FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

TRABAJO FIN DE GRADO

Espacios de Sobolev

Dirigido por:
Manuel González Burgos

Fdo.: **Teresa Oitabén Santos**
Sevilla, Junio 2023

A mi madre y a mi abuelo,
allá donde estén,
espero que estén orgullosos de mí.

Índice general

Resumen

Los espacios de Sobolev son unos espacios normados con unas características importantes. En ellos, es posible la resolución (en un sentido débil) de muchas Ecuaciones en Derivadas Parciales, gracias a las propiedades de los mismos. En este trabajo, daremos una visión general de las propiedades más importantes de los espacios de Sobolev. En particular, hablaremos de los teoremas de Inyección de estos espacios en espacios con mejores propiedades de regularidad. Estudiaremos los teoremas de Compacidad, estableciendo cuáles de las inyecciones anteriores son compactas. Finalizaremos estudiando la Teoría de la Traza, dando significado a los valores de una función en la frontera del conjunto donde esté definida.

Abstract

Sobolev spaces are normed spaces with important characteristics. Using their properties it is possible to solve (in a weak sense) many Partial Differential Equations. In this work, we will give a general vision of the most important properties of Sobolev spaces. In particular, we will see Sobolev Embedding Theorems which prove that these spaces are included in other spaces with better properties of regularity. We will study the Compactness Theorems, setting which of the previous inyections are compact. We will finish studying the Trace Theory, giving sense of the value of the function on the boundary of the set where it is define.

Introducción

En este trabajo vamos a estudiar propiedades de ciertos espacios de Banach de funciones débilmente diferenciables de varias variables que surgen en relación con numerosos problemas en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. Estos espacios se han asociado con el nombre del matemático ruso S.L. Sobolev, aunque sus orígenes son anteriores a sus principales contribuciones a su desarrollo a finales de la década de 1930.

La organización de este trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 1 comenzaremos recordando unos resultados que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo. Introduciremos el concepto de distribución y de derivada distribucional (o derivada débil), comentando ciertas operaciones que podemos hacer con las mismas. También recordaremos la convolución de funciones pertenecientes a los espacios de Banach $L^p(\Omega)$ junto con sus propiedades más clásicas. Veremos también algunas propiedades de los mencionados espacios de Banach que están relacionadas con la convolución. Concluyendo este capítulo con un importante resultado de densidad en los espacios $L^p(\Omega)$.

En el Capítulo 2 daremos la definición de los espacios de Sobolev y probaremos algunas de sus propiedades básicas.

En el Capítulo 3 hablaremos primero de la aproximación de funciones pertenecientes a $W^{1,p}(\Omega)$ por funciones muy regulares, donde destaca el Teorema de Friedrichs. Definiremos el operador prolongación que nos será de utilidad en capítulos posteriores, y daremos algunas propiedades del mismo. Esto nos permitirá introducir los teoremas de prolongación, donde usaremos el llamado método de reflexión. Veremos en esta sección ciertos resultados de densidad importantes. Terminaremos este capítulo con la desigualdad de Poincaré.

En el Capítulo 4 veremos los teoremas de inyección de los espacios de Sobolev en espacios de funciones más regulares. Iremos estudiando dicha inyección por casos, primero veremos el caso $1 \leq p < n$, luego el caso $p = n$ y por último el caso $p > n$. Terminaremos el capítulo generalizando dichas inclusiones.

En el Capítulo 5 estudiaremos cuáles de las inclusiones anteriores son compactas. Comenzaremos viendo ciertos resultados de compacidad en los espacios $L^p(\Omega)$ que necesitaremos para estudiar qué inclusiones son compactas. El teorema central del capítulo corresponde a Rellich-Kondrasov.

Por último, en el Capítulo 6 estudiaremos la teoría de la Traza, donde veremos la aplicación traza y estudiaremos sus propiedades. Concluiremos enunciando el Teorema de la Traza.

Capítulo 1

Resultados previos.

En este capítulo vamos a comenzar definiendo el concepto de distribución, seguiremos con algunas propiedades que vamos a necesitar a la hora de introducir los espacios de Sobolev y finalizaremos con la convolución de funciones y algunas propiedades de la misma que nos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

1.1. Distribuciones.

En esta sección comenzaremos trabajando con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo no vacío.

Definición 1.1.1. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Llamaremos **soporte de** φ (denotado sop φ) a

$$\text{sop } \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Si dicho conjunto es compacto, diremos que φ tiene soporte compacto. Denotaremos al espacio de las funciones continuas con soporte compacto contenido en Ω de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}_0^0(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \text{sop } \varphi \subset \Omega \text{ y compacto}\}.$$

Definición 1.1.2. El conjunto de las funciones infinitamente diferenciables definidas en Ω con soporte compacto componen un espacio vectorial que denotaremos $\mathcal{D}(\Omega)$. Es decir,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_0^0(\Omega).$$

Ejemplo 1.1.3. Demos un ejemplo de función perteneciente a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \kappa\varepsilon^{-n} \ \exp\left(\dfrac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

donde

$$\kappa^{-1} = \int_{|x|\leq 1} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) dx.$$

Sabemos que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con sop $\rho_\varepsilon = \overline{B}(0;\varepsilon)$. Además $\rho_\varepsilon \geq 0$ en $\mathbb{R}^n$ y tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Veamos esta última afirmación más detalladamente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx &= \frac{\kappa}{\varepsilon^n} \int_{|x|\leq\varepsilon} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) dx \\ &= \kappa \int_{|x|\leq 1} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) dx = 1. \end{aligned}$$

Estas funciones ρ_ε, cuando $\varepsilon \to 0$, tienen soportes cada vez más pequeños pero mantienen el volumen contenido bajo la gráfica. Cuando $\varepsilon \to 0$, se concentran en el origen. Reciben el nombre de **funciones regularizantes** (*mollifiers).*

Veamos a continuación un resultado importante donde están implicadas las funciones de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Antes demos una definición que necesitaremos para enunciar el resultado.

Definición 1.1.4. Una familia de conjuntos $\{E_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que es **localmente finita** si para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ hay un entorno de x que interseca con una cantidad finita de E_i.

Teorema 1.1.5 (Partición de la Unidad). *Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, Ω_i abiertos. Entonces existen funciones $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, con $i \in I$, tales que:*

(i) sop $\varphi_i \subset \Omega_i$,
(ii) $\{\text{sop } \varphi_i\}_{i\in I}$ *es un conjunto localmente finito,*
(iii) $0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \forall i \in I$, *y*
(iv) $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1.$

Observación 1.1.6. Dado cualquier $x \in \Omega$ existe un entorno que interseca con un conjunto finito de conjuntos $\{\text{sop } \varphi_i\}$. Esto significa que $\varphi_i(x) = 0$ para todo i menos para un conjunto finito. Por eso la suma definida en (iv) es una suma finita y está bien definida.

Como consecuencia del Teorema 1.1.5 obtenemos:

Corolario 1.1.7. *Sea K, un conjunto compacto, y Ω, un abierto, tales que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi \equiv 1$ en K.*

Demostración. Consideremos un conjunto relativamente compacto y abierto, U, tal que $K \subset U \subset \Omega$. Ahora consideremos el recubrimiento de $\mathbb{R}^n$ que consiste en $\{U, \mathbb{R}^n \setminus K\}$ y la partición de la unidad asociada a dicho recubrimiento. Sean φ y ψ funciones $\mathcal{C}^\infty$ no negativas con $\varphi + \psi = 1$, sop $\varphi \subset U$ y sop $\psi \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. De este modo $\psi = 0$ en K y por tanto $\varphi = 1$ en K. También sop $\varphi \subset U \subset \Omega$ y es compacto, al ser U relativamente compacto. Luego $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Esto concluye la prueba del resultado. $\square$

Ahora proporcionaremos a $\mathcal{D}(\Omega)$ una topología, pero no daremos una completa descripción de la misma, simplemente necesitamos saber el concepto de convergencia.

Definición 1.1.8. Una sucesión de funciones $\{\phi_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ se dice que converge a 0 si existe un conjunto compacto K (fijo) tal que sop $\phi_i \subset K$, para cualquier $i \geq 1$, y todas sus derivadas convergen uniformemente a 0 en K.

Vamos a considerar ahora **aplicaciones lineales** en $\mathcal{D}(\Omega)$ que sean continuas respecto de la topología anterior.

Definición 1.1.9. Un aplicación lineal T en $\mathcal{D}(\Omega)$ se dice que es una **distribución** en Ω si para cualquier sucesión de funciones $\{\phi_i\}_{i\geq 1}$ tal que $\phi_i \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, tenemos que $T(\phi_i) \to 0$ en $\mathbb{R}$.

Observación 1.1.10. El espacio de distribuciones es el dual topológico del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, denotaremos al espacio de las distribuciones por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demos ahora algunos ejemplos de distribuciones.

Ejemplo 1.1.11. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **localmente integrable** si para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$, se tiene:

$$\int_K |f|\, dx < \infty.$$

El conjunto de funciones localmente integrables se denotará por $L^1_{loc}(\Omega)$. Por ejemplo, cualquier función continua es localmente integrable. Luego, dada cualquier funcion f localmente integrable, definimos $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi \, dx. \tag{1.1}$$

Claramente T_f es una aplicación lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$ y es fácil ver que es una distribución.

Observación 1.1.12. Si f y g son dos funciones localmente integrables tal que $f = g$ entonces $T_f = T_g$. En particular, si $f = 0$, entonces define la distribución nula. La implicación contraria también es cierta. Si $T_f = 0$, entonces $f = 0$, esto es debido al **Teorema fundamental del Cálculo Variacional**, veáse el Lema 1.3.17.

Observación 1.1.13. No distinguiremos entre una función localmente integrable y la distribución que genera. Cuando digamos "una distribución T es una función" significará que existe una función localmente integrable tal que $T = T_f$.

Observación 1.1.14. Se tiene que cualquier función $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, genera una distribución por (1.1). Así, tenemos que,

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ejemplo 1.1.15 (La distribución de Dirac). Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Se define δ_x como

$$\delta_x(\phi) = \phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Se puede comprobar que, efectivamente, δ_x define una distribución. Observamos que este ejemplo no es un caso particular del anterior, es decir, la distribución de Dirac no está generada por una función localmente integrable. En efecto, asumamos que f es una función localmente integrable tal que

$$T_f = \delta_0.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $B(0;\varepsilon)$, $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ y $\phi_\varepsilon \equiv 1$ en $B(0;\varepsilon/2)$, tenemos garantizada la existencia de dicha función gracias al Corolario 1.1.7. Luego,

$$\delta_0(\phi_\varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sin embargo, por otro lado tenemos la siguiente desigualdad,

$$\delta_0(\phi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi_\varepsilon \, dx = \int_{B(0,\varepsilon)} f\phi_\varepsilon \, dx \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f| \, dx,$$

y entonces $\delta_0(\phi_\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, por la integrabilidad local de f, y tenemos una contradicción. Deducimos que la distribución de Dirac no proviene de una función localmente integrable.

1.2. Operaciones con distribuciones.

En esta sección nos centraremos en las operaciones más comunes que podemos realizar con distribuciones, que serán las que necesitaremos posteriormente.

Comencemos recordando la notación de L. Schwartz de multi-índice.

Definición 1.2.1. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, ..., x_n)$. Un **multi-índice** es una n-tupla

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Denotamos:

$$\begin{cases} |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \\ \alpha! = \alpha_1! \, ... \, \alpha_n!, \\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... \, x_n^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Definición 1.2.2. Diremos que dos multi-índices α y β cumplen $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i : 1 \leq i \leq n$. Finalmente denotemos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \, x_n^{\alpha_n}}.$$

Veamos ahora cómo se define la derivada de una distribución. Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si $T = T_f$, con f una función $\mathcal{C}^1$, entonces es obvio que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces, para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tenemos lo siguiente

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'\phi \, dx = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \, dx = -T_f(\phi').$$

Generalizando lo anterior, definimos para cualquier $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$T'(\phi) = -T(\phi'), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Es claro que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ya que, si $\phi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces, ϕ_n' es también una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergente a 0. Luego $T'(\phi_n) = -T(\phi_n')$, que converge a 0. Esto demuestra que, efectivamente, $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Podemos iterar el proceso de derivación y obtener lo siguiente

$$T^{(k)}(\phi) = (-1)^k T(\phi^{(k)}).$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, podemos definir de forma general:

Definición 1.2.3. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos la distribución $D^\alpha T$ como

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación 1.2.4. No es difícil comprobar que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces se tiene que $D^\alpha T$ es una distribución en Ω para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Veamos que si $\{\phi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ son tales que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces se tiene que $D^\alpha T(\phi_n) \to D^\alpha T(\phi)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. En particular, $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Así, como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se tiene $T(D^\alpha \phi_n) \to T(D^\alpha \phi)$, es decir,

$$D^\alpha T(\phi_n) \to D^\alpha T(\phi).$$

Con lo que se demuestra que $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Ilustremos mejor el concepto de derivada de una distribución con un ejemplo.

Ejemplo 1.2.5. Consideremos la **distribución de Dirac** δ_0 en $\mathbb{R}$

$$\frac{d\delta}{dx}(\phi) = -\phi'(0),$$

que es de nuevo una distribución.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos la **función de Heaviside** en $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Como es localmente integrable, entonces define una distribución. Denotemos la distribución que define por T_H. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\frac{dT_H}{dx}(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_0^\infty \frac{d\phi}{dx}\,dx = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Con lo que tenemos que

$$\frac{dT_H}{dx} = \delta_0.$$

Observación 1.2.7. Estos ejemplos anteriores muestran algo interesante, si una función localmente integrable tiene derivada en el sentido clásico, y esta es localmente integrable, ¿cuál es la relación entre la derivada distribucional y la derivada clásica? El ejemplo precedente muestra que no tienen por qué coincidir. La función de Heaviside es diferenciable, salvo en $x = 0$, con derivada nula, lo que generaría la distribución nula, pero la derivada distribucional es la distribución de Dirac.

