Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

**Trabajo Fin de Grado:**

# Controlabilidad de EDOs y EDPs lineales

Autor: María Araceli Martos del Espino

Tutor: Enrique Fernandez Cara

8 de junio de 2023

# Índice general

# Introducción

En este trabajo presentamos resultados teóricos de control para EDOs y EDPs lineales.

La controlabilidad de ecuaciones ha sido un tema de interés creciente en las ultimas décadas que ha atraído a buena parte de la comunidad matemática dedicada al control. Este tipo de ecuaciones y sistemas surgen, por ejemplo, en el estudio de diversos sucesos relacionados con la Física, la Biología o la Química.

En el Capítulo 1 estudiaremos brevemente la controlabilidad de EDOs. Al tratarse de un problema muy sencillo, los resultados que veremos serán casi inmediatos. En todo este capítulo trabajaremos con el sistema de control lineal variable en el tiempo $y_t = f(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$, $t \in (0, T)$ y resolveremos su correspondiente Problema de Cauchy. Una vez resuelto, estudiaremos la controlabilidad definiendo en primer lugar la controlabilidad exacta y a continuación demostrando que el sistema de control lineal es exactamente controlable.
Terminaremos este capítulo viendo un caso muy particular donde $f(t)$ y $B(t)$ son dos constantes, plantearemos un problema de mínimos y veremos cuál es el "mejor" control $v$.

En el Capítulo 2 trataremos la controlabilidad de SDOs lineales. En este capítulo los problemas que vamos a plantear ya no serán tan inmediatos como en el caso de las EDOs lineales. En esta ocasión, trabajaremos con el SDO lineal $y_t = A(t){\cdot}y + B(t){\cdot}v(t)$, $t \in [0, T]$, donde $A \in \mathcal{C}^0([0, T])^{n\times n}$ y $B \in \mathcal{C}^0([0, T])^{n\times m}$. El caso más interesante será cuando $m \leq n$, que corresponde a la situación donde tratamos de controlar "muchas" ecuaciones con "pocos" controles.

De nuevo, resolveremos su correspondiente problema de Cauchy y definiremos el Gramiano de controlabilidad, que será utilizado para demostrar un teorema que relaciona la controlabilidad exacta del sistema lineal con el Gramiano.
También enunciaremos el Teorema de Cayley-Hamilton y demostraremos con detalle el teorema más importante de esta sección, la *condición de Kalman*, que establece una condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal sea exactamente controlable en un tiempo finito.
A continuación veremos, sin demostración, una condición suficiente que generaliza la condición de Kalman y daremos ejemplos que relaciona esta condición con SDOs controlables y no controlables.
Terminaremos este capítulo construyendo, de nuevo, un control muy particular usando la teoría de Fenchel-Rockefeller.

Por último, en el Capítulo 3, estudiamos la controlabilidad de algunas EDPs lineales de segundo orden, en especial de la EDP del calor. Por esta razón, el capítulo comienza describiendo brevemente el origen de esta ecuación. A continuación, estudiaremos en profundidad la controlabilidad con la ecuación del calor en una variable espacial no homogénea $y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega$ y consideraremos el caso más interesante en el cual $\omega$ es un pequeño abierto de $\Omega$.
Plantearemos el problema de control nulo que consiste en que dado $y_0 \in L^2(\Omega)$, buscamos un control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que $y(\cdot, T) = 0$. Para resolver este problema, dividiremos su estudio en 3 pasos que iremos describiendo a lo largo del capítulo. Primero estudiaremos la existencia de un estado para cada control. Después veremos la *Condición de Observabilidad* y demostraremos con detalle un teorema que relaciona el control nulo con la desigualdad de observabilidad. Por último, estudiaremos con rigurosidad la *Desigualdad de Carleman.*

Terminaremos el trabajo con algunos resultados adicionales sobre la desigualdad de Carleman y el control exacto de la ecuación del calor. También comentaremos brevemente sobre el control frontera y el control exacto a trayectorias.

# Introduction

In this paper we present theoretical control results for linear ODEs and PDEs.

The controllability of equations has been a topic of growing interest in the last decades that has attracted a good part of the mathematical community dedicated to control. This type of equations and systems arise, for example, in the study of various events related to Physics, Biology or Chemistry.

In Chapter 1 we will briefly study the controllability of ODE's. As it is a very simple problem, the results that we will see will be almost immediate. Throughout this chapter we will work with the linear control system time-varying $y_t = f(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$, $t \in (0, T)$ and we will solve its corresponding Cauchy Problem. Once it is solved, we will study the controllability firstly by showing exact controllability and then demonstrating that the linear control system is exactly controllable. We will finish this chapter by looking at a very particular case where $f(t)$ and $B(t)$ are two constants, we will pose a problem of minimums and we will see which is the "best" control $v$.

In Chapter 2 we will discuss the controllability of linear SDOs. In this chapter the problems we are going to pose will not be as immediate as in the case of linear ODEs. This time, we will work with the linear SDO $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$, $t \in [0, T]$, where $A \in \mathcal{C}^0([0, T])^{n \times n}$ and $B \in \mathcal{C}^0([0, T])^{n \times m}$. The most interesting case will be when $m \leq n$, which is the situation where we try to control "many" equations with "few" controls.
Again, we will solve it's corresponding Cauchy problem and define the contro-

llability Gramian, which we will use to prove a theorem which relates the exact controllability of the linear system with the Gramian. We will also state the Cayley-Hamilton Theorem and we will prove in detail the most important theorem of this the most important theorem of this section, the Kalman condition, which establishes a necessary and sufficient condition for the linear system to be exactly controllable in finite time.
In the following we will see, without proof, a sufficient condition that generalizes the Kalman condition and we will give examples relating this condition with controllable and non-controllable SDOs.
We will finish this chapter by constructing, once again, a very particular control using the Fenchel-Rockefeller theory.

Finally, in Chapter 3, we study the controllability of some second order linear PDEs, especially the heat PDE. For this reason, the chapter begins by briefly describing the origin of this equation. Next, we will study in depth the controllability with the heat equation in an nonhomogeneous spatial variable $y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega$ and we will consider the most interesting case, in which $\omega$ is a small open of $\Omega$.
We will pose the null control problem which consists in the fact that given $y_0 \in L^2(\Omega)$ we are looking for the control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ such that $y(\cdot, T) = 0$.
To solve this problem, we will divide its study in 3 steps that we will describe throughout the chapter. First we will study the existence of a state for each control. Then we will see the observability condition and we will demonstrate in detail a theorem that relates the null control to the observability inequality.
Finally, we will rigorously study Carleman's inequality.

We will finish the work with some additional results on Carleman's inequality and the exact control of the heat equation. We will also briefly comment on the boundary control and the exact control to trajectories.

# Capítulo 1

# Controlabilidad de EDOs lineales

En este primer capítulo vamos a tratar la controlabilidad de sistemas gobernados por EDOs lineales. Al tratarse de problemas muy sencillos que se pueden resolver explicitamente, los resultados que vamos a obtener son casi inmediatos.

Al final de este capítulo, consideraremos algunos ejemplos de EDOs no lineales donde todo se complica más.

Comenzaremos definiendo los conceptos básicos, presentaremos el problema que se desea resolver y enunciaremos algunos resultados.

## 1.1. Definiciones fundamentales. El problema de Cauchy

Comenzaremos definiendo una ecuación diferencial ordinaria.

**Definición 1.1.** Llamamos **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) a una igualdad en la que aparecen derivadas ordinarias de una función desconocida (la variable dependiente) respecto a una única variable independiente.

**Ejemplo 1.1.1.** Vamos a dar 2 ejemplos de EDOs lineales y EDOs no lineales para mayor claridad:

- EDO lineal

  Un ejemplo puede ser

$$y_t = f(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$$

  que es el caso que vamos a tratar en este capítulo.

- EDO no lineal

  Un ejemplo es la *ecuación de Ricatti*, que es una EDO no lineal de primer orden que viene dada por:

$$y_t = a(t) + b(t) \cdot y + c(t) \cdot y^2$$

Una vez que tenemos la definición de una EDO y algunos ejemplos, podemos dar algunas notaciones más específicas.

En todo este capítulo, $T$ denota un número real positivo. También supondremos dadas dos funciones $f, B \in \mathcal{C}^0([0,T])$ y una familia de controles $v \in L^2(0,T)$.

Consideraremos el sistema de control lineal variable en tiempo

$$y_t = f(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t), \quad t \in (0,T). \tag{1.1}$$

Vamos a suponer que esta EDO modela un fenómenos físico, químico, biológico, etc donde $y(t)$ determina el estado del sistema en el tiempo $t$, en el que $y$ crece o decrece en tiempo cuando $v = 0$. Por otra parte, $v(t)$ determina cómo actuamos sobre el sistema.

Definimos $y = y(t)$ como el estado del sistema y $v = v(t)$ como el control.

Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ y cada $v \in L^2(0,T)$, consideramos el correspondiente **Problema de Cauchy**:

$$\begin{cases} y_t = f(t) \cdot y \ + \ B(t) \cdot v(t), \quad t \in t(0,T) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Si el sistema está descrito por (1.2), entonces empieza en $t = 0$ con $y_0$, va evolucionando según la EDO lineal anterior y sobre el sistema físico actuaría $v$.

Vamos a resolverlo.

Para ello, observamos que todas las soluciones de (1.2) se pueden obtener sumando una solución fija de esta EDO a las soluciones de la EDO lineal homogénea asociada. Dicho de otro modo, la solución general de (1.2) es:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde $y_p$ es una solución particular de (1.2) e $y_h$ es la solución general de la EDO $y_t = f(t) \cdot y$.

Vamos a buscar primero la solución de la ecuación homogénea, $y_h$. En este caso, estamos ante la EDO

$$y_t = f(t) \cdot y$$

que es una ecuación separable. Vamos a resolverla. Supongamos de momento que $y > 0$.

Reescribimos la ecuación en la forma:

$$\frac{dy}{dt} \ = \ f(t) \cdot y$$

Y operamos con los símbolos $dy$ y $dt$ formalmente, como si fueran números reales. Obtenemos:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = f(t)$$

Integramos ambos lados con respecto a $t$ y obtenemos fácilmente que:

$$\log(y(t)) \ = \ \int f(t)dt \ + \ C$$

Entonces, tendremos:

$$\log(y(t)) \ = \ F(t) \ + \ C$$

donde $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$.

Luego,

$$y_h(t) \ = \ C \cdot e^{F(t)}$$

Razonando igualmente cuando $y < 0$, llegamos a la misma expresión, donde ahora $C < 0$.
Una vez que tenemos la solución homogénea hay que sumarle una solución particular que vamos a calcular usando el *método de Lagrange*.
Hay que tomar: $y_p(t) = C(t) \cdot e^{F(t)}$. Sustituimos y quedaría:

$$C' e^{F(t)} = B(t) \cdot v(t)$$

Entonces

$$C(t) = \int_0^t e^{-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds + K,$$

donde $K$ es una nueva constante. Podemos tomar $K = 0$ y entonces, la solución particular queda así:

$$y_p(t) = e^{F(t)} \cdot \int_0^t e^{-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds$$

Por tanto la **solución general** de la EDO completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C \cdot e^{F(t)} + e^{F(t)} \cdot \int_0^t e^{-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds$$

Ahora imponemos la condición inicial $y(0) = y_0$ y tendríamos que $C = y_0$. Luego, sustituyendo obtenemos finalmente que la solución al Problema de Cauchy es:

$$\boxed{y(t) = e^{F(t)} \cdot y_0 + e^{F(t)} \cdot \int_0^t e^{-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds}$$

Esta fórmula muestra que la evolución de $y$ se debe al valor inicial $y_0$ y a la acción de control $v$. Además, esta fórmula admite muchas generalizaciones como puede ser:

- A sistemas de EDO's lineales, como por ejemplo sería:

$$\begin{cases} y_t = A \cdot y + B \cdot v(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$.

