



FACULTAD DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y ELECTROMAGNETISMO

**CÁLCULO EFICIENTE DE FUNCIONES
DE GREEN PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS
EN MEDIOS HOMOGÉNEOS Y EN
MEDIOS MULTICAPA**

Memoria presentada por

Ana María López Fructos

para optar al Grado de Doctor en Física

Sevilla, diciembre de 2010

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y ELECTROMAGNETISMO
Facultad de Física
Universidad de Sevilla

**CÁLCULO EFICIENTE DE FUNCIONES DE GREEN
PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS
EN MEDIOS HOMOGÉNEOS Y EN MEDIOS MULTICAPA**

Memoria presentada al Departamento de Electrónica y Electromagnetismo y a la Comisión de Doctorado de la Universidad de Sevilla en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Doctor en Física.

Los Directores:

Rafael Rodríguez Boix

Francisco L. Mesa Ledesma

La candidata al Grado de Doctor:

Ana María López Fructos

Durante la realización de este trabajo la Sra. López Fructos ha contado con una beca asociada a Proyectos de Excelencia concedida por la Junta de Andalucía (proyecto TIC-253), así como con la financiación de los siguientes proyectos:

- **Título:** Diseño de filtros de microondas y de antenas basadas en estructuras periódicas (TIC-253).

Entidad financiadora: Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa, Junta de Andalucía.

Duración: 01/03/2006–01/03/2009.

- **Título:** Guiado, radiación y filtrado de señales de microondas con tecnología plana (TEC2004-03214/TCM).

Entidad financiadora: Ministerio de Educación y Ciencia.

Duración:13/12/2004–13/12/2007.

- **Título:** Estudio teórico y experimental de estructuras planas innovadoras para antenas y circuitos impresos de microondas (TEC2007-65376/TCM).

Entidad financiadora: Ministerio de Educación y Ciencia.

Duración: 1/10/2007–30/09/2010.

Agradecimientos

El camino para llegar a publicar suele ser largo y arduo, con muchas vueltas y giros a lo largo del recorrido. El mío no fue una excepción. No obstante, muchas personas han hecho más llevaderos mis viajes.

En primer lugar, quiero dar las gracias a mis directores de tesis: al Prof. Rafael Rodríguez Boix, por su admirable rigor científico y sus inestimables aportaciones que han marcado el hilo conductor de esta tesis; y al Prof. Francisco Mesa Ledesma, por su apoyo y múltiples contribuciones, en especial, en toda la parte computacional de este trabajo.

Quiero dar las gracias también a todos mis compañeros del Grupo de Microondas de la Universidad de Sevilla, en particular a aquellos con los que he compartido mi tiempo en el laboratorio a lo largo de estos años, y especialmente a Raúl que ha sido un apoyo científico constante. Gracias a todos por vuestra complicidad y buen ambiente.

Por último, quiero dar las gracias de un modo muy especial a mis padres y a mi marido. Sé que no ha sido fácil para vosotros, en especial para ti Emilio; no existen palabras que puedan reflejar el apoyo constante, la fe, el entusiasmo y el estímulo que me has transmitido todos y cada uno de los días que ha llevado hacer que este proyecto fructificara.

Gracias, a todos, por hacer que fuera posible.

A mis padres, Carmen y Evaristo, y a mi marido Emilio

Examinadlo todo y quedaos con lo bueno.

Primera carta a los Tesalonicenses 5, 21

Prólogo

En esta tesis se abordará el cálculo eficiente de funciones de Green en el dominio espacial en medios homogéneos y en medios multicapa, tanto en el caso de fuentes aisladas como en el caso de distribuciones periódicas de fuentes. Para evaluar de forma eficiente las funciones de Green, se introducirán mejoras en las técnicas numéricas previamente publicadas en la literatura. Como se demuestra en la Memoria de la tesis, las mejoras introducidas van a permitir obtener algoritmos más robustos, más precisos y más rápidos para el cálculo de las citadas funciones de Green. Estos algoritmos constituyen una contribución relevante al análisis electromagnético de circuitos de microondas y antenas mediante el Método de los Momentos en el dominio espacial, donde habitualmente se requiere el cálculo preciso de las funciones de Green un gran número de veces.

Índice general

Agradecimientos	VII
Prólogo	XIII
Introducción	1
1. Evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas 2-D mediante el método espectral de Kummer-Poisson	17
1.1. Introducción	17
1.2. Funciones de Green homogéneas 2-D no periódicas y periódicas . .	19
1.3. Cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas 2-D . . .	24
1.3.1. Función de Green homogénea 2-D con periodicidad 1-D . .	24
1.3.2. Función de Green homogénea 2-D con periodicidad 2-D . .	31
1.4. Resultados Numéricos	37
1.4.1. Problemas con periodicidad 1-D	37
1.4.2. Problemas con periodicidad 2-D	42
1.5. Conclusiones	46
2. Evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas 3-D mediante el método espacial de Kummer	47
2.1. Introducción	47
2.2. Funciones de Green homogéneas 3-D periódicas y no periódicas . .	50
2.3. Cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas 3-D . . .	54
2.4. Resultados Numéricos	64
2.5. Conclusiones	77

3. Funciones de Green multicapa no periódicas. Representaciones en forma cerrada en campo lejano y en campo próximo.	79
3.1. Introducción	79
3.2. Funciones de Green en medios multicapa e integrales de Sommerfeld	88
3.2.1. Formulación C de Michalski y Zheng para EIPM en medios multicapa	88
3.2.2. Integrales de Sommerfeld. Funciones de Green multicapa para los potenciales vector y escalar	96
3.3. El campo lejano de las funciones de Green en medios multicapa . .	101
3.3.1. Método de ajuste de las funciones de Green espectrales mediante funciones racionales: el método de los mínimos cuadrados totales en el plano k_ρ y en el plano u_0	101
3.3.2. Expresiones asintóticas en forma cerrada para las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo lejano	111
3.3.2.1. Obtención del desarrollo asintótico de las ondas residuales mediante el lema de Watson	117
3.3.2.2. Obtención del desarrollo asintótico de las ondas residuales mediante el método de Pauli-Clemmow	123
3.4. El campo próximo de las funciones de Green en medios multicapa	132
3.5. Resultados Numéricos	139
3.6. Conclusiones	146
4. Cálculo eficiente de funciones de Green multicapa periódicas	151
4.1. Introducción	151
4.2. Relación entre funciones de Green multicapa periódicas y no periódicas	155
4.3. Potencial escalar y elementos diagonales de la diada del potencial vector	160
4.4. Elementos no diagonales de la diada del potencial vector	169
4.5. Conclusiones	183
Conclusiones Generales	185

A. Fórmula de Poisson	189
B. Transformación de Kummer	193
C. Funciones $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, M$)	195
D. Método de los mínimos cuadrados totales	199
D.1. Aplicación del método de los mínimos cuadrados totales al caso particular...	203
E. Método del pincel de matrices generalizado	207
F. Algoritmos para el cálculo de las funciones de Green multicapa en el dominio espectral	213
F.1. Cálculo de $\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')$	215
F.1.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)	216
F.1.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)	217
F.1.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)	218
F.1.4. Expresiones para $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$)	218
F.2. Cálculo de $\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')$	221
F.2.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)	223
F.2.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)	223
F.2.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)	224
F.2.4. Expresiones para $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$)	225
F.3. Cálculo de $(\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x)$ y $(\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')/jk_y)$	227
F.4. Cálculo de $\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z')$	232
F.4.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)	233
F.4.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)	233
F.4.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)	234
F.5. Cálculo de $\tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z')$	235
F.5.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)	235
F.5.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)	236
F.5.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)	237

F.5.4.	Expresiones para $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$)	238
F.6.	Cálculo de $\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z')$	242
F.6.1.	Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)	242
F.6.2.	Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)	243
F.6.3.	Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)	245

G. Comportamientos asintóticos de las funciones de Green multicapa en el dominio espectral **247**

G.1.	Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')$	247
G.1.1.	Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	248
G.1.2.	Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP	248
G.1.3.	Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP	249
G.2.	Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')$	249
G.2.1.	Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	250
G.2.2.	Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP	250
G.2.3.	Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP	251
G.3.	Comport. asintóticos de $(\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x)$ y $(\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')/jk_y)$	251
G.3.1.	Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	251
G.3.2.	Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un PEC	252
G.3.3.	Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un PEC	252
G.4.	Comportamiento asintótico de $\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z')$	252
G.4.1.	Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	253
G.4.2.	Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP	253
G.4.3.	Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP	254
G.5.	Comportamiento asintótico de $\tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z')$	254
G.5.1.	Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	254
G.5.2.	Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP	255

G.5.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP .	255
G.6. Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z')$	255
G.6.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)	255
G.6.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP	256
G.6.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP .	256
H. El método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior para las Ecs. (4.30), (4.31), (4.38) y (4.39)	257
H.1. Caso $h = 0$	258
H.2. Caso $h \neq 0$	259
Bibliografía	261
Publicaciones relacionadas con la tesis	285

Índice de figuras

1.	Funciones de Green involucradas en las ecuaciones integrales de campo eléctrico (EICE) y en las ecuaciones integrales de los potenciales mixtos (EIPM).	4
2.	Estructura consistente en una línea de transmisión microtira con <i>stubs</i> en paralelo colocados periódicamente.	9
3.	Algunas geometrías típicas de la celda unidad de SSF.	10
4.	Diagrama de bloques donde se muestra la ubicación de los capítulos de esta tesis en relación con el cálculo optimizado de funciones de Green multicapa.	15
1.1.	Línea de corriente formada por una distribución lineal infinita de elementos infinitesimales de corriente orientados en la dirección \hat{u}	20
1.2.	Distribución lineal de carga paralela al eje z	21
1.3.	Cilindro infinito perfectamente conductor (CEP) de sección transversal arbitraria, iluminado por una onda plana.	22
1.4.	Agrupación periódica de cilindros a lo largo del eje x	23
1.5.	Agrupación de fuentes lineales situadas periódicamente a lo largo de la dirección x	25
1.6.	Agrupación espacial de fuentes lineales con periodicidad 2-D.	32
1.7.	Representaciones de $f_{1DP}(n)$ frente a n para la serie de la Ec. (1.21).	38
1.8.	Representaciones de $f_{1DP}(n)$ frente a n para las series de las Ecs. (1.14), (1.16), (1.21) y (1.22).	39
1.9.	Representaciones de $f_{2DP}(n)$ frente a n para la serie de la Ec. (1.39).	43

1.10. Representaciones de $f_{2\text{DP}}(n)$ frente a n para las series de las Ecs. (1.32), (1.34), (1.39) y (1.40).	44
2.1. Elemento de corriente puntual de tamaño infinitesimal orientado en la dirección del vector unitario \hat{u}	51
2.2. Carga puntual situada en el punto de vector de posición \mathbf{r}'	52
2.3. Objeto conductor eléctrico perfecto de forma arbitraria iluminado por una onda plana.	53
2.4. Agrupación periódica de objetos conductores eléctricos perfectos a lo largo del eje x , con periodo d	54
2.5. Agrupación de fuentes puntuales situadas periódicamente a lo largo de una recta paralela al eje x	55
2.6. Representaciones de $f^\pm(n)$ frente a n para las series G^+ y G^- de la Ec. (2.45).	65
2.7. Representaciones de f_G frente a $\Delta x/d$	67
2.8. Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.14)–(2.27) y (2.43) para calcular $G_{3\text{D-1D}}$ con una precisión de al menos ocho cifras significativas.	68
2.9. Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.28) y (2.43) para calcular $G_{3\text{D-1D}}$ con una precisión de al menos ocho cifras significativas.	70
3.1. CEP embutido en un medio multicapa	89
3.2. Intersección del objeto conductor con las interfases del medio multicapa	93
3.3. Medio multicapa de la Fig. (3.1). El punto de observación y el punto fuente pueden estar arbitrariamente localizados en las capas dieléctricas o en las regiones semi-infinitas de aire.	96
3.4. Camino de integración de Sommerfeld (CIS) y singularidades de $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ en el plano complejo k_ρ para un medio multicapa sin pérdidas.	100

3.5. Camino de muestreo elegido en la hoja propia del plano complejo k_ρ cuando se aplica el método de los mínimos cuadrados totales a la Ec. (3.56).	103
3.6. Caminos elegidos en el plano complejo u_0 (a) y su transformación en el plano complejo k_ρ (b) cuando se aplica el método de los mínimos cuadrados totales a la Ec. (3.59).	106
3.7. Error relativo máximo al aproximar $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ mediante el método de los mínimos cuadrados totales (Ecs. (3.56) y (3.59)).	110
3.8. Camino de integración de Sommerfeld original y tipos de polos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$	112
3.9. Deformación del camino de integración CIS en el plano complejo k_ρ	114
3.10. Módulo de las FGs espaciales $G_{xx}^{A,m}$ y G^ϕ para un medio de 4 capas	122
3.11. Valor de la integral $I_{ni}^{OR}(\xi)$ en los casos en los que hay un polo “impropio” lejos y cerca del origen en el plano u_0	128
3.12. Valores de la función de Green $G_{xx}^{A,m}$ para un medio de cuatro capas con pérdidas limitado inferiormente por un CEP.	130
3.13. Caminos C'_1 y C'_2 utilizados en el plano complejo k_ρ para la aplicación del método de las imágenes complejas discretas	135
3.14. Valor de la función de Green espacial G^ϕ para un medio de cuatro capas con pérdidas limitado inferiormente por aire. Región de campo lejano.	140
3.15. Valor de la función de Green espacial $G_{zx}^{A,m}$ para un medio de cuatro capas sin pérdidas limitado inferiormente por un CEP. Región de campo lejano.	140
3.16. Valor de la función de Green espacial G^ϕ para un medio de cuatro capas con pérdidas limitado inferiormente por aire. Región de campo próximo.	144
3.17. Valor de la función de Green espacial $G_{zx}^{A,m}$ de un medio de cuatro capas sin pérdidas limitado inferiormente por un CEP. Región de campo próximo.	144

4.1. Medio multicapa limitado superiormente por aire, e inferiormente por un conductor eléctrico perfecto o por aire, en cuyo interior se encuentra localizada una agrupación periódica bidimensional de fuentes puntuales.	156
4.2. Módulo de la función de Green espectral \tilde{G}^ϕ para un medio de cuatro capas (limitado inferiormente por un CEP).	166
4.3. Módulo de la función de Green espacial G^ϕ para un medio de cuatro capas (limitado inferiormente por un CEP).	167
4.4. Cociente de tiempos de CPU requeridos en la evaluación de G_0^P con una precisión de aproximadamente 4 cifras mediante las Ecs. (4.21), (4.25) y (4.28).	168
4.5. Módulo de \tilde{Q}_j y valor absoluto de los errores relativos entre \tilde{Q}_j y las aproximaciones $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$, $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ y $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$	177
4.6. Módulo de $\partial Q_j / \partial \rho - \rho' $ ($j = 1, 2$) evaluada en términos de \tilde{Q}_j mediante la integración numérica de la Ec. (4.16).	179
4.7. Relaciones entre los tiempos de CPU requeridos para evaluar $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$	181
C.1. Subregiones del plano complejo w	195
F.1. Medio multicapa con pérdidas limitado superiormente por espacio libre e inferiormente por un CEP o por espacio libre	214

Índice de Tablas

1.1. Tiempos de CPU requeridos en la evaluación de la función G_{2D-1D} mediante las Ecs. (1.16), (1.17) y (1.20).	41
1.2. Tiempos de CPU para el cálculo de la función G_{2D-2D} mediante las Ecs. (1.36) y (1.38).	45
2.1. Número de términos requeridos en las series de las Ecs. (2.14), (2.28) y (2.43) para la evaluación de G_{3D-1D} con una precisión de al menos ocho cifras significativas.	71
2.2. Tiempos de CPU requeridos para calcular 1100 valores de la función G_{3D-1D} por medio de las Ecs. (2.14), (2.27), (2.28) y (2.43).	73
2.3. Tiempos de CPU requeridos para calcular 100 valores de la función G_{3D-1D} por medio de las Ecs. (2.27), (2.28) y (2.43).	76
3.1. Polos propios de la función de Green espectral $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$	107
3.2. Polos y residuos normalizados de la función de Green espectral $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$	108
3.3. Convergencia de los polos y residuos de la función de Green espectral $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ con respecto al número de términos N usados en la Ec. (3.59).	109
3.4. Cociente de tiempos de CPU cuando se calculan las funciones de Green G^ϕ y $G_{zx}^{A,m}$ mediante integración numérica y mediante la Ec. (3.123) (campo próximo) o las Ecs. (3.76) y (3.93) (campo lejano).	146

4.1. Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.38) y (4.34) en la evaluación de $G_{zx}^{A,P}$ en función del número de términos M_S retenidos en la aplicación del método espectral de Kummer-Poisson de alto orden. 183

Introducción

En Ciencia, el término *microondas* es utilizado para describir ondas electromagnéticas cuya longitud de onda en vacío está comprendida entre 1 cm y 1 m, lo cual se corresponde con un rango de frecuencias entre 300 MHz y 30 GHz. La principal característica de los sistemas de microondas es que la longitud de onda utilizada es del mismo orden de magnitud que las dimensiones de los elementos de circuito y dispositivos empleados. Como consecuencia, las técnicas de análisis usadas en baja frecuencia (teoría de circuitos basada en las leyes de Kirchhoff) o en frecuencias ópticas (óptica geométrica o teoría de rayos) no bastan para una descripción adecuada de los fenómenos que tienen lugar en los circuitos de microondas, siendo necesario realizar el análisis en términos de los campos eléctrico y magnético del sistema [1–3].

Como consecuencia de los avances tecnológicos, las aplicaciones de las microondas se han extendido considerablemente durante los últimos 50 años y abarcan desde aplicaciones clásicas en radio y en radares hasta aplicaciones en comunicación y navegación vía satélite, en control de tráfico aéreo, en radiometría, en control de procesos industriales, en medicina, en radares de proximidad, en sistemas de alarmas, en sistemas de comunicación inalámbrica, etc. [4–6]. Además, el diseño digital de alta velocidad ha propiciado numerosos puntos de encuentro entre los circuitos de microondas y el área de la tecnología digital [7].

El tema tratado en esta memoria está parcialmente relacionado con las microondas, y más concretamente, con el análisis y diseño de circuitos pasivos y antenas en tecnología impresa (esto es, con el diseño de circuitos pasivos y antenas que se fabrican con técnicas de fotograbado o similares). Siendo aún más

concretos, el objetivo fundamental que se ha perseguido en la memoria es realizar una aportación a la elaboración de herramientas eficientes de análisis electromagnético numérico de circuitos pasivos y antenas en tecnología impresa. Estas herramientas deberán poder usarse posteriormente en paquetes de diseño asistido por ordenador o paquetes de CAD (de las siglas en inglés *Computer-Aided Design*) [3, 8]. Entre los requisitos que se le exigen a cualquier herramienta numérica de análisis que se quiera incorporar en un paquete de CAD se encuentran la precisión, la rapidez computacional y la versatilidad. La elaboración de herramientas numéricas eficientes de análisis electromagnético tiene una gran relevancia de cara al estudio general de los sistemas de microondas ya que el análisis electromagnético de dichos sistemas es usualmente una tarea ardua y lenta.

A la hora de llevar a cabo el análisis electromagnético de componentes de microondas en tecnología impresa, una posibilidad bastante extendida consiste en resolver numéricamente ecuaciones integrales para el campo eléctrico (EICE) o ecuaciones integrales de potenciales mixtos (EIPM) [8–10]. Existen varias estrategias para resolver esas ecuaciones integrales, siendo una de las más usadas en Electromagnetismo el **método de los momentos** (MDM) [9, 11–13], que permite transformar la ecuación integral en una ecuación matricial algebraica. Cada elemento de esa matriz es una integral de reacción que involucra en el integrando a funciones base, a funciones *test* y a **funciones de Green**¹. Las citadas integrales de reacción pueden expresarse en términos de las coordenadas espaciales, en cuyo caso diremos que estamos trabajando en el *dominio espacial*, o bien, mediante la identidad de Parseval [17], pueden expresarse en un dominio transformado al que se denomina *dominio espectral* (en el dominio espectral las coordenadas espaciales son reemplazadas por sus equivalentes espectrales). Por este motivo, en esta memoria distinguiremos frecuentemente entre funciones de Green espaciales y funciones de Green espectrales, dependiendo del

¹En 1828 el matemático británico George Green publicó un ensayo en el que se introducían varios conceptos que alcanzarían gran relevancia tanto en el campo de la Física como en el campo de las Matemáticas [14]. Entre esos nuevos conceptos se encontraba el uso de un tipo de función como núcleo de un operador lineal para abordar la resolución de ecuaciones diferenciales. Este tipo de función es lo que hoy en día se conoce como *función de Green*. Desde la segunda mitad del siglo XIX, las funciones de Green se han aplicado a problemas relacionados con fenómenos electromagnéticos, mecánicos, térmicos, etc. (todos ellos con ecuaciones diferenciales similares). En nuestros días las funciones de Green constituyen una herramienta matemática de gran importancia en el análisis electromagnético mediante la técnica de la ecuación integral [9, 11, 13, 15, 16].

dominio en que estemos trabajando.

Cuando se utiliza la formulación EICE, suele ser preferible trabajar en el dominio espectral para evitar el comportamiento hipersingular del núcleo de la ecuación integral [12]. Este hecho ha ocasionado que el método de la EICE en el dominio espectral haya sido utilizado para analizar líneas de transmisión planas [18–21] y resonadores parche en microtira [22–26], limitándose normalmente estos análisis al caso de geometrías sencillas que se adaptan a la utilización de funciones base de dominio completo con transformada de Fourier analítica. Aunque ha habido varios intentos para adaptar la formulación EICE en el dominio espectral al análisis de estructuras con geometría arbitraria mediante el uso de funciones base subseccionales [27–29], Michalski y Zheng defienden que, a menos que se produzca un gran avance en el cálculo numérico de las integrales dobles infinitas que se obtienen al aplicar el método, la formulación EICE no es competitiva en términos de eficiencia numérica con otras formulaciones en el dominio espacial [30], y muy especialmente, con la formulación EIPM en el dominio espacial [10, 31–33] (véase la Fig. 1).

Mosig y Gardiol fueron los primeros en aprovechar las ventajas de la formulación EIPM en el dominio espacial al aplicar dicha formulación al análisis de antenas parche y al análisis de discontinuidades en línea microtira [34, 35]. Sin embargo, no parecía en principio que la formulación fuera fácilmente extensible al análisis de estructuras conductoras no planas embutidas en medios multicapa, ya que la función de Green para el potencial escalar asociado a la componente de la corriente en dirección vertical (esto es, en dirección perpendicular a las interfases entre capas) es diferente de la función de Green para el potencial escalar asociado a las componentes de la corriente en la dirección horizontal (esto es, en dirección paralela a las interfases entre capas) [36]. Aún así, Mosig llegó a aplicar la formulación EIPM a antenas parche alimentadas por sondas coaxiales verticales, incorporando tanto la función de Green del potencial escalar “horizontal” como la del potencial escalar “vertical” [32]. Con vistas a abordar el análisis del *scattering* por objetos conductores tridimensionales de forma arbitraria embutidos en medios multicapa, Michalski [37] propuso el uso de la función de Green

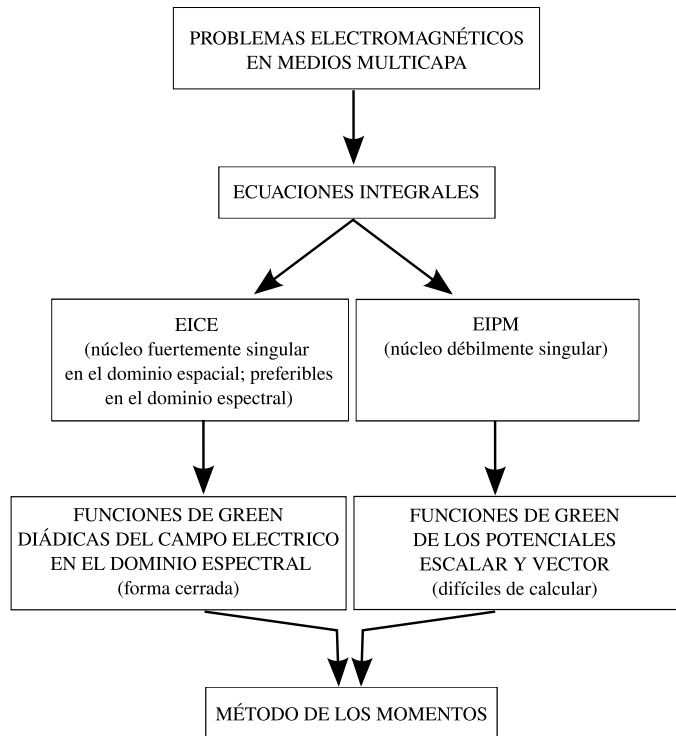


Figura 1: Esquema seguido para resolver ecuaciones integrales mediante el método de los momentos. Dependiendo del tipo de ecuación integral, habrá que utilizar funciones de Green espectrales para el campo eléctrico (formulación EICE) o funciones de Green espaciales para los potenciales (formulación EIPM).

para el potencial escalar “horizontal” en todas partes, lo cual exigía una adecuada corrección de aquellos elementos de la función de Green diádica del potencial vector que están asociados con la componente vertical de la corriente. Posteriormente, Michalski y Zheng [38] sentaron las bases teóricas de este procedimiento y describieron tres formulaciones EIPM diferentes (conocidas como A, B y C) para los medios multicapa. Se consideró que, de las tres formulaciones propuestas, la formulación C era la más adecuada para objetos que atravesaran una interfase, y fue implementada y validada para el estudio del *scattering* y la radiación por objetos situados entre dos medios semi-infinitos diferentes [39]. Además, la formulación EIPM de Mosig y Gardiol (así como otras usadas previamente), fue catalogada como un caso particular de las nuevas formulaciones A, B y C. La formulación C fue posteriormente aplicada por Michalski y Zheng al análisis de

líneas de transmisión microtira con metalizaciones de sección transversal arbitraria [40], al análisis de antenas parche en microtira con alimentación coaxial vertical [41] y al análisis de resonadores parche en microtira de forma arbitraria sobre sustratos anisótropos uniáxicos [33]. Con posterioridad, la formulación C fue también utilizada para estudiar el *scattering* por alambres y cuerpos de revolución conductores enterrados en el subsuelo [42, 43].

Cuando Mosig y Gardiol [32, 34, 35, 44] aplicaron por primera vez la formulación EIPM en el dominio espacial al análisis de estructuras microtira, aproximaron la densidad de corriente en las metalizaciones mediante funciones base subseccionales del tipo *rooftop* [45]. Estas funciones base están definidas sobre subdominios rectangulares y sólo permiten el análisis de estructuras planas en las que las metalizaciones tienen contornos rectos y esquinas en ángulo recto (metalizaciones con contornos *Manhattan*). Con posterioridad, Michalski empleó funciones base subseccionales del tipo RWG [46] en el análisis de estructuras planas [33, 41]. Las funciones base RWG están definidas en subdominios triangulares y permiten reproducir de forma exacta el perfil de metalizaciones con contornos rectilíneos y esquinas de forma arbitraria, y de forma muy aproximada el perfil de metalizaciones con contornos curvos. Por tanto, las funciones base RWG se pueden aplicar al análisis de una gama de geometrías mucho más amplia que la que se puede analizar con los *rooftops*. Finalmente, Chang y Zheng plantearon la posibilidad de utilizar la formulación EIPM combinando *rooftops* definidos en celdas rectangulares con *rooftops* definidos en celdas triangulares [47], con lo cual, se introducían unas nuevas funciones base que combinaban las ventajas de los *rooftops* rectangulares con las ventajas de las RWG.

En la actualidad, la mayoría de los simuladores comerciales destinados al análisis de circuitos pasivos de microondas y antenas en tecnología impresa, tales como *Ansoft Designer*, *Zeland IE3D* y *Agilent Momentum*, se basan en la resolución de EIPM en el dominio espacial mediante el MDM. Dado que las metalizaciones de los circuitos y las antenas tienen en general geometrías arbitrarias, los simuladores citados utilizan como funciones base, bien las funciones RWG, bien una combinación de *rooftops* de soportes rectangular y triangular (de hecho, el segundo autor de [47] es el autor del código fuente de *Zeland IE3D*). El hecho de que

los simuladores de estructuras planas más conocidos se hayan decantado por la formulación EIPM en el dominio espacial demuestra que esta formulación es claramente superior a la formulación EICE en el dominio espectral. A la hora de llevar a cabo el análisis electromagnético de un circuito o una antena, los simuladores necesitan calcular las integrales de reacción que surgen al aplicar el MDM, y con tal fin, usualmente necesitan evaluar decenas de miles de veces las funciones de Green espaciales del sustrato multicapa que soporta al circuito o la antena. Por tanto, el cálculo de dichas funciones de Green debe realizarse de una manera muy eficiente con idea de no prolongar demasiado el tiempo de CPU necesario para analizar la estructura objeto de estudio.

Acabamos de ver que el cálculo eficiente de funciones de Green espaciales en medios multicapa es un aspecto clave al aplicar el MDM a la resolución de EIPM en el dominio espacial, y por tanto, es un aspecto clave en la eficiencia de los simuladores comerciales especializados en el análisis de estructuras planas. Debido a este hecho, uno de los objetivos que se persigue en esta tesis es la implementación de algoritmos novedosos para el cálculo eficiente de las citadas funciones de Green multicapa espaciales en el marco de la formulación C de Michalski y Zheng [38]. El problema no es trivial ya que, a diferencia de lo que ocurre con las funciones de Green en medios homogéneos, las funciones de Green multicapa espaciales no se pueden obtener en forma cerrada, y sólo se pueden expresar como integrales de funciones de Green espectrales cuyo cálculo numérico puede llegar a ser extremadamente lento.

En medios con dos o tres capas, las funciones de Green multicapa espectrales se pueden obtener en forma cerrada. En medios con un número mayor de capas, las expresiones que se obtienen son demasiado prolijas y, en esos casos, es preferible calcular las funciones de Green multicapa espectrales mediante un algoritmo recurrente (véanse, por ejemplo, los algoritmos recurrentes publicados en [10, 32, 48, 49], y véase también el algoritmo que se presenta en el Apéndice F de esta memoria). Para pasar las funciones de Green espectrales al dominio espacial, hay que llevar a cabo numéricamente transformaciones inversas de Hankel [17], transformaciones que son más conocidas en Electromagnetismo como **integrales de Sommerfeld** [10, 16]. Por desgracia, la naturaleza altamente oscilante

de los integrandos involucrados en las integrales de Sommerfeld hace que su evaluación por los procedimientos convencionales de cálculo numérico de integrales sea muy laboriosa y requiera un elevado gasto computacional [10, 32, 50]. Entre los numerosos métodos propuestos para la evaluación eficiente de las integrales de Sommerfeld (véanse, por ejemplo, las referencias en [51]), los más eficientes son aquéllos en los que se aproximan las funciones de Green espectrales en términos de funciones simples con transformada inversa de Hankel analítica, ya que esta manera de proceder permite obtener las funciones de Green multicapa espaciales en forma cerrada. Entre los métodos que siguen esta estrategia destacan el método de las imágenes complejas discretas (MICD) [52] y el método de ajuste mediante funciones racionales (MAFR) [53]. Estos dos métodos proporcionan expresiones en forma cerrada de las funciones de Green consistentes en ondas esféricas (en el caso del MICD) o en ondas cilíndricas (en el caso del MAFR). Sin embargo, ambos métodos dan lugar a problemas en la evaluación de las funciones de Green multicapa para determinados rangos de la distancia entre el punto fuente y el punto de observación. Por un lado, el MICD es fiable en la región de campo próximo (esto es, para distancias entre el punto fuente y el punto de observación que son pequeñas en comparación con la longitud de onda), pero falla a la hora de dar resultados precisos cuando la distancia entre el punto fuente y el punto de observación es superior a unas pocas longitudes de onda [54]. Por otro lado, el MAFR suele dar buenos resultados en la región de campo lejano (esto es, para distancias entre el punto fuente y el punto de observación que son grandes en comparación con la longitud de onda), pero plantea problemas a la hora de aproximar las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo próximo [55], especialmente a bajas frecuencias.

En el Capítulo 3 de esta tesis se introducirá una estrategia del tipo “carrera de relevos” para obtener expresiones en forma cerrada de las funciones de Green multicapa espaciales. En primer lugar se obtendrán expresiones en forma cerrada para la región de campo lejano. Para llegar a estas expresiones, se aproximarán las funciones de Green espectrales a través de un MAFR que actúa sobre la variable espectral $u_0 = (k_\rho^2 - k_0^2)^{1/2}$ [56], y se llevará a cabo un desarrollo asintótico

uniforme de las integrales de Sommerfeld que resultan al sustituir las aproximaciones proporcionadas por el MAFR. Una vez obtenidas las expresiones para la región de campo lejano, pasaremos a obtener expresiones en forma cerrada para la región de campo próximo. Con tal fin, se aproximarán primero las funciones de Green espectrales en dos pasos utilizando tanto el MICD como un MAFR estándar que actúa sobre la variable espectral k_ρ y, a continuación, se utilizarán estas aproximaciones para obtener las integrales de Sommerfeld en forma cerrada. Los resultados numéricos obtenidos indican que las expresiones asintóticas para la región de campo lejano proporcionan resultados para las funciones de Green espaciales con una precisión mínima del 0.1 % para distancias entre el punto fuente y el punto de observación mayores que una longitud de onda. Asimismo, las expresiones obtenidas para el campo próximo también tienen una precisión aproximada del 0.1 % para distancias entre el punto fuente y el punto de observación menores que una longitud de onda. Esto significa que la combinación de las dos expresiones permite cubrir por completo el rango de distancias entre el punto fuente y el punto de observación con un error que es usualmente inferior al 0.1 %. Además, las expresiones obtenidas en forma cerrada pueden aplicarse tanto para medios sin pérdidas como para medios con pérdidas, y mantienen su precisión en un amplio rango de frecuencias (que va desde MHz hasta decenas de GHz para las dimensiones típicas de los medios multicapa usados como sustratos en circuitos de microondas y antenas construidos en tecnología impresa).

Otro de los problemas que se pretende abordar en esta tesis es el cálculo eficiente de funciones de Green *periódicas* espaciales en medios multicapa. En lo que sigue, nos referiremos a la función de Green periódica como a la generada por una agrupación periódica de fuentes puntuales. En este sentido, la función de Green periódica se diferencia de la función de Green no periódica generada por una única fuente puntual. Dependiendo de que la agrupación periódica de fuentes puntuales se extienda a lo largo de una dimensión, a lo largo de dos dimensiones o a lo largo de tres dimensiones, hablaremos de funciones de Green con periodicidad 1-D, con periodicidad 2-D o con periodicidad 3-D respectivamente.

El que se aborde en este trabajo el estudio de funciones de Green periódicas

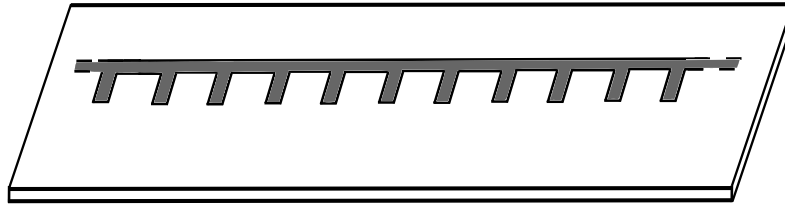


Figura 2: Estructura consistente en una línea de transmisión microtira con *stubs* en paralelo colocados periódicamente. Esta estructura periódica puede ser utilizada como filtro paso de baja y como filtro rechazo de banda.

tiene un gran interés por dos motivos: por un lado, el problema de una agrupación periódica de fuentes es conceptualmente más complejo que el problema de una única fuente, pudiéndose entender éste último como un caso particular del problema periódico; por otro lado, las estructuras periódicas capaces de guiar, radiar o dispersar ondas electromagnéticas tienen numerosas aplicaciones en los circuitos y antenas de microondas en tecnología impresa. Entre otras, podríamos destacar sus aplicaciones en dispositivos tales como filtros de microondas (véase el ejemplo en la Fig. 2) [1], antenas *leaky* [57], subreflectores dicróicos [58], antenas *reflectarray* [59], etc.

Un ejemplo típico de estructura periódica impresa lo constituyen las superficies selectivas en frecuencia (SSF), que están compuestas por una o varias agrupaciones periódicas planas bidimensionales de parches metálicos y/o ranuras en planos metálicos [58] (algunos ejemplos de la celda unidad de estas SSF se muestran en la Fig. 3). Tradicionalmente, las SSF han sido utilizadas en radomos híbridos para las antenas construidas sobre plataformas militares, en subreflectores dicróicos para reflectores parabólicos con varios alimentadores que trabajan a frecuencias distintas, y como polarizadores [60]. En los últimos diez años estas estructuras periódicas han encontrado nuevas aplicaciones en distintos campos. Por ejemplo, se ha comprobado que ciertas SSF se comportan como superficies de alta impedancia (conductores magnéticos artificiales) que pueden ser utilizadas como sustrato de las antenas impresas para mejorar su eficiencia de radiación [61]. Asimismo, las SSF poseen bandas electromagnéticas prohibidas (estructuras *electromagnetic bandgap* en la literatura en inglés), que podrían ser utilizadas para reducir la excitación de ondas de superficie en las bandas de operación de los

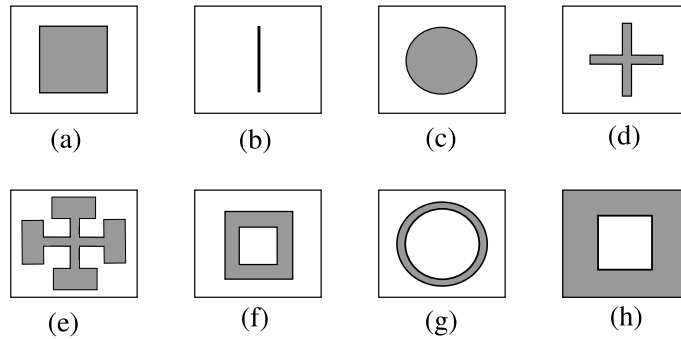


Figura 3: Algunas geometrías típicas de la celda unidad de SSF. (a) Parche cuadrado. (b) Dipolo. (c) Parche circular. (d) Dipolo en forma de cruz. (e) Cruz de Jerusalem. (f) Cuadrado. (g) Círculo. (h) Abertura cuadrada.

componentes de circuitos y antenas impresos [62]. Finalmente, las SSF se utilizan para diseñar antenas *reflectarray* bajo la hipótesis de periodicidad local. Esta hipótesis se basa en suponer que cada elemento del *reflectarray* se haya rodeado por un entorno periódico a la hora de obtener el diagrama de radiación de la antena. La hipótesis está avalada por el hecho de que permite obtener una buena concordancia entre la teoría y los experimentos [63, 64].

Cuando se lleva a cabo el análisis de SSF mediante la formulación EIPM en el dominio espacial, es necesario evaluar funciones de Green periódicas espaciales en medios multicapa [65, 66]. Un problema relacionado es el análisis de circuitos de microondas encapsulados en tecnología microtira [67–69], que también puede ser formulado como un problema electromagnético de estructuras periódicas en medios multicapa [10]. Las funciones de Green periódicas multicapa espaciales se pueden expresar como sumas infinitas (que serán sumas simples para problemas 1-D periódicos, sumas dobles para problemas 2-D periódicos y sumas triples para el caso de problemas con periodicidad 3-D) cuyos sumandos son muestras de las funciones de Green no periódicas multicapa espectrales. Estas sumas infinitas suelen tener una convergencia muy lenta. A la hora de acelerar el cálculo de las sumas, se suele hacer uso de métodos de aproximación de las funciones de Green espectrales tales como el MICD o el MAFR [66, 70–72]. Esto permite expresar las funciones de Green periódicas espaciales en medios multicapa en términos de funciones de Green periódicas espaciales en medios homogéneos (o funciones de Green periódicas *homogéneas*). Ahora bien, mientras que las funciones de Green

no periódicas homogéneas se conocen en forma cerrada, las funciones de Green periódicas homogéneas sólo se pueden expresar en términos de series que suelen converger lentamente. Esto significa que antes de implementar algoritmos eficientes para el cálculo de las funciones de Green periódicas multicapa espaciales, es preciso disponer primero de algoritmos eficientes para el cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas. En esta tesis, se va a trabajar simultáneamente en los dos frentes. En primer lugar, en los Capítulos 1 y 2 de la tesis se van a presentar algoritmos eficientes para acelerar la convergencia de las series infinitas involucradas en el cálculo de funciones de Green periódicas homogéneas. A continuación, en el Capítulo 4 se aprovechará la experiencia adquirida en los Capítulos 1 y 2 para presentar algoritmos eficientes de cálculo de funciones de Green periódicas multicapa espaciales. Asimismo, en el Capítulo 4 también será de utilidad la experiencia adquirida en el Capítulo 3 a la hora de aproximar las funciones de Green no periódicas multicapa espectrales mediante el MICD y el MAFR.

Si nos ceñimos a las funciones de Green periódicas homogéneas, a lo largo de los años se ha descrito en la literatura un amplio abanico de métodos, tanto analíticos como numéricos, para acelerar la convergencia de las series infinitas involucradas en el cálculo de estas funciones de Green. Entre los métodos analíticos utilizados para la aceleración de las series se encuentran la transformación de Kummer espacial [73] y espectral [74], la aplicación conjunta de la transformación de Kummer espectral y la fórmula de Poisson [75–77], la transformación de Veysoglu [77–79], el método de las capas perfectamente adaptadas [80, 81], el método de Ewald [77, 79, 82–84] y el método de las sumas de red [85–87]. Entre los métodos numéricos se encuentran la transformación de Shanks [88, 89], el algoritmo- θ [90], el algoritmo de Chebyshev-Toeplitz [91], la transformación T de Levin [92], el algoritmo- ϵ de Wynn [93] y el algoritmo de suma por partes recientemente desarrollado en [94]. Como se comentó en [77], los métodos numéricos de aceleración citados anteriormente no sólo se aplican directamente sobre las series que representan a las funciones de Green periódicas homogéneas, sino que pueden también ser usados sobre las series más rápidamente convergentes

resultantes de la aplicación de métodos de aceleración analíticos [77]. Varias publicaciones han realizado estudios comparativos entre los distintos métodos analíticos y numéricos de aceleración de las series que intervienen en las funciones de Green periódicas homogéneas [77, 93, 95], y todas indican que el método de Ewald suele ser el más eficiente cuando las funciones de Green homogéneas tienen que ser evaluadas para un número moderado de parejas de puntos fuente y puntos de observación. Esta mayor eficiencia del método de Ewald se debe tanto a su versatilidad como al buen compromiso que ofrece entre precisión y rapidez computacional. Sólo cuando las funciones de Green homogéneas tienen que ser evaluadas para un número muy elevado de parejas de puntos fuente y puntos de observación es preferible el método de las sumas de red.

En los Capítulos 1 y 2 de esta tesis se rescatarán dos de los métodos analíticos citados anteriormente a la hora de llevar a cabo el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas. Estos dos métodos son el método espectral de Kummer combinado con la fórmula de Poisson (para la evaluación de las series de la función de Green periódica homogénea 2-D) y el método de Kummer espacial (para las series de la función de Green periódica homogénea 3-D). En esta tesis se van a implementar los dos métodos de forma novedosa ya que en ambos casos se va a retener un número arbitrario de términos en la aplicación de la transformación de Kummer. Los resultados obtenidos indican que el hecho de considerar una transformación de Kummer con extracción asintótica de términos de orden superior mejora considerablemente la eficiencia de los métodos. Por tanto, a pesar del gran número de métodos analíticos existentes en la literatura para el cálculo de funciones de Green periódicas homogéneas, la contribución que se realiza en esta tesis supone una alternativa atractiva en cuanto a versatilidad, precisión y rapidez computacional. Es importante señalar que el disponer de algoritmos eficientes para el cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas constituye una ventaja importante a la hora de resolver problemas periódicos homogéneos mediante el MDM, ya que en dichos problemas las funciones de Green periódicas homogéneas tienen que ser calculadas miles de veces. Además, como ya se ha comentado con anterioridad, la evaluación eficiente de las funciones de Green periódicas homogéneas constituye un paso previo imprescindible para el

cálculo eficiente de las funciones de Green periódicas multicapa.

La experiencia adquirida en los Capítulos 1 y 2 de la tesis en el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas, junto con la adquirida en el Capítulo 3 en el cálculo eficiente de funciones de Green no periódicas multicapa espaciales, va a permitir abordar en el Capítulo 4 el cálculo de funciones de Green periódicas multicapa espaciales. De todos los métodos que se han propuesto para acelerar el cálculo de las series infinitas que dan acceso a las funciones de Green periódicas multicapa espaciales [65–67, 70–72, 96], el más eficiente parece ser una versión del método espectral de Kummer, que utiliza por un lado el MICD para obtener el comportamiento asintótico de las funciones de Green espectrales, y que por otro lado se basa en el método de Ewald para obtener eficientemente las series asintóticas [71, 72]. Si bien este método ha sido utilizado con éxito para el cálculo de la función de Green periódica para el potencial escalar y para el cálculo de los elementos de la diagonal de la función de Green periódica diádica del potencial vector [71, 72], en esta tesis se aplicará al cálculo de los elementos *no diagonales* de la función de Green periódica diádica para el potencial vector. Los resultados obtenidos para este caso particular indican que, aunque el método sea muy rápido, conduce a errores importantes cuando el punto de observación se aproxima a los puntos fuente. Para solucionar este problema, se propondrá una versión alternativa del método para la evaluación de los elementos no diagonales de la función de Green periódica multicapa del potencial vector. Esta nueva versión hace uso del MICD para obtener el comportamiento asintótico de las funciones de Green espectrales (al igual que la versión original), pero utiliza el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior (es decir, el método implementado previamente para las funciones de Green periódicas homogéneas en el Capítulo 1) para la obtención de las series asintóticas. La nueva versión del método es típicamente un 50 % más lenta que la versión original basada en el método de Ewald, pero proporciona resultados precisos en el rango completo de distancias entre el punto de observación y los puntos fuente. Llegados a este punto, conviene decir que aunque los elementos no diagonales de la función de Green periódica multicapa del potencial vector no son necesarios en el análisis de estructuras periódicas multicapa o de circuitos de microondas

encapsulados que son estrictamente planos (ya que este análisis sólo requiere el cálculo de la función de Green periódica multicapa del potencial escalar y de los elementos diagonales de la función de Green periódica multicapa del potencial vector [67, 68, 97]), los citados elementos no diagonales son necesarios cuando se analizan estructuras periódicas o circuitos encapsulados que contienen interconexiones verticales tales como vías, cortocircuitos y puentes de aire [98, 99], interconexiones que aparecen frecuentemente en numerosas aplicaciones prácticas (piénsese, por ejemplo, que los puentes de aire son imprescindibles en los circuitos en guía de ondas coplanar que no tienen un plano de simetría especular para evitar la excitación del modo impar o modo de *slots* acoplados [100]).

Una vez que ha quedado claro que el objetivo perseguido en esta tesis es la optimización del cálculo de las funciones de Green multicapa espaciales en los casos periódico y no periódico, presentamos a continuación un esbozo del reparto de este objetivo entre los distintos Capítulos de la tesis (veáse la Fig. 4):

- En el Capítulo 1 se aplicará el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de un número arbitrario de términos a la aceleración de la convergencia de las series involucradas en el cálculo de funciones de Green periódicas homogéneas 2-D con periodicidades 1-D y 2-D. El nuevo método será comparado con otros métodos de aceleración descritos previamente en la literatura como el método espectral de Kummer-Poisson convencional y el método de Ewald, y se mostrará su versatilidad y eficiencia, tanto en el caso de problemas 1-D periódicos como 2-D periódicos.
- En el Capítulo 2 se aplicará el método espacial de Kummer con extracción asintótica de un número arbitrario de términos a la aceleración de las series involucradas en el cálculo de funciones de Green periódicas homogéneas 3-D con periodicidad 1-D. Se mostrará que las prestaciones del nuevo método son superiores a las obtenidas mediante el método espectral de Kummer-Poisson y mediante el método de Ewald.
- En el Capítulo 3 se abordará el estudio del caso multicapa no periódico. Se propondrán expresiones en forma cerrada para las funciones de Green en el

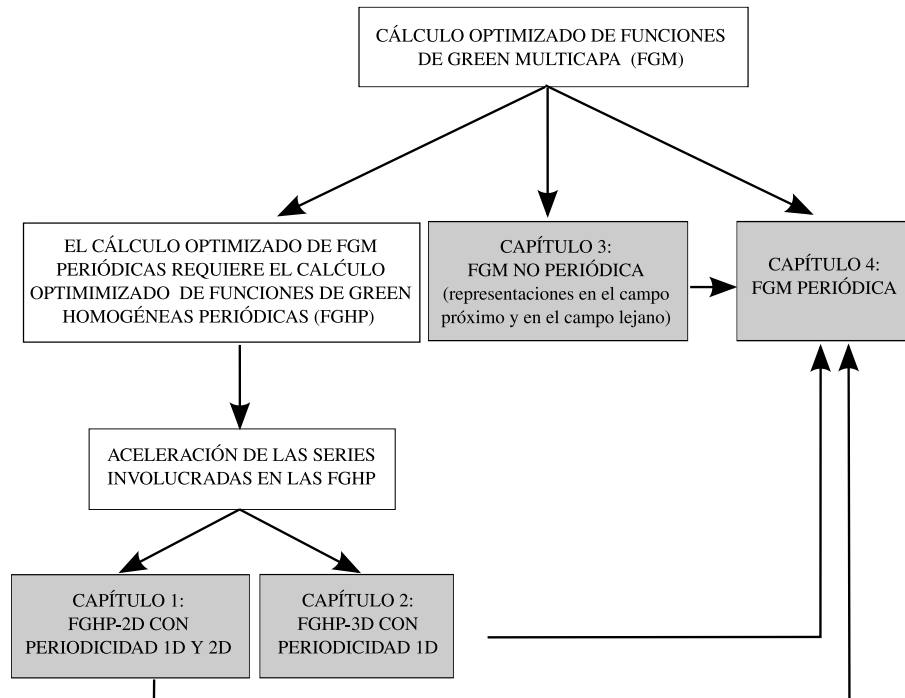


Figura 4: Diagrama de bloques donde se muestra la ubicación de los capítulos de esta tesis en relación con el cálculo optimizado de funciones de Green multicapa.

dominio espacial, tanto en la región de campo lejano (para lo cual se utilizará una versión modificada del MAFR), como en la región de campo próximo (mediante el uso combinado del MICD y el MAFR estándar). La combinación de ambas expresiones en una estrategia del tipo “carrera de relevos” permitirá reproducir con una buena precisión las funciones de Green multicapa espaciales en todo el rango de valores de la distancia entre el punto de observación y el punto fuente.

- Por último, en el Capítulo 4 se abordará el cálculo eficiente de las funciones de Green periódicas multicapa espaciales para el potencial escalar y para el potencial vector. Se aplicará el método espectral de Kummer para acelerar el cálculo de las citadas funciones de Green. Las expresiones asintóticas de las funciones de Green espectrales se calcularán mediante el MICD, y las series asintóticas se calcularán, bien mediante el método de Ewald, bien mediante el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de un

número arbitrario de términos que se presenta en el Capítulo 1. Se mostrará que si bien la primera versión basada en el método de Ewald es idónea para el cálculo de la función de Green del potencial escalar y de los elementos diagonales de la función de Green para el potencial vector, la segunda versión basada en el método espectral de Kummer-Poisson resulta ser más conveniente para el cálculo de los elementos no diagonales de la función de Green para el potencial vector. La utilización de la versión más conveniente en cada caso permitirá obtener un algoritmo robusto y fiable para el cálculo de las funciones de Green periódicas multicapa en todo el rango de valores de la distancia entre el punto de observación y los puntos fuente.

Capítulo 1

Evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas 2-D mediante el método espectral de Kummer-Poisson

1.1. Introducción

La aplicación del Método de los Momentos [12] a la solución de problemas electromagnéticos periódicos requiere la evaluación de funciones de Green periódicas. En particular, la función de Green 2-D homogénea con periodicidad 1-D ha sido usada en la determinación de los parámetros de *scattering* de obstáculos inductivos en guías de ondas rectangulares [101], así como en el análisis del *scattering* de ondas planas por agrupaciones periódicas monodimensionales de tiras conductoras con pérdidas en el espacio libre [102]. Estos ejemplos ponen de manifiesto que el desarrollo de algoritmos eficientes y precisos para el cálculo de las funciones de Green 2-D homogéneas con periodicidades 1-D y 2-D es muy útil como paso intermedio en el estudio del *scattering* de ondas electromagnéticas por estructuras periódicas en medios homogéneos.

Las funciones de Green periódicas 2-D en medios homogéneos pueden escribirse como series espaciales infinitas o bien, si se aplica la fórmula de Poisson,

como series espectrales también infinitas [77]. Sin embargo, tanto las series espaciales como las espectrales tienen una convergencia muy lenta y su cálculo preciso requiere tiempos de evaluación muy elevados [102]. Hace aproximadamente dos décadas se propuso la utilización conjunta de la transformación de Kummer y la fórmula de Poisson para acelerar el cálculo de estas series en problemas con periodicidad 1-D [102] y 2-D [103]. Con posterioridad, se comprobó que el método de Ewald [104] era una alternativa más eficiente para el cálculo de estas series, y dicho método fue adaptado al cálculo de la función de Green 2-D homogénea con periodicidad 1-D [83]. Un tercer método para el cálculo eficiente de estas series es el método de las sumas de red [86, 87]. Lamentablemente, este último método es difícil de implementar y sólo parece ser competitivo frente a otros métodos cuando es necesario calcular la función de Green para un número muy elevado de parejas de puntos fuente y puntos de observación [87].

En este Capítulo se presenta un nuevo algoritmo, basado en una original implementación del método espectral de Kummer-Poisson, para acelerar el cálculo de las series de la función de Green bidimensional con periodicidad en una y dos dimensiones. Al igual que en [73, 74], el nuevo algoritmo es muy eficiente porque utiliza un desarrollo asintótico de orden arbitrariamente grande en la aplicación de la transformación de Kummer. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en [73] y [74], el nuevo algoritmo presentado aquí se basa fundamentalmente en la fórmula de Poisson en vez de basarse en la expresión matemática específica de los términos de las series. Esto conlleva que el algoritmo sea muy versátil, ya que la misma filosofía subyacente a su aplicación en el caso de las series simples (implicadas en problemas con periodicidad 1-D) puede extenderse fácilmente a la evaluación de las series dobles (involucradas en problemas con periodicidad 2-D), aún en el caso en que los ejes de la celda unidad de la red periódica estén girados de forma arbitraria.

El algoritmo que se presenta en este Capítulo será comparado con el método de Ewald en la sección 1.4, donde se mostrará que, cuando el número de términos asintóticos retenidos en la transformación de Kummer es suficientemente grande, el nuevo algoritmo resulta ser más eficiente que el método de Ewald. El hecho de que se compare con el método de Ewald y no con otras técnicas alternativas de

aceleración de series se debe principalmente a que el método de Ewald ha sido considerado en la literatura como el método de referencia en el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas [77, 93, 95].

1.2. Funciones de Green homogéneas 2-D no periódicas y periódicas

En todo lo que sigue, se supondrá de forma implícita que todas las magnitudes tienen una dependencia temporal del tipo $e^{j\omega t}$ (o lo que es lo mismo, se supondrá que todas las magnitudes con las que se va a trabajar son fasores, o en un sentido más amplio, transformadas de Fourier con respecto al tiempo). Asimismo, supondremos que todas las fuentes lineales (periódicas o no periódicas) con las que vamos a trabajar en este Capítulo están inmersas en un medio homogéneo no magnético, que puede tener pérdidas, y que posee una permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r(1 - j \tan \delta)$ y una permeabilidad $\mu = \mu_0$.

A continuación, se va a describir brevemente el procedimiento que se sigue para obtener la función de Green homogénea 2-D. Con tal fin, consideraremos que a lo largo de una recta paralela al eje z existe una distribución lineal de elementos de corriente infinitesimales orientados en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$, tal y como muestra la Fig. 1.1. Suponiendo que la corriente total transportada en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ es de 1A, la densidad volumétrica de corriente asociada con esta corriente lineal viene dada por [13]:

$$\mathbf{J}_l = \delta(x - x')\delta(y - y')\hat{\mathbf{u}}, \quad (1.1)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector unitario que indica la dirección de la corriente. El potencial vector resultante de la resolución de la ecuación de Helmholtz asociada con este problema $((\nabla^2 + k^2)\mathbf{A}_l = -\mu_0\mathbf{J}_l)$ tiene la expresión:

$$\mathbf{A}_l = \frac{\mu_0}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)\hat{\mathbf{u}}, \quad (1.2)$$

donde $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$ es el número de ondas complejo del medio, $H_0^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de orden cero y segunda clase [105], $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ es el vector perpendicular al eje z que señala al punto de observación y $\boldsymbol{\rho}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$ el vector perpendicular al eje z que apunta a la línea de corriente.

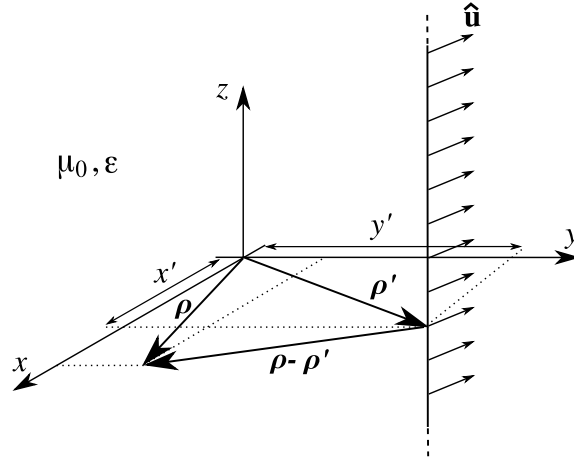


Figura 1.1: Línea de corriente formada por una distribución lineal infinita de elementos infinitesimales de corriente orientados en la dirección \hat{u} . $\rho' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ es el vector 2-D que apunta a la línea de corriente y $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$ es el vector 2-D para el punto de observación.

Consideremos ahora una distribución lineal de carga a lo largo de una recta paralela al eje z , tal y como muestra la Fig. 1.2. Suponiendo que la densidad lineal de carga es de 1C/m , la densidad volumétrica de carga asociada con esta carga lineal viene dada por:

$$\rho_l = \delta(x - x')\delta(y - y'). \quad (1.3)$$

El potencial escalar que se obtiene al resolver la ecuación de Helmholtz para este problema ($(\nabla^2 + k^2)\phi = -\rho_l/\varepsilon$) tiene la siguiente expresión:

$$\phi = \frac{1}{4j\varepsilon} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|). \quad (1.4)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.2) y (1.4), podemos definir una función de Green escalar “general” 2-D para un medio homogéneo dada por:

$$G_{2D}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|), \quad (1.5)$$

siendo $\Delta x = x - x'$ y $\Delta y = y - y'$. A la función G_{2D} la denominaremos función de Green homogénea no periódica bidimensional.

Para ilustrar la utilidad de la función de Green bidimensional de la Ec. (1.5), consideremos el problema del *scattering* de una onda plana por un cilindro conductor eléctrico perfecto (CEP) [9] que tendrá, en general, una sección transversal

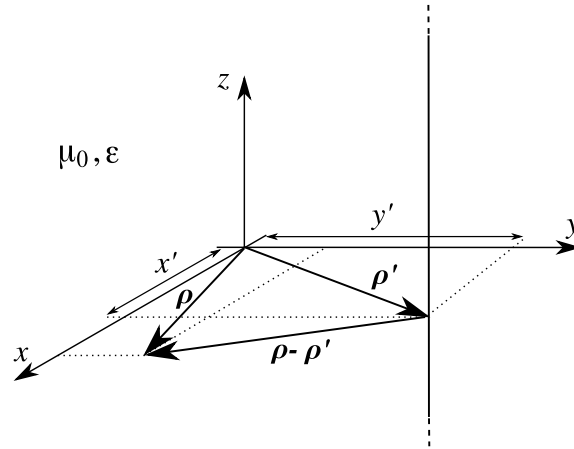


Figura 1.2: Distribución lineal de carga paralela al eje z . $\rho' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ es el vector 2-D que apunta a la carga lineal y $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$ es el vector 2-D para el punto de observación.

arbitraria (véase la Fig. 1.3). Suponiendo que la onda plana incide normalmente al eje del cilindro (eje z en la figura), el campo eléctrico incidente sobre el cilindro tendrá en general la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho}) = E_0 e^{j\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} \hat{\mathbf{v}}} = E_0 e^{j(k_{xi}x + k_{yi}y)} \hat{\mathbf{v}} = E_0 e^{jk(\cos\phi_i x + \sin\phi_i y)} \hat{\mathbf{v}}, \quad (1.6)$$

donde E_0 es la amplitud compleja del campo eléctrico incidente, ϕ_i es el ángulo que forma la dirección de incidencia de la onda con la parte positiva del eje x , $\mathbf{k} = k_{xi}\hat{x} + k_{yi}\hat{y}$ es el vector número de ondas ($k_{xi}^2 + k_{yi}^2 = k^2$) y $\hat{\mathbf{v}}$ es un vector unitario perpendicular a la dirección de propagación ($\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k} = 0$). Sobre la superficie del cilindro conductor perfecto de la Fig. 1.3 se satisface la siguiente condición de contorno:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho}) + \mathbf{E}_{\text{dis}}(\boldsymbol{\rho})) = 0 \quad \boldsymbol{\rho} \in C, \quad (1.7)$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal a la superficie del cilindro, y C la sección transversal del cilindro en un plano perpendicular al eje z (véase la Fig. 1.3). En la Ec. (1.7), \mathbf{E}_{dis} es el campo eléctrico dispersado que, de acuerdo con el principio de superposición, las Ecs. (1.2) y (1.4), y la ecuación de continuidad (que relaciona la carga y la corriente), puede escribirse en función de los potenciales escalar, ϕ , y

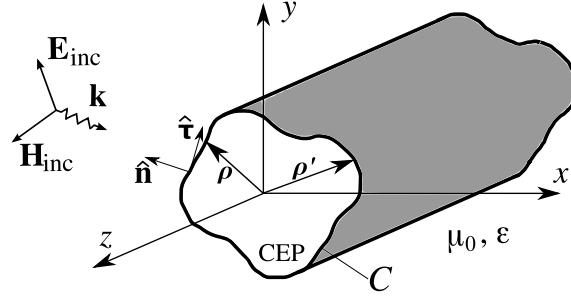


Figura 1.3: Cilindro infinito perfectamente conductor (CEP) de sección transversal arbitraria, iluminado por una onda plana. La dirección de incidencia es perpendicular al eje del cilindro (eje z). Los vectores $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ son vectores unitarios normal y tangente, respectivamente, a la superficie del cilindro, y perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$.

vector, \mathbf{A} , del siguiente modo:

$$\mathbf{E}_{\text{dis}} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi = -j\omega\mu_0 \int_C \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}') \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) dl' - \nabla \left[\frac{-1}{j\omega\epsilon} \int_C (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}')) \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) dl' \right], \quad (1.8)$$

donde \mathbf{K} ($\mathbf{K} = K_\tau \hat{\boldsymbol{\tau}} + K_z \hat{\mathbf{z}}$, siendo $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ un vector unitario tangente a C y perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$) es la densidad superficial de corriente sobre el cilindro y $\nabla'_s \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}') = \frac{\partial K_\tau}{\partial \tau'}$, siendo ∇'_s el operador divergencia superficial. Sustituyendo la Ec. (1.8) en la Ec. (1.7) se obtiene la siguiente ecuación integral para la densidad superficial de corriente sobre el cilindro:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho}) - j\omega\mu_0 \int_C \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}') \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) dl' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \left[\int_C (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}')) \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) dl' \right] \right) = 0 \quad \boldsymbol{\rho} \in C. \quad (1.9)$$

La incógnita de la ecuación integral anterior es la densidad superficial de corriente sobre el cilindro, $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}')$, y el núcleo de la ecuación integral es la función de Green 2-D que aparece en la Ec. (1.5). Si en lugar de incidir la onda plana sobre un único cilindro, incide sobre una agrupación de cilindros que están periódicamente situados a lo largo del eje x , tal y como muestra la Fig. 1.4, la ecuación

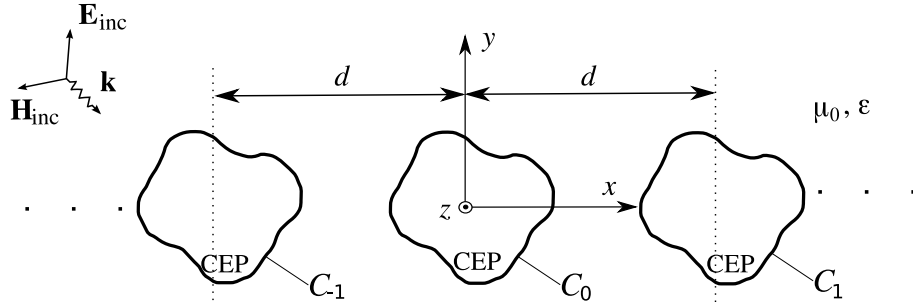


Figura 1.4: Agrupación periódica de cilindros a lo largo del eje x , con periodo d .

integral (1.9) se transforma en:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho}) - j\omega\mu_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{C_n} \mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}') \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\mathbf{l}' \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{C_n} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}')) \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\mathbf{l}' \right] \right) = 0 \quad \boldsymbol{\rho} \in C_0, \quad (1.10)$$

siendo C_n la sección transversal del cilindro n -ésimo ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) en un plano perpendicular al eje z , y \mathbf{K}_n la densidad superficial de corriente en el cilindro n -ésimo. Pero debido al factor de fase impuesto por el campo eléctrico de la onda incidente, la densidad de corriente sobre los cilindros debe satisfacer la condición de Floquet [9]:

$$\mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}') = \mathbf{K}_0(\boldsymbol{\rho}') e^{jnk_x d} \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots), \quad (1.11)$$

donde d es el periodo de la agrupación. De acuerdo con la condición (1.11), la ecuación integral (1.10) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho}) - j\omega\mu_0 \int_{C_0} \mathbf{K}_0(\boldsymbol{\rho}') \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - nd\hat{\mathbf{x}}|) e^{jnk_x d} d\mathbf{l}' \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \left[\int_{C_0} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_0(\boldsymbol{\rho}')) \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - nd\hat{\mathbf{x}}|) e^{jnk_x d} d\mathbf{l}' \right] \right) = 0 \\ \boldsymbol{\rho} \in C_0, \quad (1.12)$$

La ecuación integral (1.12) es más útil que la ecuación integral (1.10) ya que, si bien la Ec. (1.10) tiene como incógnitas las densidades de corriente sobre los

infinitos cilindros de la Fig. 1.4, esto es, $\mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}')$ ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$), la Ec. (1.12) tiene como incógnita la densidad de corriente sobre un único cilindro, $\mathbf{K}_0(\boldsymbol{\rho}')$. El núcleo de la ecuación integral (1.12) es lo que a partir de ahora llamaremos función de Green periódica homogénea 2-D con periodicidad 1-D (G_{2D-1D}), y viene dado por:

$$G_{2D-1D}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - nd\hat{\mathbf{x}}|) e^{jn k_x d}. \quad (1.13)$$

1.3. Procedimiento numérico para el cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas 2-D

1.3.1. Función de Green homogénea 2-D con periodicidad 1-D

Consideremos ahora una agrupación periódica de fuentes lineales (corrientes o cargas similares a las de las Figs. 1.1 y 1.2) coplanares paralelas, tal y como se muestra en la Fig. 1.5. Por analogía con lo que hemos visto en la sección anterior, la función de Green homogénea 2-D correspondiente a esta agrupación de fuentes (potencial vector o potencial escalar salvo una constante multiplicativa) vendrá dada por la Ec. (1.13) que, por simplicidad, reescribiremos de la siguiente forma:

$$G_{2D-1D}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(kR_n) e^{-jk_{x0}nd}, \quad (1.14)$$

donde $k_{x0} = \pm k \sin \theta'_0 \cos \phi'_0$ es la fase por periodo impuesta por una onda emitida por la agrupación (signo positivo) o por una onda que incide sobre la agrupación (signo negativo), θ'_0 y ϕ'_0 son las coordenadas esféricas que indican la dirección de propagación de esta onda y R_n se define como:

$$R_n = \sqrt{(\Delta x - nd)^2 + \Delta y^2} \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots). \quad (1.15)$$

En la Ec. (1.13) se cumple una vez más que $\Delta x = x - x'$ y $\Delta y = y - y'$, donde x, x', y e y' aparecen descritas en la leyenda de la Fig. 1.5.

Debido al comportamiento asintótico de la función $H_0^{(2)}(z)$ para valores grandes de $|z|$ [105], el término n -ésimo de las series mostradas en la Ec. (1.14) decae

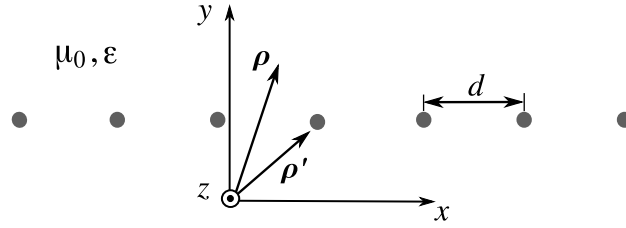


Figura 1.5: Agrupación de fuentes lineales situadas periódicamente a lo largo de la dirección x . $\rho' + nd\hat{x} = (x' + nd)\hat{x} + y'\hat{y}$ es el vector 2-D que apunta a las fuentes ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) y $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$ es el vector 2-D para el punto de observación.

como $|n|^{-1/2} e^{\text{Im}(k)(1 \pm \text{sen}\theta'_0 \cos\phi'_0)|n|d}$ para $|n| \rightarrow \infty$, y por tanto, la convergencia de la Ec. (1.14) es extremadamente lenta cuando las pérdidas son despreciables (es decir, cuando $\text{Im}(k) \approx 0$) [77]. Para este caso particular, la fórmula de Poisson (véase el Apéndice A) aporta una serie alternativa para el cálculo de la función de Green homogénea 2-D con periodicidad 1-D con una convergencia más rápida. Esta serie alternativa está dada por [77]:

$$G_{2\text{D}-1\text{D}}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{xn}\Delta x} e^{-\Gamma_n|\Delta y|}}{\Gamma_n}, \quad (1.16)$$

donde $k_{xn} = 2\pi n/d + k_{x0}$ y $\Gamma_n = \sqrt{k_{xn}^2 - k^2}$. De acuerdo con [77], la serie obtenida en la Ec. (1.16) es una representación espectral de la serie de la Ec. (1.14). El término n -ésimo de la serie de la Ec. (1.16) tiene un decaimiento exponencial del tipo $e^{-(2\pi|n||\Delta y|)/d}/|n|$ cuando $|\Delta y| \neq 0$, pero tiene un decaimiento del tipo $|n|^{-1}$ cuando $|\Delta y| = 0$ [77]. Esto significa que la convergencia de la serie espectral es también lenta cuando $|\Delta y| \approx 0$ (esto es, cuando el punto de observación se encuentra en las proximidades del plano que contiene a las fuentes).

Una alternativa más eficiente para acelerar la convergencia de la Ec. (1.14) ha sido publicada en [79, 83], donde los autores hacen uso del método de Ewald [82] para expresar la función de Green bidimensional con periodicidad 1-D como:

$$G_{2\text{D}-1\text{D}}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{xn}\Delta x}}{\Gamma_n} \left\{ e^{\Gamma_n|\Delta y|} \text{erfc}^+ + e^{-\Gamma_n|\Delta y|} \text{erfc}^- \right\} \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{x0}nd} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{k}{2E'} \right)^{2q} \frac{1}{q!} E_{q+1} \left(R_n^2 E'^2 \right). \quad (1.17)$$

En la ecuación anterior, $E_q(\cdot)$ es la función exponencial integral de orden q definida en [105, p. 228] y:

$$\operatorname{erfc}^{\pm} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\Gamma_n}{2E'} \pm |\Delta y|E'\right), \quad (1.18)$$

donde $\operatorname{erfc}(\cdot)$ es la función error complementario [105, p. 297].

Las dos series de la Ec. (1.17) en el índice n exhiben una convergencia gaussiana extremadamente rápida [83]. El parámetro E' que aparece en la Ec. (1.17) es el parámetro de separación (*splitting parameter* en inglés) que controla simultáneamente la convergencia de las dos series en el índice n [83]. Aunque Capolino *et al.* han sugerido una expresión para E' (véase [83, Ec. (34)]), en este trabajo se propone utilizar una expresión simplificada dada por:

$$E' = \max\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{d}, \frac{|\Gamma_0|}{4}\right\}. \quad (1.19)$$

Por comparación con la Ec. (1.19), la expresión para E' dada en [83, Ec. (34)] incluye un tercer argumento dependiente de Q , que es el número de términos impuestos externamente para alcanzar la convergencia en la serie en el índice q de la Ec. (1.17). Nuestras simulaciones numéricas han mostrado que la presencia de este tercer argumento no introduce ventajas en el cálculo de G_{2D-1D} , tales como un aumento de la precisión y/o una disminución del tiempo de CPU requerido.

Cuando la función G_{2D-1D} se calcula con una precisión de ocho cifras significativas y E' se calcula mediante la Ec. (1.19), nuestras simulaciones han mostrado que el valor de Q se encuentra típicamente en el rango entre 13 y 30, siendo muy dependiente de la relación d/λ (siendo $\lambda = 2\pi/\operatorname{Re}(k)$).

Aunque las dos series en el índice n de la Ec. (1.17) exhiben convergencia gaussiana, el término n -ésimo de la segunda serie es, a su vez, otra serie infinita (sin convergencia gaussiana) en el índice q para la que no se ha encontrado ninguna expresión en forma cerrada. La presencia de esta última serie en q tiene como consecuencia que el método de Ewald no sea tan eficiente para el cálculo de la función de Green bidimensional con periodicidades 1-D y 2-D (véase también la sección 1.3.2) como lo es en el caso de la función de Green 3-D con periodicidades 2-D y 3-D. De hecho, cuando el método de Ewald se aplica a la evaluación

de las funciones de Green 3-D con periodicidades 2-D y 3-D, las series originales lentamente convergentes se transforman en dos nuevas series con convergencia gaussiana que no involucran ninguna serie infinita adicional [82, 104, 106]. Sin embargo, en el caso de las funciones de Green periódicas 2-D, la aplicación del método de Ewald lleva a una serie espectral con convergencia gaussiana más una serie espacial con convergencia también gaussiana que involucra a otra serie infinita [83] (que es la serie en el índice q de la Ec. (1.17) en el caso de la función de Green 2-D con periodicidad 1-D).

Como se verá en el siguiente Capítulo, el cálculo de la función de Green 3-D con periodicidad 1-D mediante el método de Ewald comparte las dificultades que aparecen al calcular las funciones de Green periódicas 2-D, tal y como se ha mostrado en [77, Ecs. (39) y (40)]. Como consecuencia de lo anterior, aunque es extremadamente difícil encontrar una técnica superior al método de Ewald para la evaluación de las funciones de Green 3-D con periodicidades 2-D y 3-D (la aproximación seguida en [107] es, en esencia, una versión modificada del método de Ewald que puede deducirse a partir de [108]), en este trabajo se mostrará que existen alternativas eficientes al método de Ewald a la hora de calcular tanto las funciones de Green 2-D con periodicidades 1-D y 2-D como la función de Green 3-D con periodicidad 1-D (Capítulo 2). Y lo que es aún más importante, que esas alternativas se basan en métodos tradicionales de aceleración de series.

En esta sección del Capítulo 1 nos proponemos acelerar el cálculo de la serie de la Ec. (1.14) aplicando la transformación de Kummer (véase el Apéndice B) a su versión espectral (1.16), y posteriormente, aplicando la fórmula de Poisson a la serie asintótica resultante (véase [75, Ec. (1)] y [76, Ec. (4)]). Al aplicar la transformación de Kummer, en vez de retener un solo término en el desarrollo asintótico del término n -ésimo de la Ec. (1.16) para $|n| \rightarrow \infty$ [77, 109], retendremos varios términos [73, 74], lo cual va a mejorar considerablemente la eficiencia del método espectral de Kummer-Poisson. En concreto, la serie de la Ec. (1.16) se escribirá como la suma de las siguientes dos series rápidamente convergentes:

$$G_{2D-1D}(\Delta x, \Delta y) = G_{2D-1D}^{(1)}(\Delta x, \Delta y) + G_{2D-1D}^{(2)}(\Delta x, \Delta y), \quad (1.20)$$

donde:

$$G_{2D-1D}^{(1)}(\Delta x, \Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,1} = \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{xn}\Delta x} \left[\frac{e^{-\Gamma_n|\Delta y|}}{\Gamma_n} - \sum_{i=1}^{M'} B_i \frac{e^{-\Gamma_{n,i}^c|\Delta y|}}{\Gamma_{n,i}^c} \right] \quad (1.21)$$

$$G_{2D-1D}^{(2)}(\Delta x, \Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{x0}nd} \sum_{i=1}^{M'} B_i K_0(C_i R_n). \quad (1.22)$$

En las ecuaciones anteriores $K_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de orden cero [105], $\Gamma_{n,i}^c = \sqrt{k_{xn}^2 + C_i^2}$ ($i = 1, \dots, M'$), C_i ($i = 1, \dots, M'$) son coeficientes reales positivos que se definirán más adelante y B_i ($i = 1, \dots, M'$) son coeficientes complejos que se calculan en términos de k y de los coeficientes C_i como se muestra más adelante. Nótese que $a_{n,2}$ (el término n -ésimo de la serie $G_{2D-1D}^{(2)}$) decae exponencialmente cuando $|n| \rightarrow \infty$ ya que $K_0(\cdot)$ disminuye exponencialmente conforme aumenta su argumento [105]. Además, se mostrará que una adecuada elección de los coeficientes B_i ($i = 1, \dots, M'$) hace posible alcanzar un rápido decaimiento de $a_{n,1}$ (el término n -ésimo de la serie $G_{2D-1D}^{(1)}$) para $|n| \rightarrow \infty$.

Cuando se toma $M' = 1$, $B_1 = 1$ y $C_1 = u$ en (1.20)-(1.22), estas ecuaciones se reducen a la fórmula de Kummer-Poisson publicada en [109, Ec. (13)] y [77, Ec. (20)]. Para este caso particular, $a_{n,1}$ muestra el siguiente decaimiento para $|n| \rightarrow \infty$ (ver [77, Ec. (20)]):

$$|a_{n,1}| \propto \begin{cases} \frac{1}{|n|^3}, & \text{si } |\Delta y| = 0 \\ \frac{e^{-(2\pi|n||\Delta y|)/d}}{|n|^2}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Se puede conseguir un decaimiento mucho más rápido para $a_{n,1}$ si se toma $M' > 1$ en la Ec. (1.21). Para poner esto de manifiesto, vamos a llevar a cabo el desarrollo asintótico de $e^{-\Gamma_n|\Delta y|}/\Gamma_n$ para $n \rightarrow \infty$:

$$\left. \frac{e^{-\Gamma_n|\Delta y|}}{\Gamma_n} \right|_{|n| \gg 1} = \left. \frac{e^{-\sqrt{k_{xn}^2 - k^2}|\Delta y|}}{\sqrt{k_{xn}^2 - k^2}} \right|_{|n| \gg 1} \simeq \frac{e^{-|k_{xn}||\Delta y|}}{|k_{xn}|} \left[\sum_{j=0}^{M'-1} \frac{A_j(k, |\Delta y|)}{|k_{xn}|^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k_{xn}|^{M'}}\right) \right], \quad (1.24)$$

donde se ha hecho uso de los desarrollos en serie de $[1 - (k^2/k_{xn}^2)]^{\pm 1/2}$ ($|k_{xn}| \gg |k|$) y de la función exponencial [105], y donde las funciones A_j ($j = 0, \dots, M' - 1$) se

pueden escribir en términos de las variables t y $|\Delta y|$ para $M' \leq 8$ como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
A_0(t, |\Delta y|) &= 1 \\
A_1(t, |\Delta y|) &= \frac{t^2 |\Delta y|}{2} \\
A_2(t, |\Delta y|) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4 |\Delta y|^2}{8} \\
A_3(t, |\Delta y|) &= \frac{3t^4 |\Delta y|}{8} + \frac{t^6 |\Delta y|^3}{48} \\
A_4(t, |\Delta y|) &= \frac{3t^4}{8} + \frac{t^6 |\Delta y|^2}{8} + \frac{t^8 |\Delta y|^4}{384} \\
A_5(t, |\Delta y|) &= \frac{5t^6 |\Delta y|}{16} + \frac{5t^8 |\Delta y|^3}{192} + \frac{t^{10} |\Delta y|^5}{3840} \\
A_6(t, |\Delta y|) &= \frac{15t^6}{48} + \frac{15t^8 |\Delta y|^2}{128} + \frac{t^{10} |\Delta y|^4}{256} + \frac{t^{12} |\Delta y|^6}{46080} \\
A_7(t, |\Delta y|) &= \frac{35t^8 |\Delta y|}{128} + \frac{21t^{10} |\Delta y|^3}{256} + \frac{7t^{12} |\Delta y|^5}{15360} + \frac{t^{14} |\Delta y|^7}{645120}.
\end{aligned}$$

Llevando a cabo un desarrollo asintótico análogo para $e^{-\Gamma_{n,i}^c |\Delta y|} / \Gamma_{n,i}^c$ cuando $|n| \gg 1$ ($i = 1, \dots, M'$), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{e^{-\Gamma_{n,i}^c |\Delta y|}}{\Gamma_{n,i}^c} \right|_{|n| \gg 1} &= \left. \frac{e^{-\sqrt{k_{xn}^2 + C_i^2} |\Delta y|}}{\sqrt{k_{xn}^2 + C_i^2}} \right|_{|n| \gg 1} \\
&\simeq \frac{e^{-|k_{xn}| |\Delta y|}}{|k_{xn}|} \left[\sum_{j=0}^{M'-1} \frac{A_j(-jC_i, |\Delta y|)}{|k_{xn}|^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k_{xn}|^{M'}}\right) \right]. \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las Ecs. (1.24) y (1.25), el término entre corchetes de la Ec. (1.21) puede escribirse para $|n| \rightarrow \infty$ como:

$$\left[\frac{e^{-\Gamma_n |\Delta y|}}{\Gamma_n} - \sum_{i=1}^{M'} B_i \frac{e^{-\Gamma_{n,i}^c |\Delta y|}}{\Gamma_{n,i}^c} \right] \Big|_{|n| \gg 1} \simeq \frac{e^{-|k_{xn}| |\Delta y|}}{|k_{xn}|} \left[\sum_{j=0}^{M'-1} \frac{V_j}{|k_{xn}|^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k_{xn}|^{M'}}\right) \right], \quad (1.26)$$

donde:

$$V_j = A_j(k, |\Delta y|) - \sum_{i=1}^{M'} B_i A_j(-jC_i, |\Delta y|) \quad (j = 0, \dots, M' - 1). \quad (1.27)$$

De acuerdo con las Ecs. (1.26) y (1.27), para que $a_{n,1}$ en la Ec. (1.21) decaiga lo más rápidamente posible cuando $|n| \rightarrow \infty$, simplemente hay que elegir los coeficientes B_i ($i = 1, \dots, M'$) de forma que V_j se anule ($j = 0, \dots, M' - 1$). O lo que es lo mismo, los coeficientes B_i deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A_j(k, |\Delta y|) = \sum_{i=1}^{M'} B_i A_j(-jC_i, |\Delta y|) \quad (j = 0, \dots, M' - 1). \quad (1.28)$$

Cuando los coeficientes B_i satisfacen el sistema de ecuaciones anterior, los términos de las series de las Ecs. (1.21) y (1.22) para $|n| \rightarrow \infty$ tienen el siguiente comportamiento:

$$|a_{n,1}| \propto \frac{e^{-(2\pi|n||\Delta y|)/d}}{|n|^{M'+1}} \quad ; \quad |a_{n,2}| \leq \left| \sum_{i=1}^{M'} \frac{B_i e^{-(C_i - |\text{Im}(k_{x0})|)|n|d}}{2\sqrt{2\pi C_i |n|d}} \right|, \quad (1.29)$$

donde se ha hecho uso del comportamiento asintótico de la función de Bessel modificada $K_0(\cdot)$ para argumentos grandes [105]. La Ec. (1.29) muestra que la convergencia de las series de las Ecs. (1.21) y (1.22) será tanto más rápida cuanto mayores sean los valores de los coeficientes M' y C_i ($i = 1, \dots, M'$). Sin embargo, esos coeficientes no pueden elegirse arbitrariamente grandes ya que una reducción en el número de términos de las series que tienen que ser evaluados para una determinada precisión no implica necesariamente una reducción del tiempo de CPU [74], y la reducción del tiempo de CPU es la clave en el cálculo eficiente de la función G_{2D-1D} .