Otra operación importante en las distribuciones es la **multiplicación por funciones** de $\mathcal{C}^\infty$. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\{\phi_m\}_{m\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge a 0. Por la fórmula clásica de Leibniz para funciones infinitamente diferenciables, es fácil ver que $\psi\phi_m \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, con $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Por eso, para cualquier distribución T, tenemos que $T(\psi\phi_m) \to 0$ en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.8. La operación definida por

$$\phi \to T(\psi\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

para una función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ fija y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, define una distribución. La denotaremos por ψT.

De este modo,

$$(\psi T)(\phi) = T(\psi\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación 1.2.9. Si $T = T_f$ entonces $\psi T = T_{\psi f}$. La multiplicación por una función de $\mathcal{C}^\infty$ extiende la noción usual de la multiplicación de dos funciones.

Observación 1.2.10. Las reglas del cálculo se siguen manteniendo. Por ejemplo, sean $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\psi T)(\phi) &= -(\psi T)\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -T\left(\psi\frac{d\phi}{dx}\right)\\ &= -T\left(\frac{d}{dx}(\psi\phi)\right) + T\left(\frac{d\psi}{dx}\phi\right)\\ &= \left(\psi\frac{dT}{dx} + \frac{d\psi}{dx}T\right)(\phi).\end{aligned}$$

Esto proporciona la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}(\psi T) = \psi\frac{dT}{dx} + \frac{d\psi}{dx}T.$$

Esto se puede generalizar de la siguiente forma:

Teorema 1.2.11 (Fórmula de Leibniz). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para cualquier multi-índice α,*

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta\leq\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta\psi D^{\alpha-\beta}T.$$

Demostración. La demostración del resultado sale fácilmente por inducción. □

Pasemos a definir el concepto de convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$:

Definición 1.2.12. Diremos que una sucesión de distribuciones $\{T_m\}_{m\geq 1}$ converge a una distribución T, si para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene:

$$T_m(\phi) \to T(\phi).$$

Observación 1.2.13. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$, es un espacio dual. El anterior concepto de convergencia es el que corresponde a la **topología débil**.

Veamos que la derivación es un operador continuo en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se tiene:

Teorema 1.2.14. *Sea $\{T_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ una sucesión tal que $T_m \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tenemos que $D^\alpha T_m \to D^\alpha T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces,

$$(D^\alpha T_m)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_m(D^\alpha \phi) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi).$$

□

Ejemplo 1.2.15. Sea $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la sucesión de funciones regularizantes, definida en el ejemplo 1.1.3. Veamos que $\rho_\varepsilon \to \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\phi(x)\,dx &= \kappa\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) dx \\
&= \kappa \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon y) \exp\left(\frac{-1}{1 - |y|^2}\right) dy \\
&= \phi(0) + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} (\phi(\varepsilon y) - \phi(0)) \exp\left(\frac{-1}{1 - |y|^2}\right) dy.
\end{aligned}$$

Ahora como $\phi(\varepsilon y) - \phi(0) \to 0$ puntualmente, y gracias al Teorema de la Convergencia Dominada, la última integral converge a 0 cuando $\varepsilon \to 0$.

1.3. Convolución de funciones.

En esta sección comentaremos cómo se define la convolución de funciones y algunas de sus propiedades más importantes. Enunciaremos también, un importante resultado de densidad en cuya demostración juega un papel muy importante la convolución.

Definamos antes de empezar, los espacios $L^p(\Omega)$ con sus respectivas normas.

Definición 1.3.1. Si $p \in [1, \infty)$, tenemos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } \mid \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$ se tiene:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} \mid \exists C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ e.c.t } \Omega\}.$$

Definición 1.3.2. Definamos la norma asociada a dichos espacios. Si $p \in [1, \infty)$, tenemos que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = |u|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Y si $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = |u|_{\infty,\Omega} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ e.c.t } \Omega\}.$$

Observación 1.3.3. Los elementos de $L^p(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones: dos funciones iguales salvo en un conjunto de medida nula se consideran la misma.

Definición 1.3.4. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $x \in \mathbb{R}^n$, se define la **convolución** entre f y g como la integral,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy. \tag{1.2}$$

Veamos que la convolución de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ está bien definida. Se tiene:

Proposición 1.3.5. *La convolución de funciones está bien definida. Además se tiene la siguiente desigualdad*

$$|f * g|_{1,\mathbb{R}^n} \leq |f|_{1,\mathbb{R}^n} |g|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

Demostración. Dicha integral está bien definida, ya que la función

$$F(x,y) = f(x-y)g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

es medible en el espacio producto $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$. Por el teorema de Fubini y la propiedad de traslación invariante de la medida de Lebesgue, se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx \\ &= |g|_{1,\mathbb{R}^n} |f|_{1,\mathbb{R}^n} < +\infty.\end{aligned}$$

□

Veamos algunas propiedades que cumple la convolución de funciones que nos serán de utilidad más adelante.

Teorema 1.3.6. *La convolución es una operación binaria conmutativa y asociativa en $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x),$$

usando el cambio de variable $z = x - y$. Esto prueba la conmutatividad. Veamos ahora la asociatividad. Si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces usando el cambio de variable $z = t - y$ y aplicando el teorema de Fubini, se tiene,

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n_y} (f * g)(x-y)h(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_y} \int_{\mathbb{R}^n_x} f(x-y-z)g(z)h(y)\,dz\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_t} f(x-t) \int_{\mathbb{R}^n_y} g(t-y)h(y)\,dy\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_t} f(x-t)(g * h)(t)\,dt \\ &= (f * (g * h))(x).\end{aligned}$$

La igualdad anterior prueba la asociatividad de la convolución. Esto demuestra el resultado. □

Antes de demostrar el siguiente resultado sobre las propiedades de la convolución, enunciemos un resultado que emplearemos en la demostración.

Teorema 1.3.7 (**Teorema de representación de Riesz**). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un abierto no vacío, y $p \in [1, \infty)$. Sea $\varphi \in L^p(\Omega)'$ (dual topológico de $L^p(\Omega)$). Entonces existe un único $u \in L^{p'}(\Omega)$ (p' exponente conjugado de p, i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf \, dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)'}.$$

Observación 1.3.8. El teorema anterior expresa que toda forma lineal continua sobre $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, se representa por medio de una única función de $L^{p'}(\Omega)$. La aplicación $\varphi \to u$, es un operador lineal isométrico y sobreyectivo que permite identificar el dual de $L^p(\Omega)$ con $L^{p'}(\Omega)$.

Observación 1.3.9. El Teorema 1.3.7 no es cierto para el caso $p = \infty$, i.e.,

$$L^\infty(\Omega)' \neq L^1(\Omega),$$

veáse [2]. De hecho, $L^\infty(\Omega)$ no es reflexivo ni separable.

La Proposición 1.3.5 se puede generalizar en el siguiente sentido:

Teorema 1.3.10. *Sean $p \in [1, \infty]$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g$ está bien definida y además, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cumpliendo que*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.3}$$

Demostración. El caso $p = 1$ corresponde a la Proposición 1.3.5. El caso $p = \infty$ es trivial. Por tanto, consideremos $p \in (1, \infty)$. Sea p' el exponente conjugado de p, es decir, $1/p + 1/p' = 1$. Sea $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, entonces la función

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to f(x - y)g(y)h(x) \in \mathbb{R},$$

es medible y se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{\mathbb{R}^n_y} |f(x-y)g(y)h(x)| \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}^n_x} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^n_y} |f(x-y)g(y)| \, dy \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_x} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^n_t} |f(t)g(x-t)| \, dt \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_t} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n_x} |h(x)||g(x-t)| \, dx \right) dt \\
&\leq \|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder y el hecho de que, por la traslación invariante de la medida de Lebesgue, $g(x)$ y $g(x-t)$ tienen la misma norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces por el teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n_y} h(x)f(x-y)g(y)\,dy,$$

existe al menos para todo x y podemos elegir $h \neq 0$, de donde deducimos que $f * g$ definida por (1.2) está bien definida. Además,

$$h \to \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)h\,dx \in \mathbb{R},$$

es una forma lineal y continua en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ cuya norma está acotada por $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Por el teorema de Representación de Riesz, se tiene que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y (1.3) se cumple. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Observación 1.3.11. La desigualdad (1.3) es un caso particular de la desigualdad de Young. Sean $1 \leq p,\ p',\ r < \infty$ tal que

$$(1/p) + (1/p') = 1 + (1/r).$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Podemos encontrar una demostración de este resultado en [1].

Observación 1.3.12. Si f es una función continua en $\mathbb{R}^n$ y g es continua con soporte compacto, de nuevo la integral (1.2) tiene sentido. Entonces en este caso también usamos (1.2) para definir la convolución $f*g$. Más generalmente, si $f_1, ..., f_k$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, tal que al menos una de ellas tiene soporte compacto, entonces podemos definir de nuevo $f_1 * ... * f_k$ considerando las funciones que siguen (por ejemplo):

$$f_1 * (f_2 * ...(f_{k-1} * f_k)).$$

Observamos que el orden de la convolución no es importante, por las propiedades de conmutatividad y asociatividad que hemos probado antes.

El siguiente resultado demuestra que, al menos un elemento de cada paréntesis tiene soporte compacto. Definamos antes la noción de soporte compacto de una función medible.

Definición-Proposición 1.3.13. Sea f una función definida en Ω con valores en $\mathbb{R}$. Se considera la familia de todos los abiertos $\{\omega_i\}_{i\in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tales que para cada $i \in I$, $f = 0$ c.p.d en ω_i. Se define $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, entonces $f = 0$ c.p.d en ω. Luego diremos que el soporte de f es $\Omega \setminus \omega$.

Demostración. No es evidente que $f = 0$ c.p.d. en ω, ya que la familia I no es numerable. Sin embargo, la demostración se puede reducir al caso numerable mediante el siguiente procedimiento:

Sea $(K_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de compactos tales que $\omega = \bigcup_n K_n$. Tomar, por ejemplo, $K_n = \{x \in \omega : \text{dist }(x, \mathbb{R}^n \setminus \omega) \geq \frac{1}{n} \text{ y } |x| \leq n\}$.

Se sigue que para cada n, K_n está recubierto por un número finito de ω_i. Sea $K_n \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$ con $K_n \cap I$ finito. Poniendo $J = \bigcup_n K_n$ (J es numerable), se tiene $\omega = \bigcup_{i\in J} \omega_i$. Como $f = 0$ c.p.d. en ω_i, se concluye que $f = 0$ c.p.d. en ω. □

Proposición 1.3.14. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\text{sop }(f * g) \subset \overline{\text{sop }(f) + \text{sop }(g)}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, tal que la funcion $y \to f(x-y)g(y)$ sea integrable. Se tiene

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{(x-\text{sop }(f))\cap\text{sop }(g)} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Hagamos la prueba del siguiente hecho, lo que probaría el resultado:

$$x \notin \text{sop }(f) + \text{sop }(g) \Rightarrow (f * g)(x) = 0 \quad \text{cpd.}$$

Supongamos que $x \notin \text{sop }(f) + \text{sop }(g)$, entonces $(x - \text{sop }(f)) \cap \text{sop }(g) = \emptyset$ y $(f * g)(x) = 0$. Por tanto

$$(f * g)(x) = 0 \quad c.p.d \ \ en \ \ \overline{\text{sop }(f) + \text{sop }(g)},$$

y en particular se tiene lo siguiente,

$$(f * g)(x) = 0 \quad c.p.d \ \ en \ \ int(\overline{\text{sop }(f) + \text{sop }(g)}).$$

En consecuencia, $\text{sop }(f * g) \subset \overline{\text{sop }(f) + \text{sop }(g)}$. Esto finaliza la prueba. □

Una propiedad importante de la convolución es que tiene **efecto regularizante** sobre las funciones. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado que lo refleja.

Teorema 1.3.15. *Sean* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* sop g *compacto, entonces si una de ellas es* $\mathcal{C}^\infty$*,* $f * g$ *es* $\mathcal{C}^\infty$*.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es suficiente para probar el resultado, ver que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n. \tag{1.4}$$

(i) Veamos que $f*g$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$. Consideremos $h \in \mathbb{R}^n$, y

$$|(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h - y) - f(x - y)||g(y)|\, dy.$$

Es suficiente considerar la integral anterior sobre $K = \text{sop } g$ que, por hipótesis, es compacto. Así para un x fijo, el conjunto

$$x - K = \{x - y \mid y \in K\},$$

es compacto y entonces f es uniformemente continua en K. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si $|h| < \eta$ entonces $|f(x - y + h) - f(x - y)| < \varepsilon$. Entonces el integrando está acotado por $\varepsilon|g(y)|$ (que es integrable) y tiende a 0 cuando $h \to 0$. Esto demuestra que $(f * g)(x + h) \to (f * g)(x)$ cuando $h \to 0$ y entonces $f * g$ es continua.

(ii) Probemos ahora (1.4). Sea $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, donde el 1 está en la posición i-ésima. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h}.$$

De nuevo, si $K = \text{sop } (g)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)] &= \frac{1}{h}\int_K (f(x + he_i - y) - f(x - y))g(y)\, dy \\ &= \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}((x - y) + \theta he_i)g(y)\, dy. \end{aligned}$$

con $0 < \theta < 1$. De nuevo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es continua y por tanto está acotada en el compacto K. Luego, cuando $h \to 0$, el integrando converge a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)g(y)$.

