



Facultad de Matemáticas

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

CARACTERIZACIONES DE LAS
TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Realizado por Emilio Montalbán Jurado

Dirigido por Pablo Sebastián Alegre Rueda

12 de julio de 2023

Resumen

En este trabajo buscamos maneras alternativas de caracterizar las transformaciones de Möbius que llevan el disco de Poincaré en sí mismo. Para ello, hacemos un repaso histórico de la geometría hiperbólica. Seguimos de las construcciones del modelo del disco conforme y las transformaciones de Möbius, donde veremos en detalle las transformaciones de Möbius que llevan el disco de Poincaré en sí mismo. Por último, analizaremos y comentaremos diversos artículos sobre caracterizaciones de las transformaciones de Möbius.

Abstrac

In this thesis we look for alternative ways to characterise the Möbius transformations that take the Poincaré disk to itself. To do so, we make a historical review of hyperbolic geometry. This is followed by the constructions of the conformal disk model and Möbius transformations, where we will look in detail at the Möbius transformations that take the Poincaré disk into itself. Finally, we will analyse and comment on several papers on characterisations of Möbius transformations.

Índice general

1. Historia de la Geometría Hiperbólica	11
2. Preliminares	19
2.1. Curvas y superficies en \mathbb{R}^3	19
2.2. Geometría intrínseca	22
2.3. Aplicaciones entre superficies	24
3. Modelo hiperbólico	27
3.1. Modelo del hiperboloide \mathbb{H}^2	27
3.2. Modelo del disco de Poincaré \mathbb{D}	33
4. Transformaciones de Möbius	39
4.1. La esfera de Riemann	39
4.2. Transformaciones de Möbius	42
4.3. Punto fijo y la razón doble	45
4.4. Transformaciones de Möbius como matrices	48
4.5. Las transformaciones de Möbius en el disco	50
5. Más resultados sobre las transformaciones de Möbius	55
5.1. Transformaciones de Möbius armónicas	55
5.2. Otras transformaciones	61

Introducción

Las transformaciones de Möbius son un conjunto de transformaciones del *plano complejo extendido* en sí mismo, $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Estas transformaciones podemos construirlas geoméricamente a través de una proyección estereográfica y tienen una gran relación con la geometría hiperbólica. Podríamos decir que surgen en 1827 con la publicación del trabajo de August Ferdinand Möbius, *Der barycentrische Calcul*, en el que introduce las coordenadas homogéneas y transformaciones geométricas, en especial, las que reciben su nombre.

La geometría hiperbólica se desarrolla bajo la discusión del Quinto Postulado de Euclides, en el que se afirma que, por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela. Este debate dura más de 2000 años e incluye a algunos de los matemáticos más influyentes de cada época. Cuando hablamos de geometría hiperbólica en el plano tenemos diversos modelos, entre ellos el del Hiperboloide, o el del disco de Poincaré o modelo del disco conforme.

Aunque este tipo de geometría se formalizó en el siglo XIX, hoy en día se sigue investigando sobre ésta y muchas preguntas siguen abiertas.

En este trabajo de fin de grado pretendemos realizar un repaso sobre el modelo del disco de Poincaré y estudiar algunos artículos recientes sobre caracterizaciones de las transformaciones de Möbius en el disco de Poincaré.

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el primer capítulo haremos un repaso histórico de la geometría hiperbólica, en el que partiremos de los primeros rastros de la geometría, hasta la formalización de la geometría hiperbólica. Para ello, pasaremos por el comienzo de la formalización de la geometría con Thales, seguido por Euclides, quien escribe multitud de matemáticas. Entre sus escritos destacaremos los de geometría, en especial, sus cinco postulados, es con este último con el que comienza la discusión. Mencionaremos varios matemáticos que intentaron probar el Quinto Postulado a partir de los otros cuatro. Aunque no es hasta el siglo XIX que se comienza a buscar consecuencias de que sea falso. En este periodo veremos la interesante historia entre los Bolyai y Gauss, hasta llegar a Lobachevski y Beltrami. En 1868 este último probó que la geometría de Lobachevski era consistente, y dio luz a la geometría hiperbólica.

En el segundo capítulo haremos un repaso de resultados fundamentales de las asignaturas *Geometría local de curvas y superficies* y *Geometría Aplicada*, que serán necesarios para los capítulos posteriores.

A continuación, construiremos en el tercer capítulo el modelo hiperbólico del disco

de Poincaré. Para ello nos apoyaremos en el modelo del hiperboloide, en el que definiremos la métrica de Minkowski sobre el hiperboloide, esta métrica es la inducida por el producto de Minkowski. De nuevo, trabajando sobre el hiperboloide calcularemos todas las geodésicas y seguido de esto definiremos el modelo del disco conforme. El disco de Poincaré \mathbb{D} consiste en un disco abierto centrado en \mathbb{R}^2 con radio 1 y con una métrica especial. Para estudiar las propiedades del disco, proyectaremos los resultados que obtuvimos en el hiperboloide, mediante la *Proyección Estereográfica Hiperbólica*, que resulta ser una isometría. Este modelo no solo ha inspirado a matemáticos en el estudio, sino también a artistas, como al holandés M. C. Escher.



Figura 1: Circle Limit III, M. C. Escher, 1959.

En el cuarto capítulo, definiremos geoméricamente las transformaciones de Möbius, la idea es realizar una proyección estereográfica de la esfera donde el Polo Norte está identificado con el infinito, luego moveremos la esfera y proyectaremos de nuevo al plano, obteniendo así la transformación de Möbius. Seguidamente, estudiaremos algunas propiedades de estas, en especial nos centraremos en las transformaciones de Möbius que llevan el disco de Poincaré en sí mismo.

Una vez asimilados todos los conceptos necesarios, comenzamos el último capítulo, en el que analizaremos en profundidad el artículo *Ellipses and harmonic Möbius transformations (2010)* [11], por N. Yilmaz Özgür, en el que caracteriza las transformaciones de Möbius armónicas, según lleven elipses en elipses. Por último, comentamos otros artículos sobre caracterizaciones de Möbius como [18] y [19].

Capítulo 1

Historia de la Geometría Hiperbólica

Para entender cómo se desarrolla la geometría hiperbólica nos tenemos que remontar a los primeros rastros de la historia de la geometría, pues la geometría hiperbólica es una rama que se ha estado estudiando desde que se escribieron los primeros textos formales sobre geometría elemental, aunque no es hasta el siglo XIX que se comienza a entender que es lo que pasa con esta geometría tan particular.

Los primeros rastros de la historia de la geometría se encuentran hace 5000 años con las matemáticas Harappas, procedentes de la Civilización del valle del Indo, donde producían pesos con formas geométricas regulares, como hexaedros, conos y cilindros; también encontramos rastros en Babilonia. Pero no es hasta el c. 624 a. C. con Thales que comienza el estudio formal de la geometría.

Tales de Mileto conocido como uno de los siete sabios de Grecia [1] fue un matemático originario de Mileto.

Los datos que se conocen de su vida son una mezcla de opiniones y citas recogidas por ciertos autores de la época. Se le atribuyen varios teoremas como por ejemplo "La suma de los ángulos de un triángulo isósceles son iguales"[2] o que un triángulo es determinado por un lado y ambos ángulos adyacentes, estos dos ejemplos no son casualidad pues son citado por Proclo como:

"Sea el viejo Thales bendecido, el descubrimiento de otros y especialmente estos teoremas. Se dice que él fue el primero en reconocer y decir que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, pero el usó similares en vez de iguales" [3].

Tras Thales, llega Euclides de Alejandría, como Thales y la mayoría de las celebridades de la época, los datos históricos son escasos y la mayoría son citas y opiniones. Se estima que vivió entre el 323 a.C. y 282 a.C. en Alejandría. A este se le atribuye el título de *Padre de la Geometría*. Aunque se baraja la hipótesis de que no existió como le conocemos, sino que sus obras fueron escritas por un grupo de matemáticos de Alejandría que tomó el nombre de un personaje histórico, Euclides de Megara [4].

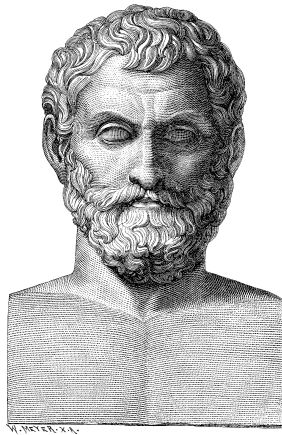


Figura 1.1: Tales de Mileto

Difícilmente se sabe algo de su vida, pero sus trabajos fueron tan importantes para el desarrollo de las matemáticas, especialmente para la geometría, que su nombre es frecuentemente usado en correlación a espacio euclídeo, geometría euclídea, métrica euclídea, etc. La obra principal de Euclides es *Los Elementos*, es el más antiguo de los grandes textos que se han transmitido desde la Antigua Grecia. *Los Elementos* está compuesto por 13 "libros", cada uno de estos se corresponde a un rollo de papiro. Estos tomos incluyen 132 definiciones, 5 axiomas, 5 postulados y cerca de 500 proposiciones en los que trata temas de álgebra, geometría elemental del plano y del espacio y teoría de números.



Figura 1.2: Euclides de Alejandría

En los tomos dedicados a la geometría, esta se presenta de manera formal a partir de 5 postulados, lo que hoy en día se conocen como axiomas. Estos están formulados como

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente a una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualesquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos

De estos cinco postulados el quinto es el más complicado y poco intuitivo. Dado los primeros cuatro, el quinto parece ser parecido al siguiente, el cual recibe el nombre de *postulado de las paralelas*:

- 5 Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Durante más de dos mil años diversos matemáticos intentaron deducir el quinto postulado a partir de los otros cuatro. En cada caso se redujo la prueba del quinto postulado a la conjunción de los otros cuatro con un postulado adicional, que era equivalente al quinto.

Entre estos intentos de demostraciones destaca Proclo, fue el primer matemático en intentar probar el dichoso postulado, asumió como postulado adicional que los puntos con una distancia constante de una línea dada formaban una línea recta.

No es hasta el siglo XVII que destaca otro intento, el del inglés John Wallis (1616-1703) que utilizó la hipótesis de que para cada triángulo existe un triángulo semejante de cada tamaño dado. Muy seguido a este destaca el matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) que consideró los cuadriláteros con dos ángulos de base iguales a un ángulo recto y con lados verticales de igual longitud y, cabe destacar que dedujo consecuencias de la posibilidad (no euclidiana) de que los dos ángulos restantes no fueran ángulos rectos.

También destaca Johann Heinrich Lambert (1728-1777) que procedió de forma similar al nacido en Italia y escribió una extensa obra sobre el tema, publicada póstumamente en 1786.

Por último, Gottingen Kastner (1719-1800) dirigió una tesis del estudiante Klugel (1739-1812), que consideraba unos treinta intentos de prueba del postulado de la paralela.

En el siglo XIX hubo un punto de inflexión, se abandonó el intentar encontrar una contradicción en la negación del quinto postulado y se pasó a estudiar las consecuencias de lo que conlleva esa negación. Apareció una teoría coherente en la que en vez del quinto postulado uno asume

- 5' Dada una línea y un punto que no pertenece a ella, hay más de una línea que pasa por ese punto que es paralela a la línea dada.

Este postulado significa tanto para la geometría hiperbólica como lo que el postulado de la paralela significa para la euclídea.

Consecuencias inusuales se descubrieron como propiedades de la geometría no euclídea:

- Curvas equidistantes a cualquier lado de una recta eran no rectas pero curvas.
- Triángulos similares eran congruentes.
- La suma de los ángulos de un triángulo no era igual a π ...

No fue hasta Carl Friedrich Gauss (1777-1835), que encontramos al primer matemático que entendió completamente el problema de las paralelas. Gauss que se dedicó a una gran variedad de campos tanto en matemáticas como en física, fue un matemático que contribuyó al desarrollo no solo de este problema sino al de muchos problemas de otros campos. Ya solo a la edad de siete años impresionó a sus profesores sumando los números del 1 al 100 instantáneamente, dándose cuenta de que eran las 50 parejas que sumaban 101.



Figura 1.3: Carl Friedrich Gauss

Desde el comienzo del siglo XIX Gauss se comenzó a interesar en la cuestión de la posible existencia de geometrías no euclídeas. Él debatió de este tema con otro matemático y amigo suyo, Farkas Bolyai (1775-1856). En la crítica de un libro en 1816 discutió sobre varias pruebas que deducían el quinto axioma a partir de los otros axiomas de Euclides, sugiriendo la existencia de geometrías no euclídeas, aunque era realmente vago en sus citas.

"... el vano esfuerzo por ocultar con un insostenible tejido de pseudo-pruebas el vacío que no se puede llenar."

Gauss confió en Schumacher, confesándole que él creía que su reputación sufriría si él admitiera en público que creía en la existencia de tal geometría. El no publicar nada le llevó a tener problemas más tarde con su amigo Bolyai.

Farkas Bolyai fue un profesor de matemáticas que se interesó bastante por el tema del Axioma de las Paralelas. A lo largo de su vida hizo varias pruebas de este axioma, aunque falsas.

Farkas tuvo un hijo, Janos Bolyai (1802-1860), quien recibió clases de matemáticas de su padre. En [6] describen a Janos como un niño precoz:

"...cuando él tenía cuatro años podía distinguir ciertas figuras geométricas, sabía sobre la función seno y podía identificar las más conocidas"



Figura 1.4: Farkas Bolyai

constelaciones. Por el tiempo que ya tenía cinco años había aprendido, prácticamente por su cuenta a leer. Estaba por encima de la media en aprender idiomas y música."/[6].

Para disgusto de su padre, Janos se interesó por el Axioma de las Paralelas. Tanta era la preocupación del padre que le llegó a escribir

"Por amor de Dios, te ruego que abandones. Témele más que a las pasiones sensuales, porque él también ocupará todo tu tiempo, y te privará de la salud, de la paz mental de la felicidad en la vida".

En otra carta escrita el 4 de abril de 1820 le escribe Farkas a su hijo

"No intentes las paralelas de esa manera: Lo sé de todas las maneras. He medido esa noche sin fondo, y toda la luz y felicidad de mi vida se fue allí abajo."

Aun con la preocupación del padre, el hijo desoyó a las recomendaciones de él y siguió estudiando el asunto, y el 3 de noviembre de 1823 le escribió que había

"...creado un nuevo, otro mundo de la nada..."

pero también añadió unas líneas más diciendo que todavía no estaba creado.

En 1830 Bolyai supo que iba a ser enviado a Lemberg. Antes de partir para su destino visitó a su padre, quien le convenció para que escribiera sobre su trabajo en un *Apéndice* para el *Tentamen* que estaba cerca de su publicación.

En dicho *Apéndice* tras establecer su propia definición de paralela y enseñando que, si el Quinto Postulado se mantenía en una región, entonces se mantenía en la otra, y viceversa, luego diferenció claramente diferentes sistemas que consideraría de la siguiente manera

"...denote por \sum el sistema de geometría basado en la hipótesis de que el Quinto Postulado de Euclides es cierto, y por S el sistema basado

en la hipótesis contraria. Todos los teoremas que hemos establecidos sin especificar ningún sistema Σ o S significa que son absolutos, es decir, que son válidos independientemente de que Σ o S sean ciertos."

