Universidad de Sevilla.

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.

ESPACIOS DE BESICOVITCH GENERALIZADOS Y CONVERGENCIA EN DOS ESCALAS.

Memoria presentada por
Inmaculada Gayte Delgado
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Sevilla, mayo 1998.

Fdo. Inmaculada Gayte Delgado.

Vº Bº
de los directores
del trabajo

Fdo. Juan Casado Díaz
Profesor Titular de
la Universidad de Sevilla.

Fdo. Julio Couce Calvo
Profesor Titular de
la Universidad de Sevilla.

38 67

10 JUN. 1998

Agradecimientos

Llegado a este punto es el momento de echar una mirada atrás y recordar. Ha habido tiempos difíciles, al principio por la desorientación y por sentir que no avanzaba, después porque hay resultados que esperas que salgan y que no salen, al final porque te entra la impaciencia por terminar. Pero junto con estas sensaciones he tenido períodos muy felices, en los que el trabajo me recompensaba, en los que he sentido el calor de los amigos, en los que he tenido muchos apoyos, ... Cuando medito sobre ello no puedo olvidar que tengo que agradecer a muchos el haber llegado hasta aquí.

Mi gratitud a Juan que ha sido mucho más que un director de esta tesis. Te agradezco que me hayas ayudado siempre que lo he necesitado, que hayas sido generoso en compartir conmigo tus intuiciones matemáticas, tus ideas en demostrar los resultados, que hayas tenido paciencia en corregirme. Te debo, especialmente, el que contigo he aprendido y he recuperado la motivación para seguir en este camino profesional que reconozco estuve cerca de abandonar.

A mis directores, Juan Casado Díaz y Julio Couce Calvo, os agradezco el trabajo que me habéis dedicado y vuestra disponibilidad.

A mis padres les tengo mucho que agradecer. Me habéis dado unos estudios y la libertad de decidir mi camino, y durante el tiempo que he estado realizando esta tesis habéis estado siempre dispuestos a descargarme de las tareas domésticas.

A mi marido, porque me has escuchado siempre que me has visto preocupada, porque me has enseñado a comprender que las cosas que se desean cuestan, pero que el que no se rinde al final termina consiguiendo más tarde o más temprano sus propósitos. Me haces sentirme fuerte y feliz.

A mis amigos José Antonio Langa, Antonio Suárez, Mª de los Ángeles Rodríguez e Isidoro Albarreal, porque tengo vuestra amistad, que me hace estar a gusto en el trabajo y porque no puedo olvidar vuestro ofrecimiento a ayudarme.

A todos mis compañeros de Departamento, os agradezco vuestro aprecio y vuestro apoyo.

Quiero recordar también al profesor José Domingo Martín Gómez, tan atento siempre a las publicaciones que pudieran interesarme, al profesor Tomás Chacón Rebollo, del que no puedo olvidar que fue el que me encaminó en el estudio de las funciones casi periódicas y siempre se ha mostrado interesado por mi trabajo, y al profesor Enrique Fernández Cara, que me ha orientado en momentos de incertidumbre y me ha facilitado contactar con profesores invitados por el Departamento.

A Manolo y a nuestros hijos

Inmaculada, Manuel Jesús e Irene.

Índice

Notación

E': espacio dual del espacio de Banach E.

$\mathcal{L}(E,F)$: espacio de las aplicaciones lineales y continuas entre los espacios de Banach E y F.

$\mathcal{L}(E)$: espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en E.

$\hat{x}$: clase de equivalencia de x.

$B(z;r)$: bola abierta en $\mathbb{R}^N$ de centro z y radio r.

Q: abierto de $\mathbb{R}^N$.

$W^{1,p}(Q)$: espacio de Sobolev formado por las funciones de $L^p(Q)$ con derivadas distribucionales de primer orden en $L^p(Q)$.

$C_0^\infty(\Omega)$: espacio de las funciones de clase infinito en Ω y de soporte compacto en Ω.

X: álgebra de Banach con valor medio (véase la Definición 2.18).

Y: cubo en $\mathbb{R}^N$.

$C_\sharp(Y)$: espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ que son Y-periódicas.

$C_\sharp^\infty(Y)$: espacio de las funciones de clase infinito en $\mathbb{R}^N$ que son Y -periódicas.

$L_\sharp^p(Y)$: espacio definido como el cierre de $C_\sharp^\infty(Y)$ en la norma de $L^p(Y)$. Equivale al espacio de las funciones de $L^p(Y)$ extendidas por Y-periodicidad a $\mathbb{R}^N$.

$H_\sharp^1(Y)$: espacio definido como el cierre de $C_\sharp^\infty(Y)$ en la norma de $H^1(Y)$.

$CAP(\mathbb{R}^N)$: espacio de las funciones uniformemente casi periódicas o casi periódicas en el sentido de Bohr.

$Trig(\mathbb{R}^N)$: espacio de los polinomios trigonométricos con valores reales.

$[\cdot]$: seminorma.

$[\cdot]_p$: seminorma p de Besicovitch.

$|x|$: norma de x en $\mathbb{R}^N$.

$M\{f\}$: media de la función f.

ρ: función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ con las propiedades:

$$\rho \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1,\ \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| > 1 \text{ y } \rho(x) = \rho(-x).$$

ρ_δ: función definida para $\delta > 0$ como

$$\rho_\delta(x) = \delta^{-N} \rho(\frac{x}{\delta}).$$

n_i: componente i-ésima del vector normal, unitario, exterior a la frontera.

H: espacio de Hilbert.

$|\cdot|_H$: norma del espacio H.

$(\cdot,\cdot)_H$: producto escalar en H.

$[\cdot]_{2,H}$: seminorma H de Besicovitch.

$L^2_\mu(\Omega)$: espacio de funciones en Ω con medida μ, medibles, de cuadrado integrable.

$\xrightarrow{2e}$: convergencia en dos escalas.

$\rightharpoonup$: convergencia débil.

B_r: bola abierta en $\mathbb{R}^N$ de centro cero y radio r.

T_α: función truncada a la altura α, es decir,

$$T_\alpha(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq \alpha \\ \alpha & \text{si} \quad s > \alpha \quad \forall s \in \mathbb{R}. \\ -\alpha & \text{si} \quad s < -\alpha \end{cases}$$

p': conjugado de p.

$sgn(u)$: signo de u.

$X_{|u|>r}$: función característica en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : \quad |u(x)| > r\}$.

$C_b(\mathbb{R}^N; E)$: espacio de funciones de $\mathbb{R}^N$ con valores en un espacio de Banach E, continuas y acotadas.

$C_0(\mathbb{R}^N; E)$: espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^N$ con valores en E y de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$.

K_t: homotético del conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ de razón $t > 0$.

$|K|$: medida de Lebesgue del conjunto K.

B^p: espacio de Besicovitch.

$St(Q; B^p)$: espacio de las funciones escalonadas en $Q \subset \mathbb{R}^N$ y con valores en el espacio de Besicovitch B^p.

e_j: j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^N$.

$\mathbb{N}^*$: conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$sop(h)$: soporte de la función h.

$C_{r,s}$: corona en $\mathbb{R}^N$ de centro cero y radios r, s, con $r < s$.

$t \wedge R$: mínimo entre t y R.

$t \vee R$: máximo entre t y R.

$\mathbb{R}^*$: conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ (y ∂_i): derivada parcial respecto a x_i en el sentido clásico o distribucional.

$\partial_{i,m}$: derivada i-ésima en media.

∇_m: gradiente en media.

div_m: divergencia en media.

$O(\delta)$: infinitésimo de orden δ.

$A \triangle B$: es el conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$E_1 \otimes E_2$: espacio constituido por las funciones de la forma

$$\{\sum_{i \in I} f_i(x) g_i(x) \quad : \quad I \subset \mathbb{N} \text{ finito, } f_i \in E_1,\, g_i \in E_2 \; \forall i \in I\}.$$

diam (K): diámetro del conjunto K.

Introducción

El concepto de convergencia en dos escalas fue introducido por Nguetseng (véase [NG1], también [A1]) a fin de justificar los desarrollos asintóticos que aparecen al resolver diversos problemas de homogeneización periódica. El ejemplo más elemental y clásico consiste en encontrar el problema que satisface la función u, límite de la sucesión u_ε construida como solución del problema

$$\begin{cases} -div[A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon] = f \text{ en } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, A una función matricial periódica, con período $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^N$, que satisface las hipótesis de coercividad y acotación habituales y f una función dada (por ejemplo en $L^2(\Omega)$). Como es conocido (véanse p. ej. [B L P], [SP]) es natural buscar para u_ε un desarrollo del tipo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots \tag{0.2}$$

donde las funciones u_i son periódicas en la segunda variable. El suponer cierto este desarrollo conduce a una cadena de ecuaciones que de manera formal permite encontrar los problemas que satisfacen las funciones u_i.

El método de la energía de Tartar (véase [T2]) para demostrar que u_ε converge efectivamente a la función u que proporciona el método descrito anteriormente, consiste en utilizar funciones test particulares en (0.1) para las cuales sea fácil pasar al límite en las distintas expresiones integrales que aparecen. Concretamente, resulta natural introducir en (0.1) funciones test con una estructura similar a la de las funciones u_i que aparecen en el desarrollo (0.2), es decir, funciones del tipo $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$, con ψ periódica en su segunda variable y suficientemente regular. Ello conduce, por tanto, a pasar al límite en expresiones del tipo

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x)\Psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx \tag{0.3}$$

donde ∇u_ε converge débilmente en $L^2(\Omega)^N$. Nótese que en (0.3) nos encontramos con el límite de un producto de dos términos que convergen débilmente y que por tanto, no es evidente pasar al límite (véase p. ej. [DO]).

La siguiente definición fue introducida por Nguetseng a fin de pasar al límite en una expresión del tipo de la que aparece en (0.3):

Se dice que una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ acotada en $L^p(\Omega)$, con $1 < p \leq +\infty$, converge en dos escalas hacia una función $u \in L^p(\Omega; L^p_\sharp(Y))$ si para toda función $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, Y-periódica en la segunda variable y suficientemente regular, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_\Omega M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx, \tag{0.4}$$

donde se ha utilizado la notación

$$M_y\{g\} = \frac{1}{|Y|}\int_Y g(y)dy \quad \forall g \in L^1_\sharp(Y).$$

En relación con otros tipos de convergencia, nótese que si $\{u_\varepsilon\}$ converge fuerte en $L^p(\Omega)$ hacia una función $\bar{u}(x)$ entonces $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas hacia la función $u(x,y) = \bar{u}(x)$. Por otra parte, si $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u entonces $\{u_\varepsilon\}$ converge débilmente en $L^p(\Omega)$ hacia $\bar{u}(x) = M_y\{u(x,y)\}$. Por tanto, la convergencia en dos escalas es un concepto intermedio entre las convergencias fuerte y débil en $L^p(\Omega)$.

El resultado más importante con respecto a este tipo de convergencia establece que toda sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, con $1 < p \leq +\infty$, contiene una subsucesión que converge en dos escalas. Este teorema fue probado por Nguetseng en [NG1]. Una demostración más simple debida a Allaire se encuentra en [A1].

Nótese que en la convergencia en dos escalas, la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ depende solamente de la variable $x \in \Omega$ mientras que su límite u depende de las variables $x \in \Omega$ e $y \in Y$. La nueva variable contiene información sobre la microestructura del problema; de hecho, siguiendo a Arbogast, Douglas y Hornung (véase [AR D H]) definimos $\hat{u}_\varepsilon : \Omega \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ por

$$\hat{u}_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(\varepsilon k(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y),$$

con $k(x)$ igual al elemento $(k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$ tal que x pertenece al cubo $\prod_{i=1}^N (k_i - \frac{1}{2}, k_i + \frac{1}{2})$. Entonces, tal y como ha hecho notar Lenczner (véase [LEN1]), el límite en dos escalas de u_ε coincide con el límite débil en $L^p(\Omega \times Y)$ de $\hat{u}_\varepsilon$. Nótese que para cada $k \in \mathbb{Z}^N$ la función $\hat{u}_\varepsilon$ es constante respecto a x cuando x varía en el cubo de centro εk y lado ε y que como función de y es la transformada de la función u_ε por el cambio de variables que lleva el cubo de centro εk y lado ε en Y. Se trata por tanto de expandir cada pequeño cubo a fin de no perder información cuando ε tiende a cero.

El método de convergencia en dos escalas ha permitido resolver multitud de problemas en homogeneización periódica. Por ejemplo, problemas de vibraciones entre estructuras sólidas y fluidas (véase [A C], [NG2]), problemas de convección-difusión con velocidad convectiva oscilante en tiempo (véase [A2]), leyes de conservación escalares con segundos miembros altamente oscilantes (véase [E]), problemas de autovalores (véase [A B]), la homogeneización de circuitos eléctricos (véase [LEN1]), la homogeneización de la ecuación de ondas con coeficientes y datos oscilantes (véase [LEN2]), ecuaciones de evolución con coeficientes oscilantes periódicamente (véase [CL P]), etc. Como variante del método de convergencia en dos escalas también ha sido obtenida la homogeneización de problemas de Dirichlet no lineales en dominios perforados con estructura periódica (véase [C]).

Nuestro principal interés en el presente trabajo consiste en extender el concepto de convergencia en dos escalas a casos no periódicos con la consiguiente aplicación a problemas de homogeneización no periódica. Concretamente, vamos a trabajar con los espacios de Besicovitch generalizados (ver capítulo 2). Recordemos que el espacio de las funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch, de orden p, B^p, está definido como el cierre del espacio de los polinomios trigonométricos $Trig(\mathbb{R}^N)$ respecto de la norma

$$\|f\|_{B^p}^p = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f|^p dx$$

(véanse p. ej. [B], [BE], [COR], [ZA], [LE Z]). Los espacios que nosotros manejamos en esta memoria se construyen de forma análoga pero cambiando $Trig(\mathbb{R}^N)$ por un álgebra X de funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ que satisfacen propiedades análogas a las de $Trig(\mathbb{R}^N)$ (véase Definición 2.18), de ahí que sigamos hablando de espacios de Besicovitch e incluso que los sigamos denotando por B^p. La definición del espacio B^2 ha sido dada por Jikov, Kozlov y Oleinik en [J K O] con el fin de obtener, con las técnicas clásicas, el problema límite de (0.1) cuando los coeficientes de la matriz A pertenecen a B^2. Nosotros hemos necesitado en este trabajo hacer un estudio mucho más detallado de los espacios B^p, el cual será de gran importancia para nuestros propósitos. Es por esto que el capítulo 2 está dedicado por completo al estudio de los espacios de Besicovitch.

La mayor dificultad para generalizar el teorema de Nguetseng al caso en que la función ψ que aparece en (0.4) pertenece al espacio B^p con respecto a la variable y proviene del hecho de que el espacio B^p no es separable y por tanto, la demostración del caso periódico (véase [A1]) basada en la compacidad secuencial $*$-débil de la bola unidad del dual de un espacio separable no se puede aplicar. En el primer capítulo de esta tesis probamos un teorema de análisis funcional que generaliza los resultados conocidos acerca de la compacidad secuencial $*$-débil de la bola unidad del dual de un espacio de Banach al caso de funcionales lineales no continuos definidos en espacios que no son necesariamente de Banach. Este resultado será clave para la extensión del teorema de Nguetseng, la cual se llevará a cabo en el capítulo 3 de la presente memoria. El capítulo 4 está dedicado a mostrar cómo nuestros resultados se pueden aplicar para resolver diversos problemas de homogeneización.

Pasamos ahora a exponer los principales resultados que obtenemos en los diferentes capítulos de la presente memoria.

Capítulo 1.

Como se ha mencionado anteriormente, este capítulo está destinado a probar el resultado de análisis funcional que necesitamos para extender el teorema de Nguetseng al caso de los espacios de Besicovitch y que resulta interesante por sí mismo. Concretamente el resultado es el siguiente:

Sea Y un espacio reflexivo, X un subespacio de Y no necesariamente cerrado, $\{f_n\}$ una sucesión de aplicaciones lineales no necesariamente continuas de X en $\mathbb{R}$. Supongamos además que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x) \leq C\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$, que seguimos notando por $\{f_n\}$, y existe $f \in X'$ tales que

$$\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) =< f, x > \quad \forall x \in X. \tag{0.5}$$

Por razones técnicas, el teorema que demostramos en la memoria (véase Teorema 1.1) es algo más complejo, aunque claramente implica el resultado que acabamos de enunciar (este teorema se encuentra también en [C G2]). Nótese que si $\{f_n\}$ son funcionales continuos, la igualdad (0.5) implica que $\{f_n\}$ converge $*$-débil a f. Un resultado más general aparece también en el Teorema 1.8 de la memoria.

Capítulo 2.

En este capítulo vamos a definir y estudiar los espacios que hemos llamado de Besicovitch generalizados, con los cuales trabajamos a lo largo de esta memoria.

Dado un álgebra X de funciones con valor medio, contenida en el espacio de las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^N$ (véase Definición 2.18), se define el espacio B^p, $1 \leq p < +\infty$, como el cierre de X con respecto a la norma

$$[f]_p^p = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |f|^p dx \quad 1 \leq p < +\infty.$$

En el caso $p = +\infty$ se define

$$B^\infty = \{f \in B^1 : \quad [f]_\infty = \sup_{1\leq p<+\infty} [f]_p < +\infty\}.$$

Nótese que en realidad lo que hemos notado por $[\,]_p$ no es una norma sino una seminorma (de ahí que prefiramos no escribir $\|\,\|_p$). Por tanto, los espacios B^p son solamente seminormados, los correspondientes espacios normados se pueden obtener mediante el cociente con el espacio de funciones f tales que $[f]_p = 0$.

Los ejemplos más usuales de álgebra X son el espacio $C_\sharp(Y)$ de funciones continuas de $\mathbb{R}^N$ e Y-periódicas y el espacio de las funciones casi periódicas en el sentido de Bohr $CAP(\mathbb{R}^N)$, definido como el cierre en la norma infinito de $Trig(\mathbb{R}^N)$. En este último caso, los espacios B^p no son más que los espacios de funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch (véanse [BE], [LE Z],...)

Entre las propiedades más destacables de los espacios B^p mostramos por ejemplo la existencia de valor medio, i.e.

Para toda $f \in B^p$ se puede probar que existe un número que llamamos $M\{f\}$ tal que

$$M\{f\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|K_T|} \int_{K_T} f(y)dy,$$

para todo conjunto medible y acotado $K \subset \mathbb{R}^N$ de medida finita, donde hemos notado por K_T al conjunto

$$K_T = \{Tx : \quad x \in K\} \quad \forall T > 0.$$

En la sección 2.3 de la presente memoria mostramos además que los espacios B^p tienen una estructura muy similar a la de los espacios L^p construidos sobre un espacio de probabilidad. Así por ejemplo, demostramos que se verifica la desigualdad de Hölder (véase Proposición 2.30) y como resultado fundamental probamos que el dual del espacio B^p con $1 \leq p < +\infty$ se puede identificar con el espacio $B^{p'}$ (véase Teorema 2.35). En particular, los espacios B^p con $1 < p < +\infty$ son reflexivos.

En la sección 2.4 vamos a exigir al álgebra X que sea invariante por traslaciones y que sus elementos sean funciones uniformemente continuas, hipótesis que nos permitirán probar mediante convolución que el espacio D^∞ definido por

$$D^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad D^\alpha f \in X, \ \forall\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \, \alpha_i \in \mathbb{N}^*, \ 1 \leq i \leq N\}$$

(D^α denota la derivada habitual de orden α) es denso en B^p para $1 \leq p < +\infty$. Usando el espacio D^∞ se puede ahora definir la siguiente noción de derivada.

Dada $f \in B^p$, para $1 \leq p \leq +\infty$, se define la derivada i-ésima en media de f, que denotaremos por $\partial_{i,m} f$, como la aplicación lineal de D^∞ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\partial_{i,m} f(\varphi) = -M\{f\partial_i\varphi\} \quad \forall\varphi \in D^\infty.$$

Nótese la similitud con la definición de derivada en teoría de distribuciones. Una definición parecida a la de nuestra derivada en media, aunque en un contexto algo distinto, ha sido presentada en [B M W].

En relación con otras formas de derivación más usuales mostramos en la memoria (véase Corolario 2.45) que si $f \in B^p \cap W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, satisface que $\partial_i f$ pertenece a B^p ($\partial_i f$ denota la derivada en el sentido de las distribuciones) entonces $\partial_{i,m} f = \partial_i f$ en el sentido de que

$$M\{f\partial_i\varphi\} = -M\{\partial_i f\varphi\} \quad \forall \varphi \in D^\infty.$$

Continuando con el estudio de la derivación en espacios de Besicovitch definimos ahora el espacio W^p como

$$W^p = \{f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N) : \quad \nabla f \in (B^p)^N, M\{\nabla f\} = 0\},$$

y demostramos que el espacio ∇W^p es cerrado en $(B^p)^N$ (véase Teorema 2.56 y Proposición 2.58). Este resultado, que tiene una demostración técnicamente compleja, será fundamental en el resto de la memoria. Suponiendo que el álgebra X es ergódica, i.e., que para toda $f \in X$ tal que

$$\partial_{i,m} f = 0 \text{ en } B^1 \quad 1 \leq i \leq N,$$

se verifica

$$M\{|f - M\{f\}|\} = 0,$$

probamos ahora (véase Corolario 2.63) que la clausura del espacio

$$\{(\partial_{1,m} f, \ldots, \partial_{N,m} f) : \quad f \in B^p, \partial_{i,m} f \in B^p \ 1 \leq i \leq N\}$$

coincide con ∇W^p. Es decir, el límite de una sucesión de gradientes en media resulta ser un elemento de ∇W^p. La importancia de este resultado radica en que nos va a caracterizar el espacio al cual pertenece el límite (en dos escalas) de una sucesión $\{\nabla u_\varepsilon\}$ donde u_ε es solución de un problema de homogeneización (por ejemplo, u_ε solución de (0.1)). Compárese por ejemplo con el teorema que aparece en [O Z] o el teorema de [J K O], en los cuales sólo se habla de la clausura del espacio constituido por gradientes de funciones, sin llegar a obtener que los elementos de dicha clausura son a su vez gradientes.

La última sección de este capítulo está destinada a mostrar que se pueden extender los resultados anteriores al caso en que las funciones tomen valores en un espacio infinito dimensional. Concretamente, consideramos un espacio de Hilbert H y, de forma análoga a como hemos definido el espacio B^p a partir de un álgebra con valor medio, construimos el espacio B^2_H a partir de un espacio V contenido en $C_b(\mathbb{R}^N; H)$, el cual, gracias a la estructura hilbertiana del problema, podemos tomar satisfaciendo propiedades más débiles que las que se han pedido a X (véase Definición 2.68).

Capítulo 3.

En este capítulo vamos a extender a los espacios estudiados en el capítulo 2, el teorema de convergencia en dos escalas de Nguetseng. Concretamente, probamos lo siguiente:

Si $Q \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(Q)$, $1 \leq p < +\infty$, es una sucesión que converge débilmente en $L^p(Q)$ hacia una función $u_0 \in L^p(Q)$ entonces existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$, y existe una función $u \in L^p(Q; B^p)$ tales que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u, i.e.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx$$

para toda $\psi \in L^{p'}(Q; B^{p'})$ suficientemente regular (véase Teorema 3.13 para $1 < p < +\infty$ y Teorema 3.14 para $p = 1$). Además, las funciones $u(x,y)$ y $u_0(x)$ están relacionadas por

$$u_0(x) = M_y\{u(x,y)\}.$$

Otro resultado clásico para la convergencia en dos escalas en el caso periódico (véanse [NG1], [A1]), y que nosotros presentamos en esta memoria para los espacios de Besicovitch generalizados, es el siguiente teorema de semicontinuidad y corrector para la convergencia en dos escalas (véanse Proposición 3.11 y Proposición 3.12).

Si $Q \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, una sucesión que converge en dos escalas hacia una función $u \in L^p(Q; B^p)$, entonces

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \int_Q |u_\varepsilon(x)|^p dx \geq \int_Q M_y\{|u(x,y)|^p\}dx. \tag{0.6}$$

Si en lugar de (0.6) se tiene

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q |u_\varepsilon(x)|^p dx = \int_Q M_y\{|u(x,y)|^p\}dx$$

y u es suficientemente regular, entonces

$$u_\varepsilon(x) - u(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \text{ en } L^p(Q). \tag{0.7}$$

Nótese la relación de (0.7) con el desarrollo asintótico expuesto en (0.2). La afirmación (0.7) muestra que la idea de la convergencia en dos escalas consiste en aproximar u_ε por una sucesión del tipo $u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ con u perteneciente a $L^p(Q; B^p)$.

Como ya hace notar Nguetseng en [NG1] el caso más interesante en homogeneización es el de una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ convergente no sólo en $L^p(Q)$ débil sino en el espacio $W^{1,p}(Q)$ débil. Es lo que cumple por ejemplo la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ solución del problema (0.1) con $p = 2$. El teorema que mostramos es el siguiente (véase Teorema 3.18).

Sea $Q \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión que converge débilmente en $W^{1,p}(Q)$, $1 \leq p < +\infty$, hacia una función $u \in W^{1,p}(Q)$. Entonces existe una subsucesión de $\{u_\varepsilon\}$ y una función $u_1 \in L^p(Q; W^p)$ tales que $\nabla u_\varepsilon(x)$ converge en dos escalas hacia $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$.

Este resultado generaliza el que aparece en [NG1] (véase también [A1]) para el caso periódico y en [C G1] para el caso casi periódico. Como consecuencia de (0.7) se tendrá que si u_1 es suficientemente regular y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx = \int_Q M_y\{|\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)|^p\} dx,$$

entonces

$$u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \text{ en } W^{1,p}(Q), \tag{0.8}$$

es decir, la función u_1 que aparece en (0.8) corresponde al segundo término del desarrollo asintótico de (0.2).

En la última parte del capítulo 3 (sección 3.3) se estudia el caso en que las funciones toman valores en un espacio de Hilbert. Conseguimos los resultados de convergencia en dos escalas análogos a los mencionados anteriormente (véanse Teorema 3.26 y Teorema 3.29), que particularizados al caso de un sistema dinámico (véase Definición 2.73) contienen los resultados dados por Bourgeat, Mikelić y Wright (véase [B M W]).

Capítulo 4.

En este capítulo vamos a mostrar cómo los resultados que hemos expuesto en el capítulo anterior nos permiten resolver distintos problemas de homogeneización, análogamente a lo que ocurre en homogeneización periódica con el teorema de Nguetseng.

Así por ejemplo, consideramos la homogeneización del problema (0.1), donde la matriz A tiene sus coeficientes en el espacio $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (el caso que tratamos en el capítulo 4 es en realidad algo más general).

Razonando de forma análoga a como se hace en el caso periódico (véanse [NG1], [A1]) deducimos la ecuación límite y probamos un resultado de corrector (véanse Teorema 4.1 y Proposición 4.6).

Cuando los coeficientes de la matriz son funciones periódicas se trata del problema más clásico en la teoría de homogeneización, resuelto en [B L P] por desarrollos asintóticos y en [NG1] y [A1] por el método de la convergencia en dos escalas. En el caso de que los coeficientes sean funciones casi periódicas el problema también ha sido resuelto en [O Z], mientras que para coeficientes en B^2 el resultado puede verse en [J K O], ambos utilizando técnicas distintas al método de convergencia en dos escalas. Sin embargo, en los teoremas de homogeneización de [O Z] y de [J K O] no se llega a caracterizar la clausura del espacio de los gradientes, tal y como hacemos nosotros.

Con la misma técnica de la convergencia en dos escalas resolvemos también la homogeneización de un sistema pseudomonótono (véase Teorema 4.11) con coeficientes en un espacio de Besicovitch.

Cuando se trata de una ecuación y sólo aparece no linealidad en ∇u, Allaire (véase [A1]) consigue el resultado de homogeneización en el marco periódico con el método de convergencia en dos escalas. Mediante técnicas distintas este resultado ha sido probado anteriormente en [T2]. Este problema también ha sido resuelto en [B CHP D] en el marco casi periódico mediante técnicas similares al caso lineal estudiado en [O Z].

Entre los problemas que quedan por resolver se encuentran los siguientes:

1. Un problema interesante es estudiar la convergencia en dos escalas de sucesiones del tipo $\{F(u_\varepsilon)\}$ con F continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Esto ya ha sido hecho por Weinan

E (véase [E]) en el caso periódico. Obtiene una caracterización de este límite a través de una medida, que llama medida de Young en dos escalas por similitud con lo que ocurre en la convergencia débil en L^p (véanse [T2], [BA]).
Sería interesante generalizar este resultado al marco de los espacios de Besicovitch puesto que proporcionaría una herramienta para tratar en general los problemas de homogeneización no lineales con coeficientes en un espacio de Besicovitch.

2. Se pueden generalizar los resultados de convergencia multiescala dados por Allaire y Briane (véase [A BR]) en el marco periódico al marco de los espacios de Besicovitch.

3. No tenemos una caracterización del límite en dos escalas de ∇u_ε, cuando $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $W^{1,p}(Q)$, en el caso en que el álgebra no sea ergódica.

4. Una cuestión pendiente es obtener la ecuación límite para un problema de homogeneización en un dominio perforado casi periódicamente, con condiciones de contorno de tipo Neumann. Este caso ha sido resuelto en el caso periódico en [CI SJP] suponiendo los agujeros aislados, sin esta suposición y usando la convergencia en dos escalas, en [A1], y utilizando inyecciones de "tipo Sobolev" en dominios variables en [A M].

Capítulo 1

Un teorema de compacidad para funcionales no continuos.

En este capítulo vamos a dar un resultado de compacidad para una sucesión de funcionales lineales que no son en general continuos, aunque sí verifican una cierta continuidad en el límite. Enunciaremos y demostraremos dos teoremas, el segundo de ellos más general que el primero pero de demostración bastante más técnica. El primero será esencial en la demostración de los teoremas de compacidad para la convergencia en dos escalas que veremos en el capítulo 3.

Teorema 1.1 *Sea X un subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) contenido en un espacio vectorial Y, dotado de una seminorma tal que el espacio cociente Y sobre el núcleo de esa seminorma, N, es un espacio de Banach reflexivo. Sea $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ una sucesión de funcionales lineales (no necesariamente continuos) tales que existe $C > 0$ verificando*

$$\overline{\lim_{n}} |f_n(x)| \leq C[x] \quad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Entonces, existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ y existe $f \in (Y/N)'$ tales que

$$\exists \lim_{k} f_{n_k}(x) = < f, \hat{x} > \quad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

($\hat{x}$ representa la clase de equivalencia en Y/N del elemento x y $[x]$ es la seminorma de x en Y).

Observación 1.2 El espacio cociente Y/N está dotado de la norma

$$\|\hat{x}\| = \inf_{y \sim x} [y],$$

pero fácilmente se puede comprobar que $\|\hat{x}\| = [y]$, con $y \sim x$.

Para la demostración del Teorema 1.1 necesitamos recordar la definición de espacio regular (véase [CI]) así como el Teorema de Asplund y Lindestrauss (véase [LIN]).

Definición 1.3 *Un espacio de Banach E se dice regular si para todo $e \in E$, $e \neq 0$, existe un único $e' \in E'$ tal que*

$$< e', e >= \|e\|,$$

$$\|e'\| = 1.$$

Teorema 1.4 *Si E es un espacio de Banach reflexivo, entonces existe una norma equivalente para la cual el espacio E es regular.*

Demostración del Teorema 1.1:

Gracias al Teorema 1.4 no es restrictivo suponer que Y/N es un espacio regular.

Primera etapa:

Vamos a comenzar probando que existen una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$, una constante $\bar{C} \geq 0$ y una sucesión $\{x_j\} \subset X$, con $[x_j] = 1$ tales que

$$\overline{\lim_k} |f_{n_k}(x)| \leq \bar{C}[x] \quad \forall x \in X \tag{1.3}$$

$$\exists \lim_k f_{n_k}(x_j) \geq \bar{C} - \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Para ello, consideremos

$$C_1 = \sup\{\overline{\lim_n} f_n(x) : \quad x \in X, \quad [x] = 1\},$$

supremo que es finito gracias a (1.1). Sean ahora $x_1 \in X$ con $[x_1] = 1$ y una subsucesión $\{n_1(k)\}_k$ de $\{n\}$ tales que

$$\exists \lim_k f_{n_1(k)}(x_1) \geq C_1 - 1.$$

Una vez definido C_1 definimos ahora C_2 mediante

$$C_2 = \sup\{\overline{\lim_k} f_{n_1(k)}(x) : \quad x \in X, \quad [x] = 1\}.$$

Obviamente $C_2 \leq C_1$ y existen $x_2 \in X$ con $[x_2] = 1$ y una subsucesión $\{n_2(k)\}_k \subset \{n_1(k)\}_k$ tales que

$$\exists \lim_k f_{n_2(k)}(x_2) \geq C_2 - \frac{1}{2}.$$

Repitiendo este razonamiento, se deduce que para todo $j \in \mathbb{N}$ existen $C_j \in \mathbb{R}$, $\{x_j\} \subset X$ y $\{n_j(k)\}_k$ tales que

$$C_j = \sup\{\overline{\lim_k} f_{n_{j-1}(k)}(x) : \quad x \in X, \quad [x] = 1\}$$

$\{n_j(k)\}_k$ es una subsucesión de $\{n_{j-1}(k)\}_k \quad \forall j \geq 2$,

$$\exists \lim_k f_{n_j(k)}(x_j) \geq C_j - \frac{1}{j} \tag{1.5}$$

$$0 \leq C_j \leq C_{j-1} \quad \forall j \geq 2 \tag{1.6}$$

$$[x_j] = 1 \quad \forall j \geq 1. \tag{1.7}$$

Consideremos entonces la subsucesión diagonal $\{n_k(k)\}$ que por comodidad vamos a denotar $\{n_k\}$. Como $\{n_k(k)\}_{k \geq j}$ es una subsucesión de $\{n_j(k)\}_k$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\overline{\lim_k} |f_{n_k}(x)| \leq C_j[x] \quad \forall x \in X\,, \forall j \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

$$\exists \lim_k f_{n_k}(x_j) \geq C_j - \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

Sea $\bar{C} = \lim_j C_j$, el cual existe por (1.6). Entonces, pasando al límite en j en (1.8) se tiene (1.3) y como $\bar{C}$ es el ínfimo de las C_j, de (1.9) se obtiene (1.4).