Con respecto a la elección de M' , si comenzamos desde $M' = 1$ y vamos aumentando su valor, los tiempos de CPU requeridos para calcular las Ecs. (1.21) y (1.22) disminuyen. Sin embargo, para un cierto valor umbral de M' , los tiempos de CPU involucrados en la evaluación de las series alcanzan un mínimo y a partir de ese valor umbral de M' comienzan a crecer, lo cual es debido a que la evaluación de cada término de las series requiere un número cada vez mayor de operaciones y esto influye en el coste computacional global (véase [74, Fig. 1]). En la siguiente sección mostraremos que un valor de M' en el rango entre 5 y 7 es normalmente una elección óptima que minimiza el coste computacional.

La elección de los coeficientes C_i ($i = 1, \dots, M'$) también es crítica. Si estos coeficientes son demasiado grandes, la serie de la Ec. (1.22) converge muy rápidamente debido al rápido decaimiento exponencial de las funciones de Bessel modificadas. Sin embargo, la serie de la Ec. (1.21) converge lentamente debido al valor relativamente alto de n que es requerido para hacer que $e^{-\Gamma_n|\Delta y|}/\Gamma_n$ alcance su límite asintótico. Este comportamiento de las series de las Ecs. (1.22) y (1.21) se invierte cuando los coeficientes C_i son demasiado pequeños. Las simulaciones numéricas han mostrado que es posible llegar a un compromiso entre el número de términos que tienen que ser evaluados en cada una de las series cuando se eligen los siguientes valores óptimos de los coeficientes C_i :

$$C_i^{\text{opt}} = |\text{Im}(k_{x0})| + \frac{0.625M'}{d} [1 + 0.1(i - 1)] \quad (i = 1, \dots, M'). \quad (1.30)$$

Por desgracia, cuando la frecuencia de operación es alta (más concretamente cuando $d/\lambda \geq 1$) y los coeficientes C_i son elegidos como se sugiere en la Ec. (1.30), las series de las Ecs. (1.21) y (1.22) convergen a dos números elevados muy próximos de signos opuestos, lo cual puede acarrear una severa pérdida de precisión en el resultado final obtenido para la función $G_{2\text{D-1D}}$. Esta situación es muy similar a la observada cuando se elige el parámetro de separación óptimo al aplicar el método de Ewald [83, 106]. Como sucede con el método de Ewald, si se aumenta el valor de C_i por encima de C_i^{opt} , se evita que los valores de $G_{2\text{D-1D}}^{(1)}$ y $G_{2\text{D-1D}}^{(2)}$ sean dos números muy próximos entre sí de signos opuestos, y eso impide la pérdida de precisión en el cálculo de la función $G_{2\text{D-1D}}$. Por tanto, para frecuencias altas, o equivalentemente para periodos grandes ($d > \lambda$), los valores de los coeficientes C_i deben ser diferentes de sus valores óptimos. En concreto, en este trabajo se sugiere tomar:

$$C_i = \max \left\{ C_i^{\text{opt}}, |\text{Im}(k_{x0})| + \frac{0.625M'}{\lambda} [1 + 0.1(i - 1)] \right\} \quad (i = 1, \dots, M'). \quad (1.31)$$

1.3.2. Función de Green homogénea 2-D con periodicidad 2-D

En la Fig. 1.4 se muestra la propagación de una onda por un medio homogéneo en presencia de una agrupación periódica monodimensional de cilindros conductores paralelos. Si quisiéramos estudiar la propagación de la misma onda

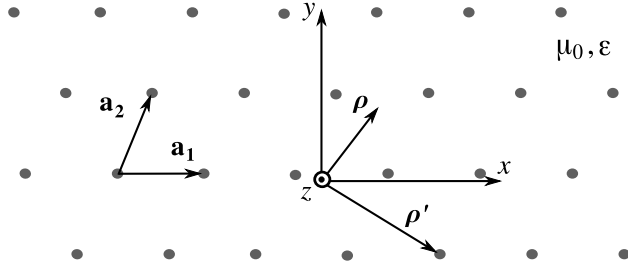


Figura 1.6: Agrupación espacial de fuentes lineales con periodicidad 2-D. $\rho' + m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2 = (x' + ma_{1x} + na_{2x})\hat{\mathbf{x}} + (y' + ma_{1y} + na_{2y})\hat{\mathbf{y}}$ es el vector bidimensional que apunta a las fuentes $(m, n = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ y $\rho = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ es el vector bidimensional del punto de observación.

por el mismo medio en presencia de una agrupación periódica bidimensional de cilindros conductores paralelos (cuyos ejes intersectan al plano $z = 0$ en una red periódica bidimensional de puntos), habría que resolver una ecuación integral similar a la de la Ec. (1.12) en la que interviniera una función de Green homogénea 2-D con periodicidad 2-D. Con vistas a plantear el cálculo de la función de Green homogénea 2-D con periodicidad 2-D, G_{2D-2D} , consideremos ahora una agrupación periódica bidimensional de fuentes lineales paralelas (corrientes o cargas similares a las de las Figs. 1.1 y 1.2) como la mostrada en la Fig. 1.6. Supondremos que los vectores primitivos de la red bidimensional periódica, \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 , no son necesariamente ortogonales (esto es, las fuentes lineales paralelas de la red periódica pueden estar orientadas arbitrariamente). Por analogía con la Ec. (1.14), la función de Green homogénea 2-D correspondiente a esta agrupación de fuentes (potencial vector o potencial escalar salvo una constante multiplicativa) vendrá dada por la siguiente expresión:

$$G_{2D-2D}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{4j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(kS_{mn}) e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \rho_{mn}}, \quad (1.32)$$

donde $\mathbf{k}_{w0} = \pm k \sin \theta_0'' (\cos \phi_0'' \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0'' \hat{\mathbf{y}})$ es la proyección sobre el plano $x-y$ del vector número de onda de una onda emitida por la agrupación (signo positivo) o de una onda incidente sobre la agrupación (signo negativo), θ_0'' y ϕ_0'' son las coordenadas esféricas angulares que indican la dirección de propagación de esas ondas (análogas a θ_0' y ϕ_0'), y S_{mn} está dado por:

$$S_{mn} = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}_{mn}| \quad (m, n = \dots, -1, 0, 1, \dots), \quad (1.33)$$

siendo $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} = \Delta x\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\hat{\mathbf{y}}$ y $\boldsymbol{\rho}_{mn} = m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$.

Por analogía con la serie de la Ec. (1.14), la serie de la Ec. (1.32) converge lentamente cuando las pérdidas son despreciables (de hecho, los términos de la Ec. (1.32) decaen como $|m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2|^{-1/2}$ cuando $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$ en el caso de que $\text{Im}(k) \approx 0$). Si se aplica a la Ec. (1.32) la versión bidimensional de la fórmula de Poisson (véase el Apéndice A), se obtiene una serie espectral de convergencia más rápida. Esta serie espectral viene dada por:

$$G_{2\text{D-2D}}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2}, \quad (1.34)$$

donde $A = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{z}}$ es el área de la celda unidad de la red bidimensional y:

$$\mathbf{k}_{mn} = \mathbf{k}_{w0} + \frac{2\pi}{A} [m(\mathbf{a}_2 \times \hat{\mathbf{z}}) + n(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}_1)]. \quad (1.35)$$

Los términos de la serie de la Ec. (1.34) decaen como $|m(\mathbf{a}_2 \times \hat{\mathbf{z}}) + n(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}_1)|^{-2}$ cuando $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$. Por tanto, aunque la convergencia de la Ec. (1.34) es más rápida que la de la Ec. (1.32) para el caso sin pérdidas, la convergencia de la Ec. (1.34) sigue siendo una convergencia lenta.

El método de Ewald también puede ser aplicado al cálculo de la función $G_{2\text{D-2D}}$. De hecho, si seguimos el enfoque adoptado en [83, Sec. IV], el método de Ewald lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} G_{2\text{D-2D}}(\Delta x, \Delta y) = & \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2} e^{-\frac{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2}{4(E'')^2}} \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \times \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{k}{2E''} \right)^{2q} \frac{1}{q!} E_{q+1}(S_{mn}^2 E''^2). \end{aligned} \quad (1.36)$$

De forma similar a lo que sucede con las dos series en n de la Ec. (1.17), las dos series de la Ec. (1.36) en los índices enteros m y n exhiben convergencia gaussiana. El parámetro de separación E'' de la Ec. (1.36) es en este caso el que controla de forma simultánea la convergencia de las dos series dobles en los índices m y n . Mediante un procedimiento similar al seguido en [83, Sec. V] y en [77, Apéndice I], es posible encontrar un valor de E'' que no sólo minimice el número

total de términos requeridos para conseguir la convergencia en el cálculo de las dos series en m y n de la Ec. (1.36) sino que también evite errores de cancelación debidos a la adición de números elevados muy próximos con signos opuestos. Este valor de E'' viene dado por:

$$E'' = \max \left[\sqrt{\frac{\pi |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}}, \frac{|\sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_{00}|^2}|}{4} \right]. \quad (1.37)$$

Como se comentó en la sección 1.3.1, la serie en el índice q de la Ec. (1.36) no tiene convergencia gaussiana, lo cual da lugar a que el método de Ewald sea menos eficiente en el cálculo de funciones de Green homogéneas 2-D con periodicidad 2-D que en el cálculo de funciones de Green 3-D con periodicidades 2-D y 3-D. Como consecuencia de este hecho, merece la pena probar otros métodos de aceleración de series para el cálculo de la función G_{2D-2D} . En particular, en esta tesis se propone aplicar al cálculo de G_{2D-2D} la misma estrategia propuesta en la sección 1.3.1 para calcular G_{2D-1D} . Con tal fin, en primer lugar se aplica la transformación de Kummer a la serie espectral de la Ec. (1.34) y posteriormente se aplica la fórmula de Poisson a la parte asintótica remanente (véase [76, Ec. (4)]). Además, se retienen varios términos en el desarrollo asintótico de la Ec. (1.34) para $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$ con la idea de mejorar la eficiencia del método espectral de Kummer-Poisson. Como resultado de esas manipulaciones, se obtiene que la función G_{2D-2D} puede ser expresada como la siguiente suma de dos series dobles rápidamente convergentes:

$$G_{2D-2D} = G_{2D-2D}^{(1)} + G_{2D-2D}^{(2)}, \quad (1.38)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{2D-2D}^{(1)}(\Delta x, \Delta y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{mn,1} \\ &= \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \left[\frac{1}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2} - \sum_{i=1}^{M''} \frac{D_i}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F_i^2} \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$G_{2D-2D}^{(2)}(\Delta x, \Delta y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{mn,2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \sum_{i=1}^{M''} D_i K_0(F_i S_{mn}). \quad (1.40)$$

En las Ecs. (1.39) y (1.40) F_i ($i = 1, \dots, M''$) son coeficientes reales positivos que serán definidos posteriormente (estos coeficientes juegan el papel de los coeficientes C_i en las Ecs. (1.21) y (1.22)), y D_i son coeficientes complejos que tienen que ser evaluados en términos de k y de los coeficientes F_i como se muestra más adelante (los coeficientes D_i juegan el papel de los coeficientes B_i en las Ecs. (1.21) y (1.22)). Como sucede con $a_{n,2}$ y $a_{n,1}$, $b_{mn,2}$ decae exponencialmente para $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$, y una adecuada elección de los coeficientes D_i ($i = 1, \dots, M''$) hace posible alcanzar un decaimiento rápido de $b_{mn,1}$ para $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$. Para obtener el valor de los coeficientes D_i que optimizan la convergencia de la Ec. (1.39), es necesario reescribir el término entre corchetes de la Ec. (1.39) del siguiente modo:

$$\left[\frac{1}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2} - \sum_{i=1}^{M''} \frac{D_i}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F_i^2} \right] = \frac{\sum_{j=0}^{M''} \left(\sum_{i=1}^{M''} D_i W_{ji} + W_{j0} \right) |\mathbf{k}_{mn}|^{2j}}{(|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k^2) \prod_{i=1}^{M''} (|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F_i^2)} = \frac{P_{M''}(|\mathbf{k}_{mn}|^2)}{Q_{M''+1}(|\mathbf{k}_{mn}|^2)}, \quad (1.41)$$

donde $P_{M''}(|\mathbf{k}_{mn}|^2)$ y $Q_{M''+1}(|\mathbf{k}_{mn}|^2)$ son polinomios en la variable $|\mathbf{k}_{mn}|^2$ de grado M'' y $M'' + 1$ respectivamente. De acuerdo con la Ec. (1.41), si deseamos que $b_{mn,1}$ en la Ec. (1.39) decaiga con la máxima rapidez posible para $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$, hay que elegir los coeficientes D_i ($i = 1, \dots, M''$) de forma que los coeficientes del polinomio $P_{M''}(|\mathbf{k}_{mn}|^2)$ se cancelen y el grado del polinomio se reduzca tanto como sea posible. La Ec. (1.41) indica que esto se consigue cuando los coeficientes D_i ($i = 1, \dots, M''$) son forzados a satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^{M''} D_i W_{ji} = -W_{j0} \quad (j = 1, \dots, M''), \quad (1.42)$$

donde los coeficientes W_{ji} pueden obtenerse en términos de k^2 y F_i^2 . La solución del sistema de ecuaciones lineales (1.42) puede ser obtenida en forma cerrada, y

viene dada por:

$$D_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{M''} \frac{k^2 + F_j^2}{F_j^2 - F_i^2} \quad (i = 1, \dots, M''). \quad (1.43)$$

Cuando los coeficientes D_i se eligen como se muestra en la Ec. (1.43), para valores elevados de $|m|$ y $|n|$ los términos generales de las series de las Ecs. (1.39) y (1.40) muestran un decaimiento del tipo:

$$|b_{mn,1}| \propto \frac{1}{|\mathbf{k}_{mn}|^{2M''+2}}; \quad |b_{mn,2}| \leq \left| \sum_{i=1}^{M''} \frac{D_i e^{-(F_i - |\text{Im}(\mathbf{k}_{w0}))|\rho_{mn}|}}{2\sqrt{2\pi F_i} |\rho_{mn}|} \right|, \quad (1.44)$$

donde se ha usado nuevamente el comportamiento asintótico de la función de Bessel modificada K_0 para valores grandes del argumento [105].

En principio, la Ec. (1.44) parece indicar que cuanto mayores son los valores de M'' y F_i , mejor es la convergencia de las series de las Ecs. (1.39) y (1.40). Sin embargo, tal y como se discutió en la sección anterior, los valores de M'' y F_i tienen que ser optimizados de forma que se minimice el tiempo de CPU involucrado en la evaluación de G_{2D-2D} para una determinada precisión. En la sección de resultados (sección 1.4.2) se mostrará que el valor de M'' que minimiza el tiempo de CPU empleado en el cálculo de la función G_{2D-2D} está comprendido entre $M'' = 5$ y $M'' = 7$, y depende de la precisión exigida. Con respecto a los coeficientes F_i , su elección debe asegurar un buen compromiso entre la precisión exigida y el mínimo número de términos que tienen que ser evaluados en las series (1.39) y (1.40) para calcular las funciones $G_{2D-2D}^{(1)}$ y $G_{2D-2D}^{(2)}$. Además, los coeficientes F_i deben elegirse de forma que eviten que las funciones $G_{2D-2D}^{(1)}$ y $G_{2D-2D}^{(2)}$ sean dos números elevados muy próximos entre sí de signos opuestos, dado que esto lleva a errores de cancelación en el cálculo de la función G_{2D-2D} mediante la Ec. (1.38). Todas estas restricciones se satisfacen aproximadamente cuando los coeficientes F_i son elegidos del siguiente modo (veáanse también las Ecs. (1.30) y (1.31)):

$$F_i = |\text{Im}(\mathbf{k}_{w0})| + 1.5M'' \max\left(\frac{1}{|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|}, \frac{1}{\lambda}\right) [1 + 0.1(i - 1)] \quad (i = 1, \dots, M''). \quad (1.45)$$

1.4. Resultados Numéricos

En esta sección se comparará el ritmo de convergencia de las series de las Ecs. (1.21) y (1.22) (Ecs. (1.39) y (1.40)) con el de las series de las Ecs. (1.14) y (1.16) (Ecs. (1.32) y (1.34)). Todos los estudios se realizarán para el caso en que el medio que alberga a las fuentes lineales de la Fig. 1.5 (Fig. 1.6) es un medio sin pérdidas, dado que este caso constituye el peor escenario posible para la convergencia de la serie de la Ec. (1.14) (Ec. (1.32)). Además, en esta sección se compararán los tiempos de CPU empleados en el cálculo de la función G_{2D-1D} (G_{2D-2D}) mediante la Ec. (1.20) (Ec. (1.38)) con los requeridos por el método de Ewald mediante la Ec. (1.17) (Ec. (1.36)).

1.4.1. Problemas con periodicidad 1-D

Con objeto de estudiar el ritmo de convergencia de las series de las Ecs. (1.14), (1.16), (1.21) y (1.22), se va a definir la siguiente función dependiente del índice entero n :

$$f_{1DP}(n) = \log \left| \frac{a_n + a_{-n}}{2a_0} \right|, \quad (1.46)$$

donde a_n corresponde al término n -ésimo de cada una de las series mencionadas.

En la Fig. 1.7 se representa $f_{1DP}(n)$ frente a n para la serie (1.21), considerando diferentes valores de M' . Se observa que todas las curvas dibujadas tienden asintóticamente a líneas rectas de pendiente negativa $-(M' + 1)$, lo cual está en consonancia con el valor asintótico obtenido para $a_{n,1}$ en la Ec. (1.29) cuando $\Delta y = 0$ (téngase en cuenta que la representación mostrada es logarítmica).

La Fig. 1.7 muestra que para $M' = 7$, basta con sumar un pequeño número de términos en la serie de la Ec. (1.21) para calcular $G_{2D-1D}^{(1)}$ con una alta precisión (de hecho, basta con tomar los términos $|n| \leq 7$ para que la función $G_{2D-1D}^{(1)}$ se calcule con una precisión de ocho cifras significativas). Sin embargo, cuando se usa el método espectral de Kummer-Poisson convencional [77, 109] (que equivale a tomar $M' = 1$ en las Ecs. (1.20) a (1.22)), se necesita sumar un elevado número de términos para obtener $G_{2D-1D}^{(1)}$ con una alta precisión (concretamente, mientras que basta con tomar los términos $|n| \leq 9$ para obtener una precisión de cuatro cifras significativas, se necesita llegar hasta los términos $|n| \leq 185$ para obtener

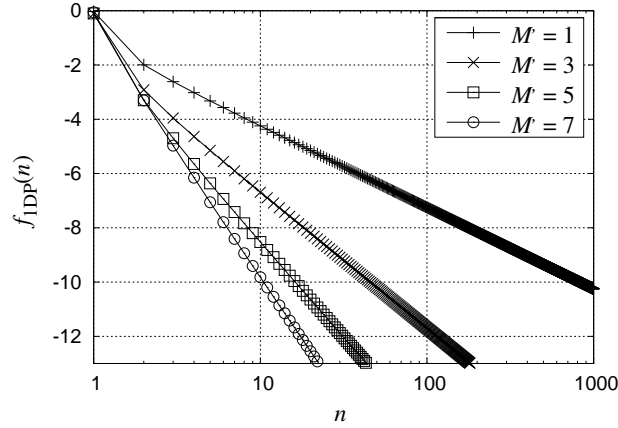


Figura 1.7: Representaciones de $f_{IDP}(n)$ frente a n para la serie de la Ec. (1.21). Se muestran resultados para varios valores de M' . $d = 0.6\lambda$, $\Delta x = 0.5d$, $\Delta y = 0$, $\theta'_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi'_0 = 0$ y $\tan \delta = 0$.

ocho cifras significativas de precisión). El estudio llevado a cabo en la Fig. 1.7 no se ha repetido para la serie (1.22) debido a que la convergencia de esta serie es básicamente independiente del valor de M' y está controlada principalmente por el valor más pequeño de C_i ($i = 1, \dots, M'$).

En las Figs. 1.8(a)-(c) se representa $f_{IDP}(n)$ para las series de las Ecs. (1.14), (1.16), (1.21) y (1.22), considerando tres valores diferentes de Δy . Mientras que la convergencia de las Ecs. (1.14) y (1.22) es básicamente independiente de Δy , la convergencia de las Ecs. (1.16) y (1.21) se hace más rápida cuando aumenta Δy como consecuencia del factor exponencial $e^{-(2\pi|n||\Delta y|)/d}/|n|$ que aparece en el término n -ésimo de las Ecs. (1.16) y (1.21) para $|n| \rightarrow \infty$ (véanse las Ecs. (1.23) y (1.29)).

Nótese que la convergencia de la Ec. (1.14) es extremadamente lenta para todos los valores de Δy cuando se desprecian las pérdidas del medio que contiene a las fuentes. La convergencia de la Ec. (1.16) es muy lenta cuando $\Delta y = 0$, pero mejora considerablemente cuando $\Delta y \neq 0$ debido al factor exponencial al que antes se ha hecho referencia. Frente a la lenta convergencia de la Ec. (1.14) y a la convergencia variable de la Ec. (1.16), la convergencia de las Ecs. (1.21) y (1.22) es siempre muy rápida (en los casos estudiados en las Figs. 1.8(a)-(c), los términos

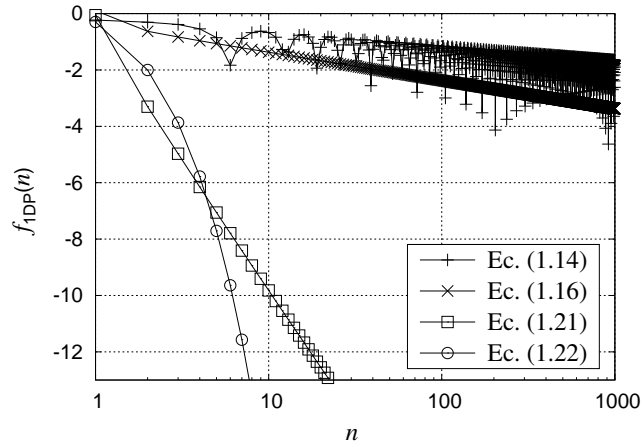
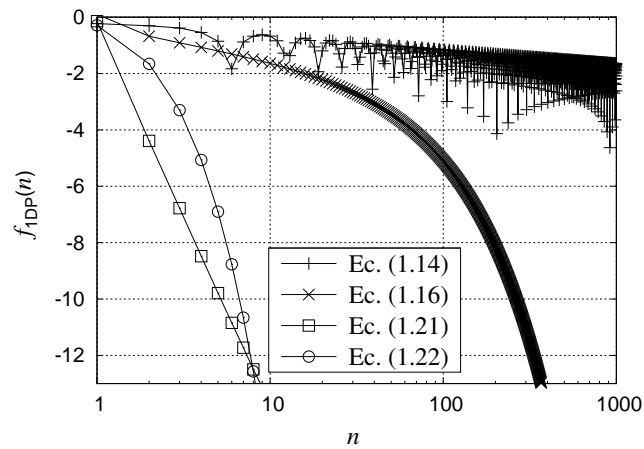
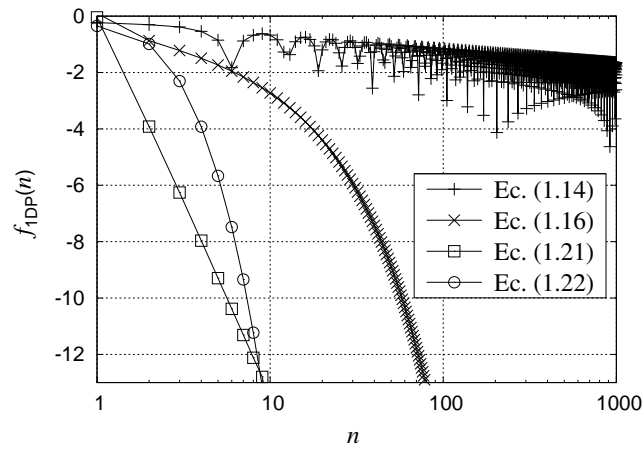
(a) $\Delta y = 0$ (b) $\Delta y = 0.01d$ (c) $\Delta y = 0.05d$

Figura 1.8: Representaciones de $f_{IDP}(n)$ frente a n para las series de las Ecs. (1.14), (1.16), (1.21) y (1.22). Los resultados se presentan para varios valores de Δy . $d = 0.6\lambda$, $\Delta x = 0.5d$, $\theta'_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi'_0 = 0$, $\tan \delta = 0$ y $M' = 7$.

necesarios para evaluar las dos series con una precisión de ocho cifras significativas se encuentran en el rango entre $|n| \leq 4$ y $|n| \leq 7$). Conforme Δy crece por encima de los valores estudiados en las Figs. 1.8(a)-(c), el ritmo de convergencia de la Ec. (1.16) se vuelve comparable a los de las Ecs. (1.21) y (1.22). De hecho, las simulaciones numéricas han mostrado que cuando $\Delta y \gtrsim 0.1d$, la Ec. (1.16) es más eficiente que las Ecs. (1.20)-(1.22) para la evaluación de la función G_{2D-1D} , lo cual es debido a que el número de operaciones llevadas a cabo en la Ec. (1.16) es considerablemente menor que el de las Ecs. (1.21) y (1.22) cuando las tres series tienen un ritmo de convergencia similar [74]. Se han realizado simulaciones numéricas para el caso en que el medio soporte de las fuentes tiene pérdidas ($\tan \delta \neq 0$), y esas simulaciones indican que mientras que la convergencia de la Ec. (1.14) mejora en el caso de un medio con pérdidas, la convergencia de las Ecs. (1.16), (1.21) y (1.22) no difiere sustancialmente de la mostrada en las Figs. 1.8(a)-(c).

Las simulaciones numéricas muestran que aunque la convergencia de las series de la Ec. (1.17) en el índice n es generalmente más rápida que la convergencia de las series de las Ecs. (1.21) y (1.22) (véase [83, Figs. 3-5]), la convergencia de la serie en el índice q es generalmente más lenta. Por tanto, con objeto de comparar la eficiencia relativa de las Ecs. (1.17) y (1.20) en el cálculo de la función G_{2D-1D} , es necesario comparar los tiempos de CPU requeridos por ambas expresiones para obtener la función G_{2D-1D} con una determinada precisión. Esta comparación se lleva a cabo en la Tabla 1.1, donde se muestra el tiempo de CPU requerido por las Ecs. (1.16), (1.17) y (1.20) para determinar la función G_{2D-1D} con una precisión de cuatro (Tabla 1.1(a)) y ocho cifras significativas (Tabla 1.1(b)). El tiempo de CPU empleado por la serie espectral (1.16) para el caso $\Delta y = 0$ no se ha incluido porque es demasiado grande y no aporta ninguna información.

De acuerdo con la Tabla 1.1, mientras que el tiempo de CPU requerido por el método de Ewald es básicamente independiente de Δy , el tiempo de CPU requerido por las Ecs. (1.16) y (1.20) normalmente decrece conforme aumenta Δy . Este resultado es lógico si tenemos en cuenta que las Figs. 1.8(a)-(c) ya han mostrado que la convergencia de las series (1.16) y (1.21) se hace más rápida conforme el valor de Δy aumenta. La Tabla 1.1 también muestra que tanto la Ec. (1.17) como

Tabla 1.1: Tiempos de CPU requeridos en la evaluación de la función G_{2D-1D} mediante las Ecs. (1.16), (1.17) y (1.20). La función G_{2D-1D} es calculada con una precisión de 4 y 8 cifras significativas. Todos los tiempos mostrados han sido normalizados al mínimo valor obtenido en cada tabla. $\Delta x = 0.5d$, $\theta'_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi'_0 = 0$ y $\tan \delta = 0$.

d	$\Delta y = 0$		$\Delta y = 0.01d$		$\Delta y = 0.05d$	
	0.6λ	2λ	0.6λ	2λ	0.6λ	2λ
Fórmula Poisson: Ec. (1.16)	-	-	10.43	16.48	2.83	4.20
Método Ewald: Ec. (1.17)	1.36	3.79	1.31	3.73	1.35	3.71
Ec. (1.20) ($M' = 1$)	3.88	15.76	3.69	11.17	2.91	6.04
Ec. (1.20) ($M' = 3$)	1.71	3.92	1.39	2.37	1.36	2.29
Ec. (1.20) ($M' = 5$)	1.37	3.20	1.02	2.03	1.01	1.99
Ec. (1.20) ($M' = 7$)	1.35	3.24	1.01	2.30	1.00	2.08

(a) Cuatro cifras significativas de precisión

d	$\Delta y = 0$		$\Delta y = 0.01d$		$\Delta y = 0.05d$	
	0.6λ	2λ	0.6λ	2λ	0.6λ	2λ
Fórmula Poisson: Ec. (1.16)	-	-	9.55	11.58	2.65	2.98
Método Ewald: Ec. (1.17)	1.63	3.10	1.58	3.24	1.59	3.11
Ec. (1.20) ($M' = 1$)	8.03	24.10	6.18	10.26	3.13	4.13
Ec. (1.20) ($M' = 3$)	2.47	4.70	1.34	2.17	1.42	2.04
Ec. (1.20) ($M' = 5$)	1.43	2.70	1.00	1.82	1.04	1.38
Ec. (1.20) ($M' = 7$)	1.37	2.57	1.07	1.78	1.03	1.41

(b) Ocho cifras significativas de precisión

la Ec. (1.20) requieren tiempos de CPU cada vez mayores conforme d/λ aumenta. Con objeto de explicar esta conducta, es necesario recordar que para el caso $d = 0.6\lambda$ se han tomado los valores óptimos de E' y C_i ($i = 1, \dots, M'$) en las Ecs. (1.17) y (1.20) (esto es, los valores mostrados en [83, Ec.(31)] y en la Ec. (1.30)), pero para el caso $d = 2\lambda$ los valores empleados para E' y C_i son diferentes a los óptimos con objeto de evitar errores de cancelación debidos a la suma de dos números elevados aproximadamente iguales y de signos opuestos [83, 106]. Además, en las tablas se observa que los tiempos de CPU requeridos por el método

de Kummer-Poisson convencional [77, 109] (el que resulta de tomar $M' = 1$ en las Ecs. (1.20) a (1.22)) son normalmente varias veces mayores que los que requiere el método de Ewald. Sin embargo, los tiempos de CPU requeridos por el método de Kummer-Poisson descrito en la sección 1.3.1 son comparables a los del método de Ewald cuando $M' = 3$, y son típicamente entre 1.2 y 2 veces más bajos que los del método de Ewald para $5 \leq M' \leq 7$ (excepto para el caso $d = 0.6\lambda$, $\Delta y = 0$ en la Tabla 1.1(a)). En la Tabla 1.1 no aparecen resultados para $M' \geq 9$ porque los tiempos de CPU obtenidos en ese caso son siempre mayores que los obtenidos para $M' = 7$.

1.4.2. Problemas con periodicidad 2-D

Con objeto de estudiar el ritmo de convergencia de las series de las Ecs. (1.32), (1.34), (1.39) y (1.40), se introduce la siguiente función dependiente del índice entero n :

$$f_{2DP}(n) = \log \left| \frac{b_{nn} + b_{n-n} + b_{-nn} + b_{-n-n}}{4b_{00}} \right|, \quad (1.47)$$

donde b_{mn} representa el término (m, n) -ésimo de cada una de las series mencionadas (nótese que se ha elegido $|m| = |n|$ en la definición de $f_{2DP}(n)$).

En la Fig. 1.9 se representa $f_{2DP}(n)$ frente a n para la serie (1.39), considerando tanto el caso de una red periódica ortogonal (Fig. 1.9(a)) como el de una red no ortogonal (Fig. 1.9(b)). Asimismo, en la figura se presentan resultados para diferentes valores de M'' . Se observa que las envolventes de todas las curvas dibujadas tienden a líneas rectas de pendiente negativa $-(2M'' + 2)$, lo cual está en consonancia con el valor asintótico obtenido para $b_{mn,1}$ en la Ec. (1.44) (téngase en cuenta que la representación es logarítmica).

La Fig. 1.9 muestra que el número de términos necesarios para asegurar la convergencia en el cálculo de la función $G_{2D-2D}^{(1)}$ es sustancialmente mayor para $M'' = 1$ que para $M'' = 6$ cuando se exige una precisión alta (de hecho, para una precisión de ocho cifras significativas, se necesitan al menos los términos $|m| \leq 30$ y $|n| \leq 30$ en el caso en que $M'' = 1$, siendo suficiente con $|m| \leq 3$ y $|n| \leq 3$ cuando $M'' = 6$). El estudio llevado a cabo en la Fig. 1.9 no se repite para la serie de la Ec. (1.40) debido a que el ritmo de convergencia de esta serie está

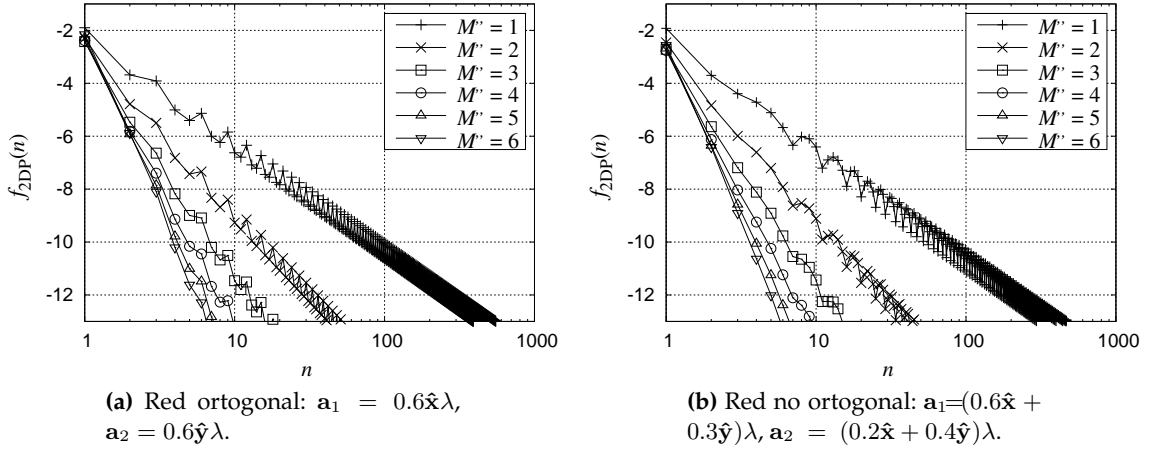


Figura 1.9: Representaciones de $f_{2DP}(n)$ frente a n para la serie (1.39). Se presentan resultados para varios valores de M'' y para dos redes periódicas diferentes. $\Delta x = \Delta y = 0.4\lambda$, $\theta_0'' = \phi_0'' = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

controlado básicamente por el valor más bajo de F_i ($i = 1, \dots, M''$).

La Fig. 1.10 muestra los valores de $f_{2DP}(n)$ para las series de las Ecs. (1.32), (1.34), (1.39) y (1.40), tanto en el caso de una red periódica ortogonal (Fig. 1.10(a)) como en el caso de una red no ortogonal (Fig. 1.10(b)). Como ocurre con la serie de la Ec. (1.14), la convergencia de la serie de la Ec. (1.32) es también extremadamente lenta cuando el medio que alberga las fuentes no tiene pérdidas. La convergencia de la serie de la Ec. (1.34) es mejor que la de la serie de la Ec. (1.32), pero sigue siendo muy lenta. Sin embargo, la convergencia de las series de las Ecs. (1.39) y (1.40) es mucho más rápida (de hecho, basta sumar los términos $|m| \leq 3$ y $|n| \leq 3$ para evaluar la serie (1.39) con una precisión de ocho cifras significativas, y los términos $|m| \leq 7$ y $|n| \leq 7$ para obtener la serie (1.40) con esa misma precisión). Se ha comprobado que cuando se incluyen pérdidas en el medio soporte de las fuentes ($\tan \delta \neq 0$), la convergencia de la Ec. (1.32) mejora pero la convergencia de las Ecs. (1.34), (1.39) y (1.40) no difiere apreciablemente de la que se muestra en la Fig. 1.10.

Finalmente, en la Tabla 1.2 se presentan los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (1.36) y (1.38) para obtener la función G_{2D-2D} con una precisión de cuatro (Tabla 1.2(a)) y ocho cifras significativas (Tabla 1.2(b)). Cuando se exige una

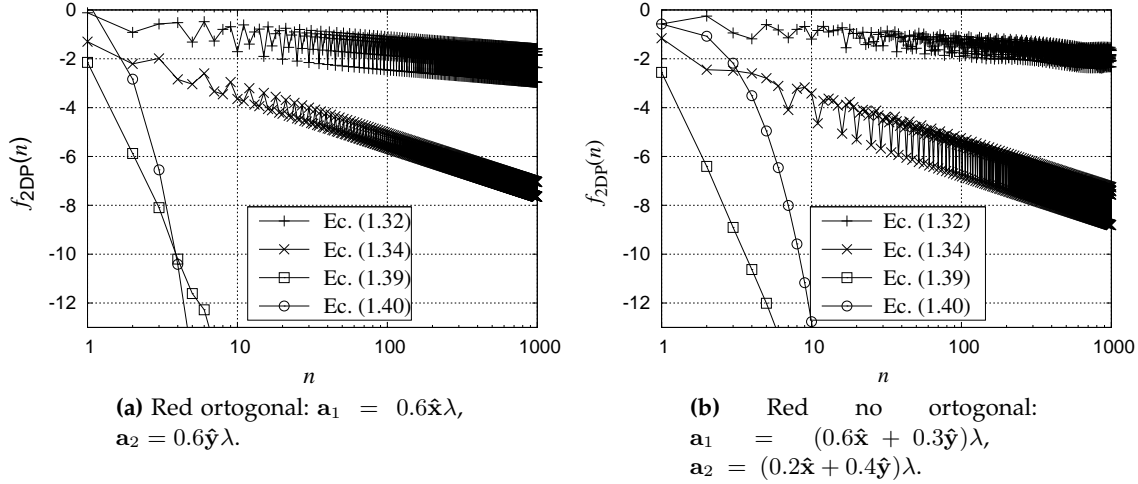


Figura 1.10: Representaciones de $f_{2DP}(n)$ frente a n para las series de las Ecs. (1.32), (1.34), (1.39) y (1.40). Se presentan resultados para dos redes diferentes. $\Delta x = \Delta y = 0.4\lambda$, $\theta_0'' = \phi_0'' = \frac{\pi}{4}$, $\tan \delta = 0$ y $M'' = 6$.

precisión de cuatro cifras significativas en el valor de la función G_{2D-2D} , el tiempo de CPU requerido por el método de Kummer-Poisson llega a ser comparable con el requerido por el método de Ewald cuando $M'' = 1$, y cuando se exigen ocho cifras significativas de precisión, los dos métodos se vuelven comparables en tiempo de computación cuando $M'' = 2$. La implementación óptima del método de Kummer-Poisson descrito en la sección 1.3.2 parece obtenerse para $M'' \approx 5$ en la Tabla 1.2(a) y para $M'' \approx 7$ en la Tabla 1.2(b).

En esas condiciones óptimas, los tiempos de CPU requeridos por el método de Kummer-Poisson son típicamente entre 1.5 y 3 veces menores que los requeridos por el método de Ewald. Nótese que la razón entre los tiempos de CPU del método de Kummer-Poisson y del método de Ewald es menos favorable en el cálculo de la función G_{2D-1D} que en el cálculo de la función G_{2D-2D} (compárese la Tabla 1.1 con la Tabla 1.2). Este comportamiento se atribuye al hecho de que mientras que el sistema de ecuaciones (1.28) tiene que ser resuelto numéricamente, la solución del sistema de ecuaciones (1.42) se ha podido obtener en forma cerrada en la Ec. (1.43).

Tabla 1.2: Tiempos de CPU para el cálculo de la función G_{2D-2D} mediante las Ecs. (1.36) y (1.38). Todos los tiempos mostrados han sido normalizados al mínimo valor obtenido en cada tabla. $\Delta x = \Delta y = 0.4\lambda$, $\theta'_0 = \phi'_0 = \frac{\pi}{4}$, y $\tan \delta = 0$. Red ortogonal: $\mathbf{a}_1 = 0.6\hat{\mathbf{x}}n'\lambda$, $\mathbf{a}_2 = 0.6\hat{\mathbf{y}}n'\lambda$. Red no ortogonal: $\mathbf{a}_1 = (0.6\hat{\mathbf{x}}+0.3\hat{\mathbf{y}})n'\lambda$, $\mathbf{a}_2 = (0.2\hat{\mathbf{x}}+0.4\hat{\mathbf{y}})n'\lambda$.

	ORTOGONAL		NO ORTOGONAL	
	$n' = 1$	$n' = 4$	$n' = 1$	$n' = 4$
Mét. Ewald: Ec. (1.36)	2.31	5.33	3.56	5.78
Ec. (1.38) ($M'' = 1$)	2.55	2.84	3.69	3.25
Ec. (1.38) ($M'' = 2$)	1.95	2.36	3.04	2.02
Ec. (1.38) ($M'' = 3$)	1.91	1.85	2.51	1.53
Ec. (1.38) ($M'' = 4$)	1.80	1.75	2.15	1.71
Ec. (1.38) ($M'' = 5$)	1.67	1.84	2.35	1.75
Ec. (1.38) ($M'' = 6$)	1.04	1.85	2.53	1.80
Ec. (1.38) ($M'' = 7$)	1.00	2.11	2.65	1.87
Ec. (1.38) ($M'' = 8$)	1.07	2.20	2.69	1.98

(a) Cuatro cifras significativas de precisión

	ORTOGONAL		NO ORTOGONAL	
	$n' = 1$	$n' = 4$	$n' = 1$	$n' = 4$
Mét. Ewald: Ec. (1.36)	2.74	3.64	3.10	4.78
Ec. (1.38) ($M'' = 1$)	5.49	18.50	8.88	26.92
Ec. (1.38) ($M'' = 2$)	1.73	2.37	3.90	4.57
Ec. (1.38) ($M'' = 3$)	1.39	1.76	2.86	1.98
Ec. (1.38) ($M'' = 4$)	1.19	1.61	2.02	1.92
Ec. (1.38) ($M'' = 5$)	1.16	1.53	1.82	1.61
Ec. (1.38) ($M'' = 6$)	1.15	1.44	1.63	1.58
Ec. (1.38) ($M'' = 7$)	1.00	1.60	1.41	1.63
Ec. (1.38) ($M'' = 8$)	1.05	1.67	1.45	1.85

(b) Ocho cifras significativas de precisión

1.5. Conclusiones

En este Capítulo se ha presentado un algoritmo para acelerar el cálculo de las series involucradas en la obtención de las funciones de Green homogéneas bidimensionales con periodicidad en una y en dos dimensiones. El algoritmo está basado en una novedosa implementación del método espectral de Kummer-Poisson [76]. En esta implementación, el número de términos asintóticos retenidos en la transformación de Kummer puede ser controlado de forma que cada una de las series con convergencia originalmente lenta se descompone en dos series rápidamente convergentes, una con convergencia exponencial y la otra con convergencia algebraica de orden arbitrariamente alto. Los tiempos de CPU requeridos por el nuevo algoritmo han sido comparados con los requeridos por el método de Ewald cuando se calcula la función de Green bidimensional con precisiones de cuatro y ocho cifras significativas. Cuando el número de términos retenidos en la aplicación de la transformación de Kummer es suficientemente elevado, el nuevo algoritmo es típicamente entre 1.2 y 2 veces más rápido que el método de Ewald en el cálculo de la función de Green 2-D con periodicidad 1-D, y entre 1.5 y 3 veces más rápido que el método de Ewald en el cálculo de la función de Green 2-D con periodicidad 2-D. Además, es preciso señalar que mientras otros sofisticados algoritmos basados en la transformación de Kummer [73, 74] son fuertemente dependientes de la expresión matemática de los términos de las series que tienen que ser calculadas, el algoritmo presentado en este Capítulo es muy general, funcionando igual de bien tanto para problemas con periodicidad 1-D como para problemas con periodicidad 2-D (aún cuando involucren a redes periódicas con ejes no ortogonales). De hecho, aunque el método presentado ha sido usado en este Capítulo para la suma de ondas cilíndricas, también puede usarse para la suma de ondas esféricas.

Capítulo 2

Evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas 3-D mediante el método espacial de Kummer

2.1. Introducción

Como se comentó en el Capítulo anterior, cuando se aplica el Método de los Momentos (MDM) al análisis electromagnético de estructuras periódicas, es preciso evaluar funciones de Green periódicas. En este Capítulo nos vamos a centrar en el cálculo de la función de Green 3-D con periodicidad 1-D (G_{3D-1D}) de un medio homogéneo. Esta función de Green periódica se ha utilizado, por ejemplo, para analizar la dispersión o *scattering* por superficies selectivas en frecuencia que son finitas en una dirección e infinitas en la dirección ortogonal [110, 111]. Si bien los modelos de superficies selectivas en frecuencia basados en agrupaciones planas con doble periodicidad e infinitas en las dos direcciones del plano son más fáciles de analizar (mediante el teorema de Floquet) que los modelos basados en agrupaciones con periodicidad simple que son infinitas en una dirección y finitas en la dirección ortogonal, estos últimos modelos tienen la ventaja de permitir el estudio de los efectos de borde que aparecen en las superficies selectivas en

frecuencia reales debido a su tamaño finito [110].

Al igual que ocurre con las funciones de Green periódicas homogéneas 2-D que hemos estudiado en el Capítulo anterior, la función de Green periódica homogénea G_{3D-1D} puede escribirse como una serie infinita espacial, o como una serie infinita espectral si se aplica la fórmula de Poisson [77]. Tanto la serie espacial como la espectral de G_{3D-1D} pueden converger muy lentamente bajo ciertas circunstancias: pérdidas despreciables en el caso de la serie espacial, punto de observación muy próximo a la recta que contiene las fuentes puntuales en el caso de la serie espectral, etc. Como ya se comentó en la introducción de esta tesis, se ha descrito en la literatura una amplia variedad de métodos analíticos y numéricos para acelerar la convergencia de este tipo de series. Entre estos métodos destacan el método espectral de Kummer-Poisson [75, 77, 89, 112, 113] y el método de Ewald [77, 114].

En relación con el método espectral de Kummer-Poisson, en el Capítulo anterior se demostró que su eficiencia mejora considerablemente cuando se retienen varios términos asintóticos en la transformación de Kummer. Esta idea ha sido aplicada con éxito al cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas 2-D con periodicidades 1-D y 2-D [74, 115] (véase el Capítulo anterior), y al cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas 3-D con periodicidad 2-D [116]. Sin embargo, en este Capítulo se pondrá de manifiesto que las prestaciones del método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior no son especialmente buenas cuando dicho método se aplica a la evaluación de la función de Green periódica homogénea G_{3D-1D} . Esto es debido a que la aplicación del método requiere evaluar un número elevado de funciones de Bessel modificadas de argumento complejo, y el cálculo numérico de estas funciones lleva aparejado un elevado gasto computacional.

Por otro lado, como ya se comentó en el Capítulo anterior, el método de Ewald es un método analítico muy eficiente para la evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas. Cuando se aplica este método, esas funciones de Green se expresan como una suma de dos series con convergencia gaussiana muy rápida [77, 82, 84, 104, 114]. En relación con el cálculo de G_{3D-1D} , el método de Ewald tiene la desventaja de que el término general de una de las dos series infinitas

con convergencia gaussiana contiene a su vez series infinitas que hacen intervenir a las funciones exponencial integral (véase la sección 1.3.1). Otra desventaja del método de Ewald cuando se aplica al cálculo de G_{3D-1D} es que su eficiencia se deteriora a partir de cierta frecuencia umbral, ya que en esas circunstancias no es posible elegir de forma óptima el parámetro de separación que controla la convergencia gaussiana de las dos series implicadas [77, 84, 106] (véase de nuevo la sección 1.3.1).

En este Capítulo se va a presentar un método alternativo para el cálculo eficiente de la función G_{3D-1D} . Al igual que en el Capítulo anterior, se va a aplicar una transformación de Kummer pero, a diferencia de lo que se hizo en el Capítulo anterior donde se aplicó la transformación de Kummer a las series espectrales, en este Capítulo se aplicará la transformación de Kummer directamente a la serie espacial. Al llevar a cabo la transformación de Kummer espacial, no se retendrá un único término en el desarrollo asintótico del término general de la serie [75, 77], sino que se retendrán varios términos, lo cual llevará a un aumento considerable de la eficiencia computacional del método [73, 74] (véase el Capítulo 1). Cuando se aplica la transformación de Kummer a la serie espacial de G_{3D-1D} , resulta que la serie asintótica remanente (también llamada serie de cola) que se obtiene no depende de las coordenadas de los puntos fuente y de observación. Esto constituye una ventaja, ya que dicha serie asintótica sólo tendrá que evaluarse una sola vez cuando se aplique el MDM al análisis de una estructura periódica concreta, lo cual conlleva un importante ahorro en el coste computacional [73]. Además, es preciso añadir que en este trabajo se han obtenido expresiones en forma cuasi-cerrada para esta serie asintótica (véase el Apéndice C), lo cual va a permitir aumentar todavía más la eficiencia computacional. El algoritmo resultante de esta original implementación de la transformación de Kummer se va a comparar en este Capítulo con otros algoritmos de aceleración de series. Los resultados numéricos obtenidos van a poner de manifiesto que el nuevo algoritmo es más rápido que el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior, e incluso más rápido que el método de Ewald (recordemos que el método de Ewald está considerado por muchos como el método más eficiente para la evaluación de funciones de Green periódicas homogéneas [95]).

Si bien en el Capítulo 1 se puso énfasis en el cálculo eficiente de las funciones de Green periódicas homogéneas 2-D con periodicidades 1-D y 2-D, en este Capítulo sólo se trata el cálculo eficiente de G_{3D-1D} , y no se presta atención al cálculo eficiente de las funciones de Green periódicas homogéneas 3-D con periodicidades 2-D y 3-D (G_{3D-2D} y G_{3D-3D}). Esto último es debido a que el método de Ewald es especialmente eficiente en el cálculo de G_{3D-2D} y G_{3D-3D} , ya que en estos casos las series con convergencia gaussiana que resultan de aplicar el método no involucran a series infinitas adicionales [104, 106]. Por tanto, no parece que merezca la pena trabajar en la implementación de métodos numéricos alternativos al método de Ewald a la hora de calcular G_{3D-2D} y G_{3D-3D} . Además, en casos extremos en los que el parámetro de separación del método de Ewald no pueda ser elegido de forma óptima y el método pierda mucha eficiencia [106], siempre se puede recurrir al método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de alto orden que se describe en [116].

2.2. Funciones de Green homogéneas 3-D periódicas y no periódicas

Al igual que en el Capítulo anterior, de ahora en adelante supondremos que todas las magnitudes involucradas en este Capítulo son fasores que representan a magnitudes con una dependencia temporal implícita del tipo $e^{j\omega t}$, y supondremos que todas las fuentes (periódicas o no periódicas) están inmersas en un medio homogéneo no magnético que, en general, tendrá pérdidas. La permitividad compleja de ese medio vendrá dada por $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan \delta)$, siendo μ_0 su permeabilidad.

En el Capítulo anterior, y más concretamente en la sección 1.2, se mostró cuál es el significado electromagnético de la función de Green periódica homogénea 2-D con periodicidad 1-D. De forma análoga, en esta sección vamos a mostrar qué sentido tiene la función de Green periódica homogénea 3-D con periodicidad 1-D desde un punto de vista electromagnético. Con tal fin, consideraremos un elemento de corriente puntual de tamaño infinitesimal orientado en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$, y situado en el punto de vector de posición $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$, tal y como

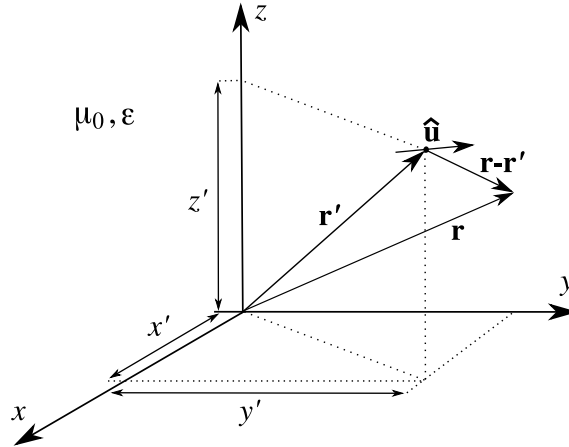


Figura 2.1: Elemento de corriente puntual de tamaño infinitesimal orientado en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$. $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ es el vector de posición del elemento de corriente y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ el vector de posición del punto de observación.

muestra la Fig. 2.1. Suponiendo que el producto entre la intensidad de corriente transportada en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ y la longitud del elemento de corriente vale $1\text{A} \cdot \text{m}$, la densidad volumétrica de corriente asociada al elemento de corriente puntual viene dada por la siguiente expresión [13]:

$$\mathbf{J}_p = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.1)$$

El potencial vector \mathbf{A}_p creado por el elemento de corriente es la solución de la ecuación de Helmholtz asociada con este problema $((\nabla^2 + k^2)\mathbf{A}_p = -\mu_0\mathbf{J}_p)$, siendo su expresión [13]:

$$\mathbf{A}_p = \frac{\mu_0 e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{u}}, \quad (2.2)$$

donde $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0}$ es el número de ondas complejo representativo del medio donde se encuentra el elemento de corriente y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ el vector de posición del punto de observación.

Si consideramos ahora una carga puntual de 1C situada en el punto de vector de posición $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ (veáse la Fig. 2.2), la densidad volumétrica de carga asociada con esta carga puntual viene dada por:

$$\rho_p = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z'). \quad (2.3)$$

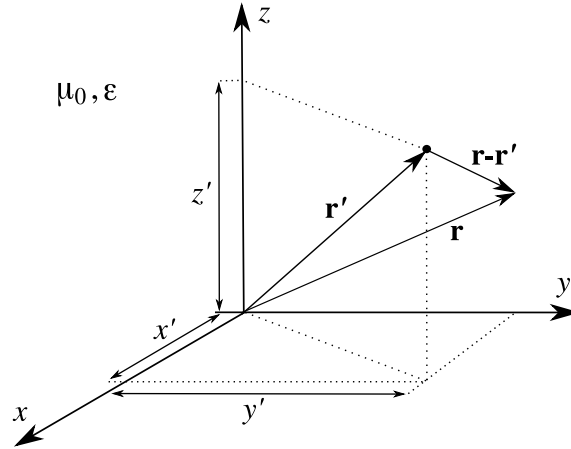


Figura 2.2: Carga puntual situada en el punto de vector de posición $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$. El vector $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ es el vector de posición del punto de observación.

El potencial escalar ϕ_p creado por la carga puntual es la solución de la ecuación de Helmholtz ($(\nabla^2 + k^2)\phi_p = -\mu_0\rho_p$), y viene dado por:

$$\phi_p = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.4)$$

A partir de las Ecs. (2.2) y (2.4), es posible definir lo que llamaremos de ahora en adelante función de Green 3-D no periódica para un medio homogéneo, que vendrá dada por:

$$G_{3D}(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2.5)$$

siendo $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$ y $\Delta z = z - z'$.

Con objeto de mostrar la utilidad de la función de Green homogénea 3-D, vamos a considerar el problema del *scattering* de una onda plana por un objeto conductor eléctrico perfecto (CEP) de forma arbitraria que ocupa un volumen finito del espacio (veáse la Fig. 2.3). El campo eléctrico de la onda plana incidente sobre el objeto vale:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = E_0 e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{v}} = E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}\hat{\mathbf{v}} = E_0 e^{jk(\text{sen}\theta_i \cos\phi_i x + \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi_i y + \cos\theta_i z)}\hat{\mathbf{v}}, \quad (2.6)$$

donde θ_i y ϕ_i son las coordenadas esféricas que indican la dirección de incidencia de la onda y $\hat{\mathbf{v}}$ es un vector unitario perpendicular a la dirección de propagación

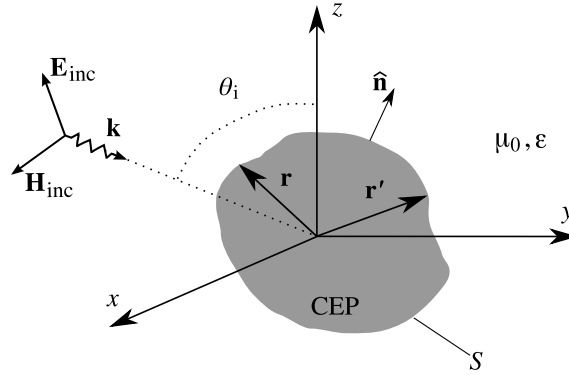


Figura 2.3: Objeto conductor eléctrico perfecto de forma arbitraria iluminado por una onda plana. Los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' señalan a los puntos de la superficie del objeto S . El vector $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a S .

($\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k} = 0$). La condición de contorno que tiene que satisfacer la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie S del conductor se puede escribir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r})) = 0 \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.7)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie S del conductor en cada punto y \mathbf{E}_{dis} es el campo eléctrico de la onda dispersada por el objeto. A partir de la Ec. (2.7), se puede obtener (por analogía con la Ec. (1.9)) una ecuación integral para la densidad de corriente superficial inducida en el objeto conductor, $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$. Esta ecuación integral puede escribirse del siguiente modo:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) - j\omega\mu_0 \int_S \mathbf{K}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \left[\int_S (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' \right] \right) = 0 \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.8)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de continuidad bidimensional $\nabla'_s \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') + j\omega\sigma(\mathbf{r}') = 0$, siendo $\sigma(\mathbf{r}')$ la densidad de carga superficial inducida en el objeto.

La incógnita de la ecuación integral anterior es la densidad superficial de corriente sobre el objeto conductor, $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$, y el núcleo es la función de Green 3-D dada en la Ec. (2.5). Si consideramos el *scattering* de la misma onda plana por una agrupación periódica monodimensional de objetos conductores CEP a lo largo del eje x (como la mostrada en la Fig. 2.4), por analogía con la Ec. (1.12), la

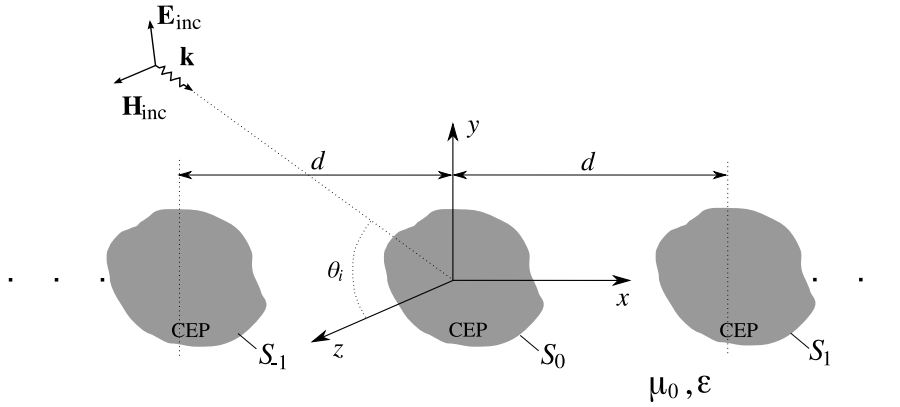


Figura 2.4: Agrupación periódica de objetos conductores eléctricos perfectos a lo largo del eje x , con periodo d .

ecuación integral para la densidad de corriente $\mathbf{K}_0(\mathbf{r}')$ sobre uno de los objetos conductores de la agrupación será:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) - j\omega\mu_0 \int_{S_0} \mathbf{K}_0(\mathbf{r}') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|} e^{jk_x ind}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|} ds' \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \left[\int_{S_0} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_0(\mathbf{r}')) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|} e^{jk_x ind}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|} ds' \right] \right) = 0 \quad \mathbf{r} \in S_0. \quad (2.9)$$

El núcleo de esta última ecuación integral es lo que a partir de ahora llamaremos función de Green periódica homogénea 3-D con periodicidad 1-D, y viene dado por:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-nd\hat{\mathbf{x}}|} e^{jk_x ind}. \quad (2.10)$$

2.3. Procedimiento numérico para el cálculo de las funciones de Green periódicas homogéneas 3-D

Consideremos una agrupación periódica monodimensional de fuentes puntuales (similares a la corriente infinitesimal o a la carga puntual de las Figs. 2.1 y 2.2) situadas a lo largo de la dirección x , tal y como se muestra en la Fig. 2.5. Teniendo en cuenta lo mostrado en la sección previa, la función de Green homogénea 3-D correspondiente a esta agrupación periódica de fuentes (potencial

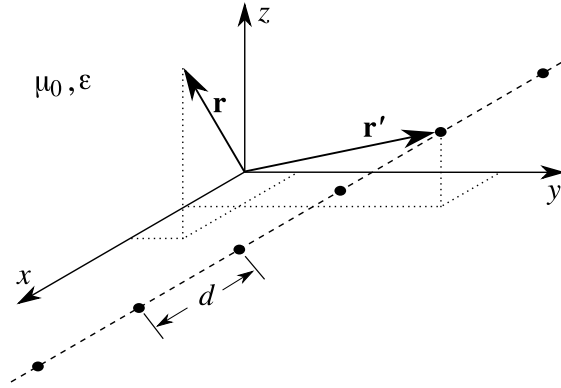


Figura 2.5: Agrupación de fuentes puntuales situadas periódicamente a lo largo de una recta paralela al eje x . $\mathbf{r}' + nd\hat{\mathbf{x}} = (x' + nd)\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) es el vector de posición de las fuentes y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, el vector de posición del punto de observación.

vector o potencial escalar salvo una constante multiplicativa) vendrá dada por la Ec. (2.10), que podemos reescribir de la siguiente forma:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jkT_n}}{T_n} e^{-jk_{x0}nd}, \quad (2.11)$$

donde $k_{x0} = \pm k \sin \theta_0 \cos \phi_0$ es la fase por periodo impuesta por una onda emitida por la agrupación (signo positivo) o por una onda incidente sobre la agrupación (signo negativo), θ_0 y ϕ_0 son las coordenadas angulares esféricas que indican la dirección de propagación de esas ondas y T_n está definido como:

$$T_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - nd\hat{\mathbf{x}}| = \sqrt{(\Delta x - nd)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (2.12)$$

En la ecuación anterior, se cumple que $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$ y $\Delta z = z - z'$, siendo (x, y, z) las coordenadas del punto de observación y $(x' + nd, y', z')$ ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) las coordenadas de las fuentes puntuales (véase la Fig. 2.5). El término n -ésimo de la serie de la Ec. (2.11) decae como $e^{\text{Im}(k \pm k_{x0})|n|d}/|n|$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. En el caso en que las pérdidas son despreciables (esto es, $\text{Im}(k) \approx 0$), este término n -ésimo decae como $|n|^{-1}$, y en ese caso la convergencia de (2.11) es muy lenta. Sea $R_t = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}$ la distancia entre el punto de observación de la Fig. 2.5 y la recta que contiene a las fuentes puntuales. Cuando $R_t \neq 0$, la fórmula de Poisson (véase el Apéndice A) proporciona la siguiente serie espectral para el

cálculo de la función G_{3D-1D} [77]:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Big|_{R_t \neq 0} = \frac{1}{2\pi d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{xn}\Delta x} K_0(\Gamma_n R_t), \quad (2.13)$$

donde, al igual que en el Capítulo 1, $k_{xn} = 2\pi n/d + k_{x0}$, $\Gamma_n = \sqrt{k_{xn}^2 - k^2}$, y $K_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de orden cero [105, p. 374]. Aunque el término n -ésimo de la serie de la Ec. (2.13) tiene un decaimiento exponencial del tipo $e^{-(2\pi|n|R_t)/d} / \sqrt{|n|}$, dicha serie converge muy lentamente cuando $R_t \ll d$. Además, la serie de la Ec. (2.13) no está definida en el caso $R_t = 0$.

Para acelerar la convergencia de la serie (2.13) se puede aplicar una transformación de Kummer espectral para, a continuación, hacer uso de la fórmula de Poisson en la serie asintótica resultante [77, 112]. Este procedimiento, conocido como método de Kummer-Poisson espectral, mejora considerablemente si en la transformación de Kummer se lleva a cabo una extracción asintótica de alto orden, tal y como hemos visto en el Capítulo 1. En particular, en [116] se aplica de forma muy elegante el método de Kummer-Poisson espectral con extracción asintótica de términos de orden superior al cálculo eficiente de la función de Green periódica homogénea 3-D con periodicidad 2-D. La técnica utilizada en [116] puede ser adaptada sin problemas al cálculo de G_{3D-1D} cuando $R_t \neq 0$, resultando la siguiente expresión:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Big|_{R_t \neq 0} = \frac{1}{2\pi d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{xn}\Delta x} \times \left\{ K_0(\Gamma_n R_t) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^P A_{s,P} [K_0(\Omega_{ns}^- R_t) + K_0(\Omega_{ns}^+ R_t)] \right\} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha T_n} e^{-jk_{x0}nd}}{T_n} \sum_{s=1}^P A_{s,P} \cos(k_{s,P} T_n), \quad (2.14)$$

donde P indica el número de términos retenidos en la transformación de Kummer, $\alpha = \pi/(2d) + |\text{Im}(k_{x0})|$ es el valor elegido en este trabajo para el parámetro α y $\Omega_{ns}^\pm = \sqrt{k_{xn}^2 - (k_{s,P} \pm j\alpha)^2}$ (Ω_{ns}^+ y Ω_{ns}^- son cantidades complejas). Los coeficientes $A_{s,P}$ y $k_{s,P}$ ($s = 1, \dots, P$) que aparecen en la Ec. (2.14) pueden obtenerse en

términos de α y k en el intervalo $1 \leq P \leq 3$ como se indica a continuación:

$$k_{11} = \sqrt{\alpha^2 + k^2} \quad (2.15)$$

$$A_{11} = 1 \quad (2.16)$$

$$k_{12} = \sqrt{k^2 + 7\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{k^2 + 10\alpha^2}} \quad (2.17)$$

$$k_{22} = \sqrt{k^2 + 7\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{k^2 + 10\alpha^2}} \quad (2.18)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3\alpha}{\sqrt{k^2 + 10\alpha^2}} \right] \quad (2.19)$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3\alpha}{\sqrt{k^2 + 10\alpha^2}} \right] \quad (2.20)$$

$$k_{13} = \sqrt{k^2 + 23\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{5k^2 + 126\alpha^2}} \quad (2.21)$$

$$k_{23} = \sqrt{k^2 + 9\alpha^2} \quad (2.22)$$

$$k_{33} = \sqrt{k^2 + 23\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{5k^2 + 126\alpha^2}} \quad (2.23)$$

$$A_{13} = \frac{1}{2(5k^2 + 77\alpha^2)} \left[k^2 + 73\alpha^2 + \frac{9\alpha(3k^2 + 91\alpha^2)}{\sqrt{5k^2 + 126\alpha^2}} \right] \quad (2.24)$$

$$A_{23} = \frac{4(k^2 + \alpha^2)}{5k^2 + 77\alpha^2} \quad (2.25)$$

$$A_{33} = \frac{1}{2(5k^2 + 77\alpha^2)} \left[k^2 + 73\alpha^2 - \frac{9\alpha(3k^2 + 91\alpha^2)}{\sqrt{5k^2 + 126\alpha^2}} \right]. \quad (2.26)$$

Estos coeficientes coinciden exactamente con los obtenidos previamente por Ivanishin y Skobelev en [116] al aplicar el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior al cálculo de G_{3D-2D} .

Aunque hay otras posibles elecciones para el valor de α en la Ec. (2.14) (véase, por ejemplo, la referencia [112] donde se sugiere tomar $\alpha = \pi/d + |\text{Im}(k_{x0})|$), las simulaciones numéricas han mostrado que el valor de α elegido en esta tesis proporciona un buen compromiso entre el número de términos que es preciso sumar en las dos series de la Ec. (2.14) para que las series converjan. Por tanto, dicho valor de α permite minimizar el tiempo de CPU requerido para evaluar las series con una precisión dada.

La primera serie de la Ec. (2.14) converge muy rápido cuando $P \geq 2$, incluso si $R_t \ll d$ (de hecho, el término n -ésimo de esta primera serie tiene un decaimiento del tipo $e^{-(2\pi|n|R_t)/d}/|n|^{(4P+1)/2}$ cuando $|n| \rightarrow \infty$). La segunda serie de la Ec. (2.14) también converge muy rápido ya que el término n -ésimo decae como $e^{-(\pi|n|)/2}/|n|$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. La rápida convergencia de las dos series de la Ec. (2.14) parece indicar que dicha expresión es muy eficiente a la hora de calcular $G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)|_{R_t \neq 0}$. Sin embargo, la evaluación numérica reiterada de las funciones de Bessel modificadas de argumento complejo $K_0(\Omega_{ns}^+ R_t)$ y $K_0(\Omega_{ns}^- R_t)$ tiene un alto coste computacional. Este hecho reduce considerablemente la eficiencia de la Ec. (2.14), tal y como se mostrará en la sección 2.4.

Una ventaja clara que presenta la Ec. (2.14) con respecto a la Ec. (2.13) en relación con el cálculo de G_{3D-1D} es que (2.14) puede usarse en el caso $R_t = 0$ si se lleva a cabo el límite $R_t \rightarrow 0$ en la primera serie, en cuyo caso se obtiene la siguiente expresión:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)|_{R_t=0} = \frac{1}{2\pi d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x n \Delta x} \left[-\ln(\Gamma_n) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^P A_{s,P} \ln(\Omega_{ns}^- \Omega_{ns}^+) \right] + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha|\Delta x - nd|} e^{-jk_x 0 nd}}{|\Delta x - nd|} \sum_{s=1}^P A_{s,P} \cos(k_{s,P} |\Delta x - nd|). \quad (2.27)$$

En la ecuación anterior, el decaimiento del término n -ésimo de la primera serie es del tipo $|n|^{-4P}$ cuando $|n| \rightarrow \infty$, y el del término n -ésimo de la segunda serie viene dado por $e^{-(\pi|n|)/2}/|n|$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. Es importante señalar que, dado que la Ec. (2.27) no involucra la evaluación de funciones de Bessel modificadas de argumento complejo, esta ecuación es extremadamente eficiente a la hora de calcular $G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)|_{R_t=0}$ cuando $P \geq 2$.

El método de Ewald [82] constituye una alternativa adicional para acelerar la convergencia de la Ec. (2.11). En concreto, la aplicación del método de Ewald al cálculo de G_{3D-1D} nos lleva a la siguiente expresión [77, 84, 114]:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_x 0 nd}}{T_n} \left\{ e^{jk T_n} \operatorname{erfc}\left(T_n E + \frac{jk}{2E}\right) + e^{-jk T_n} \operatorname{erfc}\left(T_n E - \frac{jk}{2E}\right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4\pi d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{xn}\Delta x} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-ER_t)^{2q}}{q!} E_{q+1} \left(\frac{\Gamma_n^2}{4E^2} \right), \quad (2.28)$$

donde una vez más $\operatorname{erfc}(\cdot)$ es la función error complementario [105, p. 297], $E_q(\cdot)$ es la función exponencial integral de orden q definida en [105, p. 228], y E es el parámetro de separación, que juega en la Ec. (2.28) un papel similar al que juegan E' y E'' en las Ecs. (1.17) y (1.36) respectivamente.

De forma análoga a lo que ocurría con las series de la Ec. (1.17), aunque las dos series en el índice entero n de la Ec. (2.28) poseen convergencia gaussiana extremadamente rápida [77, 84], la segunda serie en n de (2.28) contiene una serie infinita adicional en el índice q para la cual no se conoce ninguna expresión en forma cerrada. Al igual que en las Ecs. (1.17) y (1.36), el parámetro de separación E controla simultáneamente la convergencia de las dos series gaussianas de la Ec. (2.28). Aunque Valerio *et al.* han sugerido una expresión para E (véase [77, Ecs. (41)-(42)]), en este trabajo se propone una expresión simplificada (similar a las propuestas en las Ecs. (1.19) y (1.37)), que está dada por:

$$E = \max \left(\frac{\sqrt{\pi}}{d}, \frac{|\sqrt{k^2 - k_{x0}^2}|}{4} \right). \quad (2.29)$$

La expresión de E dada en [77, Ecs. (41)-(42)] incluye una dependencia adicional con el parámetro Q que, al igual que en el caso de la Ec. (1.17), representa el número de términos necesarios para que converja la serie en q de la Ec. (2.28). Pues bien, nuestras simulaciones numéricas han mostrado que esta dependencia de E con Q , ni mejora la precisión en la evaluación de la función G_{3D-1D} , ni reduce el tiempo de CPU. Cuando la función G_{3D-1D} es calculada con una precisión de ocho cifras significativas y E es calculado mediante la Ec. (2.29), nuestras simulaciones han mostrado que el valor de Q se encuentra típicamente entre 6 y 24, siendo muy dependiente de la relación d/λ (al igual que ocurre con el valor de Q definido en el Capítulo 1 para la Ec. (1.17)).

En ausencia de pérdidas, $\Gamma_0^2 = -(k^2 - k_{x0}^2)$ es un número real negativo, lo cual implica que hay que calcular una función exponencial integral de argumento real negativo en la segunda serie de la Ec. (2.28). Este hecho supone un problema, ya que la función exponencial integral de argumento complejo tiene una rama

logarítmica sobre el eje real negativo. Tal y como se sugiere en [84], el problema se resuelve si se introducen deliberadamente pequeñas pérdidas en el medio que contiene a las fuentes puntuales de la Fig. 2.5, de forma que Γ_0^2 se convierta en un número complejo con parte imaginaria no nula (de hecho, nuestras simulaciones han mostrado que es suficiente tomar un valor de la tangente de pérdidas $\tan \delta = 10^{-15}$ para eliminar el problema mencionado anteriormente).

Una vez expuestos los métodos publicados por otros investigadores para el cálculo eficiente de G_{3D-1D} , propondremos a continuación un nuevo método que está basado en la aplicación de la transformación de Kummer a la Ec. (2.11) (método espacial de Kummer). Al igual que se hizo en el Capítulo 1, al aplicar la transformación de Kummer a la Ec. (2.11) se van a retener varios términos en el desarrollo asintótico del término n -ésimo de la serie en lugar de retener un único término. Como se comentó en [73, 74], esta estrategia mejora considerablemente la eficiencia del método de Kummer. En particular, la evaluación de G_{3D-1D} mediante la transformación de Kummer se va a restringir al intervalo $-d/2 \leq \Delta x \leq d/2$. A la hora de obtener G_{3D-1D} para valores de $|\Delta x|$ situados fuera de este intervalo (esto es, para $|\Delta x| > d/2$), basta con utilizar la condición de periodicidad de Floquet, que viene dada por:

$$G_{3D-1D}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = e^{\pm jk_x 0md} G_{3D-1D}(\Delta x \pm md, \Delta y, \Delta z), \quad (2.30)$$

donde m es un número entero.

A la hora de aplicar la transformación de Kummer a la Ec. (2.11), se va a hacer uso del siguiente desarrollo asintótico de $e^{-jkT_{\pm n}}/T_{\pm n}$ para $|n| \rightarrow \infty$:

$$\frac{e^{-jkT_{\pm n}}}{T_{\pm n}} \Big|_{nd \gg \Delta x, \Delta y, \Delta z} = \sum_{i=1}^M \frac{D_i(R_t, \mp \Delta x, k, d) e^{-jk(nd \mp \Delta x)}}{n^i d} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-jknd}}{n^{M+1}}\right). \quad (2.31)$$

Los coeficientes $D_i(R_t, \pm \Delta x, k, d)$ que aparecen en la Ec. (2.31) vienen dados por las siguientes expresiones si $1 \leq i \leq 6$:

$$D_1(R_t, \pm \Delta x, k, d) = 1 \quad (2.32)$$

$$D_2(R_t, \pm \Delta x, k, d) = \mp \frac{\Delta x}{d} + C_1(R_t, \pm \Delta x, k, d) \quad (2.33)$$

$$D_3(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \frac{2(\Delta x)^2 - R_t^2}{2d^2} \mp \frac{\Delta x}{d} C_1(R_t, \pm\Delta x, k, d) + C_2(R_t, \pm\Delta x, k, d) \quad (2.34)$$

$$D_4(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \pm \frac{\Delta x [3R_t^2 - 2(\Delta x)^2]}{2d^3} + \frac{2(\Delta x)^2 - R_t^2}{2d^2} C_1(R_t, \pm\Delta x, k, d) \mp \frac{\Delta x}{d} C_2(R_t, \pm\Delta x, k, d) + C_3(R_t, \pm\Delta x, k, d) \quad (2.35)$$

$$D_5(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \frac{8(\Delta x)^4 - 24R_t^2(\Delta x)^2 + 3R_t^4}{8d^4} \pm \frac{\Delta x [3R_t^2 - 2(\Delta x)^2]}{2d^3} C_1(R_t, \pm\Delta x, k, d) + \frac{2(\Delta x)^2 - R_t^2}{2d^2} C_2(R_t, \pm\Delta x, k, d) \mp \frac{\Delta x}{d} C_3(R_t, \pm\Delta x, k, d) + C_4(R_t, \pm\Delta x, k, d) \quad (2.36)$$

$$D_6(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \pm \frac{\Delta x [-8(\Delta x)^4 + 40R_t^2(\Delta x)^2 - 15R_t^4]}{8d^5} + \frac{[8(\Delta x)^4 - 24R_t^2(\Delta x)^2 + 3R_t^4]}{8d^4} C_1(R_t, \pm\Delta x, k, d) \pm \frac{\Delta x [3R_t^2 - 2(\Delta x)^2]}{2d^3} C_2(R_t, \pm\Delta x, k, d) + \frac{2(\Delta x)^2 - R_t^2}{2d^2} C_3(R_t, \pm\Delta x, k, d) \mp \frac{\Delta x}{d} C_4(R_t, \pm\Delta x, k, d) + C_5(R_t, \pm\Delta x, k, d), \quad (2.37)$$

donde a su vez los coeficientes $C_i(R_t, \pm\Delta x, k, d)$ ($i = 1, \dots, 5$) vienen dados por:

$$C_1(R_t, \pm\Delta x, k, d) = -\frac{jkR_t^2}{2d} \quad (2.38)$$

$$C_2(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \frac{kR_t^2}{2d^2} \left(\frac{-kR_t^2}{4} \pm j\Delta x \right) \quad (2.39)$$

$$C_3(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \frac{kR_t^2}{4d^3} \left\{ \pm kR_t^2 \Delta x + j \left[\frac{R_t^2}{2} - 2(\Delta x)^2 + \frac{k^2 R_t^4}{12} \right] \right\} \quad (2.40)$$

$$C_4(R_t, \pm\Delta x, k, d) = \frac{k^2 R_t^4}{16d^4} \left[R_t^2 - 6(\Delta x)^2 + \frac{k^2 R_t^4}{24} \right] \mp \frac{j\Delta x k R_t^2}{8d^4} \left[3R_t^2 - 4(\Delta x)^2 + \frac{k^2 R_t^4}{2} \right] \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
C_5(R_t, \pm\Delta x, k, d) = & \pm \frac{k^2 R_t^4 \Delta x}{16d^5} \left[8(\Delta x)^2 - 4R_t^2 + \frac{k^2 R_t^4}{6} \right] \\
& + \frac{jk R_t^2}{16d^5} \left[\frac{k^2 R_t^4}{4} (8(\Delta x)^2 - R_t^2) - R_t^4 + 12R_t^2(\Delta x)^2 - 8(\Delta x)^4 - \frac{k^4 R_t^8}{240} \right].
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Cuando se aplica una transformación de Kummer de orden M a la Ec. (2.11) y se hace uso de la Ec. (2.31), es posible expresar la función G_{3D-1D} mediante la siguiente expresión (similar a la publicada en [73] para calcular G_{2D-1D}):

$$G_{3D-1D} = G_0 + G^+ + G^- + G_{cola}, \tag{2.43}$$

donde:

$$G_0(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkT_0}}{T_0} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
G^\pm(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\pm = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp jk_{x_0} n d} \\
& \times \left[\frac{e^{-jkT_{\pm n}}}{T_{\pm n}} - \sum_{i=1}^M \frac{Di(R_t, \mp\Delta x, k, d) e^{-jk(nd \mp \Delta x)}}{n^i d} \right]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
G_{cola}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = & \frac{e^{jk\Delta x}}{4\pi d} \sum_{i=1}^M Di(R_t, -\Delta x, k, d) S_i^e[(k + k_{x_0})d] \\
& + \frac{e^{-jk\Delta x}}{4\pi d} \sum_{i=1}^M Di(R_t, \Delta x, k, d) S_i^e[(k - k_{x_0})d],
\end{aligned} \tag{2.46}$$

y donde:

$$S_i^e(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-jnw}}{n^i} \quad (i = 1, \dots, M). \tag{2.47}$$

La función G_0 de la Ec. (2.44) es la contribución a G_{3D-1D} que contiene la singularidad de esta función de Green en el intervalo $-d/2 \leq \Delta x \leq d/2$ (para $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$). De acuerdo con la Ec. (2.31), los términos n -ésimos de las series G^\pm en la Ec. (2.45) decaen como $e^{\text{Im}(k \pm k_{x_0})|n|d}/|n|^{M+1}$ para $|n| \rightarrow \infty$ y, por tanto, la convergencia de estas series es siempre muy rápida si M se toma suficientemente grande (incluso cuando las pérdidas del medio que contiene a las fuentes son despreciables). Finalmente, la serie asintótica restante, G_{cola} , se expresa en la Ec. (2.46) como una combinación lineal de las series $S_i^e[(k + k_{x_0})d]$ y

$S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$). Las series $S_i^e(w)$ de la Ec. (2.47), que son en general función de la variable compleja w , pueden ser obtenidas en forma cuasi-cerrada haciendo uso de las técnicas publicadas en [15, Apéndice A.6]. Las expresiones usadas en este trabajo para el cálculo de las series $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, M$) están recogidas en el Apéndice C para $M \leq 6$.