- Y a EDP's lineales de primer y segundo orden en tiempo, como por ejemplo:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v(t), \quad (x,t) \in Q \\ y = 0, \quad (x,t) \in \sum \\ y_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Una vez que ya tenemos resuelto el Problema de Cauchy, podemos analizar la controlabilidad del problema.

## 1.2. Controlabilidad exacta

Definamos ahora la controlabilidad de la EDO (1.1);

$$y_t = f(t) \cdot y(t) + B(t) \cdot v(t)$$

**Definición 1.2** (Controlabilidad exacta)**.** Diremos que (1.1) es **exactamente controlable** en tiempo T si para cada $y_0$, $y_T \in \mathbb{R}$ existe $v \in L^2(0,T)$ tal que la solución del correspondiente problema de Cauchy (1.2) verifica $y(T) = y_T$.

Sabemos que (1.1) es exactamente controlable en tiempo $T$ si y sólo si dados un estado inicial y un estado final cualesquiera, siempre existe un control $v \in L^2(0,T)$ que lleva al sistema de $y_0$ a $y_T$.

**Teorema 1.1.** *La EDO* (1.1) *es* ***exactamente controlable****.*

***Demostración:*** Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ y cada $v \in L^2(0,T)$, la solución de (1.2) es

$$\begin{cases} y(t) = e^{F(t)} \cdot y_0 + e^{F(t)} \cdot \displaystyle\int_0^t e^{-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds \\ \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

Entonces, tendremos:

$$y(T) = y_T \Longleftrightarrow \int_0^T e^{F(t)-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds = y_T - e^{F(t)} y_0,$$

con $e^{F(t)-F(s)} = e^{\int_s^T f(\sigma)\,d\sigma}$.

Para mayor claridad, vamos a diferenciar dos casos:

- **Caso particular**

  Tomamos $B(t) = 1$. Entonces,

$$v(t) = \lambda \cdot e^{-\int_t^T f(\sigma)\,d\sigma} \Longrightarrow \int_0^T e^{F(t)-F(s)} \cdot v(s)\,ds = \lambda \cdot T$$

  En este caso, $y(T) = y_T \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{T}\Big(y_T - e^{F(t)}\,y_0\Big)$.

  Luego, siempre hay control exacto: basta fijar este valor de $\lambda$ y tomar

$$v(t) = \lambda \cdot e^{\int_t^T f(\sigma)\,d\sigma}, \forall t \in [0,T]$$

- **Caso general**

  Ahora tenemos $B \in \mathcal{C}^0\Big([0,T]\Big)$ arbitrario, con $B \not\equiv 0$.

  Tomamos:

$$v(t) = \lambda \cdot B(t) \cdot e^{-\int_t^T f(\sigma)\,d\sigma}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.3}$$

  Entonces tendremos,

$$\int_0^T e^{F(t)-F(s)} \cdot B(s) \cdot v(s)\,ds = \lambda \cdot \int_0^T \Big(B(s)\Big)^2 ds, \quad \text{con } \int_0^T \Big(B(s)\Big)^2 ds > 0$$

  Luego, ahora

$$y(T) = y_T \Longleftrightarrow \lambda \cdot \int_0^T \Big(B(s)\Big)^2 ds = y_T - e^{F(t)}\,y_0$$

  Esto a su vez es equivalente a tomar

$$\lambda = \frac{\Big(y_T - e^{F(t)} y_0\Big)}{\|B\|^2_{\mathcal{L}^2(0,T)}}$$

  que es perfectamente definible.

Luego, también hay control exacto: basta fijar este nuevo valor de $\lambda$ y tomar $v$ como en (1.3). □

## 1.3. Un caso muy particular

Ahora vamos a estudiar qué ocurre si tenemos $f(t) \equiv a$ y $B(t) \equiv b$, con $a, b$ dos constantes.

Esto correspondería a la EDO:

$$y_t = a \cdot y + b \cdot v(t), \quad \forall t \in (0, T)$$

caracterizada por crecimientos y decrecimientos constantes.

Lo podemos observar por ejemplo en la dinámica de poblaciones (*Ley de Malthus*).

En este caso, la solución sería:

$$\boxed{y(t) = e^{at}\, y_0 + b \int_0^t e^{a(t-s)} \cdot v(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T]}$$

**Cuestión interesante**

¿Cuál es el **"mejor" control** que conduce el sistema de $y_0$ a 0 en tiempo $T$?

Hemos visto que un control que realiza esta tarea es

$$v(t) = \lambda \cdot e^{-a(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T], \qquad \text{con } \lambda = -\frac{y_0}{b} e^{-aT} \tag{1.4}$$

Este es un posible control, pero no podemos asegurar que sea el "mejor".

El "mejor" es el que minimiza la norma, es decir, el que hace $\|v\|_{L^2(0,T)}$ mínima.

Es decir, el control de la norma mínima es el que corresponde al mínimo esfuerzo que necesitamos para llevar el sistema de una situación inicial $y_0$ a la situación deseada.

Para resolverlo, planteamos el siguiente problema de mínimos:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |v(t)|^2\,dt, \\ \text{Sujeto a} \quad y_t = a\cdot y + b\cdot v \text{ en } (0,T), \quad y(0)=y_0, \quad y(T)=0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Se puede probar que este problema posee solución única, dada por:

$$v(t) = \widehat{\varphi}(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

con $\widehat{\varphi}(t)$ la solución de:

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}' = & a\cdot\widehat{\varphi}, \quad t\in(0,T) \\ \widehat{\varphi}(T) & = \widehat{\varphi}_T \end{cases}$$

y $\widehat{\varphi}_T$ la solución de:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |\varphi|^2\,dt + \varphi(0)y_0, \\ \text{Sujeto a} \quad \varphi_T \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tenemos por tanto, el siguiente teorema:

**Teorema 1.2.**

1. *El problema (1.5) posee solución única (el "mejor" control) $\widehat{v}$.*

2. *$\widehat{v}$ viene dado por*

$$\widehat{v}(t) = -\lambda\cdot b\cdot e^{a(T-t)}\,\forall t\in[0,T], \qquad \textit{con } \lambda = \frac{e^{aT}\cdot y_b}{b^2\cdot\displaystyle\int_0^T e^{2\cdot a\cdot(T-t)}\,dt}$$

.

***Demostración:*** Consideremos el problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \underbrace{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |v(t)|^2\,dt,}_{F(v)} \\ \\ \text{Sujeto a} \quad y(T) = \underbrace{e^{aT}\cdot y_0 + b\displaystyle\int_0^T e^{a(T-s)}\cdot v(s)\,ds}_{G(v)} = 0 \end{cases}$$

Comenzamos viendo el primer apartado:

Tenemos que minimizar en el conjunto $\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(,T)\colon G(v) = 0\}$ la función $v \longmapsto \dfrac{1}{2}\|v\|^2_{\mathcal{L}^2(0,T)}$.

Por un lado tenemos que $\mathcal{U}_{ad}$ es una *variedad lineal cerrada*, de espacio soporte el ortogonal de la función $t \mapsto e^{a(T-t)}$. Más precisamente, $\mathcal{U}_{ad} = v_0 + \left[e^{a(T-\cdot)}\right]^{\perp}$, donde $v_0$ es la función dada por (1.4). En particular, tenemos que $\mathcal{U}_{ad}$ es un convexo cerrado no vacío.

Por otro lado, tenemos que $F\colon L^2(0,T) \mapsto \mathbb{R}$ es un caso especial de una función estrictamente convexa y continua.

Usando el *Principio del Calculo de Variaciones*, tenemos que existe una única $\widehat{v}$.

Vemos ahora el segundo apartado:

Como las funciones $F$ y $G$ son continuamente diferenciables, podemos afirmar que la solución verifica: $F'(\widehat{v}) + \lambda G'(\widehat{v}) = 0$.

Tenemos que:

$$\begin{cases} F'(\widehat{v}) = \widehat{v}, \\ G'(\widehat{v}) = b \cdot e^{a(T-\cdot)} \end{cases}$$

Luego, aplicando el *Teorema de los Multiplicadores de Lagrange*, obtenemos:

$$\boxed{\widehat{v} = \lambda \cdot b \cdot e^{a(T-\cdot)}} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces, tendríamos:

$$\begin{cases} e^{aT} \cdot y_0 + b \displaystyle\int_0^T e^{a(T-s)} \cdot \widehat{v}(s)\, ds = 0, \\ \\ \widehat{v}(t) = -\lambda \cdot b \cdot e^{a(T-t)} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^{aT} \cdot y_0 - \lambda \cdot b^2 \cdot \int_0^T e^{2\cdot a\cdot(T-t)}\, dt = 0$$

Con esto obtenemos entonces que:

$$\lambda = \frac{e^{aT} \cdot y_0}{b^2 \cdot \displaystyle\int_0^T e^{2\cdot a\cdot(T-t)}\, dt} = \frac{e^{aT} \cdot y_0}{b^2 \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{2Ta} - 1}{2a}} = \frac{2a \cdot (e^{aT} \cdot y_0)}{b^2 \cdot (\mathrm{e}^{2Ta} - 1)}$$

.

Con este valor de $\lambda$ ya tenemos el "mejor" control $\widehat{v}$ en $\mathrm{L}^2(0,T)$ que es:

$$\widehat{v}(t) = -\left(\frac{2a \cdot (e^{aT} \cdot y_0)}{b^2 \cdot (\mathrm{e}^{2Ta} - 1)}\right) \cdot b \cdot e^{a(T-t)}$$

Que simplificando quedaría:

$$\boxed{\widehat{v}(t) = -\frac{2a \cdot e^{a(T-t)} \cdot (e^{aT} - y_0)}{b \cdot (e^{2aT} - 1)}}$$

Luego, acabamos de demostrar que existe un único control $\widehat{v}$ y que viene dado por:

$$\widehat{v}(t) = -\frac{2a \cdot e^{a(T-t)} \cdot (e^{aT} - y_0)}{b \cdot (e^{2aT} - 1)}$$

$\square$

# Capítulo 2

# Controlabilidad de SDOs lineales

En este segundo capítulo vamos a tratar la controlabilidad de SDOs lineales. Estos problemas ya no son tan sencillos como los que acabamos de ver en el Capítulo 1.

Al igual que antes, comenzaremos definiendo los conceptos básicos, presentaremos el problema que queremos resolver y concluiremos con los resultados más importantes.

## 2.1. Definiciones fundamentales

Comenzaremos definiendo un sistema diferencial ordinario.

**Definición 2.1.** Llamamos **sistema diferencial ordinario (SDO)** a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias donde aparecen varias variables dependientes (generalmente tantas como ecuaciones).

**Ejemplo 2.1.1.** Vamos a dar 2 ejemplos de SDOs (uno lineal y otro no lineal), para mayor claridad:

- SDO lineal

$$y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.1}$$

que va a ser el caso que vamos a tratar en este capítulo.