Segunda Etapa:

Vamos a encontrar el elemento $f \in (Y/N)'$ tal que la sucesión $\{f_{n_k}\}_k$ satisface (1.2). Podemos suponer que $\bar{C} > 0$ porque, en caso contrario, de (1.3) se deduce inmediatamente (1.2) con $f = 0$.

Como Y/N es un espacio de Banach reflexivo y la sucesión $\{x_j\}$ de la etapa anterior está acotada en Y, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{x_j\}$, tal que

$$\hat{x}_j \rightharpoonup \hat{z}_0 \text{ en } Y/N\text{-débil.} \tag{1.10}$$

(Con $\hat{x}$ denotamos la clase de equivalencia de x en Y/N .)

Gracias a (1.10) y a la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil, se tiene

$$\|\hat{z}_0\| \leq 1. \tag{1.11}$$

($\|\cdot\|$ es la norma en Y/N definida como la seminorma $[\cdot]$).

Sea $x \in X$ arbitrario. Como $\{f_{n_k}(x)\}_k$ está acotada, existe una subsucesión de $\{n_k\}_k$, que depende de x y que denotaremos por $\{n_{k(j)}\}_j$, tal que

$$\exists \lim_j f_{n_{k(j)}}(x) \tag{1.12}$$

Consideremos

$$S = span\{x, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

De (1.12), (1.4) y la linealidad de las funciones $f_{n_{k(j)}}$ está claro que

$$\exists \lim_j f_{n_{k(j)}}(s) \quad \forall s \in S.$$

Denotemos por $\widehat{S}$ el espacio formado por las clases de equivalencia en Y/N de los elementos de S, y sea entonces $\tilde{f} : \widehat{S} \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{f}(\hat{s}) = \lim_j f_{n_{k(j)}}(s) \quad \forall s \in S. \tag{1.13}$$

La función $\tilde{f}$ es lineal y está bien definida ya que por (1.3) $\tilde{f}(s)$ no depende del representante de $\hat{s}$ elegido. Además satisface

$$|\tilde{f}(\hat{s})| \leq \bar{C}\|\hat{s}\| \tag{1.14}$$

lo que implica que $\tilde{f}$ es continua y $\|\tilde{f}\| \leq \bar{C}$.

Por otra parte, de (1.4) se tiene que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\tilde{f}(\hat{x}_j) \geq \bar{C} - \frac{1}{j} \tag{1.15}$$

y por tanto, gracias a (1.7), se deduce que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{f}\| \geq \bar{C} - \frac{1}{j}, \tag{1.16}$$

lo que unido a (1.14) implica $\|\tilde{f}\| = \bar{C}$.
Por el teorema de Hahn-Banach, $\tilde{f}$ se extiende de manera continua a Y/N conservando la norma.
De (1.15) se tiene

$$\bar{C} \leq \lim_j \tilde{f}(\hat{x}_j) = \tilde{f}(\hat{z}_0) \tag{1.17}$$

Teniendo en cuenta (1.11) y $\|\tilde{f}\| = \bar{C}$, el funcional $\tilde{f}$ satisface por tanto

$$< \tilde{f}, \hat{z}_0 >= \bar{C}, \quad \|\tilde{f}\| = \bar{C}, \quad \|\hat{z}_0\| = 1. \tag{1.18}$$

Gracias a la regularidad de Y/N sabemos que existe un solo elemento $f \in (Y/N)'$ verificando (1.18), esto implica que en (1.12) no es necesario extraer una subsucesión y que por tanto, toda la sucesión f_{n_k} converge, i.e., se tiene

$$\exists \lim_k < f_{n_k}, x >=< f, \hat{x} > \quad \forall x \in X$$

con f el único elemento de $(Y/N)'$ que satisface (1.18). Esto acaba la demostración del teorema. ■

Observación 1.5 El Teorema 1.1 generaliza el resultado clásico de compacidad secuencial débil en un espacio reflexivo, permitiendo que el espacio sea seminormado, no necesariamente completo, así como que los funcionales f_n no sean continuos.

Observación 1.6 Nótese que la tesis del Teorema 1.1 se demuestra sin dificultad en el caso en que X sea un espacio normado separable y la sucesión de funcionales lineales f_n verifiquen (1.1).

Vamos a generalizar el resultado anterior para lo cual necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.7 *Sea Y un espacio normado y $S_1 = \{f \in Y' : \ \|f\| = 1\}$.*
Son equivalentes:
(i) S_1 con la topología $*$-débil es primero numerable.
(ii) Para todo $f \in S_1$ existe $\{z_n\} \subset Y$ tal que si $g \in S_1$ es tal que $< g, z_n >=< f, z_n >$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces, $g = f$.
(iii) Para todo $f \in Y'$ existe $\{z_n\} \subset Y$ tal que si $g \in Y'$, con $\|g\| \leq \|f\|$ es tal que $< g, z_n >=< f, z_n >$, para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $g = f$.

Demostración del Lema:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Dada $f \in S_1$, por hipótesis, existe una base de entornos de f en S_1 numerable que será de la forma

$$V_n = \{g \in Y' : \quad \|g\| = 1, \quad | < g - f, x > | < \varepsilon_n, \quad \forall x \in \Phi_n\}$$

donde $\Phi_n \subset Y$ es finito y $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de números reales positivos que tiende a cero .

Si $g \in Y'$, $\|g\| = 1$ y $< g, x >=< f, x >$, para todo $x \in \bigcup_n \Phi_n$ entonces $g \in \bigcap_n V_n = \{f\}$ (recuérdese que la topología $*$-débil es de Haussdorf), luego tomando el conjunto $\{z_n\}$ como $\{\bigcup_n \Phi_n\}$ que es numerable, se tiene (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Sea $f \in Y'$ y supongamos $f = 0$. Entonces, si $g \in Y'$ y $\|g\| \leq \|f\|$ imlica que $g = 0$, por tanto, como sucesión $\{z_n\}$ se puede tomar cualquiera.

Si $f \neq 0$, consideramos $\tilde{f} = \dfrac{f}{\|f\|}$.

Entonces, por (ii) existen $\{\tilde{z}_n\} \subset Y$ tales que para todo $\tilde{g} \in Y'$ con $\|\tilde{g}\| = 1$ y $< \tilde{g}, \tilde{z}_n >=< \tilde{f}, \tilde{z}_n >$ para todo n, se verifica $\tilde{g} = \tilde{f}$.

Por otra parte, existen $\{x_n\} \subset Y$ con $\|x_n\| = 1$ tales que

$$< f, x_n > \longrightarrow \|f\|. \tag{1.19}$$

Consideremos como conjunto numerable $\{z_n\}$ el constituido por $\{\tilde{z}_n\} \bigcup \{x_n\}$.

Sea $g \in Y'$, con $\|g\| \leq \|f\|$ verificando

$$< g, \tilde{z}_n >=< f, \tilde{z}_n > \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.20}$$

$$< g, x_n >=< f, x_n > \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

De (1.19) y (1.21) se deduce

$$< g, x_n > \rightarrow \|f\|,$$

y por otra parte

$$< g, x_n > \leq \|g\| \leq \|f\|.$$

luego

$$\|f\| = \|g\|. \tag{1.22}$$

De (1.20), (1.22) y la definición de $\tilde{f}$ se tiene ahora

$$< \frac{g}{\|g\|}, \tilde{z}_n > = < \tilde{f}, \tilde{z}_n >$$

lo que por (ii) implica

$$\frac{g}{\|g\|} = \tilde{f}.$$

Por definición de $\tilde{f}$ y (1.22) se tiene entonces $g = f$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Sea $f \in Y'$ con $\|f\| = 1$. Por (iii) existe $\{z_n\} \subset Y$ tal que si $g \in Y'$ con $\|g\| \leq 1$, es tal que $< g, z_n > = < f, z_n >$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $g = f$. Consideremos

$$V_n = \{g \in Y' : \quad \|g\| = 1, \quad | < g - f, z_k > | < \frac{1}{n}, \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Nótese que $\bigcap_n \overline{V}_n = \{f\}$ y $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que la familia $\{V_n\}_n$ es base de entornos de f en S_1 con la topología $*$ débil.

Dado un abierto U en S_1 con la topología $*$ débil, que contiene a f, supongamos, por reducción al absurdo, que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n \in V_n$ tal que $g_n \notin U$. Por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe un punto de ω-acumulación, g, de g_n en Y' con la topología $*$ débil. Como $g_n \in \overline{V}_k$ para todo $n \geq k$ se deduce que $g \in \overline{V}_k$ para todo $k \geq n$ y por tanto $g = f$. En particular, g pertenece a S_1.

Por otra parte, $g_n \in S_1 \setminus U$, que es un cerrado de S_1 en la topología $*$ débil luego, g pertenece a $S_1 \setminus U$, pero esto está en contradicción con que $g = f$. ∎

El teorema de compacidad que vamos a demostrar es el siguiente:

Teorema 1.8 *Sea X un espacio seminormado y sea N el núcleo de la seminorma. Si la esfera unidad de $(X/N)'$ con la topología $*$-débil es primero numerable y $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ es una sucesión de funcionales lineales (no necesariamente continuos respecto a la seminorma) tales que existe $C > 0$ satisfaciendo*

$$\overline{\lim_n} |f_n(x)| \leq C[x] \quad \forall x \in X \tag{1.23}$$

entonces, existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ y existe $f \in (X/N)'$ tales que

$$\exists \lim_k f_{n_k}(x) = < f, \hat{x} > \quad \forall x \in X. \tag{1.24}$$

($\hat{x}$ es la clase de equivalencia en X/N del elemento x).

Observación 1.9 Este teorema generaliza el teorema clásico de compacidad secuencial $*$ débil en el dual de un espacio separable. Efectivamente, si X es un espacio separable se sabe que la bola unidad en el espacio dual, X', dotada de la topología $*$ débil es primero numerable (de hecho es metrizable, véase p. ej. [BRE]). Por tanto, si X es separable se tiene la tesis del Teorema 1.8.

Observación 1.10 El Teorema 1.1 es un caso particular de éste. Efectivamente, si Y/N es un espacio reflexivo, lo es $(Y/N)'$, y por el Teorema 1.4 es un espacio regular. De la definición de espacio regular se deduce inmediatamente que la condición (ii) del Lema 1.7 se verifica y por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema 1.8.

Demostración del Teorema 1.8:

Razonando como en la primera etapa de la demostración del Teorema 1.1 se demuestra que existen una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$, una constante $\bar{C} \geq 0$ y una sucesión $\{x_j\}_j \subset X$ con $[x_j] = 1$ tales que

$$\overline{\lim_k} |f_{n_k}(x)| \leq \bar{C}[x] \quad \forall x \in X \tag{1.25}$$

$$\exists \lim_k f_{n_k}(x_j) \geq \bar{C} - \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Vamos a definir el elemento f de $(X/N)'$, que aparece en la tesis del teorema.

De (1.25) se deduce que para todo $x \in X$ existe $C_x > 0$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq C_x$, para todo $k \in \mathbb{N}$, i.e., identificando f_{n_k} con un elemento de $\mathbb{R}^X$ se tiene

$$\{f_{n_k}\}_k \subset (\prod_{x \in X} [-C_x, C_x]) \cap L$$

con L definido por

$$L = \{h \in \mathbb{R}^X : \quad h(x+y) = h(x) + h(y), \; h(\lambda x) = \lambda h(x) \; \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

i.e.

$$L = \left[\bigcap_{x,y \in X} (p_{x+y} - p_x - p_y)^{-1}\{0\} \right] \bigcap \left[\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} \bigcap_{x \in X} (p_{\lambda x} - \lambda p_x)^{-1}\{0\} \right]$$

donde p_x es el operador proyección de $\mathbb{R}^X$ sobre $\mathbb{R}$ definido por

$$p_x : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto h(x).$$

Por el teorema de Tychonoff (véase p. ej. [DU]) $\prod_{x \in X} [-C_x, C_x]$ es un compacto de $\mathbb{R}^X$.
Como L es cerrado en $\mathbb{R}^X$ se deduce que $\prod_{x \in X} [-C_x, C_x] \bigcap L$ es compacto en $\mathbb{R}^X$ y por tanto existe $f \in \mathbb{R}^X \bigcap L$ punto de acumulación de $\{f_{n_k}\}$ en $\mathbb{R}^X$.
Veamos que f es continua para la seminorma $[\cdot]$ y que $\|f\| = \bar{C}$.
Se sabe que

$$f \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq l} \{f_{n_k}\}}^{\mathbb{R}^X}. \tag{1.27}$$

Gracias a (1.25) para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de x y de ε) tal que $f_{n_k} \in p_x^{-1}[-\bar{C}[x] - \varepsilon, \bar{C}[x] + \varepsilon]$ para todo $n_k \geq n_0$.
Y como $p_x^{-1}[-\bar{C}[x] - \varepsilon, \bar{C}[x] + \varepsilon]$ es un cerrado de $\mathbb{R}^X$, deducimos entonces

$$f \in \overline{\bigcup_{n_k \geq n_0} \{f_{n_k}\}} \subset p_x^{-1}[-\bar{C}[x] - \varepsilon, \bar{C}[x] + \varepsilon].$$

Como ε es arbitrario se deduce que

$$|f(x)| \leq \bar{C}[x]. \tag{1.28}$$

Como f es lineal ($f \in L$) esto nos dice que f es continua y además coincide sobre dos elementos de la misma clase de equivalencia. Por tanto f se puede definir sobre X/N.
De (1.26) se deduce que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_{n_k} \in p_{x_j}^{-1}[\bar{C} - \frac{2}{j}, +\infty) \quad \forall k \geq k_0.$$

Por (1.27) se tiene que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$f \in p_{x_j}^{-1}[\bar{C} - \frac{2}{j}, +\infty).$$

Esto implica que

$$f(x_j) \geq \bar{C} - \frac{2}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

y como $[x_j] = 1$ se obtiene que $\|f\| \geq \bar{C}$. De (1.28) se tiene que $\|f\| = \bar{C}$.

Vamos a construir la subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$ para la que se va a tener la tesis del teorema.

Del Lema 1.7 se deduce que existen $\{\hat{z}_l\}_l \subset X/N$ tales que para cualquier g perteneciente a $(X/N)'$ tal que $\|g\| \leq \|f\|$ y $< g, \hat{z}_l >=< f, \hat{z}_l >$ para todo l entonces $g = f$.

Por otra parte, de (1.27) se deduce que

$$p_{z_1}^{-1}(B(< f, \hat{z}_1 >; 1)) \bigcap \bigcup_{k \geq 1} \{f_{n_k}\} \neq \emptyset,$$

por tanto, existe $n_{k_1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{n_{k_1}}(z_1) - < f, \hat{z}_1 > | < 1.$$

Análogamente,

$$p_{z_1}^{-1}\left(B(< f, \hat{z}_1 >; \frac{1}{2})\right) \bigcap p_{z_2}^{-1}\left(B(< f, \hat{z}_2 >; \frac{1}{2})\right) \bigcap \bigcup_{k \geq k_1} \{f_{n_k}\} \neq \emptyset.$$

Existe $n_{k_2} > n_{k_1}$ tal que

$$|f_{n_{k_2}}(z_1) - < f, \hat{z}_1 > | < \frac{1}{2}$$

$$|f_{n_{k_2}}(z_2) - < f, \hat{z}_2 > | < \frac{1}{2}.$$

Con este procedimiento se construye una subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$ que verifica

$$|f_{n_{k_j}}(z_l) - < f, \hat{z}_l > | < \frac{1}{j} \quad \forall l \text{ con } 1 \leq l \leq j$$

y por tanto,

$$\exists \lim_j f_{n_{k_j}}(z_l) =< f, \hat{z}_l > \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Para probar que $\lim_j f_{n_{k_j}}(x) =< f, \hat{x} >$ para todo $x \in X$, razonamos ahora de forma similar a la segunda etapa de la demostración del Teorema 1.1. Por comodidad en la notación vamos a sustituir la subsucesión n_{k_j} por n_k.

Dado $x \in X$ como $\{f_{n_k}(x)\}$ está acotada existe una subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$ tal que existe $\lim_j f_{n_{k_j}}(x)$. Entonces, si S está definido por

$$S = span\{x, z_n, x_n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

podemos definir la aplicación $\tilde{f}:\widehat{S}\mapsto\mathbb{R}$ como

$$\tilde{f}(\hat{s})=\lim_j f_{n_{k_j}}(s)\quad \forall\hat{s}\in\hat{S}.$$

Gracias a (1.25) y a que $f_{n_{k_j}}$ es una subsucesión de f_{n_k} se deduce que $||\tilde{f}||_{\hat{S}'}\leq\bar{C}$.
Por el Teorema de Hahn-Banach podemos suponer $\tilde{f}$ definida en $(X/N)'$ y satisfaciendo $||\tilde{f}||_{(X/N)'}\leq\bar{C}$.
Por (1.29) $<\tilde{f},\hat{z}_n>=<f,\hat{z}_n>$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces por la definición de $\{\hat{z}_n\}$ se deduce que $\tilde{f}=f$, en particular,

$$\lim_j f_{n_{k_j}}(x)=<f,\hat{x}>,$$

lo que prueba que el límite no depende de la subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$ elegida y por tanto se tiene el teorema. ∎

Capítulo 2

Espacios de Besicovitch.

En este capítulo vamos a definir y estudiar unos espacios de funciones, que llamaremos de Besicovitch por similitud con los espacios de funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch (véase [BE]), a fin de tener el marco funcional para los teoremas de convergencia en dos escalas del capítulo siguiente. Estos espacios fueron introducidos por Jikov, Kozlov y Oleinik (véase [J K O]). Ellos definen unos espacios de Hilbert a partir de álgebras de funciones, a los que llaman también espacios de Besicovitch.

Los dos ejemplos más importantes son los siguientes: Si el álgebra de funciones se elige el de las funciones continuas Y-periódicas se obtiene el espacio de las funciones de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódicas. Si se toma como álgebra el de las funciones uniformemente continuas casi periódicas se obtiene el espacio de las funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch.

La norma que consideran para una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ de este espacio es la misma que para las funciones continuas casi periódicas, la llamada norma de Besicovitch

$$\|f\| = (\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

donde B_t es la bola de $\mathbb{R}^N$ de centro 0 y radio t y $|B_t|$ es la medida de Lebesgue de la bola B_t. Nosotros trabajaremos con normas "p"

$$\|f\|_p = (\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

con $1 \le p < +\infty$ y obtendremos así otros espacios de Besicovitch, que denotaremos B^p. Probaremos que tienen propiedades análogas a los espacios L^p, entre ellas la más importante va a ser la reflexividad para $1 < p < +\infty$ porque nos permitirá aplicar el Teorema 1.1.

En la sección 2.1 haremos un repaso de las funciones casi periódicas y sus propiedades.

En la sección 2.2 definimos y estudiamos los espacios M^p, $1 \leq p \leq +\infty$, que nos ayudarán a comprender mejor los espacios de Besicovitch.

En la sección 2.3 definimos un subespacio de los espacios M^p, los espacios de Besicovitch, demostramos, entre otras propiedades, que las funciones que pertenecen a este espacio tienen valor medio, y que para $1 < p < +\infty$ estos espacios son "reflexivos". Escribimos reflexivos entre comillas porque los espacios B^p, al igual que ocurre con los espacios M^p, son seminormados por lo que el espacio que demostraremos que es reflexivo no es exactamente B^p sino un espacio de clases de equivalencia de los elementos de B^p, que denotaremos $\mathcal{B}^p$. Probaremos también que el dual de $\mathcal{B}^1$ se identifica con $\mathcal{B}^\infty$.

En la sección 2.4 estudiamos propiedades de derivabilidad de funciones que pertenecen a los espacios de Besicovitch.

Por último, en la sección 2.5 extendemos los resultados de las secciones anteriores al caso de funciones que toman valores en un espacio de Hilbert infinitodimensional.

Antes de pasar al primer apartado de este capítulo daremos la definición de valor medio (véase [J K O]) imprescindible para todo lo que sigue.

Definición 2.1 *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Un número $M\{f\}$ se llama valor medio de f si*

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \int_K f(\frac{x}{\varepsilon})dx = |K| \, M\{f\} \tag{2.1}$$

para cualquier conjunto medible Lebesgue acotado $K \subset \mathbb{R}^N$ ($|K|$ representa la medida Lebesgue del conjunto K)

Notemos que el valor medio no depende del acotado. Otra forma equivalente de dar la definición de valor medio es considerar el homotético de K

$$K_t = \{tx \in \mathbb{R}^N : \quad x \in K\}.$$

Haciendo el cambio de notación $\varepsilon^{-1} = t$ y el cambio de variables

$$tx = y,$$

(2.1) se escribe de forma equivalente

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|K_t|} \int_{K_t} f(x)dx = M\{f\}. \tag{2.2}$$

El valor medio también puede expresarse en términos de la convergencia débil si la sucesión de funciones $\{f(\frac{x}{\varepsilon})\}$ está acotada en $L^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algún $\alpha \geq 1$. En este caso, utilizando (2.1) y la densidad de las funciones escalonadas en $L^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, la Definición 2.1 es equivalente a

$$f(\frac{x}{\varepsilon}) \rightharpoonup M\{f\} \text{ en } L^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ -débil.}$$

(Si $\alpha = +\infty$ la convergencia es $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $*$-débil.)

2.1 Repaso de funciones casi periódicas.

Vamos a recordar algunas definiciones y propiedades de las funciones casi periódicas que nos ayudarán a comprender mejor la construcción del espacio de Besicovitch que efectuaremos más adelante.

Hay una amplia bibliografía dedicada a las funciones casi periódicas, por ejemplo referenciamos [B], [BE], [COR], [LE Z], [ZA].

Definición 2.2 *El espacio de los polinomios trigonométricos de $\mathbb{R}^N$ con valores en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $Trig(\mathbb{R}^N)$, es el espacio formado por las partes reales de combinaciones lineales finitas de exponenciales complejas, i.e.*

$$Re\left(\sum_{\alpha\in J} a_\alpha e^{i\alpha\cdot y}\right) \quad J \subset \mathbb{R}^N \textit{ finito}, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^N.$$

Definición 2.3 *El cierre de $Trig(\mathbb{R}^N)$ en la norma infinito es el espacio de las funciones uniformemente casi periódicas, o funciones casi periódicas en el sentido de Bohr, con valores en $\mathbb{R}$, y lo denotaremos por $CAP(\mathbb{R}^N)$.*

Si se considera el cierre de los polinomios trigonométricos en una métrica más débil que la uniforme se obtienen funciones casi periódicas más generales que las uniformemente casi periódicas (véase [BE]), donde la continuidad puede no estar presente. Así, se define la norma de Besicovitch de una función de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ como

$$\|f\| = \left(\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Se tiene la siguiente definición:

Definición 2.4 *Una función $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ es casi periódica en el sentido de Besicovitch si existe una sucesión de polinomios trigonométricos que converge a f en la norma de Besicovitch. A este espacio se le denota por B^2.*

En realidad (2.3) es efectivamente una norma en $CAP(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ es sólo una seminorma; basta tener en cuenta que las funciones con soporte compacto tienen norma de Besicovitch cero. De ahí que una sucesión de funciones de $Trig(\mathbb{R}^N)$ convergente para la seminorma (2.3) posee más de un límite. Para evitar este problema, las funciones casi periódicas de Besicovitch deben ser entendidas como clases de equivalencia.

Existen otras formas equivalentes de definir las funciones casi periódicas como por ejemplo, a través de los números de traslación (véase [B], [BE]), a través del compactificado de Bohr (véase [PA]), etc.

Algunas propiedades de $CAP(\mathbb{R}^N)$:

1. Las funciones de $CAP(\mathbb{R}^N)$ son acotadas.

2. Son funciones uniformemente continuas.

3. Tienen valor medio en el sentido de (2.1).

4. $CAP(\mathbb{R}^N)$ es un álgebra de Banach para la norma infinito.

5. $CAP(\mathbb{R}^N)$ es invariante por traslaciones, i.e., si $f \in CAP(\mathbb{R}^N)$ entonces $f(\cdot + \tau) \in CAP(\mathbb{R}^N)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^N$.

Nuestro propósito en lo que sigue es extender estas ideas a fin de construir espacios de Besicovitch más generales que tomen como base un álgebra de funciones que no sea necesariamente $CAP(\mathbb{R}^N)$.

2.2 Los espacios M^p.

En esta sección vamos a introducir unos espacios que nos serán de utilidad para definir posteriormente los espacios de Besicovitch.

Definición 2.5 *Sea f perteneciente a $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Se define la seminorma p de Besicovitch, que denotaremos por $[\cdot]_p$, como*

$$[f]_p = \left(\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ p < +\infty,$$

$$[f]_\infty = \sup_{p \geq 1} [f]_p.$$

Definición 2.6 *Se define el espacio vectorial M^p, $1 \leq p < +\infty$, como*

$$M^p = \{ f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \ \ medible : \quad [f]_p < +\infty \}.$$

Si f pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces $[f]_p = 0$, con lo cual $[\cdot]_p$ es una seminorma en M^p y no una norma.

El siguiente resultado, para el caso unidimensional, es debido a Marcinkiewicz ([MAR], véanse también [LA LE], [LA]).

Proposición 2.7 *El espacio M^p es completo, para todo p con $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración:

Sea $\{f_k\}_k$ una sucesión de Cauchy en M^p. Para probar que $\{f_k\}_k$ converge basta demostrar que existe una subsucesión convergente de $\{f_k\}_k$. Tomemos entonces una subsucesión de $\{f_k\}_k$, que seguimos denotando por $\{f_k\}_k$, tal que

$$[f_{k+1} - f_k]_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, existe $r_k > 0$ tal que para todo $t \geq r_k$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^k}. \tag{2.4}$$

La sucesión $\{r_k\}$ la podemos elegir creciente.

Tomando r_0 como cero, sea ahora f definida como

$$f \ = \ f_k \ \text{ si } \ r_{k-1} \leq |x| < r_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vamos a probar que $\lim_{k\to+\infty}[f_k - f]_p = 0$.

Para ello, denotamos por X_k la función característica del conjunto $\{x : |x| \geq r_k\}$. Entonces

$$[f_k - f]_p^p = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f_k(x) - f(x)|^p X_k(x)dx +$$
$$+ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t\cap\{x:|x|<r_k\}} |f_k(x) - f(x)|^p dx, \tag{2.5}$$

donde el último término vale cero. Con respecto al otro término del miembro de la derecha se sabe

$$|f_k(x) - f(x)|^p X_k(x) = \left| f_k(x)X_k(x) - \sum_{j=k+1}^{+\infty} f_j(x)X_{r_{j-1}\leq|x|<r_j}(x) \right|^p =$$

$$= \left| f_k(x)X_k(x) - \sum_{j=k+1}^{+\infty} f_j(x)(X_{j-1}(x) - X_j(x)) \right|^p =$$

$$= \left| \sum_{j=k}^{+\infty}(f_j(x) - f_{j+1}(x))X_j(x) \right|^p \leq \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| X_j(x) \right)^p, \tag{2.6}$$

con lo que tenemos

$$[f_k - f]_p^p \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| X_j(x) \right)^p dx,$$

y por tanto

$$[f_k - f]_p \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{B_t} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| X_j(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por la Desigualdad de Tchebyshev y (2.4) se deduce ahora

$$[f_k - f]_p \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\int_{B_t} |f_j(x) - f_{j+1}(x)|^p X_j(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f_j(x) - f_{j+1}(x)|^p X_j(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Lo que prueba que f_k converge a f en M^p. ■

Para $p = +\infty$ tenemos el espacio M^∞, cuya definición damos a continuación:

Definición 2.8 *Se define el espacio vectorial M^∞ como*

$$M^\infty = \{f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \ \textit{medible} : \ [f]_\infty < +\infty\}.$$

Para probar que M^∞ es un espacio completo necesitamos antes algunas propiedades de este espacio que son importantes de por sí.

Lema 2.9 *Sea $f \in M^\infty$ y $T_\alpha(s)$ la función truncada a la altura α (véase Notación). Entonces, para todo $\alpha \geq [f]_\infty$ se tiene*

$$[T_\alpha(f) - f]_\infty = 0.$$

Para la demostración del Lema 2.9 necesitamos dos resultados previos:

Lema 2.10 *Sea $f \in M^\infty$. Para cada $\rho > [f]_\infty$ se define el conjunto*

$$K_\rho = \{x \in \mathbb{R}^N : \quad |f(x)| \geq \rho\}.$$

Entonces

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{|K_\rho \cap B_T|}{|B_T|} = 0.$$

Demostración del Lema 2.10:

Para todo p con $1 \leq p < +\infty$, se tiene

$$\left(\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T \cap K_\rho} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \rho\left(\frac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando límite superior cuando T tiende a infinito y teniendo en cuenta la definición de $[f]_\infty$ se deduce entonces

$$[f]_\infty \geq [f]_p \geq \rho\left(\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}\right)^{\frac{1}{p}},$$

y por tanto

$$\left(\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{[f]_\infty}{\rho} \quad \forall p \in [1, +\infty).$$

Tomando ahora límite cuando p tiende a $+\infty$, se obtiene entonces

$$\lim_{p \to +\infty}\left(\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{[f]_\infty}{\rho} < 1$$

por lo que necesariamente $\overline{\lim}_{T \to +\infty} \dfrac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}$ ha de ser cero. ■

Como consecuencia de este resultado se deduce ahora

Lema 2.11 *Si $f \in M^\infty$ entonces*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T\cap K_\rho} |f(x)|^p dx = 0 \quad \forall \rho > [f]_\infty. \tag{2.7}$$

Demostración del Lema 2.11:

La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que para todo $p \geq 1$ se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T\cap K_\rho} |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{|B_T|}\left(\int_{B_T\cap K_\rho} |f(x)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2}} |B_T \cap K_\rho|^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |f(x)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|B_T \cap K_\rho|}{|B_T|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

de donde, tomando límite superior cuando T tiende a infinito y aplicando el Lema 2.10, se tiene el resultado. ■

Demostración del Lema 2.9:

Sea $\alpha \geq [f]_\infty$, entonces para todo $\rho > \alpha$ y para todo $p \in [1, +\infty)$, se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |T_\alpha(f(x)) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-1}\left[\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |T_\alpha(f(x)) - T_\rho(f(x))|^p dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |T_\rho(f(x)) - f(x)|^p dx\right] \leq 2^{p-1}\left((\rho-\alpha)^p + \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T\cap K_\rho} |f(x)|^p dx\right).$$

Tomando límite superior cuando T tiende a infinito y aplicando (2.7) se obtiene entonces

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |T_\alpha(f(x)) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-1}(\rho-\alpha)^p \quad \forall \rho > \alpha, \forall p \in [1, +\infty),$$

lo que implica $[T_\alpha(f) - f]_p = 0$ para todo $p \in [1, +\infty)$ y por tanto $[T_\alpha(f) - f]_\infty = 0$. ■

Proposición 2.12 *El espacio M^∞ es completo.*

Demostración:

Sea $\{f_k\}_k$ una sucesión de Cauchy en M^∞. Para probar que $\{f_k\}_k$ converge basta demostrar que existe una subsucesión convergente de $\{f_k\}_k$. Tomemos entonces una subsucesión de $\{f_k\}_k$, que seguimos denotando por $\{f_k\}_k$, tal que

$$[f_{k+1} - f_k]_\infty < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1. \tag{2.8}$$

Sea f definida por

$$f = f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1} - f_k). \tag{2.9}$$

Como el segundo término de la derecha de (2.9) pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, y por tanto, a M^∞, y el primer término se encuentra en M^∞, la función f es también un elemento de M^∞. Vamos a probar que $\{f_k\}$ converge a f en M^∞. Se tiene:

$$[f_j - f]_\infty = [f_j - f_1 - \sum_{k=1}^{\infty} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1} - f_k)]_\infty = [\sum_{k=1}^{j-1}(f_{k+1} - f_k) - \sum_{k=1}^{\infty} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1} - f_k)]_\infty.$$

Aplicando el Lema 2.9 y (2.8) se deduce entonces

$$[f_j - f]_\infty = [\sum_{k=1}^{j-1} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1}-f_k) - \sum_{k=1}^{\infty} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1}-f_k)]_\infty = [\sum_{k=j}^{\infty} T_{\frac{1}{2^k}}(f_{k+1}-f_k)]_\infty \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}},$$

que tiende a cero cuando j tiende a infinito. ■

A partir de los espacios M^p se pueden ahora construir unos espacios normados mediante el cociente con el núcleo de la seminorma.