Debe tenerse en cuenta que las series $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$) no dependen de las diferencias entre las coordenadas de los puntos fuente y de observación Δx , Δy y Δz . Por tanto, cuando el MDM se aplica al análisis de una estructura periódica concreta para la cual k , k_{x0} y d son fijos, las series $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ sólo tienen que ser calculadas una vez, lo cual permite un ahorro importante en tiempo de CPU al aplicar el MDM [73].

Mientras que el cálculo de G_{3D-1D} mediante la Ec. (2.14) (método espectral de Kummer-Poisson) y mediante la Ec. (2.28) (método de Ewald) involucra la evaluación de funciones especiales (funciones de Bessel modificadas, funciones error complementario y funciones exponencial integral), el cálculo de G_{3D-1D} mediante la Ec. (2.43) (transformación de Kummer espacial) no conlleva la evaluación de ninguna función especial, y por ese motivo, la expresión de la Ec. (2.43) es competitiva frente a las expresiones de las Ecs. (2.14) y (2.28), tal y como se mostrará en la sección 2.4. La principal desventaja que presenta la Ec. (2.43) es que no puede aplicarse al cálculo de G_{3D-1D} para valores complejos arbitrarios de la fase k_{x0} , desventaja que no comparten las Ecs. (2.14) y (2.28) (eso sí, al menos la Ec. (2.43) puede manejar los valores complejos con significado físico de k_{x0} que introduce un medio con pérdidas como de la Fig. 2.5). El que la Ec. (2.43) no pueda ser utilizada con valores complejos arbitrarios de k_{x0} se debe a que así como el método espectral de Kummer-Poisson y el método de Ewald están basados en el fondo en una transformación de Kummer espectral, la Ec. (2.43) está basada en una transformación de Kummer espacial [77, Sec. II.B].

Algunos investigadores no sólo han trabajado en el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas escalares sino también en el cálculo eficiente del gradiente de esas funciones de Green [83], o yendo más allá, en el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas homogéneas diádicas [117]. Tanto el gradiente de G_{3D-1D} como las funciones de Green diádicas 3-D con periodicidad

1-D pueden obtenerse a partir de las derivadas primera y segunda de la Ec. (2.11) con respecto a las variables x , y y z . Las expresiones resultantes están formadas por un conjunto de series que decaen como $e^{\text{Im}(k \pm k_{x0})|n|^d}/|n|^i$ ($i = 1, \dots, 5$) para $|n| \rightarrow \infty$. Todas estas series pueden ser manipuladas como se indica en las Ecs. (2.43) y siguientes, y pueden expresarse en términos de nuevas series que decaen al menos como $e^{\text{Im}(k \pm k_{x0})|n|^d}/|n|^7$ y en términos de las series $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, 6$) que se obtienen en forma cuasi-cerrada en el Apéndice C.

2.4. Resultados Numéricos

En esta sección se analizará el ritmo de convergencia de las series G^+ y G^- de la Ec. (2.45) para diferentes valores del número de términos retenidos en la transformación de Kummer M . Asimismo, se estudiará el peso relativo de G^+ y G^- en el valor total de la función $G_{3\text{D-1D}}$. Por último, se llevará a cabo una comparación entre los tiempos de CPU que se necesitan para calcular $G_{3\text{D-1D}}$ mediante las Ecs. (2.14), (2.27), (2.28) y (2.43). En todos los casos se supondrá que el medio que contiene a las fuentes puntuales de la Fig. 2.5 no tiene pérdidas ($\tan \delta = 0$), ya que esta situación representa el peor escenario posible para la convergencia de la serie de la Ec. (2.11).

Teniendo en cuenta que a_n^\pm es el término n -ésimo de G^\pm (veáse la Ec. (2.45)), la convergencia de las series G^+ y G^- se estudiará a través de las dos funciones $f^+(n)$ y $f^-(n)$ (funciones del índice entero n) que se definen como:

$$f^\pm(n) = \log \left(\frac{|a_n^\pm|}{|a_1^\pm|} \right). \quad (2.48)$$

En las Figs. 2.6(a) y 2.6(b) se representan $f^+(n)$ y $f^-(n)$ frente a n para diferentes valores de M . Se observa que todas las curvas representadas tienden asintóticamente a líneas rectas de pendiente negativa $-(M+1)$. Dado que las escalas utilizadas son logarítmicas, este comportamiento está en concordancia con el hecho de que $|a_n^+|$ y $|a_n^-|$ muestran un decaimiento del tipo $n^{-(M+1)}$ cuando $|n| \rightarrow \infty$ para un medio sin pérdidas. De acuerdo con la Fig. 2.6, la convergencia de las series G^+ y G^- es lenta en el caso $M = 1$ (esto es, cuando sólo se retiene un único término en la aplicación de la transformación de Kummer), ya que al menos

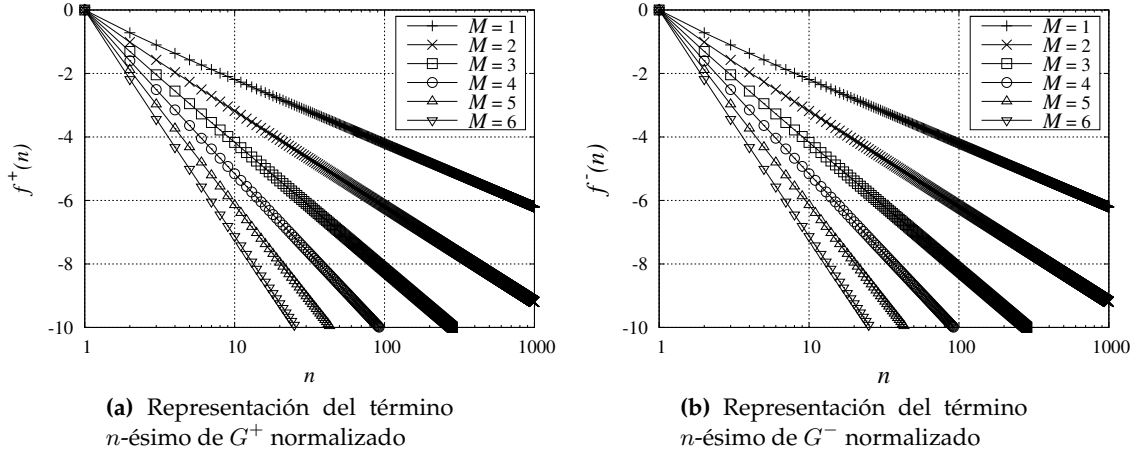


Figura 2.6: Representaciones de $f^\pm(n)$ (véase la Ec. (2.48)) frente a n para las series G^+ (a) y G^- (b) de (2.45). $d = 0.5\lambda$, $\Delta x = 0.4d$, $R_t = 0.1d$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

hay que sumar los términos $n \leq 80$ para obtener las dos series con una precisión de cuatro cifras significativas. En cambio, la convergencia de las series G^+ y G^- llega a ser muy rápida en el caso $M = 6$, ya que en este caso basta con sumar los términos $n \leq 4$ para obtener las series con cuatro cifras significativas de precisión (de hecho, en el caso $M = 6$ sólo son necesarios los términos $n \leq 14$ para obtener las series G^+ y G^- con una precisión de ocho cifras significativas).

Cuando la función G_{3D-1D} se obtiene mediante la Ec. (2.43), la parte del cálculo que requiere más gasto computacional es la evaluación de las dos series infinitas G^+ y G^- . Este hecho cobra especial relevancia cuando se aplica el MDM, ya que en ese caso las series G^+ y G^- tienen que ser evaluadas cada vez que Δx , Δy y Δz cambian, a diferencia de lo que ocurre con las series infinitas $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$) en la Ec. (2.46), que sólo tienen que ser evaluadas una vez por no depender de Δx , Δy y Δz (siempre que k , k_{x0} y d se mantengan fijos). Para estimar el peso relativo de las series G^+ y G^- en el valor final de la función G_{3D-1D} , se va a definir una nueva cantidad, f_G , que viene dada por:

$$f_G = \log \left(\frac{|G^+| + |G^-|}{|G_0 + G_{\text{resto}}|} \right). \quad (2.49)$$

Una vez que se ha decidido la precisión que se va a exigir en el cálculo de G_{3D-1D} , cuanto menor sea el valor de f_G , menor será la precisión que se necesita

en el cálculo de las series G^+ y G^- , y por tanto más rápida será la evaluación de la función G_{3D-1D} por medio de la Ec. (2.43). En la Fig. 2.7 se representa f_G en función de $\Delta x/d$ para diferentes valores de R_t/d y M . Se observa que f_G siempre disminuye cuando $|\Delta x/d|$ disminuye y M aumenta. En particular, para el caso $M = 6$, f_G es menor que -2 para $0.25 \lesssim |\Delta x/d| \leq 0.5$ y menor que -4 para $|\Delta x/d| \lesssim 0.25$. Esto significa, *grosso modo*, que si la función G_{3D-1D} tiene que ser evaluada con una precisión de ocho cifras significativas, las series G^+ y G^- tienen que calcularse con una precisión máxima de seis cifras significativas en el intervalo $0.25 \lesssim |\Delta x/d| \leq 0.5$, y con una precisión máxima de cuatro cifras significativas en el intervalo $|\Delta x/d| \lesssim 0.25$ (de acuerdo con la Fig. 2.6, esto implica que la evaluación de las series G^+ y G^- requerirá, como máximo, los términos $n \leq 7$ de la Ec. (2.45) en el intervalo $0.25 \lesssim |\Delta x/d| \leq 0.5$, y los términos $n \leq 4$ de la Ec. (2.45) en el intervalo $|\Delta x/d| \lesssim 0.25$).

Una conclusión general que puede extraerse a partir de las Figs. 2.6 y 2.7 es que se alcanza un doble beneficio cuando se incrementa el valor de M en las Ecs. (2.43) a (2.46). En primer lugar, la convergencia de las series G^+ y G^- de la Ec. (2.45) se vuelve más rápida (como muestra la Fig. 2.6). Y en segundo lugar, la contribución de estas series a la función de Green se hace menos relevante (véase la Fig. 2.7), lo cual hace posible bajar la precisión exigida en su cálculo y, en consecuencia, reducir el tiempo de CPU necesario para el cálculo global de la función G_{3D-1D} .

En la Fig. 2.8 se muestra la relación entre el tiempo de CPU que requieren las Ecs. (2.14) y (2.27) para evaluar la función G_{3D-1D} con una precisión de ocho cifras significativas, T^{IS} , y el que requiere nuestro algoritmo (Ec. (2.43)) cuando $M = 6$, T^{KU} . En la Fig. 2.9 se representa una relación similar entre el tiempo de CPU que requiere la Ec. (2.28) para evaluar G_{3D-1D} con una precisión de ocho cifras, T^{EW} , y T^{KU} . Siguiendo el criterio utilizado en [73, Figs. 1 y 2], el tiempo requerido para calcular las series $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (2.46) no ha sido incluido en T^{KU} ya que estas series son independientes de $\Delta x/d$ y R_t/d , y sólo necesitan ser calculadas una vez en cada una de las Figs. 2.8 y 2.9. En estas dos figuras puede observarse que la relación entre los tiempos de CPU (T^{IS}/T^{KU} y T^{EW}/T^{KU}) aumenta cuando $|\Delta x/d|$ disminuye. Esto se debe al hecho de que T^{KU}

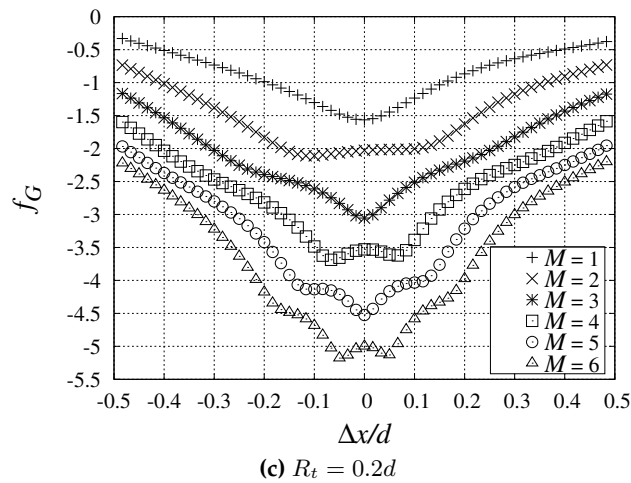
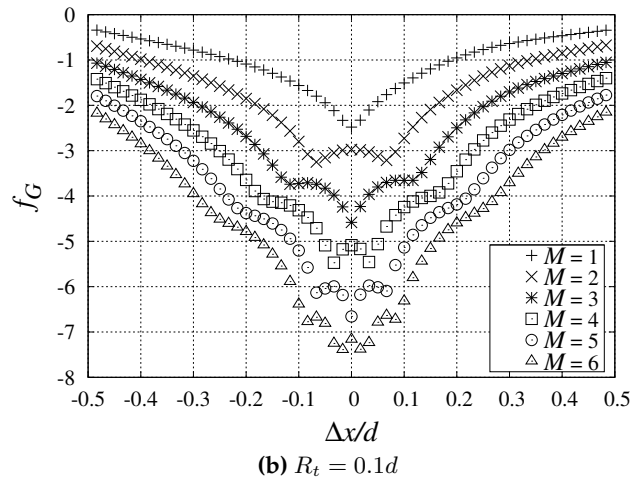
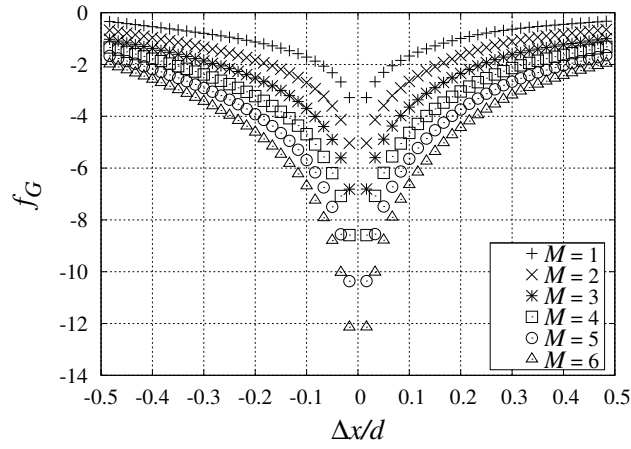


Figura 2.7: Representaciones de f_G (véase la Ec.(2.49)) frente a $\Delta x/d$. $d = 0.5\lambda$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

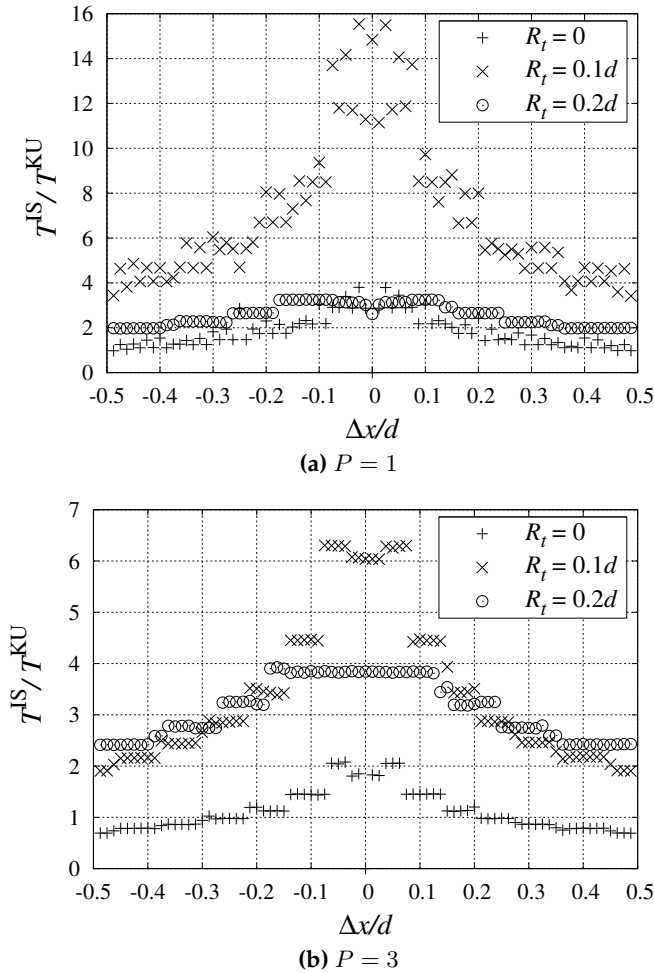


Figura 2.8: Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.14)–(2.27) y (2.43) para calcular G_{3D-1D} con una precisión de al menos ocho cifras significativas. $M = 6$, $d = 0.5\lambda$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

disminuye cuando $|\Delta x/d|$ también disminuye, en concordancia con los resultados mostrados en las Figs. 2.7(a)–(c). La Fig. 2.8 muestra que la Ec. (2.43) es más rápida que la Ec. (2.14) cuando $R_t \neq 0$, con independencia del número de términos retenidos en la transformación de Kummer P , siendo la Ec. (2.43) comparable a la Ec. (2.27) para $R_t = 0$ cuando $P = 3$. El que la Ec. (2.43) sea más eficiente que la Ec. (2.14) a la hora de evaluar G_{3D-1D} se debe a que las funciones de Bessel modificadas de argumento complejo de la Ec. (2.14) requieren un elevado tiempo de computación. De hecho, a pesar de que la convergencia de la primera serie de la

Ec. (2.14) mejora conforme aumenta P , los tiempos de CPU que se observan en la Fig. 2.8(b) difieren muy poco de los observados en la Fig. 2.8(a). Esto último es debido a que, conforme aumenta el valor de P en la Ec. (2.14), también lo hace el número de funciones de Bessel de argumento complejo que hay que evaluar. De hecho, el número de funciones de Bessel de argumento complejo que es necesario evaluar en cada uno de los sumandos de la primera serie de la Ec. (2.14) cuando $P = 3$ (Fig. 2.8(b)) es tres veces superior al que hay que evaluar cuando $P = 1$ (Fig. 2.8(a)).

Las Figs. 2.9(a) y (b) muestran que en los casos $d/\lambda = 0.01$ y $d/\lambda = 0.5$ el método propuesto en este Capítulo es ligeramente más rápido que el método de Ewald cuando $R_t \neq 0$ (entre 1 y 2.5 veces más rápido), siendo comparables ambos métodos cuando $R_t = 0$ (téngase en cuenta que el método de Ewald es extremadamente eficiente en este último caso debido a que las series en el índice q de la Ec. (2.28) no tienen que ser calculadas). Sin embargo, la Fig. 2.9(c) muestra que en el caso $d/\lambda = 3.5$, el método propuesto en este Capítulo es apreciablemente más rápido que el método de Ewald (entre 1 y 4 veces más rápido), incluso cuando $R_t = 0$. Para poder explicar las variaciones en el comportamiento del cociente entre tiempos de CPU que se producen para distintos valores de d/λ , es necesario tener en cuenta que el parámetro de separación E usado en el método de Ewald (definido en la Ec. (2.29)) mantiene su valor óptimo ($E_{\text{opt}} = \sqrt{\pi}/d$) si $d/\lambda \lesssim 1$, y se aleja de este valor óptimo conforme la razón d/λ crece por encima de 1 con el fin de evitar en la Ec. (2.28) errores de cancelación ocasionados por la suma de dos números elevados, muy próximos entre sí, y con signos opuestos [77, 84, 106]. Por tanto, aunque el método de Ewald tenga una eficiencia óptima cuando $d/\lambda \lesssim 1$, su eficiencia se deteriora cuando d/λ aumenta por encima de 1. Esto último explica por qué el nuevo método propuesto en la sección 2.3 es sólo ligeramente mejor que el método de Ewald en las Figs. 2.9(a) y (b) ($d/\lambda = 0.01$ y $d/\lambda = 0.5$), y en cambio es sensiblemente mejor que el método de Ewald en la Fig. 2.9(c) ($d/\lambda = 3.5$).

En la Tabla 2.1 se presenta una comparación entre los números de sumandos requeridos en las series de las Ecs. (2.14), (2.28) y (2.43) cuando la función $G_{3\text{D-1D}}$ se calcula con una precisión de al menos ocho cifras significativas. En dicha tabla,

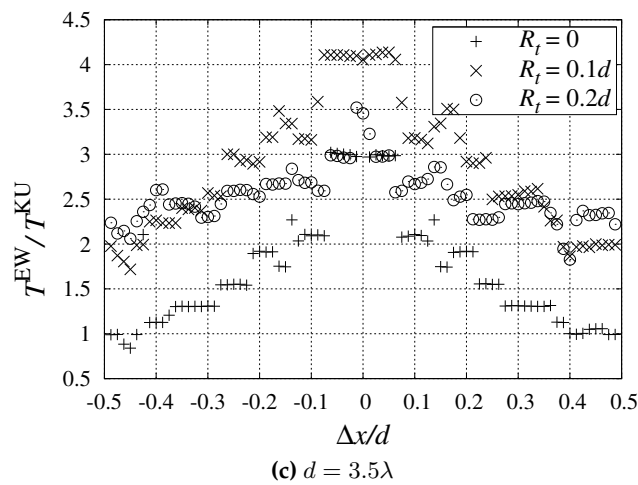
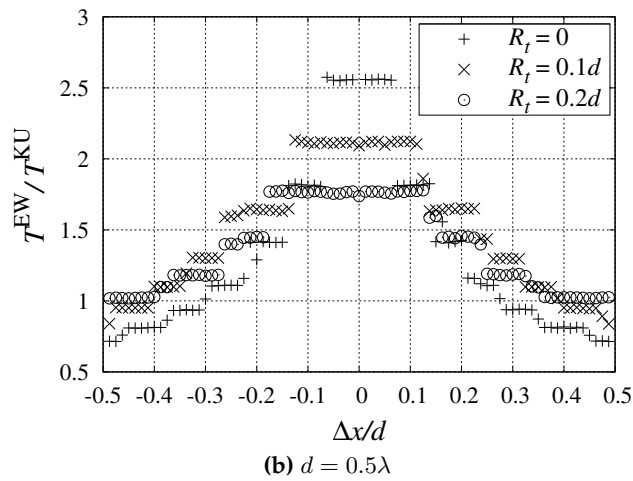
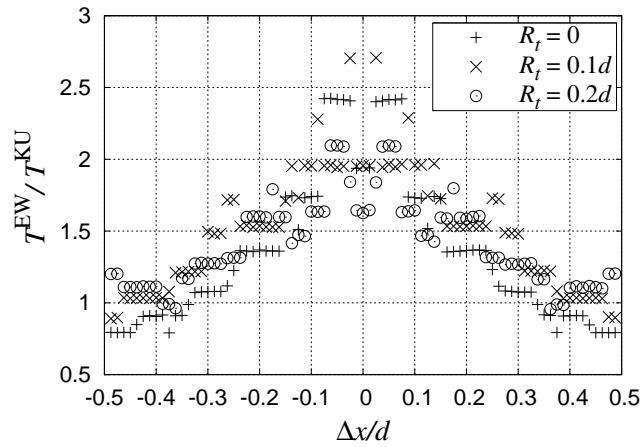


Figura 2.9: Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.28) y (2.43) para calcular G_{3D-1D} con una precisión de al menos ocho cifras significativas. $M = 6$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

Tabla 2.1: Número de términos requeridos en las series de las Ecs. (2.14), (2.28) y (2.43) para la evaluación de G_{3D-1D} con una precisión de al menos ocho cifras significativas. $P = 3$, $M = 6$, $R_t = 0.1d$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

$\Delta x/d$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$2N_1^{\text{is}} + 1$	9	9	9	9	9	9
$2N_2^{\text{is}} + 1$	19	19	21	23	25	27
$2N_1^{\text{ew}} + 1$	7	7	7	7	7	7
$Q + 1$	5	5	5	5	5	5
$2N_2^{\text{ew}} + 1$	7	7	7	7	7	7
N^+	2	2	3	4	6	7
N^-	2	2	3	4	6	7

(a) $d = 0.5\lambda$

$\Delta x/d$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$2N_1^{\text{is}} + 1$	19	21	19	21	21	19
$2N_2^{\text{is}} + 1$	19	21	21	21	19	25
$2N_1^{\text{ew}} + 1$	3	3	5	5	5	5
$Q + 1$	8	8	9	9	9	9
$2N_2^{\text{ew}} + 1$	17	17	19	19	19	19
N^+	2	3	4	5	8	7
N^-	2	3	4	5	7	7

(b) $d = 3.5\lambda$

$2N_1^{\text{is}} + 1$ y $2N_2^{\text{is}} + 1$ representan los números de términos requeridos en la primera y la segunda serie de la Ec. (2.14) respectivamente (esto significa que el número total de términos sumados en la Ec. (2.14) viene dado por $2(N_1^{\text{is}} + N_2^{\text{is}} + 1)$). Asimismo, $2N_1^{\text{ew}} + 1$ y $2N_2^{\text{ew}} + 1$ representan los número de términos que se requieren en la primera y segunda serie en n de la Ec. (2.28), y $Q + 1$ representa el número de términos que requiere la serie en q de la Ec. (2.28) (lo cual significa que el número total de términos sumados en Ec. (2.28) es $(2N_1^{\text{ew}} + 1)(Q + 1) + (2N_2^{\text{ew}} + 1)$). Por último, N^+ y N^- representan los números de términos requeridos en el cálculo de G^+ y G^- respectivamente (con lo cual, el número total de términos sumados con la Ec. (2.43) es $N^+ + N^- + 1$, si se excluye el cálculo de la serie de cola G_{cola}). La Tabla 2.1 muestra que el número total de términos requeridos al evaluar las series

de la Ec. (2.43) (excluyendo G_{cola}) es siempre menor que el número total de términos requeridos al evaluar las series de las Ecs. (2.14) y (2.28). Además, mientras que el número de términos requeridos por las Ecs. (2.14) y (2.28) no varía apreciablemente conforme lo hace $\Delta x/d$ (para valores fijos de d/λ), el número total de términos requeridos por la Ec. (2.43) disminuye conforme disminuye $\Delta x/d$, lo cual está en consonancia con las conclusiones extraídas de la Fig. 2.7 en relación con el peso relativo de las series G^+ y G^- en la evaluación de $G_{3\text{D-1D}}$. Por último, mientras que el número total de términos requeridos por las Ecs. (2.14) y (2.28) aumenta cuando d/λ también aumenta (en el caso del método de Ewald esto ocurre a partir de $d/\lambda \approx 1$), el número total de términos requeridos por la Ec. (2.43) no varía apreciablemente cuando la relación d/λ aumenta.

En la Tablas 2.2(a) y 2.2(b) se presenta una comparación entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.14), (2.27), (2.28) y (2.43) para calcular la función $G_{3\text{D-1D}}$ en 1100 puntos diferentes (con una precisión de cuatro y ocho cifras significativas). Concretamente, en el cálculo de la función $G_{3\text{D-1D}}$ se lleva a cabo un barrido de las variables $\Delta x/d$ y R_t/d en los rangos de valores $\Delta x/d = -0.495 + 0.01m_x$ ($m_x = 0, 1, \dots, 99$) y $R_t/d = 0. + 0.02m_t$ ($m_t = 0, 1, \dots, 10$) mientras los valores de k , k_{x0} y d se mantienen fijos (lo cual constituye un cálculo usual en una aplicación típica del MDM). En aquellos casos en los que $R_t = 0$, la Ec. (2.27) ha sido usada como alternativa a la Ec. (2.14). A diferencia de lo que se hizo en las Figs. 2.8 y 2.9, en la Tabla 2.2 los tiempos de CPU calculados mediante la Ec. (2.43) incluyen los tiempos de CPU necesarios para calcular las series $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (2.46). Hay que señalar que el tiempo de CPU requerido para evaluar estas últimas series representa una pequeña fracción (menor que un 0.5%) del tiempo de CPU total requerido para obtener $G_{3\text{D-1D}}$ en los 1100 puntos, lo cual se debe fundamentalmente a la alta eficiencia computacional de las expresiones que se han deducido para estas series en el Apéndice C.

Las Tablas 2.2(a) y 2.2(b) muestran que los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.14) y (2.27) son muy similares para diferentes valores de P . Esto indica que no hay un beneficio apreciable en el cálculo de la función $G_{3\text{D-1D}}$ cuando aumenta el número de términos retenidos en la transformación de Kummer de

Tabla 2.2: Tiempos de CPU requeridos para calcular 1100 valores de la función G_{3D-1D} por medio de las Ecs. (2.14), (2.27), (2.28) y (2.43). Todos los tiempos de CPU mostrados han sido normalizados al mínimo valor obtenido en cada tabla. $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

	$d = 0.5\lambda$	$d = 3.5\lambda$	$d = 7.0\lambda$
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 1$)	2.20	4.88	7.33
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 2$)	2.89	6.32	10.60
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 3$)	3.78	7.91	13.26
Ec.(2.28)	1.66	3.74	9.52
Ec.(2.43) ($M = 1$)	11.05	13.88	15.05
Ec.(2.43) ($M = 2$)	2.39	2.92	3.39
Ec.(2.43) ($M = 3$)	1.41	1.67	1.82
Ec.(2.43) ($M = 4$)	1.12	1.25	1.41
Ec.(2.43) ($M = 5$)	1.01	1.12	1.22
Ec.(2.43) ($M = 6$)	1.00	1.09	1.17

(a) Cuatro cifras significativas de precisión

	$d = 0.5\lambda$	$d = 3.5\lambda$	$d = 7.0\lambda$
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 1$)	3.63	5.73	7.06
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 2$)	2.76	5.37	7.64
Ecs. (2.14) & (2.27) ($P = 3$)	2.77	5.69	8.57
Ec.(2.28)	1.32	2.92	7.96
Ec.(2.43) ($M = 1$)	525.47	655.88	813.54
Ec.(2.43) ($M = 2$)	21.78	26.85	32.49
Ec.(2.43) ($M = 3$)	4.97	6.27	7.17
Ec.(2.43) ($M = 4$)	2.18	2.65	3.01
Ec.(2.43) ($M = 5$)	1.34	1.56	1.81
Ec.(2.43) ($M = 6$)	1.00	1.21	1.49

(b) Ocho cifras significativas de precisión

las Ecs. (2.14) y (2.27) (o lo que es lo mismo, cuando P aumenta). Para poder explicar este hecho, es necesario tener en cuenta una vez más que aunque las series

involucradas en las Ecs. (2.14) y (2.27) convergen más rápidamente conforme P aumenta, el número de funciones de Bessel de argumento complejo implicado en cada uno de los sumandos de la primera serie de la Ec. (2.14) también aumenta, lo cual contrarresta la reducción de tiempo de CPU que cabe esperar de un ritmo de convergencia más rápido. En las Tablas 2.2(a) y (b) también se observa que el método de Ewald es más rápido que el método espectral de Kummer-Poisson cuando $d/\lambda < 7$. Además, las tablas muestran que mientras el tiempo de CPU requerido por el método de Ewald aumenta rápidamente cuando la relación d/λ se hace mayor que 1 (lo cual está relacionado con el hecho de que el parámetro de separación de la Ec. (2.28) se aleja rápidamente de su valor óptimo, E_{opt}), el tiempo de CPU demandado por la Ec. (2.43) aumenta conforme aumenta d/λ de una forma mucho más lenta (de hecho, mientras que el tiempo de CPU requerido por la Ec. (2.28) para $d/\lambda = 7$ es unas 6 veces mayor que el requerido para $d/\lambda = 0.5$, el tiempo de CPU requerido por la Ec. (2.43) para $d/\lambda = 7$ es aproximadamente 1.5 veces mayor que el demandado para $d/\lambda = 0.5$). Esto indica que el método propuesto en este Capítulo resulta ser especialmente ventajoso frente al método de Ewald cuando el período d es eléctricamente grande (esto es, para $d > \lambda$).

De acuerdo con las Tablas 2.2(a) y 2.2(b), cuando se aplica la transformación de Kummer convencional a la Ec. (2.11) para calcular $G_{3\text{D-1D}}$ (es decir, cuando se utiliza la Ec. (2.43) tomando $M = 1$), el tiempo de CPU requerido es mayor que los que requieren el método espectral de Kummer-Poisson y el método de Ewald. Sin embargo, en el caso de que se exijan cuatro cifras significativas, la Ec. (2.43) resulta ser más rápida que las Ecs. (2.14) y (2.27) cuando $M \gtrsim 2$, y más rápida que el método de Ewald cuando $M \geq 3$ (y cuando se exigen ocho cifras significativas, la Ec. (2.43) es más rápida que las Ecs.(2.14) y (2.27) si $M > 3$, y más rápida que el método de Ewald si $M \gtrsim 4$). Se observa que cuando $M = 6$ y se exigen cuatro cifras significativas de precisión, la Ec. (2.43) es aproximadamente entre 2.2 y 6.3 veces más rápida que (2.14) y (2.27), y entre 1.7 y 8 veces más rápida que el método de Ewald (cuando $M = 6$ y se exige una precisión de ocho cifras significativas, la Ec. (2.43) es entre 2.8 y 4.7 veces más rápida que (2.14) y (2.27), y entre 1.3 y 5 veces más rápida que (2.28)). Haciendo uso de (2.43) y $M > 6$, sería posible obtener tiempos de CPU menores que los recogidos en las Tablas 2.2(a) y

2.2(b). Sin embargo, al igual que ocurría con el método recogido en el Capítulo anterior, los resultados presentados en [74, Fig. 1] indican que existe un valor umbral de M para el cual el tiempo de CPU requerido por la Ec. (2.43) alcanza un mínimo. Cuando M supera ese valor umbral, el tiempo de CPU comienza a crecer por encima del mínimo debido al incremento en el número de operaciones requeridas para la evaluación de las series G^+ , G^- y G_{cola} en las Ecs. (2.45) y (2.46). Dado que los resultados obtenidos en la Tabla 2.2(a) para $M = 5$ y $M = 6$ no difieren apreciablemente, $M = 6$ parece ser el valor umbral de M que minimiza el tiempo de CPU en esta tabla ($M = 6$ parece estar próximo al valor umbral de M en la Tabla 2.2(b)).

Las Figs. 2.8 y 2.9 muestran que el caso $R_t = 0$ proporciona el mejor escenario posible en la aplicación del método espectral de Kummer-Poisson de las Ecs. (2.14) y (2.27), y del método de Ewald de la Ec. (2.28). Por ese motivo, la comparación entre tiempos de CPU que se lleva a cabo en la Tabla 2.2 se repite en la Tabla 2.3 para el caso particular de $R_t = 0$. De forma análoga a como se hizo en la Tabla 2.2, en la Tabla 2.3 se realiza un barrido de $\Delta x/d$ en el rango $\Delta x/d = -0.495 + 0.01m_x$ ($m_x = 0, 1, \dots, 99$) mientras se mantienen fijos los valores de k , k_{x0} y d (además, el tiempo de CPU presentado incluye también el tiempo de CPU requerido en la evaluación de las series $S_i^e[(k + k_{x0})d]$ y $S_i^e[(k - k_{x0})d]$ ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (2.46)). Se observa que las diferencias entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (2.27) ($P \geq 2$) y (2.28), y los requeridos por la Ec. (2.43) ($M \geq 5$) son más pequeños en la Tabla 2.3 que en la Tabla 2.2. Sin embargo, la Ec. (2.43) ($M \geq 5$) sigue siendo competitiva frente a las Ecs. (2.27) ($P \geq 2$) y (2.28) cuando se calcula G_{3D-1D} para el caso $R_t = 0$. De hecho, la Tabla 2.3 muestra que, para $M = 6$, los tiempos de CPU requeridos por la Ec. (2.43) son comparables con los requeridos por las Ecs. (2.27) y (2.28) en el caso $d/\lambda = 0.5$, siendo entre 1.5 y 3 veces menores en los casos $d/\lambda = 3.5$ y $d/\lambda = 7$. Con respecto a la Ec. (2.27), el tiempo de CPU aumenta conforme lo hace d/λ como consecuencia de que también aumenta el número de términos que se necesitan para alcanzar la convergencia en la primera serie de (2.27) (este comportamiento ya fue observado en la primera serie de la Ec. (2.14) cuando $R_t \neq 0$). En el caso de la Ec. (2.28), el hecho de que el tiempo de CPU aumente conforme aumenta la relación d/λ se

Tabla 2.3: Tiempos de CPU requeridos para calcular 100 valores de la función G_{3D-1D} por medio de las Ecs. (2.27), (2.28) y (2.43). Todos los tiempos de CPU mostrados han sido normalizados al mínimo valor obtenido en cada tabla. $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\tan \delta = 0$.

	$d = 0.5\lambda$	$d = 3.5\lambda$	$d = 7.0\lambda$
Ec. (2.27) ($P = 1$)	1.00	1.74	2.56
Ec. (2.27) ($P = 2$)	1.10	1.66	2.48
Ec. (2.27) ($P = 3$)	1.24	2.03	2.97
Ec.(2.28)	1.60	2.59	4.08
Ec.(2.43) ($M = 1$)	10.90	11.86	12.57
Ec.(2.43) ($M = 2$)	2.56	2.66	2.84
Ec.(2.43) ($M = 3$)	1.58	1.59	1.69
Ec.(2.43) ($M = 4$)	1.28	1.30	1.32
Ec.(2.43) ($M = 5$)	1.17	1.20	1.24
Ec.(2.43) ($M = 6$)	1.14	1.18	1.21

(a) Cuatro cifras significativas de precisión

	$d = 0.5\lambda$	$d = 3.5\lambda$	$d = 7.0\lambda$
Ec. (2.27) ($P = 1$)	1.88	3.95	5.77
Ec. (2.27) ($P = 2$)	1.07	1.63	2.14
Ec. (2.27) ($P = 3$)	1.00	1.55	2.03
Ec.(2.28)	1.11	1.56	2.46
Ec.(2.43) ($M = 1$)	501.07	573.49	596.70
Ec.(2.43) ($M = 2$)	21.17	22.95	23.28
Ec.(2.43) ($M = 3$)	4.93	5.03	5.34
Ec.(2.43) ($M = 4$)	2.18	2.23	2.30
Ec.(2.43) ($M = 5$)	1.35	1.38	1.44
Ec.(2.43) ($M = 6$)	1.03	1.06	1.07

(b) Ocho cifras significativas de precisión

debe a que para valores grandes de d/λ es necesario tomar un valor del parámetro de separación E distinto de su valor óptimo (véase la Ec. (2.29)), lo cual, como se ha comentado anteriormente, disminuye la eficiencia del método de Ewald.

2.5. Conclusiones

En este Capítulo se ha usado el método espacial de Kummer para acelerar el cálculo de la serie infinita que conduce a la función de Green 3-D homogénea con periodicidad 1-D. Al aplicar la transformación de Kummer, se ha retenido un número arbitrario de términos en el desarrollo asintótico del término general de la serie espacial, lo cual ha hecho posible descomponer esta serie como suma de una serie con convergencia algebraica de orden arbitrariamente elevado y de una combinación lineal de series para las cuales se han derivado expresiones en forma cuasi-cerrada. Aunque las funciones de Green periódicas con las que se ha tratado deben ser calculadas miles de veces en un análisis típico mediante el MDM, las series que se han obtenido en forma cuasi-cerrada no dependen de las coordenadas de las fuentes y del punto de observación y sólo tienen que calcularse una vez, lo cual implica un considerable ahorro en tiempo de CPU. Los resultados numéricos obtenidos han mostrado que cuando el número de términos asintóticos retenidos en la aplicación del método espacial de Kummer es suficientemente elevado, el método propuesto en este Capítulo es típicamente entre 2.2 y 6.3 veces más rápido que el método espectral de Kummer-Poisson, y entre 1.3 y 8 veces más rápido que el método de Ewald, siendo esta relación fuertemente dependiente de la precisión exigida y de la relación entre el periodo y la longitud de onda.

Capítulo 3

Funciones de Green multicapa no periódicas. Representaciones en forma cerrada en campo lejano y en campo próximo.

3.1. Introducción

En los capítulos anteriores se ha abordado el cálculo eficiente de funciones de Green periódicas en medios homogéneos, para lo cual se han implementado dos métodos diferentes de aceleración de la convergencia de las series involucradas en la obtención de funciones de Green homogéneas 2-D (con periodicidad en una y en dos dimensiones, Capítulo 1) y de funciones de Green homogéneas 3-D (con periodicidad en una dimensión, Capítulo 2). En los dos capítulos restantes de esta tesis nos centraremos en el cálculo eficiente de funciones de Green en medios multicapa, esto es, en medios estratificados compuestos por un número arbitrario de capas dieléctricas (que en general tendrán pérdidas). Concretamente, en este Capítulo 3 abordaremos el cálculo eficiente de funciones de Green multicapa no periódicas, y trataremos de obtener expresiones aproximadas en forma cerrada para dichas funciones de Green que sean suficientemente precisas.

El cálculo de funciones de Green multicapa no periódicas constituyen un paso imprescindible para el análisis electromagnético de estructuras multicapa no periódicas mediante el Método de los Momentos (MDM). Este tipo de análisis es requerido en muchas aplicaciones prácticas, tales como el diseño de circuitos impresos [118] y antenas impresas [119–121], la prospección geofísica [122–124] (y en particular el estudio de la dispersión por objetos parcialmente/completamente enterrados [38, 39, 42, 43, 125–127]), la teledetección [128, 129], etc.

Por otro lado, el estudio de las funciones de Green multicapa no periódicas constituye un paso previo y necesario para la obtención de funciones de Green multicapa periódicas. Como veremos en el Capítulo 4, el aprendizaje que se va a llevar a cabo en este Capítulo sobre las propiedades de las funciones de Green multicapa no periódicas para valores grandes y pequeños de las variables espaciales y espectrales será de gran utilidad a la hora de llevar a cabo el cálculo eficiente de las funciones de Green multicapa periódicas.

Como se comentó en la introducción de esta tesis, el análisis electromagnético de estructuras multicapa no periódicas puede ser planteado como un problema de ecuaciones integrales para el campo eléctrico o para los potenciales. Si nos restringimos a las ecuaciones integrales de potenciales mixtos (EIPM) e intentamos resolver este tipo de ecuaciones mediante el MDM, vamos a necesitar conocer las funciones de Green no periódicas espaciales para los potenciales escalar y vector en medios multicapa [10, 32]. A diferencia de lo que ocurre en el caso de medios homogéneos, en el caso de medios multicapa no existen expresiones en forma cerrada para las funciones de Green no periódicas espaciales. En cambio, sí es posible obtener expresiones en forma cerrada para las funciones de Green multicapa espectrales. En ese caso, las funciones de Green multicapa no periódicas espaciales pueden ser obtenidas en términos de sus contrapartidas espectrales mediante transformadas inversas de Hankel [17], transformadas a las que se suele conocer en este ámbito como integrales de Sommerfeld [16, 130]. Es bien sabido que las funciones de Green espectrales se pueden expresar como un cociente de expresiones que contienen funciones trascendentes (véase, por ejemplo, el Apéndice F). Existe un número infinito y numerable de valores de la variable espectral

k_ρ que hacen que las funciones de Green espectrales tiendan a infinito, y esos valores de k_ρ constituyen los polos de dichas funciones de Green espectrales [32]. Esos polos pueden ser interpretados, desde un punto de vista físico, como las constantes de propagación de las ondas de superficie que se propagan por el medio multicapa para el que se calculan las funciones de Green. Las propiedades de estos polos dependen de la geometría del medio multicapa, y de los materiales que lo componen [15, 16, 32]. Además, en el caso en que el medio multicapa esté limitado por arriba o por abajo (o por los dos lados) por aire (cuya permitividad y permeabilidad supondremos iguales a las del vacío), las funciones de Green espectrales serán funciones bivaluadas de la variable espectral k_ρ debido a que en las expresiones de estas funciones de Green aparecerá de forma explícita la raíz cuadrada $\pm\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ ($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ es el número de ondas en vacío). Desde el punto de vista matemático, esta duplicidad se refleja en la aparición de una pareja de puntos de ramificación [17] localizados en $k_\rho = \pm k_0$ y en la aparición de dos hojas de Riemann [16, Cap. 5]. En esta tesis, se va a adoptar la elección de Sommerfeld para las hojas de Riemann [32], de forma que hablaremos de hoja de Riemann *propia* si $\text{Re}\left(\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}\right) > 0$ o si $\text{Im}\left(\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}\right) < 0$ (lo cual da lugar a ondas que se propagan o se atenúan en el sentido en que nos alejamos de la fuente, o lo que es lo mismo, a ondas con sentido físico) y hoja de Riemann *impropia* en caso contrario, es decir, si $\text{Re}\left(\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}\right) < 0$ o si $\text{Im}\left(\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}\right) > 0$ (lo cual da lugar a ondas que se propagan o se atenúan en el sentido en que nos acercamos de la fuente, y de ahí el nombre de hoja impropia).

La presencia de polos y puntos de ramificación en las funciones de Green espectrales da lugar a que las integrales de Sommerfeld no se puedan realizar a través de cualquier trayectoria en el plano complejo k_ρ [32]. Además, la naturaleza altamente oscilante de los integrandos involucrados en las integrales de Sommerfeld hace que su cálculo numérico mediante procedimientos convencionales sea muy laborioso y requiera un alto consumo computacional [10, 32, 50]. Entre las diferentes técnicas que se han propuesto para acelerar la evaluación de las integrales de Sommerfeld (véanse, por ejemplo, las referencias que se recogen en [51]), las más eficientes son aquéllas que aproximan las funciones de Green espectrales en términos de funciones simples de modo que las integrales

de Sommerfeld de las aproximaciones obtenidas pueden ser calculadas en forma cerrada. Estas técnicas pueden clasificarse en dos grupos. El primer grupo usa el método de las imágenes complejas discretas (MICD) [52, 131, 132], e intenta obtener aproximaciones de las funciones de Green en el dominio espacial que consisten principalmente en ondas esféricas. Las amplitudes y constantes de propagación de esas ondas esféricas se calculan mediante el método de Prony o el método del Pincel de Matrices [133, 134]. El segundo grupo de técnicas usa el método de ajuste mediante funciones racionales (MAFR) e intenta obtener aproximaciones de las funciones de Green espaciales en términos de ondas cilíndricas. Las amplitudes y constantes de propagación de dichas ondas cilíndricas pueden ser calculadas mediante la resolución de un problema de autovalores [55, 135], mediante un algoritmo de ajuste vectorial iterativo [53, 136], o mediante el método de los mínimos cuadrados totales [51]. Desgraciadamente, tanto las técnicas basadas en el MICD como las basadas en el MAFR sólo reproducen una parte de la información contenida en las funciones de Green espectrales, y por tanto, no son capaces de proporcionar resultados precisos en todo el rango de distancias entre el punto fuente y el punto de observación. A partir de ahora, y abusando un poco del lenguaje, llamaremos región de campo próximo a la región que contiene aquellos puntos de observación que están separados del punto fuente una distancia horizontal ξ (la distancia horizontal se define como la distancia existente entre el punto fuente y la proyección del punto de observación sobre el plano que contiene a la fuente y es paralelo a las interfases entre capas) inferior a una longitud de onda en vacío λ_0 , y llamaremos región de campo lejano a la región que contiene a los puntos de observación para los que $\xi > \lambda_0$. Esta terminología de regiones de campo próximo y campo lejano, que no debe ser confundida con la que se utiliza habitualmente en la teoría de antenas [137], nos va a ayudar a establecer las limitaciones de las técnicas de cálculo de funciones de Green multicapa espaciales basadas en el MICD y en el MAFR.

Por un lado, para valores moderados y grandes de la variable espectral k_ρ (típicamente en el intervalo $k_\rho \gtrsim 1.2k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$, donde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de ondas en vacío y ε_{\max} es el valor máximo que toma la constante dieléctrica en los materiales del medio multicapa), las funciones de Green multicapa espectrales

pueden aproximarse de forma eficiente mediante un término asintótico más una combinación de exponenciales. El término asintótico da cuenta de la singularidad de la fuente y las exponenciales dan cuenta de las imágenes cuasi-estáticas o cuasi-dinámicas de la fuente a través de las interfases entre capas [131, 138]. El MICD permite reproducir con gran exactitud el término asintótico y la combinación de exponenciales, y por tanto, permite conseguir una aproximación muy precisa de las funciones de Green espectrales en el intervalo $k_\rho \gtrsim 1.2k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$. De acuerdo con la teoría de transformadas de Fourier (las integrales de Sommerfeld pueden ser expresadas como transformadas de Fourier bidimensionales), esta aproximación precisa de las funciones de Green multicapa espectrales en el intervalo $k_\rho \gtrsim 1.2k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$ da lugar a que el MICD permita obtener aproximaciones precisas de las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo próximo ($\xi < \lambda_0$). Sin embargo, tal y como se recoge en la bibliografía [54, 139], el MICD falla a la hora de proporcionar resultados precisos para las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo lejano. A pesar de los numerosos intentos que se han realizado para aumentar el rango de validez del MICD en la región de campo lejano, el aumento de precisión que se ha conseguido en dicha región ha sido a expensas de aumentar considerablemente el número de exponenciales requeridas en la aproximación de las funciones de Green multicapa espectrales, con el consiguiente aumento en el tiempo de CPU [140, 141].

Por otro lado, para valores pequeños de la variable espectral k_ρ (esto es, en el intervalo $k_\rho \lesssim 1.2k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$), el comportamiento de las funciones de Green multicapa espectrales está dominado por las singularidades debidas a los polos y los puntos de ramificación [16, 130]. Las singularidades causadas por los polos están vinculadas a lo que se conoce como *espectro discreto* de las funciones de Green, y las singularidades causadas por los puntos de ramificación están vinculadas al llamado *espectro continuo* [16]. El MAFR se basa en una aproximación de las funciones de Green multicapa espectrales mediante una suma finita de términos del tipo polo-residuo, y por consiguiente, conduce a una estimación muy precisa de los polos de dichas funciones de Green [51, 53]. De acuerdo una vez más con la teoría de transformadas de Fourier, en aquellos casos en los que el espectro

discreto domine el comportamiento de las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo lejano, el MAFR proporcionará una aproximación muy precisa de dichas funciones de Green en la citada región de campo lejano. Sin embargo, el MAFR fallará a la hora de aproximar las funciones de Green en la región de campo lejano cuando dichas funciones de Green estén dominadas por el espectro continuo ya que los puntos de ramificación de las funciones de Green multicapa espectrales no pueden ser tenidos en cuenta por el MAFR [132]. Además, el MAFR encuentra muchas dificultades para aproximar las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo próximo ya que no contempla la singularidad de la fuente y sus imágenes y, en consecuencia, necesita un elevado número de términos del tipo polo-residuo en la aproximación de las funciones de Green espectrales para conseguir resultados aceptables en la región de campo próximo [55].

Con vistas a aliviar el problema del MICD en la región de campo lejano (es decir, para $\xi \gtrsim \lambda_0$), varios investigadores han propuesto añadir un término de ondas de superficie con los polos de la hoja de Riemann propia al ajuste mediante exponenciales de las funciones de Green multicapa espectrales [131, 142]. Otra posibilidad que también se ha sugerido es la utilización de una aproximación tipo “carrera de relevos”, en la cual el MICD se deja para aproximar las funciones de Green en la región de campo próximo, y las ondas de superficie se introducen en la región de campo lejano [54, 143]. Incluso se han llegado a proponer modificaciones en el MICD con vistas a capturar la contribución de las ondas residuales del espectro continuo en la región de campo lejano mediante una combinación de exponenciales [144]. También se han propuesto estrategias para corregir los problemas del MAFR en la región de campo próximo. De hecho, los autores de [53, 136] y [51] sugieren que estos problemas se ven considerablemente mitigados si se añade un término asintótico cuasi-estático a la aproximación que hace el MAFR de las funciones de Green multicapa espectrales. Recientemente, Polymeridis *et al.* han propuesto una técnica híbrida que hace uso conjuntamente del MICD y del MAFR con vistas a obtener aproximaciones de las funciones de Green espaciales que son precisas tanto en la región de campo próximo como en la de campo lejano [145, 146], quedando limitada la validez de esas aproximaciones a

los casos en los que el espectro discreto domina el comportamiento de las funciones de Green en la región de campo lejano. El problema de la incorporación de las ondas residuales del espectro continuo en el MAFR ha sido tratado en [132] en el caso particular en que los polos propios y/o impropios (esto es, los polos de las hojas de Riemann propia e impropia) de las funciones de Green espectrales están muy cerca de los puntos de ramificación $k_\rho = \pm k_0$. Sin embargo, las expresiones obtenidas en [132] pierden rápidamente precisión cuando los polos se alejan de los puntos de ramificación. En este Capítulo se van a presentar nuevas expresiones aproximadas para las ondas residuales [56, Ec.(6)] que son más precisas que las obtenidas en [132] en los casos en los que los polos de las funciones de Green espectrales no están próximos a los puntos de ramificación. Desgraciadamente, a lo largo del Capítulo se pondrá de manifiesto que esas nuevas expresiones [56] son aproximaciones poco precisas con unos márgenes de error bastante elevados. Por este motivo, después de presentar las expresiones de [56], dentro del mismo Capítulo se van a llevar a cabo desarrollos asintóticos uniformes de las integrales que representan a las ondas residuales. Estos nuevos desarrollos asintóticos aseguran el cálculo de la contribución de estas ondas con un error inferior al 0.1 % en toda la región de campo lejano [147].

En la región de campo lejano, las funciones de Green multicapa no periódicas espaciales consisten básicamente en una combinación de ondas de superficie y ondas residuales. La determinación precisa de las expresiones de las ondas de superficie y de las ondas residuales requiere a su vez la determinación precisa de los polos propios de las funciones de Green espectrales [142], de los polos impropios que están en las proximidades de los puntos de ramificación [56, 132], y por último, de los residuos de las funciones de Green espectrales en todos esos polos. La mayoría de los métodos que se han publicado sobre el cálculo numérico de los polos de las funciones de Green multicapa espectrales [142, 148–150] tienen un alto coste computacional porque requieren el cálculo numérico de integrales en el campo complejo, y porque en muchos casos necesitan refinar los polos encontrados en una primera etapa mediante el método iterativo de Newton-Raphson. Se han propuesto también métodos que estiman los polos a partir de las raíces de un

polinomio, y después refinan las estimaciones mediante el método de Newton-Raphson [151, 152]. En este Capítulo se presenta un método para la determinación de los polos y los residuos de las funciones de Green multicapa espectrales que está basado en la aplicación del MAFR en términos de la variable espectral $u_0 = (k_\rho^2 - k_0^2)^{1/2}$. Esto introduce una novedad sobre el MAFR clásico, que siempre había sido aplicado en términos de la variable espectral k_ρ [51, 53, 136]. La gran ventaja de trabajar con la variable u_0 es que las funciones de Green espectrales no tienen puntos de ramificación en esa variable, y eso permite determinar los polos propios e impropios de las funciones de Green espectrales con gran precisión, independientemente de su proximidad a los puntos de ramificación en $k_\rho = \pm k_0$ (la proximidad de los polos a los puntos de ramificación es un problema cuando se trabaja en la variable k_ρ ya que la presencia de los puntos de ramificación dificulta mucho la determinación precisa de dichos polos). A la hora de aplicar el MAFR, en este Capítulo se hace uso del método de los mínimos cuadrados totales (MMCT) descrito en [51] (los fundamentos del método de los mínimos cuadrados totales pueden consultarse en [153] y en el Apéndice D). La utilización del MMCT en la evaluación de los polos y residuos de las funciones de Green espectrales tiene un bajo coste computacional (sólo requiere la evaluación de las funciones de Green para un número reducido de $2N + 3$ muestras –con un valor de N normalmente en el rango $3 \leq N \leq 14$ –, la determinación de las raíces de un polinomio de grado $N/2$, y la resolución de un sistema de N ecuaciones lineales [51]), y lo que es aún más importante, no requiere técnicas de Newton-Raphson de refinamiento de polos para las dimensiones específicas de los medios multicapa que se encuentran en la práctica en circuitos y antenas en tecnología impresa.

Como ya se ha mencionado, la aplicación del MAFR en la variable espectral u_0 permite obtener de forma muy precisa tanto los polos de las funciones de Green espectrales situados en las proximidades de los puntos de ramificación como los residuos de estos polos. Además, la aplicación del MAFR conduce a expresiones aproximadas de las funciones de Green espectrales que son muy precisas en la región del plano complejo situada en torno a los polos propios y a los puntos de ramificación. Si bien no es posible obtener las integrales de Sommerfeld de estas

expresiones aproximadas en la variable u_0 , en este Capítulo se han llevado a cabo desarrollos asintóticos uniformes de dichas integrales de Sommerfeld, válidos para valores grandes de la variable espacial ξ . Estos desarrollos asintóticos han permitido obtener expresiones en forma cerrada para las funciones de Green espaciales en la región de campo lejano en términos de ondas de superficie y de ondas residuales, tal y como se ha comentado con anterioridad. Los resultados obtenidos para las funciones de Green con las expresiones de campo lejano han sido comparados con los resultados obtenidos mediante integración numérica de las integrales de Sommerfeld, y se ha comprobado que las expresiones en forma cerrada tienen como mínimo una precisión del 0.1 % si $\xi > \lambda_0$. Este nivel de precisión obtenido para las funciones de Green multicapa espaciales es similar al obtenido para las funciones de Green espaciales de medios con una sola capa dieléctrica en [154] y [155] mediante el uso combinado del método de la máxima pendiente (*steepest descent method* en la bibliografía en inglés) y el método de desarrollos asintóticos de integrales [156]. Con objeto de tener una representación completa de las funciones de Green espaciales en todo el rango de valores de ξ , en este Capítulo también se derivan expresiones en forma cerrada de las funciones de Green multicapa espaciales que sean válidas en la región de campo próximo (es decir, para el rango $\xi < \lambda_0$). La obtención de esas expresiones está basada en una variante del método híbrido MICD-MAFR publicado en [145, 146]. La variante que se presenta del método híbrido MICD-MAFR tiene la ventaja de requerir menos recursos computacionales que la versión publicada en [145, 146]. Los resultados obtenidos con las expresiones de campo próximo han sido comparados también con los resultados obtenidos mediante integración numérica de las integrales de Sommerfeld, observándose de nuevo que las expresiones en forma cerrada tienen típicamente una precisión del 0.1 % si $\xi < \lambda_0$. Esto significa que las expresiones obtenidas para la región de campo próximo (mediante el método híbrido MICD-MAFR) y para la región de campo lejano (mediante el MAFR en la variable u_0 y el desarrollo asintótico uniforme de las integrales de Sommerfeld) constituyen una representación de las funciones de Green multicapa espaciales del tipo “carrera de relevos” que cubre por completo el rango de valores de ξ con

un error que es típicamente inferior al 0.1 %. Otras ventajas adicionales de las expresiones en forma cerrada propuestas en este Capítulo es que pueden aplicarse tanto al caso de un medio con pérdidas como al caso de un medio sin pérdidas, y que mantienen su precisión en un amplio rango de frecuencias (que va desde MHz hasta varias decenas de GHz para las dimensiones típicas de los medios multicapa usados en circuitos y antenas en tecnología impresa).

Los contenidos de este Capítulo están organizados como se indica a continuación. En la sección 3.2 se describe el problema que se va a resolver y se introduce la notación que se seguirá a lo largo del Capítulo. Posteriormente, en la sección 3.3 se muestra la aplicación del MAFR en la variable u_0 a la obtención de los polos y residuos de las funciones de Green espectrales, y a la derivación de expresiones asintóticas en forma cerrada para el campo lejano de las funciones de Green multicapa espaciales. La sección 3.4 describe la aplicación conjunta del MICD y el MAFR en la variable k_ρ a la derivación de expresiones en forma cerrada para el campo próximo de las funciones de Green multicapa espaciales. En la sección 3.5 los resultados obtenidos para las funciones de Green espaciales mediante las expresiones en forma cerrada en campo próximo y en campo lejano son comparados con los resultados que se obtienen mediante integración numérica de las integrales de Sommerfeld. Las conclusiones se resumen en la sección 3.6.

3.2. Funciones de Green en medios multicapa e integrales de Sommerfeld

3.2.1. Formulación C de Michalski y Zheng para EIPM en medios multicapa

En la Fig. 3.1 se muestra un medio multicapa compuesto por N_{ca} capas dieléctricas (que, en general, tienen pérdidas) de permitividad $\varepsilon_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ri} (1 - \tan \delta_i)$, permeabilidad μ_0 y espesor h_i ($i = 1, \dots, N_{ca}$). Supondremos que las capas se extienden hasta el infinito en las direcciones x e y . Asimismo, supondremos que el medio multicapa está limitado superiormente por una región semi-infinita de aire (cuya permitividad y permeabilidad se supondrán iguales a las del vacío), e inferiormente, bien por un plano conductor a tierra, bien por otra región semi-infinita

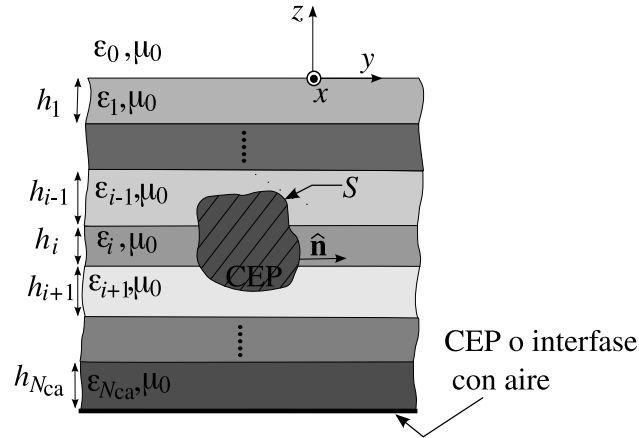


Figura 3.1: Conductor eléctrico perfecto (CEP) embebido en un medio multicapa sobre el que actúa un campo eléctrico de excitación de fasor $\mathbf{E}_{\text{exc}}(\mathbf{r})$.

de aire. Un objeto conductor eléctrico perfecto (CEP) se encuentra embebido en el medio multicapa. El objeto conductor ocupa “ p ” dieléctricos consecutivos del medio multicapa ($1 \leq p \leq N_{\text{ca}} + 2$, donde se sobrentiende que el objeto conductor perfecto puede entrar dentro de las dos regiones semi-infinitas de aire) a los que designaremos l_i ($i = 1, \dots, p$).

En el estudio que vamos a realizar a partir de ahora, vamos a suponer que todas las magnitudes físicas involucradas tienen una dependencia con el tiempo del tipo $e^{j\omega t}$. Esa dependencia con el tiempo no se tendrá en cuenta explícitamente, y las magnitudes serán representadas mediante sus fasores (o, en un sentido más amplio, mediante sus transformadas de Fourier).

Supongamos que una onda plana incide sobre el medio multicapa de la Fig. 3.1 convirtiendo al objeto conductor en “objeto dispersor”, o que una fuente alimenta al objeto conductor convirtiéndolo en un “objeto radiante”. Tanto en el caso de excitación mediante una onda plana como en el caso de excitación mediante una fuente, sea $\mathbf{E}_{\text{exc}}(\mathbf{r})$ el campo eléctrico de excitación impuesto sobre el objeto y sea $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ la densidad de corriente superficial excitada en el objeto. Como hemos dicho que el objeto es un CEP, el campo eléctrico tangencial se anulará sobre su superficie, lo cual nos permite escribir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r})) = 0 \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.1)$$

siendo S la superficie del objeto y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal a dicha superficie. De acuerdo con [32], el campo eléctrico dispersado por un objeto conductor puede escribirse:

$$\mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r}) = \int_S \overline{\mathbf{G}}^{\text{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') \, ds', \quad (3.2)$$

donde $\overline{\mathbf{G}}^{\text{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green diádica para el campo eléctrico en el medio multicapa, cuyas columnas representan los campos eléctricos creados por tres dipolos puntuales (esto es, por tres elementos de corriente infinitesimales) situados en el punto de vector de posición \mathbf{r}' , y orientados a lo largo de los ejes x , y y z . Sustituyendo la Ec. (3.2) en la Ec. (3.1), obtenemos una ecuación integral de campo eléctrico (EICE) para la densidad de corriente sobre el objeto conductor, dada por:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left\{ \mathbf{E}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) + \int_S \overline{\mathbf{G}}^{\text{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') \, ds' \right\} = 0 \quad \mathbf{r} \in S. \quad (3.3)$$

En [38] se comenta que la EICE de la Ec. (3.3) es muy poco conveniente para el cálculo de la densidad de corriente $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ desde el punto de vista numérico. Por un lado, el núcleo de la ecuación integral es altamente singular, lo cual dificulta considerablemente el cálculo de las integrales que se obtienen al aplicar el método de los momentos a la resolución de dicha ecuación. Por otro lado, para calcular $\overline{\mathbf{G}}^{\text{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, es preciso obtener numéricamente integrales de Sommerfeld que convergen aún más lentamente que las que se obtienen para las funciones de Green multicapa de los potenciales que aparecen al abordar el problema mediante una ecuación integral de potenciales mixtos (EIPM). Estas desventajas hacen que sea preferible obtener $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ mediante la resolución de una EIPM.

Para poder obtener esta EIPM, introduciremos en primer lugar la función de Green para el potencial vector magnético. Dado que en el medio de la Fig. 3.1 se cumple que $\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, se cumplirá también que [10]:

$$\mu_0 \overline{\mathbf{G}}^{\text{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \overline{\mathbf{G}}^{\text{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.4)$$

donde $\overline{\mathbf{G}}^{\text{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green diádica para el campo magnético y $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green diádica para el potencial vector. Como la Ec. (3.4) no especifica de manera unívoca $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A}}$, existen diferentes elecciones posibles para la función de Green diádica para el potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A}}$. En esta memoria, vamos a

seguir la formulación C de Michalski y Zheng [38] con vistas a la obtención de una EIPM para la densidad de corriente $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ sobre el objeto de la Fig. 3.1. En esta formulación, la elección que se hace para la función de Green diádica para el potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^A$ es la misma que propuso Sommerfeld [157] en el estudio de la radiación de un dipolo puntual paralelo a la interfase entre dos medios semi-infinitos. Esta elección de $\overline{\mathbf{G}}^A$ viene dada por la siguiente expresión matricial:

$$\overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_{xx}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & 0 \\ 0 & G_{xx}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 \\ G_{zx}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zy}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zz}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La elección realizada en la Ec. (3.5) equivale a decir que un dipolo horizontal puntual (orientado en las direcciones x e y de la Fig. 3.1, paralelamente a las interfases del medio multicapa) creará componentes horizontales y verticales del potencial vector magnético, y que un dipolo vertical puntual (orientado en la dirección z de la Fig. 3.1, perpendicularmente a las interfases del medio multicapa) sólo creará componente vertical del potencial vector magnético. Como se comenta en [32], la elección de una función de Green diádica $\overline{\mathbf{G}}^A$ no diagonal es imprescindible para poder satisfacer la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico y del campo magnético en las interfases del medio multicapa de la Fig. 3.1.

De acuerdo con la formulación C de Michalski y Zheng, para poder obtener una EIPM para el objeto conductor de la Fig. 3.1 que sea numéricamente eficiente, es necesario que la función de Green diádica $\overline{\mathbf{G}}^A$ definida en (3.5) satisfaga en cada una de las capas del medio multicapa la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\varepsilon_i \mu_0 \nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \omega^2 \varepsilon_i \mu_0 C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}, \quad -d_i < z < -d_{i-1}, \quad (3.6)$$

donde $d_j = \sum_{i=1}^j h_i$ ($i = 1, \dots, N_{ca}$; $j = 0, \dots, N_{ca}$). Además, en las regiones semi-infinitas de aire, $\overline{\mathbf{G}}^A$ deberá satisfacer la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\varepsilon_0 \mu_0 \nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.7)$$

En las Ecs. (3.6) y (3.7), $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el potencial escalar eléctrico que crea una de las cargas puntuales constituyentes de un dipolo horizontal puntual

situado en el punto de vector de posición \mathbf{r}' del medio multicapa de la Fig. 3.1 [38]. Por su parte, la función $C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de las Ecs. (3.6) y (3.7) constituye lo que se conoce como *factor de corrección* [10, 38].

Por analogía con la Ec. (3.2), el potencial vector creado en el medio multicapa de la Fig. 3.1 por las corrientes excitadas en el objeto conductor puede escribirse (véase la Ec. (3.2)):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_S \overline{\mathbf{G}}^{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' . \quad (3.8)$$

Por su parte, el potencial escalar puede obtenerse en el dieléctrico i -ésimo que contiene a parte del objeto conductor ($i = 1_1, \dots, 1_p$) mediante el *gauge de Lorentz* como se indica a continuación:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega \varepsilon_i \mu_0} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \tau_i , \quad (3.9)$$

donde τ_i ($i = 1_1, \dots, 1_p$) es la región ocupada por el dieléctrico i -ésimo que contiene a parte del objeto conductor, $\varepsilon_{1_1} = \varepsilon_0$ si el objeto conductor penetra en la región de aire superior y $\varepsilon_{1_p} = \varepsilon_0$ si el objeto conductor penetra en la región de aire inferior.

Si ahora sustituimos la Ec. (3.8) en la Ec. (3.9) y, a continuación, hacemos uso de las Ecs. (3.6) y (3.7) en la expresión resultante, se obtiene la siguiente expresión para $\phi(\mathbf{r})$ en la región τ_i :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{j}{\omega \varepsilon_i \mu_0} \int_S \left[\nabla \cdot \overline{\mathbf{G}}^{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' \\ &= \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' + j\omega \int_S [C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}] \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' \quad \mathbf{r} \in \tau_i . \end{aligned} \quad (3.10)$$

La primera de las integrales de la Ec. (3.10) puede escribirse de una manera más conveniente con vistas a la obtención de una EIPM para la estructura de la Fig. 3.1. Por un lado, haremos uso de la identidad vectorial:

$$\nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot [G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}')] - G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')] . \quad (3.11)$$

Por otro lado, haremos uso de la ecuación de continuidad sobre la superficie S del objeto conductor de la Fig. 3.1, según la cual:

$$\nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') = -j\omega \sigma(\mathbf{r}') , \quad (3.12)$$

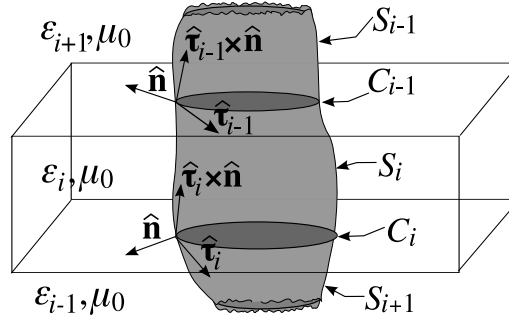


Figura 3.2: Intersección del objeto conductor con las interfases del medio multicapa.

donde $\sigma(\mathbf{r}')$ es la densidad superficial de carga sobre la superficie S . Si ahora introducimos las Ecs. (3.11) y (3.12) en la primera de las integrales de (3.10) se llega a que:

$$\int_S \nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' = \int_S \nabla' \cdot [G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}')] ds' + j\omega \int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') ds'. \quad (3.13)$$

Sea ahora S_i ($i = 1, \dots, l_p$) la porción de S en contacto con el dieléctrico i -ésimo que contiene al objeto conductor. La primera integral del segundo miembro de la Ec. (3.13) puede escribirse:

$$\int_S \nabla' \cdot [G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}')] ds' = \sum_{i=1}^{l_p} \int_{S_i} \nabla' \cdot [G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}')] ds'. \quad (3.14)$$

Sean ahora C_i ($i = 1, \dots, l_{p-1}$) las $p-1$ curvas cerradas que resultan de la intersección de S con las interfases planas del medio multicapa, y sean $\hat{\tau}_i$ los vectores unitarios tangentes a dichas curvas (véase la Fig. 3.2). Si aplicamos el teorema de Gauss bidimensional a las integrales que aparecen en el segundo miembro de la Ec. (3.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l_p} \int_{S_i} \nabla' \cdot [G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}')] ds' &= - \oint_{C_{l_1}} G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'+}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') \cdot (\hat{\tau}_{l_1} \times \hat{\mathbf{n}}) dl' \\ &+ \sum_{i=1+1}^{l_p-1} \left[\oint_{C_{i-1}} G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{\prime-}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') \cdot (\hat{\tau}_{i-1} \times \hat{\mathbf{n}}) dl' - \oint_{C_i} G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{\prime+}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') \cdot (\hat{\tau}_i \times \hat{\mathbf{n}}) dl' \right] \\ &+ \oint_{C_{l_{p-1}}} G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{\prime-}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') \cdot (\hat{\tau}_{l_{p-1}} \times \hat{\mathbf{n}}) dl'. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'+}) \Big|_{C_i} = G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'^-) \Big|_{C_i}$ ($i = 1, \dots, l_{p-1}$) [38] (esto es, el potencial escalar creado por una carga puntual asociada a un dipolo horizontal en un medio multicapa tiene el mismo valor tanto si el dipolo está situado una distancia infinitesimal por encima de la interfase entre dos capas como si está situado una distancia infinitesimal por debajo de esa misma interfase), resulta que el primer miembro de la Ec. (3.15) es nulo, con lo cual, el primer miembro de la ecuación (3.14) también será nulo y podremos reescribir la Ec. (3.13) como se indica:

$$\int_S \nabla' G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' = j\omega \int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') ds'. \quad (3.16)$$

Sustituyendo ahora (3.16) en (3.10), se llega a que:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') ds' + j\omega \int_S [C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}] \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' \quad \mathbf{r} \in \tau_i. \quad (3.17)$$

Por otro lado, el campo eléctrico dispersado en las regiones τ_i ($i = 1, \dots, l_p$) viene dado por:

$$\mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla \phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \tau_i \quad (i = 1, \dots, l_p). \quad (3.18)$$

Si introducimos (3.8) y (3.17) en (3.18), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_S \left\{ \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla \otimes [C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}] \right\} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' \\ - \nabla \left[\int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') ds' \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\nabla \otimes [C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}]$ representa un producto diádico [15]. Vamos a definir ahora una función de Green diádica modificada para el potencial vector como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla \otimes [C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}] \\ &= \begin{pmatrix} G_{xx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & 0 & G_{xz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ 0 & G_{xx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{yz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ G_{zx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zy}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & G_{zz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde:

$$G_{xx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{xx}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.21)$$

$$G_{zx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{zx}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.22)$$

$$G_{zy}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{zy}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.23)$$

$$G_{xz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x} \quad (3.24)$$

$$G_{yz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y} \quad (3.25)$$

$$G_{zz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{zz}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial C^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Si introducimos la Ec. (3.20) en la Ec. (3.19), se obtiene que:

$$\mathbf{E}_{\text{dis}}(\mathbf{r}) = -j\omega \int_S \overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' - \nabla \left[\int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') ds' \right] \quad \mathbf{r} \in \tau_i. \quad (3.27)$$

La expresión (3.27) para el campo dispersado por el objeto conductor embutido en el medio multicapa tiene la misma estructura matemática que la que tiene el campo dispersado por un objeto conductor (dispersor o radiante) situado en un medio homogéneo. De hecho, $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ juega en un medio multicapa el mismo papel que juega la función de Green diádica para el potencial vector en un medio homogéneo. Y $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ juega en el medio multicapa el mismo papel que juega la función de Green para el potencial escalar en un medio homogéneo. Por este motivo, a partir de ahora, llamaremos a $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ *función de Green multicapa para el potencial vector*, y a $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, *función de Green multicapa para el potencial escalar*.

Si en la Ec. (3.27) se expresa la densidad superficial de carga $\sigma(\mathbf{r}')$ en términos de la densidad de corriente $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ haciendo uso de (3.12), y la expresión resultante se sustituye en la Ec. (3.1), se obtiene la siguiente ecuación integral para la densidad de corriente $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ [10, Ec. (58)]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left\{ \mathbf{E}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) - j\omega \int_S \overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds' + \frac{1}{j\omega} \nabla \left[\int_S G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')) ds' \right] \right\} = 0 \quad \mathbf{r} \in S. \quad (3.28)$$

La Ec. (3.28) constituye la ecuación integral de potenciales mixtos para la estructura de la Fig. 3.1 en el marco de la formulación C de Michalski y Zheng.

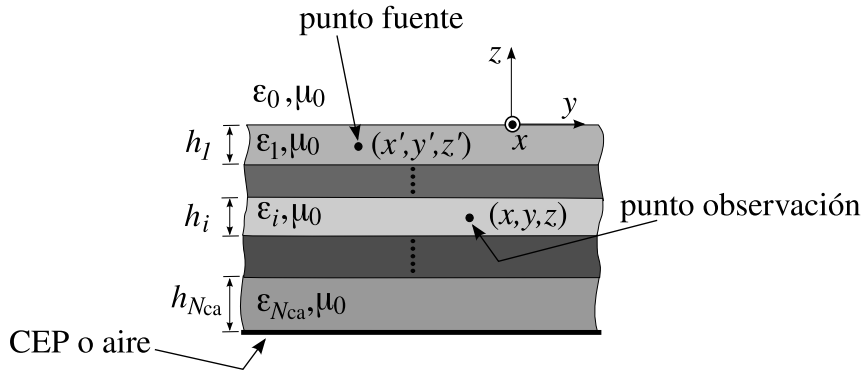


Figura 3.3: Medio multicapa de la Fig. 3.1. El punto de observación y el punto fuente pueden estar arbitrariamente localizados en las capas dieléctricas o en las regiones semi-infinitas de aire.

Se han elaborado estrategias muy potentes para resolver ecuaciones integrales como la Ec. (3.28) mediante el método de los momentos con vistas al análisis del *scattering* y la radiación por objetos conductores en medios homogéneos [45, 46]. Pues bien, gracias a la definición de las funciones de Green multicapa para el potencial vector y para el potencial escalar, $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, esas mismas estrategias pueden aplicarse a la resolución de la Ec. (3.28) con vistas al análisis del *scattering* y la radiación por objetos conductores en medios multicapa (véase la Fig. 3.1).

3.2.2. Integrales de Sommerfeld. Funciones de Green multicapa para los potenciales vector y escalar

Si bien en medios homogéneos las funciones de Green para el potencial vector y el potencial escalar pueden obtenerse en forma cerrada, eso no es posible en el caso de las funciones de Green multicapa $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de la Ec. (3.28). No obstante, las transformadas de Fourier bidimensionales de los elementos de $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y de $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sí pueden obtenerse en forma cerrada mediante algoritmos recurrentes que se presentan en el Apéndice F. Por tanto, una vez conocidas sus transformadas de Fourier, $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pueden obtenerse mediante transformadas inversas de Fourier bidimensionales que, como veremos en esta sección, pueden expresarse a su vez como transformadas inversas de Hankel.

En la Fig. 3.3 se representa el medio multicapa de la Fig. 3.1 en el caso en el que existe una fuente puntual (dipolo horizontal o vertical) en el punto fuente de vector de posición $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$. Consideremos en el medio multicapa un punto de observación de vector de posición $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Sea $\xi = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ la distancia horizontal entre el punto fuente y el punto de observación (distancia entre el punto fuente y la proyección del punto de observación sobre el plano que contiene al punto fuente y es paralelo a las interfases del medio multicapa).