Por simplicidad, supondremos siempre que $A \in \mathcal{C}^0([0,T])^{n\times n}$ y $B \in \mathcal{C}^0([0,T])^{n\times m}$, con $n, m \geq 1$ y $m \leq n$.

El caso interesante es aquél en que $m$ es "pequeño" y $n$ es "grande". Corresponde a la situación en que tratamos de controlar "muchas" ecuaciones con "pocos" controles.

- SDO no lineal

  Un ejemplo puede ser el modelo simplificado de depredador-presa de *Lotka-Volterra*, que se usa para describir dinámicas de sistemas biológicos en las que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador:

$$\begin{cases} x_t = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \\ y_t = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y \end{cases}$$

  donde $x = x(t)$ determina la población de presas, $y = y(t)$ determina los depredadores y $a$, $b$, $c$ y $d$ son constantes positivas.

## 2.2. Controlabilidad exacta

Al igual que hicimos en el Capitulo 1, vamos a analizar la controlabilidad exacta de SDO lineales.

**Definición 2.2.** Diremos que (2.1) es **exactamente controlable** en tiempo $T$ si, para cada $y_0$, $y_T \in \mathbb{R}$, existe $v \in L^2(0,T)^m$ tal que la solución $y$ del SDO lineal correspondiente verifica $y(T) = y_T$.

Vamos a calcular la solución del problema de Cauchy (2.1). Para ello, utilizaremos una *matriz fundamental*, $F = F(t)$, que verifica:

- $F \in \mathcal{C}^1([0,T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $F'(t) = A(t) \cdot F(t)$ para todo $t \in [0,T]$.
- $\det F(t) \neq 0$, para todo $t \in [0,T]$.

Como hicimos en el Capítulo 1, observamos que las soluciones de (2.1) se obtienen sumando una solución fija del mismo SDO a las soluciones del SDO lineal homogéneo.

Usando la *matriz fundamental*, sabemos que las soluciones del problema de Cauchy homogéneo vienen dadas por:

$$y_h = F(t) \cdot F(0)^{-1} \cdot y_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Hay que sumar a estas funciones una solución particular que calcularemos usando el *método de variación de las constantes* (o *método de Lagrange*) y la *matriz fundamental*.
Sea $\varphi(t) = F(t) \cdot h(t) \quad \forall t \in [0, T]$. Vamos a determinar $h \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ tales que $\varphi$ es solución del SDO lineal no homogéneo

$$y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t).$$

Imponemos el SDO lineal no homogéneo a la función $\varphi$ y obtenemos que

$$F(t) \cdot h'(t) = B(t) \cdot v(t),$$

de donde $h' = F(0)^{-1} \cdot B \cdot v$ y entonces $h$ será una primitiva de $F^{-1} B\, v$. En otras palabras, tenemos

$$h(t) = \int_0^t F(s)^{-1} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds\, + c \quad \forall t \in [0, T]$$

para algún $c \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, podemos tomar c = 0 y la función $\varphi$ vendrá dada por:

$$\varphi(t) = F(t) \cdot h(t) = F(t) \cdot \int_0^t F(s)^{-1} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T],$$

es decir, la solución particular es:

$$y_p(t) = \int_0^t F(t) \cdot F(s)^{-1} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Luego, la solución del problema de Cauchy (2.1) será:

$$\boxed{y(t) = F(t) \cdot F(0)^{-1} \cdot y_0 + \int_0^t F(t) \cdot F(s)^{-1} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T]}$$

Diremos que $y$ viene dada por la *fórmula de Lagrange* o *Principio de Duhamel*.

Una vez calculada la solución del problema de Cauchy (2.1), veremos que, con $A$ y $B$ independientes de $t$, entonces hay una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad exacta del SDO, conocida como la *Condición de Kalman*. Para ello, vamos a necesitar primero un par de nociones:

**Definición 2.3.** Sea $R(t_1, t_2) = F(t_1) \cdot F(t_2)^{-1}$ $\forall t \in [0, T]$, con $F$ una matriz fundamental cualquiera. Definimos el Gramiano de controlabilidad del sistema de control $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v$, como la matriz simétrica $n \times n$ dada por:

$$\begin{aligned} G := & \int_0^T R(T,\tau) \cdot B(\tau) \cdot B(\tau)^{tr} \cdot R(T,\tau)^{tr} \, d\tau = \\ = & \int_0^T F(T) \cdot F(\tau)^{-1} \cdot B(\tau) \cdot B(\tau)^{tr} \cdot \left(F(\tau)^{-1}\right)^{tr} \cdot F(T)^{tr} \, d\tau, \end{aligned}$$

donde, $B(\tau)^{tr}$, $F(\tau)^{tr}$ y $R(T,\tau)^{tr}$ respectivamente significan las traspuestas de $B(\tau)$, $F(\tau)$ y $R(T,\tau)$.

**Teorema 2.1.** *El sistema lineal $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$ es exactamente controlable si y solo si $G$ es invertible.*

***Demostración:***

$\boxed{\Longleftarrow}$ Primero vamos a suponer que $G$ es invertible y vamos a demostrar que el sistema $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$ es exactamente controlable.
Para ello, fijados $y_0$ y $y_1$ en $\mathbb{R}^n$ y sea $\overline{v} \in L^\infty([0,T]; \mathbb{R}^m)$ definida como:

$$\overline{v}(\tau) := B(\tau)^{tr} \cdot R(T,\tau)^{tr} \cdot G^{-1} \cdot \big(y_1 - R(T,0) \cdot y_0\big) \quad \forall \tau \in [0,T].$$

Entonces, sea $\overline{y}$ la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \overline{y}_t = A(t) \cdot \overline{y} + B(t) \cdot \overline{v}(t), & t \in [0,T], \\ \overline{y}(T) = y_0. \end{cases}$$

Usando el *Principio de Duhamel*, tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{y}(T) &= R(T,0)\cdot y_0 \\
&+ \int_0^T \underbrace{R(T,\tau)\cdot B(\tau)\cdot B(\tau)^{tr}\cdot R(T,\tau)^{tr}}_{G}\cdot G^{-1}\cdot \big(y_1 - R(T,0)\cdot y_0\big)\, d\tau \\
&= R(T,0)\cdot y_0 + \int_0^T G\cdot G^{-1}\cdot \big(y_1 - R(T,0)\cdot y_0\big)\, d\tau \\
&= R(T,0)\cdot y_0 + y_1 - R(T,0)\cdot y_0 \\
&= y_1
\end{aligned}$$

Luego, efectivamente, como $y_0$ e $y_1$ son arbitrarios en $\mathbb{R}^n$, deducimos que $y_t = A(t)\cdot y + B(t)\cdot v(t)$ es exactamente controlable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ahora vamos a suponer que $G$ no es invertible y vamos a demostrar que el sistema $y_t = A(t)\cdot y + B(t)\cdot v(t)$ <u>no</u> es exactamente controlable.

Entonces, $\exists\, \hat{y} \neq 0$ tal que $G\cdot\hat{y} = 0$, es decir, $\hat{y}^{tr}\cdot G\cdot \hat{y} = 0$. Sustituyendo el valor de $G$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\hat{y}^{tr}\cdot G\cdot \hat{y} = 0 \\
\Longleftrightarrow &\int_0^T \Big|B(\tau)^{tr}\cdot R(T,\tau)^{tr}\cdot \hat{y}\Big|^2 d\tau = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\hat{y}^{tr}\cdot R(T,\tau)\cdot B(\tau) = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Consideremos el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t = A(t)\cdot y + B(t)\cdot v(t), & t\in[0,T], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Usando de nuevo el *Principio de Duhamel*, obtenemos

$$y(T) = \int_0^T R(T,\tau)\cdot B(\tau)\cdot v(\tau)\, d\tau.$$

Luego, usando (2.2) obtenemos

$$\hat{y}^{tr}\cdot y(T) = \int_0^T \hat{y}^{tr}\cdot R(T,\tau)\cdot B(\tau)\cdot v(\tau)\, d\tau = 0$$

es decir, $\hat{y}^{tr}\cdot y(T) = 0$ y, como por hipótesis $y \neq 0$, entonces se debe cumplir que $y(T)$ pertenece (siempre independientemente de la elección de $v$) al complemento ortogonal de $\hat{y}$. Esto implica que el sistema $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$ no es exactamente controlable, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

A continuación, vamos a suponer que $A$ y $B$ son constantes. Usaremos el resultado siguiente:

**Teorema 2.2** (Cayley-Hamilton)**.** *Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ y sea*

$$p(\lambda) = det\ (\lambda \cdot I_n - A) = \lambda^n + p_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \cdot \lambda + p_0,$$

*su polinomio característico. Entonces $A$ verifica la ecuación característica correspondiente, es decir:*

$$p(A) = A^n + p_{n-1} \cdot A^{n-1} + \cdots + p_1 \cdot A + p_0 \cdot I_n = 0_n.$$

La demostración de este Teorema se puede encontrar en [2, 10].

**Teorema 2.3** (Condición de Kalman)**.** *El sistema lineal $y_t = A \cdot y + B \cdot v$ es exactamente controlable en el tiempo $T$ si y sólo si*

$$Span \left\{ A^i \cdot B \cdot v \mid v \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \ldots, n-1\} \right\} = \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

*es decir, si y sólo si la matriz $[A : B] := [B \,|\, A\,B \,|\, \cdots | A^{n-1}\,B]$ tiene rango máximo $n$.*

***Demostración:*** Partimos de la idea de que $A$ es una matriz de coeficientes constantes (que no depende de $t$). Entonces, podemos definir $R$, de forma que:

$$R(t_1, t_2) = e^{(t_1 - t_2) \cdot A}, \quad \forall (t_1, t_2) \in [0, T]^2,$$

Entonces tenemos que $G$ viene dado por:

$$G = \int_0^T e^{(T-\tau) \cdot A} \cdot B \cdot B^{tr} \cdot e^{(T-\tau) \cdot A^{tr}}\, d\tau, \tag{2.4}$$

Vamos a demostrar primero que (2.3) es <u>condición suficiente</u> para la controlabilidad ($\Longleftarrow$):

Lo haremos por *Reducción al Absurdo*:

Suponemos que el sistema lineal $y_t = A \cdot y + B \cdot v$ no es exactamente controlable en el tiempo $T$. Usando el Teorema 2.1, vemos que $G$ no es invertible, por lo que va a existir $\hat{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $G \cdot \hat{y} = 0$, lo cual implica que

$$\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot \hat{y} = 0. \tag{2.5}$$

Usando (2.4) y (2.5), obtenemos:

$$\int_0^T \left| B^{tr} \cdot e^{(T-\tau)\cdot A^{tr}} \cdot y \right|^2 d\tau = 0, \tag{2.6}$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{k}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, T] \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{k}$ viene definida como $\mathbf{k}(\tau) = y^{tr} \cdot e^{(T-\tau)\cdot A} \cdot B \ \forall \tau \in [0, T]$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Derivando $i$-veces en $\tau = T$, obtenemos: $\mathbf{k}^{(i)}(T) = (-1)^i \cdot \hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B$. Usando (2.7) llegamos a que $\hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
En particular, tenemos que:

$$\hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{2.8}$$

Pero, nuestra hipótesis era que $\hat{y} \neq 0$, luego, usando (2.8), concluímos que la matriz $[A : B]$ no tiene rango máximo.
Luego efectivamente tenemos que, si $A^i Bv$ tiene rango máximo, el sistema lineal $y_t = A \cdot y + B \cdot v$ es exactamente controlable en $[0, T]$.
Demostramos ahora que (2.3) es <u>condición necesaria</u> ($\Longrightarrow$):
Para ello, basta demostrar estas tres implicaciones:

- Si $\hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces también se cumple esta igualdad para todo $i \in \mathbb{N}$,
- Si $\hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0 \forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{k} \equiv 0$ en $[0, T]$ y por tanto

$$\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot \hat{y} = \int_0^T \left| \hat{y}^{tr} \cdot e^{(T-\tau)\cdot A} \cdot B \right|^2 d\tau = \int_0^T \left| \mathbf{k}(\tau) \right|^2 d\tau = 0.$$

- Si $\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot \hat{y} = 0$, entonces $G \cdot \hat{y} = 0$ y por tanto $\hat{y} = 0$ (ya que sabemos que $G$ es invertible).

