

LBS 1326283

C 043/351
JCN

R. 23210

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS EN
EL PLANO MEDIANTE TÉCNICAS
DE OPTIMIZACIÓN D.C.

TESIS DOCTORAL

Rafael Blanquero Bravo

Sevilla, 1999

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Estadística e I.O.
de la F. de Matemáticas

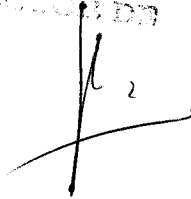
de ... el día 28-4-99

15-5-99

17 de Mayo

de 1999

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

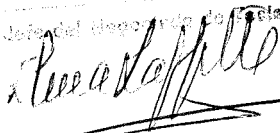


UNIVERSIDAD DE SEVILLA

El libro ...
al precio de 13 ... 180 ... del libro
correspondiente a 27 ... 1999

Sevilla,

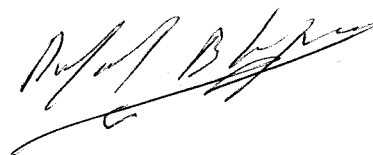
El Jefe del Departamento de Estadística e I.O.



**LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS EN EL PLANO
MEDIANTE TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN D.C.**

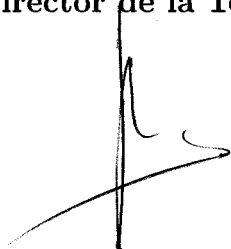
Memoria presentada por Rafael
Blanquero Bravo para optar al
Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas

Sevilla, 1999



Vº Bº

Director de la Tesis



Prof.Dr.D. Rafael Infante Macías

Vº Bº

Director de la Tesis



Prof.Dr.D. Emilio Carrizosa Priego

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los Doctores D. Rafael Infante Macías y D. Emilio Carrizosa Priego, por su interés y buen hacer en la dirección de este trabajo, durante cuya elaboración han dado sobradas muestras de su grandeza científica y humana.

Así mismo, quiero hacer constar mi gratitud hacia los Profesores Dr. D. Eduardo Conde Sánchez y D. Pedro Luis Luque Calvo por su colaboración y por la inestimable ayuda que supone tener cerca personas con las que siempre puedes contar.

También, quiero agradecer al Profesor Dr. D. Joaquín García de las Heras su interés y constante ánimo, sin olvidar a los restantes miembros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla, que, de una u otra forma, han contribuido al desarrollo de esta Tesis.

No puedo olvidar tampoco a María Dolores Romero Morales, a quien tengo que agradecer la ayuda y el apoyo continuo que he recibido desde tan lejos, ni al profesor D. Daniel Franco Coronil, por su cordial colaboración.

Para finalizar, deseo mostrar mi gratitud más profunda hacia Reyes, mi esposa, por la comprensión, cariño e ilusión mostrados durante la elaboración de este trabajo.

A todos muchas gracias.

Índice General

Resumen de Contenidos	1
1 Métodos de Cubrimiento en Optimización d.c.	5
1.1 Introducción	5
1.2 Optimización del calibrador de una función d.c. vectorial	11
1.2.1 Obtención de una descomposición d.c.	12
1.2.2 Aplicaciones	13
1.3 Algoritmos de cubrimiento	18
1.4 Algoritmo de cubrimiento para funciones d.c.	21
1.4.1 Funciones de cubrimiento	22
1.4.2 Casos particulares	22
1.4.3 Actualización de la envolvente	24
1.5 El caso unidimensional	28
1.5.1 Búsqueda de soluciones ε -óptimas	28
1.5.2 Descomposición d.c. óptima	32
1.5.3 Descomposición óptima para composición de d.c. y afín	38
1.6 Experiencia Computacional	39
1.7 Estimación de Máxima Verosimilitud en la Distribución de Cauchy	44
2 Localización de un Servicio Semi-Repulsivo	49
2.1 Introducción	49
2.1.1 Localización con Regiones Prohibidas	50
2.1.2 El Problema de Weber con Atracción y Repulsión	53
2.1.3 Modelos multicriterio	54
2.2 Localización con Regiones Prohibidas	56
2.2.1 El Modelo y su Resolución	56
2.2.2 Parametrización d.c. de la frontera del conjunto factible	64

2.2.3	Experiencia Computacional	75
2.3	Un Enfoque Biobjetivo	81
2.3.1	Formulación del modelo	81
2.3.2	Construcción de un conjunto ε -dominante finito	84
3	Localización de un Servicio fuera de la Red de Transporte	105
3.1	Introducción	105
3.2	Formulación del modelo	107
3.3	Existencia de soluciones óptimas	109
3.4	El caso lineal	115
3.4.1	Localización de un servidor con nivel de repulsividad bajo	116
3.4.2	Localización de un servidor altamente repulsivo	122
3.5	El caso lineal con norma euclídea y región factible poligonal	125
3.5.1	Localización de soluciones óptimas	126
3.5.2	Obtención de soluciones óptimas	136
3.5.3	Eliminación de subproblemas	153
	Bibliografía	161

Resumen de Contenidos

El creciente desarrollo de las técnicas de Optimización Global ha permitido, dentro de diversas disciplinas del conocimiento científico y técnico, considerar modelos más complejos, que reflejan cada vez mejor la realidad, permitiendo abordar nuevos problemas. La Teoría de Localización no constituye una excepción: una buena parte de los modelos considerados actualmente en Localización Continua para tratar problemas clásicos, u otros de reciente aparición, requieren el empleo de tales técnicas.

Dentro de la Optimización Global, los problemas en los que aparecen involucradas funciones que pueden expresarse como *diferencia de convexas* (d.c.), han experimentado un auge notable en los últimos años, impulsado por la evidencia, como indica Tuy (1998), de que las funciones que aparecen con mayor frecuencia en la práctica pertenecen a esta familia.

En la presente memoria, estructurada en tres capítulos, se profundiza en el estudio de técnicas determinísticas de Optimización d.c. y en su aplicación a la resolución de problemas de Localización Continua.

En el Capítulo 1 se trata la aplicación a problemas de optimización d.c. de un algoritmo de cubrimiento, cuyo esquema general responde al propuesto por Piyavskii en 1972, y que hace uso del carácter d.c. de la función objetivo para obtener una sucesión de funciones, de fácil construcción incluso en el caso multidimensional, que proporciona una solución ε -óptima del problema.

El análisis que se realiza sobre la relación existente con otros procedimientos del mismo tipo, revela que el algoritmo de optimización global propuesto por Breiman y Cutler (1993), y la generalización debida a Baritomba y Cutler (1994), son, simplemente, casos particulares del método de cubrimiento considerado, en los que se hace uso de una descomposición d.c. concreta. Las ventajas del algoritmo propuesto resultan, pues, claras: una mayor versatilidad, derivada de la posibilidad de elec-

ción de la descomposición d.c. a utilizar, y un mayor rendimiento, como ponen de manifiesto los resultados computacionales, si se realiza una elección adecuada de la descomposición. En relación con este último punto, el estudio de las funciones d.c. de variable real da lugar a resultados que proporcionan descomposiciones d.c. óptimas, en un determinado sentido, para la utilización del algoritmo sobre esta clase de funciones.

La importancia de una elección adecuada de la descomposición d.c. se manifiesta claramente al aplicar los contenidos expuestos al problema de la Estimación de Máxima Verosimilitud en la Distribución de Cauchy uniparamétrica; se obtiene así un procedimiento de resolución que supera ampliamente a los algoritmos propuestos en la literatura.

El Capítulo 2 está dedicado a la localización de servicios cuya actividad se ve acompañada por algún tipo de molestia o peligro sobre los residentes en su proximidad, problema que es tratado mediante dos modelos distintos.

En el primer modelo que se considera, el carácter repulsivo se ve reflejado en la imposibilidad de establecer el servicio en el interior de una región del plano, siendo elegida su ubicación de tal manera que se haga mínima alguna función de las distancias a los puntos de demanda. Los requisitos exigidos a esta función son bastante generales, obteniéndose como casos particulares los criterios clásicos empleados en Localización.

La ubicación óptima del servidor sobre la frontera de la región prohibida se determina empleando técnicas de optimización d.c., pues queda probado que una descomposición de la función objetivo puede obtenerse tan pronto como se disponga de una representación d.c. para una parametrización de la frontera, como se muestra para el caso de un conjunto convexo y compacto.

Los resultados computacionales en el problema de localización con región prohibida el círculo unidad, muestran que el tiempo de CPU requerido para su resolución crece linealmente con el número de puntos de demanda.

El carácter multicriterio del problema es considerado en el segundo modelo que se propone. La naturaleza atractiva del servidor aparece reflejada en el primer objetivo, en el que se trata de hacer mínimo el coste de servicio, empleando para ello la misma función de utilidad que en el modelo anterior. El carácter repulsivo se integra en el segundo objetivo, tratando de maximizar la distancia que separa al servidor del núcleo de población más cercano (se asume que éstos corresponden a regiones del

plano dotadas de ciertas características, lo que generaliza el caso usual en el que estas regiones quedan reducidas a puntos). Para este modelo, se propone un procedimiento de construcción de un conjunto ε -dominante finito, basado fundamentalmente en la resolución de problemas de optimización d.c. univariantes. Tales problemas son los que se obtienen al minimizar el coste de servicio sobre un arco de frontera de una subdivisión de la región factible, para la que, haciendo uso de las técnicas previamente descritas, se construye una parametrización d.c.

En el Capítulo 3 se generaliza el modelo propuesto por Erkut en 1992 para la localización de un servicio puramente atractivo fuera de una red de transporte, en el que se consideran como posibles ubicaciones para el mismo un conjunto finito de puntos. Junto con la ubicación del servidor aparece como variable de decisión el punto de la red en el que realizará el enlace entre ambos, incorporándose a la función objetivo el coste de construcción y transporte a través de este enlace.

El modelo que ahora se propone permite la localización de un servicio semi-repulsivo, en el que se admiten como posibles localizaciones los puntos de un conjunto robusto arbitrario de \mathbb{R}^2 . El efecto repulsivo sobre cada elemento negativamente afectado se expresa mediante una función de la distancia, convexa y no creciente.

Tras un estudio sobre la existencia de soluciones óptimas en el caso general, se trata la existencia y localización de éstas para el caso particular en el que el efecto repulsivo decrece linealmente con la distancia. En función de la relación existente entre el costo asociado al nuevo enlace y los costos correspondientes a los elementos negativamente afectados, se distinguen dos tipos de repulsividad en el servicio, que conducen a resultados bien diferentes.

Si la región factible es poligonal y la distancia utilizada sobre el plano es la euclídea, la obtención de una solución óptima se reduce a la resolución de problemas de optimización convexa y de optimización d.c., todos ellos escalares. Para estos últimos se propone la utilización de un algoritmo de ramificación y acotación, desarrollándose reglas de acotación y eliminación de subproblemas que mejoran notablemente el rendimiento computacional con respecto a las estrategias clásicas.

En resumen, en esta memoria se pone de manifiesto que las técnicas de optimización d.c. permiten explotar la estructura de problemas ya conocidos en Localización Continua, mejorando sensiblemente los procedimientos de resolución existentes. Así mismo, estas técnicas permiten abordar nuevos problemas dentro de este ámbito, constituyéndose en herramientas básicas para su adecuado tratamiento.

Capítulo 1

Métodos de Cubrimiento en Optimización d.c.

1.1 Introducción

La Optimización D.C. constituye una rama de la Optimización Global que trata la resolución de problemas de Programación Matemática No Lineal cuya función objetivo y/o restricciones pueden expresarse como funciones d.c.

Definición 1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es d.c. sobre Ω si puede expresarse como diferencia de dos funciones convexas definidas sobre Ω , es decir,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{1.1}$$

siendo f_1 y f_2 funciones convexas sobre Ω . La representación (1.1) se dice que es una descomposición d.c. de f .

Estas funciones aparecen involucradas en gran número de problemas en diferentes disciplinas, tales como Economía, Ingeniería, Física, Química, Ecología, etc. (véase [67, 120] y las referencias allí indicadas).

Como propiedad importante de la clase de funciones d.c. podemos citar su estabilidad con respecto a las operaciones que aparecen habitualmente en problemas de optimización. Así, como se pone de manifiesto en los resultados que se muestran a continuación, esta clase es cerrada para las operaciones suma, producto por escalares, máximo o mínimo puntual, producto, cociente, composición, etc.

Comenzaremos con un resultado de gran importancia para la identificación de estas funciones. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ se dice que es *localmente d.c.* si, para cada $x_0 \in \Omega$, existe un entorno N de x_0 y un par de funciones convexas p y q tales que

$$f(x) = p(x) - q(x) \quad \forall x \in N$$

Proposición 1.2 (Hartman [58]) *Toda función localmente d.c. en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, abierto o cerrado, es d.c. en Ω .*

Corolario 1.3 (Hartman [58]) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo abierto o cerrado y f_1, f_2 funciones d.c. en Ω . Entonces, el producto $f_1(x)f_2(x)$ y el cociente $f_2(x)/f_1(x)$, si $f_1(x) \neq 0$, son funciones d.c. en Ω .*

Otra consecuencia importante de la Proposición 1.2 es el siguiente resultado, que establece el carácter d.c. de toda función dos veces continuamente diferenciable; de manera inmediata se deduce que las funciones d.c. constituyen un subespacio denso del espacio de Banach de las funciones continuas definidas sobre un convexo y compacto, dotado con la norma del supremo.

Corolario 1.4 *Toda función $f \in C^2$ es d.c. en cualquier compacto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.*

Dado un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, una función vectorial $F = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ se dice que es d.c. en Ω si cada componente $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es d.c. en Ω .

Proposición 1.5 (Tuy [120]) *Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos convexas, tales que Ω_1 es abierto o cerrado y Ω_2 es abierto. Si $F_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, $F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ son funciones d.c., entonces $F_2 \circ F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^q$ es también una función d.c.*

Aunque la mayor parte de las funciones que se encuentran habitualmente en problemas de optimización son d.c., no siempre es fácil identificarlas como tales y, aún cuando lo han sido, la obtención de una descomposición d.c. explícita no resulta ser una tarea fácil, por lo general. No obstante, se dispone de un buen número de resultados que permiten obtener representaciones d.c. a partir de otras funciones más sencillas cuya descomposición sí es conocida. Algunos de estos resultados se enuncian a continuación.

Proposición 1.6 (Hiriart [61]) *Sean f_1, \dots, f_r funciones d.c. en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ compacto y convexo, con $f_i = p_i - q_i$ (p_i, q_i convexas). Entonces, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, las*

funciones $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$, $\min \{f_i(x) : i = 1, \dots, r\}$ y $\max \{f_i(x) : i = 1, \dots, r\}$ son d.c. en Ω . En particular, una descomposición d.c. para estas funciones viene dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i &= \left(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i p_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i q_i \right) - \left(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i q_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i p_i \right) \\ \max_{i=1, \dots, r} f_i &= \max_{i=1, \dots, r} \left[p_i + \sum_{j \neq i} q_j \right] - \sum_{i=1}^r q_i \\ \min_{i=1, \dots, r} f_i &= \sum_{i=1}^r p_i - \max_{i=1, \dots, r} \left[q_i + \sum_{j \neq i} p_j \right] \end{aligned}$$

Proposición 1.7 (Tuy [119]) Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x)$ es cóncava para $x < \bar{x}$ y convexa para $x \geq \bar{x}$. Entonces, una descomposición d.c. para f viene dada por $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, siendo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x < \bar{x} \\ f(x) - \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) - f(x) & \text{si } x < \bar{x} \\ -\frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases} \end{aligned}$$

El siguiente resultado sirve como base para la obtención de una descomposición d.c. del producto de dos funciones d.c.

Proposición 1.8 (Tuy [122]) Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}_+$ funciones convexas. Entonces, una descomposición d.c. para su producto viene dada por:

$$f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)]^2 - \frac{1}{2}[f_1^2(x) + f_2^2(x)]$$

Proposición 1.9 (Hiriart [61]) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo y compacto y f una función de clase \mathcal{C}^2 en Ω . Entonces, una descomposición d.c. para f viene dada por

$$f(x) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\rho \|x\|^2 \right) - \frac{1}{2}\rho \|x\|^2 \tag{1.2}$$

siendo ρ una constante no negativa que verifica

$$-\min \{ \langle u, \nabla^2 f(x) u \rangle : x \in \Omega, \|u\| = 1 \} \leq \rho$$

Una representación d.c. alternativa para una función de clase \mathcal{C}^2 en \mathbb{R} la proporciona el siguiente resultado.

Proposición 1.10 (Bittner [12]) *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable. Dado $x_0 \in I$, sean:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t)[f''(t)]^+ dt \\ f_2(x) &= \int_{x_0}^x (x - t)[f''(t)]^- dt \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, con $[A]^+ = \max(0, A)$ y $[A]^- = \max(0, -A)$. Entonces f_1 y f_2 son funciones convexas (diferenciables) que satisfacen la ecuación $f = f_1 - f_2$ sobre I .

No son éstos los únicos resultados orientados a la obtención de descomposiciones d.c. de funciones simples que pueden encontrarse en la literatura. Así, por ejemplo, en [12] se proporciona una descomposición d.c. para un polinomio en una variable, que puede extenderse a una serie infinita. En [122] puede encontrarse una descomposición d.c. para una función afín a trozos o también para una forma cuadrática no definida. En este último se describe también el proceso para la obtención de una representación d.c. de un polinomio en \mathbb{R}_+^m .

Los resultados que siguen a continuación muestran que, bajo hipótesis no demasiado restrictivas, una función monótona convexa (o cóncava) de una función d.c. es también una función d.c., cuya descomposición puede ser obtenida fácilmente. Estos resultados jugarán un papel importante en la formulación y resolución de ciertos problemas de localización, pues permitirán incorporar en los modelos funciones de utilidad no lineales.

En la siguiente proposición, $q'_+(t)$ denota la derivada a la derecha de $q(t)$ en el punto t .

Proposición 1.11 (Tuy [122]) *Sea $h(x) = u(x) - v(x)$ donde $u, v : M \mapsto \mathbb{R}_+$ son funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo y compacto $M \subset \mathbb{R}^m$ tal que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in M$. Si $q : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa no creciente tal que $q'_+(0) > -\infty$, entonces $q(h(x))$ es una función d.c. en M :*

$$q(h(x)) = g(x) - K[u(x) + v(x)]$$

donde $g(x) = q(h(x)) + K[u(x) + v(x)]$ es una función convexa y K es cualquier constante que verifique $K \geq |q'_+(0)|$.

Puede establecerse un resultado análogo para el caso en que q sea una función cóncava no decreciente que verifique $q'_+(0) < +\infty$.

Proposición 1.12 (Tuy [122]) Sea $h(x) = u(x) - v(x)$ donde $u, v : M \mapsto \mathbb{R}_+$ son funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo y compacto $M \subset \mathbb{R}^m$ tal que $0 \leq h(x) \leq a$ para todo $x \in M$. Si $q : [0, a] \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa no decreciente tal que $q'_-(a) < +\infty$, entonces $q(h(x))$ es una función d.c. en M :

$$q(h(x)) = g(x) - K[a + v(x) - u(x)]$$

donde $g(x) = q(h(x)) - K[a + v(x) - u(x)]$ es una función convexa y K es cualquier constante que verifique $K \geq q'_-(a)$.

Con respecto a la *resolución de problemas de optimización d.c.*, los principales métodos primales utilizados son los procedimientos de Ramificación y Acotación y de Aproximación Exterior, así como combinaciones de ambos. Dado el problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in D \end{aligned} \tag{1.3}$$

con $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ una función d.c. y $D \subset \mathbb{R}^m$ compacto, en los procedimientos de Ramificación y Acotación se parte de un conjunto $M_0 \supseteq D$, para el cual se construye una partición, es decir, se divide en un número finito de subconjuntos $\{M_i\}_{i \in I}$ tales que $M_0 = \bigcup_{i \in I} M_i$ y $M_i \cap M_j = \text{fr}(M_i) \cap \text{fr}(M_j)$ para todo $i \neq j$. Para cada elemento de la partición se determina información acerca de la posibilidad de que contenga o no alguna solución óptima del problema; si esta información muestra que un determinado M_i no puede contener ningún óptimo global, éste ya no será tenido en cuenta en adelante. Una vez examinados todos los elementos, se construye una partición más fina y se repite el proceso.

En los métodos de Aproximación Exterior se parte de un conjunto inicial D_1 que contiene a la región factible D y se construye de forma iterada una sucesión de conjuntos $\{D_n\}$ (poliédricos usualmente), denominados *relajaciones* o *aproximaciones exteriores* del conjunto D , tales que $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_{n-1} \supseteq D_n \supseteq D$. Para cada D_n se resuelve el problema de minimización de f sobre tal conjunto y, si una solución óptima x^n pertenece a D , el algoritmo concluye con ésta como solución óptima del problema (1.3). En caso contrario, se construye una nueva aproximación exterior $D_{n+1} \subset D_n$ tal que $x^n \notin D_{n+1}$ y se repite el proceso.

Un esquema general de ambos procedimientos de optimización se muestra a continuación. Una información más amplia sobre métodos determinísticos de Optimización Global y su aplicación al caso d.c. puede encontrarse en [11, 64, 67, 120, 124].

Algoritmo 1.13 (Ramificación y Acotación)

Paso 0. Inicialización.

Fijar un valor de tolerancia $\varepsilon > 0$ y elegir $M_0 \supseteq D$.

Fijar \mathbf{P} , partición de M_0 y, para cada $M \in \mathbf{P}$, determinar cotas inferior $\alpha(M)$ y superior $\beta(M)$ que satisfagan

$$\alpha(M) \leq \inf(M \cap D) \leq \beta(M)$$

Hacer $\alpha := \min \{\alpha(M) : M \in \mathbf{P}\}$ y $\beta := \min \{\beta(M) : M \in \mathbf{P}\}$

Paso 1. Ramificación.

Elegir $M \in \mathbf{P}$ y suprimirlo de \mathbf{P} .

Construir una partición \mathbf{P}' de M y hacer $\mathbf{P} := (\mathbf{P} \setminus \{M\}) \cup \mathbf{P}'$

Paso 2. Acotación y mejora de la solución.

Para cada elemento $M' \in \mathbf{P}'$ calcular cotas inferior $\alpha(M')$ y superior $\beta(M')$ del valor objetivo óptimo en $M' \cap D$ y actualizar

$$\alpha := \min \{\alpha, \alpha(M')\} \quad \beta := \min \{\beta, \beta(M')\}$$

Paso 3. Eliminación.

Suprimir aquellos elementos $M \in \mathbf{P}$ que sean infactibles o que verifiquen $\alpha(M) \geq \beta$.

Paso 4. Terminación.

Si $\beta - \alpha \leq \varepsilon$, entonces FIN. En caso contrario, volver al paso 1.

Algoritmo 1.14 (Aproximación Exterior)**Paso 0. Inicialización.**

Elegir un conjunto cerrado $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ tal que $D \subset D_1$.

Hacer $n := 1$.

Paso 1. Resolución del Problema Relajado.

Resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in D_n \end{array}$$

y elegir $x^n \in \arg \min \{f(x) : x \in D_n\}$.

Si $x^n \in D$, entonces FIN: x^n es solución del problema original.

Paso 2. Construcción de la Aproximación Exterior.

Determinar una función $l_n : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{ll} l_n(x) & \leq 0 \quad \forall x \in D \\ l_n(x^n) & > 0 \end{array}$$

Hacer $D_{n+1} := D_n \cap \{x : l_n(x) \leq 0\}$.

Hacer $n := n + 1$.

Ir al Paso 1.

1.2 Optimización del calibrador de una función d.c. vectorial

Un resultado básico del álgebra de funciones d.c. establece que esta clase es cerrada para la composición de funciones (Proposición 1.5), aunque no es posible determinar, en general, una representación d.c. para la función resultante de la composición. No obstante, en ciertos casos particulares (algunos sumamente interesantes) tal descomposición sí puede determinarse explícitamente. Así, en la Sección 1.1 (véase también [121]) se recogen algunos resultados relativos a la composición con una función d.c. de una convexa o cóncava definida en \mathbb{R} y con valores reales.

1.2.1 Obtención de una descomposición d.c.

En relación con lo anterior, se presenta a continuación un resultado que permite obtener de forma explícita una representación d.c. para la composición de funciones cuya función exterior es un *calibrador*, es decir, una función (convexa) $\gamma : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(x) = \inf \{t > 0 : x \in tB\} \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (1.4)$$

siendo B un conjunto convexo, cuyo interior contiene al origen, [87, 103].

Un resultado bien conocido dentro del Análisis Convexo establece que todo calibrador γ puede ser escrito (globalmente) como

$$\gamma(x) = \max \{\langle u, x \rangle : u \in B^\circ\} \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (1.5)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto escalar usual, y B° es el conjunto polar de B , es decir, $B^\circ = \{v : \langle v, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in B\}$. Haciendo uso de esta propiedad, la demostración de la Proposición 1.5 puede reescribirse para este caso particular, obteniéndose una descomposición d.c. global para $\gamma \circ f$, como se muestra a continuación.

Proposición 1.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto convexo. Si $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ es una función d.c. vectorial y $\gamma : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ es un calibrador con bola unidad B , entonces $\gamma \circ f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es una función d.c. que admite la siguiente descomposición*

$$\gamma \circ f = \left(\gamma \circ f + \sum_{j=1}^m N_j (f_j^+ + f_j^-) \right) - \sum_{j=1}^m N_j (f_j^+ + f_j^-) \quad (1.6)$$

donde $N_j \geq \max\{\gamma(e_j), \gamma(-e_j)\}$, e_j es el j -ésimo vector unitario de \mathbb{R}^m y $f = (f_1^+ - f_1^-, \dots, f_m^+ - f_m^-)$, con f_j^+, f_j^- funciones convexas para $j = 1, \dots, m$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que cada N_j puede ser elegido de tal modo que $N_j < +\infty$, ya que el origen es un punto interior de B y, por tanto, el conjunto polar B° es acotado.

De (1.5) se sigue que el calibrador γ puede escribirse globalmente como el máximo puntual de funciones afines g_u

$$\gamma(y) = \max_{u \in B^\circ} g_u(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

donde $g_u(y) = \langle u, y \rangle$. Por tanto:

$$\begin{aligned} g_u(f_1, \dots, f_m) &= \sum_{j=1}^m u_j f_j^+ - \sum_{j=1}^m u_j f_j^- \\ &= \left(\sum_{j=1}^m (N_j + u_j) f_j^+ + \sum_{j=1}^m (N_j - u_j) f_j^- \right) - \sum_{j=1}^m N_j (f_j^+ + f_j^-) \\ &= p_u - q \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $N_i \geq \gamma(e_i) = \max_{u \in B^0} u_i$ y $N_i \geq \gamma(-e_i) = \max_{u \in B^0} -u_i$, se sigue que la función p_u es convexa y, por tanto, $g_u \circ f$ puede expresarse como diferencia de dos funciones convexas, una de las cuales no depende de u . Así, $\gamma \circ f = \max_{u \in B^0} g_u(f_1, \dots, f_m) = \max_{u \in B^0} p_u - q = p - q = (\gamma \circ f + q) - q$ quedando probado el resultado. \square

En particular, si el calibrador γ es una norma L_p , puede tomarse $N_i = 1$ para todo i , obteniéndose el siguiente

Corolario 1.16 Sean f_1, \dots, f_m funciones d.c. definidas en un conjunto convexo Ω , con descomposiciones d.c. $f_i = f_i^+ - f_i^-$, $i = 1, \dots, m$. Entonces, para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $\|f\|_p$ es d.c. en Ω , y una descomposición d.c. de esta función viene dada por:

$$\|f\|_p = \left(\|f\|_p + \sum_{j=1}^m (f_j^+ + f_j^-) \right) - \sum_{j=1}^m (f_j^+ + f_j^-)$$

Obsérvese que este corolario permite obtener inmediatamente una representación d.c. para cualquier combinación afín de funciones que son composición de una norma L_p y una función d.c. con descomposición conocida; esto puede tener diversas aplicaciones dentro de la Teoría de Localización, entre ella la resolución del problema cent-dian.

1.2.2 Aplicaciones

Aunque la Proposición 1.15 será utilizada en el Capítulo 2 como herramienta de resolución para problemas concretos dentro de la Teoría de Localización, es necesario resaltar que su aplicabilidad no se circunscribe exclusivamente a este ámbito, siendo posible su utilización en la resolución de otro tipo de problemas. En concreto, aquí se analizan brevemente aplicaciones de este resultado en el campo de la Estadística y de la Decisión Multicriterio.

1.2.2.1 Regresión No Lineal

Consideremos el modelo estadístico

$$y = f(x, \theta) + \varepsilon$$

donde y es la variable dependiente, x es el vector m -dimensional de variables explicativas, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ es un vector de parámetros (desconocidos) y ε representa el error no observable del modelo.

Dada una muestra de tamaño n , $(y_i, x_{i1}, \dots, x_{im})$ $i = 1, \dots, n$, la elección del vector paramétrico θ que especifica por completo el modelo se realiza de tal forma que minimice una cierta norma (usualmente una norma L_p) del vector de residuos n -dimensional. El vector θ se obtiene, por tanto, como solución óptima del problema de optimización

$$\min_{\theta \in \Theta} \|\underline{y} - f(\underline{x}, \theta)\|_p \quad (1.7)$$

Cuando $f(x, \cdot)$ es una función afín para cada x , el problema de estimación puede ser resuelto por medio de procedimientos eficientes. Sin embargo, (1.7) conduce, en general, a un Problema de Optimización Global cuando f es no lineal, cuya resolución dista de ser un problema trivial (en [88] pueden encontrarse varios modelos de regresión no lineal en los que una buena parte de los principales paquetes estadísticos comerciales no consiguen obtener una solución óptima). Para la resolución de este problema se han propuesto procedimientos de búsqueda local, [46, 102], así como métodos probabilísticos, [70, 106, 136], los cuales no garantizan la obtención del óptimo global.

En la mayor parte de las aplicaciones, f es una función d.c. cuya descomposición puede calcularse sin dificultad. En tales casos, la Proposición 1.15 proporciona una descomposición d.c. de la función objetivo de (1.7), a partir de la cual puede obtenerse el óptimo global aplicando técnicas de optimización d.c.; obsérvese que este enfoque no requiere la diferenciabilidad de f .

1.2.2.2 Toma de Decisiones con Criterios Múltiples

La Proposición 1.15 posee también aplicación inmediata a la Programación Compromiso, [133, 134, 135], la cual constituye una herramienta efectiva dentro de los procesos de toma de decisiones con múltiples criterios.

Dado el problema con objetivos múltiples

$$\max_{x \in X} \mathbf{f}(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

con $X \subset \mathbb{R}^k$, en Programación Compromiso se procede de la siguiente forma: se calcula el *punto ideal* del problema,

$$\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$$

siendo $\bar{f}_i = \max_{x \in X} f_i(x)$. Si $\bar{\mathbf{f}}$ corresponde a una solución factible (lo cual rara vez ocurre), se tendrá la solución óptima; en otro caso, la *solución de mejor compromiso*, es decir, aquella más cercana al punto ideal, es elegida como solución del problema. La distancia entre cada solución factible y el punto ideal es medida utilizando una distancia, generalmente inducida por una métrica L_p , $1 \leq p \leq \infty$,

$$\left(\sum_{i=1}^m w_i^p \left| \frac{\bar{f}_i - f_i(x)}{\bar{f}_i - \underline{f}_i} \right|^p \right)^{1/p} \quad \forall x \in X$$

donde w_i es un peso, elegido por el decisor, que mide la importancia relativa del i -ésimo criterio, y $\underline{f}_i = \min_{x \in X} f_i(x)$. Por tanto, la medida de proximidad viene dada por la norma L_p del vector cuya i -ésima componente es

$$w_i \frac{\bar{f}_i - f_i(x)}{\bar{f}_i - \underline{f}_i} \quad i = 1, \dots, m$$

Si cada función f_i es d.c., con descomposición conocida, la solución de mejor compromiso puede determinarse, en virtud de la Proposición 1.15, resolviendo un problema de optimización d.c. en el que la función objetivo posee una representación d.c. conocida.

La Programación Compromiso no es el único área, dentro del ámbito de la Decisión Multicriterio, en el que es aplicable la Proposición 1.15; así, en [104] se apunta que tanto la Programación por Metas como la Programación Compromiso, se obtienen como casos particulares del siguiente modelo:

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^m w_i^p \left| \frac{b_i - f_i(x)}{k_i} \right|^p \right)^{1/p} \quad (1.8)$$

donde b_i es el nivel de aspiración para el i -ésimo criterio y k_i es una constante de normalización. Si cada función f_i es d.c. y se dispone de una descomposición para

cada una de ellas, la Proposición 1.15 permite obtener una representación d.c. para la función objetivo de (1.8).

Las técnicas empleadas hasta ahora para la resolución del problema sólo realizan búsquedas locales, [107, 108], por lo que pueden quedar atrapadas en decisiones óptimas locales (no globales); de ahí el interés de la Proposición 1.15, pues permite aplicar técnicas de optimización global (por ejemplo, ramificación y acotación) para su resolución.

Ejemplo 1.17 Siguiendo el enfoque dado en (1.8) se ha considerado un problema de Programación por Metas con $m = 5$, $w_i = k_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$) en el que las funciones y metas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x + 10 \cos(5\pi y) & b_1 &= 10 \\ f_2(x, y) &= x^2 - 6x + y^2 & b_2 &= 0 \\ f_3(x, y) &= 10x + 7y & b_3 &= 70 \\ f_4(x, y) &= x^2 - 6x + 4y & b_4 &= 11 \\ f_5(x, y) &= x^2 + y^2 & b_5 &= 9 \end{aligned}$$

siendo la región factible el rectángulo

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

La Figura 1.1 muestra una representación gráfica de la función objetivo en el caso $p = 2$, en la que se manifiesta el carácter multimodal del problema.

El problema anterior ha sido resuelto para 50 valores de p distribuidos regularmente entre 1 y 2, obteniéndose las soluciones óptimas que se muestran en la Figura 1.2. Como puede apreciarse, la trayectoria determinada por tales soluciones óptimas al variar p no es continua, debido a cambios en el óptimo local a que corresponden los mínimos globales asociados a los diferentes valores de p . \square

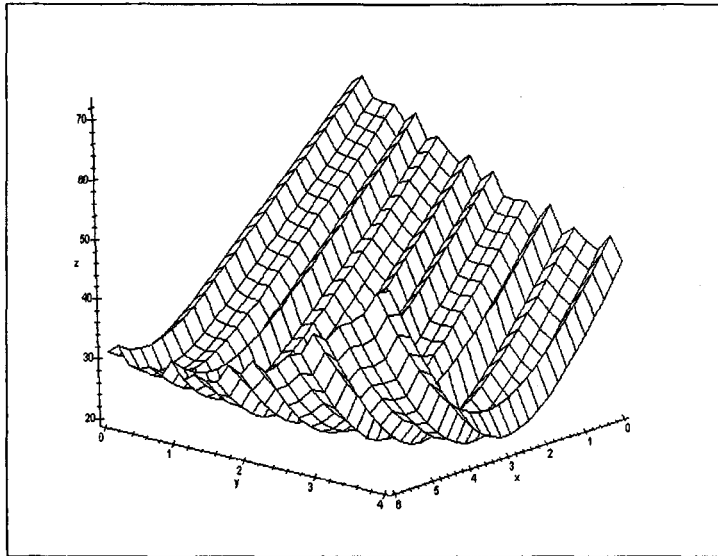


Figura 1.1: Función objetivo considerada en el Ejemplo 1.17

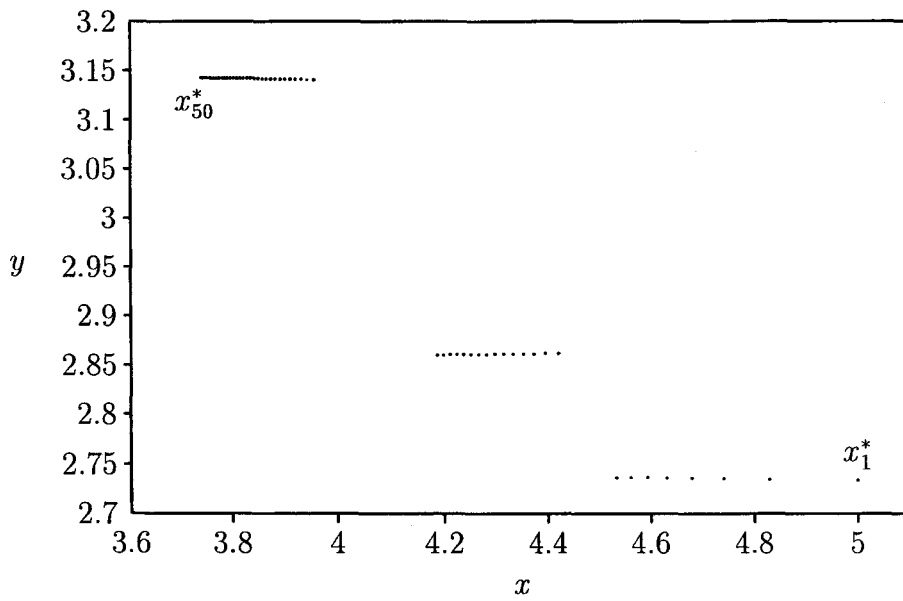


Figura 1.2: Trayectoria de soluciones óptimas (Ejemplo 1.17)

1.3 Algoritmos de cubrimiento

Dado un politopo $X \subset \mathbb{R}^m$ y una función f con valores reales definida sobre X , consideraremos el siguiente problema de optimización

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{1.9}$$

Los algoritmos de cubrimiento, [5, 14, 30, 50, 89, 95, 112], constituyen una clase muy importante de métodos que permiten la resolución de problemas de optimización global del tipo (1.9) sobre familias de funciones bastante amplias. Básicamente, tales métodos de cubrimiento construyen una sucesión de puntos factibles $\{x_n\}$ y una sucesión de *envolventes inferiores* $\{E^{(n)}\}$, es decir, funciones que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} E^{(n)} &\leq f && \text{para todo } n \\ E^{(n)} &\leq E^{(n+1)} && \text{para todo } n \\ E^{(n)}(x_j) &= f(x_j) && \text{para todo } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si se utiliza como regla de parada la detección de una solución ε -óptima, una descripción general del algoritmo de cubrimiento es la siguiente, [67],

Algoritmo 1.18 (Cubrimiento)

Paso 0. *Inicialización.*

Elegir $x_1 \in X$

Hacer $\bar{f} := f(x_1)$, $x^* := x_1$ y construir $E^{(1)}$

Hacer $n := 1$.

Hacer $\underline{f} := \min_{x \in X} E^{(1)}(x)$

Paso n. *Iteración.*

Si $\bar{f} - \underline{f} \leq \varepsilon$ entonces FIN.

Construir $E^{(n+1)}$ a partir de $E^{(n)}$ y seleccionar

$$x_{n+1} \in \arg \min_{x \in X} E^{(n)}(x)$$

Si $f(x_{n+1}) < \bar{f}$ entonces hacer $\bar{f} := f(x_{n+1})$ y $x^* := x_{n+1}$

Hacer $n := n + 1$

Volver a iterar.

El algoritmo concluye con x^* como solución ε -óptima y \underline{f} como cota inferior del valor objetivo óptimo, distante de éste menos de ε . La convergencia de este procedimiento iterativo se establece por medio del siguiente resultado:

Proposición 1.19 (Piyavskii [95]). Sean $\underline{f}^{(n)}$ y $\bar{f}^{(n)}$ los valores de las cotas inferior y superior \underline{f} y \bar{f} en la etapa n del Algoritmo 1.18. Entonces:

$$(a) \lim_{n \uparrow \infty} \bar{f}^{(n)} = \min_{x \in X} f(x)$$

$$(b) \lim_{n \uparrow \infty} (\bar{f}^{(n)} - \underline{f}^{(n)}) = 0$$

La puesta en práctica de este algoritmo requiere prestar atención a dos aspectos fundamentales: por una parte, la definición de la envolvente inferior $E^{(n)}$, y por otra, la resolución de los problemas (Q_n) que permiten la actualización y mejora de la envolvente

$$(Q_n) \quad \min_{x \in X} E^{(n)}(x),$$

Con respecto a la primera cuestión, las envolventes inferiores se definen habitualmente como el máximo puntual de funciones más simples k_i ,

$$E^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} k_i \quad (1.10)$$

Por lo general cada función k_i depende del punto x_i generado en la etapa i -ésima del algoritmo, por lo que en adelante se denominará *función de cubrimiento con punto base x_i* . Por ejemplo, si f es Lipschitz y L es una constante de Lipschitz conocida para f , el algoritmo de Piyavskii, [95, 49, 67, 112] utiliza como funciones k_i las siguientes:

$$k_i^{PIY}(x) = f(x_i) - L\|x - x_i\|$$

Otro ejemplo de método de cubrimiento basado en (1.10) es el algoritmo de Breiman-Cutler, considerado en [14, 30, 4, 5]. En él se supone que la función $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable y que satisface la condición

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle - K\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in X \quad (1.11)$$

siendo $K \geq 0$ una constante conocida. Obsérvese que esta familia incluye a la clase \mathcal{C}^2 de funciones dos veces continuamente diferenciables, aunque es más general. En efecto, si $f \in \mathcal{C}^2$ sobre X , existe una constante $K \geq 0$ tal que la función

$g(x) = f(x) + K \|x\|^2$ es convexa; por tanto, dados $x, y \in X$ se verificará $g(x) \geq g(y) + \langle \nabla g(y), x - y \rangle$, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) + K \|x\|^2 &\geq f(y) + K \|y\|^2 + \langle \nabla f(y) + 2Ky, x - y \rangle \\ &= f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + K \|y\|^2 + 2K \langle y, x - y \rangle \\ &= f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle - K \|x - y\|^2 + K \|x\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto, f verifica la condición de Breiman-Cutler. Para ver que ambas clases no coinciden consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

que es continuamente diferenciable y satisface (1.11) para cualquier valor de K mayor o igual que 1, aunque no es \mathcal{C}^2 .

En el caso del algoritmo de Breiman-Cutler, las funciones k_i vienen definidas de la siguiente forma:

$$k_i^{BrC}(x) = f(x_i) + \langle \nabla f(x_i), x - x_i \rangle - K \|x - x_i\|^2 \quad (1.12)$$

Estas funciones son posteriormente generalizadas por Baritomba y Cutler en [5], dando lugar a una envolvente inferior definida a partir de

$$k_i^{BC}(x) = f(x_i) + \langle \nabla f(x_i), x - x_i \rangle - q(x - x_i)$$

para funciones k_i^{BC} que satisfagan la condición

$$k_i^{BC}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X \quad (1.13)$$

siendo $q(x) = \langle x, Hx \rangle$ una forma cuadrática con matriz H definida positiva. Obsérvese que (1.11) y k_i^{BrC} son casos particulares de (1.13) y k_i^{BC} , respectivamente, tomando como H la matriz diagonal con valor K en la diagonal principal.

El punto crucial de los métodos de cubrimiento parece ser la resolución de los subproblemas (Q_n) . De hecho, cada (Q_n) es en sí mismo un problema de Optimización Global (no diferenciable, en general), cuya resolución dista de ser trivial. Así, en [67] (página 596) se menciona que el algoritmo de Piyavskii no parece ser efectivo en dimensión mayor que 2 debido a la dificultad creciente de resolución de los problemas (Q_n) : los hipografos de las funciones k_i son en este caso conos, [89],

y los mínimos locales de $E^{(n)}$ se producen en los puntos de intersección de $m + 1$ de estos conos.

La estructura de los problemas (Q_n) es más simple para el método de cubrimiento basado en (1.12); sin embargo, su aplicación requiere la determinación de cotas para las derivadas primera y segunda de f , lo cual constituye con frecuencia, como se indica en [5], un problema de optimización global con el mismo grado de dificultad de resolución que el problema original.

En las secciones que siguen a continuación se describe la aplicación de los métodos de cubrimiento al caso en que se dispone de una descomposición d.c. para f , obteniéndose una nueva clase de envolventes inferiores. Tales envolventes dan lugar a subproblemas (Q_n) con una estructura similar a la que tienen los basados en (1.12), y, al mismo tiempo, son más versátiles, ya que no requieren el cálculo de cotas para las derivadas y pueden ser aplicados a problemas no diferenciables.

Es necesario observar que, al ser también d.c. el opuesto de una función d.c., el desarrollo que sigue a continuación es también válido para el problema de maximización de una función de esta clase.

1.4 Algoritmo de cubrimiento para funciones d.c.

Sea f una función d.c. con valores reales definida sobre un politopo $X \subset \mathbb{R}^m$ y supongamos que se conoce una descomposición d.c. para f ,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \forall x \in X$$

donde f_1 es una función convexa definida sobre un abierto convexo $\Omega \supset X$ y f_2 es una función convexa definida sobre X .

Aunque la obtención de una descomposición d.c. para una función arbitraria f no es una tarea fácil en general, existe un conjunto de reglas, como ya se ha puesto de manifiesto en la Sección 1.1, que permiten la obtención de descomposiciones d.c. a partir de funciones d.c. más simples, cuya descomposición es conocida. Además, no es difícil encontrar aplicaciones en las que la descomposición d.c. aparece de forma explícita en el objetivo, como es el caso de ciertos problemas considerados en el ámbito de la Teoría de Localización.

1.4.1 Funciones de cubrimiento

Las funciones de cubrimiento que consideraremos en este caso se obtienen minorando linealmente f_1 , lo que da lugar a la siguiente función cóncava

$$k_i^{dc}(x) = f_1(x_i) + \langle \xi_1(x_i), x - x_i \rangle - f_2(x) \quad (1.14)$$

donde $\xi_1(x_i)$ es un subgradiente arbitrario de f_1 en x_i . La envolvente inferior $E^{(n)}$ resulta ser entonces el máximo puntual de funciones cóncavas.

1.4.2 Casos particulares

A continuación se probará que el algoritmo de optimización de Breiman-Cutler, [14], y la generalización debida a Baritomba-Cutler, [5], son casos particulares del algoritmo de cubrimiento para funciones d.c. obtenido a partir de (1.14).

Proposición 1.20 *Sea $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica (1.13) para una forma cuadrática q con matriz H simétrica semidefinida positiva. Entonces, f es una función d.c. y*

$$f(x) = (f(x) + \langle x, Hx \rangle) - \langle x, Hx \rangle \quad (1.15)$$

es una descomposición d.c. de f . Más aún, si la descomposición d.c. de f que se considera es (1.15), entonces el Algoritmo 1.18 con funciones de cubrimiento k_i^{dc} coincide con el algoritmo de Baritomba-Cutler.

Demostración. Dado que la función $f_2(x) = \langle x, Hx \rangle$ es convexa, basta probar que la función diferenciable $f_1(x) = f(x) + \langle x, Hx \rangle$ es convexa.

De (1.13) se sigue que

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle - \langle x - y, H(x - y) \rangle \\ &= f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle - \left[\langle x, Hx \rangle - \langle y, Hy \rangle - 2\langle y, H(x - y) \rangle \right] \end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\begin{aligned} f(x) + \langle x, Hx \rangle &\geq f(y) + \langle y, Hy \rangle + \langle \nabla f(y) + 2Hy, x - y \rangle \\ f_1(x) &\geq f_1(y) + \langle \nabla f_1(y), x - y \rangle \end{aligned}$$

de donde se concluye que f_1 es convexa.

Más aún,

$$\begin{aligned}
 k_i^{dc}(x) &= f_1(x_i) + \langle \nabla f_1(x_i), x - x_i \rangle - f_2(x) \\
 &= f(x_i) + \langle x_i, Hx_i \rangle + \langle \nabla f(x_i) + 2Hx_i, x - x_i \rangle - \langle x, Hx \rangle \\
 &= f(x_i) + \langle \nabla f(x_i), x - x_i \rangle + \langle x_i, Hx_i \rangle - \langle x, Hx \rangle + 2\langle x_i, H(x - x_i) \rangle \\
 &= f(x_i) + \langle \nabla f(x_i), x - x_i \rangle - \langle x - x_i, H(x - x_i) \rangle \\
 &= k_i^{BC}(x)
 \end{aligned}$$

lo que prueba que k^{dc} da lugar a la envolvente de Baritompa-Cutler cuando se utiliza (1.15) como descomposición d.c. de f . \square

Por tanto, incluso para funciones f que satisfagan (1.13), pueden obtenerse distintas envolventes para la aplicación de métodos de cubrimiento, tan pronto como se tenga una descomposición d.c. distinta de (1.15). De esta forma podría evitarse el costoso proceso de cálculo de cotas para las derivadas, [5]. Además, la utilización de otras descomposiciones d.c. para la construcción de la envolvente puede afectar notablemente a la convergencia del Algoritmo 1.18, como se pondrá de manifiesto en el Ejemplo 1.21 y en la Sección 1.6.

Ejemplo 1.21 En [14], Breiman y Cutler consideran el problema de minimización de la función $f : I = [-0.2, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 - \cos(5\pi x)$$

Esta función es dos veces continuamente diferenciable, por lo que admite una descomposición d.c. de la forma

$$f(x) = (f(x) + Kx^2) - Kx^2 \tag{1.16}$$

En particular, Breiman y Cutler proponen tal descomposición tomando $K = 12.5\pi^2 - 1$ (el valor más pequeño para el cual $f(x) + Kx^2$ es convexa), y aplican el algoritmo de cubrimiento con las funciones k_i^{BrC} correspondientes.