Debido a la simetría cilíndrica del medio multicapa de la Fig. 3.3, los elementos de la diagonal de $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (es decir, $G_{xx}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G_{zz}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ según la Ec. (3.20)) y $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pueden escribirse como funciones del tipo [38]:

$$G_0(x, y, z, x', y', z') = G_0(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, z, z') = G_0(\xi, z, z'). \quad (3.29)$$

La transformada de Fourier bidimensional de $G_0(\xi, z, z')$ puede definirse como:

$$\tilde{G}_0(k_x, k_y, z, z') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\xi, z, z') e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dx dy. \quad (3.30)$$

Definimos ahora un doble cambio a coordenadas polares de las coordenadas espaciales x e y y las coordenadas espectrales k_x y k_y mediante las siguientes ecuaciones [38, Apéndice I]:

$$x - x' = \xi \cos \zeta \quad (3.31)$$

$$y - y' = \xi \sin \zeta \quad (3.32)$$

$$k_x = k_\rho \cos k_\phi \quad (3.33)$$

$$k_y = k_\rho \sin k_\phi. \quad (3.34)$$

Si introducimos las Ecs. (3.31)-(3.34) en la Ec. (3.30) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(k_x, k_y, z, z') &= \int_0^\infty G_0(\xi, z, z') \left[\int_0^{2\pi} e^{jk_\rho \xi \cos(\zeta - k_\phi)} d\zeta \right] \xi d\xi \\ &= 2\pi \int_0^\infty G_0(\xi, z, z') J_0(k_\rho \xi) \xi d\xi = \tilde{G}_0(k_\rho, z, z'), \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde $J_0(\cdot)$ es la función de Bessel de orden cero [105, Ec. (9.1.18)], y donde se ha hecho uso de [158, Ec. (8.411.1)]. A la función $\tilde{G}_0(k_x, k_y, z, z') = \tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ se

la conoce como función de Green espectral para diferenciarla de $G_0(\xi, z, z')$, que se conoce como función de Green espacial.

Por otro lado, invocando el concepto de transformada inversa de Fourier, se va a cumplir que:

$$G_0(\xi, z, z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_\rho, z, z') e^{-j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dk_x dk_y. \quad (3.36)$$

Si introducimos los cambios de variable de las Ecs. (3.31)-(3.34) en la Ec. (3.36) y tenemos en cuenta la Ec. (3.35), se llega a que:

$$\begin{aligned} G_0(\xi, z, z') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \tilde{G}_0(k_\rho, z, z') \left[\int_0^{2\pi} e^{-jk_\rho \xi \cos(\zeta - k_\phi)} dk_\phi \right] k_\rho dk_\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{G}_0(k_\rho, z, z') J_0(k_\rho \xi) k_\rho dk_\rho, \end{aligned} \quad (3.37)$$

con lo cual, de acuerdo con la Ec. (3.37), la función de Green espacial $G_0(\xi, z, z')$ se puede expresar como una transformada de Hankel de orden cero de la función de Green espectral $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ (la Ec. (3.35) indica que lo recíproco también es cierto). Para que se pueda cumplir la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico y el campo magnético en las interfases del medio multicapa de la Fig. 3.3, los elementos $G_{zx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G_{xz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ deben tener una expresión matemática del tipo:

$$F_{1x}(x, y, z, x', y', z') = F_{1x}(\xi, \zeta, z, z') = \frac{\partial G_1(\xi, z, z')}{\partial x}. \quad (3.38)$$

Por su parte, al igual que $G_0(\xi, z, z')$ y de acuerdo con las Ecs. (3.36) y (3.37), $G_1(\xi, z, z')$ admite expresiones matemáticas del tipo:

$$G_1(\xi, z, z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_1(k_\rho, z, z') e^{-j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dk_x dk_y \quad (3.39)$$

$$G_1(\xi, z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{G}_1(k_\rho, z, z') J_0(k_\rho \xi) k_\rho dk_\rho, \quad (3.40)$$

donde $\tilde{G}_1(k_\rho, z, z')$ es la versión espectral de $G_1(\xi, z, z')$.

Si sustituimos la Ec. (3.39) en la Ec. (3.38) se llega a que:

$$F_{1x}(\xi, \zeta, z, z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-jk_x \tilde{G}_1(k_\rho, z, z') \right) e^{-j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dk_x dk_y, \quad (3.41)$$

con lo cual, la versión espectral de $F_{1x}(\xi, \zeta, z, z')$ resulta ser $\tilde{F}_{1x}(k_x, k_y, z, z') = -jk_x \tilde{G}_1(k_\rho, z, z')$. Por otro lado, si sustituimos la Ec. (3.40) en la Ec. (3.38), se llega a que $F_{1x}(\xi, \zeta, z, z')$ puede expresarse en términos de una transformada de Hankel de orden uno como se indica a continuación (véase [105, Ecs. (9.1.3-4) y (9.1.28)]):

$$\begin{aligned} F_{1x}(\xi, \zeta, z, z') &= \frac{\partial G_1(\xi, z, z')}{\partial x} = \frac{\partial G_1(\xi, z, z')}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -\cos \zeta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{G}_1(k_\rho, z, z') J_1(k_\rho \xi) k_\rho^2 dk_\rho \\ &= \cos \zeta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{F}_{1x}(k_x, k_y, z, z')}{jk_x} J_1(k_\rho \xi) k_\rho^2 dk_\rho, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $J_1(\cdot)$ es la función de Bessel de orden uno.

De forma análoga a lo que ocurre con $G_{zx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G_{xz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, los elementos $G_{zy}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $G_{yz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ admiten una expresión matemática del tipo (véase la Ec. (3.38)):

$$F_{1y}(x, y, z, x', y', z') = F_{1y}(\xi, \zeta, z, z') = \frac{\partial G_1(\xi, z, z')}{\partial y}. \quad (3.43)$$

Análogamente a como se han deducido las Ecs. (3.41) y (3.42), se pueden deducir las siguientes ecuaciones para $F_{1y}(\xi, \zeta, z, z')$:

$$F_{1y}(\xi, \zeta, z, z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-jk_y \tilde{G}_1(k_\rho, z, z') \right) e^{-j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dk_x dk_y, \quad (3.44)$$

$$F_{1x}(\xi, \zeta, z, z') = \sin \zeta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{F}_{1y}(k_x, k_y, z, z')}{jk_y} J_1(k_\rho \xi) k_\rho^2 dk_\rho, \quad (3.45)$$

donde $\tilde{F}_{1y}(k_x, k_y, z, z') = -jk_y \tilde{G}_1(k_\rho, z, z')$. Mientras que las funciones $G_0(\xi, z, z')$, $F_{1x}(\xi, \zeta, z, z')$ y $F_{1y}(\xi, \zeta, z, z')$ no se pueden obtener en forma cerrada, las funciones espectrales $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ y $\tilde{G}_1(k_\rho, z, z')$ sí se pueden calcular fácilmente mediante los algoritmos recurrentes que se describen en el Apéndice F. Por tanto, de acuerdo con las Ecs. (3.37), (3.42) y (3.45), el cálculo de G_0 , F_{1x} y F_{1y} se reduce al cálculo numérico de transformadas de Hankel del tipo [10]:

$$S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') J_n(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1} dk_\rho \quad (n = 0, 1). \quad (3.46)$$

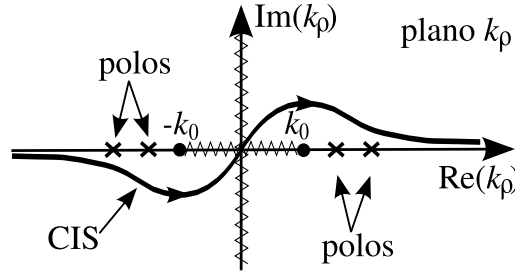


Figura 3.4: Camino de integración de Sommerfeld (CIS) y singularidades de $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ en el plano complejo k_ρ para un medio multicapa sin pérdidas.

Dado que las funciones $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ son funciones pares de la variable k_ρ (esto es, $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z') = \tilde{G}_n(-k_\rho, z, z')$), las transformadas de Hankel de la Ec. (3.46) pueden reescribirse [130]:

$$S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') H_n^{(2)}(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1} dk_\rho \quad (n = 0, 1), \quad (3.47)$$

donde $H_n^{(2)}(\cdot)$ ($n = 0, 1$) son las funciones de Hankel de segunda especie y orden n [105, Ec. (9.1.3-4)].

Ocurre que las funciones espectrales $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ tienen puntos de ramificación en $k_\rho = \pm k_0$ y polos en la hoja propia del plano complejo k_ρ . Si el medio multicapa de la Fig. 3.3 no tiene pérdidas, los polos de la hoja propia están sobre el eje real del plano k_ρ . La presencia de estos polos y de los puntos de ramificación hace que el cálculo numérico de la integral de la Ec. (3.47) sobre el eje real del plano complejo k_ρ sea muy complicado [32]. Por este motivo, es preferible calcular la integral por un camino de integración que pasa por el primer y el tercer cuadrantes del plano complejo k_ρ , y que rodea a los puntos de ramificación y a los polos de las funciones $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ (véase la Fig. 3.4). A este camino de integración se le suele llamar *camino de integración de Sommerfeld* (CIS), y a las integrales de la Ec. (3.47) calculadas a través de CIS se les llama *integrales de Sommerfeld* [10, 32, 38]. La expresión matemática de las integrales de Sommerfeld es:

$$S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty(\text{CIS})}^{\infty} \tilde{G}_n(k_\rho, z, z') H_n^{(2)}(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1} dk_\rho \quad (n = 0, 1). \quad (3.48)$$

Teniendo en cuenta todo lo que se ha dicho en esta sección, y teniendo presentes las Ecs. (3.20)-(3.26), (3.37), (3.42), (3.45) y (3.48), los elementos de $\bar{\mathbf{G}}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y

$G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pueden escribirse mediante integrales de Sommerfeld como se indica a continuación:

$$G_{xx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{yy}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0 \left\{ \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') \right\} \quad (3.49)$$

$$G_{zx}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \cos \zeta S_1 \left\{ \frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right\} \quad (3.50)$$

$$G_{zy}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sin \zeta S_1 \left\{ \frac{\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')}{jk_y} \right\} \quad (3.51)$$

$$G_{xz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\cos \zeta S_1 \left\{ \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') \right\} \quad (3.52)$$

$$G_{yz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\sin \zeta S_1 \left\{ \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') \right\} \quad (3.53)$$

$$G_{zz}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0 \left\{ \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') + \frac{\partial \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z')}{\partial z} \right\} \quad (3.54)$$

$$G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0 \left\{ \tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') \right\} . \quad (3.55)$$

En el Apéndice F se describe brevemente cómo se lleva a cabo el cálculo de las funciones de Green espectrales \tilde{G}_{xx}^A , \tilde{G}_{zx} , \tilde{G}_{zy} , \tilde{G}_{zz}^A , \tilde{G}^ϕ y \tilde{C}^ϕ para el medio multicapa de la Fig. 3.3.

3.3. El campo lejano de las funciones de Green en medios multicapa

3.3.1. Método de ajuste de las funciones de Green espectrales mediante funciones racionales: el método de los mínimos cuadrados totales en el plano k_ρ y en el plano u_0

Las funciones de Green espectrales $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ ($n = 0, 1$) del medio multicapa de la Fig. 3.3 dependen de z y de z' , esto es, dependen de la coordenada z de los puntos fuente y de observación. No obstante, en lo que queda de este Capítulo vamos a llamar $\tilde{G}_n(k_\rho)$ a $\tilde{G}_n(k_\rho, z, z')$ por simplicidad en la notación (esto es, no vamos a escribir explícitamente la dependencia de \tilde{G}_n con z y con z'). Esto significa que todas las expresiones aproximadas que se van a obtener para $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en función de k_ρ y para $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ en función de ξ tienen que ser contempladas

como expresiones que son válidas para valores fijos de z y z' . En determinadas aplicaciones del MDM, es preciso conocer los valores de $S_n \{ \tilde{G}_n(k_\rho) \}$ en todo un intervalo de valores de z y z' [39]. En esos casos, lo que se recomienda es obtener expresiones de $S_n \{ \tilde{G}_n(k_\rho) \}$ para parejas de muestras de z y z' en los intervalos de interés y después llevar a cabo un proceso de interpolación numérica entre las expresiones obtenidas para las parejas de muestras, tal y como se describe en [143, Fig. 2].

Las funciones $\tilde{G}_n(k_\rho)$ poseen dos puntos de ramificación en $k_\rho = \pm k_0$ y un número infinito de polos. De estos polos, hay un número finito de polos propios, que corresponden a las constantes de propagación de las ondas de superficie que se pueden excitar en el medio multicapa a la frecuencia de trabajo (estos polos están situados sobre el eje real de la hoja propia si el medio no tiene pérdidas, y en el segundo y cuarto cuadrantes de la hoja propia si el medio tiene pérdidas, tal y como se muestra en la Fig. 3.4), y un número infinito de polos impropios [130]. Teniendo en cuenta esta estructura de las funciones $\tilde{G}_n(k_\rho)$, parece oportuno utilizar expresiones del tipo polo-residuo para aproximar estas funciones mediante el MAFR. Aunque estas expresiones no tienen en cuenta el punto de ramificación, suelen llevar a estimaciones precisas de los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ [51, 53], lo cual justifica que hayan sido ampliamente utilizadas en la literatura [51, 53, 55, 136, 145, 146]. Cuando se aplica el MAFR en el plano complejo k_ρ , las aproximaciones del tipo polo-residuo que se obtienen para $\tilde{G}_n(k_\rho)$ tienen una expresión del tipo:

$$\tilde{G}_n(k_\rho) \approx \sum_{i=1}^N \frac{a_{n,i}}{k_\rho^2 - p_{n,i}^2} \quad (n = 0, 1) , \quad (3.56)$$

donde se ha tenido en cuenta que las funciones $\tilde{G}_n(k_\rho)$ son funciones pares de k_ρ . Hemos de tener en cuenta que los coeficientes $p_{n,i}$ de (3.56) son las estimaciones que proporciona el MAFR para los polos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$, y $R_{n,i} = a_{n,i}/2p_{n,i}$ son las estimaciones para los residuos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en esos polos.

En [51] los coeficientes $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ se determinan mediante el método de los mínimos cuadrados totales (MMCT) descrito en el Apéndice D (véase también [153]). Al aplicar el MMCT a la determinación de $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$, es preciso muestrear

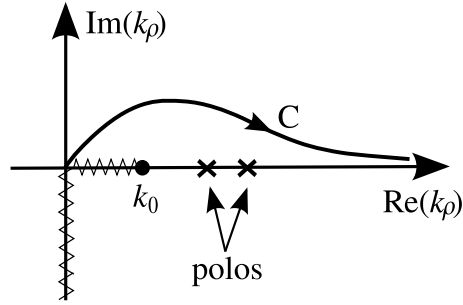


Figura 3.5: Camino de muestreo elegido en la hoja propia del plano complejo k_ρ cuando se aplica el método de los mínimos cuadrados totales a la determinación de $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ en (3.56).

la función $\tilde{G}_n(k_\rho)$ a lo largo de un camino en el plano complejo k_ρ que rodee a las singularidades [51, 53]. En [51, Fig. 1], se propone un camino de muestreo en la hoja de Riemann propia que pasa por encima de las singularidades y se aproxima asintóticamente al eje real del plano k_ρ , como se muestra en la Fig. 3.5. La expresión matemática de este camino de muestreo viene dada por:

$$C : k_\rho/k_0 = t [1 + jA_c e^{(1-t)}] \quad 0 \leq t \leq T_c, \quad (3.57)$$

donde A_c determina el valor máximo que toma la parte imaginaria de los puntos del camino.

En esta tesis vamos a aplicar el MAFR en el plano complejo k_ρ , y vamos a determinar los coeficientes $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ de la Ec. (3.56) mediante el MMCT, tal y como se muestra en [51]. Siguiendo las recomendaciones de [51], vamos a tomar $A_c = 0.1$ y $T_c = 1.2\sqrt{\varepsilon_{\max}}$, siendo $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_{r1}, \dots, \varepsilon_{r,N_{ca}})$ (se ha comprobado que los resultados obtenidos para $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ no presentan diferencias significativas cuando se varían ligeramente estos parámetros).

Como se ha comentado anteriormente, en el plano complejo k_ρ las funciones de Green espectrales $\tilde{G}_n(k_\rho)$ del medio multicapa de la Fig. 3.3 tienen polos propios e impropios, y una pareja de puntos de ramificación ($k_\rho = \pm k_0$). Como consecuencia de este hecho, la determinación de $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ en (3.56) mediante el camino de muestreo de (3.57) presenta dos problemas. Por un lado, las funciones usadas en (3.56) para aproximar $\tilde{G}_n(k_\rho)$ no presentan ningún punto de ramificación en $k_\rho = \pm k_0$. Una consecuencia de este hecho es que todas las muestras del camino de la Fig. 3.5 que se utilizan para determinar $a_{n,i}$ y $p_{n,i}$ se encuentran en la hoja de

Riemann propia del plano complejo k_ρ , y por tanto, es de esperar que los polos $p_{n,i}$ sólo capturen la información de los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ (véase [51, Tabla I]) y no aporten información sobre los polos impropios más relevantes (esta información necesita de un ajuste adicional, tal y como se comenta en [132, Ec. (20)]). Por otro lado, debido a la existencia del punto de ramificación de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en $k_\rho = k_0$, la aproximación de la Ec. (3.56) no puede estimar con precisión aquellos polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que están muy próximos a $k_\rho = k_0$, lo cual ha sido ya puesto de manifiesto en [132], (en la Tabla 3.2 se mostrará que los citados polos propios se obtienen con poca precisión y que además, los residuos correspondientes a esos polos se obtienen con menos precisión aún).

Con vistas a solucionar los problemas que presenta la aproximación de la Ec. (3.56), procedemos a definir una nueva variable espectral:

$$u_0 = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}. \quad (3.58)$$

Las funciones de Green espectrales \tilde{G}_n son funciones monovaluadas en el plano complejo u_0 [148]. Esto significa que las funciones $\tilde{G}_n(u_0)$ no tienen ningún punto de ramificación, y por tanto, no presentan hojas de Riemann en el plano complejo u_0 . No obstante, las funciones $\tilde{G}_n(u_0)$ siguen teniendo un número infinito de polos en el plano complejo u_0 (de hecho, si k_{pi} es un polo propio de $\tilde{G}_n(k_\rho)$, entonces el valor de $u_{pi} = \pm\sqrt{k_{pi}^2 - k_0^2}$ para el que $\text{Re}(u_{pi}) > 0$ será un polo de $\tilde{G}_n(u_0)$; y si k_{pi} es un polo impropio de $\tilde{G}_n(k_\rho)$, entonces el valor de $u_{pi} = \pm\sqrt{k_{pi}^2 - k_0^2}$ para el que $\text{Re}(u_{pi}) < 0$ será un polo de $\tilde{G}_n(u_0)$). Teniendo en cuenta cómo se distribuyen las singularidades de $\tilde{G}_n(u_0)$ en el plano complejo u_0 , en este trabajo proponemos aplicar el MAFR a la aproximación de las funciones $\tilde{G}_n(u_0)$ en las proximidades de $u_0 = 0$ (es decir, en las proximidades de $k_\rho = \pm k_0$ en el plano complejo k_ρ) mediante la siguiente representación del tipo polo-residuo (véase [56, Ec. (3)]):

$$\tilde{G}_n(u_0) \approx \sum_{i=1}^N \frac{b_{n,i}}{u_0 - q_{n,i}} \quad (n = 0, 1), \quad (3.59)$$

donde, a diferencia de lo que ocurre en (3.56), se ha tenido en cuenta que las funciones $\tilde{G}_n(u_0)$ no tienen una paridad definida en la variable u_0 . En el marco de

este trabajo, los coeficientes $b_{n,i}$ y $q_{n,i}$ ($n = 0, 1; i = 1, \dots, N$) se van a determinar mediante el MMCT, siguiendo los pasos descritos en [51, Ec. (12)] y en el Apéndice D. Por analogía con lo que ocurre con la Ec. (3.56), las estimaciones que proporciona la Ec. (3.59) para los polos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ valen $\sqrt{k_0^2 + q_{n,i}^2}$, y las estimaciones que proporciona (3.59) para los residuos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ valen $q_{n,i}b_{n,i}/\sqrt{k_0^2 + q_{n,i}^2}$, tal y como se muestra en el Apéndice D.1.

Las muestras de u_0 que se requieren para la aplicación del MMCT a la determinación de $b_{n,i}$ y $q_{n,i}$ en la Ec. (3.59) han sido elegidas en este trabajo a lo largo de los caminos C_1 y C_2 mostrados en la Fig. 3.6(a). El camino C_1 está situado en la mitad izquierda “impropia”, $\text{Re}(u_0) < 0$, del plano complejo u_0 (la cual se corresponde con la hoja de Riemann impropia del plano complejo k_ρ), y su expresión matemática está dada por:

$$C_1 : u_0(t_1) = -\sqrt{k_\rho^2(t_1) - k_0^2}, \quad (3.60)$$

donde:

$$k_\rho(t_1) = k_0 \left[\frac{1.2\sqrt{\varepsilon_r^{\max}} + 0.9}{2} + \frac{1.2\sqrt{\varepsilon_r^{\max}} - 0.9}{2} \cos t_1 \right] - j0.05k_0 \sin t_1, \quad 0 < t_1 < \pi. \quad (3.61)$$

El camino C_2 está situado en la mitad derecha “propia”, $\text{Re}(u_0) > 0$, del plano complejo u_0 (correspondiente a la hoja de Riemann propia del plano complejo k_ρ), y su expresión matemática está dada por:

$$C_2 : u_0(t_2) = +\sqrt{k_\rho^2(t_2) - k_0^2}, \quad (3.62)$$

donde:

$$k_\rho(t_2) = k_0 \left[\frac{1.2\sqrt{\varepsilon_r^{\max}} + 0.9}{2} - \frac{1.2\sqrt{\varepsilon_r^{\max}} - 0.9}{2} \cos t_2 \right] + j0.05k_0 \sin t_2, \quad 0 < t_2 < \pi. \quad (3.63)$$

Como se muestra en la Fig. 3.6(b), los caminos C_1 y C_2 se corresponden con una elipse en el plano complejo k_ρ . La mitad inferior de la elipse (imagen de C_1 en el plano k_ρ) está situada en la hoja de Riemann impropia del plano k_ρ ,

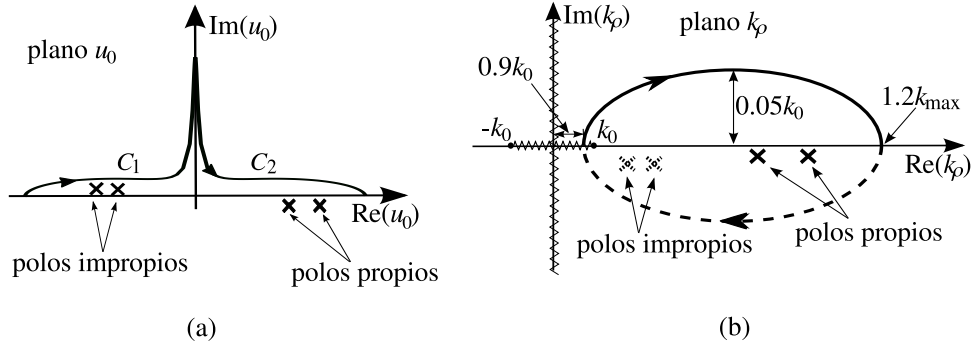


Figura 3.6: (a) Camino de muestreo elegido en el plano complejo u_0 cuando se aplica el método de los mínimos cuadrados totales a la Ec. (3.59) para determinar $b_{n,i}$ y $q_{n,i}$. (b) Imagen del camino de muestreo mostrado en (a) en el plano complejo k_ρ . La semielipse superior del camino (b) (línea continua) está localizada en la hoja de Riemann propia, y la semielipse inferior del camino (b) (línea discontinua) está localizada en la hoja de Riemann impropia. $k_{\max} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$ donde $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_{r,1}, \dots, \varepsilon_{r,N_{ca}})$.

y la mitad superior de la elipse (imagen de C_2 en el plano k_ρ) se encuentra en la hoja de Riemann propia. La elipse rodea al punto de ramificación $k_\rho = k_0$, a todos los polos propios con parte real positiva (téngase en cuenta que en el caso sin pérdidas estos polos se encuentran en el intervalo $k_0 < k_\rho < k_0\sqrt{\varepsilon_{\max}}$ del eje real, y en el caso con pérdidas, los polos se mueven ligeramente hacia el cuarto cuadrante), y a aquellos polos impropios que están más cerca del punto de ramificación $k_\rho = k_0$. Por tanto, los polos $q_{n,i}$ de (3.59) no sólo capturarán correctamente la información relativa a los polos propios de $\tilde{G}_n(u_0)$ sino también la relativa a los polos impropios de $\tilde{G}_n(u_0)$ más cercanos a $u_0 = 0$ (o lo que es lo mismo, la información relativa a los polos impropios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ más cercanos al punto de ramificación $k_\rho = k_0$ en el plano complejo k_ρ). Además, dado que $u_0 = 0$ es un punto regular de $\tilde{G}_n(u_0)$, la aproximación de (3.59) no va a presentar ningún problema a la hora de determinar de forma precisa los polos de $\tilde{G}_n(u_0)$ que estén muy próximos a $u_0 = 0$ (o lo que es lo mismo, los polos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ muy próximos al punto de ramificación $k_\rho = k_0$ en el plano k_ρ), a diferencia de lo que le ocurre a la aproximación de (3.56).

A continuación, vamos a estudiar la capacidad de las aproximaciones (3.56) y (3.59) para estimar los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$, los polos impropios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que están más cerca del punto de ramificación $k_\rho = k_0$, y los residuos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en estos polos. Recordemos que los polos y residuos citados intervienen en las

Tabla 3.1: Polos propios de la función de Green espectral $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$.

	[150]	[148]	Ec. (3.59)
k_{01}^{PP}/k_0	1.06048-j0.01137	1.06048-j0.01137	1.06048-j0.01137
k_{02}^{PP}/k_0	1.55797-j0.01917	1.55797-j0.01917	1.55797-j0.01917

(a) Estructura de la Fig. 2 de [150]. $f = 10$ GHz, $z = z' = 0$, $N_{\text{ca}} = 1$, $h_1 = 0.5$ cm, $\varepsilon_{r1} = 4.0$, $\tan \delta_1 = 0.02$, $N = 7$.

	[150]	[148]	Ec. (3.59)
k_{01}^{PP}/k_0	0.99999	1.00000	1.00000
k_{02}^{PP}/k_0	1.48871	1.48871	1.48871
k_{03}^{PP}/k_0	2.91938	2.91939	2.91939
k_{04}^{PP}/k_0	3.06526	3.06528	3.06528

(b) Estructura de la Fig. 3(a) de [150]. $f = 33.72$ GHz, $z = z' = 0$, $N_{\text{ca}} = 3$, $h_1 = 1.0$ mm, $h_2 = 1.0$ mm, $h_3 = 1.0$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_2 = \tan \delta_3 = 0$, $N = 15$.

expresiones de las ondas de superficie y las ondas residuales que dominan el campo lejano de las funciones de Green multicapa espaciales [132]. Por tanto, la estimación precisa de dichos polos y residuos es imprescindible a la hora de obtener expresiones fiables para las funciones de Green espaciales en la región de campo lejano [132]. Con respecto a la notación, llamaremos $k_{n,i}^{\text{PP}}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{pp}}$) a los N_{pp} polos propios con parte real positiva de $\tilde{G}_n(k_\rho)$, y llamaremos $R_{n,i}^{\text{PP}}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{pp}}$) a los residuos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en esos polos. Asimismo, llamaremos $k_{n,1}^{\text{pi}}$ al polo impropio de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que está más cerca del punto de ramificación $k_\rho = k_0$, y llamaremos $R_{n,1}^{\text{pi}}$ al residuo de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en ese polo.

En primer lugar, en la Tabla 3.1 se presentan los resultados para los polos propios normalizados a k_0 de la función de Green espectral para el potencial escalar $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$. Los resultados presentados corresponden a dos medios multicapa (véase la Fig. 3.3), uno que contiene una única capa con pérdidas (Tabla 3.1(a)) y otro que contiene tres capas sin pérdidas (Tabla 3.1(b)). Los valores obtenidos para los polos en [150] se comparan con los que se obtienen con el código numérico de [148], y con los obtenidos mediante la Ec. (3.59). Se observa que todos los conjuntos de resultados coinciden en al menos cinco cifras significativas. Conviene mencionar que mientras que los métodos propuestos en [150] y [148] requieren

Tabla 3.2: Polos y residuos normalizados de la función de Green $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$. $f = 9\text{GHz}$, $z = z' = 0$, $N_{\text{la}} = 1$, $h_1 = 0.5\text{ cm}$, $\varepsilon_{r1} = 4.0$, $\tan \delta_1 = 0.02$, $N = 8$.

	Ec. (3.56)	Ec. (3.59)
k_{01}^{PP}/k_0	$1.00430 - j0.00509$	$1.00476 - j0.00368$
k_{02}^{PP}/k_0	$1.47802 - j0.01767$	$1.47802 - j0.01767$
$\varepsilon_0 R_{01}^{\text{PP}}$	$0.106413 - j0.010015$	$0.094263 - j0.027746$
$\varepsilon_0 R_{02}^{\text{PP}}$	$-0.0870765 - j0.0013354$	$-0.0870765 - j0.0013353$

iteraciones para mejorar la precisión de los polos encontrados, el MMCT utilizado con (3.59) proporciona los polos sin necesidad de recurrir a métodos iterativos que mejoren la precisión de las soluciones encontradas (las simulaciones numéricas han mostrado que el MMCT utilizado no requiere recurrir a técnicas iterativas de refinamiento de polos mientras se cumpla que $\sum_{i=1}^{N_{\text{ca}}} h_i \lesssim \pi/k_0$, lo cual se satisface para los medios multicapa utilizados en la práctica como sustratos de circuitos y antenas en tecnología impresa).

En la Tabla 3.2 se muestran los polos propios y los residuos (ambos normalizados a k_0) obtenidos para la función de Green espectral del potencial escalar mediante las Ecs. (3.56) y (3.59). Mientras que los resultados obtenidos para el polo más distante del punto de ramificación y su residuo (k_{02}^{PP} y R_{02}^{PP}) coinciden, los resultados obtenidos para el polo más próximo al punto de ramificación y su residuo (k_{01}^{PP} y R_{01}^{PP}) difieren. En concreto, el residuo R_{01}^{PP} proporcionado por (3.56) es un 7% más grande que el obtenido con (3.59), y se ha comprobado que este último resultado es el correcto. Por tanto, en cuanto a la estimación de un polo propio muy próximo al punto de ramificación y su residuo, la Ec. (3.59) es sustancialmente más precisa que la Ec. (3.56).

Por último, en las Tablas 3.3(a) y 3.3(b) se lleva a cabo un estudio de la convergencia que se consigue en los polos y residuos de la función de Green espectral para el potencial escalar $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ conforme aumenta el número de sumandos utilizados en (3.59). Se observa que las estimaciones de (3.59) convergen, tanto en el caso de los dos polos propios con parte positiva, como en el caso del polo impropio más cercano al punto de ramificación, y también en el caso de los residuos en

Tabla 3.3: Convergencia de los polos y residuos de la función de Green espectral $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ con respecto al número de términos N usados en (3.59). $f = 10$ GHz, $z = z' = 0$, $N_{1a} = 4$, $h_1 = 1.5$ mm, $h_2 = 1.0$ mm, $h_3 = 1.5$ mm, $h_4 = 1.5$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$, $\tan \delta_2 = 0.08$.

N	k_{01}^{PP}/k_0	k_{02}^{PP}/k_0	k_{01}^{Pi}/k_0
6	2.07483 - j0.05103	2.60188 - j0.00554	—
8	2.06336 - j0.06701	2.58769 - j0.02366	1.00017 + j0.00031
10	2.06343 - j0.06701	2.58772 - j0.02364	1.00015 + j0.00033
11	2.06343 - j0.06701	2.58772 - j0.02364	1.00015 + j0.00033
12	2.06343 - j0.06701	2.58772 - j0.02364	1.00015 + j0.00033

(a) Polos normalizados

N	$\varepsilon_0 R_{01}^{PP} \times 10^2$	$\varepsilon_0 R_{02}^{PP} \times 10^3$	$\varepsilon_0 R_{01}^{Pi} \times 10^5$
6	1.94367 + j0.31067	-5.36709 + j0.11892	—
8	2.12297 + j0.26659	-6.69740 - j0.52891	0.19309 - j1.92763
10	2.12284 + j0.26733	-6.69357 - j0.52996	0.27716 - j1.95113
11	2.12284 + j0.26733	-6.69358 - j0.52996	0.27734 - j1.95117
12	2.12284 + j0.26733	-6.69358 - j0.52996	0.27734 - j1.95117

(b) Residuos normalizados

estos tres polos. Se observa que es suficiente tomar $N = 11$ en (3.59) para obtener los polos y los residuos con una precisión de seis cifras significativas.

Para terminar esta sección, vamos a estudiar la precisión de las aproximaciones de las Ecs. (3.56) y (3.59) a lo largo de los caminos de muestreo de las Figs. 3.5 (C) y 3.6(b) (C_1 y C_2) respectivamente. Concretamente, en las Figs. 3.7(a) y 3.7(b) se representa el valor máximo del error relativo entre los valores de las aproximaciones (3.56) y (3.59) y los valores exactos de la función $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ a lo largo de los citados caminos de muestreo para distintos valores del número de sumandos N utilizado en (3.56) y (3.59), y para dos frecuencias (1 GHz en la Fig. 3.7(a) y 30 GHz en la Fig. 3.7(b)). Las figuras muestran que en general la aproximación (3.59) es mucho más precisa que la aproximación (3.56), lo cual es debido a que la aproximación (3.59) permite una mejor representación de los polos de las funciones de Green espectrales que están situados en las proximidades del punto de ramificación $k_\rho = k_0$ (véase la Tabla 3.2) y del propio punto de ramificación.

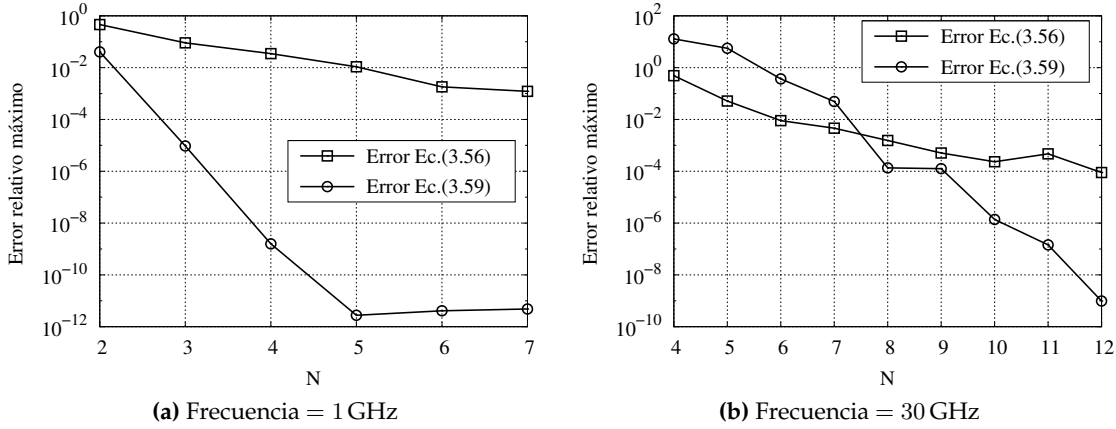


Figura 3.7: Error relativo máximo entre los valores exactos de $\tilde{G}^\phi(k_\rho)$ y los valores aproximados de las Ecs. (3.56) y (3.59) a lo largo de los caminos de muestreo de la Fig. 3.5 y de la Fig. 3.6(b). El error relativo máximo se representa frente al número de términos N retenidos en (3.56) y (3.59). Los resultados corresponden a un medio de cuatro capas sin pérdidas con un CEP en la parte inferior: $z' = -1.4$ mm, $z = -0.4$ mm, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 0.7$ mm, $h_2 = 0.3$ mm, $h_3 = 0.5$ mm, $h_4 = 0.3$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_2 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$.

De hecho, cuando se utiliza un valor de N suficientemente alto, en el caso de la aproximación (3.59) se consiguen errores relativos máximos comprendidos entre 10^{-9} y 10^{-11} . En cambio, los errores máximos relativos que permite obtener la aproximación (3.56) típicamente están comprendidos entre el 0.01 % y el 0.1 % (en [51, Fig. (5)] se muestra un resultado similar). Las Figs. 3.7(a) y 3.7(b) muestran también que el valor de N requerido para obtener una buena precisión aumenta conforme aumenta la frecuencia. Esto se debe al hecho de que, al crecer la frecuencia, aumenta tanto el número de polos propios de las funciones de Green espectrales como el número de polos impropios situados en las proximidades de los puntos de ramificación, con lo cual, se necesitan más términos en (3.56) y (3.59) para conseguir aproximaciones suficientemente precisas de las citadas funciones de Green espectrales en un entorno de sus singularidades.

Las Figs. 3.7(a) y 3.7(b) nos han mostrado que las expresiones del tipo polo-residuo de la Ec. (3.59) proporcionan aproximaciones muy precisas de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en las proximidades del punto de ramificación $k_\rho = k_0$, en las proximidades de los polos propios y en las proximidades de los polos impropios más próximos a los

puntos de ramificación. Por tanto, los equivalentes en el dominio espacial de dichas expresiones –o lo que es lo mismo, sus integrales de Sommerfeld– deberían proporcionar aproximaciones muy precisas de las funciones de Green espaciales $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ en la región de campo lejano [132]. Desgraciadamente, cuando se sustituye (3.59) en (3.48), se obtienen integrales que no pueden ser obtenidas en forma cerrada. No obstante, dado que nosotros estamos interesados en el resultado de las integrales para valores grandes de ξ , se puede intentar llevar a cabo desarrollos asintóticos de dichas integrales que sean válidos cuando $\xi \gg \lambda_0$. A continuación, se proponen dos procedimientos para llevar a cabo los desarrollos asintóticos de las citadas integrales. El primer procedimiento es menos preciso, y está basado en la teoría clásica de desarrollos asintóticos [156, Cap. 6]. El segundo procedimiento es más preciso y está basado en el método de Pauli-Clemmow [159, 160]. Comprobaremos cómo el segundo procedimiento permite obtener expresiones en forma cerrada de las funciones de Green multicapa espaciales que proporcionan errores inferiores al 0.1 % en toda la región de campo lejano ($\xi > \lambda_0$).

3.3.2. Expresiones asintóticas en forma cerrada para las funciones de Green multicapa espaciales en la región de campo lejano

Antes de pasar a discutir cómo se pueden calcular asintóticamente las integrales de Sommerfeld de las aproximaciones de (3.59) para valores grandes de ξ , vamos a clasificar los polos $q_{n,i}$ ($n = 0, 1; i = 1, \dots, N$) que se obtienen en (3.59) al aplicar el MMCT en tres tipos distintos:

- a) *Polos tipo 1*: polos para los que $\text{Re}(q_{n,i}) > 0$. Estos polos se transforman en polos $p_{n,i} = \pm \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}$ del plano complejo k_ρ que están situados en la hoja de Riemann propia (véase la Fig. 3.8).

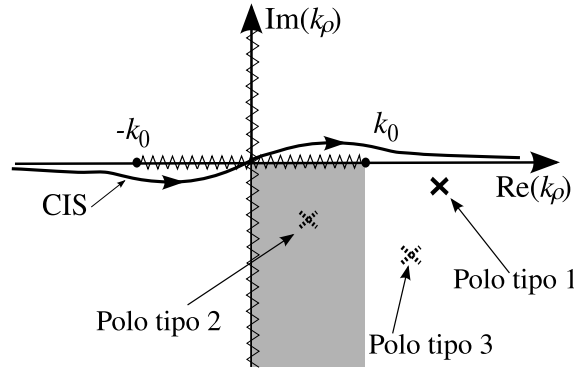


Figura 3.8: Camino de integración de Sommerfeld y tipos de polos de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ según su posición en el plano complejo k_ρ . Los polos marcados en línea continua se encuentran situados sobre la hoja de Riemann propia, y los marcados en línea discontinua, sobre la hoja de Riemann impropia.

- b) *Polos tipo 2:* polos para los que $\text{Re}(q_{n,i}) < 0$, $0 < \text{Re}\left(\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right) < k_0$, e $\text{Im}\left(\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right) < 0$. Estos polos se transforman en polos de la hoja impropia del plano complejo k_ρ que están situados en la región sombreada de la Fig. 3.8.
- c) *Polos tipo 3:* polos para los que se cumple $\text{Re}(q_{n,i}) < 0$, $\text{Re}\left(\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right) \notin [0, k_0]$ ó $\text{Im}\left(\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right) > 0$. Estos polos se transforman en polos de la hoja impropia del plano complejo k_ρ que están situados fuera de la región sombreada de la Fig. 3.8.

A continuación, con vistas a obtener la contrapartida espacial de la Ec. (3.59), sustituiremos (3.59) en (3.48), en cuyo caso se obtiene:

$$\begin{aligned}
 S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\} &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} \int_{-\infty(\text{CIS})}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 - q_{n,i}}} dk_\rho \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} \int_{-\infty(\text{CIS})}^{\infty} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} J_{n,i}(\xi) \quad (n = 0, 1), \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

donde el camino de integración CIS se muestra en las Figs. 3.4 y 3.8.

Haciendo uso de un corolario del teorema de Cauchy,¹ es posible expresar las integrales $J_{n,i}(\xi)$ de (3.64) del siguiente modo (véase la Fig. 3.9(a) y también [132, Figs. 2-3]):

$$\begin{aligned} J_{n,i}(\xi) &= \int_{-\infty(\text{CIS})}^{\infty} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho \\ &= \int_{C_\infty} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C_r} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho \\ &\quad + \int_{C_v} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \oint_{C_{p1}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde, como se muestra en la Fig. 3.9(a), C_∞ es un camino semicircular de radio infinito, C_r es un camino alrededor de la rama que parte del punto de ramificación de $f_{n,i}(k_\rho, \xi)$ en $k_\rho = +k_0$ (las integrales de $f_{n,i}(k_\rho, \xi)$ a lo largo de este camino representan las contribuciones de la aproximación (3.59) al *espectro continuo* de las funciones de Green [15, 16, 130]), y los caminos C_i y C_v son caminos de ida y vuelta respectivamente desde la rama hasta el camino C_{p1} que rodea al polo tipo 1 de la Fig. 3.8.

Realizando el cambio de variable $k_\rho = R e^{-j\beta}$ ($0 \leq \beta \leq \pi$ y $R \rightarrow \infty$) en la integral a lo largo de C_∞ , la dependencia del integrando $f_{n,i}(k_\rho, \xi)$ con el radio R de la semiesfera pasa a ser del tipo $e^{-R(j \cos \beta + \sin \beta)}$, con lo cual, el integrando tiende a cero conforme R tiende a infinito (esto es, $f_{n,i}(k_\rho, \xi) \Big|_{C_\infty} \propto H_n^{(2)}(k_\rho = R e^{-j\beta}, \xi) \Big|_{R \rightarrow \infty} \propto e^{-jR e^{-j\beta}} \Big|_{R \rightarrow \infty} = e^{-R(j \cos \beta + \sin \beta)} \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, ya que $0 \leq \beta \leq \pi$) y, por tanto, podemos escribir que:

$$\int_{C_\infty} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = 0. \quad (3.66)$$

Por otro lado, de acuerdo con el corolario del teorema de Cauchy mencionado

¹Sea $f(z)$ una función analítica en todos los puntos de un dominio simplemente conexo D excepto en un número finito de puntos z_i ($i = 1, \dots, N_s$) que constituyen singularidades aisladas de la función. Sean C_1 y C_2 dos curvas simples, cerradas y regulares a trozos contenidas en el dominio D que conectan los puntos A y B . Si en el dominio Ω situado entre las curvas C_1 y C_2 no hay singularidades de la función $f(z)$, se cumple:

$$\int_{A(C_1)}^B f(z) dz = \int_{A(C_2)}^B f(z) dz.$$

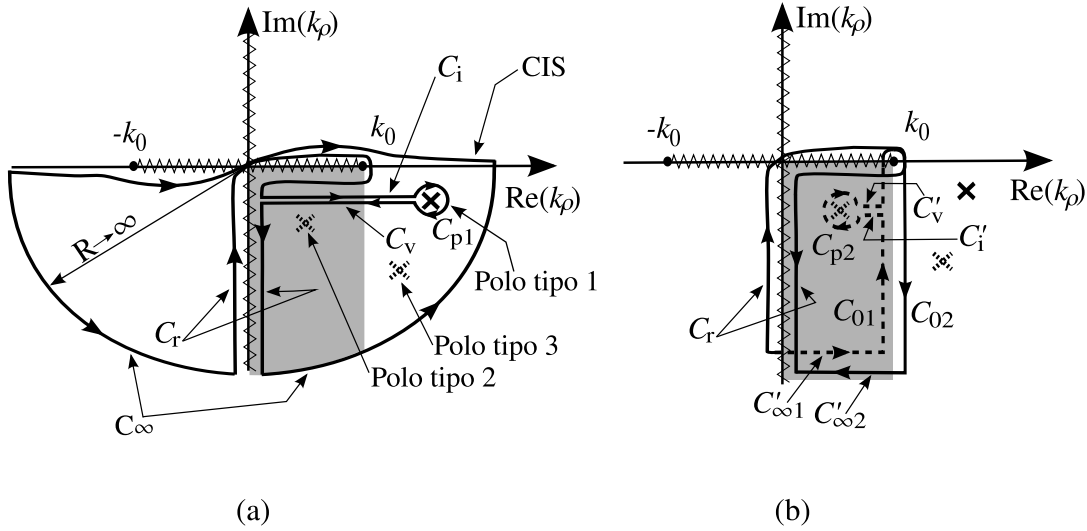


Figura 3.9: Deformación del camino de integración CIS en el plano complejo k_ρ . (a) El camino de integración de Sommerfeld CIS es sustituido por un camino de integración equivalente entre los mismos límites de integración que está situado en la hoja propia, y que comprende un semicírculo C_∞ de radio infinito, un camino de integración C_r alrededor de la rama que parte de $k_\rho = +k_0$, un camino de ida C_i y otro de vuelta C_v desde la citada rama hasta el polo tipo 1, y finalmente, un camino circular C_{p1} alrededor del polo tipo 1. (b) El camino a través la rama C_r es sustituido por un camino de integración equivalente entre los mismos límites de integración que comprende el camino C_{01} en la hoja impropia y el camino C_{02} en la hoja propia, un camino de ida C'_i y otro de vuelta C'_v desde C_{01} hasta el polo tipo 2 (ambos en la hoja impropia), un camino circular C_{p2} alrededor del polo tipo 2 en la hoja impropia, y finalmente, dos caminos horizontales en el infinito, uno en la hoja impropia $C'_{\infty 1}$ y otro en la hoja propia $C'_{\infty 2}$. Los trazos en línea continua indican caminos situados en la hoja propia, y los trazos en línea discontinua, caminos situados en la hoja impropia.

anteriormente, las integrales a lo largo de los caminos C_i y C_v se cancelan entre sí ya que:

$$\int_{C_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C_v} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = \int_{C_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho - \int_{C_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = 0, \quad (3.67)$$

con lo cual, la contribución de la suma de estas integrales a $J_{n,i}(\xi)$ en la Ec. (3.65) es nula.

Además, la integral cerrada sobre el camino C_{p1} que rodea al polo tipo 1 de la Fig. 3.9(a) (el camino C_{p1} está orientado negativamente, es decir, en sentido

horario) viene dada por:

$$\oint_{C_{p1}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = -2\pi j W_{ni1} \text{Res} \left\{ \frac{H_n^{(2)}(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 - q_{n,i}}} \right\}_{k_\rho = \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}}$$

$$= -2\pi j W_{ni1} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)} \left(\xi \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2} \right), \quad (3.68)$$

donde $W_{ni1} = 1$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 1 y $W_{ni1} = 0$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 2 o tipo 3.

Teniendo en cuenta las Ecs. (3.66), (3.67) y (3.68), la expresión resultante para la Ec. (3.65) será:

$$J_{n,i}(\xi) = \int_{C_r} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho - 2\pi j W_{ni1} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)} \left(\xi \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2} \right). \quad (3.69)$$

En la ecuación anterior, la integral sobre el camino de integración C_r que rodea a la rama puede descomponerse, aplicando de nuevo el corolario del teorema de Cauchy, en la suma de las siguientes contribuciones (véase la Fig. 3.9(b)):

$$\int_{C_r} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = \int_{C'_{\infty 1}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C_{01}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho$$

$$+ \int_{C'_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C'_v} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \oint_{C_{p2}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho$$

$$+ \int_{C_{02}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C'_{\infty 2}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho. \quad (3.70)$$

En la Ec. (3.70) los caminos C_{01} y C_{02} mostrados en la Fig. 3.9(b) se originan como consecuencia del desplazamiento de C_r hacia la derecha de la rama, dando lugar a una trayectoria resultante perpendicular a $\text{Re}(k_\rho)$ en $k_\rho = k_0$, que tiene la mitad de su recorrido sobre la hoja de Riemann impropia (camino C_{01}) y la otra mitad sobre la hoja de Riemann propia (camino C_{02}). Los caminos C'_i y C'_v son caminos de ida y vuelta que van desde C_{01} hasta el camino circular C_{p2} que rodea al polo tipo 2 de la Fig. 3.8. Finalmente, los caminos $C'_{\infty 1}$ y $C'_{\infty 2}$ de la Fig. 3.9(b) son caminos situados en el infinito, el primero en la hoja impropia y el segundo en la hoja propia.

Por analogía con la ecuación Ec. (3.66), las integrales a través de los tramos situados en el infinito se anulan, esto es:

$$\int_{C'_{\infty 1}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C'_{\infty 2}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = 0. \quad (3.71)$$

Además, por analogía con la Ec. (3.67), las integrales a través de C'_i y C'_v se cancelan entre sí y podemos escribir:

$$\int_{C'_i} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C'_v} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = 0. \quad (3.72)$$

Finalmente, por analogía con la Ec. (3.68), la integral a través del camino circular C_{p2} recorrido en sentido horario viene dada por:

$$\oint_{C_{p2}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = -2\pi j W_{ni2} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)}\left(\xi \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right), \quad (3.73)$$

siendo $W_{ni2} = 1$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 2 y $W_{ni2} = 0$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 1 o tipo 3.

Por tanto, teniendo presentes las Ecs. (3.71), (3.72) y (3.73), la Ec. (3.70) para la integral a lo largo del camino C_r puede ser reescrita:

$$\int_{C_r} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho = \int_{C_{01}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho + \int_{C_{02}} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho - 2\pi j W_{ni2} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)}\left(\xi \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right). \quad (3.74)$$

Finalmente, sustituyendo (3.74) en (3.69), se llega a la siguiente expresión para las integrales $J_{ni}(\xi)$:

$$J_{ni}(\xi) = \int_{C_0} f_{n,i}(k_\rho, \xi) dk_\rho - 2\pi j W_{ni} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)}\left(\xi \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}\right), \quad (3.75)$$

donde $C_0 = C_{01} \cup C_{02}$ es un camino de integración que tiene la mitad en la hoja de Riemann impropia del plano complejo k_ρ (esto es, la parte correspondiente al camino C_{01} de la Fig. 3.9(b)) y la otra mitad en la hoja de Riemann propia (la mitad correspondiente al camino C_{02} de la Fig. 3.9(b)), y donde $W_{ni} = W_{ni1} + W_{ni2}$ (es decir, $W_{ni} = 1$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 1 o tipo 2 y $W_{ni} = 0$ si $q_{n,i}$ es un polo tipo 3).

Y sustituyendo (3.75) en (3.64), se llega a la siguiente expresión aproximada de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$:

$$S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\} \approx -\frac{j}{2} \sum_{i=1}^N b_{n,i} W_{ni} q_{n,i} (k_0^2 + q_{n,i}^2)^{n/2} H_n^{(2)}\left(\xi \sqrt{k_0^2 + q_{n,i}^2}\right) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \quad (n = 0, 1), \quad (3.76)$$

donde $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ son integrales que vienen dadas por:

$$I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) = \int_{C_0} \frac{H_n^{(2)}(k_\rho \xi) k_\rho^{n+1}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 - q_{n,i}}} dk_\rho \quad (n = 0, 1; i = 1, \dots, N). \quad (3.77)$$

Las funciones de Hankel que aparecen en (3.76) son ondas de superficie que representan la contribución de la aproximación de (3.59) al espectro discreto de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ [16, 132]. Por su parte, las integrales $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ son ondas residuales que representan la contribución de la aproximación de (3.59) al espectro continuo de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ [16, 132]. Por desgracia, las integrales involucradas en la Ec. (3.77) no pueden obtenerse en forma cerrada. No obstante, ya hemos comentado que la aproximación de (3.59) ha sido obtenida para proporcionar expresiones precisas de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ en la región de campo lejano (véase el final de la sección 3.3.1). Por tanto, nosotros sólo estamos interesados en las expresiones asintóticas de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ para valores grandes de la variable espacial ξ . A continuación, se llega a estas expresiones asintóticas mediante dos procedimientos, siendo el segundo de ellos sustancialmente más preciso que el primero.

3.3.2.1. Obtención del desarrollo asintótico de las ondas residuales mediante el lema de Watson

La forma más directa y sencilla de obtener el desarrollo asintótico de las integrales de la Ec. (3.77) se basa en hacer uso de la expresión asintótica de las funciones de Hankel para argumentos grandes [105, (9.2.4)]:

$$H_n^{(2)}(k_\rho \xi) \Big|_{\xi \gg} \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi k_\rho \xi}} j^n e^{-jk_\rho \xi}. \quad (3.78)$$

Sustituyendo (3.78) en (3.77), se obtiene que:

$$I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\xi \gg} \approx j^n \sqrt{\frac{2j}{\pi \xi}} \int_{C_0} \frac{e^{-jk_\rho \xi} k_\rho^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 - q_{n,i}}} dk_\rho \quad (n = 0, 1). \quad (3.79)$$

Si a continuación introducimos en (3.79) el cambio de variables $k_\rho = k_0 - js$,

en el que s es un número real positivo ($0 < s < \infty$), se llega a que:

$$I_{ni}^{OR}(\xi) \Big|_{\xi \gg} \approx -j^{n+1} \sqrt{\frac{2j}{\pi\xi}} e^{-jk_0\xi} \left[- \int_0^\infty \frac{e^{-s\xi} (k_0 - js)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2} \Big|_{C_{01}} - q_{n,i}} ds \Big|_{\xi \gg} + \int_0^\infty \frac{e^{-s\xi} (k_0 - js)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2} \Big|_{C_{02}} - q_{n,i}} ds \Big|_{\xi \gg} \right] \quad (n = 0, 1) . \quad (3.80)$$

De acuerdo con el lema de Watson (véanse las páginas 261-265 de [156]), a la hora de hacer el desarrollo asintótico de las integrales que aparecen en la Ec. (3.80), basta sustituir el factor que multiplica a $e^{-s\xi}$ en los integrandos por su valor límite cuando $s \ll$. En el caso del término $\sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2}$, el valor límite va a ser distinto según estemos en la hoja de Riemann propia del plano complejo k_ρ o en la hoja de Riemann impropia [161]. Vamos a estudiar esto último con más detalle. En el límite cuando $s \ll$, la variable espectral u_0 definida en (3.58) viene dada por:

$$u_0(k_\rho = k_0 - js) \Big|_{s \ll} = \sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2} \Big|_{s \ll} = \sqrt{(-js)(2k_0 - js)} \Big|_{s \ll} \approx \sqrt{-js2k_0} = j\sqrt{2jk_0}\sqrt{s} . \quad (3.81)$$

El signo de \sqrt{s} dependerá de si estamos en la hoja de Riemann impropia o en la hoja de Riemann propia del plano complejo k_ρ . Si estamos en la hoja impropia, $\text{Re}(u_0|_{s \ll}) < 0$, con lo cual $\pi/2 < \arg(u_0|_{s \ll}) < 3\pi/2$ y, de acuerdo con (3.81), $\pi/2 < 3\pi/4 + \arg(\sqrt{s}) < 3\pi/2$, o lo que es lo mismo, $-\pi/4 < \arg(\sqrt{s}) < 3\pi/4$. Dado que s es un número real, $\arg(\sqrt{s}) = 0$ en la hoja impropia y:

$$\sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2} \Big|_{C_{01}; s \ll} = j\sqrt{2jk_0}\sqrt{s} \Big|_{C_{01}} = +j\sqrt{2jk_0}\sqrt{s} . \quad (3.82)$$

Con respecto al signo de \sqrt{s} en la hoja propia, en ese caso $\text{Re}(u_0|_{s \ll}) > 0$, con lo cual $-\pi/2 < \arg(u_0|_{s \ll}) < \pi/2$ y, de acuerdo con (3.82), $-5\pi/4 < \arg(\sqrt{s}) < -\pi/4$. Esto significa que, como s es real, debe verificarse que $\arg(\sqrt{s}) = \pi$ en la hoja propia y:

$$\sqrt{(k_0 - js)^2 - k_0^2} \Big|_{C_{02}; s \ll} = j\sqrt{2jk_0}\sqrt{s} \Big|_{C_{02}} = -j\sqrt{2jk_0}\sqrt{s} . \quad (3.83)$$

Aplicando el lema de Watson al desarrollo asintótico de las integrales de la Ec. (3.80), y utilizando los resultados de las Ecs.(3.82) y (3.83), se llega a que:

$$\begin{aligned} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\xi \gg} &\approx j^{n+1} \sqrt{\frac{2j}{\pi\xi}} e^{-jk_0\xi} k_0^{n+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-s\xi} \left[\frac{1}{j\sqrt{2jk_0s} + q_{n,i}} + \frac{1}{j\sqrt{2jk_0s} - q_{n,i}} \right] ds \\ &= 2(jk_0)^n \sqrt{\frac{1}{\pi\xi}} e^{-jk_0\xi} \int_0^\infty \frac{e^{-s\xi} \sqrt{s}}{s - \left(\frac{q_{n,i}}{j\sqrt{2jk_0}} \right)^2} ds \quad (n = 0, 1). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Utilizando el resultado obtenido en [161, Apéndice], la integral que aparece en (3.84) puede expresarse en términos de la función error $\text{erf}(\cdot)$ [105] del siguiente modo:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s\xi} \sqrt{s}}{s - s_{n,i}} ds = \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} + j\pi \sqrt{s_{n,i}} e^{-s_{n,i}\xi} \left[\text{sgn}(\text{Im}(\sqrt{s_{n,i}})) + \text{erf}(j\sqrt{s_{n,i}\xi}) \right] \right\}, \quad (3.85)$$

siendo $s_{n,i} = (q_{n,i}/(j\sqrt{2jk_0}))^2$ y $\text{sgn}(\cdot)$ la función signo ($\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, y $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$). Finalmente, haciendo uso de (3.85) en (3.84), se obtiene la siguiente expresión asintótica para la suma de ondas residuales de la Ec. (3.76):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\xi \gg} &\approx \frac{(jk_0)^n}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\pi\xi}} e^{-jk_0\xi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} + j\pi \sqrt{s_{n,i}} e^{-s_{n,i}\xi} \left[\text{sgn}(\text{Im}(\sqrt{s_{n,i}})) + \text{erf}(j\sqrt{s_{n,i}\xi}) \right] \right\} \quad (n = 0, 1). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Cuando se sustituye la Ec. (3.86) en (3.76), se obtienen expresiones asintóticas para las funciones de Green multicapa espaciales que son válidas para valores grandes de ξ , estando basadas estas expresiones asintóticas en el lema de Watson.

En el término $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ de la Ec. (3.76), el sumatorio incluye a todos los polos propios e impropios presentes en la aproximación (3.59) de $\tilde{G}_n(k_\rho)$. No obstante, no todos los polos contribuyen por igual a $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$. De hecho, cuanto más cerca se encuentra un polo del punto de ramificación k_0 , mayor es su contribución a $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$. Vamos a llamar $p_n^c = \sqrt{(q_n^c)^2 + k_0^2}$ al polo de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ (propio o impropio) más cercano al punto de ramificación. Siguiendo la propuesta de [150, Ec. (3)] (véase también [56]), vamos a introducir un parámetro $\alpha_{\text{prox}} = |p_n^c - k_0|/k_0$ que mide la proximidad de p_n^c al punto de ramificación k_0 .

Las simulaciones numéricas parecen indicar que en las situaciones en las que se verifica que $\alpha_{\text{prox}} \leq 0.01$, el sumando $b_n^c I_{nc}^{\text{OR}}(\xi)$ (donde b_n^c y $I_{nc}^{\text{OR}}(\xi)$ son los valores de $b_{n,i}$ y $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ particularizados para el caso del polo q_n^c) es mucho mayor que los demás sumandos de $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ y, en ese caso, el término de ondas residuales de la Ec. (3.76) puede aproximarse por (véase [132, Ecs. (21) y (34)] para un resultado similar):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\alpha_{\text{prox}} \leq 0.01; \xi \gg} \\ & \approx \frac{(jk_0)^n}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\pi\xi}} e^{-jk_0\xi} b_n^c \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} + j\pi \sqrt{s_n^c} e^{-s_n^c \xi} \left[\text{sgn}(\text{Im}(\sqrt{s_n^c})) + \text{erf}(j\sqrt{s_n^c \xi}) \right] \right\} \\ & \quad (n = 0, 1), \quad (3.87) \end{aligned}$$

siendo s_n^c el valor $s_{n,i}$ particularizado para el caso del polo p_n^c .

Cuando el polo p_n^c no está muy próximo a k_0 , las simulaciones numéricas indican que todos los polos propios e impropios $q_{n,i}$ ($i = 1, \dots, N$) estimados en la representación polo-residuo de (3.59) pueden contribuir con la misma relevancia a $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$. Se ha observado que cuando se verifica que $\alpha_{\text{prox}} \geq 1$, la función error de la Ec. (3.86) puede sustituirse en primera aproximación por los dos primeros términos de su desarrollo asintótico para valores grandes del argumento [105, 7.1.23] y, en ese caso, el término de ondas residuales de la Ec. (3.76) puede aproximarse mediante la expresión simplificada que se muestra a continuación:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\alpha_{\text{prox}} \geq 1; \xi \gg} \approx \frac{(jk_0)^n e^{-jk_0\xi}}{2\pi\xi^2} \sum_{i=1}^N \frac{b_{n,i}}{q_{n,i}^2} \quad (n = 0, 1). \quad (3.88)$$

Cuando se introduce la Ec. (3.86) (o cualquiera de sus dos límites dados por (3.87) y (3.88)) en (3.76), se obtiene una expresión matemática que reproduce todos los posibles comportamientos de las funciones de Green espaciales $S_n \{ \tilde{G}_n(k_\rho) \}$ en la región de campo lejano (véase [132] para una explicación más detallada de esos posibles comportamientos).

De hecho, cuando la contribución dominante en el campo lejano es debida al espectro discreto (o lo que es lo mismo, a las ondas de superficie asociadas con los polos propios de las funciones de Green espectrales) y el medio multicapa no

tiene pérdidas, el comportamiento de $S_n \{ \tilde{G}_n(k_\rho) \}$ para valores grandes de ξ es del tipo $\xi^{-1/2}$. Este comportamiento es reproducido correctamente por las funciones de Hankel de la Ec. (3.76) y domina sobre el comportamiento asintótico del término de ondas residuales.

En los casos en los que domina el comportamiento asintótico del término de ondas residuales (porque el medio multicapa tenga pérdidas o porque la función de Green espectral no tenga polos propios [132]), pueden darse dos situaciones diferentes:

- a) $\alpha_{\text{prox}} \leq 0.01$. Si existe un polo muy próximo al punto de ramificación, será su contribución la dominante en la expresión final de la función de Green espacial. En ese caso, las funciones de Green espaciales tiene un comportamiento en campo lejano del tipo ξ^{-1} que, suficientemente lejos, conmuta hacia un comportamiento del tipo ξ^{-2} [132]. Esta situación es correctamente reproducida por la Ec. (3.87) cuando se tiene en cuenta la expresión de la función error para valores pequeños y grandes de su argumento [132].
- b) $\alpha_{\text{prox}} \geq 1$. Cuando todos los polos propios e impropios de la función de Green espectral están suficientemente lejos del punto de ramificación, el comportamiento asintótico de las funciones de Green espaciales en la región de campo lejano es del tipo ξ^{-2} , comportamiento que es correctamente reproducido por la Ec. (3.88).

En la Fig. 3.10 se representa la función de Green del potencial escalar G^ϕ y la componente xx de la función de Green del potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A,m}}$ para un medio de 4 capas a distintas frecuencias. En todos los casos, los valores obtenidos para las funciones de Green mediante integración numérica de las integrales de Sommerfeld de la Ec. (3.48) son comparados con los valores obtenidos mediante las Ecs. (3.76) y (3.86), (3.76) y (3.87), y (3.76) y (3.88). Para llevar a cabo la integración numérica de las integrales de la Ec. (3.48) se ha utilizado, bien el método de los promedios ponderados [32, 34], bien la técnica de integración en el plano complejo publicada en [162] (la utilización de uno u otro método ha dependido de la precisión aportada por cada método, precisión que es función de la variable espacial ξ). En la Fig. 3.10 se observa que las Ecs. (3.76) y (3.86) (o en su defecto,

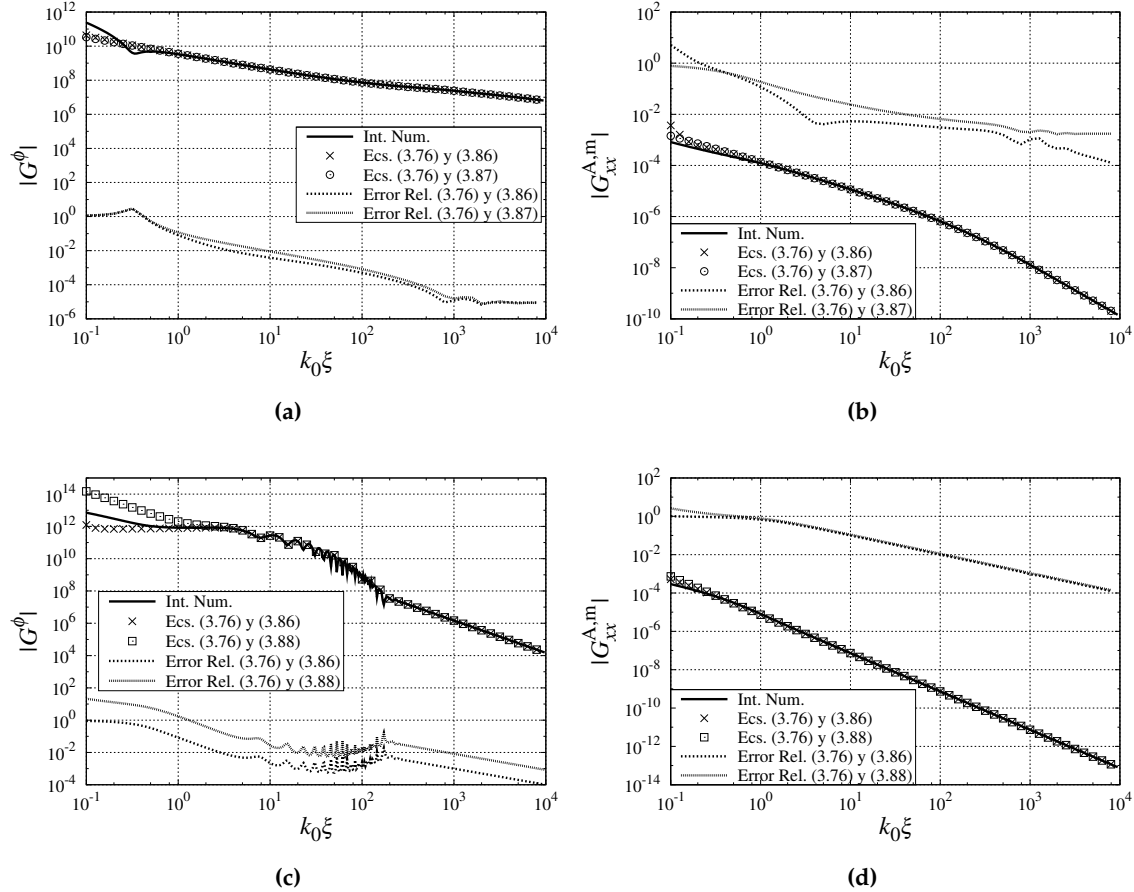


Figura 3.10: Módulo de las FGs espaciales $G_{xx}^{A,m}$ y G^ϕ para un medio de 4 capas. Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante (3.76) y (3.86) (\times), (3.76) y (3.87) (\circ) y (3.76) y (3.88) (\square). $z = z' = 0$, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 1.5$ mm, $h_2 = 1.0$ mm, $h_3 = 1.5$ mm, $h_4 = 1.5$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$, $\tan \delta_2 = 0.08$. (a) $f = 1$ GHz, $N = 6$. (b) $f = 5.7$ GHz, $N = 10$. (c) $f = 7$ GHz, $N = 10$. (d) $f = 2.5$ GHz, $N = 7$.

las Ecs. (3.76) y (3.87), o (3.76) y (3.88)) habitualmente proporcionan las funciones de Green espaciales con un error inferior al 1% cuando $k_0 \xi > 100$.

En los casos mostrados en las Figs. 3.10(a) y 3.10(b), se observa que los resultados que se obtienen con (3.76) y (3.87) son muy similares a los que se obtienen con (3.76) y (3.86). Esto se debe a que en ambos casos hay un polo muy próximo al punto de ramificación. En concreto, para la función de Green G^ϕ de la Fig. 3.10(a) ($f = 1$ GHz), se cumple que $p_n^c/k_0 = 1.00439 - j2 \times 10^{-5}$ (el polo más cercano a

k_0 es un polo propio) y que $\alpha_{\text{prox}} = 0.004$. Para la función de Green $G_{xx}^{A,m}$ de la Fig. 3.10(b) ($f = 5.7$ GHz), se cumple que $p_n^c/k_0 = 0.9945 - j0.0020$ (el polo más cercano a k_0 sigue siendo un polo propio) y que $\alpha_{\text{prox}} = 0.005$. Tanto en el caso estudiado en la Fig. 3.10(a) como en el estudiado en la Fig. 3.10(b), las Ecs (3.76) y (3.88) sólo proporcionan una buena aproximación de las funciones de Green espaciales para valores muy elevados de $k_0\xi$, lo cual es debido a la existencia de un polo demasiado próximo a k_0 .

En las Figs. 3.10(c) y 3.10(d) se muestran dos situaciones en las que no hay ningún polo próximo al punto de ramificación k_0 . Para el caso mostrado en la Fig. 3.10(c) ($f = 7$ GHz), la función de Green espectral \tilde{G}^ϕ tiene dos polos propios, y el polo más cercano al punto de ramificación es un polo impropio con un parámetro de proximidad $\alpha_{\text{prox}} = 0.286$. Por otro lado, para la frecuencia de operación estudiada en la Fig. 3.10(d) ($f = 2.5$ GHz), \tilde{G}_{xx}^A sólo tiene polos impropios que además están relativamente lejos del punto de ramificación. Se observa que en los dos casos las Ecs. (3.76) y (3.88) proporcionan resultados similares a los que proporcionan (3.76) y (3.86). En cambio, las simulaciones numéricas han demostrado que en las situaciones mostradas en las Figs. 3.10(c) y 3.10(d), las Ecs. (3.76) y (3.87) conducen a resultados erróneos ya que en estos dos casos todas las contribuciones de los polos de (3.59) al término de ondas residuales $\sum_{i=1}^N b_{n,i} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ son relevantes y no pueden ser despreciadas.

Las Figs. 3.10(a) a 3.10(d) muestran que es preciso llegar hasta $k_0\xi > 1000$ para que las Ecs. (3.76) y (3.86) permitan obtener las funciones de Green espaciales en la región de campo lejano con un error inferior al 0.1 %. Eso significa que las expresiones asintóticas obtenidas para $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ no son demasiado precisas. En la siguiente sección se obtienen expresiones asintóticas mucho más precisas para $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ mediante el método de Pauli-Clemmow.

3.3.2.2. Obtención del desarrollo asintótico de las ondas residuales mediante el método de Pauli-Clemmow

En la sección anterior se han deducido expresiones analíticas para aproximar el campo lejano de las funciones de Green espaciales en medios multicapa. Dichas

expresiones están basadas en el desarrollo asintótico de integrales conocidas como ondas residuales. Al final de la sección hemos comprobado que las expresiones asintóticas obtenidas para las ondas residuales sólo son precisas para valores elevados de la variable ξ . En esta sección se van a obtener expresiones asintóticas de las ondas residuales que son precisas en un rango mucho mayor de valores de la variable ξ [147].

Al igual que en la sección anterior, vamos a intentar obtener un desarrollo asintótico de las ondas residuales $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ de la Ec. (3.77) para valores grandes de la variable ξ . Para ello, introduciremos el cambio de variables $k_\rho = k_0 - js$ directamente en la Ec. (3.77). Teniendo en cuenta el signo que toma \sqrt{s} en los caminos C_{01} y C_{02} (véanse las Ecs. (3.82) y (3.83)), la Ec. (3.77) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) &= j \left[\int_0^\infty \frac{H_n^{(2)}[(k_0 - js)\xi](k_0 - js)^{n+1}}{j\sqrt{js}\sqrt{2k_0 - js} - q_{n,i}} ds - \int_0^\infty \frac{H_n^{(2)}[(k_0 - js)\xi](k_0 - js)^{n+1}}{-j\sqrt{js}\sqrt{2k_0 - js} - q_{n,i}} ds \right] \\ &= \frac{-j^{3/2}}{\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}} \int_0^\infty H_n^{(2)}[(k_0 - js)\xi](k_0 - js)^{n+1}(2k_0 - js)^{1/2} \\ &\quad \times \left[\frac{\sqrt{s}}{s - s_{1ni}} - \frac{\sqrt{s}}{s - s_{2ni}} \right] ds \quad (n = 0, 1; i = 1, \dots, N), \quad (3.89) \end{aligned}$$

siendo $s_{kni} = -jk_0 + (-1)^{k+1}j\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}$ ($k = 1, 2$). Si multiplicamos el integrando de la Ec. (3.89) simultáneamente por $e^{j(k_0 - js)\xi}$ y por $e^{-j(k_0 - js)\xi}$, la Ec. (3.89) puede reescribirse como:

$$I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) = -\frac{j^{3/2} e^{-jk_0\xi}}{\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}} \int_0^\infty A_n(\xi, s) \left[\frac{\sqrt{s}}{s - s_{1ni}} - \frac{\sqrt{s}}{s - s_{2ni}} \right] e^{-s\xi} ds \quad (n = 0, 1), \quad (3.90)$$

donde las funciones $A_n(\xi, s)$ están dadas por:

$$A_n(\xi, s) = H_n^{(2)}[(k_0 - js)\xi](k_0 - js)^{n+1}(2k_0 - js)^{1/2} e^{j(k_0 - js)\xi}. \quad (3.91)$$

Dado que las funciones $A_n(\xi, s)$ son funciones regulares de la variable s en un entorno de $s = 0$ y están acotadas cuando $\xi \rightarrow \infty$, es posible utilizar el método de

Pauli-Clemmow para llevar a cabo un desarrollo asintótico uniforme de las integrales de (3.90) para valores grandes de ξ [159, 160, 163, 164]. Para obtener dicho desarrollo asintótico uniforme, primero se desarrollan las funciones $A_n(\xi, s)$ en series de Taylor alrededor del punto $s = 0$:

$$A_n(\xi, s) \Big|_{s \ll} \approx \sum_{j=1}^{N_{as}} B_{n,j}(\xi) s^{j-1}. \quad (3.92)$$

A continuación, se sustituye la Ec. (3.92) en la Ec. (3.90) y se obtiene el siguiente desarrollo asintótico uniforme para $I_{ni}^{OR}(\xi)$:

$$I_{ni}^{OR}(\xi) \Big|_{\xi \gg} \approx - \frac{j^{3/2} e^{-jk_0\xi}}{\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}} \sum_{j=1}^{N_{as}} B_{n,j}(\xi) P_{n,ij}(\xi), \quad (3.93)$$

donde las funciones $B_{n,j}(\xi)$ ($n = 0, 1; j = 1, \dots, N_{as}$) son combinaciones lineales de las funciones de Hankel $H_0^{(2)}(k_0\xi)$ y $H_1^{(2)}(k_0\xi)$. En el rango de valores $1 \leq j \leq 3$, las funciones $B_{n,j}(\xi)$ tienen las expresiones que se muestran a continuación:

$$B_{0,1}(\xi) = \sqrt{2} k_0^{3/2} e^{jk_0\xi} H_0^{(2)}(k_0\xi) \quad (3.94)$$

$$B_{0,2}(\xi) = \sqrt{2} k_0^{3/2} \xi e^{jk_0\xi} \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + j H_1^{(2)}(k_0\xi) \right] - \frac{5j}{2\sqrt{2}} k_0^{1/2} e^{jk_0\xi} H_0^{(2)}(k_0\xi) \quad (3.95)$$

$$B_{0,3}(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2} k_0^{3/2} \xi^2 e^{jk_0\xi} \times \left[2H_0^{(2)}(k_0\xi) + 2jH_1^{(2)}(k_0\xi) - \frac{H_1^{(2)}(k_0\xi)}{k_0\xi} \right] - \frac{5j}{\sqrt{2}} k_0^{1/2} \xi e^{jk_0\xi} \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + jH_1^{(2)}(k_0\xi) \right] - \frac{7}{8\sqrt{2}k_0} e^{jk_0\xi} H_0^{(2)}(k_0\xi) \right\} \quad (3.96)$$

$$B_{1,1}(\xi) = \sqrt{2} k_0^{5/2} e^{jk_0\xi} H_1^{(2)}(k_0\xi) \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned}
B_{1,2}(\xi) = & -j\sqrt{2}k_0^{5/2}\xi e^{jk_0\xi} \\
& \times \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + jH_1^{(2)}(k_0\xi) - \frac{H_1^{(2)}(k_0\xi)}{k_0\xi} \right] \\
& - \frac{j9\sqrt{2}}{4}k_0^{3/2} e^{jk_0\xi} H_1^{(2)}(k_0\xi)
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,3}(\xi) = & \frac{k_0^{5/2}\xi^2 e^{jk_0\xi}}{\sqrt{2}} \left\{ -2j \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + jH_1^{(2)}(k_0\xi) \right] \right. \\
& + \frac{1}{k_0\xi} \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + 2jH_1^{(2)}(k_0\xi) \right] - \frac{2H_1^{(2)}(k_0\xi)}{(k_0\xi)^2} \left. \right\} \\
& - \frac{9\sqrt{2}}{4}k_0^{3/2}\xi e^{jk_0\xi} \\
& \times \left[H_0^{(2)}(k_0\xi) + jH_1^{(2)}(k_0\xi) - \frac{H_1^{(2)}(k_0\xi)}{k_0\xi} \right] \\
& - \frac{47\sqrt{2}}{32}k_0^{1/2} e^{jk_0\xi} H_1^{(2)}(k_0\xi),
\end{aligned} \tag{3.99}$$

y las funciones $P_{n,ij}(\xi)$ ($n = 0, 1; i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N_{as}$) son las integrales paramétricas:

$$P_{n,ij}(\xi) = \int_0^\infty s^{j-1} \left[\frac{\sqrt{s}}{s - s_{1ni}} - \frac{\sqrt{s}}{s - s_{2ni}} \right] e^{-s\xi} ds. \tag{3.100}$$

Las integrales $P_{n,ij}(\xi)$ pueden expresarse en forma cerrada en términos de la función error (véase [165, Apéndice II]). De hecho, en el rango de valores $1 \leq j \leq 3$ dichas integrales adoptan las expresiones que se muestran a continuación:

$$P_{n,i1}(\xi) = R_{1ni}(\xi) - R_{2ni}(\xi) \tag{3.101}$$

$$P_{n,i2}(\xi) = s_{1ni}R_{1ni}(\xi) - s_{2ni}R_{2ni}(\xi) \tag{3.102}$$

$$P_{n,i3}(\xi) = \frac{(s_{1ni} - s_{2ni})\sqrt{\pi}}{2\xi^{3/2}} + [s_{1ni}^2 R_{1ni}(\xi) - s_{2ni}^2 R_{2ni}(\xi)], \tag{3.103}$$

donde las funciones $R_{1ni}(\xi)$ y $R_{2ni}(\xi)$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
R_{kni}(\xi) = & \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} + j\pi\sqrt{s_{kni}} e^{-s_{kni}\xi} \left[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\sqrt{s_{kni}})) + \operatorname{erf}\left(j\sqrt{s_{kni}\xi}\right) \right] \\
& (k = 1, 2; n = 0, 1; i = 1, \dots, N).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Cuando se sustituye la expresión de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ de la Ec. (3.93) en la Ec. (3.76), se obtienen expresiones asintóticas de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ para valores grandes de ξ que están basadas en el método de Pauli-Clemmow.