Y el resultado se concluye aplicando el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. Hemos probado entonces lo siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = (\frac{\partial f}{\partial x_i} * g).$$

Esto finaliza la prueba. □

Observación 1.3.16. Si α es cualquier multi-índice, g es una función continua con soporte compacto y f es una función de $\mathcal{C}^\infty$, entonces se tiene lo siguiente

$$D^\alpha(f * g)(x) = ((D^\alpha f) * g)(x).$$

Como conclusión del resultado anterior, sabemos que la convolución con una funcion de $\mathcal{C}^\infty$ produce una función de la misma regularidad. Este resultado junto con la serie de funciones consideradas en el ejemplo 1.1.3 nos proporciona una técnica que se usa para probar varios teoremas de densidad. Enunciemos varios resultados que nos serán de utilidad.

Lema 1.3.17. *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega fu = 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}^0_0(\Omega).$$

Entonces, $f = 0$ c.p.d. en Ω.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [2].

Teorema 1.3.18. *El espacio $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{C}^0_0(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$. Supongamos entonces que $1 < p < \infty$. Para demostrar que $\mathcal{C}^0_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ es suficiente comprobar que si $h \in L^{p'}(\Omega)$ verifica

$$\int_\Omega hu\, dx = 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}^0_0(\Omega),$$

entonces $h = 0$. Pero $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ya que

$$\int_\Omega |h\mathbf{1}_K|\, dx \leq |h|_{p',\Omega}|K|^{1/p} < \infty,$$

y entonces podemos aplicar el Lema 1.3.17 para concluir que $h = 0$ c.p.d. □

Proposición 1.3.19. *Sea $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\rho_n * f \to f$ uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$, donde ρ_n es una sucesión regularizante.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto fijo. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependiente de K y de ε) tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0;\delta).$$

Se tiene

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,dy \\ &= \int_{B(0;1/n)} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,dy.\end{aligned}$$

Y entonces, para $n > \frac{1}{\delta}$ y $x \in K$,

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n\,dx = \varepsilon.$$

Esto concluye el resultado. □

Teorema 1.3.20. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces, $\rho_n * f \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $f_1 \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ fija tal que $|f - f_1|_{p,\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ (ver Teorema 1.3.18). Por la Proposición 1.3.19 se sabe que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente sobre todo compacto. Por otra parte, se tiene (ver Proposición 1.3.14):

$$\text{sop }(\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0;\frac{1}{n}) + \text{sop } f_1} \subset K, \quad K \text{ compacto fijo.}$$

Por consiguiente se deduce que

$$|\rho_n * f_1 - f_1|_{p,\mathbb{R}^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalmente, se escribe

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f],$$

de donde resulta que

$$|\rho_n * f - f|_{p,\mathbb{R}^n} \leq 2|f - f_1|_{p,\mathbb{R}^n} + |\rho_n * f_1 - f_1|_{p,\mathbb{R}^n},$$

en virtud de la Proposición 1.3.5. Se tiene entonces

$$\limsup_{n\to\infty} |\rho_n * f - f|_{p,\mathbb{R}^n} \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

i.e

$$\lim_{n\to\infty} |\rho_n * f - f|_{p,\mathbb{R}^n} = 0.$$

Esto concluye la demostración del resultado. □

Como corolario de estos resultados podemos enunciar el siguiente teorema de densidad.

Teorema 1.3.21. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, un abierto no vacío. Entonces* $\mathcal{D}(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$*.*

Demostración. Sean $f \in L^p(\Omega), \varepsilon > 0$ y $f_1 \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ tales que

$$|f - f_1|_{p,\Omega} < \varepsilon.$$

Se considera la función $\overline{f_1}$ definida por

$$\overline{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \Omega, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

De modo que $\overline{f_1} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $|\rho_n * \overline{f_1} - \overline{f_1}|_{p,\mathbb{R}^n} \to 0$ (por el Teorema 1.3.20). Por otra parte,

$$\text{sop } (\rho_n * \overline{f_1}) \subset B(0; \frac{1}{n}) + \text{sop } f_1 \subset \Omega \text{ para } n, \text{ suficientemente grande.}$$

Sea $u_n = (\rho_n * \overline{f_1})|_\Omega$. Entonces, para n suficientemente grande, $u_n \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ y además, $|u_n - f_1|_{p,\Omega} \to 0$. Así, para n suficientemente grande, $|u_n - f|_{p,\Omega} < 2\varepsilon$. Esto concluye el resultado. $\square$

Observación 1.3.22. La técnica de regularización por convolución + truncamiento fue introducida por Leray y Friedrichs.

Capítulo 2

Definición y propiedades básicas de los espacios de Sobolev.

En este capítulo definiremos los espacios de Sobolev y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas. A partir de ahora, Ω será un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $\partial\Omega$ su frontera.

Definición 2.1. Sean $m > 0$, un entero, y $1 \leq p \leq \infty$. El **espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ se define por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Observación 2.2. En otras palabras, $W^{m,p}(\Omega)$ es el espacio de funciones en $L^p(\Omega)$ tal que todas las derivadas distribucionales hasta orden m están también en $L^p(\Omega)$. Consideramos las derivadas distribucionales ya que no podemos olvidar que estamos trabajando con clases de funciones.

Observación 2.3. Claramente $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial. Le asociamos la siguiente norma, para $1 \leq p < \infty$:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{p,\Omega}^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{2.1}$$

y si $p = \infty$,

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{\infty,\Omega}.$$

Observación 2.4. Otras normas equivalentes a la anterior son:

$$\|u\|_{m,p,\Omega}^{(1)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{p,\Omega}$$

o

$$\|u\|_{m,p,\Omega}^{(2)} = \max_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_{p,\Omega}.$$

Notación.

1. El caso $p = 2$ juega un papel especial. Estos espacios serán denotados por $H^m(\Omega)$. Entonces,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

2. A veces usaremos como **seminormas**, las que consisten en las normas de las derivadas de mayor orden en $L^p(\Omega)$. Las denotaremos por $|\cdot|_{m,p,\Omega}$. Esto es, para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tenemos, si $p < \infty$

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

y si $p = \infty$,

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{\infty,\Omega}.$$

3. Podemos considerar de forma natural el espacio $L^p(\Omega)$ como un caso especial de espacio de Sobolev cuando $m = 0$, es decir, cuando no tenemos en cuenta las derivadas.

Definición 2.5. Los espacios $H^m(\Omega)$ tienen un producto interno natural definido por

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx, \quad \textit{para } u, v \in H^m(\Omega).$$

Este producto interno proporciona la norma dada por la fórmula (2.1) cuando $p = 2$.

Veremos que la siguiente aplicación

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \to (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) \in (L^p(\Omega))^{n+1}, \tag{2.2}$$

es una isometría de $W^{1,p}(\Omega)$ en $(L^p(\Omega))^{n+1}$ si dotamos al último espacio con la norma, si $p < \infty$

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p},$$

y si $p = \infty$

$$\|u\| = \max_{1 \le i \le n+1} |u_i|_{\infty,\Omega}.$$

Esta isometría es importante, la usaremos en la prueba del resultado siguiente. Antes de enunciarlo, recordemos la definición de espacio de Banach reflexivo.

Definición 2.6. Sea E un espacio de Banach y sea J la inyección canónica de E en $(E')'$. Se dice que E es **reflexivo** si $J(E) = (E')'$.

Teorema 2.7. *Para cada $1 \le p \le \infty$ y $m \ge 1$, el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Si $1 < p < \infty$, es reflexivo y si $1 \le p < \infty$, es separable. En particular, $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración. Sea $m \ge 1$ y consideremos

$$N_m = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \le m\} \quad \text{y} \quad X = L^p(\Omega)^{N_m}.$$

X es un espacio de Banach con la norma:

$$p = \infty : \|F\|_X = \max_{|\alpha| \le m} |F_\alpha|_{\infty,\Omega},$$

o

$$p < \infty : \|F\|_X = \left(\sum_{|\alpha| \le m} |F_\alpha|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

Además, X hereda las propiedades de separabilidad y reflexividad de $L^p(\Omega)$. Ahora, consideramos el operador lineal

$$L : u \in W^{m,p}(\Omega) \to L(u) = (D^\alpha u)_{|\alpha| \le m} \in X.$$

Está claro que L conserva normas (luego, L es inyectivo). Además, si llamamos $Y = L(W^{m,p}(\Omega)) \subset X$, entonces Y es un subespacio vectorial de X y

$$L : W^{m,p}(\Omega) \to Y$$

es una biyección. Probemos que Y es, en realidad, un subespacio vectorial cerrado de X. Esto daría la prueba, pues L sería una isometría entre $W^{m,p}(\Omega)$ e Y. Para ello, fijemos una sucesión $\{u_k\}_{k \ge 1} \subset W^{m,p}(\Omega)$ tal que $\{L(u_k)\}_{k \ge 1}$ satisface $L(u_k) \to (u_\alpha)_{|\alpha| \le m}$ en X. Deducimos que

$$D^\alpha u_k \to u_\alpha \text{ en } L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \le m.$$

En particular, si $1 \leq |\alpha| \leq m$,

$$u_k \to u_0 \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } D^\alpha u_k \to u_\alpha \text{ en } L^p(\Omega).$$

La anterior convergencia implica

$$u_k \to u_0 \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ y } D^\alpha u_k \to u_\alpha \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Deducimos que $D^\alpha u_k \to D^\alpha u_0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y, por tanto,

$$u_\alpha = D^\alpha u_0, \quad \forall \alpha : 1 \leq |\alpha| \leq m.$$

Así $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq m} = L(u_0)$ y $L(u_k) \to L(u_0)$ en X. Concluimos que Y es cerrado y el resultado. □

Observación 2.8. Recalcamos que estamos trabajando con funciones del espacio $L^p(\Omega)$, espacio que está formado por clases de equivalencia de funciones. Entonces, si se dice que "u es una función continua" en $L^p(\Omega)$ en realidad significa que existe un representante único de la clase de equivalencia de u que es continuo.

Vamos a probar un resultado que caracteriza al espacio $W^{1,p}(I)$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Teorema 2.9. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $p \in [1, \infty]$. Entonces, u es una función absolutamente continua en I.*

Demostración. Sea $x_0 \in I$, definamos

$$\overline{u}(x) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt,$$

dicha función por definición es absolutamente continua en I. Entonces la derivada clásica existe c.p.d. y coincide con u', que es también la derivada distribucional. Así, en el sentido de las distribuciones tenemos,

$$(u - \overline{u})' = 0,$$

es decir, $u - \overline{u} = c$, donde $c \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que $u = \overline{u} + c$ y, por tanto, u es una función absolutamente continua. □

Se puede deducir una importante propiedad de $W^{1,p}(I)$ del teorema anterior, cuando I es un intervalo acotado y $p \in [1, \infty]$.

Proposición 2.10. *Sean $I = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, y $p \in (1, \infty]$. Entonces, la aplicación $i : W^{1,p}(I) \to C(\overline{I})$ es un operador compacto.*

Demostración. Si $u \in W^{1,p}(I)$, podemos escribir

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Entonces por la desigualdad de Hölder, si $p' \in [1, \infty)$ es el exponente conjugado de p, se tiene lo siguiente

$$|u(a)| \leq |u(x)| + |u'|_{p,I}|x - a|^{1/p'}.$$

Integrando se llega a: (aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder)

$$|u(a)| \leq C(|u|_{p,I} + |u'|_{p,I}) = C\|u\|_{1,p,I}, \tag{2.4}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de u. Ahora usando (2.3) y (2.4) se deduce para cualquier $x \in I$

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{1,p,I}, \quad C > 0, \quad \text{independiente de u.} \tag{2.5}$$

Sea B la bola unidad en $W^{1,p}(I)$. Entonces,

$$B = \{u \in W^{1,p}(I) \mid \|u\|_{1,p,I} \leq 1\}.$$

Se sigue que, si $i : W^{1,p}(I) \to C(\overline{I})$ es la inclusión (que se estableció en el Teorema 2.9 y que es continua por la desigualdad (2.5)), entonces $B = i(B)$ es un conjunto uniformemente acotado en $C(\overline{I})$. De nuevo si $x, y \in I$, por (2.3), tenemos

$$|u(x) - u(y)| \leq |u'|_{p,I}|x - y|^{1/p'} \leq \|u\|_{1,p,I}|x - y|^{1/p'},$$

de donde se sigue que B es equicontinuo en $C(\overline{I})$. Del teorema de Ascoli-Arzelà, concluimos que B es un conjunto relativamente compacto en $C(\overline{I})$. Luego se concluye la prueba del resultado. $\square$

Observación 2.11. El teorema anterior no es válido en el caso $p = 1$. Veremos más adelante que $W^{1,1}(I) \mapsto L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, \infty)$.

Observación 2.12. En la prueba del teorema anterior, si $p = \infty$, tenemos que $p' = 1$, luego proporciona:

$$|u(x) - u(y)| \leq |u'|_{\infty,I}|x - y|, \quad x, y \in I.$$

En particular, u es una función globalmente Lipschitz en I (no es necesario que I sea acotado). En relación a este punto, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, veremos en los capítulos posteriores que $W^{1,\infty}(\Omega) \equiv C^{0,1}(\overline{\Omega})$. El espacio $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ está formado por las funciones continuas, globalmente acotadas y globalmente Lipschitz en Ω.

Esta es una propiedad importante de los espacios de Sobolev que se estudiará en detalle en los próximos capítulos.