En el presente llamamos a esto tres tipos de geometría: euclídea, hiperbólica y absoluta.



Figura 1.5: Janos Bolyai

Por el 20 de junio de 1831 el *Apéndice* ya había sido publicado y Farkas Bolyai envió una copia a Gauss, quien le escribió a otro amigo diciendo:

"Reconozco a este joven geómetra Bolyai como un genio de primera categoría."

Sin embargo, a Farkas le escribió:

"Alabar el trabajo sería como alabarme a mí mismo ya que el contenido del trabajo coincide casi exactamente con mis propios pensamientos los cuales han estado ocupando mi mente por los últimos treinta o treinta y cinco años."

Que Gauss dijese haber realizado los mismos descubrimientos o similares no quitó mérito a los avances de Bolyai, sin embargo, Gauss añadió algo más en esa carta, lo cual hizo que Janos quedarse totalmente decepcionado y desilusionado.

"...tenía la intención de escribir un artículo de modo que mis ideas no se perdiesen conmigo. De este modo estoy gratamente sorprendido de no tener que hacer este trabajo y estoy encantado de que el hijo de mi viejo amigo sea quien me haya suplantado de un modo tan sorprendente."

Mientras ocurría la intensa conversación entre los Bolyai y, el *Príncipe de las Matemáticas*, Gauss. Otro matemático llegaba a la misma conclusión, el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski (1792-1856).

Lobachevski era el hijo de un gobernador oficial que murió cuando él solo tenía siete años. Cuando entró en la universidad su principal idea era estudiar medicina, pero cambió su plan de estudio a uno científico amplio que incluía matemáticas y física.



Figura 1.6: Nikolai Ivanovich Lobachevski

Lobachevski también fue amigo de Gauss. Llegó a ser profesor de la Universidad de Kazán a la edad de veintiún años. También se convirtió en rector de la misma, desde 1827 hasta 1846, tras este periodo siguió permaneció como profesor de la Universidad donde se había graduado hasta el fin de sus días.

La idea de afrontar el Axioma de las Paralelas no consistió en intentar probar el postulado a partir de los otros axiomas. Sino que estudió la geometría en la cual el Quinto Postulado no se cumple. Lobachevski categorizó la geometría euclídea como un caso particular de esta geometría más general.

En febrero de 1826 en la sesión del Departamento de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad de Kazan, Lobachevski solicitó que se escuchara su trabajo sobre una nueva geometría.

Pero no es hasta 1829 que publica este trabajo sobre geometría no euclídea. Se publicó en el Kazan Messenger, pero fue rechazado por Ostrogradski cuando se presentó para su publicación en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Por lo tanto, este estudio solo se escribió en ruso, y por ello atrajo poco la atención cuando apareció, además quienes lo leyeron fueron muy críticos con él como ya hemos mencionado.

Deseando dar a conocer mejor su geometría y difundirla en la Europa Occidental, en 1837 publicó un artículo *Géométrie imaginaire* y un resumen de su nueva geometría *Geometrische Untersuchungen zur Theori der Parellellinien* que fue publicado en Berlín en 1840. La publicación alemana impresionó a Gauss. De nuevo, en la obra alemana, de 61 páginas, impera el siguiente axioma

5" Existen al menos dos líneas paralelas a una recta dada por un punto exterior a dicha recta.

La historia de como la geometría de Lobachevsky acabó siendo aceptada consiste en la publicación de la traducción de la obra de Lobachesky *Geometrische Untersuchungen zur Theori der Parellellinien* realizada por el francés Hoüel en 1866, diez

años después de la muerte de Lobachevski. Y gracias a Beltrami, que, en 1868, dio una prueba consistente de la geometría de Lobachevski, la ahora llamada Geometría Hiperbólica.

Capítulo 2

Preliminares

Comenzaremos viendo las nociones necesarias para nuestro estudio, así como fijar notación. Vamos a necesitar nociones de curvas planas, curvas en \mathbb{R}^2 , y curvas alabeadas, \mathbb{R}^3 , así como de superficies en \mathbb{R}^3 .

2.1. Curvas y superficies en \mathbb{R}^3

Definición 2.1. Una curva parametrizada regular (c.p.r.) en \mathbb{R}^p es una aplicación

$$\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p : t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$$

tal que:

1. α es diferenciable en todo punto (Condición de diferenciabilidad).
2. $\alpha' \neq 0$ para todo punto (Condición de Regularidad).

Definición 2.2. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una c.p.r., $\alpha = \alpha(t)$. Una reparametrización regular de α es una función biyectiva y de clase \mathcal{C}^k , $k \geq 1$,

$$f : (c, d) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (a, b) : r \mapsto f(r) = t$$

tal que en todo (c, d) se cumple que

$$\frac{df}{dr} = \frac{dt}{dr} \neq 0$$

Definición 2.3. Sean $\alpha(t)$ una c.p.r. y $c, d \in (a, b)$ con $c < d$. Definimos la longitud del segmento $c - d$ como

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d |\alpha'(t)| dt$$

Esta definición no depende de la parametrización de la curva.

Definición 2.4. Sea $\alpha(t)$ una c.p.r. en la que $0 \in (a, b)$. Definimos su parámetro arco como:

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t |\alpha'(\xi)| d\xi = s$$

Con el parámetro arco podemos obtener una reparametrización de la curva donde es más cómodo trabajar.

Teorema 2.5. *Toda c.p.r puede ser reparametrizada regularmente por su parámetro arco.*

Definición 2.6. *La parametrización de una curva por su arco se llama parametrización natural.*

Las curvas parametrizadas naturalmente tienen la siguiente caracterización.

Teorema 2.7. *Una curva esta parametrizada natural si y solo si $|\dot{\alpha}| = 1$*

Igual que las funciones, las curvas también tienen vector tangente, el cual nos servirá para calcular varias propiedades.

Definición 2.8. *Sean una c.p.r $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^p$ y t_0 un punto del intervalo. Definimos el vector velocidad de α en $\alpha(t_0)$ como $\alpha'(t_0)$. A partir de el vector velocidad definimos el vector tangente a α en $\alpha(t_0)$ como*

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|}$$

Este vector es unitario y por para cualquier valor de t_0 es diferente de cero por la definición de curva regular.

Si tenemos que nuestra curva esta parametrizada naturalmente nuestro vector tangente equivale a calcular únicamente

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$$

Pues el módulo de la derivada es 1.

Con el vector tangente podemos calcular la recta tangente a la curva en un punto de la siguiente manera.

Definición 2.9. *Sean $\alpha(t)$ una c.p.r y t_0 un punto del intervalo. Definimos la recta tangente a α en el punto $\alpha(t_0)$ como la recta que pasa dicho punto y tiene por dirección el vector tangente $\mathbf{t}(t_0)$. Tiene como ecuación*

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p : r \mapsto \beta(r) \\ \beta(r) &= \alpha(t_0) + r\mathbf{t}(t_0) \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos visto todos los conceptos que necesitamos sobre curvas. Ahora definiremos los conceptos relacionados con superficies.

Definición 2.10. *Una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 es una aplicación*

$$\mathbb{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde U es abierto, tal que:

1. \mathbb{X} es de clase C^∞

2. Si $\mathbb{X} = \mathbb{X}(u, v)$,

$$\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial v} \neq 0$$

todo punto de U

A partir de ahora notamos por

$$\mathbb{X}_1 = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u} \text{ y } \mathbb{X}_2 = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial v}.$$

Definición 2.11. Con las condiciones de la Definición 2.10, y además, tenemos que \mathbb{X} es también inyectiva. Se dirá que \mathbb{X} es superficie simple.

Definición 2.12. Sea M un subconjunto de \mathbb{R}^3 dotado de la topología euclídea relativa. Decimos que M es una superficie regular (s.r) si para cada $p \in M$ existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y existe una aplicación $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tales que:

1. $\mathbb{X}(U) \subseteq M$ y es un entorno abierto de p en M .
2. \mathbb{X} es homomorfismo sobre su imagen, dotada ésta de la topología euclídea relativa de \mathbb{R}^3 .
3. \mathbb{X} es una superficie parametrizada.

En la siguiente definición veremos un tipo de superficie que nos será útil.

Definición 2.13 (Superficie de revolución). Sea H un plano y $C \subseteq H$ la imagen de una c.p.r α sin autointersecciones, aunque puede ser cerrada. Sea $R \subseteq H$ una recta que no corta a C . Entonces, el conjunto M que obtenemos al girar C alrededor de R es una superficie regular llamada superficie de revolución, de generatriz C y eje de revolución R .

Al igual que con las curvas, en el caso de las superficies, estas tienen asociado un plano tangente.

Definición 2.14. Sea \mathbb{X} una superficie y un punto p de esta superficie, definimos el plano tangente a \mathbb{X} en p al plano que pasa por p y tiene como vector característico a $\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)$.

Otro vector que necesitaremos.

Definición 2.15. Sea \mathbb{X} una superficie y un punto p de esta. Definimos el vector normal de \mathbb{X} en p al vector

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)}{|\mathbb{X}_1(p) \times \mathbb{X}_2(p)|},$$

este vector es unitario y está bien definido. La recta normal a \mathbb{X} en p es la recta que pasa por p con la dirección de $\mathbf{N}(p)$.

Si consideramos distintas superficies simples en una superficie regular recubriendo un punto de ésta, el vector normal en dicho punto cambiará, a lo sumo, de sentido, mientras que el plano tangente no depende de la parametrización.

Nota 2.16. *El plano tangente a la superficie M en el punto p lo notaremos por $T_p(M)$.*

2.2. Geometría intrínseca

De una manera intuitiva, las propiedades intrínsecas son aquellas que podemos estudiar por un observador que se mueve sobre la propia superficie, es decir, son aquellas que se conservan por aplicaciones que conservan magnitudes que se pueden medir.

Primero definiremos que es una métrica, que la necesitaremos para el próximo capítulo.

Definición 2.17. *Sea una superficie regular M . Una métrica en la superficie M es una asignación*

$$p \in M \mapsto g_p,$$

donde g_p es una forma bilineal, simétrica y definida positiva en $T_p(M)$.

Definición 2.18. *Sea M una superficie regular y g una métrica en M . Si $\mathbb{X} = \mathbb{X}(u^1, u^2)$ es una superficie simple en M , definimos los coeficientes métricos de g en \mathbb{X} como*

$$g_{ij}(u^1, u^2) = g_{\mathbb{X}(u^1, u^2)}(\mathbb{X}_i(u^1, u^2), \mathbb{X}_j(u^1, u^2)),$$

para todos $i, j = 1, 2$.

Para simplificar la notación escribiremos los coeficientes métricos como $g_{ij}(p) = g_p(\mathbb{X}_i(p), \mathbb{X}_j(p))$ o $g_{ij} = g(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$.

Definición 2.19. *Sean M una s.r. y g una métrica en M . Se dice que g es diferenciable si los coeficientes métricos en cada superficie simple de M son funciones diferenciables.*

A partir de ahora, solo consideraremos métricas diferenciables.

En cada superficie simple de una s.r., los coeficientes métricos determinan la métrica. De hecho, si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_p(M)$ con $p \in \mathbb{X}(U)$ se escriben como

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_1^1 \mathbb{X}_1(p) + v_1^2 \mathbb{X}_2(p) \\ \vec{v}_2 &= v_2^1 \mathbb{X}_1(p) + v_2^2 \mathbb{X}_2(p) \end{aligned}$$

Definición 2.20. *Sean M una s.r. y g una métrica en M . Dado un vector $\vec{v} \in T_p(M)$, se define la norma de \vec{v} como*

$$|\vec{v}| = \sqrt{g_p(g_p(\vec{v}, \vec{v}))}.$$

entonces

$$g_p = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sum_{i,j=1}^2 v_1^i v_2^j g_{ij}(p). \quad (2.1)$$

Proposición 2.21. *Los coeficientes métricos verifican:*

1. $g_{ii} = g(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_i) = |\mathbb{X}_i|^2 > 0, i = 1, 2,$
2. $g_{12} = g(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = g(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1) = g_{21},$
3. $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$

Proposición 2.22. *Para definir una métrica en una superficie simple, basta considerar funciones diferenciables g_{ij} que verifiquen las propiedades de la Proposición 2.21. La métrica entonces quedará determinada mediante la ecuación 2.1.*

Mediante la propiedad 3 de la Proposición 2.21 podemos ver que podemos almacenar los coeficientes métricos en una matriz G

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

esta matriz es invertible pues por la propiedad 3 sabemos que es mayor que cero y por la propiedad 2 sabemos que es simétrica. La matriz inversa viene dada por

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g_{22}}{|g|} & -\frac{g_{21}}{|g|} \\ -\frac{g_{12}}{|g|} & \frac{g_{11}}{|g|} \end{pmatrix}.$$

De esta forma obtenemos,

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{|g|}, \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{|g|}, \quad g^{21} = -\frac{g_{12}}{|g|}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{|g|}, \quad (2.2)$$

que nos serán útiles para la siguiente definición.

Definición 2.23. *Sean M una s.r. y g una métrica en M . Si $\mathbb{X} = \mathbb{X}(u^1, u^2)$ es una superficie simple en M , se definen los símbolos de Christoffel de g en \mathbb{X} como las funciones*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^2 \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} \right) g^{hk}, \quad \forall i, j, k = 1, 2.$$

Definición 2.24. *Sean M una s.r., g una métrica en M , $\mathbb{X} = \mathbb{X}(u^1, u^2)$ una superficie simple en M y $\alpha(t) = \mathbb{X}(u^1(t), u^2(t))$ una curva en \mathbb{X} . Se define el parámetro natural o parámetro arco de $\alpha(t)$ respecto de la métrica g como*

$$s = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi,$$

donde $|\cdot|$ denota la norma dada en la Definición 2.20.

Al igual que antes dijimos que toda curva podía parametrizarse naturalmente, ahora también se pueden parametrizar naturalmente con las condiciones anteriores.

Ahora definiremos que es una geodésica, de manera intuitiva, las curvas geodésicas de una superficie son las que se comportan como rectas en el plano euclídeo.

Definición 2.25. Sean M una s.r., g una métrica en M , $\mathbb{X} = \mathbb{X}(u^1, u^2)$ una superficie simple en M y $\alpha(t) = \mathbb{X}(u^1(t), u^2(t))$ una curva en \mathbb{X} . Se dice que $\alpha(t)$ es una geodésica en \mathbb{X} si su parámetro t es función afín del arco y se verifican las siguientes ecuaciones, conocidas como ecuaciones de las geodésicas

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0, \quad \forall k = 1, 2.$$

Una curva en M será una geodésica si lo es en cada superficie simple de M .

Teorema 2.26 (Existencia y Unicidad de las Geodésicas). Sean M una superficie regular y g una métrica en M . Dados un punto p en M y un vector $\vec{v} \in T_p(M)$, existe una única geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$.