Definición 2.13 *Se define el conjunto Z^p, $1 \leq p \leq +\infty$, como*

$$Z^p = \{f \in M^p : \quad [f]_p = 0\}.$$

Las Proposiciones 2.7 y 2.12 implican

Proposición 2.14 *El espacio cociente M^p/Z^p, con $1 \leq p \leq +\infty$, es un espacio de Banach para la norma*

$$\|\hat{f}_p\|_p = [f]_p,$$

siendo $\hat{f}_p$ un elemento de M^p/Z^p y f un representante cualquiera de la clase $\hat{f}_p$.

Nótese que la norma de M^p/Z^p no depende del representante de la clase elegido y que, por tanto, la definición de norma que estamos manejando para el espacio M^p/Z^p coincide con la norma habitual de un espacio cociente, es decir

$$\|\hat{f}\| = \inf_{g \in \hat{f}} [g]_p.$$

La siguiente proposición recoge algunas propiedades de los espacios M^p que recuerdan a la de los espacios L^p.

Proposición 2.15 **(a)** *Sean $f \in M^p$, $g \in M^q$ tales que $1 < p, q < +\infty$ y sea $r \geq 1$ definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Entonces $fg \in M^r$ y*

$$[fg]_r \leq [f]_p [g]_q. \tag{2.10}$$

(b) *Si* $1 \leq p < q \leq +\infty$ *entonces* $M^q \subset M^p$ *y* $[f]_p \leq [f]_q$.

(c) *Si* $f \in M^p$ $1 \leq p \leq +\infty$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *entonces* $fg \in M^p$ *y* $[fg]_p \leq [f]_p \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

(d) *Sean* $1 \leq p < q < r \leq +\infty$, $\lambda \in [0,1]$, *tales que*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

Entonces, si $f \in M^r$ *se verifica que* $[f]_q \leq [f]_p^\lambda [f]_r^{1-\lambda}$.

Observación 2.16 El caso $p = 1$ y $q = +\infty$ no se puede incluir en el apartado (a) ya que los elementos de M^∞ no están en general en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con lo que puede ocurrir que $[fg]_1$ sea infinita. En el caso $f \in M^1$, $g \in M^\infty$ la idea será en general sustituir g por otro elemento g' de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $[g - g']_\infty = 0$, lo cual es posible gracias al Lema 2.9.

Observación 2.17 En el apartado (b) hemos probado la inclusión $M^q \subset M^p$ cuando $p < q$. Sin embargo, esta inclusión no es cierta cuando se trata de M^p/Z^p y M^q/Z^q. La aplicación de M^q/Z^q en M^p/Z^p no está bien definida; dos elementos de la misma clase en M^p/Z^p pueden no estar en la misma clase de equivalencia en M^q/Z^q. Con el siguiente ejemplo vamos a probar que existen funciones $f \in M^q$, $[f]_p = 0$, $p < q$ y que sin embargo $[f]_q \neq 0$. En realidad basta hacerlo con $p = 1$, $1 < q$.

Consideremos $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida así:
En cada intervalo $(n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$ se considera $I_n \subset (n-1, n)$, de medida $|I_n| = \frac{1}{n^q}$, con $q > 1$. La función f es

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n X_{I_n}.$$

Vamos a probar que $f \in M^q$, que $[f]_1 = 0$ pero que sin embargo $[f]_q \neq 0$.

$$\frac{1}{2n} \int_0^n |f(x)|^q dx = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \int_{j-1}^{j} j^q X_{I_j}(x) dx = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} j^q \frac{1}{j^q} = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \int_0^n |f(x)|^q dx = \frac{1}{2},$$

por lo que $f \in M^q$ y $[f]_q = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{q}}$.

Sin embargo,

$$\frac{1}{2n}\int_0^n |f(x)| = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} j\frac{1}{j^q} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{q-1}}.$$

Tomando límite superior en n se obtiene

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{2n}\int_0^n |f(x)|dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{q-1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{q-1}} = 0.$$

Demostración de la Proposición 2.15:

(a) Para todo $t > 0$, usando la desigualdad de Hölder y dividiendo por $|B_t|$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|fg|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

de donde se deduce el resultado sin más que tomar límite superior cuando t tiende a infinito

(b) El caso $q = +\infty$ es consecuencia de la propia definición de M^∞.

Sea ahora $f \in M^q$ con $q < +\infty$. Utilizando la desigualdad de Hölder con $\frac{q}{p}$ y $\frac{q}{q-p}$ se tiene

$$\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x)|^p dx \le \frac{1}{|B_t|}\left(\int_{B_t}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}|B_t|^{\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \frac{1}{|B_t|^{\frac{p}{q}}}(\int_{B_t}|f(x)|^q dx)^{\frac{p}{q}}.$$

Tomando ahora límite superior en t se demuestra que $M^q \subset M^p$ y que $[f]_p \le [f]_q$.

(c) Para todo $t > 0$ se tiene

$$\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x)g(x)|^p dx \le \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x)|^p dx,$$

con lo que, de nuevo, tomando límite superior cuando t tiende a infinito se obtiene el resultado para $p < +\infty$. Para el caso $+\infty$ basta ahora tomar supremo en p.

(d) De nuevo es una consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Supongamos primero $r < +\infty$.

$$[f]_q = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|^{\frac{1}{q}}}\left(\int_{B_t}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|^{\frac{1}{q}}}\left(\int_{B_t}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{\lambda}{p}}\left(\int_{B_t}|f(x)|^r dx\right)^{\frac{1-\lambda}{r}} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{\lambda}{p}} \left(\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x)|^r dx\right)^{\frac{1-\lambda}{r}} \leq [f]_p^{\lambda}[f]_r^{1-\lambda}.$$

Supongamos ahora $r = +\infty$. Entonces $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p}$.
Sea $s > 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder

$$\int_{B_t}|f(x)|^q dx = \int_{B_t}|f(x)|^{q-\frac{p}{s}}|f(x)|^{\frac{p}{s}}dx \leq \left(\int_{B_t}|f(x)|^{(q-\frac{p}{s})s'}dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_{B_t}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{s}},$$

de donde, dividiendo por la medida de B_t, extrayendo raíz q-ésima y tomando límite superior cuando t tiende a infinito se llega a:

$$[f]_q \leq [f]_{(q-\frac{p}{s})s'}^{\frac{q-\frac{p}{s}}{q}}[f]_p^{\frac{p}{sq}} \leq [f]_\infty^{1-\frac{p}{sq}}[f]_p^{\frac{p}{sq}}.$$

Como hemos considerado $s > 1$ es fácil comprobar que $(q - \frac{p}{s})s'$ es mayor que 1 por lo que la desigualdad anterior tiene sentido.
Se ha probado entonces que para todo $s > 1$

$$[f]_q \leq [f]_\infty^{1-\frac{\lambda}{s}}[f]_p^{\frac{\lambda}{s}}.$$

Tomando ahora s tendiendo a 1 se obtiene el resultado. ∎

2.3 Construcción de espacios de Besicovitch generados por álgebras.

En la presente sección vamos a construir y estudiar los espacios de Besicovitch generalizados, los cuales se encuentran dentro de M^p y tienen la particularidad de ser reflexivos, propiedad fundamental para aplicar el Teorema 1.1 y poder así extender el teorema de Nguetseng a estos espacios.

Definición 2.18 *Se dice que un subespacio vectorial X del espacio de funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ es un álgebra de Banach con valor medio si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) *Cualquier $f \in X$ es una función acotada, continua en $\mathbb{R}^N$ y posee valor medio (véase Definición 2.1).*

(ii) *X contiene a las funciones constantes.*

(iii) *Si f, g pertenecen a X entonces fg pertenece a X.*

(iv) *X dotado de la norma infinito es un espacio de Banach.*

Observación 2.19 La definición de álgebra de Banach con valor medio aparece en [J K O] donde se exigen dos propiedades más al álgebra, que son las propiedades (v) y (vi) que nosotros pedimos en la sección 2.4.

Como ejemplos más sencillos de álgebras de Banach con valor medio tenemos el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ que son Y-periódicas, con Y la celda de periodicidad y las funciones uniformemente casi periódicas. Podemos construir otras álgebras de Banach con valor medio considerando polinomios trigonométricos de funciones, por ejemplo, el subespacio generado por $cos\sqrt[3]{x}$ y $sen\sqrt[3]{x}$.

Una de las principales propiedades de un álgebra de Banach con valor medio nos la da el siguiente lema:

Lema 2.20 *Dada $f \in X$, para toda $\varphi \in C(\mathbb{R})$ se verifica que $\varphi \circ f$ pertenece a X.*

En particular, de este resultado se deduce que los elementos de X en valor absoluto y elevados a p para cualquier p, $1 \leq p < +\infty$, tienen valor medio.

Demostración del Lema 2.20:

Por el teorema de aproximación polinomial de Weierstrass, existe una sucesión de polinomios $\{P_n(t)\}$ tales que

$$|\varphi(t) - P_n(t)| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } t \in [-\|f\|_{C_b^0(\mathbb{R}^N)}, \|f\|_{C_b^0(\mathbb{R}^N)}].$$

De ahí que

$$|\varphi(f(x)) - P_n(f(x))| < \frac{1}{n} \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Esto demuestra que $\{P_n(f)\}_n$ converge a $\varphi \circ f$ en la norma infinito. Como X es un álgebra cerrada para la norma infinito se deduce que $\varphi \circ f \in X$. ∎

A partir de X vamos a construir los espacio de Besicovitch de forma similar a como se obtienen las funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch a partir de $CAP(\mathbb{R}^N)$.

Definición 2.21 *Se define el espacio de Besicovitch de orden p, $1 \leq p < +\infty$, generado por el álgebra X, que denotaremos por $B^p(X)$, como*

$$B^p(X) = \{w \in M^p : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists v_\varepsilon \in X \ \textit{tal que} \ [w - v_\varepsilon]_p < \varepsilon\}.$$

Habitualmente denotaremos a estos espacios por B^p, salvo cuando sea necesario indicar cuál es el álgebra que lo genera.
El espacio B^∞ se define como

$$B^\infty = M^\infty \cap B^1.$$

A los elementos del espacio B^p los llamaremos funciones de Besicovitch.

Observación 2.22 La definición tiene sentido porque X está contenido en M^p para todo $p \geq 1$ puesto que los elementos de X están en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observación 2.23 Como $[\cdot]_p$ es una seminorma las sucesiones convergentes no tienen límite único.

Por definición, si $f \in B^p$, $p < +\infty$, existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset X$ tal que φ_n converge a f en B^p. En el caso B^∞ lo que se puede probar es lo siguiente:

Proposición 2.24 *Si $f \in B^\infty$ entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset X$ tal que φ_n converge a f en B^1 y $\|\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq [f]_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
Sea $r = [f]_\infty$, entonces por la Proposición 2.15 apartado (b) y por el Lema 2.9 sabemos que

$$[f - T_r(f)]_1 \leq [f - T_r(f)]_\infty = 0.$$

Si ahora $\{\varphi_n\} \subset X$ es tal que φ_n converge a f en B^1, la sucesión $T_r(\varphi_n)$ está en X por el Lema 2.20, verifica $\|T_r(\varphi_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq [f]_\infty$ y gracias a que T_r es lipschitziana con constante de Lipschitz 1, se tiene

$$[T_r(f) - T_r(\varphi_n)]_1 \leq [f - \varphi_n]_1,$$

que tiende a cero, lo que termina la demostración. ■

Definición 2.25 *Para $1 \le p \le +\infty$ se define $\mathcal{B}^p$ como el espacio de las clases de equivalencia en M^p/Z^p de los elementos de B^p. A la clase de equivalencia de f en M^p/Z^p la denotaremos por $\hat{f}_p$, o si no hay confusión, simplemente $\hat{f}$.*

Proposición 2.26 *$\mathcal{B}^p$ es un espacio de Banach respecto a la norma $\|\hat{f}\|_p = [f]_p$, donde f es un representante cualquiera de la clase $\hat{f}$.*

Demostración:

Para $p < +\infty$ la demostración es inmediata sin más que tener en cuenta que $\mathcal{B}^p$ es el cierre de las clases de equivalencia en M^p/Z^p de elementos de X y que M^p/Z^p es un espacio de Banach (véase Proposición 2.14).

Para $p = +\infty$ la demostración también es muy fácil. Basta probar que B^∞ es cerrado en M^∞.

Sea $\{f_n\} \subset B^\infty$ una sucesión convergente a f en M^∞. La sucesión $\{f_n\}$ también es una sucesión convergente en B^1, por tanto, existe $g \in B^1$ tal que $\lim_n [f_n - g]_1 = 0$.

Pero entonces $[g-f]_1 = 0$, por lo tanto $g - f \in B^1$, lo que implica que $f \in B^1$. Se tiene así que f_n converge a $f \in M^\infty \cap B^1$ en la seminorma $[\cdot]_\infty$. ■

Proposición 2.27 *Para toda $f \in B^1$ existe $M\{f\}$.*

Demostración:

Sean $\{\varphi_n\} \subset X$ tales que φ_n converge a f en B^1.

Como

$$|M\{\varphi_n\} - M\{\varphi_m\}| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|B_t|} \left| \int_{B_t} (\varphi_n - \varphi_m)(x)dx \right| \le$$
$$\le \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |\varphi_n - \varphi_m|(x)dx = [\varphi_n - \varphi_m]_1,$$

la sucesión $M\{\varphi_n\}$ es de Cauchy y por tanto converge a un cierto número M en $\mathbb{R}$. Vamos a probar que $M = M\{f\}$. Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ acotado de medida positiva se tiene

$$\left| \frac{1}{|K_t|} \int_{K_t} f dx - M \right| \le \frac{1}{|K_t|} \int_{K_t} |f - \varphi_n| dx + \left| \frac{1}{|K_t|} \int_{K_t} \varphi_n dx - M\{\varphi_n\} \right| + |M\{\varphi_n\} - M|,$$

de donde tomando límite superior en t se deduce

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left| \frac{1}{|K_t|} \int_{K_t} f dx - M \right| \le [f - \varphi_n]_1 + |M\{\varphi_n\} - M| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, tomando límite en n se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{|K_t|}\int_{K_t} f\,dx - M\right| = 0$$

lo que implica el resultado. ■

Vamos a obtener un resultado de composición de funciones de Besicovitch con funciones continuas, así como el teorema de reflexividad, para todo lo cual necesitaremos los siguientes resultados:

Lema 2.28 *Si $f \in B^p$, con $1 \leq p < +\infty$ entonces*

$$\lim_{\rho\to+\infty}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f|^p X_{|f|>\rho}\,dx = 0. \tag{2.11}$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$, por definición de B^p existe $\varphi \in X$ tal que $[f-\varphi]_p < \varepsilon$. Para todo $\rho \geq 2\|\varphi\|_X$ se tendrá

$$|f-\varphi|X_{|f|>\rho} \geq (|f| - \|\varphi\|_X)X_{|f|>\rho} \geq (|f| - \frac{\rho}{2})X_{|f|>\rho} \geq \frac{|f|}{2}X_{|f|>\rho},$$

por lo que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f|^p X_{|f|>\rho}\,dx \leq 2^p\,\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f-\varphi|^p X_{|f|>\rho}\,dx \leq (2\varepsilon)^p,$$

de donde

$$\overline{\lim_{\rho\to+\infty}}\,\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f|^p X_{|f|>\rho}\,dx \leq (2\varepsilon)^p \quad \forall\varepsilon > 0$$

lo que prueba (2.11). ■

Usando el Lema 2.28 podemos probar ahora el siguiente resultado de densidad de B^∞ en B^1:

Proposición 2.29 *Para toda función $u \in B^p$ con $1 \leq p$ y para todo $r > 0$ se tiene que $T_r(u)$ pertenece a B^p. Además se verifica*

$$\lim_{r\to+\infty} T_r(u) = u \text{ en } B^p.$$

Demostración:

Si $p = +\infty$ el resultado es inmediato por el Lema 2.9.

Si $p < +\infty$, sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión en X que converge a u en B^p.

Por el Lema 2.20, $T_r(\varphi_n)$ pertenece a X, mientras que la lipschitzianidad de T_r implica que $[T_r(u) - T_r(\varphi_n)]_p \leq [u - \varphi_n]_p$. Esto prueba que $T_r(\varphi_n)$ pertenece a B^p.

Por otra parte,

$$[u - T_r(u)]_p^p = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |u - T_r(u)|^p dx \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |u|^p X_{|u|>r} dy,$$

y el Lema 2.28 prueba que $T_r(u)$ converge a u en B^p. ∎

La extensión de la Proposición 2.15 a los espacios de Besicovitch generados por un álgebra está dada por el siguiente resultado:

Proposición 2.30 (a) *Sean $f \in B^p$, $g \in B^q$ tales que $1 < p, q < +\infty$ y sea $r \geq 1$ definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Entonces $fg \in B^r$ y*

$$[fg]_r \leq [f]_p [g]_q. \tag{2.12}$$

(b) *Si $1 \leq p < q \leq +\infty$ entonces $B^q \subset B^p$ y $[f]_p \leq [f]_q$.*

(c) *Si $f \in B^p$, $1 \leq p \leq +\infty$, y $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ entonces $fg \in B^p$ y $[fg]_p \leq [f]_p \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.*

(d) *Sean $1 \leq p < q < r \leq +\infty$, $\lambda \in [0,1]$, tales que*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

Entonces, si $f \in B^r$ se verifica que $[f]_q \leq [f]_p^\lambda [f]_r^{1-\lambda}$.

Observación 2.31 A diferencia de lo que ocurre con los espacios M^p/Z^p, en los espacios B^p se verifica la relación de inclusión siguiente:

Si $1 \leq p < q \leq +\infty$ entonces $B^q \subset B^p$.

Esto es consecuencia del apartado (c) de la Proposición 2.30 y del siguiente resultado.

Proposición 2.32 *Si $1 \leq p < q \leq +\infty$ y $f \in B^q$ con $[f]_p = 0$ entonces $[f]_q = 0$.*

Demostración:

Supongamos que $q < +\infty$ y consideremos $T_n(f)$.

Está claro que $[T_n(f)]_p = 0$. Por otra parte,

$$\frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |T_n(f)|^q dx \leq n^{q-p} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |T_n(f)|^p dx.$$

Tomando límite cuando t tiende a infinito se tiene

$$[T_n(f)]_q^q \leq n^{q-p}[T_n(f)]_p^p = 0.$$

Entonces

$$[f]_q \leq [f - T_n(f)]_q,$$

que por la Proposición 2.29 tiende a cero cuando n tiende a infinito , por lo que se tiene el resultado.

Se ha demostrado la proposición para todo $q < +\infty$. Basta ahora tomar supremo en q y se tiene la proposición para el caso infinito. ■

Demostración de la Proposición 2.30:

(a) Para demostrar que $fg \in B^r$ basta tomar $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones contenidas en X tales que

$$f_n \to f \quad \text{en } B^p$$

$$g_n \to g \quad \text{en } B^q.$$

y considerar la sucesión $\{f_n g_n\}$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.15 apartado (a) se deduce

$$[fg - f_n g_n]_r \leq [fg - f_n g]_r + [f_n g - f_n g_n]_r \leq [f - f_n]_p [g]_q + [f_n]_p [g - g_n]_q,$$

que claramente implica (a) ya que $\{[f_n]_p\}$ está acotada. La desigualdad (2.12) se tiene por (2.10).

(b) Supongamos primero que $q < +\infty$. Dada $f \in B^q$ existe $\{\varphi_n\}$ en X tal que

$$\varphi_n \to f \text{ en } B^q.$$

Entonces, por la Proposición 2.15 apartado (c) se sabe que $[f - \varphi_n]_p \leq [f - \varphi_n]_q$. Tomando límite en n se tiene que $f \in B^p$.

En el caso $q = +\infty$, por la Proposición 2.24 existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset X$ que converge a f en B^1 tal que $\|\varphi_n\|_X \leq r = [f]_\infty$. Aplicando el Lema 2.9 se tendrá entonces

$$[f - \varphi_n]_p = [T_r(f) - \varphi_n]_p = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \left(\frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |T_r(f) - \varphi_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left((2r)^{p-1}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|T_r(f)-\varphi_n|dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (2r)^{\frac{p-1}{p}}[T_r(f)-\varphi_n]_1^{\frac{1}{p}} = (2r)^{\frac{p-1}{p}}[f-\varphi_n]_1^{\frac{1}{p}},$$

que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Luego, $\{\varphi_n\}$ converge a f en B^p y por tanto, f pertenece a B^p.

(c) Para demostrar que $fg \in B^p$ consideremos primero el caso en que $p < +\infty$ y $f \in X$. Como $g \in B^\infty$, por el apartado (b), $g \in B^p$ por tanto existe una sucesión $\{g_n\} \subset X$ tal que $\lim_n [g - g_n]_p = 0$. Como los elementos de X son funciones acotadas

$$[fg - fg_n]_p \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}[g - g_n]_p,$$

por tanto, $fg \in B^p$.

Sea ahora $f \in B^p$. Existe una sucesión $\{f_n\} \subset X$ tal que $\lim_n [f - f_n]_p = 0$.

$$[fg - f_n g]_p \leq [f - f_n]_p \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

y como $f_n g \in B^p$ se tiene entonces que $fg \in B^p$ puesto que B^p es cerrado.

El caso en que $f \in B^\infty$ se demuestra fácilmente usando la definición de B^∞. Efectivamente, si $f \in B^\infty$ entonces $f \in B^1$ y por lo que acabamos de probar sabemos que $fg \in B^1$. Por otra parte, $f \in M^\infty$. Aplicando la Proposición 2.15 apartado (c) se tiene que $fg \in M^\infty$. La desigualdad se vio en la Proposición 2.15 apartado (c).

(d) Es el apartado (d) de la Proposición 2.15. ■

Un resultado sobre composición está dado por la siguiente proposición:

Proposición 2.33 *Sea $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua, entonces para toda función $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$ se tiene que $F(u)$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$.*

Si además F verifica que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$|F(s)| \leq C_1 + C_2|s|^q \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

entonces para toda función $u \in B^p$ con $p \geq q$ se tiene que $F(u)$ pertenece a $B^{\frac{p}{q}}$.

En el caso en que (2.13) sea cierta con $q = 0$ se tiene que $F(u)$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$ para toda $u \in B^1$.

Demostración:

Supongamos primero que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$. Sea entonces $\{\varphi_n\}$ una sucesión en X que converge a u en B^1 y tal que $\|\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Se sabe que esta sucesión existe por la Proposición 2.24.

Por el Lema 2.20 $F(\varphi_n)$ pertenece a X. Si ahora ε es un número positivo dado, como F es uniformemente continua en $[-\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}]$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in [-\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ se tiene $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$. Para todo $t > 0$ se tendrá entonces

$$\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|F(\varphi_n) - F(u)|dx = \frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|F(\varphi_n) - F(u)|X_{|\varphi_n - u|<\delta}dx +$$

$$+\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|F(\varphi_n) - F(u)|X_{|\varphi_n - u|>\delta}dx \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|\varphi_n - u|,$$

donde $M = \sup F$ en $[-\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}]$. Tomando límite superior cuando t tiende a infinito se llega por tanto a

$$[F(\varphi_n) - F(u)]_1 \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta}[\varphi_n - u]_1,$$

de donde tomando límite superior en n se deduce

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[F(\varphi_n) - F(u)]_1 \leq \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$$

lo que implica

$$\exists \lim_n [F(\varphi_n) - F(u)]_1 = 0.$$

Por tanto, $F(u) \in B^1$, como $F(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $F(u)$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$.

Supongamos ahora que F verifica (2.13) y que u pertenece a B^p con $p \geq q$.

Para cualquier $r > 0$, por la Proposición 2.29 $T_r(u)$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$ y por tanto, utilizando lo demostrado anteriormente, $F(T_r(u))$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^1$ que está contenido en B^s, para todo $s \geq 1$. Utilizando (2.13) se tiene

$$\int_{B_t}|F(u) - F(T_r(u))|^{\frac{p}{q}}dx = \int_{B_t}|F(u) - F(r\, sgn(u))|^{\frac{p}{q}}X_{|u|>r}dx \leq$$

$$\leq 2^{\frac{p}{q}-1}\int_{B_t}(|F(u)|^{\frac{p}{q}} + |F(r\, sgn(u))|^{\frac{p}{q}})X_{|u|>r}dx \leq$$

$$\leq 2^{\frac{p}{q}-1}\int_{B_t}([C_1 + C_2|u|^q]^{\frac{p}{q}} + [C_1 + C_2 r^q]^{\frac{p}{q}})X_{|u|>r}dx \leq 2^{\frac{p}{q}-1}\int_{B_t}2(\frac{C_1}{r^q} + C_2)^{\frac{p}{q}}|u|^p X_{|u|>r}dx.$$

Por tanto, dividiendo por $|B_t|$ y tomando límite superior cuando t tiende a infinito se deduce

$$[F(u) - F(T_r(u))]_{\frac{p}{q}}^{\frac{p}{q}} \leq 2^{\frac{p}{q}}(\frac{C_1}{r^q} + C_2)^{\frac{p}{q}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |u|^p X_{|u|>r} dx$$

lo que por el Lema 2.28 implica

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} [F(u) - F(T_r(u))]_{\frac{p}{q}} = 0.$$

Como $B^{\frac{p}{q}}$ es completo se obtiene que $F(u)$ pertenece a $B^{\frac{p}{q}}$.

En el caso en que $q = 0$ se prueba de forma parecida que $F(u)$ pertenece a B^1. Como claramente pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $F(u)$ pertenece a $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. ∎

Como consecuencia se tiene ahora

Corolario 2.34 *Para toda función $u \in B^p$, $p < +\infty$, se tiene*

$$[u]_p = M\{|u|^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración:

Sabemos que

$$[u]_p = \left(\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La Proposición 2.33 con $F(s) = |s|^p$ y la Proposición 2.27 implican que el límite superior de la derecha es en realidad un límite que coincide con $M\{|u|^p\}$. ∎

El siguiente resultado caracteriza el dual de $\mathcal{B}^p$ con $1 \leq p < +\infty$.

Teorema 2.35 *Para todo p con $1 < p' \leq +\infty$ la aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{B}^{p'} \mapsto (\mathcal{B}^p)'$ definida por*

$$\begin{aligned} &< \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} >_{(\mathcal{B}^p)', \mathcal{B}^p} = M\{uv\} \quad \text{si } 1 < p < +\infty \\ &< \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} >_{(\mathcal{B}^1)', \mathcal{B}^1} = M\{T_{[u]_\infty}(u)v\} \quad \text{si } p = 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

define un isomorfismo isométrico de $\mathcal{B}^{p'}$ en $(\mathcal{B}^p)'$.

En particular, los espacios $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos.

El espacio $\mathcal{B}^2$ es un espacio de Hilbert.

Observación 2.36 Observemos que si $f \in B^\infty$ y $g \in B^p$ con $1 < p < +\infty$ entonces

$$M\{T_{[f]_\infty}(f)g\} = M\{fg\}. \tag{2.15}$$

es decir, en la relación de dualidad no hace falta hacer la truncada si la dualidad actúa sobre $\mathcal{B}^p$ con $p > 1$.

La igualdad (2.15) es fácil de probar usando la desigualdad de Hölder:

$$|M\{(T_{[f]_\infty}(f) - f)g\}| \leq [T_{[f]_\infty}(f) - f]_{p'}[g]_p \leq [T_{[f]_\infty}(f) - f]_\infty [g]_p = 0$$

por el Lema 2.9.

Demostración del Teorema 2.35:

Primera Etapa: $\mathcal{F}$ aplica $\mathcal{B}^{p'}$ en $(\mathcal{B}^p)'$ con $1 \leq p < +\infty$, es lineal y verifica

$$||\mathcal{F}\hat{v}||_{(\mathcal{B}^p)'} = ||\hat{v}||_{\mathcal{B}^{p'}} \quad \forall v \in B^{p'}.$$

Para probar esto, gracias a la Proposición 2.30 apartado (a) es fácil ver que si $1 < p < +\infty$ la definición (2.14) de $\mathcal{F}$ no depende de los representantes u y v de las clases $\hat{u}$, $\hat{v}$ y que

$$| < \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} > | = |M\{uv\}| \leq [uv]_1 \leq ||\hat{u}||_{\mathcal{B}^{p'}} ||\hat{v}||_{\mathcal{B}^p}. \tag{2.16}$$

En el caso $p = 1$ es más delicado ver que la expresión (2.14) no depende del representante u de $\hat{u}$ (que no depende del representante v de $\hat{v}$ es evidente gracias al apartado (c) de la Proposición 2.30). Consideremos $u_1, u_2 \in B^\infty$ tales que $[u_1 - u_2]_\infty = 0$. Queremos probar que

$$M\{T_{[u_1]_\infty}(u_1)v\} = M\{T_{[u_2]_\infty}(u_2)v\} \quad \forall v \in B^1. \tag{2.17}$$

Supongamos primero que v pertenece a B^q con $q > 1$.

Entonces, por la Proposición 2.30 apartados (a) y (b) y el Lema 2.9 se tiene

$$|M\{(T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2))v\}| \leq [(T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2))v]_1 \leq$$

$$\leq [T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2)]_{q'}[v]_q \leq [T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2)]_\infty [v]_q =$$

$$= [u_1 - u_2]_\infty [v]_q = 0.$$

Luego (2.17) es cierta para toda $v \in B^q$ con $1 < q < +\infty$.

Si ahora v pertenece a B^1, sea entonces $\{\varphi_n\}$ una sucesión en X que converge a u en B^1. Como φ_n pertenece a B^q para todo $q > 1$ la Proposición 2.30 apartado (c) implica

$$|M\{(T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2))v\}| = |M\{(T_{[u_1]_\infty}(u_1) - T_{[u_2]_\infty}(u_2))(v - \varphi_n)\}| \leq$$

$$\leq ([u_1]_\infty + [u_2]_\infty)[v - \varphi_n]_1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con lo que tomando límite en n se obtiene (2.17).

La desigualdad (2.16) para $p = 1$ sigue de la Proposición 2.30 apartado (c).

Por tanto, hemos probado que para toda $u \in B^{p'}$ con $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{F}\hat{u}$ pertenece a $(\mathcal{B}^p)'$ y se tiene

$$\|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^p)'} \leq [u]_{p'}.$$

Por otra parte, es fácil ver que $\mathcal{F}$ es lineal, esto es evidente si $1 < p < +\infty$, mientras que el caso $p = 1$ se sigue usando razonamientos similares a los que nos han permitido probar que la fórmula (2.17) no depende del representante u de $\hat{u}$ cuando $p = 1$.

Vamos a probar ahora que

$$\|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^p)'} = [u]_{p'}. \tag{2.18}$$

Para ello, si $1 < p < +\infty$ y $\hat{u} \in \mathcal{B}^{p'}$ ($\hat{u} \neq 0$, el caso $\hat{u} = 0$ es evidente), tomando $v = |u|^{p'-2}u$ se sabe que $v \in B^p$ por la Proposición 2.33. La definición (2.14) de $\mathcal{F}$ da

$$[u]_{p'}^{p'} = M\{|u|^{p'}\} =< \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} >\leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^p)'}\ [v]_p = \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^p)'}[u]_{p'}^{\frac{p'}{p}}$$

lo que implica

$$[u]_{p'} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^p)'}.$$

En el caso $p = 1$, el razonamiento es parecido, para $\hat{u} \in \mathcal{B}^\infty$, $\hat{u} \neq 0$, consideremos el representante u de $\hat{u}$ tal que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ lo cual es posible por el Lema 2.9. Tomando entonces $v = |u|^{q-2}u \in B^{q'} \subset B^1$ con $q > 1$ se tiene

$$[u]_q^q = M\{|u|^q\} =< \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} >\leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^1)'}\|\hat{v}\|_{\mathcal{B}^1} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^1)'}[v]_{q'} = \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^1)'}[u]_q^{\frac{q}{q'}}.$$

De donde $[u]_q \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^1)'}$ para todo $q > 1$. Tomando el supremo en q se obtiene $[u]_\infty \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{(\mathcal{B}^1)'}$ que termina la demostración de (2.18).

Para terminar la demostración falta ver que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva.

Segunda Etapa: Los espacios $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos. El espacio $\mathcal{B}^2$ es Hilbert.

La norma del espacio $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$ satisface la desigualdad de Clarkson (véase

[CL]). Efectivamente, esta desigualdad aplicada a $L^p(B_t)$ se escribe así:

Si $2 \leq p < +\infty$:

$$\|\frac{f+g}{2}\|^p_{L^p(B_t)} + \|\frac{f-g}{2}\|^p_{L^p(B_t)} \leq \frac{1}{2}(\|f\|^p_{L^p(B_t)} + \|g\|^p_{L^p(B_t)}) \quad \forall f, g \in L^p(B_t),$$

si $1 < p \leq 2$:

$$\|\frac{f+g}{2}\|^q_{L^p(B_t)} + \|\frac{f-g}{2}\|^q_{L^p(B_t)} \leq (\frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p(B_t)} + \frac{1}{2}\|g\|^p_{L^p(B_t)})^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall f, g \in L^p(B_t).$$

Sin más que dividir por la medida de B_t y tomar límite cuando t tiende a infinito se obtienen las mismas desigualdades pero con la norma de $\mathcal{B}^p$ en lugar de la norma de $L^p(B_t)$.