Sin embargo, una descomposición d.c. alternativa para una función $f \in \mathcal{C}^2$ la proporciona la Proposición 1.10. Así, tomando $\hat{x} = 0$, se obtiene la descomposición d.c.

$$f(x) = h(x) - (h(x) - f(x)) \tag{1.17}$$

siendo

$$h(x) = \begin{cases} 0.96000 - 0.40000 x & x \in [z_1, a_1] \\ 2.54085 + 15.50848 x + x^2 - \cos(5\pi x) & x \in (a_1, b_1] \\ 0.98000 + 31.41696 x & x \in (b_1, a_2] \\ -3.66254 + 46.52544 x + x^2 - \cos(5\pi x) & x \in (a_2, b_2] \\ -11.76678 + 63.23391 x & x \in (b_2, a_3] \\ -22.27272 + 77.54249 x + x^2 - \cos(5\pi x) & x \in (a_3, b_3] \\ -37.22035 + 95.05087 x & x \in (b_3, z_2] \end{cases}$$

$$z_1 = -0.2 \quad a_i = \frac{-1}{5\pi} \arccos\left(\frac{-0.08}{\pi^2}\right) + \frac{2}{5}(i-1) \quad i = 1, 2, 3$$

$$z_2 = 1 \quad b_i = \frac{1}{5\pi} \arccos\left(\frac{-0.08}{\pi^2}\right) + \frac{2}{5}(i-1) \quad i = 1, 2, 3$$

Esta envolvente alternativa proporciona mejores cotas que (1.16), como puede observarse en la Figura 1.3, en la que se muestran las envolventes obtenidas a partir de (1.16) y (1.17) después de 4 iteraciones de los correspondientes algoritmos, tomando $x_1 = 0.5$ como punto de partida en ambos casos. La obtención de cotas más ajustadas tendrá una repercusión favorable en la velocidad de convergencia del algoritmo.

Por razones de completitud, en la Figura 1.4 se comparan la envolvente d.c. de (1.17) y la envolvente de Piyavskii para optimización Lipschitz (usando una constante de Lipschitz bastante ajustada, con valor $L = 17.51$) nuevamente después de 4 iteraciones, usando el mismo punto inicial $x_1 = 0.5$. \square

1.4.3 Actualización de la envolvente

La actualización de la envolvente inferior $E^{(n)}$ en la transición de una etapa a otra del algoritmo de cubrimiento, requiere la resolución del problema de minimización (Q_n). A continuación se analizan dos enfoques diferentes para la resolución de estos problemas.

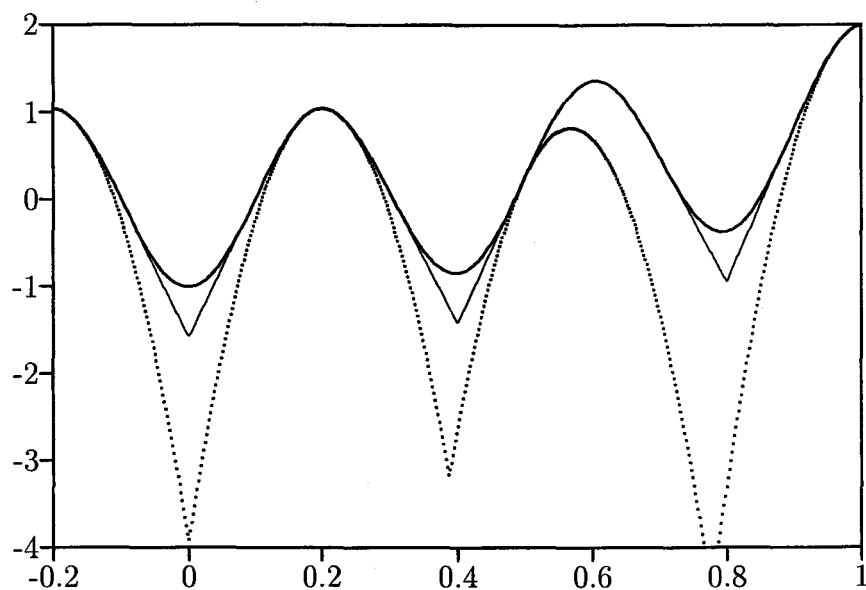


Figura 1.3: Comparación de envolventes (I): Función ejemplo (línea doble), Envolvente de Breiman-Cutler (línea de puntos), Envolvente d.c. (línea simple)

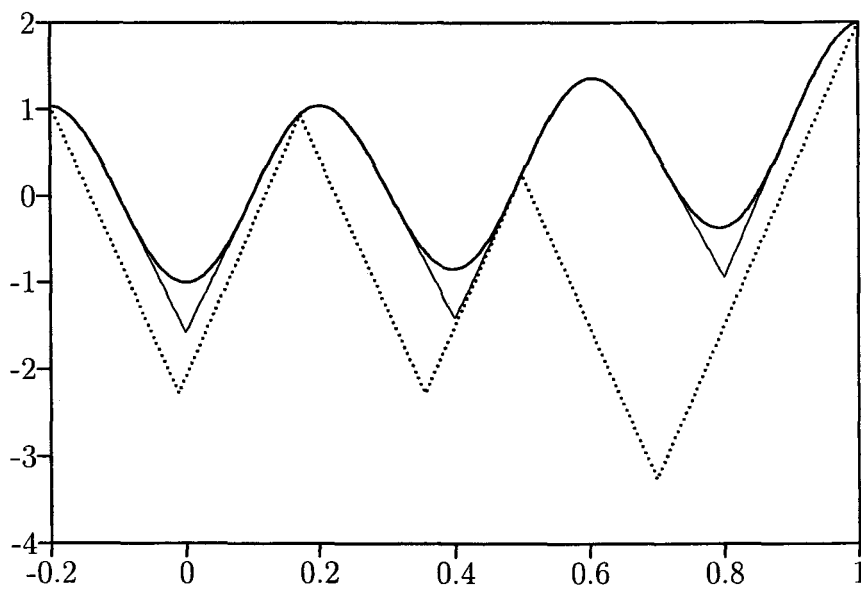


Figura 1.4: Comparación de envolventes (II): Función ejemplo (línea doble), Envolvente de Piyavskii (línea de puntos), Envolvente d.c. (línea simple)

1.4.3.1 Minimización cóncava

Teniendo en cuenta la expresión de la envolvente inferior (1.14), (Q_n) puede formularse inmediatamente como un problema de minimización cóncava con restricciones lineales, como en [23]. Así, (Q_n) resulta ser equivalente a

$$\min_{(x,t) \in B^{(n)}} \{t - f_2(x)\} \quad (1.18)$$

siendo

$$B^{(n)} = \{(x, t) : x \in X, f_1(x_i) + \langle \xi_1(x_i), x - x_i \rangle \leq t \quad \forall i, 1 \leq i \leq n\}$$

Por tanto, la resolución de cada problema (Q_n) implica minimizar una función cóncava sobre el poliedro $B^{(n)}$, lo cual puede llevarse a cabo mediante inspección de sus vértices. Más aún, dado que $B^{(n+1)}$ se obtiene a partir de $B^{(n)}$ añadiendo una restricción lineal, la utilización de procedimientos *on-line* de enumeración de vértices, [26], permite emplear en la resolución de (Q_{n+1}) la información previa obtenida al resolver (Q_n) , no siendo necesaria la evaluación de todos los vértices del poliedro en cada etapa. Además, la inserción de cada nueva restricción puede hacerse en tiempo polinomial, puesto que, en la iteración n , la actualización de la geometría de la región factible puede hacerse en tiempo $O(n^{m-1})$, [2, 36].

Obsérvese que el Problema (1.9), una vez conocida una descomposición d.c. de f , es equivalente al siguiente problema de minimización cóncava

$$\begin{aligned} \min \quad & t - f_2(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_1(x) \leq t \\ & (x, t) \in X \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

y que cada subproblema (Q_n) en la forma (1.18) corresponde a uno de los subproblemas relajados que se obtiene en la aplicación del método de aproximación exterior (Algoritmo 1.14) al problema anterior. Por tanto, puede concluirse que el método de cubrimiento para optimización d.c. y, en particular, el algoritmo de Breiman-Cutler, son métodos de aproximación exterior. Esto hace que tales algoritmos sean poco eficientes ya en problemas con dimensión moderadamente alta, pues los requerimientos de almacenamiento crecen notablemente con ésta, siendo preferible la utilización de otras técnicas, como los procedimientos de ramificación y acotación.

A pesar de ello, como se indica en [52] (página 52), para problemas con un número pequeño de variables, como muchos de los que aparecen en Localización Continua,

el método de aproximación exterior resulta ser, a la vez, simple y competitivo con otros procedimientos de resolución.

1.4.3.2 Diagramas de potencia

Una estrategia diferente (aunque equivalente) para la resolución de los problemas (Q_n) se propone en [14] para el caso particular (1.12): para cada i, n se define $D_{i:n}^{BrC}$ como

$$D_{i:n}^{BrC} = \{x \in \mathbb{R}^m : k_i^{BrC}(x) \geq k_j^{BrC}(x) \quad \forall j, 1 \leq j \leq n\}$$

de donde se deduce inmediatamente que cada $D_{i:n}^{BrC}$ es un conjunto poliédrico. Además, cada (Q_n) puede escribirse como

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min_{x \in X \cap D_{i:n}^{BrC}} k_i^{BrC}(x) \right\}, \quad (1.19)$$

por lo que la resolución de (Q_n) puede realizarse mediante inspección de los vértices de cada politopo $X \cap D_{i:n}^{BrC}$, para lo cual se describe un procedimiento geométrico en [14].

Esta estrategia no sólo es aplicable a los métodos de cubrimiento basados en k_i^{BrC} , sino que también es utilizable en el caso más general en el que se emplean funciones de cubrimiento k_i^{dc} . De hecho, se verifica que:

$$\begin{aligned} k_i^{dc}(x) \geq k_j^{dc}(x) &\iff f_1(x_i) + \langle \xi_1(x_i), x - x_i \rangle \geq f_1(x_j) + \langle \xi_1(x_j), x - x_j \rangle \\ &\iff \|x - C_i\|^2 + \beta_i \leq \|x - C_j\|^2 + \beta_j \end{aligned}$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2} \xi_1(x_k) \quad \beta_k = \langle \xi_1(x_k), x_k \rangle - f_1(x_k) - \frac{1}{4} \|\xi_1(x_k)\|^2 \quad k = i, j$$

Por tanto, se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.22 *Sea*

$$D_{i:n}^{dc} = \{x \in \mathbb{R}^m : k_i^{dc}(x) \geq k_j^{dc}(x) \quad \forall j, 1 \leq j \leq n\}$$

Entonces, se verifica que $\{D_{i:n}^{dc}\}_{1 \leq i \leq n}$ es un diagrama de potencia con centros C_1, \dots, C_n y pesos (aditivos) β_1, \dots, β_n .

La propiedad principal de los diagramas de potencia, [2, 3, 36, 91], viene dada por el hecho de que inducen una subdivisión *poliédrica* de \mathbb{R}^m (como el caso particular $\{D_{i:n}^{BrC}\}$), y pueden ser construidos mediante procedimientos *on-line*, [3]. De hecho, el procedimiento geométrico descrito en [14] para la resolución de los problemas (Q_n) coincide básicamente con el procedimiento *on-line* dado en [3] para describir la estructura geométrica de un diagrama de potencia.

Una estrategia similar también puede emplearse en el algoritmo de cubrimiento para optimización Lipschitz. Así, puede definirse $D_{i:n}^{PIY}$, obteniéndose una expresión similar a (1.19). De hecho, éste es el fundamento del algoritmo de Jaumard-Herrmann-Ribault descrito en [49]. En este caso los conjuntos $D_{i:n}^{PIY}$ pueden también identificarse con objetos geométricos, a saber, *diagramas de Voronoi aditivos*, [2, 36, 91], pero que ya no tienen estructura poliédrica en dimensión mayor o igual que 2, por lo que son necesarias estructuras de datos más complicadas para almacenar y actualizar la geometría de tales diagramas.

1.5 El caso unidimensional

En esta sección se analiza con detalle la aplicación del algoritmo de cubrimiento 1.18 a la optimización de funciones d.c. univariadas, dado que en este caso pueden aportarse resultados adicionales de interés. En adelante se considerarán funciones f d.c. reales y finitas, definidas sobre un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ que contiene al intervalo cerrado $I = [a, b]$ sobre el que se resolverá el problema de optimización unidimensional

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \tag{1.20}$$

La clase de funciones que verifica estas condiciones se notará \mathcal{D} .

1.5.1 Búsqueda de soluciones ε -óptimas

Dentro de la Optimización Lipschitz es conocida la imposibilidad, salvo casos particulares, de obtener algoritmos capaces de encontrar la solución óptima global haciendo uso de un número finito de evaluaciones de la función objetivo, [50]. Como se mostrará seguidamente, el carácter d.c. de una función o el conocimiento, inclusive, de una descomposición d.c. de la misma no aportan ningún avance en este sentido, continuando sin poder garantizarse la finitud.

Sean $f_1, f_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas que proporcionan una descomposición d.c. de f , esto es, $f = f_1 - f_2$. Los resultados que siguen a continuación muestran que, en general, no va a ser posible la obtención de algoritmos para la resolución del problema (1.20), basados en la utilización de información de f o de las funciones de la descomposición sobre un conjunto finito de puntos, que converjan en un número finito de etapas. Esto justifica la utilización de métodos destinados a la obtención de soluciones ε -óptimas, como es el caso del Algoritmo 1.18.

Proposición 1.23 *No existe ningún algoritmo con convergencia finita para el problema (1.20) basado exclusivamente en información de las funciones f_1 y f_2 sobre un soporte finito de puntos de $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que existe un algoritmo que proporciona un óptimo global x^* para el problema (1.20) después de un número finito de etapas, en las que se ha empleado exclusivamente información de la función f en los puntos del conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dado un índice $i \in \{1, \dots, n-1\}$, sean z_1 y z_2 puntos del intervalo (x_i, x_{i+1}) , con $z_1 < z_2$ y tales que $x^* \notin [z_1, z_2]$. Se consideran entonces las funciones:

$$\hat{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [a, b] \setminus [z_1, z_2] \\ \max \{f_1(z_1) + \xi_1(x - z_1), f_1(z_2) + \xi_2(x - z_2)\} & \text{si } x \in [z_1, z_2] \end{cases}$$

$$\hat{f}_2(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in [a, b] \setminus [z_1, z_2] \\ \max \{f_2(z_1) + \psi_1(x - z_1), f_2(z_2) + \psi_2(x - z_2)\} & \text{si } x \in [z_1, z_2] \end{cases}$$

con $\xi_i \in \partial f_1(z_i)$, $\psi_i \in \partial f_2(z_i)$ $i = 1, 2$.

Sean z_3, z_4 y z_5 puntos del intervalo (z_1, z_2) tales que $z_3 < z_5 < z_4$ y, tanto \hat{f}_1 como \hat{f}_2 sean derivables en z_3 y z_4 (obsérvese que en el intervalo $[z_1, z_2]$ ambas funciones son afines a trozos). Se consideran entonces los polinomios de interpolación mixta $P(x)$ y $Q(x)$ que verifican, ([75] página 313):

$$\begin{array}{lll} P(z_3) = \hat{f}_1(z_3) & P'(z_3) = \hat{f}'_1(z_3) & P''(z_3) = \hat{f}''_1(z_3) = 0 \\ P(z_4) = \hat{f}_1(z_4) & P'(z_4) = \hat{f}'_1(z_4) & P''(z_4) = \hat{f}''_1(z_4) = 0 \\ P(z_5) = f_1(x^*) - 1 & & \\ Q(z_3) = \hat{f}_2(z_3) & Q'(z_3) = \hat{f}'_2(z_3) & Q''(z_3) = \hat{f}''_2(z_3) = 0 \\ Q(z_4) = \hat{f}_2(z_4) & Q'(z_4) = \hat{f}'_2(z_4) & Q''(z_4) = \hat{f}''_2(z_4) = 0 \\ Q(z_5) = f_2(x^*) + 1 & & \end{array}$$

y, a partir de ellos, se define la función:

$$g(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x) & \text{si } x \in [a, b] \setminus [z_3, z_4] \\ P(x) - Q(x) & \text{si } x \in [z_3, z_4] \end{cases}$$

Por construcción esta función es d.c. y coincide con f fuera de $[z_1, z_2]$ (en particular, en los puntos $x_i, i = 1, \dots, n$). Por tanto, el algoritmo considerado proporcionará el punto x^* como óptimo global para el problema $\min \{g(x) : x \in [a, b]\}$. Esto supone una contradicción, pues $g(z_5) = f_1(x^*) - f_2(x^*) - 2 < f(x^*) = g(x^*)$. \square

Obsérvese que la demostración anterior permite probar, en particular, el siguiente resultado.

Proposición 1.24 *No existe ningún algoritmo con convergencia finita para el problema (1.20) basado exclusivamente en información de la función f sobre un soporte finito de puntos de $[a, b]$.*

El siguiente resultado prueba que ningún algoritmo que emplee exclusivamente información de orden 0 (evaluación) u orden 1 (subgradiente) de la función f_1 , puede converger en un número finito de etapas, si las funciones de la descomposición d.c. son estrictamente convexas. Obsérvese que el Algoritmo 1.18 responde a este esquema.

Proposición 1.25 *Supongamos que f_1 y f_2 son funciones estrictamente convexas en $[a, b]$. Entonces, no existe ningún algoritmo con convergencia finita para el problema (1.20) basado exclusivamente en la utilización de las funciones f_1 y f_2 , y que, para la primera de ellas, sólo haga uso de información de orden 1, a lo sumo, sobre un soporte finito de puntos de $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos la existencia de un algoritmo que proporciona un óptimo global x^* para el problema (1.20) después de un número finito de etapas en las que, para f_1 , sólo se conoce información de orden 1, a lo más, sobre los puntos del conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Veamos en primer lugar que $\partial f_2(x^*) \subset \partial f_1(x^*)$. En efecto, dado que x^* es solución óptima de (1.20) se tiene que $\partial_\varepsilon f_2(x^*) \subset \partial_\varepsilon f_1(x^*)$ para todo $\varepsilon > 0$, [62], de donde se deduce, [63], que:

$$\partial f_2(x^*) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f_2(x^*) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f_1(x^*) = \partial f_1(x^*)$$

Definimos \tilde{x} como el punto de evaluación más próximo a x^* por su izquierda (en caso de no existir, la demostración continúa con un razonamiento análogo, tomando el punto de evaluación más próximo por la derecha a x^*). Se consideran entonces las funciones cóncavas

$$m(x) = f_1(\tilde{x}) + \xi_{\tilde{x}}(x - \tilde{x}) - f_2(x) \qquad n(x) = f_1(x^*) + \xi_{x^*}(x - x^*) - f_2(x)$$

donde $\xi_{\tilde{x}} = \max \{ \vartheta : \vartheta \in \partial f_1(\tilde{x}) \}$ y $\xi_{x^*} = \min \{ \vartheta : \vartheta \in \partial f_2(x^*) \} \in \partial f_1(x^*)$ y, a partir de ellas, se define

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \setminus [\tilde{x}, x^*] \\ \max\{m(x), n(x)\} & \text{si } x \in [\tilde{x}, x^*] \end{cases}$$

Las funciones $m(x)$ y $n(x)$ son d.c., por lo que también lo será $\max\{m(x), n(x)\}$.

Por ser f_1 estrictamente convexa, se tiene que:

$$m(x^*) = f_1(\tilde{x}) + \xi_{\tilde{x}}(x^* - \tilde{x}) - f_2(x^*) < f_1(x^*) - f_2(x^*) = n(x^*) \qquad (1.21)$$

Se probará a continuación que

$$n(x) < f(x^*) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x^*\} \qquad (1.22)$$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto $y \in [a, b] \setminus \{x^*\}$ tal que $n(y) \geq f(x^*)$, de donde se tiene que $f_1(x^*) + \xi_{x^*}(y - x^*) - f_2(y) \geq f_1(x^*) - f_2(x^*)$. Reordenando términos, se deduce que $f_2(x^*) + \xi_{x^*}(y - x^*) \geq f_2(y)$ y, por tanto, $\xi_{x^*} \notin \partial f_2(x^*)$, lo cual contradice la elección de ξ_{x^*} efectuada y la convexidad estricta de f_2 .

De (1.22) se sigue que $m(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) \geq f(x^*) > n(\tilde{x})$ y, haciendo uso de (1.21), se deduce la existencia de un punto $\hat{x} \in (\tilde{x}, x^*)$ verificando $m(\hat{x}) = n(\hat{x}) < f(x^*)$.

La función \bar{f} puede expresarse como $\bar{f} = \bar{f}_1 - f_2$, siendo

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [a, b] \setminus [\tilde{x}, x^*] \\ f_1(\tilde{x}) + \xi_{\tilde{x}}(x - \tilde{x}) & \text{si } x \in [\tilde{x}, \hat{x}] \\ f_1(x^*) + \xi_{x^*}(x - x^*) & \text{si } x \in [\hat{x}, x^*] \end{cases}$$

que es convexa, por lo que \bar{f} es d.c. Además, la información de orden 0 ó 1 de \bar{f}_1 coincide con la de f_1 en los puntos $x_i, i = 1, \dots, n$, por lo que el algoritmo considerado proporcionará el punto x^* como óptimo global para el problema $\min \{ \bar{f}(x) : x \in [a, b] \}$. Esto supone una contradicción, puesto que $\bar{f}(\hat{x}) < f(x^*) = \bar{f}(x^*)$. \square

1.5.2 Descomposición d.c. óptima

En el Ejemplo 1.21 se ha puesto de manifiesto que la elección de una u otra descomposición d.c. puede influir en la obtención de envolventes más o menos ajustadas y, por tanto, en la convergencia del algoritmo de cubrimiento. Se probará a continuación que es posible obtener una descomposición d.c. óptima para la aplicación del Algoritmo 1.18, en el sentido de que no puede conseguirse una convergencia más rápida al emplear cualquier otra descomposición. Para ello es preciso modificar ligeramente la definición de la función de cubrimiento k_i . Así, en lugar de (1.14), consideraremos

$$h_i(x) = f_1(x_i) + f'_1(x_i; x - x_i) - f_2(x) \quad (1.23)$$

donde $f'_1(x; y)$ denota la derivada direccional de f_1 en el punto x según la dirección y , es decir:

$$f'_1(x; y) = \begin{cases} f'_{1-}(x) y & \text{si } y < 0 \\ f'_{1+}(x) y & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

siendo f'_{1-} y f'_{1+} las derivadas laterales de f_1 a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Obsérvese que, dado un punto x_i , la función h_i mayor puntualmente a k_i de (1.14), cualquiera que sea el subgradiente considerado, por lo que la convergencia del algoritmo empleando las funciones h_i será al menos tan rápida como en el caso general en el que se utilizan las funciones k_i . Además, cuando f_1 es diferenciable en x_i , ambas coinciden.

Toda función f perteneciente a la clase \mathcal{D} de funciones d.c. reales y finitas, definidas sobre un intervalo abierto $J \supset I$, puede expresarse como diferencia de convexas, por lo que existen sus derivadas laterales y éstas son de variación acotada en I , ([103], página 227). Por tanto, dado un punto $\hat{x} \in I$ podemos considerar la siguiente descomposición d.c. de f , sugerida en [58]

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (1.24)$$

donde

$$f_1(x) = f(x) + f_2(x)$$

$$f_2(x) = \int_{\hat{x}}^x N(t) dt$$

y $N(x)$ es la variación negativa de f'_- (la derivada lateral a la izquierda de f) en el intervalo determinado por \hat{x} y x . Para nuestro propósito es indiferente considerar la derivada lateral a la derecha, como se probará posteriormente.

Con objeto de reflejar la dependencia de f_j , ($j = 1, 2$) con respecto al punto \hat{x} , escribiremos $f_j[\hat{x}](x)$ en lugar de $f_j(x)$. De manera análoga, la función de cubrimiento $h_i(x)$ definida en (1.23) para la descomposición d.c. (1.24) se notará $h_i[\hat{x}](x)$.

La elección de \hat{x} no es relevante desde el punto de vista de la implementación del Algoritmo 1.18, puesto que siempre se obtiene la misma envolvente, como puede deducirse del siguiente resultado. Con objeto de clarificar la demostración, $N_y(t)$ denotará la variación negativa de f'_- en el intervalo $[y, t]$, como función de t .

Lema 1.26 *Dada una función $f \in \mathcal{D}$ y un punto $x_i \in I$, se tiene que*

$$h_i[\hat{x}](x) = h_i[x_i](x) \quad \forall \hat{x}, x \in I$$

Demostración. Obsérvese en primer lugar que ([103], Teorema 24.2):

$$f'_1(x_i; x - x_i) = \begin{cases} f'_-(x_i)(x - x_i) + N_{\hat{x}}^-(x_i)(x - x_i) & \text{si } x < x_i \\ f'_+(x_i)(x - x_i) + N_{\hat{x}}^+(x_i)(x - x_i) & \text{si } x \geq x_i \end{cases}$$

siendo

$$N_{\hat{x}}^-(x_i) = \lim_{x \uparrow x_i} N_{\hat{x}}(x) \quad N_{\hat{x}}^+(x_i) = \lim_{x \downarrow x_i} N_{\hat{x}}(x)$$

Dado $x < x_i$ se verifica que:

$$\begin{aligned} h_i[\hat{x}](x) &= f_1[\hat{x}](x_i) + f'_{1-}[\hat{x}](x_i)(x - x_i) - f_2[\hat{x}](x) \\ &= f(x_i) + \int_{\hat{x}}^{x_i} N_{\hat{x}}(t)dt + f'_-(x_i)(x - x_i) + N_{\hat{x}}^-(x_i)(x - x_i) \\ &\quad - \int_{\hat{x}}^x N_{\hat{x}}(t)dt \\ &= f(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x N_{\hat{x}}(t)dt + N_{\hat{x}}^-(x_i)(x - x_i) \\ &= f(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x \{N_{\hat{x}}(t) - N_{\hat{x}}^-(x_i)\}dt \\ &= f(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x \{N_{x_i}(t) - N_{x_i}^-(x_i)\}dt \\ &= f(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) + N_{x_i}^-(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x N_{x_i}(t)dt \\ &= h_i[x_i](x) \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 N_{\hat{x}}(t) - N_{\hat{x}}^-(x_i) &= N_{\hat{x}}(t) + N_{\hat{x}}(x_i) - N_{\hat{x}}(x_i) - N_{\hat{x}}^-(x_i) \\
 &= N_{x_i}(t) + N_{\hat{x}}(x_i) - N_{\hat{x}}^-(x_i) \\
 &= N_{x_i}(t) - N_{x_i}^-(x_i)
 \end{aligned}$$

Análogamente se prueba la igualdad entre $h_i[\hat{x}]$ y $h_i[x_i]$ en el caso $x \geq x_i$. \square

Dado que las variaciones negativas de f'_- y f'_+ se diferencian a lo sumo en una constante sobre cada intervalo donde f es derivable, es inmediato comprobar que la función de cubrimiento $h_i[x_i]$ coincide en ambos casos, cualquiera que sea el punto $x_i \in I$ considerado. Por tanto, la variación negativa de f'_- puede reemplazarse en (1.24) por la variación negativa de f'_+ sin ninguna repercusión sobre el algoritmo.

El siguiente resultado establece la optimalidad de la descomposición (1.24) para la aplicación del Algoritmo 1.18, en el sentido de que, fijado $x_i \in I$, la función de cubrimiento \hat{h}_i que proporciona, mayor puntualmente a la correspondiente función de cubrimiento obtenida a partir de cualquier otra descomposición d.c. que se considere. De esta forma, el mínimo de la envolvente $E^{(n)}$ construida a partir de esta descomposición d.c. será mayor o igual que el de la envolvente obtenida a partir de cualquier otra descomposición.

Proposición 1.27 *Sea $f \in \mathcal{D}$ y $x_i \in I$. Entonces, la función de cubrimiento \hat{k}_i con punto base x_i determinada por la descomposición d.c. (1.24) verifica:*

$$\hat{k}_i(x) \geq k_i(x) \quad \forall x \in I$$

siendo k_i la función de cubrimiento con punto base x_i correspondiente a cualquier descomposición d.c. de f .

Demostración. Sea $f = (f+n) - n$ una descomposición d.c. de f y consideremos un punto $x < x_i$. Esta descomposición permite expresar f'_- como diferencia de dos funciones no decrecientes,

$$f'_- = (f'_- + n'_-) - n'_-$$

Haciendo uso de las propiedades de las funciones de variación acotada ([7], página 85), se tiene que:

$$N(t) \leq T_{n'_-}(t) = n'_-(t) - n'_-(x_i)$$

donde N representa la variación negativa de f'_- . Como n es convexa, integrando la expresión anterior entre x_i y x y teniendo en cuenta que el integrando es negativo en el intervalo $[x, x_i]$, se verificará, ([103], Corolario 24.2.1):

$$\int_{x_i}^x N(t)dt \leq n(x) - n(x_i) - n'_-(x_i)(x - x_i)$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} \hat{k}_i(x) &= f(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x N(t)dt \\ &\geq f(x_i) + n(x_i) + f'_-(x_i)(x - x_i) + n'_-(x_i)(x - x_i) - n(x) \\ &= k_i(x) \end{aligned}$$

Consideremos ahora un punto $x \geq x_i$; haciendo un razonamiento sobre f'_+ análogo al realizado con anterioridad, se tiene:

$$N(t) \leq T_{n'_+}(t) = n'_+(t) - n'_+(x_i)$$

donde ahora N representa la variación negativa de f'_+ . Integrando:

$$\int_{x_i}^x N(t)dt \leq n(x) - n(x_i) - n'_+(x_i)(x - x_i)$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} \hat{k}_i(x) &= f(x_i) + f'_+(x_i)(x - x_i) - \int_{x_i}^x N(t)dt \\ &\geq f(x_i) + n(x_i) + f'_+(x_i)(x - x_i) + n'_+(x_i)(x - x_i) - n(x) \\ &= k_i(x) \end{aligned}$$

quedando probado el resultado. □

Observación 1.28 La descomposición d.c. óptima no es única, pues basta sumar un término afín a cada función convexa de la representación para obtener otra descomposición óptima según el sentido expresado anteriormente, ya que ambas conducen a la misma función de cubrimiento. □

Si nos restringimos a la clase \mathcal{C}^2 de funciones dos veces continuamente diferenciables, la descomposición óptima adopta una expresión ya conocida en la literatura:

Proposición 1.29 Sea $f \in C^2$ en un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, la descomposición d.c. dada en la Proposición 1.10 es óptima en el sentido de la Proposición 1.27.

Demostración. La función f_2 de la Proposición 1.10 admite la siguiente expresión equivalente

$$\int_{x_0}^x (x-t)[f''(t)]^- dt = \int_{x_0}^x \left(\int_t^x [f''(t)]^- du \right) dt = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^u [f''(t)]^- dt \right) du$$

Teniendo en cuenta que la función $N(u) = \int_{x_0}^u [f''(t)]^- dt$ proporciona la variación negativa de f' en el intervalo $[x_0, u]$, se concluye a partir de (1.24) que la descomposición considerada es óptima. \square

El siguiente resultado prueba la optimalidad de la descomposición d.c. habitualmente utilizada para una función cóncava-convexa.

Proposición 1.30 Sea I un subconjunto convexo de \mathbb{R} y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\bar{x} \in I$ tal que $f(x)$ es cóncava para $x < \bar{x}$ y convexa para $x \geq \bar{x}$. Entonces, una descomposición d.c. óptima para f , en el sentido de la Proposición 1.27, viene dada por $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, siendo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) & \text{si } x < \bar{x} \\ f(x) & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) - f(x) & \text{si } x < \bar{x} \\ 0 & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

En particular, la descomposición d.c. dada en la Proposición 1.7 es óptima.

Demostración. Por ser f convexa si $x \geq \bar{x}$, su derivada lateral a la izquierda f'_- será no decreciente en cualquiera intervalo $[\bar{x}, x]$ y, por tanto, su variación negativa será nula en $[\bar{x}, x]$ para todo $x \geq \bar{x}$. Si $x < \bar{x}$, f'_- es no creciente por ser f cóncava, de donde se deduce que su variación negativa será $f'(\bar{x}) - f'_-(x)$. La función f_2 de la descomposición óptima (1.24) quedará, por tanto:

$$f_2(x) = \int_{\bar{x}}^x N(t) dt = \begin{cases} f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) - f(x) & \text{si } x < \bar{x} \\ 0 & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

obteniéndose la descomposición buscada.

Además, sumando el término afín $-\frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}))$ a cada función convexa de la descomposición, se obtiene la representación d.c. dada en la Proposición 1.7, por lo que ésta también será óptima, en virtud de la Observación 1.28. \square

1.5.2.1 No existencia de descomposición óptima en el caso multidimensional

Desafortunadamente, la obtención de una descomposición óptima (en el sentido considerado en la Proposición 1.27) no va a ser posible en general en el caso $m > 1$. En efecto, dado $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$ se considera la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada en [58] y definida por $f(x, y) = xy$. Para $\varepsilon > 0$, una descomposición de f viene dada por $f = (f + g) - g$, con $g(x, y) = \frac{1}{2}(\varepsilon x^2 + y^2/\varepsilon)$, lo que proporciona la función de cubrimiento (con punto base el origen de coordenadas) $k(x, y) = -g(x, y)$. Suponiendo cierta la existencia de una descomposición óptima $f = (f + G) - G$, su función de cubrimiento k^* deberá verificar $k^*(x, y) \geq k(x, y) \quad \forall (x, y) \in I$. En particular:

$$\begin{aligned} k^*(x, 0) &\geq -\frac{1}{2}\varepsilon x^2 && \forall x \in [-1, 1] \\ k^*(0, y) &\geq -\frac{1}{2}y^2/\varepsilon && \forall y \in [-1, 1] \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$k^*(x, 0) \geq 0 \quad k^*(0, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

Estas desigualdades, junto con la concavidad de k^* y el hecho de que $k^*(0, 0) = 0$, nos permiten concluir que k^* debe ser la función nula. En efecto:

$$\begin{aligned} k^*(0, 0) &\geq \frac{1}{2}k^*(x, 0) + \frac{1}{2}k^*(-x, 0) && \implies k^*(x, 0) = 0 && \forall x \in [-1, 1] \\ k^*(0, 0) &\geq \frac{1}{2}k^*(0, y) + \frac{1}{2}k^*(0, -y) && \implies k^*(0, y) = 0 && \forall y \in [-1, 1] \\ k^*(x, y) &\geq \frac{1}{2}k^*(2x, 0) + \frac{1}{2}k^*(0, 2y) && \implies k^*(x, y) \geq 0 && \forall (x, y) \in I \\ k^*(0, 0) &\geq \frac{1}{2}k^*(x, y) + \frac{1}{2}k^*(-x, -y) && \implies k^*(x, y) = 0 && \forall (x, y) \in I \end{aligned}$$

Por ser k^* nula, se obtiene a partir de (1.23) que G debe ser una función afín; la convexidad de $f + G$ llevaría a concluir que f es una función convexa, lo cual supone una contradicción.

1.5.3 Descomposición óptima para composición de d.c. y afín

A pesar de que no puede garantizarse en general la existencia de una descomposición d.c. óptima cuando $m > 1$, en el caso particular en que f resulta de la composición de una función d.c. univariable y una función afín, tal descomposición óptima existe y puede obtenerse a partir de una representación óptima de la primera. Para ello es preciso utilizar como función de cubrimiento la dada en (1.23), lo cual no plantea problemas de cálculo en lo referente a la derivada direccional, pues éste se relaciona fácilmente con la correspondiente a la función univariable. El siguiente resultado proporciona tal descomposición óptima

Lema 1.31 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y convexo y $h : I \mapsto \mathbb{R}$ una función d.c. con descomposición d.c. óptima $h = f - g$ en el sentido de la Proposición 1.27. Entonces, dados $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}$ y $J \subset \mathbb{R}^m$ abierto y convexo, con $\{\langle a, x \rangle + b : x \in J\} \subset I$, la función $H : J \mapsto \mathbb{R}$ definida por $H(x) = h(\langle a, x \rangle + b)$ es d.c. y una descomposición d.c. óptima viene dada por:*

$$H(x) = f(\langle a, x \rangle + b) - g(\langle a, x \rangle + b) \quad \forall x \in J \quad (1.25)$$

Demostración. Las funciones $F(x) = f(\langle a, x \rangle + b)$ y $G(x) = g(\langle a, x \rangle + b)$ son convexas, por ser composición de convexa y afín. Si $a = 0$ el resultado es trivial, pues en tal caso la envolvente obtenida a partir de (1.25) coincide con H ; por tanto, puede suponerse $a \neq 0$. Sea $H = R - S$ otra descomposición d.c. para H y consideremos las funciones convexas

$$\tilde{R}(y) = R\left((y - b)\frac{a}{\|a\|^2}\right) \quad \tilde{S}(y) = S\left((y - b)\frac{a}{\|a\|^2}\right)$$

Entonces, $\tilde{R} - \tilde{S}$ constituye una descomposición d.c. para h ya que:

$$\tilde{R}(y) - \tilde{S}(y) = R\left((y - b)\frac{a}{\|a\|^2}\right) - S\left((y - b)\frac{a}{\|a\|^2}\right) = H\left((y - b)\frac{a}{\|a\|^2}\right) = h(y)$$

Para probar la optimalidad de la descomposición (1.25) consideremos un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ arbitrario, así como $\bar{y} = \langle a, \bar{x} \rangle + b$. Dado que $f - g$ es una descomposición óptima para h , se tendrá:

$$f(\bar{y}) + f'(\bar{y}; y - \bar{y}) - g(y) \geq \tilde{R}(\bar{y}) + \tilde{R}'(\bar{y}; y - \bar{y}) - \tilde{S}(y) \quad (1.26)$$

Obsérvese que

$$f'(\bar{y}; y - \bar{y}) = F'(\bar{x}; x - \bar{x}) \quad \tilde{R}'(\bar{y}; y - \bar{y}) = R'(\bar{x}; x - \bar{x})$$

por lo que, desarrollando (1.26) y haciendo $y = \langle a, x \rangle + b$, se obtiene:

$$f(\langle a, \bar{x} \rangle + b) + F'(\bar{x}; x - \bar{x}) - g(\langle a, x \rangle + b) \geq R(\bar{x}) + R'(\bar{x}; x - \bar{x}) - S(x)$$

lo cual prueba el resultado. \square

1.6 Experiencia Computacional

En esta sección se presentan algunos resultados numéricos que muestran cómo la elección de la descomposición d.c. utilizada en (1.14) puede tener gran influencia en la convergencia del algoritmo.

El rendimiento del Algoritmo 1.18 ha sido analizado usando un conjunto de problemas test recogidos en [14, 51] y frecuentemente utilizados en la literatura.

La Tabla 1.2 muestra el número de iteraciones empleado por diferentes métodos de optimización global para la resolución de 20 problemas unidimensionales tomados de [51] y que aparecen recogidos en la Tabla 1.1.

Estos resultados computacionales (exceptuando los correspondientes al algoritmo de cubrimiento d.c.) han sido tomados de [111], donde se ha utilizado el valor exacto de las constantes L y K de los algoritmos de Piyavskii y Breiman-Cutler, respectivamente.

La implementación del algoritmo de cubrimiento d.c. ha sido realizada empleando en todos los casos la descomposición óptima dada por la Proposición 1.27; el punto inicial utilizado en el algoritmo ha sido siempre el punto medio del intervalo. Sólo se proporciona el número de iteraciones debido a que los tiempos de CPU para la resolución de estos problemas son despreciables.

Resulta interesante la comparación con los algoritmos de Piyavskii y Breiman-Cutler, ya que los tres comparten la misma estructura. En particular, se observa la influencia que tiene sobre la convergencia la elección de una descomposición d.c. adecuada. Por otra parte, los algoritmos de Gergel y Sergeyev requieren un número de iteraciones pequeño (aunque siempre superior al aquí considerado), pero su estructura hace que el esfuerzo computacional necesario para la ejecución de cada iteración sea notablemente superior al requerido por los algoritmos de cubrimiento.

También se han considerado como ejemplo 3 problemas multidimensionales recogidos en [14, 30]: COS2, COS4 y H3.

Nº	Función	Intervalo	Soluciones óptimas	V. objetivo óptimo f^*
1	$-\frac{1}{6}x^6 + \frac{52}{25}x^5 - \frac{39}{80}x^4 - \frac{71}{10}x^3 + \frac{79}{20}x^2 + x - \frac{1}{10}$	$[-1.5, 11]$	10	29763.23
2	$-\sin x - \sin \frac{10}{3}x$	$[2.7, 7.5]$	5.14573	1.89959
3	$\sum_{k=1}^5 k \sin[(k+1)x + k]$	$[-10, 10]$	-6.77457 -0.49139 5.79179	12.03124
4	$(16x^2 - 24x + 5)e^{-x}$	$[1.9, 3.9]$	2.86803	3.85045
5	$(-3x + 1.4) \sin 18x$	$[0, 1.2]$	0.96608	1.48907
6	$(x + \sin x)e^{-x^2}$	$[-10, 10]$	0.67956	0.82423
7	$-\sin x - \sin \frac{10}{3}x - \ln x + 0.84x - 3$	$[2.7, 7.5]$	5.19997	1.6013
8	$\sum_{k=1}^5 k \cos[(k+1)x + k]$	$[-10, 10]$	-7.0835 -0.8003 5.48286	14.508
9	$-\sin x - \sin \frac{2}{3}x$	$[3.1, 20.4]$	17.039	1.90596
10	$x \sin x$	$[0, 10]$	7.9787	7.91673
11	$-2 \cos x - \cos 2x$	$[-1.57, 6.28]$	2.0944 4.1888	1.5
12	$-\sin^3 x - \cos^3 x$	$[0, 6.28]$	4.712	1
13	$x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$	$[0.001, 0.99]$	0.7071	1.5874
14	$e^{-x} \sin 2\pi x$	$[0, 4]$	0.22488	0.78868
15	$(-x^2 + 5x - 6)/(x^2 + 1)$	$[-5, 5]$	2.4142	0.03553
16	$-2(x-3)^2 - e^{x^2/2}$	$[-3, 3]$	1.5907	-7.51592
17	$-x^6 + 15x^4 - 27x^2 - 250$	$[-4, 4]$	-3 3	-7
18	$\begin{cases} -(x-2)^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2 \ln(x-2) - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$	$[0, 6]$	2	0
19	$x - \sin 3x + 1$	$[0, 6.5]$	5.87287	7.81567
20	$(x - \sin x)e^{-x^2}$	$[-10, 10]$	1.195137	0.06349

Tabla 1.1: Optimización d.c. univariante: Funciones test

Nº	Piyavskii	Strongin [113]	Breiman Cutler	Gergel [45, 111]	Sergeyev [111]	Cubrimiento d.c.
1	149	127	25	27	23	12
2	155	135	21	27	25	14
3	195	224	103	98	90	54
4	413	379	24	27	21	14
5	151	126	32	23	28	15
6	129	112	37	39	35	11
7	153	115	24	25	23	15
8	185	188	85	88	81	53
9	119	125	24	26	24	14
10	203	157	24	25	22	14
11	373	405	44	41	39	28
12	327	271	42	37	32	29
13	993	472	264	89	47	15
14	145	108	29	30	29	13
15	629	471	80	47	29	16
16	497	557	88	75	34	15
17	549	470	67	65	46	26
18	303	243	19	21	22	14
19	131	117	20	21	20	14
20	493	81	30	32	31	11

Tabla 1.2: Optimización d.c. univariante: Número de iteraciones

i	a_{ij}			c_i	p_{ij}		
1	3.0	10	30	1.0	0.3689	0.1170	0.2673
2	0.1	10	35	1.2	0.4699	0.4387	0.7470
3	3.0	10	30	3.0	0.1091	0.8732	0.5547
4	0.1	10	35	3.2	0.03815	0.5743	0.8828

Tabla 1.3: Coeficientes para la función H_3

Función COS m

$$f(x) = \sum_{i=1}^m x_i^2 - 0.1 \sum_{i=1}^m \cos(5\pi x_i)$$

- Región de definición: $-1 \leq x_i \leq 1$ para $i = 1, \dots, m$.
- Punto inicial: $x_i = 0.5$ para $i = 1, \dots, m$.
- Número de mínimos locales: 25 (COS2), 625 (COS4)

Función H3

$$f(x) = - \sum_{i=1}^4 c_i \exp\left(- \sum_{j=1}^3 a_{ij} (x_j - p_{ij})^2\right)$$

- Región de definición: $0 \leq x_j \leq 1$ para $j = 1, 2, 3$.
- Punto inicial: $x_1 = 0.6, x_2 = 0.7, x_3 = 0.8$
- Número de mínimos locales: 3
- Los coeficientes a_{ij}, p_{ij} y c_i figuran en la Tabla 1.3

La representación d.c. para las funciones COS2 y COS4 se ha obtenido utilizando la descomposición de la Proposición 1.10 para cada término de estas funciones, mientras que para la función H3, la descomposición d.c. utilizada se basa en la Proposición 3.5 de [122] (que es un caso particular de la Proposición 1.11). La regla de parada del Algoritmo 1.18 ha sido sustituida en este caso por la utilizada en el algoritmo de Breiman-Cutler, [14], habiéndose empleado los niveles de tolerancia ε_1 y ε_2 allí indicados.

Ejemplo	Breiman-Cutler			Cubrimiento d.c.		
	Iter.	CPU Tiempo est.	CPU Seg.	Iter.	CPU Tiempo est.	CPU Seg.
COS2	77	2.6404	0.0059	27	1.7696	0.0040
COS4	1392	1416.7967	3.1776	201	250.8309	0.5748
H3	2575	443.2186	1.0094	442	117.6784	0.2648

Tabla 1.4: Optimización d.c. multidimensional: Resultados computacionales

La Tabla 1.4 muestra el número de iteraciones y el tiempo de CPU (medido en unidades de tiempo estándar, [32], y segundos) empleado tanto por el algoritmo de Breiman-Cutler como por el algoritmo de cubrimiento d.c. en la resolución de estos problemas. Con respecto a la utilización del tiempo estándar para la comparación de algoritmos, nuestra experiencia indica que se trata de un indicador fuertemente dependiente del tipo de CPU sobre el que se efectúe la medida, como ya ha sido apuntado en [14, 30]. Incluso arquitecturas similares (Pentium-200 MMX y Pentium-133) producen resultados bien diferentes.

Aunque el Algoritmo 1.18 para funciones d.c. permite la resolución de problemas multidimensionales, los resultados obtenidos indican que sólo va a ser eficiente cuando la dimensión sea baja (a lo sumo 6 en la mayoría de los casos), ya que tanto el número de iteraciones como los requerimientos de memoria se incrementan rápidamente con ésta. De hecho, el algoritmo ha demostrado ser ineficiente ya en algunos problemas en dimensión 3. Tal comportamiento no es de extrañar, teniendo en cuenta que se trata de un algoritmo de aproximación exterior.

Por último, indicar que la implementación del Algoritmo 1.18 ha sido realizada en lenguaje Fortran-90 en un ordenador personal equipado con un microprocesador Pentium-MMX a 200 Mhz. y 16 Megabytes de memoria RAM.

1.7 Estimación de Máxima Verosimilitud en la Distribución de Cauchy

Como ejemplo de aplicación de los métodos de cubrimiento en optimización d.c. consideraremos el problema de la estimación de máxima verosimilitud del parámetro de localización de la distribución de Cauchy uniparamétrica, cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \theta)^2} \quad x, \theta \in \mathbb{R}$$

Dada una muestra aleatoria simple x_1, \dots, x_n , el logaritmo de la función de verosimilitud para tal distribución resulta ser

$$L(\theta) = -n \log \pi - \sum_{1 \leq i \leq n} \log(1 + (x_i - \theta)^2) \quad (1.27)$$

La determinación del parámetro de localización θ conduce a un problema de optimización global, como puede apreciarse en las Figuras 1.5 y 1.6. De hecho, si las observaciones se encuentran suficientemente alejadas entre sí, (1.27) puede presentar un máximo local en cada $\theta = x_i$, [6, 40]. La resolución de este problema empleando métodos determinísticos ha sido llevada a cabo en [130] por medio de un algoritmo debido a Brent, [15], que no utiliza derivadas en las diferentes iteraciones, aunque sí requiere una cota de la derivada segunda de la función de verosimilitud. Posteriormente, Breiman y Cutler, [14], mejoran los resultados obtenidos con anterioridad utilizando un algoritmo de cubrimiento que hace uso de las funciones k_i^{BrC} de (1.12).