2.3. Aplicaciones entre superficies

Para terminar este capítulo, mencionaremos varios resultados sobre aplicaciones entre superficies vistos en la asignatura de *Geometría Aplicada*.

Las primeras definiciones son requisitos de las aplicaciones que deben cumplir para poder construir propiedades que nos interesarán en nuestro estudio.

Definición 2.27. Sea M una superficie regular en \mathbb{R}^3 . Una función continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que es diferenciable si para cada punto $p \in M$ existe una superficie simple (U, \mathbb{X}) en M tal que para cada $p \in U$ y $f \circ \mathbb{X}$ es diferenciable en $p' = \mathbb{X}^{-1}(p)$.

Definición 2.28. Sean M, N superficies regulares y $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ se dice diferenciable en $p \in M$ si existen (U, \mathbb{X}) en M con $p \in \mathbb{X}(U)$ y (V, \mathbb{Y}) en N con $f(p) \in \mathbb{Y}(V)$ tales que $\mathbb{Y}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$ es diferenciable en $p' = \mathbb{X}^{-1}(p)$. Decimos que f es diferenciable en M si f es diferenciable en para cualquier p perteneciente a M .

Definición 2.29. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice regular en $p \in M$ si existen (U, \mathbb{X}) en M con $p \in \mathbb{X}(U)$ y (V, \mathbb{Y}) en N con $f(p) \in \mathbb{Y}(V)$ tal que $\mathbb{Y}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$ es regular en $p' = \mathbb{X}^{-1}(p)$, es decir, el Jacobiano es distinto de cero.

Definición 2.30. Sean M, N superficies regulares. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se llama difeomorfismo si es biyectiva, diferenciable y, además, su inversa es diferenciable.

Definición 2.31. Dados $f : M \rightarrow N$ diferenciable y $p \in M$, definimos la diferencial de f en p como la siguiente aplicación

$$f_{*p} : T_p \rightarrow T_{f(p)}(N)$$

$$\vec{v} \mapsto f_{*p}(\vec{v}) = (f \circ \gamma)'(0), \quad \forall \vec{v} \in T_p(M)$$

con $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva diferenciable cumpliendo $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \vec{v}$.

Ahora veremos la primera propiedad que nos interesará en nuestro estudio.

Definición 2.32. Sean M y N dos superficies regulares dotadas de métricas y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que f es una isometría si es biyectiva, regular y su diferencial f_{*p} es isometría para todo punto p perteneciente a M .

Las isometrías son las aplicaciones que conservan las magnitudes que se pueden medir.

Observación.

1. Que $f_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ sea isometría quiere decir que

$$g_p(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = h_{f(p)}(f_{*p}\vec{v}_1, f_{*p}\vec{v}_2), \quad \forall p \in M.$$

con g la métrica de M y h la de N .

2. Toda isometría es difeomorfismo.
3. Las isometrías conservan las longitudes de las curvas.

Definición 2.33. Decimos que una superficie M es localmente isométrica a otra superficie N si para todo punto p de M , existen U' entorno abierto de p en M , V' abierto en N y $f : U' \rightarrow V'$ isometría. Si tanto M es localmente isométrico a N , como N lo es a M , entonces decimos que son superficies localmente isométricas.

Las isometrías tienen la siguiente caracterización.

Teorema 2.34 (Caracterización de superficies localmente isométricas). Sean M, N superficies regulares. Entonces M es localmente isométrica a N si y solo si $\forall p \in M$, existen U abierto $\subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en M con $p \in \mathbb{X}(U)$ e $\mathbb{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en N tales que los coeficientes métricos g_{ij} de \mathbb{X} y los h_{ij} de \mathbb{Y} coinciden, es decir

$$g_{ij}(u^1, u^2) = h_{ij}(u^1, u^2),$$

para todo $(u^1, u^2) \in U$.

Corolario 2.35. Sean M y N dos superficies regulares dotadas de métricas. Si estas superficies son localmente isométricas, entonces tienen la misma geometría intrínseca en puntos correspondientes.

Ahora veremos otra propiedad, la de conformidad.

Definición 2.36. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se dice conforme si es regular, biyectiva y

$$g_p(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lambda^2(p)h_{f(p)}(f_{*p}\vec{v}_1, f_{*p}\vec{v}_2), \quad \forall p \in M, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_p(M),$$

siendo λ^2 una función diferenciable en M , diferente a cero en cada punto.

Que una aplicación sea conforme significa que preserva los ángulos

Teorema 2.37 (Caracterización de superficies localmente conformes). Sean M, N superficies regulares. Entonces M es localmente conforme a N si y solo si $\forall P \in M$, existen U abierto en \mathbb{R}^2 , $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en M con $p \in \mathbb{X}(U)$ e $\mathbb{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en N tales que los coeficientes métricos g_{ij} de \mathbb{X} y los h_{ij} de \mathbb{Y} verifican

$$g_{ij}(u^1, u^2) = \lambda^2(u^1, u^2)h_{ij}(u^1, u^2)$$

para todo $(u^1, u^2) \in U$, siendo $\lambda > 0$ una función diferenciable en U .

Capítulo 3

Modelo hiperbólico

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar y estudiar las propiedades del modelo del disco de Poincaré (\mathbb{D}), pero para ello nos vamos a apoyar en otro modelo, conocido como el modelo del hiperboloide.

3.1. Modelo del hiperboloide \mathbb{H}^2

El hiperboloide es una superficie de revolución, esta está generada por la rotación de una hipérbola alrededor de un eje.

En nuestro caso utilizaremos el hiperboloide centrado en el eje z , con polo norte $(0,0,1)$ y polo sur $(0,0,-1)$. Aunque para el modelo nos quedaremos solo con la hoja superior. Más adelante rescataremos la hoja inferior a la hora de hacer el disco.

El hiperboloide tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\} \quad (3.1)$$

Donde el polo norte es $N = (0, 0, 1)$.

Para trabajar con el hiperboloide vamos a parametrizarlo mediante una superficie simple.

Proposición 3.1.

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 + u^2 + v^2})$$

Es una superficie simple.

Demostración. Veamos que cumple los tres requisitos para ser superficie simple. Claramente \mathbf{x} es diferenciable pues $1 + u^2 + v^2 > 0$ para todo punto de \mathbb{R}^2 . Para ver que es inyectiva supongamos que existen dos puntos P_1, P_2 tal que $P_1 \neq P_2$ pero $\mathbf{x}(P_1) = \mathbf{x}(P_2)$, entonces $(u_1, v_1, \sqrt{1 + u_1^2 + v_1^2}) = (u_2, v_2, \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2})$ donde forzosamente $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$ por lo cual $P_1 = P_2$ y por tanto \mathbf{x} es inyectiva. Por

último, tenemos que ver que $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$ en todo punto, calculemos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2

$$\mathbf{x}_1 = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right), \quad (3.3)$$

vemos que al realizar el producto vectorial la tercera componente es 1, luego $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$ es diferente a 0 para todo punto. \square

Ahora definiremos un producto escalar diferente al euclídeo, el producto de Minkowski, que los denotaremos por m .

Definición 3.2. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de \mathbb{R}^3 definimos el producto de Minkowski de \vec{u} y \vec{v} como

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3.$$

Observación. Observemos que m no es definido positivo pues existen vectores \vec{u} no nulos tales que $m(\vec{u}, \vec{u})$ es nulo o negativo.

Definición 3.3. Se dice que un vector de \mathbb{R}^3 es luminoso o temporal si su producto de Minkowski consigo mismo es nulo o negativo. Mientras que se dice que es espacial si su producto consigo mismo es positivo.

A partir de ahora notaremos la métrica de Minkowski como $\mathbb{R}^{3,1}$.

Proposición 3.4. El producto de Minkowski m , nos genera una métrica h , cuyos coeficientes métricos vienen dados por

$$h_{ij} = m(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$$

Observación. Los coeficientes métricos son

$$h_{11} = m(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_1) = 1 - \frac{u^2}{1+u^2+v^2}, \quad (3.4)$$

$$h_{12} = m(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = -\frac{uv}{1+u^2+v^2}, \quad (3.5)$$

$$h_{21} = m(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1) = -\frac{uv}{1+u^2+v^2} \quad (3.6)$$

$$h_{22} = m(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2) = 1 - \frac{v^2}{1+u^2+v^2}. \quad (3.7)$$

Demostración. Para probar que h determina una métrica en \mathbb{H}^2 , tenemos que ver que los coeficientes métricos verifican las propiedades de la Proposición 2.22:

1. $h_{ii} = |\mathbb{X}_i|^2 > 0$
Para $i = 1$,

$$h_{11} = 1 - \frac{u^2}{1+u^2+v^2} = \frac{1+v^2}{1+u^2+v^2} > 0$$

Pues tanto el numerador como el denominador son estrictamente mayores que 0.

Para $i = 2$ tenemos

$$h_{22} = 1 - \frac{v^2}{1 + u^2 + v^2} = \frac{1 + u^2}{1 + u^2 + v^2} > 0$$

De nuevo, el numerador y el denominador son estrictamente mayores que 0.

2. $h_{12} = h_{21}$ trivial.

3. Finalmente veamos que $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} h_{11}h_{22} &= 1 - \frac{u^2}{1 + u^2 + v^2} - \frac{v^2}{1 + u^2 + v^2} + \frac{u^2v^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \\ h_{12}^2 &= \frac{u^2v^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

luego

$$h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 1 - \frac{u^2}{1 + u^2 + v^2} - \frac{v^2}{1 + u^2 + v^2} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} > 0$$

Por tanto, al satisfacer las tres propiedades tenemos que h es una métrica en \mathbb{H}^2 \square

Ahora nuestro objetivo es calcular las geodésicas del hiperboloide, para ello necesitaremos calcular los símbolos de Christoffel.

Por la Definición 2.23 sabemos que tienen la siguiente forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\partial h_{1l}}{\partial u^j} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \right) h^{lk}.$$

Para calcular los h^{lk} utilizamos las ecuaciones (2.2), estos son

$$h^{11} = \frac{h_{22}}{|h|} = 1 + u^2, \quad (3.8)$$

$$h^{12} = h^{21} = \frac{h_{12}}{|h|} = uv, \quad (3.9)$$

$$h^{22} = \frac{h_{11}}{|h|} = 1 + v^2 \quad (3.10)$$

Con esto y los coeficientes métricos ya calculados podemos calcular los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial h_{11}}{\partial u} + \frac{\partial h_{11}}{\partial u} - \frac{\partial h_{11}}{\partial u} \right) h^{11} + \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial u} + \frac{\partial h_{12}}{\partial u} - \frac{\partial h_{11}}{\partial v} \right) h^{12} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-2u - 2uv^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right) (1 + u^2) + \left(\frac{2(-v - u^2v - v^3 + 2u^2v)}{(1 + u^2 + v^2)^2} - \frac{2u^2v}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right) uv \right] \\ &= \frac{-u - uv^2 - u^3 - u^3v^2 - uv^2 - uv^4}{(1 + u^2 + v^2)^2} = \frac{-u(1 + u^2 + v^2) - uv^2(1 + u^2 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{-u(1 + v^2)}{1 + u^2 + v^2} \end{aligned}$$

De manera análoga se calculan los otros símbolos de Christoffel. Tenemos que los símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{-u(1+v^2)}{1+u^2+v^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{u^2v}{1+u^2+v^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-u(1+u^2)}{1+u^2+v^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-v(1+v^2)}{1+u^2+v^2} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{uv^2}{1+u^2+v^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{-v(1+u^2)}{1+u^2+v^2}\end{aligned}$$

A la hora de calcular todas las geodésicas del hiperboloide necesitamos las siguientes definiciones, que darán paso a un teorema que da pie a calcular todas las geodésicas del hiperboloide.

Definición 3.5. *Se dice que una superficie es homogénea si dados dos puntos cualesquiera, existe una isometría que lleva uno en el otro.*

Observación. *Geoméricamente, la superficie presenta el mismo aspecto todos sus puntos, un ejemplo rápido es la esfera.*

Definición 3.6. *Se dice que una superficie es isotrópica en un punto p si dados dos vectores tangentes en p , existe una isometría tal que su diferencial lleva un vector en el otro.*

Observación. *Geoméricamente, en dicho punto p la superficie presenta el mismo aspecto en todas las direcciones. La esfera también es isotrópica.*

Teorema 3.7. *El hiperboloide \mathbb{H}^2 es homogéneo e isotrópico.*

Demostración. Sean p y q dos puntos del hiperboloide y $\{E_1, E_2\}, \{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}$ dos bases ortonormales de $T_p(\mathbb{H}^2), T_q(\mathbb{H}^2)$. Para ver que es homogéneo necesitamos probar que existe una isometría $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ que cumpla que $f(p) = q$ y para ver que es isotrópico necesitamos ver que $f_{*p}E_i = \overline{E}_i$ para $i = 1, 2$.

Tomamos el Polo Norte, $N = (0, 0, 1)$ y consideramos el plano tangente a la superficie en este punto, $T_N(\mathbb{H}^2)$, tenemos que el vector norma al plano tangente es $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_N = (0, 0, 1)$.

Entonces los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N = (1, 0, 0)$ y $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_N = (0, 1, 0)$ son tangentes a \mathbb{H}^2 en N .

Luego lo que queremos probar es que existe tal isometría que cumple

$$f(N) = p, \quad f_{*N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_N = E_1, \quad f_{*N} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_N = E_2.$$

Así, para probar el resultado general, basta con pasar por el Polo Norte con la base indicada.

Para ello usaremos la siguiente base ortonormal de $T_N(\mathbb{R}_1^3)$

$$B_1 = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_N, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_N, \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_N \right\}.$$

Ahora tenemos que construir una base ortonormal de $T_p(\mathbb{R}_1^3)$. Para ello tomamos $\{E_1, E_2\}$ y el vector normal a \mathbb{H}^2 en p . Tenemos que ver que este vector tiene la dirección del vector posición, que es el vector normalizado definido por \vec{OP} .

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva cualquiera en \mathbb{H}^2 , esta cumple que

$$x^2(t) + y^2(t) - z^2(t) = -1.$$

Derivamos y obtenemos

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) - z(t)z'(t) = 0,$$

entonces $\gamma\gamma' = 0$, es decir, γ y γ' son perpendiculares bajo la métrica de Minkowsky. Como todo vector tangente lo es a una cierta curva, esto prueba que el vector normal tiene la dirección del vector de posición. También comprobemos que el vector de posición p es unitario, lo cual es cierto pues este vector está en el Hiperboloide de radio 1. Luego $B_2 = \{E_1, E_2, p\}$ es una base ortonormal de $T_p(\mathbb{R}_1^3)$.

Por último, sea f la aplicación cuya matriz es la de cambio de base de B_1 a B_2 . Como ambas bases son ortonormales, esta matriz estará en el grupo de las matrices ortogonales respecto de la métrica de Minkowsky, que transforman la hoja superior del hiperboloide en ella misma.