Como consecuencia (véase p. ej. [BRE]) se demuestra ahora que los espacios $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$ son uniformemente convexos. Por el teorema de Milman-Pettis se tiene la reflexividad de $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$.

$\mathcal{B}^2$ es un espacio de Hilbert porque su norma, gracias al Corolario 2.34, viene dada por

$$\|\hat{v}\|_{\mathcal{B}^2} = M\{|v|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

y $(\hat{v}, \hat{w}) = M\{vw\}$ $\forall v, w \in B^2$ es un producto escalar en $\mathcal{B}^2$.

Tercera Etapa: La aplicación $\mathcal{F}$ es sobreyectiva para $1 \leq p < 2$.

Sea $F \in (\mathcal{B}^p)'$ con $1 \leq p < 2$. Como por la Proposición 2.30 apartado (b) el espacio B^2 se puede identificar con un subespacio de B^p, podemos considerar la restricción de F a este subespacio, que será un funcional lineal y continuo en $\mathcal{B}^2$, que es un espacio de Hilbert. Por el teorema de Riesz existe entonces $\hat{u} \in \mathcal{B}^2$ tal que

$$< F, \hat{v} >= M\{uv\} \quad \forall v \in B^2. \tag{2.19}$$

Supongamos ahora que $p > 1$. Tomando en (2.19) $v = |T_n(u)|^{p'-2}T_n(u) \in B^2$ se tiene

$$[T_n(u)]^{p'}_{p'} \leq M\{|T_n(u)|^{p'-1}|u|\} = M\{uv\} =< F, \hat{v} > \leq$$

$$\leq \|F\|_{(\mathcal{B}^p)'}\|\hat{v}\|_{\mathcal{B}^p} = \|F\|_{(\mathcal{B}^p)'}[T_n(u)]^{\frac{p'}{p}}_{p'}$$

de donde

$$[T_n(u)]_{p'} \leq \|F\|_{(\mathcal{B}^p)'}.$$

Como por la segunda etapa sabemos que el espacio $\mathcal{B}^{p'}$ es reflexivo existe una subsucesión de $\{\widehat{T_n(u)}\}$ que converge débil en $\mathcal{B}^{p'}$ a una función $\hat{\tilde{u}} \in \mathcal{B}^{p'}$.
Como por otra parte, por la Proposición 2.29 $T_n(u)$ converge fuerte a u en B^2, se deduce que $[\tilde{u} - u]_2 = 0$ y por tanto

$$< F, \hat{v} >= M\{\tilde{u}v\} \quad \forall v \in B^2. \tag{2.20}$$

Usando ahora que $\tilde{u} \in B^{p'}$ es fácil ver por densidad que (2.20) es cierta para toda función $v \in B^p$.
Consideremos ahora el caso $p = 1$. Tomando $v = |T_n(u)|^{q'-2}T_n(u) \in B^2$ en (2.19) con $q > 1$ se obtiene análogamente a (2.20)

$$[T_n(u)]_{q'}^{q'} \leq M\{|T_n(u)|^{q'-1}|u|\} = M\{uv\} =< F, \hat{v} >\leq$$

$$\leq \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'}\|\hat{v}\|_{\mathcal{B}^1} = \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'}[T_n(u)]_{q'-1}^{q'-1} \leq \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'}[T_n(u)]_{q'}^{q'-1}.$$

De donde $[T_n(u)]_{q'} \leq \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'} \quad \forall q' > 1$.
Tomando supremo en q' se deduce $[T_n(u)]_\infty \leq \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'}$, lo que por el Lema 2.9 significa $[T_n(u) - T_r(T_n(u))]_\infty = [T_n(u) - T_r(u)]_\infty = 0$ para todo $n \geq r = \|F\|_{(\mathcal{B}^1)'}$. Se tiene por tanto que

$$[u - T_r(u)]_2 \leq [u - T_n(u)]_2 + [T_n(u) - T_r(u)]_2 \leq$$

$$\leq [u - T_n(u)]_2 + [T_n(u) - T_r(u)]_\infty = [u - T_n(u)]_2 \quad \forall n \geq r.$$

Como por la Proposición 2.29 $T_n(u)$ converge a u con B^2 se obtiene $[u - T_r(u)]_2 = 0$ y por tanto de (2.20) se deduce

$$< F, \hat{v} >= M\{T_r(u)v\} \quad \forall v \in B^2.$$

Como $T_r(u)$ pertenece a $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es fácil ver ahora por densidad que (2.20) es cierta para todo $v \in B^1$ lo que acaba la demostración de la tercera etapa.
Cuarta Etapa: La aplicación (2.14) es sobreyectiva para todo $p > 2$.
Es inmediato a partir de que los espacios $\mathcal{B}^{p'}$ con $1 < p' < 2$ son reflexivos y que su dual se identifica con $\mathcal{B}^p$, lo que implica directamente que la aplicación

$$\hat{u} \in \mathcal{B}^{p'} \mapsto \mathcal{F}\hat{u} \in (\mathcal{B}^p)'$$

definida por $< \mathcal{F}\hat{u}, \hat{v} >= M\{uv\}$ es un isomorfismo isométrico. ∎

2.4 Derivación en los espacios de Besicovitch.

En esta sección vamos a estudiar diferentes nociones de derivabilidad para funciones de un espacio de Besicovitch. Los resultados que obtendremos serán necesarios en los dos capítulos posteriores.

Exigiremos dos propiedades más al álgebra de Banach con valor medio, X, que las que se pidieron en la sección 2.3 (ver (i), (ii), (iii) y (iv)), que son:

(v) Los elementos de X son funciones uniformemente continuas en $\mathbb{R}^N$.

(vi) X es invariante respecto a traslaciones, i.e., si $f \in X$ entonces $f(\cdot + \tau) \in X$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^N$.

En la subsección 2.4.1 construimos un subespacio denso de los espacios B^p, cuyos elementos son funciones infinitamente derivables.

En la subsección 2.4.2 introducimos una definición de derivada, diferente de la derivada clásica, para las funciones de B^1, llamada derivada en media. Estudiaremos también la relación entre esta derivada en media y la derivada en el sentido de las distribuciones, para ello, demostramos en este apartado una útil "fórmula de integración por partes".

En la subsección 2.4.3 estudiamos el subespacio ∇W^p. Se trata de un subespacio de $(B^p)^N$ cuyos elementos son gradientes de funciones. Lo más delicado de este apartado será demostrar que este subespacio es cerrado en $(B^p)^N$.

2.4.1 Densidad de las funciones de clase infinito en B^p.

En este apartado vamos a demostrar la existencia de un subespacio, formado por funciones muy regulares, denso en los espacios B^p, $1 \leq p < +\infty$. La construcción de este subespacio se hará mediante la técnica habitual de convolución con funciones de clase infinito y soporte compacto.

Definición 2.37 *Se define el subespacio de X:*

$$D^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad D^\alpha f \in X, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \alpha_i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq N\}.$$

Nuestro objetivo es probar que este subespacio vectorial es denso en B^p, $1 \leq p < +\infty$, lo cual se llevará a cabo mediante convolución. Necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.38 (a) *Sea* $f \in M^p$, $1 \leq p \leq +\infty$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Entonces* $f * h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $D^\alpha(f * h) \in M^p$, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$ *y* $[D^\alpha(f * h)]_p \leq [f]_p \|D^\alpha h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

(b) *Sea* $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *y* $f \in X$. *Entonces* $D^\alpha(f * h) \in X$ $\forall \alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$.

(c) *Sea* $f \in B^p$, $1 \leq p \leq +\infty$, *y* $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Entonces* $D^\alpha(f * h) \in B^p$ $\forall \alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$.

Demostración:

(a) Seguiremos ideas similares a la demostración del resultado análogo con f en $L^p(\mathbb{R}^N)$ (véase [BRE]).

Vamos a empezar probando que si $f \in M^p$ con $1 \leq p < +\infty$ entonces $f * h$ pertenece a M^p y

$$[f * h]_p \leq [f]_p \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.21}$$

Sabemos que la función $f(x-y)h(y)$ es medible en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, además, para casi todo $y \in \mathbb{R}^N$ y para todo $t > 0$ la aplicación

$$x \in B_t \mapsto |f(x-y)|^p |h(y)|$$

es integrable en B_t porque f pertenece a $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Tomando $r > 0$ tal que $sop(h) \subset B_r$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{B_t} |f(x-y)|^p |h(y)| dx = \int_{B_r} dy \int_{B_t} |f(x-y)|^p |h(y)| dx \leq$$

$$\leq \int_{B_{t+r}} |f(z)|^p dz \int_{\text{sop h}} |h(y)| dy < +\infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Fubini tendremos

$$\int_{B_t} dx \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |h(y)| dy \leq \|f\|^p_{L^p(B_{t+r})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.22}$$

Por otra parte, para casi todo $x \in B_t$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|h(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |h(y)| dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{2.23}$$

lo que implica

$$(|f| * |h|)^p(x) \leq (|f|^p * |h|)(x) \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Integrando en B_t y aplicando (2.22) tendremos por tanto

$$\int_{B_t} (|f| * |h|)^p(x) dx \leq \int_{B_t} (|f|^p * |h|)(x) dx \, \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \leq \|f\|_{L^p(B_{t+r})}^p \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^p,$$

lo que fácilmente implica que $f * h$ pertenece a M^p y que se tiene (2.21).

Si p es igual a $+\infty$, la desigualdad (2.21) es inmediata tomando supremo en q en la desigualdad

$$[f * h]_q \leq [f]_q \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq [f]_\infty \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

La afirmación $f * h$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ es un resultado conocido (véase [BRE]). El resultado $D^\alpha(f * h) \in M^p$ es inmediato teniendo en cuenta que $D^\alpha(f * h) = f * D^\alpha h$ y que $D^\alpha h$ es de nuevo una función de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(b) Para cada $y \in \mathbb{R}^N$ fijo, $f(\cdot - y)$ está en X porque X es invariante por traslaciones, por tanto, $f(\cdot - y)h(y) \in X$.

Sea $F : \mathbb{R}^N \mapsto X$ definida por

$$F(y)(x) = f(x - y)h(y).$$

Por la continuidad uniforme de f se tiene que F pertenece a $C(\mathbb{R}^N; X)$ y además, el soporte de F es compacto. En particular, F pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N; X)$ y por tanto, $\int_{\mathbb{R}^N} F(y) dy$ pertenece a X, es decir, que $f * h$ pertenece a X. Como consecuencia, también se tiene que $D^\alpha(f * h)$ pertenece a X para todo $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$.

(c) Dada $f \in B^p$ con $p < +\infty$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset X$ tal que

$$f_n \to f \text{ en } B^p. \tag{2.24}$$

Por el apartado anterior, $f_n * h$ pertenece a X y por el apartado (a)

$$[f_n * h - f * h]_p \leq [f_n - f]_p \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Pasando al límite en n en esta desigualdad y aplicando (2.24) se tiene entonces que

$$\lim_n [f_n * h - f * h]_p = 0,$$

por lo que $f * h$ pertenece a B^p. Inmediatamente se tiene también para las derivadas de cualquier orden $D^\alpha(f * h)$.

El caso $p = +\infty$ es inmediato ya que por el apartado (a) $f * h$ pertenece a M^∞ y por lo probado anteriormente $f * h$ pertenece a B^1. ■

Consideremos la función ρ_δ definida en la Notación. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.39 **(a)** *Dada cualquier $f \in B^p$, $1 \leq p < +\infty$, se verifica*

$$\lim_{\delta \to 0} [f * \rho_\delta - f]_p = 0. \tag{2.25}$$

(b) *Para toda función $f \in B^p$ con $1 \leq p < +\infty$ existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset D^\infty$ tal que φ_n converge a f en B^p.*

(c) *Para toda función $f \in B^\infty$ existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset D^\infty$ tal que φ_n converge a f en B^1 y $\{\varphi_n\}$ está acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. En particular, φ_n converge a f B^∞ $*$-débil.*

Demostración:

(a) Supongamos primero que $f \in X$. Se tiene

$$[f * \rho_\delta - f]_p^p = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f * \rho_\delta(x) - f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} \left(\int_{B_\delta} |f(x - y) - f(x)| \rho_\delta(y) dy \right)^p dx \leq$$

$$\leq \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} \sup_{y \in B_\delta} |f(x - y) - f(x)|^p \left(\int_{B_\delta} \rho_\delta(y) dy \right)^p dx =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} \sup_{y \in B_\delta} |f(x - y) - f(x)|^p dx$$

y la continuidad uniforme de f implica entonces (2.25).

Sea ahora $f \in B^p$ cualquiera. Dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in X$ tal que

$$[g - f]_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.26}$$

Además, como (2.25) se ha demostrado para los elementos de X, dada $g \in X$ existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo δ, $0 < \delta < \delta_0$ se tiene

$$[g * \rho_\delta - g]_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.27}$$

Aplicando el apartado (a) de la Proposición 2.38 y (2.26), (2.27) se tendrá por tanto

$$[f * \rho_\delta - f]_p \leq [f - g]_p + [g * \rho_\delta - g]_p + [(g - f) * \rho_\delta]_p < \varepsilon$$

lo que prueba (2.25).

(b) Sean $f \in B^p$ y $\varepsilon > 0$. Existe $g \in X$ tal que

$$[f - g]_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el apartado (a), existe $\delta > 0$ tal que

$$[g - g * \rho_\delta]_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces se tendrá

$$[f - g * \rho_\delta]_p \leq [f - g]_p + [g - g * \rho_\delta]_p < \varepsilon.$$

Como por la Proposición 2.38 apartado (b) se sabe que $g * \rho_\delta \in D^\infty$ se tiene el resultado.

(c) Sea $f \in B^\infty$. Por la Proposición 2.24 existe una sucesión $\{\tilde{\varphi}_n\} \subset X$ que converge a f en B^1 y que está acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Por el apartado (a) para todo $n \in \mathbb{N}$ existe δ_n suficientemente pequeño tal que

$$[\tilde{\varphi}_n * \rho_{\delta_n} - \tilde{\varphi}_n]_1 < [f - \tilde{\varphi}_n]_1.$$

Como $\|\tilde{\varphi}_n * \rho_{\delta_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ es menor o igual que $\|\tilde{\varphi}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, la sucesión $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n * \rho_{\delta_n} \in D^\infty$ converge a f en B^1 y está acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

En particular, $\{\varphi_n\}$ está acotada en B^∞ y satisface

$$M\{\varphi_n g\} \to M\{fg\} \quad \forall g \in X.$$

Como X es denso en B^1 se deduce que φ_n converge a f B^∞ $*$-débil. ∎

A continuación damos un fácil resultado técnico referente a la convolución que usaremos en demostraciones posteriores.

Proposición 2.40 *Sean $f \in B^1$, $g \in B^1 \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con h par. Se verifica*

$$M\{(f * h)g\} = M\{f(g * h)\}. \tag{2.28}$$

Demostración:

Primeramente, observemos que $(f*h)g$ tiene media (idem $f(g*h)$) ya que por la Proposición 2.38 apartado (c) sabemos que $f*h$ pertenece a B^1, y por la Proposición 2.30 apartado (c) el producto $(f*h)g$ pertenece a B^1.

Por otra parte, el teorema de Fubini y el cambio de variables $x-y=z$ implica

$$M\{(f*h)g\} = \lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|B(-y;T)|} \int_{B(-y;T)} f(z)g(y+z)dz\, h(y)dy.$$

La desigualdad

$$\left| \frac{1}{|B(-y;T)|} \int_{B(-y;T)} f(z)g(y+z)dzh(y) \right| \leq$$
$$\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \sup_{T>0} \frac{1}{|B(-y;T)|} \int_{B(-y;T)} |f(z)|dz|h(y)|$$

permite aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, y junto con la simetría de h podemos escribir

$$M\{(f*h)g\} = \int_{\mathbb{R}^N} M_z\{f(z)g(y+z)\}h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} M_z\{f(z)g(z-y)\}h(y)dy,$$

pero,

$$\int_{\mathbb{R}^N} M_z\{f(z)g(z-y)\}h(y)dy = \lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} f(z)g(z-y)dzh(y)dy,$$

y aplicando de nuevo el teorema de Fubini se obtiene

$$M\{(f*h)g\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} \int_{\mathbb{R}^N} g(z-y)h(y)dyf(z)dz = M\{(g*h)f\}$$

lo que prueba (2.28). ■

2.4.2 Derivada en media.

Haciendo un paralelismo entre los espacios B^1 y $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vamos a definir una derivada para funciones de B^1, análoga a la derivada distribucional de funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, donde las integrales son sustituidas por medias y el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ por el espacio D^∞ definido en la subsección anterior.

Definición 2.41 *Dada $f \in B^1$, se define la derivada i-ésima en media de f, que denotaremos por $\partial_{i,m} f$, como la aplicación lineal de D^∞ en $\mathbb{R}$ definida por*

$$\partial_{i,m} f(\varphi) = -M\{f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\} \quad \forall \varphi \in D^\infty. \tag{2.29}$$

Nótese que para toda función $\varphi \in D^\infty$, $f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ pertenece a B^1 gracias a la Proposición 2.30 apartado (c).

Llamaremos gradiente en media de f, y lo denotaremos por $\nabla_m f$, a la aplicación de $(D^\infty)^N$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\nabla_m f = (\partial_{1,m} f, \ldots, \partial_{N,m} f),$$

i.e.

$$\begin{array}{rccl} \nabla_m f: & (D^\infty)^N & \mapsto & \mathbb{R} \\ & \Psi & \mapsto & -M\{f div \Psi\}. \end{array}$$

Se define la divergencia en media de $F \in (B^1)^N$, y la denotaremos por $div_m F$, como

$$div_m F = \sum_{i=1}^{N} \partial_{i,m} F_i,$$

o equivalentemente

$$div_m F : D^\infty \mapsto \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto -M\{F \cdot \nabla \varphi\}.$$

A partir de las derivadas en media podemos ahora efectuar una construcción similar a la de los espacios de Sobolev:

Definición 2.42 *Se define el espacio $B^{1,p}$, $1 \leq p \leq +\infty$, como:*

$$B^{1,p} = \{f \in B^p : \quad \exists f_i \in B^p \ \ verificando \ \ \partial_{i,m} f(\varphi) = M\{f_i \varphi\} \ \ \forall \varphi \in D^\infty, 1 \leq i \leq N\}.$$

Las funciones f_i que aparecen en la Definición 2.42 son únicas en el siguiente sentido:

Proposición 2.43 *Sean $f, g \in B^p$ con $1 \leq p \leq +\infty$ tales que*

$$< f, \varphi > = < g, \varphi > \quad \forall \varphi \in D^\infty.$$

Entonces $[f - g]_p = 0$.

Demostración:

Basta probar que si $f \in B^p$ satisface

$$M\{f\varphi\} = 0 \quad \forall \varphi \in D^\infty \tag{2.30}$$

entonces $[f]_p = 0$.

Si $1 < p \leq +\infty$, la igualdad (2.30) y D^∞ denso en $B^{p'}$ implican que f visto como elemento del dual de $B^{p'}$ es nulo, con lo que se deduce que $[f]_p = 0$.

Si $p = 1$, como para toda función $g \in B^\infty$ existen $\{\varphi_n\} \subset D^\infty$ que convergen a g en B^∞ $*$-débil, se deduce que

$$M\{fT_{[g]_\infty}(g)\} = 0 \quad \forall g \in B^\infty$$

lo que, teniendo presente la identificación $\mathcal{B}^\infty = (\mathcal{B}^1)'$, implica $[f]_1 = 0$. ∎

El siguiente resultado nos proporciona una útil fórmula de integración por partes a la vez que nos da una relación entre la derivada en media y la derivada clásica.

Proposición 2.44 *Sean $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tales que existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tal que las derivadas distribucionales de u y v respecto a x_i pertenecen a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:*

(a) $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in B^p$, $v, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in B^{p'}$ *con* $1 < p < +\infty$.

(b) $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in B^1$, $v, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Entonces se satisface la igualdad

$$M\{u\frac{\partial v}{\partial x_i}\} = -M\{\frac{\partial u}{\partial x_i}v\}. \tag{2.31}$$

Demostración:

Sean u, v que verifican (a) o (b).

Integrando por partes se tiene

$$\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} \frac{\partial u}{\partial x_i}v dx + \frac{1}{|B_t|}\int_{\partial B_t} uvn_i d\sigma(x).$$

Integrando esta expresión con respecto a t entre a y $2a$, con $a > 0$, y dividiendo por a se deduce entonces

$$\frac{1}{a}\int_a^{2a} \frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\, dt = -\frac{1}{a}\int_a^{2a} \frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} \frac{\partial u}{\partial x_i}v dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{|B_t|}\int_{\partial B_t} uvn_i d\sigma(x)\,dt. \tag{2.32}$$

Por la Proposición 2.27 sabemos que

$$\exists \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = M\{u\frac{\partial v}{\partial x_i}\}$$

$$\exists \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = M\{v\frac{\partial u}{\partial x_i}\},$$

lo cual claramente implica

$$\exists \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\,dt = M\{u\frac{\partial v}{\partial x_i}\}$$

$$\exists \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx\,dt = M\{v\frac{\partial u}{\partial x_i}\}.$$

Por otra parte, gracias a la Proposición 2.27 se tiene también

$$\overline{\lim_{a\to+\infty}}\frac{1}{a}\left|\int_a^{2a}\frac{1}{|B_t|}\int_{\partial B_t} uvn_i d\sigma(x)\,dt\right| \leq \overline{\lim_{a\to+\infty}}\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{|B_t|}\int_{\partial B_t}|uv|d\sigma(x)\,dt \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{a\to+\infty}}\frac{1}{a^{N+1}|B_1|}\int_{a<|x|<2a}|uv|dx = \overline{\lim_{a\to+\infty}}\frac{2^N-1}{a}\frac{1}{|C_{a,2a}|}\int_{a<|x|<2a}|uv|dx = 0,$$

con lo que tomando límite en (2.32) cuando a tiende a infinito se obtiene (2.31). ∎

De la Proposición 2.44 se deduce ahora claramente el siguiente corolario.

Corolario 2.45 *Sea $u \in B^p$, $1 \leq p \leq +\infty$ tal que la derivada distribucional de u respecto a x_i pertenece a B^p, entonces $\partial_{i,m}u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en B^p.*

A continuación vamos a introducir el concepto de función invariante (véase [J K O]) que nos conducirá al de álgebra ergódica que será de gran importancia en el capítulo siguiente.

Definición 2.46 *Dada $f \in B^1$ se dice que f es invariante si*

$$[f - f(\cdot + s)]_1 = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N. \tag{2.33}$$

Al conjunto de funciones invariantes lo denotaremos por I.

Observación 2.47 El concepto de función invariante no depende del representante de f, esto es, si $[f-g]_1 = 0$ y f es invariante entonces g es invariante. En particular, si existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $[f-C]_1 = 0$ entonces f es invariante.

Veamos algunas propiedades de las funciones invariantes.

Proposición 2.48 *Sea $f \in B^p \cap I$. Entonces*

$$[f(\cdot) - f(\cdot + s)]_p = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N. \tag{2.34}$$

Demostración:

Basta notar que $f(\cdot) - f(\cdot + s)$ pertenece a B^p y $[f(\cdot) - f(\cdot + s)]_1 = 0$ con lo que la Proposición 2.32 implica (2.34). ■

Proposición 2.49 *El conjunto I es un subespacio vectorial cerrado de B^1. En particular, $I \cap B^p$ es un subespacio vectorial cerrado de B^p.*

Demostración:

La demostración de que es un subespacio vectorial es evidente. Para ver que I es cerrado en B^1 basta notar que si $\{f_n\} \subset I$ converge a f en B^1 entonces para todo $s \in \mathbb{R}^N$, $f_n(\cdot + s)$ converge a $f(\cdot + s)$ en B^1 y por tanto

$$[f(\cdot) - f(\cdot + s)]_1 = \lim_{n \to +\infty} [f_n(\cdot) - f_n(\cdot + s)]_1 = 0$$

con lo que f pertenece a I. ■

El siguiente resultado caracteriza las funciones invariantes a través de las derivadas en media.

Proposición 2.50 *Sea $f \in B^p$, f es invariante si y sólo si $\partial_{i,m} f = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq N$.*

Nótese la analogía que existe entre función constante y derivada clásica y función invariante y derivada en media.

Demostración:

Vamos a probar que si $\partial_{i,m} f = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ entonces f es invariante.

Primera etapa:

Supongamos primero que f pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y es tal que ∇f pertenece a $(B^1)^N$. Por el Corolario 2.45 sabemos entonces que

$$M\{|\nabla f|\} = 0. \tag{2.35}$$

Por otra parte, gracias al teorema de Fubini se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x+s)-f(x)|dx = \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\int_0^1 \nabla f(x+ts)\cdot s dt|dx \leq$$
$$\leq |s|\int_0^1 \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla f(x+ts)|dx\, dt = |s|\int_0^1 \frac{1}{|B_T|}\int_{B(ts;T)}|\nabla f(y)|dydt. \tag{2.36}$$

El integrando $\frac{1}{|B_T|}\int_{B(ts;T)}|\nabla f(y)|dy$ está acotado por $\frac{1}{|B_T|}\int_{B_{|s|+T}}|\nabla f(y)|dy$, que a su vez es una sucesión acotada respecto a T, ya que tiene límite cuando T tiende a infinito. Como además existe el límite cuando T tiende a infinito de $\frac{1}{|B_T|}\int_{B(ts;T)}|\nabla f(y)|dy$ y vale $M\{|\nabla f|\}=0$ por (2.35), el teorema de la convergencia dominada implica que f es invariante.

Segunda etapa:

Supongamos ahora que $f\in B^1$ y $\partial_{i,m}f=0$.

Consideramos $f*\rho_\delta$. Por la Proposición 2.39 apartado (a) y la Proposición 2.38 apartado (c) se sabe que $f*\rho_\delta$ converge a f en B^1 y $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*\rho_\delta)$ pertenece a B^1. Veamos que $\partial_{i,m}(f*\rho_\delta)=0$.

Dada $g\in D^\infty$, por la Proposición 2.40, se tiene

$$M\{(f*\rho_\delta)\frac{\partial g}{\partial y_i}\} = M\{f(\frac{\partial g}{\partial y_i}*\rho_\delta)\} = M\{f\frac{\partial}{\partial y_i}(g*\rho_\delta)\}=0$$

ya que $\partial_{i,m}f=0$. Por tanto $\partial_{i,m}(f*\rho_\delta)=0$. Por la primera etapa se deduce que $f*\rho_\delta$ es invariante. Como I es cerrado en B^1 se concluye que f es invariante.

Tercera etapa:

Vamos a probar el recíproco. Es decir, que si f es invariante entonces $\partial_{i,m}f=0$.

Para todos $s\in\mathbb{R}^N$ y $g\in D^\infty$, se tiene

$$M\{(f(x+s)-f(x))g(x)\} = M\{f(x)(g(x-s)-g(x))\}, \tag{2.37}$$

lo que, gracias a que f es invariante, implica

$$M\{f(x)(g(x-s)-g(x))\}=0 \quad \forall s\in\mathbb{R}^N,\ \forall g\in D^\infty. \tag{2.38}$$

Aplicando esta igualdad se deduce ahora que para todo $t\in\mathbb{R}$ e i perteneciente a $\{1,\ldots,N\}$ se tiene

$$M\{f(x)\frac{g(x-te_i)-g(x)}{t}\}=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{2.39}$$

Por otra parte

$$M\{f(x)\frac{g(x-te_i)-g(x)}{t}\} =$$

$$= M\{f(x)\left(\frac{g(x-te_i)-g(x)}{t} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right)\} + M\{f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad (2.40)$$

donde el primer término del miembro derecho se puede estimar por

$$|M\{f(x)\left(\frac{g(x-te_i)-g(x)}{t} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right)\}| \leq M\{|f|\} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\frac{g(x+te_i)-g(x)}{t} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)| \leq$$

$$\leq M\{|f|\} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)|t.$$

Como las derivadas segundas de g están acotadas uniformemente en $\mathbb{R}^N$, ya que pertenecen a X, se tiene por tanto

$$\exists \lim_{t\to 0} M\{f(x)(\frac{g(x-te_i)-g(x)}{t} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x))\} = 0. \qquad (2.41)$$

Las igualdades (2.39), (2.40) y (2.41) implican por tanto

$$M\{f\frac{\partial g}{\partial x_i}\} = 0 \quad \forall g \in D^\infty, \ \forall i \in \{1,\ldots,N\}.$$

es decir, $\partial_{i,m} f = 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,N\}$. ■

A partir de las funciones invariantes podemos ahora dar la definición de álgebra ergódica que será fundamental en resultados posteriores.

Definición 2.51 *Se dice que un álgebra de Banach con valor medio X es ergódica si los únicos elementos de B^1 invariantes son los equivalentes a una constante.*

Como ejemplo de álgebra ergódica podemos citar $CAP(\mathbb{R}^N)$. El álgebra generada por $cos\sqrt[3]{x}$ y $sen\sqrt[3]{x}$ no es ergódica (véase [J K O]).

La principal propiedad de las álgebras ergódicas viene dada por la siguiente caracterización (véase [J K O]).

Proposición 2.52 *Un álgebra es ergódica si y sólo si*

$$\lim_{R\to+\infty} \left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(x+y)dy - M\{f\}\right]_p = 0 \quad \forall f \in B^p, \quad \text{con } 1 \leq p < +\infty. \qquad (2.42)$$

Demostración:

Supongamos primero que se verifica la propiedad (2.42) con $p = 1$.

Vamos a probar que entonces el álgebra es ergódica.

Sea f una función invariante. Para todos $T, R > 0$ se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-M\{f\}|dx \leq \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(x+y)dy|dx+$$

$$+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(x+y)dy-M\{f\}\right|dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-f(x+y)|dx\,dy+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(x+y)dy-M\{f\}\right|dx. \tag{2.43}$$

En el primer término del miembro derecho el integrando $\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-f(x+y)|dx$ converge a cero para todo $y \in B_R$ ya que f es invariante. Por otra parte, se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-f(x+y)|dx \leq \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)|dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_{T+R}}|f(x)|dx,$$

que es una sucesión acotada independientemente de T.

Por el teorema de la convergencia dominada se tendrá por tanto

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|f(x)-f(x+y)|dx\,dy = 0 \quad \forall R > 0,$$

con lo que tomando límite cuando T tiende a infinito en (2.43) se deduce

$$[f-M\{f\}]_1 \leq \left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(\cdot+y)dy-M\{f\}\right]_1 \quad \forall R > 0$$

lo que implica que $[f-M\{f\}]_1 = 0$.

Si $1 < p < +\infty$, la Proposición 2.30 apartado (b) y la densidad de B^p en B^1 inmediatamente implican (2.42) con $p = 1$.

Recíprocamente, supongamos que el álgebra es ergódica.

Aplicando el teorema de la media ergódica (véase [YO], [D S]) al grupo $U(y) : B^p \mapsto B^p$ definido por

$$U(y)f = f(\cdot + y)$$

se obtiene entonces (2.42) para todo p con $1 < p < +\infty$.

Para $p = 1$, basta notar que si f pertenece a B^q con $q > 1$ entonces, gracias a la

Proposición 2.30 apartado (b), se tiene

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(x+y)dy - M\{f\}\right]_1 \leq \overline{\lim_{R\to+\infty}} \left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(x+y)dy - M\{f\}\right]_q = 0,$$

con lo que (2.42) es cierta para $p=1$ y $f \in B^q$ con $q>1$.

Por densidad, la igualdad (2.42) es cierta para $p=1$ y $f \in B^1$. ∎

2.4.3 El espacio de las funciones derivables con derivada en B^p.

Tras el estudio de las derivadas en media una cuestión que inmediatamente se plantea es la relación entre esta derivada en media y la derivada débil habitual. Una respuesta parcial se vio en el Corolario 2.45. En este apartado demostraremos, entre otros resultados, la relación en sentido recíproco. Para ello, vamos a definir un subespacio de $(B^p)^N$ constituido por gradientes de funciones. Demostraremos que este subespacio es cerrado para lo cual nos hará falta obtener una desigualdad de tipo Poincaré (Lema 2.54) bastante técnica.

A lo largo de esta subsección C designará una constante que sólo depende de p y de N y que puede cambiar de una línea a otra.