Sin embargo, la eficiencia de los métodos de resolución anteriores se ve ampliamente superada al considerar el Algoritmo 1.18 con una representación d.c. conveniente, como se verá a continuación. Así, una descomposición d.c. óptima (en el sentido de la Proposición 1.27) para cada sumando $f_i(\theta) = \log(1 + (x_i - \theta)^2)$ de (1.27) resulta ser $f_i = f_i^+ - f_i^-$, siendo

$$f_i^+(\theta) = \begin{cases} \log 2 + x_i - 1 - \theta & \theta < x_i - 1 \\ \log(1 + (x_i - \theta)^2) & x_i - 1 \leq \theta \leq x_i + 1 \\ \log 2 - x_i - 1 + \theta & \theta > x_i + 1 \end{cases}$$

1.7 Estimación de Máxima Verosimilitud en la Distribución de Cauchy

A	3	7	12	17						
B	2	5	7	8	11	15	17	21	23	26
C	4.1	7.7	17.5	31.4	32.7	92.4	115.3	118.3	119.0	129.6
	198.6	200.7	242.5	255.0	274.7	274.7	303.8	334.1	430.0	489.1
	703.4	978.0	1656.0	1697.8	2745.6					
D	952.1	987.0	992.7	994.1	994.5	995.1	996.0	997.9	998.0	998.6
	998.7	998.7	998.8	998.8	998.9	998.9	999.0	999.1	999.3	999.3
	999.3	999.4	999.4	999.5	999.7	999.8	999.8	999.9	999.9	1000.0
	1000.0	1000.0	1000.1	1000.1	1000.2	1000.3	1000.3	1000.5	1000.5	1000.6
	1000.7	1001.0	1001.2	1001.3	1002.0	1002.1	1005.2	1007.3	1011.6	1047.9
E	74.3	141.4	188.0	298.6	327.1	364.0	439.3	550.7	582.5	583.1
	598.2	605.6	606.4	702.3	714.3	755.2	759.7	765.2	835.8	858.1
	860.4	861.4	1029.3	1148.8	1162.8	1243.9	1309.9	1312.2	1347.2	1359.6
	1383.0	1414.9	1518.1	1559.2	1562.3	1594.7	1618.0	1626.1	1640.2	1737.8
	1762.3	1766.6	1773.3	1850.8	1857.8	1922.6	2072.3	2080.6	2104.7	2163.6
	2243.5	2306.3	2314.1	2374.1	2375.0	2530.4	2550.4	2571.8	2579.1	2683.5
	2837.0	2855.8	2893.3	2895.6	2904.4	2959.2	3009.0	3045.3	3115.6	3138.2
	3145.2	3252.3	3351.2	3447.8	3539.9	3639.6	3670.9	3687.2	3702.8	3796.5
	3824.8	3864.0	3934.3	3982.5	4007.2	4013.4	4071.3	4146.8	4151.2	4225.7
	4261.1	4273.0	4497.1	4599.1	4606.8	4607.8	4747.2	4809.4	4877.8	4905.2

Tabla 1.5: Datos para E.M.V. de la distribución de Cauchy

Esto da como resultado la siguiente descomposición d.c. para (1.27):

$$L(\theta) = \left(-n \log \pi + \sum_{1 \leq i \leq n} f_i^- \right) - \sum_{1 \leq i \leq n} f_i^+ \quad (1.28)$$

Atendiendo a su construcción, es de esperar que esta descomposición presente un buen rendimiento al ser utilizada en el Algoritmo 1.18.

La Tabla 1.6 muestra el número de iteraciones empleado por el algoritmo de cubrimiento d.c. con la descomposición (1.28) y los anteriormente indicados, para los 3 conjuntos de datos recogidos en [130] y dos conjuntos de datos adicionales (Tabla 1.5). El logaritmo de las funciones de verosimilitud correspondientes a estos conjuntos de datos se muestra en las Figuras 1.5 y 1.6.

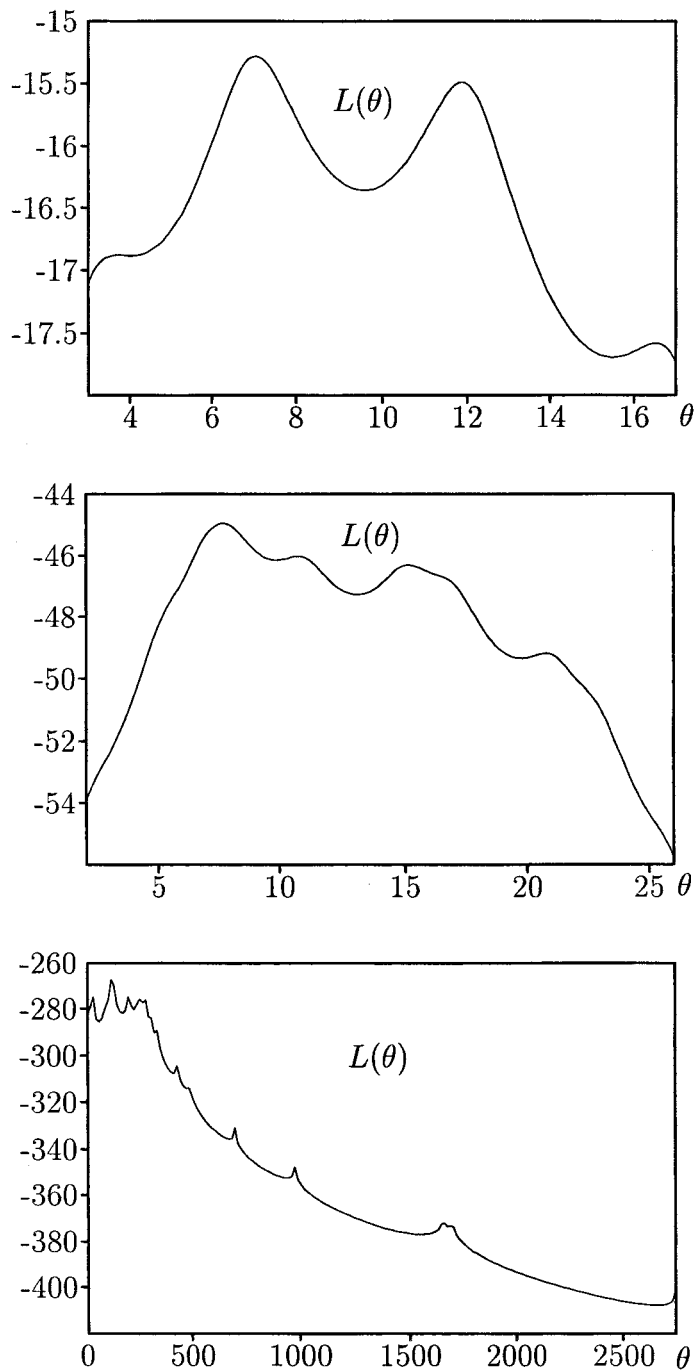


Figura 1.5: Función de Verosimilitud Muestras A, B y C

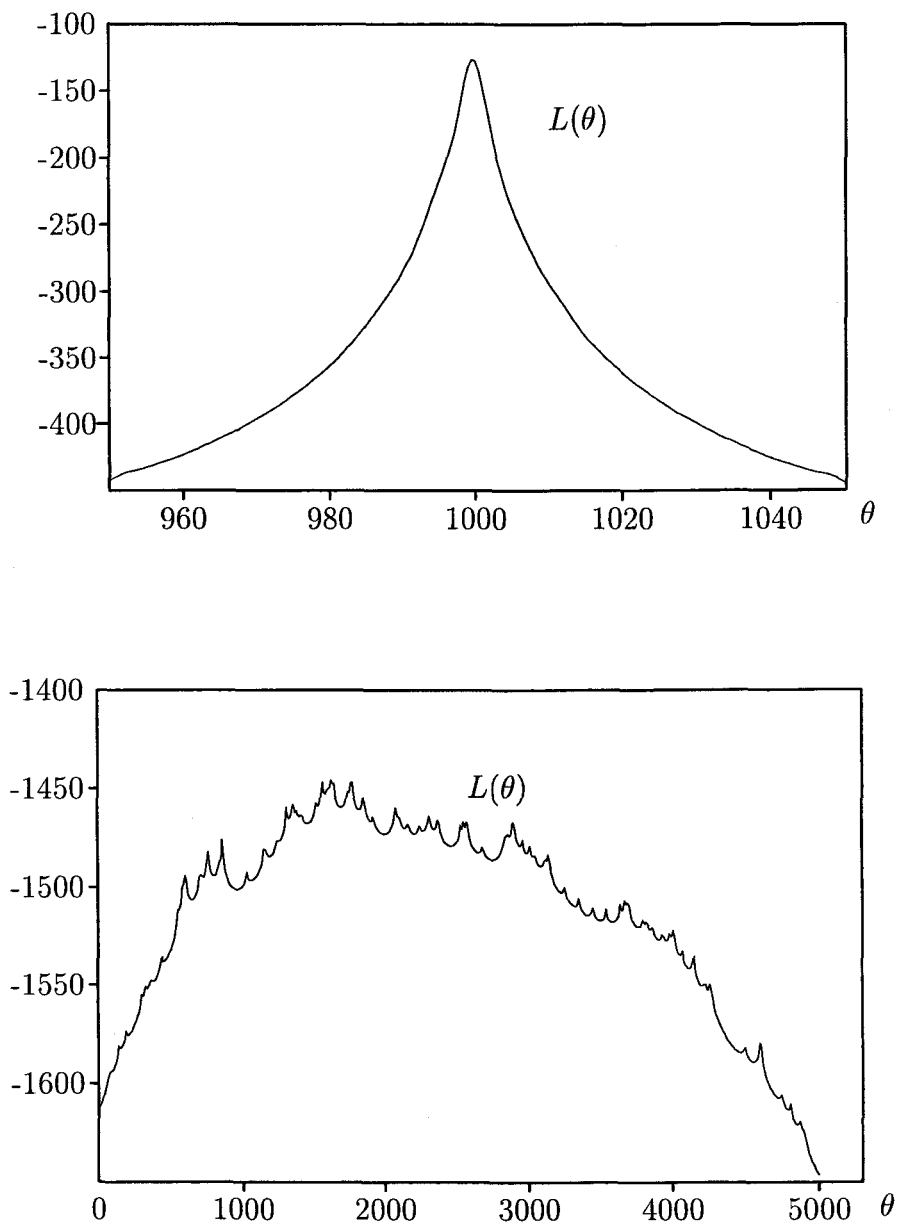


Figura 1.6: Función de Verosimilitud Muestras D y E

Muestra	Tamaño	Intervalo	Punto	Número de Iteraciones		
	Muestral		Inicial	Wingo	Breiman-Cutler	Algoritmo 1.18
A	4	[3,17]	9.5	71	16	12
B	10	[2,26]	13.0	107	21	12
C	25	[4.1,2745.6]	242.5	1048	391	23
D	50	[952.1,1047.9]	999.5	-	20	11
E	100	[74.3,4905.2]	2332.1	-	1919	63

Tabla 1.6: Resultados computacionales para E.M.V. de la distribución de Cauchy

En esta implementación del Algoritmo 1.18, la regla de parada indicada en su descripción ha sido reemplazada por el criterio empleado en el algoritmo de Breiman-Cutler. En todos los casos, el conjunto inicial elegido ha sido

$$\left[\min_{1 \leq i \leq n} x_i, \max_{1 \leq i \leq n} x_i \right]$$

pues se tiene garantizado que la solución óptima pertenece a este intervalo, [6]. Aunque el punto inicial puede ser cualquier valor del intervalo considerado, se ha seleccionado en todos los casos la media muestral, ya que las simulaciones realizadas por Barnett, [6], indican que el máximo global de la función de verosimilitud es, con frecuencia, el máximo local más próximo a la media muestral. Por último, indicar que la constante K del algoritmo de Breiman-Cutler que se ha empleado ha sido en todos los casos la óptima, a saber, $n/8$, [30].

La comparación de los resultados del Algoritmo 1.18 con los proporcionados por el método de Breiman-Cutler es especialmente interesante, por responder ambos a un esquema común; de hecho, se ha probado con anterioridad que este último es una caso particular del Algoritmo 1.18 usando una descomposición d.c. específica. Estos resultados vuelven a poner de manifiesto que la elección de la representación d.c. puede influir notoriamente sobre la velocidad de convergencia del algoritmo.

Capítulo 2

Localización de un Servicio Semi-Repulsivo

2.1 Introducción

La Teoría de Localización, desde sus orígenes en el siglo XVII, ha tratado principalmente el problema de determinar la ubicación de un nuevo servicio de forma que se encuentre situado lo más cerca posible de sus usuarios potenciales. Así, como ejemplo clásico podemos citar el denominado problema de Fermat-Weber, ampliamente estudiado en la literatura, (véase, por ejemplo, [80]), en el que se trata la localización de un servidor de tal manera que la suma de las distancias ponderadas desde éste a un conjunto de puntos de demanda dados sea mínima.

Sin embargo, en el mundo real es fácil encontrar situaciones en las que el servidor, además de atender la demanda del conjunto de usuarios, ejerce un efecto perjudicial o molesto sobre los residentes en puntos próximos a su lugar de instalación, [24]. Los usuarios (puntos de demanda) consideran *atractiva* la localización en su proximidad del nuevo servicio, mientras que para los núcleos de población próximos, éste tiene la consideración de *repulsivo* o peligroso. El impacto negativo causado por el servidor requiere que éste se ubique "lo más lejos posible" de los residentes, pero al mismo tiempo cerca de sus usuarios, para minimizar así los costos de servicio.

2.1.1 Localización con Regiones Prohibidas

Los modelos clásicos para la localización de servicios puramente atractivos pueden ser fácilmente modificados para tener en consideración el efecto perjudicial o molesto de éstos. Un primer enfoque vendría dado por los denominados *Modelos de Localización con Regiones Prohibidas*, en los que la función objetivo refleja el carácter atractivo de los servicios con respecto a los puntos de demanda, mientras que el carácter repulsivo se incorpora al modelo obligando a que la ubicación de los servidores se realice fuera de las regiones en que se encuentran los individuos negativamente afectados.

Debe tenerse en cuenta que los modelos considerados no sólo permiten abordar la localización de servicios semi-repulsivos, sino que también posibilitan el tratamiento de todas aquellas situaciones (muy frecuentes en la práctica) en que aparecen restricciones sobre el conjunto de posibles ubicaciones para los nuevos servidores que se desean establecer, debido a la existencia de accidentes geográficos, reservas naturales, regiones ya ocupadas, restricciones legales, etc. Aunque es clara la importancia de tales restricciones, no ha sido hasta fechas recientes cuando se han comenzado a tener en cuenta en Teoría de Localización, incorporándose a los modelos existentes (véase [99] para una revisión crítica del estado actual).

Para el problema de localización de un único servicio dentro de este enfoque, se han considerado tradicionalmente dos formulaciones distintas: el denominado problema de Weber (problema de la mediana o problema *minisum*) con restricciones,

$$\min_{x \in F} \sum_{i=1}^n \omega_i \|x - a_i\| \quad (2.1)$$

y el problema de Rawls (problema del centro o problema *minimax*) con restricciones,

$$\min_{x \in F} \max_{1 \leq i \leq n} \omega_i \|x - a_i\| \quad (2.2)$$

En ambos casos, $F \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto de posibles ubicaciones para el nuevo servicio, a_i representa cada uno de los puntos de demanda existentes, $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^2 y ω_i es un peso no negativo que indica la importancia relativa del i -ésimo punto de demanda. Con respecto a la región factible, es necesario indicar que ésta puede venir dada también en forma negativa, es decir, definida a través de la región prohibida, considerando su complementario. Esto hace que en la literatura puedan encontrarse

referencias al modelo como *Problema con restricciones* y también como *Problema con regiones prohibidas*.

En [68], Hurter *et al.* tratan la introducción de restricciones en el denominado *Problema de Weber Generalizado*, en el que los costos de transporte no dependen linealmente de la distancia, sino que vienen dados por funciones no decrecientes y semicontinuas inferiormente definidas en $[0, \infty)$. Supuesta la convexidad de la región factible y las funciones de costo, prueban que, para cada solución óptima del problema no restringido, existe una solución óptima del problema restringido visible desde la primera.

Hansen *et al.*, [56], abordan el problema de Weber generalizado cuando la región factible está formada por la unión de un número finito de polígonos convexos. Para la resolución de este problema proponen un algoritmo que hace uso de búsquedas locales sobre la frontera de los polígonos que componen la región factible. Para el caso en que ésta viene determinada por la intersección de círculos centrados en los puntos de demanda, Watson-Gandy, [126], propone un algoritmo coincidente en gran parte con el propuesto anteriormente por Hansen *et al.*, [55], que es extendido al problema de localización de múltiples servicios.

En [54], Hansen *et al.* consideran los problemas *minisum* y *minimax* con normas L_p mixtas, funciones de costo crecientes y continuas (no necesariamente convexas) y región factible formada por la unión de un número finito de polígonos convexos; para el primero de ellos proponen el método denominado *Big Square-Small Square* (BSSS), un algoritmo de ramificación y acotación que ha llegado a ser muy popular en el ámbito de la Teoría de Localización, posteriormente generalizado por Plastria, [97]. Para el problema *minimax* (aunque también podría haberse empleado el algoritmo BSSS) proponen un procedimiento iterativo que, partiendo de la solución óptima x^* del problema no restringido, suprime sucesivamente aquellos polígonos que no pueden contener la solución óptima.

Thach *et al.*, [118], consideran el siguiente problema, que tiene cabida dentro de los modelos de localización con regiones prohibidas:

$$\min\{f(x) : x \in G, T(x) \notin \text{int}(D)\}$$

donde $G \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto, $D \subset \mathbb{R}^2$ es un convexo cerrado con interior no vacío, $f : G \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa y $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^2$ es una función continua. Para su

resolución, lo transforman en un problema de minimización cuasicóncava sobre un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^2 y proponen un algoritmo de aproximación exterior.

Aneja y Parlar [1] tratan el problema de Weber con normas L_p ($1 < p \leq 2$) y regiones prohibidas cuya frontera viene dada por segmentos rectos. Para el caso de región prohibida convexa proponen un algoritmo que permite la eliminación de aristas de la frontera que no pueden contener la solución óptima, debiendo efectuarse una búsqueda sobre cada arista no eliminada; en el caso no convexo, proponen la eliminación de aristas usando el concepto de visibilidad. En este trabajo también se trata un problema relacionado, en el que las regiones prohibidas no pueden ser atravesadas, además de no poder ser utilizadas para ubicar el nuevo servicio. Éste es también el problema considerado en [74].

Brimberg y Wesolowsky [18] consideran el problema *minisum* con distancia rectangular, en el que la región prohibida está formada nuevamente por la unión de círculos centrados en los puntos de demanda. La resolución del modelo se realiza por medio de un algoritmo de ramificación y acotación.

Las dos formulaciones del problema consideradas (minimax y minisum) también han sido tratadas en [48], proponiendo para su resolución el empleo de curvas y conjuntos de nivel. Previamente, en [47] se aplican las mismas técnicas para el problema de Weber con normas L_1 , L_2^2 y L_∞ , suponiendo que la región prohibida es la unión de un número finito de polígonos convexos. El enfoque basado en curvas y conjuntos de nivel de [47, 48] es también empleado en [90] para el problema *minimax* con calibradores poliédricos, proponiéndose un algoritmo de resolución. En este trabajo se realiza un estudio particular del problema con norma L_1 , que da lugar a un procedimiento específico de resolución, trasladable al problema con norma L_∞ .

En [121] se aborda el problema *minisum* desde un punto de vista mucho más general. Así, la función objetivo a minimizar allí considerada es $\sum_{i=1}^n q_i[h_i(x)]$, siendo $q_i : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ funciones cóncavas crecientes tales que su derivada lateral a la derecha en cero verifica $q'_{i+}(0) < +\infty$, y $h_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^+$ funciones convexas verificando que $\lim_{\|x\| \mapsto +\infty} h_i(x) = +\infty$. El conjunto factible para este problema es un polígono convexo de \mathbb{R}^2 con una región prohibida formada por la unión finita de conjuntos convexos abiertos. Como método más eficiente para su resolución se propone un algoritmo de ramificación y acotación (bidimensional), aprovechando el carácter d.c. del problema resultante.

El modelo que se propondrá posteriormente en la Sección 2.2 para el problema de localización de un servidor con regiones prohibidas, es más general que los propuestos por Tuy, [121], y Thach *et al.*, [118], tanto en el objetivo considerado (sólo en el primer caso) como en las regiones prohibidas admisibles, contando con la ventaja adicional de que la localización óptima se determina mediante la resolución de problemas de optimización d.c. univariantes.

2.1.2 El Problema de Weber con Atracción y Repulsión

Otro ejemplo de integración del carácter repulsivo del servicio a localizar en un modelo ya existente, lo proporciona el que se obtiene al añadir a la función objetivo del problema de Weber los elementos negativamente afectados, asociándoles pesos negativos; esto permite determinar la ubicación del servidor que proporciona una situación de equilibrio entre *atracción* y *repulsión*. El modelo resultante se denomina *Problema de Weber con atracción y repulsión*, y puede formularse de la siguiente forma:

$$\min_{F \in S} \left\{ \sum_{a \in A^+} \omega_a d(F, a) - \sum_{a \in A^-} \varphi_a d(F, a) \right\} \quad (2.3)$$

donde A^+ y A^- representan, respectivamente, los conjuntos de puntos que sienten atracción (usuarios o puntos de demanda) y repulsión (residentes) hacia el nuevo servicio, y d es cualquier distancia en el plano. Los pesos $\omega_a \geq 0$ y $-\varphi_a \leq 0$ indican la variación que sufre el costo (de servicio o social) por unidad de distancia. El conjunto de puntos factibles S puede ser, en principio, cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 .

La utilización de pesos negativos en el problema de Weber fue considerada por primera vez por Tellier, [116], en el estudio del problema con dos puntos atractivos y uno repulsivo. Posteriormente, Tellier y Polanski, [117], consideran tres puntos de demanda y analizan estadísticamente los diferentes tipos de soluciones que pueden presentarse. Algunos resultados sobre existencia y localización de soluciones óptimas pueden encontrarse en [27, 33, 96].

En lo referente a métodos de obtención de soluciones óptimas, Drezner y Wesolowsky [33] resuelven el problema (2.3) de forma exacta cuando se considera el cuadrado de la distancia euclídea, y también en el caso unidimensional. Para el caso de la distancia euclídea, proponen dos heurísticos basados en el algoritmo de

Weiszfeld [128]. También determinan una condición suficiente para que un punto $a \in A^+ \cup A^-$ sea un óptimo local y, basándose en ella, proponen otro algoritmo heurístico para la resolución del problema con distancia euclídea (siempre en el caso irrestringido).

El primer procedimiento exacto de resolución es debido a Chen *et al.*, [27], quienes transforman (2.3) en un problema de minimización cóncava, empleando posteriormente para su resolución un algoritmo de aproximación exterior. Conviene destacar que este procedimiento es válido cualquiera que sea el conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^2$, y que puede extenderse fácilmente al caso en que S viene dado por la unión de un número finito de polígonos convexos.

Con posterioridad, Maranas y Floudas [82] proponen dos algoritmos de ramificación y acotación para la resolución de (2.3), en los que se aprovecha el carácter d.c. de la función objetivo. En el primero de ellos, la acotación se realiza por medio de una función cóncava, resultado de linealizar la parte convexa de la función objetivo. El segundo algoritmo propuesto utiliza una acotación alternativa, con un mayor costo computacional, en caso de que la cota proporcionada por el método anterior no sea válida; esta nueva acotación se basa en la construcción de una función convexa que acote inferiormente a la componente cóncava de la función objetivo. En ambos casos, el proceso de ramificación se basa en la división de un rectángulo inicial en 4 subrectángulos.

En [123], Tuy, Al-Khayyal y Zhou consideran un modelo más general que el de (2.3), en el que los costos vienen dados por funciones cóncavas crecientes de la distancia y la región factible es un polígono convexo de \mathbb{R}^2 . Tras probar que la función objetivo es d.c., proponen un algoritmo de ramificación y acotación para su resolución, en el que se hace uso de un esquema de subdivisión triangular.

En el Capítulo 3 se considerará un modelo de localización de un servicio semi-repulsivo fuera de una red de transporte, que responde al esquema del problema de Weber con atracción y repulsión.

2.1.3 Modelos multicriterio

Un enfoque distinto para la localización de un servicio semi-repulsivo se obtiene al considerar en el modelo el *carácter multicriterio* del problema. Así, el carácter atractivo del servicio quedaría reflejado en un primer objetivo, en el que se trataría

de hacer mínimo el costo de transporte desde los puntos de demanda hasta el nuevo servidor. Por otra parte, el carácter repulsivo se manifestaría en un segundo objetivo, según el cual se trataría de ubicar el servidor tan lejos como fuese posible del punto de demanda más cercano. A pesar de que éste parece ser el enfoque natural del problema, la literatura no es demasiado rica en trabajos que consideren la localización de un servicio con estas características desde un punto de vista biobjetivo ([16, 21, 57, 86]).

En la Sección 2.3 se presenta un modelo de este tipo, bajo hipótesis más generales que las utilizadas en los modelos clásicos, tanto en lo referente a los objetivos como a los elementos negativamente afectados. Para este modelo se describe el procedimiento de construcción de un conjunto ε -dominante finito.

La utilización de conjuntos ε -dominantes en el ámbito de la teoría de localización fue introducida por Hansen y Thisse, [57], quienes consideran como objetivos la suma de los costos de transporte (dados por una función de la distancia no decreciente y continua) y el mayor de éstos (o el mayor costo ambiental, en el caso de un servicio semi-repulsivo), modelo que se conoce con el nombre de *problema de Weber-Rawls generalizado*. La construcción del conjunto ε -dominante se lleva a cabo por medio del algoritmo de ramificación y acotación BSSS.

Carrizosa *et al.*, [21], emplean también un algoritmo de ramificación y acotación para construir una aproximación (finita) al conjunto eficiente, a través del concepto de α -dominancia, en estrecha relación con el de ε -dominancia.

2.2 Localización con Regiones Prohibidas

2.2.1 El Modelo y su Resolución

En el modelo considerado, el objetivo que se persigue es determinar la localización de un nuevo servicio en el plano, fuera del interior de una región S , de tal manera que se minimice alguna función h de los costos de transporte desde la ubicación del nuevo servicio hasta los n puntos de demanda existentes, es decir:

$$\begin{aligned} \min \quad & h(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n))) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(S) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde:

- x es la localización (desconocida) del nuevo servicio.
- a_i representa las coordenadas del i -ésimo punto de demanda, $i = 1, \dots, n$.
- $\gamma_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es un calibrador que mide la distancia existente entre a_i y un punto cualquiera del plano.
- $D_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ es una función convexa y no decreciente, que supondremos no constante.
- $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa y no decreciente en cada componente.
- S es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que puede ser representado como la unión de m conjuntos conexos (no necesariamente convexos)

$$S = \bigcup_{j=1}^m S_j$$

Las condiciones exigidas a las funciones D_i y h garantizan la convexidad de la función objetivo del problema considerado, [63]. Como caso particular de interés cabe citar aquel en que h es una norma monótona, [9, 20, 35], es decir, una norma que verifica

$$(u, v \in \mathbb{R}^n, |u_i| \leq |v_i| \quad \forall i) \Rightarrow h(u) \leq h(v)$$

Teniendo en cuenta que las normas L_p son monótonas, aquí quedan englobados, entre otros, los criterios clásicos empleados en Teoría de Localización: *minisum* ($h = \|\cdot\|_1$), *minimax* ($h = \|\cdot\|_\infty$) y *cent-dian* ($h = (1 - \lambda)\|\cdot\|_1 + \lambda\|\cdot\|_\infty$).

Como ya se indicó en la introducción, la estrategia habitual para encontrar la solución óptima de este problema consiste en resolver primero el problema no restringido,

$$\begin{aligned} \min \quad & h(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n))) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

comprobando si algún elemento del conjunto X^* de soluciones óptimas es factible para el problema (2.4). De ser así, se obtiene una solución óptima para el problema con regiones prohibidas.

Observación 2.1 El problema (2.5) posee siempre solución óptima finita. En efecto, sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ y $d_i = D_i(\gamma_i(\hat{x} - a_i))$ para $i = 1, \dots, n$. Por ser las funciones D_i convexas, no decrecientes y no constantes, para cada $i = 1, \dots, n$ existirá $t_i > 0$ tal que:

$$D_i(t) > d_i \quad \forall t > t_i$$

Sea $t_0 = \max_{1 \leq i \leq n} t_i$ y consideremos el diagrama de Voronoi $\{V_i\}_{i=1}^n$ correspondiente a los puntos de demanda,

$$V_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{1 \leq i \leq n} \gamma_i(x - a_i) = \gamma_k(x - a_k) \right\}$$

Dado un punto $x \in V_k$ que verifique $\gamma_k(x - a_k) > t_0$, se tendrá

$$\gamma_i(x - a_i) \geq \gamma_k(x - a_k) > t_0 \geq t_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

por lo que

$$D_i(\gamma_i(x - a_i)) > d_i = D_i(\gamma_i(\hat{x} - a_i)) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Teniendo en cuenta que h es no decreciente componente a componente, se sigue que $h(x) \geq h(\hat{x})$. Sea

$$B = \bigcup_{i=1}^n \{x \in V_i : \gamma_i(x - a_i) \leq t_0\}$$

al que pertenece \hat{x} (pues en otro caso se llega a contradicción con la elección de las constantes d_i) y para el cual se verifica

$$h(x) \geq h(\hat{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B$$

Por tanto, la resolución del problema no restringido puede reducirse a su resolución sobre el conjunto compacto B . La continuidad de la función objetivo garantiza la existencia de solución óptima en B . \square

Para la resolución del problema no restringido (2.5) pueden emplearse las técnicas estándar en optimización convexa, aunque es preciso señalar la existencia de casos particulares de interés. Así, cuando se considera el problema de Weber, el modelo resultante es de fácil resolución para normas poliédricas con un número reducido de puntos extremos, ya que puede formularse como un problema lineal [125]. En particular, es especialmente simple la resolución en el caso de la norma L_1 , ya que puede obtenerse una descomposición en dos problemas unidimensionales. Cuando se considera la norma euclídea, el método habitualmente empleado para su resolución es un procedimiento iterado debido a Wieszfeld ([18, 73, 76, 93, 128]), que ha sido adaptado posteriormente para su utilización con normas L_p ([17, 43, 42, 80]). También es de destacar el empleo de métodos de punto interior para la resolución de problemas más generales que el aquí considerado, [41, 131, 132].

Si la solución óptima del problema sin restricciones no es factible para el problema (2.4), la convexidad de la función objetivo permite asegurar la existencia de una solución óptima perteneciente a la frontera de S , por lo que el problema se reduce a resolver

$$\begin{aligned} \min \quad & h(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n))) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \text{fr}(S_j) \end{aligned} \tag{2.6}$$

para los diferentes conjuntos S_j .

Observación 2.2 Un argumento similar al utilizado en la Observación 2.1 nos permite suponer sin pérdida de generalidad que $\text{fr}(S)$ es un conjunto acotado. En efecto, partiendo de $\hat{x} \in \text{fr}(S)$, el conjunto B correspondiente que aparece en dicha observación permite reducir la resolución del problema sobre $\text{fr}(S)$ a su resolución sobre el conjunto acotado $\text{fr}(S) \cap B$. \square

Con objeto de poder abordar de manera eficiente la resolución de los problemas sobre $\text{fr}(S_j)$, se exigirá una hipótesis adicional sobre las funciones D_i . Así, para cada

índice i supondremos la existencia de una constante L_i ,

$$L_i \geq \max \{ \gamma_i(x - a_i) : x \in \text{fr}(S) \}$$

tal que la función D_i esté definida en el intervalo $[0, L_i]$ y su derivada lateral a la izquierda en el punto L_i sea finita, $D'_{i-}(L_i) < +\infty$. Aquí quedan incluidas una amplia variedad de funciones, entre las que podemos citar, por ejemplo, la función de Huber:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } |t| \leq C \\ C|t| - \frac{C^2}{2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que la frontera de cada región S_j puede descomponerse en un número finito de arcos de curva C_{jk} para cada uno de los cuales se conoce una descripción paramétrica. Es decir, para cada C_{jk} existe

$$\omega_{jk} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 \quad k = 1, \dots, K_j$$

tal que:

$$\begin{aligned} \omega_{jk}(1) &= \omega_{j,k+1}(0) & k = 1, \dots, K_j - 1 \\ \omega_{jK_j}(1) &= \omega_{j1}(0) \\ \text{fr}(S_j) &= \bigcup_{k=1}^{K_j} \omega_{jk}([0, 1]) \end{aligned}$$

En tal caso, una solución óptima del problema (2.6) puede obtenerse resolviendo cada uno de los problemas unidimensionales

$$(PR_{jk}) \quad \min_{0 \leq t \leq 1} h(D_1(\gamma_1(\omega_{jk}(t) - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(\omega_{jk}(t) - a_n)))$$

para $k = 1, \dots, K_j$. La función objetivo de cada problema (PR_{jk}) es, en general, multimodal, por lo que deberán emplearse técnicas de Optimización Global para su resolución.

Supongamos ahora que se conoce una descomposición d.c. para cada parametrización ω_{jk} , es decir,

$$\omega_{jk} = \omega_{jk}^+ - \omega_{jk}^- \quad k = 1, \dots, K_j$$

con ω_{jk}^+ y ω_{jk}^- convexas. En tal caso, el siguiente resultado proporciona una descomposición d.c. para cada componente de (2.2.1).

Lema 2.3 *Supongamos que se dispone de una descomposición d.c. para la parametrización ω_{jk} de C_{jk} . Entonces, para cada índice $i = 1, \dots, n$ puede determinarse una descomposición d.c. de la función*

$$G_{ijk}(t) = D_i(\gamma_i(\omega_{jk}(t) - a_i)) \quad t \in [0, 1]$$

Demostración. La función $\gamma_i(\omega_{jk}(t) - a_i)$ es d.c. por ser composición de un calibrador con una función d.c.; además, en virtud de la Proposición 1.15, se tiene una descomposición d.c. para esta función:

$$\gamma_i(\omega_{jk}(t) - a_i) = F_{ijk}^+(t) - F_{ijk}^-(t)$$

Teniendo en cuenta la continuidad de las funciones involucradas y la compacidad del dominio de definición, puede suponerse que las funciones F_{ijk}^+ y F_{ijk}^- son no negativas. Por otra parte, por hipótesis se tiene que

$$0 \leq \gamma_i(\omega_{jk}(t) - a_i) \leq L_i \quad \forall t \in [0, 1]$$

Entonces, la Proposición 1.12 proporciona la siguiente descomposición d.c. para $G_{ijk}(t)$:

$$G_{ijk}(t) = (G_{ijk}(t) + H_{ijk}(t)) - H_{ijk}(t)$$

donde $H_{ijk}(t) = K(L_i + F_{ijk}^-(t) - F_{ijk}^+(t))$ y K es cualquier constante que verifica $K \geq D'_{i-}(L_i)$. \square

Si la función h es tal que permite obtener una descomposición d.c. para el resultado de su composición con las funciones G_{ijk} del lema anterior, se tendrá una descomposición d.c. para la función objetivo de (PR_{jk}) . En particular, haciendo uso de la Proposición 1.15 se tiene:

Proposición 2.4 *Supongamos que se dispone de una descomposición d.c. para la parametrización ω_{jk} de C_{jk} y que h es una norma monótona. Entonces, (PR_{jk}) es un problema de optimización d.c. con descomposición d.c. conocida para su función objetivo.*

Por tanto, la solución óptima de (2.6) puede obtenerse resolviendo un número finito de problemas d.c. univariantes en los que la función objetivo presenta una descomposición d.c. conocida.

Obsérvese que ciertos segmentos de los arcos de curva que determinan la frontera de S pueden ser eliminados empleando argumentos de visibilidad, como en [1] y [56]. Así, se tiene el siguiente resultado consecuencia inmediata de la convexidad de la función objetivo.

Proposición 2.5 *Sea x^* una solución óptima de (2.5) y supongamos que existe un índice $j \in \{1, \dots, m\}$ para el cual $x^* \in S_j$. Entonces, existe una solución óptima \hat{x}^* de (2.4) tal que \hat{x}^* es visible desde x^* y $\hat{x}^* \in \text{fr}(S_j)$*

Ejemplo 2.6 Como ilustración de la técnica aquí propuesta, se ha considerado el siguiente problema de Weber con una región prohibida:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^3 \omega_i \|x - a_i\|_2 \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(S) \end{aligned}$$

donde $a_1 = (0, 3)$, $a_2 = (-2, 4)$, $a_3 = (4, -2)$, $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 2$ y S es la región delimitada por la curva $R = \{(5 \cos(8\pi t) \cos(2\pi t), 5 \cos(8\pi t) \sin(2\pi t)) : t \in [0, 1]\}$.

La solución óptima del problema de Weber sin restricciones corresponde al punto $a_2 = (0, 3)$, que se encuentra en el interior de la región S (véase la figura 2.1), por lo que el óptimo del problema restringido se encontrará en su frontera. Teniendo en cuenta que se dispone de una representación paramétrica de $\text{fr}(S)$, la solución óptima se determinará resolviendo el problema de optimización:

$$\min_{t \in [0,1]} F(t) := \sum_{i=1}^3 \omega_i \|(u(t) - a_{i1}, v(t) - a_{i2})\|_2$$

siendo $u(t) = 5 \cos(8\pi t) \cos(2\pi t)$ y $v(t) = 5 \cos(8\pi t) \sin(2\pi t)$. La función objetivo es multimodal, como puede apreciarse en la Figura 2.2, por lo que será necesario el empleo de técnicas de optimización global.

Las funciones u y v son d.c. y una descomposición viene dada por $u(t) = u^+(t) - u^-(t)$ y $v(t) = v^+(t) - v^-(t)$, siendo

$$\begin{aligned} u^+(t) &= 5 \cos(8\pi t) \cos(2\pi t) + 170\pi^2 t^2 & u^-(t) &= 170\pi^2 t^2 \\ v^+(t) &= 5 \cos(8\pi t) \sin(2\pi t) + 170\pi^2 t^2 & v^-(t) &= 170\pi^2 t^2 \end{aligned}$$

Por motivos de simplicidad se ha optado por utilizar la descomposición (1.2) basada en la acotación de la derivada segunda, en lugar de la descomposición óptima

proporcionada en (1.24). Esto conducirá a unos resultados computacionales más pobres.

Haciendo uso de la Proposición 1.15 se obtiene que $\{F(t) + h(t)\} - h(t)$ es una descomposición d.c. de F , siendo

$$\begin{aligned} h(t) &= 7(u^+(t) + v^+(t) + u^-(t) + v^-(t)) - 16 \\ &= 7(5 \cos(8\pi t) \cos(2\pi t) + 5 \cos(8\pi t) \sin(2\pi t) + 680 \pi^2 t^2) - 16 \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo de cubrimiento descrito en el Capítulo 1, se obtiene que la solución óptima viene dada por $t^* = 0.28527653858$, que corresponde al punto $(-0.6947487405, 3.082955211)$. Para la obtención de este valor han sido necesarias 78 iteraciones del algoritmo, siendo la tolerancia elegida $\varepsilon = 10^{-8}$.

Si el criterio elegido es ahora el criterio *minimax*

$$\begin{aligned} \min \max_{1 \leq i \leq 3} \{w_i \|x - a_i\|_2\} \\ \text{s.a. } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(S) \end{aligned}$$

el óptimo del problema no restringido corresponde al punto $(0.4, 1.6)$, que pertenece al interior de S , por lo que la solución en el caso restringido se encontrará sobre $\text{fr}(S)$. El problema que debe resolverse es, por tanto,

$$\min_{t \in [0,1]} G(t) := \max_{1 \leq i \leq 3} \{w_i \|(u(t) - a_{i1}, v(t) - a_{i2})\|_2\}$$

cuya función objetivo es nuevamente multimodal. Aplicando los resultados del álgebra de funciones d.c. se obtiene que una descomposición d.c. para G viene dada por:

$$G(t) = \left\{ \max_{1 \leq i \leq 3} \{w_i \|(u(t) - a_{i1}, v(t) - a_{i2})\|_2\} + h(t) \right\} - h(t)$$

Haciendo uso nuevamente del algoritmo de cubrimiento, se obtiene que la solución óptima viene dada por $t^* = 0.20233238732$, que corresponde al punto de coordenadas $(0.5372868430, 1.739955962)$. Para la obtención de este valor han sido necesarias 74 iteraciones del algoritmo, siendo la tolerancia elegida $\varepsilon = 10^{-8}$. \square

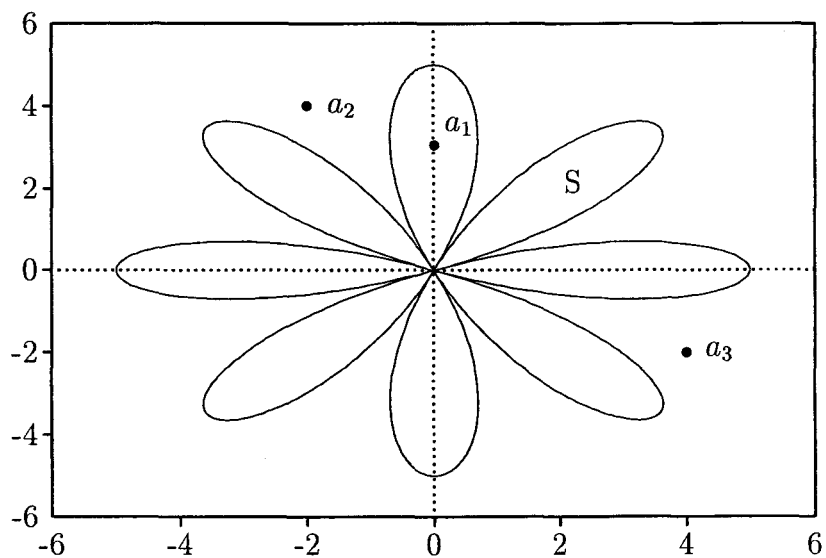


Figura 2.1: Región Prohibida y Puntos de Demanda (Ejemplo 2.6)

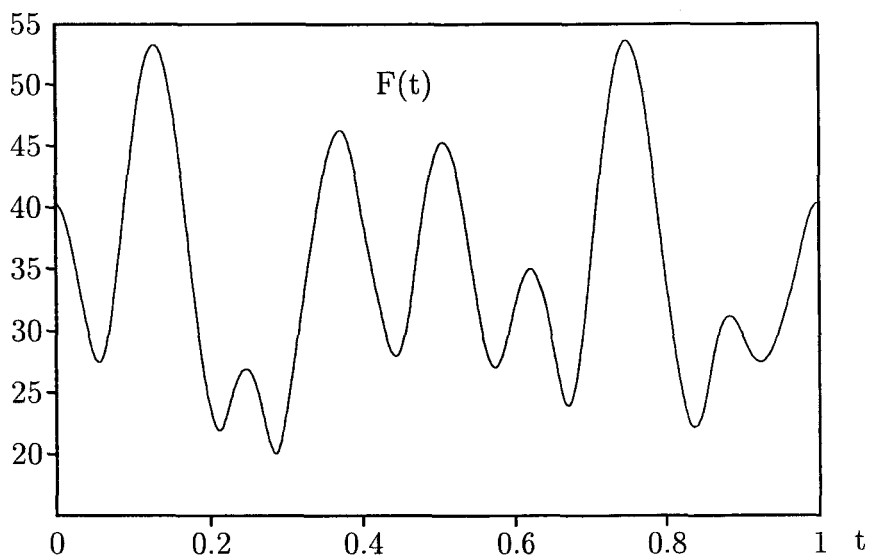


Figura 2.2: Función objetivo sobre $fr(S)$ para el problema *minisum* (Ejemplo 2.6)

2.2.2 Parametrización d.c. de la frontera del conjunto factible

La resolución del problema de localización con regiones prohibidas (2.4) depende de la disponibilidad de una descomposición d.c. para una descripción paramétrica de la frontera de las regiones S_j . Esta tarea, en principio dificultosa, se ve notablemente simplificada por la riqueza de resultados del álgebra de funciones d.c., como se deduce de los resultados que se recogen en la Sección 1.1.

A efectos ilustrativos se describe a continuación la obtención de descomposiciones d.c. de descripciones paramétricas en un caso particular de interés, como es el de los arcos de cónicas. Finalmente se expondrá un método general para obtener una parametrización d.c. de la frontera de un conjunto convexo y compacto.

2.2.2.1 Parametrización d.c. de la parábola

Consideremos la parábola de ecuación $y^2 = p x$, ($p > 0$), cuyo foco y directriz son, respectivamente, $(m, 0)$ y $x = -m$, siendo $m = p/4$. Una expresión paramétrica de esta cónica viene dada por:

$$\tau : t \in (0, 1) \mapsto (\tau_1(t), \tau_2(t)) \quad (2.7)$$

siendo

$$\tau_1(t) = m + \frac{2m \cos(2\pi t)}{1 - \cos(2\pi t)} \quad \tau_2(t) = \frac{2m \sin(2\pi t)}{1 - \cos(2\pi t)}$$

La función τ_1 es convexa en $(0, 1)$, por lo que su descomposición d.c. es, obviamente, $\tau_1 = \tau_1 - 0$, mientras que τ_2 es convexa en $(0, \frac{1}{2}]$ y cóncava en $[\frac{1}{2}, 1)$. Haciendo uso de la Proposición 1.27, una descomposición d.c. (óptima) para τ_2 vendrá dada por $\tau_2 = \varphi - \psi$, siendo

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2m \sin(2\pi t)}{1 - \cos(2\pi t)} + \frac{m\pi}{2}(2t - 1) & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{m\pi}{2}(2t - 1) & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{m\pi}{2}(2t - 1) & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{m\pi}{2}(2t - 1) - \frac{2m \sin(2\pi t)}{1 - \cos(2\pi t)} & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

El caso de una parábola general se puede reducir al aquí considerado tras una traslación y un giro.

2.2.2.2 Parametrización d.c. de la hipérbola

Consideremos la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con excentricidad $e = \sqrt{a^2 + b^2}/a$. Una expresión paramétrica de esta hipérbola viene dada por:

$$\tau : t \in I \mapsto (\tau_1(t), \tau_2(t)) \tag{2.8}$$

siendo $I = [0, t_0) \cup (\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2} + t_0) \cup (1 - t_0, 1]$, $t_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos(1/e)$ y

$$\tau_1(t) = \frac{b \cos(2\pi t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(2\pi t) - 1}} \quad \tau_2(t) = \frac{b \sin(2\pi t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(2\pi t) - 1}}$$

A continuación se analiza la obtención de una representación d.c. sobre cada uno de los subintervalos que componen I .

La función τ_1 es convexa en $[0, t_0)$ y $(1 - t_0, 1]$ y cóncava en $(\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2} + t_0)$, por lo que se tiene inmediatamente una descomposición d.c. sobre cada uno de estos intervalos. Por su parte, τ_2 es convexa en $[0, t_0)$ y $(\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2})$, y cóncava en $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t_0)$ y $(1 - t_0, 1]$, por lo que directamente se tiene una descomposición d.c. sobre el primero y el último de estos intervalos. En lo referente a $(\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2} + t_0)$, aplicando la Proposición 1.27 se obtiene una descomposición d.c. óptima $\tau_2 = \varphi - \psi$, siendo

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{b \sin(2\pi t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(2\pi t) - 1}} + \frac{b\pi(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{e^2 - 1}} & t \in (\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b\pi(\frac{1}{2} - t)}{\sqrt{e^2 - 1}} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t_0) \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{b\pi(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{e^2 - 1}} & t \in (\frac{1}{2} - t_0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b\pi(\frac{1}{2} - t)}{\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{b \sin(2\pi t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(2\pi t) - 1}} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t_0) \end{cases}$$

El caso de una hipérbola general se puede reducir al aquí considerado tras una traslación y un giro.

2.2.2.3 Parametrización d.c. de la elipse

Consideremos la elipse cuya ecuación reducida viene dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Una expresión paramétrica de esta cónica viene dada por:

$$\tau : t \in [0, 1] \mapsto (\tau_1(t), \tau_2(t)) \quad (2.9)$$

siendo $\tau_1(t) = a \cos(2\pi t)$ y $\tau_2(t) = b \sin(2\pi t)$.

Una vez realizados los cálculos oportunos, se obtiene que la descomposición d.c. de la Proposición 1.10 para τ_1 viene dada por $\tau_1 = \varphi_1 - \psi_1$, siendo

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ a(\cos(2\pi t) + 2\pi t - \frac{\pi}{2}) & t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ a(4\pi t - 2\pi) & t \in (\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\psi_1(t) = \begin{cases} -a \cos(2\pi t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ a(2\pi t - \frac{\pi}{2}) & t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ a(4\pi t - 2\pi - \cos(2\pi t)) & t \in (\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (2.11)$$

En lo referente a τ_2 , la representación d.c. óptima que se obtiene es $\tau_2 = \varphi_2 - \psi_2$, con

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 2\pi bt & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ b(\sin(2\pi t) + 4\pi t - \pi) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} b(2\pi t - \sin(2\pi t)) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ b(4\pi t - \pi) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.13)$$

En particular, para $a = b = r$ se obtiene la descomposición d.c. de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio r .

El caso de una elipse general se puede reducir al aquí considerado tras una traslación y un giro.