Por tanto, f es una isometría de \mathbb{H}^2 que cumple

$$f(N) = p, \quad f_{*N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_N = E_1, \quad f_{*N} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_N = E_2,$$

y ya hemos probado que el Hiperboloide es homogéneo e isotrópico. \square

Para realizar el cálculo de todas las geodésicas necesitaremos primero demostrar que una curva es geodésica, y lo haremos por la definición de geodésica. La curva que demostraremos que es geodésica no es una cualquiera, es la curva resultante de cortar el Hiperboloide con el plano $y = 0$.

Lema 3.8. *La curva $\alpha(t) = (t, 0, \sqrt{1+t^2})$ es una geodésica de \mathbb{H}^2 .*

Demostración. Primero veamos que $\alpha(t)$ está sobre el Hiperboloide, es trivial pues cumple la ecuación que lo define

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

y además $z > 0$. Destacamos que para $t = 0$, $\alpha(0) = (0, 0, 1)$ que coincide con el Polo Norte del Hiperboloide. También calculamos la derivada para parametrizarla naturalmente, $\alpha'(t) = (1, 0, t/\sqrt{1+t^2})$.

Por la definición 2.24 tenemos que el parámetro arco de α es $s = \operatorname{arcsinh}(t)$, luego $t = \sinh(s)$, y la curva parametrizada naturalmente es

$$\alpha(s) = (\sinh(s), 0, \cosh(s)).$$

Veamos ahora que esta curva es, efectivamente, geodésica. Lo hacemos por la definición de geodésica 2.25.

Como hemos visto $\alpha(s)$ está sobre la superficie del Hiperboloide $\mathbb{X}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 + u^2 + v^2})$ y así $\alpha(s) = \mathbb{X}(\sinh(s), 0)$.

Entonces tenemos $u^1 = \sinh(s)$ y $u^2 = 0$, y las derivadas de estas son

$$\frac{du^1}{ds} = \cosh(s), \quad \frac{d^2u^1}{ds^2} = \sinh(s), \quad \frac{du^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2u^2}{ds^2} = 0 \quad (3.11)$$

Veamos que la definición se cumple. Primero para $k = 1$

$$\frac{d^2u^1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds},$$

se reduce a

$$\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{11}^1(u^1(s), u^2(s)) \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2,$$

ya que $du^2/ds = 0$.

Sustituyendo Γ_{11}^1 y las derivadas (3.11)

$$\sinh(s) + \left(\frac{-\sinh(s)}{\cosh^2(s)} \right) \cosh^2(s) = 0.$$

Tenemos que se cumple para $k = 1$.

A continuación, hacemos lo mismo para $k = 2$. Y nos queda

$$\Gamma_{11}^2(u^1(s), u^2(s)) \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 = 0,$$

debido a que $\Gamma_{11}^2(u^1(s), u^2(s)) = 0$.

Como se cumplen las dos ecuaciones de las geodésicas, tenemos que $\alpha(s)$ es una geodésica sobre el hiperboloide. \square

Estamos en condiciones de calcular todas las geodésicas del hiperboloide, para demostrar el siguiente resultado nos ayudaremos de los dos resultados anteriores.

Teorema 3.9. *Las geodésicas de \mathbb{H}^2 son las hipérbolas máximas, i.e, las curvas obtenidas cuando cortamos \mathbb{H}^2 con planos que pasan por el origen de coordenadas.*

Demostración. Para probar esto calcularemos una geodésica que pasa por $p \in \mathbb{H}^2$ cualquiera y tiene vector de dirección $v \in T_p(\mathbb{H}^2)$ aleatorio.

Por el teorema anterior sabemos que el hiperboloide es homogéneo e isotrópico, entonces existe una isometría que lleva p en el Polo Norte y al vector v en $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N$.

Así que la geodésica que pasa por p con dirección v será $\gamma = f^{-1}(\alpha)$ donde α es la geodésica del lema 3.8, que pasa por N con dirección $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_N$.

Como α es el corte de \mathbb{H}^2 con el plano $y = 0$, f pertenece al grupo de las matrices ortogonales respecto de la métrica de Minkowsky y las aplicaciones lineales transforman planos que pasan por el origen en planos que pasan por el origen, γ será el corte de \mathbb{H}^2 con un plano que pasa por el origen de coordenadas.

Por tanto, hemos calculado todas las geodésicas de \mathbb{H}^2 . □

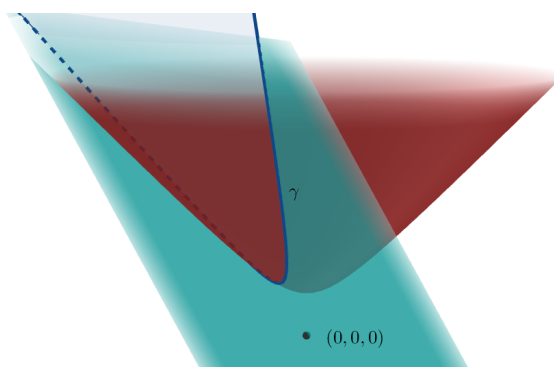


Figura 3.1: Una geodésica de \mathbb{H}^2 .

3.2. Modelo del disco de Poincaré \mathbb{D}

Una vez visto el modelo del hiperboloide vamos a estudiar el modelo del disco. El disco de Poincaré consiste en un disco abierto en \mathbb{R}^2 centrado el origen con radio 1

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y con una métrica \hat{h} que expresamos en función de las coordenadas (u_1, u_2) como sigue

$$\hat{h} = \frac{4}{(1 - |u|^2)^2} ((du_1)^2 + (du_2)^2). \quad (3.12)$$

Una de las ventajas del modelo del disco de Poincaré con respecto al del hiperboloide es que el disco unitario \mathbb{D} es un subconjunto acotado en el plano euclídeo. Por tanto, podemos ver todo el plano hiperbólico fácilmente en una hoja de papel.

Otra de las ventajas de este modelo es que la métrica que utilizamos es conforme a la métrica euclídea de \mathbb{R}^2 , pues se obtiene a partir de ella multiplicándola por una función positiva.

La métrica nos proporciona los coeficientes métricos que nos servirán para nuestro estudio, estos son:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{11} &= \hat{h}_{22} = \frac{4}{(1 - |u|^2)^2}, \\ \hat{h}_{12} &= \hat{h}_{21} = 0. \end{aligned}$$

Veamos que \hat{h} es una métrica en \mathbb{D} , tenemos que ver que los coeficientes métricos verifican las propiedades de 2.21.

1. Tenemos que ver que los coeficientes \hat{h}_{11} y \hat{h}_{22} son positivos, es decir, $\hat{h}_{ii} > 0$. Está claro pues $\hat{h}_{11} = \hat{h}_{22} = \frac{4}{(1-|u|^2)^2} > 0$.
2. En segundo lugar, los coeficientes cruzados tienen que ser iguales, es decir, $\hat{h}_{12} = \hat{h}_{21}$, lo cual es cierto pues ambos son iguales a 0.
3. Por último, tenemos que comprobar que $\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}^2 > 0$, sabemos que el primer sumando es mayor que 0, pues es el producto de dos cantidades positivas, mientras que el segundo sumando es 0, entonces tenemos que $\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}^2 > 0$.

Luego por 2.22 tenemos que \hat{h} es una métrica en \mathbb{D} .

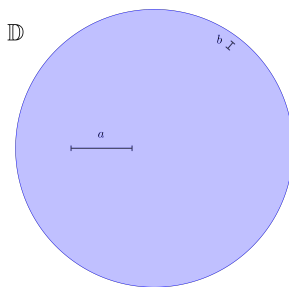


Figura 3.2: Disco de Poincaré, donde la longitud del segmento a es igual a la del segmento b , esto es debido a la métrica h .

Para estudiar las propiedades del disco vamos a proyectar lo que ya hemos estudiado en el hiperboloide, vamos a usar la llamada *Proyección Estereográfica Hiperbólica*, la cual consiste en coger un punto cualquiera del hiperboloide y unirlo mediante una recta con el polo sur del hiperboloide que como ya indicamos es el $(0, 0, -1)$. El punto de intersección de esta recta con el disco de Poincaré es la proyección de ese punto en el disco. Esta proyección la expresamos mediante la siguiente aplicación

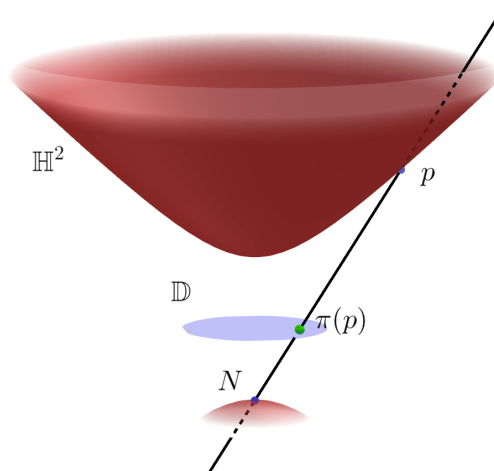
$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{D} \\ (x, y, z) &\mapsto \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Observación. La inversa de (3.13) nos será útil en esta sección y viene dada por

$$\pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right).$$

El resultado de aplicar la *Proyección Estereográfica Hiperbólica* a todos los puntos de \mathbb{H}^2 es \mathbb{D} .

Veamos que la proyección es un difeomorfismo para ello tenemos que ver que π cumple las propiedades de la *Proposición 2.30*.

Figura 3.3: Proyección $\pi(p)$.

1. Para ver que π es biyectiva componemos con su inversa, tenemos que $\pi \circ \pi^{-1}(x, y) = Id_{\mathbb{D}}$ y $\pi^{-1} \circ \pi(x, y, z) = Id_{\mathbb{H}^2}$.
2. Para ver que π es diferenciable basta ver que la composición de aplicaciones del siguiente diagrama es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{D} \\
 \mathbb{X} \uparrow & & \uparrow Id \\
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{Id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X}} & \mathbb{D}
 \end{array}$$

Por la Definición 2.27, tenemos que ver que $id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X}$ es diferenciable y esto se tiene ya que

$$id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X} = \left(\frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \frac{v}{1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2}} \right).$$

Luego π es un difeomorfismo. Ahora veamos que f es una aplicación regular.

Para ver que π es regular utilizamos la Definición 2.29, y vemos que el jacobiano de $Id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X}$ es distinto de cero en cada punto.

Hemos comprobado que la aplicación π cumple estas dos propiedades para poder ver que esta posee una propiedad aún más fuerte, esta es que π es una isometría, esto quiere decir que cualquier recta que cojamos en el Hiperboloide conservará su longitud en el disco de Poincaré.

Esta propiedad es muy conveniente pues, como ya expusimos antes, una de las ventajas de este modelo es que lo podemos dibujar en una hoja de papel y además podremos saber la longitud de las curvas con exactitud.

Luego, veamos que, efectivamente, π_{*p} es isometría, por la *Observación 2.3* tenemos que ver que los coeficientes métricos coinciden. Es decir, necesitamos calcular los coeficientes métricos de $id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X}$.

Para no abusar de notación, llamemos $\mathbb{Y}(u, v) = Id^{-1} \circ \pi \circ \mathbb{X}$. Así tenemos que

$$\mathbb{Y}(u, v) = \left(\frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \frac{v}{1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2}} \right).$$

Calculamos \mathbb{Y}_1 e \mathbb{Y}_2 para calcular los coeficientes geométricos, y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_1 &= \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2})^2 \sqrt{1 + u^2 + v^2}} (\sqrt{1 + u^2 + v^2} + 1 + v^2, -uv), \\ \mathbb{Y}_2 &= \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2})^2 \sqrt{1 + u^2 + v^2}} (-uv, \sqrt{1 + u^2 + v^2} + 1 + u^2). \end{aligned}$$

Los coeficientes métricos son

$$\begin{aligned} \hat{h}'_{11} &= \frac{2 + u^2 + 3v^2 + 2\sqrt{1 + u^2 + v^2} + 2\sqrt{1 + u^2 + v^2} v^2 + v^4 + u^2 v^2}{(1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2})^2 (1 + u^2 + v^2)}, \\ \hat{h}'_{12} &= \frac{uv(2\sqrt{1 + u^2 + v^2} + 2 + u^2 + v^2)}{(1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2})^2 (1 + u^2 + v^2)}, \\ \hat{h}'_{22} &= \frac{2 + 3u^2 + v^2 + 2\sqrt{1 + u^2 + v^2} + 2\sqrt{1 + u^2 + v^2} u^2 + u^4 + u^2 v^2}{(1 + \sqrt{1 + u^2 + v^2})^2 (1 + u^2 + v^2)}, \end{aligned}$$

simplificando estas expresiones llegamos a que, efectivamente, $h_{ij} = \hat{h}'_{ij}$, luego π_{*p} es isometría y por la *Observación 2.3* tenemos que π también lo es.

Tras estudiar estas propiedades ahora vamos a calcular las geodésicas del disco de Poincaré. La idea va a ser proyectar las geodésicas del Hiperboloide que como ya sabemos por el *Teorema 3.9* son las hipérbolas máximas de \mathbb{H}^2 . Las enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Las geodésicas de \mathbb{D} son los segmentos que pasan por el origen de coordenadas del disco y los arcos de circunferencia que cortan ortogonalmente a la frontera del disco.*

Demostración. Primero reescribimos la expresión de la Proyección Estereográfica del Hiperboloide al disco de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \pi(\xi, z) = u &= \frac{\xi}{1 + z}, \\ \pi^{-1}(u) = (\xi, z) &= \left(\frac{2u}{1 - |u|^2}, \frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2} \right). \end{aligned}$$

Por el *Teorema 3.9* sabemos que una geodésica α en el modelo del Hiperboloide es el conjunto de puntos que satisface la ecuación

$$\lambda_i \xi^i + \mu z = 0. \quad (3.14)$$

Diferenciamos dos casos, el caso en el que $\mu = 0$ y el caso en que $\mu \neq 0$:

(Caso 1) Cuando $\mu = 0$ estos puntos corresponden a las hipérbolas máximas que pasan por el Polo Norte, y estas, mediante π , se transforman en rectas que pasan por el origen.

(Caso 2) Cuando $\mu \neq 0$, podemos dividir por $-\mu$ y escribir la siguiente ecuación lineal

$$z = \lambda_i \xi^i = \langle \lambda, \xi \rangle$$

Por π^{-1} tenemos:

$$\frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2} = \frac{2\langle \lambda, \xi \rangle}{1 - |u|^2}$$

. Esta ecuación se satisface en el disco y podemos simplificarla por:

$$\|u\|^2 - 2\langle \lambda, \xi \rangle + 1 = 0$$

. Completando el cuadrado conseguimos

$$|u - \lambda|^2 = |\lambda|^2 - 1. \quad (3.15)$$

De nuevo, tenemos dos casos:

(Caso 2. 1) $|\lambda|^2 \leq 1$ obtenemos, o bien, el vacío, o bien, un punto en la frontera del disco. Ninguno de estos tipos de puntos nos proporciona una geodésica.