Para demostrar la primera implicación, podemos usar el Teorema de Cayley-Hamilton.

Sea $p_A$ el polinomio característico de la matriz $A$ definido como:

$$p_A(z) = z^n - \alpha_n \cdot z^{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot z^{n-2} - \cdots - \alpha_2 \cdot z - \alpha_1$$

Entonces, el Teorema de Cayley-Hamilton establece que $p_A(A) = 0$, es decir,

$$A^n - \alpha_n \cdot A^{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot A^{n-2} - \cdots - \alpha_2 \cdot A - \alpha_1 = 0, \tag{2.9}$$

es decir,

$$A^n = \alpha_n \cdot A^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-2} + \cdots + \alpha_2 \cdot A + \alpha_1 \tag{2.10}$$

La consecuencia es que toda potencia de $A$ de orden $\geq n$ se escribe como una combinación lineal de potencias de orden $\leq n-1$.

En particular tendremos que $\hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ implica que $y^{tr} \cdot A^i \cdot B = 0$ para toda $i \geq n$. Con esto ya tenemos la primera implicación.

Para demostrar la segunda implicación, usamos que la aplicación $\mathbf{k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$ es analítica. En efecto, está definida a partir de un desarrollo en serie de potencias que converge en todo $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{k}(\tau) = \hat{y}^{tr} \cdot e^{(T-\tau)\cdot A} \cdot B = \sum_{i \geq 0} \frac{(T-\tau)^i}{i!} \cdot \hat{y}^{tr} \cdot A^i \cdot B \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Luego, por la propiedad de continuidad única, si $k^{(i)}(T) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{k}(\tau) \equiv 0$.

Por último, para demostrar la tercera implicación, usamos la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* para el producto escalar $(y, z)_G := y^{tr} \cdot G \cdot z$, de forma que tenemos:

$$\left| y^{tr} \cdot G \cdot z \right| \leq \left( y^{tr} \cdot G \cdot y \right)^{1/2} \cdot \left( z^{tr} \cdot G \cdot z \right)^{1/2} \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Como $\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot \hat{y} = 0$, resulta que $\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$, de donde $\hat{y}^{tr} \cdot G = 0$ y en consecuencia $\hat{y} = 0$.

Luego efectivamente tenemos que si el sistema lineal $y_t = A \cdot y + B \cdot v$ es exactamente controlable en T, entonces $[A : B]$ tiene rango máximo.

Con esto concluimos la demostración del Teorema 2.3. □

Notemos que esta condición es muy útil, ya que si conocemos los coeficientes, podemos calcular fácilmente la matriz $[A : B] = [B \,|\, A\,B \,|\, \cdots \,|A^{n-1}\,B]$ y ver si tiene rango $n$, en cuyo caso, podremos encontrar para cada par de estados $y_0$ e $y_T$ un control $v$ que nos lleve de $y_0$ a $y_T$.

**Observación 2.1.** En el caso interesante, **con** $m$ **mucho más pequeño que** $n$, el criterio nos dice si podemos o no controlar el sistema con pocos controles. Por ejemplo, podríamos alimentar un eco-sistema de muchas especies actuando sobre un número muy reducido.

**Observación 2.2.** La condición de Kalman es independiente de $T$. Luego, que $y_t = A \cdot y + B \cdot v$ sea exactamente controlable o no, no depende del tiempo final $T$ elegido.

**Observación 2.3.** $G$ es siempre simétrica y semi-definida positiva. Luego es no singular si y sólo si es definida positiva, es decir, si y sólo si

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tal que } |G \cdot z|^2 \geq \alpha \cdot |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte,

$$z^{tr} \cdot G \cdot z = \int_0^T \left|B^{tr} \cdot e^{(T-\tau)\cdot A^{tr}} \cdot z\right|^2 d\tau = \int_0^T \left|B^{tr} \cdot \varphi(\tau)\right|^2 d\tau,$$

donde $\varphi$ es la única solución del problema de Cauchy retrógrado

$$\begin{cases} -\varphi_t = A^{tr} \cdot \varphi, \quad t \in [0, T] \\ \varphi(T) = z \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es exactamente controlable si y sólo si existe $C_* > 0$ tal que

$$\left|\varphi(T)\right|^2 \leq C_* \cdot \int_0^T \left|\varphi(\tau)\right|^2 d\tau \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

A su vez, esto equivale a decir que $z \mapsto \left(\int_0^T \left|\varphi(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

**Ejemplo 2.2.1.** A continuación, vamos a dar 2 ejemplos de SDOs (uno controlable y otro no controlable):

- SDO controlable

  Un ejemplo puede ser el sistema de control:

$$\begin{cases} y_{1,t} = y_2, & t \in (0,T) \\ y_{2,t} = v(t), & t \in (0,T) \end{cases}$$

  donde el control es $v \in L^2(0,T)$ y el estado es $y = (y_1, y_2)^{tr}$. La matriz $G$ viene dada por

$$G = \begin{pmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{pmatrix}$$

  y por tanto, su inversa será:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 12\,/\,T^3 & -6\,/\,T^2 \\ -6\,/\,T^2 & 4\,/\,T \end{pmatrix}$$

  y, como $G$ es invertible, entonces el sistema es controlable.

  Otra manera (más rápida) de ver que el sistema es controlable consiste en calcular $[A : B]$. Tenemos que

$$[A : B] = [B \,|\, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  y por tanto $\text{rang}[A : B] = 2$.

  Más generalmente, todo sistema en cascada

$$\begin{cases} y_{1,t} &=& v(t) \\ y_{2,t} &=& a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 \\ y_{3,t} &=& a_{31} \cdot y_1 + a_{32} \cdot y_2 + a_{33} \cdot y_3 \\ & \cdots & \\ y_{n,t} &=& a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \cdots + a_{nn} \cdot y_n \end{cases}$$

donde las $a_{i,i-1} \neq 0$ para $2 \leq i \leq n$ es controlable y se tiene que

$$[A : B] = [B \,|\, A\,B \,|\, \cdots |A^{n-1}\,B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto $\mathrm{rang}[A : B] = n$. 0

- SDO no controlable

  Un ejemplo puede ser el sistema de control

$$\begin{cases} y_{1,t} = v(t) \\ y_{2,t} = y_1 + t \cdot v(t) \end{cases}$$

  donde de nuevo, el control es $v \in \mathbb{R}$ y el estado es $y = (y_1, y_2)^{tr} \in \mathbb{R}^2$. Para $T > 0$, se comprueba que $B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $R(T, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que la matriz $G$ está dada por

$$G = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$$

  y tiene rango 1. Por tanto, su determinante será 0, $G$ no es invertible y el sistema no será controlable.

Ahora, vamos a ver sin demostración una condición suficiente que generaliza el Teorema 2.3, donde $A$ y $B$ dependen de $t$. Para ello, supondremos que $A$ y $B$ son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $[0, T]$.

**Teorema 2.4.** *Definimos $B_0(t) := B(t)$ y $B_i(t) := \dot{B}_{i-1}(t) - A(t) \cdot B_{i-1}(t)$, $\forall\, t \in [0, T]$, $\forall\, i \geq 1$. Tenemos que si existe $\bar{t} \in [0, T]$ tal que*

$$Span \left\{ B_i(\bar{t}) \cdot v \,|\, v \in \mathbb{R}^m,\, i \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$

*entonces el sistema de control lineal $y_t = A(t) \cdot y + B(t) \cdot v(t)$ es exactamente controlable en $T$.*

La demostración se puede llevar a cabo por *Reducción al Absurdo*, suponiendo que el sistema no es exactamente controlable.

Para ello, tenemos que $G$ no es invertible, y por tanto $\exists\, \hat{y} \neq 0$ tal que $G \cdot \hat{y} = 0$, luego

$$\hat{y}^{tr} \cdot G \cdot \hat{y} = \int_0^T \left| B(\tau)^{tr} \cdot \left(F(\tau)^{-1}\right)^{tr} \cdot F(T)^{tr} \cdot \hat{y} \right|^2 d\tau = 0 \quad \forall \tau \in [0,T]$$

y por tanto, $\mathbf{k}(\tau) \equiv 0$.

De nuevo, $\mathbf{k}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Derivando, obtenemos fácilmente que $\hat{y}^{tr} \cdot F(\bar{t}) \cdot F(\tau)^{-1} \cdot B_i(\tau) = 0$ y, como $\hat{y} \neq 0$ y $F(\bar{t}) \cdot F(\tau)^{-1}$ es invertible, entonces, no se cumple (2.11).

La demostración más detallada se puede encontrar en el libro [1].

**Ejemplo 2.2.2.** A continuación vamos a dar 3 ejemplos de SDOs. En los 3 casos vamos a utilizar el sistema general

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \cdot v(t), \quad t \in [0,T].$$

Tenemos: $B_0(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ y $B_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \end{pmatrix}$ - $A(t) \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$.

- SDO controlable donde se verifica (2.11). Un ejemplo con $b_1$ y $b_2$ constantes es:

  $$B_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } B_1(t) = -A(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11}(t) \\ a_{21}(t) \end{pmatrix}$$

  Vamos a suponer que $a_{21}(\bar{t}) \neq 0$ para algún $\bar{t}$, entonces ya tendríamos que:

  $$\text{Span}\left(B_i(t)\, v\right) = \mathbb{R}^2$$

  Luego, se verifica (2.11).

- SDO no controlable. Ahora vamos a suponer, de nuevo, que $b_1$ y $b_2$ son constantes con

  $$B_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  En este caso vamos a suponer que $a_{21} \equiv 0$, así el sistema se puede reescribir en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = & a_{11}(t) \cdot x + a_{12}(t) \cdot y + v(t), & t \in [0, T], \\ \dot{y} = & a_{22}(t) \cdot y, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Este sistema no es controlable, pues por un lado tendríamos que la expresión de $y$ viene dada por:

$$y(t) = e^{\displaystyle\int_0^t a_{22}(s)\, ds} \cdot y_0,$$

que es completamente independiente del control. Por ejemplo, vemos que, si $y_0 > 0$ entonces $y(t) > 0$ para todo $t$ (no hay ningún control que lleve "algo" positivo a "algo" negativo).