Definición 2.13. Sea $m \geq 1$, un entero, y $p \in [1, \infty)$. Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p,\Omega}}.$$

Observación 2.14. $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$ y sus elementos pueden ser aproximados con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$ por funciones $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto.

En general, este es un subespacio propio de $W^{m,p}(\Omega)$, excepto en casos particulares de abierto Ω. Ese es el caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$, como veremos a continuación.

Teorema 2.15. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces para cualquier entero $m \geq 0$,*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Veremos los detalles para el caso $m = 1$. Tenemos que probar que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una sucesión $\{\phi_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Paso 1. Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces $u * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon = u * D^\alpha \rho_\varepsilon$ para cualquier multi-índice α. Por el Teorema 1.3.20, $u * \rho_\varepsilon \to u$ y $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon * D^\alpha u \to D^\alpha u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $u * \rho_\varepsilon \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Paso 2. Sea ζ una función en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ en $B(0;1)$ y sop $\zeta \subset B(0;2)$ (**función truncante**). Consideramos la sucesión $\{\zeta_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\zeta_k(x) = \zeta(x/k).$$

Sea $\{\varepsilon_k\}_{k\geq 1} \subset (0, \infty)$ tal que $\varepsilon_k \to 0$. Fijemos $u_k = \rho_{\varepsilon_k} * u$. Entonces $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por el primer paso. Ahora, definamos $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\phi_k(x) = \zeta_k(x) u_k(x).$$

Veremos que $\phi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, lo que completará la prueba del resultado. Como $\zeta_k = 1$ en $B(0;k)$ tenemos que $u_k = \phi_k$ en $B(0;k)$. Así,

$$|u_k - \phi_k|_{p,\mathbb{R}^n} = \left(\int_{|x|>k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq 2 \left(\int_{|x|>k} |u_k(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

ya que $|\phi_k| \leq |u_k|$. La última integral tiende a cero cuando $k \to \infty$, ya que $u_k \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene $\phi_k \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. De forma análoga, como tenemos que

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

en $B(0;k)$, obtenemos $\dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ usando el mismo argumento que arriba. Entonces $\phi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, que era lo que queríamos probar. Esto concluye la demostración. $\square$

Como ya hemos visto cuando $p = 2$, escribiremos $H_0^m(\Omega)$ en lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$ y entonces tendremos

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n).$$

Capítulo 3

Aproximación por funciones de $\mathcal{C}^\infty$. Teoremas de Prolongación

En este capítulo probaremos ciertos resultados de densidad y algunas consecuencias de los mismos. También incluiremos teoremas de prolongación de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ a $\mathbb{R}^n$. En todo el capítulo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío.

3.1. Aproximación por funciones regulares.

En esta sección probaremos ciertos resultados que nos proporcionarán una aproximación de las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ por funciones muy regulares.

Comencemos probando un resultado de aproximación por funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con convergencia débil en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 3.1.1 (**Friedrichs**). *Sean $1 \le p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, existe una sucesión $\{u_m\}_{m\ge 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\left.\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \to \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'}$ en $L^p(\Omega')$ para cada $1 \le i \le n$ y para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ (es decir, Ω' es un conjunto* ***relativamente compacto*** *tal que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$).*

Demostración. Paso 1. Consideremos la familia de funciones regularizantes $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ y sea $\overline{u}$ la prolongación de u por cero fuera de Ω. Entonces $\rho_\varepsilon * \overline{u} \to \overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (como se probó en el Teorema 1.3.20) y eso conlleva que $\rho_\varepsilon * \overline{u} \to u$ en $L^p(\Omega)$.

Sea $i : 1 \le i \le n$. Sea Ω' un conjunto relativamente compacto en Ω, es decir, $\overline{\Omega'}$ es un conjunto compacto tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Entonces, dist $(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Sea pues, ε más pequeño que dicha cantidad. Entonces es claro que para

$x \in \Omega'$ se tiene

$$\rho_\varepsilon * \overline{u}(x) = \rho_\varepsilon * u(x),$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\varepsilon * \overline{u}) = \rho_\varepsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } \Omega' \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\varepsilon * \overline{u}) \in L^p(\Omega'),$$

ya que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega')$ (por el Teorema 1.3.10). Luego, de ahí se sigue que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\varepsilon * \overline{u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega')$ (de nuevo por el Teorema 1.3.20) y entonces $\rho_\varepsilon * \overline{u} \to u$ en $W^{1,p}(\Omega')$.

Paso 2. Por el paso anterior podemos construir (eligiendo una sucesión $\{\varepsilon_m\}_{m\geq 1}$ tal que $\varepsilon_m \to 0$) una sucesión $v_m = \rho_{\varepsilon_m} * \overline{u}$ satisfaciendo

$$v_m \to u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } \left.\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \to \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \text{ en } L^p(\Omega'), \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Ahora, si $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$ es la sucesión de funciones truncantes, (veáse en el paso 2 de la demostración del Teorema 2.15), entonces $u_m = \zeta_m v_m$ está en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\{u_m\}_{m\geq 1}$ tiene las mismas propiedades de convergencia que $\{v_m\}_{m\geq 1}$, es decir,

$$u_m \to u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } \left.\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \to \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \text{ en } L^p(\Omega'), \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

Observación 3.1.2. En el resultado anterior, las derivadas convergen únicamente en los conjuntos relativamente compactos. Hay ejemplos de conjuntos abiertos donde la convergencia de las derivadas no se alcanza en el conjunto completo.

Como consecuencia del Teorema 3.1.1 podemos deducir:

Proposición 3.1.3 (**Derivación de un producto**). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, con $p, p' \in (1, \infty)$, siendo p' el exponente conjugado de p. Entonces, $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } \Omega, \quad i = 1, ..., n. \tag{3.1}$$

Demostración. Como $p, p' \in (1, \infty)$ y p' es el exponente conjugado de p, la desigualdad de Hölder implica $uv \in L^1(\Omega)$. Veamos la fórmula de la derivada.

Por el Teorema 3.1.1 tenemos garantizada la existencia de $\{u_m\}_{m\geq 1}, \{v_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, tales que

$$u_m \to u, \quad v_m \to v \text{ en } L^p(\Omega),$$

y

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } L^p(\Omega'), \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que sop $\phi \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. Como las aplicaciones bilineales

$$b_0 : (w, z) \in L^p(\Omega') \times L^{p'}(\Omega') \to \int_{\Omega'} w(x)z(x)\phi(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

$$b_i : (w, z) \in L^p(\Omega') \times L^{p'}(\Omega') \to \int_{\Omega'} w(x)z(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx \in \mathbb{R},$$

son continuas y tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_m v_m) = \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_m + u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i},$$

es decir,

$$-\int_{\Omega'} u_m v_m \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Omega'} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_m \phi\, dx + \int_{\Omega'} u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \phi\, dx,$$

podemos tomar límite y probar

$$-\int_{\Omega'} uv \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Omega'} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\phi\, dx + \int_{\Omega'} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Esto demuestra la fórmula (3.1). De nuevo Hölder proporciona que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(uv) \in L^1(\Omega)$. Así se concluye la prueba del resultado. □

Otra consecuencia que podemos extraer del Teorema 3.1.1 es la siguiente:

Proposición 3.1.4 (**Fórmula del Cambio de Variable**). *Sean Ω y Ω' dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $H : \Omega' \to \Omega$ una aplicación biyectiva, $x = H(y)$, tal que*

$$H \in \mathcal{C}^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega), \quad Jac\ H \in L^\infty(\Omega'), \quad Jac\ H^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ y

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Demostración. Cuando $1 \le p < \infty$, se elige una sucesión $\{u_m\}_{m\ge 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_m \to u$ en $L^p(\omega)^n$, con $\omega \subset\subset \Omega$. Entonces $u_m \circ H \to u \circ H$ en $L^p(\Omega')$ y

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \to \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \text{ en } L^p(\omega'), \quad \forall \omega' \subset\subset \Omega'.$$

Dada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega')$ se verifica

$$\int_{\Omega'} (u_m \circ H) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dy = -\int_{\Omega'} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \psi\, dy.$$

Tomando límite obtenemos el resultado.

Cuando $p = \infty$, se fija un abierto ω tal que sop $u \subset \omega \subset\subset \Omega$. Entonces $u \in W^{1,p}(\omega)$ $\forall p < \infty$ y se deduce el resultado aplicando lo anterior. $\square$

Describiremos a continuación una clase de conjuntos abiertos donde es posible obtener la convergencia de las derivadas en $L^p(\Omega)$.

Definición 3.1.5. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un **operador de prolongación** $\mathcal{P}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ es un operador lineal continuo,

$$\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\mathcal{P}u|_\Omega = u$ para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Observación 3.1.6. Del hecho de que $\mathcal{P}$ sea un operador lineal continuo, se sigue que

$$\|\mathcal{P}u\|_{1,p,\mathbb{R}^n} \le C\|u\|_{1,p,\Omega},$$

donde $C > 0$ es una constante. Esta, en general, solo depende de Ω y p. Por tanto, podemos considerar $W^{1,p}(\Omega)$ como el espacio de las restricciones a Ω de funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, si Ω es tal que dicho operador $\mathcal{P}$ existe. Una condición suficiente para la existencia del operador de prolongación es la regularidad de la frontera $\partial\Omega$, esas consideraciones las estudiaremos más adelante en este capítulo.

Teorema 3.1.7. *Sean $p \in [1, \infty)$ y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que existe un operador de prolongación $\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existe una sucesión $\{u_m\}_{m\ge 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m|_\Omega \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ un operador de prolongación. Como $\mathcal{P}(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una sucesión $\{u_m\}_{m\geq 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to \mathcal{P}u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 2.15). En particular,

$$u_m|_\Omega \to \mathcal{P}u|_\Omega \equiv u \text{ en } W^{1,p}(\Omega).$$

Esto finaliza la prueba □

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene:

Corolario 3.1.8. *Sean $p \in [1,\infty)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que existe $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$, operador de prolongación. Entonces, el espacio vectorial*

$$\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \varphi = \phi|_\Omega \text{ con } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\},$$

es denso en $W^{1,p}(\Omega)$.

Observación 3.1.9. El teorema anterior nos dice que si Ω admite un operador de prolongación, entonces los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ pueden ser aproximados por funciones de $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, un teorema, más complejo, de Meyers y Serrin dice que el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $1 \leq p < \infty$, para todos los conjuntos abiertos Ω. Para más información, se puede consultar el libro [1].

Ninguno de estos resultados es válido para el caso $p = \infty$. Demos un ejemplo de esta afirmación:

Ejemplo 3.1.10. Sea Ω un intervalo abierto, por ejemplo $(-1, 1)$. Consideremos la función, definida en dicho intervalo,

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Tenemos que u es una función absolutamente continua, y su derivada distribucional viene dada por

$$u'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Por tanto, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Consideremos ahora, $\varepsilon > 0$ y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\|u - \phi\|_{1,\infty,\Omega} < \varepsilon$. En particular,

$$|\phi' - u'|_{\infty,\Omega} < \varepsilon.$$

Por tanto, si $x < 0$, $|\phi'(x)| < \varepsilon$ y si $x > 0$, $|\phi'(x) - 1| < \varepsilon$ o $\phi'(x) > 1 - \varepsilon$. Por continuidad se tiene que $|\phi'(0)| \leq \varepsilon$ y a la vez $|\phi'(0)| \geq 1 - \varepsilon$. Esto es imposible si $\varepsilon < 1/2$. Así, u no puede ser aproximada en $W^{1,\infty}(\Omega)$ por una función de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Presentemos a continuación unas aplicaciones de los resultados de aproximación probados anteriormente. Antes de ello vamos a introducir un resultado que necesitaremos posteriormente.

Teorema 3.1.11. *Sean $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que $|f_n - f|_{p,\Omega} \to 0$. Sea $p \in [1,\infty]$. Entonces, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que*

$$f_{n_k} \to f(x), \qquad p.c.t.\ x \in \Omega.$$

Demostración. Podemos encontrar una demostración de este resultado en [2]. □

Teorema 3.1.12 (Regla de la Cadena). *Sea $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$, con $M > 0$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1,\infty]$. Entonces, la función $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.2}$$

Demostración. Como la derivada de G está acotada por M y $G(0) = 0$, por el **teorema del Valor Medio** tenemos

$$|G(s)| \leq M|s|, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $|G \circ u(x)| = |G(u(x))| \leq M|u(x)|$ para cada $x \in \Omega$ y eso implica que $G \circ u \in L^p(\Omega)$, ya que $u \in L^p(\Omega)$. De forma análoga tenemos que $(G' \circ u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq i \leq n$, ya que

$$\Big|(G' \circ u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big| = \Big|G'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big| \leq M\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big|,$$

y como $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ se concluye.

Obsérvese que la igualdad (3.2) equivale a

$$\int_\Omega (G \circ u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.3}$$

Asumamos ahora que $1 \leq p < \infty$. Entonces aplicando el Teorema 3.1.1 (Friedrichs), existe una sucesión $\{u_m\}_{m\geq 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega')$ para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$. Además, extrayendo una nueva subsucesión (que seguiremos denotando $\{u_m\}_{m\geq 1}$) podemos suponer que

$$u_m(x) \to u(x), \qquad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Elegimos $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que sop $(\phi) \subset \Omega'$. Como $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar la regla de la cadena usual,

$$\int_\Omega (G \circ u_m)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega'} (G \circ u_m)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega'} (G' \circ u_m)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\phi. \tag{3.4}$$

Ahora, tenemos que $G \circ u_m \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$ ya que

$$|G \circ u_m(x) - G \circ u(x)| \leq M|u_m(x) - u(x)|, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega,$$

(hemos aplicado el teorema del Valor Medio). Para probar que $(G' \circ u_m)\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} \to (G' \circ u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega')$, necesitaremos el Teorema 3.1.11. Analicemos ahora la segunda integral en (3.4). Como la sucesión $\{G'(u_m)\}_{m\geq 1}$ está uniformemente acotada y $G'(u_m) \to G'(u)$, p.c.t. $x \in \Omega'$, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, deducimos

$$G'(u_m) \to G'(u) \text{ en } L^p(\Omega')$$

y

$$\int_{\Omega'} (G' \circ u_m)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\phi\, dx \to \int_{\Omega'} (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi\, dx.$$

Tomando límites en (3.4) obtenemos (3.3) cuando $p \in [1, \infty)$.