(Caso 2. 2) Mientras que cuando $|\lambda|^2 > 1$ obtenemos la circunferencia centrada en λ y de radio $\sqrt{|\lambda|^2 - 1}$. Si llamamos u_0 a uno de los puntos donde la circunferencia corta con la frontera de \mathbb{D} . Los tres puntos, 0 , u_0 y λ forman un triángulo de lados:

$$|\overline{Ou_0}| = |u_0| = 1, \quad |\overline{O\lambda}| = |\lambda|, \quad |\overline{u_0\lambda}| = |u_0 - \lambda|,$$

Que satisfacen el Teorema de Pitágoras por (3.15) y de este modo la circunferencia que corta a \mathbb{D} en un ángulo recto es una geodésica.

□

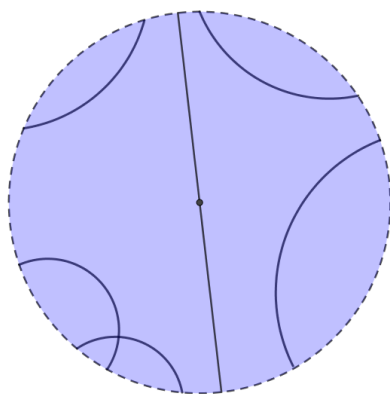


Figura 3.4: Algunas geodésicas de \mathbb{D} .

Capítulo 4

Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius son un conjunto de transformaciones del plano complejo extendido en sí mismo $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Estas transformaciones tienen una serie de propiedades y conexiones con la geometría hiperbólica.

En este capítulo definiremos las transformaciones de Möbius, estudiaremos algunas propiedades de estas transformaciones. En especial, prestaremos atención a las transformaciones que llevan el disco \mathbb{D} en sí mismo.

En primer lugar, introduciremos el concepto de *plano complejo extendido*, para ello necesitamos definir la esfera de Riemann.

4.1. La esfera de Riemann

La esfera de Riemann está muy relacionada con la proyección estereográfica, que es una proyección entre la esfera y el plano. En nuestro estudio, este plano será el complejo.

Notemos a la esfera como

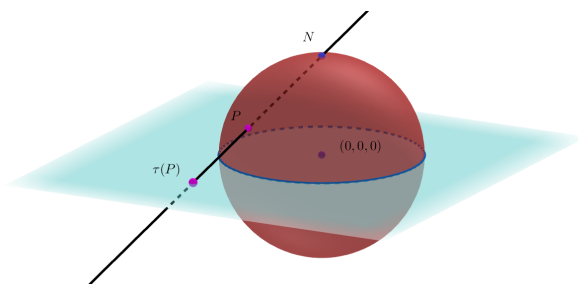
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

centrada en el origen del plano complejo. El ecuador de la esfera, $x^2 + y^2 = 1$, es la intersección con el plano complejo y $(1, 0, 0)$ coincide con $z = 1$ y $(0, 1, 0)$ con $z = i$. Como en el capítulo anterior definimos el Polo Norte de la esfera como $N = (0, 0, 1)$ y el Polo Sur como $S = (0, 0, -1)$. Definamos ahora una aplicación entre \mathbb{C} y S^2 .

Definición 4.1. *La proyección estereográfica τ es la aplicación que lleva*

$$\begin{aligned} \tau : S^2 \setminus N &\rightarrow \mathbb{C} \\ P &\mapsto \tau(P) = Q := (\overline{NP}) \cap \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Esta aplicación proyecta cualquier punto de la esfera al plano complejo mediante la recta que une al punto de la esfera, P , con el polo norte. En la siguiente figura se ve claro cómo funciona esta aplicación.

Figura 4.1: Proyección estereográfica τ .

Observemos que el plano complejo queda dividido en dos zonas, la de afuera de la circunferencia dibujada por el ecuador y la de dentro. Con esto, podemos ver que τ lleva cualquier punto de la esfera que pertenezca al hemisferio norte $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ a la zona de fuera, mientras que los del hemisferio sur, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\}$ los lleva adentro de la circunferencia.

Teorema 4.2. Para cualquier $P = (x, y, z) \in S^2$ y $w = u + iv \in \mathbb{C}$, la Proyección Estereográfica τ es de la forma

$$\tau(P) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z},$$

y la inversa es

$$\tau^{-1}(w) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right). \quad (4.1)$$

Demostración. Sea w la proyección de $P \in S^2$ en el plano complejo. Definimos el triángulo rectángulo de vértices w, N, o , donde la arista \overline{Nw} es el segmento de la recta que describe la proyección τ , sea también el triángulo de vértices P, N, L , donde NP es el segmento de la recta que, de nuevo, describe τ , y $LP = l$ es el segmento que corta perpendicularmente con NO .

Tenemos que estos dos triángulos son semejantes, luego

$$\frac{x^2 + y^2}{|w|^2} = \frac{1-z}{1} = \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$$

Resolviéndolo obtenemos

$$\frac{1-z}{1} = \frac{x}{u} \Rightarrow u = \frac{x}{1-z} \quad \frac{1-z}{1} = \frac{y}{v} \Rightarrow v = \frac{y}{1-z}$$

Por tanto, tenemos el resultado que queríamos

$$\tau(x, y, z) = u + iv = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}.$$

Nos falta probar la fórmula de la inversa. Resolvemos para $u + iv = \tau(x, y, z)$:

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{1+z} = -1 + \frac{2}{1-z} \Rightarrow 1-z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (4.2)$$

Sustituyendo en

$$u + iv = \frac{x + iy}{1 - z},$$

obtenemos

$$x + iy = \frac{2u + i2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Identificando la parte real y la compleja, tenemos los valores de x e y .

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Por último, para tener el valor z despejamos en (4.2)

$$\begin{aligned} 1 - z &= \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}; \\ u^2 + v^2 + 1 - (u^2 + v^2 + 1)z &= 2; \\ (u^2 + v^2 + 1)z &= u^2 + v^2 - 1; \\ z &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que la inversa de la Proyección Estereográfica τ es la de (4.1). \square

Para terminar de definir la proyección τ vamos a asignarle una proyección al único punto del que no hemos hablado, el polo norte N , a este le asignamos $\tau(N) = \infty$, ya que cada punto que se acerca más a N corresponde con un módulo cada vez más grande. Aún más, las identidades $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$ son verdades para este punto.

Esto nos permite expandir la definición de Proyección Estereográfica a

$$\begin{aligned} \tau : S^2 &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ P &\mapsto \tau(P) = Q := (\overline{NP}) \cap \mathbb{C}, \\ N &\mapsto \tau(N) = \infty. \end{aligned}$$

Definición 4.3. Llamamos a \mathbb{C}_∞ plano complejo extendido. \mathbb{C}_∞ es el conjunto $\mathbb{C} \cup \infty$.

Junto este concepto y la biyectividad de τ , estamos en condiciones de definir

Definición 4.4 (Esfera de Riemann). La identificación entre \mathbb{C}_∞ y S^2 , con ∞ correspondiéndose con N y cualquier otro punto de S^2 con su Proyección Estereográfica se conoce como la esfera de Riemann.

Proposición 4.5. La proyección estereográfica lleva rectas y círculos en \mathbb{C}_∞ en círculos en S^2 y viceversa.

Demostración. Geométricamente, podemos ver que las líneas en \mathbb{C} corresponden con la intersección del plano que contiene esa línea, el Polo Norte N y la esfera, lo cual

dibuja círculos en la esfera. Sea $P = (x, y, z)$ tales que $\tau(P) = w$. Vemos que la ecuación general para el círculo en el plano complejo es

$$Aw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + C = 0 \quad (4.3)$$

Un círculo en la esfera es la intersección entre el plano y la esfera, lo cual significa que el punto debe cumplir el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Considerando (4.3), tenemos

$$w\bar{w} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 - z^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} = \frac{1}{\gamma} \frac{-1}{1 - z} (1 + \alpha x + \beta y + \delta)$$

Como

$$\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)(x + iy) + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)(x - iy) = \alpha x + \beta y$$

Sustituimos y obtenemos

$$w\bar{w} = \frac{-1}{\gamma} \frac{1}{1 - z} \frac{1}{2} [(\alpha - i\beta)(x + iy) + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)(x - iy) + \delta + 1]$$

Entonces

$$Aw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + C = 0$$

Donde $A = \gamma$, $B = (\alpha - \beta)/2$ y $C = \delta + 1$. □

4.2. Transformaciones de Möbius

Una vez que hemos explicado la esfera de Riemann y el plano complejo extendido, estamos en condiciones de definir qué es una transformación de Möbius.

Definición 4.6. Una transformación de Möbius es una aplicación $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Imponemos que $ac - bd \neq 0$ para que no sean circular. Además, vemos que, si las 4 constantes están multiplicadas por un número en común, la transformación nos dará la misma. Para resolver esto introducimos una normalización.

Definición 4.7. Una transformación de Möbius normalizada

$$M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$z \mapsto M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1$$

A partir de ahora cuando mencionemos transformación de Möbius nos estaremos refiriendo a una transformación de Möbius normalizada.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones de Möbius

1. Las traslaciones

$$M(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C}$$

2. Las rotaciones

$$M(z) = az, \quad a = \exp^{i\theta}$$

3. Las homotecias

$$M(z) = kz, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

4. Las composiciones de homotecias seguidas de rotaciones

$$M(z) = az, \quad |a| \neq 1, 0, \quad a \notin \mathbb{R}^+$$

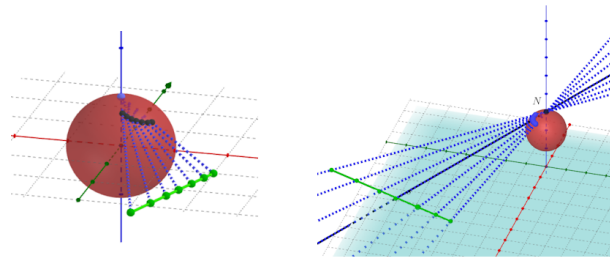


Figura 4.2: Una homotecia seguida de una rotación de Möbius de un segmento en el plano complejo.

Proposición 4.8. *Cualquier transformación de Möbius se puede expresar como la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$.*

Demostración. Sea una transformación de Möbius esta se puede expresar como:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d},$$

y es por lo tanto composición de algunas de las transformaciones descritas en el enunciado. \square

Teorema 4.9. *Las transformaciones de Möbius llevan \mathbb{C}_∞ uno a uno en sí mismo, son automorfismos, y son continuas. Para cada transformación de Möbius M hay una transformación de Möbius inversa*

$$M^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (4.4)$$

Demostración. Sea $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Para $z \neq \frac{-d}{c}$, ∞ es fácil ver que $M(z)$ es continua, ya que tanto el numerador $f(z) = az + b$, como el denominador $g(z) = cz + d$ lo son.

Para $z = \frac{d}{c}$, $\|M(z)\|$ se va a infinito tal y como nos acercamos a $z = \frac{d}{c}$, y $M(\frac{d}{c}) = \infty$, así que también es continua ahí.

Si ahora tenemos un z que incremente su módulo podemos ver que $M(z)$ tiende a $\frac{a}{c}$, lo cual hace a $M(z)$ continua en todo su dominio.

Ahora si hacemos la igualdad $M(z) = w$ y despejamos z ,

$$w = \frac{az - b}{cz - d} \Rightarrow z(cw - a) = -wd + b \Rightarrow z = \frac{-wd + b}{cw - a}$$

Como tal inversa existe, y está bien definida, la aplicación es un automorfismo y es continua. \square

La siguiente definición va a ser necesaria de ahora en adelante.

Definición 4.10. Entendemos por círculo generalizado, las curvas que se entienden por círculos en el disco de Poincaré, es decir, la recta extendida y los círculos. Los círculos generalizados en \mathbb{C} cumplen la siguiente fórmula

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{C} \quad (4.5)$$

El siguiente teorema es uno de los más importantes de las transformaciones de Möbius.

Teorema 4.11. Las transformaciones de Möbius llevan círculos generalizados a círculos generalizados.

Demostración. Como una transformación de Möbius puede ser expresada como una a composición de transformaciones más simples por la *Proposición 4.8*, basta probar que para la rotación-expansión-traslación $R(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y la inversión $I(z) = 1/z$, tanto $R(z)$ e $I(z)$ cumplen la ecuación del círculo generalizado (4.5).

Para $w = R(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} & Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \\ & A \left(\frac{w - \beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\bar{w} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) + B \left(\frac{w - \beta}{\alpha} \right) + \bar{B} \left(\frac{\bar{w} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) + C = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{A}{\alpha\bar{\alpha}} w\bar{w} + \frac{B}{\alpha} w + \frac{\bar{B}}{\bar{\alpha}} \bar{w} + C - \left(\frac{B\beta}{\alpha} + \frac{\bar{B}\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \right) = A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C' = 0 \end{aligned}$$

donde $A' = \frac{A}{\alpha\bar{\alpha}}$, $B' = \frac{B}{\alpha}$ y $C' = C - \frac{B\beta}{\alpha} - \frac{\bar{B}\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$. Luego tenemos que se cumple la ecuación del círculo generalizado. Por tanto, las transformaciones de Möbius llevan círculos generalizados en círculos generalizados. \square

Este resultado nos dice que, como la proyección estereográfica lleva círculos en círculos, las transformaciones de Möbius preservan círculos en la esfera de Riemann.

Teorema 4.12. *Las transformaciones de Möbius son conformes.*

Demostración. Sean $\gamma : (a_1, c_1) \mapsto \mathbb{C}_\infty$, $\delta : (a_2, c_2) \mapsto \mathbb{C}_\infty$ curvas que cumplen que $\gamma(b_1) = \delta(b_2)$ con $a_1 < b_1 < c_1$ y $a_2 < b_2 < c_2$ en el plano complejo extendido.

Las transformaciones de Möbius son conformes si preservan el cociente $\frac{\gamma'(b_1)}{\delta'(b_2)}$. Como en el teorema 4.11 lo vamos a probar para la inversión y la rotación-expansión-translación.

Para $R(\gamma(t_1)) = \alpha\gamma(t_1) + \beta$, tenemos que $M'(\gamma(t_1)) = \alpha\gamma'(t_1)$, así que

$$\frac{M'(\gamma(b_1))}{M'(\delta(b_2))} = \frac{\alpha\gamma'(b_1)}{\alpha\delta'(b_2)} = \frac{\gamma'(b_1)}{\delta'(b_2)}$$

Para $I(\gamma(t_1)) = \frac{1}{z}$, tenemos que $I'(\gamma(t_1)) = -\frac{\gamma'(t_1)}{\gamma^2(t_1)}$, luego

$$\frac{I(\gamma(b_1))'}{I(\delta(b_2))'} = \frac{-\gamma'(b_1)\delta^2(b_2)}{-\delta'(b_2)\gamma^2(b_1)} = \frac{\gamma'(b_1)}{\delta'(b_2)}$$

□

Con este resultado deducimos que las transformaciones de Möbius preservan ángulos en la esfera de Riemann.

4.3. Punto fijo y la razón doble

En esta sección vamos a buscar una manera de caracterizar cada transformación a partir de como transforme un conjunto de tres puntos.