- SDO controlable que no verifica (2.11):

  En este caso, vamos a considerar $n = 2$, $m = 1$, $A = 0$ y $B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$, con $f$ y $g$ que verifican

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^\infty[0, T] \\ g \in \mathcal{C}^\infty[0, T] \\ f = 0, \ \text{en } [T/2, T] \text{ y } f(0) \neq 0 \\ g = 0, \ \text{en } [0, T/2] \text{ y } g(T) \neq 0 \end{cases}$$

  Tendríamos entonces,

$$G = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{T/2}^{T} f(t)^2\, dt & 0 \\ 0 & \displaystyle\int_0^{T/2} g(t)^2\, dt \end{pmatrix}$$

  Y, como $f(0) \neq 0$ y $g(T) \neq 0$, entonces $G$ es invertible y por tanto, el sistema es controlable. Vamos a ver ahora que no se cumple la condición (2.11).

  Así, derivando la matriz $B$ obtenemos: $B_i(t) = \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ g^{(i)}(t) \end{pmatrix}$. Tanto para

$\bar{t} \in [0, T/2]$ como para $\bar{t} \in [T/2, T]$, tenemos que

$$\text{Span}\, \{B_i(\bar{t}) \cdot v\} \neq \mathbb{R}^n$$

ya que todos los vectores $B_i(\bar{t})$ tienen necesariamente una componente nula (siempre la misma).

Por tanto, tenemos un sistema controlable que no cumple la condición (2.11). Esto muestra que (2.11) es una condición suficiente pero no necesaria para la controlabilidad.

## 2.3. Construcción de un control muy particular

Al igual que hicimos en la Sección 1.3, vamos a calcular el control de norma mínima en $L^2$ en el caso en que $A$ y $B$ son constantes. Para ello, recordemos que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t = A \cdot y + B \cdot v(t), \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

donde, $A$ es una matriz cuadrada $n \times n$ y $B$ es una matriz $n \times m$, con $m \leq n$.

Suponemos la matriz G definida como

$$G := \int_0^T e^{(T-t)\cdot A} \cdot B \cdot B^{tr} \cdot e^{(T-t)\cdot A^{tr}}\, dt$$

pues tenemos $R(t_1, t_2) = e^{(t_1 - t_2)\cdot A} \quad \forall (t_1, t_2) \in [0, T]^2$.

$G$ es no singular. Entonces, por el Teorema 2.3 se verifica que la matriz $[A : B] = [B \,|A\, B\,| \cdots |A^{n-1}\, B]$ es de rango máximo $(n)$.

El problema que queremos resolver es el siguiente:

$$(P) \begin{cases} \text{Minimizar} & \dfrac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2 \\ \text{Sujeto a} & v \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

donde $\mathcal{U}_{ad}$ es el conjunto de los controles admisibles:

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(0, T)^m \colon y(T) = y_T\},$$

es decir,

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(0,T)^m : \int_0^T e^{(T-s)\cdot A} \cdot B(s) \cdot v(s)\, ds = y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\}$$

Luego, estamos minimizando una función (la norma al cuadrado) que es estrictamente convexa, continua y coerciva en un convexo cerrado $\mathcal{U}_{ad}$, que en realidad es una variedad lineal afín. Luego, por el *Principio del Cálculo de Variaciones*, existe una única solución del problema, $\hat{v}$, que es el control que queremos calcular.

Por otro lado, tenemos la *Teoría de Fenchel-Rockefeller* que establece que el problema $(P)$ es equivalente a $(P)^*$ (que es el problema dual de $(P)$), donde no hay restricciones y que viene dado por

$$(P)^* \begin{cases} \text{Minimizar} & \dfrac{1}{2} \|B^{tr} \cdot \varphi\|^2_{L^2} - \varphi_T \cdot \left(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\right) \\ \text{Sujeto a} & \varphi_T \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde, para cada $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, hemos denotado $\varphi$ la solución del correspondiente problema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t = A^{tr} \cdot \varphi \\ \varphi(T) = \varphi_T \end{cases} \tag{2.13}$$

Tenemos entonces que $\hat{v}$ es solución de $(P)$ si y solo si $\hat{v} = B^{tr} \cdot \hat{\varphi}$, con $\hat{\varphi}$ la solución correspondiente a $\hat{\varphi}_T$ y $\hat{\varphi_T}$ la solución del problema $(P)^*$.
Para cada $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, resolviendo (2.13) obtenemos que $\varphi(t) = e^{(T-t)\cdot A^{tr}} \cdot \varphi_T \quad \forall t \in [0,T]$. El problema $(P)^*$ queda entonces como sigue:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^T \left|B^{tr} \cdot e^{(T-t)\cdot A^{tr}} \cdot \varphi_T\right|^2 dt - \varphi_T \cdot \left(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\right), \\ \text{Sujeto a } \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Lo cual podemos reescribir como:

$$(P)^* \begin{cases} \text{Minimizar } \dfrac{1}{2} \varphi_T \cdot G \cdot \varphi_T - \varphi_T \cdot \left(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\right), \\ \text{Sujeto a } \varphi_T \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con $G$ la matriz de controlabilidad (que por definición sabemos que es definida positiva).

Luego, el mínimo sabemos que es único y se alcanza en $\hat{\varphi}_T$, lo cual sucede cuando la derivada de la función considerada es 0, es decir, cuando

$$\Big(\frac{1}{2}\varphi_T \cdot G \cdot \varphi_T - \varphi_T \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big)\Big)' = 0 \Longleftrightarrow G \cdot \hat{\varphi}_T = y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0$$

Luego, ya sabemos que $\hat{\varphi}_T = G^{-1} \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big)$. Y resolviendo el sistema (2.13) obtenemos:

$$\hat{\varphi}(t) = e^{((T-t)\cdot A)^{tr}} \cdot G^{-1} \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big)$$

Luego, el control $\hat{v}$ que estábamos buscando será:

$$\hat{v}(t) = B^{tr} \cdot \hat{\varphi}(t) = B^{tr} \cdot e^{((T-t)\cdot A)^{tr}} \cdot G^{-1} \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big) \quad \forall t \in [0,T]$$

que es el vector de norma mínima que buscábamos. Se puede comprobar ahora que el estado $\hat{y}$ correspondiente a $\hat{v}$ verifica

$$\begin{aligned}
\hat{y}(T) \quad &= e^{T\cdot A} \cdot y_0 + \int_0^T e^{(T-s)\cdot A} \cdot B(s) \cdot \hat{v}(s)\, ds \\
&= e^{T\cdot A} \cdot y_0 + \int_0^T \underbrace{e^{(T-s)\cdot A} \cdot B(s) \cdot B^{tr}(s) \cdot e^{((T-s)\cdot A)^{tr}}}_{G} \cdot G^{-1} \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big)\, ds \\
&= e^{T\cdot A} \cdot y_0 + \underbrace{G \cdot G^{-1}}_{\mathrm{Id}} \cdot (y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0) \\
&= e^{T\cdot A} \cdot y_0 + y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0 = y_T
\end{aligned}$$

Luego, hemos encontrado el mejor control de norma mínima en $L^2$:

$$\boxed{\hat{v}(t) = B^{tr} \cdot e^{(T-t)\cdot A^{tr}} \cdot G^{-1} \cdot \big(y_T - e^{T\cdot A} \cdot y_0\big), \quad \forall t \in [0,T]}$$

El control $\hat{v}$ de norma mínima en $L^2$ que conduce el sistema (2.12) de $y_0$ a $y_T$ en el tiempo $T$ es $\hat{v} = B^{tr} \cdot \hat{\varphi}$, donde $\hat{\varphi}$ es la solución de (2.13) para $\varphi_T = \varphi$.

# Capítulo 3

# Controlabilidad de EDPs lineales

El objetivo de este tercer capítulo es realizar un estudio sobre la controlabilidad de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) lineales de segundo orden, más concretamente de la EDP del calor y algunas variantes.

De manera imprecisa, una EDP es una igualdad en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes, donde aparecen derivadas parciales, respecto de las variables independientes, de la función incógnita.

En este capitulo vamos a usar a menudo la ecuación del calor. Para entender mejor esta ecuación, vamos a ver su origen y la importancia del signo en esta ecuación.

Recordemos que para llegar a la ecuación del calor podemos partir de las identidades:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_W y\,dx}_{(1)} = \underbrace{y_x(b,t) - y_x(a,t)}_{(2)} \quad \forall\, W = (a,b) \subset \Omega, \quad \forall\, t \in (0,T),$$

donde, si interpretamos $y = y(x,t)$ como una distribución de temperatura, (1) indica el cambio en tiempo de la energía calorífica que hay en $W$ y (2) es el flujo neto de calor que entra en $W$ a través de la frontera $\partial W = \{a, b\}$.

Nos damos cuenta de que el signo es importante ya que si la energía aumenta implica que está entrando calor. Operando un poco y haciendo uso de la *fórmula de la divergencia*, obtenemos:

$$\int_W y_t \, dx = \int_W y_{xx} \, dx \quad \forall \text{ intervalo } W \subset \Omega, \quad \forall \, t \in (0, T).$$

Como esto debe ser cierto para cualquier $W$, en realidad tenemos

$$y_t - y_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

que es la ecuación del calor.

## 3.1. Control nulo de la ecuación uni-dimensional del calor

Para estudiar la controlabilidad de las EDPs, escribiremos la ecuación del calor en una variable espacial no homogénea:

$$y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{3.1}$$

donde $\omega \subset \Omega$, $1_\omega$ es la función característica de $\omega$, $v$ se interpreta como una fuente exterior de calor (el control) que vamos a suponer que está en $L^2(\omega \times (0, T))$ e $y$ es el estado asociado a un dato inicial y a condiciones de contorno de tipo Dirichlet (por ejemplo). Con carácter general, la solución

$$y \colon t \in [0, T] \longrightarrow y(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$$

será una función continua.

En lo que sigue: $(\cdot, \cdot)$ y $\| \cdot \|$ serán, respectivamente, el producto escalar y la norma habituales en $L^2(\Omega)$.

Vamos a considerar el caso de un pequeño abierto no vacío $\omega \subset \Omega$, que será el caso interesante.

Por tanto, la ecuación (3.1) va a ser complementada con las siguientes condiciones de contorno y condiciones iniciales:

- Las condiciones de contorno serán:

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad \text{para } t \in (0,T)$$

- La condición inicial será:

$$y(x,0) = y_0(x), \quad \text{para } x \in (0,1)$$

Con todo esto, obtendremos entonces el siguiente problema:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.2}$$

El problema de control nulo que se plantea es el siguiente:

$$\boxed{\text{Dado } y_0 \in L^2(\Omega), \text{ hallar un control } v \in L^2(\omega \times (0,T)) \text{ tal que } y(\cdot,T) = 0.}$$

Si existe un control $v$ para cada $y_0 \in L^2(0,1)$, diremos que (3.2) es **controlable a 0 en** $T$.

Veremos más adelante que en sistemas lineales como (3.2) la controlabilidad a 0 (o controlabilidad nula) es equivalente a una desigualdad de observabilidad asociada al problema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0, & t \in (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $\varphi_T \in L^2(\Omega)$.

Observemos que (3.3) es un **problema retrógrado** que se convierte en un problema de valores iniciales, como (3.2), haciendo el cambio $t' = T - t$.

Observamos también que $\varphi$ es continua en $L^2(\Omega)$. De hecho, debemos interpretar que la función "empieza" en $\varphi = \varphi_T$ en $t = T$ y "termina" en $\varphi(\cdot, 0)$ en $t = 0$, es decir, va "hacia atrás en el tiempo". Esto es coherente con el signo $-$ que lleva $\varphi_t$ en la primera ecuación de (3.3).