Si $p = \infty$, fijamos $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y elegimos Ω' tal que sop $(\phi) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces como Ω' es relativamente compacto, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ implica que $u \in W^{1,p}(\Omega')$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Por tanto, la igualdad (3.3) es válida. Esto finaliza la prueba. □

El resultado anterior puede generalizarse a funciones continuas y Lipschitz, G. Probaremos esto en el contexto de los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$ a continuación. Antes de ello, probemos otro resultado.

Teorema 3.1.13. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \equiv 0$ en $\Omega \setminus K$, con $K \subset \Omega$, compacto. Entonces, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto tal que $u = 0$ en $\Omega \setminus K$. Sea Ω' abierto tal que $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$ tal que $\phi = 1$ en K. Entonces, sabemos que $\phi u = u$. Ahora, por el Teorema 3.1.1, existe una sucesión $\{u_m\}_{m\geq 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{en } L^p(\Omega'), \quad \forall i : 1 \leq i \leq n.$$

Como consecuencia, tenemos que $\phi u_m \to \phi u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ con $\{\phi u_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Se sigue que ϕu, es decir u, está en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto finaliza la prueba. □

Observación 3.1.14. Si Ω es un abierto acotado para el cual el Teorema 3.1.7 es válido, entonces podemos elegir $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La misma prueba del resultado anterior tiene entonces sentido y quedaría probado el teorema anterior para $W^{1,p}(\Omega)$.

El siguiente resultado nos proporciona una clase de funciones que está en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Se tiene:

Teorema 3.1.15. *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. *Si* $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$, *entonces* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Asumamos que sop u es un conjunto acotado de $\overline{\Omega}$. Sea $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:

$$|G(t)| \leq |t| \text{ y } G(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq 1, \\ t, & |t| \geq 2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definamos la sucesión

$$u_m = \frac{1}{m} G(mu).$$

Entonces por el Teorema 3.1.12, $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Queremos ver que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Se tiene que $u_m = u$ en el conjunto $\{|u| \geq 2/m\}$, ya que si, $|u| \geq 2/m$, entonces $|mu| \geq 2$. Por tanto, $G(mu) = mu$ y $u_m = u$. Así,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |u_m - u|^p \, dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{|u|<2/m} |u_m - u|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{|u|<2/m} |u_m|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{|u|<2/m} |u|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2 \left(\int_{0<|u|<2/m} |u|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \frac{4}{m} (|\text{sop } (u)|)^{1/p}. \end{aligned}$$

Hemos usado que $|u_m| \leq |u|$ y que en la última integral estamos integrando en el conjunto donde $0 < |u| < 2/m$. También se ha usado la **desigualdad de Minkowski**. Con lo que cuando $m \to \infty$, se tiene que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$.

Tomemos ahora $i : 1 \leq i \leq n$. Usando la regla de la cadena (3.2)

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = G'(mu) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Vemos que si $m|u(x)| > 2$, $G'(mu) = 1$. Por tanto,

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \text{c.p.d. en } \Omega.$$

Del teorema de la Convergencia Dominada inferimos que dicha convergencia es válida también en $L^p(\Omega)$. Luego hemos probado que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ahora, usando de nuevo (3.5), se tiene ($u_m, u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$)

$$\text{sop } (u_m) \subset \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |u(x)| \geq \frac{1}{m} \right\} \subset \Omega,$$

y, como sop u es un conjunto acotado y u desaparece en $\partial\Omega$ (hipótesis), se sigue que sop u_m es un compacto contenido en Ω. Pero entonces, por el Teorema 3.1.13, $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ y como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado, tenemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto concluye el primer paso de la prueba.

Paso 2. Si sop u no es acotado, sea $\{\zeta_m\}_{m\geq 1}$ la sucesión de funciones truncantes (veáse el paso 2 de la prueba del Teorema 2.15). Entonces, $\zeta_m u \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $\zeta_m u$ tiene soporte acotado (de hecho sop $(\zeta_m u) \subset B(0; m) \cap \overline{\Omega}$), entonces por el Paso 1 tenemos que $\{\zeta_m u\}_{m\geq 1} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Así concluimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto concluye la prueba. □

Observación 3.1.16. El teorema anterior demuestra que si una función es continua en $\overline{\Omega}$, está en $W^{1,p}(\Omega)$ y se anula en la frontera, está de hecho en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esta consecuencia es un hecho importante cuando veamos el Teorema de Trazas (Capítulo 6) que caracteriza el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$.

3.2. Teoremas de Prolongación

En esta sección vamos a demostrar algunos resultados sobre la prolongación de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ a $\mathbb{R}^n$. Como ya se ha mencionado antes, a veces es más fácil probar los resultados en el caso de los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Los correspondientes resultados para un Ω general se siguen de forma fácil si tenemos un operador de prolongación de Ω en $\mathbb{R}^n$. Ya se ha visto que si tal operador existe, entonces podemos probar los resultados en la aproximación por funciones de $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$.

Comencemos viendo que el operador de prolongación no es único. Para ello, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1. Sea $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1, \infty)$. Entonces, por el Teorema 2.9, tenemos que u es absolutamente continua y satisface (2.3). Ahora consideremos la siguiente función definida en $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{u}_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \quad x \geq 2, \\ (x+1)u(0), & -1 \leq x \leq 0, \\ u(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ (2-x)u(1), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entonces, $\widetilde{u}_1 \in L^p(\mathbb{R})$. Por otro lado, introducimos la función:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \quad x > 2, \\ u(0), & -1 < x < 0, \\ u'(x), & 0 < x < 1, \\ -u(1), & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Se tiene que $g \in L^p(\mathbb{R})$. Veamos entonces que $\widetilde{u}_1' = g$. Efectivamente, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, usando (2.3) deducimos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_1(x)\phi'(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} (x+1)u(0)\phi'(x)\,dx + \int_{1}^{2} (2-x)u(1)\phi'(x)\,dx \\ &+ \int_0^1 u(x)\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{0} u(0)\phi(x)\,dx + u(0)\phi(0) \\ &+ \int_1^2 u(1)\phi(x)\,dx - u(1)\phi(1) \\ &+ \int_0^1 \left[u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt\right]\phi'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^x u'(t)\,dt\right]\phi'(x)\,dx &= \int_0^1 \left[\int_t^1 \phi'(x)\,dx\right]u'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \phi(1)u'(t)\,dt - \int_0^1 u'(t)\phi(t)\,dt \\ &= \phi(1)(u(1)-u(0)) - \int_0^1 u'(x)\phi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Uniendo todas las igualdades,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}_1(x)\phi'(x)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,dx + u(0)\phi(0) - u(1)\phi(1) + u(0)(\phi(1)-\phi(0)) \\ &+ \phi(1)(u(1)-u(0)) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})), \end{aligned}$$

es decir, $\widetilde{u}_1' = g$ y $\widetilde{u}_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $\widetilde{u_1}|_{\Omega} = u$. Además, usando (2.5) se tiene

$$\|\widetilde{u}_1\|_{1,p,\mathbb{R}} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega},$$

para $C > 0$. Esto hace que el operador

$$\mathcal{P}_1 : u \in W^{1,p}(\Omega) \mapsto \mathcal{P}_1(u) = \widetilde{u}_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}),$$

sea un operador de prolongación para el dominio Ω.

Siguiendo los mismos pasos, podemos definir otros operadores de prolongación para Ω. Por ejemplo,

$$\widetilde{u}_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \quad x \geq 3, \\ \frac{1}{2}(x+2)u(0), & -2 \leq x \leq 0, \\ u(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(3-x)u(1), & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

define otro operador de prolongación $\mathcal{P}_2 \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}))$.

Uno de los métodos fundamentales de prolongación es el llamado **método de reflexión**. Usaremos dicho método para probar el siguiente resultado.

Notación. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Fijamos $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ y escribimos $x = (x', x_n)$. Entonces, definimos

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Teorema 3.2.2. *Sean $p \in [1, \infty)$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Definimos u^* en $\mathbb{R}^n$ como*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Entonces, $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y, además,

$$\begin{cases} |u^*|_{p,\mathbb{R}^n} \leq & 2|u|_{p,\mathbb{R}^n_+} \\ |u^*|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq & 2|u|_{1,p,\mathbb{R}^n_+} \end{cases}$$

En particular, $\mathcal{P} : u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \mapsto \mathcal{P}u = u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ define un operador de prolongación de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Paso 1. Sea $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

Definimos $\zeta_k(t) = \zeta(kt)$, con $t \in \mathbb{R}$ y $k \geq 1$. Entonces, se tiene

$$\zeta_k(t) = \begin{cases} 0, & t < 1/k, \\ 1, & t > 2/k. \end{cases}$$

Paso 2. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Consideramos la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx,$$

para $1 \leq i \leq n-1$. Otra forma de reescribir lo anterior es

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx,$$

donde $\psi(x', x_n) = \phi(x', x_n) + \phi(x', -x_n)$ para $x_n > 0$. Desafortunadamente $\psi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$. Entonces, multiplicamos dicha función por $\zeta_k(x_n)$ para conseguir un elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$. Así, por la definición de derivada distribucional, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial (\psi \zeta_k)}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \zeta_k \psi\, dx, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-1.$$

Como ζ_k solo depende de x_n y $1 \leq i \leq n-1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial (\psi \zeta_k)}{\partial x_i}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} u \zeta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx.$$

Cuando $k \to \infty$, $\zeta_k \to 1$ para todo t y así, por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi\, dx, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-1.$$

Volviendo de nuevo a la definición de ψ se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi(x', x_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi(x', -x_n)\, dx. \tag{3.6}$$

Si definimos $(i : 1 \leq i \leq n-1)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* (x', x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n), & x_n > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n), & x_n < 0, \end{cases}$$

entonces, (3.6) se sigue cumpliendo y tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \phi\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-1,$$

es decir,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n-1.$$

Paso 3. Consideremos ahora el caso $i = n$. Entonces si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx,$$

donde ahora

$$\psi(x', x_n) = \phi(x', x_n) - \phi(x', -x_n) \quad \text{para } x_n > 0.$$

De nuevo, multiplicamos por ζ_k y usamos que $\zeta_k \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, obteniendo

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \zeta_k \psi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial}{\partial x_n}(\zeta_k \psi)\, dx = I_1^{(k)} + I_2^{(k)}, \tag{3.7}$$

donde

$$I_1^{(k)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} u \zeta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx, \quad I_2^{(k)} = k \int_{\mathbb{R}^n_+} u \psi \zeta'(k x_n)\, dx, \quad \forall k \geq 1,$$

ya que

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\zeta_k \psi) = \zeta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + k \psi \zeta'(k x_n).$$

Igual que en el paso anterior, es fácil ver que

$$I_1^{(k)} \to \int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx.$$

Estimemos ahora $I_2^{(k)}$.

Como $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\psi(x', 0) = 0$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, se sigue que

$$|\psi(x', x_n)| \leq C|x_n|, \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Además ζ' es una función acotada en $\mathbb{R}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
|I_2^{(k)}| &= \left| k \int_{\mathbb{R}^n_+} u \psi \zeta'(k x_n)\, dx \right| \\
&= k \left| \int_{\frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{2}{k}} u \psi \zeta'(k x_n)\, dx \right| \\
&\leq kC \int_{\frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{2}{k}} |u||x_n|\, dx \\
&\leq C \int_{\frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{2}{k}} |u|\, dx.
\end{aligned}$$

La última integral tiende a cero cuando $k \to \infty$. Volviendo a (3.7) y tomando límite en k, deducimos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \psi \, dx.$$

Esto nos permite concluir lo siguiente

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\dagger},$$

donde para cualquier función v en $\mathbb{R}^n_+$, $v^\dagger$ está definida por

$$v^\dagger(x', x_n) = \begin{cases} v(x', x_n), & x_n > 0, \\ -v(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Claramente si $v \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$, v^* y $v^\dagger$ pertenecen a $L^p(\mathbb{R}^n)$ y se concluye el resultado. □

Como consecuencia, deducimos:

Corolario 3.2.3. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces, el espacio $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{R}^n_+}}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. En particular, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.*

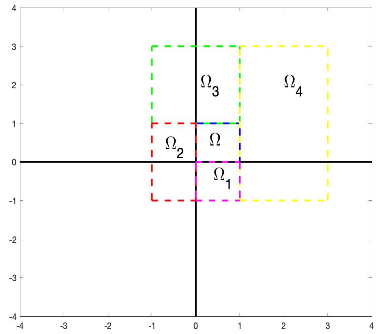
Observación 3.2.4. La prueba anterior es igualmente válida para el cilindro

$$\mathcal{Q}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < 1,\ 0 < x_n < 1\}, \tag{3.8}$$

donde $|x'|$ es la norma euclídea de x' en $\mathbb{R}^{n-1}$. El método de reflexión da un operador de prolongación de $W^{1,p}(\mathcal{Q}_+)$ a $W^{1,p}(\mathcal{Q})$, con $\mathcal{Q}$ el cilindro

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < 1,\ |x_n| < 1\}. \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.2.5. El método de reflexión puede ser usado para proporcionar un operador de prolongación de dominios como el cuadrado en $\mathbb{R}^2$ cuya frontera no es lo suficientemente regular, en el sentido que describiremos más abajo. Sea por ejemplo Ω el cuadrado unidad $(0,1)\times(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$. Por la reflexión a lo largo del eje x, podemos extender una función de $W^{1,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega_1)$ donde $\Omega_1 = (0,1)\times(-1,1)$. Ahora usando la reflexión del eje y, podemos extenderla a un elemento de $W^{1,p}(\Omega_2)$, donde $\Omega_2 = (-1,1) \times (-1,1)$. De nuevo por la reflexión en la recta $y = 1$, podemos extender dicha función a un elemento de $W^{1,p}(\Omega_3)$, donde $\Omega_3 = (-1,1) \times (-1,3)$. Finalmente usando la reflexión en la recta $x = 1$, podemos extenderla al dominio $\Omega_4 = (-1,3) \times (-1,3)$. Ahora sea $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_4)$ con $\psi = 1$ en Ω. Si u_4 es la extensión de u a Ω_4, entonces $\widetilde{u} = \psi u_4$ es una extensión de u a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.