Definición 4.13. *Sean $z, q, r, s \in \mathbb{C}_\infty$. La razón doble de estos números, expresada como $[z, q, r, s]$, es la cantidad*

$$[z, q, r, s] := \begin{cases} \frac{z-q}{z-s} \frac{r-s}{r-q}, & \text{si } z, q, r, s \neq \infty; \\ \frac{r-s}{r-q}, & \text{si } z = \infty; q, r, s \neq \infty; \\ \frac{r-s}{z-s}, & \text{si } q = \infty; z, r, s \neq \infty; \\ \frac{z-q}{z-s}, & \text{si } r = \infty; z, q, s \neq \infty; \\ \frac{z-q}{r-q}, & \text{si } s = \infty; z, q, r \neq \infty; \end{cases} \quad (4.6)$$

Esta cantidad nos será útil para encontrar transformaciones de Möbius que envíen un conjunto de puntos a otro conjunto de puntos en \mathbb{C}_∞ .

Proposición 4.14. *La transformación de Möbius*

$$M(z) = [z, q, r, s]$$

lleva q a 0 , s a ∞ y r a 1 .

Proposición 4.15. *Las transformaciones de Möbius dejan la razón doble de z, q, r, s invariante, es decir*

$$[z, q, r, s] = [M(z), M(q), M(r), M(s)]$$

Veamos ahora cuales son los puntos que una transformación de Möbius deja invariante, es decir, los puntos fijos.

Teorema 4.16. *Una transformación de Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que no sea la identidad, tiene a lo sumo dos puntos fijos, los cuales son*

$$\omega^\pm = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}. \quad (4.7)$$

Demostración. Un punto fijo tiene que cumplir que $M(\omega) = \omega$. Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} \omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} &\Leftrightarrow c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^\pm = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4cd}}{2c} = \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4cd}}{2c} = \\ &= \frac{(a-d \pm \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4cd})}{2c} = \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que cualquier transformación de Möbius que no sea la identidad tiene a lo sumo dos puntos de la forma (4.7). \square

Estamos en condiciones de establecer una manera de caracterizar una transformación de Möbius.

Teorema 4.17. *Hay exactamente una transformación de Möbius $M(z) = w$ que transforma tres puntos determinados en otros tres puntos dados, es decir, para $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ se tiene $M(z_1) = w_1$, $M(z_2) = w_2$ y $M(z_3) = w_3$. Y la transformación viene dada resolviendo*

$$[w, w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3]$$

con $w = M(z)$.

Demostración. Consideremos las transformaciones de Möbius $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ y $g(w) = [w, w_1, w_2, w_3]$. Como $f(z_1) = g(w_1) = 0$, $f(z_2) = g(w_2) = 1$ y $f(z_3) = g(w_3) = \infty$, entonces la transformación $M(z_i) = g^{-1} \circ f(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Para ver la unicidad, supongamos que hay dos transformaciones de Möbius $M_1(z)$ y $M_2(z)$ tal que $M_1(z_i) = M_2(z_i) = w_i$. Entonces la transformación $M(z) = M_1^{-1} \circ M_2(z)$ tiene z_1, z_2, z_3 tres puntos fijos. Como no es la transformación identidad entonces tiene a lo sumo dos puntos fijos, luego es una contradicción. Entonces M es la identidad y tenemos que $M_1 = M_2$. \square

Esta propiedad nos permitirá encontrar una transformación específica que lleve puntos a otros puntos que deseemos.

Veamos algún resultado de esto

Lema 4.18. *Una transformación de Möbius con un punto fijo en ∞ debe ser de la forma*

$$M(z) = Az + B, \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad A \neq 0.$$

Demostración. Según 4.7 un punto fijo es de la forma

$$\omega^\pm = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

Si tenemos que ∞ es un punto fijo, entonces $c = 0$ para $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Por otra parte, si ∞ es un punto fijo, entonces $M(\infty) = \frac{a}{c} = \infty$, luego $c = 0$. \square

Otro resultado aún más restrictivo

Lema 4.19. *Si una transformación de Möbius tiene un punto fijo en 0 y otro en ∞ entonces tiene la forma*

$$M(z) = Az, \quad A \in \mathbb{C}, \quad A \neq 0.$$

Si su único punto fijo es ∞ , entonces es una traslación

$$M(z) = z + B.$$

Demostración. Por 4.18 sabemos que si ∞ es un punto fijo entonces $M(z) = Az + B$, $A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0$. Si añadimos la condición de que 0 es también un punto fijo, entonces $M(0) = B = 0$. Luego $M(z) = Az$.

Si ∞ es el único punto fijo y $A \neq 1$, entonces $z = B/(1-A)$ sería también un punto fijo, así que $A = 1$. \square

Consideremos ahora la razón doble $[z, \omega^+, \omega^-, \infty]$, siendo ω^+, ω^- los dos puntos fijos de una transformación de Möbius $M(z)$ con dos puntos fijos, ambos diferentes de ∞ . Según 4.15, aplicando $M(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} [z, \omega^+, \omega^-, \infty] &= [w, \omega^+, \omega^-, a] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z - \omega^+}{z - \omega^-} &= \frac{a/c - \omega^-}{a/c - \omega^+} \frac{z - \omega^+}{z - \omega^-} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z - \omega^+}{z - \omega^-} &= \frac{\omega^- - a/c}{\omega^+ - a/c} \frac{z - \omega^+}{z - \omega^-} \end{aligned} \tag{4.8}$$

llamamos $m := (\omega^- - a/c)/(\omega^+ - a/c)$ el multiplicador. Esta manera de escribir una transformación de Möbius se llama la forma normal. Este modo de expresarlas es particularmente visual, ya que una sucesión de aplicaciones de la misma transformación de Möbius la podemos ver como multiplicando $(z - \omega^+)/ (z - \omega^-)$ por m tantas veces como haga falta.

4.4. Transformaciones de Möbius como matrices

En esta sección explicamos como podemos expresar las transformaciones de Möbius como matrices. Mostraremos que las transformaciones de Möbius pueden dotarse de estructura de grupo y obtendremos diversas aplicaciones de esta interpretación algebraica.

Teorema 4.20. *El conjunto de las transformaciones de Möbius*

$$\mathcal{M} = \left\{ M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ac - bd = 1 \right\} \quad (4.9)$$

es un grupo bajo la operación de composición. Este grupo lo llamamos grupo de Möbius.

Demostración. Comprobamos que este conjunto con la operación definida cumple las propiedades de grupo.

- Es cerrado, pues para $M_1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ y $M_2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ tenemos

$$M_2 \circ M_1 = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)} \in \mathcal{M} \quad (4.10)$$

y esto lo podemos normalizar.

- Está claro que cumple la propiedad de asociatividad, pues la función composición es asociativa.
- La transformación $I(z) = z$ actúa como la identidad.
- Por el teorema 4.9 sabemos que existe una transformación inversa para cada transformación de Möbius.

Así pues, la composición dota al conjunto de las transformaciones de Möbius de estructura de grupo. \square

Esta manera de interpretar las transformaciones de Möbius nos permite formular la siguiente aplicación.

Definición 4.21. *La aplicación $\Gamma : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ lleva*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Es decir, lleva matrices 2×2 con determinante 1 a la transformación de Möbius.

Observación. *Como las matrices tienen determinante 1, estas transformaciones de Möbius están normalizadas.*

También podríamos definir una aplicación en la que obtengamos transformaciones de Möbius no normalizadas.

Veamos que a través de esta aplicación es equivalente trabajar con transformaciones de Möbius y con elementos de $SL(2, \mathbb{C})$.

Proposición 4.22. *La aplicación Γ es un homeomorfismo sobreyectivo.*

Demostración. Primero probamos que la matriz identidad se corresponde con la transformación de Möbius identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1z}{1} = z.$$

Ahora veamos que el producto de dos matrices se corresponde con la composición de las transformaciones de Möbius correspondientes

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)},$$

que corresponde con (4.10)

Y, por último, que la matriz inversa se corresponde con la transformación de Möbius inversa

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto \frac{-dz + b}{cz - a},$$

que coincide con (4.4).

El hecho de que el homeomorfismo sea sobreyectivo viene de que hay exactamente dos matrices que van a la misma transformación de Möbius.

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \quad (4.11)$$

Lo cual finaliza la prueba. \square

La ecuación (4.11) nos permite definir un isomorfismo de las transformaciones de Möbius con un grupo más restringido.

Teorema 4.23. *El grupo de Möbius y el grupo especial lineal proyectivo, $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\pm I$, son isomorfos, es decir*

$$\mathcal{M} \cong PSL(2, \mathbb{C}).$$

Demostración. Como todo elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$ corresponde con $\pm A$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces todo miembro de M corresponde a un miembro de $PSL(2\mathbb{C})$ y viceversa. \square

Hay una manera de caracterizar la acción de las transformaciones de Möbius a través de la acción de 2 vectores columna.

Definición 4.24. *Las coordenadas homogéneas de $z \in \mathbb{C}_\infty$ están definidas como un par $(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^2$ tal que $z = \zeta/\xi$.*

Sin embargo, $\lambda(\zeta, \xi)$, con $\lambda \in \mathbb{C}^2$ determinan el mismo número complejo. Para resolver esto, existe el concepto de coordenadas homogéneas normalizadas, donde λ es elegida tal que $\zeta^2 + \xi^2 = 1$. Aun así, no vamos a usarlas, pues en el contexto en el que trabajamos no nos aportan ninguna ventaja.

Proposición 4.25. *La acción de $PSL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{C}^2 es equivalente a la acción de \mathcal{M} en \mathbb{C} .*

Demostración. Si consideramos un elemento de \mathbb{C}^2 como una coordenada homogénea compleja de $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\zeta + b\xi \\ c\zeta + d\xi \end{pmatrix} \mapsto \frac{a\zeta + b\xi}{c\zeta + d\xi} = \frac{a\zeta/\xi + b}{c\zeta/\xi + d} = \frac{az + b}{cz + d} = M(z).$$

□

También podemos establecer otra manera de ver los puntos fijos.

Lema 4.26. *Los puntos fijos de una transformación de Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vienen dados por los autovectores de la matriz*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demostración. Los autovectores de \mathbf{M} son los vectores $\mathbf{v} = (\zeta_1, \zeta_2)^T$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, que corresponde con $M(z) = M(\zeta_1/\zeta_2) = (\lambda\zeta_1)/(\lambda\zeta_2) = z$. □

4.5. Las transformaciones de Möbius en el disco

En esta sección estudiaremos un caso particular de las transformaciones de Möbius. Las transformaciones que llevan el disco en el disco. Utilizamos en esta sección el libro de M. Hitchman [23].

Comencemos viendo una definición alternativa del modelo del disco de Poincaré para la geometría hiperbólica. La diferencia entre esta definición y la vista en 3.2 es que aquí vamos a definirlo como un par de elementos, el que uno es el disco tal y como lo conocemos y el segundo elemento es el conjunto de todas las transformaciones de Möbius que llevan \mathbb{D} en sí mismo.

Definición 4.27. *El modelo del disco de Poincaré para la geometría hiperbólica es el par $(\mathbb{D}, \mathcal{H})$ donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$, y \mathcal{H} consiste en todas las transformaciones de Möbius T tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. A \mathcal{H} lo llamaremos el grupo de transformaciones en geometría hiperbólica.*

Denotaremos por S_∞^1 al círculo unidad que llamaremos el círculo en infinito. Este círculo no hay que confundirlo con el disco de Poincaré. Además, S_∞^1 rodea al disco de Poincaré.

Es equivalente que una transformación de Möbius lleve \mathbb{D} en sí mismo, también lleva S_∞^1 en sí mismo.

Ahora vamos a considerar un círculo generalizado C que es ortogonal al círculo en infinito. Si invertimos C , S_∞^1 se invierte en sí mismo. Además, si esta inversión la tomamos en el interior de S_∞^1 , es decir, el disco \mathbb{D} , entonces también lo transforma en sí mismo. A esto le sigue que la composición de dos inversiones como esas es una transformación de Möbius que manda \mathbb{D} en sí mismo, y, por tanto, coincide con el grupo \mathcal{H} . Veamos esto poco a poco.

Una inversión en un círculo generalizado C que es ortogonal a S_∞^1 lo llamaremos reflexión del plano hiperbólico, o una reflexión hiperbólica.

Estas reflexiones nos van a ser de gran utilidad pues todas las transformaciones de \mathcal{H} las podemos describir con dichas reflexiones.

Por ejemplo, una rotación en el origen es una transformación de Möbius que transporta \mathbb{D} en sí mismo, así que está en \mathcal{H} . Y esta rotación podemos verla como la composición de dos reflexiones de rectas que intersecan en el origen, ya que estas dos rectas cortan con el círculo unidad en ángulos rectos. Una reflexión sobre una recta sobre esa es una reflexión del disco de Poincaré, así que las rotaciones en el origen son la composición de dos reflexiones.

Veamos ahora que este ejemplo se puede generalizar.

Teorema 4.28. *Cualquier transformación de Möbius en \mathcal{H} es la composición de dos reflexiones de \mathbb{D} .*

Demostración. Supongamos que T es una transformación de Möbius que envía \mathbb{D} en sí mismo. Esto significa que algún punto en \mathbb{D} , llamémosle z_0 , es enviado al origen, 0. Sea z_0^* el punto simétrico a z_0 con respecto a S_∞^1 . Como T envía el círculo unidad en sí mismo, y las transformaciones de Möbius preservan los puntos simétricos, entonces T envía z_0^* a ∞ . También, existe un punto z_1 en el círculo en infinito que es enviado al punto 1. Tenemos dos casos.

El primero es que $z_0 = 0$, entonces $z_0^* = \infty$, y T fija 0 y ∞ , Entonces tenemos que T se corresponde con una dilatación seguida de una rotación. Pero como hemos dicho que T envía el disco en sí mismo, el parámetro de dilatación debe ser 1, entonces T es simplemente una rotación, y como hemos visto antes, la rotación se puede ver como la composición de dos reflexiones.

En el caso de que $z_0 \neq 0$, si usamos z_0, z_0^* y z_1 como pilares, podemos construir T como dos transformaciones de Möbius como sigue:

Primero, invertimos un círculo C ortogonal a S_∞^1 que envía z_0 al origen. Veamos que, efectivamente, este círculo existe.

Dibujamos un círculo con diámetro $\overline{0z_0^*}$. Sea p uno de los puntos de intersección de este círculo con S_∞^1 , construimos el círculo C a través de p centrado en z_0^* . Como el ángulo formado por $\angle 0pz_0^*$ es recto, S_∞^1 es ortogonal a C , así que la inversión sobre C lleva S_∞^1 a sí mismo. Además, como z_0^* es enviado a ∞ y los puntos simétricos deben seguir siéndolo, la inversión en C debe llevar z_0 a 0.

Por tanto, la primera inversión lleva z_0 a 0 y z_0^* a ∞ . Para construir T tenemos

que llevar también z_1 a 1. Por la inversión en C hemos enviado el punto z_1 a un z'_1 en el círculo unidad. Ahora reflejamos a través de la línea que pasa por el origen y bisecta el ángulo $\angle 10z'_1$. Este envía z'_1 a 1, enviando \mathbb{D} a él mismo y deja 0 y ∞ fijos.

Componiendo estas dos inversiones tenemos una transformación de Möbius que lleva z_0 a 0, z_0^* a ∞ y z_1 a 1. Y como sabemos, una transformación de Möbius es determinada por la imagen de tres puntos, entonces T es una transformación de Möbius.