Vamos a dividir el estudio del problema de control nulo en 3 pasos o etapas, que serán descritas a lo largo del capítulo.

## Paso 1: Existencia de un estado para cada control

Primero vamos a comenzar definiendo el espacio de Sobolev, que utilizaremos en este paso.

Para ello, consideramos el conjunto

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \colon \exists\, v_x \in L^2(\Omega)\}$$

donde $v_x$ denota la derivada generalizada (o derivada distribucional) de $v$. Dotado de las operaciones habituales, $H^1(\Omega)$ se convierte en un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$. Por otra parte, dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} := \int_\Omega (u \cdot v + u_x \cdot v_x)\, dx,$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

**Definición 3.1.** Denominaremos **espacio de Sobolev**, $H_0^1(\Omega)$, a la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Una forma equivalente de definir $H_0^1(\Omega)$ es poner

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \colon \gamma v = 0\}$$

donde $\gamma v = \{v(0), v(1)\}$ es la traza de $v$ sobre $\partial\,\Omega$ (las funciones de $H^1(\Omega)$ tienen un representante en $\mathcal{C}^0([0,1])$ y por tanto la traza de $v$ tiene un sentido clásico).

Por tanto, podemos decir que el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ que, para el producto escalar $(\cdot\, ,\, \cdot)_{H^1}$, se convierte en un nuevo espacio de Hilbert separable.

Una vez que tenemos definido el espacio de Sobolev, enunciamos el siguiente problema de existencia y unicidad de solución:

**Teorema 3.1.** *Sean $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$. Entonces existe una única solución débil $y \in \mathcal{C}^0\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ del problema (3.2), es decir, una única función en este espacio que verifica*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y,w) + (y_x, w_x) = (v \cdot 1_\omega, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad t \ c.p.d \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

La demostración puede ser encontrada en [4].

Respecto a la existencia y unicidad del problema adjunto (3.3), se tiene:

**Teorema 3.2.** *Sea $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución débil $\varphi$ del problema (3.3), tal que $\varphi \in \mathcal{C}^0\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$.*

## Paso 2: Condición de Observabilidad

Volvemos a considerar el problema (3.2). Para cada control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$, existe una única solución $y \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ (el estado asociado). Por otra parte, para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, existe una única solución $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ del problema adjunto asociado (3.3).

Observemos que la solución del problema (3.3) está relacionada con la solución del problema (3.2) por el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.** *Consideremos los problemas (3.2) y (3.3). Entonces, para todo $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ y para todas $y_0$, $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, se tiene que*

$$\iint_{\omega \times (0,T)} \varphi \cdot v \cdot 1_\omega \, dx\, dt = \int_\Omega y\,(x\,,T) \cdot \varphi_T(x)\, dx - \int_\Omega y_0(x) \cdot \varphi\,(x\,,0)\, dx, \quad (3.4)$$

*donde $y$, $\varphi \in \mathcal{C}^0\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ son, respectivamente, las soluciones de (3.2) y (3.3) asociadas a $v$ e $y_0$ y a $\varphi_T$.*

***Demostración:*** La demostración de este teorema es consecuencia de las propiedades de regularidad de las soluciones $y$ y $\varphi$ de (3.2) y (3.3). De hecho, si multiplicamos (3.2) por $\varphi$ e integramos por partes en $\Omega \times (0,T)$, obtendremos fácilmente la identidad (3.4):

$$\begin{aligned}\iint_{\omega\times(0,T)} \varphi \cdot v \cdot 1_\omega \, dx\, dt &= \iint_{\Omega\times(0,T)} \varphi \cdot (y_t - y_{xx})\, dx\, dt \\ &= \iint_{\Omega\times(0,T)} (-\varphi_t - \varphi_{xx}) \cdot y \, dx\, dt + \int_\Omega \varphi \cdot y \, dx\Big|_{t=0}^{t=T}.\end{aligned}$$

□

Ahora podemos caracterizar la controlabilidad nula del problema (3.2) usando el problema adjunto (3.3):

**Teorema 3.4.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$, (3.2) posee **control nulo** con un control $v$ tal que*

$$\|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C \cdot \|y_0\|, \tag{3.5}$$

*siendo $C$ una constante independiente de $v$.*

2. *Existe una constante $K$, tal que se tiene la **desigualdad de observabilidad***

$$\|\varphi\,(\cdot,0)\| \leq K \cdot \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx\, dt \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(\Omega) \tag{3.6}$$

*para las soluciones $\varphi$ de los problemas adjuntos (3.3).*

***Demostración:*** Vamos a empezar viendo que (1) implica (2).

Sean $y_0, \varphi_T \in L^2(\Omega)$ y sea $\varphi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ la solución del problema adjunto (3.3) asociado a $\varphi_T$ y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ un control asociado al dato inicial $y_0$ tal que $y|_{t=T} = 0$ y se cumple (3.5). Usando (3.4) y (3.5), obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\,(x\,,0)\, y_0(x)\, dx &= -\iint_{\omega\times(0,T)} \varphi \cdot v \cdot 1_\omega \, dx\, dt \leq \\ &\leq \|\varphi \cdot v \cdot 1_\omega\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \cdot \|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \\ &\leq \sqrt{C} \cdot \|\varphi \cdot v \cdot 1_\omega\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \cdot \|y_0\|\end{aligned}$$

Tomando supremos cuando $\|y_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ en la desigualdad anterior y poniendo $\sqrt{C} = K$, deducimos la condición de observabilidad (3.6).

Probamos ahora la otra implicación, es decir, que (2) implica (1). Dividimos esta demostración en 2 pasos a su vez.

<u>Primero:</u> Dado $y_0 \in L^2(\Omega)$ y fijado $\varepsilon > 0$, introducimos el funcional $J_\varepsilon$, con

$$J_\varepsilon(\varphi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt \;+\; \varepsilon\cdot\|\varphi_T\| \;+\; \big(\varphi(\cdot,0),y_0\big)$$

para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, donde $\varphi$ es la solución del correspondiente problema adjunto (3.3).

Este funcional tiene varias propiedades importantes:

- Es una función <u>convexa</u>, ya que la suma de tres funciones convexas es convexa.
- Es una función <u>continua</u>, ya que la suma de tres funciones continuas es continua.
- Es una función <u>coerciva</u>, ya que por la desigualdad de observabilidad tenemos:

$$\begin{aligned}\Big|\big(\varphi(\cdot,0),y_0\big)\Big| \;&\le \|\varphi(\cdot,0)\|\cdot\|y_0\| \le \\ &\le \left(K\cdot\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\cdot\|y_0\| \le \\ &\le \delta\cdot\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt + C_\delta\cdot\|y_0\|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

  Es decir,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt - \Big(\varphi(\cdot,0),y_0\Big) \ge \\ &\ge \big(\frac{1}{2}-\delta\big)\cdot\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt - C_\delta\cdot\|y_0\|^2 \ge \\ &\ge -C_\delta\cdot\|y_0\|^2,\end{aligned}$$

  tomando $0 < \delta < 1/2$.

  La consecuencia es que $J_\varepsilon(\varphi_T) \ge \varepsilon\cdot\|\varphi_T\| - C_\delta\cdot\|y_0\|^2 \quad \forall\varphi_T \in L^2(\Omega)$.

  Luego, efectivamente, es una función coerciva, con constante de coercividad que depende de $\varepsilon$.

Por tanto, podemos afirmar que $J_\varepsilon$ posee un único mínimo $\varphi_{T,\varepsilon} \in L^2(\Omega)$.
Sean $\varphi_\varepsilon$ la solución de (3.3) para $\varphi_T = \varphi_{T,\varepsilon}$, $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \cdot 1_\omega$ e $y_\varepsilon$ la solución del problema (3.2) asociada a $v_\varepsilon$.

Supongamos que $\varphi_{T,\varepsilon} \neq 0$. Entonces, podemos derivar el funcional $J_\varepsilon$ en $\varphi_{T,\varepsilon}$ y obtener una condición necesaria y suficiente para que $J_\varepsilon$ alcance un mínimo en $\varphi_{T,\varepsilon}$, que es

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \varphi_\varepsilon \cdot \varphi \, dx \, dt + \varepsilon \cdot \left( \frac{\varphi_{T,\varepsilon}}{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|} \, , \, \varphi_0 \right) + \big(\varphi(\cdot,0) \, , \, y_0\big) = 0 \tag{3.8}$$

para todo $\varphi_T \in L^2(\Omega)$.

Como (3.3) es el problema dual por definición del problema (3.2), tenemos también que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \varphi_\varepsilon \cdot \varphi \, dx \, dt = \big(y_\varepsilon(\cdot,T), \varphi_T\big) - \Big(\varphi(\cdot,0), y_0\Big)$$

y usando ahora (3.8) obtenemos que $\big(y_\varepsilon(\cdot,T), \varphi_T\big)_{L^2} = -\dfrac{\varepsilon}{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2}} \cdot \big(\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi_T\big)$ $\forall \varphi_T \in L^2(\Omega)$, es decir:

$$\|y_\varepsilon(\cdot,T)\| \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

Ahora, supongamos que $\varphi_{T,\varepsilon} = 0$. Entonces $J_\varepsilon(\varphi_T) \geq J(\varphi_{T,\varepsilon}) = 0$ para todo $\varphi_T \in L^2(\Omega)$.
Tomando ahora $v_\varepsilon = 0$, conseguimos que

$$\Big(y_\varepsilon(\cdot,T), \varphi_T\Big) \leq \varepsilon \cdot \|\varphi_T\| \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega),$$

de donde de nuevo resulta (3.9)

Segundo: La sucesión $\{v_\varepsilon\}$ está acotada en $L^2(\omega\times(0,T))$. En efecto, tenemos que $J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \leq J_\varepsilon(0) \quad \forall \varepsilon > 0$, de donde, usando (3.7),

$$\frac{1}{2} \cdot \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon|^2 \, dx \, dt \leq -\big(\varphi_\varepsilon(\cdot,0), y_0\big) \leq \delta \cdot \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon|^2 \, dx \, dt + C_\delta \cdot \|y_0\|^2.$$

Luego existe una subsucesión débilmente convergente a cierto $v \in L^2(\omega\times(0,T))$.

Usando una estimación clásica deducimos que, al menos, para una subsucesión

$$y_\varepsilon \longrightarrow y \text{ débilmente en } W := L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap H^1\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big),$$

donde $y$ es la solución del problema (3.2) con control $v$. Pero el espacio de Hilbert $W$ se inyecta de forma continua en $\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$. Luego, hemos obtenido la convergencia débil para $\{y_\varepsilon(\cdot,T)\}$ in $L^2(\Omega)$ y por tanto $y(\cdot,T) = 0$ y hay controlabilidad nula.