Vamos a describir cómo usar el Teorema 3.2.2 combinado con la noción de partición de la unidad (Teorema 1.1.5), para probar la existencia de un operador de prolongación para un dominio regular cuya frontera esté acotada. Definamos en primer lugar el concepto de regularidad para dominios (abiertos conexos):

Definición 3.2.6. Diremos que un conjunto abierto Ω es de clase $\mathcal{C}^k$ (con k un entero ≥ 1) si para cada $x \in \partial\Omega$, existe un entorno U de x en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $T : \mathcal{Q} \to U$ tal que

(i) T es una biyección;
(ii) $T \in \mathcal{C}^k(\overline{\mathcal{Q}}; \mathbb{R}^n)$ y $T^{-1} \in \mathcal{C}^k(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$;
(iii) $T(\mathcal{Q}_+) = U \cap \Omega$, $T(\mathcal{Q}_0) = U \cap \partial\Omega$,

donde $\mathcal{Q}_+$, $\mathcal{Q}$ son como en (3.8) y (3.9), respectivamente, y

$$\mathcal{Q}_0 = \{x \in \mathcal{Q} \mid x_n = 0\}.$$

Diremos que Ω es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es de clase $\mathcal{C}^k$ para cualquier entero $k \geq 1$.

Ejemplo 3.2.7. Las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ son ejemplos de dominios de clase $\mathcal{C}^\infty$. Un polígono en $\mathbb{R}^2$ no es de clase $\mathcal{C}^1$ porque las hipótesis de la definición anterior no se cumplen en los vértices.

Antes de probar el siguiente resultado, vamos a probar el siguiente lema que usaremos en la prueba del Teorema 3.3.1.

Lema 3.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1, \infty)$. Si $K \subset \Omega$ es un conjunto cerrado tal que $u = 0$ en $\Omega \setminus K$, entonces la función*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

está en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Consideramos la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx.$$

Sea $K_1 = K \cap \operatorname{sop} \phi$. Entonces $K_1 \subset \Omega$ es un conjunto compacto. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ en K_1. Ahora,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx &= \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{K_1} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Omega} u\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \\ &= \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\phi)\, dx - \int_{\Omega} u\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx. \end{aligned}$$

Pero como $\phi\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0$ en K_1, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi\psi\, dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi\, dx.$$

De donde se sigue que

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Esto concluye la prueba del resultado. □

Teorema 3.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de clase $\mathcal{C}^1$, cuya frontera $\partial\Omega$ está acotada. Entonces, existe un operador de prolongación*

$$\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Como Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, para cada $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U y una aplicación $T : \mathcal{Q} \to U$ como en la Definición 3.2.6. Como $\partial\Omega$ está acotada, es un compacto y puede ser cubierta por un número finito de tales entornos. Sea entonces $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^k U_j$ y sea T_j las biyecciones de clase $\mathcal{C}^1$ asociadas a cada entorno U_j. Consideremos el recubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^k \cup \{\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega\}$ de $\mathbb{R}^n$ y sean $\psi_1, ..., \psi_k, \psi_0$ las funciones asociadas a la partición de la unidad (Teorema 1.1.5), es decir, ψ_j, $j = 0, 1, ..., k$, son funciones de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con sop $\psi_j \subset U_j$, para $j : 1 \leq j \leq k$, sop $\psi_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ y se tiene

$$\sum_{j=0}^k \psi_j = 1, \quad 0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \forall j : 0 \leq j \leq k. \tag{3.10}$$

Entonces, podemos escribir para $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$u = \sum_{j=0}^k \psi_j u.$$

Ahora, $\psi_0 u$ tiene soporte lejos de $\partial\Omega$, ya que sop $(\psi_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. Además, como $\psi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (de hecho, $0 \leq \psi_0 \leq 1$). De (3.10), deducimos

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

es decir, $\psi_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por la regla del producto para la derivada distribucional, es fácil ver que $\psi_0 u \in W^{1,p}(\Omega)$ y sop $(\psi_0 u|_\Omega) \subset \Omega$. Por el Lema 3.3, $\widetilde{(\psi_0 u|_\Omega)} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y claramente

$$\|\widetilde{\psi_0 u}\|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq \|\psi_0 u\|_{1,p,\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega}.$$

Si $1 \leq j \leq k$, entonces consideramos la función $u|_{U_j \cap \Omega}$. Definimos v_j en $\mathcal{Q}_+$ por

$$v_j(y) = u(T_j(y)), \quad y \in \mathcal{Q}_+.$$

Entonces, veamos que $v_j \in W^{1,p}(\mathcal{Q}_+)$. Aplicando la Proposición 3.1.4 se obtiene, ya que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y T es una aplicación que verifica las propiedades de la definición 3.2.6.

Así, podemos extender por reflexión a una función $v_j^* \in W^{1,p}(\mathcal{Q})$. Por tanto, tenemos

$$w_j(x) = v_j^*(T_j^{-1}(x)), \quad x \in U_j,$$

es tal que $w_j \in W^{1,p}(U_j)$ y $w_j = u_j$ en $U_j \cap \Omega$. También,

$$\|w_j\|_{1,p,U_j} \leq C_j \|u\|_{1,p,U_j \cap \Omega} \leq C_j \|u\|_{1,p,\Omega}.$$

Ahora $\psi_j w_j$ tiene soporte compacto en U_j y entonces $\widetilde{\psi_j w_j}$, la prolongación por cero fuera de U_j, está en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y de nuevo

$$\|\widetilde{\psi_j w_j}\|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq C_j \|u\|_{1,p,\Omega}.$$

Ahora la aplicación

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \mapsto \mathcal{P}u = \widetilde{\psi_0 u_0} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

define un operador de prolongación para $W^{1,p}(\Omega)$. Esto termina la prueba. □

De nuevo, como consecuencia obtenemos:

Corolario 3.4. *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y tiene $\partial\Omega$ acotada, entonces $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Observación 3.4.1. Dado un elemento arbitrario de $W^{1,p}(\Omega)$, la prolongación por cero no pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ en general. Por ejemplo, si $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ y $u(x) = 1$ en Ω, entonces $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R})$ pero $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = \delta_0 - \delta_1$, que no es una función localmente integrable. Hemos visto en el Lema 3.3 que si u tiene soporte en Ω, entonces, la prolongación por cero es un elemento de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pero tales funciones, si el soporte es compacto, están en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Veremos que la prolongación por cero es un operador de prolongación de $W_0^{1,p}(\Omega)$ independientemente de la naturaleza de Ω. Por tanto, para funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ siempre tenemos una prolongación canónica a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esta propiedad nos ayudará a probar importantes propiedades de estas funciones sin hipótesis complementarias sobre la regularidad de Ω.

Teorema 3.4.2. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, con Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces, si $\widetilde{u}$ denota la prolongación de u por cero fuera de Ω, se tiene $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Además,*

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n. \tag{3.11}$$

Demostración. Sean $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $\widetilde{u_m} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene:

$$\widetilde{u_m} \to \widetilde{u} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ y } \frac{\partial \widetilde{u_m}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u_m}{\partial x_i}} \to \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall i : 1 \leq i \leq n,$$

podemos concluir, por la unicidad del límite en $L^p(\mathbb{R}^n)$, que

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n.$$

Entonces, $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba (3.11) y finaliza la prueba. □

Concluimos este capítulo con una importate propiedad del espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 3.4.3 (**Desigualdad de Poincaré**). *Sean $p \in [1, \infty)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y acotado en alguna dirección. Entonces, existe una constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.12}$$

En particular, la seminorma $|\cdot|_{1,p,\Omega}$ define en $W_0^{1,p}(\Omega)$ una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$. Además, la forma bilineal

$$(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto (u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \in \mathbb{R},$$

define en $H_0^1(\Omega)$ un producto escalar equivalente al producto usual $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$ de $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Supongamos, por comodidad, que $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-a,a)$ con $a>0$. Por otro lado, tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Prolongando φ por cero fuera de Ω y teniendo en cuenta que Ω es conexo, podemos escribir:

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x',t)\,dt, \quad \forall x = (x',x_n) \in \Omega.$$

Por tanto,

$$|\varphi(x)| \le \left(\int_{-a}^{x_n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x',t) \right|^p dt \right)^{1/p} |x_n + a|^{1/p'}, \quad \forall x \in \Omega,$$

o si, reeescribimos la última desigualdad,

$$|\varphi(x)|^p \le |x_n + a|^{p/p'} \int_{-a}^{a} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x',t) \right|^p dt, \quad \forall x \in \Omega.$$

Integrando en $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(x',x_n)|^p\,dx' \le (2a)^{p/p'} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right|^p dx.$$

Finalmente, integrando respecto a $x_n \in (-a,a)$, obtenemos

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx \le (2a)^{p/p'+1} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right|^p dx,$$

lo cual prueba (3.12) para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La desigualdad (3.12) puede ser fácilmente deducida aplicando un razonamiento de densidad a la desigualdad anterior. Esto finaliza la prueba. $\square$

Observación 3.4.4. Varias generalizaciones de este resultado son interesantes. Por ejemplo, es suficiente que las funciones se anulen (en el sentido de la traza) no en toda la frontera $\partial\Omega$ (este es el caso de los elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$) pero sí en una parte de la frontera cuya medida $(n-1)$-dimensional sea positiva. El resultado no es válido, en general, en $W^{1,p}(\Omega)$; por ejemplo, si $u = a$, una constante no nula, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $|u|_{1,p,\Omega} = 0$ mientras que $|u|_{p,\Omega} > 0$.

Ejemplo 3.4.5. La desigualdad de Poincaré no es válida en dominios no acotados. Por ejemplo, sea $\Omega = \mathbb{R}^n$ y consideremos $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le \zeta \le 1$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \le 1, \\ 0, & \text{si } |x| \ge 2. \end{cases}$$

Sea $\zeta_m(x) = \zeta(x/m)$, con $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $|\zeta_m|_{1,p,\mathbb{R}^n} \to 0$ cuando $m \to \infty$, ya que tenemos lo siguiente

$$|\zeta_m|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{m^{n-p}}|\zeta|_{1,p,\mathbb{R}^n}.$$

Mientras que, $|\zeta_m|_{p,\mathbb{R}^n} \geq |B(0;m)|^{1/p} = |B(0;1)|^{1/p} m^{n/p} \to \infty$ cuando $m \to \infty$.

Observación 3.4.6. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{(m-1),p}(\Omega)$. Usando esto, podemos iterar la desigualdad de Poincaré. Por ejemplo, si $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, entonces

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{p,\Omega} \leq C\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{1,p,\Omega}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq n.$$

De aquí se tiene que

$$|u|_{1,p,\Omega} \leq C|u|_{2,p,\Omega}.$$

Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ también, se tiene

$$|u|_{p,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega} \leq C|u|_{2,p,\Omega}.$$

En general, si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, entonces $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ es una norma equivalente a la normal usual $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Capítulo 4

Teoremas de Inyección

Vimos en el Capítulo 2 que el espacio $W^{1,p}(I)$ puede incluirse en el espacio de las funciones absolutamente continuas, cuando I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. En esta sección vamos a investigar aquellas propiedades de inyección de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$, cuando Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Estudiaremos primero las inyecciones de los espacios $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos tres casos diferentes para analizar, cuando $p < n$, $p = n$ y $p > n$.

4.1. Caso $1 \leq p < n$.

Comencemos viendo el caso $1 \leq p < n$.

Definición 4.1.1. Definimos el exponente p^* por

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{o} \quad p^* = \frac{np}{n-p}. \tag{4.1}$$

Observación 4.1.2. Notemos que $p^* > p$. De este modo, mientras sabemos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, nos daría más información si supiéramos que las funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ son más regulares. De hecho, veremos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se puede incluir en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Antes de probar este hecho, necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 4.1.3 (Gagliardo). *Sea $n \geq 2$. Sean $f_1, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, definimos*

$$\hat{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fijemos

$$f(x) = f_1(\hat{x}_1) \; ... \; f_n(\hat{x}_n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$|f|_{1,\mathbb{R}^n} \leq \prod_{i=1}^{n} |f_i|_{n-1,\mathbb{R}^{n-1}}. \tag{4.2}$$

Demostración. Cuando $n = 2$, el resultado se sigue de forma trivial por la separación de variables en la integral doble. Sea $n = 3$. Ahora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx_3 &= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)|\, dx_3 \\ &\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3\right)^{1/2},\end{aligned}$$

por la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. Ahora, si integramos la desigualdad anterior respecto de x_1 y x_2, y aplicamos de nuevo la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|\, dx \leq &\left(\int |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\right)^{1/2} \left(\int |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3\, dx_2\right)^{1/2} \\ &\times \left(\int |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_1\, dx_3\right)^{1/2},\end{aligned}$$

esto es precisamente (4.2), cuando $n = 3$.