Las simulaciones numéricas indican que cuando $q_{n,i}$ verifica que $|q_{n,i}/k_0| \geq 3$, las funciones $B_{n,j}(\xi)$ y $P_{n,ij}(\xi)$ de (3.93) pueden sustituirse por su expresión asintótica para valores grandes de la variable espacial ξ , y en ese caso el desarrollo asintótico uniforme de (3.93) adopta la expresión simplificada:

$$I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\xi \gg} \approx \frac{2(jk_0)^{n+1} e^{-jk_0\xi}}{(q_{n,i}\xi)^2} \sum_{j=1}^{N_{\text{as}}} \frac{C_{n,ij}}{(k_0\xi)^{j-1}}, \quad (3.105)$$

siendo $C_{n,ij}$ ($n = 0, 1; i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N_{\text{as}}$) unos coeficientes cuyas expresiones en el rango de valores $1 \leq j \leq 3$ vienen dadas por:

$$C_{0,i1} = 1 \quad (3.106)$$

$$C_{0,i2} = -j \left[1 + 3 \left(\frac{k_0}{q_{0i}} \right)^2 \right] \quad (3.107)$$

$$C_{0,i3} = - \left[9 \left(\frac{k_0}{q_{0i}} \right)^2 + 15 \left(\frac{k_0}{q_{0i}} \right)^4 \right] \quad (3.108)$$

$$C_{1,i1} = 1 \quad (3.109)$$

$$C_{1,i2} = -3j \left[1 + \left(\frac{k_0}{q_{1i}} \right)^2 \right] \quad (3.110)$$

$$C_{1,i3} = - \left[3 + 18 \left(\frac{k_0}{q_{1i}} \right)^2 + 15 \left(\frac{k_0}{q_{1i}} \right)^4 \right]. \quad (3.111)$$

Una vez obtenidas las expresiones asintóticas (3.93) y (3.105) para $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$, vamos a proceder a comparar los resultados obtenidos con dichas expresiones con los resultados que se obtienen para $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ a partir de la Ec. (3.77) mediante integración numérica [34, 162]. Concretamente, estudiaremos dos situaciones: una en la cual el polo $q_{n,i}$ está lejos del origen del plano u_0 (lo cual se corresponde con un polo $p_{n,i}$ del plano k_ρ situado lejos del punto de ramificación k_0) y otra en la cual el polo $q_{n,i}$ está cerca del origen del plano u_0 (lo cual se corresponde con un polo $p_{n,i}$ del plano k_ρ situado cerca de k_0). Estas dos situaciones aparecen recogidas en

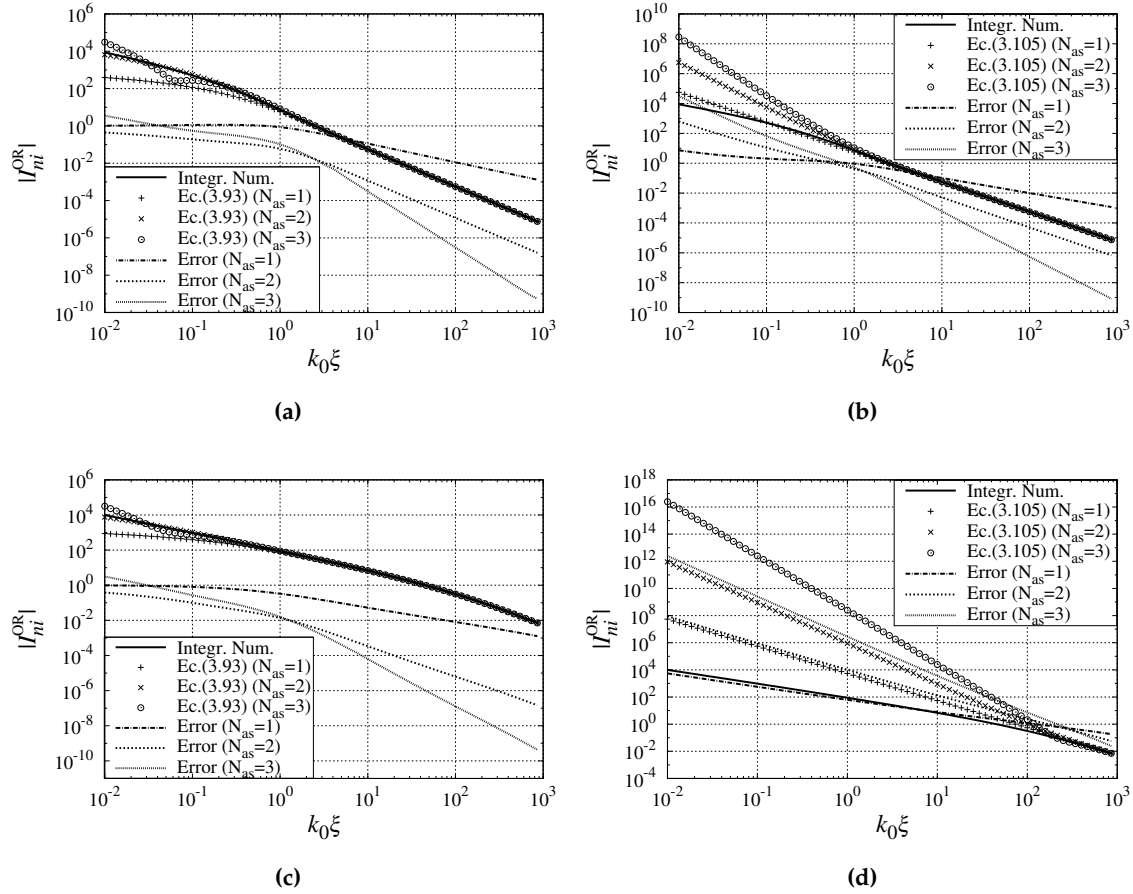


Figura 3.11: Valor de la integral de $I_{ni}^{OR}(\xi)$ de (3.77) en el caso en el que $q_{oi}/k_0 = -2.870873 + j3.114602$ (polo “impropio” lejos del origen en el plano u_0 , (a) y (b)), y en el caso en el que $q_{oi}/k_0 = -0.1351825$ (polo “impropio” cerca del origen de coordenadas del plano u_0 , (c) y (d)). Estos polos aparecen en (3.59) al aplicar el MMCT a la aproximación de \tilde{G}^ϕ para el medio de cuatro capas estudiado en la Fig. 3.7 ($f = 30$ GHz). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante las Ecs. (3.93) ((a) y (c)) y (3.105) ((b) y (d)) (+, ×, ⊙). En la figura también se muestran los errores relativos existentes entre los resultados obtenidos mediante integración numérica y los obtenidos con las expresiones aproximadas (3.93) y (3.105) (líneas discontinuas).

la Fig. 3.11 donde los resultados obtenidos para $I_{ni}^{OR}(\xi)$ mediante integración numérica [34, 162] se comparan con los obtenidos mediante las Ecs. (3.93) y (3.105) en los casos $N_{as} = 1$, $N_{as} = 2$ y $N_{as} = 3$.

Las Figs. 3.11(a) y (c) muestran que la Ec. (3.93) proporciona $I_{ni}^{OR}(\xi)$ con un error inferior al 0.1% cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$ ($\lambda_0 = 2\pi/k_0$ es la longitud de onda en el

espacio libre) y $N_{\text{as}} = 3$. Esto da una estimación del nivel de precisión que puede alcanzarse con las Ecs. (3.76) y (3.93) (para $N_{\text{as}} = 3$) en la aproximación del campo lejano de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$. Téngase en cuenta que los errores relativos obtenidos en las Figs. 3.11(a) y (c) para los diferentes valores de N_{as} muestran un decaimiento del tipo $\xi^{-N_{\text{as}}}$ conforme ξ aumenta, lo cual es de esperar ya que se retienen términos de orden cada vez mayor en el desarrollo asintótico uniforme de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ al aumentar N_{as} . Aunque sería posible obtener resultados para $N_{\text{as}} \geq 4$ en las Figs. 3.11(a) y (c), dichas figuras parecen indicar que aunque el error en la estimación del campo lejano de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ se reduciría, los errores en el campo próximo se mantendrían fijos. Como el nivel de error obtenido en el campo lejano con $N_{\text{as}} = 3$ (menor del 0.1 % cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$) es suficiente para propósitos prácticos, en el resto de este Capítulo se trabajará siempre con $N_{\text{as}} = 3$. En las Figs. 3.11(b) y (d) se muestran los resultados obtenidos para $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ con la Ec. (3.105), junto con los errores relativos que proporciona dicha aproximación. Se observa que cuando $|q_{n,i}/k_0| \geq 3$ (Fig. 3.11(b)) la precisión que se alcanza con (3.105) es similar a la obtenida con (3.93). Sin embargo, cuando $|q_{n,i}/k_0| < 3$ (Fig. 3.11(d)), la ecuación (3.105) reduce drásticamente su precisión. Dado que la expresión matemática de la Ec. (3.105) es mucho más simple que la de la Ec. (3.93), será conveniente usar la Ec. (3.105) siempre que sea posible (es decir, siempre que se cumpla que $|q_{n,i}/k_0| \geq 3$), mientras que la Ec. (3.93) sólo se usará cuando $|q_{n,i}/k_0| < 3$. Las simulaciones numéricas muestran que cuando el método de los mínimos cuadrados totales se aplica a la Ec. (3.59), al menos el 65 % de los polos $q_{n,i}$ satisfacen la condición $|q_{n,i}/k_0| \geq 3$, pudiendo aplicarse la Ec. (3.105) en el cálculo de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi) \Big|_{\xi \gg}$ para todos esos polos.

La expresión asintótica que se obtuvo en la sección 3.3.2.1 para $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ (véase la Ec. (3.86)) tenía el inconveniente de que sólo permitía obtener valores precisos de $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ para valores elevados de ξ , y en consecuencia, sólo permitía también obtener valores precisos de las funciones de Green espaciales para valores elevados de ξ . Tal y como hemos visto en la Fig. 3.11, las nuevas expresiones asintóticas obtenidas en esta sección para $I_{ni}^{\text{OR}}(\xi)$ (Ecs. (3.93) y (3.105)) deberían solventar estos problemas. En las Figs. 3.12(a) a 3.12(d) se representan los resultados obtenidos

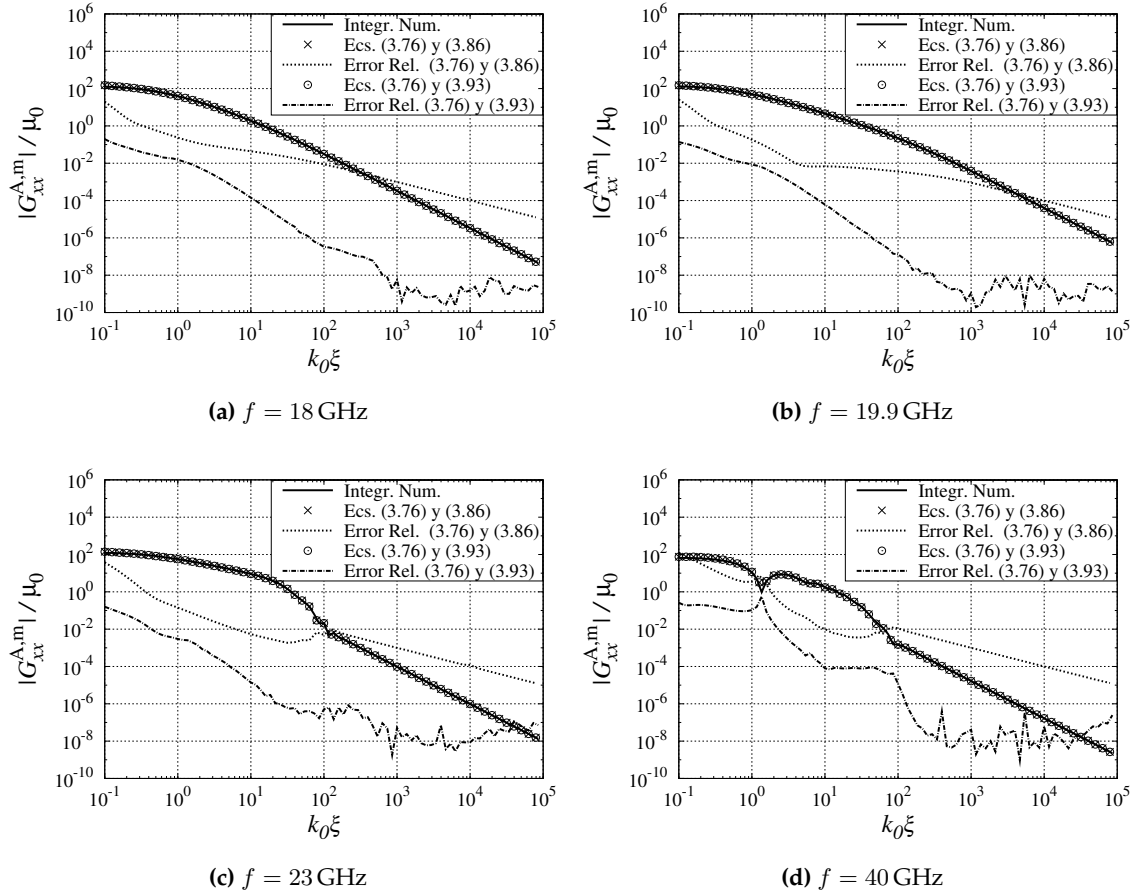


Figura 3.12: Valores de la función de Green en el dominio espacial $G_{xx}^{A,m}$ para un medio de cuatro capas con pérdidas (CEP en el límite inferior). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante la aproximación de campo lejano de la sección 3.3.2.1 (Ecs. (3.76) y (3.86), \times) y con la aproximación de campo lejano de la sección 3.3.2.2 (Ecs. (3.76) y (3.93), \circ). También se representan los errores relativos existentes entre los resultados obtenidos mediante integración numérica y los resultados obtenidos con las dos aproximaciones de campo lejano (líneas discontinuas). Parámetros del medio multicapa: $z' = -0.4 \text{ mm}$, $z = 0.3 \text{ mm}$, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 0.7 \text{ mm}$, $h_2 = 0.3 \text{ mm}$, $h_3 = 0.5 \text{ mm}$, $h_4 = 0.3 \text{ mm}$, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$, $\tan \delta_2 = 0.1$. Parámetros del MMCT: $N = 10$.

para la componente xx de la función de Green del potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}$ mediante integración numérica [34, 162], y se comparan dichos resultados con los que se obtienen para $G_{xx}^{A,m}$ mediante las Ecs. (3.76) y (3.86), y mediante las Ecs. (3.76) y (3.93). Se observa que mientras que las Ecs. (3.76) y (3.86) sólo proporcionan

los valores de $G_{xx}^{A,m}$ con un error inferior al 0.1 % cuando $\xi \gtrsim 100\lambda_0$ ($k_0\xi \geq 1000$), las Ecs. (3.76) y (3.93) proporcionan el mismo nivel de precisión cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$ (es más, el error es en este último caso inferior al 0.01 % cuando $k_0\xi \geq 10$). Esto significa que para una misma precisión, las Ecs. (3.76) y (3.93) permiten cubrir un rango de valores de ξ en el cálculo de las funciones de Green espaciales que es aproximadamente dos órdenes de magnitud superior al que permiten cubrir las Ecs. (3.76) y (3.86).

Los resultados mostrados en las las Figs. 3.12(a) a 3.12(d) corresponden a cuatro frecuencias distintas, lo cual también corresponde a situaciones físicas diferentes. En la Fig. 3.12(a), el valor de la frecuencia ($f = 18$ GHz) es inferior a la frecuencia de corte del primer modo de superficie TE del medio multicapa, con lo cual, la función de Green espectral \tilde{G}_{xx}^A no tiene polos propios [132]. Además, a esa frecuencia todos los polos impropios están relativamente lejos de los puntos de ramificación $k_\rho = \pm k_0$, siendo en este caso $\alpha_{\text{prox}} = 0.122$. Esto implica que el campo lejano de $G_{xx}^{A,m}$ está dominado por una onda residual con un decaimiento del tipo ξ^{-2} , como se observa en la gráfica. Para $f = 19.8$ GHz (Fig. 3.12(b)), \tilde{G}_{xx}^A sigue sin tener polos propios, pero tiene un polo impropio situado muy cerca del punto de ramificación, cumpliéndose que $\alpha_{\text{prox}} = 0.008$. En este caso, el campo lejano de $G_{xx}^{A,m}$ está dominado por una onda residual con un decaimiento del tipo ξ^{-1} que conmuta hacia un decaimiento del tipo ξ^{-2} . Cuando el valor de la frecuencia sube hasta $f = 23$ GHz (Fig. 3.12(c)), aparece un polo propio en \tilde{G}_{xx}^A , y de nuevo todos los polos (propios e impropios) están relativamente lejos del punto de ramificación ($\alpha_{\text{prox}} = 0.170$).

Por último, en la Fig. 3.12(d) se presenta la situación correspondiente a $f = 40$ GHz, frecuencia a la cual el polo propio ha evolucionado alejándose del punto de ramificación, siendo ahora $\alpha_{\text{prox}} = 1.265$. Tanto a $f = 23$ GHz como a $f = 40$ GHz la presencia del polo propio hace que el campo lejano de $G_{xx}^{A,m}$ esté dominado por una onda de superficie amortiguada que se transforma en una onda residual con un decaimiento del tipo ξ^{-2} [132]. En todos los casos mostrados en la Fig. 3.12, se observa que las Ecs. (3.76) y (3.93) son capaces de reproducir los comportamientos de campo lejano con una precisión siempre inferior al 0.1 % cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$.

3.4. El campo próximo de las funciones de Green en medios multicapa. Uso combinado del método de las imágenes complejas discretas y del método de ajuste mediante funciones racionales

En la sección 3.3 se han propuesto expresiones en forma cerrada (Ecs. (3.76), (3.93) y (3.105)) que permiten aproximar el campo lejano de las funciones de Green multicapa en el dominio espacial con un error inferior al 0.1 % cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$ (considerando $N_{\text{as}} = 3$). Para poder contar con expresiones en forma cerrada para $S_n \{\tilde{G}_n(k_\rho)\}$ que sean válidas en todo el rango de valores de la variable espacial ξ con una precisión razonable, será necesario obtener aproximaciones adicionales de $S_n \{\tilde{G}_n(k_\rho)\}$ en la región de campo próximo (es decir, será necesario obtener expresiones en forma cerrada de $S_n \{\tilde{G}_n(k_\rho)\}$ que tenga una precisión suficiente cuando $\xi \lesssim \lambda_0$).

La mayoría de las aproximaciones de campo próximo que se han propuesto en la literatura están basadas en la aproximación de las funciones de Green espectrales mediante una combinación lineal de exponenciales complejas obtenidas mediante el MICD [52, 54, 140]. En algunos casos, se ha contemplado también la posibilidad de añadir el comportamiento asintótico de las funciones de Green espectrales para valores grandes de k_ρ [131] a las aproximaciones mediante exponenciales complejas. No obstante, nuestras simulaciones numéricas han mostrado que este tipo de aproximaciones no permiten conseguir una precisión suficiente para $S_n \{\tilde{G}_n(k_\rho)\}$ en todo el intervalo $\xi \lesssim \lambda_0$. Por ese motivo, con vistas a obtener una aproximación precisa del campo próximo de $S_n \{\tilde{G}_n(k_\rho)\}$, en esta sección se propone llevar a cabo una aproximación más completa de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que contenga el comportamiento asintótico, que haga uso del MICD, y que además haga uso del MAFR en la variable k_ρ [51, 132] (véase la Ec. (3.56)). Esta aproximación puede escribirse en el dominio espectral en el intervalo $0 \leq k_\rho < \infty$ como:

$$\tilde{G}_n(k_\rho) \approx \tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho) + \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) + \tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho) + \tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho) + \tilde{G}_n^{\text{MMCT}}(k_\rho) \quad (n = 0, 1), \quad (3.112)$$

donde $\tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ es el comportamiento asintótico de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ para valores grandes de la variable espectral k_ρ , $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho)$ y $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)$ son aproximaciones exponenciales de primer y segundo nivel obtenidas mediante la aplicación del MICD, $\tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho)$ es la contribución a $\tilde{G}_n(k_\rho)$ de los polos propios más próximos a los puntos de ramificación $k_\rho = \pm k_0$, y por último, $\tilde{G}_n^{\text{MMCT}}(k_\rho)$ es una aproximación del tipo polo-residuo obtenida al aplicar el MMCT en el plano complejo k_ρ [51]. A continuación, explicaremos con más detalle cómo se obtiene cada una de las contribuciones espectrales a la aproximación de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que aparecen en la Ec. (3.112), y daremos expresiones para sus contrapartidas espaciales.

Las funciones espectrales $\tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ pueden obtenerse en forma cerrada y están definidas de modo que sus contrapartidas espaciales, $S_n \left\{ \tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho) \right\}$, contengan la singularidad provocada por la fuente cuando $\xi \rightarrow 0$ y $z \rightarrow z'$, así como la primera imagen de la fuente a través de cada una de las dos interfaces que limitan la capa en la que se encuentra la fuente. En el Apéndice G pueden encontrarse las expresiones de $\tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ para la estructura multicapa de la Fig. 3.3. En general, las expresiones de $\tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ mostradas en el Apéndice G pueden expresarse como una combinación lineal de funciones del tipo [51, Ecs. (44) y (46)]:

$$\tilde{f}_0(k_\rho) = \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} e^{-u_0\Delta} \quad (3.113a)$$

$$\tilde{f}_1(k_\rho) = \frac{(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})}{2k_\rho^2} e^{-u_0\Delta}, \quad (3.113b)$$

donde Δ es una cantidad independiente de k_ρ que depende de las variables z, z' y de los espesores de las capas de medio multicapa. En las Ecs. (3.113a) y (3.113b) los factores $(1 - e^{-bu_0})$ y $(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})$ (donde b se ha tomado igual a $2/k_0$) se han introducido deliberadamente para evitar que $\tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ presente singularidades matemáticas sin sentido físico cuando $k_\rho \rightarrow 0$ [166]. La contrapartida espacial de las funciones definidas en (3.113a) y (3.113b) viene dada por [51, Ecs. (45) y (47)]:

$$f_0(\xi) = S_0 \left\{ \tilde{f}_0(k_\rho) \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_0\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - \frac{e^{-jk_0\sqrt{\xi^2 + (\Delta + b)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (\Delta + b)^2}} \right\} \quad (3.114a)$$

$$f_1(\xi) = S_1 \left\{ \tilde{f}_1(k_\rho) \right\} = \frac{1}{4\pi\xi} \left\{ \frac{(\Delta + b) e^{-jk_0(\sqrt{\xi^2 + (\Delta + b)^2} - b)}}{\sqrt{\xi^2 + (\Delta + b)^2}} - \frac{\Delta e^{-jk_0\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \right\}. \quad (3.114b)$$

Las funciones $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho)$ y $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)$ de la Ec. (3.112) se obtienen aplicando el MCID a la diferencia $\tilde{D}_n(k_\rho) = \tilde{G}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho)$ ($n = 0, 1$). Simulaciones numéricas han demostrado que estas funciones espectrales $\tilde{D}_n(k_\rho)$ solamente alcanzan valores relevantes en el intervalo $0 \leq k_\rho \lesssim 3/h$ (donde si la fuente se encuentra en la capa p -ésima del medio multicapa de la Fig. 3.3, entonces se cumple que $h = \min(h_{p-1}, h_p, h_{p+1})$). Además, las simulaciones numéricas también han mostrado que en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \lesssim k_\rho \lesssim 3/h$ (siendo $k_{\text{max}} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\text{max}}}$ y $\varepsilon_{\text{max}} = \text{máx}(\varepsilon_{r1}, \dots, \varepsilon_{r, N_{\text{ca}}})$), las funciones $\tilde{D}_n(k_\rho)$ se adaptan muy bien a una aproximación en términos de exponenciales complejas mediante el MCID (en cambio, en el intervalo $0 \leq k_\rho \lesssim 1.2k_{\text{max}}$ el MCID no permite aproximar correctamente las funciones $\tilde{D}_n(k_\rho)$ ya que todos los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ están localizados en este intervalo o en sus proximidades, y no es posible reproducir el comportamiento de una función con singularidades mediante una combinación de exponenciales complejas).

Teniendo en cuenta este hecho, vamos a aplicar el MICD en dos etapas para aproximar las funciones $\tilde{D}_n(k_\rho)$ en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \lesssim k_\rho \lesssim 3/h$ haciendo uso de las funciones (véase la Ec. (3.112)):

$$\tilde{G}_0^{\text{MICD}(l)}(k_\rho) = \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} \sum_{i=1}^{N_{\text{D0}}^{(l)}} g_{0i}^{(l)} e^{-c_{0i}^{(l)}u_0} \quad (l = 1, 2) \quad (3.115a)$$

$$\tilde{G}_1^{\text{MICD}(l)}(k_\rho) = \frac{(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})}{2k_\rho^2} \sum_{i=1}^{N_{\text{D1}}^{(l)}} g_{1i}^{(l)} e^{-c_{1i}^{(l)}u_0} \quad (l = 1, 2). \quad (3.115b)$$

En una primera etapa de la aplicación del MICD, aproximamos las funciones $\tilde{D}_n(k_\rho)$ en el camino C'_1 de la Fig. 3.13 (este camino C'_1 se corresponde con el intervalo $20k_{\text{max}} \leq k_\rho \leq 3/h$ del eje real del plano complejo k_ρ) mediante las funciones espectrales $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho)$ ($n = 0, 1$). Para obtener los coeficientes $g_{ni}^{(1)}$ y $c_{ni}^{(1)}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{Dn}}^{(1)}$; $n = 0, 1$) de las Ecs. (3.115a) y (3.115b), se aplica el método

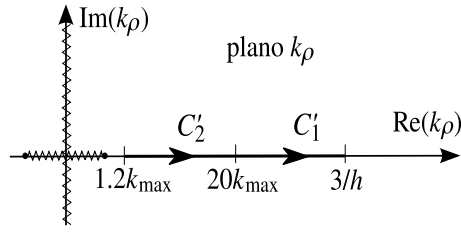


Figura 3.13: Caminos C'_1 y C'_2 utilizados en el plano complejo k_ρ para la aplicación del método de las imágenes complejas discretas en dos etapas. Si el punto fuente está dentro de la capa p -ésima del medio multicapa de la Fig. 3.3, se tendrá que $h = \min(h_{p-1}, h_p, h_{p+1})$.

del pincel de matrices generalizado o MPMG (también conocido como *Generalized Pencil of Functions*, o simplemente como GPOF, en la literatura en inglés)² a las funciones $[2u_0\tilde{D}_0(k_\rho)]/(1 - e^{-bu_0})$ y $[2k_\rho^2\tilde{D}_1(k_\rho)]/(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})$ en el intervalo $20k_{\max} \leq k_\rho \leq 3/h$ (en el Apéndice E se proporciona una explicación detallada del MPMG).

En la segunda etapa de la aplicación del MICD, se aproxima la función dada por $[\tilde{D}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho)]$ en el camino C'_2 de la Fig. 3.13 (el camino C'_2 se corresponde con el intervalo $1.2k_{\max} \leq k_\rho \leq 20k_{\max}$ del eje real del plano complejo k_ρ) mediante las funciones espectrales $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)$. En este caso, las incógnitas $g_{ni}^{(2)}$ y $c_{ni}^{(2)}$ se calculan aplicando el MPMG a las funciones $[2u_0(\tilde{D}_0(k_\rho) - \tilde{G}_0^{\text{MICD}(1)}(k_\rho))]/(1 - e^{-bu_0})$ y $[2k_\rho^2(\tilde{D}_1(k_\rho) - \tilde{G}_1^{\text{MICD}(1)}(k_\rho))]/(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})$ en el intervalo $1.2k_{\max} \leq k_\rho \leq 20k_{\max}$.

Teniendo presente que la forma matemática de las funciones que aparecen en las Ecs. (3.115a) y (3.115b) es del tipo mostrado en las Ecs. (3.113a) y (3.113b), sus contrapartidas espaciales vendrán dadas por (véanse las Ecs. (3.114a) y (3.114b)):

²Otra alternativa posible para determinar los coeficientes $g_{ni}^{(l)}$ y $c_{ni}^{(l)}$ ($i = 1, \dots, N_{Dn}^{(l)}$; $n = 0, 1$; $l = 1, 2$) de las Ecs. (3.115a) y (3.115b) consiste en aplicar el método del Prony [131] (véase también [133, págs. 620-622]) en lugar del MPMG [52]. Sin embargo, hay que señalar que si bien el método de Prony requiere un gasto computacional inferior al del MPMG, el MPMG permite una precisión mayor a la hora de determinar los coeficientes $g_{ni}^{(l)}$ y $c_{ni}^{(l)}$ [167].

$$\begin{aligned}
G_0^{\text{MICD}(l)}(\xi) &= S_0 \left\{ \tilde{G}_0^{\text{MICD}(l)}(k_\rho) \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{D0}^{(l)}} g_{0i}^{(l)} \left\{ \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (c_{0i}^{(l)})^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (c_{0i}^{(l)})^2}} - \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (c_{0i}^{(l)} + b)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (c_{0i}^{(l)} + b)^2}} \right\} \quad (3.116a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1^{\text{MICD}(l)}(\xi) &= S_1 \left\{ \tilde{G}_1^{\text{MICD}(l)}(k_\rho) \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{D1}^{(l)}} g_{1i}^{(l)} \left\{ \frac{\left(c_{1i}^{(l)} + b \right) e^{-jk_0 \left(\sqrt{\xi^2 + (c_{1i}^{(l)} + b)^2} - b \right)}}{\sqrt{\xi^2 + (c_{1i}^{(l)} + b)^2}} - \frac{c_{1i}^{(l)} e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (c_{1i}^{(l)})^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (c_{1i}^{(l)})^2}} \right\}. \quad (3.116b)
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las expresiones de $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho)$ y $\tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)$, las funciones $[\tilde{D}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)]$ ($n = 0, 1$) solamente tendrán valores relevantes en el intervalo $0 \leq k_\rho \lesssim 1.2k_{\text{max}}$. Dado que los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ están localizados en ese intervalo o en sus proximidades, la función $[\tilde{D}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)]$ debe poder aproximarse adecuadamente mediante una representación del tipo polo-residuo como la que aparece en la Ec. (3.56) mediante el MMCT. No obstante, en la sección 3.3.1 se demostró que el método de los mínimos cuadrados totales en el plano k_ρ presenta dificultades para reproducir los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ cuando éstos están muy próximos a los puntos de ramificación $k_\rho = \pm k_0$ (véase la Tabla 3.2). Por tanto, antes de aplicar el MMCT a $[\tilde{D}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)]$, es conveniente extraer de dicha función la contribución de los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ que están más cerca de $k_\rho = \pm k_0$.

Supongamos que aplicamos el MMCT a la Ec. (3.59), y que obtenemos una estimación muy precisa de los polos propios de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ y de sus residuos, independientemente de la proximidad de los polos propios a los puntos de ramificación (véase la sección 3.3.1). Sean $\pm k_{pn}$ los polos propios más cercanos a $k_\rho = \pm k_0$ que se han obtenido para $\tilde{G}_n(k_\rho)$, y sea R_{pn} ($n = 0, 1$) el residuo de $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en el polo

$+k_{pn}$ (donde $k_{pn} = \sqrt{k_0^2 + q_{pn}^2}$ y donde $R_{pn} = q_{pn}b_{pn}/\sqrt{k_0^2 + q_{pn}^2}$, siendo q_{pn} y b_{pn} los valores de $q_{n,i}$ y $b_{n,i}$ correspondientes al polo k_{pn} que se han obtenido utilizando (3.59)). La contribución de los polos propios $\pm k_{pn}$ a $\tilde{G}_n(k_\rho)$ puede escribirse como:

$$\tilde{G}_n^{\text{CP}}(k_\rho) = \frac{2R_{pn}k_{pn}}{k_\rho^2 - k_{pn}^2} \quad (n = 0, 1) . \quad (3.117)$$

La contrapartida espacial de $\tilde{G}_n^{\text{CP}}(k_\rho)$ viene dada por:

$$G_n^{\text{CP}}(\xi) = S_n \left\{ \tilde{G}_n^{\text{CP}}(k_\rho) \right\} = -\frac{j}{2} R_{pn} k_{pn}^{n+1} H_n^{(2)}(\xi k_{pn}) \quad (n = 0, 1) . \quad (3.118)$$

Tal y como se comentó en [51], las funciones de Hankel de la Ec. (3.118) poseen unas singularidades en $\xi = 0$ que no están presentes en $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$. Por tanto, si las funciones espectrales de (3.117) son obligadas a formar parte explícitamente de las aproximaciones de la Ec. (3.112) y se obtiene la contrapartida espacial de dichas aproximaciones, se obtendrán expresiones de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ que presentan singularidades ficticias en $\xi = 0$, y que por tanto, serán altamente imprecisas en la región de campo próximo. Por un lado, la función de Hankel $H_0^{(2)}(\xi k_{p0})$ de (3.118) presenta una singularidad logarítmica en $\xi = 0$ que puede introducir errores en el cálculo de $S_0 \left\{ \tilde{G}_0(k_\rho) \right\}$ cuando $\xi \rightarrow 0$, especialmente cuando $z \neq z'$ (véase por ejemplo [51, Fig. 8]). Por otro lado, la función de Hankel $H_1^{(2)}(\xi k_{p1,i})$ de (3.118) posee una singularidad del tipo ξ^{-1} cuando $\xi = 0$, singularidad que no existe en $S_1 \left\{ \tilde{G}_1(k_\rho) \right\}$ cuando $z \neq z'$ (véase [51, Fig. 10]).

Para solucionar los problemas que introducen las singularidades de las funciones de Hankel $H_n^{(2)}(\xi k_{pn})$ en las aproximaciones de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ cuando $\xi \rightarrow 0$, en este trabajo la extracción de los polos propios más cercanos a $k_\rho = \pm k_0$ en las funciones espectrales $[\tilde{D}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(2)}(k_\rho)]$ se lleva a cabo a través de las funciones espectrales [51, 132, 166] (véase la Ec. (3.112)):

$$\tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho) = \frac{2R_{pn}k_{pn} [u^2 v^{2n} + k_{pn}^2 (u^2 + v^2 + k_{pn}^2)^n]}{(k_\rho^2 - k_{pn}^2) (k_\rho^2 + u^2) (k_\rho^2 + v^2)^n} \quad (n = 0, 1) , \quad (3.119)$$

donde $u = 10k_0$ y $v = 12k_0$ son dos números reales positivos que deben ser diferentes entre sí y bastante mayores que k_0 [51, 132]. La contrapartida espacial

de $\tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} G_n^{\text{CPC}}(\xi) &= S_n \left\{ \tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho) \right\} \\ &= -\frac{j}{2} R_{pn} k_{pn} \left[k_{pn}^n H_n^{(2)}(\xi k_{pn}) + (-1)^{1-n} \left(ju \frac{v^2 + k_{pn}^2}{v^2 - u^2} \right)^n H_n^{(2)}(-ju\xi) \right. \\ &\quad \left. - jnv \frac{u^2 + k_{pn}^2}{v^2 - u^2} H_n^{(2)}(-jv\xi) \right] \quad (n = 0, 1), \quad (3.120) \end{aligned}$$

donde las funciones de Hankel $H_n^{(2)}(-ju\xi)$ y $H_n^{(2)}(-jv\xi)$ son funciones de aniquilación que se introducen para eliminar las singularidades de $G_n^{\text{CPC}}(\xi)$ en $\xi = 0$. Estas funciones de aniquilación impiden que las funciones $G_n^{\text{CPC}}(\xi)$ introduzcan un comportamiento no físico en las aproximaciones de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ cuando $\xi \rightarrow 0$. Las funciones de aniquilación $H_n^{(2)}(-ju\xi)$ y $H_n^{(2)}(-jv\xi)$ se han definido de manera que $G_n^{\text{CPC}}(\xi) \approx G_n^{\text{CP}}(\xi)$ cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$, esto es, de manera que sólo corrijan a $G_n^{\text{CP}}(\xi)$ en la región de campo próximo [166]. Las funciones espectrales $\tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho)$ ($n = 0, 1$) decaen como $k_\rho^{-2(2+n)}$ para valores grandes de k_ρ (esto es, como k_ρ^{-4} en el caso $n = 0$, y como k_ρ^{-6} en el caso $n = 1$), lo cual coincide con la conducta esperada para términos espectrales “polo-residuo” que no introducen singularidades en el dominio espacial cuando $\xi \rightarrow 0$ [51, 142].

Una vez obtenida en (3.119) la contribución a las funciones de Green espectrales de los polos más cercanos a los puntos de ramificación, $\tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho)$, las funciones espectrales $[\tilde{G}_n(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{MICD}(1)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{DCIM}(2)}(k_\rho) - \tilde{G}_n^{\text{CPC}}(k_\rho)]$ van a ser aproximadas mediante la función espectral $\tilde{G}_n^{\text{MMCT}}(k_\rho)$ dada por (véase la Ec. (3.56)):

$$\tilde{G}_n^{\text{MMCT}}(k_\rho) = \sum_{i=1}^{N_{Tn}} \frac{d_{ni}}{k_\rho^2 - p_{n,i}^2} \quad (n = 0, 1), \quad (3.121)$$

donde los coeficientes d_{ni} y p_{ni} se obtienen por medio del MMCT descrito en [51] (véase también el Apéndice D), y donde las muestras de k_ρ que se usan en el MMCT se eligen a lo largo del camino C de la Ec. (3.57) (Fig. 3.5) en el intervalo $0 \leq t \leq T_c = 1.2\varepsilon_{\text{max}}$. La contrapartida espacial de la Ec. (3.121) viene dada por:

$$G_n^{\text{MMCT}}(\xi) = S_n \left\{ \tilde{G}_n^{\text{MMCT}}(k_\rho) \right\} = -\frac{j}{4} \sum_{i=1}^{N_{Tn}} d_{n,i} (p_{n,i})^n H_n^{(2)}(\xi p_{n,i}), \quad (3.122)$$

donde se han utilizado la Ec. (6.565.4) de [158] y las Ecs. (9.6.4) y (6.1.6) de [105, Cap. 9].

Una vez conocidas las contrapartidas espaciales de las distintas contribuciones a $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en la aproximación de la Ec. (3.112), podremos escribir la contrapartida espacial completa de dicha aproximación como:

$$S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\} \approx S_n \left\{ \tilde{G}_n^{\text{as}}(k_\rho) \right\} + \sum_{l=1}^2 G_n^{\text{MICD}(l)}(\xi) + G_n^{\text{CPC}}(\xi) + G_n^{\text{MMCT}}(\xi) \quad (n = 0, 1) . \quad (3.123)$$

Como ya se ha comentado, la expresión (3.123) constituye fundamentalmente una aproximación para el campo próximo de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$. En la siguiente sección, comprobaremos que la aproximación proporciona habitualmente $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$ con un error inferior al 0.1 % cuando $\xi \lesssim \lambda_0$. Aunque la aproximación para el campo próximo de la Ec. (3.123) es parecida a las que se han llevado a cabo en [145, Ec. (14)] y [146, Ec. (16)], es importante señalar que mientras el procedimiento de [145] y [146] está restringido al cálculo de $S_0 \left\{ \tilde{G}_0(k_\rho) \right\}$, el procedimiento descrito en esta sección es válido tanto para la aproximación de $S_0 \left\{ \tilde{G}_0(k_\rho) \right\}$ como para la de $S_1 \left\{ \tilde{G}_1(k_\rho) \right\}$.

3.5. Resultados Numéricos

Una vez obtenidas las expresiones en forma cerrada para aproximar el campo lejano (sección 3.3, Ecs. (3.76) y (3.93)) y el campo próximo (sección 3.4, Ec. (3.123)) de las funciones de Green espaciales en medios multicapa, vamos a realizar una comparación entre los resultados que se obtienen con dichas expresiones y los que se obtienen mediante integración numérica de las integrales de la Ec. (3.48) [34, 162].

Las Figs. 3.14 y 3.15 muestran los resultados que se obtienen para la función de Green del potencial escalar, G^ϕ , y para la componente zx de la función de Green del potencial vector, $G_{zx}^{\text{A.m}}$, con la aproximación de campo lejano de las Ecs. (3.76) y (3.93) cuando $N_{\text{as}} = 3$. Se consideran dos tipos de medios multicapa, uno con

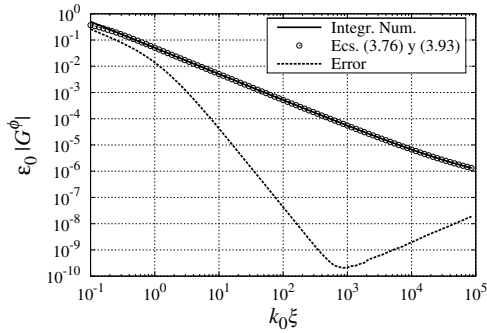
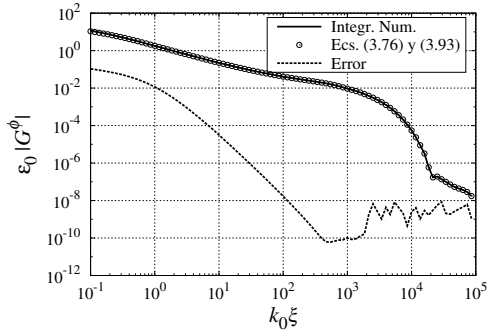
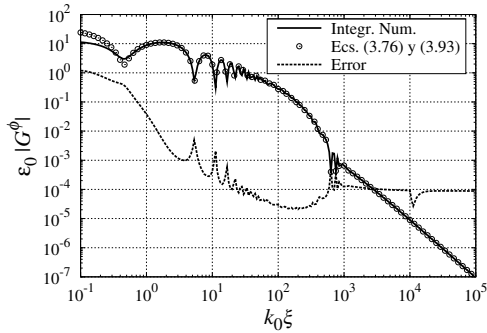
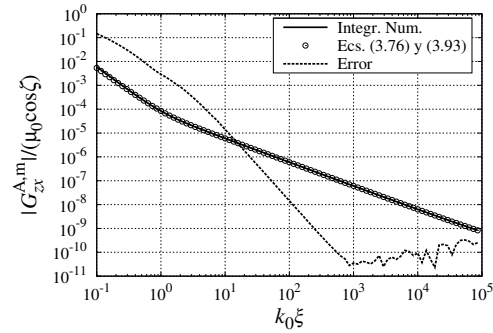
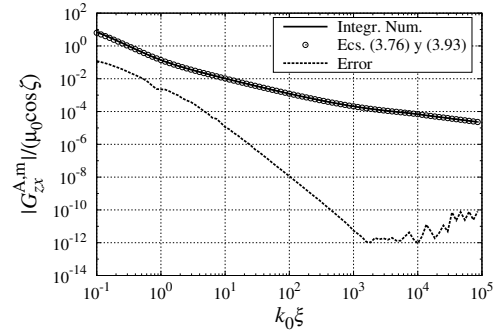
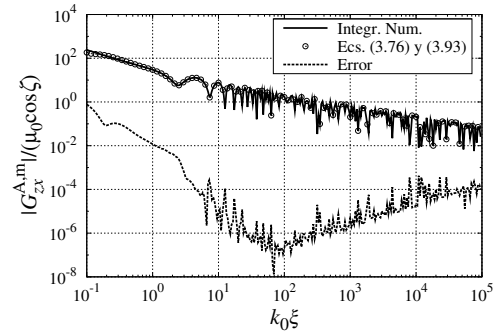
(a) $f = 30$ MHz(b) $f = 1$ GHz(c) $f = 30$ GHz(a) $f = 25$ MHz(b) $f = 1$ GHz(c) $f = 40$ GHz

Figura 3.14: Valor de la función de Green espacial G^ϕ para un medio de cuatro capas con pérdidas del tipo mostrado en la Fig. 3.3 (aire en el límite inferior). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante las Ecs. (3.76) y (3.93) (○). Se muestran también los errores relativos entre unos y otros resultados (línea discontinua). Parámetros del medio multicapa: $z' = -0.9$ mm, $z = -0.4$ mm, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 0.7$ mm, $h_2 = 0.3$ mm, $h_3 = 0.5$ mm, $h_4 = 0.3$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$, $\tan \delta_2 = 0.1$. Parámetros del MMCT: (a) $N = 3$; (b) $N = 6$; (c) $N = 12$.

Figura 3.15: Valor de la función de Green espacial $G_{zx}^{A,m}$ para un medio de cuatro capas sin pérdidas del tipo mostrado en la Fig. 3.3 (CEP en el límite inferior). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante las Ecs. (3.76) y (3.93) (○). Se muestran también los errores relativos entre unos y otros resultados (línea discontinua). Parámetros del medio multicapa: $z = z' = 0$, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 0.7$ mm, $h_2 = 0.3$ mm, $h_3 = 0.5$ mm, $h_4 = 0.3$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $\tan \delta_1 = \tan \delta_2 = \tan \delta_3 = \tan \delta_4 = 0$. Parámetros del MMCT: (a) $N = 3$; (b) $N = 5$; (c) $N = 13$.

pérdidas limitado inferiormente por aire en el caso estudiado en la Fig. 3.14 y otro sin pérdidas limitado inferiormente por un CEP en el caso estudiado en la Fig. 3.15. Tanto en la Fig. 3.14 como en la Fig. 3.15, los errores relativos entre los resultados obtenidos mediante integración numérica y los obtenidos con (3.76) y (3.93) son básicamente inferiores al 0.1 % cuando $\xi \gtrsim \lambda_0$, lo cual concuerda con la precisión obtenida en la Fig. 3.11 con la (3.93) cuando $N_{as} = 3$.

En las Figs. 3.14(a) y 3.14(b) los errores relativos decaen con una pendiente -3 en las gráficas logarítmicas conforme ξ aumenta (lo cual está en consonancia con la pendiente -3 observada para los errores relativos en las gráficas logarítmicas de las Figs. 3.11(a)-(c) cuando $N_{as} = 3$). Llega un momento en que dichos errores relativos dejan de disminuir, lo cual se atribuye a errores de redondeo en los cálculos o a limitaciones en la precisión de las técnicas de integración numérica.

Sin embargo, los errores relativos de la Fig. 3.14(c) no muestran el mismo comportamiento. Por un lado, aparecen picos en los errores relativos que coinciden con los picos que presenta G^ϕ como consecuencia de las interferencias de dos ondas de superficie amortiguadas.

Por otro lado, los errores relativos disminuyen hasta que se estancan en torno al 0.01 %, siendo estos errores superiores a los observados en las Figs. 3.14(a) y 3.14(b). El hecho de que los errores sean mayores en la Fig. 3.14(c) se debe a la pérdida de precisión del MMCT cuando se aplica a la Ec. (3.59) a frecuencias altas. Las simulaciones numéricas han mostrado que el método de los mínimos cuadrados totales deja de dar valores precisos de los polos $q_{n,i}$ y de los residuos $b_{n,i}$ de (3.59) cuando se verifica que $\lambda_0 \lesssim 2 \sum_{i=1}^{N_{ca}} h_i$ [56] (véase la sección 3.3.1). Cuando la frecuencia de trabajo es superior a la frecuencia umbral a la que deja de ser preciso el MMCT, los valores de $q_{n,i}$ y $b_{n,i}$ obtenidos con este método hacen que las Ecs. (3.76) y (3.93) proporcionen valores erróneos del campo lejano de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$. Cuanto más cerca está la frecuencia del citado valor umbral, mayores son los errores que se cometen con (3.76) y (3.93) cuando se aplica el MMCT a (3.59), lo cual justifica por qué los errores relativos en la Fig. 3.14(c) son mayores que en las Figs. 3.14(a) y 3.14(b). Sin embargo, estos hechos no invalidan la teoría presentada en la sección 3.3 para la evaluación del campo lejano de las funciones de Green en medios multicapa. Para frecuencias superiores al valor umbral de

validez del MMCT, habrá que usar un método alternativo para calcular los polos y los residuos de (3.59), como por ejemplo el algoritmo VECTFIT descrito en [168]. Una vez obtenidos $q_{n,i}$ y $b_{n,i}$ con la suficiente precisión, es posible seguir usando las Ecs. (3.76) y (3.93) para obtener una aproximación asintótica precisa del campo lejano de $S_n \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}$.

En cualquier caso, es importante señalar que la condición requerida para que sea válida la aplicación del MMCT a la Ec. (3.59) ($\lambda_0 \gtrsim 2 \sum_{i=1}^{N_{ca}} h_i$) se satisface en la mayoría de los sustratos multicapa usados en la práctica en circuitos en tecnología plana y en antenas impresas.

Las aproximaciones de campo lejano obtenidas en la sección 3.3 son válidas, tanto para integrales de Sommerfeld de orden cero ($n = 0$) como para integrales de Sommerfeld de orden uno ($n = 1$)³. Mientras que en la Fig. 3.14 se han presentado resultados para integrales de Sommerfeld de orden cero, en la Fig. 3.15 se presentan resultados para integrales de Sommerfeld de orden uno. El comportamiento de los errores relativos en la Fig. 3.15 es muy similar al observado en la Fig. 3.14. Para frecuencias bajas e intermedias (25 MHz y 1 GHz, Figs. 3.15(a) y (b) respectivamente) los errores relativos descienden por debajo de 10^{-10} , mientras que para frecuencias altas (40 GHz, Fig. 3.15(c)) los errores relativos disminuyen hasta que se estancan entre 10^{-4} y 10^{-6} . De nuevo, estas diferencias se deben a la pérdida de precisión del MMCT cuando se aplica a la Ec. (3.59) a frecuencias altas. Mientras que el medio multicapa estudiado en las Figs. 3.14(a)-(c) es un medio con pérdidas y el campo lejano en dichas figuras está dominado por ondas residuales (espectro continuo) que tienen un decaimiento del tipo ξ^{-2} para valores grandes de ξ , en las Figs. 3.15(a)-(c) el medio estudiado no tiene pérdidas, y por tanto, el campo lejano está dominado por ondas de superficie (espectro discreto) que tienen un decaimiento del tipo $\xi^{-1/2}$. A 25 MHz y 1 GHz, sólo puede excitarse una onda de superficie a lo largo del medio multicapa, y el campo lejano

³Como se vio en la sección 3.2.2, si seguimos la formulación C de Michalski y Zheng, las funciones de Green $G_0(\xi)$ se obtienen a partir de integrales de Sommerfeld de orden cero (véanse las Ecs. (3.37) y (3.48)), y G_0 denota a la función de Green del potencial escalar G^ϕ o a las componentes diagonales de la función de Green diádica del potencial vector: $G_{xx}^{A,m}$, $G_{yy}^{A,m}$ y $G_{zz}^{A,m}$ (véanse las Ecs. (3.49), (3.54) y (3.55)). De forma análoga, las funciones de Green $G_1(\xi)$ se obtienen a partir de integrales de Sommerfeld de orden uno (véanse las Ecs. (3.42), (3.45) y (3.47)), y G_1 representa a cualquiera de las componentes no diagonales de la función de Green diádica del potencial vector: $G_{xz}^{A,m}$, $G_{yz}^{A,m}$, $G_{zx}^{A,m}$ y $G_{zy}^{A,m}$ (véanse las Ecs. (3.50) a (3.53)).

muestra el decaimiento característico del tipo $\xi^{-1/2}$. A 40 GHz, el campo lejano está formado por la interferencia de tres ondas de superficie. Al igual que ocurría en las Fig. 3.14(a)-(c), los diferentes campos lejanos mostrados en las Figs. 3.15(a)-(c) son correctamente reproducidos por las Ecs. (3.76) y (3.93).

En las Figs. 3.16 y 3.17 se presentan los resultados obtenidos mediante la Ec. (3.123) para el campo próximo de las funciones de Green multicapa estudiadas en las Figs. 3.14 y 3.15. Los resultados obtenidos con (3.123) son comparados con los que se obtienen mediante integración numérica, representándose una vez más los errores relativos existentes entre unos y otros resultados. Dado que los medios multicapa y las frecuencias que se estudian en las Figs. 3.16 y 3.17 son exactamente los mismos que los estudiados en las Figs. 3.14 y 3.15, con todas estas figuras se pretende poner de manifiesto que las expresiones obtenidas para el campo lejano (sección 3.3) y el campo próximo (sección 3.4) permiten aproximar las funciones de Green espaciales en medios multicapa en todo el rango de valores de la variable espacial ξ .

De forma análoga a lo que ocurría con la aproximación de campo lejano, en las Figs. 3.16(a)-(c) y 3.17(a)-(c) los errores relativos existentes entre los resultados obtenidos mediante integración numérica y los obtenidos con (3.123) están típicamente por debajo del 0.1 % cuando $\xi \lesssim \lambda_0$. Esto indica que la Ec. (3.123) proporciona expresiones robustas y precisas para la evaluación del campo próximo de las funciones de Green espaciales en medios multicapa, y por tanto, complementa a las Ecs. (3.76) y (3.93). La información en las leyendas de las Figs. 3.16 y 3.17 muestra que el número de términos requeridos al aplicar el MICD para obtener la aproximación de (3.123), $N_{Dn}^{(1)} + N_{Dn}^{(2)}$ ($n = 0, 1$), disminuye conforme aumenta la frecuencia. Esto se debe a que al aumentar la frecuencia, la amplitud del intervalo donde se aplica el MICD disminuye ya que dicha amplitud vale $3/h - 1.2k_{\max}$ (véase la Fig. 3.13) y k_{\max} es proporcional a la frecuencia. Por tanto, el número de exponenciales complejas requeridas en (3.123) disminuirá conforme aumente la frecuencia, y podrá llegar a ser cero si la frecuencia alcanza valores suficientemente altos, tal y como ocurre en las Figs. 3.16(c) y 3.17(c) para 30 GHz y 40 GHz respectivamente. El comportamiento del número de términos requeridos al aplicar el MMCT para obtener la Ec. (3.123), N_{Tn} ($n = 0, 1$), es justo el contrario.

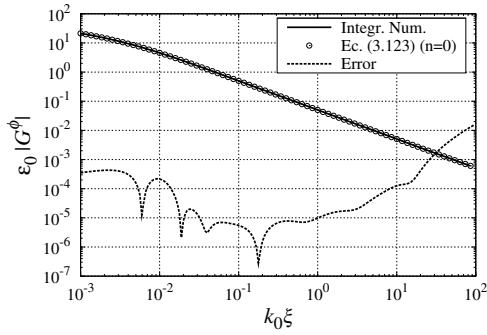
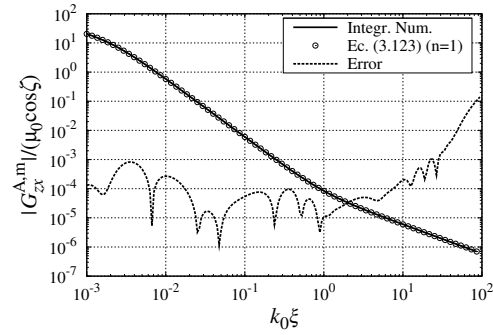
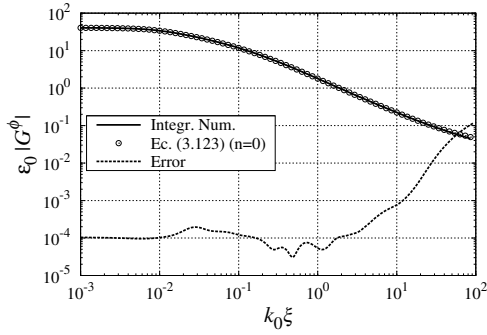
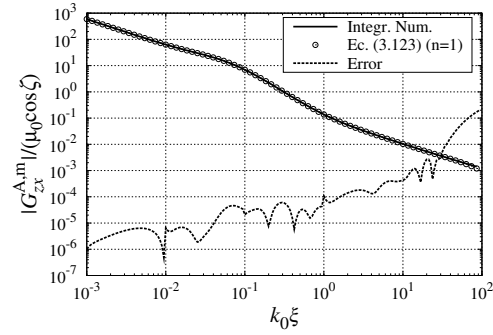
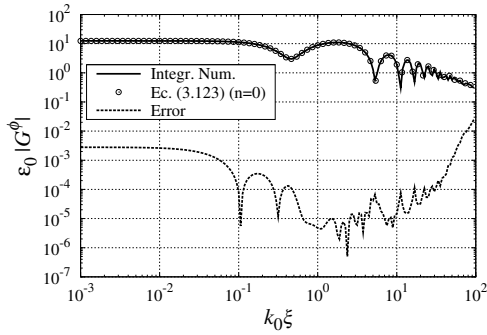
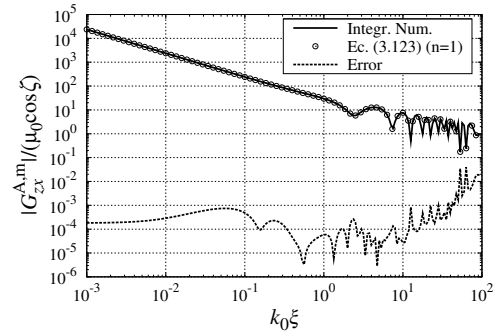
(a) $f = 30$ MHz(a) $f = 25$ MHz(b) $f = 1$ GHz(b) $f = 1$ GHz(c) $f = 30$ GHz(c) $f = 40$ GHz

Figura 3.16: Valor de la función de Green espacial G^ϕ para un medio de cuatro capas con pérdidas del tipo mostrado en la Fig. 3.3 (espacio libre en el límite inferior). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante la Ec. (3.123) (\odot). Se muestran también los errores relativos entre unos y otros resultados (línea discontinua). Los parámetros del medio multicapa son los mismos que los de la Fig. 3.14. Parámetros del MPMG y del MMCT: (a) $N_{D0}^{(1)} = 8$, $N_{D0}^{(2)} = 2$, $N_{T0} = 3$; (b) $N_{D0}^{(1)} = 4$, $N_{D0}^{(2)} = 4$, $N_{T0} = 5$; (c) $N_{D0}^{(1)} = 0$, $N_{D0}^{(2)} = 0$, $N_{T0} = 12$.

Figura 3.17: Valor de la función de Green espacial $G_{zx}^{A,m}$ para un medio de cuatro capas sin pérdidas del tipo mostrado en la Fig. 3.3 (CEP en el límite inferior). Los resultados obtenidos mediante integración numérica (línea continua) se comparan con los obtenidos mediante la Ec. (3.123) (\odot). Se muestran también los errores relativos entre unos y otros resultados (línea discontinua). Los parámetros del medio multicapa son los mismos que los de la Fig. 3.15. Parámetros del MPMG y del MMCT: (a) $N_{D1}^{(1)} = 4$, $N_{D1}^{(2)} = 4$, $N_{T1} = 10$; (b) $N_{D1}^{(1)} = 2$, $N_{D1}^{(2)} = 2$, $N_{T1} = 10$; (c) $N_{D1}^{(1)} = 0$, $N_{D1}^{(2)} = 0$, $N_{T1} = 12$.

Cuando la frecuencia aumenta, también aumenta el número de polos propios e impropios situados en las proximidades del camino de muestreo donde se aplica el MMCT (véase la Fig. 3.5), y por tanto, se hace necesario utilizar más términos del tipo polo-residuo en (3.121), y en consecuencia, más funciones de Hankel en (3.122).

En la Tabla 3.4 se muestran los cocientes entre los tiempos de CPU necesarios para evaluar G^ϕ y $G_{zx}^{A,m}$ mediante integración numérica, y mediante la Ec. (3.123) (campo próximo) o las Ecs. (3.76) y (3.93) (campo lejano). Para llevar a cabo la integración numérica, se han utilizado tanto la técnica de integración en el plano complejo k_ρ descrita en [162] (Tabla 3.4(a)) como el método de los promedios ponderados [32, 34] (Tabla 3.4(b)). Los resultados se muestran para dos frecuencias diferentes. En la obtención de los tiempos de CPU para el campo próximo las funciones de Green han sido muestreadas a lo largo del intervalo $-3 \leq \log(\xi/\lambda_0) \leq 0$, y en la obtención de los tiempos de CPU para el campo lejano, las muestras de la función de Green se han tomado en el intervalo $0 \leq \log(\xi/\lambda_0) \leq 3$. En todos los casos se ha exigido una precisión mínima de tres cifras significativas en los resultados.

En la Tabla 3.4(a) se observa que en la región de campo próximo a $f = 30$ MHz, los tiempos de CPU requeridos por la integración numérica son relativamente bajos, y sólo se diferencian en un orden de magnitud de los que requieren las expresiones en forma cerrada de (3.123). Sin embargo, en el resto de los resultados presentados en la Tabla 3.4(a) (para el campo próximo a 30 GHz y para el campo lejano), los tiempos de CPU requeridos por la integración numérica son típicamente tres órdenes de magnitud mayores que los que necesitan las expresiones en forma cerrada que se proponen en este Capítulo. Cuando comparamos los resultados de la Tabla 3.4(a) con los de la Tabla 3.4(b), se observa que en la mayoría de los casos la técnica de integración numérica basada en el método de los promedios ponderados es significativamente más lenta que la técnica de integración numérica descrita en [162]. De hecho, los tiempos de CPU requeridos por el método de los promedios ponderados son entre tres y seis órdenes de magnitud mayores que los requeridos por las aproximaciones de campo próximo y campo lejano propuestas en las secciones 3.3 y 3.4.

Tabla 3.4: Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las técnicas de integración numérica y los requeridos por la aproximación (3.123) –campo próximo– o las aproximaciones (3.76) y (3.93) –campo lejano–. Las funciones de Green espaciales que se calculan, G^ϕ y $G_{zx}^{A,m}$, son las que han sido representadas en la Fig. 3.14 y en la Fig. 3.15. (a) La integración numérica de la Ec. (3.48) se realiza mediante la técnicas de integración en el plano complejo k_ρ descrita en [162]. (b) La integración numérica de la Ec. (3.48) se realiza mediante el método de los promedios ponderados [32, 34].

Muestras	T _{Integr. Num.} /T _{Campo próximo}				T _{Integr. Num.} /T _{Campo Lejano}			
	$f = 30 \text{ MHz}$		$f = 30 \text{ GHz}$		$f = 30 \text{ MHz}$		$f = 30 \text{ GHz}$	
	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$
30	22.56	15.66	2551	3003	2043	1734	1174	779.7
300	21.03	11.53	1799	1519	1950	1702	808.6	557.2
3000	17.60	7.399	596.1	369.2	903.4	1180	257.9	294.7

(a) Integración numérica en el plano complejo k_ρ

Muestras	T _{Integr. Num.} /T _{Campo próximo}				T _{Integr. Num.} /T _{Campo Lejano}			
	$f = 30 \text{ MHz}$		$f = 30 \text{ GHz}$		$f = 30 \text{ MHz}$		$f = 30 \text{ GHz}$	
	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$	G^ϕ	$G_{zx}^{A,m}$
30	281.22	196.40	736.36	265.06	6302.5	5126.9	3461.4	2364.1
300	2369.4	1097.8	5533.0	1233.9	46512	33317	19333	11696
3000	10542	1955.7	14308	2046.4	$> 10^5$	32116	$> 10^6$	$> 10^5$

(b) Integración numérica mediante promedios ponderados

3.6. Conclusiones

En este Capítulo se han presentado dos técnicas diferentes para la obtención de expresiones en forma cerrada para las funciones de Green espaciales en medios multicapa. Una de estas técnicas está orientada a la obtención de expresiones precisas para la región de campo lejano, y la otra, a la obtención de expresiones precisas para la región de campo próximo (los resultados obtenidos a lo largo del Capítulo ponen de manifiesto que no es posible obtener expresiones en forma cerrada que sean válidas tanto en la región de campo lejano como en la región de campo próximo). Por tanto, puede decirse que las técnicas propuestas son complementarias, dando lugar a resultados que se solapan en un entorno de $\xi = \lambda_0$.

Para obtener las expresiones en forma cerrada que son precisas en la región de campo lejano, se han llevado a cabo en primer lugar aproximaciones del tipo polo-residuo de las funciones de Green espectrales en términos de la variable espectral $u_0 = (k_\rho^2 - k_0^2)^{1/2}$ mediante el método de los mínimos cuadrados totales, demostrándose que dichas aproximaciones son más precisas que las aproximaciones del tipo polo-residuo en términos de la variable espectral k_ρ que han sido llevadas a cabo previamente en la literatura. De hecho, se ha comprobado que las aproximaciones del tipo polo-residuo en términos de u_0 reproducen mejor los verdaderos polos y residuos de las funciones de Green espectrales que las aproximaciones en términos de k_ρ , siendo esto especialmente cierto cuando los polos están muy próximos a los puntos de ramificación. Una vez obtenidas las aproximaciones del tipo polo-residuo en términos de u_0 , se han llevado a cabo desarrollos asintóticos uniformes de las integrales de Sommerfeld de dichas aproximaciones. Los citados desarrollos asintóticos han permitido obtener expresiones asintóticas de las funciones de Green espaciales para la región de campo lejano.

Para obtener las expresiones en forma cerrada que aproximan el campo próximo de las funciones de Green espaciales, se ha utilizado una técnica híbrida que combina dos métodos previamente publicados en la literatura: el método de las imágenes complejas discretas y el método de ajuste mediante funciones racionales. Al aplicar el método de las imágenes complejas discretas, se han aproximado las diferencias entre las funciones de Green espectrales y sus comportamientos asintóticos mediante exponenciales complejas en dos etapas, haciendo uso del método del pincel de matrices generalizado. A continuación, el residuo de las diferencias entre las funciones de Green espectrales, su comportamiento asintótico y las exponenciales complejas han vuelto a ser aproximados una vez más mediante el método de los mínimos cuadrados totales en la variable espectral k_ρ . Antes de dar este último paso, se ha llevado a cabo una extracción analítica de la contribución a las funciones de Green espectrales de los polos propios más próximos a los puntos de ramificación, para lo cual ha sido necesario reutilizar la información que sobre dichos polos (y sus residuos) proporciona el método de

los mínimos cuadrados totales en términos de u_0 (método que ha sido necesario aplicar previamente para obtener las aproximaciones de campo lejano). Se ha comprobado que la aportación del método de las imágenes complejas discretas en las aproximaciones de campo próximo es mayor a bajas frecuencias, y que la aportación del método de ajuste mediante funciones racionales pasa a ser más importante a altas frecuencias.

Los resultados obtenidos con las expresiones en forma cerrada para el campo lejano y el campo próximo se han comparado con resultados obtenidos mediante integración numérica de las integrales de Sommerfeld. Se ha comprobado que las expresiones para el campo lejano presentan un error relativo inferior al 0.1 % para valores de ξ –distancia horizontal entre el punto fuente y el punto de observación– superiores a una longitud de onda en el espacio libre. A muy altas frecuencias, los errores relativos aumentan por encima del 0.1 %, pero se piensa que este incremento de los errores puede ser eliminado si se utiliza a esas frecuencias un método distinto al método de los mínimos cuadrados totales a la hora de estimar la aproximación del tipo polo-residuo de las funciones de Green espectrales en términos de u_0 . Con respecto a las expresiones para el campo próximo, se ha comprobado que suelen presentar un error inferior al 0.1 % para valores de ξ inferiores a una longitud de onda en el espacio libre. Por tanto, las expresiones para el campo lejano y para el campo próximo proporcionan conjuntamente una representación precisa de las funciones de Green espaciales en medios multicapa en todo el rango de valores de ξ . Además, dichas expresiones son válidas para una amplia gama de medios multicapa con pérdidas y sin pérdidas así como para un rango de frecuencias que abarca la mayoría de las situaciones que se encuentran en la práctica en el diseño de circuitos pasivos de microondas y antenas impresas.

Queda por decir finalmente que se ha llevado a cabo una comparación entre los tiempos de CPU que requieren las técnicas de integración numérica para calcular las funciones de Green espaciales en medios multicapa y los tiempos de CPU que requieren las expresiones para el campo lejano y el campo próximo que se han obtenido en este Capítulo, observándose que los tiempos de CPU requeridos en este segundo caso son típicamente tres órdenes de magnitud inferiores

a los que se requieren en el primer caso. Esto último indica claramente que las expresiones obtenidas en este Capítulo constituyen una alternativa muy eficiente a otras técnicas suficientemente contrastadas para el cálculo preciso de funciones de Green espaciales en medios multicapa.

Capítulo 4

Cálculo eficiente de funciones de Green multicapa periódicas

4.1. Introducción

El análisis del *scattering* de ondas planas por estructuras periódicas multicapa es imprescindible para el diseño de superficies selectivas en frecuencia [58] y de antenas *reflectarray* [59]. Además, el análisis de circuitos de microondas encapsulados en tecnología microtira [10, 67–69] es un problema relacionado que también puede formularse como un problema de estructuras periódicas en medios multicapa [10].

A la hora de abordar el análisis de estructuras periódicas multicapa, una de las técnicas más utilizadas consiste en la aplicación del Método de los Momentos (MDM) a la resolución de ecuaciones integrales de potenciales mixtos (EIPM) [10, 38, 65–69, 97]. Para poder resolver estas ecuaciones integrales, es preciso calcular con precisión tanto la función de Green periódica para el potencial escalar (FGPPE) como la función de Green periódica diádica para el potencial vector (FGPDPV) en el dominio espacial. En el caso particular de estructuras multicapa con periodicidad 2-D, estas funciones de Green espaciales pueden ser expresadas como series dobles infinitas en las que intervienen sus contrapartidas espectrales. Desgraciadamente, las citadas series son lentamente convergentes y su cálculo preciso requiere elevados tiempos de computación.

Se ha propuesto un amplio número de técnicas analíticas y numéricas para llevar a cabo de forma eficiente el cálculo de las series conducentes a las FGPPE y FGPDPV con periodicidad 2-D en medios multicapa. Una de las técnicas analíticas más citadas en la literatura es la transformación de Kummer (véase el Apéndice B). Al aplicar la transformación de Kummer al cálculo de las FGPPE y las FGPDPV, se han seguido diferentes estrategias en la evaluación de las series asintóticas [77]. Por ejemplo, en [65] las series asintóticas se han calculado utilizando funciones de Green adicionales que se calculan en puntos desplazados por encima de las fuentes, y en [67], [96, sec. II] y [97], las series asintóticas se han evaluado mediante una transformación de Kummer espectral combinada con la fórmula de Poisson [77].

Otro grupo importante de publicaciones relacionadas con la evaluación eficiente de funciones de Green multicapa periódicas se basa en el uso del método de las imágenes complejas discretas (MICD). En [70], el MICD es usado para aproximar las funciones de Green multicapa no periódicas (FGMNP) en el dominio espacial mediante ondas esféricas, y las series dobles infinitas que contienen esas ondas esféricas son evaluadas por medio de la transformación de Kummer en el dominio espectral. Dado que el campo lejano de las FGMNP en el dominio espacial suele estar dominado por ondas de superficie cilíndricas, en [66] tanto las ondas esféricas como las ondas cilíndricas son incluidas en la aproximación de las FGMNP espaciales mediante el MICD. A diferencia de [70], en [66] las series dobles que involucran las ondas esféricas son evaluadas por medio del método de Ewald [104], y las series dobles relacionadas con las ondas cilíndricas se evalúan por medio del método de las sumas de red [86]. El problema que aparece cuando se utiliza el MICD es que las FGMNP espaciales no sólo incluyen ondas esféricas y cilíndricas sino también ondas residuales (véase la sección 3.3.2 del Capítulo 3 para más detalles), lo cual hace prácticamente imposible obtener una expresión en forma cerrada para las FGMNP mediante el MICD que sea válida en todo el rango de valores de la variable espacial ξ [132, 147] (véanse las secciones 3.3 y 3.4 del Capítulo 3). Una técnica analítica interesante para la evaluación eficiente de funciones de Green periódicas multicapa es la que se presenta en [71] y [72]. En esas dos publicaciones se utiliza un híbrido entre el MICD y la transformación de

Kummer. Concretamente, el MICD se utiliza para obtener la expresión asintótica de las funciones de Green multicapa espectrales, y las series que contienen esas expresiones asintóticas se evalúan mediante el método de Ewald. Por otro lado, en [69] se describe el método de las imágenes espaciales. En dicho método las funciones de Green periódicas multicapa se expresan en términos de un conjunto finito de FGMNP espaciales cuya determinación tiene un coste computacional relativamente bajo. Entre los métodos estrictamente numéricos utilizados para la evaluación eficiente de funciones de Green periódicas multicapa, conviene mencionar la técnica de suma por partes ideada por los españoles Álvarez-Melcón y Mosig [96, sec. III].

Dado que puede ser necesario calcular las funciones de Green periódicas multicapa decenas de miles de veces a la hora de aplicar el MDM a problemas reales, para acelerar este proceso varios investigadores han propuesto calcular los valores de las funciones de Green periódicas con periodicidad 2-D en un pequeño número de puntos del interior de la celda periódica unidad y, posteriormente, realizar interpolaciones entre los valores previamente calculados (véanse, por ejemplo, los algoritmos de interpolación propuestos en [68] y en [169]).

Al igual que ocurre con la evaluación de las funciones de Green periódicas multicapa con periodicidad 2-D, el caso multicapa con periodicidad 1-D es también difícil de tratar ya que requiere la evaluación de series infinitas lentamente convergentes de integrales infinitas que involucran a las funciones de Green espectrales. El cálculo eficiente de funciones de Green multicapa con periodicidad 1-D ha sido abordado en [112] mediante el uso del método espectral de Kummer-Poisson, y en [81] mediante el método de las capas perfectamente adaptadas (*perfect matched layers* en inglés).

En este Capítulo de la tesis, se va a llevar a cabo una revisión de la técnica híbrida Kummer-MICD de [71] y [72] para el cálculo eficiente de funciones de Green multicapa con periodicidad 2-D. Se demostrará que la técnica de [71] y [72] es rápida y precisa a la hora de evaluar la FGPPE y los elementos diagonales de la FGPDPV. Sin embargo, se pondrá de manifiesto que la citada técnica híbrida falla a la hora de dar resultados precisos para los elementos no diagonales de la FGPDPV cuando la distancia entre el punto de observación y los puntos fuente

tiende a cero. Para evitar este problema, en este Capítulo se propone una nueva versión de la técnica híbrida con vistas a la evaluación eficiente de los elementos no diagonales de la FGPDPV. En la nueva técnica híbrida se hace también uso de la transformación de Kummer, y las expresiones asintóticas de los elementos no diagonales de las FGMNP en el dominio espectral se obtienen a partir de la combinación de un término asintótico analítico y de un término resultante de aplicar una variante del MICD. Una vez obtenidas las nuevas expresiones asintóticas, las series asintóticas se calculan mediante el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior que ha sido descrito en el Capítulo 1. La nueva técnica para el cálculo de los elementos no diagonales de la FGPDPV es típicamente un 50 % más lenta que la técnica híbrida Kummer-MICD [71, 72], pero no plantea problemas de precisión en todo el rango de distancias entre los puntos fuente y el punto de observación. Es conveniente recordar que los elementos no diagonales de la FGPDPV no son necesarios en el análisis de estructuras periódicas multicapa o de circuitos de microondas multicapa encapsulados que son estrictamente planos, ya que las únicas funciones de Green involucradas en el análisis de estas estructuras son la FGPPE y los elementos diagonales de la FGPDPV [67, 68, 97]. Sin embargo, el cálculo de los elementos no diagonales de la FGPDPV es necesario en el análisis de estructuras periódicas multicapa y de circuitos encapsulados multicapa que contienen interconexiones verticales tales como vías, cortocircuitos y puentes de aire [98, 99].

A continuación, se expone brevemente la organización de los contenidos del Capítulo. En la sección 4.2 se obtienen las expresiones de las funciones de Green multicapa periódicas en términos de las funciones de Green multicapa no periódicas que se han estudiado en el Capítulo 3. En la sección 4.3 se presenta el cálculo de la FGPPE y de los elementos diagonales de la FGPDPV mediante la técnica híbrida Kummer-MICD clásica de [71] y [72]. Asimismo, en la sección 4.3 se presentan algunos resultados numéricos que ponen de manifiesto la eficiencia de la citada técnica híbrida clásica. En la sección 4.4 se describe el cálculo de los elementos no diagonales de la FGPDPV mediante la técnica híbrida Kummer-MICD clásica, y también mediante la nueva versión de la técnica híbrida que permite

evitar problemas de precisión. Además, al final de la sección 4.4 se muestran resultados numéricos que muestran las ventajas de la nueva versión de la técnica híbrida sobre la técnica híbrida clásica. Finalmente, en la sección 4.5 se resumen las conclusiones del Capítulo.

4.2. Relación entre las funciones de Green multicapa periódicas y las funciones de Green multicapa no periódicas

En la Fig. 4.1(a) se muestra una agrupación periódica de fuentes puntuales embutida en un medio multicapa. Las fuentes forman parte de un plano paralelo a las interfaces del medio multicapa, y ocupan los puntos de vector de posición $\mathbf{r}'_{mn} = \boldsymbol{\rho}' + m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2 + z'\hat{\mathbf{z}}$ ($-\infty < m, n < +\infty$), siendo $\boldsymbol{\rho}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{a}_1 = a_{1x}\hat{\mathbf{x}} + a_{1y}\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{a}_2 = a_{2x}\hat{\mathbf{x}} + a_{2y}\hat{\mathbf{y}}$. Los vectores \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son los vectores que delimitan la celda unidad de la agrupación periódica y, tal y como se muestra en la Fig. 4.1(b), no tienen por qué ser ortogonales. En el medio multicapa de la Fig. 4.1(a) se ha marcado un punto de observación de vector de posición $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$, siendo $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. El medio multicapa de la Fig. 4.1(a) está compuesto por N_{ca} capas dieléctricas de permitividad $\varepsilon_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ri}(1 - \tan \delta_i)$ y altura h_i ($i = 1, \dots, N_{ca}$). Asimismo, al igual que en el Capítulo 3, supondremos que el medio multicapa está limitado superiormente por una región semi-infinita de aire (cuya permitividad y permeabilidad se supondrán iguales a las del vacío), e inferiormente, bien por un plano conductor a tierra, bien por otra región semi-infinita de aire.

Siguiendo la notación definida en el Capítulo anterior para EIPM encuadradas en la formulación C de Michalski y Zheng [38] (véase la sección 3.2.2), sea $G_0(\xi, z, z')$ ($\xi = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$) una función genérica que representa tanto a la función de Green multicapa no periódica del potencial escalar $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como a cualquiera de los elementos diagonales de la función de Green multicapa no periódica para el potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^{A,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (de acuerdo con la Ec. (3.20), G_0 representa a G^ϕ ,

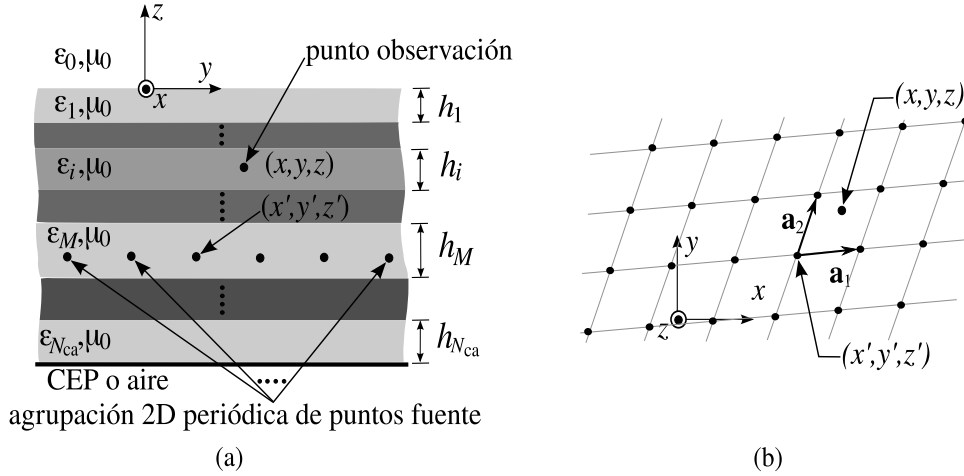


Figura 4.1: Medio multicapa limitado superiormente por aire (ϵ_0, μ_0), e inferiormente por un conductor eléctrico perfecto (CEP) o por aire (ϵ_0, μ_0), en cuyo interior se encuentra localizada una agrupación periódica bidimensional de fuentes puntuales. El plano que contiene a las fuentes es paralelo a las interfases entre las capas del medio. (a) Vista lateral del medio multicapa. (b) Vista desde arriba de la agrupación periódica de fuentes puntuales, donde \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son los vectores de la celda unidad de la red periódica bidimensional.

$G_{xx}^{A,m} = G_{yy}^{A,m}$ y $G_{zz}^{A,m}$). De acuerdo con la Ec. (3.37), se cumple que:

$$G_0(\xi, z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_\rho, z, z') J_0(k_\rho \xi) k_\rho dk_\rho. \quad (4.1)$$

La versión periódica de G_0 para la agrupación periódica de fuentes puntuales de la Fig. 4.1(a), G_0^P , viene dada por (véase la Ec. (1.32) para una expresión similar):

$$G_0^P(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_0(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}}, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{S}_{mn} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' - m\mathbf{a}_1 - n\mathbf{a}_2$, $\mathbf{k}_{w0} = \pm k_0(\sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}})$ ($k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda_0$ es el número de ondas en vacío) es la proyección sobre el plano x - y del vector número de ondas de una onda emitida por la agrupación periódica de fuentes (signo positivo) o de una onda incidente sobre la agrupación periódica de fuentes (signo negativo), y θ_0 y ϕ_0 son las coordenadas esféricas angulares que indican la dirección de propagación de esas ondas.

Como se comentó en el Capítulo anterior, no existen expresiones exactas en forma cerrada para $G_0(\xi, z, z')$ (sólo es posible obtener expresiones aproximadas),

pero sí existen algoritmos recurrentes que permiten obtener de forma exacta su versión espectral $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ (véase el Apéndice F). Por este motivo, es conveniente utilizar la fórmula de Poisson (véase el Apéndice A) en la Ec. (4.2) para expresar G_0^P en términos de \tilde{G}_0 como se indica (véase la Ec. (1.34) para una expresión similar):

$$G_0^P(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_0(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}, \quad (4.3)$$

donde $A = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{k}_{mn} = \mathbf{k}_{w0} + (2\pi/A)[m(\mathbf{a}_2 \times \hat{\mathbf{z}}) + n(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}_1)]$.