□

Entonces podemos ver las transformaciones en \mathcal{H} como la composición de dos inversiones sobre unos círculos generalizados en S^1_∞ .

Estas transformaciones podemos clasificarlas según estos círculos generalizados se corten dos veces, una o ninguna vez. En el caso que se corten dos veces tenemos que la transformación recibe el nombre de rotación hiperbólica, mientras que si solo se cortan una vez se llaman desplazamiento paralelo, por último, si no se cortan ninguna vez se conocen como traslación hiperbólica.

En el caso de que los círculos se cortan dos veces tenemos uno de los cortes va a ser dentro del disco necesariamente, llamémosle p a dicho punto, y llamemos p^* al otro punto de intersección que tiene que estar fuera del disco. El punto p^* tiene que ser el simétrico a p respecto al círculo unidad ya que ambos círculos generalizados son ortogonales a S^1_∞ .

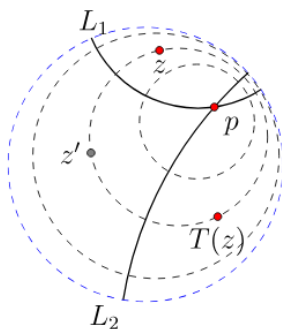


Figura 4.3: Rotación hiperbólica en z [23].

Esto resulta en que la transformación de Möbius fijará p y p^* , causando la rotación de los puntos en \mathbb{D} alrededor de p . Por tanto, a este tipo de transformación en \mathcal{H} las llamamos rotación hiperbólica respecto de p .

Si estamos en el caso de que se intersequen una sola vez, entonces este corte debe producirse en S^1_∞ , llamémosle, de nuevo, p al punto de intersección. Sino el punto simétrico p^* , que tendría que ser distinto de p , tendría que pertenecer también a los dos círculos generalizados, dándonos dos puntos de intersección, lo cual no es cierto.

La aplicación resultante mueve puntos en círculos en \mathbb{D} que son tangentes a p en el círculo unidad. Los círculos en \mathbb{D} que son tangentes a S^1_∞ reciben el nombre de horociclos. A este tipo de transformación las llamaremos desplazamiento paralelo.

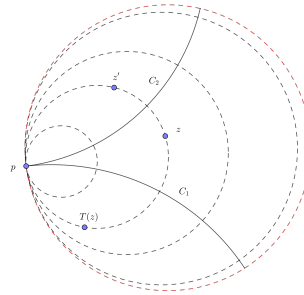


Figura 4.4: Desplazamiento paralelo en z

Por último, si los círculos generalizados de inversión no intersecan, entonces al menos uno de los círculos generalizados debe ser un círculo, además hay dos puntos p y q simétricos a ambos círculos generalizados. Estos dos puntos son fijos bajo la transformación de Möbius ya que cada inversión lleva p a q y viceversa. Además, ambos puntos fijos deberán estar en el círculo unidad. Entonces esta transformación llevará los puntos a través de círculos generalizados que conectan p y q . Veámoslo gráficamente:

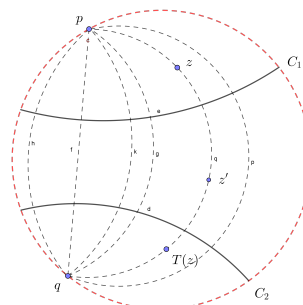


Figura 4.5: Traslación hiperbólica de z

Para terminar esta sección veamos qué forma tienen las transformaciones que pertenecen a \mathcal{H} .

Teorema 4.29. *Toda transformación $T \in \mathcal{H}$ es de la forma*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

donde θ es un ángulo, y z_0 es el punto de \mathbb{D} que es mandado a 0.

Demostración. Sean $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_1 \in S^1_\infty$, y que la aplicación $T \in \mathcal{H}$ tiene como imágenes $T(z_0) = 0, T(z_0^*) = \infty$ y $T(z_1) = 1$. Usando la razón doble, tenemos

$$T(z) = [z, z_0, z_1, z_0^*] = \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \frac{z_1 - z_0^*}{z_1 - z_0}$$

Pero $z_0^* = \frac{1}{\bar{z}_0}$, así que

$$T(z) = \frac{z - z_0}{z - 1/\bar{z}_0} \frac{z_1 - 1/\bar{z}_0}{z_1 - z_0} = \frac{\bar{z}_0 z_1 - 1}{z_1 - z_0} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}.$$

Tenemos que la cantidad

$$\frac{\bar{z}_0 z_1 - 1}{z_1 - z_0}$$

Es una constante (compleja), y esta tiene módulo 1, pues como $1 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1$, entonces

$$\frac{\bar{z}_0 z_1 - 1}{z_1 - z_0} = \frac{\bar{z}_0 z_1 - z_1 \bar{z}_1}{z_1 - z_0} = \frac{-z_1(\bar{z}_1 - z_0)}{z_1 - z_0}.$$

Como $|z_1| = 1$ y, en general, $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$, entonces esta expresión tiene módulo 1, y puede ser expresada como $e^{i\theta}$ para algún θ .

Por tanto, hemos visto que cualquier transformación T en \mathcal{H} se puede expresar como

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

donde θ es un ángulo y z_0 es un punto en el disco que es enviado a 0.

□

Capítulo 5

Más resultados sobre las transformaciones de Möbius

En este capítulo exploraremos algunos tipos de transformaciones de Möbius, explicaremos algún artículo reciente y, por último, veremos líneas de investigación y preguntas que siguen abiertas sobre las transformaciones de Möbius y la geometría hiperbólica.

Dividiremos el capítulo en dos secciones. En la primera analizaremos un artículo sobre un tipo de transformaciones de Möbius, las armónicas. Mientras que, en la segunda, comentaremos algunos otros tipos, algún artículo de interés.

5.1. Transformaciones de Möbius armónicas

En esta sección explicaremos el artículo de N. Yilmaz Özgür, *Ellipses and harmonic Möbius transformations (2010)*, publicado en *Universităţii “Ovidius” Constanţa*. El objetivo del artículo es caracterizar estas transformaciones según la forma de estas.

En artículos anteriores [14] [20] se probó que las únicas transformaciones de Möbius que llevan elipses en elipses son las semejanzas. Mientras que en este se estudia la imagen de los elipses por transformaciones de Möbius armónicas.

Hace falta mencionar que cuando usemos el término elipse nos referimos a elipses no circulares, y cuando digamos círculo, como en el capítulo anterior, nos referiremos a círculos generalizados.

En primer lugar, definiremos las transformaciones de Möbius armónicas introducidas por M. Chuaqui en [12].

Chuaqui comienza con una función compleja armónica, f , es decir, cumple

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

A continuación, utiliza que, si f es armónica, entonces se puede descomponer como $f = h + \bar{g}$.

Seguidamente, utiliza el concepto de segunda dilatación compleja, P. Duren las define como sigue [24]

Definición 5.1. *La segunda dilatación compleja w de f es una medida de distorsión en \mathbb{C} realizada por f . Sea $z = x + iy$ y sea*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Sean $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$ las derivadas parciales y

$$f_z = \frac{f_x - if_y}{2}, \quad f_{\bar{z}} = \frac{f_x + if_y}{2}.$$

La segunda dilatación compleja de f se define como el cociente $w = f_{\bar{z}}/f_z$.

En nuestro caso, coincide con $w = g'/h'$. Además, Chuaqui también considera que $w = \alpha$ constante, luego, despejando h' e integrando, obtenemos que $\bar{g} = \alpha\bar{h}$. Entonces podemos reescribir las funciones armónicas como $f = h + \alpha\bar{h}$. Usamos esta caracterización de las funciones armónicas para definir las transformaciones de Möbius armónicas.

Definición 5.2. *Una transformación de Möbius armónica es una función armónica que tiene forma*

$$f = h + \alpha\bar{h},$$

donde h es una transformación de Möbius y α es una constante compleja de módulo menor estricto que uno, es decir, $|\alpha| < 1$.

Luego demuestra que este tipo de transformaciones lleva círculos a elipses. Y en [13] los mismos autores demuestran que una aplicación armónica que transporta círculos a elipses son transformaciones de Möbius armónicas.

Por otra parte, nos hará falta una definición y un resultado de [14].

Definición 5.3. *Diremos que dos curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son Möbius-equivalentes si existe una transformación de Möbius T tal que $\mathcal{C}_2 = T(\mathcal{C}_1)$.*

Proposición 5.4. *Si dos elipses $\varepsilon, \varepsilon'$ son Möbius-equivalentes, entonces T es una semejanza.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en [14]. □

Esta proposición es equivalente a decir que la única transformación de Möbius que lleva elipses en elipses son las semejanzas.

Con este breve resumen ya podemos centrarnos por completo en el análisis de este artículo. Como dijimos al principio, el objetivo va a ser investigar las imágenes de las elipses bajo las transformaciones de Möbius armónicas.

Al comienzo del artículo el autor hace un breve resumen de resultados sobre transformaciones de Möbius, en este menciona una propiedad que no hemos visto a lo largo del trabajo, demostrémosla.

Proposición 5.5. *Las transformaciones de Möbius con $c = 0$ forman el subgrupo de semejanzas, que es subgrupo del grupo de Möbius (4.9). Las transformaciones de este subgrupo son de la forma*

$$S(z) = Az + B; A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0.$$

Demostración. Notemos el conjunto de las transformaciones de Möbius con $c = 0$ como \mathcal{S} .

Primero vamos a ver que las transformaciones de \mathcal{S} son de la forma

$$S(z) = Az + B.$$

Sea $M(z)$ una transformación de Möbius, si $c = 0$ tenemos que

$$M(z) = \frac{az + b}{d},$$

que la podemos reescribir trivialmente como $M(z) = Az + B$. Recordemos que en *Lema 4.18* ya vimos que estas transformaciones de Möbius tenían al infinito como punto fijo.

Ahora vamos a probar que (\mathcal{S}, \circ) es un subgrupo de (\mathcal{M}, \circ) , para ello tenemos que ver que se cumplen tres propiedades:

1. \mathcal{S} contiene al elemento identidad, I , de \mathcal{M} , esto es trivial pues, $I(z) \in \mathcal{S}$.
2. La operación es cerrada en \mathcal{S} . Sean S, S' dos transformaciones veamos que la composición está en \mathcal{S} .

$$S \circ S' = S(S'(z)) = S(A'z + B') = A(A'z + B') + B = (AA')z + (AB' + B),$$

que, efectivamente, pertenece a \mathcal{S} .

3. Por último, tenemos que ver que para cada transformación en \mathcal{S} la inversa también está. Por el *Teorema 4.9* sabemos que para cada transformación de Möbius existe la inversa que es de la forma

$$M^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Como las transformaciones que pertenecen a \mathcal{S} tiene $c = 0$, las inversas de las funciones serán de la forma

$$M^{-1}(w) = \frac{-d}{-a}w + \frac{b}{-a},$$

entonces las funciones inversas también están en \mathcal{S} .

Por tanto, tenemos que \mathcal{S} bajo la operación de composición es un subgrupo de (\mathcal{M}, \circ) . □

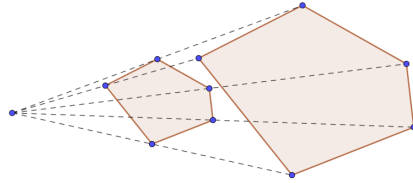


Figura 5.1: La homotecia mantiene la forma del objeto

Observación. Con semejanza nos referimos a transformaciones que mantienen la forma del objeto al que se lo aplicamos, ejemplos de semejanzas son la traslación, la rotación y la homotecia. En las figuras 5.1 y 5.2 podemos ver como la homotecia y la traslación conservan la forma del objeto.

Para determinar la imagen de elipses bajo las transformaciones de Möbius armónicas usaremos el hecho de que una transformación armónica $f = h + \alpha\bar{h}$ es la composición de una transformación de Möbius h con la aplicación lineal $z \rightarrow z + \alpha\bar{z}$.

En [14] se demuestra que la imagen de cualquier elipse E bajo una transformación de Möbius es una curva real bicuadrada, la definición de esta curva también se da en el mismo trabajo.

Definición 5.6. Una curva real bicuadrada es una curva plana que satisface la siguiente ecuación implícita

$$c_{22}z^2\bar{z}^2 + c_{21}z^2\bar{z} + c_{12}z\bar{z}^2 + c_{11}z\bar{z} + c_{02}\bar{z}^2 + c_{10}z + c_{01}\bar{z} + c_{00} = 0,$$

donde los coeficientes complejos satisfacen $c_{jk} = \overline{c_{kj}}$.

Según esta definición podemos ver que las cónicas reales son las curvas bicuadráticas reales con $c_{22} = c_{21} = c_{12} = 0$.

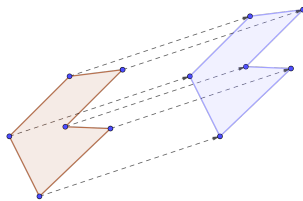


Figura 5.2: La traslación mantiene la forma del objeto

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal que mencionamos al principio.

Teorema 5.7. *Las únicas transformaciones de Möbius armónicas que llevan elipses a elipses son las semejanzas armónicas, es decir, las transformaciones de la forma $f = h + \alpha\bar{h}$ con h una semejanza.*

Demostración. Este enunciado equivale a demostrar que una transformación de Möbius armónica lleva elipses en elipses si y solo si es una semejanza armónica de la forma $f = h + \alpha\bar{h}$ con h una semejanza.

\Leftarrow) Veamos que la aplicación $z \rightarrow \alpha\bar{z}$ lleva elipses en elipses. Sin pérdida de generalidad consideramos la elipse ε con la siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (5.1)$$

Si z es un punto de la elipse, podemos escribirlo como

$$z = A \cos(\theta) + iB \sin(\theta).$$

Aplicándole $z \rightarrow \alpha\bar{z}$ a la elipse nos encontramos con la siguiente curva

$$\begin{aligned} w = u + iv &= A \cos(\theta) + iB \sin(\theta) + \alpha(A \cos(\theta) - iB \sin(\theta)) = \\ &= (1 + \alpha)A \cos(\theta) + i(1 - \alpha)B \sin(\theta), \end{aligned}$$

cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de la elipse

$$\frac{u^2}{A^2(1 + \alpha)^2} + \frac{v^2}{B^2(1 - \alpha)^2} = 1. \quad (5.2)$$

Además, esta curva puede ser un círculo si $A^2(1 + \alpha)^2 = B^2(1 - \alpha)^2$.

También sabemos por la *Proposición* 5.4 que las únicas transformaciones de Möbius que llevan elipses en elipses son las semejanzas. Así que, tenemos que las transformaciones de Möbius armónicas de la forma $f = h + \alpha\bar{h}$, donde h es una semejanza llevan elipses en elipses.

\Rightarrow) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que h no es una semejanza, entonces la imagen de cualquier elipse usando h es una curva real bicuadrada. Queremos llegar a que la imagen de una curva real bicuadrada bajo la aplicación lineal $z \rightarrow \alpha\bar{z}$ no puede ser una elipse.