Lema 2.53 *Para todo p con $1 \leq p < +\infty$ existe una constante $C>0$ tal que para todo $T>0$ se tiene*

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |u|^p dx \leq C\left[\left|\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} u dx\right|^p + T^p \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |\nabla u|^p dx\right] \quad \forall u \in W^{1,p}(B_T). \quad (2.44)$$

Demostración:

Si $T=1$ ver por ejemplo [KUF]. En el caso general basta usar el cambio de función $v(y) = u(Ty)$. ∎

Lema 2.54 *Para todo p con $1 \leq p < +\infty$ existe una constante $C>0$ tal que para todos $R,T>0$ con $R<T$ se verifica*

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |u(x)|^p dx \leq CT^p \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|}\int_{B_s} |\nabla u(x)|^p dx +$$
$$+ C\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u(x)dx\right|^p \quad \forall u \in W^{1,p}(B_T). \quad (2.45)$$

Demostración:

Basta probar (2.45) para $u \in C^1(\overline{B_T})$ y después razonar por densidad. Supongamos por tanto que u pertenece a $C^1(\overline{B_T})$. Si r, s pertenecen respectivamente a $[R,T]$ y $[0,R]$, se tiene

$$u(ry) - u(sy) = \int_s^r \nabla u(ty) y dt.$$

Si integramos con respecto a y en la esfera unidad, multiplicamos por s^{N-1} e integramos con respecto a s en [0,R] se obtiene

$$\frac{R^N}{N}\int_{|y|=1} u(ry)d\sigma(y) = \int_{B_R} u(x)dx + \int_0^R \int_{|y|=1}\int_s^r s^{N-1}\nabla u(ty)ydtd\sigma(y)ds.$$

Multiplicando esta igualdad por $\dfrac{N}{R^N}$ y aplicando el teorema de Fubini en el segundo término del segundo miembro se llega a

$$\int_{|y|=1} u(ry)d\sigma(y) = N|B_1|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx + \frac{N}{R^N}\int_0^r \int_{|y|=1}\nabla u(ty)y\int_0^{t\wedge R} s^{N-1}dsd\sigma(y)dt =$$

$$= N|B_1|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx + \int_0^r \int_{|y|=1}\nabla u(ty)y\left(\frac{R\wedge t}{R}\right)^N d\sigma(y)dt.$$

Multiplicando esta igualdad por r^{N-1}, integrando con respecto a r en $[R,T]$ y aplicando el teorema de Fubini en el último término se llega a

$$\int_{R\leq|x|\leq T} udx = |B_1|(T^N - R^N)\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx+$$

$$+\int_R^T\int_0^r\int_{|y|=1} r^{N-1}\nabla u(ty)y\left(\frac{R\wedge t}{R}\right)^N d\sigma(y)dtdr =$$

$$= |B_1|(T^N - R^N)\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx + \int_0^T\int_{|y|=1}\nabla u(ty)y\frac{T^N-(R\vee t)^N}{N}\left(\frac{R\wedge t}{R}\right)^N d\sigma(y)dt.$$

Sumando a esta igualdad $\displaystyle\int_{B_R} udx$, tomando valor absoluto y dividiendo por $|B_T|$ se deduce entonces

$$\left|\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} udx\right| \leq \left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx\right| +$$

$$+\frac{1}{|B_T|}\int_0^T\int_{|y|=1}|\nabla u(ty)|\frac{T^N-(R\vee t)^N}{N}\left(\frac{R\wedge t}{R}\right)^N d\sigma(y)dt \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} udx\right| + \frac{T^N}{NR^N}\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}\frac{|\nabla u|}{|x|^{N-1}}(R\wedge|x|)^N dx \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u dx \right| + \frac{R}{N} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u| dx + \frac{1}{N|B_1|} \int_{R\leq|x|\leq T} \frac{|\nabla u|}{|x|^{N-1}} dx.$$

Elevando a p y aplicando la desigualdad de Hölder se tiene entonces

$$\left| \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} u dx \right|^p \leq C \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u dx \right|^p + CR^p \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|^p dx +$$

$$+ C \int_{R\leq|x|\leq T} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{N-1}} dx \left(\int_{R\leq|x|\leq T} \frac{1}{|x|^{N-1}} dx \right)^{p-1} \leq$$

$$\leq C \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u dx \right|^p + CR^p \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|^p dx + CT^{p-1} \int_{R\leq|x|\leq T} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{N-1}} dx. \qquad (2.46)$$

Para estimar la integral que aparece en el tercer término de (2.46) consideramos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k R \leq T < 2^{k+1} R$; esto nos permite escribir

$$\int_{R\leq|x|\leq T} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{N-1}} dx = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{2^j R\leq|x|<2^{j+1}R} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{N-1}} dx + \int_{2^k R\leq|x|\leq T} \frac{|\nabla u|^p}{|x|^{N-1}} dx \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|B_{2^{j+1}R}|}{(2^j R)^{N-1}} \frac{1}{|B_{2^{j+1}R}|} \int_{B_{2^{j+1}R}} |\nabla u|^p dx + \frac{|B_{2^{k+1}R}|}{(2^k R)^{N-1}} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |\nabla u|^p dx \leq$$

$$\leq |B_1| 2^N R \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |\nabla u|^p dx \left(\sum_{j=0}^{k} 2^j \right) =$$

$$= |B_1| 2^N R (2^{k+1} - 1) \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |\nabla u|^p dx \leq$$

$$\leq CT \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |\nabla u|^p dx.$$

Teniendo en cuenta esta estimación en (2.46) se deduce por tanto

$$\left| \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} u dx \right|^p \leq C \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u dx \right|^p + CR^p \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|^p dx +$$

$$+ CT^p \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |\nabla u|^p dx \leq$$

$$\leq C \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u dx \right|^p + CT^p \sup_{R\leq s\leq T} \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |\nabla u|^p dx,$$

que sustituido en (2.44) nos lleva a la estimación buscada (2.45). ■

Definición 2.55 *Se define el espacio* $\widetilde{W}^p$, $1 \leq p < +\infty$, *como*

$$\widetilde{W}^p = \{ f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N) : \quad \nabla f \in (B^p)^N \}.$$

Obsérvese que $\widetilde{W}^p$ es un espacio cuyos elementos no tienen por qué estar en B^p pero sí sus derivadas de primer orden.

Gracias a la desigualdad (2.45) se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 2.56 *El espacio $\nabla\widetilde{W}^p$, formado por las relaciones de equivalencia para la seminorma en $(B^p)^N$ de los gradientes de las funciones de $\widetilde{W}^p$, es un subespacio vectorial cerrado de $(B^p)^N$.*

Demostración:

Sea $\{w_k\}_k \subset \widetilde{W}^p$, tal que $\{\nabla w_k\}_k$ es una sucesión convergente en la seminorma p de Besicovitch, y por tanto, de Cauchy.

Tomando una subsucesión, si es preciso, podemos también suponer que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |\nabla w_{k+1} - \nabla w_k|^p dx < \frac{1}{2^k},$$

y por tanto, existe una sucesión $\{r_k\}_k \subset \mathbb{R}^*$ tal que

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |\nabla w_{k+1} - \nabla w_k|^p dx < \frac{1}{2^k} \quad \forall T \geq r_k,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.47}$$

y

$$r_{k+1} \geq 2r_k. \tag{2.48}$$

Podemos suponer también que las funciones w_k verifican

$$\int_{B_{r_{k-1}}} (w_k - w_{k-1})dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.49}$$

ya que si no, bastaría sumarle a w_k una constante, con lo cual no cambia el gradiente.

Denotamos además $r_0 = 0$. Consideramos las funciones ψ_k, con $k \geq 1$, definidas como

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{r_k - r_{k-1}}(|x| - r_{k-1}) & \text{si} \quad r_{k-1} \leq |x| \leq r_k \\ \frac{1}{r_{k+1} - r_k}(r_{k+1} - |x|) & \text{si} \quad r_k \leq |x| \leq r_{k+1} \\ 0 & \quad\quad \text{en el resto.} \end{cases}$$

Sea

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \psi_k.$$

La función w pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ya que en cada compacto de $\mathbb{R}^N$ w se reduce a una suma finita de funciones de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Vamos a probar que ∇w_j tiende a ∇w en la seminorma p de Besicovitch.

Inmediatamente se tiene que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |\nabla w_j - \nabla w|^p dx = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|}\int_{r_j\le|x|\le T} |\nabla w_j - \nabla w|^p dx.$$

Si $T \ge r_j$ podemos escribir

$$\int_{r_j\le|x|\le T} |\nabla w_j - \nabla w|^p dx =$$

$$= \sum_{k=j+1}^{m} \int_{r_{k-1}\le|x|\le r_k} |\nabla w_j - \nabla w|^p dx + \int_{r_m\le|x|\le T} |\nabla w_j - \nabla w|^p dx,$$

donde m verifica que

$$r_m \le T < r_{m+1}.$$

En cada corona $r_{k-1} \le |x| \le r_k$ se tiene $w = \psi_{k-1}w_{k-1} + \psi_k w_k$, con lo que teniendo en cuenta que $\psi_{k-1} + \psi_k = 1$ en $r_{k-1} \le |x| \le r_k$, se llega fácilmente a

$$\nabla w - \nabla w_j = \nabla\psi_k(w_k - w_{k-1}) + \psi_k(\nabla w_k - \nabla w_j) + \psi_{k-1}(\nabla w_{k-1} - \nabla w_j)$$

en cada corona $r_{k-1} \le |x| \le r_k$.

Las estimaciones $|\psi_k| \le 1$ y $|\nabla\psi_k| \le \dfrac{1}{r_k - r_{k-1}} \le \dfrac{2}{r_k}$ en $r_{k-1} \le |x| \le r_k$ implican entonces que existe una constante C que sólo depende de p tal que

$$|\nabla w - \nabla w_j|^p \le C\left(\frac{|w_k - w_{k-1}|^p}{r_k^p} + |\nabla w_k - \nabla w_j|^p + |\nabla w_{k-1} - \nabla w_j|^p\right).$$

Para todo $T \ge r_j$ se tiene entonces

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{r_j\le|x|\le T} |\nabla(w_j - w)|^p dx \le$$

$$\le \frac{C}{T^N}\sum_{k=j+1}^{m}\int_{r_{k-1}\le|x|\le r_k}\left[\frac{|w_k - w_{k-1}|^p}{r_k^p} + |\nabla(w_k - w_j)|^p + |\nabla(w_{k-1} - w_j)|^p\right]dx+$$

$$+\frac{C}{T^N}\int_{r_m\le|x|\le T}\left(\frac{|w_{m+1} - w_m|^p}{r_{m+1}^p} + |\nabla(w_{m+1} - w_j)|^p + |\nabla(w_m - w_j)|^p\right)dx \le$$

$$\le C\left(\sum_{k=j+1}^{m}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}\frac{|w_k - w_{k-1}|^p}{r_k^p}dx + \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}\frac{|w_{m+1} - w_m|^p}{r_{m+1}^p}dx\right) + \tag{2.50}$$

$$+C\left(\sum_{k=j+2}^{m}\frac{r_k^N}{T^N}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}|\nabla(w_{k-1}-w_j)|^p dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla(w_m-w_j)|^p dx\right)+$$

$$+C\left(\sum_{k=j+1}^{m}\frac{r_k^N}{T^N}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}|\nabla(w_k-w_j)|^p dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla(w_{m+1}-w_j)|^p dx\right).$$

Vamos a estimar cada uno de los términos del segundo miembro de (2.50).

Para el primer término, usando (2.49), el Lema 2.54 y (2.47), se tiene

$$\sum_{k=j+1}^{m}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}\frac{|w_k-w_{k-1}|^p}{r_k^p}dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}\frac{|w_{m+1}-w_m|^p}{r_{m+1}^p}dx\le$$

$$\le C\sum_{k=j+1}^{m}\sup_{r_{k-1}\le s\le r_k}\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s}|\nabla(w_k-w_{k-1})|^p dx+$$

$$+C\sup_{r_m\le s\le T}\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s}|\nabla(w_{m+1}-w_m)|^p dx\le$$

$$\le C\sum_{k=j+1}^{m}\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{C}{2^m}\le\frac{C}{2^{j-1}}. \tag{2.51}$$

Para el segundo término, usando $r_k\le\frac{T}{2^{m-k}}$, que se deduce de (2.48), y la desigualdad de Tchebyshev se tiene

$$\left(\sum_{k=j+2}^{m}\frac{r_k^N}{T^N}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}|\nabla(w_{k-1}-w_j)|^p dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla(w_m-w_j)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\sum_{k=j+2}^{m}\frac{1}{2^{\frac{(m-k)N}{p}}}\sum_{l=j+1}^{k-1}\left(\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}|\nabla(w_l-w_{l-1})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\sum_{l=j+1}^{m}\left(\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla(w_l-w_{l-1})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\sum_{k=j+2}^{m}\frac{1}{2^{\frac{(m-k)N}{p}}}\sum_{l=j+1}^{k-1}\frac{1}{2^{\frac{l-1}{p}}}+\sum_{l=j+1}^{m}\frac{1}{2^{\frac{(l-1)}{p}}}\le\frac{C}{2^{\frac{j}{p}}}. \tag{2.52}$$

De la misma forma

$$\left(\sum_{k=j+1}^{m}\frac{r_k^N}{T^N}\frac{1}{|B_{r_k}|}\int_{B_{r_k}}|\nabla(w_k-w_j)|^p dx+\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T}|\nabla(w_{m+1}-w_j)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{C}{2^{\frac{j}{p}}}. \tag{2.53}$$

Las desigualdades (2.51), (2.52) y (2.53) sustituidas en (2.50) dan

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{r_j\le|x|T}|\nabla(w_j-w)|^p dx\le\frac{C}{2^j}\quad\forall T\ge r_j,$$

lo que implica que $[\nabla(w_j - w)]_p$ tiende a cero cuando j tiende a infinito. Esto acaba la demostración del teorema. ■

A partir del espacio $\widetilde{W}^p$ podemos ahora construir el espacio W^p de la siguiente forma:

Definición 2.57 *Para todo p con $1 \leq p < +\infty$ se define el subespacio W^p de $\widetilde{W}^p$ como*

$$W^p = \{w \in \widetilde{W}^p : \quad M\{\nabla w\} = 0\}.$$

Claramente se tiene:

Proposición 2.58 *∇W^p es un subespacio vectorial cerrado de $\nabla \widetilde{W}^p$ en $(B^p)^N$.*

Veamos otra caracterización del espacio W^p que nos será de gran utilidad en el capítulo 4.

Proposición 2.59 *Para todo p con $1 \leq p < +\infty$ se verifica*

$$W^p = \{f \in \widetilde{W}^p : \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^p} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f(y) - \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} f(\rho)d\rho|^p dy = 0\}.$$

Demostración:

Sea g perteneciente al conjunto

$$\left\{f \in \widetilde{W}^p : \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^p} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f(y) - \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} f(\rho)d\rho|^p dy = 0\right\}.$$

Entonces la sucesión de funciones $g_T : B_1 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$g_T(x) = \frac{1}{T}(g(Tx) - \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} g(T\rho)d\rho)$$

converge fuertemente a cero en $L^p(B_1)$.

Por otra parte, $\nabla g_T(x) = \nabla_y g(Tx)$ para casi todo $x \in B_1$. Por definición de media, sabemos que esta sucesión converge débilmente a $M\{\nabla_y g\}$ en $L^p(B_1)^N$, pero como g_T converge a cero en $L^p(B_1)$ su gradiente debe converger a cero, es decir, $M\{\nabla g\} = 0$.

Recíprocamente, sea $g \in W^p$. Consideremos

$$g_T(x) = \frac{1}{T}(g(Tx) - \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} g(T\rho)d\rho).$$

Por la desigualdad de Poincaré-Wirtinger existe C que no depende de T tal que

$$\frac{1}{T^p} \int_{B_1} |g(Tx) - \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} g(T\rho)d\rho|^p dx \leq C \int_{B_1} |\nabla_y g(Tx)|^p dx.$$

Por tanto, $\{g_T\}$ está acotada en $L^p(B_1)$.

Por otra parte, para casi todo $x \in B^1$, $\nabla g_T(x) = \nabla_y g(Tx)$, sucesión que converge débilmente en $L^p(B_1)^N$ a cero ya que $M\{\nabla g\} = 0$. Se tiene entonces que $\{g_T\}$ está acotada en $W^{1,p}(B_1)$ y por tanto en $L^q(B_1)$ con $q = \frac{Np}{N-p}$, si $p < N$, o q cualquiera si $p \geq N$. Como L^q es reflexivo, existe una subsucesión de g_T, que seguiremos denotando por g_T, que converge débilmente en L^q. Por el teorema de Rellich -Kondrachov, g_T converge fuertemente en L^p. Como ∇g_T converge a cero, el límite de g_T debe ser una constante C. Ahora bien, como se verifica

$$\int_{B_1} g_T dx = 0 \quad \forall T > 0,$$

la constante debe ser cero y se tiene por tanto

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{B_1} |g_T|^p dx = 0$$

lo que se puede también escribir como

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T^p} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |g(y) - \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} g(\rho) d\rho|^p dy = 0,$$

lo que acaba la demostración. ■

A partir del espacio W^p se puede obtener la siguiente relación entre la derivada en media y la derivada habitual (comparar este resultado con el Corolario 2.45).

Proposición 2.60 *Sea $u \in B^p$ tal que $\nabla_m u \in (B^p)^N$. Entonces existe $v \in W^p$ tal que $[\nabla v - \nabla_m u]_p = 0$.*

Demostración:

Se sabe que si $u \in B^p$ entonces $u * \rho_h \in B^p$ y $\nabla(u * \rho_h) \in (B^p)^N$. Por el Corolario 2.45 sabemos también que $\nabla_m(u * \rho_h)$ coincide con $\nabla(u * \rho_h)$ en $(B^p)^N$. En particular $\nabla_m(u * \rho_h)$ pertenece a ∇W^p.

Vamos a probar ahora que $\nabla_m(u * \rho_h) = \nabla_m u * \rho_h$ en $(B^p)^N$. Efectivamente, si $\varphi \in D^\infty$, aplicando la Proposición 2.40 se tiene

$$< \nabla_m(u * \rho_\delta), \varphi >= -M\{(u * \rho_\delta)\nabla\varphi\} = -M\{u(\nabla\varphi * \rho_\delta)\} =$$

$$= -M\{u\nabla(\varphi * \rho_\delta)\} =< \nabla_m u, \varphi * \rho_\delta > . \tag{2.54}$$

Como $\nabla_m u \in (B^p)^N$, $< \nabla_m u, \varphi * \rho_\delta >= M\{\nabla_m u(\varphi * \rho_\delta)\}$, y nuevamente por la Proposición 2.40

$$< \nabla_m u, \varphi * \rho_\delta >= M\{(\nabla_m u * \rho_\delta)\varphi\}. \tag{2.55}$$

De (2.54) y (2.55) se obtiene

$$< \nabla_m(u * \rho_\delta), \varphi >=< \nabla_m u * \rho_\delta, \varphi > \quad \forall \varphi \in D^\infty,$$

y por tanto, $\nabla_m(u * \rho_\delta) = \nabla_m u * \rho_\delta$.

Por la Proposición 2.39 tenemos por tanto $\lim_{\delta\to 0} \nabla_m(u * \rho_\delta) = \nabla_m u$ en $(B^p)^N$. Como ∇W^p es cerrado se deduce por tanto que $\nabla_m u \in \nabla W^p$. ∎

Vamos a definir un subespacio de B^p que será muy importante en los dos capítulos siguientes.

Definición 2.61 *Sea p con $1 \leq p < +\infty$. Se define el subespacio de B^p siguiente:*

$$S^p = \{v \in B^p \cap W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N) : \quad \nabla v \in (B^p)^N\}.$$

Claramente S^p es denso en B^p puesto que en particular contiene al subespacio D^∞. Sin embargo, la propiedad fundamental de S^p está dada en la siguiente proposición:

Proposición 2.62 *Sea p con $1 \leq p < +\infty$. Entonces ∇S^p es denso en ∇W^p, si el álgebra es ergódica.*

Demostración:

Para $u \in W^p$ definimos

$$v_R(y) = u(y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u(y+z)dz.$$

La función v_R se puede escribir como

$$v_R(y) = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}(u(y) - u(y+z))dz = -\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\int_0^1 \nabla u(y+tz)\cdot z dt\, dz.$$

Es fácil ver que la última expresión se aproxima en B^p por una suma de Riemann del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \nabla u(y + t_k z_k) \cdot z_k$. Por tanto, v_R pertenece a B^p.

Como $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ v_R también y tiene por gradiente

$$\nabla v_R = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} \nabla u(y+z)dz,$$

que, como para v_R, resulta ser una función de $(B^p)^N$.

Como $M\{\nabla u\} = 0$, se tiene

$$[\nabla v_R - \nabla u]_p^p = M_y \left\{ \left| \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \nabla u(y+z) dz \right|^p \right\}$$

que tiende a cero cuando R tiende a infinito gracias a la Proposición 2.52. ∎

Como consecuencia de este resultado se tiene ahora

Corolario 2.63 *Sea $1 \leq p < +\infty$. Si el álgebra es ergódica entonces la clausura en $(B^p)^N$ del espacio $\nabla_m B^{1,p}$ coincide con ∇W^p.*

Demostración:

Consideremos el subespacio S^p definido en la Definición 2.61.

Por el Corolario 2.45 se sabe que ∇S^p está contenido en $Rg\nabla_m B^{1,p}$ y por la Proposición 2.60 se sabe que $Rg\nabla_m B^{1,p}$ está contenido en ∇W^p. Aplicando la Proposición 2.62 y que ∇W^p es cerrado en $(B^p)^N$ se tiene el resultado. ∎

2.5 Espacios de Besicovitch con valores en un espacio de Hilbert.

Vamos ahora a mostrar cómo se puede extender la teoría de los espacios de Besicovitch establecida anteriormente al caso en que las funciones tomen valores en un espacio infinito dimensional, a fin de tener resultados de convergencia en dos escalas para procesos aleatorios.

Concretamente, las funciones que consideraremos tomarán valores en un espacio de Hilbert y a diferencia del caso estudiado anteriormente, el espacio a partir del cual construiremos el espacio de Besicovitch no será un álgebra en general, lo que nos permitirá considerar por ejemplo el espacio

$$V = \{U(x)f : \quad f \in L^2_\mu(\Omega)\},$$

donde $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y $\{U(x)\}_{x\in\mathbb{R}^N}$ un grupo unitario. Con este conjunto se obtendrá un espacio de Besicovitch que será el marco funcional en el próximo capítulo para los resultados de convergencia en dos escalas en procesos estocásticos.

Gran parte de los resultados anteriores seguirán siendo ciertos aquí. Enunciaremos estos resultados y omitiremos su demostración por ser análoga al caso escalar.

Definición 2.64 *Se definen los espacios vectoriales siguientes:*

$$M^2(H) = \{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N; H) : \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f(x)|^2_H dx < +\infty\},$$

$$Z^2(H) = \{f \in M^2(H) : \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f(x)|^2_H dx = 0\}.$$

El espacio $M^2(H)$ se dota de la siguiente seminorma:

Definición 2.65 *Se define la seminorma H de Besicovitch sobre el espacio $M^2(H)$ como:*

$$[f]_{2,H} = \left(\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{|B_t|} \int_{B_t} |f(x)|^2_H dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Análogamente al espacio M^2 se tiene

Proposición 2.66 *Para la seminorma H de Besicovitch el espacio $M^2(H)$ es completo.*

Como consecuencia el espacio M^2_H/Z^2_H es un espacio de Banach.

La generalización de la definición de valor medio de una función al caso en que ésta tome valores en un espacio de Hilbert H es la siguiente:

Definición 2.67 *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N; H)$ se dice que tiene valor medio si existe $M\{f\} \in H$ tal que*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|K|} \int_K f(\frac{x}{\varepsilon}) dx = M\{f\} \quad en\ H,$$

para cualquier conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ medible, acotado, con medida positiva.

Como ocurre en el caso escalar, esta definición es equivalente a

$$\exists \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|K_T|} \int_{K_T} f(x) dx = M\{f\} \quad \text{en } H,$$

para cualquier conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ medible, acotado, con medida positiva, siendo K_T el homotético de K de razón T.

Como en el caso en que las funciones toman valores en $\mathbb{R}$ no estamos interesados en el espacio $M^2(H)$ sino en un subespacio de éste. Para las funciones valuadas en $\mathbb{R}$ este subespacio se construyó a partir de un álgebra de funciones. Aquí lo haremos a partir de un espacio V con las propiedades que enunciaremos a continuación.

Definición 2.68 *En lo que sigue notaremos por V un espacio contenido en $C_b(\mathbb{R}^N; H)$ con las siguientes propiedades:*

(i) *V es cerrado para la norma de $L^\infty(\mathbb{R}^N; H)$.*

(ii) *Las funciones de V son uniformemente continuas en $\mathbb{R}^N$.*

(iii) *V es invariante respecto a las traslaciones de $\mathbb{R}^N$.*

(iv) *Dado cualquier elemento $f \in V$ existen $M\{|f|_H^2\}$ y $M\{f\}$.*

(v) *V contiene a los elementos de H.*

El espacio de Besicovitch se construirá ahora como:

Definición 2.69 *Se define el espacio de Besicovitch con valores en H generado por V, $B_H^2(V)$, como*

$$B_H^2(V) = \{w \in M_2(H) : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists v_\varepsilon \in V \ \ tal\ que\ [w - v_\varepsilon]_{2,H} < \varepsilon\}.$$

Habitualmente lo denotaremos por B_H^2 salvo cuando sea necesario indicar cuál es el conjunto V que lo genera.

Como primera consecuencia de la definición de B_H^2 se tiene

Proposición 2.70 *Dada f perteneciente a B_H^2, existen $M\{f\}$ y $M\{|f|_H^2\}$. Se tiene por tanto*

$$[f]_{2,H} = M\{|f|_H^2\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in B_H^2.$$

Esta propiedad implica claramente que para todas $f, g \in B_H^2$ existe

$$M\{f \cdot g\} = \frac{1}{4}\left[M\{|f+g|_H^2\} - M\{|f-g|_H^2\}\right].$$

Definición 2.71 *Se define el espacio $\mathcal{B}_H^2$ como el espacio B_H^2/Z_H^2.*

Claramente este espacio es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\hat{f},\hat{g})_{B^2_H} = M\{f\cdot g\} \quad \forall f,g\in B^2_H.$$

Ejemplos:

Consideramos $U_i : \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{L}(H)$, $i \in I$, una familia de grupos unitarios fuertemente continuos en H que conmutan entre sí.

Con esta familia construimos el espacio V como el cierre en $C_b(\mathbb{R}^N;H)$ del espacio

$$W = \{f\in C_b(\mathbb{R}^N;H): \quad \exists J\subset I \text{ finito y } h_i\in H,\ i\in J \text{ tales que}$$

$$f(x)=\sum_{i\in J} U_i(x)h_i \quad \forall x\in\mathbb{R}^N\}.$$

Nótese que como el grupo es unitario y fuertemente continuo, las funciones de la forma $U_i(x)h$, con $i\in I$, $h\in H$, están en $C_b(\mathbb{R}^N;H)$.

Proposición 2.72 *El espacio V así definido verifica las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) y (v) de la Definición 2.68.*

Demostración:

La propiedad (i) se tiene por definición. Para probar (ii) basta notar que para todo $i\in I$ y $h\in H$ se tiene

$$|U_i(x_j)h-U_i(x_k)h|_H = |U_i(x_j)(h-U_i(x_j-x_k)h)|_H = |h-U_i(x_j-x_k)h|_H \quad \forall x_j,x_k\in\mathbb{R}^N,$$

de donde se deduce fácilmente que la función $x\mapsto U_i(x)h$ es uniformemente continua. Para la demostración de (iii) se usa que para todo $J\subset I$ finito, $h_i\in H$ con $i\in J$ e $y\in\mathbb{R}^n$, se tiene

$$\sum_{i\in J} U_i(x+y)h_i = \sum_{i\in J} U_i(x)U_i(y)h_i \quad \forall x\in\mathbb{R}^N.$$

Para probar (iv) usamos que, gracias al teorema de la media ergódica de J. von Neuman (véase [YO], [D S]), cada función del tipo $x\mapsto U_i(x)h\in H$ con $i\in J$, $h\in H$, tiene valor medio y por tanto, los elementos de V tendrán valor medio. Para probar ahora que si $f\in V$ entonces $|f|^2_H$ tiene valor medio, basta probar que si $i,j\in I$, $h_i,h_j\in H$ entonces

$$(U_i(x)h_i)\cdot(U_j(x)h_j) = (U_j(-x)U_i(x)h_i,h_j)$$

tiene valor medio. Como U_j, U_i conmutan, $U_j(-x)U_i(x)$ es un grupo unitario continuo y por tanto, aplicando de nuevo el teorema de la media ergódica de J. von Neuman $U_j(-x)U_i(x)h_i$ tiene valor medio, i.e. existe $\bar{h} \in H$ tal que

$$\frac{1}{|K_T|}\int_{K_T} U_j(-x)U_i(x)h_i dx \to \bar{h}$$

en H cuando T tiende a infinito, para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ acotado, de medida positiva, lo que implica que

$$\frac{1}{|K_T|}\int_{K_T} (U_j(-x)U_i(x)h_i) \cdot h_j dx \to \bar{h} \cdot h_i$$

para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ acotado de medida positiva. ■

Un caso particular es cuando I es un conjunto unitario, es decir, cuando existe un grupo unitario, fuertemente continuo tal que

$$V = \{\alpha U(x)h + \beta g : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ h, g \in H\}. \tag{2.56}$$

En realidad, en este caso se tiene

$$\frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |U(x)h|_H^2 dx = \frac{1}{|B_T|}\int_{B_T} |h|_H^2 = |h|_H^2,$$

y por tanto $B_H^2 = V$ resulta ser isométrico a H con lo que el caso es trivial.

Otro caso particularmente interesante que aparece en la homogeneización de problemas estocásticos es el siguiente:

Definición 2.73 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Se define un sistema dinámico N-dimensional como una aplicación T de $\mathbb{R}^N$ en el conjunto de aplicaciones de Ω en Ω verificando las dos condiciones siguientes:*

(1) *Propiedad de grupo:*

$$T(0) = I$$

$$T(x+y) = T(x)T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(2) *Las aplicaciones $T(x)$ conservan la medida μ, i.e., para cualquier $x \in \mathbb{R}^N$ y para cualquier conjunto $F \subset \Omega$ medible respecto a μ, se tiene que $T(x)F$ es medible y $\mu(T(x)F) = \mu(F)$.*

A partir del sistema dinámico T se define ahora el grupo

$$U : \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{L}(L^2_\mu(\Omega)) \text{ por}$$

$$(U(x)h)(\omega) = h(T(x)\omega), \quad \forall h \in L^2_\mu(\Omega),\ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.57}$$

Fácilmente se prueba que U es un grupo unitario, fuertemente continuo en $L^2_\mu(\Omega)$ (véase p. ej. [J K O]).

Otro ejemplo de espacio V, que utilizaremos en un problema de homogeneización en el capítulo 4, es

$$V = CAP(\mathbb{R}^N; H). \tag{2.58}$$

La definición de este espacio es una generalización natural de la definición de $CAP(\mathbb{R}^N)$. Se define $Trig(\mathbb{R}^N; H)$ como el espacio formado por las combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $he^{ip\cdot y}$, donde $p \in \mathbb{R}^N$ y $h \in H$. El cierre de $Trig(\mathbb{R}^N; H)$ en la norma $L^\infty(\mathbb{R}^N; H)$ es $CAP(\mathbb{R}^N; H)$. También puede definirse utilizando el concepto de conjunto relativamente denso, como se hace en [ZA] y [PA].
El espacio V verifica las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) y (v) de la Definición 2.68 (véase p. ej. [PA]).

Propiedades del espacio B^2_H.

De forma similar a lo que ocurría en el espacio B^2 se puede probar:

Proposición 2.74 (a) *Sean $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $f \in M^2_H$. Entonces, $f * h$ pertenece a M^2_H y*

$$[f * h]_{2,H} \leq [f]_{2,H} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Además $f * h \in C^\infty(\mathbb{R}^N; H)$ y $D^\alpha(f * h) = f * D^\alpha h \in M^2_H$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{*N}$.

(b) *Sean $f \in V$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces $D^\alpha(f * h)$ pertenece a V $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{*N}$.*

(c) *Sean $f \in B^2_H$ y $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces $D^\alpha(f * h) \in B^2_H$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{*N}$.*

El resultado anterior implica ahora fácilmente

Proposición 2.75 (a) *Dada cualquier $f \in B^2_H$ se verifica*

$$\lim_{\delta \to 0} [f * \rho_\delta - f]_{2,H} = 0. \tag{2.59}$$

(b) *El conjunto*

$$D_H^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N; H) : D_x^\alpha f \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{*N}\}$$

es denso en B_H^2.

A partir de D_H^∞ se puede dar la siguiente definición de derivada en media:

Definición 2.76 *Dada $f \in B_H^2$ se define la derivada en media i-ésima de f, que denotaremos por $\partial_{i,m} f$, como*

$$\partial_{i,m} f(\varphi) = -M\{(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})_H\} \quad \forall \varphi \in D_H^\infty.$$

Análogamente al caso de los espacios B^p se puede definir el espacio

$$B_H^{1,2} = \{f \in B_H^2 : \quad \forall i\ \exists f_i \in B_H^2,\ 1 \leq i \leq N,\ \text{t.q. } \partial_{i,m} f(\varphi) = M\{f_i \varphi\} \quad \forall \varphi \in D_H^\infty\}.$$

Como en el caso de funciones con valores escalares se tiene la siguiente fórmula de integración por partes que da una relación entre la derivada en media y la derivada habitual.