Además, de las estimaciones (3.7), se deduce fácilmente (3.5). □

Observemos que la condición de observabilidad se puede reescribir como:

$$\int_0^1 |\varphi(x,0)|^2\,dx \le K \cdot \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt$$

Llegados a este punto, podemos hacer una observación:

**Observación 3.1.** Es posible dar un argumento similar en una situación más general. Para ello, consideremos tres espacios de Hilbert $U, H, E$ y dos aplicaciones lineales continuas $L \in \mathcal{L}(U;E)$ y $M \in \mathcal{L}(H;E)$.
Haciendo uso del Análisis Funcional, tenemos que $R(M) \subset R(L)$, es decir que $\forall y_0 \in H \quad \exists v \in U$ tal que $M\cdot y_0 - L\cdot v = 0$, junto con dependencia continua de $v$ respecto de $y_0$, equivale a la desigualdad $\|M^*\varphi_T\|_{L^2} \le C\|L^*\varphi_T\|_{L^2}\ \forall\,\varphi_T \in E$.
Un caso particular corresponde a $U = L^2(\omega\times(0,T))$, $E = L^2(\Omega)$, $H = E$ y las aplicaciones siguientes:

- Con dato inicial $y_0 = 0$ , ponemos

$$L\colon v \in L^2(\omega\times(0,T)) \longmapsto y(\cdot\,,T) \in L^2(\Omega)$$

  $L$ es una aplicación lineal y continua por el Teorema (3.1).

- Con control $v = 0$, ponemos

$$M\colon y_0 \in L^2(\Omega) \longmapsto y(\cdot\,,T) \in L^2(\Omega)$$

  $M$ es de nuevo una aplicación lineal y continua por el Teorema (3.1).

La controlabilidad nula equivale a decir que el rango de $L$ contiene al rango de $M$, es decir, $R(M) \subset R(L)$.

Luego, en resumen, hemos obtenido lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Control nulo } + \text{ Dep. continua} &\iff R(M) \subset R(L) + \text{ Dep. continua} \\ &\iff \|M^*\varphi_T\| \leq C\|L^*\varphi_T\| \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(\Omega) \\ &\iff \text{ Condición de observabilidad (3.6)} \end{aligned}$$

## Paso 3: Desigualdad de Carleman

Ya tenemos un resultado de existencia y unicidad de solución y otro resultado que da una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad nula.

En este tercer paso, vamos a ver un resultado que implica la condición de observabilidad (3.6). Para ello necesitaremos una desigualdad muy importante, conocida como **desigualdad de Carleman**.

Comenzamos describiendo un poco esta desigualdad:
Necesitaremos trabajar con pesos $\rho = \rho(x,t)$ con $\rho > 0$ en $\overline{\Omega} \times (0,T)$ y $\rho(x,t) \longrightarrow +\infty$ si $t \longrightarrow 0$ ó $t \longrightarrow +T$. En particular, usaremos funciones $\rho$ se comportan como exponenciales de la forma

$$\rho(x,t) \approx e^{\dfrac{a(x)}{t \cdot (T-t)}}. \tag{3.10}$$

**Lema 3.1.** *Sea $\omega \subset\subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces existe $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta_0 > 0$ en $\Omega$, $\eta_0 = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $|\nabla \eta_0| > 0$ en $\overline{\Omega \setminus \omega}$.*

***Demostración:*** Sea $x_0 \in \omega$ y supongamos que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \omega$, con $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $\eta_0 \in \mathcal{C}^2([0,1])$ verificando

$$\eta_0(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < x_0 - \varepsilon/2 \\ 1 - x, & x_0 + \varepsilon/2 < x < 1 \end{cases}$$

Esta función cumple con lo deseado. $\square$

Supongamos dado un conjunto abierto no vacío $\omega$ tal que $\omega \subset\subset \Omega$ y sea $\eta_0$

como en el Lema 3.1. Sean

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\cdot\lambda\cdot m\|\eta_0\|_\infty} - e^{\lambda\cdot\left(m\cdot\|\eta_0\|_\infty + \eta_0(x)\right)}}{t\cdot(T-t)} \tag{3.11}$$

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda\cdot\left(m\cdot\|\eta_0\|_\infty + \eta_0(x)\right)}}{t\cdot(T-t)} \tag{3.12}$$

para $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, donde $\lambda>0$ y $m>1$. Estas funciones de peso fuero introducidas por primera vez por *Imanuvilov*. A continuación vamos a ver un resultado muy importante que utilizaremos para demostrar la desigualdad de observabilidad:

**Lema 3.2.** *Existen tres constantes positivas $\lambda_1 = C(\Omega,\omega)\geq 1$, $s_1 = \lambda_1(T+T^2)$, y $C_1(\Omega,\omega)$ tales que, para cualquier $\lambda\geq\lambda_1$ y para cualquier $s\geq s_1$, tenemos la siguiente desigualdad:*

$$\begin{aligned} & s^{-1}\cdot\iint_{\Omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot\xi^{-1}\left(|q_t|^2+|q_{xx}|^2\right)dx\,dt \\ & \quad + s\cdot\lambda^2\cdot\iint_{\Omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot\xi\cdot|q_x|^2\,dx\,dt \\ & \quad + s^3\cdot\lambda^4\iint_{\Omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot\xi^3\cdot|q|^2\,dx\,dt \\ \leq\ & C_1\left(\iint_{\Omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot|q_t+q_{xx}|^2 dx\,dt \ + \ s^3\cdot\lambda^4\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot\xi^3\cdot|q|^2\,dx\,dt\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

*para toda función $q\in C^2\left(\overline{\Omega\times(0,T)}\right)$ con $q=0$ sobre $\partial\Omega\times(0,T)$.*

Esta estimación se denomina **desigualdad de Carleman**.

La prueba de este lema es complicada; está dada en [5] en condiciones más generales.

La desigualdad (3.13) implica, usando (3.10), sustituyendo $q$ por $\varphi$ y haciendo uso de que $\varphi_t+\varphi_{xx}=0$ en $\Omega\times(0,T)$, lo que sigue:

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho^{-2}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt \ \leq\ C\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} \rho^{-2}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt \quad \forall\varphi_T\in L^2(\Omega), \tag{3.14}$$

donde $\rho = e^{s\cdot\alpha}\cdot\xi^{-3/2}$ (de comportamiento similar a (3.9)) y $C$ sólo depende de $\Omega$ y $\omega$.

Usando (3.14), vamos a probar la observabilidad de (3.3):

**Teorema 3.5.** *Si existe una función peso $\rho$ continua y con valores positivos tal que*

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho^{-2}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt \;\le\; C\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} \rho^{-2}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt \quad \forall\varphi_T\in L^2(\Omega)$$

*entonces existe $K>0$ tal que*

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \le K\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt \quad \forall\,\varphi_T\in L^2(\Omega)$$

***Demostración:*** Primero observamos que la desigualdad de Carleman se verifica para todas las soluciones del problema adjunto (3.3) con $\varphi_T\in L^2(\Omega)$. Así, si fijamos $\lambda=\lambda_1$ obtenemos

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot t^{-3}\cdot(T-t)^{-3}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt \;\le\; C\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2\cdot s\cdot\alpha}\cdot t^{-3}\cdot(T-t)^{-3}\cdot|\varphi|^2\,dx\,dt$$

para todo $s\ge s_1$.

Ahora, usando las desigualdades

- $e^{-2\cdot s_1\cdot\alpha}\cdot t^{-3}(T-t)^{-3} \ge e^{-2\cdot C(\Omega,\omega)(1+1/T)}\cdot\dfrac{1}{T^6}$ en $\Omega\times(T/4,3T/4)$
- $e^{-2\cdot s_1\cdot\alpha}\cdot t^{-3}(T-t)^{-3} \le e^{-C(\Omega,\omega)(1+1/T)}\cdot\dfrac{1}{T^6}$ en $\Omega\times(0,T)$

y usando que la constante $C_0\le\rho^{-2}$ implica $1\le\dfrac{1}{C_0}\cdot\rho^{-2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\,dx\,dt &\le \frac{1}{C_0}\cdot\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho^{-2}|\varphi|^2\,dx\,dt\\ &\le \frac{1}{C_0}\cdot C\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} \rho^{-2}|\varphi|^2\,dx\,dt\\ &\le K\cdot\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\,dx\,dt\end{aligned} \tag{3.15}$$

con una constante $K$ de la forma $e^{C(\Omega,\omega)(1+1/T)}$.

Por último, usando la ecuación que verifica $\varphi$ junto con (3.15), obtenemos

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2+\int_\Omega|\varphi_x|^2\,dx=0,$$

de donde en particular $\|\varphi(\cdot,0)\|^2\le\|\varphi(\cdot,t)\|^2\quad\forall t\in[T/4,3T/4]$ y, teniendo en cuenta (3.15), llegamos a que

$$\|\varphi(\cdot,0)\|\le\frac{2}{T}\cdot\int_{T/4}^{3T/4}\|\varphi(\cdot,t)\|^2\,dt\le\frac{2}{T}\cdot K\cdot\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt,$$

que es la desigualdad de observabilidad (3.6). $\square$

Así pues, juntando los pasos 1, 2 y 3, vemos que, gracias a la desigualdad de Carleman, (3.2) posee la propiedad de controlabilidad nula:

$$\boxed{\text{Carleman}\implies(3.14)\implies(3.6)\iff\text{Control nulo}+\text{Dep. continua}}$$

## 3.2. Algunos resultados adicionales

### 3.2.1. Probando la controlabilidad nula directamente a partir de la desigualdad de Carleman

Supongamos que queremos demostar, usando la *desigualdad de Carleman*, el control nulo de la ecuación del calor.
Recordemos que la desigualdad de Carleman implicaba la desigualdad de observabilidad (3.6), dada por

$$\|\varphi\,(\cdot,0)\|^2 \leq K \cdot \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\, dx\, dt \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(\Omega).$$

En la demostración del Teorema 3.4, se introdujo el funcional $J_\varepsilon$, definido como

$$J_\varepsilon(\varphi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} \left|\varphi\right|^2 dx\, dt + \varepsilon\cdot\|\varphi_T\| + \big(\varphi(\cdot,0), y_0\big)$$

para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, donde $\varphi$ es la solución del problema adjunto (3.3).

También vimos que $J_\varepsilon$ tiene varias propiedades: es convexa, continua y coerciva. Por tanto, afirmamos que posee un único mínimo $\varphi_{T,\varepsilon} \in L^2(\Omega)$.

Recordemos que la propiedad de ser coerciva venía de la desigualdad

$$J_\varepsilon(\varphi_T) \geq \varepsilon\cdot\|\varphi_T\|_{L^2} - C_\delta\cdot\|y_0\|^2.$$

Sin embargo, vemos que cuando $\varepsilon \to 0$, la desigualdad es cada vez menos fuerte (y de hecho la coercividad desaparece cuando $\varepsilon = 0$).
También observamos que, en la práctica, tenemos dos consecuencias:

- No se puede afirmar que $\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2}$ esté acotada independiente de $\varepsilon$.
- Por el contrario, $\|v_\varepsilon\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} = \displaystyle\iint_{\omega\times(0,T)} \left|\varphi_\varepsilon\right|^2 dx\, dt$ sí está acotada.

De tal modo que podemos decir que para encontrar un control nulo, no parece un buen método hallar primero $\varphi_{T,\varepsilon}$ con la intención de tomar después $\varepsilon \to 0$.

Ahora vamos a ver qué ocurre si en vez de usar la desigualdad de observabilidad para encontrar el control nulo, usamos otro método, basado directamente en las estimaciones de Carleman.