2.2.2.4 Parametrización d.c. de la frontera de un conjunto convexo compacto

Consideremos un conjunto S convexo y compacto, y supongamos que el origen es un punto interior de dicho conjunto, lo cual no supone pérdida de generalidad. Puede suponerse, además, que S tiene interior no vacío, pues, en caso contrario, se trataría de un segmento, obteniéndose de forma inmediata una parametrización d.c. de su frontera.

Una descripción paramétrica de $\text{fr}(S)$ viene dada por

$$\omega(t) = \left(\frac{\cos(2\pi t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))}, \frac{\sin(2\pi t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} \right) \quad t \in [0, 1] \quad (2.14)$$

siendo γ el calibrador con bola unidad S . Obsérvese que el numerador de ambas componentes de ω es una función d.c. con descomposición conocida, por lo que, en virtud de la Proposición 1.15, el denominador de ambas es también d.c., obteniéndose una descomposición a partir de dicho resultado.

Si $f_{\cos}^+(t) - f_{\cos}^-(t)$ es una descomposición d.c. de la función $\cos(2\pi t)$, la primera componente de ω puede expresarse como

$$\frac{\cos(2\pi t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} = \frac{f_{\cos}^+(t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} - \frac{f_{\cos}^-(t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))}$$

Realizando la misma operación sobre $\sin(2\pi t)$, el cálculo de una descomposición d.c. de ω se reduce a la obtención de una representación d.c. para el cociente de una función convexa y una d.c. con descomposición conocida, para lo cual será necesario el siguiente

Lema 2.7 *Sea U un conjunto acotado tal que $U \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z \geq \alpha\}$, con $\alpha > 0$, y $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y, z) = x \cdot (y - z)^{-1}$. Entonces, existen $\rho^*, A, B, C \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} u^+(x, y, z) &= u(x, y, z) + \frac{1}{2}\rho^*(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz \\ u^-(x, y, z) &= \frac{1}{2}\rho^*(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz \end{aligned}$$

son funciones convexas y no decrecientes componente a componente.

Demostración. La matriz Hessiana de u viene dada por

$$H = \frac{1}{(y-z)^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{2x}{y-z} & \frac{-2x}{y-z} \\ 1 & \frac{-2x}{y-z} & \frac{2x}{y-z} \end{pmatrix}$$

siendo sus autovalores

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 2(y-z)^2}}{(y-z)^3} \quad \lambda_3 = \frac{2x - \sqrt{4x^2 + 2(y-z)^2}}{(y-z)^3}$$

de donde se deduce inmediatamente la siguiente cota superior para el radio espectral de H

$$\rho^* = \frac{2M_{|x|} + \sqrt{4M_{|x|}^2 + 2m_{y-z}^2}}{m_{y-z}^3}$$

siendo

$$M_{|x|} \geq \sup \{|x| : (x, y, z) \in U\} \quad 0 < m_{y-z} \leq \inf \{y-z : (x, y, z) \in U\}$$

De la elección de ρ^* se sigue que las funciones

$$u_1(x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{1}{2}\rho^*(x^2 + y^2 + z^2) \quad u_2(x, y, z) = \frac{1}{2}\rho^*(x^2 + y^2 + z^2)$$

son convexas, así como u^+ y u^- para cualesquiera números reales A , B y C .

Con objeto de hacer que las funciones u^+ y u^- sean no decrecientes componente a componente, las constantes A , B y C se elegirán de tal forma que las derivadas parciales de estas funciones con respecto a x , y y z sean no negativas, obteniéndose así las siguientes cotas inferiores para tales constantes

$$A \geq -\rho^* m_x$$

$$B \geq \max \left\{ \frac{M_x}{m_{y-z}^2} - \rho^* m_y, -\rho^* m_y \right\}$$

$$C \geq \max \left\{ \frac{-m_x}{m_{y-z}^2} - \rho^* m_z, -\rho^* m_z \right\}$$

con

$$\begin{aligned} m_x &= \inf \{x : (x, y, z) \in U\} & M_x &= \sup \{x : (x, y, z) \in U\} \\ m_y &= \inf \{y : (x, y, z) \in U\} & m_z &= \inf \{z : (x, y, z) \in U\} \end{aligned}$$

quedando probado el resultado. \square

Haciendo uso del lema previo es posible probar el siguiente resultado, que proporciona una descomposición d.c. para el cociente de una función convexa y una d.c., de donde se obtiene una representación d.c. para la función w de (2.14).

Proposición 2.8 *Sea $T \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto convexo y $f, g, h : T \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas finitas tales que $\inf \{g(t) - h(t) : t \in T\} > 0$. Entonces, una representación d.c. para $f(t) \cdot (g(t) - h(t))^{-1}$ viene dada por:*

$$\frac{f(t)}{g(t) - h(t)} = \left[\frac{f(t)}{g(t) - h(t)} + n(t) \right] - n(t) \quad (2.15)$$

donde

$$n(t) = \frac{1}{2} \rho^* (f(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2) + A f(t) + B g(t) + C h(t)$$

y

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{2M_{|f|} + \sqrt{4M_{|f|}^2 + 2m_{g-h}^2}}{m_{g-h}^3} & A &\geq -\rho^* m_f \\ B &\geq \max \left\{ \frac{M_f}{m_{g-h}^2} - \rho^* m_g, -\rho^* m_g \right\} & C &\geq \max \left\{ \frac{m_f}{m_{g-h}^2} - \rho^* m_h, -\rho^* m_h \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_f &\leq \inf_{t \in T} f(t) & M_f &\geq \sup_{t \in T} f(t) & M_{|f|} &\geq \sup_{t \in T} |f(t)| \\ m_g &\leq \inf_{t \in T} g(t) & m_h &\leq \inf_{t \in T} h(t) & 0 < m_{g-h} &\leq \inf_{t \in T} \{g(t) - h(t)\} \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos la función vectorial convexa

$$F : t \in T \mapsto F(t) = (f(t), g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3$$

Dado que las funciones u^+ y u^- del Lema 2.7 son convexas y no decrecientes componente a componente, un resultado básico del Análisis Convexo, [63], establece que

$u^+ \circ F$ y $u^- \circ F$ son convexas, proporcionando una descomposición d.c. para $u \circ F$. Las constantes que aparecen en la definición han sido elegidas de acuerdo con la demostración del Lema 2.7. \square

A continuación se analiza la aplicación de este resultado a la obtención de una descomposición d.c. para la parametrización (2.14) de la frontera de S . Las descomposiciones d.c. que se consideran para las funciones seno y coseno son

$$\cos(2\pi t) = \varphi_1(t) - \psi_1(t) \qquad \sin(2\pi t) = \varphi_2(t) - \psi_2(t)$$

donde φ_1 , ψ_1 , φ_2 y ψ_2 son las funciones dadas en (2.10), (2.11), (2.12) y (2.13), respectivamente, para $a = 1$ y $b = 1$. La descomposición d.c. de ω se obtendrá a partir de la representación de las funciones

$$\frac{\varphi_i}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} \qquad \frac{\psi_i}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} \qquad i = 1, 2$$

a cada una de las cuales es aplicable el resultado anterior.

Según la Proposición 1.15, la función $\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ admite como descomposición $\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = (\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) + h(t)) - h(t)$ siendo

$$h(t) = N_1(\varphi_1(t) + \psi_1(t)) + N_2(\varphi_2(t) + \psi_2(t))$$

Teniendo en cuenta que las funciones φ_1 , ψ_1 , φ_2 y ψ_2 son crecientes, puede tomarse $m_g = m_h = -N_1$. En lo que respecta a las constantes m_f , M_f y $M_{|f|}$, su obtención es directa: la Tabla 2.1 muestra su valor en cada uno de los 4 casos posibles.

La determinación de la constante m_{g-h} presenta mayor complejidad, ya que está directamente relacionada con el valor objetivo óptimo del problema

$$\min_{t \in [0,1]} \gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \qquad (2.16)$$

Dado que éste es un problema de optimización d.c. con descomposición conocida para la función objetivo, puede aplicarse el algoritmo de cubrimiento 1.18, descrito en el Capítulo 1; como sólo se requiere una cota inferior del objetivo óptimo, basta realizar algunas iteraciones para disponer de la cota.

El procedimiento aquí descrito para la obtención de la representación d.c. de la frontera de un conjunto convexo y compacto puede simplificarse ligeramente si, para las funciones $\sin(2\pi t)$ y $\cos(2\pi t)$, se considera la descomposición d.c. dada en (1.2)

Numerador	m_f	M_f	$M_{ f }$	m_g	m_h
φ_1	0	2π	2π	$-N_1$	$-N_1$
ψ_1	-1	$2\pi - 1$	$2\pi - 1$	$-N_1$	$-N_1$
φ_2	0	3π	3π	$-N_1$	$-N_1$
ψ_2	0	3π	3π	$-N_1$	$-N_1$

Tabla 2.1: Constantes para la descomposición d.c. de la frontera de un conjunto convexo y compacto (descomposición óptima de $\sin(2\pi t)$ y $\cos(2\pi t)$)

Numerador	m_f	M_f	$M_{ f }$	m_g	m_h
$\tilde{\varphi}_1$	1	$1 + 2\pi^2$	$1 + 2\pi^2$	N_1	N_1
$\tilde{\psi}_1$	0	$2\pi^2$	$2\pi^2$	N_1	N_1
$\tilde{\varphi}_2$	0	$2\pi^2$	$2\pi^2$	N_1	N_1
$\tilde{\psi}_2$	0	$2\pi^2$	$2\pi^2$	N_1	N_1

Tabla 2.2: Constantes para la descomposición d.c. de la frontera de un conjunto convexo y compacto (descomposición (1.2) de $\sin(2\pi t)$ y $\cos(2\pi t)$)

(esto es, la que se obtiene mediante acotación de la derivada segunda), en lugar de la descomposición óptima, aunque ello se traducirá, casi con total seguridad a la vista de los resultados del Capítulo 1, en un mayor esfuerzo computacional para la resolución del problema. La nueva representación viene dada por

$$\cos(2\pi t) = \tilde{\varphi}_1(t) - \tilde{\psi}_1(t) \qquad \sin(2\pi t) = \tilde{\varphi}_2(t) - \tilde{\psi}_2(t) \tag{2.17}$$

siendo

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(t) &= \cos(2\pi t) + 2\pi^2 t^2 & \tilde{\psi}_1(t) &= 2\pi^2 t^2 \\ \tilde{\varphi}_2(t) &= \sin(2\pi t) + 2\pi^2 t^2 & \tilde{\psi}_2(t) &= 2\pi^2 t^2\end{aligned}$$

El valor de las constantes m_f , M_f , $M_{|f|}$, m_g y m_h para esta descomposición aparece reflejado en la Tabla 2.2.

Para la aplicación del procedimiento descrito no es necesario obtener una expresión explícita del calibrador γ , ya que el algoritmo de cubrimiento (y otros métodos de optimización, tales como ramificación y acotación), sólo requieren un procedimiento que permita evaluar γ y encontrar un subgradiente de tal calibrador en un punto dado. Esta tarea puede realizarse fácilmente cuando S viene dado en la forma $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq 0\}$, para alguna función convexa g con conjuntos de nivel acotados que verifique $g(0) < 0$. Así, para todo $x \neq 0$ se tiene, por definición de calibrador, que:

$$\gamma(x) = \sup \{s > 0 : g(sx) \leq 0\}^{-1}$$

por lo que la evaluación de $\gamma(x)$ se reduce a la resolución de la ecuación univariable no lineal $g(sx) = 0$, para lo cual puede emplearse un método de búsqueda unidimensional, [10].

En lo referente al cálculo de subgradientes, éste queda resuelto por medio del siguiente resultado.

Proposición 2.9 *Sea $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa tal que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ es compacto y $g(0) < 0$. Dado $\bar{x} \neq 0$, sea $u \in \partial g(\bar{x}/\gamma(\bar{x}))$, donde γ es el calibrador con bola unidad S . Entonces:*

$$\frac{\gamma(\bar{x})}{\langle u, \bar{x} \rangle} u \in \partial \gamma(\bar{x})$$

Demostración. Sea $\bar{y} = \bar{x}/\gamma(\bar{x})$, por lo que $g(\bar{y}) = 0$. Puesto que $u \in \partial g(\bar{y})$, dado $x \in S$ se tendrá:

$$0 \geq g(x) \geq g(\bar{y}) + \langle u, x - \bar{y} \rangle,$$

y, por tanto, $\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{y} \rangle$ para todo $x \in S$. Teniendo en cuenta que $\bar{y} \in S$, se sigue de la relación anterior y de la definición de calibrador dual que

$$\gamma^0(u) = \max_{x \in S} \langle u, x \rangle = \langle u, \bar{y} \rangle$$

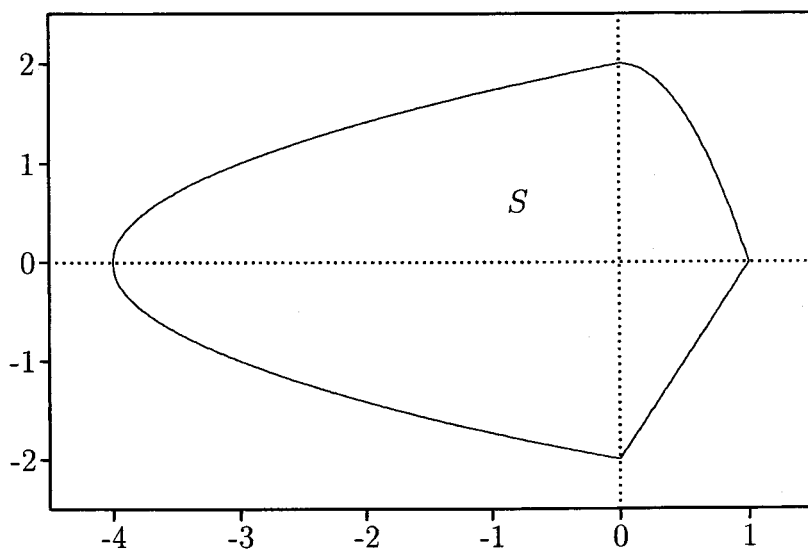


Figura 2.3: Bola unidad S del calibrador (Ejemplo 2.10)

y, por tanto

$$\left\langle \frac{u}{\gamma^0(u)}, \bar{y} \right\rangle = \frac{1}{\gamma^0(u)} \langle u, \bar{y} \rangle = 1 = \gamma(\bar{y})$$

Se concluye entonces que un subgradiente de γ en \bar{y} viene dado por

$$\frac{1}{\gamma^0(u)} u = \frac{\gamma(\bar{x})}{\langle u, \bar{x} \rangle} u$$

y, teniendo en cuenta que $\partial\gamma(\bar{y}) = \partial\gamma(\bar{x})$, el resultado queda probado. \square

Ejemplo 2.10 Como ilustración del procedimiento descrito, se considera el problema de obtención de una descomposición d.c. para la frontera del conjunto S (véase la Figura 2.3) definido por

$$\begin{aligned} S = & \{(x, y) : y \leq -2x^2 + 2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\} \quad \cup \\ & \{(x, y) : y \leq \sqrt{x+4}, -4 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\} \quad \cup \\ & \{(x, y) : y \geq -\sqrt{x+4}, -4 \leq x \leq 0, -2 \leq y \leq 0\} \quad \cup \\ & \{(x, y) : y \geq 2x - 2, 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0\} \end{aligned}$$

Si γ es el calibrador con bola unidad S , se obtiene que

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(y + \sqrt{y^2 + 16x^2} \right) & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ x - \frac{y}{2} & \text{si } x \geq 0, y < 0 \\ \frac{1}{8} \left(-x + \sqrt{x^2 + 16y^2} \right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es también inmediato comprobar que las constantes de la Proposición 1.15 pueden tomarse $N_1 = 1$ y $N_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, una descomposición d.c. para la función $\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ viene dada por $\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = g(t) - h(t)$, con

$$\begin{aligned} g(t) &= \gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) + \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + 6\pi^2 t^2 \\ h(t) &= \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + 6\pi^2 t^2 \end{aligned}$$

Las descomposiciones d.c. empleadas para las funciones seno y coseno han sido, por razones de simplicidad, las indicadas en (2.17). De la observación de S se deduce que la constante m_{g-h} puede tomarse igual a $1/4$. Los valores de las constantes ρ^* , A , B y C que intervienen en la descomposición d.c. de las funciones

$$\frac{\tilde{\varphi}_i(t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} \quad \frac{\tilde{\psi}_i(t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} \quad i = 1, 2$$

son

$$\rho_1^* = 128 + 256\pi^2 + 16\sqrt{64(1 + 2\pi^2)^2 + 2} \quad A_1 = -\rho_1^* \quad B_1 = 16 + 32\pi^2 - \rho_1^* \quad C_1 = 16 - \rho_1^*$$

para la primera de estas funciones, y

$$\rho_2^* = 256\pi^2 + 16\sqrt{256\pi^4 + 2} \quad A_2 = 0 \quad B_2 = 32\pi^2 - \rho_2^* \quad C_2 = -\rho_2^*$$

para las restantes.

Resumiendo, las descomposiciones d.c. buscadas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2\pi t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} &= \left[\frac{\cos(2\pi t) + t^2}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} + m_{11}(t) + m_{12}(t) \right] - (m_{11}(t) + m_{12}(t)) \\ \frac{\sin(t)}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} &= \left[\frac{\sin(t) + t^2}{\gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))} + m_{21}(t) + m_{22}(t) \right] - (m_{21}(t) + m_{22}(t)) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 m_{11}(t) &= \frac{1}{2} \rho_1^* [\tilde{\varphi}_1(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2] + A_1 \tilde{\varphi}_1(t) + B_1 g(t) + C_1 h(t) \\
 m_{12}(t) &= \frac{1}{2} \rho_2^* [\tilde{\psi}_1(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2] + A_2 \tilde{\psi}_1(t) + B_2 g(t) + C_2 h(t) \\
 m_{21}(t) &= \frac{1}{2} \rho_2^* [\tilde{\varphi}_2(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2] + A_2 \tilde{\varphi}_2(t) + B_2 g(t) + C_2 h(t) \\
 m_{22}(t) &= \frac{1}{2} \rho_2^* [\tilde{\psi}_2(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2] + A_2 \tilde{\psi}_2(t) + B_2 g(t) + C_2 h(t)
 \end{aligned}$$

2.2.3 Experiencia Computacional

Con objeto de comprobar el rendimiento del procedimiento propuesto, se ha considerado la resolución de los problemas de Weber y Rawls con región prohibida el círculo de radio 1 y centro el origen de coordenadas, para un número variable de puntos de demanda que oscila entre 50 y 5000. El calibrador utilizado para cada punto de demanda a_i viene definido a partir de una norma L_p por $\gamma_i(x) = w_i \|x - a_i\|_p$, siendo $w_i \geq 0$.

Fijado un número de puntos de demanda, la resolución del problema fue repetida 100 veces, calculándose finalmente el número medio, la desviación típica, el valor mínimo y el valor máximo de los siguientes indicadores de rendimiento: número de iteraciones y tiempo de CPU medido en segundos.

Los puntos de demanda para cada problema fueron generados aleatoriamente sobre un cuadrado de lado 200 centrado en el origen; también se escogieron de forma aleatoria, con valores comprendidos entre 0 y 10, los pesos w_i correspondientes. La secuencia de problemas ha sido resuelta en sucesivas ocasiones, empleando diferentes normas L_p ($p = 1, 2, \infty$).

Dado que las pruebas realizadas sólo pretenden comprobar la eficiencia del procedimiento de optimización sobre la frontera de la región prohibida, en la implementación realizada se ha omitido el cálculo de la solución del problema no restringido y la comprobación de su optimalidad en el problema restringido. Debe tenerse en cuenta que ésta es una etapa de preprocesamiento común a la mayor parte de los algoritmos que abordan este problema.

La implementación del algoritmo ha sido realizada en un ordenador personal equipado con un procesador Pentium-MMX a 200 Mhz. y 16 Megabytes de memoria principal. En todos los casos se ha empleado un valor de tolerancia $\varepsilon = 10^{-6}$. Las Tablas 2.3 y 2.4 muestran los resultados obtenidos.

Como puede observarse, el problema de Rawls requiere un esfuerzo computacional para su resolución superior al de Weber, tanto en número de iteraciones (especialmente) como en tiempo de CPU; ello puede estar relacionado con el grado de optimalidad de las descomposiciones d.c. utilizadas en cada caso. Dentro de las diferentes normas consideradas, los problemas con norma L_∞ son los que requieren menor tiempo de CPU, debido a su estructura más simple; en el extremo opuesto se sitúa la norma L_2 , que requiere un tiempo de CPU notablemente superior al resto, sin que tal incremento se produzca en la misma medida en el número de iteraciones; es decir, el empleo intensivo de operaciones en punto flotante penaliza considerablemente el rendimiento en tiempo de CPU.

Las gráficas recogidas en las Figuras 2.4 y 2.5 muestran la evolución del tiempo y número de iteraciones en función del número de puntos de demanda considerado. Como puede apreciarse, ambas magnitudes experimentan un crecimiento moderado con el número de puntos. De hecho, un análisis de regresión sobre los datos obtenidos revela un alto grado de relación lineal entre las variables consideradas, especialmente entre el tiempo de CPU y el número de puntos de demanda. La Tabla 2.5 muestra los coeficientes de las rectas de mínimos cuadrados obtenidas ($y = ax + b$, siendo la variable independiente en todos los casos el número de puntos de demanda), así como los coeficientes de determinación.

2.2 Localización con Regiones Prohibidas

$p = 1$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	44.72	12.22	22.00	111.00	0.04	0.02	0.00	0.11
100	53.69	20.72	22.00	177.00	0.09	0.04	0.00	0.33
500	78.77	31.49	36.00	230.00	0.71	0.29	0.27	2.09
1000	87.97	28.92	38.00	182.00	1.72	0.57	0.77	3.73
1500	95.19	27.76	45.00	196.00	2.78	0.82	1.27	5.76
2000	97.59	30.35	52.00	259.00	3.78	1.18	2.03	9.99
2500	102.54	35.44	53.00	237.00	4.97	1.72	2.58	11.42
3000	114.85	37.11	56.00	238.00	6.67	2.17	3.24	13.78
3500	113.56	43.90	51.00	286.00	7.74	3.00	3.46	19.55
4000	115.13	43.90	57.00	317.00	8.98	3.42	4.44	24.66
4500	121.68	45.40	60.00	299.00	10.68	4.01	5.27	26.31
5000	113.19	37.23	59.00	246.00	11.04	3.64	5.72	24.00

$p = 2$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	54.24	26.20	32.00	261.00	0.06	0.03	0.00	0.33
100	60.59	14.69	35.00	118.00	0.14	0.04	0.05	0.22
500	102.60	45.17	58.00	434.00	1.15	0.51	0.61	4.94
1000	115.88	33.92	72.00	237.00	2.75	0.81	1.71	5.66
1500	135.57	55.50	75.00	445.00	4.83	1.97	2.80	15.77
2000	136.32	35.82	88.00	290.00	6.48	1.71	4.18	13.68
2500	156.08	59.88	89.00	477.00	9.27	3.54	5.32	28.29
3000	163.34	57.95	93.00	447.00	11.64	4.14	6.64	31.91
3500	166.28	57.51	98.00	505.00	13.97	4.83	8.52	42.13
4000	175.62	71.27	96.00	530.00	16.77	6.82	9.12	50.69
4500	177.62	47.08	98.00	312.00	19.12	5.06	10.49	33.56
5000	185.74	68.07	106.00	484.00	22.19	8.13	12.58	57.78

$p = \infty$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	51.66	18.26	19.00	129.00	0.01	0.02	0.00	0.06
100	56.28	17.09	26.00	120.00	0.01	0.02	0.00	0.06
500	83.04	28.82	40.00	242.00	0.07	0.03	0.00	0.22
1000	101.65	38.43	44.00	284.00	0.20	0.08	0.11	0.55
1500	109.32	36.60	56.00	253.00	0.33	0.11	0.16	0.77
2000	114.55	37.34	67.00	279.00	0.46	0.14	0.27	1.10
2500	117.16	40.75	59.00	325.00	0.59	0.21	0.33	1.65
3000	120.20	42.65	65.00	319.00	0.73	0.26	0.38	1.98
3500	119.54	35.93	62.00	236.00	0.85	0.25	0.44	1.64
4000	125.94	37.84	66.00	264.00	1.12	0.31	0.54	2.15
4500	131.12	45.72	73.00	336.00	1.20	0.42	0.65	3.07
5000	127.60	37.90	70.00	246.00	1.32	0.39	0.72	2.58

Tabla 2.3: Resultados computacionales para el problema de Weber restringido

$p = 1$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	75.97	9.93	26.00	89.00	0.04	0.02	0.00	0.06
100	101.83	15.45	34.00	117.00	0.09	0.02	0.05	0.17
500	206.67	46.59	64.00	239.00	0.93	0.21	0.27	1.10
1000	295.40	79.69	95.00	345.00	2.91	0.78	0.93	3.46
1500	338.34	105.76	108.00	411.00	4.99	1.56	1.59	6.09
2000	388.44	118.21	121.00	465.00	7.67	2.33	2.36	9.17
2500	427.58	139.92	139.00	520.00	10.56	3.45	3.41	12.85
3000	469.95	157.48	155.00	572.00	13.87	4.65	4.56	16.86
3500	528.83	156.12	177.00	637.00	18.16	5.36	6.10	21.86
4000	540.33	189.35	182.00	665.00	21.15	7.41	7.14	26.04
4500	545.46	212.06	190.00	703.00	23.98	9.32	8.35	30.92
5000	556.22	226.25	197.00	733.00	27.25	11.08	9.66	35.87

$p = 2$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	85.38	11.85	29.00	101.00	0.04	0.02	0.00	0.06
100	113.88	21.43	37.00	137.00	0.11	0.02	0.05	0.17
500	241.35	57.10	75.00	277.00	1.08	0.26	0.33	1.27
1000	337.49	94.14	104.00	393.00	3.31	0.93	1.04	3.84
1500	390.59	123.67	123.00	470.00	5.78	1.83	1.81	6.97
2000	453.93	138.69	148.00	544.00	8.99	2.75	2.96	10.77
2500	492.44	169.73	176.00	616.00	12.19	4.20	4.34	15.27
3000	542.98	190.74	187.00	671.00	16.07	5.64	5.49	19.83
3500	605.63	191.16	195.00	732.00	20.86	6.58	6.76	25.21
4000	600.74	225.88	204.00	769.00	23.58	8.87	7.97	30.21
4500	617.14	247.01	214.00	808.00	27.21	10.89	9.44	35.65
5000	629.75	264.09	228.00	845.00	30.94	12.97	11.15	41.52

$p = \infty$	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU (segundos)			
N	μ_{it}	σ_{it}	min_{it}	max_{it}	μ_{ts}	σ_{ts}	min_{ts}	max_{ts}
50	76.07	13.24	28.00	87.00	0.01	0.02	0.00	0.06
100	96.96	23.31	40.00	113.00	0.01	0.02	0.00	0.06
500	180.53	66.60	76.00	241.00	0.12	0.05	0.05	0.17
1000	245.18	101.02	108.00	344.00	0.42	0.17	0.16	0.61
1500	265.08	121.75	124.00	409.00	0.69	0.32	0.27	1.10
2000	288.08	132.18	148.00	475.00	1.02	0.47	0.54	1.71
2500	292.99	144.07	169.00	552.00	1.29	0.64	0.71	2.42
3000	302.40	149.61	177.00	597.00	1.57	0.78	0.87	3.13
3500	306.57	146.68	188.00	634.00	1.84	0.88	1.15	3.85
4000	319.68	150.25	199.00	679.00	2.17	1.02	1.32	4.61
4500	324.34	153.76	216.00	715.00	2.45	1.16	1.59	5.44
5000	352.97	165.21	223.00	747.00	3.01	1.41	1.86	6.38

Tabla 2.4: Resultados computacionales para el problema de Rawls restringido

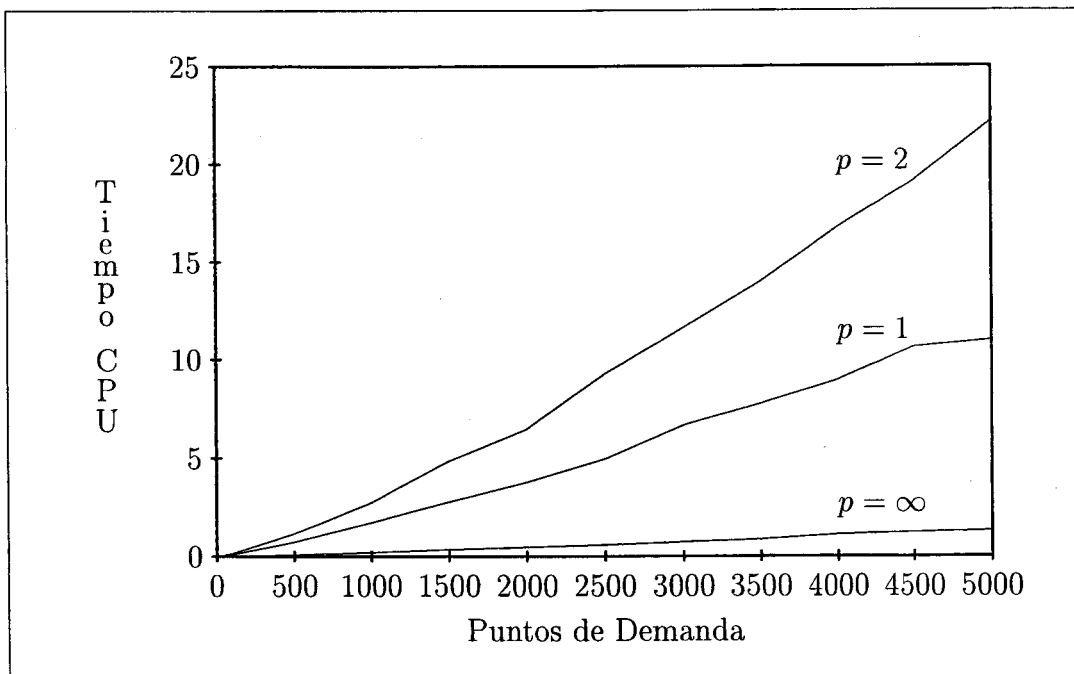
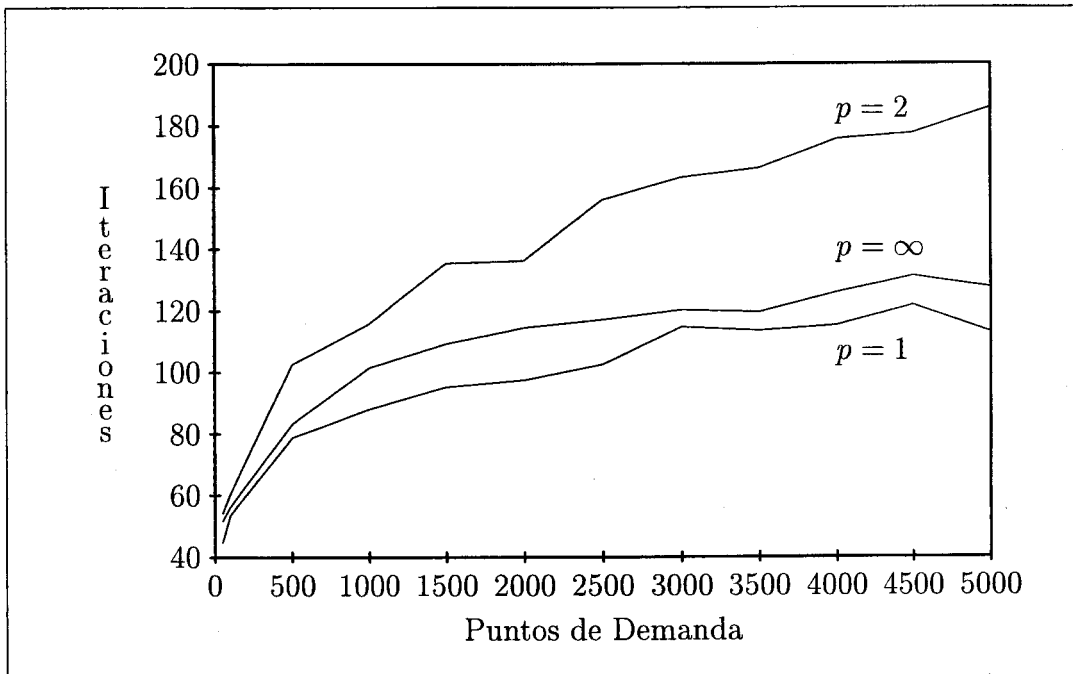


Figura 2.4: Número de Iteraciones y Tiempo de CPU para el Problema de Weber restringido (valores medios)

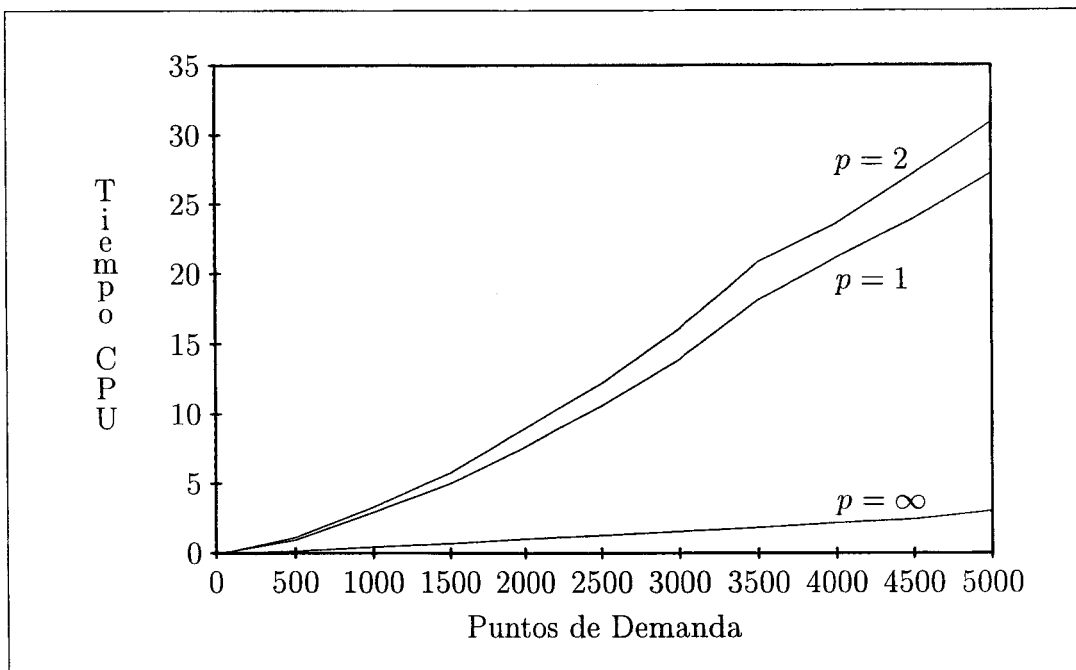
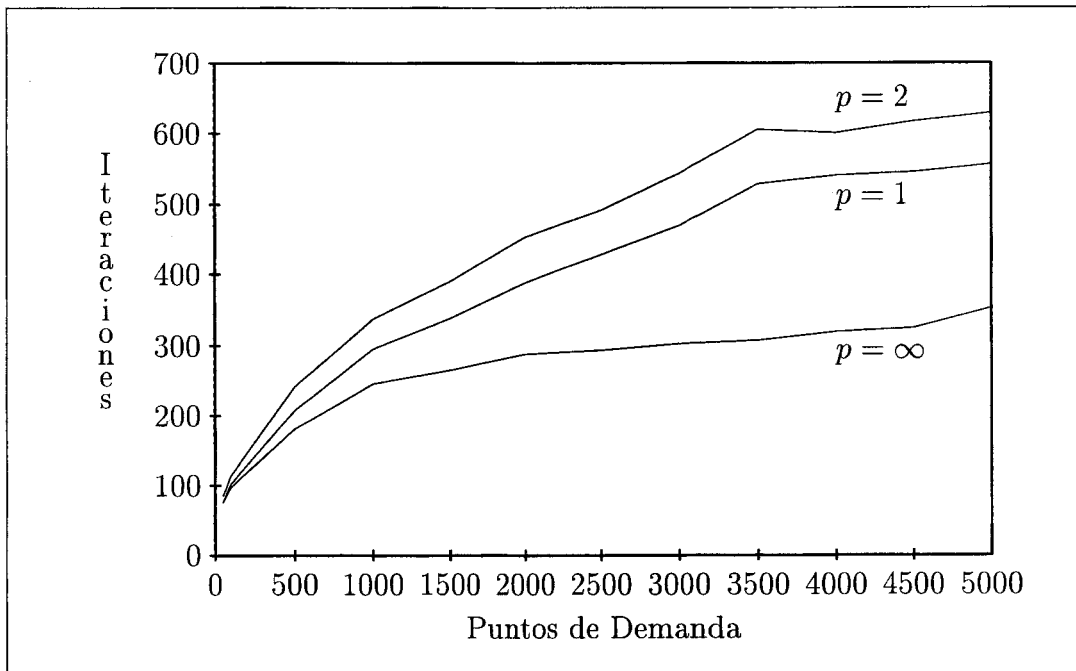


Figura 2.5: Número de Iteraciones y Tiempo de CPU para el Problema de Rawls restringido (valores medios)

Problema de Weber						
	Número de Iteraciones			Tiempo de CPU		
	a	b	R^2	a	b	R^2
$p = 1$	0.012937	65.096482	0.801576	0.002338	-0.454309	0.993604
$p = 2$	0.024241	79.967977	0.880073	0.004451	-1.226018	0.989343
$p = \infty$	0.013804	73.030254	0.771217	0.000273	-0.055509	0.992294

Problema de Rawls						
	Número de Iteraciones			Tiempo de CPU		
	a	b	R^2	a	b	R^2
$p = 1$	0.095618	152.596787	0.916161	0.005631	-2.008854	0.984581
$p = 2$	0.107484	178.279597	0.903257	0.006379	-2.186946	0.986552
$p = \infty$	0.046351	147.437329	0.787891	0.000585	-0.131453	0.992249

Tabla 2.5: Regresión lineal ($y = ax + b$) para los resultados computacionales (valores medios) de los problemas de Weber y Rawls restringidos

2.3 Un Enfoque Biobjetivo

2.3.1 Formulación del modelo

Consideremos el problema de localización de un servicio sobre una región S del plano, cuya instalación es beneficiosa para un conjunto de potenciales usuarios del mismo, pero que al mismo tiempo causa un efecto molesto o perjudicial sobre los residentes en su proximidad, lo que determina la existencia de un conjunto de elementos negativamente afectados. En este caso, los usuarios del servicio vendrán representados por un conjunto de n puntos del plano $A^+ = \{a_1, \dots, a_n\}$, mientras que los elementos afectados de forma negativa serán modelizados mediante un conjunto de m regiones del plano $A^- = \{R_1, \dots, R_m\}$. Esto conduce a un modelo más cercano a la realidad que otros considerados tradicionalmente en la literatura, puesto que, generalmente, la extensión ocupada por los elementos negativamente afectados es considerable (núcleos de población), y significativamente superior a la ocupada por los puntos de demanda; esto hace que pueda no ser conveniente la representación puntual de ambos tipos de elementos.

Supondremos en lo que sigue que las regiones R_i son cerradas, acotadas y con-

vexas, y que su frontera puede descomponerse en un número finito de segmentos rectos y arcos de circunferencia, es decir,

$$\text{fr}(R_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i} L_j^{(i)}$$

siendo cada $L_j^{(i)}$ un segmento recto o un arco de circunferencia. Con objeto de facilitar el tratamiento analítico, estos últimos se consideran menores que una semi-circunferencia; de no ser así, se realizará la descomposición oportuna. Como caso particular degenerado se admitirá la posibilidad de que la región R_i se reduzca a un punto. Obsérvese además que, bajo estas hipótesis tiene cabida el caso en que la región R_i es poligonal y es sometida a un proceso de triangulación para su descomposición en polígonos convexos.

El conjunto S de posibles localizaciones para el servidor supondremos que es un conjunto robusto y acotado, no necesariamente convexo, y cuya frontera admite una representación paramétrica con descomposición d.c. conocida (lo cual es cierto en particular si S es convexo), o bien puede expresarse como unión de un finito de arcos de curva con parametrización d.c. conocida (por ejemplo, arcos de cónicas).

Al igual que en todo problema de localización de un servicio con estas características, se presentan dos objetivos contrapuestos e irreconciliables la mayor parte de las veces: por una parte, el nuevo servicio debe encontrarse lo más cerca posible de sus potenciales usuarios y, por otra, debe estar situado lejos de los residentes a los que afecta de forma negativa. En este sentido, el modelo aquí formulado considerará los siguientes criterios para determinar la ubicación del nuevo servicio.

Criterio 1: Minimizar el costo de transporte desde el nuevo servicio hasta los puntos de demanda. Supondremos que este costo global viene dado por una función de los costos de transporte individuales, $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, convexa y no decreciente en cada componente; como ya se indicó anteriormente, h puede ser, por ejemplo, una norma monótona, por lo que aquí quedan comprendidos, entre otros, criterios clásicos como el minisum, el minimax o el cent-dian. Se considerará que, para cada usuario, el coste de transporte individual se expresa como una función convexa, no constante y no decreciente, de la distancia que lo separa del servidor (medida empleando un calibrador). Tanto la función de costo como el calibrador podrán ser distintos para cada uno de los puntos de demanda.

$$(C_1) \quad \min_{x \in S} T_1(x) := h\left(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n))\right)$$

Obsérvese que la función objetivo de (C_1) es convexa.

Se exigirá además, que, para cada índice i , exista una constante M_i verificando

$$M_i \geq \max\{\gamma_i(x - a_i) : x \in S\}$$

tal que la función D_i esté definida en el intervalo $[0, M_i]$ y su derivada lateral a la izquierda en el punto M_i sea finita, $D'_{i-}(M_i) < +\infty$.

Criterio 2: Maximizar la distancia existente entre el nuevo servicio y la región negativamente afectada más próxima.

$$(C_2) \quad \max_{x \in S} T_2(x) := \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x, R_i)$$

siendo

$$d_R(x, R_i) = \min_{x_i \in R_i} \|x - x_i\|_2 \quad (2.18)$$

Obsérvese que, dado un punto $x \notin R_i$, (2.18) es equivalente a:

$$d_R(x, R_i) = \min_{1 \leq j \leq n_i} \min \{ \|x - x_j^{(i)}\|_2 : x_j^{(i)} \in L_j^{(i)} \}$$

Los dos criterios considerados son radicalmente distintos, por lo que es bastante cuestionable su agregación en un único objetivo, como se ha realizado de manera habitual para otros problemas que son, esencialmente, biobjetivo ([27, 82, 123]).

El problema biobjetivo resultante al considerar ambos criterios puede expresarse de la siguiente forma:

$$\min_{x \in S} (T_1(x), -T_2(x)) \quad (2.19)$$

Para este problema biobjetivo abordaremos la construcción de un conjunto ε -dominante finito, [79, 115, 129]: dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$, se tratará de determinar un subconjunto finito $S^* \subset S$ tal que, dado cualquier $x \in S$, siempre sea posible encontrar un punto $x^* \in S^*$ verificando:

$$\begin{aligned} T_1(x^*) &\leq T_1(x) + \varepsilon_1 \\ -T_2(x^*) &\leq -T_2(x) + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} h(D_1(\gamma_1(x^* - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x^* - a_n))) &\leq h(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n))) + \varepsilon_1 \\ \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x^*, R_i) &\geq \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x, R_i) - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Se obtiene así un conjunto finito de puntos factibles, que puede tomarse como aproximación del conjunto eficiente (este último será, en general, infinito y no conexo). El problema de localización del nuevo servicio se reduce, por tanto, a la elección de la alternativa más adecuada dentro de este conjunto finito S^* .

2.3.2 Construcción de un conjunto ε -dominante finito

En líneas generales, el procedimiento de construcción que vamos a describir se basa en la determinación de un conjunto ε -dominante para cada una de las regiones del diagrama de Voronoi generado por A^- , recibiendo un tratamiento diferenciado aquella a la que pertenece una solución óptima del problema de minimización convexa determinado por el primero de los objetivos.

A continuación se describe el procedimiento de construcción del conjunto ε -dominante para el problema (2.19)

Paso 1.- Resolver el problema de minimización convexa asociado al primer criterio:

$$(P_0) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} T_1(x) := h(D_1(\gamma_1(x - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(x - a_n)))$$

El razonamiento empleado en la Observación 2.1 permite concluir que este problema siempre posee solución óptima finita.

La resolución de (P_0) puede realizarse empleando las técnicas habituales en Optimización Convexa, aunque, como ya se ha comentado en la Sección 2.2, existen casos particulares en los que pueden aplicarse procedimientos específicos.

En lo que sigue, x_0^* denotará una solución óptima del problema (P_0) .

Paso 2.- Construir el diagrama de Voronoi $\mathcal{V}(\mathcal{A}^-)$ asociado a las regiones negativamente afectadas. El cardinal de este conjunto se notará N .

Dada una región R_j designaremos por V_j a la región de Voronoi correspondiente:

$$V_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_R(x, R_j) \leq d_R(x, R_i) \quad i \neq j, 1 \leq i \leq m\}$$

Teniendo en cuenta que los elementos generadores de este diagrama de Voronoi son segmentos rectos y arcos de circunferencia, las aristas de $\mathcal{V}(\mathcal{A}^-)$ estarán formadas

por arcos de cónicas, [78, 91, 92] (véanse también las referencias *on-line* [59, 71, 110] relativas al software disponible para la construcción de tales diagramas).

Una vez construido $\mathcal{V}(\mathcal{A}^-)$, se determinará una región de Voronoi V_k a la que pertenece el punto x_0^* :

$$d_R(x_0^*, R_k) = \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x_0^*, R_i)$$

En caso de que x_0^* pertenezca a una arista del diagrama, se elegirá cualquiera de las regiones de Voronoi que la determinan.

Paso 3.- Obtener un conjunto ε -dominante para la región de Voronoi V_k . En este apartado se analizará la obtención de un subconjunto finito de V_k que ε -domine a cada punto de este conjunto. En lo que sigue se supondrá que x_0^* , la solución óptima del problema (P_0) considerada, es factible; en caso de no serlo, se añadirá al conjunto de regiones de Voronoi el elemento $V_{N+1} = V_k \cap S$ y se continuará en el Paso 4.

El siguiente resultado pone de manifiesto que x_0^* ε -domina a cierto subconjunto de V_k .

Proposición 2.11 *Sea $E_k = \{x \in V_k : d_R(x, R_k) \leq d_R(x_0^*, R_k)\}$. Entonces, dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$, el punto x_0^* ε -domina a todo punto $\tilde{x} \in E_k \cap S$.*

Demostración. Dado $\tilde{x} \in E_k \cap S$, por ser x_0^* solución óptima del problema (P_0) se tiene que $T_1(x_0^*) \leq T_1(\tilde{x})$. Por otra parte:

$$\min_{1 \leq i \leq m} d_R(\tilde{x}, R_i) = d_R(\tilde{x}, R_k) \leq d_R(x_0^*, R_k) = \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x_0^*, R_i)$$

de donde se deduce que $T_2(x_0^*) \geq T_2(\tilde{x})$. Teniendo en cuenta ambas desigualdades se concluye que x_0^* ε -domina a \tilde{x} (cualquiera que sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^2$). \square

A continuación se tratará la obtención un conjunto ε -dominante para los elementos de $(V_k \setminus E_k) \cap S$. Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$, se considera la sucesión $\{r_j\}_{j=0}^\infty$ definida de forma recurrente como

$$r_0 = d_R(x_0^*, R_k) \qquad r_j = r_{j-1} + \varepsilon_2 \qquad j \in \mathbb{N}$$

así como los conjuntos

$$\begin{aligned} C_j^k &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_R(x, R_k) = r_j\} \\ D_j^k &= \{x \in \mathbb{R}^2 : r_j \leq d_R(x, R_k) \leq r_{j+1}\} \end{aligned} \qquad j = 0, 1, \dots$$

La región R_k está delimitada por segmentos rectos y arcos de circunferencia, de donde se deduce que C_j^k puede expresarse como la unión de un número finito de estos elementos. Por otra parte, al ser S acotado, puede asegurarse la existencia de un subíndice $J_k \in \mathbb{N}$ de tal forma que el conjunto $(\bigcup_{j \leq J_k} D_j^k) \cap V_k \cap S$ recubre $(V_k \setminus E_k) \cap S$.

El objetivo que se persigue es obtener un conjunto ε -dominante para cada conjunto $D_j^k \cap V_k \cap S$. Teniendo en cuenta que un número finito de estos conjuntos recubren $(V_k \setminus E_k) \cap S$, se obtiene así un conjunto ε -dominante finito para este último. Para la determinación de estos puntos ε -dominantes consideremos, para cada índice $j = 0, \dots, J_k$, el conjunto \tilde{C}_j^k definido por

$$\tilde{C}_j^k = (C_j^k \cap V_k \cap S) \cup (\text{fr}(V_k \cap S) \cap D_j^k)$$

así como el problema de optimización

$$(P_j^k) \quad \min \{T_1(x) : x \in \tilde{C}_j^k\}$$

Obsérvese que $\text{fr}(V_k \cap S) = (\text{fr}(V_k) \cap S) \cup (V_k \cap \text{fr}(S))$ por ser V_k y S cerrados.