De acuerdo con la notación introducida en la sección 3.2.1 del Capítulo anterior, sean ahora $G_{zx}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = G_{zx}^A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z')$, $G_{zy}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = G_{zy}^A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z')$, $G_{xz}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \partial C^\phi(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z')/\partial x$ y $G_{yz}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \partial C^\phi(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z')/\partial y$ los elementos no diagonales de la función de Green multicapa *no periódica* del potencial vector (véanse las Ecs. (3.22)-(3.25)). De acuerdo con la sección 3.2.2 (véanse las Ecs. (3.41) y (3.44)) y de acuerdo con la sección F.3 del Apéndice F, la transformada de Fourier bidimensional (véase el Apéndice A) de $G_{zx}^{A,m}$, $G_{zy}^{A,m}$, $G_{xz}^{A,m}$ y $G_{yz}^{A,m}$ con respecto a las variables $x - x'$ y $y - y'$ puede escribirse como:

$$\tilde{G}_{zx}^{A,m}(k_x, k_y, z, z') = -jk_x \tilde{Q}_1(k_\rho, z, z') \quad (4.4)$$

$$\tilde{G}_{zy}^{A,m}(k_x, k_y, z, z') = -jk_y \tilde{Q}_1(k_\rho, z, z') \quad (4.5)$$

$$\tilde{G}_{xz}^{A,m}(k_x, k_y, z, z') = -jk_x \tilde{Q}_2(k_\rho, z, z') \quad (4.6)$$

$$\tilde{G}_{yz}^{A,m}(k_x, k_y, z, z') = -jk_y \tilde{Q}_2(k_\rho, z, z'), \quad (4.7)$$

donde k_x y k_y son las variables de Fourier cartesianas y $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ es la variable de Fourier cilíndrica. Las funciones espectrales \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 son casos particulares de la función espectral \tilde{G}_1 que aparece en las Ecs. (3.41) y (3.44) (concretamente, de acuerdo con las Ecs. (4.4) a (4.7), se cumple que $\tilde{Q}_1 = -(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x)$ y que $\tilde{Q}_2 = \tilde{C}^\phi$). Por tanto, por analogía con la Ec. (3.40), podemos definir dos funciones espaciales $Q_1(\xi, z, z')$ y $Q_2(\xi, z, z')$ mediante la expresión:

$$Q_i(\xi, z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{Q}_i(k_\rho, z, z') J_0(k_\rho \xi) k_\rho dk_\rho \quad (i = 1, 2). \quad (4.8)$$

De las Ecs. (3.38) y (3.43), se deduce que:

$$G_{zx}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{\partial Q_1(\xi, z, z')}{\partial x} \quad (4.9)$$

$$G_{zy}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{\partial Q_1(\xi, z, z')}{\partial y} \quad (4.10)$$

$$G_{xz}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{\partial Q_2(\xi, z, z')}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$G_{yz}^{A,m}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{\partial Q_2(\xi, z, z')}{\partial y} \quad (4.12)$$

Por analogía con la Ec. (4.2), las versiones periódicas de $G_{zx}^{A,m}$, $G_{zy}^{A,m}$, $G_{xz}^{A,m}$ y $G_{yz}^{A,m}$ para la agrupación periódica de fuentes puntuales de la Fig. 4.1(a) (a las que denotaremos $G_{zx}^{A,P}$, $G_{zy}^{A,P}$, $G_{xz}^{A,P}$ y $G_{yz}^{A,P}$) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} G_{zx}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{zx}^{A,m}(\mathbf{S}_{mn}, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_1(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} G_{zy}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{zy}^{A,m}(\mathbf{S}_{mn}, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_1(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} G_{xz}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{xz}^{A,m}(\mathbf{S}_{mn}, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_2(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} G_{yz}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{yz}^{A,m}(\mathbf{S}_{mn}, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_2(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Al igual que ocurre con G_0 y con \tilde{G}_0 , no existen expresiones exactas en forma cerrada para las funciones $Q_i(\xi, z, z')$ ($i = 1, 2$), pero sí es posible obtener la versión espectral de estas funciones $\tilde{Q}_i(k_\rho, z, z')$ ($i = 1, 2$) de forma computacionalmente eficiente mediante los algoritmos recurrentes que aparecen en el Apéndice F. Por este motivo, es conveniente escribir las Ecs. (4.13) a (4.16) en el dominio espectral. Aplicando la fórmula de Poisson a dichas ecuaciones, se obtiene:

$$G_{zx}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_1(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \quad (4.17)$$

$$G_{zy}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,y} \tilde{Q}_1(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \quad (4.18)$$

$$G_{xz}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_2(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \quad (4.19)$$

$$G_{xy}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,y} \tilde{Q}_2(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} , \quad (4.20)$$

donde $k_{mn,x} = \mathbf{k}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ y $k_{mn,y} = \mathbf{k}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{y}}$.

Si bien las funciones de Green periódicas G_0^P , $G_{zx}^{A,P}$, $G_{zy}^{A,P}$, $G_{xz}^{A,P}$ y $G_{yz}^{A,P}$ se pueden calcular haciendo uso de las ecuaciones en el dominio espacial dadas en (4.2) y (4.13) a (4.16), en las dos secciones siguientes de este Capítulo se ha preferido llevar a cabo el cálculo de las citadas funciones de Green periódicas mediante las ecuaciones en el dominio espectral dadas en (4.3) y (4.17) a (4.20). Esto es debido a que mientras que las funciones \tilde{G}_0 , \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 se pueden obtener de forma exacta (mediante los algoritmos recurrentes que se presentan en el Apéndice F), las funciones G_0 , Q_1 y Q_2 sólo se pueden obtener, o bien mediante integración numérica con un alto coste computacional [34, 162], o bien mediante expresiones aproximadas como las que se han deducido en el Capítulo anterior (con un error que puede llegar hasta el 0.1 % dependiendo de los valores de ξ). A la hora de abordar el cálculo de las funciones G_0^P , $G_{zx}^{A,P}$, $G_{zy}^{A,P}$, $G_{xz}^{A,P}$ y $G_{yz}^{A,P}$, en este trabajo hemos tratado de encontrar un compromiso óptimo entre precisión y rapidez, y ese compromiso sólo se puede conseguir cuando se trabaja con las expresiones de las

Ecs. (4.3) y (4.17) a (4.20), ya que los términos generales de las series en dichas expresiones se pueden calcular de forma exacta en tiempos de CPU despreciables (de hecho, esas expresiones en el dominio espectral han sido preferidas a las expresiones en el dominio espacial por la mayoría de los investigadores que han trabajado en el cálculo eficiente de funciones de Green multicapa periódicas [10]).

4.3. Función de Green periódica para el potencial escalar y elementos diagonales de la función de Green periódica diádica para el potencial vector

Las series dobles infinitas mostradas en la Ec. (4.3) convergen muy lentamente si $|z - z'| \ll |a_1|$ y $|z - z'| \ll |a_2|$. A continuación, se proponen algunas opciones para acelerar el cálculo de estas series.

Una primera posibilidad que se nos ocurre para acelerar la convergencia de las series de la Ec. (4.3) es hacer uso del método de Kummer-Poisson espectral [77] que ya se ha empleado en el Capítulo 1. Así, si $\tilde{G}_0^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$ es el comportamiento asintótico de $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ para valores grandes de la variable espectral k_ρ (es decir, $\tilde{G}_0^{\text{as}}(k_\rho, z, z') = \tilde{G}_0(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \gg}$) y $G_0^{\text{as}}(\xi, z, z')$ es la contrapartida espacial de $\tilde{G}_0^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$ (esto es, $G_0^{\text{as}}(\xi, z, z') = S_0\{\tilde{G}_0^{\text{as}}(k_\rho, z, z')\}$), al aplicar el método de Kummer-Poisson espectral a la Ec. (4.3) se obtiene:

$$G_0^{\text{P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{G}_0(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{G}_0^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\ \times e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_0^{\text{as}}(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}}, \quad (4.21)$$

En el Apéndice G se muestran las expresiones de \tilde{G}_0^{as} . Tal y como se comentó en el Capítulo 3, dichas expresiones se pueden escribir como una combinación lineal de funciones del tipo (véase la Ec. (3.113a)):

$$\tilde{f}_0(k_\rho, z, z') = \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} e^{-u_0 \Delta(z, z')} \quad (4.22)$$

cuya contrapartida espacial viene dada por (véase la Ec. (3.114a)):

$$f_0(\xi, z, z') = S_0 \left\{ \tilde{f}_0(k_\rho, z, z') \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (\Delta(z, z'))^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (\Delta(z, z'))^2}} - \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (\Delta(z, z') + b)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (\Delta(z, z') + b)^2}} \right\}, \quad (4.23)$$

donde, como ya se comentó en el Capítulo 3, en esta tesis se ha tomado $b = 2/k_0$.

La primera de las series de la Ec. (4.21) converge de forma mucho más rápida que la serie de la Ec. (4.3). Además, la segunda de las series de la Ec. (4.21) puede expresarse como una combinación lineal de series que se calculan muy eficientemente mediante el método de Ewald [104]¹. Las simulaciones numéricas han demostrado que la Ec. (4.21) requiere menos tiempo de CPU que la Ec. (4.3) para calcular G_0^P con una precisión dada, o lo que es lo mismo, la Ec. (4.21) es más eficiente que la Ec. (4.3) de cara al cálculo de G_0^P .

Tal y como se comentó en el Capítulo 3, la función $\tilde{G}_0 - \tilde{G}_0^{\text{ras}}$ sólo tiene valores relevantes si $k_\rho \lesssim 3/h$ (donde $h = \min(h_{M-1}, h_M, h_{M+1})$, siendo M la capa en la que se encuentra la fuente en el medio multicapa de la Fig. 4.1(a)). Eso significa que en el cálculo de la primera de las series de (4.21) sólo habrá que considerar aquellos valores de m y n para los que $|\mathbf{k}_{mn}| \lesssim 3/h$. En [71] y [72] se comenta

¹La segunda de las series de la Ec. (4.21) puede expresarse como una combinación lineal de series del tipo:

$$S = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}_w \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} e^{-jk_0 \sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2}}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2}},$$

donde p es un número real. Cuando se aplica el método de Ewald, este tipo de series se puede escribir como:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}_w \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2}} & \left\{ e^{jk_0 \sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2} E_w + \frac{jk_0}{2E_w} \right) \right. \\ & \left. + e^{-jk_0 \sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + p^2} E_w - \frac{jk_0}{2E_w} \right) \right\} \\ + \frac{1}{4|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2}} & \left\{ e^{\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2} p} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2}}{2E_w} + pE_w \right) \right. \\ & \left. + e^{-\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2} p} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2}}{2E_w} - pE_w \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde $E_w = \max \left[\sqrt{\frac{\pi|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2||\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}}, \frac{|\sqrt{k_0^2 - |\mathbf{k}_{00}|^2}|}{4} \right]$ (véase la Ec. (1.37)). Las dos series que aparecen en la ecuación anterior convergen de forma gaussiana cuando $|\mathbf{S}_{mn}| \rightarrow \infty$ y $|\mathbf{k}_{mn}| \rightarrow \infty$. El método de Ewald también se puede aplicar al caso en que p toma valores complejos [170].

que el número de términos que es preciso sumar en esta serie puede reducirse considerablemente si la función \tilde{G}_0^{as} que aparece en la Ec. (4.21) es sustituida por la aproximación mediante exponenciales complejas que resulta de aplicar el MICD a $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \leq k_\rho < \infty$ ($k_{\text{max}} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\text{max}}}$, siendo $\varepsilon_{\text{max}} = \max(\varepsilon_{r1}, \dots, \varepsilon_{rN_{ca}})$). Para cada pareja de valores de z y z' , esta aproximación mediante exponenciales complejas puede escribirse (véase la Ec. (3.115a)):

$$\tilde{G}_0(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \geq 1.2k_{\text{max}}} \approx \tilde{G}_0^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z') = \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} \sum_{i=1}^{N_{\text{D0}}^{(a)}} a_{0i}(z, z') e^{-u_0 b_{0i}(z, z')}, \quad (4.24)$$

donde, al igual que en el Capítulo 3, los coeficientes $a_{0i}(z, z')$ y $b_{0i}(z, z')$ ($i = 1, \dots, N_{\text{D0}}^{(a)}$) se obtienen aplicando el MPMG (véase el Apéndice E) en dos etapas, una primera en el intervalo $20k_{\text{max}} \leq k_\rho \leq 3/h$ y la segunda en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \leq k_\rho \leq 20k_{\text{max}}$ (de acuerdo con esto, $N_{\text{D0}}^{(a)}$ sería el número total de exponenciales utilizado entre las dos etapas). Como se comentó anteriormente, en [71] y [72] se propone utilizar la función $\tilde{G}_0^{\text{MICD(a)}}$ definida en la Ec. (4.24) como comportamiento asintótico de \tilde{G}_0 a la hora de aplicar el método de Kummer-Poisson espectral a la Ec. (4.2), o lo que es lo mismo, se propone calcular G_0^{P} mediante la ecuación (véase la Ec. (4.3)):

$$\begin{aligned} G_0^{\text{P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\text{max}})}} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\ &\times \left[\tilde{G}_0(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{G}_0^{\text{MICD(a)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_0^{\text{MICD(a)}}(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}}, \quad (4.25) \end{aligned}$$

donde, por analogía con la expresión (4.23), la contrapartida espacial de $\tilde{G}_0^{\text{MICD(a)}}$ viene dada por:

$$G_0^{\text{MICD(a)}}(\xi, z, z') = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{\text{D0}}^{(a)}} a_{0i}(z, z') \left\{ \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (b_{0i}(z, z'))^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (b_{0i}(z, z'))^2}} - \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (b_{0i}(z, z') + b)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (b_{0i}(z, z') + b)^2}} \right\}. \quad (4.26)$$

Tal y como se muestra en (4.25), la primera de las dos series de esta ecuación sólo hay que sumarla para los valores de m y n que cumplen que $|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\text{max}}$,

con lo cual, el cálculo de dicha serie requerirá habitualmente evaluar muchos menos términos que el cálculo de la primera serie de (4.21), ya que se suele cumplir que $1.2k_{\max} \ll 3/h$ para las frecuencias y los medios multicapa que se utilizan en la práctica en los circuitos y antenas en tecnología impresa. En cuanto a la segunda de las series de (4.25), dicha serie es una combinación lineal de series que se pueden sumar muy eficientemente mediante el método de Ewald. Por tanto, la Ec. (4.25) debe ser en principio más eficiente que la Ec. (4.21) de cara al cálculo de G_0^P . El único problema que presenta la Ec. (4.25) es que se basa en que la aproximación de la Ec. (4.24) sea lo suficientemente precisa. En el Capítulo 3, comentamos que a la hora de obtener una aproximación precisa de la función $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ en el intervalo $1.2k_{\max} \leq k_\rho < \infty$ mediante el MICD era conveniente incluir explícitamente el término asintótico $\tilde{G}_0^{\text{ras}}(k_\rho, z, z')$ (véase la sección 3.4). Teniendo esto en cuenta, en este trabajo sugerimos sustituir la aproximación de $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \geq 1.2k_{\max}}$ que aparece en (4.24) (y que ha sido propuesta en [71] y [72]) por la siguiente aproximación alternativa:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \geq 1.2k_{\max}} &\approx \tilde{G}_0^{\text{ras}}(k_\rho, z, z') + \tilde{G}_0^{\text{MICD(b)}}(k_\rho, z, z') \\ &= \tilde{G}_0^{\text{ras}}(k_\rho, z, z') + \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} \sum_{i=1}^{N_{\text{D0}}^{(b)}} c_{0i}(z, z') e^{-u_0 d_{0i}(z-z')}, \quad (4.27) \end{aligned}$$

donde ahora los coeficientes $c_{0i}(z, z')$ y $d_{0i}(z, z')$ ($i = 1, \dots, N_{\text{D0}}^{(b)}$) se obtienen mediante la aplicación del MPMG a la función $[2u_0(\tilde{G}_0(k_\rho, z, z') - \tilde{G}_0^{\text{ras}}(k_\rho, z, z'))]/(1 - e^{-bu_0})$ en los intervalos $20k_{\max} \leq k_\rho \leq 3/h$ y $1.2k_{\max} \leq k_\rho \leq 20k_{\max}$ en dos etapas.

Partiendo de la Ec. (4.27), vamos a proponer una tercera expresión para el cálculo eficiente de G_0^P que se basa en aplicar el método de Kummer-Poisson espectral a la Ec. (4.2), y en utilizar $\tilde{G}_0^{\text{ras}} + \tilde{G}_0^{\text{MICD(b)}}$ como comportamiento asintótico de \tilde{G}_0 . Dicha expresión puede escribirse:

$$\begin{aligned} G_0^P(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= \frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max})}} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\ &\times \left[\tilde{G}_0(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{G}_0^{\text{ras}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{G}_0^{\text{MICD(b)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_0^{\text{as}}(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\
& + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_0^{\text{MICD(b)}}(\xi = |\mathbf{S}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} , \quad (4.28)
\end{aligned}$$

donde, una vez más, la contrapartida espacial de $\tilde{G}_0^{\text{MICD(b)}}$ viene dada por:

$$G_0^{\text{MICD(b)}}(\xi, z, z') = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{\text{D0}}^{(b)}} c_{0i}(z, z') \left\{ \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (d_{0i}(z, z'))^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (d_{0i}(z, z'))^2}} - \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\xi^2 + (d_{0i}(z, z') + b)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (d_{0i}(z, z') + b)^2}} \right\}. \quad (4.29)$$

La Ec. (4.28) para G_0^{P} contiene tres series. La primera de estas series sólo tiene que ser sumada para los valores de m y n que cumplen que $|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\text{max}}$, y la segunda y tercera series pueden ser sumadas de forma muy eficiente mediante el método de Ewald. Por tanto, al igual que ocurre con la Ec. (4.25), la Ec. (4.28) también proporciona un método eficiente para el cálculo de G_0^{P} . Si comparamos la Ec. (4.25) con la Ec. (4.28), resulta evidente que la Ec. (4.25) va a requerir algo menos de tiempo de CPU que la Ec. (4.28), ya que necesita sumar una serie menos mediante el método de Ewald. No obstante, como muestran los resultados numéricos que se presentan más adelante en esta sección, la Ec. (4.28) tiene la ventaja de que es algo más precisa que la Ec. (4.25), ya que la aproximación que aparece en (4.27) para $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \geq 1.2k_{\text{max}}}$ resulta ser más precisa que la que aparece en (4.24).

Debe tenerse en cuenta que el número de términos que hay que sumar en las series truncadas de la Ec. (4.25) y de la Ec. (4.28) (esto es, en las series que se suman para los valores de m y n que cumplen que $|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\text{max}}$) crece conforme aumenta el valor de la relación $(|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|)/\lambda_0^2$. Afortunadamente, en aplicaciones prácticas de antenas y circuitos de microondas, la relación $(|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|)/\lambda_0^2$ es típicamente menor que 1 para evitar, por un lado, la aparición de lóbulos de difracción (*grating lobes* en la literatura en inglés) en las estructuras periódicas que se utilizan en las superficies selectivas en frecuencia y antenas *reflectarray*, y por otro lado, para evitar resonancias de cavidad en los circuitos de microondas encapsulados. De hecho, la relación $(|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|)/\lambda_0^2$ sólo resulta ser mayor que 1 en circunstancias especiales, tal y como ocurre en el análisis de antenas *leaky* que radian armónicos

de orden superior [57], o de filtros encapsulados en los que se excitan deliberadamente resonancias de cavidad para introducir ceros de transmisión [171]. En los casos en los que se satisface la condición $(|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|)/\lambda_0^2 \leq 1$, el número de términos requeridos para la evaluación de las series truncadas de las Ecs. (4.25) y (4.28) está siempre por debajo de 100, lo cual da una idea de la eficiencia numérica de estas ecuaciones en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

A continuación, se presentan resultandos numéricos en los que se lleva a cabo un estudio comparativo de las Ecs. (4.21), (4.25) y (4.28). En primer lugar se estudia cómo se comportan las funciones espectrales \tilde{G}_0^{as} , $\tilde{G}_0^{\text{MICD(a)}}$ y $\tilde{G}_0^{\text{as}} + \tilde{G}_0^{\text{MICD(b)}}$ para valores grandes de k_ρ , y también como se comportan sus contrapartidas espaciales G_0^{as} , $G_0^{\text{MICD(a)}}$ y $G_0^{\text{as}} + G_0^{\text{MICD(b)}}$ para valores pequeños de ξ . En segundo lugar, se comparan tanto la rapidez como la precisión de las Ecs. (4.21), (4.25) y (4.28) a la hora de calcular G_0^{P} . En todos los resultados numéricos de esta sección se ha elegido la función de Green para el potencial escalar G^ϕ como función representativa de G_0 . Aunque se han obtenido también resultados para los elementos diagonales de la función de Green diádica para el potencial vector, esos resultados no se muestran en esta tesis porque son muy similares a los obtenidos para la función de Green para el potencial escalar.

En las Figs. 4.2(a)-(b) se representan los valores de $|\tilde{G}^\phi|$ frente a k_ρ/k_0 para valores fijos de z y z' . En dichas figuras también se representan los módulos de las diferencias relativas $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{as}})/\tilde{G}^\phi$, $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{MICD(a)}})/\tilde{G}^\phi$ y $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{as}} - \tilde{G}^{\phi,\text{MICD(b)}})/\tilde{G}^\phi$. Dado que estas diferencias relativas son proporcionales a los términos generales de la primera de las series de las Ecs. (4.21), (4.25) y (4.28), cuanto más rápidamente decaigan a cero dichas diferencias al aumentar k_ρ/k_0 , más rápidamente convergerán las citadas series. Se observa que mientras que $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{MICD(a)}})/\tilde{G}^\phi$ y $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{as}} - \tilde{G}^{\phi,\text{MICD(b)}})/\tilde{G}^\phi$ alcanzan un valor de 10^{-3} cuando $k_\rho/k_0 \gtrsim 2$, $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,\text{as}})/\tilde{G}^\phi$ no alcanza ese valor de 10^{-3} hasta que $k_\rho/k_0 \gtrsim 20$, lo cual nos indica que se necesitarán muchos menos términos para sumar la primera de las series de (4.25) y (4.28) que para sumar la primera de las series de (4.21) con el mismo nivel de precisión. Otra conclusión importante que se extrae de las Figs. 4.2(a)-(b) está relacionada con la precisión de las aproximaciones (4.24)

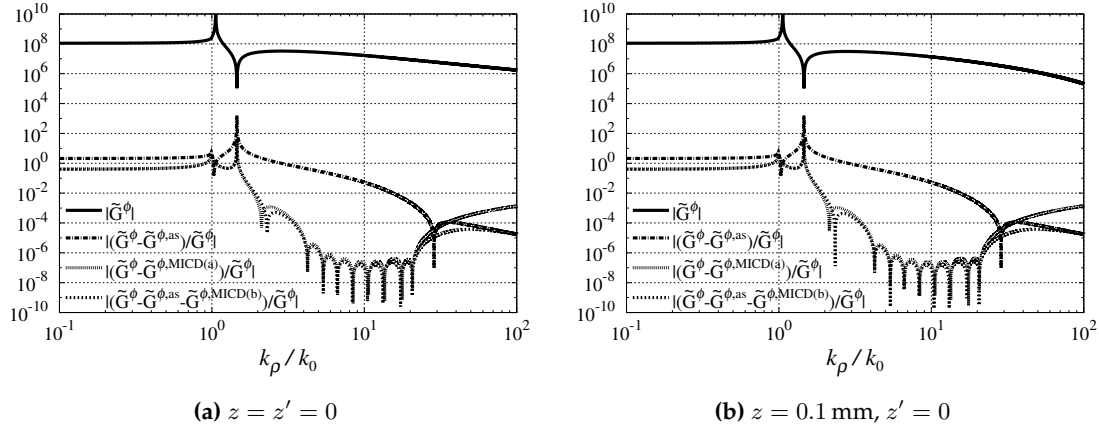


Figura 4.2: Las líneas continuas representan el módulo de la función de Green espectral \tilde{G}^ϕ en función de k_ρ/k_0 para un medio de cuatro capas (limitado inferiormente por un CEP). Las líneas discontinuas muestran el módulo de los errores relativos entre \tilde{G}^ϕ y $\tilde{G}^{\phi,as}$, entre \tilde{G}^ϕ y $\tilde{G}^{\phi,MICD(a)}$, y entre \tilde{G}^ϕ y $\tilde{G}^{\phi,as} + \tilde{G}^{\phi,MICD(b)}$. Parámetros: $f = 10 \text{ GHz}$, $N_{ca} = 4$, $h_1 = 0.7 \text{ mm}$, $h_2 = 0.3 \text{ mm}$, $h_3 = 0.5 \text{ mm}$, $h_4 = 0.3 \text{ mm}$, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $N_{D0}^{(a)} = N_{D0}^{(b)} = 4$.

y (4.27). Mientras que $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,as} - \tilde{G}^{\phi,MICD(b)})/\tilde{G}^\phi$ se mantiene siempre por debajo de 10^{-4} cuando $k_\rho/k_0 \geq 1.2k_{\max}/k_0 \approx 4.25$, $(\tilde{G}^\phi - \tilde{G}^{\phi,MICD(a)})/\tilde{G}^\phi$ llega a tomar un valor de 10^{-3} en el intervalo $k_\rho/k_0 \geq 4.25$ (ese valor de 10^{-3} se alcanza además para $k_\rho/k_0 \approx 100$, cuando \tilde{G}^ϕ tiene todavía un valor apreciable), lo cual nos indica que la aproximación de (4.24) es al menos un orden de magnitud más imprecisa que la aproximación de (4.27). Esto es comprensible si se tiene en cuenta que, mientras que en la Ec. (4.27) el comportamiento de \tilde{G}^ϕ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ es reproducido analíticamente de forma exacta por el término $\tilde{G}^{\phi,as}$, en la Ec. (4.27) dicho comportamiento es reproducido numéricamente de forma aproximada por el MPMG. Los resultados mostrados en las Figs. 4.2(a)-(b) nos indican que debido a las imprecisiones en las aproximaciones de las Ecs. (4.24) y (4.27), los resultados para $G^{\phi,P}$ obtenidos con la Ec. (4.25) tendrán como máximo una precisión de tres cifras significativas y los obtenidos con la Ec. (4.28) tendrán como máximo una precisión de cuatro cifras significativas, siendo ambas precisiones suficientes a efectos prácticos.

En las Figs. 4.3(a)-(b) se representan los valores obtenidos para la función de Green espacial G^ϕ mediante integración numérica cuando $k_0\xi = k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \leq 1$.

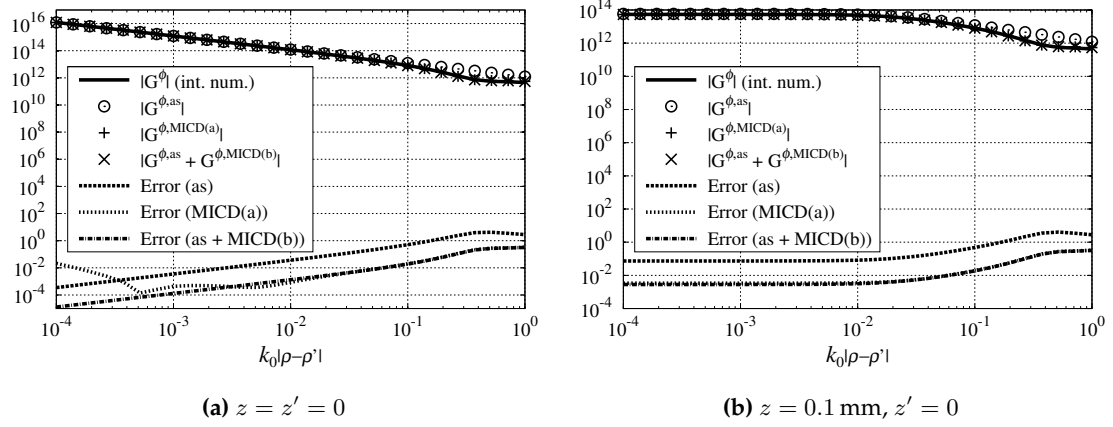


Figura 4.3: Las líneas continuas representan los valores del módulo de la función de Green espacial G^ϕ , calculados a partir de la Ec. (4.1) mediante integración numérica. Estos resultados se comparan con los obtenidos para $G^{\phi,as}$ (\odot), $G^{\phi,MICD(a)}$ (+) y $G^{\phi,as} + G^{\phi,MICD(b)}$ (\times) haciendo uso de las Ecs. (4.23), (4.26) y (4.29). Las líneas discontinuas muestran el módulo de los errores relativos entre G^ϕ y las demás funciones representadas. Parámetros del medio multicapa y del MPMG como en la Fig. 4.2.

Dichos valores son comparados con los que se obtienen para $G^{\phi,as}$, $G^{\phi,MICD(a)}$ y $G^{\phi,as} + G^{\phi,MICD(b)}$ haciendo uso de las Ecs. (4.23), (4.26) y (4.29). De acuerdo con lo que hemos visto en la Fig. 4.2, las funciones espectrales $\tilde{G}^{\phi,as}$, $\tilde{G}^{\phi,MICD(a)}$ y $\tilde{G}^{\phi,as} + \tilde{G}^{\phi,MICD(b)}$ reproducen (al menos aproximadamente) el comportamiento de \tilde{G}^ϕ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$. Por tanto, la teoría de las transformadas de Fourier nos dice que las funciones $G^{\phi,as}$, $G^{\phi,MICD(a)}$ y $G^{\phi,as} + G^{\phi,MICD(b)}$ deberían reproducir el comportamiento de G^ϕ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$. Este hecho se pone de manifiesto en la Fig. 4.3. De hecho, se observa que las funciones $G^{\phi,MICD(a)}$ y $G^{\phi,as} + G^{\phi,MICD(b)}$ son en general más precisas que la función $G^{\phi,as}$ a la hora de reproducir el comportamiento de G^ϕ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$, lo cual es debido a que $\tilde{G}^{\phi,MICD(a)}$ y $\tilde{G}^{\phi,as} + \tilde{G}^{\phi,MICD(b)}$ proporcionan un ajuste \tilde{G}^ϕ en un rango de valores de k_ρ mucho mayor que el que proporciona $\tilde{G}^{\phi,as}$. Asimismo, en la Fig. 4.3(a) se observa que el error relativo entre $\tilde{G}^{\phi,MICD(a)}$ y G^ϕ crece por encima del error existente entre $\tilde{G}^{\phi,as} + \tilde{G}^{\phi,MICD(b)}$ y G^ϕ cuando $k_0|\rho - \rho'| < 10^{-3}$, lo cual está relacionado con el hecho de que el ajuste de \tilde{G}^ϕ que proporciona $\tilde{G}^{\phi,as} + \tilde{G}^{\phi,MICD(b)}$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ es mejor que el que proporciona $\tilde{G}^{\phi,MICD(a)}$ (véanse de nuevo las Figs. 4.2(a)-(b)). Finalmente, merece la pena comentar que el comportamiento

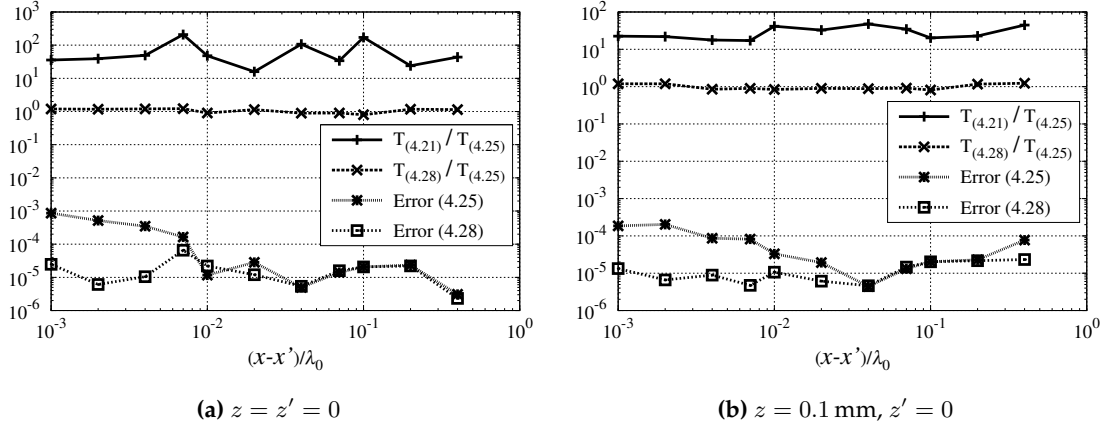


Figura 4.4: Módulo de los errores relativos generados por las Ecs. (4.25) y (4.28) en el cálculo de $G^{\phi,P}$ (* y \square). Se muestran también los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.21) y por (4.25) para calcular $G^{\phi,P}$ (+), $T_{(4.21)}/T_{(4.25)}$, y los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.28) y por (4.25) (\times), $T_{(4.28)}/T_{(4.25)}$. Parámetros de la celda periódica unidad y de los puntos fuente y de observación: $\mathbf{a}_1 = (0.6\hat{x} + 0.3\hat{y})\lambda_0$, $\mathbf{a}_2 = (0.2\hat{x} + 0.4\hat{y})\lambda_0$, $(y-y') = 0.875(x-x')$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$. Parámetros del medio multicapa y del MPMG como en la Fig. 4.2.

de G^ϕ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ en la Fig. 4.3(a) es distinto del que se observa en la Fig. 4.3(b). Esto es debido a que mientras que G^ϕ presenta una singularidad del tipo $|\rho - \rho'|^{-1}$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ y $z = z'$, dicha singularidad no está presente cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ y $z \neq z'$ [51].

Dado que las Ecs. (4.25) y (4.28) son aproximadas, en la Fig. 4.4 se muestran los errores relativos entre los resultados obtenidos para $G^{\phi,P}$ con las Ecs. (4.25) y (4.28) y los resultados virtualmente exactos que se obtienen para $G^{\phi,P}$ con la Ec. (4.3) cuando se suma en la serie de esta última ecuación un número suficientemente alto de términos. Tal y como se mencionó en los comentarios de las Figs. 4.2(a)-(b) en relación con la precisión de las aproximaciones (4.24) y (4.27), en las Figs. 4.4(a)-(b) se observa que mientras que la Ec. (4.28) asegura típicamente una precisión de cuatro cifras significativas en el cálculo de $G^{\phi,P}$, la Ec. (4.25) sólo asegura una precisión de tres cifras (de hecho, la Fig. 4.4(a) muestra que la precisión de (4.25) va disminuyendo conforme va disminuyendo $|\rho - \rho'|$, lo cual está en consonancia con los resultados mostrados en la Fig. 4.3(a)). En las Figs. 4.4(a)-(b) se muestran también los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.21), (4.25) y (4.28) para calcular $G^{\phi,P}$ con una precisión

de cuatro cifras significativas, siempre que esto último sea posible (de hecho, las propias Figs. 4.4(a)-(b) muestran que no es posible calcular $G^{\phi,P}$ con una precisión de cuatro cifras significativas con la Ec. (4.25) cuando $(x - x')/\lambda_0 \lesssim 10^{-2}$). Se observa que los tiempos de CPU requeridos por la Ec. (4.21) para obtener $G^{\phi,P}$ son típicamente entre uno y dos órdenes de magnitud mayores que los que requieren las Ecs. (4.25) y (4.28), lo cual nos indica que las Ecs. (4.25) y (4.28) son sustancialmente más eficientes que la Ec. (4.21) a la hora de obtener $G^{\phi,P}$. En cuanto a los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.25) y (4.28), éstos son prácticamente iguales. A partir de los resultados que aparecen en las Figs. 4.4(a)-(b), podemos afirmar que la Ec. (4.28) propuesta en este trabajo para calcular $G^{\phi,P}$ es aproximadamente igual de rápida que la Ec. (4.25) propuesta en [71] y [72], y además, que la Ec. (4.28) es ligeramente más precisa que la Ec. (4.25), especialmente cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ (esto es, cuando el punto de observación se acerca a alguno de los puntos fuente de la Fig. 4.1(a)).

4.4. Elementos no diagonales de la función de Green periódica diádica para el potencial vector

Las series dobles infinitas que aparecen en las Ecs. (4.17) a (4.20) presentan una convergencia muy lenta cuando $|z - z'| \ll |a_1|$, cuando $|z - z'| \ll |a_2|$, y cuando además, la distancia desde los puntos fuente y el punto de observación de la Fig. 4.1(a) a la interfase dieléctrica más próxima es mucho menor que $|a_1|$ y/o $|a_2|$. A continuación, se van a proponer tres opciones distintas para acelerar el cálculo de estas series. Concretamente, se va a describir en detalle cómo se puede mejorar computacionalmente el cálculo de las series de (4.17) y (4.19), ya que la mejora del cálculo de las series de (4.18) y (4.20) puede llevarse a cabo de una forma completamente análoga.

Una primera opción para acelerar el cálculo de las series de (4.17) y (4.19) consiste en aplicar la transformación de Kummer en el dominio espectral [77] (véase el Apéndice B). Así, si $\tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) es el comportamiento asintótico de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ para $k_\rho \gg$, al aplicar la transformación de Kummer a las Ecs. (4.17)

y (4.19), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
G_{zx}^{\text{A,P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&\quad \times \left[\tilde{Q}_1(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_1^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\
&\quad - \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \tilde{Q}_1^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{xz}^{\text{A,P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &= -\frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&\quad \times \left[\tilde{Q}_2(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_2^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\
&\quad - \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \tilde{Q}_2^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \quad (4.31)
\end{aligned}$$

A partir de los contenidos del Apéndice G es fácil comprobar que las funciones asintóticas $\tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) que aparecen en las Ecs. (4.30) y (4.31) pueden escribirse como una combinación lineal de funciones del tipo (véase la Ec. (3.113b) del Capítulo 3 o las expresiones similares que aparecen en [172, Ecs. (4) y (5)] y [51, Ec. (46)]):

$$\tilde{f}_1(k_\rho, z, z') = \frac{e^{-u_0 \Delta(z, z')}}{2k_\rho^2} [1 - e^{-b(u_0 - jk_0)}], \quad (j = 1, 2) \quad (4.32)$$

donde en esta tesis se ha tomado $b = 2/k_0$ (véase el Capítulo 3), y donde el exponente $\Delta(z, z')$ puede llegar a ser cero si $z = z'$ y además las fuentes y el punto de observación de la Fig. 4.1 están localizados en alguna de las interfases dieléctricas del medio multicapa (véanse [172, Ec. (5)] y [51, Ec. (38)]).

La convergencia de la primera de las series en las Ecs. (4.30) y (4.31) es mucho más rápida que la convergencia de las series de las Ecs. (4.17) y (4.19). En cuanto a las series que aparecen en segundo lugar en (4.30) y (4.31), si bien este tipo de series no se pueden sumar mediante la transformación de Poisson y el método de Ewald (como ocurre con las series que aparecen en segundo lugar en la Ec. (4.21)), las citadas series pueden calcularse de forma muy eficiente mediante el método

espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior que se utilizó en el Capítulo 1. De hecho, en el Apéndice H se describe en detalle el cálculo de dichas series mediante el método utilizado en el Capítulo 1. Dado que todas las series que aparecen en (4.30) y (4.31) se pueden calcular de forma mucho más eficiente que las series de (4.17) y (4.19), las Ecs. (4.30) y (4.31) son claramente preferibles a las Ecs. (4.17) y (4.19) a la hora de calcular $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$.

Tal y como vimos en la sección 4.3, el método de cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ recogido en (4.30) y (4.31) podría ser aún más eficiente si en dichas ecuaciones se sustituyeran las funciones asintóticas $\tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) por la aproximación mediante exponenciales complejas resultante de aplicar el MICD a $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$). Si bien esta estrategia fue propuesta originalmente en [71] y [72] para la evaluación de la FGPPE y de los elementos diagonales de la FGPDPV, sería interesante comprobar si la estrategia también es aplicable a la evaluación de los elementos no diagonales de la FGPDPV. De acuerdo con lo que hemos visto en la sección 4.3, para poder aplicar el método de [71] y [72] a las Ecs. (4.17) y (4.19), es preciso aproximar las funciones $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) para cada pareja de valores z y z' en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \leq k_\rho < \infty$ (esto es, en la porción del eje real del plano complejo k_ρ donde no están presentes las singularidades de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$) mediante una combinación lineal de exponenciales complejas del tipo (véase una expresión similar en [71, Ec. (2)]):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \geq 1.2k_{\text{max}}} &\approx \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z') \\ &= \frac{(1 - e^{-bu_0})}{2u_0} \sum_{i=1}^{N_{\text{DI}}^{(a)}} a_{ji}(z, z') e^{-u_0 b_{ji}(z, z')} \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde, al igual que en el Capítulo 3 y en la sección 4.3, los coeficientes $a_{ji}(z, z')$ y $b_{ji}(z, z')$ ($i = 1, \dots, N_{\text{DI}}^{(a)}$; $j = 1, 2$) se obtienen aplicando el MPMG (véase el Apéndice E) en dos etapas, una primera en el intervalo $20k_{\text{max}} \leq k_\rho \leq 3/h$ y la segunda en el intervalo $1.2k_{\text{max}} \leq k_\rho \leq 20k_{\text{max}}$ (de acuerdo con esto, $N_{\text{DI}}^{(a)}$ sería el número total de exponenciales utilizadas entre las dos etapas). Una vez obtenidas las funciones $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$), el método propuesto en [71] y [72] consiste en aplicar el método de Kummer-Poisson espectral a (4.17) y (4.19), utilizando

$\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ como comportamiento asintótico de \tilde{Q}_j . Las expresiones resultantes que se obtienen para $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ pueden escribirse (véanse las Ecs. (4.13) y (4.15), que muestran las expresiones de $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ en el dominio espacial):

$$G_{zx}^{\text{A,P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') \approx -\frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max})}} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\ \times \left[\tilde{Q}_1(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_1^{\text{MICD(a)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_{\text{DI}}^{(a)}} a_{1i}(z, z') \left[\frac{e^{-jk_0 \Gamma_{mni1}(z, z')}}{\Gamma_{mni1}(z, z')} - \frac{e^{-jk_0 \Lambda_{mni1}(z, z')}}{\Lambda_{mni1}(z, z')} \right] \right\} \quad (4.34)$$

$$G_{xz}^{\text{A,P}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') \approx -\frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max})}} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\ \times \left[\tilde{Q}_2(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_2^{\text{MICD(a)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N_{\text{DI}}^{(a)}} a_{2i}(z, z') \left[\frac{e^{-jk_0 \Gamma_{mni2}(z, z')}}{\Gamma_{mni2}(z, z')} - \frac{e^{-jk_0 \Lambda_{mni2}(z, z')}}{\Lambda_{mni2}(z, z')} \right] \right\}, \quad (4.35)$$

donde se tiene que $\Gamma_{mni j}(z, z') = \sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + (b_{ji}(z, z'))^2}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{DI}}^{(a)}$; $j = 1, 2$) y $\Lambda_{mni j}(z, z') = \sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + (b_{ji}(z, z') + b)^2}$.

Al igual que ocurría con la primera de las series de las Ecs. (4.25) y (4.21), mientras que la primera de las series de (4.34) y de (4.35) hay que sumarla para los valores de m y n que cumplen que $|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max}$, la primera de las series de (4.30) y (4.31) hay que sumarla para los valores de m y n que cumplen que $|\mathbf{k}_{mn}| \lesssim 3/h$. Como ya se comentó en la sección 4.3, debido a que se suele cumplir que $1.2k_{\max} \ll 3/h$ para las frecuencias y los medios multicapa que se utilizan en la práctica en los circuitos y antenas en tecnología impresa, el cálculo de la primera de las series de (4.34) y de (4.35) requiere habitualmente sumar muchos menos términos que el cálculo de la primera de las series de (4.30) y (4.31). Por otro lado, la segunda de las series de (4.34) y de (4.35) puede transformarse en dos series con convergencia gaussiana si aplicamos el método de Ewald [104, 173], y dichas series con convergencia gaussiana convergen incluso más rápidamente que las

series resultantes de aplicar el método expuesto en el Apéndice H a la segunda de las series de (4.30) y (4.31). Por tanto, podemos afirmar que las Ecs. (4.34) y (4.35) permiten evaluar $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ con más rapidez que las Ecs. (4.30) y (4.31). Desgraciadamente, la aproximación realizada en (4.33) introduce imprecisiones en las Ecs. (4.34) y (4.35) que pueden conducir a errores importantes en el cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$, y estas imprecisiones no están presentes en las expresiones exactas de (4.30) y (4.31). Las citadas imprecisiones están relacionadas con el hecho de que, mientras que la función $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) tiene un comportamiento del tipo $e^{-k_\rho \Delta}/k_\rho^2$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ (véase la Ec. (4.32)), la función $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z')$ propone para $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ un comportamiento erróneo del tipo $e^{-k_\rho \Delta}/k_\rho$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ (téngase en cuenta además que el exponente Δ puede ser cero). Dado que $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z')$ no captura correctamente el comportamiento asintótico de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$, el truncamiento en los valores de m y n llevado a cabo en la primera de las series de (4.34) y (4.35) conduce a errores importantes en el cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$, tal y como mostrarán los resultados numéricos que aparecen al final de esta sección. Este último resultado es esperable ya que de acuerdo con la teoría de transformadas de Fourier, el comportamiento de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ está íntimamente relacionado con el comportamiento de $Q_j(\rho - \rho', z, z')$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ [51, 172], y de acuerdo con las Ecs. (4.9) a (4.16), tanto los comportamientos de $G_{zx}^{A,m}(\rho - \rho', z, z')$, $G_{zy}^{A,m}(\rho - \rho', z, z')$, $G_{xz}^{A,m}(\rho - \rho', z, z')$ y $G_{xy}^{A,m}(\rho - \rho', z, z')$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ como los de $G_{zx}^{A,P}(\rho - \rho', z, z')$, $G_{zy}^{A,P}(\rho - \rho', z, z')$, $G_{xz}^{A,P}(\rho - \rho', z, z')$ y $G_{xy}^{A,P}(\rho - \rho', z, z')$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ están relacionados con los comportamientos de $Q_j(\rho - \rho', z, z')$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$.

Es conveniente señalar que los errores importantes introducidos por las Ecs. (4.34) y (4.35) en el cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$ no están presentes en la Ec. (4.25) (véanse los resultados obtenidos en las Figs. 4.3 y 4.4), que también ha sido obtenida a partir del método descrito en [71] y [72]. Esto es debido a que las funciones espectrales $\tilde{G}_0(k_\rho, z, z')$ tienen un comportamiento asintótico del tipo $e^{-k_\rho \Delta_0}/k_\rho$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ (véase la Ec. (4.22)), que coincide exactamente con el que predice la aproximación mediante exponenciales complejas de la Ec. (4.24).

Ya hemos visto que la aproximación de la Ec. (4.33) no reproduce correctamente el comportamiento asintótico de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) cuando $k_\rho \rightarrow \infty$. En el Capítulo 3, se propuso una aproximación muy precisa para las funciones $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ en el intervalo $1.2k_{\max} \leq k_\rho < \infty$ que incluía explícitamente el término asintótico $\tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z')$, y que reproducía correctamente el comportamiento asintótico de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ ($j = 1, 2$) cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ (véanse las Ecs. (3.112) y (3.115b)). Pues bien, teniendo en cuenta la propuesta realizada en el Capítulo 3, en este trabajo sugerimos sustituir la aproximación de $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \geq 1.2k_{\max}}$ que aparece en la Ec. (4.33) (aproximación propuesta originalmente en [71] y [72]) por la siguiente aproximación alternativa:

$$\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \geq 1.2k_{\max}} \approx \tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z') + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}(k_\rho, z, z') \quad (j = 1, 2), \quad (4.36)$$

donde:

$$\tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}(k_\rho, z, z') = \frac{[1 - e^{-b(u_0 - jk_0)}]}{2k_\rho^2} \sum_{i=1}^{N_{\text{DI}}^{(b)}} c_{ji}(z, z') e^{-u_0 d_{ji}(z, z')} \quad (j = 1, 2). \quad (4.37)$$

Los coeficientes $c_{ji}(z, z')$ y $d_{ji}(z, z')$ ($i = 1, \dots, N_{\text{DI}}^{(b)}$; $j = 1, 2$) de la Ec. (4.37) se obtienen mediante la aplicación del MPMG a la función $[2k_\rho^2(\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z') - \tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z'))]/(1 - e^{-b(u_0 - jk_0)})$ ($j = 1, 2$) en los intervalos $20k_{\max} \leq k_\rho \leq 3/h$ y $1.2k_{\max} \leq k_\rho \leq 20k_{\max}$ en dos etapas.

Se puede comprobar que, a diferencia de lo que ocurre con $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}(k_\rho, z, z')$, el comportamiento que propone la aproximación $\tilde{Q}_j^{\text{as}}(k_\rho, z, z') + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}(k_\rho, z, z')$ para $\tilde{Q}_j(k_\rho, z, z')$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ es un comportamiento del tipo $e^{-k_\rho \Delta}/k_\rho^2$, y por tanto, es el comportamiento correcto.

Una vez que las funciones $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}(k_\rho, z, z')$ han sido definidas, vamos a proponer una nueva estrategia para el cálculo eficiente de $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$. Esta estrategia se basa en aplicar la transformación de Kummer en el dominio espectral a las Ecs. (4.17) y (4.19), y en utilizar $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ como comportamiento asintótico de \tilde{Q}_j ($j = 1, 2$). Las expresiones que se obtienen para $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ mediante la

nueva estrategia son:

$$\begin{aligned}
G_{zx}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &\approx -\frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max})}} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&\times \left[\tilde{Q}_1(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_1^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_1^{\text{MICD(b)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\
&- \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_1^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&- \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_1^{\text{MICD(b)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{xz}^{A,P}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z, z') &\approx -\frac{1}{A} \sum_{\substack{m,n \\ (k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\max})}} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&\times \left[\tilde{Q}_2(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_2^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') - \tilde{Q}_2^{\text{MICD(b)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') \right] \\
&- \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_2^{\text{as}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \\
&- \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} \tilde{Q}_2^{\text{MICD(b)}}(k_\rho = |\mathbf{k}_{mn}|, z, z') e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

El tiempo que se requiere para el cálculo de la primera de las series de las Ecs. (4.38) y (4.39) es básicamente el mismo que el que se requiere para el cálculo de la primera de las series de las Ecs. (4.34) y (4.35). Además, la segunda y tercera de las series de las Ecs. (4.38) y (4.39) pueden ser evaluadas eficientemente mediante el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior que se propone en el Apéndice H. Este último método es ligeramente más lento que el método de Ewald y, por tanto, las Ecs. (4.38) y (4.39) van a requerir un tiempo de CPU ligeramente mayor que las Ecs. (4.34) y (4.35) a la hora de calcular $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$. Sin embargo, y a pesar de esta desventaja, las Ecs. (4.38) y (4.39) son preferibles a las Ecs. (4.34) y (4.35) de cara al cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ dado que no se ven afectadas por errores cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$.

Cuando se comparan las Ecs. (4.34) y (4.35) con las Ecs. (4.38) y (4.39), podría pensarse que se puede prescindir del término asintótico \tilde{Q}_j^{as} ($j = 1, 2$) en las

Ecs. (4.36), (4.38) y (4.39) ya que el término $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ captura en principio el comportamiento matemático correcto de \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$. No obstante, hay que tener en cuenta que, mientras que \tilde{Q}_j^{as} proporciona el comportamiento asintótico analíticamente exacto de \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$, el término $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ aislado sólo podría proporcionar una aproximación numérica de ese comportamiento asintótico (recuérdese que el MPMG es un método numérico de *aproximación* de funciones en términos de exponenciales complejas), lo cual conduciría inevitablemente a errores mayores en el cálculo de $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ (véanse los comentarios de las Figs. 4.2(a)-(b)).

Como ya se comentó en la sección 4.3, en la mayoría de las aplicaciones de las estructuras periódicas al diseño de antenas y circuitos de microondas encapsulados, se satisface la condición $(|a_1||a_2|)/\lambda_0^2 \leq 1$ para evitar la aparición de lóbulos de difracción y de resonancias de cavidad. Pues bien, cuando se satisface esa condición, el número de términos que se requiere para sumar la primera de las series en las Ecs. (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39) está siempre por debajo de 100, lo cual da una idea de la eficiencia numérica de estas ecuaciones en la mayor parte de las aplicaciones prácticas.

De modo análogo a lo que se hizo en la sección 4.3, a continuación se presentan resultados numéricos en los que se lleva a cabo un estudio comparativo de las Ecs. (4.30), (4.31), (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39). En primer lugar, se estudia cómo se comportan las funciones espectrales \tilde{Q}_j^{as} , $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ y $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ ($j = 1, 2$) para valores grandes de k_ρ , y también como se comportan sus contrapartidas espaciales Q_j^{as} , $Q_j^{\text{MICD(a)}}$ y $Q_j^{\text{as}} + Q_j^{\text{MICD(b)}}$ ($j = 1, 2$) para valores pequeños de $|\rho - \rho'|$. En segundo lugar, se comparan tanto la rapidez como la precisión de las Ecs. (4.30), (4.31), (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39) a la hora de calcular $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$.

En la Fig. 4.5 se representan las funciones espectrales \tilde{Q}_j ($j = 1, 2$) definidas en las Ecs. (4.4) a (4.7) frente a k_ρ/k_0 para valores fijos de z y z' . Las figuras también muestran el módulo de las diferencias relativas $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}})/\tilde{Q}_j$, $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j$ y $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j$ ($j = 1, 2$). Dado que esas diferencias relativas son proporcionales a los términos que aparecen en la primera de las series de las Ecs. (4.30), (4.31), (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39), la representación del módulo

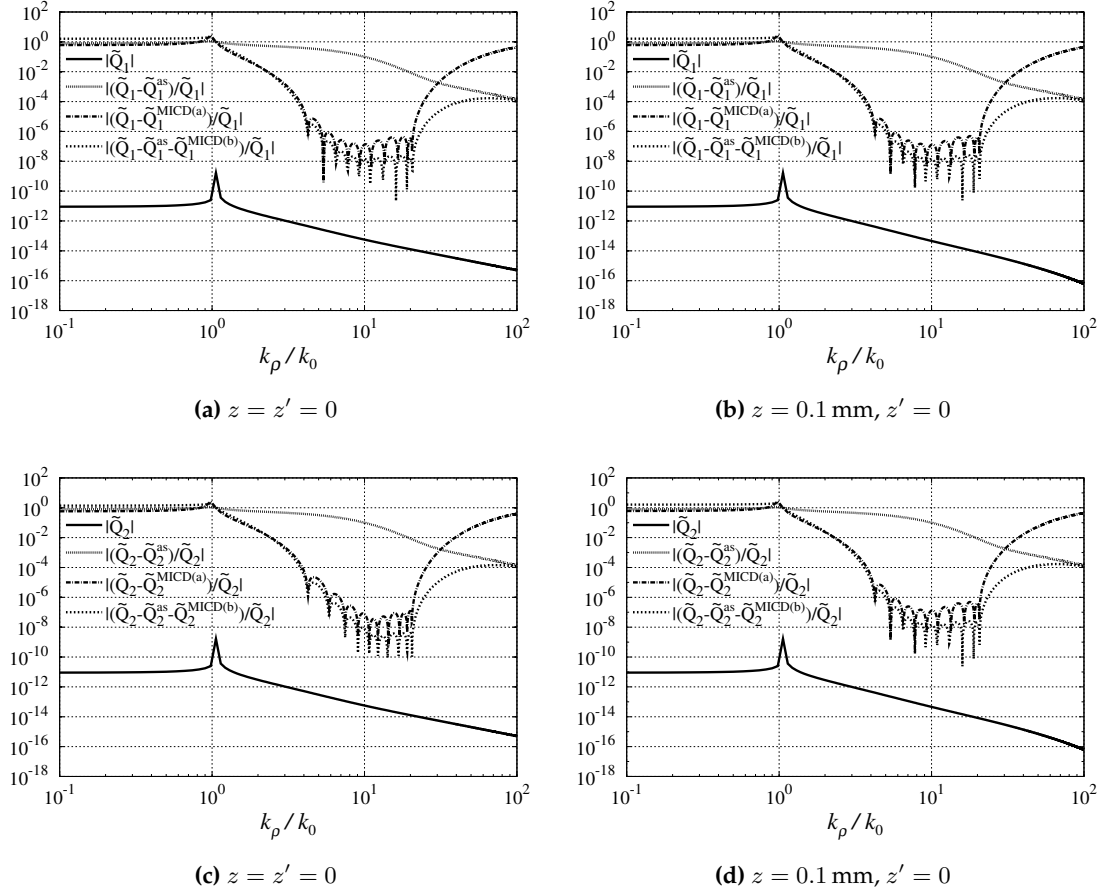


Figura 4.5: Las líneas continuas representan el módulo de las funciones de Green espectrales \tilde{Q}_j ($j = 1, 2$) en función de k_ρ/k_0 para un medio de cuatro capas (limitado inferiormente por un CEP). Las líneas discontinuas muestran el módulo de los errores relativos entre \tilde{Q}_j y \tilde{Q}_j^{as} , entre \tilde{Q}_j y $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$, y entre \tilde{Q}_j y $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$. Parámetros: $f = 10 \text{ GHz}$, $N_{\text{ca}} = 4$, $h_1 = 0.7 \text{ mm}$, $h_2 = 0.3 \text{ mm}$, $h_3 = 0.5 \text{ mm}$, $h_4 = 0.3 \text{ mm}$, $\varepsilon_{r1} = 2.1$, $\varepsilon_{r2} = 12.5$, $\varepsilon_{r3} = 9.8$, $\varepsilon_{r4} = 8.6$, $N_{\text{D1}}^{(a)} = N_{\text{D1}}^{(b)} = 5$.

de las diferencias relativas proporciona información sobre el ritmo de convergencia de las series. Las Figs. 4.5(a)-(d) muestran que tanto $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j|$ como $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j|$ tienden a cero mucho más rápidamente que $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}})/\tilde{Q}_j|$ en el intervalo $0 \leq k_\rho/k_0 \leq 1.2k_{\text{max}}/k_0 \approx 4.25$, lo cual indica que el número de términos requeridos en el cálculo de la primera de las series de (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39) será mucho menor que el requerido en el cálculo de la primera de las series de (4.30) y (4.31).

Al escribir las Ecs. (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39), se ha supuesto implícitamente

que las funciones $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j$ y $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j$ son aproximadamente nulas cuando $k_\rho/k_0 > 1.2k_{\text{max}}/k_0 \approx 4.25$. Pues bien, las Figs. 4.5(a)-(d) muestran que mientras que $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j|$ se mantiene aproximadamente por debajo de 10^{-4} cuando $k_\rho/k_0 > 4.25$, $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j|$ aumenta sustancialmente por encima de 10^{-2} en ese mismo intervalo. Dado que los valores elevados de $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j|$ en el intervalo $k_\rho/k_0 > 4.25$ se producen cuando los valores de \tilde{Q}_j son aún relevantes, esto significa que el truncamiento en los valores de m y n ($|\mathbf{k}_{mn}| \leq 1.2k_{\text{max}}$) que se ha llevado a cabo en la primera de las series de las Ecs. (4.34) y (4.35) puede llevar a errores importantes en el cálculo de $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ mediante dichas ecuaciones. Por el contrario, esos errores no se van a producir en la primera de las series de las Ecs. (4.38) y (4.39), ya que los valores de $|(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j|$ en las Figs. 4.5(a)-(b) se mantienen típicamente por debajo de 10^{-4} cuando $k_\rho/k_0 \geq 3$, con lo cual, las Ecs. (4.38) y (4.39) proporcionarán siempre los valores de $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ con una precisión de al menos cuatro cifras significativas. Como se comentó con anterioridad en esta sección, la explicación del distinto comportamiento de $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}})/\tilde{Q}_j$ y $(\tilde{Q}_j - \tilde{Q}_j^{\text{as}} - \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}})/\tilde{Q}_j$ en el intervalo $k_\rho/k_0 > 4.25$ está relacionada con el hecho de que, mientras que la aproximación $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ no reproduce correctamente el comportamiento asintótico de \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$, la aproximación $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ sí reproduce correctamente ese comportamiento asintótico.

En la Fig. 4.6 se representan los valores numéricos de $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ ($j = 1, 2$) frente a $k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$. De acuerdo con las Ecs. (4.9) y (4.11), y de acuerdo con la regla de la cadena para la derivación de funciones de varias variables, $|\partial Q_1/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ será proporcional a $|G_{zx}^{\text{A,m}}|$ y $|\partial Q_2/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ será proporcional a $|G_{xz}^{\text{A,m}}|$. Para obtener los valores numéricos de $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ ($j = 1, 2$), se ha tomado la derivada de la Ec. (4.8) con respecto a $\xi = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$, y se ha usado posteriormente la técnica de integración numérica descrita en [34]. En la Fig. 4.6 también se muestran los valores de $|\partial Q_j^{\text{MICD(a)}}/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ y $|\partial(Q_j^{\text{as}} + Q_j^{\text{MICD(b)}})/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ ($j = 1, 2$). Para obtener estos últimos valores, se han reemplazado primeramente \tilde{Q}_j por $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ y \tilde{Q}_j por $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ en la Ec. (4.8), a continuación se han determinado analíticamente las integrales resultantes, y finalmente, se han derivado con respecto a $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$ los resultados de dichas integrales. Como en teoría se supone que

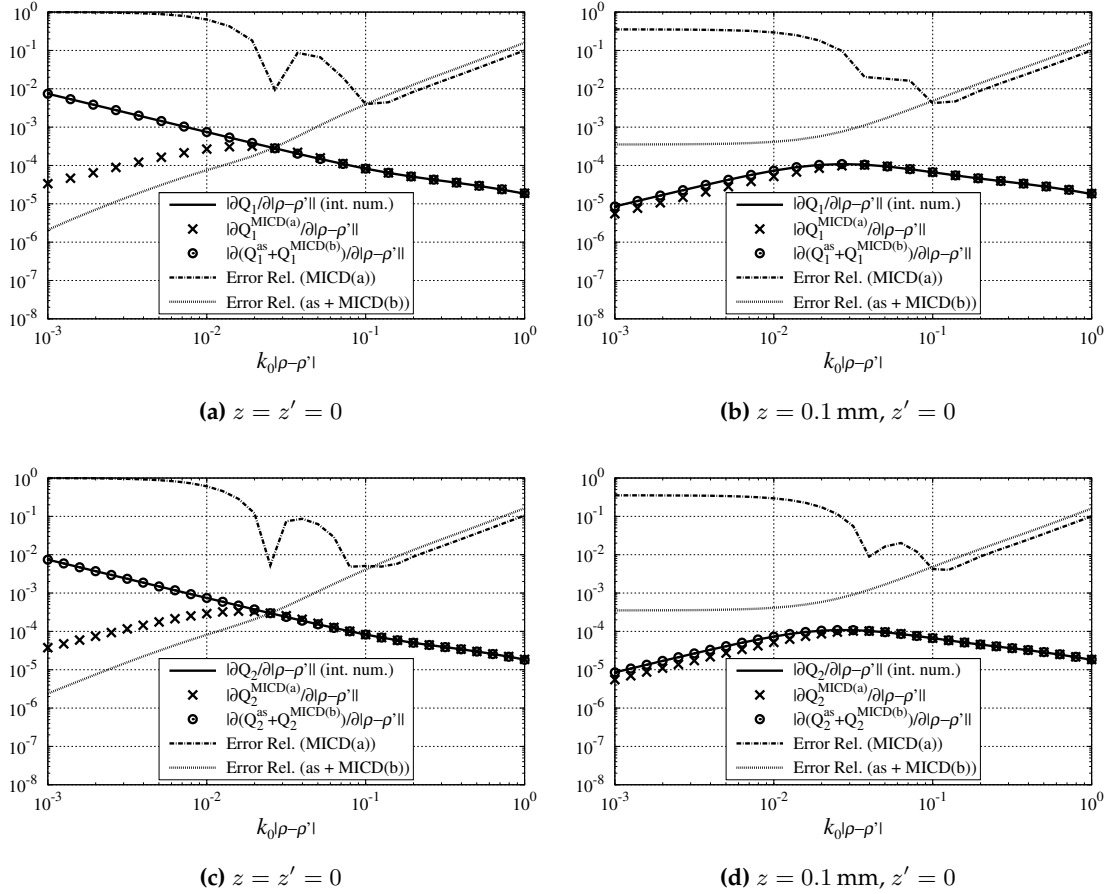


Figura 4.6: Las líneas continuas representan los valores del módulo de $\partial Q_j / \partial |\rho - \rho'|$ ($j = 1, 2$), calculados mediante integración numérica de la derivada de la Ec. (4.8). Estos resultados se comparan con los que se obtienen para $\partial Q_j^{\text{MICD(a)}} / \partial |\rho - \rho'|$ (\times) y para $\partial Q_j^{\text{as}} / \partial |\rho - \rho'| + \partial Q_j^{\text{MICD(b)}} / \partial |\rho - \rho'|$ (\odot) a partir de la derivada de la contrapartida espacial de las Ecs. (4.32), (4.33) y (4.37). Las líneas discontinuas muestran el módulo de los errores relativos existentes entre $\partial Q_j / \partial |\rho - \rho'|$ y las demás funciones representadas. Parámetros del medio multicapa y del MPMG como en la Fig. 4.5.

$\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ y $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ constituyen los límites asintóticos de \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ (recuérdese que las aproximaciones de (4.33) y (4.36) deberían proporcionar teóricamente las funciones \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \geq 1.2k_{\text{max}}$), de acuerdo con la teoría de las transformadas de Fourier, los valores de $Q_j^{\text{MICD(a)}}$ y $Q_j^{\text{as}} + G_1^{\text{MICD(b)}}$ deberían coincidir con los de Q_j cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$. Y en consecuencia, los valores de $|\partial Q_j^{\text{MICD(a)}} / \partial |\rho - \rho'|$ y $|\partial(Q_j^{\text{as}} + G_1^{\text{MICD(b)}}) / \partial |\rho - \rho'|$ también deberían coincidir con los de $|\partial Q_j / \partial |\rho - \rho'|$ cuando $|\rho - \rho'| \rightarrow 0$. Las Figs. 4.6(a)-(d) muestran claramente

que los valores de $|\partial(Q_j^{\text{as}} + Q_j^{\text{MICD(b)}})/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ coinciden con los de $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$, y que los errores relativos entre los dos conjuntos de valores son siempre inferiores al 1 % cuando $k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| < 0.1$. Sin embargo, los valores de $|\partial Q_j^{\text{MICD(a)}}/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ no coinciden en absoluto con los de $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$, siendo este hecho especialmente relevante en los casos mostrados en las Figs. 4.6(a) y 4.6(c) (donde los errores relativos entre los dos conjuntos de valores pueden llegar a ser del 100 % cuando $k_0|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| < 0.1$). De nuevo, estas diferencias en el comportamiento de $|\partial(Q_j^{\text{as}} + G_1^{\text{MICD(b)}})/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ y de $|\partial Q_j^{\text{MICD(a)}}/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ son atribuidas al hecho de que mientras que $\tilde{Q}_j^{\text{as}} + \tilde{Q}_j^{\text{MICD(b)}}$ reproduce correctamente el límite asintótico de \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$, $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ no reproduce ese límite asintótico (véanse los comentarios sobre los resultados de la Fig. 4.5 en el intervalo $k_\rho/k_0 > 4.25$). Resulta curioso que los errores relativos introducidos por $|\partial Q_j^{\text{MICD(a)}}/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'||$ cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$ son más relevantes en las Figs. 4.6(a) y 4.6(c) que en las Figs. 4.6(b) y 4.6(d). Este comportamiento es atribuido al hecho de que el caso estudiado en las Figs. 4.6(a) y 4.6(c) involucra distancias más pequeñas entre el punto de observación y el punto fuente que el estudiado en las Figs. 4.6(b) y 4.6(d).

Se observa que mientras que $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|| \propto |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^{-1}$ cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$ en las Figs. 4.6(a) y 4.6(c), $|\partial Q_j/\partial|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|| \propto |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$ cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$ en las Figs. 4.6(b) y 4.6(d) (en [51, Figs. 10 y 11] se muestra un comportamiento similar). Para explicar estas diferencias, es preciso tener en cuenta el diferente comportamiento asintótico de la función espectral \tilde{Q}_j cuando $k_\rho \rightarrow \infty$ en el caso en que $z = z' = 0$ y en el caso en que $z = 0.1$ mm y $z' = 0$. Mientras que en el caso tratado en las Figs. 4.6(a) y 4.6(c) (esto es, caso $z = z' = 0$), \tilde{Q}_j tiene un decaimiento algebraico del tipo $1/k_\rho^2$ cuando $k_\rho \rightarrow \infty$, en el caso tratado en las Figs. 4.6(b) y 4.6(d) (caso $z \neq z'$) \tilde{Q}_j tiene un decaimiento exponencial del tipo $e^{-k_\rho(z+z')}/k_\rho^2$ (siendo $z = 0.1$ mm y $z' = 0$) cuando $k_\rho \rightarrow \infty$.

Las Figs. 4.6(a)-(d) han mostrado que las imprecisiones de $\tilde{Q}_j^{\text{MICD(a)}}$ ($j = 1, 2$) en la aproximación de \tilde{Q}_j para valores grandes de k_ρ llevan a errores importantes en la estimación de $|G_{zx}^{\text{A,m}}|$ y $|G_{xz}^{\text{A,m}}|$ cuando $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, cuando el punto de observación se aproxima al punto fuente. Esto parece indicar que las Ecs. (4.34) y (4.35) también conducirán a errores importantes en el cálculo de las funciones de Green periódicas $G_{zx}^{\text{A,P}}$ y $G_{xz}^{\text{A,P}}$ cuando el punto de observación se

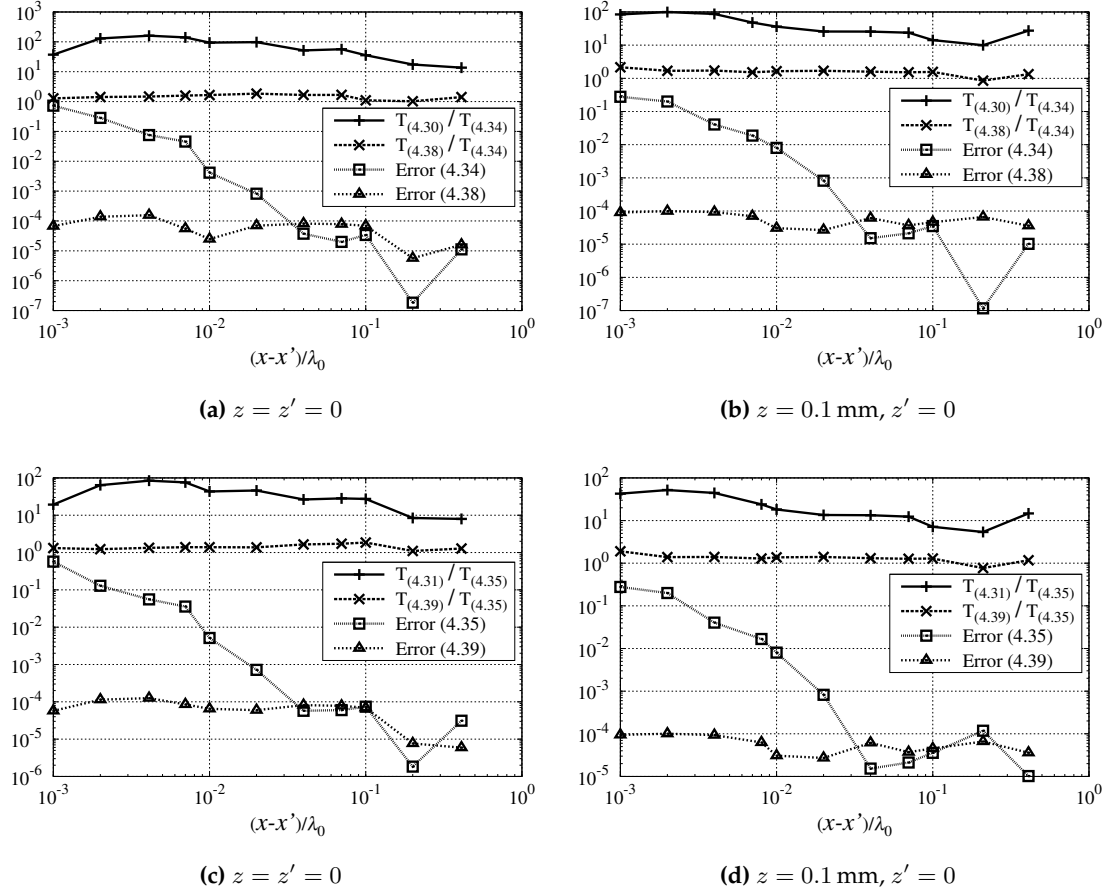


Figura 4.7: Módulo de los errores relativos generados por las Ecs. (4.34) (\square) y (4.38) (\triangle) en el cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ (Figs. 4.7(a)-(b)), y por las Ecs. (4.35) (\square) y (4.39) (\triangle) en el cálculo de $G_{xz}^{A,P}$ (Figs. 4.7(c)-(d)). En las Figs. 4.7(a)-(b) se muestran también los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.30) y por (4.34) para calcular $G_{zx}^{A,P}$ (+), $T_{(4.30)}/T_{(4.34)}$, y los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.38) y por (4.34) (\times), $T_{(4.38)}/T_{(4.34)}$. Asimismo, en las Figs. 4.7(c)-(d) se muestran los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.31) y por (4.35) para calcular $G_{xz}^{A,P}$ (+), $T_{(4.31)}/T_{(4.35)}$, y los cocientes entre los tiempos de CPU requeridos por (4.39) y por (4.35) (\times), $T_{(4.39)}/T_{(4.35)}$. Parámetros de la celda periódica unidad y de los puntos fuente y de observación: $\mathbf{a}_1 = (0.6\hat{x} + 0.3\hat{y})\lambda_0$, $\mathbf{a}_2 = (0.2\hat{x} + 0.4\hat{y})\lambda_0$, $(y - y') = 0.875(x - x')$, $\theta_0 = \phi_0 = \frac{\pi}{4}$. Parámetros del medio multicapa y del MPMG como en la Fig. 4.5.

aproxime a cualquiera de las fuentes de la agrupación periódica de la Fig. 4.1(b). Esta conclusión se pone de manifiesto en las Figs. 4.7(a)-(d), donde se representan los errores relativos entre los resultados obtenidos para $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ con las Ecs. (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39), y los resultados virtualmente exactos que se obtienen para $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ con las Ecs. (4.17) y (4.19) cuando se suma en estas últimas

ecuaciones un número suficientemente alto de términos. Se observa que mientras que las Ecs. (4.38) y (4.39) permiten calcular $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ con un error relativo que está aproximadamente por debajo del 0.01 %, las Ecs. (4.34) y (4.35) conducen a errores relativos que están por encima del 1 % cuando $(x - x')/\lambda_0 \leq 0.01$ (este último resultado es coherente con los resultados observados en las Figs. 4.6(a)-(d) cuando $k_0|\rho - \rho'| < 0.1$).

En las Figs. 4.7(a)-(d) también se comparan los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.30), (4.31), (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39) para calcular $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$ con una precisión de al menos cuatro cifras significativas, siempre y cuando esa precisión pueda ser alcanzada (como muestran las Figs. 4.7(a)-(d), no es posible alcanzar una precisión de cuatro cifras significativas con las Ecs. (4.34) y (4.35) cuando $(x - x')/\lambda_0 < 0.03$). Las Figs. 4.7(a)-(d) muestran que los tiempos de CPU requeridos por Ecs. (4.30) y (4.31) para calcular $G_{zx}^{A,P}$ y de $G_{xz}^{A,P}$ están entre uno y dos órdenes de magnitud por encima de los que requieren las Ecs. (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39). Sin embargo, los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.38) y (4.39) son en promedio 1.5 veces mayores que los que requieren las Ecs. (4.34) y (4.35). Por tanto, por lo que respecta al cálculo de $G_{zx}^{A,P}$ y $G_{xz}^{A,P}$, cuando se comparan las Ecs. (4.30), (4.31), (4.34), (4.35), (4.38) y (4.39), se observa claramente que las expresiones (4.38) y (4.39) proporcionan el mejor compromiso entre precisión y consumo de tiempo de CPU.

En la Tabla 4.1 se presentan resultados para el cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.38) y (4.34) para calcular $G_{zx}^{A,P}$ con una precisión de cuatro cifras significativas (lo cual no siempre es posible, tal y como muestran las Figs. 4.7(a)-(d)). La relación entre los tiempos de CPU se presenta para diferentes valores de $(x - x')/\lambda_0$, y para diferentes valores del parámetro M_S definido en las Ecs. (H.2) y (H.5) del Apéndice H. Este parámetro M_S indica el número de términos asintóticos retenidos al aplicar el método espectral de Kummer-Poisson con extracción de términos de orden superior al cálculo de la segunda y tercera series de la Ec. (4.38) (véase el Apéndice H). En este sentido, la Tabla 4.1 es totalmente análoga a las Tablas 1.1 y 1.2 del Capítulo 1. En la Tabla 4.1 se observa que el cociente entre tiempos de CPU $T_{(4.38)}/T_{(4.34)}$ primero disminuye conforme aumenta el valor de M_S , posteriormente alcanza un mínimo para $M_S = 5$, y por último

Tabla 4.1: Cociente entre los tiempos de CPU requeridos por las Ecs. (4.38) y (4.34) para calcular $G_{zx}^{A,P}$ ($T_{(4.38)}/T_{(4.34)}$) en función del número de términos M_S retenidos al aplicar el método espectral de Kummer-Poisson con extracción de términos de orden superior a la segunda y tercera series de (4.38) (véanse las Ecs. (H.2) y (H.5) del Apéndice H). Los parámetros relativos al medio multicapa, el MPMG, la red periódica, los puntos fuentes y el punto de observación son los mismos que los utilizados en la Fig. 4.7(a).

M_S	$\frac{(x-x')}{\lambda_0} = 0.005$	$\frac{(x-x')}{\lambda_0} = 0.05$	$\frac{(x-x')}{\lambda_0} = 0.5$
1	3.30	3.58	3.36
2	1.67	2.03	1.82
3	1.61	1.73	1.57
4	1.55	1.68	1.51
5	1.52	1.65	1.47
6	1.54	1.69	1.48
7	1.55	1.75	1.50
8	1.57	1.77	1.53

aumenta lentamente para valores de M_S mayores que 5. Este comportamiento es similar al observado en las Tablas 1.1 y 1.2 del Capítulo 1, y las explicaciones de dicho comportamiento que se dieron al comentar esas dos tablas siguen siendo válidas para el caso de la Tabla 4.1. La Tabla 4.1 indica claramente que si se quiere minimizar el tipo de CPU al aplicar el método espectral de Kummer-Poisson con extracción de términos de orden superior al cálculo de la segunda y tercera series de las Ecs. (4.38) y (4.34), se debe tomar un valor de M_S igual a 5 en las Ecs. (H.2) y (H.5) del Apéndice H.

4.5. Conclusiones

Las funciones de Green periódicas para el potencial escalar y para la diada del potencial vector en medios multicapa pueden expresarse en términos de series infinitas que, en ocasiones, convergen muy lentamente. En este Capítulo se han presentado distintas alternativas para acelerar el cálculo de estas series. En el caso

de las funciones de Green periódicas para el potencial escalar y para los elementos diagonales de la diada del potencial vector, se ha comprobado que la técnica híbrida clásica que utiliza la transformación de Kummer, el MICD y el método de Ewald proporciona un compromiso óptimo entre precisión y tiempo de computación. Sin embargo, se ha comprobado que cuando se aplica a los elementos no diagonales de la diada del potencial vector, esa misma técnica híbrida clásica proporciona errores inaceptables cuando el punto de observación se aproxima a los puntos fuente. Para resolver este problema, en este Capítulo se ha presentado una nueva técnica híbrida basada en la transformación de Kummer y en el MICD, que es específica para el cálculo de los elementos no diagonales de la diada del potencial vector. Esta nueva técnica híbrida no plantea problemas de precisión cuando el punto fuente se aproxima a los puntos de observación (asegurando cuatro cifras significativas en el cálculo de las funciones de Green periódicas), y solamente es un 50 % más lenta que la técnica híbrida clásica. En la nueva técnica híbrida, las series asintóticas resultantes de aplicar la transformación de Kummer se calculan mediante el método de Kummer-Poisson espectral con extracción asintótica de términos de orden superior que se describió en el Capítulo 1 de esta tesis.

Conclusiones Generales

El principal objetivo perseguido en esta tesis es la optimización del cálculo de funciones de Green periódicas en medios homogéneos y de funciones de Green multicapa espaciales para ecuaciones integrales de potenciales mixtos, tanto en el caso no periódico como en el caso periódico. En cada Capítulo de la memoria se han presentado las conclusiones particulares de ese Capítulo. A continuación se presenta un breve resumen de las conclusiones más importantes que se pueden extraer de la tesis.

- Se ha propuesto una novedosa implementación del método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior para llevar a cabo el cálculo eficiente de las series infinitas que conducen a las funciones de Green periódicas bidimensionales en medios homogéneos. El nuevo método ha sido aplicado al cálculo de funciones de Green periódicas con periodicidad 1-D y al cálculo de funciones de Green periódicas con periodicidad 2-D, y ha resultado ser entre 1.2 y 3 veces más rápido que el método de Ewald.
- Se ha aplicado el método espacial de Kummer con extracción asintótica de términos de orden superior al cálculo eficiente de las series infinitas que conducen a las funciones de Green periódicas tridimensionales con periodicidad 1-D en medios homogéneos. Las series asintóticas se han expresado como una combinación lineal de series en forma cuasi-cerrada que no dependen de las coordenadas de los puntos fuente y de observación, lo cual conlleva importantes ahorros en tiempos de computación en aplicaciones típicas del método de los momentos. El nuevo método espacial de Kummer

ha demostrado ser entre 2.2 y 6.3 veces más rápido que el método espectral de Kummer-Poisson, y entre 1.3 y 8 veces más rápido que el método de Ewald.

- Se han obtenido aproximaciones del tipo polo-residuo de las funciones de Green espectrales en medios multicapa en términos de la variable espectral $u_0 = (k_\rho^2 - k_0^2)^{1/2}$ mediante el método de los mínimos cuadrados totales. Estas aproximaciones permiten obtener valores muy precisos de los polos propios de las funciones de Green espectrales, de los polos impropios que están más próximos a los puntos de ramificación, y por último, de los residuos en todos estos polos. Además, frente a otros métodos de cálculo de polos y residuos, el método de los mínimos cuadrados totales no necesita recurrir a iteraciones para refinar los valores de los polos y residuos encontrados.
- Se han presentado dos técnicas complementarias para obtener expresiones en forma cerrada de las funciones de Green espaciales no periódicas en medios multicapa. La primera de las dos técnicas está pensada para la región de campo lejano –distancia horizontal entre los puntos fuente y de observación mayor que una longitud de onda en vacío–, y está basada en la obtención de desarrollos asintóticos uniformes de las integrales de Sommerfeld de las aproximaciones del tipo polo-residuo de las funciones de Green espectrales en términos de la variable u_0 . La segunda de las dos técnicas está pensada para la región de campo próximo –distancia horizontal entre los puntos fuente y de observación menor que una longitud de onda en vacío–, y está basada en la aproximación de las funciones de Green espectrales mediante el uso combinado del método de las imágenes complejas y de aproximaciones del tipo polo-residuo en términos de la variable espectral k_ρ . Los resultados obtenidos con las expresiones en forma cerrada generadas por las dos técnicas han sido comparados con resultados obtenidos mediante integración numérica, observándose que las expresiones en forma cerrada proporcionan un error inferior al 0.1 % en todo el rango de distancias horizontales entre los puntos fuente y de observación.
- La técnica híbrida clásica basada en la transformación de Kummer, en el

método de las imágenes complejas y en el método de Ewald se ha aplicado al cálculo eficiente de las series infinitas que conducen a las funciones de Green periódicas en medios multicapa. Se ha comprobado que dicha técnica híbrida proporciona un compromiso óptimo entre precisión y tiempo de computación en el cálculo de las funciones de Green para el potencial escalar y de los elementos diagonales de la diada del potencial vector, pero da lugar a errores importantes en el cálculo de los elementos no diagonales de la diada del potencial vector. Para acabar con estos errores, se ha propuesto una nueva versión de la técnica híbrida que asegura cuatro cifras significativas en el cálculo de los elementos no diagonales de la diada del potencial vector en tiempos de computación ligeramente superiores a los que demanda la técnica híbrida clásica. En la nueva técnica híbrida, las series asintóticas no son calculadas mediante el método de Ewald sino mediante el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior.