El caso general se sigue por inducción. Asumamos que el resultado es cierto para n. Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Fijemos primero x_{n+1}. Entonces, por la **desigualdad de Hölder**,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n \leq |f_{n+1}|_{n,\mathbb{R}^n} \left(\int |f_1 \ldots f_n|^{n'}\, dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/n'},$$

donde n' es el exponente conjugado de n; es decir, $n' = n/(n-1)$. Ahora, tratando x_{n+1} como un parámetro fijo, las funciones $|f_1|^{n'}, \ldots, |f_n|^{n'}$ están todas en $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, ya que $f_i \in L^n(\mathbb{R}^n)$, para todo $i : 1 \leq i \leq n$, y estamos tratando x_{n+1} como parámetro fijo. De este modo, por la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\int |f_1|^{n'} \ldots |f_n|^{n'} dx_1 \ldots dx_n &\leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i|^{n'}|_{n-1,\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} |f_i|^{n'}_{n,\mathbb{R}^{n-1}},\end{aligned}$$

ya que

$$||f_i|^{n'}|_{n-1,\mathbb{R}^{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|^{n'(n-1)}\right)^{1/(n-1)} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|^n\right)^{1/(n-1)}$$
$$= |f_i|^{n'}_{n,\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Por tanto,

$$\int |f(x)|dx_1 \,...\, dx_n \leq |f_{n+1}|_{n,\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |f_i|_{n,\mathbb{R}^n-1}.$$

Ahora, integramos a ambos lados respecto de x_{n+1}. Observamos que, la aplicación $x_{n+1} \to |f_i(\cdot, x_{n+1})|_{n,\mathbb{R}^{n-1}}$ está en $L^n(\mathbb{R})$, para cada $i : 1 \leq i \leq n$, ya que $f_i \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, por la desigualdad de Hölder generalizada, tenemos que el producto está en $L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)|\, dx \leq |f_{n+1}|_{n,\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |f_i|_{n,\mathbb{R}^n},$$

esto prueba el resultado. □

Teorema 4.1.4 (**Desigualdad de Sobolev**). *Sea* $1 \leq p < n$. *Entonces, existe una constante* $C = C(n,p) > 0$ *tal que*

$$|u|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leq C|u|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \tag{4.3}$$

para cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *En particular, tenemos la inclusión continua siguiente*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Paso 1. Sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Como u tiene soporte compacto, podemos suponer que sop $u \subset (-M,M)^n$ (sin pérdida de generalidad). Entonces, si tenemos $i : 1 \leq i \leq n$, podemos escribir

$$|u(x)| = \Big|\int_{-M}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},...,x_n)\,dt\Big| \tag{4.4}$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},...,x_n)\Big|\,dt = f_i(\hat{x}_i).$$

Por eso,

$$|u(x)|^n = \Big|\int_{-M}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...,x_n)\,dt\Big| ... \Big|\int_{-M}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,...,t)\,dt\Big| \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i),$$

o bien,

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} |f_i(\hat{x}_i)|^{1/(n-1)}.$$

Como $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ es integrable. Entonces, se sigue que $|f_i|^{1/(n-1)} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, para cada $i : 1 \leq i \leq n$. Veamos que esto último es cierto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|^{\frac{(n-1)}{(n-1)}}\, d\hat{x}_i &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|\, d\hat{x}_i \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ...x_n) \right| dt \right) d\hat{x}_i \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 4.1.3, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} |f_i|^{1/(n-1)}_{1,\mathbb{R}^{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{1/(n-1)}_{1,\mathbb{R}^n}.$$

Notemos que $n/(n-1) = 1^*$, por (4.1). De este modo,

$$|u|_{1^*,\mathbb{R}^n} \leq \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{1/n}_{1,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.5}$$

Paso 2. Sean $1 \leq p < n$ y $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sea $t \geq 1$ (que será elegido adecuadamente) y consideremos la función $|u|^{t-1}u$. Esta función tiene soporte compacto y es continuamente diferenciable. De hecho,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{t-1}u) = t|u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

También (4.4) y el análisis del Paso 1 aplicados a esta función, son válidos (ya que realmente sólo usamos la primera derivada en dicho paso). Por tanto, aplicando (4.5) a $|u|^{t-1}u$ y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
||u|^t|_{1^*,\mathbb{R}^n} = |u|^t_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} &\leq t \prod_{i=1}^{n} \left| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{1/n}_{1,\mathbb{R}^n} \\
&\leq t \prod_{i=1}^{n} ||u|^{t-1}|^{1/n}_{q,\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{1/n}_{p,\mathbb{R}^n} \\
&= t|u|^{t-1}_{q(t-1),\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{1/n}_{p,\mathbb{R}^n},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde q es el exponente conjugado de p y donde hemos aplicado la desigualdad de Hölder. Ahora elegimos t tal que

$$tn/(n-1) = q(t-1) = \frac{p}{p-1}(t-1).$$

Simplificando la relación anterior, tenemos

$$t = \frac{n-1}{(n/p)-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right) p^*,$$

que es mayor o igual que 1 cuando $p < n$. Así,

$$\frac{tn}{n-1} = q(t-1) = p^*.$$

De nuevo de (4.6), se tiene

$$|u|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right) p^* |u|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{4.7}$$

que es (4.3) cuando $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $C(p,n) = \dfrac{(n-1)}{n} p^*$. Veamos esta desigualdad con detalle,

$$\begin{aligned} |u|^t_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} &\leq t|u|^{t-1}_{q(t-1),\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{1/n}_{p,\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{(n-1)}{n} p^* |u|^{t-1}_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{1/n}_{p,\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} |u|_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} = |u|_{p^*,\mathbb{R}^n} &\leq \frac{n-1}{n} p^* \prod_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{1/n}_{p,\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{n-1}{n} p^* \prod_{i=1}^n |u|^{1/n}_{1,p,\mathbb{R}^n} = \frac{n-1}{n} p^* |u|_{1,p,\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Paso 3. Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces por el Teorema 2.15, existe una sucesión $\{u_m\}_{m\geq 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $m, n \geq 1$. Ahora, por (4.7), tenemos

$$|u_m - u_n|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leq C|u_m - u_n|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall n, m \geq 1.$$

Tenemos así que

$$|u_m - u|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leq C|u_m - u|_{1,p,\mathbb{R}^n},$$

ya que $\{u_m\}_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, como $\{u_m\}_{m\geq 1}$ converge a u en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se debe tener que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ y que $u_m \to u$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Ahora, (4.3) se sigue de (4.7) por continuidad. Esto demuestra el resultado. □

Corolario 4.1.5. *Sea $1 \leq p < n$. Entonces, tenemos las inclusiones continuas*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \in [p, p^*].$$

Demostración. Sea $p \leq q \leq p^*$. Entonces podemos elegir $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Ahora, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $|u|^{\alpha q} \in L^{p/\alpha q}(\mathbb{R}^n)$ y $|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{p^*/(1-\alpha)q}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\frac{\alpha q}{p} + \frac{(1-\alpha)q}{p^*} = \frac{q}{q} = 1.$$

Por tanto, por la desigualdad de Hölder, deducimos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha q} |u|^{(1-\alpha)q} \, dx\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx\right)^{\alpha/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{(1-\alpha)/p^*} \\
&= |u|^{\alpha}_{p,\mathbb{R}^n} |u|^{(1-\alpha)}_{p^*,\mathbb{R}^n} \leq \alpha |u|_{p,\mathbb{R}^n} + (1-\alpha)|u|_{p^*,\mathbb{R}^n} \\
&\leq |u|_{p,\mathbb{R}^n} + |u|_{p^*,\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la **desigualdad de Young**. Ahora, por el Teorema 4.1.4, tenemos

$$|u|_{q,\mathbb{R}^n} \leq |u|_{p,\mathbb{R}^n} + C|u|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}.$$

Esto finaliza la prueba. □

También, como consecuencia del Teorema 4.1.4, deducimos:

Corolario 4.1.6. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, $u \in L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p^*]$ y existe una constante $C = C(n,p) > 0$ tal que*

$$\left.\begin{array}{l} |u|_{p^*,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega} \\ |u|_{q,\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega} \end{array}\right\} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.8}$$

Demostración. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $\widetilde{u}$, la prolongación por cero fuera de Ω, pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Así, por el Teorema 4.1.4 y el corolario posterior, se tiene que $\widetilde{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, p^*]$. Por tanto, $u \in L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p^*]$. Las desigualdades de (4.8) se siguen de las correspondientes desigualdades para $\widetilde{u}$. Esto concluye la prueba del resultado. $\square$

Observación 4.1.7. Analicemos cómo son las constantes de inyección en el caso $p \in [1, n)$. En la parte derecha de la desigualdad (4.3) solo aparece la seminorma en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Además, $C = C(n, p)$ tiene el valor

$$C = \frac{n-1}{n} p^* = (n-1)\frac{p}{n-p}, \tag{4.9}$$

constante que explota cuando p se acerca a n. Por otro lado, cuando $q \in [p, p^*)$ se tiene

$$|u|_{q,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

donde C está dada por (4.9) (independiente de q). Finalmente, las constantes de inyección en las desigualdades (4.8) están dadas por (4.9) y, por tanto, son independientes de Ω.

4.2. Caso $p = n$.

Estudiemos ahora el caso $p = n$.

Teorema 4.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Entonces,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [n, \infty).$$

Demostración. De nuevo, es suficiente probar el resultado para $\Omega = \mathbb{R}^n$, no supone una pérdida de generalidad por los resultados de prolongación probados en la sección anterior. Sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Podemos aplicar la desigualdad (4.6) con $p = n$, $t \geq 1$. De este modo tenemos

$$|u|^t_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} \leq t|u|^{t-1}_{n(t-1)/(n-1),\mathbb{R}^n}|u|_{1,n,\mathbb{R}^n}.$$

Probemos una desigualdad que usaremos posteriormente, veamos que

$$(a+b)^t \geq ta^{t-1}b \quad \text{para } a, b \geq 0.$$

Observesé que si $t = 1$, entonces, $a + b \geq b$, para cualquier $a, b \geq 0$. Si $t > 1$, podemos usar la desigualdad de Young para t y $t' = \dfrac{t}{t-1} \in (1, \infty)$. Así,

$$a^{\frac{t-1}{t}} t^{1/t} b^{1/t} \leq \frac{t-1}{t} a + \frac{1}{t} tb \leq a + b, \quad \forall a, b \geq 0,$$

es decir,

$$ta^{t-1}b \leq (a+b)^t, \quad \forall t \geq 1, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Usando esta desigualdad, llegamos a

$$|u|_{tn/(n-1),\mathbb{R}^n} \leq |u|_{n(t-1)/(n-1),\mathbb{R}^n} + |u|_{1,n,\mathbb{R}^n}. \tag{4.10}$$

Fijemos $t = n$. Entonces,

$$|u|_{n^2/(n-1),\mathbb{R}^n} \leq |u|_{n,\mathbb{R}^n} + |u|_{1,n,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{1,n,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.11}$$

Ahora, procediendo como en el Corolario 4.1.5, podemos deducir que para todo $q \in [n, \frac{n^2}{(n-1)}]$, $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y que

$$|u|_{q,\mathbb{R}^n} \leq \|u\|_{1,n,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Podemos repetir este argumento con $t = n+1$ en (4.10), usando (4.11) para conseguir $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para $q \in \left[\frac{n^2}{n-1}, \frac{n(n+1)}{n-1}\right]$ y que

$$|u|_{q,\mathbb{R}^n} \leq 2\|u\|_{1,n,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Se puede iterar este argumento con $t = n+2, n+3, ...$, para ver que $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q \in [n, \infty)$ existe una constante $C = C(q) > 0$ tal que

$$|u|_{q,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{1,n,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

De nuevo, el resultado se sigue para cualquier $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ por densidad. Esto concluye la demostración. □

Observación 4.2.2. Analicemos la constante resultante del teorema anterior. Observamos que podemos sacar una fórmula explícita de dicha constante por inducción, pero vemos que cuándo $q \to \infty$, esta constante explota. Esto concuerda con que no tenemos la inyección de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^\infty(\Omega)$.

