J.S., *"Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications"*, Mathematical Programming, vol. 48, pp. 161-220, (1990).

[10] HARTMAN, P. Y STAMPACCHIA, G., *"On some Nonlinear Elliptic Differentiable Functional Equations"*, Acta Math., vol. 115, pp. 271-310, (1966).

[11] HANSON, M.A., *"On Sufficiency of Kuhn-Tucker Conditions"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 80, pp. 545-550, (1981).

[12] KANNIAPPAN, P. Y PANDIAN, P., *"On Generalized Convex Functions in Optimization Theory-A Survey"*, Opsearch, vol. 33, pp. 174-185, (1996).

[13] KARAMARDIAN, S., *"The Nonlinear Complementarity Problem with Applications, Part 2"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 4, No. 3, pp. 167-181, (1969).

[14] KARAMARDIAN, S., *"Generalized Complementary Problem"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 8, No. 3, pp. 161-168, (1971).

[15] KARAMARDIAN, S., *"The Complementarity Problem"*, Mathematical Programming, No. 2, pp. 107-129, (1972).

[16] KARAMARDIAN, S., *"Complementary Problems over Cones with Monotone and Pseudomontone Maps"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 18, No. 4, pp. 445-454, (1976).

[17] KARAMARDIAN, S. Y SCHAIBLE,S., *"Seven Kinds of Monotone Maps"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 66, No. 1, pp. 37-46, (1990).

[18] KARAMARDIAN, S., SCHAIBLE,S. Y CROUZEIX, J.P., *"Charactezations of Generalized Monotone Maps"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 76, No. 3, pp. 399-413, (1993).

[19] KAUR, S. Y GUPTA, S., *"Duality in Multiple Fractional Programming Problems Involving Non-convex Functions"*, Opsearch, vol. 27, No. 4, pp. 239-253, (1990).

[20] KNESER, H., C.R. Academ. Sci. París, Vol. 234, pp. 2418-2420, (1952).

[21] KOMLÓSI, S., *"Generalized Monotonicity in Nonsmooth Analysis"*, dentro de Generalized Convexity Proceedings (S. Komlósi, T. Rapcsák, S. Schaible eds.), Springer Verlag, Pécs, Hungary, pp. 263-275, (1992).

[22] KOMLÓSI, S., *"Monotonicity and Quasimonotonicity for Multifunctions"*, dentro de Optimization of Generalized Convex Problems in Economics (Mazzolenni, P. eds.), Milan, pp. 27-38, (1994).

[23] LIU, J.C., *"Optimality and Duality for Generalized Fractional Programming Involving Nonsmooth Pseudoinvex Functions"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 202, No. 2, pp. 667-685, (1996).

[24] MANCINO, O.G. Y STAMPACCHIA, G., *"Convex Programming and Variational Inequalities"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 9, No.1, pp. 3-23, (1972).

[25] MANGASARIAN, O.L., *"Nonlinear Programming"*, Ed. McGraw-Hill, (1969).

[26] MARTIN, D.H., *"The Essence of Invexity"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 47, pp. 65-76, (1985).

[27] NOOR, M.A., *"Monotone Variational-Like Inequalities"*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, vol. 1, No. 4, pp. 47-72, (1994).

[28] NOOR, M.A., *"Variational-Like Inequalities"*, Optimization, vol. 30, pp. 323-330, (1994).

[29] OSUNA, R., *"Programación con objetivos múltiples. Dualidad"*, Tesis doctoral. Universidad de Sevilla (1996).

[30] OSUNA, R., BEATO, A. Y RUFIÁN, A., *"Invex and Pseudoinvex Functions"*, Proceedings of the Second International Conference on Multi-objective Programming, Ed. Springer Verlag, pp. 80-86, (1998).

[31] OSUNA, R., BEATO, A. Y RUFIÁN, A., *"Generalized Convexity in Multiobjective Programming"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 233, pp. 205-220, (1999).

[32] OSUNA, R., RUFIÁN, A. Y RUIZ, P., *"Invex Functions and Generalized Convexity in Multiobjective Programming"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 98, No. 3, pp. 651-661, (1998).

[33] PANG, J.S., *"A B-differentiable equation-based, globally and locally quadratically convergent algorithm for nonlinear programs, complementarity and variational inequality problems"*, Mathematical Programming, vol. 51, pp. 101-131, (1991).

[34] PARIDA, J. Y SEN, A., *"A Variational-like Inequality for Multifunctions with Applicattions"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 124, pp. 73-81, (1987).

[35] PARIDA, J., SAHOO, M. Y KUMAR, A., *"A Variational-like Inequality Problem"*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 39, pp. 225-231, (1989).

[36] RUIZ, P. Y RUFIÁN, A., *"A Characterization of Weakly Efficient Points"*, Mathematical Programming, vol. 68, pp. 205-212, (1995).

[37] SIDDIQI, A.H., KHALIQ, A. Y AHMAD, R., *"On Generalized Variational Like Inequalities"*, Indian J. Pure App. Math., vol. 26, No. 12, pp. 1135-1141, (1995).

[38] SIDDIQI, A.H., KHALIQ, A. Y ANSARI,Q.H., *"On Variational-Like Inequalities"*, Ann. Sci. Math. Québec, vol. 18, No. 1, pp. 95-104, (1994).

[39] SIDDIQI, A.H., KHALIQ, A. Y AHMAD,R., *"On Generalized Variational Like Inequalities"*, Indian J. Pure App. Math., vol. 26, No. 12, pp. 1135-1141, (1995).

[40] XU, Z.K., *"On Invexity-Type Nonlinear Programming Problems"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 80, No. 1, pp. 135-148, (1994).

[41] YANG, X.Q. Y CHEN, G.Y., *"A class of Nonconvex Functions and Pre-Variational Inequalities"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 169, pp. 359-373, (1992).

[42] YANG, X.Q. Y GOH, C.J., *"On Vector Variational Inequalities: Application to Vector Equilibria"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 95, No. 2, pp. 431-443, (1997).

[43] YAO, J.C., *"Variational Inequalities with Generalized Monotonicity"*, Mathematics of Operations Research, vol. 19, No. 3, pp. 691-705, (1994).

[44] YAO, J.C., *"The Generalized Quasi-Variational Inequality Problem with Applications"*, Journal Optimization Theory and Applications, vol. 158, pp. 139-160, (1991).

[45] YE, Y.L., *"D-invexity and Optimality Conditions"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 162, pp. 242-249, (1991).

Gabriel Ruiz Garzón
Monotonicidad Generalizada

Sobresaliente cum laude
por unanimidad

19 noviembre 99