Apéndice A

Fórmula de Poisson

Una de las técnicas de aceleración de series más generales es la denominada fórmula de Poisson, que relaciona una suma infinita de muestras de una cierta función compleja f con otra suma infinita de muestras de su transformada de Fourier [17]. Esta fórmula tiene la siguiente expresión matemática [76, 93]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x = 2\pi n), \quad (\text{A.1})$$

donde \tilde{f} es la transformada de Fourier de la función f , definida como

$$\tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jk_x t} dt. \quad (\text{A.2})$$

Al término de la izquierda de la Ec. (A.1) se le denomina serie *espacial*, y al término de la derecha, serie *espectral*. Cuando la convergencia de la serie espacial sea lenta, la convergencia de la serie espectral será rápida, y viceversa. Debido a lo anterior, para mejorar la convergencia de una serie, bastará con tomar su expresión espectral (si la serie espacial es lentamente convergente) o espacial (en caso contrario).

Para conocer el origen de la fórmula de Poisson, pensemos en una serie convergente $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$. Haciendo uso de la distribución delta de Dirac [17,

Sec. 1.15], esta serie se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-n)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) \right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) = g^*(x)$ es una función real. La identidad de Parseval [17, Ec. 15.57] para transformadas de Fourier nos dice que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x)\tilde{g}^*(k_x)\mathrm{d}k_x, \quad (\text{A.4})$$

donde $\tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jk_x x}\mathrm{d}x$ y $\tilde{g}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-jk_x x}\mathrm{d}x$. Y de acuerdo con (A.4), la serie S de la Ec. (A.3) se puede expresar del siguiente modo:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x)\tilde{g}^*(k_x)\mathrm{d}k_x. \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, si hacemos uso de la Ec. (2.92) de [174] en el caso en que $2\pi T_0 = 1$, se va a cumplir que:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^*(k_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) \right) e^{jk_x x}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) e^{jk_x x}\mathrm{d}x \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jk_x n} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(k_x - 2n\pi), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

con lo cual, si sustituimos (A.6) en (A.4), se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x)\tilde{g}^*(k_x)\mathrm{d}k_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x)\delta(k_x - 2n\pi)\mathrm{d}k_x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x = 2n\pi). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Y comparando las Ecs. (A.7) y (A.3), se llega finalmente a la Ec. (A.1).

La fórmula de Poisson puede ser generalizada al caso de series 2-D, 3-D, etc., haciendo uso de una transformación de Fourier múltiple. En particular, en el caso

de series bidimensionales, la fórmula de Poisson viene dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n, m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x = 2\pi n, k_y = 2\pi m), \quad (\text{A.8})$$

donde:

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(t, q) e^{-j(k_x t + k_y q)} dt dq, \quad (\text{A.9})$$

es la transformada de Fourier bidimensional [175].

Apéndice B

Transformación de Kummer

La transformación de Kummer [105] es una técnica de aceleración de series que se basa en el hecho de que la convergencia de una serie está gobernada por el comportamiento asintótico de su término general [75, 76, 93]. En esta transformación, al término general de la serie que se desea sumar se le suma y se le resta su comportamiento asintótico, obteniéndose así dos series que convergen más rápidamente que la serie original. En otras palabras, si $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ es la serie que se desea sumar, la transformación de Kummer consiste en expresar S de la siguiente manera:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f(n) - f_a(n)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a(n), \quad (\text{B.1})$$

donde $f(n) \rightarrow f_a(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $f_a(n)$ es el comportamiento asintótico de $f(n)$. La elección óptima de f_a es aquella que permite que la última serie de (B.1) tenga una expresión en forma cerrada. No obstante, si esta elección no es posible, al menos se debe buscar que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a(n)$ sea una serie más rápidamente convergente que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$. En ocasiones, conviene aplicar la fórmula de Poisson (véase el Apéndice A) a la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a(n)$ para mejorar su convergencia. Cuando se usa este procedimiento, la Ec. (B.1) puede reescribirse:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f(n) - f_a(n)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_a(n), \quad (\text{B.2})$$

siendo \tilde{f}_a la transformada de Fourier de la función f_a .

La Ec. (B.1) se conoce como *Transformación de Kummer espacial*, a diferencia de la denominada *Transformación de Kummer espectral*:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\tilde{f}(n) - \tilde{f}_a(n)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_a(n), \quad (\text{B.3})$$

que se realiza en el dominio de las transformadas de Fourier (dominio *espectral*), cumpliéndose que $\tilde{f}(n) \rightarrow \tilde{f}_a(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Apéndice C

Funciones $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, M$)

De acuerdo con las definiciones dadas para k y k_{x0} en la sección 2.3, en general las funciones $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, M$) tendrán que ser evaluadas en el cuarto cuadrante del plano complejo w . Por fortuna, la condición de periodicidad:

$$S_i^e(w) = S_i^e(w + 2\pi l) \quad (i \geq 1; l = \dots, -1, 0, 1, \dots), \quad (\text{C.1})$$

hace posible reducir la evaluación de $S_i^e(w)$ ($i = 1, \dots, M$) a la región $[0 \leq \text{Re}(w) \leq 2\pi, \text{Im}(w) \leq 0]$ del plano complejo w . Esta región ha sido sombreada y dividida en cuatro subregiones en la Fig. C.1. A continuación se dan expresiones en forma cerrada para $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) en cada una de esas subregiones.

En la región $[0 \leq \text{Re}(w) \leq 0.5; -0.5 \leq \text{Im}(w) \leq 0]$ del plano complejo w (subregión 1 de la Fig. C.1), las funciones $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) pueden ser obtenidas con una precisión de al menos diez cifras significativas usando las siguientes expresiones (véase [15, Apéndice A.6] para conocer los detalles relacionados con la

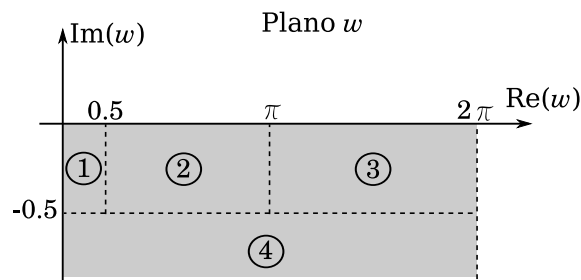


Figura C.1: La región $[0 \leq \text{Re}(w) \leq 2\pi; \text{Im}(w) \leq 0]$ del plano complejo w está sombreada, y ha sido dividida en las cuatro subregiones donde las funciones $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) han sido evaluadas.

deducción de las expresiones):

$$S_1^e(w) = -\ln\left[2 \sin\left(\frac{w}{2}\right)\right] - j\left(\frac{\pi - w}{2}\right) \quad (\text{C.2})$$

$$S_2^e(w) = \frac{w^2}{4} - \frac{\pi w}{2} + \frac{\pi^2}{6} + jw \ln w - j\left(w + \frac{w^3}{72} + \frac{w^5}{14400} + \frac{w^7}{1270000} + \frac{w^9}{87091200}\right) \quad (\text{C.3})$$

$$S_3^e(w) = \frac{w^2}{2} \ln w - \frac{3w^2}{4} - \frac{w^4}{288} - \frac{w^6}{86400} - \frac{w^8}{10160640} + \xi(3) - j\left(\frac{w^3}{12} - \frac{\pi w^2}{4} + \frac{\pi^2 w}{6}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$S_4^e(w) = -\frac{w^4}{48} + \frac{\pi w^3}{12} - \frac{\pi^2 w^2}{12} + \frac{\pi^4}{90} - j\xi(3)w - j\left(\frac{w^3}{6} \ln w - \frac{11w^3}{36} - \frac{w^5}{1440} - \frac{w^7}{604800} - \frac{w^9}{91445760}\right) \quad (\text{C.5})$$

$$S_5^e(w) = -\frac{w^4}{24} \ln w + \frac{25w^4}{288} + \frac{w^6}{8640} + \frac{w^8}{4838400} - \frac{\xi(3)w^2}{2} + \xi(5) - j\left(-\frac{w^5}{240} + \frac{\pi w^4}{48} - \frac{\pi^2 w^3}{36} + \frac{\pi^4 w}{90}\right) \quad (\text{C.6})$$

$$S_6^e(w) = \frac{w^6}{1440} - \frac{\pi w^5}{240} + \frac{\pi^2 w^4}{144} - \frac{\pi^4 w^2}{180} + \frac{\pi^6}{945} - j\left(-\frac{\xi(3)w^3}{6} + \xi(5)w\right) - j\left(-\frac{w^5}{120} \ln w + \frac{137w^5}{7200} + \frac{w^7}{60480} + \frac{w^9}{43545600}\right), \quad (\text{C.7})$$

donde $\xi(3) = 1.20205690316$ y $\xi(5) = 1.03692775514$ son valores particulares de la función Zeta de Riemann [105, p. 807].

En la región $[0.5 \leq \text{Re}(w) \leq \pi; -0.5 \leq \text{Im}(w) \leq 0]$ del plano complejo w (subregión 2 de la Fig. C.1), $S_1^e(w)$ está dada por la Ec. (C.2) y $S_i^e(w)$ ($2 \leq i \leq 6$) puede ser obtenida con una precisión de al menos diez cifras significativas por medio de las siguientes expresiones (véase [15, Apéndice A.6] para conocer los detalles concernientes a la deducción de las expresiones):

$$S_2^e(w) = \frac{w^2}{4} - \frac{\pi w}{2} + \frac{\pi^2}{6} + j\frac{w - \pi}{2} - j \sum_{l=1}^{12} \left[\frac{f_{\sin}(l, w)}{l^2} - \pi \frac{f_{\text{sh}}(l, w)}{\left(\frac{(2l-1)\pi}{2}\right)^2} \right] \quad (\text{C.8})$$

$$S_3^e(w) = \sum_{l=1}^{10} \left[\frac{f_{\cos}(l, w)}{l^3} - \pi \frac{f_{\text{ch}}(l, w)}{\left(\frac{(2l-1)\pi}{2}\right)^3} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + (w - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - j \left(\frac{w^3}{12} - \frac{\pi w^2}{4} + \frac{\pi^2 w}{6} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$S_4^e(w) = -\frac{w^4}{48} + \frac{\pi w^3}{12} - \frac{\pi^2 w^2}{12} + \frac{\pi^4}{90} - j \sum_{l=1}^9 \left[\frac{f_{\sin}(l, w)}{l^4} + \pi \frac{f_{\text{sh}}(l, w)}{\left(\frac{(2l-1)\pi}{2}\right)^4} \right] - \frac{j}{12} [(2 - \pi^2)(w - \pi) + (w - \pi)^3] \quad (\text{C.10})$$

$$S_5^e(w) = \sum_{l=1}^8 \left[\frac{f_{\cos}(l, w)}{l^5} + \pi \frac{f_{\text{ch}}(l, w)}{\left[\frac{(2l-1)\pi}{2}\right]^5} \right] - j \left(-\frac{w^5}{240} + \frac{\pi w^4}{48} - \frac{\pi^2 w^3}{36} + \frac{\pi^4 w}{90} \right) - \frac{1}{48} \left[(w - \pi)^4 + 2(w - \pi)^2(2 - \pi^2) + \frac{16}{5} - \frac{4\pi^2}{3} + \frac{7\pi^4}{15} \right] \quad (\text{C.11})$$

$$S_6^e(w) = \frac{w^6}{1440} - \frac{\pi w^5}{240} + \frac{\pi^2 w^4}{144} - \frac{\pi^4 w^2}{180} + \frac{\pi^6}{945} - j \sum_{l=1}^7 \left[\frac{f_{\sin}(l, w)}{l^6} - \pi \frac{f_{\text{sh}}(l, w)}{\left[\frac{(2l-1)\pi}{2}\right]^6} \right] + \frac{j}{240} [(w - \pi)^5 + 16] + \frac{j}{720} [10(2 - \pi^2)(w - \pi)^3 - 20\pi^2 + 7\pi^4(w - \pi)] , \quad (\text{C.12})$$

donde:

$$f_{\sin}(l, w) = \sin(lw)(1 - \tanh(l)) \quad (\text{C.13})$$

$$f_{\cos}(l, w) = \cos(lw)(1 - \tanh(l)) \quad (\text{C.14})$$

$$f_{\text{sh}}(l, w) = \frac{\sinh \left[\frac{(2l-1)\pi}{2} (\pi - w) \right]}{\sinh \left[\frac{(2l-1)\pi^2}{2} \right]} \quad (\text{C.15})$$

$$f_{\text{ch}}(l, w) = \frac{\cosh\left[\frac{(2l-1)\pi}{2}(\pi-w)\right]}{\sinh\left[\frac{(2l-1)\pi^2}{2}\right]}. \quad (\text{C.16})$$

El cálculo de $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) en la región $[\pi \leq \text{Re}(w) \leq 2\pi; -0.5 \leq \text{Im}(w) \leq 0]$ del plano complejo w (subregión 3 de la Fig. C.1) puede reducirse a la evaluación de $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) en las subregiones 1 y 2 de la Fig. C.1 cuando se aplica la siguiente relación de simetría:

$$S_i^e(w) = [S_i^e(2\pi - w^*)]^* \quad (i \geq 1), \quad (\text{C.17})$$

donde * denota complejo conjugado. Finalmente, el cálculo de $S_i^e(w)$ ($1 \leq i \leq 6$) en la región $[0 \leq \text{Re}(w) \leq 2\pi; -\infty \leq \text{Im}(w) \leq -0.5]$ del plano complejo w (subregión 4 de la Fig. C.1) puede hacerse eficientemente con una precisión de al menos diez cifras significativas por medio de (C.2) y de las expresiones:

$$S_i^e(w) = \sum_{l=1}^{N_i(\text{Im}(w))} \frac{e^{-jl\text{Re}(w)} e^{l\text{Im}(w)}}{l^i} \quad (2 \leq i \leq 6), \quad (\text{C.18})$$

donde los números enteros N_i ($2 \leq i \leq 6$) se eligen de la siguiente manera:

$$N_i(x) = \text{máx}\left(\text{Int}\left[\frac{0.5N_i^{\text{máx}}}{|x|}\right], 3\right). \quad (\text{C.19})$$

En la ecuación anterior, $\text{Int}[p]$ corresponde al número entero más próximo a p , $N_2^{\text{máx}} = 35$, $N_3^{\text{máx}} = 28$, $N_4^{\text{máx}} = 22$, $N_5^{\text{máx}} = 18$ y $N_6^{\text{máx}} = 15$.

Apéndice D

Método de los mínimos cuadrados totales

El método de los mínimos cuadrados totales es una extensión del método de los mínimos cuadrados desarrollado por C. F. Gauss alrededor de 1794 [176]. El método de los mínimos cuadrados (y por extensión el método de los mínimos cuadrados totales) es una técnica de análisis numérico encuadrada dentro de la optimización matemática, en la que se busca la función que mejor se aproxima a unos datos (el “mejor ajuste”) de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático. El método de los mínimos cuadrados totales se utiliza para hacer un ajuste lineal de una variable dependiente en términos de un conjunto de variables independientes cuando las muestras disponibles de la variable dependiente y de las variables independientes están contaminadas con errores (numéricos o procedentes de medidas).

Una explicación detallada del método de los mínimos cuadrados totales puede encontrarse, por ejemplo, en [153]. A continuación se muestra de forma somera cómo se aplican tanto el método de los mínimos cuadrados como el método de los mínimos cuadrados totales a los casos estudiados en esta tesis.

Sea $f(t)$ una función compleja de variable real. Supongamos que queremos aproximar $f(t)$ mediante una combinación lineal de funciones $g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)$ (que también son funciones complejas de variable real) en el intervalo $a \leq t \leq b$, sabiendo que la función $f(t)$ tiene un cierto ruido (de origen numérico o de origen

experimental), y que las funciones $g_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) también pueden tenerlo. Es decir, supongamos que queremos aproximar $f(t)$ como se indica a continuación:

$$f(t) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j g_j(t), \quad (\text{D.1})$$

donde los coeficientes α_j serán en general números complejos. La filosofía subyacente en el método de los mínimos cuadrados es que los coeficientes α_j deben calcularse de manera que el error cuadrático medio cometido en la aproximación sea mínimo. Para ello, se toman $M > N$ muestras de t en el intervalo $a \leq t \leq b$ -esto es, M muestras t_i ($i = 1, \dots, M$) que cumplen que $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_M \leq b$, y se obliga a que se cumpla exactamente la Ec. (D.1) en dichas muestras, o lo que es lo mismo, a que:

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j g_j(t_i) \quad (i = 1, \dots, M). \quad (\text{D.2})$$

Vamos a definir los vectores columna $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ y $\bar{\beta} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ tales que $(\bar{\alpha})_j = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, N$) y $(\bar{\beta})_i = f(t_i)$ ($i = 1, \dots, M$). Asimismo, vamos a definir la matriz $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ de manera que $(\bar{\mathbf{G}})_{ij} = g_j(t_i)$ ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$). Con estas definiciones, la Ec. (D.2) anterior se puede escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{G}}\bar{\alpha} = \bar{\beta}, \quad (\text{D.3})$$

lo cual representa un sistema de ecuaciones sobredeterminado (con más ecuaciones que incógnitas) en las incógnitas α_j ($j = 1, \dots, N$), que puede resolverse mediante el método de los mínimos cuadrados o mediante el método de los mínimos cuadrados totales.

Cuando la función $f(t)$ tiene ruido pero las funciones $g_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) no lo tienen (o lo que es lo mismo, cuando el vector columna $\bar{\beta}$ contiene errores pero la matriz $\bar{\mathbf{G}}$ no los tiene), el sistema de ecuaciones (D.2) debe ser resuelto mediante el método de los mínimos cuadrados estándar. Para ello, es necesario realizar la

descomposición en valores singulares de la matriz $\overline{\mathbf{G}}$ ([177, Pág.70]):

$$\overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}^H, \quad (\text{D.4})$$

donde el superíndice H indica matriz adjunta, y las matrices $\overline{\mathbf{U}}$ y $\overline{\mathbf{V}}$ son matrices unitarias ($\overline{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $\overline{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$). Los autovectores de la matriz $\overline{\mathbf{G}}^H \overline{\mathbf{G}}$ ($\in \mathbb{C}^{N \times N}$) son los vectores columna $\overline{\mathbf{v}}_j$ ($j = 1, \dots, N$) de la matriz $\overline{\mathbf{V}} = [\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \dots, \overline{\mathbf{v}}_N]$, y los autovalores de $\overline{\mathbf{G}}^H \overline{\mathbf{G}}$ son los números reales positivos σ_j^2 ($j = 1, \dots, N$). Por otro lado, los autovectores de la matriz $\overline{\mathbf{G}} \overline{\mathbf{G}}^H$ ($\in \mathbb{C}^{M \times M}$) son los vectores columna $\overline{\mathbf{u}}_i$ ($i = 1, \dots, M$) de la matriz $\overline{\mathbf{U}} = [\overline{\mathbf{u}}_1, \overline{\mathbf{u}}_2, \dots, \overline{\mathbf{u}}_M]$.

Vamos a suponer que los números reales positivos σ_j ($j = 1, \dots, N$) están ordenados de manera que se cumple que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$. Además, vamos a suponer que existe un valor umbral muy pequeño ε_{um} tal que $1 \geq \sigma_2/\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r/\sigma_1 \geq \varepsilon_{\text{um}}$, y que $\varepsilon_{\text{um}} \geq \sigma_{r+1}/\sigma_1 \geq \sigma_{r+2}/\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_N/\sigma_1$. Ese valor umbral ε_{um} debe ser elegido de manera que sea superior al error de redondeo del ordenador con el que estemos trabajando. Una vez fijado el valor de ε_{um} , la solución de mínimos cuadrados para los coeficientes α_j ($j = 1, \dots, N$) que componen el vector columna $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ vendrá dada por ([177, Pág.257]):

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MC}} = \sum_{i=1}^r \frac{\overline{\mathbf{u}}_i^H \overline{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma_i} \overline{\mathbf{v}}_i = \overline{\mathbf{V}} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{U}}^H \overline{\boldsymbol{\beta}}. \quad (\text{D.5})$$

Cuando existe ruido tanto en la función $f(t)$ como en las funciones $g_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), se hace necesario aplicar el método de los mínimos cuadrados *totales*

para obtener el vector columna $\bar{\alpha}$ de la Ec.(D.3). A diferencia de lo que ocurre con el método de los mínimos cuadrados ordinario, en el método de los mínimos cuadrados totales se realiza una descomposición en valores singulares de la matriz ampliada $\bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{G}} : \bar{\boldsymbol{\beta}}] \in \mathbb{C}^{M \times (N+1)}$. Suponiendo que $M \geq N + 1$, la descomposición en valores singulares de la matriz $\bar{\mathbf{C}}$ puede escribirse:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{U}}^c \begin{bmatrix} \sigma_1^c & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{N+1}^c \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{M \times (N+1)} \bar{\mathbf{V}}^{cH}, \quad (\text{D.6})$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{U}}^c = [\bar{\mathbf{u}}_1^c, \dots, \bar{\mathbf{u}}_M^c] \in \mathbb{C}^{M \times M}$ y $\bar{\mathbf{V}}^c = [\bar{\mathbf{v}}_1^c, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{N+1}^c] \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}$ son matrices unitarias. Supongamos que se verifica que $\sigma_1^c \geq \dots \geq \sigma_{N+1}^c \geq 0$, y supongamos que se elige de nuevo un valor muy pequeño ε'_{um} que está por encima del error de redondeo de nuestro ordenador de forma que $1 \geq \sigma_2^c / \sigma_1^c \geq \dots \geq \sigma_r^c / \sigma_1^c \geq \varepsilon'_{\text{um}}$, y que $\varepsilon'_{\text{um}} \geq \sigma_{r+1}^c / \sigma_1^c \geq \dots \geq \sigma_{N+1}^c / \sigma_1^c$. Pues bien, la solución de mínimos cuadrados totales para los coeficientes α_j ($j = 1, \dots, N$) que componen el vector columna $\bar{\alpha}$ se extrae a partir de la ecuación [153]:

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{\text{MCT}} \\ -1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} = \frac{-1}{\bar{\mathbf{e}}_{N+1}^T \bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c [\bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c]^H \bar{\mathbf{e}}_{N+1}} \bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c [\bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c]^H \bar{\mathbf{e}}_{N+1}, \quad (\text{D.7})$$

donde el superíndice T indica matriz traspuesta, el vector $\bar{\mathbf{e}}_{N+1} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$ es un vector columna definido como:

$$\bar{\mathbf{e}}_{N+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

y la matriz reducida $\bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1-r)}$ se define a partir de la matriz $\bar{\mathbf{V}}^c$ como $\bar{\mathbf{V}}_{\text{red}}^c = [\bar{\mathbf{v}}_{r+1}^c, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{N+1}^c]$.

Operando en la Ec. (D.7), es posible demostrar que la solución de mínimos cuadrados totales para el vector columna $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}_{\text{MCT}}$, puede escribirse [153]:

$$\bar{\alpha}_{\text{MCT}} = \frac{\sum_{j=1}^r V_{N+1,j}^c [V_{1,j}^c \cdots V_{N,j}^c]^T}{1 - \sum_{j=1}^r |V_{N+1,j}^c|^2}, \quad (\text{D.9})$$

donde V_{ij}^c ($i, j = 1, \dots, N + 1$) son los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{V}}^c$.

D.1. Aplicación del método de los mínimos cuadrados totales al caso particular de la Ec. (3.59)

En el Capítulo 3 hemos propuesto aproximar las funciones de Green espectrales $\tilde{G}_n(u_0)$ en las proximidades del origen del plano complejo u_0 (es decir, en las proximidades de $k_\rho = \pm k_0$ en el plano complejo k_ρ) mediante representaciones del tipo polo-residuo como la que se muestra a continuación (véase la Ec. (3.59)):

$$\tilde{G}_n(u_0) \approx \sum_{i=1}^N \frac{b_{n,i}}{u_0 - q_{n,i}} = \frac{\tilde{P}_n^{(N-1)}(u_0)}{\tilde{Q}_n^{(N)}(u_0)} \quad (n = 0, 1), \quad (\text{D.10})$$

donde $\tilde{P}_n^{(N-1)}(u_0)$ y $\tilde{Q}_n^{(N)}(u_0)$ son polinomios en la variable u_0 de grados $N - 1$ y N respectivamente, dados por:

$$\tilde{P}_n^{(N-1)}(u_0) = c_{N-1}u_0^{N-1} + c_{N-2}u_0^{N-2} + \dots + c_0 \quad (\text{D.11})$$

$$\tilde{Q}_n^{(N)}(u_0) = u_0^N + d_{N-1}u_0^{N-1} + d_{N-2}u_0^{N-2} + \dots + d_0. \quad (\text{D.12})$$

Si las Ecs. (D.11) y (D.12) se introducen en la Ec. (D.10), después de algunas manipulaciones, se llega a que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(u_0)u_0^N &\approx c_{N-1}u_0^{N-1} + c_{N-2}u_0^{N-2} + \dots + c_0 \\ &- d_{N-1}\tilde{G}_n(u_0)u_0^{N-1} - d_{N-2}\tilde{G}_n(u_0)u_0^{N-2} - \dots - d_0\tilde{G}_n(u_0). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Con objeto de simplificar la expresión anterior, vamos a definir las funciones f_i ($i = 1, \dots, N$), g_{ni} ($n = 0, 1; i = 1, \dots, N$) y h_n ($n = 0, 1$) del siguiente modo:

$$f_i(u_0) = u_0^{(i-1)} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{D.14})$$

$$g_{ni}(u_0) = -\tilde{G}_n(u_0)u_0^{(i-1)} \quad (n = 0, 1; i = 1, \dots, N) \quad (\text{D.15})$$

$$h_n(u_0) = \tilde{G}_n(u_0)u_0^N \quad (n = 0, 1). \quad (\text{D.16})$$

De este modo, la aproximación de la Ec. (D.13) se podrá escribir como:

$$h_n(u_0) \approx \sum_{i=1}^N c_i f_i(u_0) + \sum_{i=1}^N d_i g_{ni}(u_0). \quad (\text{D.17})$$

En esta tesis los coeficientes c_i y d_i ($i = 1, \dots, N$) se obtienen a partir de la Ec. (D.17) aplicando el método de los mínimos cuadrados totales descrito en este apéndice. Al aplicar el método de los mínimos cuadrados totales, las muestras de u_0 se toman a lo largo de las trayectorias C_1 y C_2 mostradas en la Fig. 3.6(a) (véanse también las Ecs. (3.60) a (3.63)). Una vez conocidos los coeficientes c_i y d_i , los polos $q_{n,i}$ ($i = 1, \dots, N$) de la Ec. (D.10) se obtienen calculando los ceros del polinomio $\tilde{Q}_n^{(N)}(u_0) = u_0^N + \sum_{i=0}^{N-1} d_i u_0^i$. Por su parte, los coeficientes $b_{n,i}$ de la Ec. (D.10) son los residuos en esos polos (esto es, $b_{n,i} = \text{Res}\left\{\tilde{G}_n(u_0)\right\}_{u_0=q_{n,i}}$) y vienen dados por la siguiente expresión:

$$b_{n,i} = \lim_{u_0 \rightarrow q_{n,i}} (u_0 - q_{n,i}) \frac{\tilde{P}_{N-1}(u_0)}{\tilde{Q}_N(u_0)} = \frac{\tilde{P}_{N-1}(q_{n,i})}{\prod_{j=1; j \neq i}^N (q_{n,i} - q_{n,j})}. \quad (\text{D.18})$$

Teniendo presente la relación entre la variable espectral u_0 y la variable espectral k_ρ ($u_0 = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$), la relación entre los polos $p_{n,i}$ en el plano complejo k_ρ y los polos $q_{n,i}$ en el plano complejo u_0 vendrá dada por:

$$p_{n,i} = \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}. \quad (\text{D.19})$$

Por otro lado, los residuos de las funciones de Green espectrales $\tilde{G}_n(k_\rho)$ en los polos $p_{n,i}$ pueden estimarse, tanto a partir de la aproximación del tipo polo-residuo en el plano complejo k_ρ de la Ec. (3.56) como a partir de la aproximación del tipo polo-residuo en el plano complejo u_0 de la Ec. (3.59). Si trabajamos con la Ec. (3.56), se obtiene que:

$$\text{Res}\left\{\tilde{G}_n(k_\rho)\right\}_{k_\rho=p_{n,i}} = \lim_{k_\rho \rightarrow p_{n,i}} (k_\rho - p_{n,i}) \sum_{j=1}^N \frac{a_{n,j}}{k_\rho^2 - p_{n,j}^2} = \frac{a_{n,i}}{2p_{n,i}}, \quad (\text{D.20})$$

y si trabajamos con la Ec. (3.59), se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \text{Res} \left\{ \tilde{G}_n(k_\rho) \right\}_{k_\rho = \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}} \\ &= \lim_{k_\rho \rightarrow \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}} \left(k_\rho - \sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2} \right) \sum_{j=1}^N \frac{b_{n,j}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 - q_{n,j}}} = \frac{q_{n,i} b_{n,i}}{\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

De las Ecs. (D.20) y (D.21), se deduce que los coeficientes $a_{n,i}$ de la aproximación polo-residuo en el plano complejo k_ρ (véase la Ec. (3.56)) están relacionados con los coeficientes $b_{n,i}$ de la aproximación polo-residuo en el plano complejo u_0 (véase la Ec. (3.59)) mediante la siguiente expresión:

$$\frac{a_{n,i}}{2p_{n,i}} = \frac{q_{n,i} b_{n,i}}{\sqrt{q_{n,i}^2 + k_0^2}}. \quad (\text{D.22})$$

Apéndice E

Método del pincel de matrices generalizado

En 1795 G. R. B. Prony ideó un algoritmo numérico que permite aproximar una función mediante una combinación lineal de exponenciales complejas. Dicho algoritmo se conoce como método de Prony [178]. La principal desventaja que presenta el método de Prony es su extrema sensibilidad al ruido en los valores de muestreo en el intervalo en el que se lleva a cabo la aproximación, lo cual ha motivado que se exploren distintas variantes del método original, entre las que destaca el método del pincel de matrices generalizado (MPMG) [134, 167]. El pincel de matrices generalizado [134, 167] es una extensión del método del pincel de funciones (de ahí que sea conocido en inglés como *generalized pencil of functions*, o simplemente como GPOF). Las principales ventajas que presenta el método del pincel de matrices generalizado frente a método de Prony son la robustez respecto al ruido en las muestras y la eficiencia desde un punto de vista computacional (mientras que el MPMG exclusivamente trabaja con matrices, el método de Prony requiere tanto trabajar con matrices como obtener las raíces de un polinomio [167]).

Cuando se resuelven problemas electromagnéticos que involucran a medios multicapa mediante el método de los momentos [11, 12], se hace necesario calcular las integrales infinitas de las funciones de Green multicapa espectrales, integrales que se conocen como integrales de Sommerfeld [10, 32]. El método de

las imágenes complejas discretas (MCID) descrito en [52, 54, 131] es un método que trata de aproximar las citadas funciones de Green espectrales mediante una combinación lineal de exponenciales complejas de forma que las integrales de Sommerfeld de dichas exponenciales complejas puedan ser obtenidas en forma cerrada (esto permite reducir considerablemente el alto coste computacional que tiene la integración numérica directa de las integrales de Sommerfeld [34, 162]). Pues bien, las amplitudes y los exponentes de las exponenciales complejas pueden calcularse mediante el método de Prony o mediante el MPGM [52, 131].

En esta tesis (y más concretamente en sus Capítulos 3 y 4), se utiliza el MCID para aproximar las funciones de Green espectrales multicapa en ciertos intervalos de la variable espectral k_ρ , y se recurre al MPGM para obtener las amplitudes y los exponentes de las exponenciales complejas que intervienen en la aproximación.

A continuación, se van a describir brevemente los pasos que hay que dar en la aplicación del MPGM.

Sea $F(k_\rho)$ una función que se pretende aproximar en el intervalo $k_{\rho 0} \leq k_\rho \leq k_{\rho u}$ mediante una combinación lineal de exponenciales complejas del tipo:

$$F(k_\rho) \approx F^{\text{ap}}(k_\rho) = \sum_{i=1}^M R_i e^{b_i k_\rho} \quad k_{\rho 0} \leq k_\rho \leq k_{\rho u}, \quad (\text{E.1})$$

donde R_i y b_i ($i = 1, \dots, M$) son números complejos que hay que determinar. Sea $k_{\rho n} = k_{\rho 0} + n\Delta$ ($\Delta = (k_{\rho u} - k_{\rho 0}) / (N - 1)$; $n = 0, \dots, N - 1$) un conjunto de N muestras equiespaciadas de la variable real k_ρ en el intervalo $k_{\rho 0} \leq k_\rho \leq k_{\rho u}$, cumpliéndose que N es un número impar mayor que $2M$ (esto es, $N > 2M$). Si queremos que la función $F(k_\rho)$ y la función aproximada $F^{\text{ap}}(k_\rho)$ coincidan exactamente en $k_{\rho n}$ ($n = 0, \dots, N - 1$), se tendrá que verificar que:

$$F(k_{\rho n}) = \sum_{i=1}^M R_i e^{b_i k_{\rho 0}} (e^{b_i \Delta})^n \quad (n = 0, \dots, N - 1). \quad (\text{E.2})$$

Sean $y(n) = F(k_{\rho n})$ ($n = 0, \dots, N - 1$), $A_i = R_i e^{b_i k_{\rho 0}}$ y $e^{b_i \Delta} = z_i$ ($i = 1, \dots, M$). En ese caso, podemos escribir:

$$y(n) = \sum_{i=1}^M A_i (e^{b_i \Delta})^n = \sum_{i=1}^M A_i z_i^n \quad (n = 0, \dots, N - 1). \quad (\text{E.3})$$

Para obtener los coeficientes complejos A_i y z_i ($i = 1, \dots, M$) de (E.3), y a partir de ellos, los coeficientes R_i y b_i de (E.2), se aplica el MPGM a través de los siguientes pasos:

1. Sea $L = (N - 1)/2$. Se construye la matriz cuadrada $\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{C}^{(N-L) \times (L+1)}$ ($N - L = L + 1 = (N + 1)/2$) que viene dada por:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-L-2) & y(N-L-1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.4})$$

2. Se lleva a cabo la descomposición en valores singulares de la matriz compleja $\bar{\mathbf{Y}}$:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{\Sigma}} \bar{\mathbf{V}}^H, \quad (\text{E.5})$$

donde $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{(N-L) \times (L+1)}$, $\bar{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{(L+1) \times (L+1)}$ y $\bar{\mathbf{V}}^H \in \mathbb{C}^{(L+1) \times (L+1)}$, y donde el superíndice H indica matriz adjunta. Al realizar descomposición en valores singulares, los elementos σ_i ($i = 1, \dots, L + 1$) de la matriz diagonal $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ deben estar ordenados en orden decreciente de forma que $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ ($i = 1, \dots, L$) (téngase en cuenta que dichos elementos σ_i son números reales positivos).

3. Una vez definida la matriz $\bar{\mathbf{V}}$, se define la matriz truncada $\bar{\mathbf{V}}' \in \mathbb{C}^{(L+1) \times M}$ que contiene las M primeras columnas de $\bar{\mathbf{V}}$. Es decir, si la matriz $\bar{\mathbf{V}}$ viene dada por $\bar{\mathbf{V}} = [\bar{\mathbf{V}}_1 \ \bar{\mathbf{V}}_2 \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_M \ \bar{\mathbf{V}}_{M+1} \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_L \ \bar{\mathbf{V}}_{L+1}]$, entonces la expresión de la matriz truncada $\bar{\mathbf{V}}'$ será $\bar{\mathbf{V}}' = [\bar{\mathbf{V}}_1 \ \bar{\mathbf{V}}_2 \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_M]$.
4. A partir de la matriz $\bar{\mathbf{V}}'$, se construye la matriz $\bar{\mathbf{V}}'_1$ que resulta de eliminar la última fila de la matriz $\bar{\mathbf{V}}'$ ($\bar{\mathbf{V}}'_1 \in \mathbb{C}^{L \times M}$), y la matriz $\bar{\mathbf{V}}'_2$ que resulta de eliminar la primera fila de $\bar{\mathbf{V}}'$ ($\bar{\mathbf{V}}'_2 \in \mathbb{C}^{L \times M}$).
5. Una vez definidas las matrices $\bar{\mathbf{V}}'_1$ y $\bar{\mathbf{V}}'_2$, se calcula la matriz $\bar{\mathbf{P}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{V}}_2'^H \left(\bar{\mathbf{V}}_1' \bar{\mathbf{V}}_1'^H \right)^{-1} \bar{\mathbf{V}}_1'. \quad (\text{E.6})$$

Pues bien, los coeficientes z_i ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (E.3) son los autovalores de la matriz $\bar{\mathbf{P}}$.

6. Una vez conocidos los valores de z_i ($i = 1, \dots, M$), los coeficientes b_i de la Ec. (E.2) se obtienen a partir de la ecuación:

$$b_i = \frac{1}{\Delta} \ln z_i \quad (i = 1, \dots, M). \quad (\text{E.7})$$

7. Cuando ya se han obtenido los coeficientes z_i ($i = 1, \dots, M$), se recurre al método de los mínimos cuadrados totales (véase el Apéndice D) para calcular los coeficientes complejos A_i ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (E.3), y a partir de éstos, los coeficientes R_i ($i = 1, \dots, M$) de la Ec. (E.2). Los pasos que hay que seguir para obtener A_i y R_i se detallan a continuación:

- a) En primer lugar, se define la matriz $\overline{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{N \times (M+1)}$ que se muestra a continuación:

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & y(0) \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M & y(1) \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_M^2 & y(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} & y(N-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.8})$$

- b) Posteriormente, se lleva a cabo la descomposición en valores singulares de la matriz $\overline{\mathbf{C}}$:

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{U}}_C \overline{\mathbf{\Sigma}}_C \overline{\mathbf{V}}_C^H, \quad (\text{E.9})$$

donde $\overline{\mathbf{U}}_C \in \mathbb{C}^{N \times (M+1)}$, $\overline{\mathbf{\Sigma}}_C \in \mathbb{C}^{(M+1) \times (M+1)}$ y $\overline{\mathbf{V}}_C^H \in \mathbb{C}^{(M+1) \times (M+1)}$.

- c) Sean σ_{c_i} ($i = 1, \dots, M+1$) los elementos no nulos de $\overline{\mathbf{\Sigma}}_C$ (véase la Ec. (D.4) del Apéndice D) Vamos a suponer que los números reales positivos σ_{c_i} ($i = 1, \dots, M+1$) están ordenados de manera que se cumple que $\sigma_{c1} \geq \sigma_{c2} \geq \cdots \geq \sigma_{c,M+1} \geq 0$. Además, vamos a suponer que existe un valor umbral muy pequeño $\varepsilon''_{\text{um}}$ tal que $1 \geq \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{c1}} \geq \cdots \geq \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{c1}} \geq \varepsilon''_{\text{um}}$ y $\varepsilon''_{\text{um}} \geq \frac{\sigma_{c,r+1}}{\sigma_{c1}} \geq \cdots \geq \frac{\sigma_{c,N+1}}{\sigma_{c1}}$. El valor umbral $\varepsilon''_{\text{um}}$ debe ser elegido de manera que sea superior al error de redondeo del ordenador con el que estemos trabajando.

- d) A partir de las $(M+1-r)$ últimas columnas de la matriz $\overline{\mathbf{V}}_C$ se construye la matriz reducida $\overline{\mathbf{V}}_C^{\text{red}} \in \mathbb{C}^{(M+1) \times (M+1-r)}$. Es decir, si la matriz $\overline{\mathbf{V}}_C$ viene

dada por $\bar{\mathbf{V}}_C = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1^C & \cdots & \bar{\mathbf{V}}_r^C & \bar{\mathbf{V}}_{r+1}^C & \cdots & \bar{\mathbf{V}}_{M+1}^C \end{bmatrix}$, entonces la matriz reducida tendrá la expresión $\bar{\mathbf{V}}_C^{\text{red}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{r+1}^C & \cdots & \bar{\mathbf{V}}_{M+1}^C \end{bmatrix}$.

e) Finalmente, los coeficientes A_i de la Ec.(E.3) se extraen de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_M \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\bar{\mathbf{V}}_C^{\text{red}} (\bar{\mathbf{V}}_C^{\text{red}})^H \bar{\mathbf{e}}_{M+1}}{\bar{\mathbf{e}}_{M+1}^T \bar{\mathbf{V}}_C^{\text{red}} (\bar{\mathbf{V}}_C^{\text{red}})^H \bar{\mathbf{e}}_{M+1}}, \quad (\text{E.10})$$

donde el superíndice T indica traspuesta y $\bar{\mathbf{e}}_{M+1} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times 1}$ es un vector columna dado por:

$$\bar{\mathbf{e}}_{M+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Operando en la Ec. (E.10), la expresión de los coeficientes A_i puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix} = -\frac{\sum_{i=r+1}^{M+1} (V_{M+1,i}^C)^* [V_{1,i}^C \cdots V_{M,i}^C]^T}{\sum_{i=r+1}^{M+1} |V_{M+1,i}^C|^2}, \quad (\text{E.11})$$

donde el asterisco (*) indica complejo conjugado, y donde V_{ji}^C ($j = 1, \dots, M+1$) constituyen los elementos de la columna i -ésima $\bar{\mathbf{V}}_i^C$ de la matriz $\bar{\mathbf{V}}_C$, esto es:

$$\bar{\mathbf{V}}_i^C = \begin{bmatrix} V_{1,i}^C \\ V_{2,i}^C \\ \vdots \\ V_{M,i}^C \\ V_{M+1,i}^C \end{bmatrix} \quad (i = r+1, \dots, M+1). \quad (\text{E.12})$$

f) Por último, una vez conocidos los coeficientes b_i y A_i ($i = 1, \dots, M$), los coeficientes R_i de la Ec. (E.2) se obtienen trivialmente a partir de la

ecuación:

$$R_i = A_i e^{-b_i k_\rho} \quad (i = 1, \dots, M) . \quad (\text{E.13})$$

De este modo, quedan calculados los coeficientes complejos b_i y R_i ($i = 1, \dots, M$) usados en la Ec. (E.1) para aproximar la función $F(k_\rho)$.

Apéndice F

Algoritmos para el cálculo de las funciones de Green multicapa en el dominio espectral

De acuerdo con lo que hemos visto en la sección 3.2.1, la formulación C de Michalski y Zheng para EIPM en medios multicapa [38] requiere la determinación de la función de Green multicapa del potencial escalar $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y de las componentes de la función de Green diádica multicapa para el potencial vector $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que se muestran en las Ecs. (3.21) a (3.26). Como ya vimos en la sección 3.2.2, tanto $G^\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como las componentes de $\overline{\mathbf{G}}^{\text{A,m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ deben obtenerse a partir de sus versiones espectrales mediante el cálculo de integrales de Sommerfeld (véanse las Ecs. (3.49) a (3.55)). A diferencia de lo que ocurre con las funciones de Green multicapa espaciales, las expresiones de las funciones de Green multicapa espectrales pueden obtenerse en forma cerrada. No obstante, estas expresiones en forma cerrada son demasiado prolijas cuando el medio multicapa está formado por más de dos o tres capas, siendo preferible en estos casos obtener dichas expresiones mediante algoritmos recurrentes. Aunque se han descrito en la literatura varios de estos algoritmos recurrentes (véanse, por ejemplo, los algoritmos de [10, 32]), en este Apéndice se presentan nuevos algoritmos recurrentes que están basados en la filosofía subyacente en el método de las condiciones de contorno equivalentes publicado en [179]. Los nuevos algoritmos recurrentes

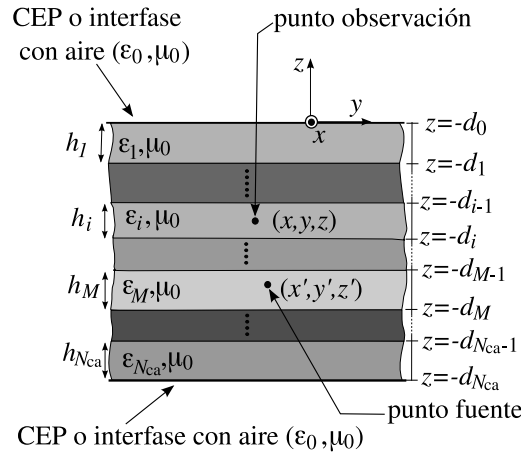


Figura F.1: Medio multicapa con pérdidas limitado superiormente e inferiormente por un conductor eléctrico perfecto (CEP) y/o por espacio libre. El punto de observación y el punto fuente pueden estar situados en alguna de las capas del medio multicapa, o en cualquiera de los dos medios semi-infinitos que lo limitan.

permiten obtener las funciones de Green espectrales de medios multicapa con un número arbitrario de capas sin pérdidas y/o con pérdidas (véase la Fig. F.1). Además, los citados algoritmos recurrentes presentan una conducta numérica muy estable para valores elevados de la variable espectral k_ρ , lo cual es una conducta inherente a los algoritmos basados en el método de las condiciones de contorno equivalentes [179].

La Fig. F.1 muestra un medio multicapa compuesto por N_{ca} capas de constante dieléctrica $\varepsilon_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ri} (1 - \tan \delta_i)$ ($i = 1, \dots, N_{ca}$), siendo ε_{ri} la permitividad relativa de la capa i -ésima y $\tan \delta_i$ la tangente de pérdidas de dicha capa. Vamos a suponer que el medio multicapa puede estar limitado superior e inferiormente por aire y/o por un conductor eléctrico perfecto (CEP). En el medio multicapa se ha situado una fuente puntual en el punto de coordenadas (x', y', z') . A la hora de calcular las funciones de Green espectrales para los potenciales en el medio multicapa de la Fig. F.1, vamos a permitir que tanto el punto fuente de coordenadas (x', y', z') como el punto de observación de coordenadas (x, y, z) puedan estar arbitrariamente situados en alguna de las capas o en cualquiera de los dos medios semi-infinitos que limitan el medio multicapa por arriba y por abajo. Llamaremos M a la capa que contiene a la fuente, siendo $M = 0$ si la fuente se encuentra en el medio semi-infinito superior, $1 \leq M \leq N_{ca}$ si la fuente se encuentra en alguna

de las capas del medio multicapa, y $M = N_{ca} + 1$ si la fuente está situada en el medio semi-infinito inferior. Con vistas a simplificar la notación de las funciones de Green espectrales, vamos a definir las variables espectrales $u_0 = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ y $u_i = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2 \varepsilon_{ri}}$ ($i = 1, \dots, N_{ca}$), siendo $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Asimismo, llamaremos d_i ($i = 0, \dots, N_{ca}$) a la distancia de la interfase i -ésima del medio multicapa al plano $z = 0$ ($d_i = \sum_{j=1}^i h_j$ de acuerdo con la Fig. F.1), siendo $d_0 = 0$.

F.1. Cálculo de $\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')$

Si la fuente puntual de la Fig. F.1 es un dipolo horizontal orientado en la dirección del eje x , este dipolo va a crear un potencial vector $G_{xx}^A \hat{\mathbf{x}} + G_{zx}^A \hat{\mathbf{z}}$ (véase la Ec. (3.5)). En cada una de las capas dieléctricas del medio multicapa de la Fig. F.1, la función $G_{xx}^A(\xi, z, z')$ ($\xi = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$, siendo $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ y $\boldsymbol{\rho}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$), satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i) G_{xx}^A(\xi, z, z') = -\mu_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad -d_i < z < -d_{i-1}, \quad (\text{F.1})$$

siendo $i = 1, \dots, N_{ca}$. En las regiones semi-infinitas de aire ($z > 0$ si $z = 0$ no es un CEP y/o $z < -d_{N_{ca}}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP), $G_{xx}^A(\xi, z, z')$ satisface la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0) G_{xx}^A(\xi, z, z') = -\mu_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \quad (\text{F.2})$$

Si aplicamos la transformada de Fourier bidimensional a las Ecs. (F.1) y (F.2) (véanse las Ecs. (3.30) y (3.35)), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias en el dominio espectral:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i - k_\rho^2 \right) \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = -\mu_0 \delta(z - z') \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (\text{F.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_\rho^2 \right) \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = -\mu_0 \delta(z - z') \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.4})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Por otro lado, la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en las interfases entre capas de la Fig. F.1 en el caso en que la

fuente puntual es un dipolo orientado a lo largo del eje x , obliga a que se cumplan las siguientes condiciones de contorno [32, pág. 144]:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z = -d_i^-, z') = \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z = -d_i^+, z') \quad (\text{F.5})$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \right|_{z=-d_i^-} = \left. \frac{\partial \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \right|_{z=-d_i^+} \quad (\text{F.6})$$

para $i = 1, \dots, N_{ca} - 1$, y además, para $i = 0$ si $z = 0$ no es un CEP, y para $i = N_{ca}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP.

Las condiciones de radiación en el infinito (dentro de las regiones semi-infinitas de aire) obligan a que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') \Big|_{\substack{z \rightarrow \infty \text{ si } z = 0 \text{ no es CEP} \\ z \rightarrow -\infty \text{ si } z = -d_{N_{ca}} \text{ no es CEP}}} = 0 \quad (\text{F.7})$$

Finalmente, si el plano $z = 0$ es un CEP, la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico en el CEP obliga a que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z = 0, z') = 0 \quad \text{si } z = 0 \text{ es CEP}, \quad (\text{F.8})$$

y si el plano $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP, se tiene que cumplir que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z = -d_{N_{ca}}, z') = 0 \quad \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es CEP}. \quad (\text{F.9})$$

Para obtener \tilde{G}_{xx}^A , basta resolver las ecuaciones diferenciales (F.3) y (F.4) con las condiciones de contorno (F.5) a (F.9). El cálculo de \tilde{G}_{xx}^A puede hacerse de forma sistemática para un medio multicapa con un número arbitrario de capas mediante el algoritmo recurrente que se presenta a continuación. Se van a distinguir tres casos posibles en función de la posición del punto fuente. Asimismo, para cada uno de esos tres casos, la expresión resultante de la función de Green vendrá determinada por la posición del punto de observación.

F.1.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)

- Si el punto de observación está en el medio de la fuente (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} + \left(\tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0 z'} \right) e^{-u_0 z}, \quad (\text{F.10})$$

- Si el punto de observación está en la capa i -ésima del medio multicapa (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{ca}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \quad (\text{F.11})$$

- Si el punto de observación está por debajo del medio multicapa (es decir, si $z < -d_{N_{ca}}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') e^{u_0(z + d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.12})$$

Los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) se calculan recurrentemente utilizando las expresiones de la sección F.1.4.

F.1.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)

- Si el punto de observación está por encima del medio multicapa (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.13})$$

- Si el punto de observación está en una capa del medio multicapa distinta a la de la fuente (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{ca}$, $i \neq M$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \quad (\text{F.14})$$

- Si el punto de observación está en la misma capa que la fuente (es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M |z - z'|} - \left[\tilde{A}_{xx}^{(M)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M(d_M + z')} \right] \frac{\sinh(u_M(z + d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)}$$

$$+ \left[\tilde{A}_{xx}^{(M-1)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{u_M(z'+d_{M-1})} \right] \frac{\sinh(u_M(z+d_M))}{\sinh(u_M h_M)}. \quad (\text{F.15})$$

- Si el punto de observación está por debajo del medio multicapa (es decir, si $z < -d_{N_{\text{ca}}}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.16})$$

F.1.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{\text{ca}} + 1$)

- Si el punto de observación está por encima del medio multicapa (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.17})$$

- Si el punto de observación está en la capa i -ésima del medio multicapa (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{\text{ca}}$), se cumple que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = & -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z+d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z+d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

- Si el punto de observación está en el medio de la fuente (es decir, si $z < -d_{N_{\text{ca}}}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} + \left[\tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{u_0(z'+d_{N_{\text{ca}}})} \right] e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.19})$$

F.1.4. Expresiones para $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{\text{ca}}$)

En las expresiones de las secciones F.1.1 a F.1.3, los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(M-1)}$ y $\tilde{A}_{xx}^{(M)}$ se obtienen mediante las ecuaciones:

$$\tilde{A}_{xx}^{(M-1)} = \frac{\tilde{F}_{xx}^{(M-1)} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \tilde{b}_{xx}^{(M-1,M)} \tilde{C}_{xx}^{(M)}}{\tilde{U}_{xx}^{(M-1)} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{xx}^{(M-1,M)} \right)^2} \quad (M = 1, \dots, N_{\text{ca}} + 1) \quad (\text{F.20})$$

$$\tilde{A}_{xx}^{(M)} = \frac{\tilde{C}_{xx}^{(M)} \tilde{U}_{xx}^{(M-1)} - \tilde{b}_{xx}^{(M, M-1)} \tilde{F}_{xx}^{(M-1)}}{\tilde{U}_{xx}^{(M-1)} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{xx}^{(M-1, M)}\right)^2} \quad (M = 0, \dots, N_{ca}). \quad (\text{F.21})$$

Por su parte, los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ ($i \neq M$ e $i \neq M - 1$) se obtienen en términos de $\tilde{A}_{xx}^{(M-1)}$ y $\tilde{A}_{xx}^{(M)}$ mediante las expresiones:

$$\tilde{A}_{xx}^{(i)} = (-1)^{M-1-i} \tilde{A}_{xx}^{(M-1)} \prod_{j=i}^{M-2} \frac{\tilde{b}_{xx}^{(j, j+1)}}{\tilde{U}_{xx}^{(j)}} \quad (i = 0, \dots, M-2) \quad (\text{F.22})$$

$$\tilde{A}_{xx}^{(i)} = (-1)^{i-M} \tilde{A}_{xx}^{(M)} \prod_{j=M+1}^i \frac{\tilde{b}_{xx}^{(j, j-1)}}{\tilde{D}_{xx}^{(j)}} \quad (i = M+1, \dots, N_{ca}), \quad (\text{F.23})$$

donde los coeficientes $\tilde{F}_{xx}^{(i)}$ y $\tilde{C}_{xx}^{(i)}$ son funciones de las variables k_ρ y z' , y los coeficientes $\tilde{U}_{xx}^{(i)}$, $\tilde{D}_{xx}^{(i)}$ y $\tilde{b}_{xx}^{(i, j)}$ son funciones de la variable k_ρ . Por simplicidad, en lo que sigue se asumirá de forma implícita esa dependencia.

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{b}_{xx}^{(i, j)}$ que se necesitan para calcular los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ son:

$$\tilde{b}_{xx}^{(0,0)} = u_0 + u_1 \cotanh(u_1 h_1) \quad (\text{F.24})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(i,i)} = u_i \cotanh(u_i h_i) + u_{i+1} \cotanh(u_{i+1} h_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.25})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(N_{ca}, N_{ca})} = u_0 + u_{N_{ca}} \cotanh(u_{N_{ca}} h_{N_{ca}}) \quad (\text{F.26})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(0,1)} = \tilde{b}_{xx}^{(1,0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \text{ es un CEP} \\ -u_1 \operatorname{cosech}(u_1 h_1) & \text{si } z = 0 \text{ es interfase con aire} \end{cases} \quad (\text{F.27})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(i-1, i)} = \tilde{b}_{xx}^{(i, i-1)} = -u_i \operatorname{cosech}(u_i h_i) \quad (i = 2, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.28})$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{xx}^{(N_{ca}-1, N_{ca})} &= \tilde{b}_{xx}^{(N_{ca}, N_{ca}-1)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es un CEP} \\ -u_{N_{ca}} \operatorname{cosech}(u_{N_{ca}} h_{N_{ca}}) & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es interf. con aire} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(-1,0)} = \tilde{b}_{xx}^{(0,-1)} = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$\tilde{b}_{xx}^{(N_{ca}+1, N_{ca})} = \tilde{b}_{xx}^{(N_{ca}, N_{ca}+1)} = 0. \quad (\text{F.31})$$

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{F}_{xx}^{(i)}$ que se necesitan para calcular $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ vienen dadas por:

$$\tilde{F}_{xx}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \text{ es un CEP} \\ \mu_0 \frac{\sinh(u_1(d_1 + z'))}{\sinh(u_1 h_1)} & \text{si } z = 0 \text{ es interfase con aire} \end{cases} \quad (\text{F.32})$$

$$\tilde{F}_{xx}^{(i)} = \mu_0 \frac{\sinh(u_{i+1}(d_{i+1} + z'))}{\sinh(u_{i+1} h_{i+1})} \quad (i = 1, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.33})$$

$$\tilde{F}_{xx}^{(N_{ca})} = \mu_0 e^{u_0(z' + d_{N_{ca}})} \quad (\text{F.34})$$

$$\tilde{F}_{xx}^{(-1)} = 0. \quad (\text{F.35})$$

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{C}_{xx}^{(i)}$ que se necesitan para calcular $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ vienen dadas por:

$$\tilde{C}_{xx}^{(0)} = \mu_0 e^{-u_0 z'} \quad (\text{F.36})$$

$$\tilde{C}_{xx}^{(i)} = \mu_0 \frac{\sinh(u_i |d_{i-1} + z'|)}{\sinh(u_i h_i)} \quad (i = 1, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.37})$$

$$\tilde{C}_{xx}^{(N_{ca})} = \begin{cases} 0 & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es un CEP} \\ \mu_0 \frac{\sinh(u_{N_{ca}} |d_{N_{ca}-1} + z'|)}{\sinh(u_{N_{ca}} h_{N_{ca}})} & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es interf. con aire} \end{cases} \quad (\text{F.38})$$

$$\tilde{C}_{xx}^{(N_{ca}+1)} = 0. \quad (\text{F.39})$$

Finalmente, los coeficientes $\tilde{U}_{xx}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, M - 1$) y $\tilde{D}_{xx}^{(k)}$ ($k = M, \dots, N_{ca} - 1$) que intervienen en el cálculo de $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ se obtienen mediante los siguientes algoritmos recurrentes:

$$\tilde{U}_{xx}^{(k)} = \tilde{b}_{xx}^{(k,k)} - \frac{\tilde{b}_{xx}^{(k,k-1)}\tilde{b}_{xx}^{(k-1,k)}}{\tilde{U}_{xx}^{(k-1)}}, \quad (k = 1, \dots, M - 1) \quad (\text{F.40})$$

$$\tilde{D}_{xx}^{(k)} = \tilde{b}_{xx}^{(k,k)} - \frac{\tilde{b}_{xx}^{(k,k+1)}\tilde{b}_{xx}^{(k+1,k)}}{\tilde{D}_{xx}^{(k+1)}}, \quad (k = N_{ca} - 1, \dots, M) \quad (\text{F.41})$$

cuya inicialización viene dada por:

$$\tilde{U}_{xx}^{(0)} = \tilde{b}_{xx}^{(0,0)} \quad (\text{F.42})$$

$$\tilde{D}_{xx}^{(N_{ca})} = \tilde{b}_{xx}^{(N_{ca},N_{ca})}. \quad (\text{F.43})$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\tilde{U}_{xx}^{(-1)} = 1 \quad (\text{F.44})$$

$$\tilde{D}_{xx}^{(N_{ca}+1)} = 1. \quad (\text{F.45})$$

F.2. Cálculo de $\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')$

Si la fuente puntual de la Fig. F.1 es un dipolo vertical orientado en la dirección del eje z , el potencial vector creado por este dipolo valdrá $G_{zz}^A \hat{z}$ (véase la Ec. (3.5)). En cada una de las capas del medio multicapa de la Fig. F.1, $G_{zz}^A(\xi, z, z')$ va a satisfacer la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i) G_{zz}^A(\xi, z, z') = -\mu_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad -d_i < z < -d_{i-1}, \quad (\text{F.46})$$

siendo $i = 1, \dots, N_{ca}$. En las regiones semi-infinitas de aire ($z > 0$ si $z = 0$ no es un CEP y/o $z < -d_{N_{ca}}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP), $G_{zz}^A(\xi, z, z')$ satisface la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0) G_{zz}^A(\xi, z, z') = -\mu_0 \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \quad (\text{F.47})$$

Si tomamos la transformada de Fourier bidimensional de las Ecs. (F.46) y (F.47), se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i - k_\rho^2 \right) \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = -\mu_0 \delta(z - z') \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (\text{F.48})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_\rho^2 \right) \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = -\mu_0 \delta(z - z') \quad z > 0 \text{ y } z < -d_{N_{\text{ca}}} \quad (\text{F.49})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{\text{ca}}}$ no es CEP).

Para el caso en que la fuente puntual de la Fig. F.1 es un dipolo vertical orientado en la dirección z , la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en las interfases entre capas obliga a que se cumplan las siguientes condiciones de contorno [32, pág. 144]:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z = -d_i^-, z') = \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z = -d_i^+, z') \quad (\text{F.50})$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{i+1}} \left[\frac{\partial \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^-} = \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\frac{\partial \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^+}, \quad (\text{F.51})$$

para $i = 1, \dots, N_{\text{ca}} - 1$, y además, para $i = 0$ si $z = 0$ no es un CEP, y para $i = N_{\text{ca}}$ si $z = -d_{N_{\text{ca}}}$ no es un CEP.

Las condiciones de radiación en el infinito (dentro de las regiones semi-infinitas de aire) obligan a que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') \Big|_{\substack{z \rightarrow \infty \text{ si } z = 0 \text{ no es CEP} \\ z \rightarrow -\infty \text{ si } z = -d_{N_{\text{ca}}} \text{ no es CEP}}} = 0 \quad (\text{F.52})$$

Finalmente, si el plano $z = 0$ es un CEP, la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico en el CEP obliga a que:

$$\frac{\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{si } z = 0 \text{ es CEP}, \quad (\text{F.53})$$

y si el plano $z = -d_{N_{\text{ca}}}$ es un CEP, se tiene que cumplir que:

$$\frac{\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')}{\partial z} \Big|_{z=-d_{N_{\text{ca}}}} = 0 \quad \text{si } z = -d_{N_{\text{ca}}} \text{ es CEP}. \quad (\text{F.54})$$

Para calcular \tilde{G}_{zz}^A es preciso resolver las ecuaciones diferenciales (F.48) y (F.49) con las condiciones de contorno (F.50) a (F.54). El cálculo de \tilde{G}_{zz}^A puede llevarse

a cabo para un medio multicapa arbitrario mediante el algoritmo recurrente que se presenta a continuación. Al igual que en la sección anterior, se van a distinguir tres casos posibles en función de la posición del punto fuente.

F.2.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)

- Si el punto de observación está en el medio de la fuente (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} + \left[\tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0z'} \right] e^{-u_0z}. \quad (\text{F.55})$$

- Si el punto de observación está en la capa i -ésima del medio multicapa (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{ca}$), se cumple que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = & -\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \end{aligned} \quad (\text{F.56})$$

- Si el punto de observación está por debajo del medio multicapa (es decir, si $z < -d_{N_{ca}}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{zz}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') e^{u_0(z+d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.57})$$

Los coeficientes $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) se calculan recurrentemente utilizando las expresiones de la sección F.2.4.

F.2.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)

- Si el punto de observación está por encima del medio multicapa (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') e^{-u_0z}. \quad (\text{F.58})$$

- Si el punto de observación está en una capa del medio multicapa distinta a la de la fuente (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{ca}$; $i \neq M$), se cumple que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = & -\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \end{aligned} \quad (\text{F.59})$$

- Si el punto de observación está en la misma capa que la fuente (es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$), se cumple que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = & \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M|z-z'|} \\ & - \left[\tilde{A}_{zz}^{(M)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M(z'+d_M)} \right] \frac{\sinh(u_M(z + d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & + \left[\tilde{A}_{zz}^{(M-1)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{u_M(z'+d_{M-1})} \right] \frac{\sinh(u_M(z + d_M))}{\sinh(u_M h_M)}. \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

- Si el punto de observación está por debajo del medio multicapa (es decir, si $z < -d_{N_{ca}}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{zz}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') e^{u_0(z+d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.61})$$

F.2.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está por encima del medio multicapa (es decir, si $z > 0$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.62})$$

- Si el punto de observación está en la capa i -ésima del medio multicapa (es decir, si $-d_i < z < -d_{i-1}$; $i = 1, \dots, N_{ca}$), se cumple que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = & -\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

- Si el punto de observación está en el medio de la fuente (es decir, si $z < -d_{Nca}$), se cumple que:

$$\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} + \left[\tilde{A}_{zz}^{(Nca)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{u_0(z'+d_{Nca})} \right] e^{u_0(z+d_{Nca})}. \quad (F.64)$$

F.2.4. Expresiones para $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, Nca$)

En las expresiones de las secciones F.2.1 a F.2.3, los coeficientes $\tilde{A}_{zz}^{(M-1)}$ y $\tilde{A}_{zz}^{(M)}$ se obtienen mediante las ecuaciones:

$$\tilde{A}_{zz}^{(M-1)} = \frac{\tilde{F}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \tilde{C}_{zz}^{(M)}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, Nca + 1) \quad (F.65)$$

$$\tilde{A}_{zz}^{(M)} = \frac{\tilde{C}_{zz}^{(M)} \tilde{U}_{zz}^{(M-1)} - \tilde{b}_{zz}^{(M,M-1)} \tilde{F}_{zz}^{(M-1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, Nca + 1). \quad (F.66)$$

Por su parte, los coeficientes $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ ($i \neq M$ e $i \neq M - 1$) se obtienen en términos de $\tilde{A}_{zz}^{(M-1)}$ y $\tilde{A}_{zz}^{(M)}$ mediante las expresiones:

$$\tilde{A}_{zz}^{(i)} = (-1)^{M-1-i} \tilde{A}_{zz}^{(M-1)} \prod_{j=i}^{M-2} \frac{\tilde{b}_{zz}^{(j,j+1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(j)}} \quad (i = 0, \dots, M - 2) \quad (F.67)$$

$$\tilde{A}_{zz}^{(i)} = (-1)^{i-M} \tilde{A}_{zz}^{(M)} \prod_{j=M+1}^i \frac{\tilde{b}_{zz}^{(j,j-1)}}{\tilde{D}_{zz}^{(j)}} \quad (i = M + 1, \dots, Nca), \quad (F.68)$$

donde los coeficientes $\tilde{F}_{zz}^{(i)}$ y $\tilde{C}_{zz}^{(i)}$ son funciones de las variables k_ρ y z' , y los coeficientes $\tilde{U}_{zz}^{(i)}$, $\tilde{D}_{zz}^{(i)}$ y $\tilde{b}_{zz}^{(i,j)}$ son funciones de la variable k_ρ . Por simplicidad, en lo que sigue se asumirá de forma implícita esa dependencia.

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{b}_{zz}^{(i,j)}$ que se necesitan para calcular los coeficientes $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ son:

$$\tilde{b}_{zz}^{(0,0)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 u_1}{\varepsilon_1} \cotanh(u_1 h_1) & \text{si } z = 0 \text{ es un CEP} \\ u_0 + \frac{\varepsilon_0 u_1}{\varepsilon_1} \cotanh(u_1 h_1) & \text{si } z = 0 \text{ es interfase con aire} \end{cases} \quad (F.69)$$

$$\tilde{b}_{zz}^{(i,i)} = \frac{\varepsilon_0 u_i}{\varepsilon_i} \operatorname{cotanh}(u_i h_i) + \frac{\varepsilon_0 u_{i+1}}{\varepsilon_{i+1}} \operatorname{cotanh}(u_{i+1} h_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, N_{\text{ca}} - 1) \quad (\text{F.70})$$

$$\tilde{b}_{zz}^{(N_{\text{ca}}, N_{\text{ca}})} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 u_{N_{\text{ca}}}}{\varepsilon_{N_{\text{ca}}}} \operatorname{cotanh}(u_{N_{\text{ca}}} h_{N_{\text{ca}}}) & \text{si } z = -d_{N_{\text{ca}}} \text{ es un CEP} \\ u_0 + \frac{\varepsilon_0 u_{N_{\text{ca}}}}{\varepsilon_{N_{\text{ca}}}} \operatorname{cotanh}(u_{N_{\text{ca}}} h_{N_{\text{ca}}}) & \text{si } z = -d_{N_{\text{ca}}} \text{ es interf. con aire} \end{cases} \quad (\text{F.71})$$

$$\tilde{b}_{zz}^{(i-1,i)} = \tilde{b}_{zz}^{(i,i-1)} = -\frac{\varepsilon_0 u_i}{\varepsilon_i} \operatorname{cosech}(u_i h_i) \quad (i = 1, \dots, N_{\text{ca}}) \quad (\text{F.72})$$

$$\tilde{b}_{zz}^{(-1,0)} = \tilde{b}_{zz}^{(0,-1)} = 0 \quad (\text{F.73})$$

$$\tilde{b}_{zz}^{(N_{\text{ca}}+1, N_{\text{ca}})} = \tilde{b}_{zz}^{(N_{\text{ca}}, N_{\text{ca}}+1)} = 0. \quad (\text{F.74})$$

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{F}_{zz}^{(i)}$ que se necesitan para calcular $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ vienen dadas por:

$$\tilde{F}_{zz}^{(-1)} = 0 \quad (\text{F.75})$$

$$\tilde{F}_{zz}^{(i)} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \sinh(u_{i+1}(d_{i+1} + z'))}{\varepsilon_i \sinh(u_{i+1} h_{i+1})} \quad (i = 0, \dots, N_{\text{ca}} - 1), \quad (\text{F.76})$$

$$\tilde{F}_{zz}^{(N_{\text{ca}})} = \mu_0 e^{u_0(z' + d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.77})$$

Las expresiones de los coeficientes $\tilde{C}_{zz}^{(i)}$ que se necesitan para calcular $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ vienen dadas por:

$$\tilde{C}_{zz}^{(0)} = \mu_0 e^{-u_0 z'} \quad (\text{F.78})$$

$$\tilde{C}_{zz}^{(i)} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \sinh(u_i |d_{i-1} + z'|)}{\varepsilon_i \sinh(u_i h_i)} \quad (i = 1, \dots, N_{\text{ca}}) \quad (\text{F.79})$$

$$\tilde{C}_{zz}^{(N_{\text{ca}}+1)} = 0. \quad (\text{F.80})$$

Finalmente, los coeficientes $\tilde{U}_{zz}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, M - 1$) y $\tilde{D}_{zz}^{(k)}$ ($k = M, \dots, N_{ca} - 1$) que intervienen en el cálculo de $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ se obtienen mediante los siguientes algoritmos recurrentes:

$$\tilde{U}_{zz}^{(k)} = \tilde{b}_{zz}^{(k,k)} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k-1)}\tilde{b}_{zz}^{(k-1,k)}}{\tilde{U}_{zz}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \dots, M - 1) \quad (\text{F.81})$$

$$\tilde{D}_{zz}^{(k)} = \tilde{b}_{zz}^{(k,k)} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k+1)}\tilde{b}_{zz}^{(k+1,k)}}{\tilde{D}_{zz}^{(k+1)}} \quad (k = N_{ca} - 1, \dots, M), \quad (\text{F.82})$$

cuya inicialización viene dada por:

$$\tilde{U}_{zz}^{(0)} = \tilde{b}_{zz}^{(0,0)} \quad (\text{F.83})$$

$$\tilde{D}_{zz}^{(N_{ca})} = \tilde{b}_{zz}^{(N_{ca}, N_{ca})}. \quad (\text{F.84})$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\tilde{U}_{zz}^{(-1)} = 1 \quad (\text{F.85})$$

$$\tilde{D}_{zz}^{(N_{ca}+1)} = 1. \quad (\text{F.86})$$

F.3. Cálculo de $(\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x)$ y $(\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')/jk_y)$

Teniendo en cuenta la relación entre G_{xx}^A y G_{zx}^A (véase el inicio de la sección F.1), en cada una de las capas dieléctricas del medio multicapa de la Fig. F.1 la función $G_{zx}^A(\xi, \zeta, z, z')$ (la variable ζ se define conforme a las Ecs. (3.31) y (3.32)) satisface la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i) G_{zx}^A(\xi, \zeta, z, z') = 0 \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}), \quad (\text{F.87})$$

y en las regiones semi-infinitas de aire ($z > 0$ si $z = 0$ no es un CEP y/o $z < -d_{N_{ca}}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP), $G_{zx}^A(\xi, \zeta, z, z')$ satisface la ecuación diferencial (véase la Ec. (F.2)):

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0) G_{zx}^A(\xi, \zeta, z, z') = 0. \quad (\text{F.88})$$

Si ahora calculamos la transformada de Fourier bidimensional de las Ecs. (F.87) y (F.88) y, a continuación, dividimos las expresiones resultantes por jk_x , se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para (\tilde{G}_{zx}^A/jk_x) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i - k_\rho^2 \right) \left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) = 0 \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (\text{F.89})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_\rho^2 \right) \left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) = 0 \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.90})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

La continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en las interfases del medio multicapa de la Fig. F.1 en el caso en que la fuente puntual es un dipolo orientado a lo largo del eje x , obliga a que se cumplan las condiciones de contorno [32, pág. 144]:

$$G_{zx}^A(\xi, \zeta, z = -d_i^+, z') = G_{zx}^A(\xi, \zeta, z = -d_i^-, z') \quad (\text{F.91})$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \left[\frac{\partial G_{xx}^A}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^A}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^+} = \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} \left[\frac{\partial G_{xx}^A}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^A}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^-} \quad (\text{F.92})$$

para $i = 1, \dots, N_{ca} - 1$, y además, para $i = 0$ si $z = 0$ no es un CEP, y para $i = N_{ca}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP.

Si aplicamos la transformada de Fourier bidimensional a las Ecs. (F.91) y (F.92) y dividimos las expresiones resultantes por jk_x , se obtienen las siguientes condiciones de contorno en el dominio espectral:

$$\left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z = -d_i^+, z')}{jk_x} \right) = \left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z = -d_i^-, z')}{jk_x} \right) \quad (\text{F.93})$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \left[-\tilde{G}_{xx}^A + \frac{\partial(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x)}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^+} = \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} \left[-\tilde{G}_{xx}^A + \frac{\partial(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x)}{\partial z} \right] \Big|_{z=-d_i^-} \quad (\text{F.94})$$

Al igual que antes, las Ecs. (F.93) y (F.94) se cumplen para $i = 1, \dots, N_{ca} - 1$, y además, para $i = 0$ si $z = 0$ no es un CEP, y para $i = N_{ca}$ si $z = -d_{N_{ca}}$ no es un CEP.

Las condiciones de radiación en el infinito (dentro de las regiones semi-infinitas

de aire) obligan a que:

$$\left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) \Big|_{\substack{z \rightarrow \infty \text{ si } z = 0 \text{ no es CEP} \\ z \rightarrow -\infty \text{ si } z = -d_{N_{ca}} \text{ no es CEP}}} = 0 \quad (\text{F.95})$$

Finalmente, si el plano $z = 0$ es un CEP, la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico en el CEP obliga a que:

$$\frac{\partial(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{si } z = 0 \text{ es CEP.} \quad (\text{F.96})$$

Y si el plano $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP, se tiene que cumplir que:

$$\frac{\partial(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x)}{\partial z} \Big|_{z=-d_{N_{ca}}} = 0 \quad \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es CEP.} \quad (\text{F.97})$$

La determinación de (\tilde{G}_{zx}^A/jk_x) para el medio multicapa de la Fig. F.1 requiere resolver las ecuaciones diferenciales (F.89) y (F.90) con las condiciones de contorno (F.93) a (F.97). Si la fuente puntual de la Fig. F.1 es un dipolo horizontal orientado en la dirección y , este dipolo va a crear un potencial vector $G_{xx}^A \hat{\mathbf{y}} + G_{zy}^A \hat{\mathbf{z}}$ (véase la Ec. (3.5)). Es fácil demostrar que la función espectral (\tilde{G}_{zy}^A/jk_y) asociada al dipolo orientado en la dirección y satisface las mismas ecuaciones diferenciales y las mismas condiciones de contorno que las que satisface la función espectral (\tilde{G}_{zx}^A/jk_x) asociada al dipolo orientado en la dirección x . Por tanto, de acuerdo con el teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales lineales, se cumple que $(\tilde{G}_{zx}^A/jk_x) = (\tilde{G}_{zy}^A/jk_y)$ (con lo cual, las integrales de Sommerfeld que aparecen en las Ecs. (3.50) y (3.51) son exactamente iguales) [10, 38].

La solución a las ecuaciones diferenciales (F.89) y (F.90) con las condiciones de contorno (F.93) a (F.97) puede escribirse:

- Para $z > 0$ (si $z = 0$ no es un CEP):

$$\left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) = \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z') e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.98})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}$):

$$\left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) = -\tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)}. \quad (\text{F.99})$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$ (si $z = -d_{N_{\text{ca}}}$ no es un CEP):

$$\left(\frac{\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')}{jk_x} \right) = \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') e^{u_0(z + d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.100})$$

Los coeficientes $\tilde{A}_{zx}^{(i)}$ ($i \neq M$ e $i \neq M - 1$) de las ecuaciones (F.98) a (F.100) se obtienen mediante los algoritmos recurrentes:

$$\tilde{A}_{zx}^{(i)} = \frac{\tilde{U}_{zx}^{(i)}}{\tilde{U}_{zz}^{(i)}} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(i,i+1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(i)}} \tilde{A}_{zx}^{(i+1)} \quad (i = 0, \dots, M - 2) \quad (\text{F.101})$$

$$\tilde{A}_{zx}^{(i)} = \frac{\tilde{D}_{zx}^{(i)}}{\tilde{D}_{zz}^{(i)}} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(i,i-1)}}{\tilde{D}_{zz}^{(i)}} \tilde{A}_{zx}^{(i-1)} \quad (i = M + 1, \dots, N_{\text{ca}}), \quad (\text{F.102})$$

cuya inicialización viene dada por las ecuaciones:

$$\tilde{A}_{zx}^{(M-1)} = \frac{\tilde{U}_{zx}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \tilde{D}_{zx}^{(M)}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, N_{\text{ca}} + 1) \quad (\text{F.103})$$

$$\tilde{A}_{zx}^{(M)} = \frac{\tilde{D}_{zx}^{(M)} \tilde{U}_{zz}^{(M-1)} - \tilde{b}_{zz}^{(M,M-1)} \tilde{U}_{zx}^{(M-1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, N_{\text{ca}} + 1). \quad (\text{F.104})$$

Los coeficientes $\tilde{U}_{zz}^{(i)}$, $\tilde{D}_{zz}^{(i)}$ y $\tilde{b}_{zz}^{(i,j)}$ que aparecen en las Ecs. (F.101) a (F.104) ya han sido definidos en la sección F.2. Por otro lado, para poder definir los coeficientes

$\tilde{U}_{zx}^{(i)}$ y $\tilde{D}_{zx}^{(i)}$, necesitamos definir primero los coeficientes $\tilde{C}_{zx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) dados por las siguientes expresiones:

$$\tilde{C}_{zx}^{(0)} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \tilde{A}_{xx}^{(0)} \quad (\text{F.105})$$

$$\tilde{C}_{zx}^{(i)} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})}{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} \tilde{A}_{xx}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.106})$$

$$\tilde{C}_{zx}^{(N_{ca})} = \frac{\varepsilon_{N_{ca}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{N_{ca}}} \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}, \quad (\text{F.107})$$

donde queda puesto de manifiesto que los coeficientes $\tilde{C}_{zx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) son funciones de las variables k_ρ y z' (ya que los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ también son funciones de esas variables).

Una vez conocidas las expresiones de $\tilde{C}_{zx}^{(i)}$, los coeficientes $\tilde{U}_{zx}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, M-1$) y $\tilde{D}_{zx}^{(k)}$ ($k = M, \dots, N_{ca}-1$), que intervienen en el cálculo de $\tilde{A}_{zx}^{(i)}$ y son funciones de las variables k_ρ y z' , se obtienen mediante los siguientes algoritmos recurrentes:

$$\tilde{U}_{zx}^{(k)} = \tilde{C}_{zx}^{(k)} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k-1)} \tilde{U}_{zx}^{(k-1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \dots, M-1) \quad (\text{F.108})$$

$$\tilde{D}_{zx}^{(k)} = \tilde{C}_{zx}^{(k)} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k+1)} \tilde{D}_{zx}^{(k+1)}}{\tilde{D}_{zz}^{(k+1)}} \quad (k = N_{ca} - 1, \dots, M), \quad (\text{F.109})$$

cuya inicialización viene dada por:

$$\tilde{U}_{zx}^{(0)} = \tilde{C}_{zx}^{(0)} \quad (\text{F.110})$$

$$\tilde{D}_{zx}^{(N_{ca})} = \tilde{C}_{zx}^{(N_{ca})}. \quad (\text{F.111})$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\tilde{U}_{zx}^{(-1)} = 0 \quad (\text{F.112})$$

$$\tilde{D}_{zx}^{(N_{ca}+1)} = 0. \quad (\text{F.113})$$

F.4. Cálculo de $\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z')$

De acuerdo con la Ec. (3.5), la primera componente de las Ecs. (3.6) y (3.7) puede escribirse:

$$\frac{\partial G_{xx}^A}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^A}{\partial z} = -\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial G^\phi}{\partial x'} \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}) \quad (\text{F.114})$$

$$\frac{\partial G_{xx}^A}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^A}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial G^\phi}{\partial x'} \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.115})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Si aplicamos la trasformada de Fourier bidimensional a las Ecs. (F.114) y (F.115) (véanse las Ecs. (3.30) y (3.36)), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-jk_x \tilde{G}_{xx}^A + \frac{\partial \tilde{G}_{zx}^A}{\partial z} = -jk_x \varepsilon_i \mu_0 \tilde{G}^\phi, \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}) \quad (\text{F.116})$$

$$-jk_x \tilde{G}_{xx}^A + \frac{\partial \tilde{G}_{zx}^A}{\partial z} = -jk_x \varepsilon_0 \mu_0 \tilde{G}^\phi \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}}, \quad (\text{F.117})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Pues bien, despejando \tilde{G}^ϕ en las Ecs. (F.116) y (F.117) se llega a que:

$$\tilde{G}^\phi = \frac{1}{\varepsilon_i \mu_0} \left[\tilde{G}_{xx}^A - \frac{\partial \tilde{G}_{zx}^A / (jk_x)}{\partial z} \right] \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}) \quad (\text{F.118})$$

$$\tilde{G}^\phi = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left[\tilde{G}_{xx}^A - \frac{\partial \tilde{G}_{zx}^A / (jk_x)}{\partial z} \right] \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.119})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Las Ecs. (F.118) y (F.119) indican cómo se puede obtener \tilde{G}^ϕ en términos de \tilde{G}_{xx}^A y $(\tilde{G}_{zx}^A / jk_x)$ para el medio multicapa de la Fig. F.1. A continuación, se muestran las expresiones de \tilde{G}^ϕ en términos de los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$ y $\tilde{A}_{zx}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) definidos en las secciones F.1 y F.3.