Proposición 2.77 *Sean $u, v \in B_H^2$ tales que existen $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in B_H^2$.*
Entonces

$$M\{(u, \frac{\partial v}{\partial x_i})_H\} = -M\{(\frac{\partial u}{\partial x_i}, v)_H\}.$$

En particular, si $u \in B_H^2$ y existe $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in B_H^2$ entonces $\partial_{i,m}^H u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en B_H^2.

Análogamente al caso escalar, damos la definición de función invariante y espacio ergódico.

Definición 2.78 *Dada $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N; H)$ se dice que f es invariante si $f \in B_H^2$ y*

$$[f - f(\cdot + s)]_{2,H} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 2.79 *El conjunto de funciones invariantes, que denotaremos por I, es un subespacio vectorial cerrado de B_H^2.*

Observación 2.80 Como ejemplo podemos considerar el caso en que V se construye a partir del grupo definido por un sistema dinámico T.
Entonces, una función del tipo $U(x)h \in B_H^2$ con $h \in L^2_\mu(\Omega)$ es invariante sii h es invariante para T, en el sentido de que $h(T(x)\omega) = h(\omega)$ p.c.t. $\omega \in \Omega$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Se tiene también la siguiente relación entre función invariante y derivada en media:

Proposición 2.81 *f es invariante si y sólo si $\partial_{i,m} f = 0$ $\forall i$ con $1 \leq i \leq N$.*

Definición 2.82 *Se dice que V es ergódica si para toda $f \in I$ existe $h \in H$ tal que $[f - h]_{2,H} = 0$.*

Relacionado con la derivación en los espacios de Besicovitch es también interesante considerar el siguiente espacio:

Definición 2.83 *Se define el subespacio vectorial W_H^2 como:*

$$W_H^2 = \{f \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N; H) : \quad \nabla f \in (B_H^2)^N, \, M\{\nabla f\} = 0\}.$$

Proposición 2.84 *El subespacio ∇W_H^2 es cerrado en $(B_H^2)^N$.*

A continuación definimos un subespacio que claramente va a ser denso en B_H^2 pero que además el espacio formado por los gradientes de sus elementos es denso en el espacio ∇W_H^2.

Definición 2.85 *Se define el subespacio de B_H^2 siguiente:*

$$S_H = \{v \in B_H^2 \cap H^1_{loc}(\mathbb{R}^N; H) : \quad \nabla v \in (B_H^2)^N\}.$$

Proposición 2.86 *Si V es ergódica entonces ∇S_H es denso en ∇W_H^2.*

La relación entre derivada en media y derivada habitual se completa con esta proposición:

Proposición 2.87 *Si $u \in B_H^2$ y $\nabla_m u$ pertenece a $(B_H^2)^N$ entonces existe $v \in W_H^2$ tal que $\nabla_m u = \nabla v$.*

Por último, se tiene la siguiente caracterización de ∇W_H^2 para V ergódica.

Corolario 2.88 *Si V es ergódica entonces la clausura en $(B_H^2)^N$ del espacio $\nabla_m B_H^{1,2}$ coincide con ∇W_H^2.*

Capítulo 3

Convergencia en dos escalas.

En este capítulo caracterizamos el límite de funcionales de la forma

$$\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx$$

donde $\{u_\varepsilon\}$ es una sucesión acotada en $L^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, y ψ pertenece a un espacio de funciones que con respecto a la segunda variable son funciones de Besicovitch.

Probaremos que el límite de estos funcionales viene dado por una función de dos variables que con respecto a la segunda es una función de Besicovitch. Estudiaremos interesantes propiedades de este límite, llamado límite en dos escalas.

Uno de nuestros objetivos en este capítulo es extender el teorema de compacidad de convergencia en dos escalas periódica al caso de los espacios B^p, $1 \leq p < +\infty$, lo que llevaremos a cabo en la sección 3.1.
Los teoremas de convergencia en dos escalas para el caso de una sucesión acotada en $W^{1,p}(Q)$ con $1 < p < +\infty$, que son los que juegan un papel más importante en homogeneización, se dan en la sección 3.2.

En la sección 3.3 enunciaremos los resultados de convergencia en dos escalas para el caso de los espacios B^2_H, haciendo sólo las demostraciones de aquellos resultados que difieran esencialmente del caso de los espacios de Besicovitch generados por álgebras.

Observación 3.1 En todo este capítulo vamos a utilizar los espacios $L^p(Q; B^p)$. Recuérdese que el espacio B^p es seminormado, por tanto, lo que entenderemos por que una función f pertenezca a $L^p(Q; B^p)$ es que exista $\hat{f} \in L^p(Q; \mathcal{B}^p)$ verificando que $f(x)$

pertenece a la clase de equivalencia $\hat{f}(x)$ para casi todo $x \in Q$. La seminorma de un elemento f de $L^p(Q;B^p)$ la denotaremos por $[f]_{L^p(Q;B^p)}$ y coincidirá con $\|\hat{f}\|_{L^p(Q;B^p)}$.

3.1 Teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas.

En toda esta sección se supone que X satisface las hipótesis (i)-(vi) dadas en el capítulo 2 y que Q es un abierto de $\mathbb{R}^N$.

El resultado más importante de este apartado es el teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas (Teorema 3.13), que nos permitirá pasar al límite cuando ε tienda a cero en expresiones del tipo

$$\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx,$$

para funciones $\psi(x,y)$ tales que $\psi(x,\cdot) \in B^p$.

Nótese sin embargo que, análogamente a lo que ocurre con las funciones periódicas, si una función ψ pertenece a $L^p(Q;B^p)$, la función $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ puede no ser ni tan siquiera medible. Es por esto por lo que damos la siguiente definición de convergencia en dos escalas:

Definición 3.2 *Se dice que una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ perteneciente a $L^1_{loc}(Q)$ converge en dos escalas a $u \in L^1_{loc}(Q;B^1)$ si para toda función ψ de la forma $\psi(x,y) = g(y)X_E(x)$, con $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $E \subset\subset Q$ medible, de medida finita, se verifica*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dy. \tag{3.1}$$

Respecto a la unicidad del límite en dos escalas se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3 *Sea $\{u_\varepsilon\} \subset L^1_{loc}(Q)$ una sucesión que converge en dos escalas hacia dos funciones $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(Q;B^1)$. Entonces $M_y\{|u_1(x,y) - u_2(x,y)|\} = 0$ p.c.t. $x \in Q$.*

Demostración:
Es inmediato a partir de

$$\int_E M_y\{(u_1(x,y) - u_2(x,y))g(y)\}dy = 0 \quad \forall g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N). \blacksquare$$

La siguiente proposición muestra que la convergencia en dos escalas es un concepto intermedio entre la convergencia fuerte y la débil.

Proposición 3.4 (a) *Si $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(Q)$ es una sucesión acotada en $L^p(Q)$, $1 \leq p \leq +\infty$, que converge en dos escalas a u entonces, $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ converge a $u_0 = M_y\{u(x,y)\}$ débilmente en L^p si $1 < p < +\infty$, débilmente en L^1_{loc} si $p = 1$ y $*$-débil en L^∞ si $p = +\infty$. Además se verifica $[u]_{L^p(Q;B^p)} \geq \|u_0\|_{L^p(Q)}$.*

(b) *Si $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(Q)$ es una sucesión que converge fuertemente a u_0 en $L^p(Q)$ entonces $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas hacia la función u_0.*

Demostración:

(a) La definición de convergencia en dos escalas implica que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_E u_\varepsilon(x)dx = \int_E M_y\{u(x,y)\}dx \quad \forall E \subset Q \text{ medible, acotado,}$$

lo que demuestra la convergencia de $\{u_\varepsilon\}$ a $M_y\{u_0(x,y)\}$, débil en L^p si $1 < p < +\infty$, débil en L^1_{loc} si $p = 1$ y $*$-débil en L^∞ si $p = +\infty$.

Para probar la desigualdad entre las normas basta usar

$$|u_0(x)| = |M_y\{u(x,y)\}| \leq M_y\{|u(x,y)|\} \leq$$

$$\leq M_y\{|u_0(x,y)|^p\}^{\frac{1}{p}} = [u(x,\cdot]_p \text{ si } p < +\infty$$

$$\leq \sup_{1\leq q<+\infty} M_y\{|u_0(x,y)|^q\}^{\frac{1}{q}} = [u(x,\cdot)]_\infty \text{ si } p = +\infty,$$

de donde se deduce inmediatamente la desigualdad.

(b) El resultado es evidente considerando $\psi = g(y)X_E$ ya que la sucesión $\{g(\frac{x}{\varepsilon})\}$ converge débilmente en $L^{p'}_{loc}$ si $p \in (1, +\infty]$ y $*$-débil si $p = 1$. ∎

Si una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ verifica (3.1) se puede demostrar que (3.1) se tiene para funciones ψ más generales. Esto nos lleva a la introducción del siguiente espacio:

Definición 3.5 *Sea $1 \leq p < +\infty$. Se define A^p como el subespacio vectorial formado por las funciones $\psi \in L^p(Q; B^p)$ tales que existe una sucesión $\{\psi_n\}_n \subset St(Q; B^p)$ verificando*

$$\lim_n \int_Q M_y\{|\psi(x,y) - \psi_n(x,y)|^p\} = 0, \tag{3.2}$$

$$\lim_n \int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx = 0 \quad \textit{uniformemente en } \varepsilon > 0. \tag{3.3}$$

Análogamente para $p = +\infty$ se puede definir A^∞ como el espacio formado por las funciones $\psi \in L^\infty(Q; B^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N; L^\infty(\mathbb{R}^N))$ tales que existe una sucesión $\{\psi_n\} \subset St(Q; B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ verificando

$$\psi(x,y) - \psi_n(x,y) \to 0 \text{ en } L^\infty(Q; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \tag{3.4}$$

$$\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \text{ en } L^\infty(Q) \text{ uniformemente en } \varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Nótese que gracias a (3.3) y (3.5) la función $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ es límite de funciones medibles y por tanto, es medible y pertenece a $L^p(Q)$.

Observación 3.6 Resulta inmediato comprobar que si

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q u_\varepsilon(x) g(\frac{x}{\varepsilon}) X_E(x) dx = \int_Q M_y\{u(x,y)g(y)X_E(x)\} dx$$

para toda $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y para todo medible $E \subset\subset Q$, de medida finita, entonces

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\} dx$$

para toda función $\psi \in St(Q; B^{p'})$, $1 \le p \le +\infty$, y por la definición de A^p esto implica que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\} dx$$

para toda $\psi \in A^{p'}$.

Por tanto, la convergencia en dos escalas permite pasar al límite con funciones ψ más generales.

Observación 3.7 G. Allaire trabaja en [A1] con el conjunto de las funciones admisibles en lugar del espacio A^p como hacemos nosotros. El principal inconveniente de tratar con el conjunto de las funciones admisibles es que no es un subespacio vectorial. Esto obliga a trabajar finalmente con subespacios de este conjunto. Hemos preferido por tanto usar A^p lo cual incluye a todos los subespacios interesantes como $L^p(Q; X)$ y $C_0(Q; B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$.

La siguiente proposición nos proporciona varios ejemplos de funciones de A^p así como algunas de sus propiedades principales:

Proposición 3.8 (a) *Sea p un número perteneciente a $[1,+\infty)$. Entonces se tiene que los subespacios vectoriales $L^p(Q;X)\otimes(B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $L^p(Q)\otimes B^p$ y $C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\otimes X$ están contenidos en A^p (en X y $B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se considera la norma de la convergencia uniforme). Si $|Q|<+\infty$ las contenciones anteriores se tienen también para $p=+\infty$.*

(b) *Si ψ pertenece a A^p con $1\le p<+\infty$ entonces*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0}\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx=\int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\}dx. \tag{3.6}$$

(c) *Sean $1\le p,q\le+\infty$, $r\ge 1$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$. Entonces si ψ pertenece a A^p y φ pertenece a A^q se verifica que $\psi\varphi$ pertenece a A^r. En particular, se verifica que si $|Q|<+\infty$ y $1\le q<p<+\infty$ entonces A^p está contenido en A^q.*

(d) *Si $\psi\in A^p$ entonces $\{\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\}_\varepsilon$ converge en dos escalas a $\psi(x,y)$.*

Observación 3.9 En el apartado (a), el espacio $L^p(Q;X)\otimes B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es el conjunto de funciones de la forma

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(x,y)g_i(y),$$

con $I\subset\mathbb{N}$ finito y $\varphi_i\in L^p(Q;X)$, $g_i\in B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $i\in I$.
El espacio $L^p(Q)\otimes B^p$ es el conjunto de funciones de la forma

$$\sum_{i\in I}f_i(x)g_i(y),$$

con $I\subset\mathbb{N}$ finito, $f_i\in L^p(Q)$, $g_i\in B^p$ para todo $i\in I$.
El espacio $C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\otimes X$ es el conjunto de funciones de la forma

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(x,y)g_i(y),$$

con $I\subset\mathbb{N}$ finito y $\varphi_i\in C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $g_i\in X$ para todo $i\in I$.

Observación 3.10 La igualdad (3.6) nos dice en la terminología de [A1] que las funciones de A^p son admisibles.

Demostración:

(a) Veamos que $L^p(Q;X)\otimes(B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ está contenido en A^p.

Como A^p es un subespacio vectorial, basta demostrar que funciones de la forma $\varphi(x,y)g(y)$, con $\varphi\in L^p(Q;X)$ y $g\in B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, pertenecen a A^p.

Ahora, dada φ perteneciente a $L^p(Q;X)$ existe una sucesión $\{\varphi_n\}_n\subset St(Q;X)$ tal que

$$\lim_n \|\varphi-\varphi_n\|_{L^p(Q;X)}=0.$$

Por la Proposición 2.30 se sabe que $\varphi_n(x,y)g(y)$ pertenece a $St(Q;B^p)$. Por otra parte, se verifica

$$\int_Q M_y\{|\varphi(x,y)g(y)-\varphi_n(x,y)g(y)|^p\}dx\le \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}[\varphi-\varphi_n]^p_{L^p(Q;B^p)}\le$$

$$\le \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\varphi-\varphi_n\|^p_{L^p(Q;X)},$$

por lo que

$$\lim_n\int_Q M_y\{|\varphi(x,y)g(y)-\varphi_n(x,y)g(y)|^p\}dx=0.$$

Análogamente se tiene

$$\int_Q|\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon})g(\frac{x}{\varepsilon})-\varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})g(\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\le \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\varphi-\varphi_n\|^p_{L^p(Q;X)},$$

lo que implica

$$\lim_n\int_Q|\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon})g(\frac{x}{\varepsilon})-\varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})g(\frac{x}{\varepsilon})|^p dx=0 \text{ uniformemente en } \varepsilon>0.$$

El caso $p=+\infty$ se deduce de forma similar.

Las funciones de $L^p(Q)\otimes B^p$ no plantean problemas de medibilidad porque son de variables separadas. Es fácil comprobar que están en A^p.

Respecto a la inclusión $C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\otimes X\subset A^p$ basta demostrar que $\varphi(x,y)g(y)$, con $\varphi\in C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ y $g\in X$, es un elemento de A^p con $1\le p<+\infty$. El caso $p=+\infty$ se sigue como anteriormente.

Sea $K=sop(\varphi)$. Existen $\{K_i\}_{i=1}^n$ compactos, verificando

$$|K_i\cap K_j|=0\quad i\ne j,\ \lim_n\sup_{1\le i\le n}\operatorname{diam}(K_i)=0,\ K=\bigcup_{i=1}^n K_i.$$

Sea x_i un elemento de K_i arbitrario y consideremos

$$\varphi_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i,y) X_{K_i}(x).$$

Por la Proposición 2.30 $\varphi_n g$ pertenece a $St(Q;B^p)$.

$$\int_Q M_y\{|\varphi(x,y)g(y) - \varphi_n(x,y)g(y)|^p\}dx \leq \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_Q M_y\{|\varphi(x,y) - \varphi_n(x,y)|^p\}dx =$$

$$= \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} M_y\{|\varphi(x,y) - \varphi(x_i,y)|^p\}dx \leq$$

$$\leq \|g\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x,y) - \varphi(x_i,y)|^p dx,$$

que tiende a cero cuando n tiende a infinito porque φ es uniformemente continua de Q en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y la medida de K_i tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Para demostrar que $\varphi(x,y)g(y)$ verifica (3.3) basta comprobar que si $\varphi \in C_0(Q;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)))$ existe un representante suyo $\tilde{\varphi}$ y existe un conjunto $Z \subset \mathbb{R}^N$ de medida nula (independiente de x) tales que $\tilde{\varphi}$ es continua en $x \in Q$ uniformemente con respecto a $y \in \mathbb{R}^N \setminus Z$ (véase [A1]). Ahora se sigue como en la demostración de que $\varphi(x,y)g(y)$ verifica (3.2).

(b) Supongamos primero que ψ pertenece a $St(Q;B^p)$.

Entonces ψ es de la forma

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} g_i(y) X_{Q_i}(x)$$

donde g_i pertenece a B^p, Q_i son conjuntos contenidos en Q, con medida finita y que podemos suponer disjuntos.

Se tiene

$$\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx = \sum_{i\in I} \int_{Q_i} |g_i(\frac{x}{\varepsilon})|^p dx.$$

Como g_i pertenece a B^p se sabe que existe $M\{|g_i|^p\}$, por tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx = \sum_{i\in I} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{Q_i} |g_i(\frac{x}{\varepsilon})|^p dx = \sum_{i\in I} M\{|g_i|^p\}|Q_i| = \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p dx.$$

Sea ahora ψ perteneciente a A^p con $1 \leq p < +\infty$.

Por definición de A^p sabemos que para todo $\delta > 0$ existe $\psi_\delta \in St(Q;B^p)$ tal que

$$\int_Q M_y\{|\psi(x,y) - \psi_\delta(x,y)|^p\}dx < \delta. \tag{3.7}$$

$$\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx < \delta \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.8}$$

Se tiene entonces

$$\left|\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx - \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\} dx\right| \leq \tag{3.9}$$

$$\leq \left|\int_Q (|\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p - |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p) dx\right| + \left|\int_Q |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx - \int_Q M_y\{|\psi_\delta(x,y)|^p\} dx\right| +$$

$$+ \left|\int_Q M_y\{|\psi_\delta(x,y)|^p - |\psi(x,y)|^p\} dx\right|.$$

El primer término del miembro derecho de (3.9) se puede estimar como sigue:

$$\left|\int_Q (|\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p - |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p) dx\right| \leq$$

$$\leq pC_p \int_Q \left(|\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^{p-1} + |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^{p-1}\right) |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})| dx \leq$$

$$\leq pC_p \left[\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx + \right.$$

$$\left. + \left(\int_Q |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right],$$

con $C_p = 2^{p-2}$.

Tomando límite superior en ε y usando (3.7) y (3.8) y lo probado anteriormente se tiene entonces

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left|\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx - \int_Q |\psi_\delta(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\right| \leq$$

$$\leq pC_p \left[\delta + \left(\int_Q M_y\{|\psi_\delta(x,y)|^p\} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \delta^{\frac{1}{p}}\right] \leq$$

$$\leq pC_p \left[\delta + (pC_p)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \delta^{\frac{1}{p}} + \int_Q M_y\{|\psi_\delta(x,y) - \psi(x,y)|^p dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \delta^{\frac{1}{p}}\right] \leq$$

$$\leq pC_p\delta + (pC_p)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \delta^{\frac{1}{p}} + \delta + \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \delta^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O(\delta).$$

Con respecto al segundo término del miembro derecho de (3.9) sabemos que tiene límite cero cuando ε tiende a cero.

El tercer término del miembro derecho de (3.9) es menor que δ por (3.7). Por tanto, hemos probado

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx - \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^p\}dx\right| \leq O(\delta) \quad \forall \delta > 0$$

lo que implica (3.6).

(c) La demostración de este apartado se sigue fácilmente usando la desigualdad de Hölder y (3.6).

(d) Sea ψ perteneciente a A^p. Si $p = +\infty$ entonces gracias a (3.5) es fácil ver que $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ está acotada en $L^\infty(Q)$ uniformemente en $\varepsilon > 0$. Análogamente, si $1 \leq p < +\infty$ (3.6) implica que $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ está acotada en $L^p(Q)$. Por tanto, para probar que $\{\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\}$ converge en dos escalas a ψ basta demostrar que para toda función $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y para todo $E \subset\subset Q$ medible, de medida finita, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_E \psi(x,\frac{x}{\varepsilon})g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_E M_y\{\psi(x,y)g(y)\}dx. \tag{3.10}$$

La demostración de (3.10) es inmediata si ψ pertenece a $St(Q;B^p)$. En el caso en que $\psi \notin St(Q;B^p)$ el resultado se obtiene usando que existen $\psi_n \in St(Q;B^p)$ verificando (3.2) y (3.3) si $1 \leq p < +\infty$ o (3.4) y (3.5) si $p = +\infty$. ■

La siguiente proposición proporciona un resultado de semicontinuidad para una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ que converge en dos escalas.

Proposición 3.11 *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión de funciones en $L^p(Q)$ que converge en dos escalas a una función $u \in L^p(Q;B^p)$. Entonces se tiene la desigualdad*

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \geq [u]_{L^p(Q;B^p)}. \tag{3.11}$$

Demostración:

Supongamos $1 < p < +\infty$. El caso $p = 1$ se razona de manera similar.

Para toda función ψ perteneciente a $St(Q;X)$ se tiene

$$\left|\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx\right| \leq \|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)}\|\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^{p'}(Q)}.$$

Tomando límite inferior cuando ε tiende a cero y teniendo en cuenta que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u se obtiene entonces

$$\left|\int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| \leq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)}[\psi(x,y)]_{L^{p'}(Q;B^{p'})} \quad \forall \psi \in L^{p'}(Q;X). \tag{3.12}$$

Por densidad esta igualdad es cierta para toda $\psi \in L^{p'}(Q;B^{p'})$, por tanto

$$[u]_{L^p(Q;B^p)} \leq \varliminf_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)}. \blacksquare$$

En la siguiente proposición obtenemos, bajo ciertas hipótesis, un resultado de corrector para u_ε, es decir, una aproximación de u_ε en la topología fuerte de $L^p(Q)$.

Proposición 3.12 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión de funciones en $L^p(Q)$ que converge en dos escalas a una función $u \in L^p(Q;B^p)$.*
Si u pertenece a A^p y se verifica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)} = [u]_{L^p(Q;B^p)} \tag{3.13}$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon(x) - u(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^p(Q)} = 0. \tag{3.14}$$

Demostración:
Podemos suponer que $[u]_{L^p(Q;B^p)} \neq 0$ ya que si no (3.14) se verifica claramente.
Sea $\lambda_\varepsilon = \max\{\|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)}, [u]_{L^p(Q;B^p)}\}$.
De (3.13) se tiene que $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = [u]_{L^p(Q;B^p)}$.
Consideramos $v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon$ y $\tilde{v}_\varepsilon = \|u(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^p(Q)}^{-1} u(x, \frac{x}{\varepsilon})$.
Gracias a la Proposición 3.8, apartados (b) y (d), y a (3.13) se tiene

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2e} [u]_{L^p(Q;B^p)}^{-1} u,$$

$$\tilde{v}_\varepsilon \xrightarrow{2e} [u]_{L^p(Q;B^p)}^{-1} u,$$

lo que implica

$$\frac{v_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon}{2} \xrightarrow{2e} [u]_{L^p(Q;B^p)}^{-1} u.$$

Por (3.11) se tiene por tanto

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \|\frac{v_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon}{2}\|_{L^p(Q)} \geq 1.$$

Como $\|v_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq 1$ y $\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^p(Q)} = 1$ se tiene que de hecho el último límite existe y es uno. Por ser $L^p(Q)$ uniformemente convexo se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{L^p(Q)} = 0,$$

lo que implica (3.14). ∎

El resultado más importante de la presente sección es el siguiente teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas.

Teorema 3.13 *Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $L^p(Q)$, $1 < p < +\infty$. Entonces, para una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$, existe una función $u \in L^p(Q; B^p)$ tal que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u.*

Demostración:

El resultado va a ser una consecuencia del Teorema 1.1 del capítulo 1.

Sea $F_\varepsilon : A^{p'} \mapsto \mathbb{R}$ definido por

$$F_\varepsilon(\psi) = \int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx. \tag{3.15}$$

F_ε es lineal y $A^{p'}$ está contenido en $L^{p'}(Q; B^{p'})$, que es un espacio seminormado tal que su cociente sobre el núcleo de la seminorma, $L^{p'}(Q; \mathcal{B}^{p'})$, es reflexivo. Además, gracias a la acotación de $\{u_\varepsilon\}$ y a (3.6) se verifica

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} |F_\varepsilon(\psi)| \leq C \lim_{\varepsilon\to 0} \|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^{p'}(Q)} = C[\psi]_{L^{p'}(Q;B^{p'})}.$$

Por el Teorema 1.1 existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{\varepsilon\}$, y existe $f \in (L^{p'}(Q; \mathcal{B}^{p'}))'$ tales que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(\psi) = < f, \hat{\psi} > \quad \forall \psi \in A^{p'}. \tag{3.16}$$

Del Teorema 2.35 se tiene que f se identifica con un elemento $u \in L^p(Q; B^p)$, por lo que (3.16) se escribe

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(\psi) = \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx \quad \forall \psi \in A^{p'},$$

i.e. u_ε converge en dos escalas a u. ∎

Si la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $L^1(Q)$ el teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas es el siguiente:

Teorema 3.14 *Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $L^1(Q)$ y localmente equi-integrable. Entonces, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$, y existe $u \in L^1(Q; B^1)$ tales que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u.*

Demostración:

Claramente basta suponer Q acotado y u_ε equi-integrable.

Se considera para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de funciones $\{T_k(u_\varepsilon)\}$. Como esta sucesión está acotada en $L^p(Q)$, para cualquier $p > 1$, por el Teorema 3.13 se sabe que existe una subsucesión de $\{\varepsilon\}$, que denotamos $\{\varepsilon_k\}$, y existe $\bar{u}_k \in L^p(Q; B^p)$ tales que $\{T_k(u_\varepsilon)\}$ converge en dos escalas a $\bar{u}_k$. Si construimos la subsucesión diagonal, que seguimos denotando por $\{\varepsilon\}$, lo que se tiene es

$$T_k(u_\varepsilon) \overset{2e}{\rightharpoonup} \bar{u}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Veamos que $\{\bar{u}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(Q; B^1)$. Sean $k', k \in \mathbb{N}$, $k' \leq k$. Se tiene entonces

$$\int_Q |T_k(u_\varepsilon) - T_{k'}(u_\varepsilon)| dx \leq \int_{Q\cap\{|u_\varepsilon|>k\}} (k-k')dx + \int_{Q\cap\{k'\leq|u_\varepsilon|\leq k\}} |u_\varepsilon - k' sgn(u_\varepsilon)| dx \leq$$

$$\leq \frac{(k-k')}{k} \int_{Q\cap\{|u_\varepsilon|>k\}} |u_\varepsilon| dx + \int_{Q\cap|u_\varepsilon|\geq k'\}} (|u_\varepsilon| - k')dx \leq$$

$$\leq \frac{(k-k')}{k} \int_{Q\cap\{|u_\varepsilon|>k\}} |u_\varepsilon| dx + \int_{Q\cap|u_\varepsilon|\geq k'\}} |u_\varepsilon| dx, \tag{3.18}$$

y las dos integrales de (3.18) tienden a cero para k y k' suficientemente grandes, independientemente de ε, gracias a la equi-integrabilidad de $\{v_\varepsilon\}$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ la sucesión $\{T_k(u_\varepsilon)\}$ es de Cauchy en $L^1(Q)$.

Por la Proposición 3.11 con $p = 1$ se sabe que

$$[\bar{u}_k - \bar{u}_{k'}]_{L^1(Q;B^1)} \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_Q |T_k(u_\varepsilon) - T_{k'}(u_\varepsilon)| dx,$$

lo que implica que $\{\bar{u}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(Q; B^1)$ y por consiguiente que existe $u \in L^1(Q; B^1)$ tal que

$$\bar{u}_k \to u \text{ en } L^1(Q; B^1). \tag{3.19}$$

Vamos a probar ahora que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u. Sea ψ una función de la forma

$$\psi(x, y) = \chi_E(x) g(y).$$

con $E \subset\subset Q$ medible y $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| \leq \\
&\leq \left|\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q T_k(u_\varepsilon(x))\psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx\right| + \\
&+ \left|\int_Q T_k(u_\varepsilon(x))\psi(x,\tfrac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q M_y\{\bar{u}_k(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| + \\
&+ \left|\int_Q M_y\{\bar{u}_k(x,y)\psi(x,y)\}dx - \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| \leq
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{E\cap\{|u_\varepsilon|>k\}} |u_\varepsilon|dx + \left|\int_Q T_k(u_\varepsilon(x))\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q M_y\{\bar{u}_k(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| +$$
$$+ \left|\int_Q M_y\{\bar{u}_k(x,y)\psi(x,y)\}dx - \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right|.$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero para k fijo se deduce entonces

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| \leq \tag{3.21}$$

$$\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \sup_{\varepsilon>0} \int_{E\cap\{|u_\varepsilon|>k\}} |u_\varepsilon|dx +$$
$$+ \left|\int_Q M_y\{\bar{u}_k(x,y)\psi(x,y)\}dx - \int_Q M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}dx\right| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como

$$|\{|u_\varepsilon| > k\}| \leq \frac{1}{k}\sup_{\varepsilon>0} \|u_\varepsilon\|_{L^1(Q)},$$

que tiende a cero cuando k tiende a infinito, y u_ε es equi-integrable, el primer término del miembro derecho de (3.21) tiende a cero cuando k tiende a infinito.
Por tanto, tomando límite en k en (3.21) y usando (3.19) se obtiene que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0}\int_E u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_E M_y\{u(x,y)g(y)\}dx$$

para toda función $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y para todo conjunto $E \subset\subset Q$ medible, de medida finita, i.e. u_ε converge en dos escalas a u. ■

Observación 3.15 Por el teorema de Dunford-Pettis (véase p. ej. [D S]) las hipótesis sobre $\{u_\varepsilon\}$ del Teorema 3.14 equivalen a que $\{u_\varepsilon\}$ converja débilmente en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

La siguiente proposición nos dice que en general no podemos esperar para la función que aparece en el Teorema 3.13 o en el Teorema 3.14 una regularidad mayor que la de $L^p(Q; B^p)$.

Proposición 3.16 *Dada u perteneciente a $L^p(Q;B^p)$, $1 \le p < +\infty$, existe una sucesión acotada en $L^p(Q)$ que converge en dos escalas a u.*

Demostración:

Dada $u \in L^p(Q;B^p)$, sea $\{u_n\}$ una sucesión en $St(Q;B^p)$ tal que

$$\lim_n [u_n - u]_{L^p(Q;B^p)} = 0. \tag{3.22}$$

Por la Proposición 3.8 sabemos que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_Q |u_n(x,\frac{x}{\varepsilon}) - u_m(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_Q M_y\{|u_n(x,y) - u_m(x,y)|^p\}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como la sucesión $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(Q;B^p)$ se tiene por tanto que existe una subsucesión de $\{u_n\}$, que seguiremos denotando por $\{u_n\}$, tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_Q |u_n(x,\frac{x}{\varepsilon}) - u_m(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^m} \quad \forall n \ge m.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe ε_n decreciente en n tal que

$$\left(\int_Q |u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n}) - u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n})|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^j} \;\forall j \text{ con } 1 \le j \le n. \tag{3.23}$$

Consideremos la sucesión $\{u_n(x,\dfrac{x}{\varepsilon_n})\}$. Esta sucesión está acotada en $L^p(Q)$ ya que se verifica

$$\|u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(Q)} \le \|u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n}) - u_1(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(Q)} + \|u_1(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(Q)} \le$$

$$\le \frac{1}{2} + \|u_1(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(Q)} \le cte,$$

porque $\{u_1(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\}$ está acotada en $L^p(Q)$.

Vamos a probar ahora que la sucesión $\{u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\}$ converge en dos escalas a u.

Para ello, sea $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y E un conjunto medible de Q con medida finita. Entonces, para todos $n, j \in \mathbb{N}$ con $n \ge j$ se tiene

$$\left|\int_E u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n})g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx - \int_E M_y\{u(x,y)g(y)\}dx\right| \le \tag{3.24}$$

$$\le \left|\int_E (u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n}) - u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n}))g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx\right| +$$

$$+\left|\int_E u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n})g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx - \int_E M_y\{u_j(x,y)g(y)\}dx\right| +$$

$$+\left|\int_E M_y\{u_j(x,y)g(y)\}dx - \int_E M_y\{u(x,y)g(y)\}dx\right|.$$

Con respecto al primer término del segundo miembro de (3.24) se tiene por (3.23)

$$\left|\int_E (u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n}) - u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n}))g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx\right| \leq \|u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n}) - u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(Q)}\|g(\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^{p'}(E)} \leq \frac{C}{2^j}, \tag{3.25}$$

donde C es una cota superior de $\{\|g(\frac{x}{\varepsilon_n})\|_{L^p(E)}\}$.