Ejemplo 2.12 Consideremos el problema de localización biobjetivo con dos regiones repulsivas R_1 y R_2 dadas por el cuadrado de vértices $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$, y el punto de coordenadas $(5,0)$, así como tres puntos de demanda $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, -1)$ y $P_3 = (4, 1)$ (ver Figura 2.6). El costo de transporte a cada punto de demanda se considerará proporcional a la distancia euclídea, siendo los factores de proporcionalidad correspondientes $w_1 = 5$, $w_2 = 4$ y $w_3 = 3$. Como región factible S se ha considerado el rectángulo determinado por los puntos $(-2, -3)$, $(-2, 5)$, $(8, 5)$ y $(8, -3)$.

Las dos regiones de Voronoi V_1 y V_2 a que dan lugar R_1 y R_2 están separadas por dos semirectas unidas por un arco de parábola. Por otra parte, la solución óptima del problema de Weber resulta ser el punto de coordenadas $(2.6030, 0.6673)$, que pertenece a la región de Voronoi V_1 , ($k = 1$), y es factible.

En la figura 2.6 se muestran las curvas C_0^1 , C_1^1 y C_2^1 , así como el conjunto \tilde{C}_1^1 empleando trazos resaltados. \square

El conjunto \tilde{C}_j^k puede descomponerse en un número finito de arcos cerrados de cónica, ya que tanto C_j^k como $\text{fr}(V_k)$ y $\text{fr}(S)$ verifican esta propiedad. Para cada

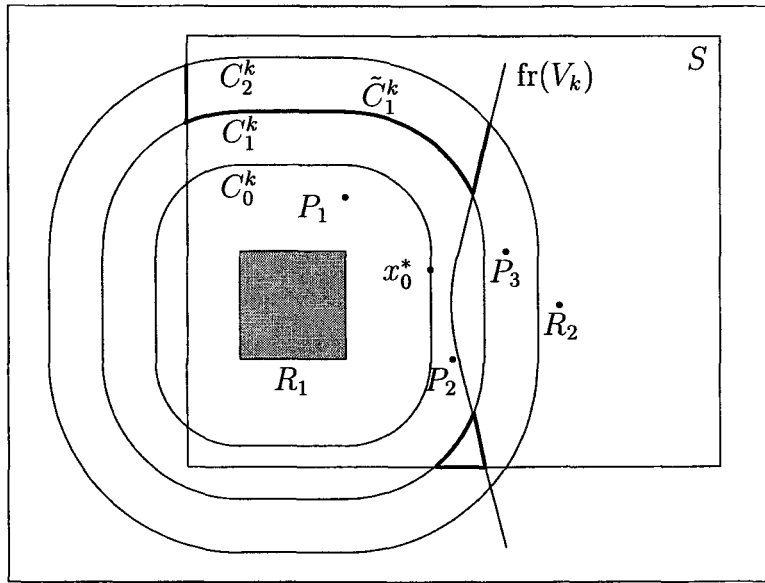


Figura 2.6: Ejemplo de conjunto \tilde{C}_j^k

uno de estos arcos es posible obtener una representación paramétrica d.c. (para simplificar la notación, se omitirán los índices j y k en su definición):

$$\tau_u : t \in [0, 1] \mapsto A_u(t) = (x_u(t), y_u(t)) \quad u = 1, \dots, U_j^k$$

La resolución de (P_j^k) equivale a la resolución de un número finito U_j^k de problemas de la forma

$$\min_{t \in [0, 1]} h(D_1(\gamma_1(A_u(t) - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(A_u(t) - a_n))) \quad u = 1, \dots, U_j^k \quad (2.20)$$

El siguiente resultado proporciona una descomposición d.c. de cada componente de la función objetivo del problema anterior.

Lema 2.13 *Para cada índice $i = 1, \dots, n$ y $u = 1, \dots, U_j^k$, puede determinarse una descomposición d.c. de la función*

$$G_{iu}(t) = D_i(\gamma_i(A_u(t) - a_i)) \quad t \in [0, 1]$$

La demostración es análoga a la del Lema 2.3, teniendo en cuenta que $\tau_u(t) = A(t)$ es d.c. con descomposición conocida, por tratarse de un arco de cónica.

Si la función h es tal que permite obtener una descomposición d.c. para el resultado de su composición con las funciones G_{iu} de la proposición anterior, se tendrá

una descomposición d.c. para la función objetivo de (2.20), por lo que una solución óptima de (P_j^k) podrá obtenerse resolviendo un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensional, en los que la función objetivo presenta una descomposición d.c. conocida. En particular, haciendo uso de la Proposición 1.15 se tiene:

Proposición 2.14 *Supongamos que h es una norma monótona. Entonces, una solución óptima de (P_j^k) puede obtenerse a partir de la resolución de un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensional, para los cuales se dispone de una descomposición d.c. de su función objetivo.*

A continuación se enuncia una propiedad relacionada con los conjuntos R_i , que es consecuencia inmediata de la convexidad de la función *inf*-distancia ([63, 103]).

Propiedad 2.15 *Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ y $R_i \in A^-$ se verifica que*

$$d_R(x, R_i) \leq \max\{d_R(x_1, R_i), d_R(x_2, R_i)\} \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

En particular, dado $R_i \in A^-$, el conjunto $N_\alpha^{(i)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_R(x, R_i) \leq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \geq 0$.

El siguiente lema va a ser de gran importancia a la hora de determinar un conjunto ε -dominante para los elementos de D_j^k .

Lema 2.16 *Para todo $\bar{x} \in D_j^k \cap V_k \cap S$, con $j \geq 0$, se verifica que $[x_0^*, \bar{x}] \cap \tilde{C}_j^k \neq \emptyset$*

Demostración. Podemos suponer que $j > 0$, pues $x_0^* \in \tilde{C}_0^k$ trivialmente. Dado $\bar{x} \in D_j^k \cap V_k \cap S$, se tendrá $d_R(x_0^*, R_k) = r_0 < r_j \leq d_R(\bar{x}, R_k)$, por lo que, por continuidad de la distancia, $[x_0^*, \bar{x}] \cap C_j^k \neq \emptyset$.

Sea $\bar{y} \in [x_0^*, \bar{x}] \cap C_j^k$. Si $\bar{y} \in V_k \cap S$, se sigue inmediatamente que $\bar{y} \in \tilde{C}_j^k$, lo que prueba el resultado en tal caso. Por tanto, supongamos que $\bar{y} \notin V_k \cap S$ y consideremos un punto \hat{y} perteneciente al conjunto $\text{fr}(V_k \cap S) \cap [\bar{x}, \bar{y}]$, que es no vacío, pues $\bar{y} \notin V_k \cap S$, $\bar{x} \in V_k \cap S$ y S es un conjunto robusto.

Veamos a continuación que $\hat{y} \in D_j^k$. El punto \hat{y} debe satisfacer $d_R(\hat{y}, R_k) \geq r_j$ pues, en caso contrario, consideremos $d = \max\{d_R(\hat{y}, R_k), r_0\}$, que es menor estricto que r_j , por serlo tanto r_0 como $d_R(\hat{y}, R_k)$. Teniendo en cuenta que $\bar{y} \in [x_0^*, \hat{y}]$ y que $d_R(\bar{y}, R_k) = r_j > d$, se deduce que $\bar{y} \notin N_d^{(k)}$, lo cual contradice la convexidad de este conjunto, ya que $\hat{y} \in N_d^{(k)}$ y $x_0^* \in N_d^{(k)}$.

Por otra parte, dado que $\bar{y} \in C_j^k$ y $\bar{x} \in D_j^k$, se deduce, aplicando la Propiedad 2.15, que $d_R(\hat{y}, R_k) \leq r_{j+1}$ y, por tanto, $\hat{y} \in D_j^k$, quedando probado el resultado. \square

Haciendo uso de este lema, el siguiente resultado proporciona un conjunto ε -dominante para los puntos factibles de la región de Voronoi V_k que se encuentran a una distancia de R_k comprendida entre r_j y r_{j+1} . En lo que sigue, x_{kj}^* denotará una solución óptima del problema (P_j^k) (obsérvese que $x_{k0}^* = x_0^*$).

Proposición 2.17 Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$ y $j \geq 0$, el punto x_{kj}^* ε -domina a todo punto $\tilde{x} \in D_j^k \cap V_k \cap S$.

Demostración. Dado $\tilde{x} \in D_j^k \cap V_k \cap S$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq m} d_R(\tilde{x}, R_i) &= d_R(\tilde{x}, R_k) \\ &\leq r_{j+1} \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} &= r_j + \varepsilon_2 \\ &\leq d_R(x_{kj}^*, R_k) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x_{kj}^*, R_i) + \varepsilon_2 \tag{2.23}$$

donde (2.21) es consecuencia de $\tilde{x} \in D_j^k$ y (2.22) y (2.23) se deducen de ser $x_{kj}^* \in D_j^k \cap V_k$. Esto prueba la ε -dominancia de x_{kj}^* para la segunda componente de la función objetivo.

Por otra parte, según el Lema 2.16, existe $\hat{x} \in [x_0^*, \tilde{x}] \cap \tilde{C}_j^k \subset S$. Por la convexidad de la función objetivo se tiene que:

$$T_1(x_0^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x})$$

Como el punto x_{kj}^* es el mínimo de T_1 sobre \tilde{C}_j^k , se deduce que:

$$T_1(x_{kj}^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x})$$

por lo que $T_1(x_{kj}^*) \leq T_1(\tilde{x}) + \varepsilon_1$. \square

Paso 4.- Obtener un conjunto ε -dominante para la región de Voronoi V_l , con $l \neq k$. Supongamos que $V_l \cap S \neq \emptyset$ y consideremos el problema

$$(P_l) \quad \min \{T_1(x) : x \in \text{fr}(V_l \cap S)\}$$

el cual posee solución óptima finita, por ser la función objetivo continua y el conjunto factible compacto. Teniendo en cuenta que $\text{fr}(V_l \cap S)$ está formado por arcos de cónica, para cada uno de los cuales puede obtenerse una parametrización d.c., la solución óptima de (P_l) puede encontrarse resolviendo un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensionales. El siguiente resultado prueba que cualquier solución óptima de (P_l) ε -domina a todo punto de V_l que no se encuentre más alejado de R_l que ella.

Proposición 2.18 Para $l \neq k$, sea x_l^* una solución óptima del problema (P_l) y $E_l = \{x \in V_l : d_R(x, R_l) \leq d_R(x_l^*, R_l)\}$. Entonces, dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$, x_l^* ε -domina a todo punto $\tilde{x} \in E_l \cap S$.

Demostración. Sea $\tilde{x} \in E_l \cap S \subset V_l \cap S$. Por ser $x_0^* \in V_k \cap S$, se tiene que $x_0^* \notin \text{int}(V_l \cap S)$ y, en consecuencia, $[x_0^*, \tilde{x}] \cap \text{fr}(V_l \cap S) \neq \emptyset$.

Dado $\hat{x} \in [x_0^*, \tilde{x}] \cap \text{fr}(V_l \cap S)$ se tiene, por la convexidad de la función objetivo y la optimalidad de x_0^* , que:

$$T_1(x_0^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x})$$

Teniendo en cuenta que x_l^* es el mínimo sobre $\text{fr}(V_l \cap S)$ se deduce que:

$$T_1(x_l^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x}) \tag{2.24}$$

Por otra parte, dado que $\tilde{x} \in E_l \subset V_l$ se tiene, por definición de E_l , que:

$$\min_{1 \leq i \leq m} d_R(x_l^*, R_i) = d_R(x_l^*, R_l) \geq d_R(\tilde{x}, R_l) = \min_{1 \leq i \leq m} d_R(\tilde{x}, R_i) \tag{2.25}$$

De (2.24) y (2.25) se deduce que x_l^* ε -domina a \tilde{x} (cualquiera que sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^2$). \square

A continuación se analizará la obtención de un conjunto ε -dominante para los puntos de $(V_l \setminus E_l) \cap S$. De igual forma que en el caso de la región de Voronoi V_k , dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$, se considera la sucesión $\{r_j\}_{j=0}^\infty$ definida de forma recurrente como

$$r_0 = d_R(x_l^*, R_l) \quad r_j = r_{j-1} + \varepsilon_2 \quad j \in \mathbb{N}$$

así como los conjuntos

$$\begin{aligned} C_j^l &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_R(x, R_l) = r_j\} \\ D_j^l &= \{x \in \mathbb{R}^2 : r_j \leq d_R(x, R_l) \leq r_{j+1}\} \end{aligned}$$

La región R_l está delimitada por segmentos rectos y arcos de circunferencia, de donde se deduce que C_j^l puede expresarse como la unión de un número finito de estos elementos. Por otra parte, al ser S acotado, puede asegurarse la existencia de un subíndice $J_l \in \mathbb{N}$ de tal forma que el conjunto $(\bigcup_{j \leq J_l} D_j^l) \cap V_l \cap S$ recubre $(V_l \setminus E_l) \cap S$.

Se tratará ahora de obtener un conjunto ε -dominante para cada conjunto $D_j^l \cap V_l \cap S$, $j \geq 0$. Teniendo en cuenta que un número finito de estos conjuntos recubren $(V_l \setminus E_l) \cap S$, se obtiene así un conjunto ε -dominante finito para este último. Para la determinación de estos ε -dominadores consideremos, para cada índice $j = 1, \dots, J_l$, el conjunto \bar{C}_j^l , definido por:

$$\bar{C}_j^l = ((C_{j-1}^l \cup C_j^l) \cap V_l \cap S) \cup (\text{fr}(V_l \cap S) \cap D_{j-1}^l)$$

así como el problema de optimización

$$(P_j^l) \quad \min \{T_1(x) : x \in \bar{C}_j^l\}$$

Ejemplo 2.19 La figura 2.7 muestra las curvas C_0^2 , C_1^2 y C_2^2 , así como el conjunto \bar{C}_2^2 en trazo resaltado, para el problema considerado en el Ejemplo 2.12. \square

El conjunto \bar{C}_j^l puede descomponerse en un número finito de arcos de cónica, ya que C_{j-1}^l , C_j^l , $\text{fr}(V_l)$ y $\text{fr}(S)$ verifican esta propiedad. Para cada uno de estos arcos es posible obtener una representación paramétrica d.c. (para simplificar la notación, se omitirán los índices j y l en su definición):

$$\tau_u : t \in [0, 1] \mapsto A_u(t) = (x_u(t), y_u(t)) \quad u = 1, \dots, U_j^l$$

La resolución de (P_j^k) equivale a la resolución de un número finito U_j^l de problemas de la forma

$$\min_{t \in [0, 1]} h(D_1(\gamma_1(A_u(t) - a_1)), \dots, D_n(\gamma_n(A_u(t) - a_n))) \quad u = 1, \dots, U_j^l \quad (2.26)$$

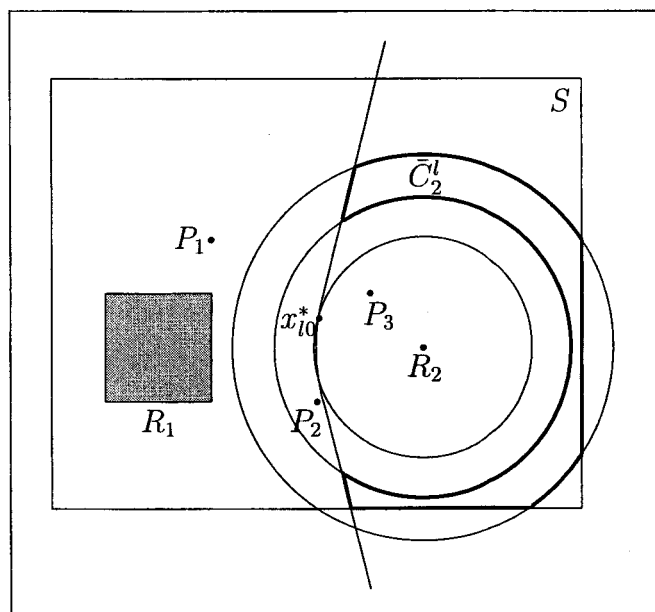


Figura 2.7: Ejemplo de conjunto \bar{C}_j^l

Siguiendo el razonamiento empleado en el caso de la región de Voronoi V_k , la Proposición 1.12 permite obtener una descomposición d.c. para cada componente de la función objetivo de (2.26), quedando probado el siguiente resultado:

Lema 2.20 *Para cada índice $i = 1, \dots, n$ y $u = 1, \dots, U_j^l$, puede determinarse una descomposición d.c. de la función*

$$G_{iu}(t) = D_i(\gamma_i(A_u(t) - a_i)) \quad t \in [0, 1]$$

De nuevo, si la función h es tal que permite obtener una descomposición d.c. para el resultado de su composición con las funciones G_{iu} de la proposición anterior, se tendrá una descomposición d.c. para la función objetivo de (2.26), por lo que una solución óptima de (P_j^l) podrá obtenerse resolviendo un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensional, en los que la función objetivo presenta una descomposición d.c. conocida. En particular, haciendo uso de la Proposición 1.15 se tiene:

Proposición 2.21 *Supongamos que h es una norma monótona. Entonces, una solución óptima de (P_j^l) puede obtenerse a partir de la resolución de un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensional, para los cuales se dispone de una descomposición d.c. de su función objetivo.*

En adelante, x_j^* denotará una solución óptima del problema (P_j^l) .

Al igual que en el caso de la región de Voronoi V_k , comenzaremos con un lema que desempeñará un papel importante en la determinación de un conjunto ε -dominante para los conjuntos D_j^l .

Lema 2.22 *Para todo $\bar{x} \in D_{j-1}^l \cap V_l \cap S$, $j \geq 1$, se verifica que $[x_0^*, \bar{x}] \cap \bar{C}_j^l \neq \emptyset$*

Demostración. Dado $\bar{x} \in D_{j-1}^l \cap V_l \cap S$, se tiene $\text{fr}(V_l \cap S) \cap [x_0^*, \bar{x}] \neq \emptyset$ ya que $x_0^* \notin \text{int}(V_l \cap S)$. Sea $\bar{y} \in \text{fr}(V_l \cap S) \cap [x_0^*, \bar{x}]$; si $\bar{y} \in D_{j-1}^l$, se sigue inmediatamente que $\bar{y} \in \bar{C}_j^l$, por lo que supondremos $\bar{y} \notin D_{j-1}^l$.

Se probará a continuación que $(C_{j-1}^l \cup C_j^l) \cap [\bar{x}, \bar{y}] \neq \emptyset$. En efecto, por ser $\bar{y} \notin D_{j-1}^l$, se tendrá que verificar $d_R(\bar{y}, R_l) < r_{j-1}$ o $d_R(\bar{y}, R_l) > r_j$; teniendo en cuenta que $\bar{x} \in D_{j-1}^l$ deberá existir, por continuidad de la distancia, un punto $z \in [\bar{x}, \bar{y}]$ verificando $d_R(z, R_l) = r_{j-1}$ o $d_R(z, R_l) = r_j$, es decir, $(C_{j-1}^l \cup C_j^l) \cap [\bar{x}, \bar{y}] \neq \emptyset$.

Consideremos el problema de optimización

$$\min \left\{ \|x - \bar{x}\|_2 : x \in (C_{j-1}^l \cup C_j^l \cup \text{fr}(V_l \cap S)) \cap [\bar{x}, \bar{y}] \right\} \quad (2.27)$$

que posee solución óptima finita, por ser la función objetivo continua y el conjunto factible compacto y no vacío. Sea \hat{y} una solución óptima de este problema, que verificará $\hat{y} \in V_l \cap S$. En efecto, por ser $\bar{x} \in V_l \cap S$ y S robusto, si $\hat{y} \notin V_l \cap S$ debe existir un punto $u \in \text{fr}(V_l \cap S) \cap [\bar{x}, \hat{y}]$ a menor distancia de \bar{x} que \hat{y} , lo cual contradice el hecho de ser \hat{y} solución óptima de (2.27).

Si $\hat{y} \in C_{j-1}^l \cup C_j^l$, se deduce inmediatamente que $\hat{y} \in \bar{C}_j^l$, quedando probado el resultado. Por tanto, supongamos $\hat{y} \notin C_{j-1}^l \cup C_j^l$, por lo que, según la definición de \hat{y} , se tendrá $\hat{y} \in \text{fr}(V_l \cap S)$.

A continuación se probará que $\hat{y} \in D_{j-1}^l$. En efecto, si $\hat{y} \notin D_{j-1}^l$, deberá verificarse $d_R(\hat{y}, R_l) < r_{j-1}$ o $d_R(\hat{y}, R_l) > r_j$. Supongamos $d_R(\hat{y}, R_l) < r_{j-1}$; teniendo en cuenta que $r_{j-1} \leq d_R(\bar{x}, R_l)$, por continuidad de la distancia se deduce la existencia de $z \in C_{j-1}^l \cap [\bar{x}, \hat{y}]$. Este punto z es factible para el problema (2.27) y mejora el valor objetivo proporcionado por \hat{y} , lo cual supone una contradicción. La demostración es análoga en el caso en que $d_R(\hat{y}, R_l) > r_j$.

Por tanto, $\hat{y} \in \text{fr}(V_l \cap S) \cap D_{j-1}^l \subset \bar{C}_j^l$, concluyendo la demostración. \square

A continuación se presenta un resultado que permite determinar un conjunto ε -dominante para todos los puntos factibles de V_l que se encuentren a una distancia de R_l comprendida entre r_{j-1} y r_j .

Proposición 2.23 Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^2$ y $j \geq 1$, el punto x_{lj}^* ε -domina a todo punto $\tilde{x} \in D_{j-1}^l \cap V_l \cap S$.

Demostración. Dado $\tilde{x} \in D_{j-1}^l \cap V_l \cap S$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq m} d_R(\tilde{x}, R_i) &= d_R(\tilde{x}, R_l) \\ &\leq r_j \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} &= r_{j-1} + \varepsilon_2 \\ &\leq d_R(x_{lj}^*, R_l) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m} d_R(x_{lj}^*, R_i) + \varepsilon_2 \tag{2.30}$$

donde (2.28) es consecuencia de $\tilde{x} \in D_{j-1}^k$ y (2.29) y (2.30) se deducen de ser $x_{lj}^* \in D_{j-1}^l \cap V_l$. Por tanto, $T_2(x_{lj}^*) \geq T_2(\tilde{x}) - \varepsilon_2$. Esto prueba la ε -dominancia de x_{lj}^* para la segunda componente de la función objetivo.

Por otra parte, según el Lema 2.22, existe $\hat{x} \in [x_0^*, \tilde{x}] \cap \bar{C}_l^k \subset S$. Por la convexidad de la función objetivo se tiene que:

$$T_1(x_0^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x})$$

Como el punto x_{lj}^* es el mínimo de T_1 sobre \bar{C}_j^l , se deduce que:

$$T_1(x_{lj}^*) \leq T_1(\hat{x}) \leq T_1(\tilde{x})$$

por lo que $T_1(x_{lj}^*) \leq T_1(\tilde{x}) + \varepsilon_1$, cualquiera que sea $\varepsilon_1 > 0$. □

Paso 5.- Suprimir soluciones ε -dominadas del conjunto obtenido en las etapas anteriores. En este paso se tratará de eliminar del conjunto S^* aquellos puntos que estén dominados por algún otro elemento de este conjunto perteneciente a una región de Voronoi distinta. Para ello puede utilizarse el siguiente esquema:

1. Ordenar los elementos de S^* según valores crecientes de T_1 .
2. Recorrer la lista y eliminar aquellos puntos x_j^* que presenten un valor objetivo T_2 menor o igual que su predecesor, es decir, si $T_2(x_j^*) \leq T_2(x_{j-1}^*)$ se elimina x_j^* de la lista.

A modo de resumen, se muestra a continuación una descripción esquemática del algoritmo.

Algoritmo 2.24

Paso 0.- Inicialización

0.1.- Hacer $S^* := \emptyset$.

0.2.- Elegir $\varepsilon_2 > 0$.

Paso 1.- Resolución del problema determinado por el primer objetivo

1.1.- Determinar $x_0^* \in \arg \min\{T_1(x) : x \in \mathbb{R}^2\}$.

Paso 2.- Construcción del diagrama de Voronoi de A^-

2.1.- Construir el diagrama de Voronoi $\mathcal{V}(A^-) = \{V_i\}_{i=1}^N$ asociado a las regiones R_i .

2.2.- Determinar una región de Voronoi V_k tal que $x_0^* \in V_k$.

Paso 3.- Obtención de un conjunto ε -dominante para V_k

3.1.- Si x_0^* no es factible:

3.1.1.- Hacer $V_{N+1} := V_k \cap S$, $\mathcal{V}(A^-) := \mathcal{V}(A^-) \cup \{V_{N+1}\}$, $N := N + 1$

3.1.2.- Ir al Paso 4.

3.2.- Hacer $r_0 := d_R(x_0^*, R_k)$

3.3.- Repetir para $j = 0, 1, \dots$

3.3.1.- Hacer $r_{j+1} := r_j + \varepsilon_2$.

3.3.2.- Hacer

$$C_j^k := \{x \in \mathbb{R}^2 : d_R(x, R_k) = r_j\}$$

$$D_j^k := \{x \in \mathbb{R}^2 : r_j \leq d_R(x, R_k) \leq r_{j+1}\}$$

$$\tilde{C}_j^k := (C_j^k \cap V_k \cap S) \cup (\text{fr}(V_k \cap S) \cap D_j^k)$$

3.3.3.- Si $\tilde{C}_j^k = \emptyset$, ir al Paso 4.

3.3.4.- Determinar $x_{kj}^* \in \arg \min\{T_1(x) : x \in \tilde{C}_j^k\}$

3.3.5.- Hacer $S^* := S^* \cup \{x_{kj}^*\}$

Paso 4.- Obtención de un conjunto ε -dominante para V_l , con $l \neq k$

4.1.- Repetir para $l = 1, \dots, N$, $l \neq k$

4.1.1.- Si $V_l \cap S = \emptyset$, pasar a la siguiente iteración.

4.1.2.- Determinar $x_l^* \in \arg \min\{T_1(x) : x \in \text{fr}(V_l \cap S)\}$

4.1.3.- Hacer $S^* := S^* \cup \{x_l^*\}$.

4.1.4.- Hacer $r_0 := d_R(x_l^*, R_l)$.

4.1.5.- Repetir para $j = 1, 2, \dots$

4.1.5.1.- Hacer $r_j := r_{j-1} + \varepsilon_2$.

4.1.5.2.- Hacer $\bar{C}_j^l := ((C_{j-1}^l \cup C_j^l) \cap V_l \cap S) \cup (\text{fr}(V_l \cap S) \cap D_{j-1}^l)$

4.1.5.3.- Si $\bar{C}_j^l = \emptyset$, ir al Paso 5.

4.1.5.4.- Determinar $x_{lj}^* \in \arg \min\{T_1(x) : x \in \bar{C}_j^l\}$

4.1.5.5.- Hacer $S^* := S^* \cup \{x_{ij}^*\}$

Paso 5.- Depuración del conjunto ε -dominante

5.1.- Ordenar los elementos de S^* según valores crecientes de T_1 .

5.2.- Recorrer S^* y eliminar aquellos puntos $x_j^* \in S^*$ tales que $T_2(x_j^*) \leq T_2(x_{j-1}^*)$.

A continuación se muestran dos ejemplos de aplicación del algoritmo propuesto.

Ejemplo 2.25 Se considera la obtención de un conjunto ε -dominante para el problema expuesto en el Ejemplo 2.12, tomando $\varepsilon_2 = 1$. Como ya se indicó con anterioridad, la solución óptima del problema de Weber sin restricciones corresponde al punto $x_{1,0}^* = (2.6030, 0.6673)$, por lo que $r_0 = 1.6030$.

Con objeto de simplificar la descripción de los subproblemas que aparecen en la distintas etapas, se utilizará la siguiente notación:

- $Seg(P_1, P_2)$: Segmento recto de extremos P_1 y P_2 .
- $Cir(C, P_1, P_2)$: Arco de circunferencia con centro C , de extremos P_1 y P_2 en el sentido de las agujas del reloj.
- $Par(P_1, P_2)$: Arco de parábola con foco $(5, 0)$ y directriz $x = 1$, de extremos P_1 y P_2 .

Continuando con la región de Voronoi V_1 , para $r_1 = 2.6030$, el conjunto \tilde{C}_1^1 resulta ser la unión de los siguientes arcos:

$$\begin{array}{cccc} Seg(A_1, A_2) & Cir(C_1, A_3, A_2) & Seg(A_3, A_4) & Cir(C_2, A_5, A_4) \\ Seg(A_5, A_6) & Cir(C_3, A_7, A_8) & Seg(A_8, A_9) & Seg(A_9, A_7) \end{array}$$

siendo

$$\begin{array}{lll} C_1 = (-1.0000, 1.0000) & C_2 = (1.0000, 1.0000) & C_3 = (1.0000, -1.0000) \\ A_1 = (-2.0000, 4.4614) & A_2 = (-2.0000, 3.4032) & A_3 = (-1.0000, 3.6030) \\ A_4 = (1.0000, 3.6030) & A_5 = (3.3854, 2.0417) & A_6 = (3.7166, 3.3667) \\ A_7 = (3.3854, -2.0417) & A_8 = (2.6660, -3.0000) & A_9 = (3.6250, -3.0000) \end{array}$$

La resolución de P_1^1 proporciona como solución óptima $x_{1,1}^* = (3.3854, 2.0417)$.

Para $r_2 = 3.6030$, el conjunto \tilde{C}_2^1 queda definido por:

$$\begin{array}{ccc} Seg(A_1, A_2) & Seg(A_2, A_3) & Cir(C_1, A_4, A_3) \\ Seg(A_4, A_5) & Cir(C_2, A_6, A_5) & Seg(A_6, A_7) \end{array}$$

siendo

$$\begin{aligned} C_1 &= (-1.0000, 1.0000) & C_2 &= (1.0000, 1.0000) & A_1 &= (3.2776, 5.0000) \\ A_2 &= (-2.0000, 5.0000) & A_3 &= (-2.0000, 4.4614) & A_4 &= (-1.0000, 4.6030) \\ A_5 &= (1.0000, 4.6030) & A_6 &= (3.7166, 3.3667) & A_7 &= (3.9981, 4.4926) \end{aligned}$$

La resolución de P_2^1 proporciona como solución óptima $x_{1,2}^* = (3.7166, 3.3667)$.

Para $r_3 = 4.6030$, el conjunto \tilde{C}_3^1 queda definido por:

$$\text{Seg}(A_1, A_2) \quad \text{Cir}(C_1, A_2, A_3) \quad \text{Seg}(A_3, A_1)$$

siendo

$$\begin{aligned} C_1 &= (1.0000, 1.0000) & A_1 &= (4.1250, 5.0000) \\ A_2 &= (3.9981, 4.4926) & A_3 &= (3.2776, 5.0000) \end{aligned}$$

La resolución de P_3^1 proporciona como solución óptima $x_{1,3}^* = (3.9981, 4.4926)$.

La región V_1 queda de esta forma totalmente cubierta, por lo que consideramos ahora la región V_2 . La frontera de $V_2 \cap S$ viene dada por los siguientes arcos de curva:

$$\begin{aligned} \text{Seg}(A_1, A_2) & \quad \text{Seg}(A_2, A_3) & \quad \text{Seg}(A_3, A_4) \\ \text{Seg}(A_4, A_5) & \quad \text{Seg}(A_5, A_6) & \quad \text{Par}(A_6, A_1) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} A_1 &= (3.1250, 1.0000) & A_2 &= (4.1250, 5.0000) & A_3 &= (8.0000, 5.0000) \\ A_4 &= (8.0000, -3.0000) & A_5 &= (3.6250, -3.0000) & A_6 &= (3.125, -1.0000) \end{aligned}$$

La solución óptima del problema de Weber sobre $\text{fr}(V_2 \cap S)$ corresponde al punto $x_{2,0}^* = (3.0368, 0.5427)$, por lo que $r_0 = 2.0368$

Para $r_1 = 3.0368$, el conjunto \tilde{C}_1^2 queda definido por:

$$\begin{aligned} \text{Seg}(A_1, A_2) & \quad \text{Cir}(C, A_2, A_3) & \quad \text{Seg}(A_3, A_4) & \quad \text{Par}(A_4, A_5) \\ \text{Seg}(A_5, A_6) & \quad \text{Cir}(C, A_6, A_7) & \quad \text{Seg}(A_7, A_8) & \quad \text{Cir}(C, A_8, A_1) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} C &= (5.0000, 0.0000) & A_1 &= (8.0000, -0.4714) & A_2 &= (8.0000, 0.4714) \\ A_3 &= (3.5408, 2.6632) & A_4 &= (3.0368, 0.5427) & A_5 &= (3.0368, -0.5427) \\ A_6 &= (3.5408, -2.6632) & A_7 &= (4.5285, -3.0000) & A_8 &= (5.4714, -3.0000) \end{aligned}$$

La resolución de P_1^2 proporciona como solución óptima $x_{2,1}^* = (3.0368, 0.5427)$.

Para $r_2 = 4.0368$, el conjunto \bar{C}_2^2 viene definido por:

$$\begin{array}{cccc} \text{Seg}(A_1, A_2) & \text{Cir}(C, A_2, A_3) & \text{Seg}(A_3, A_4) & \text{Cir}(C, A_1, A_4) \\ \text{Seg}(A_5, A_6) & \text{Cir}(C, A_5, A_7) & \text{Seg}(A_6, A_7) & \text{Seg}(A_8, A_9) \\ \text{Cir}(C, A_9, A_{10}) & \text{Seg}(A_{10}, A_{11}) & \text{Cir}(C, A_8, A_{11}) & \end{array}$$

siendo

$$\begin{array}{lll} C = (5.0000, 0.0000) & A_1 = (8.0000, 0.4714) & A_2 = (8.0000, -2.7011) \\ A_3 = (3.8417, 3.8671) & A_4 = (3.5408, 2.6632) & A_5 = (3.5408, -2.6632) \\ A_6 = (3.6250, -3.0000) & A_7 = (4.5285, -3.0000) & A_8 = (5.4714, -3.0000) \\ A_9 = (7.7011, -3.0000) & A_{10} = (8.0000, 2.7011) & A_{11} = (8.0000, -0.4714) \end{array}$$

La resolución de P_2^2 proporciona como solución óptima $x_{2,2}^* = (3.5408, 2.6632)$.

Para $r_3 = 5.0368$, el conjunto \bar{C}_3^2 viene definido por:

$$\begin{array}{cccc} \text{Cir}(C, A_1, A_2) & \text{Seg}(A_2, A_3) & \text{Cir}(C, A_3, A_4) & \text{Seg}(A_4, A_5) \\ \text{Cir}(C, A_5, A_6) & \text{Seg}(A_6, A_1) & \text{Seg}(A_7, A_8) & \text{Seg}(A_8, A_9) \\ \text{Cir}(C, A_7, A_9) & & & \end{array}$$

siendo

$$\begin{array}{lll} C = (5.0000, 0.0000) & A_1 = (8.0000, 4.0459) & A_2 = (5.6079, 5.0000) \\ A_3 = (4.3920, 5.0000) & A_4 = (4.1145, 4.9583) & A_5 = (3.8417, 3.8671) \\ A_6 = (8.0000, -2.7011) & A_7 = (7.7011, -3.0000) & A_8 = (8.0000, -3.0000) \\ A_9 = (8.0000, 2.7011) & & \end{array}$$

La resolución de P_3^2 proporciona como solución óptima $x_{2,3}^* = (3.8417, 3.8671)$.

Para $r_4 = 6.0368$, el conjunto \bar{C}_4^2 queda definido por:

$$\begin{array}{ccc} \text{Seg}(A_1, A_2) & \text{Seg}(A_2, A_3) & \text{Cir}(A_1, A_3) \\ \text{Seg}(A_4, A_5) & \text{Seg}(A_5, A_6) & \text{Cir}(A_4, A_6) \end{array}$$

siendo

$$\begin{array}{lll} C = (5.0000, 0.0000) & A_1 = (8.0000, 4.0459) & A_2 = (8.0000, 5.0000) \\ A_3 = (5.6079, 5.0000) & A_4 = (4.3920, 5.0000) & A_5 = (4.1250, 5.0000) \\ A_6 = (4.1145, 4.9583) & & \end{array}$$

La resolución de P_4^2 proporciona como solución óptima $x_{2,4}^* = (4.1145, 4.9583)$. Con esto la región V_2 queda totalmente cubierta, por lo que se obtiene el conjunto ε -dominante que figura en la Tabla 2.6. \square

Punto	T_1	T_2
(2.6030,0.6673)	21.5870	1.6030
(3.3854,2.0417)	27.8219	2.6030
(3.7166,3.3667)	40.0567	3.6030
(3.9981,4.4926)	52.3034	4.6030
(3.0368,0.5427)	21.8935	2.0368
(3.5408,2.6632)	33.1183	3.0368
(3.8417,3.8671)	45.3731	4.0368
(4.1145,4.9583)	57.6055	5.0368

Tabla 2.6: Conjunto ε -dominante (Ejemplo 2.25)

Ejemplo 2.26 Se considera el problema de localización de un servicio semi-repulsivo, en el que el objetivo T_1 viene dado por la suma de los costos de transporte a los puntos de demanda, siendo éstos proporcionales a la distancia euclídea. El conjunto de elementos negativamente afectados por la instalación del servicio está formado por 100 puntos, cuyas coordenadas figuran en la Tabla 2.7; se ha considerado también un conjunto de 13 puntos de demanda, cuyas coordenadas y pesos asociados aparecen reflejados en la Tabla 2.8. Su disposición en el plano, así como el diagrama de Voronoi correspondiente a los puntos negativamente afectados, pueden ser observados en la Figura 2.8.

La aplicación del algoritmo descrito con anterioridad, tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, proporcionó un conjunto ε -dominante formado por 39 puntos, cuyas coordenadas y valores objetivo se recogen en la Tabla 2.9. Dicho conjunto de puntos aparece también representado en las Figuras 2.9 (coordenadas de los puntos) y 2.10 (valores objetivo).

La implementación computacional del algoritmo, a partir de la cual se han obtenido estos resultados, ha sido realizada en lenguaje C++, y en ella se ha hecho uso de la librería de objetos LEDA (Library of Efficient Data types and Algorithms), [83, 84, 85], desarrollada por el Instituto Max Plank de Informática. \square

Puntos repulsivos									
(5,17)	(5,54)	(7,14)	(7,61)	(7,67)	(8,14)	(8,20)	(9,42)	(9,74)	(11,76)
(12,76)	(13,20)	(15,10)	(17,10)	(18,91)	(19,37)	(20,33)	(20,53)	(21,58)	(21,92)
(22,65)	(23,31)	(23,38)	(23,49)	(23,72)	(23,95)	(24,18)	(24,77)	(25,45)	(26,40)
(26,67)	(27,52)	(28,70)	(31,44)	(34,82)	(36,58)	(37,25)	(38,61)	(40,9)	(41,12)
(41,60)	(42,25)	(43,12)	(46,63)	(48,11)	(49,34)	(49,51)	(49,57)	(50,52)	(50,54)
(50,63)	(52,89)	(54,8)	(55,95)	(56,91)	(58,69)	(58,93)	(59,60)	(62,70)	(62,79)
(63,37)	(65,12)	(66,89)	(67,79)	(67,83)	(69,18)	(69,81)	(70,6)	(70,12)	(70,25)
(70,37)	(70,44)	(70,54)	(70,57)	(71,17)	(71,42)	(71,53)	(72,56)	(74,79)	(74,95)
(75,58)	(77,54)	(77,93)	(79,41)	(79,53)	(80,38)	(81,21)	(81,69)	(83,53)	(83,56)
(84,92)	(87,49)	(89,36)	(89,38)	(90,71)	(90,84)	(92,9)	(93,23)	(93,75)	(94,47)

Tabla 2.7: Conjunto de puntos repulsivos (Ejemplo 2.26)

P_i	w_i	P_i	w_i
(25,27)	1	(30,20)	1
(31,31)	1	(32,27)	1
(34,31)	1	(35,22)	1
(36,41)	1	(37,43)	1
(38,35)	1	(39,29)	1
(40,29)	1	(45,33)	1
(90,70)	12		

Tabla 2.8: Puntos atractivos y pesos asociados (Ejemplo 2.26)

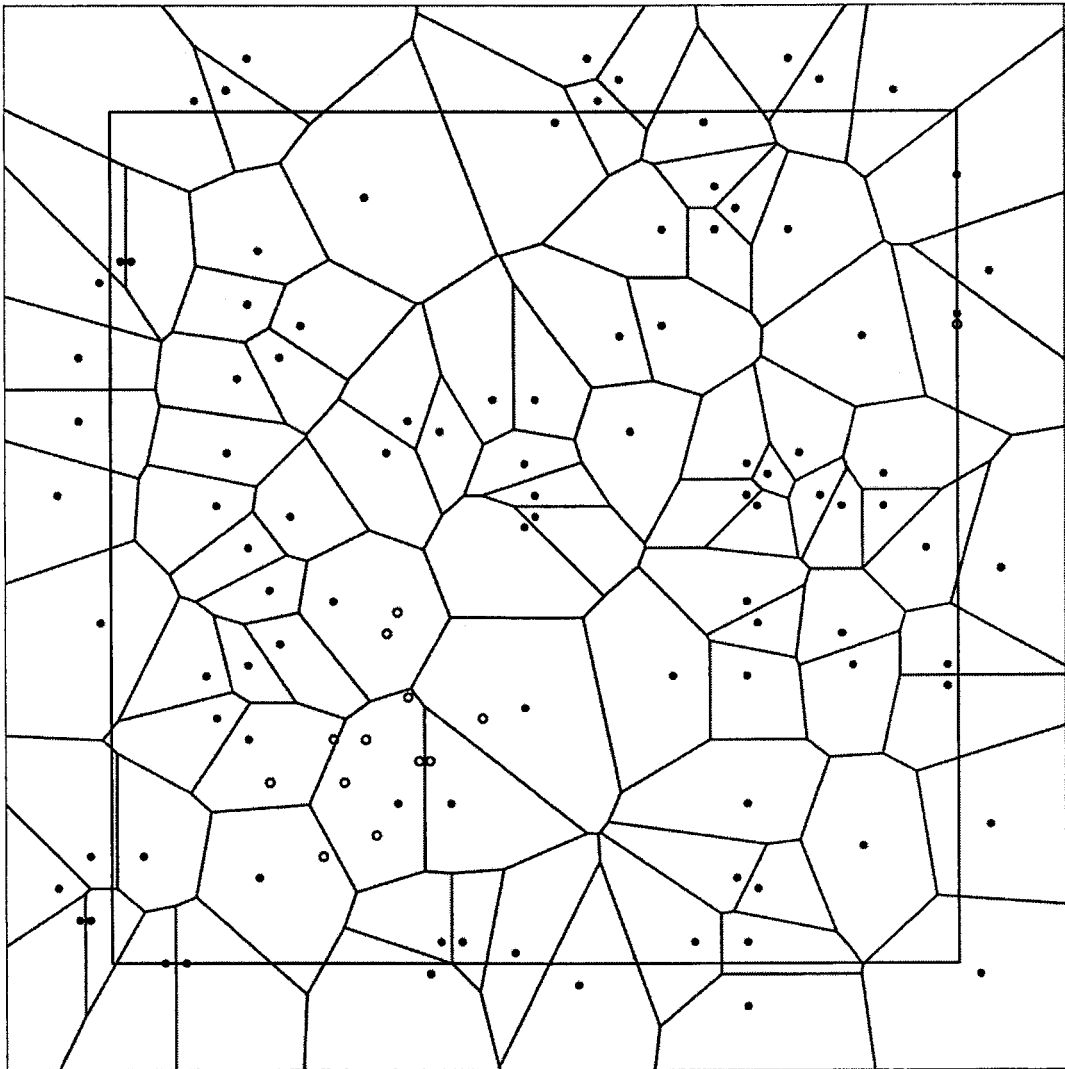


Figura 2.8: Región Factible y Diagrama de Voronoi (Ejemplo 2.26)

E_i	T_1	T_2	E_i	T_1	T_2
(41.622,41.919)	839.679	10.824	(41.957,42.500)	839.717	11.039
(56.043,22.304)	984.539	13.653	(56.846,23.308)	973.671	13.262
(56.869,23.361)	973.040	13.233	(57.100,23.901)	966.700	12.946
(57.285,24.331)	961.783	12.733	(57.554,24.959)	954.782	12.446
(57.776,25.478)	949.172	12.233	(57.814,27.036)	930.581	11.233
(57.831,26.954)	931.608	11.298	(57.948,26.410)	938.514	11.733
(57.965,26.331)	939.541	11.798	(58.105,26.103)	942.882	11.946
(59.714,47.286)	815.611	10.798	(60.464,49.000)	814.932	10.767
(60.650,49.217)	814.881	10.503	(61.063,49.508)	814.790	10.003
(61.476,49.799)	814.703	9.503	(61.890,50.091)	814.618	9.003
(62.304,50.384)	814.536	8.503	(62.719,50.678)	814.457	8.003
(63.135,50.973)	814.380	7.503	(63.552,51.269)	814.306	7.003
(79.652,62.599)	812.571	6.542	(79.830,62.698)	812.561	6.410
(80.310,62.240)	812.841	6.795	(80.428,63.118)	812.523	5.910
(86.114,67.237)	812.198	5.410	(86.151,67.071)	812.231	5.500
(86.458,67.471)	812.182	5.000	(86.871,67.766)	812.162	4.500
(87.286,68.062)	812.142	4.000	(87.703,68.359)	812.122	3.500
(88.123,68.659)	812.103	3.000	(88.550,68.963)	812.083	2.500
(88.987,69.275)	812.064	2.000	(89.449,69.605)	812.043	1.500
(90.000,70.000)	812.019	1.000			

Tabla 2.9: Conjunto ε -dominante y valores objetivo (Ejemplo 2.26)

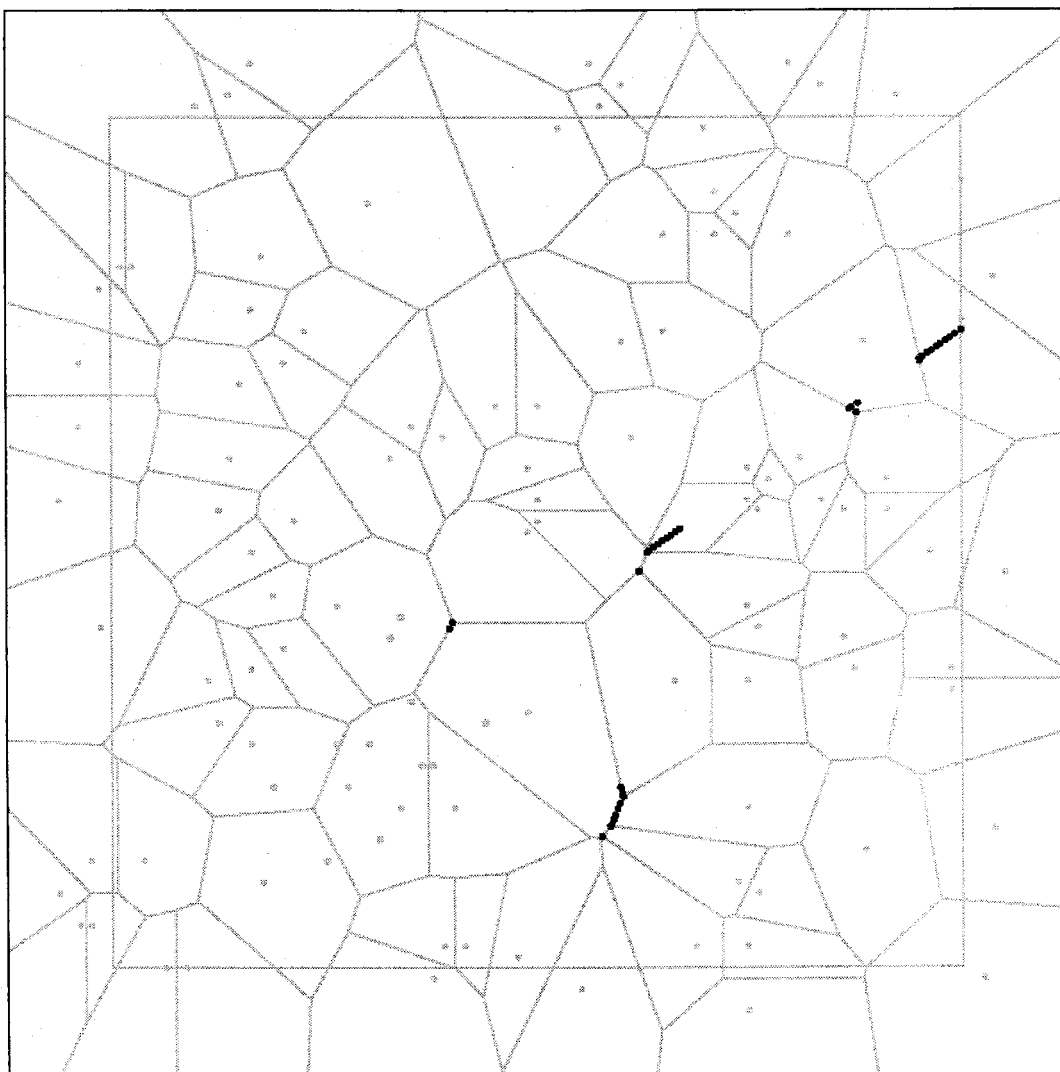


Figura 2.9: Conjunto ε -dominante (Ejemplo 2.26)

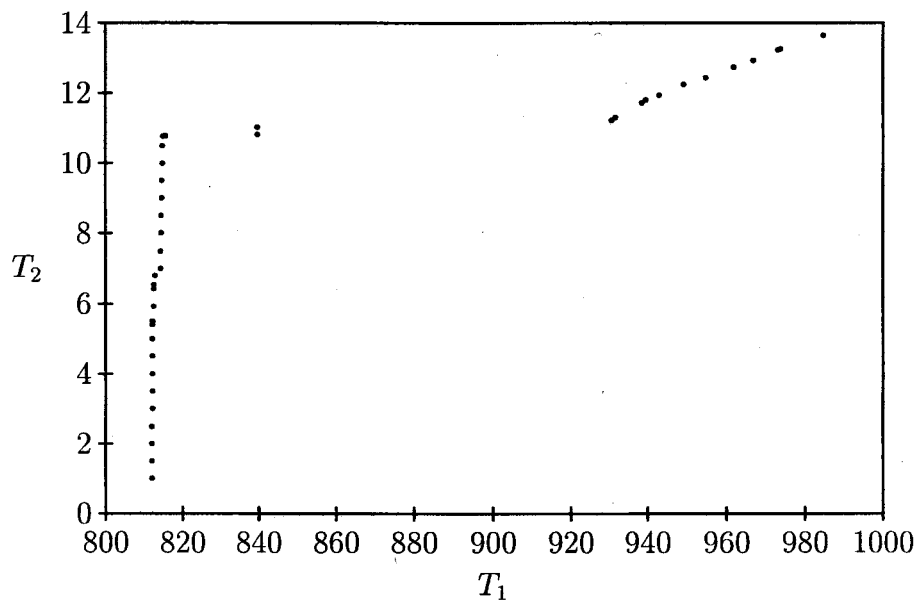


Figura 2.10: Comparación de objetivos sobre el conjunto ε -dominante (Ejemplo 2.26)

Capítulo 3

Localización de un Servicio fuera de la Red de Transporte

3.1 Introducción

Los modelos de localización sobre redes, [31, 77], tratan el problema de encontrar la ubicación óptima de servicios cuando, tanto los posibles usuarios como el conjunto de puntos admisibles para establecer los servidores, forman parte de un grafo; éste, por lo general, representa algún tipo de red de comunicaciones ya existente. Así, en el problema de localización de un único servicio, se pretende encontrar la ubicación en el grafo de un servidor que haga mínima alguna función de los costos de transporte a los distintos usuarios.