F.4.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left\{ \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} + \left[\tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0 z'} + u_0 \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z') \right] e^{-u_0 z} \right\}. \quad (\text{F.120})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}$):

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_i \mu_0} \times \left\{ -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} - u_i \left[-\tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right\}. \quad (\text{F.121})$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left[\tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - u_0 \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') \right] e^{u_0(z + d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.122})$$

F.4.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{\text{ca}}$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left[\tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') + u_0 \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z') \right] e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.123})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}; i \neq M$):

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_i \mu_0} \times \left\{ -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} - u_i \left[-\tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right\}. \quad (\text{F.124})$$

- Para $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\varepsilon_M \mu_0} \left\{ \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M|z-z'|} \right. \\ & - \left[\tilde{A}_{xx}^{(M)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M(z'+d_M)} \right] \frac{\sinh(u_M(z+d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & + \left[\tilde{A}_{xx}^{(M-1)}(k_\rho, z') - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{u_M(z'+d_{M-1})} \right] \frac{\sinh(u_M(z+d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & - u_M \left[-\tilde{A}_{zx}^{(M)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_M(z+d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \right. \\ & \left. + \tilde{A}_{zx}^{(M-1)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_M(z+d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \right] \left. \right\}. \quad (\text{F.125}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left[\tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - u_0 \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') \right] e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.126})$$

F.4.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{\text{ca}} + 1$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left[\tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z') + u_0 \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z') \right] e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.127})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}; i \neq M$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\varepsilon_i \mu_0} \\ & \times \left\{ -\tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z+d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z+d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right. \\ & \left. - u_i \left[-\tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z+d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\cosh(u_i(z+d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right\}. \quad (\text{F.128}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left\{ \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{u_0(z'+d_{N_{\text{ca}}})} e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})} \right. \\ & \left. \left[\tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - u_0 \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') \right] e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})} \right\}. \quad (\text{F.129}) \end{aligned}$$

F.5. Cálculo de $\tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z')$

De acuerdo con la Ec. (3.5), la tercera componente de las Ecs. (3.6) y (3.7) puede escribirse:

$$\frac{\partial G_{zz}^A}{\partial z} = -\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial G^\phi}{\partial z'} + \omega^2 \varepsilon_i \mu_0 C^\phi \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}) \quad (\text{F.130})$$

$$\frac{\partial G_{zz}^A}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial G^\phi}{\partial z'} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 C^\phi \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.131})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Si aplicamos la trasformada de Fourier bidimensional a las Ecs. (F.130) y (F.131) y despejamos \tilde{C}^ϕ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{C}^\phi = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \frac{\partial \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{G}^\phi}{\partial z'} \quad -d_i < z < -d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N_{ca}) \quad (\text{F.132})$$

$$\tilde{C}^\phi = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{G}^\phi}{\partial z'} \quad z > 0 \text{ y } z < -d_{N_{ca}} \quad (\text{F.133})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP),

con lo cual, \tilde{C}^ϕ puede calcularse en términos de \tilde{G}_{zz}^A y \tilde{G}^ϕ . A continuación se muestran las expresiones de \tilde{C}^ϕ en términos de los coeficientes $\tilde{A}_{xx}^{(i)}$, $\tilde{A}_{zx}^{(i)}$ y $\tilde{A}_{zz}^{(i)}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) definidos en las secciones F.1 y F.3.

F.5.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ u_0 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] e^{-u_0 z} + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} e^{-u_0 z} + \mu_0 e^{-u_0(z+z')} \right\}. \quad (\text{F.134})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \left\{ u_i \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \right. \\ & + u_i \left[\tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & - \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right\}. \quad (\text{F.135}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ u_0 \left[\tilde{A}_{zz}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{u_0(z + d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.136}) \end{aligned}$$

F.5.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{\text{ca}}$)

- Para $z > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ u_0 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.137}) \end{aligned}$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}; i \neq M$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \left\{ u_i \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \right. \\ & + u_i \left[\tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \\ & - \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right\}. \quad (\text{F.138})$$

- Para $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_M \mu_0} \left\{ -\mu_0 \frac{\sinh(u_M(z + z' + d_M + d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \right. \\ & + u_M \left[-\tilde{A}_{zz}^{(M)} + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_M(z + d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & + u_M \left[\tilde{A}_{zz}^{(M-1)} - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_M(z + d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & - \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_M(z + d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_M(z + d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \right\}. \quad (\text{F.139}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{ca}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ u_0 \tilde{A}_{zz}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right. \\ & \left. - u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{u_0(z + d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.140}) \end{aligned}$$

F.5.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)

- Para $z > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ u_0 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.141}) \end{aligned}$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{\text{ca}}$):

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \left\{ u_i \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') + \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \right. \\ + u_i \left[\tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \\ + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \\ \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right\}. \quad (\text{F.142}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\phi(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ \left[u_0 \left(\tilde{A}_{zz}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right] e^{u_0(z + d_{N_{\text{ca}}})} - \mu_0 e^{u_0(z + z' + 2d_{N_{\text{ca}}})} \right\}. \quad (\text{F.143}) \end{aligned}$$

En las Ecs. (F.134) a (F.143) es preciso calcular $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i = 0, \dots, N_{\text{ca}}$). A continuación se proporcionan algoritmos recurrentes para calcular esas derivadas con respecto a z' .

F.5.4. Expresiones para $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i = 0, \dots, N_{\text{ca}}$)

De acuerdo con las Ecs. (F.20) y (F.21), $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M)}}{\partial z'}$ se obtienen mediante las ecuaciones:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'} = \frac{\frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \tilde{b}_{xx}^{(M-1, M)} \frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(M)}}{\partial z'}}{\tilde{U}_{xx}^{(M-1)} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{xx}^{(M-1, M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, N_{\text{ca}} + 1) \quad (\text{F.144})$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M)}}{\partial z'} = \frac{\frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(M)}}{\partial z'} \tilde{U}_{xx}^{(M-1)} - \tilde{b}_{xx}^{(M, M-1)} \frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'}}{\tilde{U}_{xx}^{(M-1)} \tilde{D}_{xx}^{(M)} - \left(\tilde{b}_{xx}^{(M-1, M)} \right)^2} \quad (M = 0, \dots, N_{\text{ca}} + 1). \quad (\text{F.145})$$

Por otro lado, de acuerdo con las Ecs. (F.22) y (F.23) las derivadas $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i \neq M$ e $i \neq M - 1$) se obtienen en términos de $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M)}}{\partial z'}$ mediante las expresiones:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'} = (-1)^{M-1-i} \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}}{\partial z'} \prod_{j=i}^{M-2} \frac{\tilde{b}_{xx}^{(j,j+1)}}{\tilde{U}_{xx}^{(j)}} \quad (i = 0, \dots, M-2) \quad (\text{F.146})$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'} = (-1)^{i-M} \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M)}}{\partial z'} \prod_{j=M+1}^i \frac{\tilde{b}_{xx}^{(j,j-1)}}{\tilde{D}_{xx}^{(j)}} \quad (i = M+1, \dots, N_{\text{ca}}). \quad (\text{F.147})$$

De acuerdo con las Ecs. (F.144) a (F.147), para obtener $\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i = 0, \dots, N_{\text{ca}}$), es preciso utilizar las Ecs. (F.24) a (F.31), las Ecs. (F.40) a (F.45), y además, las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$\frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(0)}}{\partial z'} = \begin{cases} 0, & \text{si } z = 0 \text{ es un CEP} \\ \mu_0 u_1 \frac{\cosh(u_1(d_1 + z'))}{\sinh(u_1 h_1)}, & \text{si } z = 0 \text{ es interfase con aire} \end{cases} \quad (\text{F.148})$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(i)}}{\partial z'} = \mu_0 u_{i+1} \frac{\cosh(u_{i+1}(d_{i+1} + z'))}{\sinh(u_{i+1} h_{i+1})}, \quad (i = 1, \dots, N_{\text{ca}} - 1) \quad (\text{F.149})$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}}{\partial z'} = \mu_0 u_0 e^{u_0(z' + d_{N_{\text{ca}}})} \quad (\text{F.150})$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{xx}^{(-1)}}{\partial z'} = 0 \quad (\text{F.151})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(0)}}{\partial z'} = -\mu_0 u_0 e^{-u_0 z'} \quad (\text{F.152})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(i)}}{\partial z'} = -\mu_0 u_i \frac{\cosh(u_i |d_{i-1} + z'|)}{\sinh(u_i h_i)}, \quad (i = 1, \dots, N_{\text{ca}} - 1) \quad (\text{F.153})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(N_{ca})}}{\partial z'} = \begin{cases} 0, & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es un CEP} \\ -\mu_0 u_{N_{ca}} \frac{\cosh(u_{N_{ca}} |d_{N_{ca}-1} + z'|)}{\sinh(u_{N_{ca}} h_{N_{ca}})}, & \text{si } z = -d_{N_{ca}} \text{ es interf. con aire} \end{cases} \quad (\text{F.154})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{xx}^{(N_{ca}+1)}}{\partial z'} = 0. \quad (\text{F.155})$$

Las derivadas $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i \neq M$ e $i \neq M-1$) de las Ecs. (F.134) a (F.143) se obtienen mediante los algoritmos recurrentes:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'} = \frac{1}{\tilde{U}_{zz}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(i)}}{\partial z'} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(i,i+1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i+1)}}{\partial z'} \quad (i = 0, \dots, M-2) \quad (\text{F.156})$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'} = \frac{1}{\tilde{D}_{zz}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(i)}}{\partial z'} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(i,i-1)}}{\tilde{D}_{zz}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}}{\partial z'} \quad (i = M+1, \dots, N_{ca}), \quad (\text{F.157})$$

cuya inicialización viene dada por las ecuaciones:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M-1)}}{\partial z'} = \frac{\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(M-1)}}{\partial z'} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - \tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)} \frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(M)}}{\partial z'}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - (\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)})^2} \quad (M = 0, \dots, N_{ca} + 1) \quad (\text{F.158})$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M)}}{\partial z'} = \frac{\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(M)}}{\partial z'} \tilde{U}_{zz}^{(M-1)} - \tilde{b}_{zz}^{(M,M-1)} \frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(M-1)}}{\partial z'}}{\tilde{U}_{zz}^{(M-1)} \tilde{D}_{zz}^{(M)} - (\tilde{b}_{zz}^{(M-1,M)})^2} \quad (M = 0, \dots, N_{ca} + 1). \quad (\text{F.159})$$

Para poder obtener las derivadas $\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ y $\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ que aparecen en las Ecs. (F.156) a (F.159), necesitamos obtener en primer lugar las derivadas $\frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$) que vienen dadas por (véanse las Ecs. (F.105) a (F.107)):

$$\frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(0)}}{\partial z'} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}}{\partial z'} \quad (\text{F.160})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(i)}}{\partial z'} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})}{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}}{\partial z'} \quad (i = 1, \dots, N_{ca} - 1) \quad (\text{F.161})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(N_{ca})}}{\partial z'} = \frac{\varepsilon_{N_{ca}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{N_{ca}}} \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}}{\partial z'}. \quad (\text{F.162})$$

Una vez conocidas las expresiones de las derivadas $\frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$, las derivadas $\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(k)}}{\partial z'}$ ($k = 1, \dots, M - 1$) y $\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ ($k = M, \dots, N_{ca} - 1$) que intervienen en el cálculo de $\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}}{\partial z'}$ se obtienen mediante los siguientes algoritmos recurrentes:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(k)}}{\partial z'} = \frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(k)}}{\partial z'} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k-1)}}{\tilde{U}_{zz}^{(k-1)}} \frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(k-1)}}{\partial z'} \quad (k = 1, \dots, M - 1) \quad (\text{F.163})$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(k)}}{\partial z'} = \frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(k)}}{\partial z'} - \frac{\tilde{b}_{zz}^{(k,k+1)}}{\tilde{D}_{zz}^{(k+1)}} \frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(k+1)}}{\partial z'} \quad (k = N_{ca} - 1, \dots, M), \quad (\text{F.164})$$

cuya inicialización viene dada por:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(0)}}{\partial z'} = \frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(0)}}{\partial z'} \quad (\text{F.165})$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(N_{ca})}}{\partial z'} = \frac{\partial \tilde{C}_{zx}^{(N_{ca})}}{\partial z'}, \quad (\text{F.166})$$

y se cumple que:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{zx}^{(-1)}}{\partial z'} = 0 \quad (\text{F.167})$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_{zx}^{(N_{ca}+1)}}{\partial z'} = 0. \quad (\text{F.168})$$

F.6. Cálculo de $\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z')$

De acuerdo con las Ecs. (F.132) y (F.133), la función $\frac{\partial \tilde{C}^\phi}{\partial z}$ que aparece en la integral de Sommerfeld de la Ec. (3.54) vendrá dada por:

$$\frac{\partial \tilde{C}^\phi}{\partial z} = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \frac{\partial^2 \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{G}^\phi}{\partial z \partial z'} \quad -d_i \leq z \leq -d_{i-1} \quad (\text{F.169})$$

$$\frac{\partial \tilde{C}^\phi}{\partial z} = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{G}^\phi}{\partial z \partial z'} \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}}, \quad (\text{F.170})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

Por otro lado, la Ec. (3.54) nos muestra que la versión espectral de $G_{zz}^{A,m}$ es $\tilde{G}_{zz}^{A,m} = \tilde{G}_{zz}^A + \frac{\partial \tilde{C}^\phi}{\partial z}$. Por tanto, teniendo en cuenta las Ecs. (F.169) y (F.170), $\tilde{G}_{zz}^{A,m}$ tiene que ser obtenida a partir de las ecuaciones siguientes:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m} = \tilde{G}_{zz}^A + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \frac{\partial^2 \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{G}^\phi}{\partial z \partial z'} \quad -d_i \leq z \leq -d_{i-1} \quad (\text{F.171})$$

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m} = \tilde{G}_{zz}^A + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \tilde{G}_{zz}^A}{\partial z^2} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{G}^\phi}{\partial z \partial z'} \quad z > 0 \text{ y/o } z < -d_{N_{ca}}, \quad (\text{F.172})$$

(si $z = 0$ no es un CEP y/o $z = -d_{N_{ca}}$ no es CEP).

A continuación, se muestran las expresiones que se obtienen para $\tilde{G}_{zz}^{A,m}$ a partir de las expresiones obtenidas para \tilde{G}_{zz}^A y \tilde{G}^ϕ en las secciones F.2 y F.4.

F.6.1. Fuente en el medio semi-infinito superior ($M = 0$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0(z+z')} + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') - u_0 \left[\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} + \mu_0 e^{-u_0 z'} \right] - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.173})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{ca}$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \\ &\times \left\{ k_\rho^2 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right. \\ &+ u_i^2 \left[\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \\ &\left. + u_i \left[-\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right\}. \quad (\text{F.174}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{ca}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') + u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right. \\ &\left. - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{u_0(z + d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.175}) \end{aligned}$$

F.6.2. Fuente en la capa M -ésima ($1 \leq M \leq N_{ca}$)

- Para $z > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') - u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right. \\ &\left. - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.176}) \end{aligned}$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 0, \dots, N_{ca}$; $i \neq M$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \\ &\times \left\{ k_\rho^2 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u_i^2 \left[\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z+d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z+d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \\
& +u_i \left[-\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z') \cosh(u_i(z+d_{i-1}))}{\partial z' \sinh(u_i h_i)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z') \cosh(u_i(z+d_i))}{\partial z' \sinh(u_i h_i)} \right] \Bigg\}. \quad (\text{F.177})
\end{aligned}$$

■ Para $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{zz}^{\text{A,m}}(k_\rho, z, z') &= \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M|z-z'|} + \frac{\mu_0}{2u_M} e^{-u_M(z'+d_M)} \frac{\sinh(u_M(z+d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \\
&\quad - \frac{\mu_0}{2u_M} e^{u_M(z'+d_{M-1})} \frac{\sinh(u_M(z+d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \\
&\quad + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_M \mu_0} \left\{ -\mu_0 u_M \frac{\cosh(u_M(z+z'+d_M+d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} \right. \\
&+ k_\rho^2 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(M)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_M(z+d_{M-1}))}{\sinh(u_M h_M)} + \tilde{A}_{zz}^{(M-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_M(z+d_M))}{\sinh(u_M h_M)} \right] \\
&+ u_M^2 \left[\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M)}(k_\rho, z') \sinh(u_M(z+d_{M-1}))}{\partial z' \sinh(u_M h_M)} - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(M-1)}(k_\rho, z') \sinh(u_M(z+d_M))}{\partial z' \sinh(u_M h_M)} \right] \\
&\quad + u_M \left[-\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M)}(k_\rho, z') \cosh(u_M(z+d_{M-1}))}{\partial z' \sinh(u_M h_M)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(M-1)}(k_\rho, z') \cosh(u_M(z+d_M))}{\partial z' \sinh(u_M h_M)} \right] \Bigg\}. \quad (\text{F.178})
\end{aligned}$$

■ Para $z < -d_{N_{\text{ca}}}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{zz}^{\text{A,m}}(k_\rho, z, z') &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z') + u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right. \\
&\quad \left. - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{\text{ca}})}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{u_0(z+d_{N_{\text{ca}}})}. \quad (\text{F.179})
\end{aligned}$$

F.6.3. Fuente en el medio semi-infinito inferior ($M = N_{ca} + 1$)

- Para $z > 0$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(0)}(k_\rho, z') - u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(0)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \right\} e^{-u_0 z}. \quad (\text{F.180})$$

- Para $-d_i < z < -d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N_{ca}$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m} = & \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_i \mu_0} \\ & \times \left\{ k_\rho^2 \left[-\tilde{A}_{zz}^{(i)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \tilde{A}_{zz}^{(i-1)}(k_\rho, z') \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right. \\ & + u_i^2 \left[\frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} - \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\sinh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \\ & \left. + u_i \left[-\frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\cosh(u_i(z + d_{i-1}))}{\sinh(u_i h_i)} + \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(i-1)}(k_\rho, z')}{\partial z'} \frac{\cosh(u_i(z + d_i))}{\sinh(u_i h_i)} \right] \right\}. \quad (\text{F.181}) \end{aligned}$$

- Para $z < -d_{N_{ca}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') = & \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} - \frac{\mu_0}{2u_0} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}})} \\ & + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \left\{ k_\rho^2 \tilde{A}_{zz}^{(N_{ca})}(k_\rho, z') + u_0 \frac{\partial \tilde{A}_{xx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} - u_0^2 \frac{\partial \tilde{A}_{zx}^{(N_{ca})}(k_\rho, z')}{\partial z'} - \mu_0 u_0 e^{u_0(z'+d_{N_{ca}})} \right\} e^{u_0(z+d_{N_{ca}})}. \quad (\text{F.182}) \end{aligned}$$

Apéndice G

Comportamientos asintóticos de las funciones de Green multicapa en el dominio espectral

En el Apéndice F se han presentado algoritmos recurrentes para el cálculo de las funciones de Green espectrales en medios multicapa. En este Apéndice se presentan expresiones asintóticas en forma cerrada de dichas funciones de Green espectrales para valores grandes de la variable k_ρ . A lo largo de esta tesis se ha demostrado que las citadas expresiones asintóticas de las funciones de Green espectrales tienen utilidad a la hora de llevar a cabo el cálculo eficiente de funciones de Green espaciales en medios multicapa, tanto en el caso no periódico (véanse las Ecs. (3.112) y (3.123) del Capítulo 3) como en el caso periódico (véanse las Ecs. (4.21), (4.28), (4.30), (4.31), (4.38) y (4.39) del Capítulo 4).

G.1. Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')$

A continuación, se muestran las expresiones que se han utilizado en esta tesis para $\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \tilde{G}_{xx}^A(k_\rho, z, z')|_{k_\rho \gg}$.

G.1.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0|z-z'|} (1 - e^{-bu_0}), \quad (G.1)$$

donde, tal y como se comentó en el Capítulo 3 (véase la Ec. (3.113a)), el factor $(1 - e^{-bu_0})$ se ha introducido para evitar que $\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z')$ presente una singularidad en $u_0 = 0$ (a lo largo de toda esta memoria se ha tomado b igual a $2/k_0$).

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0[z-z']} (1 - e^{-bu_0}). \quad (G.2)$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0[z'-z]} (1 - e^{-bu_0}). \quad (G.3)$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = 0. \quad (G.4)$$

G.1.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} - e^{u_0(z+z')} \right] (1 - e^{-bu_0}). \quad (G.5)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.3) y (G.4).

G.1.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\tilde{G}_{xx}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} - e^{-u_0(z+z'+2d_{N_{ca}})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.6)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.2) y (G.4).

G.2. Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z')$

A continuación, se van a mostrar las expresiones que se han utilizado en esta tesis para $\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \tilde{G}_{zz}^A(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \gg}$. Con objeto de simplificar la notación, vamos a definir las cantidades $\eta_{i,j}$ y $\delta_{i,j}$ como se indica:

$$\eta_{i,j} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \quad (j = 1, \dots, N_{ca}; i = j - 1, j + 1) \quad (G.7)$$

$$\delta_{i,j} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \quad (j = 1, \dots, N_{ca}; i = j - 1, j + 1), \quad (G.8)$$

Además, vamos a introducir las definiciones adicionales para $\eta_{i,j}$ y $\delta_{i,j}$ que se muestran a continuación:

$$\eta_{1,0} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0} \quad (G.9)$$

$$\delta_{1,0} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0} \quad (G.10)$$

$$\eta_{N_{ca}, N_{ca}+1} = \frac{\varepsilon_{N_{ca}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{N_{ca}} + \varepsilon_0} \quad (G.11)$$

$$\delta_{N_{ca}, N_{ca}+1} = \frac{\varepsilon_{N_{ca}}}{\varepsilon_{N_{ca}} + \varepsilon_0} \quad (G.12)$$

$$\eta_{-1,0} = 0 \quad \text{y} \quad \eta_{N_{ca}+2, N_{ca}+1} = 0. \quad (G.13)$$

G.2.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + \eta_{M+1,M} e^{-u_0(z+z'+2d_M)} + \eta_{M-1,M} e^{u_0(z+z'+2d_{M-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.14)$$

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{u_0} \delta_{M-1,M} e^{-u_0(z-z')} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.15)$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{u_0} \delta_{M+1,M} e^{-u_0(z'-z)} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.16)$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = 0 . \quad (G.17)$$

G.2.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + \eta_{2,1} e^{-u_0(z+z'+2d_1)} + e^{u_0(z+z')} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.18)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.16) y (G.17).

G.2.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + e^{-u_0(z+z'+2d_{N_{ca}})} + \eta_{N_{ca}-1, N_{ca}} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.19)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.15) y (G.17).

G.3. Comportamientos asintóticos de $(\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x)$ y de $(\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')/jk_y)$

A continuación, se van a mostrar las expresiones de $(\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')/jk_x) = (\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x) \Big|_{k_\rho \gg}$ utilizadas en esta tesis. Dado que $(\tilde{G}_{zy}^A(k_\rho, z, z')/jk_y) = (\tilde{G}_{zx}^A(k_\rho, z, z')/jk_x)$, resulta obvio que $(\tilde{G}_{zy}^{A,as}(k_\rho, z, z')/jk_y) = (\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')/jk_x)$.

G.3.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = \frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \left[-\eta_{M+1, M} e^{-u_0(z+z'+2d_M)} + \eta_{M-1, M} e^{u_0(z+z'+2d_{M-1})} \right] (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}) . \quad (G.20)$$

donde, tal y como se comentó en el Capítulo 3 (véase la Ec. (3.113b)), el factor $(1 - e^{-b(u_0-jk_0)})$ ($b = 2/k_0$) se ha introducido para evitar que $\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')$ presente una singularidad en $k_\rho = 0$.

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = \frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{M-1, M} e^{-u_0(z-z')} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}) . \quad (G.21)$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = -\frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{M+1,M} e^{-u_0(z'-z)} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}) . \quad (G.22)$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = 0 . \quad (G.23)$$

G.3.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un PEC

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = -\frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{2,1} e^{-u_0(z+z'+2d_1)} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}) . \quad (G.24)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.22) y (G.23).

G.3.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un PEC

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\frac{\tilde{G}_{zx}^{A,as}(k_\rho, z, z')}{jk_x} = \frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{N_{ca}-1, N_{ca}} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}-1})} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}) . \quad (G.25)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.21) y (G.23).

G.4. Comportamiento asintótico de $\tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z')$

En esta sección se muestran las expresiones de $\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \tilde{G}^\phi(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \gg}$ que se han utilizado en esta tesis.

G.4.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \frac{1}{2u_0\varepsilon_M} \left[e^{-u_0|z-z'|} - \eta_{M+1,M} e^{-u_0(z+z'+2d_M)} - \eta_{M-1,M} e^{u_0(z+z'+2d_{M-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.26)$$

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \frac{1}{u_0\varepsilon_{M-1}} \delta_{M-1,M} e^{-u_0(z-z')} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.27)$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \frac{1}{u_0\varepsilon_{M+1}} \delta_{M+1,M} e^{-u_0(z'-z)} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.28)$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = 0 . \quad (G.29)$$

G.4.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \frac{1}{2u_0\varepsilon_1} \left[e^{-u_0|z-z'|} - e^{u_0(z+z')} - \eta_{2,1} e^{-u_0(z+z'+2d_1)} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.30)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.28) y (G.29).

G.4.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\tilde{G}^{\phi,as}(k_{\rho}, z, z') = \frac{1}{2u_0 \varepsilon_{N_{ca}}} \left[e^{-u_0|z-z'|} - e^{-u_0(z+z'+2d_{N_{ca}})} - \eta_{N_{ca}-1, N_{ca}} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (G.31)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.27) y (G.29).

G.5. Comportamiento asintótico de $\tilde{C}^{\phi}(k_{\rho}, z, z')$

A continuación, se van a mostrar las expresiones que se han utilizado en esta tesis para $\tilde{C}^{\phi,as}(k_{\rho}, z, z') = \tilde{C}^{\phi}(k_{\rho}, z, z') \Big|_{k_{\rho} \gg}$.

G.5.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_{\rho}, z, z') = \frac{\mu_0}{2k_{\rho}^2} \left[-\eta_{M+1, M} e^{-u_0(z+z'+2d_M)} + \eta_{M-1, M} e^{u_0(z+z'+2d_{M-1})} \right] (1 - e^{-b(u_0 - jk_0)}) . \quad (G.32)$$

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_{\rho}, z, z') = \frac{\mu_0}{2k_{\rho}^2} \eta_{M-1, M} e^{-u_0(z-z')} (1 - e^{-b(u_0 - jk_0)}) . \quad (G.33)$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_{\rho}, z, z') = -\frac{\mu_0}{2k_{\rho}^2} \eta_{M+1, M} e^{-u_0(z'-z)} (1 - e^{-b(u_0 - jk_0)}) . \quad (G.34)$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = 0. \quad (G.35)$$

G.5.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = -\frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{2,1} e^{-u_0(z+z'+2d_1)} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}). \quad (G.36)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.34) y (G.35).

G.5.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\tilde{C}^{\phi,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2k_\rho^2} \eta_{N_{ca}-1, N_{ca}} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}-1})} (1 - e^{-b(u_0-jk_0)}). \quad (G.37)$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.33) y (G.35).

G.6. Comportamiento asintótico de $\tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z')$

En esta última sección se van a mostrar las expresiones de $\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \tilde{G}_{zz}^{A,m}(k_\rho, z, z') \Big|_{k_\rho \gg}$ que se han utilizado en esta tesis.

G.6.1. Fuente en la capa M -ésima en el caso en que $z = 0$ y $z = -d_{N_{ca}}$ no son CEP ($0 \leq M \leq N_{ca} + 1$)

- Si el punto de observación está en la capa M -ésima del medio multicapa, es decir, si $-d_M < z < -d_{M-1}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + 2\eta_{M+1,M} e^{-u_0(z+z'+2d_M)} + 2\eta_{M-1,M} e^{u_0(z+z'+2d_{M-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}). \quad (G.38)$$

- Si el punto de observación está en la capa superior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M-1} < z < -d_{M-2}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0(z-z')} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (\text{G.39})$$

- Si el punto de observación está en la capa inferior a la capa que contiene a la fuente, es decir, si $-d_{M+1} < z < -d_M$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} e^{-u_0(z'-z)} (1 - e^{-bu_0}) . \quad (\text{G.40})$$

- Si existen una o más capas entre el punto de observación y la fuente, es decir, si $z < -d_{M+1}$ o $z > -d_{M-2}$, tomaremos:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = 0 . \quad (\text{G.41})$$

G.6.2. Fuente en la primera capa ($M = 1$) y $z = 0$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la primera capa, es decir, si $-d_1 < z < -d_0 = 0$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + 2\eta_{2,1} e^{-u_0(z+z'+2d_1)} + e^{u_0(z+z')} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (\text{G.42})$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.40) y (G.41).

G.6.3. Fuente en la última capa ($M = N_{ca}$) y $z = -d_{N_{ca}}$ es un CEP

- Si el punto de observación está en la última capa del medio multicapa, es decir, si $-d_{N_{ca}} < z < -d_{N_{ca}-1}$:

$$\tilde{G}_{zz}^{A,m,as}(k_\rho, z, z') = \frac{\mu_0}{2u_0} \left[e^{-u_0|z-z'|} + e^{-u_0(z+z'+2d_{N_{ca}})} + 2\eta_{N_{ca}-1, N_{ca}} e^{u_0(z+z'+2d_{N_{ca}-1})} \right] (1 - e^{-bu_0}) . \quad (\text{G.43})$$

- En el resto del medio multicapa se aplican las Ecs. (G.39) y (G.41).

Apéndice H

El método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior para las Ecs. (4.30), (4.31), (4.38) y (4.39)

El método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior es un método para la aceleración del cálculo de series que fue ampliamente estudiado en el Capítulo 1 de esta tesis. En este Apéndice nos vamos a centrar en la aplicación de este método al cálculo eficiente de la segunda de las series de las Ecs. (4.30) y (4.31) del Capítulo 4, y al cálculo eficiente de la segunda y tercera de las series de las Ecs. (4.38) y (4.39) del Capítulo 4.

Tanto la segunda de las series de las Ecs. (4.30) y (4.31) como la segunda y tercera de las series de las Ecs. (4.38) y (4.39) se pueden expresar como combinaciones lineales de series del tipo:

$$S = \frac{1}{2A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \left[\frac{1 - e^{-b(\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2} - jk_0)}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2} \right] e^{-h\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2}}, \quad (\text{H.1})$$

donde A , \mathbf{k}_{mn} , $k_{mn,x}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}'$ y b han sido definidos en el Capítulo 4, y donde h es una cantidad que depende de los valores de z y z' , y que puede ser nula (esto ocurre, por ejemplo, cuando las fuentes y el punto de observación de la Fig. 4.1 están localizados en alguna de las interfaces dieléctricas del medio multicapa, y además se cumple que $z = z'$). Los términos de las series de (H.1) decaen como $e^{-h|\mathbf{k}_{mn}|}/|\mathbf{k}_{mn}|^2$ para $|m| \rightarrow \infty$ y $|n| \rightarrow \infty$ y, por tanto, la convergencia de las series puede ser muy lenta cuando $h \ll |\mathbf{a}_1|$ y $h \ll |\mathbf{a}_2|$. En estas condiciones de convergencia lenta, proponemos calcular las series de (H.1) mediante el método espectral de Kummer-Poisson con extracción asintótica de términos de orden superior que se describe en el Capítulo 1. En lo que resta del Apéndice, vamos a considerar por separado los casos $h = 0$ y $h \neq 0$.

H.1. Caso $h = 0$

En este caso, la serie S de (H.1) puede calcularse eficientemente mediante la expresión:

$$S = \frac{1}{2A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \times \left[\frac{1 - e^{-b(\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2} - jk_0)}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2} - \sum_{i=1}^{M_S} \frac{D'_i}{|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F_i'^2} \right] + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{S}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{S}_{mn}|} e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \left[\sum_{i=1}^{M_S} D'_i F'_i K_1(F'_i |\mathbf{S}_{mn}|) \right], \quad (\text{H.2})$$

donde los coeficientes F'_i y D'_i se eligen como se indica a continuación (una expresión similar puede encontrarse en las Ecs. (1.45) y (1.43)):

$$F'_i = (1.5M/|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|)[1 + 0.1(i - 1)] \quad (i = 1, \dots, M_S) \quad (\text{H.3})$$

$$D'_i = \prod_{j=1, j \neq i}^M F_j'^2 / (F_j'^2 - F_i'^2) \quad (i = 1, \dots, M_S), \quad (\text{H.4})$$

y $K_1(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de orden uno [105]. Con esta definición de F'_i y D'_i ($i = 1, \dots, M_S$), los términos de la primera serie de la Ec. (H.2)

tienen un decaimiento del tipo $1/|\mathbf{k}_{mn}|^{2M+2}$ para valores elevados de $|m|$ y $|n|$, y los términos de la segunda serie decaen exponencialmente como una combinación lineal de términos del tipo $e^{-F'_i|\boldsymbol{\rho}_{mn}|}/\sqrt{|\boldsymbol{\rho}_{mn}|}$ ($i = 1, \dots, M_S$) para valores elevados de $|m|$ y $|n|$.

H.2. Caso $h \neq 0$

En este caso, la serie S de (H.1) puede calcularse eficientemente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2A} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{mn,x} e^{-j\mathbf{k}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \left\{ \frac{e^{-h\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2}}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2} \left[1 - e^{-b(\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 - k_0^2} - jk_0)} \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{M_S} E'_i \frac{e^{-h\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F'_i{}^2}}}{|\mathbf{k}_{mn}|^2} \left[1 - e^{-b(\sqrt{|\mathbf{k}_{mn}|^2 + F'_i{}^2} - F'_i)} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{mn,x}}{|\mathbf{S}_{mn}|^2} e^{-j\mathbf{k}_{w0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{mn}} \\
& \times \sum_{i=1}^{M_S} E'_i \left[\frac{(h+b)e^{-F'_i[\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + (h+b)^2} - b]}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + (h+b)^2}} - \frac{he^{-F'_i\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + h^2}}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{mn}|^2 + h^2}} \right], \quad (\text{H.5})
\end{aligned}$$

donde $S_{mn,x} = \mathbf{S}_{mn} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, los coeficientes F'_i ($i = 1, \dots, M_S$) se eligen como en el caso $h = 0$, y los coeficientes E'_i ($i = 1, \dots, M_S$) vienen dados por la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales (sistemas de ecuaciones similares aparecen en las Ecs. (1.28) y (1.42) del Capítulo 1):

$$\sum_{i=1}^{M_S} E'_i C_l(F'_i) = C_l(jk_0) \quad (l = 1, \dots, M_S). \quad (\text{H.6})$$

Las funciones $C_l(t)$ ($l = 1, \dots, M_S$) que aparecen en la Ec. (H.6) pueden escribirse en el rango $1 \leq l \leq 8$ como se indica a continuación:

$$C_1(t) = 1 \quad (\text{H.7})$$

$$C_2(t) = -\frac{ht^2}{2} \quad (\text{H.8})$$

$$C_3(t) = \frac{h^2t^4}{8} \quad (\text{H.9})$$

$$C_4(t) = \frac{ht^4}{8} - \frac{h^3t^6}{48} \quad (\text{H.10})$$

$$C_5(t) = -\frac{h^2t^6}{16} + \frac{h^4t^8}{384} \quad (\text{H.11})$$

$$C_6(t) = -\frac{ht^6}{16} + \frac{h^3t^8}{64} - \frac{h^5t^{10}}{3840} \quad (\text{H.12})$$

$$C_7(t) = \frac{5h^2t^8}{128} - \frac{h^4t^{10}}{384} + \frac{h^6t^{12}}{46080} \quad (\text{H.13})$$

$$C_8(t) = \frac{5ht^8}{128} - \frac{3h^3t^{10}}{256} + \frac{h^5t^{12}}{3072} - \frac{h^7t^{14}}{645120}. \quad (\text{H.14})$$

Con las elecciones propuestas para E'_i y F'_i ($i = 1, \dots, M_S$), los términos de la primera serie de la Ec. (H.5) muestran un decaimiento del tipo $e^{-h|\mathbf{k}_{mn}|}/|\mathbf{k}_{mn}|^{M+2}$ para valores elevados de $|m|$ y $|n|$, y los términos de la segunda serie decaen exponencialmente como una combinación lineal de términos del tipo $e^{-F'_i|\rho_{mn}|}/|\rho_{mn}|^2$ ($i = 1, \dots, M_S$) para valores elevados de $|m|$ y $|n|$.

Bibliografía

- [1] David M. Pozar. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 2005. Citado en las páginas 1 y 9.
- [2] R. E. Collin. *Foundations for Microwave Engineering*. McGraw-Hill, Singapore, 2nd edition, 1992. Citado en la página 1.
- [3] Gardiol F. *Microstrip Circuits*. Wiley Inter-Science, New York, 1994. Citado en las páginas 1 y 2.
- [4] J. M. Miranda, J. L. Sebastián, M. Sierra, and J. Margineda. *Ingeniería de Microondas. Técnicas experimentales*. Prentice Hall, Madrid, 2002. Citado en la página 1.
- [5] C. O. Kappe (R. Mannhold and H. Kubinyi and G. Folkers, Ed.) and A. Stadler. *Methods and Principles in Medicinal Chemistry*, volume vol. 25, chapter Microwaves in Organic and Medicinal Chemistry. Wiley-VCH, Weinheim, 2005. Citado en la página 1.
- [6] M. Golio. *Microwaves and RF product applications*. CRC Press, Boca Ratón, FL, 2003. Citado en la página 1.
- [7] H. Johnson and M. Graham. *High-speed digital design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993. Citado en la página 1.
- [8] T. Itoh (ed.). *Numerical Techniques for MW and MMW Passive Structures*. John Wiley & S., New York, 1989. Citado en la página 2.
- [9] A. F. Peterson, S. L. Ray, and Mittra R. *Computational Methods for Electromagnetics*. IEEE Press, New York, 1998. Citado en las páginas 2, 20 y 23.

- [10] K. A. Michalski and J. R. Mosig. Multilayered media Green's functions in integral equation formulations. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 45:508–519, March 1997. Citado en las páginas 2, 3, 6, 7, 10, 80, 81, 90, 92, 95, 99, 100, 151, 160, 207, 213 y 229.
- [11] C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, New York, 1989. Citado en las páginas 2 y 207.
- [12] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. The McMillan Company, New York, 1968. Citado en las páginas 2, 3, 17 y 207.
- [13] D. G. Dudley. *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*. IEEE Press, New York, 1994. Citado en las páginas 2, 19 y 51.
- [14] G. Green. *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. T. Wheelhouse, Nottingham, 1828. Citado en la página 2.
- [15] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, New York, 1991. Citado en las páginas 2, 63, 81, 94, 113, 195 y 196.
- [16] L. B. Felsen and N. Marcuvitz. *Radiation and Scattering of Waves*. IEEE Press, New York, 1994. Citado en las páginas 2, 6, 80, 81, 83, 113 y 117.
- [17] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th ed. Elsevier Academic Press, San Diego, California, 2005. Citado en las páginas 2, 6, 80, 81, 189 y 190.
- [18] T. Itoh. Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 28:733–736, July 1980. Citado en la página 3.
- [19] F. Medina, M. Horno, and H. Baudrand. Generalized spectral analysis of planar lines on layered media including uniaxial and biaxial dielectric substrates. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 37:504–511, March 1989. Citado en la página 3.

- [20] N. K. Das and D. M. Pozar. Full-wave spectral-domain computation of material, radiation, and guided wave losses in infinite multilayered printed transmission lines. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 39:54–63, January 1991. Citado en la página 3.
- [21] G. Coen, N. Faché, and D. De Zutter. Comparison between two sets of basis functions for the current modeling in the Galerkin spectral domain solution for microstrips. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 42:505–513, March 1994. Citado en la página 3.
- [22] S. G. Pintzos and R. Pregla. A simple method for computing the resonant frequencies of microstrip ring resonators. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 26:809–813, October 1978. Citado en la página 3.
- [23] W. C. Chew and J. A. Kong. Resonance of nonaxial symmetric modes in circular microstrip disk antenna. *J. Math. Phys.*, vol. 21:2590–2598, October 1980. Citado en la página 3.
- [24] K. Kawano and H. Tomimuro. Spectral domain analysis of an open slot ring resonator. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 30:1184–1187, August 1982. Citado en la página 3.
- [25] T. M. Habashy, J. A. Kong, and W. C. Chew. Resonance and radiation of the elliptic disk microstrip structure, Part I: Formulation. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 35:877–886, August 1987. Citado en la página 3.
- [26] S. Assdilly, C. Terret, J. P. Daniel, G. Besnier, J. Mosig, and B. Roudot. Spectral domain approach applied to open resonators: Application to microstrip antennas. *Electron. Lett.*, vol. 24:105–106, January 1988. Citado en la página 3.
- [27] T. S. Horng, S. C. Wu, H. Y. Yang, and N. G. Alexopoulos. A generalized method for distinguishing between radiation and surface-wave losses in microstrip discontinuities. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 38:1800–1806, December 1990. Citado en la página 3.

- [28] T. S. Horng, W. McKinzie, and N. G. Alexopoulos. Full-wave spectral-domain analysis of compensation of microstrip discontinuities using triangular subdomain functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 40:2137–2147, December 1992. Citado en la página 3.
- [29] E. Drake, R. R. Boix, M. Horno, and T. K. Sarkar. Effect of substrate dielectric anisotropy on the frequency behavior of microstrip circuits. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 48:1394–1403, August 2000. Citado en la página 3.
- [30] K. A. Michalski and D. Zheng. Analysis of planar microstrip structure of arbitrary shape-To be, or not to be in the spectral domain? In *Symp. on Antenna Technology and Applied Electromagnetics*, pages 240–245, University of Manitoba, Canada, August 1990. Citado en la página 3.
- [31] J. R. Mosig (J. R. James and P. S. Hall, Ed.), R. C. Hall, and F. E. Gardiol. *Handbook of Microstrip Antennas*, chapter Numerical analysis of microstrip patch antennas, pages 393–453. Mc Graw Hill, London, 1989. Citado en la página 3.
- [32] J. R. Mosig (T. Itoh, Ed.). *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*, chapter 3: Integral Equation Techniques, pages 133–213. Wiley, New York, 1989. Citado en las páginas 3, 5, 6, 7, 80, 81, 90, 91, 100, 121, 145, 146, 207, 213, 216, 222 y 228.
- [33] K. A. Michalski and D. Zheng. Analysis of microstrip resonators of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 40:112–119, January 1992. Citado en las páginas 3 y 5.
- [34] J. R. Mosig and F. E. Gardiol. Analytical and numerical techniques in the Green's function treatment of microstrip antennas and scatterers. *Proc. Inst. Elect. Eng., pt. H*, vol. 130(no. 2):175–182, 1983. Citado en las páginas 3, 5, 121, 127, 128, 130, 139, 145, 146, 159, 178 y 208.
- [35] J. R. Mosig. Arbitrarily shaped microstrip structures and their analysis with

- a mixed potential integral equation. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 36:314–323, February 1988. Citado en las páginas 3 y 5.
- [36] K. A. Michalski. On the scalar potential of a point charge associated with a timeharmonic dipole in a layered medium. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 35:1299–1301, November 1987. Citado en la página 3.
- [37] K. A. Michalski. The mixed-potential electric field integral equation for objects in layered media. *Arch. Elek. Ubertragung.*, vol. 39:317–322, Sept./Oct. 1985. Citado en la página 3.
- [38] K. A. Michalski and D. Zheng. Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media, part I: Theory. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 38:335–344, March 1990. Citado en las páginas 4, 6, 80, 90, 91, 92, 94, 97, 100, 151, 155, 213 y 229.
- [39] K. A. Michalski and D. Zheng. Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media, part II: Implementation and results for contiguous half-spaces. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 38:345–352, March 1990. Citado en las páginas 4, 80 y 102.
- [40] K. A. Michalski and D. Zheng. Rigorous analysis of open microstrip lines of arbitrary cross section in bound and leaky regimes. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 37:2005–2010, December 1989. Citado en la página 5.
- [41] D. Zheng and K. A. Michalski. Analysis of coaxially fed microstrip antennas of arbitrary shape with thick substrates. *J. Electromagn. Waves Applicat.*, vol. 5(no. 12):1303–1327, 1991. Citado en la página 5.
- [42] S. Vitebskiy and L. Carin. Moment method modeling of short-pulse scattering from and the resonances of a wire buried inside a lossy, dispersive half-space. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 43:1303–1312, November 1995. Citado en las páginas 5 y 80.
- [43] S. Vitebskiy, K. Sturgess, and L. Carin. Short-pulse plane-wave scattering from buried perfectly conducting bodies of revolution. *IEEE Transactions*

- on Antennas & Propagation*, vol. 44:143–151, February 1996. Citado en las páginas 5 y 80.
- [44] J. R. Mosig (P. W. Hawkes, Ed.) and F. E. Gardiol. *Advances in Electronics and Electron Physics*, chapter A dynamical radiation model for microstrip structures, pages 139–238. Academic Press, New York, 1982. Citado en la página 5.
- [45] A. W. Glisson and D. R. Wilton. Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 28:593–603, September 1980. Citado en las páginas 5 y 96.
- [46] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 30:409–418, May 1982. Citado en las páginas 5 y 96.
- [47] D. C. Chang and J. X. Zheng. Electromagnetic modeling of passive circuit elements in MMIC. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 9:1741–1747, September 1992. Citado en la página 5.
- [48] N. K. Das and D. M. Pozar. A generalized spectral-domain Green's function for multilayer dielectric substrates with application to multilayer transmission lines. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 35:326–335, March 1987. Citado en la página 6.
- [49] L. Vegni, R. Cicchetti, and P. Capece. Spectral dyadic Green's function formulation for planar integrated structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 36:1057–1065, August 1988. Citado en la página 6.
- [50] K. A. Michalski (R. C. Hansen, Ed.). *Moment Methods in Antennas and Scattering*, chapter On the Efficient Evaluation of Integrals Arising In the Sommerfeld Half-Space Problem, pages 325–331. Artech House, Boston, 1990. Citado en las páginas 7 y 81.
- [51] R. R. Boix, F. Mesa, and F. Medina. Application of total least square to derivation of closed-form Green's functions for planar layered media. *IEEE*

- Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 55:268–280, February 2007. Citado en las páginas 7, 81, 82, 83, 84, 86, 102, 103, 104, 105, 110, 132, 133, 137, 138, 168, 170, 173 y 180.
- [52] M. I. Aksun. A robust approach for the derivation of closed-form Green's functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 44:651–658, May 1996. Citado en las páginas 7, 82, 132, 135 y 208.
- [53] V. N. Kourkoulos and A. C. Cangellaris. Accurate approximation of Green's functions in planar stratified media in terms of a finite sum of spherical and cylindrical waves. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 54:1568–1576, May 2006. Citado en las páginas 7, 82, 83, 84, 86, 102 y 103.
- [54] M. I. Aksun and G. Dural. Clarification of issues on the closed-form Green's functions in stratified media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 53:3644–3653, November 2005. Citado en las páginas 7, 83, 84, 132 y 208.
- [55] V. I. Okhmatovski and A. C. Cangellaris. A new technique for the derivation of closed-form electromagnetic Green's functions for unbounded planar layered media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 50:1005–1016, July 2002. Citado en las páginas 7, 82, 84 y 102.
- [56] A. L. Fructos, R. R. Boix, R. Rodríguez-Berral, and F. Mesa. Efficient determination of the poles and residues of spectral domain multilayered Green's functions that are relevant in far-field calculations. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 58:218–222, January 2010. Citado en las páginas 7, 85, 104, 119 y 141.
- [57] A. A. Oliner (J. L. Volakis, Ed.) and D. R. Jackson. *Antenna Engineering Handbook*, chapter 11: Leaky-wave Antennas. Mc Graw Hill, New York, 4th edition, 2007. Citado en las páginas 9 y 165.
- [58] B. A. Munk. *Frequency Selective Surfaces. Theory and Design*. John Wiley & Sons, New York, 2000. Citado en las páginas 9 y 151.
- [59] J. Huang and J. A. Encinar. *Reflectarray Antennas*. John Wiley & Sons., New Jersey, 2008. Citado en las páginas 9 y 151.

- [60] R. Mittra, C. H. Chan, and T. Cwik. Techniques for analyzing frequency selective surfaces—A review. *Proceedings of the IEEE.*, vol. 76:1593–1615, December 1988. Citado en la página 9.
- [61] C. R. Simovski, P. de Maagt, and I. V. Melchakova. High impedance surfaces having stable resonance with respect to polarization and incidence angle. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 53:908–9614, March 2005. Citado en la página 9.
- [62] M. Bozzi, S. Germani, L. Minelli, L. Perregrini, and P. de Maagt. Efficient calculation of the dispersion diagram of planar electromagnetic band-gap structures by the MoM/BI-RME method. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 53:29–35, January 2005. Citado en la página 10.
- [63] D. M. Pozar, S. D. Targonski, and H. D. Syrigos. Design of millimeter wave microstrip reflectarrays. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 45:287–296, February 1997. Citado en la página 10.
- [64] J. A. Encinar. Design of two-layer printed reflectarrays using patches of variable size. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 49:1403–1410, October 2001. Citado en la página 10.
- [65] R. A. Kipp and Chi H. Chan. A numerically efficient technique for the Method of Moments solution for planar periodic structures in layered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 42:635–643, April 1994. Citado en las páginas 10, 13, 151 y 152.
- [66] Y. Yu and C. H. Chan. Efficient hybrid spatial and spectral techniques in analyzing planar periodic structures with nonuniform discretizations. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 48:1623–1627, October 2000. Citado en las páginas 10, 13, 151 y 152.
- [67] G. V. Eleftheriades and J. R. Mosig. A fast integral equation technique for shielded planar circuits defined on nonuniform meshes. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 44:2293–2296, December 1996. Citado en las páginas 10, 13, 14, 151, 152 y 154.

- [68] J. Pascual-García, F. Quesada-Pereira, D. Cañete-Rebenaque, J. L. Gómez-Tornero, and A. Álvarez Melcón. A neural-network for the analysis of multilayered shielded microwave circuits. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 54:309–320, January 2006. Citado en las páginas 10, 14, 151, 153 y 154.
- [69] J. S. Gómez-Díaz, M. Martínez-Mendoza, F. J. Pérez-Soler, F. Quesada-Pereira, and A. Álvarez Melcón. Practical implementation of the spatial images technique for the analysis of shielded multilayered printed circuits. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 56:131–141, January 2008. Citado en las páginas 10, 151 y 153.
- [70] R. M. Shubair and Y. L. Chow. Efficient computation of the periodic Green's function in layered dielectric media. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 41:498–502, March 1993. Citado en las páginas 10, 13 y 152.
- [71] M. J. Park and S. Nam. Efficient calculation of the Green's function for multilayered planar periodic structures. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 46:1582–1583, October 1998. Citado en las páginas 10, 13, 152, 153, 154, 161, 162, 163, 169, 171, 173 y 174.
- [72] D. Wang, E. K. N. Yung, R. S. Chen, D. Z. Ding, and W. C. Tang. On evaluation of the Green function for periodic structures in layered media. vol. 3(no. 1):133–136, 2004. Citado en las páginas 10, 13, 152, 153, 154, 161, 162, 163, 169, 171, 173 y 174.
- [73] G. S. Wallinga, E. J. Rothwell, K. M. Chen, and D. P. Nyquist. Efficient computation of the two-dimensional periodic Green's function. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 47:895–897, May 1999. Citado en las páginas 11, 18, 27, 46, 49, 60, 62, 63 y 66.
- [74] B. Baekelandt, D. De Zutter, and F. Olyslager. Arbitrary order asymptotic approximation of a Green's function series. *AEU Int. J. Electron. Commun.*, vol. 51(No. 4):224–230, 1997. Citado en las páginas 11, 18, 27, 30, 40, 46, 48, 49, 60 y 75.

- [75] R. Lampe, P. Klock, and P. Mayes. Integral transforms useful for the accelerated summation of periodic, free-space Green's functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 33:734–736, August 1985. Citado en las páginas 11, 27, 48, 49 y 193.
- [76] S. Singh, W. F. Richards, J. R. Zinecker, and D. Wilton. Accelerating the convergence of series representing the free space periodic Green's function. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 38:1958–1962, December 1990. Citado en las páginas 11, 27, 34, 46, 189 y 193.
- [77] G. Valerio, P. Baccarelli, P. Burghignoli, and A. Galli. Comparative analysis of acceleration techniques for 2D and 3D Green's functions in periodic structures along one and two directions. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 55:1630–1642, June 2007. Citado en las páginas 11, 12, 18, 19, 25, 27, 28, 33, 37, 42, 48, 49, 56, 58, 59, 63, 69, 152, 160 y 169.
- [78] M. E. Veysoglu, H. Yueh, R. Shin, and J. Kong. Polarimetric passive remote sensing of periodic surfaces. *Journal of Electromagn. Waves Appl.*, vol. 5(no. 3):267–280, May 1991. Citado en la página 11.
- [79] A. W. Mathis and A. F. Peterson. A comparison of acceleration procedures for the two-dimensional periodic Green's function. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 44:567–571, April 1996. Citado en las páginas 11 y 25.
- [80] H. Rogier and D. De Zutter. A fast converging series expansion for the 2D periodic Green's function based on perfectly matched layers. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 52:1199–1205, April 2004. Citado en la página 11.
- [81] H. Rogier. New series expansions for the 3-D Green's function of multilayered media with 1-D periodicity based on perfectly matched layers. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 55:1730–1738, August 2007. Citado en las páginas 11 y 153.

- [82] P. P. Ewald. Die berechnung optischer und elektrostatischen gitterpotentiale. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 64:253–287, 1921. Citado en las páginas 11, 25, 27, 48 y 58.
- [83] F. Capolino, D. R. Wilton, and W. A. Johnson. Efficient computation of the 2D Green's function for 1D periodic structures using the Ewald method. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 53:2977–2984, September 2005. Citado en las páginas 11, 18, 25, 26, 27, 31, 33, 40, 41 y 63.
- [84] F. Capolino, D. R. Wilton, and W. A. Johnson. Efficient computation of the 3D Green's function for the helmholtz operator for a linear array of point sources using the Ewald method. *Journal of Comp. Physics*, vol. 223:250–261, April 2007. Citado en las páginas 11, 48, 49, 58, 59, 60 y 69.
- [85] N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, and R. Petit. Efficient calculation of the Green's function for electromagnetic scattering by gratings. *Phys. Rev. E*, vol. 49(No. 5):4563–4577, May 1994. Citado en la página 11.
- [86] S. K. Chin, N. A. Nicorovici, and R. C. McPhedran. Green's function and lattice sums for electromagnetic scattering by a square array of cylinders. *Phys. Rev. E*, vol. 49(No. 5):4590–4602, May 1994. Citado en las páginas 11, 18 y 152.
- [87] K. Yasumoto and K. Yoshitomi. Efficient calculation of lattice sums for free-space periodic Green's function. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 47:1050–1055, June 1999. Citado en las páginas 11 y 18.
- [88] S. Singh and R. Singh. On the use of Shanks's transform to accelerate the summation of slowly converging series. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 39:608–610, March 1991. Citado en la página 11.
- [89] S. Singh and R. Singh. Application of transforms to accelerate the summation of periodic free-space Green's function. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 38:1746–1748, November 1990. Citado en las páginas 11 y 48.

- [90] S. Singh and R. Singh. A convergence acceleration procedure for computing slowly converging series. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 40:168–171, January 1992. Citado en la página 11.
- [91] S. Singh and R. Singh. On the use of Chebyshev-Toeplitz algorithm in accelerating the numerical convergence of infinite series. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 40:171–173, January 1992. Citado en la página 11.
- [92] S. Singh and R. Singh. On the use of Levin's T-transform in accelerating the summation of series representing the free-space periodic Green's functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 40:884–886, May 1993. Citado en la página 11.
- [93] N. Kinayman and M. I. Aksun. Comparative study of acceleration techniques for integrals and series in electromagnetic problems. *Radio Science*, vol. 30(No. 6):1713–1722, November-December 1995. Citado en las páginas 11, 12, 19, 189 y 193.
- [94] J. R. Mosig and A. A. Melcón. The summation-by-parts algorithm. a new efficient technique for the rapid calculation of certain series arising in shielded planar structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 50:215–218, January 2002. Citado en la página 11.
- [95] C. M. Linton. The Green's function for the two-dimensional Helmholtz equation in periodic domains. *Journal of Eng. Math.*, vol. 33:377–402, May 1998. Citado en las páginas 12, 19 y 49.
- [96] A. Álvarez Melcón and J. R. Mosig. Two techniques for the efficient numerical calculation of the Green's functions for planar shielded circuits and antennas. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 48:1492–1504, September 2000. Citado en las páginas 13, 152 y 153.
- [97] P. Baccarelli, S. Paulotto, and C. Di Nallo. Full-wave analysis of bound and leaky modes propagating along 2D periodic printed structures with

- arbitrary metallisation in the unit cell. *IET Microw. Antennas Propagat.*, vol. 41:217–225, February 2007. Citado en las páginas 14, 151, 152 y 154.
- [98] O. Luukonen, M. G. Silveirinha, A. B. Yakovlev, C. R. Simovski, I. S. Nefedov, and S. A. Tretyakov. Effects of spatial dispersion on reflection from mushroom-type artificial impedance surfaces. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 57:2692–2699, November 2009. Citado en las páginas 14 y 154.
- [99] A. Hill, J. Burke, and K. Kottapalli. Three dimensional electromagnetic analysis of shielded microstrip circuits. *Int. J. Microwave Millimeter-Wave CAE.*, vol. 2(no. 4):286–296, 1992. Citado en las páginas 14 y 154.
- [100] C.-Y. Lee, Y. Liu, and T. Itoh. The effects of the coupled slotline mode and air-bridges on cpw and nlc waveguide discontinuities. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 43:2759–2765, December 1995. Citado en la página 14.
- [101] Y. Leviatan, P. G. Li, A. T. Adams, and J. Perini. Single-post inductive obstacle in rectangular waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 31:806–812, October 1983. Citado en la página 17.
- [102] R. E. Jorgenson and R. Mittra. Oblique scattering from lossy strip structures with one-dimensional periodicity. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 38:212–219, February 1990. Citado en las páginas 17 y 18.
- [103] W. F. Richards, K. McInturff, and P. S. Simon. An efficient technique for computing the potencial Green’s functions for a thin, periodically excited parallel-plate waveguide bounded by electric and magnetic walls. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 35:276–281, March 1987. Citado en la página 18.
- [104] K. E. Jordan, G. E. Richter, and P. Sheng. An efficient numerical evaluation of the Green’s function for the Helmholtz operator in periodic structures. *Journal of Comp. Physics*, vol. 63:222–235, 1986. Citado en las páginas 18, 27, 48, 50, 152, 161 y 172.

- [105] M. Abramowitz and I. A. Stegun (ed.). *Handbook of Mathematical Functions*. 9th printing. Dover, New York, 1972. Citado en las páginas 19, 24, 26, 28, 30, 36, 56, 59, 97, 99, 100, 117, 119, 120, 139, 193, 196 y 258.
- [106] A. Kustepeli and A. Q. Martin. On the splitting parameter in the Ewald method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 10:168–170, May 2000. Citado en las páginas 27, 31, 41, 49, 50 y 69.
- [107] M. G. Silveirinha and C. A. Fernandes. A new acceleration technique with exponential convergence rate to evaluate periodic Green's functions. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 53:347–355, January 2005. Citado en la página 27.
- [108] A. P. Smith and N. W. Ashcroft. Rapid convergence of lattice sums and structural integrals in ordered and disordered systems. *Phys. Rev. E*, vol. 38:12942–12943, December 1988. Citado en la página 27.
- [109] R. E. Jorgenson and R. Mittra. Efficient calculation of the free-space periodic Green's function. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 38:633–642, May 1990. Citado en las páginas 27, 28, 37 y 42.
- [110] J. M. Usoff and B. A. Munk. Edge effects of truncated periodic surfaces of thin wire elements. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 42:946–953, July 1994. Citado en las páginas 47 y 48.
- [111] D. S. Janning and B. A. Munk. Effects of surface waves on the currents of truncated periodic arrays. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 50:1254–1265, September 2002. Citado en la página 47.
- [112] P. Baccarelli, C. Di Nallo, S. Paulotto, and D. R. Jackson. A full-wave numerical approach for modal analysis of 1-D periodic microstrip structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 54:1350–1362, April 2006. Citado en las páginas 48, 56, 57 y 153.
- [113] S. P. Skobelev. Comments on "Comparative analysis of acceleration techniques for 2-D and 3-D Green's functions in periodic structures along one and two directions", December 2007. Citado en la página 48.

- [114] F. Capolino, D. R. Wilton, and W. A. Johnson. Efficient computation of the 3D Green's function with one dimensional periodicity using the Ewald method. In *IEEE Antennas and Propagation S. Int. Symposium Digest*, pages 2847–2850, Albuquerque, NM, July 2006. Citado en las páginas 48 y 58.
- [115] A. L. Fructos, R. R. Boix, F. Mesa, and F. Medina. An efficient approach for the computation of 2-d Green's functions with 1-d and 2-d periodicities in homogeneous media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 56:3733–3742, Dec 2008. Citado en la página 48.
- [116] M. M. Ivanishin and S. P. Skobelev. On the efficient computation of the Green's function for doubly periodic structures by using the kummer's method of higher orders. In *Proceedings of the 12th Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, pages 544–546, Odessa, Ukraine, June 2008. Citado en las páginas 48, 50, 56 y 57.
- [117] D. V. Orden and V. Lomakin. Rapidly convergent representations for 2D and 3D Green's functions for a linear periodic array of dipole sources. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 57:1973–1984, July 2009. Citado en la página 63.
- [118] R. K. Hoffmann. *Handbook of Microwave Integrated Circuits*. Artech House, Norwood, MA, 1987. Citado en la página 80.
- [119] D. M. Pozar. Microstrip antennas. Citado en la página 80.
- [120] J. R. James and P. S. Hall. *Handbook of Microstrip Antennas*, volume Vols. 1 & 2. Peter Peregrinus Ltd., London, 1989. Citado en la página 80.
- [121] D. R. Jackson (J. L. Volakis, Ed.). *Antenna Engineering Handbook*, chapter 7: Microstrip Antennas. Mc Graw Hill, New York, 4th edition, 2007. Citado en la página 80.
- [122] A. Karlsson and G. Kristensson. Electromagnetic scattering from subterranean obstacles in a stratified ground. *Radio Science*, vol. 18:345–356, May-June 1983. Citado en la página 80.

- [123] P. E. Wannamaker, G. W. Hohmann, and W. A. San Filippo. Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earths using integral equations. *Geophys.*, vol. 49:60–74, January 1984. Citado en la página 80.
- [124] R. H. Hardman and L. C. Shen. Theory of induction sonde in dipping beds. *Geophys.*, vol. 51:800–809, March 1986. Citado en la página 80.
- [125] S. Vitebskiy and L. Carin. Ultra-wideband, short-pulse ground-penetrating radar: simulation and measurement. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35:762–772, May 1997. Citado en la página 80.
- [126] T. J. Cui, W. Wiesbeck, and A. Herschlein. Electromagnetic scattering by multiple three-dimensional scatterers buried under multilayered media. part I: Theory. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 36:526–534, March 1998. Citado en la página 80.
- [127] T. J. Cui, W. Wiesbeck, and A. Herschlein. Electromagnetic scattering by multiple three-dimensional scatterers buried under multilayered media. part II: Numerical implementations and results. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 36:535–546, March 1998. Citado en la página 80.
- [128] L. Tsang, E. Njoku, and J. A. Kong. Microwave thermal emission from a stratified medium with nonuniform temperature distribution. *J. Appl. Phys.*, vol. 46:5127–5133, December 1975. Citado en la página 80.
- [129] L. Carin, N. Geng, M. McClure, J. Sichina, and L. Nguyen. Ultra-wideband synthetic-aperture radar for mine-field detection. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 41:18–33, February 1999. Citado en la página 80.
- [130] W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press, New York, 1995. Citado en las páginas 80, 83, 100, 102 y 113.
- [131] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard. A closed-form spatial Green's function for the thick microstrip substrate. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 39:588–592, March 1991. Citado en las páginas 82, 83, 84, 132, 135 y 208.

- [132] F. Mesa, R. R. Boix, and F. Medina. Closed-form expressions of multilayered planar Green's functions that account for the continuous spectrum in the far field. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 56:1601–1614, July 2008. Citado en las páginas 82, 84, 85, 104, 107, 111, 113, 117, 120, 121, 131, 132, 137 y 152.
- [133] R. W. Hamming. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Dover, New York, 1973. Citado en las páginas 82 y 135.
- [134] T. K. Sarkar and O. Pereira. Using the Matrix Pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 37(no. 1):48–55, February 1995. Citado en las páginas 82 y 207.
- [135] A. G. Polimeridis, T. V. Yioultsis, and T. D. Tsiboukis. Fast numerical computation of Green's functions for unbounded planar stratified media with a finite-difference technique and gaussian spectral rules. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 55:100–107, January 2007. Citado en la página 82.
- [136] V. I. Okhmatovski and A. C. Cangellaris. Evaluation of layered media Green's functions via rational function fitting. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14:22–24, January 2004. Citado en las páginas 82, 84, 86 y 102.
- [137] C. A. Balanis. *Antenna Theory. Analysis and Design*. Wiley, 2nd edition, 1997. Citado en la página 82.
- [138] F. Ling, V. Okhmatovski, B. Song, and A. Dengi. Systematic extraction of static images from layered media Green's function for accurate dcim implementation. vol. 6:215–218, 2007. Citado en la página 83.
- [139] N. V. Shuley, R. R. Boix, F. Medina, and M. Horno. On the fast approximation of Green's functions in MPIE formulations for planar layered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 50:2185–2192, September 2002. Citado en la página 83.

- [140] M. Yuan, T. K. Sarkar, and M. Salazar-Palma. A direct discrete complex image method from the closed-form Green's functions in multilayered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 54:1025–1032, March 2006. Citado en las páginas 83 y 132.
- [141] L. Zhuang, G. Zhu, Y. Zhang, and B. Xiao. An improved discrete complex image method for Green's functions in multilayered media. *Microwave & Optical Technology Letters*, vol. 49(no. 6):1337–1340, June 2007. Citado en la página 83.
- [142] S. A. Teo, S. T. Chew, and M. S. Leong. Error analysis of the discrete complex image method and pole extraction. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 51:406–413, February 2003. Citado en las páginas 84, 85 y 138.
- [143] C. H. Chan and R. A. Kipp. Application of the complex image method to multilevel, multiconductor microstrip lines. *Int. J. Microwave Millimeter-Wave CAE.*, vol. 7:359–367, 1997. Citado en las páginas 84 y 102.
- [144] A. Alparslan, M. I. Aksun, and K. A. Michalski. Closed-form Green's functions in planar layered media for all ranges and materials. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 58:602–613, March 2010. Citado en la página 84.
- [145] A. G. Polimeridis, T. V. Yioultsis, and T. D. Tsiboukis. A robust method for the computation of Green's functions in stratified media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 55:1963–1969, July 2007. Citado en las páginas 84, 87, 102 y 139.
- [146] A. G. Polimeridis and T. V. Yioultsis. On the efficient computation of closed-form Green's functions in planar stratified media. *International Journal of Radio Frequency and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 18:118–126, March 2008. Citado en las páginas 84, 87, 102 y 139.
- [147] R. R. Boix, A. L. Fructos, and F. Mesa. Closed-form uniform asymptotic

- expansions of Green's functions in layered media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 58:2934–2945, September 2010. Citado en las páginas 85, 124 y 152.
- [148] R. Rodríguez-Berral, F. Mesa, and F. Medina. Appropriate formulation of the characteristic equation for open nonreciprocal layered waveguides with different upper and lower half-spaces. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 53:1613–1623, May 2005. Citado en las páginas 85, 104 y 107.
- [149] F. Ling and J. M. Jin. Discrete complex image method for Green's functions of general multilayered media. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 10:400–402, October 2000. Citado en la página 85.
- [150] A. G. Polimeridis, T. V. Yioultsis, and T. D. Tsiboukis. An efficient pole extraction technique for the computation of Green's functions in stratified media using a sine transformation. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 55:227–229, January 2007. Citado en las páginas 85, 107 y 119.
- [151] B. Wu and L. Tsang. Fast computation of layered medium Green's functions of multilayered and lossy media using fast all-modes method and numerical modified steepest descent path method. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 56:1446–1454, June 2008. Citado en la página 86.
- [152] H. Rogier and D. V. Ginste. A fast procedure to accurately determine leaky modes in multilayered planar dielectric substrates. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 56:1413–1422, June 2008. Citado en la página 86.
- [153] S. V. Huffel and J. Vandevall. *The total least squares problem: computational aspects and analysis*. *Frontiers in Applied Mathematics*, volume 9. SIAM, Philadelphia, 1991. Citado en las páginas 86, 102, 199, 202 y 203.
- [154] M. Marin, S. Barkeshli, and P. Pathak. Efficient analysis of planar microstrip geometries using a closed-form asymptotic representation of the grounded

- dielectric slab Green's function. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 37:669–679, April 1989. Citado en la página 87.
- [155] S. Barkeshli, P. H. Pathak, and M. Marin. An asymptotic closed-form microstrip surface Green's function for the efficient moment method analysis of mutual coupling in microstrip antennas. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 38:1374–1383, September 1989. Citado en la página 87.
- [156] C. Bender and S. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. McGraw Hill, 1978. Citado en las páginas 87, 111 y 118.
- [157] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York, 1949. Citado en la página 91.
- [158] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 1980. Citado en las páginas 97 y 139.
- [159] C. Gennarelli and L. Palumbo. A uniform asymptotic expansion of a typical diffraction integral with many coalescing simple pole singularities and first-order saddle point. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 32:1122–1124, October 1984. Citado en las páginas 111 y 125.
- [160] R. Rojas. Comparison between two asymptotic methods. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 35:1489–1492, December 1987. Citado en las páginas 111 y 125.
- [161] P. Baccarelli, P. Burghignoli, F. Frezza, A. Galli, G. Lovat, and D. R. Jackson. Approximate analytical evaluation of the continuous spectrum in a substrate-superstrate dielectric waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 50:2690–2701, December 2002. Citado en las páginas 118 y 119.

- [162] J. R. Mosig and A. A. Melcón. Green's functions in lossy layered media: integration along the imaginary axis and asymptotic behavior. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 51:3200–3208, December 2003. Citado en las páginas 121, 127, 128, 130, 139, 145, 146, 159 y 208.
- [163] P. C. Clemmow. Some extensions to the method of integration by steepest descents. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 3:241–256, 1950. Citado en la página 125.
- [164] Bouché D., Molinet F., and Mittra R. *Asymptotic methods in electromagnetics*. Springer, 1997. Citado en la página 125.
- [165] P. Baccarelli, P. Burghignoli, F. Frezza, A. Galli, G. Lovat, and D. R. Jackson. Uniform analytical representation of the continuous spectrum excited by dipole sources in a multilayer dielectric structure through weighted cylindrical leaky waves. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 52:653–665, March 2004. Citado en la página 126.
- [166] F. J. Demuyne, G. A. E. Vandenbosch, and A. R. Van de Capelle. The expansion wave concept – part i: Efficient calculation of spatial Green's functions in a stratified dielectric medium. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 46:397–406, March 1998. Citado en las páginas 133, 137 y 138.
- [167] Y. Hua and T. K. Sarkar. Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 37:229–234, February 1989. Citado en las páginas 135 y 207.
- [168] B. Gustavsen and A. Semlyen. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14:1052–1061, July 1999. Citado en la página 142.
- [169] G. Valerio, P. Baccarelli, S. Paulotto, F. Frezza, and A. Galli. Regularization

- of mixed-potential layered-media Green's functions for efficient interpolation procedures in planar periodic structures. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 57:122–134, January 2009. Citado en la página 153.
- [170] Y. Yu and C. H. Chan. On the extension of Ewald's method to periodic structures in layered media. *Microwave & Optical Technology Letters*, vol. 19:125–131, October 2000. Citado en la página 161.
- [171] D. Cañete-Rebenaque J. L. Gómez-Tornero M. Martínez-Mendoza, J. S. Gómez-Díaz and A. Álvarez Melcón. Design of bandpass transversal filters employing a novel hybrid structure. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 52:2670–2678, December 2007. Citado en la página 165.
- [172] N. Hojjat, S. Safavi-Naeini, R. Faraji-Dana, and Y. L. Chow. Fast computation of the nonsymmetrical components of the Green's function for multilayer media using complex images. *Proc. Inst. Elec. Eng.-Microwave Antennas Propag.*, vol. 145(no. 4):285–288, 1998. Citado en las páginas 170 y 173.
- [173] S. Oroskar, D. R. Jackson, and D. R. Wilton. Efficient computation of the 2D periodic Green's function using the Ewald method. *Journal of Comp. Physics*, vol. 219:899–911, 2006. Citado en la página 172.
- [174] S. Haykin. *Communication Systems*. John Wiley & Sons., New York, 3rd edition, 1994. Citado en la página 190.
- [175] R. Haberman. *Elementary Applied Partial Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey, 1983. Citado en la página 191.
- [176] O. Bretscher. *Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1995. Citado en la página 199.
- [177] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Maryland, 3rd edition, 1996. Citado en la página 201.
- [178] G. R. B. Prony. Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatation de fluides elastiques et sur celle de la vapeur de l'alcool, a differents temperatures. *Journal de l'Ecole Polytechnique (Paris)*, vol. 1(No. 2):24–76, 1795. Citado en la página 207.

-
- [179] F. Mesa, R. Marqués, and M. Horno. A general algorithm for computing the bidimensional spectral Green's dyad in multilayered complex bianisotropic media: The Equivalent Boundary Method. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, vol. 39:1640–1649, September 1991. Citado en las páginas 213 y 214.

Publicaciones relacionadas con la tesis

Publicaciones en Revistas Internacionales

- **Ana L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa, F. Medina. An Efficient Approach for the Computation of 2-D Green's Functions with 1-D and 2-D Periodicities in Homogeneous Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 3733-3742, n° 12, Diciembre 2008.
- R. Rodríguez-Berral, F. Mesa, **Ana L. Fructos**, R. R. Boix. On the Physical Meaning of the Spectral Decomposition. *IEEE Microwave and Wireless Component Letters*, vol. 19, pp. 488-490, n° 8, Agosto 2009.
- **Ana L. Fructos**, R. R. Boix, R. Rodríguez-Berral, F. Mesa. Efficient Determination of the Poles and Residues of Spectral Domain Multilayered Green's Functions that are relevant in Far-Field Calculations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, pp. 218-222, n° 1, Enero 2010.
- **Ana L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Application of Kummer's transformation to the efficient computation of the 3-D Green's function with 1-D periodicity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, pp. 95-106, n° 1, Enero 2010.
- R. R. Boix, **Ana L. Fructos**, F. Mesa. Closed-Form Uniform Asymptotic Expansions of Green's Functions in Layered Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, pp. 2934-2945, n° 9, Septiembre 2010.

- **Ana L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Efficient Computation of the Off-Diagonal Elements of the Vector-Potential Multilayered Periodic Dyadic Green's Function. Artículo parcialmente aceptado para su publicación en *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.

Contribuciones a Congresos Internacionales

- R. R. Boix, **A. L. Fructos**, F. Mesa, F. Medina. Revisited implementation of the spectral Kummer-Poisson's method for the efficient computation of the 2D periodic Green's functions in homogeneous media. Comunicación oral en *Progress in Electromagnetics Research Symposium, Hangzhou (CHINA)*, 24-28 Marzo 2008. Proceedings PIERS 2008 in Hangzhou, pp. 848-850, ISBN: 978-1-934142-00-4.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa, F. Medina. Efficient evaluation of the 2-D Green's functions with one-dimensional and two-dimensional periodicities in homogeneous media. Comunicación oral en *IEEE International Symposium on Antennas and Propagations and USNC/URSI National Radio Science meeting, San Diego, California (EE.UU.)*, 5-12 Julio 2008. 2008 IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Digest (CD-ROM), ISBN: 978-1-4244-2042-1.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa, F. Medina. Application of the Kummer's transformation to the efficient computation of 3-D Green's function with one-dimensional periodicity in homogeneous media. Comunicación oral en *IEEE International Symposium on Antennas and Propagations and USNC/URSI National Radio Science meeting, San Diego, California (EE.UU.)*, 5-12 Julio 2008. 2008 IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Digest (CD-ROM), ISBN: 978-1-4244-2042-1.
- R. Rodríguez-Berrral, F. Mesa, **A. L. Fructos**, R. R. Boix. Some Considerations on the Physical Meaning of the Spectral Decomposition. Comunicación oral en *IEEE International Symposium on Antennas and Propagations*

and USNC/URSI National Radio Science meeting, Charleston, South Carolina (EE.UU.), 1-5 Junio 2009. 2009 IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Digest (CD-ROM), ISBN: 978-1-4244-3647-7.

- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, R. Rodríguez-Berrral, F. Mesa. Efficient Computation of Proper and Improper Poles of the Spectral Domain Multilayered Green's Functions with Application to Spatial-Domain Far-Field Calculations. Comunicación oral en *IEEE International Symposium on Antennas and Propagations and USNC/URSI National Radio Science meeting*, Charleston, South Carolina (EE.UU.), 1-5 Junio 2009. 2009 IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Digest (CD-ROM), ISBN: 978-1-4244-3647-7.
- R. R. Boix, **A. L. Fructos**, F. Mesa. Uniform Asymptotic Expansion of Multilayered Media Green's Functions. Comunicación oral en *III LEMA-EPFL Workshop on Integral Techniques for Electromagnetics (INTELECT'2009)*, Koc University, Estambul (Turquía), Septiembre 2009.
- R. R. Boix, **A. L. Fructos**, F. Mesa. "Relay race" closed-form expressions of Green's functions for planar layered media. Póster en *IEEE International Symposium on Antennas and Propagations and USNC/URSI National Radio Science meeting*, Toronto (Canadá). 11-17 Julio 2010. 2010 IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Digest (CD-ROM), ISBN: 978-1-4244-4968-2.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. A contribution to the efficient computation of multilayered periodic Green's functions. Comunicación oral en *IV LEMA-EPFL Workshop on Integral Techniques for Electromagnetics (INTELECT'2010)*, Les Diablerets (Suiza), Octubre 2010.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. A contribution to the efficient computation of multilayered periodic Green's functions. Comunicación oral en *European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP'2011)*, Roma (Italia), Abril 2011. (Pendiente de celebración.)

Contribuciones a Congresos Nacionales

- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa, F. Medina. Un nuevo método para el cálculo eficiente de la función de Green 2D en problemas periódicos 1D y 2D. Comunicación oral en *XXII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, La Laguna, Tenerife (España), Septiembre 2007. Actas del Simposium, libro de resúmenes p. 82 (artículo completo en CD-ROM), ISBN 978-84-690-7500-5.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Cálculo de la función de Green 3D con periodicidad 1D mediante la transformación de Kummer. Comunicación oral en *XXIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Madrid (España), Septiembre 2008. Actas del Simposium, libro de resúmenes p. 104 (artículo completo en CD-ROM), ISBN 978-84-612-6291-5.
- R. R. Boix, F. Mesa, **A. L. Fructos**, F. Medina. Efficient computation of non-periodic Green's functions in layered media and periodic Green's functions in homogeneous media. Comunicación oral en *VI Iberian Meeting on Computational Electromagnetics*, Chiclana de la Frontera, Cádiz (España), Octubre 2008, ISBN: 978-84-691-58.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, R. Rodríguez-Berral, F. Mesa Cálculo eficiente del campo lejano de funciones de Green multicapa. Comunicación oral en *XXIV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Santander (España), Septiembre 2009. ISBN 978-84-8102-5.
- R. Rodríguez-Berral, F. Mesa, **A. L. Fructos**, R. R. Boix. Consideraciones sobre el significado físico de la descomposición espectral. Comunicación oral en *XXIV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Santander (España), Septiembre 2009. ISBN 978-84-8102-5.
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Closed-Form Uniform Asymptotic Expansion of Multilayered Media Green's Functions. Comunicación oral en *VII Iberian Meeting on Computational Electromagnetics*, Monfragüe, Cáceres (España), Mayo 2010.

- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Expresiones en Forma Cerrada para el Campo Próximo y el Campo Lejano de Funciones de Green No Periódicas en Medios Multicapa. Comunicación oral en *XXV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Bilbao (España), Septiembre 2010. Actas del Simposium, libro de resúmenes p. 58 (artículo completo en CD-ROM).
- **A. L. Fructos**, R. R. Boix, F. Mesa. Una Aportación al Cálculo Rápido y Preciso de Funciones de Green Periódicas en Medios Multicapa. Comunicación oral en *XXV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Bilbao (España), Septiembre 2010. Actas del Simposium, libro de resúmenes p. 58 (artículo completo en CD-ROM).