Con respecto al segundo término de (3.24) se verifica, por la Proposición 3.8, que

$$\lim_n \left|\int_E u_j(x,\frac{x}{\varepsilon_n})g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx - \int_E M_y\{u_j(x,y)g(y)\}dx\right| = 0 \quad \forall j. \tag{3.26}$$

Teniendo en cuenta (3.25) y (3.26) se deduce por tanto

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\int_E u_n(x,\frac{x}{\varepsilon_n})g(\frac{x}{\varepsilon_n})dx - \int_E M_y\{u(x,y)g(y)\}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{2^j} + \left|\int_Q M_y\{(u_j(x,y) - u(x,y))g(y)\}dx\right| \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

lo que, gracias a (3.22), implica el resultado tomando límite en j. ∎

La siguiente proposición será usada en la próxima sección.

Proposición 3.17 *Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión en $L^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, que converge en dos escalas a $u \in L^p(Q; B^p)$, y sea $z \in R^N$.*

(a) *Para todo $Q' \subset\subset Q$ la sucesión $\{u_\varepsilon(x - \varepsilon z)\}$ converge en dos escalas a $u(x, y - z)$ en Q'.*

(b) *Para todo $R > 0$, la sucesión $\{\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u_\varepsilon(x + \varepsilon\rho)d\rho\}$ converge en dos escalas en Q' a la función $\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u(x, y + \rho)d\rho$.*

Demostración:

(a) Hay que probar que para toda función $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y para todo conjunto medible, de medida finita $E \subset\subset Q$ se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_E u_\varepsilon(x - \varepsilon z)g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_E M_y\{u(x, y - z)g(y)\}dx.$$

De hecho, como

$$|E| = \inf\{|G| : \quad E \subset G,\ G \,\text{abierto}\}$$

se puede suponer que E es abierto. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\int_E u_\varepsilon(x-\varepsilon z)g(\frac{x}{\varepsilon})dx &= \int_{E-\varepsilon z} u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon}-z)dx = \\ = \int_E u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon}+z)dx &- \int_{E\setminus(E-\varepsilon z)} u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon}+z)dx + \\ &+ \int_{(E-\varepsilon z)\setminus E} u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon}+z)dx.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Por otra parte, se tiene

$$\left|\int_{(E-\varepsilon z)\triangle E} u_\varepsilon(x)g(\frac{x}{\varepsilon}+z)dx\right| \leq \|g\|_{L^\infty(Q)} \int_{(E-\varepsilon z)\triangle E} |u_\varepsilon|dx \to 0 \tag{3.28}$$

ya que $\{u_\varepsilon\}$ es localmente equiintegrable y $|(E-\varepsilon z)\triangle E|$ tiende a cero, gracias a que E es abierto. Como consecuencia de (3.28) se deduce que los dos últimos términos del miembro derecho de (3.27) tienden a cero. Como $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u y $g(y-z)$ pertenece a $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se obtiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_E u_\varepsilon(x-\varepsilon z)g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_E M_y\{u(x,y)g(y+z)\}dx = \int_E M_y\{u(x,y-z)g(y)\}dx.$$

(b) Sea como antes, un conjunto medible $E \subset\subset Q$, de medida finita, y g una función de $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Por el teorema de Fubini se tiene

$$\int_E \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)d\rho\right) g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\int_E u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)g(\frac{x}{\varepsilon})dx\, d\rho.$$

El apartado (a) se traduce ahora en

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_E u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \int_E M_y\{u(x,y+\rho)g(y)\}dx.$$

Usando también que la sucesión $\left\{\int_E u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)g(\frac{x}{\varepsilon})dx\right\}_\varepsilon$ está acotada en casi todo B_R por una constante, se deduce que se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, lo que implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_E \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)d\rho\right) g(\frac{x}{\varepsilon})dx = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\int_E M_y\{u(x,y+\rho)g(y)\}dxd\rho,$$

lo que prueba el resultado sin más que aplicar otra vez el teorema de Fubini. ∎

3.2 Convergencia en dos escalas para sucesiones acotadas en $W^{1,p}$.

En la sección anterior hemos demostrado un teorema bastante general que afirma que toda sucesión acotada en $L^p(Q)$ admite una subsucesión que converge en dos escalas. Sin embargo, es más frecuente en homogeneización encontrarse con una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ acotada en $W^{1,p}(Q)$. En esta sección estudiaremos el límite en dos escalas de la sucesión $\{\nabla u_\varepsilon\}$, donde $\{u_\varepsilon\}$ es una sucesión que converge débil en un espacio de tipo $W^{1,p}$.

El resultado principal que se obtiene es el siguiente:

Teorema 3.18 *Sea Q un abierto de $\mathbb{R}^N$, supongamos que X es un álgebra ergódica y sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(Q)$ con $1 < p < +\infty$. Entonces, existe una subsucesión, que seguiremos denotando $\{u_\varepsilon\}$, existe $u \in W^{1,p}(Q)$ y existe una función $u_1(x,y)$ tal que p.c.t. $x \in Q$ $u_1(x,\cdot)$ pertenece a W^p, para los cuales se verifica*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{en } W^{1,p}(Q)\text{-débil} \quad (\text{en particular } u_\varepsilon \stackrel{2e}{\rightharpoonup} u), \tag{3.29}$$

$$\nabla u_\varepsilon \stackrel{2e}{\rightharpoonup} \nabla_x u + \nabla_y u_1. \tag{3.30}$$

Para $p = 1$ se tiene también el teorema si se supone que Q tiene medida finita y que la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ converge débilmente en $W^{1,1}Q)$.

Observación 3.19 La función u_1 verifica que $\nabla_y u_1 \in L^p(Q;(B^p)^N)$.

Demostración:

Basta probarlo para $1 < p < +\infty$. El caso $p = 1$ se razona análogamente usando el Teorema 3.14 en lugar del Teorema 3.13.

Por el Teorema 3.13 y la reflexividad de $W^{1,p}(Q)$ sabemos que existe una subsucesión de $\{u_\varepsilon\}$, que seguimos notando por $\{u_\varepsilon\}$, y existen $u \in W^{1,p}(Q)$, $\xi \in L^p(Q;(B^p)^N)$ tales que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \; W^{1,p}(Q) \text{ -débil}$$

$$\nabla u_\varepsilon \stackrel{2e}{\rightharpoonup} \xi.$$

Por tanto, basta probar que existe u_1, en las condiciones del enunciado del teorema, tal que

$$\xi(x,y) = \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y).$$

Esto lo llevaremos a cabo en dos etapas.

Primera etapa:

Vamos a demostrar que para todo $R > 0$ la sucesión

$$\left\{\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho)\right\}_\varepsilon$$

está acotada en $L^p(Q')$ para todo $Q' \subset\subset Q$ de medida finita y ε suficientemente pequeño. En particular se tendrá que

$$\left\{u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho\right\}$$

converge fuertemente en $L^p_{loc}(Q)$ a cero.

Se tiene

$$\int_{Q'} |u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho|^p dx = \int_{Q'}\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}(u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho))d\rho\right|^p dx \leq$$

$$\leq \int_{Q'}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x+\varepsilon\rho)|^p d\rho dx = \int_{Q'}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|\int_0^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x+t\rho)\cdot\rho dt|^p d\rho dx \leq$$

$$\leq R^p\int_{Q'}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\left(\int_0^\varepsilon|\nabla u_\varepsilon(x+t\rho)|dt\right)^p d\rho dx \leq$$

$$\leq C_R\varepsilon^{p-1}\int_{Q'}\int_{B_R}\int_0^\varepsilon|\nabla u_\varepsilon(x+t\rho)|^p dt d\rho dx \leq C_R\varepsilon^{p-1}\int_0^\varepsilon\int_{B_R}\int_Q|\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx\, d\rho\, dt \leq C_R\varepsilon^p.$$

Segunda Etapa:

Dado $R > 0$, por la primera etapa y el Teorema 3.13 se deduce que existe una subsucesión, que seguiremos denotando por ε, tal que $\left\{\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho)\right\}_\varepsilon$ converge en dos escalas a una cierta función $v_R \in L^p_{loc}(Q; B^p)$.

Sean $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, $\psi \in D^\infty$.

Una integración por partes da

$$\int_Q \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho)\nabla_y\psi(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_Q(\nabla u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}}\nabla u_\varepsilon(x+\rho)d\rho)\psi(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)dx -$$

$$-\int_Q (u_\varepsilon(x) - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho)\psi(\frac{x}{\varepsilon})\nabla\varphi(x)dx.$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero y usando la Proposición 3.17 y que $\{u_\varepsilon - \frac{1}{|B_{R\varepsilon}|}\int_{B_{R\varepsilon}} u_\varepsilon(x+\rho)d\rho\}$ tiende a cero en $L^p(Q')$ fuerte se deduce

$$\int_Q M_y\{v_R(x,y)\nabla_y\psi(y)\}\varphi(x)dx = -\int_Q M_y\{(\xi(x,y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\xi(x,y+z)dz)\psi(y)\}\varphi(x)dx,$$

por tanto, para casi todo $x \in Q$ se tiene

$$M_y\{v_R(x,y)\nabla\psi(y)\} = -M_y\{(\xi(x,y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\xi(x,y+z)dz)\psi(y)\} \quad \forall\psi \in D^\infty, \tag{3.31}$$

lo que implica

$$\xi(x,y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\xi(x,y+z)dz = \nabla_{y,m}v_R(x,y) \quad \text{p.c.t.} x \in Q. \tag{3.32}$$

Gracias a la ergodicidad del álgebra, el límite cuando R tiende a infinito en la seminorma p de Besicovitch del miembro de la izquierda de (3.32) es $\xi(x,y) - M_z\{\xi(x,z)\}$. Por tanto, $\xi(x,y) - M_z\{\xi(x,z)\}$ pertenece a la clausura en $(B^p)^N$ de $\nabla_m B^{1,p}$ p.c.t. $x \in Q$, con lo que gracias al Corolario 2.63 $\xi(x,y) - M_z\{\xi(x,z)\}$ pertenece a ∇W^p p.c.t. $x \in Q$. Por otra parte $M_z\{\xi(x,z)\} = \nabla u(x)$ ya que ∇u_ε converge a ∇u débilmente en $L^p(Q)^N$ (véase Proposición 3.4, apartado (a)).

Se tiene por tanto que existe $u_1(x,y)$ tal que p.c.t. $x \in Q$ $u_1(x,\cdot)$ pertenece a W^p y verifica

$$\xi(x,y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y). \quad \blacksquare$$

Análogamente a la Proposición 3.16, el siguiente resultado nos dice que no podemos esperar más regularidad para la función que aparece en el Teorema 3.18.

Proposición 3.20 *Dadas u_1 perteneciente a $L^p(Q;W^p/\mathbb{R})$ y u perteneciente a $W^{1,p}(Q)$, $1 \le p < +\infty$, existe una sucesión $\{v_n\}$ acotada en $W^{1,p}(Q)$ tal que*

$$v_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(Q)\text{-}débil$$

$$\nabla v_n \xrightarrow{2e} \nabla u + \nabla_y u_1.$$

Demostración:

Reemplazando la sucesión v_n que aparece en el enunciado de la proposición por $v_n - u$ basta probar el resultado con $u = 0$.

Sea $u_1 \in L^p(Q; W^p/\mathbb{R})$. Por la Proposición 2.62 existe una sucesión $\{\psi_n\}$ con $\psi_n(x,y) = \varphi_n(x) g_n(y)$ tal que $\varphi_n \in C_0^\infty(Q)$, $g_n \in S^p$ y

$$\nabla_y \psi_n \to \nabla_y u_1 \text{ en } L^p(Q; (B^p)^N). \tag{3.33}$$

La sucesión $\{\psi_n\}$ se puede elegir verificando

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_Q |\nabla_y \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) - \nabla_y \psi_m(x, \frac{x}{\varepsilon})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^m} \quad \forall n \geq m. \tag{3.34}$$

Como $g_n \in B^p$ y $\nabla_y g_n \in (B^p)^N$ se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon g_n(\frac{x}{\varepsilon}) = 0 \text{ en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \tag{3.35}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \nabla_y g_n(\frac{x}{\varepsilon}) = 0 \text{ en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)^N. \tag{3.36}$$

Por la Proposición 3.8 se sabe también que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\nabla_y \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) \stackrel{2e}{\rightharpoonup} \nabla_y \psi_n(x,y). \tag{3.37}$$

De (3.34), (3.35) y (3.36) se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_n > 0$ decreciente tal que

$$\left(\int_Q |\nabla_y \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon_n}) - \nabla_y \psi_j(x, \frac{x}{\varepsilon_n})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^j} \quad \forall j \text{ con } 1 \leq j \leq n, \tag{3.38}$$

$$\int_Q |\varepsilon_n \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon_n})|^p dx < \frac{1}{2^n}, \tag{3.39}$$

$$\int_Q |\varepsilon_n \nabla_x \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon_n})|^p dx < \frac{1}{2^n}. \tag{3.40}$$

Sea

$$v_n(x) = \varepsilon_n \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon_n}).$$

Claramente v_n pertenece a $W^{1,p}(Q)$ y por (3.39) se verifica

$$v_n \to 0 \text{ en } L^p(Q). \tag{3.41}$$

Por (3.38) se demuestra fácilmente que $\{\nabla_y \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon_n})\}$ está acotada en $L^p(Q)^N$ que, junto con (3.40) y (3.41), prueba que v_n converge débilmente a cero en $W^{1,p}(Q)$.

Por otra parte, de (3.33), (3.37), (3.38) y (3.40), razonando como en la Proposición 3.16, se deduce que

$$\nabla v_n \xrightharpoonup{2e} \nabla_y u_1. \blacksquare$$

Otro resultado que se aplica a varios problemas de homogeneización es el siguiente:

Proposición 3.21 *Sean $\{u_\varepsilon\}$ y $\{\varepsilon\nabla u_\varepsilon\}$ dos sucesiones acotadas en $L^p(Q)$ y $L^p(Q)^N$ respectivamente, $1 < p < +\infty$. Entonces, existe una subsucesión de $\{\varepsilon\}$, que seguimos notando por ε, y existe u_0 perteneciente a $L^p(Q; B^{1,p})$ tales que $\{u_\varepsilon\}$ y $\{\varepsilon\nabla u_\varepsilon\}$ convergen en dos escalas a u_0 y $\nabla_{m,y}u_0$ respectivamente.*

Demostración:

Por el Teorema 3.13 existe una subsucesión, denotada por $\{\varepsilon\}$, y existen $u_0 \in L^p(Q; B^p)$ y $\xi \in L^p(Q; B^p)^N$ tales que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_Q M_y\{u_0(x,y)\psi(x,y)\}\, dx \quad \forall \psi \in A^{p'} \qquad (3.42)$$

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q \varepsilon\nabla u_\varepsilon(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_Q M_y\{\xi(x,y) \cdot \Psi(x,y)\}\, dx \quad \forall \Psi \in (A^{p'})^N. \qquad (3.43)$$

Sean $f \in C_0^\infty(Q)$ y $G \in (D^\infty)^N$. Entonces

$$\int_Q \varepsilon\nabla u_\varepsilon(x) f(x) G(\frac{x}{\varepsilon})dx = -\varepsilon \int_Q u_\varepsilon(x)\nabla f(x) G(\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_Q u_\varepsilon(x) div_y G(\frac{x}{\varepsilon}) f(x)dx.$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero y teniendo en cuenta (3.42) y (3.43) se obtiene

$$\int_Q M_y\{\xi(x,y) \cdot G(y)\} f(x)dx = -\int_Q M_y\{u_0(x,y) div_y G(y)\} f(x)dx$$

para toda $f \in C_0^\infty(Q)$, $G \in (D^\infty)^N$, lo que significa que $\nabla_{m,y}u_0(x,y) = \xi(x,y)$ p.c.t. $x \in Q$. $\blacksquare$

3.3 Resultados de convergencia en dos escalas para los espacios de Besicovitch B_H^2.

En esta sección definiremos la convergencia en dos escalas para para el caso de los espacios de Besicovitch B_H^2 y estudiaremos sus principales propiedades. Enunciaremos los resultados y sólo haremos aquellas demostraciones que difieran esencialmente de las del caso escalar.

La extensión de la definición de convergencia en dos escalas al caso de funciones valuadas en un espacio de Hilbert es la siguiente:

Definición 3.22 *Se dice que una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ en $L^2(Q;H)$ converge en dos escalas a $u \in L^2(Q;B^2_H)$ sii*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_E \left(u_\varepsilon(x), g(\frac{x}{\varepsilon})\right)_H dx = \int_E M_y\left\{(u(x,y), g(y))_H\right\} dx \tag{3.44}$$

para toda $g \in B^2_H$ y para todo conjunto medible $E \subset\subset Q$, de medida finita.

Si una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u es posible obtener la igualdad (3.44) para funciones más generales. Es por esto por lo que definimos el siguiente espacio.

Definición 3.23 *Se define A_H como el subespacio vectorial formado por las funciones $\psi \in L^2(Q;B^2_H)$ tales que existe una sucesión $\{\psi_n\} \subset St(Q;B^2_H)$ verificando*

$$\lim_n \int_Q M_y\{|\psi(x,y) - \psi_n(x,y)|^2_H\} dx = 0,$$

$$\lim_n \int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})|^2_H dx = 0 \quad \textit{uniformemente en } \varepsilon > 0.$$

El subespacio A_H tiene las siguientes propiedades:

Lema 3.24 (a) *Los subespacios vectoriales $L^2(Q;V)$, $L^\infty(Q) \otimes B^2_H$, $C_0(Q;B^2_H)$ están contenidos en A_H.*

(b) *Si ψ pertenece a A_H entonces*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q \psi(x,\frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_Q M_y\{\psi(x,y)\} dx,$$

igualdad en H.

(c) *Si ψ pertenece a A_H entonces*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q |\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^2_H dx = \int_Q M_y\{|\psi(x,y)|^2_H\} dx.$$

(d) *Si ψ pertenece a A_H entonces $\{\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\}$ converge en dos escalas a $\psi(x,y)$.*

Veamos ahora una relación entre las convergencias fuerte y débil con la convergencia en dos escalas.

Proposición 3.25 (a) *Si* $\{u_\varepsilon\}$ *converge en dos escalas a* u *entonces* $\{u_\varepsilon\}$ *converge débilmente en* $L^2(Q;H)$ *a* $M_y\{u(x,y)\}$.

(b) *Si* $\{u_\varepsilon\}$ *converge fuertemente a* u_0 *en* $L^2(Q;H)$ *entonces* $\{u_\varepsilon\}$ *converge en dos escalas a* u_0.

El teorema de compacidad para este caso es el siguiente:

Teorema 3.26 *Sea* $\{u_\varepsilon\}$ *una sucesión acotada en* $L^2(Q;H)$. *Entonces, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por* $\{u_\varepsilon\}$, *y existe* $u \in L^2(Q;B^2_H)$ *tales que* $\{u_\varepsilon\}$ *converge en dos escalas a* u.

Con el mismo argumento que en el caso escalar se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.27 *Dado cualquier elemento de* $L^2(Q;B^2_H)$ *existe una sucesión en* $L^2(Q;H)$ *acotada que converge en dos escalas a ese elemento.*

Proposición 3.28 *Sea* $\{u_\varepsilon\}$ *una sucesión en* $L^2(Q;H)$ *que converge en dos escalas a* $u \in L^2(Q;B^2_H)$, *entonces se tiene la desigualdad*

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q;H)} \geq [u]_{L^2(Q;B^2_H)}. \tag{3.45}$$

Si además u *pertenece a* A_H *y*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q;H)} = [u]_{L^2(Q;B^2_H)} \tag{3.46}$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon(x) - u(x,\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(Q;H)} = 0. \tag{3.47}$$

Demostración:

La desigualdad (3.45) se demuestra de forma análoga al caso de los espacios de Besicovitch generados por álgebras.

En cuanto al resultado (3.47) se tiene lo siguiente:

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x,\frac{x}{\varepsilon})\|^2_{L^2(Q;H)} = \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q;H)} + \|u(x,\frac{x}{\varepsilon})\|^2_{L^2(Q;H)} - 2\int_Q (u_\varepsilon(x), u(x,\frac{x}{\varepsilon}))_H dx.$$

Pasando al límite cuando ε tiende a cero y teniendo en cuenta que u_ε converge en dos escalas a u y que se tiene (3.46) inmediatamente se obtiene que el límite es cero. ∎

La caracterización del límite en dos escalas de una sucesión de gradientes viene dada en el siguiente teorema.

Teorema 3.29 *Supongamos que V es ergódica. Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $H^1(Q;H)$ y V ergódica. Entonces existe una subsucesión, que seguiremos denotando por u_ε, existe $u \in H^1(Q;H)$ y existe una función u_1 tal que $\nabla_y u_1 \in L^2(Q;(B^2_H)^N)$, tales que*

$$u_\varepsilon \xrightarrow{2e} u$$

$$\nabla_x u_\varepsilon \xrightarrow{2e} \nabla_x u + \nabla_y u_1.$$

Como se verá en la demostración, al igual que ocurría en el caso escalar, la hipótesis de ergodicidad es esencial.

Demostración:

Del Teorema 3.26 sabemos que existe una subsucesión, que seguiremos denotando por ε, y existen $u \in L^2(Q;B^2_H)$ y $\xi \in L^2(Q;(B^2_H)^N)$ tales que para toda $\psi \in A_H$

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q (u_\varepsilon(x), \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}))_H dx = \int_Q M_y\{(u(x,y), \psi(x,y))_H\} dx \tag{3.48}$$

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x), \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}))_H dx = \int_Q M_y\{(\xi_i(x,y), \psi(x,y))_H\} dx \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}. \tag{3.49}$$

Sean $f \in C_0^\infty(Q)$ y $g \in D_H^\infty$. Entonces se tiene

$$\varepsilon \int_Q (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x), f(x) g(\frac{x}{\varepsilon}))_H dx = -\varepsilon \int_Q (u_\varepsilon(x), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(\frac{x}{\varepsilon}))_H dx - \int_Q (u_\varepsilon(x), f(x) \frac{\partial g}{\partial y_i}(\frac{x}{\varepsilon}))_H dx.$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero se llega a que

$$\int_Q M_y\{(u(x,y), \frac{\partial g}{\partial y_i}(y))_H\} f(x) dx = 0$$

lo que implica $\partial_{i,m} u(x,\cdot) = 0$ para todo i. Esto nos dice que $u(x,\cdot)$ es invariante y como V es ergódica, $u(x,\cdot)$ es equivalente a una función constante respecto a y, que seguiremos llamando u.

Por otra parte, se sabe que $\{u_\varepsilon\}$ converge débilmente en $H^1(Q;H)$, y que la convergencia en dos escalas implica convergencia débil en $L^2(Q;H)$. Entonces, necesariamente el límite en dos escalas y el límite débil en $H^1(Q;H)$ tienen que coincidir, y por tanto $u \in H^1(Q;H)$.

La estructura de ξ se deduce como en el Teorema 3.18. ∎

Es fácil demostrar, razonando como en el Teorema 3.20 que la regularidad de u_1 es óptima.

Observación 3.30 En particular, si el espacio de Besicovitch B^2_H se genera a partir del espacio V dado en (2.56) con (2.57) para la definición del grupo unitario y del espacio de Hilbert, los Teoremas 3.26 y 3.29 generalizan los resultados obtenidos por Bourgeat, Mikelić y Wright (véase [B M W]).

Análogamente a la Proposición 3.21 se tiene también

Proposición 3.31 *Sean $\{u_\varepsilon\}$ y $\{\varepsilon\nabla u_\varepsilon\}$ dos sucesiones acotadas en $L^2(Q;H)$ y $L^2(Q;H)^N$ respectivamente. Entonces, existe una subsucesión de $\{\varepsilon\}$, que seguiremos denotando por ε, y existe $u_0 \in L^2(Q;B^{1,2}_H)$ tales que u_ε y $\varepsilon\nabla_x u_\varepsilon$ convergen en dos escalas a u_0 y $\nabla_{y,m} u_0$ respectivamente.*

Capítulo 4

El método de convergencia en dos escalas aplicado a algunos problemas de homogeneización.

En este capítulo aplicamos el llamado método de convergencia en dos escalas para obtener los problemas homogeneizados de diversos problemas en microestructura. Básicamente, el método consiste en introducir en la formulación variacional del problema a homogeneizar funciones test de la forma $\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)g(\frac{x}{\varepsilon})$, con φ, ψ funciones regulares y g una función de Besicovitch regular. Gracias a los resultados de compacidad para la convergencia en dos escalas es posible pasar al límite y obtener así la formulación variacional del problema homogeneizado.

En las dos primeras secciones realizaremos la homogeneización de problemas lineales con coeficientes en un espacio de Besicovitch, mientras que en la tercera sección obtendremos el problema límite de un sistema pseudomonótono con coeficentes en un espacio de Besicovitch.

4.1 Homogeneización de ecuaciones elípticas lineales de segundo orden.

Vamos a comenzar en esta sección considerando un problema simple

$$\begin{cases} -\mathrm{div}[A(x, \frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon] = f \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{4.1}$$

donde Ω es un abierto contenido en $\mathbb{R}^N$, A es una matriz en el espacio A^∞ para la que existen $\alpha, \beta > 0$ verificando

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} |A_{ij}(x,y)| \leq \beta, \quad \text{p.c.t.} x \in \Omega$$

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall y \in \mathbb{R}^N, \text{ p.c.t.} x \in \Omega, \tag{4.2}$$

f es un elemento de $H^{-1}(\Omega)$ y X es un álgebra de Banach ergódica con valor medio. En el caso en que $X = C_\sharp(Y)$, el problema (4.1) es uno de los más clásicos en homogeneización (véanse p. ej. [B L P], [SP]), en el caso en que $X = CAP(\mathbb{R}^N)$ la resolución de (4.1) es también conocida (véase [O Z]).

El problema homogeneizado que obtendremos consistirá en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. De este sistema será posible obtener la ecuación límite en u mediante una relación entre las dos incógnitas que aparecen en el sistema que usa la solución de la llamada ecuación en microestructura o ecuación auxiliar o celda.

El teorema que vamos a probar acerca del comportamiento de las soluciones de (4.1) es el siguiente.

Teorema 4.1 *En las condiciones anteriores, existen dos funciones $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ tales que la solución u_ε del problema (4.1) converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a u y ∇u_ε converge en dos escalas a $\nabla u + \nabla_y u_1$, siendo $(u, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ la única solución del sistema:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y[A(x,y)(\nabla u + \nabla_y u_1)] = 0 & en \quad (W^2/\mathbb{R})', \text{ p.c.t.} x \in \Omega \\ -\mathrm{div}_x M_y\{A(x,y)(\nabla u + \nabla_y u_1)\} = f & en \quad H^{-1}(\Omega). \end{cases} \tag{4.3}$$

Observación 4.2 Al sistema (4.3) se le llama sistema homogeneizado en dos escalas (véase [A1]).

Observación 4.3 El espacio $W^2/\mathbb{R}$ está dotado de la seminorma $[\nabla f]_2$.

Demostración:

Tomando u_ε como función test en (4.1) y usando (4.2) se deduce que $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$, por tanto, por el Teorema 3.18 existe una subsucesión, que seguiremos denotando por ε, tal que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \ \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-débil} \tag{4.4}$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u + \nabla_y u_1. \tag{4.5}$$

Sean $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $g \in S^2$ (véase Definición 2.61 para el espacio S^2). Consideramos $\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)g(\frac{x}{\varepsilon})$ como función test en (4.1).

Se tiene entonces

$$\int_\Omega A(x,\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon[\nabla\varphi(x)+\varepsilon\nabla\psi(x)\,g(\frac{x}{\varepsilon})+\psi(x)\nabla_y g(\frac{x}{\varepsilon})]dx =< f,\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)g(\frac{x}{\varepsilon}) >_{H^{-1},H_0^1} .$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero y, teniendo en cuenta (4.5), se deduce

$$\int_\Omega M_y\{A(x,y)(\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y))(\nabla\varphi(x) + \psi(x)\nabla_y g(y))\}dx =< f,\varphi >,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in S^2$, lo que por densidad implica que para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ y $w \in L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ se verifica

$$\int_\Omega M_y\{A(x,y)(\nabla u + \nabla_y u_1)(\nabla v + \nabla_y w)\}dx =< f,v >, \tag{4.6}$$

que es la formulación variacional del problema (4.3).

Si dotamos al espacio $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ de la norma

$$\|(u,u_1)\| = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\nabla_y u_1\|_{L^2(Q;(B^2)^N)}, \tag{4.7}$$

la forma bilineal que aparece en (4.6) es continua y coerciva; la coercividad se demuestra usando el hecho de que $\|\nabla u + \nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega;B^2)^N}$ es una norma equivalente en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ a la definida por (4.7).

Por tanto, el problema (4.3) tiene solución única y (4.4) y (4.5) se tienen para toda la sucesión $\{u_\varepsilon\}$. ■

Observación 4.4 La primera ecuación de (4.3) corresponde a la ecuación de orden ε^{-1} del desarrollo asintótico (véase [B L P]).

Observación 4.5 Si para todo j con $1 \leq j \leq N$ se define $X^j \in L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})$ como la única solución del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y[A(x,y)(e_j + \nabla_y X^j(x,y))] = 0 \text{ en } (W^2/\mathbb{R})' \\ X^j(x,\cdot) \in W^2/\mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.8}$$

entonces la función u_1 que aparece en (4.3) se puede calcular mediante la relación

$$u_1(x,y) = \sum_{j=1}^{N} X^j(x,y) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x).$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación de (4.3) se obtiene que u satisface

$$-\mathrm{div}_x \bar{A}(x) \nabla u = f \tag{4.9}$$

donde $\bar{A}$ es la matriz de coeficientes

$$\bar{A}_{\alpha,\beta}(x) = M_y\{A_{\alpha,\beta}(x,y) + \sum_{\gamma=1}^{N} A_{\alpha\gamma}(x,y) \frac{\partial X^\beta}{\partial y_\gamma}(x,y)\}.$$

$\bar{A}$ se llama matriz homogeneizada de $\{A(x, \frac{x}{\varepsilon})\}$ y a (4.9) la ecuación límite.

Al igual que en el caso periódico (véase [A1]) se tiene un resultado de corrector que justifica los dos primeros términos del desarrollo asintótico:

Proposición 4.6 *En las condiciones del Teorema 4.1, si la función $\nabla_y u_1$ pertenece a $(A^2)^N$ entonces*

$$\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x) - \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \text{ en } L^2(\Omega)^N \text{ fuerte.} \tag{4.10}$$

Demostración:

Por la Proposición 2.62 se puede ver que existen $v_n \in C_c^\infty(\Omega; H^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ tales que $v_n(x,\cdot) \in B^2$, $\nabla_y v_n(x,\cdot) \in (B^2)^N$ para todo $x \in \Omega$ y satisface

$$\nabla_y v_n(x,y) \to \nabla_y u_1(x,y) \text{ en } L^2_{loc}(\Omega; (B^2)^N).$$

Para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se toman $\varphi(x)[u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})]$ como función test en (4.1), se obtiene

$$\int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon(x) [\nabla(u_\varepsilon(x) - u(x)) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] \varphi(x) dx -$$
$$-\varepsilon \int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla_x v_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) \varphi(x) dx +$$
$$+ \int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) (u_\varepsilon(x) - u(x) - v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})) dx =$$
$$=< f, \varphi(u_\varepsilon - u - v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})) > .$$

Usando que $u_\varepsilon - u - \varepsilon v_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0$ en $L^2_{loc}(\Omega)$ fuerte, $H^1_{loc}(\Omega)$ débil, se concluye fácilmente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] \varphi(x) dx = 0. \tag{4.11}$$

Por otra parte, gracias al Teorema 4.1, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) [\nabla u(x) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] dx =$$
$$= \int_\Omega M_y \{A(x, y) [\nabla u(x) - \nabla_y v_n(x, y)] \cdot \nabla_y (u_1(x, y) - v_n(x, y))] dx. \tag{4.12}$$

Restando (4.11) y (4.12), y tomando límite cuando n tiende a infinito se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega A(x, \frac{x}{\varepsilon}) [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] dx = 0,$$

lo que gracias a (4.2) implica

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] [\nabla(u_\varepsilon - u) - \nabla_y v_n(x, \frac{x}{\varepsilon})] dx = 0. \tag{4.13}$$

Por la Proposición 3.8 se tiene también

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_y (u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) - v_n(x, \frac{x}{\varepsilon}))|^2 dx = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega M_y \{|\nabla_y (u_1(x, y) - v_n(x, y))|^2 dx = 0. \tag{4.14}$$

De (4.13) y (4.14) se deduce ahora fácilmente (4.10). ■

Más generalmente que el problema anterior podemos considerar el siguiente, que justifica el estudio que hemos realizado sobre los espacios de Besicovitch con valores en un espacio de Hilbert. Consideremos Ω_1 un abierto regular de $\mathbb{R}^N$, Ω_2 un abierto regular de $\mathbb{R}^m$ y denotemos por Ω a $\Omega_1 \times \Omega_2$. Llamaremos x a los elementos de Ω_1 y z a los elementos de Ω_2. Se trata de obtener, con la técnica de la doble escala, el problema homogeneizado de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}A(x,\frac{x}{\varepsilon},z)\nabla u_\varepsilon(x,z) = f(x,z) \text{ en } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde A pertenece a $L^\infty(\Omega_1; CAP(\mathbb{R}^N; L^\infty(\Omega_2)))^{(N+m)^2}$ y satisface las hipótesis de acotación y coercividad siguientes: $\exists\alpha,\beta > 0$ tales que

$$\|A_{ij}\|_{L^\infty(\Omega_1;CAP(\mathbb{R}^N;L^\infty(\Omega_2)))} \leq \beta \quad \forall i,j,\ 1\leq i,j\leq N+m,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N+m} A_{ij}(x,y,z)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall y\in\mathbb{R}^N,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^{N+m},\ \text{p.c.t.}\,(x,z)\in\Omega.$$

El segundo miembro de (4.15) es un elemento de $H^{-1}(\Omega)$. En (4.15) entendemos que tanto la divergencia como el gradiente se refieren a las componentes $(x_1,\ldots,x_N,z_1,\ldots,z_m)$. La matriz A se supone dividida en bloques A_1, A_2, A_3, A_4 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{A_1}}^{N} & \overbrace{\hphantom{A_2}}^{m} \end{array} \\ \begin{array}{c} N\ \{ \\ m\ \{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right). \end{array}$$

Vamos a probar el siguiente teorema:

Teorema 4.7 *En las hipótesis anteriores existen $u\in H_0^1(\Omega)$ y $u_1\in L^2(\Omega_1; W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))$ tales que*

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } H_0^1(\Omega) \text{ -débil}, \\ &\nabla_x u_\varepsilon \xrightarrow{2e} \nabla_x u + \nabla_y u_1, \\ &\nabla_z u_\varepsilon \xrightarrow{2e} \nabla_z u, \end{aligned}$$

y (u,u_1) es la solución del sistema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}M_y\{A(x,y,z)(\nabla u(x,z) + \widetilde{\nabla_y u_1}(x,y,z))\} = f(x,z) \\ \text{en } H^{-1}(\Omega) \\ -\mathrm{div}_y\{A_1(x,y,z)(\nabla_x u(x,z) + \nabla_y u_1(x,y,z)) + A_2(x,y,z)\nabla_z u(x,z))\} = 0 \\ \text{en } L^2(\Omega; W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))' \\ u\in H_0^1(\Omega),\ u_1\in L^2(\Omega; W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2)). \end{cases} \tag{4.16}$$

Estamos denotando por $\widetilde{\nabla_y u_1}$ al vector de $N+m$ componentes cuyas N primeras son las del vector $\nabla_y u_1$ y las m restantes son cero. El espacio $W^2_{L^2(\Omega_2)}$ está definido a partir del espacio de Besicovitch $B^2_{L^2(\Omega_2)}$ tomando como espacio V el espacio $CAP(\mathbb{R}^N; L^2(\Omega_2))$, que es un caso particular del ejemplo (2.58).