Sin embargo, cuando el servicio que se pretende instalar ejerce algún tipo de efecto perjudicial sobre el conjunto de residentes, la limitación de las posibles ubicaciones del nuevo servidor a los puntos del grafo es, cuando menos, cuestionable, especialmente si se tiene en cuenta que, en muchas ocasiones, los elementos afectados negativamente se encuentran sobre la propia red o en sus proximidades. Un enfoque realista del problema llevaría a considerar la posibilidad de ubicar el nuevo servicio fuera de la red de transporte. Así, en [34], Drezner y Wesolowsky consideran el problema de encontrar un punto en el interior de una red planar, cuyos arcos vienen dados por segmentos rectos, de tal modo que se maximice la distancia (euclídea) ponderada entre el punto y los nodos y arcos de la red; este modelo sólo considera el carácter repulsivo del servicio, ignorando por completo los costos de transporte, situación que difícilmente se producirá en la práctica.

Los modelos que consideren la posibilidad de ubicación fuera de la red, deberán tener en cuenta, además de los costos de transporte sobre la red y los derivados del efecto repulsivo, los costos de construcción y posterior uso del enlace que una la red existente con el nuevo servidor. En esta línea, Erkut propone en [37] un modelo de localización cuyas variables de decisión son, precisamente, la ubicación del nuevo servicio y el punto de la red de transporte del cual partirá la vía de enlace con el servidor. En este modelo, en el que no se considera el carácter repulsivo del nuevo servicio, el conjunto de posibles ubicaciones del servidor es finito, por lo que el problema puede resolverse de forma enumerativa.

En el modelo de Erkut aparecen involucradas dos medidas de distancia diferentes: por una parte, la distancia de viaje sobre la red y, por otra parte, la distancia euclídea sobre el enlace con el nuevo servidor. No es frecuente en la literatura sobre Localización la aparición de trabajos con esta característica. Otro ejemplo puede encontrarse en [8], en el que se consideran regiones planas, sobre las que se utiliza la norma L_1 , y componentes de una red, haciendo uso en este caso de la distancia de viaje en el grafo.

En las páginas que siguen a continuación se considerará el modelo propuesto por Erkut, pero suponiendo que el conjunto de posibles localizaciones para el servidor es un conjunto robusto arbitrario de \mathbb{R}^2 . Se asumirá también que el nuevo servicio ejerce un efecto repulsivo, cuyo costo social es combinado con los costos de transporte mediante una función de utilidad lineal.

Tras un estudio sobre la existencia de soluciones óptimas en el caso general, se trata en profundidad la existencia y localización de soluciones para el problema con decaimiento lineal en el efecto repulsivo; en particular, si la distancia que se considera sobre el plano es la euclídea y la región factible es poligonal, se prueba que una solución óptima puede determinarse resolviendo un número finito de problemas de optimización d.c. unidimensional. La resolución de estos problemas se realiza por medio de un algoritmo de ramificación y acotación, para el que se proponen reglas de acotación y eliminación de subproblemas que mejoran notablemente el rendimiento computacional con respecto a las estrategias clásicas.

3.2 Formulación del modelo

Sea G un grafo conexo no dirigido, cuyos vértices representan el conjunto de puntos de demanda, para los cuales resultará atractiva la localización en su proximidad del nuevo servicio, y cuyas aristas modelizan la red de comunicaciones existentes. Por otra parte, se considera la existencia de un conjunto de núcleos de población, para los cuales el nuevo servicio tiene la consideración de repulsivo o peligroso.

El objetivo que se persigue es determinar la localización del nuevo servicio, de tal forma que el costo total derivado de la ubicación elegida sea mínimo. Atendiendo a la distinta naturaleza de las instalaciones existentes, pueden establecerse dos costos diferentes en el problema. Por una parte, el costo de transporte a través de la red de comunicaciones desde el nuevo servicio hasta cada uno de los puntos de demanda, usuarios del primero. Por otra, el costo social en que se incurrirá al localizar el nuevo servicio en las proximidades de los núcleos de población existentes. El costo total a minimizar será, por tanto, suma del costo de transporte y el costo social a que da lugar la nueva instalación.

La localización del nuevo servicio no tiene por qué corresponder necesariamente a un punto del grafo, sino que puede tratarse de cualquier punto perteneciente a un conjunto arbitrario de \mathbb{R}^2 . No obstante, si la ubicación elegida no está en el grafo, será precisa la construcción de una vía de comunicación que una ambos, por lo que deberá tenerse en cuenta en el modelo el costo de transporte a través de esta vía, así como el derivado de su construcción.

La resolución del problema no sólo deberá proporcionar en este caso la localización óptima del nuevo servicio, sino también el lugar del grafo más adecuado para la construcción de la vía de enlace. Puede ocurrir que no todos los puntos del grafo sean adecuados para ello, debido a factores geográficos, sociales, medio-ambientales o de cualquier otra índole. Por esta razón, dentro de cada arista sólo se considerará un subconjunto de posibles localizaciones para el punto de enlace, que estará formado por la unión de segmentos cerrados contenidos en la arista.

Teniendo esto en cuenta, el modelo que vamos a considerar es el siguiente:

$$\min_{\substack{F \in S \\ T \in R}} f(F, T) := \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F - T\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - a\|) \quad (3.1)$$

donde (véase la Figura 3.1)

- S es un subconjunto robusto (es decir, S es la clausura de su interior), no vacío, de \mathbb{R}^2 , que representa el conjunto de posibles ubicaciones para el servicio.
- $A^+ \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto finito no vacío de puntos de demanda, que corresponden a los nodos de un grafo conexo y no dirigido $G = (A^+, E)$, inmerso en \mathbb{R}^2 , cuyas aristas son segmentos rectos.
- R es un subconjunto de puntos de E , formado por la unión de un número finito de segmentos cerrados contenidos en las aristas del grafo

$$R = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{i \in I_e} [a_i^{(e)}, b_i^{(e)}] \quad \text{con} \quad [a_i^{(e)}, b_i^{(e)}] \subset e \quad \forall i \in I_e \quad \forall e \in E$$

El conjunto de puntos extremos de los segmentos que componen R se notará V .

$$V = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{i \in I_e} \{a_i^{(e)}, b_i^{(e)}\}$$

- F es el punto de localización del nuevo servicio.
- T es el punto del grafo desde el cual se construirá la vía que enlazará el servidor F con la red de transporte existente.
- ω_a es un peso no negativo que representa el costo de transporte por unidad de distancia para el punto de demanda $a \in A^+$.
- $d(\cdot, \cdot)$ representa la distancia de viaje sobre el grafo.
- K es un peso no negativo que representa el costo de construcción y transporte por unidad de distancia a través de la vía de enlace, es decir, $K = C + \sum_{a \in A^+} \omega_a$.
- $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en \mathbb{R}^2 .
- $A^- \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto finito no vacío, que representa las coordenadas de los núcleos de población, que se ven afectados negativamente por el nuevo servicio.
- $g_a : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, no creciente, que representa el efecto negativo causado por el nuevo servicio sobre el núcleo de población $a \in A^-$ ([27, 38, 72]).

Obsérvese que el problema considerado equivale a aumentar el grafo con dos nuevos nodos, uno de los cuales debe estar situado sobre una de las aristas existentes.

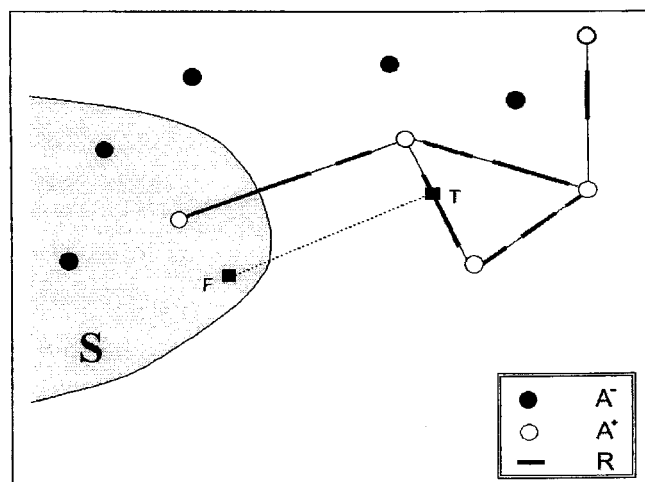


Figura 3.1: Elementos del Modelo (3.1)

3.3 Existencia de soluciones óptimas

Si la región factible S es un conjunto acotado, se tendrá un problema de minimización de una función continua sobre un conjunto compacto, por lo que existirá solución óptima finita.

Lema 3.1 *Supongamos que S es acotado. Entonces el problema de localización (3.1) posee solución óptima finita.*

Si S es no acotado no puede garantizarse la existencia de solución óptima para el problema (3.1). Los resultados que siguen a continuación están encaminados a la determinación de condiciones suficientes que permitan concluir si existe o no solución óptima del problema cuando S no es acotado. El siguiente resultado caracteriza la existencia de solución óptima en términos del comportamiento en el infinito de cierta función relacionada con la determinación de costos en el problema.

Lema 3.2 *Supongamos que S es no acotado. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que el problema (3.1) posea valor objetivo óptimo finito es*

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} > -\infty$$

Además, si el límite anterior es $+\infty$, existe solución óptima finita para (3.1).

Demostración. En primer lugar, observemos que el límite siempre existe (con valor finito o infinito), puesto que la función que en él aparece es convexa. Consideremos una sucesión $\{F_n\} \subset S$ verificando $\lim \|F_n\| = +\infty$. Teniendo en cuenta que $\|F_n\| \leq \|F_n - a\| + \|a\|$, se verificará $\lim \|F_n - a\| = +\infty$ para todo $a \in A^-$. Dado un punto $\tilde{a} \in A^-$, consideramos la celda de Voronoi $B(\tilde{a})$ correspondiente a tal punto, dada por:

$$B(\tilde{a}) = \left\{ F \in S : \|F - \tilde{a}\| = \max_{a \in A^-} \|F - a\| \right\}$$

Por ser A finito, existirá un elemento $\hat{a} \in A^-$ y una subsucesión $\{F_{n_k}\} \subset \{F_n\}$ tal que $F_{n_k} \in B(\hat{a})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Los puntos $F \in B(\hat{a})$ verifican que $g_a(\|F - \hat{a}\|) \leq g_a(\|F - a\|)$ para todo $a \in A^-$, ya que $\|F - \hat{a}\| \geq \|F - a\|$ y g_a es no creciente. Por tanto, fijado $T_0 \in R$, se tendrá para cada punto $F \in B(\hat{a})$

$$\begin{aligned} f(F, T_0) &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \|F - T_0\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - a\|) \\ &\geq \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \left[\|F - \hat{a}\| - \|T_0 - \hat{a}\| \right] + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) \\ &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) - K \|T_0 - \hat{a}\| + K \|F - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) \\ &\geq \min_{T \in R} \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) - K \max_{T \in R} \|T - \hat{a}\| + K \|F - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) \end{aligned}$$

En particular, la desigualdad anterior se verificará para los puntos de la subsucesión $\{F_{n_k}\}$. Entonces, supuesto que $\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} > -\infty$, se tendrá:

$$\lim_{k \uparrow \infty} \left\{ K \|F_{n_k} - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F_{n_k} - \hat{a}\|) \right\} > -\infty$$

de donde se deduce que $\lim_{k \uparrow \infty} f(F_{n_k}, T_0) > -\infty$. Como la acotación establecida no depende del punto T_0 elegido, se tiene garantizada la finitud del valor objetivo óptimo. Además, si $\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = +\infty$, se deduce del desarrollo anterior que $\lim_{k \uparrow \infty} f(F_{n_k}, T_0) = +\infty$, por lo que el problema tendrá solución óptima finita.

Recíprocamente, razonando por reducción al absurdo, supongamos que el problema (3.1) posee valor óptimo finito y que

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = -\infty$$

Dado $\tilde{a} \in A^-$, consideramos la celda de Voronoi correspondiente a tal punto, dada por:

$$V(\tilde{a}) = \left\{ F \in S : \|F - \tilde{a}\| = \min_{a \in A^-} \|F - a\| \right\}$$

Por ser A finito, existirá un elemento $\hat{a} \in A^-$ y una subsucesión $\{F_{n_k}\} \subset \{F_n\}$ tal que $F_{n_k} \in V(\hat{a})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Los puntos $F \in V(\hat{a})$ verifican que $g_a(\|F - \hat{a}\|) \geq g_a(\|F - a\|)$ para todo $a \in A^-$, ya que $\|F - \hat{a}\| \leq \|F - a\|$ y g_a es no creciente. Por tanto, fijado $T_0 \in R$, se tendrá para cada punto $F \in V(\hat{a})$

$$\begin{aligned} f(F, T_0) &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \|F - T_0\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - a\|) \\ &\leq \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \|F - T_0\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) \\ &\leq \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K [\|F - \hat{a}\| + \|T_0 - \hat{a}\|] + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) \\ &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \|F - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - \hat{a}\|) + K \|T_0 - \hat{a}\| \end{aligned}$$

Como consecuencia, todo punto F_{n_k} verificará:

$$f(F_{n_k}, T_0) \leq \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_0) + K \|F_{n_k} - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F_{n_k} - \hat{a}\|) + K \|T_0 - \hat{a}\|$$

Dado que $\lim \|F_{n_k} - \hat{a}\| = +\infty$, se tendrá, por hipótesis

$$\lim \left\{ K \|F_{n_k} - \hat{a}\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F_{n_k} - \hat{a}\|) \right\} = -\infty$$

de donde se deduce que $\lim_{k \uparrow +\infty} f(F_{n_k}, T_0) = -\infty$ □

Un enfoque distinto para la demostración de este resultado puede consultarse en [13]. En este artículo se establece la relación entre (3.1) y el problema de Weber con atracción y repulsión que se obtiene al fijar un punto $T \in R$

$$\min_{F \in S} \Gamma_T(F) := K \|F - T\| + \sum_{a \in A^-} g_a(\|F - a\|)$$

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para determinar si el límite considerado en la caracterización dada en el Lema 3.2 es infinito. En lo que sigue, $g'_{a+}(t)$ denotará la derivada a la derecha de la función convexa g_a .

Lema 3.3 *Se verifica que:*

$$(a) \text{ Si } \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t) \right\} > 0, \text{ entonces } \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = +\infty$$

$$(b) \text{ Si } \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t) \right\} < 0, \text{ entonces } \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = -\infty$$

Demostración. Por ser g_a convexa, [103], la derivada a la derecha g'_{a+} está bien definida, verificándose que $g'_{a+}(t)$ es un subgradiente de g_a en t . Además, si notamos

$$h(t) = Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t)$$

se tendrá que h es una función convexa que satisface $h'_+(t) = K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t)$.

(a) Por ser $\lim_{t \uparrow +\infty} h'_+(t) > 0$, debe existir $M > 0$ de tal forma que $h'_+(t) > 0$ para todo $t \geq M$. Fijado $t_0 \geq M$, la convexidad de h implica que:

$$h(t) \geq h(t_0) + h'_+(t_0)(t - t_0) \quad \forall t > 0$$

Dado que $h'_+(t_0) > 0$, tomando límites ($t \uparrow +\infty$) se verificará

$$\lim_{t \uparrow +\infty} h(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = +\infty$$

(b) Por ser h convexa, se tiene que $h'_+(t)$ es creciente, de donde se deduce que $h'_+(t_0) < 0$ para todo $t_0 > 0$; se tendrá, por tanto:

$$\begin{aligned} h'_+(t_0) < 0 &\Rightarrow \lim_{t \downarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} < 0 \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon_{t_0} > 0 \text{ tal que } \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} < 0 \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_{t_0}) \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon_{t_0} > 0 \text{ tal que } h(t) < h(t_0) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_{t_0}) \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser h convexa se verifica que $h'_-(t_0) \leq h'_+(t_0)$, [103], por lo que $h'_-(t_0) < 0$ para todo $t_0 > 0$. Empleando un razonamiento similar al utilizado con h'_+ se prueba la existencia de un valor $\varepsilon'_{t_0} > 0$ para el que se verifica:

$$h(t) > h(t_0) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon'_{t_0}, t_0)$$

Por tanto, la función h es estrictamente decreciente en t_0 para todo $t_0 > 0$, de donde se deduce

$$\lim_{t \uparrow +\infty} h(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = -\infty$$

como se quería demostrar. \square

Como consecuencia inmediata de los Lemas 3.2 y 3.3 se obtiene el siguiente resultado, que establece condiciones suficientes para la existencia o no de solución óptima en término de las derivadas a la derecha de las funciones que miden el costo social de localización.

Corolario 3.4 *Supongamos que S es no acotado. Entonces:*

(a) *Una condición suficiente para que el problema de localización (3.1) posea solución óptima finita viene dada por:*

$$K + \lim_{t \uparrow +\infty} \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t) > 0$$

(b) *Una condición suficiente para que el problema de localización (3.1) posea solución ilimitada viene dada por:*

$$K + \lim_{t \uparrow +\infty} \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t) < 0$$

Observación 3.5 En el caso

$$K + \lim_{t \uparrow +\infty} \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(t) = 0 \tag{3.2}$$

no puede realizarse ninguna afirmación sobre la solución del problema (3.1). Así, para $A^+ = A^- = \{a\}$, la Tabla 3.1 muestra diferentes funciones g_a que conducen a muy distintas situaciones en la resolución del problema, y cada una de las cuales verifica (3.2).

El siguiente resultado presenta una condición suficiente para que el problema (3.1) posea valor objetivo óptimo finito (o solución óptima finita) basada en el comportamiento en un punto de la derivada a la derecha de las funciones g_a .

$g_a(t)$	$\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\}$	Solución
$-Kt$	0	Solución óptima finita
$e^{-t} - Kt$	0	Valor óptimo finito (No alcanzado)
$-\ln(1+t) - Kt$	$-\infty$	Solución ilimitada

Tabla 3.1: Diferentes soluciones cuando se verifica (3.2)

Corolario 3.6 *Supongamos que existe $M > 0$ para el cual se verifica*

$$K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(M) \geq 0$$

Entonces, el problema de localización (3.1) posee valor objetivo óptimo finito. Más aún, si la desigualdad anterior es estricta, entonces existe solución óptima finita para (3.1).

Demostración. Supongamos que M satisface $K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(M) > 0$. Entonces, teniendo en cuenta que la derivada lateral a la derecha g'_{a+} es creciente, por ser g_a convexa, los Lemas 3.2 y 3.3 garantizan que el problema (3.1) posee solución óptima finita.

Supongamos ahora que $K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(M) = 0$ y consideremos la función convexa h definida por

$$h(t) = Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t),$$

que verifica $h'_+(M) = K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(M) = 0$. Por ser h convexa se tendrá:

$$h(t) \geq h(M) + h'_+(M)(t - M) = h(M) \quad \forall t > 0$$

Por tanto, la función h está acotada inferiormente por $h(M)$, de donde se deduce que:

$$-\infty < \lim_{t \uparrow +\infty} h(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\}$$

Aplicando el Lema 3.2 se tiene probado el resultado. □

Observación 3.7 La negación de la condición dada en el corolario anterior, es decir,

$$K + \sum_{a \in A^-} g'_{a+}(M) < 0 \quad \forall M > 0$$

no es suficiente para garantizar que (3.1) posea solución ilimitada, como podría conjeturarse. Para comprobarlo, consideremos $A^- = \{a\}$ y $g_a(t) = e^{-t} - Kt$, por lo que se tendrá

$$K + g'_{a+}(M) = -e^{-M} < 0 \quad \forall M > 0$$

Sin embargo,

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \left\{ Kt + \sum_{a \in A^-} g_a(t) \right\} = \lim_{t \uparrow +\infty} e^{-t} = 0$$

por lo que (3.1) tendrá valor objetivo óptimo finito.

3.4 El caso lineal

En esta sección se analizará un caso particular del Problema (3.1), en el cual la intensidad del efecto negativo ejercido por el nuevo servicio decrece linealmente con la distancia. Por tanto, el modelo considerado puede escribirse de la siguiente forma:

$$\inf_{\substack{F \in \mathcal{R} \\ T \in \mathcal{S}}} f(F, T) := \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F - T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| \quad (3.3)$$

donde φ_a es un peso no negativo que representa la disminución del efecto perjudicial sobre el núcleo de población $a \in A^-$ por unidad de distancia.

La hipótesis de decaimiento lineal proporciona un modelo más simple y tratable que el modelo general (en [27] puede encontrarse una motivación). Como se verá a continuación, en este caso es posible obtener resultados mucho más finos, en especial en lo referente a la localización de soluciones óptimas.

No todos los servicios que pueden ser considerados en el modelo son igualmente molestos o peligrosos. Algunos de ellos conllevan un alto nivel de peligrosidad o rechazo social, que primará sobre el costo de transporte a los puntos de demanda y el de construcción de la nueva vía de enlace; tal puede ser el caso de las centrales nucleares o ciertas industrias químicas. Otros, como hospitales o servicios de bomberos, ejercen un nivel de molestia no demasiado elevado en comparación con los restantes costos.

Teniendo en cuenta que los costos del modelo están en relación directa con los pesos considerados, puede hablarse de diferentes niveles de repulsividad, dependiendo de la relación existente entre K y los pesos φ_a . En particular, diremos que un servidor tiene un *nivel de repulsividad alto* cuando el costo K de transporte y construcción es inferior al costo social derivado de su instalación, es decir, $K < \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. En caso contrario, se considerará que el servidor presenta un *nivel de repulsividad bajo*. Como se pondrá de manifiesto posteriormente, el problema considerado presenta un comportamiento muy diferente dependiendo del valor de $K - \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Por este motivo, ambos casos serán tratados por separado.

3.4.1 Localización de un servidor con nivel de repulsividad bajo

Consideremos el problema de localización (3.3) cuando el servicio que se pretende instalar presenta un nivel de repulsividad bajo, es decir, $K \geq \sum_{a \in A^-} \varphi_a$; en adelante, este problema se denominará **(PRB)**. Los resultados que se consideran en primer lugar proporcionan condiciones suficientes para que el problema presente solución óptima finita.

3.4.1.1 Existencia de soluciones

Los resultados sobre la existencia de soluciones en el caso general son particularizados para el problema **(PRB)** y completados con el estudio del caso particular $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$, cuyo comportamiento no puede deducirse del modelo general.

El lema que se enuncia a continuación es un caso particular del teorema de la mayoría para el problema de Weber con atracción y repulsión, [96].

Lema 3.8 *Supongamos $R \subset S$ y $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Entonces, dado $T \in R$, el punto $F^* = T$ es solución óptima del problema*

$$\min_{F \in S} \Gamma_T(F) := K \|F - T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\|$$

El siguiente resultado resume nuestro conocimiento sobre la existencia de soluciones para el problema con un nivel de repulsividad bajo.

Proposición 3.9 *Se verifica:*

- (a) *El problema de localización (PRB) posee valor objetivo óptimo finito.*
- (b) *Supongamos $K > \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Entonces el problema (PRB) posee solución óptima finita.*
- (c) *Supongamos $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Entonces, si $R \subset S$ o S es acotado, existe solución óptima finita para el problema (PRB).*

Demostración. El apartado (a), para $K > \sum_{a \in A^-} \varphi_a$, y el (b) son consecuencia inmediata de los Lemas 3.1 y 3.2. Supongamos que $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$; dados $F \in S$ y $T \in R$ se tendrá, como consecuencia de la desigualdad triangular que:

$$\begin{aligned}
 f(F, T) &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F - T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| \\
 &\geq \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K [\|F\| - \|T\|] - \sum_{a \in A^-} \varphi_a [\|F\| + \|a\|] \\
 &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) - K \|T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|a\| \\
 &\geq \min_{T \in R} \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) - K \max_{T \in R} \|T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|a\|
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene una cota inferior para el valor óptimo. Con esto queda probado el apartado (a) cuando $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Además, si $R \subset S$, el Lema 3.8 asegura la existencia de una solución óptima, que será de la forma (T^*, T^*) , con $T^* \in R$. \square

Observación 3.10 En el caso $K = \sum_{a \in A^-} \varphi_a$, el valor objetivo óptimo puede no alcanzarse si S es no acotado y $R \not\subset S$. Por ejemplo, considérese el problema de localización (PRB) con $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, x > 0\}$, $A^+ = \{(1, 1), (2, 0)\}$, $\omega_a = 1 \ \forall a \in A^+$, $A^- = \{(0, 0)\}$, $K = 1$, $\varphi_a = 1$ y la norma euclídea (ver Figura 3.2). Fijado el punto $T_0 = (2, 0)$, se considera el problema de optimización

$$\min_{F \in \mathbb{R}^2} g(F) := f(F, T_0) \tag{3.4}$$

cuya función objetivo, para $F = (x, y)$, viene dada por:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \sqrt{2} + \|(x, y) - (2, 0)\| - \|(x, y) - (0, 0)\| \\
 &= \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

El vector gradiente de esta función en un punto $(x, y) \notin \{(0, 0), (2, 0)\}$ resulta ser

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

verificándose $\nabla g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 2$. Por otra parte, se tiene que

$$g(x, 0) = \sqrt{2} - 2 \quad \forall x \geq 2$$

$$g(x, 0) = \sqrt{2} + 2 \quad \forall x \leq 0$$

$$g(x, 0) = \sqrt{2} + 2 - 2x \quad \forall x \in [0, 2]$$

De lo anterior se concluye que $\{(x, 0) : x \geq 2\}$ es el conjunto de soluciones óptimas de (3.4). Dado que ninguno de estos puntos pertenece a la región S , se sigue que $g(F) > \sqrt{2} - 2$ para todo $F \in S$. Además, la sucesión $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S$ con $F_n = (n, \frac{1}{n})$ verifica que $\lim_{n \uparrow \infty} g(F_n) = \sqrt{2} - 2$, de donde se deduce que el valor objetivo óptimo del problema $\min_{F \in S} g(F)$ es $\sqrt{2} - 2$, el cual no se alcanza.

Por otra parte, haciendo uso de la desigualdad triangular se obtiene la siguiente cota inferior sobre S para la función f

$$f(F, T) = \sqrt{2} + \|F - T\| - \|F\| \geq \sqrt{2} - \|T\| > \sqrt{2} - 2 \quad \forall F \in S \quad \forall T \in R, T \neq T_0$$

de donde se deduce que el problema de localización (PRB) posee en este caso valor óptimo $z^* = \sqrt{2} - 2$, el cual se obtiene para $T^* = (2, 0)$ cuando F^* recorre la frontera de S alejándose del origen de coordenadas.

En particular, este ejemplo revela que la existencia de puntos comunes a R y S no es suficiente para garantizar que se alcance el valor objetivo óptimo. \square

Consecuencia inmediata de la proposición anterior es el siguiente resultado:

Corolario 3.11 *Supongamos $S = \mathbb{R}^2$ o S acotado. Entonces, el problema de localización (PRB) posee solución óptima finita.*

3.4.1.2 Localización de soluciones

A continuación se expondrán algunos resultados relativos a la localización de soluciones óptimas para el problema (PRB).

El concepto de visibilidad, [100, 56], desempeña un papel importante en la determinación de una solución óptima del problema (PRB).

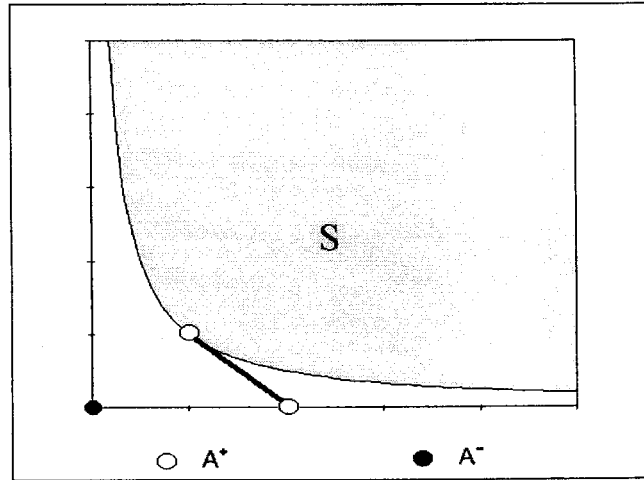


Figura 3.2: El valor objetivo óptimo de (PRB) no se alcanza

Definición 3.12 Un punto $F \in S$ se dice visible desde $T \in R$ si $[T, F] \cap S = \{F\}$ o bien $[T, F] \subset S$. En caso contrario, se dice que F no es visible desde T .

Como consecuencia inmediata de la definición de visibilidad se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.13 Supongamos que $F_0 \in S$ no es visible desde $T_0 \in R$. Entonces existe un único punto $\bar{F} \in [T_0, F_0] \cap \text{fr}(S)$ visible desde T_0 .

Demostración. Sea $U = [T_0, F_0] \cap \text{fr}(S)$, que es no vacío y compacto, y consideremos el problema de optimización $\min_{F \in U} \|F - T_0\|$. La función objetivo es lineal, estrictamente monótona sobre $[T_0, F_0]$, de donde se deduce la existencia de una única solución óptima \bar{F} para el problema considerado. El punto \bar{F} es visible desde T_0 , pues en otro caso se concluiría la existencia de un punto $\tilde{F} \in [T_0, \bar{F}] \cap \text{fr}(S)$ distinto de \bar{F} , lo cual supone una contradicción. \square

El siguiente resultado permitirá obtener un subconjunto de S en el que se encontrará una solución óptima del problema.

Lema 3.14 Sean $F_0 \in S$ y $T \in R$. Entonces, para todo $\bar{F} \in [T, F_0]$ se verifica que $f(\bar{F}, T) \leq f(F_0, T)$ en el problema (PRB).

Demostración. Dado $\bar{F} \in [T, F_0]$ se tiene, como consecuencia de la desigualdad

triangular, que:

$$\begin{aligned}
 f(F_0, T) - f(\bar{F}, T) &= K[\|F_0 - T\| - \|\bar{F} - T\|] - \\
 &\quad - \sum_{a \in A^-} \varphi_a [\|F_0 - a\| - \|\bar{F} - a\|] \\
 &= K\|F_0 - \bar{F}\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a [\|F_0 - a\| - \|\bar{F} - a\|] \\
 &\geq K\|F_0 - \bar{F}\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F_0 - \bar{F}\| \\
 &= \|F_0 - \bar{F}\| \left(K - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \right) \geq 0
 \end{aligned}$$

y, por tanto, $f(F_0, T) \geq f(\bar{F}, T)$. □

Una consecuencia directa de los Lema 3.13 y 3.14 es el siguiente

Corolario 3.15 Sean $F_0 \in S$, $T \in R$ y consideremos el problema (PRB).

- a) Supongamos que $T \notin S$. Entonces, existe $F \in \text{fr}(S)$, visible desde T , tal que $f(F, T) \leq f(F_0, T)$.
- b) Supongamos que $T \in S$. Entonces, $f(T, T) \leq f(F_0, T)$.

Consideremos el problema de optimización (PRB) restringido a uno de los segmentos de arista L_R que componen R .

$$(K \geq \sum_{a \in A^-} \varphi_a) \quad \min_{\substack{T \in L_R \\ F \in S}} f(F, T) \tag{3.5}$$

Si L_R y S tienen puntos en común, es posible determinar un conjunto de puntos factibles que mejoran cualquier localización del servidor en el segmento L_R .

Lema 3.16 Sea $L_R = [a, b] \subset R$ un segmento de una arista $e \in E$ y supongamos $L_R \cap S \neq \emptyset$. Entonces, dado $T_0 \in L_R \cap S$ existe $T \in \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ tal que $f(T, T) \leq f(T_0, T_0)$, siendo

$$\tilde{a} = \arg \min_{x \in S \cap L_R} \|x - a\| \quad \tilde{b} = \arg \min_{x \in S \cap L_R} \|x - b\|$$

Demostración. La función

$$\rho(T) = \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|T - a\| \quad (3.6)$$

es cóncava sobre L_R , pues $\sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T)$ es afín a trozos y cóncava sobre cada arista del grafo ([31],[39]). Por tanto, $\rho(T)$ alcanzará su mínimo sobre $L_R \cap S$ en un punto extremo del cierre convexo de $L_R \cap S$, es decir, en un punto de $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$. Teniendo en cuenta que $\rho(T) = f(T, T)$ para todo $T \in L_R \cap S$, se tiene probado el resultado. \square

La siguiente proposición permite delimitar un subconjunto de la frontera de S que, junto con los puntos extremos del segmento considerado, contendrá una localización óptima para el servidor, supuesto que existe solución óptima finita.

Proposición 3.17 *Sea $L_R = [a, b] \subset R$ un segmento de una arista $e \in E$ y (F_0, T_0) una solución factible para el problema (3.5). Entonces, existe una solución factible (F, T) tal que:*

$$(1) F \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$$

$$(2) f(F, T) \leq f(F_0, T_0)$$

$$(3) F \text{ es visible desde } T$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $T_0 \notin S$. Aplicando el apartado (a) del Corolario 3.15 se deduce la existencia de un punto $F \in \text{fr}(S)$ tal que $f(F, T_0) \leq f(F_0, T_0)$ y F es visible desde T_0 . Supongamos ahora que $T_0 \in S$, por lo que, en particular, $L_R \cap S \neq \emptyset$. Según el apartado (b) del Corolario 3.15 se verifica que $f(T_0, T_0) \leq f(F_0, T_0)$; el Lema 3.16 garantiza en este caso la existencia de un punto $T \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$ tal que $f(T, T) \leq f(T_0, T_0)$. En cualquiera de los casos se ha probado la existencia de una solución factible que verifica las condiciones pedidas. \square

Observación 3.18 Según se deduce de la demostración anterior, dada una solución factible (F_0, T_0) con $T_0 \in [a, b] \cap S$, queda garantizada la existencia de otra solución factible, (T, T) , con $T \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$, y $f(T, T) \leq f(F_0, T_0)$. \square

La proposición anterior permite determinar un subconjunto de S que contendrá una solución óptima de **(PRB)** en S , como se pone de manifiesto en los siguientes corolarios.

Corolario 3.19 *Sea $L_R = [a, b] \subset R$ un segmento de una arista $e \in E$ y supongamos que el problema (3.5) posee solución óptima finita. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) de (3.5) tal que $F^* \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$ y F^* es visible desde T^* .*

Corolario 3.20 *Supongamos que el problema **(PRB)** posee solución óptima finita. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) tal que F^* es visible desde T^* y $F^* \in \text{fr}(S) \cup (V \cap S)$.*

Corolario 3.21 *Supongamos que $R = \bigcup_{e \in E} e$ y que el problema **(PRB)** posee solución óptima finita. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) tal que F^* es visible desde T^* y $F^* \in \text{fr}(S) \cup (A^+ \cap S)$.*

Un caso particular de interés se obtiene cuando se considera el problema no restringido, es decir, $S = \mathbb{R}^2$. Los siguientes resultados proporcionan la localización óptima del servidor en esta situación.

Proposición 3.22 *Supongamos $S = \mathbb{R}^2$. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) para el problema de localización **(PRB)** tal que $F^* = T^* \in V$.*

Demostración. Sea (F_0, T_0) una solución óptima del problema, cuya existencia está garantizada por el lema 3.9 y consideremos el segmento de arista $[a, b] \in E$ al que pertenece el punto T_0 ; dado que $S = \mathbb{R}^2$, la Observación 3.18 permite deducir la existencia de una solución óptima (T^*, T^*) con $T^* \in \{a, b\} \subset V$. \square

Por tanto, la solución óptima en el caso no restringido puede obtenerse evaluando la función objetivo en cada uno de los puntos de V .

Corolario 3.23 *Supongamos que $R = \bigcup_{e \in E} e$ y $S = \mathbb{R}^2$. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) del problema **(PRB)** tal que $F^* = T^* \in A^+$.*

3.4.2 Localización de un servidor altamente repulsivo

Vamos a considerar ahora el problema de localización (3.3) en el caso en que el servicio que se pretende instalar ejerza un efecto altamente negativo sobre los núcleos de

población. Según se indicó anteriormente, tal situación corresponderá en el modelo considerado a la relación $K < \sum_{a \in A^-} \varphi_a$. Este caso particular del problema (3.3) se denominará en adelante **(PRA)**.

3.4.2.1 Existencia de soluciones

Como consecuencia inmediata de los Lemas 3.1 y 3.2 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.24 (PRA) *posee solución óptima finita si y sólo si S es acotado.*

3.4.2.2 Localización de soluciones

En adelante se considerará que el conjunto S es acotado, pues en otro caso el problema tiene solución ilimitada. Dado un segmento de arista L_R de R , consideremos la restricción a ese segmento del problema de localización **(PRA)**:

$$(K < \sum_{a \in A^-} \varphi_a) \quad \min_{\substack{T \in L_R \\ F \in S}} f(F, T) \quad (3.7)$$

Observación 3.25 El Lema 3.16 continúa siendo válido para el problema de localización de un servidor con nivel de repulsividad alto.

La siguiente proposición determina un subconjunto de S que contiene una localización óptima para el servidor en el problema (3.7). La importancia de este resultado reside en que permite limitar la búsqueda de ubicaciones óptimas a la frontera de S y a los puntos extremos del segmento L_R ; en él jugará un papel importante, junto al concepto de visibilidad, el concepto de *punto remoto*, [100, 53]:

Definición 3.26 *Un punto $F \in S$ se dice que es remoto con respecto a $T \in R$ si el rayo con origen en T que pasa por F no contiene ningún punto de S más allá de F , es decir,*

$$\{F + \lambda(F - T) : \lambda > 0\} \cap S = \emptyset$$

Proposición 3.27 *Supongamos que S es acotado y consideremos un segmento $L_R = [a, b] \subset R$ en una arista $e \in E$. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) de (3.7) tal que $F^* \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$ y F^* es visible o remoto con respecto a T^* .*

Demostración. Dados $F_0 \in \text{int}(S)$ y $T \in L_R$, con $F_0 \neq T$, se consideran los rayos $r_1 = \{T + \lambda(F_0 - T) : \lambda \geq 0\}$ y $r_2 = \{T + \lambda(F_0 - T) : \lambda \leq 0\}$, así como la recta $r = r_1 \cup r_2$. Por ser S acotado, existirán $F_1, F_2 \in r \cap \text{fr}(S)$ tales que $F_0 \in [F_1, F_2]$. Estos puntos pueden tomarse de tal manera que:

$$F_1 = \arg \min_{F \in r \cap \text{fr}(S)} \|F - T\| \quad F_2 = \max_{F \in r \cap \text{fr}(S)} \|F - T\|$$

Así, F_1 es visible desde T y F_2 es remoto con respecto a T .

Consideremos la función definida sobre \mathbb{R}

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= f(T + \lambda(F_0 - T), T) = \\ &= \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K |\lambda| \|F_0 - T\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|T + \lambda(F_0 - T) - a\| \end{aligned}$$

y supongamos $T \notin [F_1, F_2]$, por lo que se verificará $[F_1, F_2] \subset r_1$; de aquí se sigue que g es cóncava sobre $[F_1, F_2]$ y, por tanto, su mínimo se alcanzará en un punto extremo del segmento. En consecuencia, o bien $f(F_1, T) \leq f(F_0, T)$ o bien $f(F_2, T) \leq f(F_0, T)$.

Supongamos ahora $T \in [F_1, F_2]$ y consideremos los segmentos $L_1 = r_1 \cap [F_1, F_2]$ y $L_2 = r_2 \cap [F_1, F_2]$. La restricción de g a estos segmentos da lugar a dos funciones cóncavas, g_1 y g_2 , con $g_1(0) = g_2(0)$; de aquí se deduce que el mínimo de g puede corresponder a un punto de la frontera de S (F_1 o F_2), en cuyo caso estaría probado el resultado, o al propio punto $T = L_1 \cap L_2$. Supongamos que el mínimo de g se obtiene para el punto T ($\lambda = 0$); según el Lema 3.16, existe $T^* \in \text{fr}(S) \cup (\{a, b\} \cap S)$ tal que

$$f(T^*, T^*) \leq f(T, T) = g(0) \leq g(1) = f(F_0, T)$$

quedando probado el resultado. □

Consecuencia inmediata de este resultado son los siguientes corolarios, que especifican un subconjunto de S que contiene una localización óptima para el servidor cuando éste presenta un nivel de repulsividad alto.

Corolario 3.28 *Supongamos que S es acotado. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) del problema (PRA) tal que $F^* \in \text{fr}(S) \cup (V \cap S)$ y F^* es visible o remoto con respecto a T^* .*

	PRB	PRA
S acotado	Existe una solución óptima (F^*, T^*) tal que $F^* \in \text{fr}(S) \cup (V \cap S)$	
	F^* visible desde T^*	F^* visible o remoto desde T^*
S no acotado	Valor Objetivo Óptimo Finito Solución Óptima Finita si $K > \sum_{a \in A^-} \varphi_a$ o $R \subset S$	Solución Ilimitada
$S = \mathbb{R}^2$	Existe una solución óptima (T^*, T^*) tal que $T^* \in V$	Solución Ilimitada

Tabla 3.2: Resumen de resultados en el caso lineal

Corolario 3.29 *Supongamos que S es acotado y que $R = \bigcup_{e \in E} e$. Entonces existe una solución óptima (F^*, T^*) del problema (PRA) tal que $F^* \in \text{fr}(S) \cup (A^+ \cap S)$ y F^* es visible o remoto con respecto a T^**

La Tabla 3.2 resume los principales resultados obtenidos sobre la existencia y localización de soluciones óptimas en el caso de decaimiento lineal del efecto repulsivo.

3.5 El caso lineal con norma euclídea y región factible poligonal

Según se ha puesto de manifiesto en los resultados precedentes, para la obtención de una solución óptima sobre S del problema (3.3) basta considerar la frontera de este conjunto, así como los puntos extremos de los segmentos de R que pertenezcan a S . Se obtiene como resultado un problema de optimización en dimensión 2, cuyas variables de decisión describen el recorrido a través de la frontera de S y de un arco del grafo.

Si $\text{fr}(S)$ admite una parametrización d.c. con descomposición conocida, haciendo uso de la Proposición 1.15 puede obtenerse una representación d.c. para la función objetivo de (3.3), permitiendo el empleo de técnicas de optimización propias de este

tipo de funciones, como, por ejemplo, el Algoritmo 1.18. No obstante, en el caso en que S es poligonal y se utiliza la norma euclídea, la resolución del problema puede simplificarse aún más, como se mostrará a continuación.

Supondremos en adelante que la norma considerada en el modelo es la euclídea, y que el conjunto S es una región definida por la unión de un número finito de polígonos, por lo que continúan siendo válidos los resultados obtenidos con anterioridad.

De esta manera, la solución óptima sobre S queda reducida a la resolución de un problema de optimización para cada uno de los segmentos que componen su frontera, junto a la evaluación de la función objetivo en los puntos de $V \cap S$. Además, los conceptos de punto visible y punto remoto permiten reducir el número de segmentos de $\text{fr}(S)$ que deben ser considerados: en el caso del problema (PRB), todos aquellos que no sean visibles desde algún punto de R pueden ser descartados, en virtud del Corolario 3.20; para el problema (PRA) podrán descartarse los segmentos de $\text{fr}(S)$ que no sean ni visibles ni remotos desde algún punto de R . No obstante, los problemas que se obtienen son aún de difícil resolución, a pesar de contar con una estructura más simple. Por ello, se analizará ahora una descomposición de R que permite obtener subproblemas más sencillos, dotados de ciertas características que facilitan la obtención de soluciones óptimas.

3.5.1 Localización de soluciones óptimas

La función que proporciona el costo de transporte sobre el grafo

$$\phi(T) = \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T)$$

es afín a trozos y cóncava sobre cada arista ([31],[39],[44]). Además, presenta un comportamiento afín en cada uno de los segmentos en los cuales queda dividida la arista al considerar sobre ella los diferentes puntos de cuello de botella que puedan existir (la determinación de tales puntos puede realizarse de forma simple a partir de la matriz de distancias entre los nodos del grafo, [28]). Esto origina una descomposición de E en segmentos cerrados sobre cada uno de los cuales la función ϕ es afín:

$$e = \bigcup_{j \in J_e} [c_j^{(e)}, d_j^{(e)}] \quad \forall e \in E \quad (3.8)$$

Sea $L_i^{(e)} = [a_i^{(e)}, b_i^{(e)}] \subset e$ uno de los segmentos de arista que componen el conjunto R . La intersección de este segmento con la partición de e dada en (3.8) origina una descomposición de $L_i^{(e)}$ en subsegmentos, en cada uno de los cuales ϕ es afín.

$$L_i^{(e)} = \bigcup_{j \in J_e} \left([c_j^{(e)}, d_j^{(e)}] \cap [a_i^{(e)}, b_i^{(e)}] \right)$$

Por tanto, podemos suponer que el conjunto R esta formado por la unión de segmentos cerrados contenidos en E , sobre cada uno de los cuales la función que proporciona el costo de transporte sobre el grafo es afín. Esto da lugar a una descomposición de (3.3) en un conjunto de subproblemas más sencillos, en cada uno de los cuales se considera uno de los segmentos de R , donde ϕ es afín, y un segmento de la frontera de S , que notaremos L_R y L_S , respectivamente:

$$(P_{L_S, L_R}) \quad \min_{\substack{F \in L_S \\ T \in L_R}} f(F, T)$$

Los resultados que siguen a continuación permiten reducir la determinación de la solución óptima de (P_{L_S, L_R}) a la resolución de cuatro problemas de optimización escalar.