La ecuación (5.1) la podemos escribir en coordenadas complejas, es decir, $z = x + iy$, y simplificando obtenemos

$$M(z^2 + \bar{z}^2) + Nz\bar{z} - 1 = 0, \quad (5.3)$$

donde $M = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right)$ y $N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right)$.

Si le aplicamos la transformación $w = h(z)$, siendo h una transformación de Möbius genérica, nos sale una curva real bicuadrada que satisface la siguiente ecuación implícita

$$c_{22}w^2\bar{w}^2 + c_{21}w^2\bar{w} + c_{12}w\bar{w}^2 + c_{20}w^2 + c_{11}w\bar{w} + c_{02}\bar{w}^2 + c_{10}w + c_{01}\bar{w} + c_{00} = 0. \quad (5.4)$$

Nos interesa especificar dos coeficientes pues para discutir las cónicas los necesitaremos. Estos son c_{22} y c_{21} :

$$c_{22} = Md^2\bar{c}^2 + M\bar{d}^2c^2 + N|c|^2|d|^2 - |c|^4, \quad (5.5)$$

$$c_{21} = -2M\bar{a}cd^2 - 2M\bar{b}dc^2 - N\bar{a}c|d|^2 - N\bar{b}d|c|^2 + 2\bar{a}cc^2. \quad (5.6)$$

Continuamos aplicando $W = z + \alpha\bar{z}$ a (5.4), realizando varias operaciones nos encontramos con la siguiente curva

$$\begin{aligned} & c'_{40}W^4 + c'_{04}\bar{W}^4 + c'_{13}w^3\bar{W} + c'_{13}W\bar{W}^3 + c'_{30}W^3 + c'_{03}\bar{W}^3 + c'_{22}W^2\bar{W}^2 \\ & + c'_{21}W^2\bar{W} + c'_{12}W\bar{W}^2 + c'_{20}W^2 + c'_{11}W\bar{W} + c'_{02}\bar{W}^2 + c'_{10}W + c'_{01}\bar{W} + c'_{00} = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los coeficientes complejos verifican que $c'_{jk} = \overline{c'_{kj}}$. Obtenemos los coeficientes como

$$\begin{aligned} c'_{40} &= (1 - |\alpha|^2)^{-4}\bar{\alpha}^2c_{22}, \\ c'_{04} &= (1 - |\alpha|^2)^{-4}\alpha^2c_{22}, \\ c'_{31} &= -2\bar{\alpha}(1 - |\alpha|^2)^{-4}(1 - |\alpha|^2)c_{22}, \\ c'_{13} &= -2\alpha(1 - |\alpha|^2)^{-4}(1 - |\alpha|^2)c_{22}, \\ c'_{30} &= \bar{\alpha}(1 - |\alpha|^2)^{-3}(\bar{\alpha}c_{12} - c_{21}), \\ c'_{03} &= \alpha(1 - |\alpha|^2)^{-3}(\alpha c_{21} - c_{12}), \\ c'_{22} &= (1 - |\alpha|^2)^{-4}(1 + 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4)c_{22}, \\ c'_{21} &= (1 - |\alpha|^2)^{-3}((1 + 2|\alpha|^2)c_{22} - \bar{\alpha}(2 + |\alpha|^2)c_{11}), \\ c'_{12} &= (1 - |\alpha|^2)^{-3}((1 + 2|\alpha|^2)c_{12} - \alpha(2 + |\alpha|^2)c_{21}), \\ c'_{20} &= (1 - |\alpha|^2)^{-2}(c_{20} + \bar{\alpha}^2c_{02} - \bar{\alpha}c_{11}), \\ c'_{02} &= (1 - |\alpha|^2)^{-2}(\alpha^2c_{20} + c_{02} - \alpha c_{11}), \\ c'_{11} &= (1 - |\alpha|^2)^{-2}((1 + |\alpha|^2)c_{11} - 2\alpha c_{20} - 2\bar{\alpha}c_{02}), \\ c'_{10} &= (1 - |\alpha|^2)^{-2}(c_{11} - \bar{\alpha}c_{01}), \\ c'_{01} &= (1 - |\alpha|^2)^{-2}(c_{01} - \alpha c_{10}), \\ c'_{00} &= c_{00}. \end{aligned}$$

Ahora según los valores de c_{22} tenemos dos casos:

(Caso 2. 1) Si $c_{22} \neq 0$, tenemos que

$$c'_{40} \neq 0, c'_{04} \neq 0, c'_{31} \neq 0, c'_{13} \neq 0, c'_{22} \neq 0,$$

entonces los coeficientes de grado 3 y 4 son diferentes a 0, por tanto, no puede ser una elipse.

(Caso 2. 2) Si $c_{22} = 0$, nos encontramos con que los coeficientes que antes eran distintos a cero, ahora son iguales a cero,

$$c'_{40} = c'_{04} = c'_{31} = c'_{13} = c'_{22} = 0.$$

También tenemos que c'_{03} y c'_{12} no pueden ser 0 al mismo tiempo. De nuevo, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $c'_{03} = c'_{12} = 0$. Entonces tenemos que $c'_{21} = c'_{30} = 0$, pues recordemos que $c'_{jk} = c'_{kj}$. Despejando en las ecuaciones de $c'_{03} = 0$ y $c'_{12} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha c_{21} &= c_{12} \\ c_{12} &= \frac{\alpha(2 + |\alpha|^2)}{1 + 2|\alpha|^2} c_{21}. \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones tenemos

$$(|\alpha|^2 - 1)c_{21} = 0.$$

De nuevo, tenemos dos casos, si $c_{21} \neq 0$, entonces $|\alpha| = 1$, lo cual es una contradicción, por la definición 5.2. Por el otro lado, si $c_{21} = 0$, entonces $c_{12} = 0$ por lo que vimos antes. Pero c_{22} y c_{21} no pueden ser 0 al mismo tiempo, sino en las fórmulas (5.5) y (5.6), tendríamos que $d = 0$ y entonces $c = 0$ es una contradicción. Por tanto, la curva imagen no puede ser una elipse.

Luego, la transformación de Möbius armónica que lleva en elipses en elipses es una semejanza armónica de forma

$$f = h + \alpha \bar{h},$$

siendo h una semejanza. □

Observación. *Este resultado nos permite caracterizar las transformaciones de Möbius armónicas que llevan elipses en elipses.*

Por otro lado, con la demostración de este teorema también hemos obtenido una prueba del hecho de que las transformaciones de Möbius con $c \neq 0$ no pueden llevar elipses en elipses.

5.2. Otras transformaciones

En esta sección comentaremos varios artículos de interés sobre caracterizaciones de transformaciones de Möbius, aunque no los analizaremos en profundidad, sí destacaremos las ideas principales.

Primero visitamos un artículo por O.Demirel en el que da una caracterización de las transformaciones de Möbius usando triángulos hiperbólicos [16].

Para caracterizar las transformaciones de Möbius utiliza dos objetos del espacio hiperbólico que no hemos visto anteriormente, el girotriángulo y su giroárea. Para ello

nos tenemos que ir al libro de Ungar [17], y para definir dichos objetos necesitamos definir un objeto más básico, el girovector.

Este es el análogo al vector que usamos en la geometría euclídea, pero en este caso en la geometría hiperbólica.

A partir de este concepto, definimos la girotraslación, que igual que con el girovector, este se corresponde con la traslación en el espacio de girovectores.

Junto a estos dos conceptos, Demirel define la adición de Möbius, \oplus , como sigue.

Definición 5.8. *La transformación de Möbius más general del disco en el plano complejo*

$$z \rightarrow e^{i\theta} \frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z} = e^{i\theta} (z_0 \oplus z)$$

define la adición de Möbius en el disco, permitiendo ver la transformación de Möbius del disco como una girotraslación hacia la izquierda seguida de una rotación. De manera análoga se define \ominus como la resta de Möbius y $\ominus z = -z$.

Con estos conceptos podemos definir qué es un girotriángulo y su giroárea.

Definición 5.9. *Un girotriángulo ΔABC en el \mathbb{D} es un objeto del espacio hiperbólico formado por tres puntos del disco, llamados vértices, y los girovectores $\ominus A \oplus B$, $\ominus B \oplus C$ y $\ominus C \oplus A$.*

Podemos entender el girotriángulo como un triángulo en \mathbb{D} , la principal diferencia con un triángulo plano es que la suma de sus ángulos es menor que 180.

Definición 5.10. *La giroárea $|\Delta ABC|$ del girotriángulo ΔABC en \mathbb{D} con vértices A, B y C , y con ángulos correspondientes α, β, γ viene dado por*

$$|\Delta ABC| = \frac{1}{2} \frac{|B \ominus C| |A \ominus C| \sin \gamma}{1 - |B \ominus C| |A \ominus C| \cos \gamma}.$$

Entonces, Demirel prueba que una transformación que lleva el \mathbb{D} en sí mismo, conserva los girotriángulos y sus giroáreas si y solo si es una transformación de Möbius. Es decir, las transformaciones de Möbius conservan los girotriángulos y las giroáreas en \mathbb{D} , esto es muy interesante, pues esto que es trivial para las semejanzas $c = 0$, también se tiene en el caso $c \neq 0$, por ejemplo, con las inversiones.

Otro artículo sobre caracterizaciones de las transformaciones de Möbius interesante viene, de nuevo, escrito por Demirel junto a Seyrantepe [18], en este caracterizan las transformaciones de Möbius según polígonos hiperbólicos regulares dentro del disco. Es decir, las transformaciones de Möbius llevan polígonos hiperbólicos regulares en polígonos hiperbólicos regulares.

Para terminar esta sección veamos un artículo realizado por otros autores, en este caso Haruki y Rassias, que dan una nueva caracterización usando los puntos de Apolonio de un triángulo [19].

Para entender la idea necesitamos saber que es un punto de Apolonio.

Definición 5.11. Sea un triángulo ΔABC y L un punto del plano complejo. Denotamos por $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AL}$, $y = \overline{BL}$, $z = \overline{CL}$. Si se cumple $ax = by = cz$ entonces L se dice que es un punto de Apolonio de dicho triángulo. En la figura 5.3 tenemos un ejemplo de construcción de un punto de Apolonio.

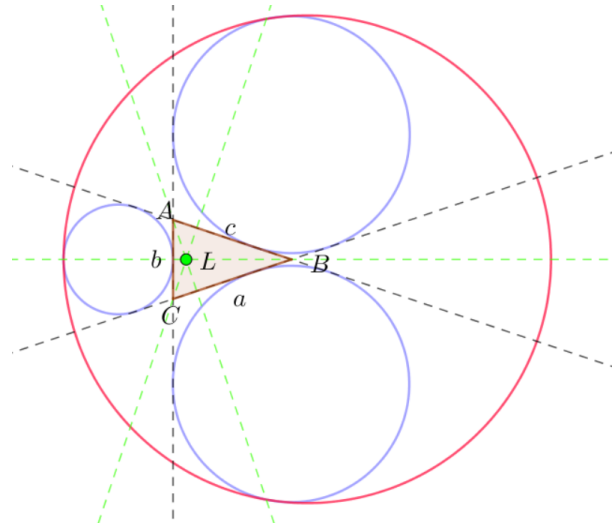


Figura 5.3: Construcción de un punto de Apolonio L de un triángulo isósceles.

Se tiene la siguiente propiedad.

Teorema 5.12. Sea un triángulo ΔABC en el plano complejo. Entonces el número de puntos de Apolonio del triángulo es a lo sumo dos.

En este artículo demuestran que una transformación que lleva un punto de Apolonio de un triángulo ΔABC , en otro punto de Apolonio de otro triángulo $\Delta A'B'C'$ es una transformación de Möbius, y viceversa.

Se comprueba que el estudio de diferentes caracterizaciones de diversas transformaciones de Möbius sigue siendo un campo de estudio que produce interesantes resultados.

Bibliografía

- [1] Scriba, P. Schreiber, 5000 years of geometry. Birkhäuser/Springer, (2015).
- [2] A. Lo Bello, R. Arnzen, The commentary of al-Nayrizi on Books II-IV of Euclid's Elements of Geometry with a translation of that portion of Book I missing from ms Leiden or. 399.1 but present in the newly discovered Qom manuscript edited by Ru'diger Arnzen. Brill, (2009).
- [3] Proclus, Translates by Glenn, R. Morrow and J. M. Dillon , Proclus' Commentary on Plato's Parmenides. Princeton University Press, (1992).
- [4] Euclides. Elementos. Editorial Gredos, (1991).
Se han consultado diversas páginas web correspondientes al siguiente servidor:
- [5] The MacTutor History of Mathematics archive. School of Mathematics and Statistics. University of St. Andrews, Scotland. www-history.mcs.st-and.ac.uk
- [6] B. Szénássy. History of Mathematics in Hungary Until the 20th Century. Akadémiai Kiadó, (1992).
- [7] M. P. do Carmo. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Alianza Editorial, Madrid, (1990).
- [8] M. Á. Hernández Cifre y J. A. Pastor. Un curso de Geometría Diferencial. CSIC, Madrid, (2010).
- [9] Profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla. Apuntes de Geometría Local de Curvas y Superficies, Sevilla, (2021).
- [10] I. Ruiz Donaire, M. Prado Rodríguez J. Rebollo Bueno, Resumen de la asignatura Geometría Aplicada, Sevilla, (2022).
- [11] N. Yilmaz Özgür, Ellipses and harmonic Möbius transformations, An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat., (2010).
- [12] M. Chuaqui, P. Duren and B. Osgood, The Schwarzian Derivative for Harmonic Mappings, J. Anal. Math., 91 (2003), 329-351.
- [13] M. Chuaqui, P. Duren and B. Osgood, Ellipses, Near Ellipses, and Harmonic Möbius Transformations, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), 2705-2710.

- [14] A. Coffman and M. Frantz, Möbius Transformations and Ellipses, *The Pi Mu Epsilon Journal*, 6 (2007), 339-345.
- [15] A. Lascurain Orive, Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional, (2004).
- [16] O. Demirel, A Characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic triangles, *J. Math. Anal. Appl.* 198 (2013), 457-461.
- [17] A. A. Ungar, "Analytic Hyperbolic Geometry: Mathematical Foundations and Applications", Published by World Scientific, (2005).
- [18] O. Demirel, E.S. Seyrantepe, A Characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic regular polygons, *J. Math. Anal. Appl.* 374 (2011), 566-572.
- [19] H. Haruki, T.M. Rassias, A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius Points of Triangles, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1996), 14-22.
- [20] A. Coffman and M. Frantz, Ellipses in the Inversive Plane, MAA Indiana Section Meeting, Mar. (2003).
- [21] L. Trigo Gallardo, Geometría Hiperbólica, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Sevilla.
- [22] L. González-Miret Zaragoza, Möbius transformations, Trabajo de fin de grado, Universidad de Sevilla (2019).
- [23] M. P. Hitchman, Geometry with an Introduction to Cosmic Topology, Linfield College (2018).
- [24] P. Duren, Harmonic mappings in the plane. Vol. 156. Cambridge university press, (2004).