Demostración:

Tomando u_ε como función test en (4.15) se deduce que $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $H^1_0(\Omega)$. Por los Teoremas 3.26 y 3.29 existe una subsucesión, que seguiremos notando por $\{\varepsilon\}$, y existen $u \in H^1_0(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega_1; W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))$ y $\xi \in L^2(\Omega_1; B^2_{L^2(\Omega_2)})^m$ tales que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } H^1_0(\Omega) \tag{4.17}$$

$$\nabla_x u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla_x u + \nabla_y u_1 \tag{4.18}$$

$$\nabla_z u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \xi \tag{4.19}$$

Cuando probemos que ξ es igual a $\nabla_z u$ y que u y u_1 verifican (4.16), por la unicidad de solución del problema se deducirá que las convergencias (4.17), (4.18) y (4.19) se tienen para toda la sucesión.

Vamos a probar que

$$\xi = \nabla_z u. \tag{4.20}$$

Para ello, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m$, $g \in S_{L^2(Q_2)}$ (para el espacio $S_{L^2(Q_2)}$ véase Definición 2.85). Se tiene

$$\int_\Omega \nabla_z u_\varepsilon(x,z)\cdot\varphi(x,z)g(\frac{x}{\varepsilon},z)dx\,dz = -\int_\Omega u_\varepsilon(x,z)div_z(\varphi(x,z)g(\frac{x}{\varepsilon},z))dx\,dz.$$

Pasando al límite cuando ε tiende a cero y teniendo en cuenta que, por el teorema de Rellich-Kondrachov, $\{u_\varepsilon\}$ converge fuertemente a u en $L^2(\Omega)$, se llega a

$$\int_\Omega M_y\{\xi(x,y,z)g(y,z)\}\cdot\varphi(x,z)dx\,dz = -\int_\Omega u(x,z)div_z M_y\{(\varphi(x,z)g(y,z))\}dx\,dz =$$

$$= \int_\Omega \nabla_z u(x,z)\cdot M_y\{\varphi(x,z)g(y,z)\}dx\,dz = \int_\Omega \nabla_z u(x,z)\cdot\varphi(x,z)M_y\{g(y,z)\}dx\,dz$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m$, para toda $g \in S_{L^2(Q_2)}$, lo que implica (4.20).

Para probar ahora que u, u_1 verifican (4.16) basta considerar $\varphi(x,z)+\varepsilon\psi(x,z)g(\frac{x}{\varepsilon},z)$ como función test en (4.15) y razonar como en la demostración del Teorema 4.1. ∎

Observación 4.8 Para todo k con $1 \leq k \leq N$ y para todo l con $1 \leq l \leq m$ se define $(X^k, Z^l) \in L^2(\Omega_1; W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))^2$ como la única solución del problema

$$\begin{cases} -div_y\{A_1(e_k + \nabla_y X^k)\} = 0 \text{ en } (W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))' \\ -div_y\{A_1\nabla_y Z^l + A_2 d_l\} = 0 \text{ en } (W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2))' \\ X^k(x,\cdot),\ Z^l(x,\cdot) \in W^2_{L^2(\Omega_2)}/L^2(\Omega_2), \end{cases}$$

siendo e_k el k-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^N$ y d_l el l-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

La función u_1 se calcula mediante la relación

$$u_1(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x,z) X^k(x,y,z) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial z_l}(x,z) Z^l(x,y,z).$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (4.16) la ecuación límite que se obtiene es

$$-div\bar{A}(x,z)\nabla u = f$$

siendo $\bar{A}$ una matriz de coeficientes

$$\bar{A}_{j,k} = M_y\{A_{j,k} + \sum_{i=1}^{N} A_{j,i}\frac{\partial X^k}{\partial y_i}\} \text{ para } 1 \leq j \leq N+m,\ 1 \leq k \leq N$$

$$\bar{A}_{j,N+l} = M_y\{A_{j,N+l} + \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\frac{\partial Z^l}{\partial y_j}\} \text{ para } 1 \leq j \leq N+m,\ 1 \leq l \leq m,$$

o en forma matricial

$$\bar{A} = M_y\{A + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} (\nabla_y X \ \nabla_y Z)\}.$$

Nótese que la submatriz A_4 no interviene en el término corrector de la matriz $\bar{A}$.

4.2 Homogeneización en elasticidad lineal.

En esta sección vamos a aplicar el método de convergencia en dos escalas a la homogeneización de un material elástico, anisotrópico. En el caso de materiales periódicos, el resultado se encuentra por ejemplo en [SP], [SH SP], donde se usa el método de desarrollos asintóticos. En el caso casi periódico el problema ha sido resuelto en [O S Y].

En nuestro caso supondremos que las constantes elásticas del material son funciones de un espacio de Besicovitch generado por un álgebra ergódica X.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, conexo, acotado, con frontera regular que suponemos dividida en dos partes, $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$, regulares, tales que la medida $N-1$ dimensional de cada una de ellas es estrictamente positiva.

Como es natural, denotaremos $e_{ij}(u)$ al tensor de deformaciones linealizado, i.e.

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}),$$

y el tensor de esfuerzos vendrá dado por

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}(x, \frac{x}{\varepsilon})e_{kh}(u),$$

donde las funciones $a_{ijkh}(x,y)$ pertenecen a A^∞ y satisfacen las siguientes hipótesis de simetría y coercividad

$$a_{ijkh}(x,y) = a_{jikh}(x,y) = a_{ijhk}(x,y) = a_{khij}(x,y) \quad \text{p.c.t.}(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N,$$

existe $\alpha > 0$ tal que

$$a_{ijkh}(x,y)\xi_{ij}\xi_{kh} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{N\times N} \text{simétrica, p.c.t.}(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \qquad (4.21)$$

Supondremos que sobre Ω actúan fuerzas volumínicas de componentes f_i y sobre $\partial_2\Omega$ fuerzas superficiales de componentes F_i. En $\partial_1\Omega$ el cuerpo se encuentra encastrado.

El problema se escribe por tanto

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre} \quad \partial_1\Omega \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = F_i & \text{sobre} \quad \partial_2\Omega, \end{cases} \qquad (4.22)$$

con $\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^\varepsilon(x)e_{kh}(u^\varepsilon)$ y $a_{ijkh}^\varepsilon(x) = a_{ijkh}(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Denotando por V el espacio

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^N : \quad v = 0 \text{ sobre } \partial_1\Omega \text{ (en el sentido de las trazas)}\},$$

se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.9 *Para $f_i \in V'$, $F_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, la solución u_ε del problema (4.22) verifica*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \ H^1(\Omega) \text{ -débil}$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2e} \nabla u + \nabla_y u_1$$

donde u y u_1 son las únicas soluciones del sistema

$$\begin{cases} -\partial_j(M_y\{a_{ijkh}(x,y)(e_{kh}(u) + e_{kh,y}(u_1))\}) = f_i & \text{en} \quad V' \\ -\partial_{jy}(a_{ijkh}(x,y)(e_{kh}(u) + e_{kh,y}(u_1))) = 0 & \text{en} \quad (L^2(\Omega;(W^2/\mathbb{R})^N))' \\ M_y\{a_{ijkh}(x,y)(e_{kh}(u) + e_{kh,y}(u_1))\}n_j = F_i & \text{sobre} \quad \partial_2\Omega \\ u \in V \\ u_1 \in L^2(\Omega;(W^2/\mathbb{R})^N) \end{cases} \tag{4.23}$$

siendo

$$e_{ij,y}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}).$$

Demostración:

Tomando u_ε como función test en (4.22) y usando la coercividad del tensor de elasticidad así como la desigualdad de Korn, se deduce que u_ε está acotada en $H^1(\Omega)^N$. Por el Teorema 3.18 existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{\varepsilon\}$, y existen $u \in H^1(\Omega)^N$, $u_1 \in L^2(\Omega; W^2/\mathbb{R})^N$ tales que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } H^1(\Omega)^N \text{-débil},$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2e} \nabla u + \nabla_y u_1. \tag{4.24}$$

Como el subespacio V es cerrado en $H^1(\Omega)^N$ se tiene que u pertenece a V.

Consideremos $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$, $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi, g = 0$ en $\partial_1\Omega$, y $\psi \in (B^2)^N$ tal que $\nabla\psi_i \in (B^2)^N$ para todo i, y tomemos $\varphi(x) + \varepsilon g(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})$ como función test en (4.22). Se tiene entonces

$$\int_\Omega a_{ijkh}(x, \frac{x}{\varepsilon})e_{kh}(u_\varepsilon)e_{ij}(\varphi + \varepsilon g\psi(\frac{x}{\varepsilon}))dx =< f_i, \varphi_i + \varepsilon g\psi_i(\frac{x}{\varepsilon}) > + \tag{4.25}$$

$$+ < F_i, \varphi_i + \varepsilon g\psi_i(\frac{x}{\varepsilon}) > .$$

Ahora bien,

$$e_{ij}(\varphi(x) + \varepsilon g(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})) = e_{ij}(\varphi)(x) + \frac{\varepsilon}{2}(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\psi_i(\frac{x}{\varepsilon}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\psi_j(\frac{x}{\varepsilon})) + g(x)e_{ij,y}(\psi)(\frac{x}{\varepsilon}).$$

De (4.24) se tiene que

$$e_{kh}(u_\varepsilon) \xrightarrow{2e} e_{kh}(u) + e_{kh,y}(u_1),$$

con lo que pasando al límite en (4.25) se obtiene

$$\int_\Omega M_y\{a_{ijkh}(x,y)[e_{kh}(u(x)) + e_{kh,y}(u_1(x,y))][e_{ij}(\varphi(x)) + g(x)e_{ij,y}(\psi(y))]\}dx = \int_\Omega f_i\varphi_i +$$

$$+\int_{\partial_2\Omega} F_i\varphi_i d\sigma(x).$$

Por densidad, esta igualdad es cierta para toda $\varphi \in V$, para toda $g \in L^2(\Omega)$ y para toda $\psi \in (W^2)^N$. Por tanto (u, u_1) satisfacen

$$\int_\Omega M_y\{a_{ijkh}(x,y)[e_{kh}(u(x)) + e_{kh,y}(u_1(x,y))][e_{ij}(v(x)) + e_{ij,y}(v_1(x,y))]\}dx =$$

$$= \int_\Omega f_i v_i + \int_{\partial_2\Omega} F_i v_i d\sigma(x) \quad \forall (v, v_1) \in V \times L^2(\Omega; (W^2/\mathbb{R})^N),$$

que es la formulación variacional del problema (4.23).

Vamos a ver ahora que este problema tiene solución única, con lo cual, toda la sucesión u_ε, solución de (4.22), converge.

La forma bilineal

$$a((u,u_1),(v,v_1)) = \int_\Omega M_y\{a_{ijkh}(x,y)[e_{kh}(u(x)) + e_{kh,y}(u_1(x,y))][e_{ij}(v(x)) +$$

$$+ e_{ij,y}(v_1(x,y))]\}dx$$

es continua en $(V \times L^2(\Omega; (W^2/\mathbb{R})^N))^2$ y simétrica. De (4.21) y de que $M_y\{\nabla_y v_1\} = 0$ se tiene además

$$a((v,v_1),(v,v_1)) \geq \alpha \left[\int_\Omega e_{ij}(v)e_{ij}(v)dx + \int_\Omega M_y\{e_{ijy}(v_1)e_{ijy}(v_1)\}dx\right].$$

De la desigualdad de Korn se sabe que $(\int_\Omega e_{ij}(v)e_{ij}(v)dx)^{\frac{1}{2}}$ es una norma equivalente a la de V.

Vamos a ver que $(\int_\Omega M_y\{e_{ijy}(v_1)e_{ijy}(v_1)\}dx)^{\frac{1}{2}}$ es una norma equivalente en $L^2(\Omega; (W^2/\mathbb{R})^N)$. Para ello vamos a probar que se verifica una fórmula, análoga a la desigualdad de Korn, en $(W^2/\mathbb{R})^N$.

Sabemos que existe $C > 0$ tal que para toda $v \in H^1(B_1)^N$ se tiene

$$\int_{B_1} |\nabla v(y)|^2 dy \leq C\left(\int_{B_1} e_{ij}(v)e_{ij}(v)dy + \int_{B_1} |v(y)|^2 dy\right), \tag{4.26}$$

y por tanto, usando un cambio de variables, para toda función $v \in H^1(B_R)^N$, $R > 0$, se tiene

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla v(y)|^2 dy \leq C\left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} e_{ij,y}(v)e_{ij,y}(v)dy + \frac{1}{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|v(y)|^2 dy\right]. \quad (4.27)$$

Si ahora v pertenece a $(W^2/\mathbb{R})^N$, aplicando (4.27) con $v - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v(\rho)d\rho$ se obtiene

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla v(y)|^2 dy \leq C\left[\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} e_{ij,y}(v)e_{ij,y}(v)dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|v(y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v(\rho)d\rho|^2 dy\right].$$

Pasando al límite cuando R tiende a infinito, y teniendo en cuenta que por estar v en $(W^2/\mathbb{R})^N$ se verifica que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|v(y) - \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v(\rho)d\rho|^2 dy = 0,$$

se llega a

$$M\{|\nabla v|^2\} \leq CM\{e_{ij}(v)e_{ij}(v)\} \quad \forall v \in (W^2/\mathbb{R})^N, \quad (4.28)$$

que es la desigualdad buscada.

Por tanto, la forma bilineal de la formulación variacional del sistema homogeneizado en dos escalas es coerciva y el problema tiene solución única. ∎

Observación 4.10 Como en (4.3) se puede ahora obtener la ecuación homogeneizada a partir del sistema (4.23).

Para ello, se considera la ecuación auxiliar:

Hallar $w^{kh} \in L^2(\Omega; (W^2/\mathbb{R})^N)$ tal que

$$M\{a_{ijlm}(x,y)e_{lm,y}(w^{kh})e_{ij}(v)\} = -M\{a_{ijkh}(x,y)e_{ij}(v)\} \quad \forall v \in (W^2/\mathbb{R})^N$$

que por (4.28) tiene solución única. La ecuación homogeneizada se obtiene ahora sustituyendo $u_1(x,y) = e_{kh}(u(x))w^{kh}(y)$ en la primera ecuación del sistema homogeneizado en dos escalas:

$$-\partial_j M_y\{a_{ijlm}(x,y)(e_{lm}(u) + e_{kh}(u)e_{lm,y}(w^{kh}))\} = f_i.$$

i.e.

$$-\partial_j M_y\{a_{ijlm}(x,y)(\delta_{kl}\delta_{hm}+e_{lm,y}(w^{kh}))\}e_{kh}(u)=f_i.$$

El tensor de esfuerzos homogeneizado es entonces

$$\sigma^0_{ij}=M_y\{a_{ijlm}(x,y)(\delta_{kl}\delta_{hm}+e_{lm,y}(w^{kh}))\}e_{kh}(u).$$

Se tiene también un resultado de corrector análogo al de la Proposición 4.6.

4.3 Homogeneización de sistemas elípticos no lineales.

En esta sección nos proponemos encontrar el problema límite de sistemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(\frac{x}{\varepsilon},u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon))=f \ \text{ en } \ W^{-1,p'}(\Omega)^m \\ u_\varepsilon\in W_0^{1,p}(\Omega)^m, \end{cases} \tag{4.29}$$

donde Ω es un abierto acotado, de frontera regular, de $\mathbb{R}^N$, f es un elemento de $W^{-1,p'}(\Omega)^m$ y $a:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mN}\mapsto\mathbb{R}^{mN}$ es una función de Caratheodory que define un operador de Leray-Lions (véase [L], [L L]) sobre $W_0^{1,p}(\Omega)^m$.
En concreto a satisface

1. para todo $s\in\mathbb{R}^m$ y para todo $\xi\in\mathbb{R}^{Nm}$, $a(\cdot,s,\xi)$ pertenece a $(B^{p'})^{mN}$, para casi todo $x\in\mathbb{R}^N$ $a(x,\cdot,\cdot)$ es continua.

2. Existe $\gamma>0$ tal que

$$a(x,s,\xi)\xi\geq\gamma|\xi|^p \quad \forall(s,\xi)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mN} \text{ p.c.t.} x\in\mathbb{R}^N. \tag{4.30}$$

3. Existen $\beta>0$ y $k\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$|a(x,s,\xi)|\leq\beta(k(x)+|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}) \quad \forall(s,\xi)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mN},\ \text{p.c.t.} x\in\Omega. \tag{4.31}$$

4.

$$(a(x,s,\xi_1)-a(x,s,\xi_2))(\xi_1-\xi_2)\geq 0 \quad \forall s\in\mathbb{R}^m,\ \forall\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^{mN},\ \text{p.c.t.}\ x\in\Omega. \tag{4.32}$$

5. Existen $\delta > 0$, $\sigma \in (0,1]$ y $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$|a(x,s,\xi) - a(x,t,\xi)| \leq \delta(h(x) + |\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + |t|^{p-1})|s-t|^{\sigma}. \tag{4.33}$$

Teorema 4.11 *Con las hipótesis anteriores, existe una subsucesión que seguiremos denotando por $\{\varepsilon\}$, y existen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^m$, $u_1 \in L^p(\Omega;(W^p/\mathbb{R})^m)$ tales que*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{en } W_0^{1,p}(\Omega)\text{-débil}$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u + \nabla_y u_1$$

y $(u,u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega)^m \times L^p(\Omega;(W^p/\mathbb{R})^m)$ es una solución del problema homogeneizado en dos escalas:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x M_y\{a(y,u,\nabla u + \nabla_y u_1)\} = f & \text{en} \quad W^{-1,p'}(\Omega)^m \\ M_y\{a(y,u,\nabla u + \nabla_y u_1)\} = 0 & \text{en} \quad (L^p(\Omega;(W^p/\mathbb{R})^m))'. \end{cases} \tag{4.34}$$

Demostración:

Sea $g_\varepsilon = a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$. De la hipótesis (4.30) se deduce fácilmente que la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)^m$, y de (4.31) que la sucesión $\{g_\varepsilon\}$ está acotada en $L^{p'}(\Omega)^{Nm}$. Por los Teoremas 3.13 y 3.18 se tiene que existe una subsucesión y existen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^m$, $u_1 \in L^p(\Omega; W^p/\mathbb{R})^m$, $g_0 \in L^{p'}(\Omega; B^{p'})^{Nm}$ tales que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{en } W_0^{1,p}(\Omega)^m\text{-débil} \tag{4.35}$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u + \nabla_y u_1 \tag{4.36}$$

$$g_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} g_0. \tag{4.37}$$

Sean $\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \in S^p$.

Tomando $\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)v(\frac{x}{\varepsilon})$ como función test en (4.29) se obtiene

$$\int_\Omega g_\varepsilon(x)(\nabla\varphi(x) + \varepsilon v(\frac{x}{\varepsilon}) \otimes \nabla\psi(x) + \psi(x)\nabla_y v(\frac{x}{\varepsilon}))dx = < f, \varphi(x) + \varepsilon\psi(x)v(\frac{x}{\varepsilon}) > .$$

Tomando límite cuando ε tiende a cero se llega a

$$\int_\Omega M_y\{g_0(x,y)(\nabla\varphi(x) + \psi(x)\nabla_y v(y))\}dx = < f, \varphi >,$$

para todas $\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \in (S^p)^m$.

Por densidad se deduce que g_0 satisface

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x M_y\{g_0(x,y)\} = f & \text{en} \quad W^{-1,p'}(\Omega)^m \\ -\mathrm{div}_y\{g_0(x,y)\} = 0 & \text{en} \quad (L^p(\Omega; W^p/\mathbb{R})^m)'. \end{cases} \tag{4.38}$$

Vamos ahora a caracterizar g_0 usando el truco de Minty.

Para $\Psi, \Phi \in C_0^\infty(\Omega; D^\infty)^{Nm}$, $t \in (0,1)$ definimos μ_ε por

$$\mu_\varepsilon = \nabla u(x) + \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) + t\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon}).$$

Por la Proposición 3.8 μ_ε converge en dos escalas a μ_0 definida por

$$\mu_0(x,y) = \nabla u(x) + \Psi(x,y) + t\Phi(x,y) \quad \text{p.c.t. } x, y \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, de la hipótesis (4.32) se tiene

$$\int_\Omega (g_\varepsilon - a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \mu_\varepsilon), \nabla u_\varepsilon - \mu_\varepsilon) dx \geq 0, \tag{4.39}$$

desigualdad en la que vamos a pasar al límite cuando ε tiende a cero.

Sabemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \to 0} < f, u_\varepsilon > = < f, u > = \int_\Omega M_y\{g_0(x,y) \nabla u(x)\} dx. \tag{4.40}$$

Gracias a (4.37) se tiene también

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega g_\varepsilon \mu_\varepsilon = \int_\Omega M_y\{g_0(x,y)\mu_0(x,y)\} dx. \tag{4.41}$$

Por otra parte, de (4.33) se tiene

$$|a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) - a(\frac{x}{\varepsilon}, u, \mu_\varepsilon)| \leq \delta(h(\frac{x}{\varepsilon}) + |\mu_\varepsilon|^{p-1} + |u_\varepsilon|^{p-1} + |u|^{p-1})|u_\varepsilon(x) - u(x)|^\sigma \leq$$

$$\leq \delta \left(h(\frac{x}{\varepsilon}) + \left[|\nabla u(x)| + \|\Psi\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)} + \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)} \right]^{p-1} + |u_\varepsilon|^{p-1} + |u|^{p-1} \right) |u_\varepsilon - u|^\sigma,$$

donde, gracias al teorema de Rellich-Kondrachov y al teorema de convergencia dominada, el segundo miembro converge fuerte en $L^{p'}(\Omega)$ (nótese que como h pertenece a $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $h(\frac{x}{\varepsilon})$ converge fuerte a cero en $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$).

Por tanto, se deduce que $a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x), \mu_\varepsilon(x)) - a(\frac{x}{\varepsilon}, u(x), \mu_\varepsilon(x))$ converge fuertemente a cero en $L^{p'}(\Omega)$.

Entonces se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \mu_\varepsilon)(\mu_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a(\frac{x}{\varepsilon}, u, \mu_\varepsilon)(\mu_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon)dx =$$

$$= \int_\Omega M_y\{a(y, u, \mu_0)(\mu_0 - (\nabla u + \nabla_y u_1))\}dx. \tag{4.42}$$

Pasando por tanto al límite cuando ε tiende a cero en (4.39) y teniendo en cuenta (4.40), (4.41) y (4.42) se obtiene entonces

$$\int_\Omega M_y\{[g_0(x,y) - a(y, u, \mu_0)][\Psi(x,y) + t\Phi(x,y) - \nabla_y u_1(x,y)]\}dx \geq 0. \tag{4.43}$$

Elegimos ahora las funciones Ψ tales que converjan a $\nabla_y u_1$ en $L^p(\Omega; B^p)^{Nm}$, y pasando al límite en (4.43) se deduce

$$-t \int_\Omega M_y\{[g_0(x,y) - a(y, u, \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + t\Phi(x,y))\Phi(x,y)\}dx \geq 0,$$

para toda $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; D^\infty)^{mN}$.

Dividiendo por t y tomando límite cuando t tiende a cero se obtiene

$$\int_\Omega M_y\{(a(y, u, \nabla u + \nabla_y u_1) - g_0(x,y))\Phi\}dx \geq 0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; D^\infty)^{mN},$$

lo que implica que $g_0(x,y) = a(y, u, \nabla u + \nabla_y u_1)$, que sustituido en (4.38) demuestra que u y u_1 satisfacen (4.34). ■

Observación 4.12 Para conseguir la ecuación homogeneizada basta considerar el problema auxiliar para cada $s \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^{mN}$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(y, s, \xi + \nabla v_{s,\xi})) = 0 \;\text{ en }\; ((W^p/\mathbb{R})^m)' \\ v_{s,\xi} \in (W^p/\mathbb{R})^m. \end{cases}$$

Definiendo el operador $b(s,\xi) = M_y\{a(y, s, \xi + \nabla v_{s,\xi})\}$ el problema homogeneizado es

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x b(u, \nabla u) = f \;\text{ en } W^{-1,p'}(\Omega)^m \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)^m. \end{cases}$$

Bibliografía

[A1] G. ALLAIRE, *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), 6, 1482-1518.

[A2] G. ALLAIRE, *Homogénéisation et convergence á deux échelles. Application á un problème de convection diffusion.* C. R. Acad. Sci. Paris, 312 (1991), Série I, 581-586.

[A B] G. ALLAIRE - G. BAL, *Homogénéisation d'une équation spectrale du transport neutronique.* C. R. Acad. Sci. Paris, 325 (1997), Série I, 1043-1048.

[A BR] G. ALLAIRE - M. BRIANE, *Multi-scale convergence and reiterated homogenization.* Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique. Université Pierre et Marie Curie. Paris 1994.

[A C] G. ALLAIRE - C. CONCA, *Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch.* C. R. Acad. Sci. Paris, 321 (1995), Série I, 293-298

[A M] G. ALLAIRE - F. MURAT, *Homogenization of the Neumann problem with nonisolated holes.* Asymptotic Analysis, 7 (1993), 81-95.

[AR D H] T. ARBOGAST- J. DOUGLAS - U. HORNUNG, *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory.* SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 4, 823-836.

[B] H. BOHR, *Almost periodic functions.* Chelsea Publishing Company, New York 1951.

[BA] J. M. BALL, *A version of the fundamental theorem for Young measures.* Preprint 1988.

[BE] A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions.* Dover Publications. Inc., Cambridge 1954.

[B L P] A. BENSOUSSAN - J. L. LIONS - G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures.* North-Holland, Amsterdam 1978.

[B M W] A. BOURGEAT - A. MIKELIĆ - S. WRIGHT, *Stochastic two-scale convergence in the mean and applications.* J. reine angew. Math., 456 (1994), 19-51.

[BRE] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris 1983.

[B CHP D] A. BRAIDES - V. CHIADÒ PIAT - A. DEFRANCESCHI, *Homogenization of almost periodic monotone operators.* Ann. I. H. P. Anal. Non Lin., 9 (1992), 394-432.

[C] J. CASADO DÍAZ, *Two-scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains.* Por aparecer.

[C G1] J. CASADO DÍAZ - I. GAYTE, *A general compactness result and its application to the two-scale convergence of almost periodic functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, 323 (1996), Série I, 329-334.

[C G2] J. CASADO DÍAZ - I. GAYTE, *An extension of the Banach-Alaoglu-Bourbaki sequential compactness theorem to not continuous linear functionals.* Por aparecer.

[CI] I. CIORANESCU, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990.

[CI SJP] D.CIORANESCU - J. SAINT JEAN PAULIN, *Homogenization in open sets with holes.* J. Math. Appl., 71 (1979), 590-607.

[CL] J. A. CLARKSON, *Uniformly convex spaces.* Transactions of this Society, 40 (1936), 396-414.

[CL P] G. W. CLARK - L. A. PACKER, *Two-scale homogenization of implicit degenerate evolution equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 214 (1997), 420-438.

[COR] C. CORDUNEANU, *Almost periodic functions.* Interscience Publishers, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 22, New York 1961.

[D S] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part I: General theory.* Wiley-Interscience Publication, New York 1988.

[D U] J. DIESTEL - J. J. UHL, JR., *Vector Measures.* American Mathematical Society, Providence 1977.

[DO] P. DONATO, *Alcune osservazioni sulla convergenza debole di funzioni non uniformemente oscillanti.* Ricerche di Matematica, 32 (1983), 203-219.

[DU] J. DUGUNDJI, *Topology.* Wm. C. Brown Publishers, Dubuque 1989.

[E] W. E, *Homogenization of linear and nonlinear transport equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 45 (1992), 301-326.

[J K O] V. V. JIKOV - S. M. KOZLOV - O. A. OLEINIK, *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Springer-Verlag, Berlin 1994.

[KUF] A. KUFNER - O. JOHN - S. FUČÍK, *Functions spaces.* Noordhoff International Publishing, Leyden 1977.

[L] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris 1969.

[L L] J. LERAY - J. L. LIONS, *Quelques résultats de višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder.* Bull. Soc. math. France, 93 (1965), 97-107.

[LA] KA-SING LAU, *On the Banach spaces of functions with bounded upper means.* Pacific Journal of Mathematics, 91 (1980), 1, 153-172.

[LA LE] KA-SING LAU - J. K. LEE, *On generalized harmonic analysis.* Transactions of the American Mathematical Society, 259 (1980), 1, 75-97.

[LE Z] B. M. LEVITAN - V. V. ZHIKOV, *Almost periodic functions and differential equations.* Cambridge University Press, London 1982.

[LEN1] M. LENCZNER, *Homogénéisation d'un circuit électrique.* C. R. Acad. Sci. Paris, 324 (1997), Série II b, 537-542.

[LEN2] M. LENCZNER, *The two-scale convergence applied to the wave equation.* Prépublications de l'équipe de Mathématiques de Besançon, 96/48. Université de Franche Comté.

[LIN] J. LINDENSTRAUSS, *On non separable reflexive Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 967-970.

[MAR] J. MARCINKIEWICZ, *Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch.* C. R. Acad. Sci. Paris, 208 (1939), 157-159.

[MU] F. MURAT, *H-convergence.* Sèminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, mimeographed notes 1978.

[NG1] G. NGUETSENG, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 6, 608-623.

[NG2] G. NGUETSENG, *Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics.* SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 6, 1394-1414.

[O S Y] O. A. OLEINIK - A. S. SHAMAEV - G. A. YOSIFIAN, *Mathematical problems in elasticity and homogenization.* North-Holland, Amsterdam 1992.

[O Z] O. A. OLEINIK - V. V. ZHIKOV, *On the homogenization of elliptic operators with almost-periodic coefficients.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 52 (1982), 149-166.

[PA] A. A. PANKOV, *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1985.

[SH SP] J. SÁNCHEZ HUBERT - E. SÁNCHEZ PALENCIA, *Introduction aux méthodes asymptotiques et á l'homogénéisation.* Masson, Paris 1992.

[SP] E. SÁNCHEZ PALENCIA, *Non-Homogeneous media and vibration theory.* Springer-Verlag, Lectures Notes in Physics 127, Berlin 1980.

[T1] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations.* Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt symposium IV, Research Notes in Mathematics.

[T2] L. TARTAR, *Cours Peccot au Collège de France.* Unpublished, parcialmente escrito en [MU], 1977.

[YO] K. YOSIDA, *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin 1971.

[ZA] S. ZAIDMAN, *Almost-periodic functions in abstract spaces.* Pitman Advanced Publishing Program, Research Notes in Mathematics, 126, Boston 1985.

INMACULADA GAYTE DELGADO

ESPACIOS DE BESICOVITCH GENERALIZADOS Y CONVERGENCIA EN DOS ESCALAS

SOBRESALIENTE "CUM LAUDE" POR UNANIMIDAD

18 SEPTIEMBRE 98