Definición 3.30 Dado $F \in S$, se dice que el punto $T_F \in L_R$ es una s-proyección de F sobre el segmento L_R si se verifica

$$T_F \in H(F) := \arg \min_{T \in L_R} \left\{ \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F - T\| \right\}$$

Observación 3.31 El conjunto $H(F)$ es convexo y no vacío, ya que resulta de la minimización de una función convexa sobre un conjunto convexo y compacto. Además, el cardinal de este conjunto puede ser mayor que uno, como se pone de manifiesto al considerar:

$$\begin{array}{lll} A^+ = \{(0, 0), (1, 0)\} & w_{(0,0)} = 1 & F_0 = (2, 0) \\ L_R = [(0, 0), (1, 0)] & w_{(1,0)} = 0 & K = 1 \end{array}$$

La función objetivo de la definición de $H(F)$ resulta ser

$$\sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F_0 - T\| = 2 \quad \forall T \in L_R$$

por lo que $H(F_0) = L_R$ □

Observación 3.32 El problema de optimización (P_{L_S, L_R}) puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{F \in L_S \\ T \in L_R}} f(F, T) &= \min_{F \in L_S} \left\{ \min_{T \in L_R} \left\{ \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F - T\| \right\} - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| \right\} \\ &= \min_{F \in L_S} \left\{ \left\{ \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_F) + K \|F - T_F\| \right\} - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| \right\} \\ &= \min_{F \in L_S} f(F, T_F) \end{aligned}$$

siendo T_F cualquier elemento de $H(F)$, pues todos proporcionan igual valor objetivo, fijado $F \in L_S$. \square

La función $\phi(T) = \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T)$ es afín sobre el segmento $L_R = [T_1, T_2]$, por lo que admitirá una expresión de la forma $\phi(T) = A\varphi^{-1}(T) + B$ para $T \in L_R$, siendo

$$\varphi : \lambda \in [0, 1] \mapsto T_1 + \lambda(T_2 - T_1)$$

una parametrización de L_R . Sea $r(L_R)$ la recta que contiene al segmento L_R y consideremos la función d_F definida sobre $r(L_R)$ por:

$$d_F(T) = A\hat{\varphi}^{-1}(T) + B + K \|F - T\| \quad (3.9)$$

donde $F \in L_S$ es un punto previamente fijado y

$$\hat{\varphi} : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto T_1 + \lambda(T_2 - T_1)$$

una parametrización de $r(L_R)$. Esta función es la extensión natural a $r(L_R)$ de $\rho(T) = \phi(T) + K\|F - T\|$. Siempre que no exista posibilidad de confusión, las funciones

$$T \in r(L_R) \mapsto A\hat{\varphi}^{-1}(T) + B + K \|F - T\|$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto A\lambda + B + K \|F - \hat{\varphi}(\lambda)\|$$

se notarán d_F en ambos casos.

Definición 3.33 Diremos que el punto $F \in S$ es r-proyectable sobre la recta $r(L_R)$ si el problema $\min_{T \in r(L_R)} d_F(T)$ posee solución única. En tal caso, se llama r-proyección de F sobre $r(L_R)$ al punto

$$\Pi_F = \arg \min_{T \in r(L_R)} d_F(T)$$

El conjunto de puntos r-proyectables de L_S se notará $P_r(L_S)$.

Observación 3.34 El ejemplo considerado en la Observación 3.31, muestra que el problema $\min_{T \in r(L_R)} d_F(T)$ de la Definición 3.33 puede no tener solución única; en este caso la función es constante sobre la semirrecta $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$, donde alcanza su mínimo. Además, si en este ejemplo se toma $w_{(0,0)} = 2$, se obtendría:

$$d_F(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

lo que prueba que el problema considerado puede no tener solución. □

Observación 3.35 Dado $F \in P_r(L_S)$, la unicidad del mínimo de la función convexa d_F sobre $r(L_R)$ permite deducir las siguientes conclusiones:

- El conjunto $H(F)$ se reduce a un único punto T_F .
- Supongamos que $\Pi_F \in L_R$. Entonces, $\Pi_F = T_F$.
- Supongamos que $\Pi_F \notin L_R$. Entonces, T_F es un punto extremo de L_R .

Los resultados que siguen a continuación van dirigidos a la obtención de propiedades sobre el conjunto de puntos r -proyectables y algunas funciones relacionadas con él, que serán de interés para la determinación de soluciones óptimas. El primer resultado describe el comportamiento de una determinada familia de funciones, a la cual pertenece d_F cuando el segmento L_R se encuentra contenido en el eje OX .

Lema 3.36 *Dados números reales A, B, K, p_1 y p_2 , con $K \geq 0$, se considera la función $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$w(x) = Ax + B + K\sqrt{(x - p_1)^2 + p_2^2}$$

Entonces

- (a) Si $K > |A|$, la función w presenta en \mathbb{R} un único mínimo global, que se alcanza en el punto

$$x^* = p_1 - \frac{|p_2|A}{\sqrt{K^2 - A^2}}$$

- (b) Si $K < |A|$, la función w es estrictamente monótona sobre \mathbb{R} .

(c) Si $K = |A|$, la función w puede ser:

(c.1) constante sobre \mathbb{R} , si $K = A = 0$.

(c.2) estrictamente monótona sobre \mathbb{R} , si $p_2 \neq 0$ y $K > 0$.

(c.3) constante sobre una semirrecta que tiene como extremo el punto p_1 , en la que alcanza su mínimo, y estrictamente monótona fuera de ella, si $p_2 = 0$ y $K > 0$.

Demostración. Consideraremos que K y A no son simultáneamente nulos, por ser trivialmente cierto el resultado en este caso. Supongamos en primer lugar que $p_2 \neq 0$; entonces, la función w es diferenciable en \mathbb{R} y su derivada resulta ser:

$$w'(x) = A + \frac{K(x - p_1)}{\sqrt{(x - p_1)^2 + p_2^2}} \quad (3.10)$$

En el caso en que $K \leq |A|$ es fácil comprobar que la derivada w' no se anula en ningún punto. Por tanto, la función w es estrictamente monótona, lo cual prueba (b) en el caso $p_2 \neq 0$, así como (c.2). Por el contrario, si $K > |A|$ la derivada w' se anula únicamente en el punto

$$x^* = p_1 - \frac{|p_2|A}{\sqrt{K^2 - A^2}} \quad (3.11)$$

que corresponde a un mínimo global de w , por ser convexa, quedando probado (a) en el caso $p_2 \neq 0$.

Supongamos ahora $p_2 = 0$; la función w es convexa y afín a trozos en tal caso, siendo su derivada:

$$w'(x) = \begin{cases} A + K & \text{si } x > p_1 \\ A - K & \text{si } x < p_1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Si $K < |A|$, w' tiene signo constante, siendo w estrictamente monótona, lo que prueba (b) si $p_2 = 0$. En caso de ser $K = |A|$, del análisis de (3.12) se deduce que w es constante sobre una semirrecta que tiene como extremo el punto p_1 , en la que alcanza su mínimo, y estrictamente monótona fuera de ella, quedando probado (c.3). Por último, w presenta un mínimo global en p_1 en el caso $K > |A|$, lo que prueba (a) si $p_2 = 0$. \square

El resultado que sigue a continuación permitirá reducir el estudio de la función d_F al de una de las funciones de la familia considerada en el Lema 3.36.

Lema 3.37 Dado el segmento $L_R = [T_1, T_2]$, con $T_1 = (t_{11}, t_{12})$ y $T_2 = (t_{21}, t_{22})$, y el punto $F = (f_1, f_2) \in L_S$, se considera la transformación $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tau(T) = (T - T_1) M$, siendo

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} t_{21} - t_{11} & t_{12} - t_{22} \\ t_{22} - t_{12} & t_{21} - t_{11} \end{pmatrix} \quad \Delta = \|T_2 - T_1\|$$

Supongamos que la expresión paramétrica de la función d_F sobre la recta $r(L_R) = \{T_1 + \lambda(T_2 - T_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ viene dada por $d_F(\lambda) = A\lambda + B + K \|T_1 + \lambda(T_2 - T_1) - F\|$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (a) La transformación τ es una isometría.
- (b) Para todo $T = T_1 + \lambda(T_2 - T_1) \in r(L_R)$ se tiene que $\tau(T) = (\lambda\Delta, 0)$.
- (c) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que $d_F(\lambda) = \tilde{d}_{\bar{F}}(\lambda\Delta)$ siendo

$$\bar{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = (F - T_1)M \quad \tilde{d}_{\bar{F}}(t) = \frac{A}{\Delta}t + B + K\sqrt{(t - \bar{f}_1)^2 + \bar{f}_2^2}$$

Demostración. La matriz M considerada es, evidentemente, la matriz de un giro; por tanto, la transformación τ es composición de una traslación y un giro, de donde se deduce (a).

Por otra parte, es inmediato comprobar que, para $T = T_1 + \lambda(T_2 - T_1) \in r(L_R)$, se verifica $\tau(T) = (\lambda\Delta, 0)$. Es decir, la recta $r(L_R)$ se transforma por τ en el eje OX y, en consecuencia la imagen de L_R estará contenida en dicho eje.

Teniendo en cuenta que $\tau(F) = \bar{F}$, $\tau(T) = (\lambda\Delta, 0)$ y que esta transformación conserva la distancia, se deduce que:

$$\|T - F\| = \|\tau(T) - \tau(F)\| = \|(\lambda\Delta, 0) - \bar{F}\| = \sqrt{(\lambda\Delta - \bar{f}_1)^2 + \bar{f}_2^2}$$

de donde se sigue inmediatamente que $d_F(\lambda) = \tilde{d}_{\bar{F}}(\lambda\Delta)$. □

Observación 3.38 El estudio de la función d_F sobre la recta $r(L_R)$ es equivalente, según el resultado anterior, al estudio de la función $\tilde{d}_{\bar{F}}$ sobre el eje OX . Si se considera este último, bastará invertir finalmente la transformación τ para obtener conclusiones referidas a d_F .

Proposición 3.39 Dado el segmento $L_R = [T_1, T_2]$, con $T_1 = (t_{11}, t_{12})$ y $T_2 = (t_{21}, t_{22})$, y el punto $F = (f_1, f_2) \in L_S$, sean

$$\begin{aligned}\Delta &= \|T_2 - T_1\| \\ M &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} t_{21} - t_{11} & t_{12} - t_{22} \\ t_{22} - t_{12} & t_{21} - t_{11} \end{pmatrix} \\ \bar{F} &= (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = (F - T_1) M\end{aligned}$$

y $\phi(\lambda) = A\lambda + B$ la extensión a la recta $r(L_R) = \{T_1 + \lambda(T_2 - T_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ de la función afín $\sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T)$ sobre L_R .

(a) Supongamos $K \leq |A|/\Delta$. Entonces:

(a.1) $P_r(L_S) = \emptyset$

(a.2) Para todo $F \in L_S$, existe $T_F \in H(F)$ tal que T_F es un punto extremo de L_R .

(b) Supongamos $K > |A|/\Delta$. Entonces:

(b.1) $P_r(L_S) = L_S$ y para todo $F = (f_1, f_2) \in L_S$, se verifica que

$$\Pi_F = T_1 + \frac{C}{\Delta}(T_2 - T_1)$$

siendo $C = \bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}}$

(b.2) Supongamos que L_S está contenido en uno de los semiplanos cerrados determinados por $r(L_R)$.

(b.2.1) La aplicación q definida sobre $P_r(L_S)$ por $q(F) = \Pi_F$, es afín.

(b.2.2) Supongamos que $\Lambda = q^{-1}(L_R)$ es no vacío. Entonces, la aplicación $\sigma : F \in \Lambda \rightarrow d_F(\Pi_F)$ es afín.

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión paramétrica de $r(L_R)$, la función d_F puede expresarse como:

$$d_F(\lambda) = A\lambda + B + K \|T_1 + \lambda(T_2 - T_1) - F\|$$

Si se considera la transformación τ definida por $\tau(T) = (T - T_1)M$, el Lema 3.37 permite reducir el estudio de la función d_F al de aquella otra definida sobre \mathbb{R} por

$$\tilde{d}_{\bar{F}}(t) = \frac{A}{\Delta}t + B + K\sqrt{(t - \bar{f}_1)^2 + \bar{f}_2^2}$$

Sean $\bar{T}_1 = \tau(T_1)$ y $\bar{T}_2 = \tau(T_2)$, por lo que se tendrá que $\bar{T}_1 = (0, 0)$ y $\bar{T}_2 = (\Delta, 0)$.

Según el Lema 3.36, si $K \leq |A|/\Delta$, o bien no existe ningún punto en \mathbb{R} en el que la función $\tilde{d}_{\bar{F}}$ alcance su mínimo, o bien no es único; en cualquiera de los casos, no existe la proyección $\tilde{\Pi}_{\bar{F}}$, por lo que tampoco existirá Π_F , quedando probado (a.1). Además, la restricción de $\tilde{d}_{\bar{F}}$ al segmento determinado por 0 y Δ (imagen de L_R por τ), alcanzará su mínimo en un punto extremo, según se deduce de tal lema. Considerando d_F , queda demostrada la existencia de un punto $T_F \in H(F)$ que es un punto extremo de L_R . Por tanto, se ha probado (a.2).

Si $K > |A|/\Delta$, el mínimo de $\tilde{d}_{\bar{F}}$ sobre \mathbb{R} se alcanzará, según el Lema 3.36, en el punto

$$C = \bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A/\Delta}{\sqrt{K^2 - (A/\Delta)^2}} = \bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}}$$

En tal caso, existe la proyección Π_F , que vendrá dado por la imagen inversa del punto $\tilde{\Pi}_{\bar{F}} = (C, 0)$ para la biyección τ , es decir:

$$\begin{aligned} \Pi_F &= \tau^{-1}(C, 0) = (C, 0) \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} t_{21} - t_{11} & t_{22} - t_{12} \\ t_{12} - t_{22} & t_{21} - t_{11} \end{pmatrix} + (t_{11}, t_{12}) \\ &= \left(t_{11} + C \frac{t_{21} - t_{11}}{\Delta}, t_{12} + C \frac{t_{22} - t_{12}}{\Delta} \right) \end{aligned}$$

Esto prueba (b.1). Por otra parte, la función q considerada tiene como expresión:

$$q(F) = \bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A/\Delta}{\sqrt{K^2 - (A/\Delta)^2}} = \bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}} \quad F \in P_\tau(L_S)$$

Bajo la hipótesis de (b.2), \bar{f}_2 tiene signo constante; teniendo en cuenta, además, que \bar{f}_1 y \bar{f}_2 son funciones afines de f_1 y f_2 , se deduce el carácter afín de q , quedando probado (b.2.1).

Consideremos ahora el apartado (b.2.2). Se probará que $\tilde{\sigma} : \bar{F} \in \tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{d}_{\bar{F}}(\tilde{\Pi}_{\bar{F}})$, definida de manera análoga a σ para el problema resultante al aplicar la transformación τ , es una función afín de $\bar{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$; dado que \bar{F} es, a su vez, función afín de F , y teniendo en cuenta que $d_F(\Pi_F) = \tilde{d}_{\bar{F}}(\tilde{\Pi}_{\bar{F}})$, se tendrá probado (b.2.2).

Sustituyendo las coordenadas de $\tilde{\Pi}_{\bar{F}}$ en la expresión de $\tilde{d}_{\bar{F}}$ se obtiene:

$$\tilde{d}_{\bar{F}}(\tilde{\Pi}_{\bar{F}}) = \frac{A}{\Delta} \left(\bar{f}_1 - \frac{|\bar{f}_2|A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}} \right) + B + \frac{|\bar{f}_2|K^2A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}}$$

Bajo las hipótesis de (b.2.2), \bar{f}_2 tiene signo constante, por lo que la expresión anterior es una función afín de \bar{f}_1 y \bar{f}_2 . \square

El siguiente resultado es fundamental para la obtención de procedimientos simples de resolución del problema (P_{L_S, L_R}) . En concreto, permitirá la obtención de soluciones óptimas mediante la resolución de problemas de optimización escalar.

Proposición 3.40 *Dados los segmentos L_R y L_S , existe una solución óptima (F^*, T^*) del problema (P_{L_S, L_R}) que verifica una de las siguientes condiciones:*

- (a) F^* es un punto extremo de L_S .
- (b) T^* es un punto extremo de L_R .
- (c) $F^* = T^* = L_S \cap L_R$

Demostración. Obsérvese que el problema considerado posee siempre solución óptima, por ser la función objetivo continua y el conjunto factible compacto. Además, según se indicó en la Observación 3.32, basta considerar $\min_{F \in L_S} g(F)$, con $g(F) = f(F, T_F)$, para obtener una solución óptima del problema original.

Podemos suponer que el conjunto de puntos r -proyectables $P_r(L_S)$ es no vacío, ya que en caso de serlo, la Proposición 3.39 garantiza que, para cualquier punto F en L_S , existe T_F en $H(F)$ que es un punto extremo de L_R ; de aquí se deduce la existencia de una solución óptima (F^*, T_F^*) en la que T_F^* es un punto extremo de L_R . Sea $r(L_R)$ la recta que contiene al segmento L_R , y sean H_1 y H_2 los semiplanos cerrados determinados por esta recta. Consideremos en primer lugar el caso en que L_S está contenido en uno de tales semiplanos.

Se probará a continuación que el conjunto de puntos de L_S cuya r -proyección Π_F pertenece a L_R es un segmento, sobre el cual la función objetivo es cóncava; de aquí se concluirá que la restricción del problema a este segmento verifica la tesis de la proposición. Según la Proposición 3.39, la función $q : F \in P_r(L_S) \rightarrow \Pi_F$ es afín, por lo que el conjunto $\Lambda = q^{-1}(L_R)$, o bien es un segmento contenido en L_S , o bien

es vacío; además, para todo $F \in \Lambda$ se verifica que $q(F) = \Pi_F = T_F$, de donde se deduce, teniendo en cuenta (b.2.2) de la Proposición 3.39, que la función

$$F \in \Lambda \rightarrow \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T_F) + K \|F - T_F\|$$

es afín y, en consecuencia, la restricción de g al segmento Λ será cóncava, alcanzándose su mínimo en un punto extremo F_Λ^* de Λ . Si F_Λ^* no es un punto extremo de L_S es debido a que $q(F_\Lambda^*) = T_{F_\Lambda^*}$ es un punto extremo de L_R , por la afinidad de q . En consecuencia, existe una solución óptima del problema (P_{Λ, L_R}) una de cuyas componentes es un punto extremo, bien de L_S o bien de L_R .

Consideremos ahora un punto $F \in L_S \setminus \Lambda$, por lo que $q(F) = \Pi_F \notin L_R$ y, según la Observación 3.35, T_F será un punto extremo de L_R . Aunque F mejore el valor objetivo óptimo de g sobre Λ , seguirá verificándose que existe una solución óptima de (P_{L_S, L_R}) una de cuyas componentes corresponde a un punto extremo, en este caso de L_R .

Supongamos ahora que el segmento L_S no se encuentra totalmente contenido en uno de los semiplanos H_1 o H_2 y consideremos los segmentos $L'_S \subset H_1$ y $L''_S \subset H_2$, tales que $L'_S \cup L''_S = L_S$ y $L'_S \cap L''_S = \{F^0\} = \{(f_1^0, f_2^0)\}$, con $F^0 \in \tau(L_R)$. Sean (F_1, T_{F_1}) y (F_2, T_{F_2}) soluciones óptimas de $(P_{L'_S, L_R})$ y $(P_{L''_S, L_R})$ sobre L'_S y L''_S , respectivamente y supongamos que $f(F_1, T_{F_1}) = \min\{f(F_1, T_{F_1}), f(F_2, T_{F_2})\}$. Según lo probado anteriormente, o bien F_1 es un punto extremo de L'_S , o bien T_{F_1} es un punto extremo de L_R , por lo que el único caso que debe analizarse es aquel en que $F_1 = F^0$, por corresponder a un punto interior de L_S ; en esta situación se probará que T_{F_1} es un punto extremo de L_R .

Consideremos la transformación τ dada en el Lema 3.37 y sea $\tau(F^0) = \overline{F^0} = (\overline{f_1^0}, 0)$. Si $L_S \cap L_R \neq \emptyset$, debe verificarse $L_S \cap L_R = F^0$, por lo que se tendrá $\tau(L_S) \cap \tau(L_R) = \overline{F^0}$. Fijado este punto, la función $\tilde{d}_{\overline{F^0}}$ o bien es monótona, o bien alcanza su mínimo en el punto $\overline{F^0}$, según el Lema 3.36. Teniendo en cuenta la Observación 3.38, la función d_F será, o bien monótona, en cuyo caso se verificará (b), o bien alcanzará su mínimo en el punto $\tau^{-1}(\overline{F^0}) = F^0$, verificándose, por tanto, (c).

Si $L_S \cap L_R = \emptyset$ también se tendrá $\tau(L_S) \cap \tau(L_R) = \emptyset$, por lo que el segmento $\tau(L_R)$ se encontrará contenido en uno de los rayos

$$R_1 = \{(t, 0) : t \geq \overline{f_1^0}\} \quad R_2 = \{(t, 0) : t \leq \overline{f_1^0}\}$$

Como en ningún caso $\overline{f_1^0}$ puede ser un punto interior de $\tau(L_R)$, el análisis de las diferentes posibilidades recogidas en el Lema 3.36 indica que el valor mínimo de la función $\tilde{d}_{\overline{F_0}}$ sobre $\tau(L_R)$ se alcanzará en un punto extremo del segmento. En efecto, esta función puede ser constante o estrictamente monótona sobre \mathbb{R} , siendo trivialmente cierto en este caso; también puede alcanzar su mínimo global sobre \mathbb{R} en $\overline{f_1^0} \notin \tau(L_R)$, por lo que su mínimo sobre $\tau(L_R)$ se alcanzará en un punto extremo, dado que es convexa. Por último, puede ser constante sobre una semirrecta con extremo en $\overline{f_1^0}$, en la que alcanza su mínimo, y estrictamente monótona fuera de ella; en este caso, como $\tau(L_R)$ está contenido en R_1 o R_2 , la función será o constante o estrictamente monótona sobre $\tau(L_R)$, por lo que también será cierto. Por tanto, en cualquiera de los casos se verifica que el mínimo de la función $\tilde{d}_{\overline{F_0}}$ sobre $\tau(L_R)$ se alcanza en un punto extremo y, en consecuencia, existe un punto extremo de L_R en el que la función d_F alcanza su mínimo, que corresponderá a $T_{F_0} = T_{F_1}$, verificándose (b). \square

3.5.2 Obtención de soluciones óptimas

Según la Proposición 3.40, la resolución del problema (P_{L_S, L_R}) puede abordarse mediante su descomposición en cuatro problemas de optimización unidimensional, obtenidos al fijar cada uno de los puntos extremos de los segmentos considerados. Adicionalmente, si el conjunto $L_S \cap L_R$ se reduce a un único punto, será preciso evaluar la función objetivo en tal punto.

1. Fijado F_0 , punto extremo de L_S , debe resolverse el siguiente problema de optimización escalar

$$(P_\alpha) \quad \min_{T \in L_R} \alpha(T) = \sum_{a \in A^+} \omega_a d(a, T) + K \|F_0 - T\|$$

cuya función objetivo es convexa. Además, es derivable salvo en un punto a lo sumo, presentando en tal caso un comportamiento afín a trozos.

Éste es el problema considerado por Erkut en [37].

2. Fijado T_0 , punto extremo de L_R , el problema de optimización que debe resolverse es:

$$(P_\beta) \quad \min_{F \in L_S} \beta(F) = K \|F - T_0\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\|$$

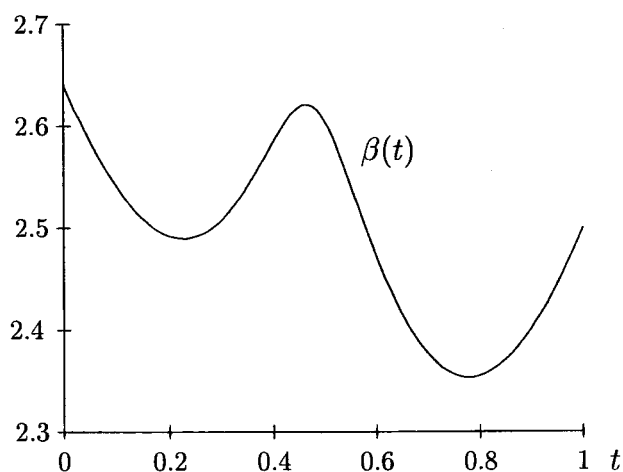


Figura 3.3: Carácter multimodal de la función objetivo de (P_β)

La función objetivo no es convexa ni cóncava, aunque es diferencia de convexas, y puede presentar mínimos locales no globales, como se pone de manifiesto al considerar:

$$L_S = [(0, 2), (2, 0)] \quad A^- = \{(1.1, 1.2)\} \quad T_0 = (0, 0) \quad K = 2 \quad \varphi_\alpha = 1$$

La Figura 3.3 representa la función β expresada en términos del parámetro que describe los puntos de L_S como combinación convexa de sus puntos extremos. El carácter multimodal de la función objetivo sugiere el empleo de técnicas de optimización global para la resolución del problema (P_β) .

3.5.2.1 Resolución del problema (P_α)

La Proposición 3.39 proporciona directamente la solución óptima del problema de optimización considerado, pues éste es equivalente a la determinación del conjunto $H(F_0)$, formado por las s-proyecciones T_{F_0} del punto F_0 sobre el segmento L_R . Así, bajo la notación establecida en dicho lema y considerando $F = F_0$, pueden presentarse las siguientes situaciones:

1. Si $K \leq |A|/\Delta$, existe una solución óptima del problema (P_α) que es un punto extremo del segmento L_R .

2. Si $K > |A|/\Delta$, la solución óptima de (P_α) viene dada por:

$$\Pi_{F_0} = T_1 + \frac{C}{\Delta}(T_2 - T_1)$$

si $\Pi_{F_0} \in L_R$. En caso contrario, la solución óptima es un punto extremo del segmento L_R .

Desde el punto de vista computacional, la principal dificultad que plantea la resolución de este problema es la determinación de los coeficientes A y B que aparecen en la expresión paramétrica de la función de costos sobre el grafo. Tales coeficientes deben ser calculados para cada uno de los segmentos de arista L_R en que la función distancia es afín. Si se tiene en cuenta que estos segmentos están determinados por los puntos de cuello de botella del grafo, su número puede elevarse, [28], hasta $|A^+||E|$. No obstante, la determinación de A y B para los diferentes segmentos de una arista puede simplificarse de manera notable una vez realizado el cálculo para el primero de ellos, según se verá a continuación.

Consideremos una arista determinada por los vértices a_j y a_k , y supongamos que B_R es el primer punto de cuello de botella en la arista, al desplazarnos desde a_j hasta a_k (el subíndice en B_R indica que se trata de un punto de cuello de botella respecto a los nodos del conjunto $R = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$). Dado un punto P situado en el interior del segmento de arista determinado por a_j y B_R , sean

$$N_j(P) = \{a_i \in A^+ : d(a_i, a_j) + c(a_j, P) \leq d(a_i, a_k) + c(a_k, P)\}$$

$$N_k(P) = \{a_i \in A^+ : d(a_i, a_j) + c(a_j, P) \geq d(a_i, a_k) + c(a_k, P)\}$$

$$W_j(P) = \sum_{a_i \in N_j(P)} w_i \quad W_k(P) = \sum_{a_i \in N_k(P)} w_i$$

$$q(P) = W_j(P) - W_k(P)$$

donde $c(P_1, P_2)$ denota la longitud del segmento de arista determinado por los puntos P_1 y P_2 . Es fácil comprobar, [28], que la pendiente A puede expresarse como

$$A = q(P) c(a_j, B_R) \tag{3.13}$$

Si el siguiente punto de cuello de botella sobre la arista es B_S , la pendiente A de la recta será ahora

$$A = q(P') c(B_R, B_S)$$

siendo P' cualquier punto situado en el segmento de arista determinado por B_R y B_S . Teniendo en cuenta que B_R es un punto de cuello de botella respecto a los nodos del conjunto R , se tendrá que:

$$N_j(P') = N_j(P) \setminus R$$

$$N_k(P') = N_k(P) \cup R$$

de donde se deduce que:

$$q(P') = q(P) - 2 \sum_{a_i \in R} w_i$$

Por tanto, una vez determinado el coeficiente $A^{(1)}$ para el primer segmento de arista, los coeficientes correspondientes a los demás segmentos pueden calcularse secuencialmente a partir de éste. De la misma forma, conocido el término independiente $B^{(1)}$ para el primer segmento de la arista, pueden determinarse los correspondientes a los demás segmentos, sin más que tener en cuenta que, por continuidad, se verifica:

$$B^{(i+1)} = G^{(i+1)}(0) = G^{(i)}(1) = A^{(i)} + B^{(i)}$$

siendo $G^{(n)}$ la expresión paramétrica de la función de costos sobre el grafo en el n -ésimo segmento de la arista considerada.

Consideremos ahora la obtención de los coeficientes $A^{(1)}$ y $B^{(1)}$. Dado un punto P perteneciente al primer segmento de la arista que une a_j y a_k en el que la función distancia es afín, los conjuntos $N_j(P)$ y $N_k(P)$ pueden determinarse fácilmente a partir de la matriz de distancias mínimas entre los vértices del grafo, empleando la siguiente regla de asignación, de donde se obtiene $A^{(1)}$ haciendo uso de (3.13):

El vértice $a_i \in A^+$ es asignado a $N_j(P)$ si $d(a_i, a_j) < d(a_i, a_k) + c(a_j, a_k)$. En caso contrario, a_i es asignado a $N_k(P)$.

El coeficiente $B^{(1)}$ viene determinado a partir de la suma de las distancias ponderadas de todos los vértices del grafo al vértice a_j , operación en la que nuevamente interviene la matriz de distancias mínimas, que puede ser obtenida mediante el algoritmo de Floyd, [39].

3.5.2.2 Resolución del problema (P_β)

El carácter multimodal de la función objetivo de (P_β) requerirá el empleo de técnicas de optimización global para su resolución, [67]. No obstante, antes de abordar

estas técnicas aplicables al caso general, se tratarán de establecer condiciones que garanticen la concavidad o convexidad de la función objetivo, lo que permitirá el empleo de procedimientos de optimización más simples y eficientes que los indicados anteriormente.

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para que la función objetivo β sea cóncava o convexa, en el caso particular en que el segmento L_S se encuentre situado sobre el eje OX , coincidiendo su extremo izquierdo con el origen de coordenadas. Posteriormente se considerará una determinada transformación que permite reducir el caso general a este otro aquí considerado.

Lema 3.41 *Dado el segmento $L_S = [F_1, F_2]$, con $F_1 = (0, 0)$ y $F_2 = (f_2, 0)$, y los puntos $T_0 = (t_1, t_2)$, con $t_2 \neq 0$, y $a = (a_1, a_2) \in A^-$, con $a_2 \neq 0$ para todo $a \in A^-$, sean:*

$$C_m = \begin{cases} [t_1^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } t_1 < 0 \\ |t_2|^3 & \text{si } 0 \leq t_1 \leq f_2 \\ [(f_2 - t_1)^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } t_1 > f_2 \end{cases} \quad C_M = \max \left\{ [t_1^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}}, [(f_2 - t_1)^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$D_m^a = \begin{cases} [a_1^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } a_1 < 0 \\ |a_2|^3 & \text{si } 0 \leq a_1 \leq f_2 \\ [(f_2 - a_1)^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } a_1 > f_2 \end{cases} \quad D_M^a = \max \left\{ [a_1^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}}, [(f_2 - a_1)^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

(a) *Una condición suficiente para que la función β de (P_β) sea convexa sobre L_S viene dada por:*

$$C_M \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2 \leq K t_2^2 \min_{a \in A^-} D_m^a$$

(b) *Una condición suficiente para que la función β de (P_β) sea cóncava sobre L_S viene dada por:*

$$C_m \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2 \geq K t_2^2 \max_{a \in A^-} D_M^a$$

Demostración. Teniendo en cuenta las coordenadas de los puntos considerados, la función β tendrá como expresión

$$\beta(x) = K \sqrt{(x - t_1)^2 + t_2^2} - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}$$

Esta función es infinitamente derivable sobre \mathbb{R} , pues ninguno de los puntos $a \in A^-$ está situado sobre el eje OX , ni tampoco T_0 . Las derivadas primera y segunda de

esta función resultan ser:

$$\beta'(x) = \frac{K(x - t_1)}{\sqrt{(x - t_1)^2 + t_2^2}} - \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a(x - a_1)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}}$$

$$\beta''(x) = \frac{K t_2^2}{[(x - t_1)^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}}} - \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{[(x - a_1)^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}}}$$

De aquí se deduce que:

$$\beta''(x) \geq 0 \iff K t_2^2 \geq [(x - t_1)^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}} \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{[(x - a_1)^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \forall x \in L_S$$

Consideremos las funciones h_t y h_a definidas sobre L_S por

$$h_t(x) = [(x - t_1)^2 + t_2^2]^{\frac{3}{2}} \quad h_a(x) = [(x - a_1)^2 + a_2^2]^{\frac{3}{2}}$$

por lo que se tendrá:

$$\beta''(x) \geq 0 \iff K t_2^2 \geq h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} \quad \forall x \in L_S \quad (3.14)$$

Por otra parte, dado un punto $x \in L_S$ se verifica:

$$h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} \leq \max_{x \in L_S} h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{\min_{x \in L_S} h_a(x)}$$

La función h_t es convexa sobre L_S , por lo que su máximo se alcanzará en un punto extremo del segmento, de donde se deduce que $C_M = \max_{x \in L_S} h_t(x)$. En cuanto a h_a , se trata de la composición de la función distancia a un punto fijo a con una función creciente, por lo que su mínimo vendrá dado por el punto de L_S que se encuentre más próximo al punto fijo a : la proyección ortogonal de a sobre el segmento, si $0 \leq a_1 \leq f_2$, o el extremo de L_S más próximo al punto a , en otro caso. Teniendo esto en cuenta, se ha probado que $D_m^a = \min_{x \in L_S} h_a(x)$ y, por tanto, para todo $x \in L_S$ se verificará:

$$h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} \leq C_M \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2 (D_m^a)^{-1} \leq C_M \max_{a \in A^-} (D_m^a)^{-1} \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2$$

de donde, teniendo presente (3.14), se deduce inmediatamente (a) .

Análogamente, dado un punto $x \in L_S$

$$\begin{aligned} \beta''(x) \leq 0 &\iff K t_2^2 \leq \left[(x - t_1)^2 + t_2^2 \right]^{\frac{3}{2}} \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{\left[(x - a_1)^2 + a_2^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &\iff K t_2^2 \leq h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por otra parte, para todo $x \in L_S$ se verifica:

$$h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} \geq \min_{x \in L_S} h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{\max_{x \in L_S} h_a(x)}$$

Cada función h_a es convexa sobre L_S , por lo que su máximo se alcanzará en un punto extremo del segmento, de donde se deduce que $D_M^a = \max_{x \in L_S} h_a(x)$. Por lo que respecta a h_t , se trata de la composición de la función distancia a un punto fijo T_0 , con una función creciente, por lo que su mínimo vendrá dado por el punto de L_S que se encuentre más próximo a T_0 : la proyección ortogonal de T_0 sobre el segmento, si $0 \leq t_1 \leq f_2$, o el extremo de L_S más próximo al punto fijo, en otro caso. Teniendo esto en cuenta, se ha probado que $C_m = \min_{x \in L_S} h_t(x)$ y, por tanto:

$$\begin{aligned} \forall x \in L_S \quad h_t(x) \sum_{a \in A^-} \frac{\varphi_a a_2^2}{h_a(x)} &\geq C_m \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2 (C_M^a)^{-1} \\ &\geq C_m \min_{a \in A^-} (D_M^a)^{-1} \sum_{a \in A^-} \varphi_a a_2^2 \end{aligned}$$

de donde se deduce inmediatamente (b) a partir de (3.15). \square

Consideremos ahora el caso general en que el segmento L_S no se encuentra necesariamente dispuesto según las hipótesis del lema anterior. El siguiente resultado proporciona en este caso condiciones que permiten determinar la concavidad o convexidad de la función objetivo.

Lema 3.42 *Dado el segmento $L_S = [F_1, F_2]$, con $F_1 = (f_{11}, f_{12})$ y $F_2 = (f_{21}, f_{22})$, y los puntos $T_0 = (t_1, t_2)$ y $a = (a_1, a_2) \in A^-$, supongamos que ninguno de los puntos $a \in A^-$, así como T_0 , pertenecen a la recta $r(L_S)$ determinada por F_1 y F_2 ,*

y consideremos:

$$\tilde{C}_m = \begin{cases} [\bar{t}_1^2 + \bar{t}_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } \bar{t}_1 < 0 \\ |\bar{t}_2|^3 & \text{si } 0 \leq \bar{t}_1 \leq \bar{f}_{21} \\ [(\bar{f}_{21} - \bar{t}_1)^2 + \bar{t}_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } \bar{t}_1 > \bar{f}_{21} \end{cases} \quad \tilde{C}_M = \max \left\{ [\bar{t}_1^2 + \bar{t}_2^2]^{\frac{3}{2}}, [(\bar{f}_{21} - \bar{t}_1)^2 + \bar{t}_2^2]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\tilde{D}_m^{\bar{a}} = \begin{cases} [\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } \bar{a}_1 < 0 \\ |\bar{a}_2|^3 & \text{si } 0 \leq \bar{a}_1 \leq \bar{f}_{21} \\ [(\bar{f}_{21} - \bar{a}_1)^2 + \bar{a}_2^2]^{\frac{3}{2}} & \text{si } \bar{a}_1 > \bar{f}_{21} \end{cases} \quad \tilde{D}_M^{\bar{a}} = \max \left\{ [\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2]^{\frac{3}{2}}, [(\bar{f}_{21} - \bar{a}_1)^2 + \bar{a}_2^2]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{T} &= (\bar{t}_1, \bar{t}_2) = (T - F_1)M & \bar{F}_2 &= (\bar{f}_{21}, \bar{f}_{22}) = (F_2 - F_1)M \\ \bar{a} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a - F_1)M & \Delta &= \|F_2 - F_1\| \end{aligned}$$

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f_{21} - f_{11} & f_{12} - f_{22} \\ f_{22} - f_{12} & f_{21} - f_{11} \end{pmatrix}$$

(a) Una condición suficiente para que la función β de (P_β) sea convexa sobre L_S viene dada por:

$$\tilde{C}_M \sum_{a \in A^-} \varphi_a \bar{a}_2^2 \leq K \bar{t}_2^2 \min_{a \in A^-} \tilde{D}_m^{\bar{a}}$$

(b) Una condición suficiente para que la función β de (P_β) sea cóncava sobre L_S viene dada por:

$$\tilde{C}_m \sum_{a \in A^-} \varphi_a \bar{a}_2^2 \geq K \bar{t}_2^2 \max_{a \in A^-} \tilde{D}_M^{\bar{a}}$$

Demostración. Consideremos la transformación $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tau(F) = (F - F_1)M$, que es composición de una traslación y un giro, por lo que conservará las distancias. Es inmediato comprobar que $\tau(F_1) = (0, 0)$, $\tau(F_2) = \bar{F}_2 = (\bar{f}_{21}, 0)$ y que $\tau(F) = (\bar{f}_1, 0)$ para todo $F \in r(L_S)$; por tanto, L_S se transforma en un intervalo contenido en el eje OX , con extremos 0 y \bar{f}_{21} .

Sea $\tilde{\beta}$ la función definida sobre el eje OX por:

$$\tilde{\beta}(\bar{F}) = K \|\bar{F} - \bar{T}_0\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|\bar{F} - \bar{a}\|$$

Dado que τ conserva las distancias, se verifica que $\beta(F) = \tilde{\beta}(\tau(F))$. Así, si se consideran las imágenes por τ de F_1, F_2, T_0 y $a \in A^-$, se verifican las hipótesis del Lema 3.41; como las funciones β y $\tilde{\beta}$ coinciden al ser evaluadas en un punto F y su imagen por τ , respectivamente, basta aplicar el lema anterior a $\tilde{\beta}$ para obtener condiciones suficientes sobre la concavidad o convexidad de β . Obsérvese además que si ninguno de los puntos $a \in A^-$, ni tampoco T_0 , pertenecen a la recta $r(L_S)$ determinada por F_1 y F_2 , sus imágenes por τ no estarán situados sobre el eje OX , satisfaciéndose la hipótesis del Lema 3.41 en ese sentido. \square

En caso de que verifique la condición que permite garantizar la concavidad de β sobre L_S , el problema (P_β) es de resolución inmediata: basta evaluar la función objetivo en los puntos extremos del segmento. Por otra parte, si la función β es convexa sobre L_S , puede aplicarse cualquier algoritmo de minimización convexa, [10], por ejemplo el método de Newton (supuesto que ninguno de los puntos $a \in A^-$ ni T_0 está en la recta $r(L_S)$), lo que garantiza la derivabilidad de la función objetivo).

Obsérvese que si el punto T_0 está alineado con T_1 y T_2 (caso en el que no es aplicable el resultado anterior), el problema es también de resolución inmediata. En efecto, si $T_0 \notin L_R$ la función β es cóncava sobre L_R , mientras que, en caso contrario, β es cóncava sobre cada subintervalo $[F_1, T_0]$ y $[T_0, F_2]$.

Consideraremos ahora el caso general en el que la función β puede tener carácter multimodal, por lo que será preciso el empleo de técnicas de optimización global. En concreto, la resolución de (P_β) será abordada mediante procedimientos de ramificación y acotación, haciendo uso del carácter d.c. (y Lipschitz) de la función objetivo para la determinación de cotas.

Resolución de (P_β) mediante ramificación y acotación

Básicamente, la aplicación de un procedimiento de ramificación y acotación, [11, 64, 67, 124], al problema considerado consiste en la división sucesiva de L_S en subsegmentos, para cada uno de los cuales se determina una cota inferior de β . Aquellos subsegmentos en los que esta cota es mayor que la mejor solución obtenida hasta el momento, son eliminados. Una descripción general de estos algoritmos puede verse en la Sección 1.1.

A continuación se describen diferentes acotaciones de la función β , realizándose un análisis comparativo sobre su eficiencia, considerando combinaciones de éstas (el

máximo de tales cotas inferiores es también cota inferior). En tales acotaciones se hará uso de la estructura d.c. de la función β , que puede expresarse como suma de una función convexa y otra cóncava:

$$\beta(F) = K \|F - T_0\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| = \theta(F) + \rho(F)$$

Acotación 1

Una cota inferior simple para la función β se obtiene al considerar el mínimo de la componente convexa θ y el mínimo de la componente cóncava ρ , que pueden determinarse fácilmente. La suma de ambos constituye, evidentemente, una cota inferior para β .

Para determinar el mínimo de θ sobre un segmento dado L , se consideran las tres regiones en que queda dividido \mathbb{R}^2 al trazar perpendiculares a L que pasen por sus puntos extremos. Así, sea \underline{F}_{T_0} el punto de L definido de la siguiente forma:

- Si T_0 pertenece a la región central (aquella que contiene al segmento L), \underline{F}_{T_0} es la proyección ortogonal de T_0 sobre L .
- Si T_0 pertenece a una región lateral, entonces \underline{F}_{T_0} es el punto extremo de L adyacente a esa región.

El punto \underline{F}_{T_0} puede ser obtenido también calculando directamente el mínimo sobre \mathbb{R} de la función θ , según se describe a continuación:

Supongamos $F_1 = (f_{11}, f_{12})$, $F_2 = (f_{21}, f_{22})$ y $T_0 = (t_1, t_2)$ y consideremos la siguiente expresión paramétrica de θ :

$$\theta(\lambda) = K \left[(\lambda(f_{21} - f_{11}) + f_{11} - t_1)^2 + (\lambda(f_{22} - f_{12}) + f_{12} - t_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \lambda \in [0, 1]$$

El mínimo de esta función se alcanza para el siguiente valor de λ

$$\lambda^* = \frac{(f_{11} - t_1)(f_{11} - f_{21}) + (f_{12} - t_2)(f_{12} - f_{22})}{(f_{21} - f_{11})^2 + (f_{22} - f_{12})^2}$$

Si $0 \leq \lambda^* \leq 1$, el punto de L correspondiente a este valor del parámetro determinará \underline{F}_{T_0} . Si $\lambda^* > 1$ se tomará como \underline{F}_{T_0} el punto F_2 , mientras que si $\lambda^* < 0$, el punto \underline{F}_{T_0} vendrá determinado por F_1 .

A partir de la definición de \underline{F}_{T_0} , es evidente que

$$\theta(F) = K \|F - T_0\| \geq K \|\underline{F}_{T_0} - T_0\| = \theta(\underline{F}_{T_0}) \quad \forall F \in L \quad (3.16)$$

Por otra parte, la función $\rho(F) = -\sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\|$ es cóncava, por lo que su mínimo se alcanzará en un punto extremo de L , que notaremos \underline{F}_{A^-} , obteniéndose

$$\rho(F) = -\sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F - a\| \geq -\sum_{a \in A^-} \varphi_a \|\underline{F}_a - a\| = \rho(\underline{F}_{A^-}) \quad (3.17)$$

Por tanto, una cota inferior de la función β sobre el segmento L viene dada por:

$$\underline{\beta}_1(L) = K \|\underline{F}_{T_0} - T_0\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|\underline{F}_{A^-} - a\| \quad (3.18)$$

Acotación 2

La descomposición de β como suma de una función convexa y otra cóncava, permite la obtención de forma fácil de una función minorante convexa, cuyo mínimo proporciona una cota inferior para β .

Dado el segmento $L = [F_1, F_2] = \{F_1 + \lambda(F_2 - F_1) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, la función $t(\lambda) = (\rho(F_2) - \rho(F_1))\lambda + \rho(F_1)$ constituye una minorante afín para la función cóncava ρ sobre L . En consecuencia, la función $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$m(\lambda) = K \|F_1 + \lambda(F_2 - F_1) - T_0\| + (\rho(F_2) - \rho(F_1))\lambda + \rho(F_1)$$

es una minorante convexa de β , lo que permite obtener una cota inferior para esta última función:

$$\underline{\beta}_2(L) = \min_{\lambda \in [0,1]} m(\lambda) \quad (3.19)$$

El siguiente resultado proporciona la solución del problema de minimización convexa anterior, permitiendo la obtención directa de la cota.

Lema 3.43 *Dado el segmento $L = [F_1, F_2]$, con $F_1 = (f_{11}, f_{12})$ y $F_2 = (f_{21}, f_{22})$, y el punto $T_0 = (t_{01}, t_{02})$, sean*

$$\begin{aligned} \Delta &= \|F_2 - F_1\| \\ M &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f_{21} - f_{11} & f_{12} - f_{22} \\ f_{22} - f_{12} & f_{21} - f_{11} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_0 &= (\bar{t}_{01}, \bar{t}_{02}) = (T_0 - F_1) M \\ A &= \sum_{a \in A^-} \varphi_a [\|F_1 - a\| - \|F_2 - a\|] \end{aligned}$$

Entonces, la solución óptima del problema (3.19) viene dada por

$$\lambda^* = \frac{1}{\Delta} \left[\bar{t}_{01} - \frac{|\bar{t}_{02}|A}{\sqrt{K^2\Delta^2 - A^2}} \right]$$

si $K > |A|/\Delta$ y $\lambda^* \in [0, 1]$. En cualquier otro caso, la solución óptima es un punto extremo del intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Veamos que el problema considerado puede reducirse a otro equivalente en el que los puntos F_1 y F_2 se encuentran situados sobre el eje OX , coincidiendo el primero de ellos con el origen de coordenadas.

Consideremos la transformación $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tau(F) = (F - F_1)M$, que es composición de una traslación y un giro, por lo que será una isometría. Dado $F = F_1 + \lambda(F_2 - F_1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es inmediato comprobar que $\tau(F) = (\lambda\Delta, 0)$.

Sea \tilde{m} la función definida sobre \mathbb{R} por:

$$\tilde{m}(f) = K\sqrt{(f - \bar{t}_{01})^2 + \bar{t}_{02}^2} + \frac{A}{\Delta}f + \rho(F_1)$$

Como τ conserva las distancias y $\tau(T_0) = \bar{T}_0$, se deduce inmediatamente que $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda\Delta)$. Por tanto, si se considera un punto F y su transformado por τ , los respectivos valores de m y \tilde{m} coinciden, de donde se deduce que basta determinar el mínimo de \tilde{m} sobre \mathbb{R} , e invertir la transformación τ posteriormente, para obtener la solución óptima de (3.19).

Según el Lema 3.36, si $K > |A|/\Delta$ el mínimo de la función \tilde{m} sobre \mathbb{R} viene dado por:

$$f^* = \bar{t}_{01} - \frac{|\bar{t}_{02}| \frac{A}{\Delta}}{\sqrt{K^2 - \frac{A^2}{\Delta^2}}}$$

Si $K \leq |A|/\Delta$, se deduce de dicho lema que el mínimo de \tilde{m} sobre cualquier intervalo cerrado se alcanza en un punto extremo. Invertiendo la transformación τ queda probado el resultado. \square

Acotación 3

A continuación se describe otra cota inferior de la función β sobre un segmento cualquiera $L = [F_1, F_2]$, basada en la obtención de una minorante afin para la

componente convexa de β . Éste es el procedimiento habitualmente utilizado para la obtención de cotas inferiores de funciones d.c. en los métodos de ramificación y acotación.

La función β es suma de una función convexa y otra cóncava, y su componente convexa θ puede ser minorada por una función afín de la forma

$$h(F) = \theta(\tilde{F}) + \langle u, F - \tilde{F} \rangle$$

siendo \tilde{F} un punto de L y u cualquier subgradiente de θ en el punto \tilde{F} . Si $\tilde{F} \neq T_0$, la función θ es diferenciable en \tilde{F} , por lo que se tendrá $u = \nabla\theta(\tilde{F})$; en otro caso, se considerará el subgradiente de θ en \tilde{F} determinado por los puntos extremos de L .