Por ejemplo, podemos pensar en el *método de Fursikov-Imanuvilov*, ya comentado cuando definimos la desigualdad de Carleman; véase [9].
Este nuevo método consiste en resolver el problema extremal

$$\begin{cases} \text{Min } \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_Q \rho^2 \cdot |y|^2 \, dx\, dt + \dfrac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} \rho_0^2 \cdot |v|^2 \, dx\, dt \\ \text{Sujeto a } v \in L^2(\omega \times (0,T)) \end{cases} \tag{3.16}$$

con $y$ el estado asociado a $v$ (es decir, la correspondiente solución de (3.2)) y $\rho$ y $\rho_0$ bien elegidos y, por supuesto, verificando $\rho, \rho_0 \to +\infty$ cuando $t \to T$.
En este caso, la desigualdad de Carleman implica la existencia y unicidad de solución, es decir:

$$\dot{\exists} \text{ solución } (\hat{v}, \hat{y}) \text{ de } (3.16) \text{ con } \hat{y}|_{t=T} = 0$$

Por lo tanto, vemos que con la *desigualdad de Carleman* se puede probar la existencia de solución de un par $(\hat{v}, \hat{y})$ que verifica la condición de controlabilidad.
Se observa que también $\hat{v}\,|_{t=T} = 0$, es decir, el control tiene la buena propiedad de dejar de ser necesario cerca de $t = T$.
Del mismo modo, existen aproximaciones numéricas satisfactorias que permiten calcular el control sin problema.
Para más detalles, véase [6].

### 3.2.2. Sobre el control exacto de la ecuación del calor

Vamos a estudiar la posible existencia de un control exacto para la EDP del calor.
Consideramos de nuevo el sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y|_{x=0} = y|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(x) \quad x \in (0,L) \end{cases}$$

El problema que planteamos ahora es el siguiente:

$$\boxed{\text{Dados } y_0, y_T \in L^2(0,L), \text{ hallar } \ v \in L^2(\omega \times (0,T)) \text{ tal que } y_{t=T} = y_T}$$

Hay dos opciones:

- Si $\omega = (0,L)$, entonces <u>sí</u> sería posible calcular el **control exacto** $v$. En efecto, si (por ejemplo) $y_0, t_T \in H_0^1(0,L)$ basta tomar

  $$\overline{y} := \big(1 - \frac{t}{T}\big) \cdot y_0 + \frac{t}{T} \cdot y_T, \text{ con } v := \overline{y}_t - \overline{y}_{xx}.$$

  Sin embargo, este caso no es interesante ya que tendríamos que controlar en todo el intervalo.

- Si $\omega \neq (0,L)$, entonces <u>no</u> es posible en general calcular el **control exacto**, ya que tenemos la siguiente propiedad de la EDP del calor:

**Proposición 3.1.** *Si $y_t - y_{xx} = 0$ en el abierto $O \times (0,T]$, con $y \in L^2(O \times (0,T))$, entonces, $y(\cdot,t)$ es analítica en $O$, $\forall\, t \in (0,T]$. En particular, $y(\cdot,T)$ es analítica. Para una $y_T$ que no sea analítica en $(0,L) \setminus \overline{\omega}$, no existe por tanto el **control exacto**.*

La prueba de esta propiedad es complicada; véase por ejemplo [7, 8].
Sin embargo, en el caso de la EDP de ondas, <u>sí</u> existe **control exacto** si $T$ es suficientemente grande, es decir, si $T > T_*(\omega)$ para un cierto $T_*$ que sólo depende de la distancia de $\omega$ a $\{0, L\}$.
Esto se puede ver con más detalle en [11, 12].

Para $N \geq 2$, de nuevo vamos a tener **control nulo** y, salvo cuando el dominio del control coincide con el dominio espacial, no tenemos en general **control exacto**.
Toda esta información puede ser consultada en el libro [1].

### 3.2.3. Control frontera de la ecuación del calor

Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ y|_{x=0} = v(t),\ y|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in (0,L) \end{cases}$$

Planteamos el siguiente problema de control frontera:

$$\boxed{\text{Dada } y_0 \in L^2(0,L), \text{ hallar } v \in L^\infty(0,T) \text{ tal que } y|_{t=T} = 0}$$

Una manera sencilla de resolver este problema consiste en reducirlo a un problema como los anteriores, con control en el segundo miembro de la EDP.

Comenzamos considerando el intervalo $(-L,L) \times (0,T)$.
Primero, extendemos $y_0$ por 0 de $(0,L)$ a $(-L,L)$. La extensión se denotará $\tilde{y}_0$.
Consideramos ahora el sistema

$$\begin{cases} \tilde{y}_t - \tilde{y}_{xx} = \tilde{v} \cdot 1_{(-L,0)}, \quad (x,t) \in (-L,L) \times (0,T) \\ \tilde{y}|_{x=-L} = \tilde{y}|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ \tilde{y}|_{t=0} = \tilde{y}_0(x), \quad x \in (-L,L) \end{cases}$$

Sabemos que $\exists\, \tilde{v} \in L^2\big((-L,0) \times (0,T)\big)$ tal que $\tilde{y}|_{t=T} = 0$ en $(-L,L)$.
Entonces, para resolver el problema de control frontera planteado, basta tomar ahora $y = \tilde{y}|_{(0,L)\times(0,T)}$ y $v = y|_{x=0}$.

De modo que, de nuevo, tenemos **control nulo** frontera (basta con controlar solamente un lado de la frontera). Obviamente, no tenemos en general **control exacto** frontera.

### 3.2.4. Control exacto a trayectorias

Consideramos una vez más el siguiente sistema;

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v \cdot 1_\omega, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ y|_{x=0} = y|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.17}$$

Fijamos una trayectoria no controlada $\overline{y}$, de forma que verifica:

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \overline{y}_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ \overline{y}|_{x=0} = \overline{y}|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ \overline{y}|_{t=0} = \overline{y}_0(x), \quad x \in (0,L), \end{cases} \tag{3.18}$$

donde $\overline{y}_0 \in L^2(0,L)$ es un estado inicial dado. Nos podríamos preguntar si existe el **control exacto a trayectorias**, es decir, si es cierto o no lo siguiente:

$$\boxed{\forall\, y_0 \in L^2(0,L),\ \exists\, v \in L^2\big(\omega \times (0,T)\big) \text{ tal que } y|_{t=T} = \overline{y}|_{t=T}}$$

Para resolver este problema, hacemos un cambio de variable: $z = y - \overline{y}$, de forma que tendríamos

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = v \cdot 1_\omega, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ z|_{x=0} = z|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T) \\ z|_{t=0} = y_0(x) - \overline{y}_0(x), \quad x \in (0,L) \end{cases}$$

Entonces, en términos de $v$ y $z$, nos preguntamos si es cierto o no lo siguiente:

$$\forall\, y_0 \in L^2(0,L),\ \exists\, v \in L^2\big(\omega \times (0,T)\big) \text{ tal que } z|_{t=T} = 0.$$

Pero esto es ahora evidente, ya que el **control nulo** está garantizado.
Esto implica que $y_{t=T} = \overline{y}_{t=T}$ y por tanto, **sí** existe el **control exacto a trayectorias**.
Como consecuencia, podemos decir que también tenemos **control aproximado** $\forall\, T > 0$. Vamos a demostrarlo brevemente:
Por un lado, tenemos que las trayectorias evaluadas en $t = T$ constituyen un subespacio denso en $L^2(0,L)$.

Por ejemplo, las funciones

$$\Big\{\sin\big(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\big)\Big\}$$

constituyen una base ortogonal en $L^2(0,L)$ y tenemos que, para

$$\overline{y}_0(x) = e^{\frac{n\cdot\pi}{L}^2\cdot T}\cdot\sin\big(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\big)$$

la correspondiente solución de (3.18) verifica

$$\overline{y}(x,T) \equiv \sin\big(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\big).$$

En efecto, la función $\overline{y}$ está dada por

$$\overline{y}(x,t) = e^{-\left(\frac{n\cdot\pi}{L}\right)^2\cdot\left(t-T\right)}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot x\cdot\pi}{L}\right) \quad \forall(x,t)\in(0,L)\times(0,T).$$

Por tanto, $\forall\, n,\ \exists\, v_n$ la solución $y_n$ de (3.17) correspondiente a $v=v_n$ verifica $y_n|_{t=T}=\sin\big(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\big)$.
Esto prueba que hay **control aproximado** $\forall\, T>0$, es decir, que

$$\forall\, y_T\in L^2(0,L) \text{ y } \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, v \text{ tal que } \|y|_{t=T}-y_T\|\le\varepsilon$$

Existen otras maneras de probar la **controlabilidad aproximada**, no necesariamente más sencillas, que pueden ser consultadas en [1, 3].

Entre ellas, destaquemos las dos siguientes:

- Se puede demostrar que la controlabilidad aproximada (en $\mathrm{L}^2(0,L)$) de (3.2) es equivalente a la continuación única de las soluciones de (3.3), es decir, a la propiedad siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ solución de (3.2) para } \varphi_T\in L^2(0,L)\\ \varphi=0 \text{ en } \omega\times(0,T)\end{array}\right\}\Longrightarrow \varphi\equiv 0.$$

  Pero esta propiedad es consecuencia inmediata de la analiticidad de $\varphi(\cdot,t)$ para todo $t\in[0,T)$.

- Para cada $\varepsilon > 0$, tomemos

$$A_\varepsilon(\varphi_T) = \frac{1}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt + \varepsilon \cdot \|\varphi_T\| - \big(\varphi_T, y_T\big) \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(0, L),$$

donde (de nuevo) $\varphi$ es la solución de (3.3) correspondiente a $\varphi_T$.

Entonces, $A_\varepsilon$ posee un único mínimo $\hat{\varphi}_{T,\varepsilon} \in L^2(0, L)$ y el control $v_\varepsilon = \hat{\varphi}_\varepsilon \cdot 1_\omega$, donde $\hat{\varphi}_\varepsilon$ es la solución de (3.3) asociada, produce un estado $y_\varepsilon$ que verifica $\|y_\varepsilon(\cdot, T) - y_T\| \le \varepsilon$.

Además, se puede demostrar que $v_\varepsilon$ es el control de norma mínima en $L^2(\omega \times (0, T))$ con esta propiedad.

# Bibliografía


[1] Coron, Jean-Michel. *Control and nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] Deif, Assem S. *Advanced matrix theory for scientists and engineers.* Abacus Press, Tunbridge Wells; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1982.

[3] Fabre, Caroline; Puel, Jean-Pierre; Zuazua, Enrike. *Approximate controllability of the semilinear heat equation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 125 (1995), no. 1, 31–61.

[4] Fernández-Cara, Enrique. *Notas de "Complementos de Modelizacion y Optimización Numérica".* Depto. EDAN, Universidad de Sevilla, 2023.

[5] Fernández-Cara, Enrique; Guerrero, Sergio. *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability.* SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 4, 1399–1446.

[6] Fernández-Cara, Enrique; Münch, Arnaud. *Numerical exact controllability of the 1D heat equation: duality and Carleman weights.* J. Optim. Theory Appl. 163 (2014), no. 1, 253–285.

[7] Friedman, Avner. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.

[8] Friedman, Avner. *Partial differential equations.* Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1976.

[9] Fursikov, A. V.; Imanuvilov, O. Yu. *Controllability of evolution equations.* Lecture Notes Series, 34. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[10] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Matrix analysis, Second edition.* Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[11] Lions, J.-L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1.* Recherches en Mathématiques Appliquées, 8. Masson, Paris, 1988.

[12] Lions, J.-L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2.* Recherches en Mathématiques Appliquées, 9. Masson, Paris, 1988.