Debido a la convexidad de θ , se tendrá que $\beta(F) \geq h(F) + \rho(F)$ para todo punto $F \in L$, de donde se deduce que el mínimo de la función $\nu(F) = h(F) + \rho(F)$ proporciona una cota inferior de β . Teniendo en cuenta que la función ν es cóncava, su mínimo sobre L se alcanzará en uno de sus puntos extremos, por lo que bastará su evaluación en tales puntos para determinarlo:

$$\underline{\beta}_3(L) = \min_{F \in L} \nu(F) = \min \{ \nu(F_1), \nu(F_2) \} \quad (3.20)$$

La elección del punto \tilde{F} a partir del cual se determina la función afín minorante, influye en la obtención de cotas próximas en mayor o menor grado al valor objetivo óptimo β^* . Aunque posteriormente se analizará la obtención de la mejor cota que puede determinarse empleando este procedimiento, puede considerarse en una primera aproximación el punto \tilde{F} en el que la función θ alcanza su mínimo sobre L . Esta elección es la que conduce a un valor máximo en el mínimo de la función afín, por lo que es de esperar que proporcione cotas aceptables en gran número de ocasiones.

El punto en el que se alcanza el mínimo de θ sobre L puede determinarse utilizando el método descrito en el desarrollo de la acotación 1.

Acotación 4

En este apartado se obtendrá una cota inferior basada, al igual que en el apartado anterior, en la determinación de una minorante afín para la componente convexa de β . La diferencia entre ambas acotaciones radica en la elección del punto que determina tal función afín, que ahora se realizará de forma que conduzca a la mejor cota posible entre las obtenidas por este procedimiento.

Consideremos la expresión paramétrica del segmento $L = [F_1, F_2]$ como combinación convexa de sus puntos extremos, por lo que la función β resultará

$$\beta(\lambda) = K \|F_1 + \lambda(F_2 - F_1) - T_0\| - \sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F_1 + \lambda(F_2 - F_1) - a\| = \theta(\lambda) + \rho(\lambda)$$

El problema de optimización a resolver será $\min_{\lambda \in I} \beta(\lambda)$, siendo $I = [0, 1]$. La función convexa θ puede ser minorada por la función afín

$$h(\lambda) = \theta(\lambda_0) + \langle u, \lambda - \lambda_0 \rangle$$

siendo $\lambda_0 \in I$ y u cualquier subgradiente de θ en el punto λ_0 .

Debido a la convexidad de θ , se tendrá que $\beta(\lambda) \geq h(\lambda) + \rho(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$, de donde se deduce que el mínimo de la función $\nu(\lambda) = h(\lambda) + \rho(\lambda)$ proporciona una cota inferior de β . Teniendo en cuenta que ν es cóncava, por ser suma de afín y cóncava, su mínimo sobre I se alcanzará en uno de sus puntos extremos, por lo que bastará su evaluación en tales puntos para determinarlo.

La elección del punto λ_0 que determina la función afín minorante, influye en la obtención de cotas más o menos ajustadas al valor objetivo óptimo β^* . Particularizando los resultados obtenidos en [19], la mejor cota inferior que puede generarse con este procedimiento coincide con el valor objetivo óptimo de

$$\max_{u \in \mathbb{R}} L(u) \tag{3.21}$$

siendo

$$L(u) = \min_{\lambda \in I} (\theta(\lambda) - \lambda u) + \min_{\mu \in I} (\rho(\mu) + \mu u)$$

En [19] se prueba, además, que si el conjunto factible es un simplex, la solución óptima \hat{u} de (3.21) puede obtenerse resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Teniendo en cuenta que $I = [0, 1]$ es un simplex en \mathbb{R} y haciendo uso de tal resultado, el valor \hat{u} se determina resolviendo la ecuación $\rho(1) + u = \rho(0)$, de donde

$$\hat{u} = \sum_{a \in A^-} \varphi_a [\|F_2 - a\| - \|F_1 - a\|]$$

La mejor cota inferior que puede obtenerse es, por tanto

$$\underline{\beta}_A = L(\hat{u}) = \min_{\lambda \in I} (\theta(\lambda) - \lambda \hat{u}) + \min_{\mu \in I} (\rho(\mu) + \mu \hat{u}) \tag{3.22}$$

La función objetivo del segundo problema de minimización es cóncava, y en ambos extremos de I toma el valor $\rho(0) = -\sum_{a \in A^-} \varphi_a \|F_1 - a\|$, por lo que éste es su mínimo. Por tanto, debe resolverse el problema de minimización convexa

$$\min_{\lambda \in I} p(\lambda) := K \|F_1 + \lambda(F_2 - F_1) - T_0\| - \hat{u}\lambda \quad (3.23)$$

Lema 3.44 Dado el segmento $L = [F_1, F_2]$, con $F_1 = (f_{11}, f_{12})$ y $F_2 = (f_{21}, f_{22})$, y el punto $T_0 = (t_{01}, t_{02})$, sean

$$\begin{aligned} \Delta &= \|F_2 - F_1\| \\ M &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f_{21} - f_{11} & f_{12} - f_{22} \\ f_{22} - f_{12} & f_{21} - f_{11} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_0 &= (\bar{t}_{01}, \bar{t}_{02}) = (T_0 - F_1) M \end{aligned}$$

Entonces, la solución óptima del problema (3.23) es el punto

$$\lambda^* = \frac{1}{\Delta} \left[\bar{t}_{01} + \frac{|\bar{t}_{02}| \hat{u}}{\sqrt{K^2 \Delta^2 - \hat{u}^2}} \right]$$

si $K > |\hat{u}|/\Delta$ y $\lambda^* \in [0, 1]$. En cualquier otro caso, la solución óptima es un punto extremo del intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Veamos que el problema considerado puede reducirse a otro equivalente en el que los puntos F_1 y F_2 se encuentran situados sobre el eje OX , coincidiendo el primero de ellos con el origen de coordenadas.

Consideremos la transformación $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tau(F) = (F - F_1)M$, que es composición de una traslación y un giro, por lo que será una isometría. Dado $F = F_1 + \lambda(F_2 - F_1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es inmediato comprobar que $\tau(F) = (\lambda\Delta, 0)$.

Sea \tilde{p} la función definida sobre \mathbb{R} por:

$$\tilde{p}(f) = K \sqrt{(f - \bar{t}_{01})^2 + \bar{t}_{02}^2} - \frac{\hat{u}}{\Delta} f$$

Como τ conserva las distancias y $\tau(T_0) = \bar{T}_0$, se deduce inmediatamente que $p(\lambda) = \tilde{p}(\lambda\Delta)$. Por tanto, si se considera un punto F y su transformado por τ , los respectivos valores de p y \tilde{p} coinciden, de donde se deduce que basta determinar el mínimo de \tilde{p} sobre \mathbb{R} , e invertir la transformación τ posteriormente, para obtener la solución óptima de (3.23).

Según el Lema 3.36, si $K > |\hat{u}|/\Delta$ el mínimo de la función \tilde{p} sobre \mathbb{R} viene dado por:

$$f^* = \bar{t}_{01} + \frac{|\bar{t}_{02}| \frac{\hat{u}}{\Delta}}{\sqrt{K^2 - \frac{\hat{u}^2}{\Delta^2}}}$$

Si $K \leq |\hat{u}|/\Delta$, se deduce de dicho lema que el mínimo de \tilde{p} sobre cualquier intervalo cerrado se alcanza en un punto extremo. Invertiendo la transformación τ queda probado el resultado. \square

Obsérvese que esta cota coincide con la obtenida anteriormente en la Acotación 2, es decir, la mejor cota que puede obtenerse minorando la parte convexa de la descomposición mediante una función afín, coincide con la cota obtenida al considerar una minorante afín de la parte cóncava.

Acotación 5

Teniendo en cuenta el carácter Lipschitz de la función β , puede establecerse la siguiente cota inferior para el valor mínimo de esta función sobre un intervalo $L = [F^1, F^2]$, [67]:

$$\underline{\beta}_5(L) = \frac{\beta(F^1) + \beta(F^2)}{2} - C_L \frac{F^2 - F^1}{2} \quad (3.24)$$

siendo C_L el valor de una constante de Lipschitz para β (puede tomarse $C_L = K + \sum_{a \in A^-} \varphi_a$).

Experiencia Computacional

Con objeto de valorar la eficiencia de las distintas cotas descritas anteriormente, se ha realizado su implementación computacional para la resolución del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta(F) \\ \text{s.a.} \quad & F \in I \end{aligned}$$

siendo $I = [(-7, 0), (7, 0)]$. Del conjunto de acotaciones indicado (excluyendo la cota 4, pues coincide con la 2) se seleccionaron todas las posibles combinaciones y, para cada una de ellas, se realizó la implementación, empleando como cota el máximo de las que intervienen en la combinación.

Para cada elección de las cotas, se repitió la aplicación del algoritmo de ramificación y acotación un total de 100 veces, empleando en cada una de ellas diferentes puntos y pesos asociados para la función β . Éstos fueron generados aleatoriamente según una distribución Uniforme en las regiones que se indican en la siguiente tabla.

T_0	$[-3, 3] \times [-3, 3]$
K	$[30, 50]$
$a \in A^-$	$[-10, 10] \times [-10, 10]$
φ_a	$[0, 2]$

El número de puntos repulsivos fue en todos los casos 50.

La Tabla 3.3 recoge, para cada elección de las cotas, la media aritmética, desviación típica, mínimo y máximo del número de iteraciones y del tiempo de CPU empleado en la resolución de los 100 subproblemas. Como puede apreciarse, el mejor rendimiento se obtiene al considerar exclusivamente la cota 2. Es de destacar también que los resultados obtenidos al utilizar la cota 3 casi duplican a los proporcionados por la cota 2; el interés de este resultado reside en que ambas se obtienen al considerar una minorante afín de la componente convexa de β , diferenciándose exclusivamente en la elección del punto para construir la minorante: en el primer caso se selecciona aquel en que la componente convexa alcanza su mínimo, mientras que en el segundo la elección se realiza de forma óptima. Con esto se pone de manifiesto que una elección conveniente del punto para construcción de la minorante afín puede influir de manera notable en el esfuerzo computacional requerido para la resolución del problema.

Cotas	Número de Iteraciones				Tiempo de CPU			
	μ	σ	min	max	μ	σ	min	max
1	17533.05	19890.55	70	104093	5.3963	6.3955	0.0499	34.7700
2	15.6700	2.2318	4	22	0.0043	0.0006	0.0013	0.0060
3	29.0200	4.5276	18	46	0.0076	0.0012	0.0047	0.0124
5	71031.54	31397.30	393	195368	42.9688	103.2563	0.1099	918.0197
1,2	15.6700	2.2318	4	22	0.0071	0.0009	0.0019	0.0101
1,3	29.0200	4.5276	18	46	0.0130	0.0019	0.0082	0.0206
1,5	17533.05	19890.55	70	104093	8.4502	9.8960	0.0000	53.7800
2,3	15.6700	2.2318	4	22	0.0072	0.0010	0.0021	0.0101
2,5	15.6700	2.2318	4	22	0.0060	0.0171	0.0000	0.0600
3,5	29.0200	4.5276	18	46	0.0130	0.0232	0.0000	0.0600
1,2,3	15.6700	2.2318	4	22	0.0087	0.0200	0.0000	0.0600
1,2,5	15.6700	2.2318	4	22	0.0093	0.0206	0.0000	0.0600
1,3,5	29.0200	4.5276	18	46	0.0209	0.0268	0.0000	0.0600
2,3,5	15.6700	2.2318	4	22	0.0099	0.0212	0.0000	0.0600
1,2,3,5	15.6700	2.2318	4	22	0.0124	0.0234	0.0600	0.0000

Tabla 3.3: Comparación de cotas (Ramificación y Acotación)

3.5.3 Eliminación de subproblemas

Como consecuencia de la Proposición 3.40, la obtención de una solución óptima de (P_{L_S, L_R}) queda reducida a la resolución de 4 problemas de optimización escalar, obtenidos al fijar cada uno de los punto extremos de L_R y L_S . No obstante, pueden obtenerse reglas simples que permitan decidir si no es necesaria la resolución de alguno de los subproblemas.

Dados $L_R = [T_1, T_2]$ y $L_S = [F_1, F_2]$, una solución óptima de los subproblemas de la forma $\min_{T \in L_R} f(F_i, T)$ puede obtenerse fácilmente, según se ha visto en el apartado 3.5.2.1. Si se considera un problema del tipo $\min_{F \in L_S} f(F, T_i)$, la comparación de la cota inferior del valor objetivo óptimo determinada en (3.22) con la mejor solución óptima de los subproblemas $\min_{T \in L_R} f(F_i, T)$, permitirá decidir si puede prescindirse de la resolución del subproblema considerado. Así, aquellos problemas cuya cota inferior sea mayor que la mejor solución óptima obtenida para los subproblemas de la forma $\min_{T \in L_R} f(F_i, T)$, pueden suprimirse directamente, sin que sea necesaria su resolución.

Regla de eliminación 1

Paso 1. Se consideran los segmentos $L_R = [T_1, T_2] \subset R$ y $L_S = [F_1, F_2] \subset \text{fr}(S)$. Resolver el problema de optimización $\min_{T \in L_R} f(F_i, T)$ para cada índice $i = 1, 2$, según lo indicado en el apartado 3.5.2.1, y almacenar en M_i el valor objetivo óptimo. Hacer $M := \min \{M_1, M_2\}$.

Paso 2. Para cada índice $i = 1, 2$, considerar el problema de optimización

$$(P_i) \quad \min_{F \in L_S} f(F, T_i)$$

y determinar la cota inferior del valor objetivo óptimo $\underline{\beta}^{(i)}(L_S)$ dada por (3.22). Si $M \leq \underline{\beta}^{(i)}(L_S)$, no considerar en lo sucesivo el problema (P_i) . \square

A continuación se describe otro criterio para la eliminación de subproblemas, de fácil implementación.

Dado el segmento $L_R = [T_1, T_2]$, se considera la función ψ definida sobre L_S por $\psi(F) = f(F, T_2) - f(F, T_1) = \sum_{a \in A^+} \omega_a [d(a, T_2) - d(a, T_1)] + K [\|F - T_2\| - \|F - T_1\|]$

Si esta función posee signo constante sobre L_S , puede eliminarse uno de los subproblemas $\min_{F \in L_S} f(F, T_1)$ o $\min_{F \in L_S} f(F, T_2)$, pues el objetivo correspondiente se encuentra acotado inferiormente por una solución factible del otro problema.

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente (y necesaria) para que la función ψ tenga signo constante en el intervalo L_S , lo cual posibilitará la obtención de una regla de eliminación.

Lema 3.45 *Sea Δ la función definida sobre L_S por $\Delta(F) = \|F - T_2\| - \|F - T_1\|$ y consideremos las constantes*

$$C = \sum_{a \in A^+} \omega_a [d(a, T_2) - d(a, T_1)] \quad (3.25)$$

$$C_I = K \min_{F \in L_S} \Delta(F) \quad (3.26)$$

$$C_S = K \max_{F \in L_S} \Delta(F) \quad (3.27)$$

Entonces, la condición $-C \notin (C_I, C_S)$ es necesaria y suficiente para que la función $\psi(F) = f(F, T_2) - f(F, T_1)$ presente signo constante sobre L_S .

Demostración. La función ψ puede expresarse como

$$\psi(F) = \sum_{a \in A^+} \omega_a [d(a, T_2) - d(a, T_1)] + K [\|F - T_2\| - \|F - T_1\|] = C + K\Delta(F)$$

Por tanto, $C + C_I \leq \psi(F) \leq C + C_S$ para todo $F \in L_S$, de donde se tiene:

$$\psi(F) \geq 0 \quad \forall F \in L_S \quad \iff \quad C + C_I \geq 0 \quad \iff \quad -C \leq C_I$$

$$\psi(F) \leq 0 \quad \forall F \in L_S \quad \iff \quad C + C_S \leq 0 \quad \iff \quad -C \geq C_S$$

quedando probado el resultado. □

Las condiciones expuestas en el Lema 3.45 requieren el cálculo de los extremos de la función Δ , operación ésta que puede realizarse fácilmente, como prueba el siguiente resultado.

Lema 3.46 *Dados los segmentos $L_1 = [A, B] \subset \mathbb{R}^2$ y $L_2 = [C, D] \subset \mathbb{R}^2$, con $A \neq B$ y $C \neq D$, se considera la función $\Delta(P) = \|P - C\| - \|P - D\| \quad \forall P \in L_1$, y las rectas r , s y \bar{s} determinadas, respectivamente, por los puntos AB , CD y $\bar{C}D$, siendo \bar{C} el punto simétrico de C respecto de r .*

- a) *Supongamos que C y D se encuentran en el mismo semiplano cerrado con respecto a r . Entonces, si $s \cap L_1 = \{P_0\}$, la función Δ alcanza su máximo y mínimo en el conjunto $\{A, B, P_0\}$. En otro caso, el máximo y el mínimo de Δ se alcanza en $\{A, B\}$.*
- b) *Supongamos que C y D se encuentran en distintos semiplanos cerrados con respecto a r . Entonces, si $\bar{s} \cap L_1 = \{\bar{P}_0\}$, la función Δ alcanza su máximo y mínimo en el conjunto $\{A, B, \bar{P}_0\}$. En otro caso, el máximo y el mínimo de Δ se alcanza en $\{A, B\}$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A = (0, 0)$ y $B = (b_1, 0)$, por lo que la función Δ tendrá como expresión:

$$\Delta(x) = \sqrt{(x - c_1)^2 + c_2^2} - \sqrt{(x - d_1)^2 + d_2^2} \quad 0 \leq x \leq b_1$$

Supongamos en primer lugar $c_2 \neq 0$ y $d_2 \neq 0$; en tal caso, la función Δ es derivable en \mathbb{R} , siendo su derivada:

$$\Delta'(x) = \frac{x - c_1}{\sqrt{(x - c_1)^2 + c_2^2}} - \frac{x - d_1}{\sqrt{(x - d_1)^2 + d_2^2}}$$

Si $\text{signo}(c_2) = \text{signo}(d_2)$ y $c_2 \neq d_2$, Δ' se anula en el punto $x_1 = (c_1d_2 - c_2d_1)/(d_2 - c_2)$. La recta s tiene por ecuación en ese caso $s : (c_2 - d_2)x + (d_1 - c_1)y + c_1d_2 - c_2d_1 = 0$, por lo que su intersección con el eje OX resulta ser el punto x_1 . Si $\text{signo}(c_2) \neq \text{signo}(d_2)$ y $c_2 \neq -d_2$, Δ' se anula en el punto $x_2 = (c_1d_2 + c_2d_1)/(d_2 + c_2)$. La recta \bar{s} tiene entonces por ecuación $\bar{s} : -(c_2 + d_2)x + (d_1 - c_1)y + d_2c_1 + c_2d_1 = 0$, siendo su intersección con el eje OX el punto x_2 . En ambos casos, si la recta considerada (s o \bar{s}) corta al segmento L_1 , el punto de intersección podrá corresponder a un extremo de la función; en cualquier otro caso, la función es monótona, por lo que el máximo y el mínimo se alcanzarán en $\{A, B\}$. Supongamos ahora $c_2 = 0$ (la demostración es análoga si $d_2 = 0$) y consideremos los siguientes casos:

1. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Supongamos que $c_1 > b_1$ (la demostración es similar si $c_1 < 0$). Dados $P_1 = (p_1, 0) \in L_1$ y $P_2 = (p_2, 0) \in L_1$, con $p_1 \leq p_2$ se verifica:

$$\begin{aligned} \Delta(P_1) &= \|P_1 - C\| - \|P_1 - D\| = \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - C\| - \|P_1 - D\| \\ &\geq \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - C\| - \|P_1 - P_2\| - \|P_2 - D\| \\ &= \|P_2 - C\| - \|P_2 - D\| = \Delta(P_2) \end{aligned}$$

debido a la desigualdad triangular. Por tanto, la función Δ es monótona sobre L_1 .

2. $\text{card}(L_1 \cap L_2) = 1$. Entonces se tiene que $L_1 \cap L_2 = C$ o $L_1 \cap L_2 = D$; consideraremos el primer caso, siendo la demostración análoga en el segundo. Dado $P \in L_1$ se verifica, en virtud de la desigualdad triangular, que $\|P - D\| \leq \|P - C\| + \|C - D\|$, de donde

$$\Delta(P) = \|P - C\| - \|P - D\| \geq -\|C - D\| = \|C - C\| - \|C - D\| = \Delta(C)$$

Es decir, la función alcanza su mínimo en el punto C . Veamos que el máximo de la función se alcanza en un punto extremo. Dado $P \in [A, C]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \|A - C\| - \|A - D\| \geq \|A - C\| - \|A - P\| - \|P - D\| = \\ &= \|P - C\| - \|P - D\| = \Delta(P) \end{aligned}$$

De la misma forma se prueba que $\Delta(B) \geq \Delta(P) \quad \forall P \in [C, B]$. Obsérvese que si L_2 no está contenido en el eje OX , se tiene que $s \cap L_1 = \{C\}$; en caso contrario, C es un punto extremo de L_1 . En ambos casos se verifica el resultado.

3. $\text{card}(L_1 \cap L_2) > 1$. Supongamos que $c_1 \geq 0$ (la demostración es análoga si $c_1 < 0$) y consideremos un punto $P = (p, 0) \in L_1$ con $p \leq c_1$. Entonces:

$$\Delta(P) = \|P - C\| - \|P - D\| = -\|C - D\| = \Delta(C)$$

Análogamente se prueba que Δ es constante en $[D, B]$ si $d_1 \leq b_1$. Consideremos ahora un punto $P \in L_1 \cap L_2$; entonces:

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \|P - C\| - \|P - D\| = \|P - C\| - (\|C - D\| - \|P - C\|) = \\ &= \Delta(C) + 2\|P - C\| \end{aligned}$$

Por tanto, la función es constante en $L_1 \setminus L_2$ y creciente en $L_1 \cap L_2$; haciendo uso de su continuidad, tanto el máximo como el mínimo se alcanzarán en puntos extremos de L_1 . \square

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, puede establecerse un nuevo criterio para la eliminación de subproblemas:

Regla de eliminación 2

Dados los segmentos $L_R = [T_1, T_2]$ y $L_S = [F_1, F_2]$, sea r la recta determinada por F_1 y F_2 y consideremos los problemas de optimización:

$$\min_{F \in L_S} f(F, T_i) \quad i = 1, 2$$

Paso 1. Hacer $\Omega := \{F_1, F_2\}$. Si T_1 y T_2 están en el mismo semiplano cerrado con respecto a r , sea s la recta determinada por T_1 y T_2 ; en caso contrario, determinar el punto \bar{T}_1 , simétrico de T_1 respecto de r y considerar la recta s definida por los puntos \bar{T}_1 y T_2 . Si $r \cap s = \{F_0\}$ y $F_0 \in L_S$, hacer $\Omega := \Omega \cup \{F_0\}$. Calcular:

$$\underline{\Delta} = \min_{F \in \Omega} \Delta(F) \qquad \bar{\Delta} = \max_{F \in \Omega} \Delta(F)$$

siendo $\Delta(F) = \|F - T_2\| - \|F - T_1\|$.

Paso 2. Calcular:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{a \in A^+} \omega_a [d(a, T_2) - d(a, T_1)] \\ C_I &= K \underline{\Delta} \\ C_S &= K \bar{\Delta} \end{aligned}$$

	Sin regla de eliminación	Con regla de eliminación	Porcentaje Reducción
Subproblemas	20000	10489	47.66%
Tiempo de CPU	10.27	5.93	42.26%

Tabla 3.4: Regla de eliminación Número 2: Resultados computacionales

Paso 3. Comprobar si $-C \notin (C_I, C_S)$. En tal caso:

- Si $C + C_I \geq 0$, eliminar el subproblema $\min_{F \in L_S} f(F, T_2)$.
- Si $C + C_S < 0$, eliminar el subproblema $\min_{F \in L_S} f(F, T_1)$. □

Experiencia Computacional

Para comprobar la eficiencia de este último criterio de eliminación, se consideró el segmento $L_S = [(-2, 0), (2, 0)]$ y se repitió 100 veces el proceso que se describe a continuación: fueron generados al azar 50 puntos $a \in A^-$ en el cuadrado $[-10, 10] \times [-10, 10]$, con pesos comprendidos entre 0 y 2. También se generó aleatoriamente el parámetro K del modelo, con un valor comprendido entre 0 y 20, así como las constantes $A \in [0, 10]$, $B \in [0, 50]$, $L_1 \in [1, 10]$ y $L_2 \in [1, 10]$, usadas posteriormente en el proceso. A continuación se generaron aleatoriamente 100 segmentos $L_R = [T_1, T_2]$, con T_1 y T_2 en cuadrados de lado $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente, centrados en el origen de coordenadas; también, para cada uno de estos segmentos se obtuvieron de forma aleatoria los coeficientes de la recta que proporciona el costo de transporte sobre el grafo para los puntos del segmento L_R ; la pendiente y el término independiente fueron generados al azar en los intervalos $[0, A]$ y $[0, B]$, respectivamente. En todos los casos, la distribución considerada para la generación de valores aleatorios fue Uniforme.

La aplicación de la regla de eliminación 2 a los 20.000 problemas considerados del tipo $\min_{F \in L_S} f(F, T_i)$, condujo a los resultados que se muestran en la Tabla 3.4. Obsérvese que la aplicación del criterio indicado produjo la eliminación de casi la mitad de los problemas, con una reducción superior al 42% en el tiempo de CPU empleado.

Un resultado análogo al Lema 3.45 (y, en consecuencia, una regla de eliminación similar a la número 2), puede establecerse si se consideran los subproblemas que se obtienen al fijar los puntos extremos de L_S . Sin embargo, tal criterio de eliminación no va a ser efectivo en la práctica, ya que la solución óptima de tales subproblemas puede determinarse fácilmente, según se analizó en el apartado 3.5.2.1.

Bibliografía

- [1] Y.P. ANEJA Y M. PARLAR (1994). "Algorithms for Weber Facility Location in the Presence of Forbidden Regions and/or Barriers to Travel". *Transportation Science* **28**, Num. 1, 70–76.
- [2] F. AURENHAMMER (1987). "Power Diagrams: Properties, Algorithms and Applications". *SIAM Journal on Computing* **16**, 78–96.
- [3] F. AURENHAMMER (1991). "Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure". *ACM Computing Surveys* **23**, 345–495.
- [4] W. BARITOMPA (1993). "Customizing Methods for Global Optimization - A Geometric Viewpoint". *Journal of Global Optimization* **3**, 193–212.
- [5] W. BARITOMPA Y A. CUTLER (1994). "Accelerations for Global Optimization Covering Methods Using Second Derivatives". *Journal of Global Optimization* **4**, 329–341.
- [6] V.D. BARNETT (1966). "Evaluation of the Maximum-Likelihood Estimator Where the Likelihood Equation has Multiple Roots". *Biometrika* **53**, 151–165.
- [7] G. DE BARRA (1974). *Introduction to Measure Theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [8] R. BATA Y U. PALEKAR (1988). "Mixed Planar/Network Facility Location Problems". *Computers and Operations Research* **15**, Num. 1, 61–67.
- [9] F.L. BAUER, J. STOER, Y C. WITZGALL (1961). "Absolute and Monotonic Norms". *Numerische Mathematik* **3**, 257–264.
- [10] M.S. BAZARAA, H.D. SHERALI, Y C.M. SHETTY (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York.

- [11] H.P. BENSON (1996). “Deterministic Algorithms for Constrained Concave Minimization: A Unified Critical Survey”. *Naval Research Logistics* **43**, 765–795.
- [12] L. BITTNER (1970). “Some Representation Theorems for Functions and Sets and their Application to Nonlinear Programming”. *Numerische Mathematik* **16**, 32–51.
- [13] R. BLANQUERO, E. CARRIZOSA, R. INFANTE, Y J. MUÑOZ PÉREZ (1998). “Locating a Facility Outside the Transportation Network. Localization Results”. Working Paper.
- [14] L. BREIMAN Y A. CUTLER (1993). “A Deterministic Algorithm for Global Optimization”. *Mathematical Programming* **58**, 179–199.
- [15] R.P. BRENT (1973). *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [16] J. BRIMBERG Y H. JUEL (1998). “A Bicriteria Model for Locating a Semi-Desirable Facility in the Plane”. *European Journal of Operational Research* **106**, 144–151.
- [17] J. BRIMBERG Y R.F. LOVE (1993). “Global Convergence of a Generalized Iterative Procedure for the Minisum Location Problem with l_p Distances”. *Operations Research* **41**, 1153–1163.
- [18] J. BRIMBERG Y G.O. WESOLOWSKY (1995). “The Rectilinear Distance Minisum Problem with Minimum Distance Constraints”. *Location Science* **3**, Num. 3, 203–215.
- [19] E. CARRIZOSA (1996). “An Optimal Bound for d.c. Programs with Convex Constraints”. Working Paper, Universidad de Sevilla.
- [20] E. CARRIZOSA, E. CONDE, A. PASCUAL, Y D. ROMERO-MORALES (1997). “Closest Solutions in Ideal-Point Methods”. En R. Caballero, F. Ruíz, y R.E. Steuer, editores, *Advances in Multiple Objective and Goal Programming*, páginas 274–281, Berlin. Springer Verlag.
- [21] E. CARRIZOSA, E. CONDE, Y D. ROMERO-MORALES (1997). “Location of a Semiobnoxious Facility. A Biobjective Approach”. En R. Caballero, F. Ruíz, y

-
- R.E. Steuer, editores, *Advances in Multiple Objective and Goal Programming*, páginas 338–346, Berlin. Springer Verlag.
- [22] E. CARRIZOSA Y F. PLASTRIA (1998). “Dominators for Multiple-Objective Quasiconvex Maximization Problems”. Working Paper.
- [23] E. CARRIZOSA Y F. PLASTRIA (1998). “Locating and Undesirable Facility by Generalized Cutting Planes”. *Mathematics of Operations Research* **23**, 680–694.
- [24] E. CARRIZOSA Y F. PLASTRIA (1999). “Location of Semi-Obnoxious Facilities”. Por aparecer en *Studies in Locational Analysis*.
- [25] E. CARRIZOSA Y D. ROMERO-MORALES (1999). “Attainment of Optimal Solution in a Semiobnoxious Location Problem”. Por aparecer en *Studies in Locational Analysis*.
- [26] P.C. CHEN, P. HANSEN, Y B. JAUMARD (1991). “On-line and Off-line Vertex Enumeration by Adjacent Lists”. *Operations Research Letters* **10**, 403–409.
- [27] P.C. CHEN, P. HANSEN, B. JAUMARD, Y H. TUY (1992). “Weber’s Problem with Attraction and Repulsion”. *Journal of Regional Science* **32**, Num. 4, 467–486.
- [28] R.L. CHURCH Y R.S. GARFINKEL (1978). “Locating an Obnoxious Facility on a Network”. *Transportation Science* **12**, 107–118.
- [29] E. CONDE (1996). “Optimización Global en Localización”. En J. Puerto, editor, *Lecturas en Teoría de Localización*. Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla.
- [30] A. CUTLER (1988). *Optimization Methods in Statistics*. PhD thesis, University of California, Berkeley.
- [31] M.S. DASKIN (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley and Sons, New York.
- [32] L.C.W. DIXON Y G.P. SZEGÖ, editores (1978). *Towards Global Optimisation 2*, Amsterdam. North-Holland.
-

- [33] Z. DREZNER Y G.O. WESOŁOWSKY (1991). "The Weber Problem on the Plane with Some Negative Weights". *INFOR* **29**, 87–99.
- [34] Z. DREZNER Y G.O. WESOŁOWSKY (1996). "Obnoxious Facility Location in the Interior of a Planar Network". *Journal of Regional Science* **35**, Num. 4, 675–688.
- [35] R. DURIER (1995). "The General One Center Location Problem". *Mathematics of Operations Research* **20**, Num. 2, 400–414.
- [36] H. EDELSBRUNNER (1987). *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Berlin.
- [37] E. ERKUT (1992). "A Mixed-Norm Location Problem for an Undesirable Facility". Research Report N. 92-1, University of Alberta.
- [38] E. ERKUT Y S. NEUMAN (1989). "Analytical Models for Locating Undesirable Facilities". *European Journal of Operational Research* **40**, Num. 3, 275–291.
- [39] J.R. EVANS Y E. MINIEKA (1992). *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*. Marcel Dekker, New York.
- [40] T.S. FERGUSON (1978). "Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of the Cauchy Distribution for Samples of Size 3 and 4". *Journal of the American Statistical Association* **73**, 211–213.
- [41] J. FLIEGE (1997). *Efficient Dimension Reduction in Multifacility Location Problems*. PhD thesis, Universidad de Dortmund.
- [42] J.B.G. FRENK, M.T. MELO, Y S. ZHANG (1994). "A Weiszfeld Method for a Generalized l_p Distance Minisum Location Model in Continuous Space". *Location Science* **2**, 111–127.
- [43] J.B.G. FRENK, M.T. MELO, Y S. ZHANG (1994). "The Weiszfeld Method in Single Facility Location". *Investigação Operacional (Portugal)* **14**, 35–59.
- [44] R.S. GARFINKEL, A.W. NEEBE, Y M.R. RAO (1977). "The m -Center Problem: Minimax Facility Location". *Management Science* **23**, Num. 10, 1133–1142.

-
- [45] V.P. GERGEL (1992). "A Global Search Algorithm Using Derivatives". En Yu.I. Neymark, editor, *System Dynamics and Optimization*, páginas 161–178, N.Novgorod. N.Novgorod University Press.
- [46] R. GONIN Y A.H. MONEY (1989). *NonLinear L_p -Norm Estimation*. Marcel Dekker Inc., New York.
- [47] H.W. HAMACHER Y S. NICKEL (1994). "Combinatorial Algorithms for Some 1-Facility Median Problems in the Plane". *Naval Research Logistics* **79**, 340–351.
- [48] H.W. HAMACHER Y S. NICKEL (1995). "Restricted Planar Location Problems and Applications". *Naval Research Logistics* **42**, 967–992.
- [49] P. HANSEN Y B. JAUMARD (1995). "Lipschitz Optimization". En R.Horst y P.M.Pardalos, editores, *Handbook of Global Optimization*, Dordrecht. Kluwer Academic Press.
- [50] P. HANSEN, B. JAUMARD, Y S.H. LU (1992). "Global Optimization of Univariate Lipschitz Functions: I. Surveys and Properties". *Mathematical Programming* **55**, 251–272.
- [51] P. HANSEN, B. JAUMARD, Y S.H. LU (1992). "Global Optimization of Univariate Lipschitz Functions: II. New Algorithms and Computational Comparison". *Mathematical Programming* **55**, 273–292.
- [52] P. HANSEN, B. JAUMARD, Y H. TUY (1995). "Global Optimization in Location". En Z. Drezner, editor, *Facility Location. A Survey of Applications and Methods*, New York. Springer-Verlag.
- [53] P. HANSEN, D. PEETERS, Y THISSE J.F. (1981). "On the Location of an Obnoxious Facility". *Sistema Urbani* **3**, 299–317.
- [54] P. HANSEN, D. PEETERS, D. RICHARD, Y J.F. THISSE (1985). "The Minisum and Minimax Location Problems Revisited". *Operations Research* **33**, Num. 6, 1251–1265.
- [55] P. HANSEN, D. PEETERS, Y J.F. THISSE (1981). "Constrained Location and the Weber-Rawls Problem". *Annals of Discrete Mathematics* **11**, 147–166.
-

- [56] P. HANSEN, D. PEETERS, Y J.F. THISSE (1982). “An Algorithm for a Constrained Weber Problem”. *Management Science* **28**, Num. 11, 1285–1295.
- [57] P. HANSEN Y J.F. THISSE (1981). “The Generalized Weber-Rawls Problem”. En J.P Brans, editor, *Operational Research’81*, Amsterdam. North-Holland.
- [58] P. HARTMAN (1959). “On Functions Representable as a Difference of Convex Functions”. *Pacific Journal of Mathematics* **9**, 707–713.
- [59] M. HELD. “Voronoi Diagrams of 2D Shapes”.
http://www.cosy.sbg.ac.at/projects/voronoi_2d/voronoi.html.
- [60] M. HELD (1998). “Voronoi Diagrams and Offset Curves of Curvilinear Polygons”. *Computer-Aided Design* **30**, 287–300.
- [61] J.B. HIRIART-URRUTY (1985). “Generalized Differentiability, Duality and Optimization for Problems Dealing with Differences of Convex Functions”. En J. Ponstein, editor, *Convexity and Duality in Optimization*, Berlin. Springer-Verlag.
- [62] J.B. HIRIART-URRUTY (1989). “From Convex Optimization to Nonconvex Optimization, Part I: Necessary and Sufficient for Global Optimality”. En F.H. Clarke, V.F. Demyanov, y F. Gianessi, editores, *Nonsmooth optimization and related topics*, New-York. Plenum.
- [63] J.B. HIRIART-URRUTY Y C. LEMARÈCHAL (1993). *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer-Verlag, Berlin.
- [64] R. HORST (1990). “Deterministic Methods in Constrained Global Optimization: Some Recent Advances and New Fields of Application”. *Naval Research Logistics* **37**, 433–471.
- [65] R. HORST, T.Q. PHONG, NG.V. THOAI, Y J. DE VRIES (1991). “On Solving a D.C. Programming Problem by a Sequence of Linear Programs”. *Journal of Global Optimization* **1**, 183–203.
- [66] R HORST, NG.V. THOAI, Y H. TUY (1987). “Outer Approximation by Polyhedral Convex Sets”. *OR Spektrum* **9**, 153–159.

-
- [67] R. HORST Y H. TUY (1990). *Global Optimization, Deterministic Approaches*. Springer-Verlag, Berlin.
- [68] A.P. HUERTER, M.K. SCHAEFER, Y R.E. WENDELL (1975). "Solutions of Constrained Location Problems". *Management Science* **22**, 51–56.
- [69] H. IDRISI, O. LEFEBVRE, Y C. MICHELOT (1988). "A Primal-Dual Algorithm for a Constrained Fermat-Weber Problem Involving Mixed Norms". *Recherche op rationnelle/Operations Research* **22**, Num. 4, 313–330.
- [70] I.KŘIVÝ Y J.TVRDÍK (1995). "The Controlled Random Search Algorithm in Optimizing Regression Models". *Computational Statistics & Data Analysis* **20**, 199–204.
- [71] T. IMAI. "Voronoi Diagrams of Line Segments".
<http://www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/imai/software.html>.
- [72] M.J. KAISER Y T.L. MORIN (1992). "Locating an Obnoxious Facility". *Applied Mathematics Letters* **5**, Num. 3, 25–26.
- [73] I.N. KATZ (1974). "Local Convergence in Fermat's Problem". *Mathematical Programming* **6**, 89–104.
- [74] I.N. KATZ Y L. COOPER (1981). "Facility Location in the Presence of Forbidden Regions, I: Formulation and the Case of Euclidean Distance with One Forbidden Circle". *European Journal of Operational Research* **6**, 166–173.
- [75] D. KINCAID Y W. CHENEY (1994). *Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina.
- [76] H.W. KUHN (1973). "A Note on Fermat's Problem". *Mathematical Programming* **4**, 98–107.
- [77] M. LABBÉ, D. PEETERS, Y J.F. THISSE (1995). "Location on Networks". En M.O. Ball et al., editor, *Handbooks Oper. Res. Management Sci.*, volume 8, páginas 551–624, Amsterdam. North-Holland.
- [78] D.T. LEE Y R.L. DRYSDALE (1981). "Generalization of Voronoi Diagrams in the Plane". *SIAM Journal on Computing* **1**, 73–87.
-

- [79] B. LEMAIRE (1992). “Approximation in Multiobjective Optimization”. *Journal of Global Optimization* **2**, 117–132.
- [80] R.F. LOVE, J.G. MORRIS, Y G.O. WESOLOWSKY (1988). *Facilities Location: Models and Methods*. Elsevier Science Publishing Co.
- [81] D. MACLAGAN, T. STURGE, Y W. BARITOMPA (1996). “Equivalent Methods for Global Optimization”. En C.A.Floudas y P.M.Pardalos, editores, *State of the Art in Global Optimization*, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- [82] C.D. MARANAS Y C.A. FLOUDAS (1994). “A Global Optimization Method for Weber’s Problem with Attraction and Repulsion”. En W.W. Hager et al., editor, *Large Scale Optimization: State of the Art*, páginas 259–293.
- [83] K. MEHLHORN Y S. NÄHER. “LEDA Version 7.3.1 Manual”.
<http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/MANUAL/MANUAL.html>.
- [84] K. MEHLHORN Y S. NÄHER (1995). “LEDA, a Platform for Combinatorial and Geometric Computing”. *Communications of the ACM* **38**, 96–102.
- [85] K. MEHLHORN Y S. NÄHER (1999). *LEDA, a Platform for Combinatorial and Geometric Computing*. Cambridge University Press, Chichester. (Por aparecer).
- [86] A. MEHREZ, Z. SINUANY-STERN, Y A. STULMAN (1985). “A Single Facility Location Problem with a Weighted Maximin-Minimax Rectilinear Distance”. *Computers and Operations Research* **12**, 51–60.
- [87] C. MICHELOT (1993). “The Mathematics of Continuous Location”. *Studies in Locational Analysis* **5**, 59–83.
- [88] J. MILITK Y M. MELOUN (1993). “Modus Operandi of the Least-Squares Algorithm MINOPT”. *Talanta* **40**, 269–277.
- [89] R.H. MLADINEO (1986). “An Algorithm for Finding the Global Maximum of a Multimodal, Multivariate Function”. *Mathematical Programming* **34**, 188–200.
- [90] S. NICKEL (1998). “Restricted Center Problems Under Polyhedral Gauges”. *European Journal of Operational Research* **104**, 343–357.

-
- [91] A. OKABE, B. BOOTS, Y K. SUGIHARA (1995). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Cambridge University Press, Chichester.
- [92] A. OKABE Y A. SUZUKI (1997). "Locational Optimization Problems Solved Through Voronoi Diagrams". *European Journal of Operational Research* **98**, 445–456.
- [93] L.M. JR. OSTRESH (1978). "On the Convergence of a Class of Iterative Methods for Solving the Weber Location problem". *Operations Research* **26**, 597–609.
- [94] T.Q. PHONG (1994). "An Algorithm for Solving General D.C. Programming Problems". *Operations Research Letters* **15**, 73–79.
- [95] S.A. PIYAVSKII (1972). "An Algorithm for Finding the Absolute Extremum of a Function". *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **12**, 57–67.
- [96] F. PLASTRIA (1991). "The Effects of Majority in Fermat-Weber Problems with Attraction and Repulsion in a Pseudometric Space". *Yugoslav Journal of Operations Research* **1**, Num. 2, 141–146.
- [97] F. PLASTRIA (1992). "GBSSS: The Generalized Big Square Small Square Method for Planar Single-Facility Location". *European Journal of Operational Research* **62**, 163–174.
- [98] F. PLASTRIA (1995). "Continuous Location Problems". En Z. Drezner, editor, *Facility Location. A Survey of Applications and Methods*, New York. Springer-Verlag.
- [99] F. PLASTRIA (1996). "Optimal Location of Undesirable Facilities: a Selective Overview". *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science* **36**, Num. 2-3, 109–127.
- [100] F. PLASTRIA Y E. CARRIZOSA (1999). "Undesirable Facility Location with Minimal Covering Objectives". Por aparecer en *European Journal of Operational Research*.
-

- [101] J. PUERTO, editor (1996). *Lecturas en Teoría de Localización*. Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla.
- [102] D.A. RATKOWSKY (1983). *Nonlinear Regression Modelling*. Marcel Dekker Inc., New York.
- [103] R.T. ROCKAFELLAR (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [104] C. ROMERO (1991). *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford.
- [105] D. ROMERO-MORALES, E. CARRIZOSA, Y E. CONDE (1997). “Semi-obnoxious Location Models: A Global Optimization Approach”. *European Journal of Operational Research* **102**, 295–301.
- [106] R.TU Y Q.ZHENG (1993). “Integral Global Optimization Method in Statistical Applications”. *Computers and Mathematics with Applications* **25**, 9–17.
- [107] H.M. SABER Y A. RAVINDRAN (1993). “Nonlinear Goal Programming Theory and Practice: A Survey”. *Computers & Operations Research* **20**, 275–291.
- [108] H.M. SABER Y A. RAVINDRAN (1995). “A Partitioning Gradient Based (PGB) Algorithm for Solving Nonlinear Goal Programming Problems”. *Computers & Operations Research* **23**, 141–152.
- [109] G. SALMON (1954). *A Treatise on Conic Sections*. Chelsea Publishing Company, New York.
- [110] M. SEEL. “LEP: Abstract Voronoi Diagrams”.
http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/friends/leps/LEP_avd_1.1.tar.gz.
- [111] YA.D. SERGEYEV (1998). “A Method Using Local Tuning for Minimizing Functions with Lipschitz Derivatives”. En I.M. Bomze, T. Csendes, R. Horst, y P.M. Pardalos, editores, *Developments in Global Optimization*, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- [112] B.O. SHUBERT (1972). “A Sequential Method Seeking the Global Maximum of a Function”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **9**, 379–388.

-
- [113] R.G. STRONGIN (1978). *Numerical Methods on Multiextremal Problems*. Nauka, Moscow.
- [114] A. SUZUKI Y A. OKABE (1995). "Using Voronoi Diagrams". En Z. Drezner, editor, *Facility Location. A Survey of Applications and Methods*, New York. Springer-Verlag.
- [115] C. TAMMER (1994). "Stability Results for Approximately Efficient Solutions". *OR-Spektrum* **16**, 47–52.
- [116] L.N. TELLIER (1985). *Économie Spatiale: Rationalité économique de l'Espace Habité*. Gaétan Morin, Chicoutimi, Québec.
- [117] L.N. TELLIER Y B. POLANSKI (1989). "The Weber Problem: Frequency of Different Solution Types and Extension to Repulsive Forces and Dynamic Process". *Journal of Regional Science* **29**, 387–405.
- [118] P.T. THACH, R.E. BURKARD, Y W. OETTLI (1991). "Mathematical Programs with a Two-Dimensional Reverse Convex Constraint". *Journal of Global Optimization* **1**, 145–154.
- [119] H. TUY (1987). "Global Minimization of a Difference of Two Convex Functions". *Mathematical Programming Study* **30**, 150–182.
- [120] H. TUY (1995). "D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms". En *Handbook of Global Optimization*, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- [121] H. TUY (1996). "A General D.C. Approach to Location Problems". En C.A.Floudas y P.M.Pardalos, editores, *State of the Art in Global Optimization*, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- [122] H. TUY (1998). "D.C. Functions and D.C. Sets". En *Convex Analysis and Global Optimization*, páginas 83–105, Dordrecht. Kluwer Academic Press.
- [123] H. TUY, F. AL-KHAYYAL, Y F. ZHOU (1995). "A D.C. Optimization Method for Single Facility Location Problems". *Journal of Global Optimization* **7**, 209–227.
- [124] H. TUY Y R. HORST (1988). "Convergence and Restart in Branch-and-Bound Algorithms for Global Optimization. Application to Concave Minimization and D.C. Optimization Problems". *Mathematical Programming* **41**, 161–183.
-

- [125] J.E. WARD Y R.E. WENDELL (1985). “Using Block Norms for Location Modelling”. *Operations Research* **33**, 1074–1090.
- [126] C.D.T. WATSON-GANDY (1985). “The Solution of Distance Constraints Mini-Sum Location Problems”. *Operations Research* **33**, 784–802.
- [127] M.A. WEISS (1996). *Algorithms, Data Structures and Problem Solving With C++*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Menlo Park (California).
- [128] E. WEISZFELD (1937). “Sur le Point Pour Lequel la Somme des Distances de n Points Donnés Est Minimum”. *Tohoku Mathematical Journal* **43**, 355–386.
- [129] D.J. WHITE (1996). “Epsilon Efficiency”. *Journal of Optimization Theory and Applications* **49**, 319–337.
- [130] D.R. WINGO (1983). “Estimating the Location of the Cauchy Distribution by Numerical Global Optimization”. *Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation* **12**, Num. 2, 201–212.
- [131] G. XUE, J.B. ROSEN, Y P.M. PARDALOS (1996). “A Polynomial Time Dual Algorithm for the Euclidean Multifacility Location Problem”. *Operations Research Letters* **18**, 201–204.
- [132] G. XUE Y Y. YE (1997). “An Efficient Algorithm for Minimizing a Sum of Euclidean Norms with Applications”. *SIAM Journal on Optimization* **7**, 1017–1036.
- [133] M. ZELENY (1973). “Compromise Programming”. En J.L. Cochrane y M. Zeleny, editores, *Multiple Criteria Decision Making*, Columbia. University of South Carolina Press.
- [134] M. ZELENY (1974). “A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal”. *Computers & Operations Research* **1**, 479–496.
- [135] M. ZELENY (1976). *Multiple Criteria Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin.
- [136] A.A. ZHIGLJAVSKY (1991). *Theory of Global Random Search*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

FMA C 043/351



Rafael Blasquez Torres
Licenciado de Leyes en el ramo de
letras de optacion D.O. "en la"

he unido d
30

JUNIO

99

Juan A. Urra