4.3. Caso $p > n$.

Finalmente estudiemos el caso $p > n$.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Morrey). *Sea $p > n$. Entonces, tenemos la inyección continua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Además, existe una constante $C = C(p,n) > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha |u|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{4.12}$$

donde $\alpha = 1 - (n/p) \in (0,1)$. De nuevo, si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, la misma conclusión se mantiene para $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Paso 1. Sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\mathcal{Q}$ un cubo de lado r conteniendo al origen y con lados paralelos a los ejes coordenados. Sea $x \in \mathcal{Q}$. Tenemos,

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(u(tx))\,dt,$$

y por eso

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i| \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big|\,dt, \quad \forall x \in \mathcal{Q}. \tag{4.13}$$

Sea $\overline{u}$ la media de u sobre $\mathcal{Q}$, es decir,

$$\overline{u} = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} u(y)\,dy.$$

Se sigue ahora de (4.13), que

$$\begin{aligned}
|\overline{u} - u(0)| &= \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \Big| \int_{\mathcal{Q}} (u(x) - u(0))\,dx \Big| \leq \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i| \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big|\,dt\,dx \\
&\leq \frac{r}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} dx \sum_{i=1}^n \int_0^1 \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big|\,dt = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 dt \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i=1}^n \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big|\,dx \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 dt \int_{t\mathcal{Q}} \sum_{i=1}^n \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \Big| t^{-n}\,dy.
\end{aligned}$$

Pero $t\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}$ para $0 \leq t \leq 1$, y además, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_{t\mathcal{Q}} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \Big|\,dy \leq \left(\int_{\mathcal{Q}} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|^p dy \right)^{1/p} |t\mathcal{Q}|^{1/q} = \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{p,\mathcal{Q}} r^{n/q} t^{n/q},$$

con $q \in (1, \infty)$ el exponente conjugado de p. De este modo,

$$|\overline{u} - u(0)| \leq \frac{1}{r^{n-1}} |u|_{1,p,\mathcal{Q}}\; r^{n/q} \int_0^1 t^{n/q-n}\,dt = \frac{r^{1-(n/p)}}{1-(n/p)} |u|_{1,p,\mathcal{Q}}.$$

Observesé que hemos usado que $1 - n/p > 0$, es decir, $p > n$.

Por traslación, esta desigualdad es válida para cualquier cubo $\mathcal{Q}$ en $\mathbb{R}^n$ cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados, de longitud r, y para cualquier $x \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto, para cualquier $\mathcal{Q}$ y cualquier $x \in \mathcal{Q}$, tenemos

$$|\overline{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-(n/p)}}{1-(n/p)} |u|_{1,p,\mathcal{Q}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.14}$$

Entonces, si $x, y \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le |u(x) - \overline{u}| + |\overline{u} - u(y)| \\ &\le \frac{2r^{1-(n/p)}}{1-(n/p)} |u|_{1,p,\mathcal{Q}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ podemos encontrar siempre un cubo $\mathcal{Q}$ que contenga a x, y y de lado $r = 2|x - y|$. Sustituyendo esto en (4.15), deducimos (4.12) para $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con

$$C = \frac{2^{2-(n/p)}}{1-(n/p)}.$$

Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, podemos construir una sucesión $\{u_m\}_{m\ge 1}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, (al menos para una subsucesión) $u_m \to u$ en $\mathbb{R}^n$. Esto entonces establece (4.12) para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Paso 2. Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces de nuevo por (4.14) para $r = 1$, tenemos

$$|u(x)| \le |\overline{u}| + \frac{1}{1-(n/p)} |u|_{1,p,\mathcal{Q}} \le \frac{p}{p-n} \|u\|_{1,p,\mathcal{Q}} \le \frac{p}{p-n} \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n},$$

y el resultado se extiende a todo $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por densidad. Esto prueba que la inclusión de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continua.

El resultado para $W_0^{1,p}(\Omega)$ se sigue de forma usual usando que $\widetilde{u}$ es la extensión a $\mathbb{R}^n$ por cero fuera de Ω de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto concluye la prueba del teorema. □

Observación 4.3.2. 1. De nuevo, tenemos una expresión explícita de la constante de inyección de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^\infty(\Omega)$ y de la constante que aparece en (4.12). Estas no dependen de Ω y están dadas respectivamente por

$$C_0 = \frac{p}{p-n} \quad \text{y} \quad C_1 = p\frac{2^{2-(n/p)}}{p-n}.$$

2. Del enunciado del Teorema 4.3.1 y, en concreto, de (4.12) deducimos que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$, entonces existe una única función $\widetilde{u} = u$ p.c.t. $x \in \Omega$ tal que $\widetilde{u} \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ y siendo

$$\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \text{ y } \sup_{x,y\in\Omega, x\ne y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}.$$

Dicho espacio es un espacio de Banach para la norma:

$$|u|_{0,\alpha,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega, x\ne y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

En este sentido escribiremos $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}(\Omega)$ cuando $p > n$ y $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

De los resultados probados anteriormente deducimos el siguiente resultado para el espacio $W^{1,p}(\Omega)$. Se tiene:

Teorema 4.3.3. *Sea $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, un hiperrectángulo o un conjunto abierto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada $\partial\Omega$. Entonces, tenemos las inclusiones continuas*

(i) si $1 \leq p < n$, $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,

(ii) si $p = n$, $\quad W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [n, \infty)$,

(iii) si $p > n$, $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

y además, en el último caso, $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_b(\Omega)$, *con exponente* $\alpha = 1 - (n/p)$. *En particular,*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}_b(\Omega), \quad p > n.$$

Demostración. Si Ω es como se ha dicho, entonces existe un operador de prolongación $\mathcal{P} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ahora el resultado es obvio. □

Observación 4.3.4. Obsérvese que en el resultado anterior las constantes de inyección dependen de p, n y Ω.

En el caso $p = n$, no tenemos, en general, que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Sea $\Omega = B(0, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$. Definimos

$$u(x) = \log(\log(2/r)), \quad x \in \Omega. \tag{4.16}$$

Entonces, $u \notin L^\infty(\Omega)$ por la singularidad en el origen. Sin embargo, podemos ver que $u \in H^1(\Omega)$ $(p = n = 2)$. Primero, $u \in L^2(\Omega)$, ya que

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} r(\log(\log(2/r)))^2 \, dr,$$

y una simple aplicación de la **regla de L'Hopital** nos muestra que el integrando está acotado y es una función continua en $(0, \frac{1}{2})$, por tanto la integral es finita.

Ahora veremos que, la derivada distribucional es justamente la derivada clásica, que está definida en $\Omega \setminus \{0\}$. Para ver esto, sea $\Omega_\varepsilon = \{x \mid \varepsilon < r < \frac{1}{2}\}$ y si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \phi \rangle = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dx.$$

Si fijamos u_{x_1} como la derivada parcial clásica en Ω_ε, entonces por el **Teorema de Green**,

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} u\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} u_{x_1}\phi\,dx - \int_{r=\varepsilon} u\phi v_1\,ds,$$

donde $v = (v_1, v_2)$ es el vector exterior unitario normal de Ω_ε en $\{r = \varepsilon\}$, es decir, $v_1 = \dfrac{x_1}{\varepsilon}$. Pero

$$\Big|\int_{r=\varepsilon} u\phi v_1\,ds\Big| \leq \int_0^{2\pi} |u||\phi|\varepsilon\,d\theta \leq C2\pi\varepsilon\ \log\ \log(2/\varepsilon),$$

que tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$. Por tanto,

$$\langle\frac{\partial u}{\partial x_1}, \phi\rangle = \int_\Omega u_{x_1}\phi\,dx, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y esto prueba el resultado.

Ahora,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\cos\theta}{r\log(2/r)}, \quad \text{donde } x_1 = r\cos\theta.$$

De nuevo, es fácil comprobar, que esta función está en $L^2(\Omega)$. El mismo análisis se aplica a $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$. De modo que $u \in H^1(\Omega)$.

Observación 4.4.1. Asumamos que $p < n/2$ y que $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, u y $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, para $i : 1 \leq i \leq n$, están todas en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ya que $p < \dfrac{n}{2} < n$, tenemos que $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $u \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^n)$. Ahora $p^* = \dfrac{np}{n-p} < n$, ya que $p < \dfrac{n}{2}$. De este modo, tenemos de nuevo que, $u \in L^{(p^*)^*}(\mathbb{R}^n)$. Pero, es fácil ver que, $(p^*)^*$ viene dado por

$$\frac{1}{(p^*)^*} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Iterando este proceso podemos deducir fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 4.4.2. *Sean $m \geq 1$ un entero y $1 \leq p < \infty$. Entonces,*

(i) si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

(ii) si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\quad$ *para cualquier* $q \in [p, \infty)$,

(iii) si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

y en el último caso, es decir, cuando $m > (n/p)$, *si fijamos*

$$k = \left[m - \frac{n}{p}\right] \geq 0 \quad y \quad \theta = \left(m - \frac{n}{p}\right) - k \in (0,1),$$

denotando $[\cdot]$ *la parte entera, tenemos*

$$|D^\alpha u|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^n}, \quad \text{para } |\alpha| \leq k, \tag{4.17}$$

y

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C|x-y|^\theta \|u\|_{m,p,\mathbb{R}^n}, \tag{4.18}$$

para $|\alpha| = k$. *(Si* $|\alpha| < k$, (4.18) *se mantiene con* $\theta = 1$ *en virtud de* (4.17)*). En particular, tenemos la inclusión continua*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{k,\theta}(\mathbb{R}^n), \quad m > (n/p), \text{ y } k \text{ y } \theta \text{ como antes.}$$

Los mismos resultados son válidos para cualquier conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *para espacios de la forma* $W_0^{m,p}(\Omega)$, *y para* $W^{m,p}(\Omega)$, *si* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, *si* Ω *es un hiperrectángulo o si es de clase* $\mathcal{C}^1$ *con frontera acotada* $\partial\Omega$.

Teorema 4.4.3. *Sea* $p > n$. *Entonces el espacio* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra conmutativa de Banach.*

Demostración. Para probar que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es un **álgebra de Banach**, necesitamos ver que si $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces la función producto uv satisface $uv \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|uv\|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}\|v\|_{1,p,\mathbb{R}^n},$$

para una constante $C > 0$. Entonces se tendría el resultado (con la norma equivalente $C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$).

Tenemos que $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $p > n \geq 2$, luego $u, v \in H^1(\Omega)$ para todo Ω, abierto y acotado. Entonces, por la Proposición 3.1.3 tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ c.p.d en } \Omega, \quad \forall \Omega \text{ acotado.}$$

Esto prueba que

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Además por la continuidad de la inclusión de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\right|_{p,\mathbb{R}^n} &\leq \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{p,\mathbb{R}^n} |v|_{\infty,\mathbb{R}^n} + |u|_{\infty,\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{p,\mathbb{R}^n} \\ &\leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}\|v\|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

y esto concluye la demostración del teorema. □

Capítulo 5

Teoremas de Compacidad

Como se vio en el Capítulo 2, la inclusión de $W^{1,p}(I)$ en $\mathcal{C}(\overline{I})$ es compacta cuando I es un intervalo acotado. En vista de los teoremas de inyección probados en el capítulo previo, nos hacemos la pregunta de cuáles de esas inyecciones son compactas. Daremos a continuación un contraejemplo de que los dominios no acotados no admiten tales inyecciones compactas.

Ejemplo 5.1. Sea I el intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ y sean $I_j = (j, j+1), j \geq 1$. Sea $f \in \mathcal{C}_c^1(I)$, donde

$$\mathcal{C}_c^1(I) = \{f \in \mathcal{C}^1(I) : \text{sop } f \subset I \text{ y compacto}\}.$$

Definimos f_j como la traslación de f en cada I_j, es decir, $f_j(x) = f(x-j)$, para cualquier $j \geq 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f está normalizada, es decir,

$$\|f\|_{1,p,I} = 1.$$

Lo mismo es cierto entonces para cada f_j, y por tanto, $\{f_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Como f es $\mathcal{C}^1$ y tiene soporte compacto, tenemos que $f \in L^q(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq q \leq \infty$. Además si

$$|f|_{q,\mathbb{R}} = |f|_{q,I} = a > 0,$$

entonces para cualquier $j \neq k$,

$$|f_j - f_k|_{q,\mathbb{R}}^q = \int_j^{j+1} |f_j|^q \, dx + \int_k^{k+1} |f_k|^q \, dx = 2a^q$$

luego,

$$|f_j - f_k|_{q,\mathbb{R}} = 2^{1/q} a,$$

con que $\{f_j\}_{j\geq 1}$ no puede tener una subsucesión convergente en $L^q(\mathbb{R})$. Por tanto, ninguna de las inyecciones de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ en los espacios $L^q(\mathbb{R})$ pueden ser compactas. Este ejemplo es fácilmente generalizable a $\mathbb{R}^n$.

En vista del ejemplo anterior, centraremos nuestra atención en los dominios acotados. A partir de ahora, en esta sección, Ω será un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Primero examinaremos los tipos de espacios donde se tienen las inyecciones y buscaremos en ellos un criterio de compacidad.

De los teoremas de inyección del capítulo previo tenemos que tratar con el espacio $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ o con varios espacios de Lebesgue $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$.

En los espacios $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, un conjunto acotado es relativamente compacto, si es equicontinuo, por el **teorema de Ascoli-Arzelà**. Enunciemos este resultado:

Teorema 5.2 (**Ascoli-Arzelà**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $K \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Entonces, K es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si y solo si*

1. *$K \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ es acotado, i.e., existe $M > 0$ tal que*
$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall f \in K.$$
2. *K es equicontinuo, i.e., para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in \Omega$ con $|x - y| \leq \delta$, se tiene*
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in K.$$

Establezcamos ahora un criterio similar en los espacios $L^p(\Omega)$, perteneciente a **Frechet y Kolmogorov**.

Teorema 5.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\omega \subset\subset \Omega$. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Supongamos que*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \delta < \mathit{dist}\,(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \text{ tal que} \tag{5.1}$$
$$|\tau_h f - f|_{p,\omega} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ con } |h| < \delta \text{ y } \forall f \in \mathcal{F}.$$
donde $\tau_y(f)(x) = f(x - y)$. Entonces, $\mathcal{F}|_\omega$, el conjunto de las restricciones de los elementos de $\mathcal{F}$ a ω, es relativamente compacto en $L^p(\omega)$.

Demostración. Se puede suponer que Ω es acotado. Para $f \in \mathcal{F}$ se pone
$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \Omega, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$
Se escribe
$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f} : f \in \mathcal{F}\},$$
de forma que $\overline{\mathcal{F}}$ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Se procede en tres etapas:

1. Se tiene
$$|\rho_m * \overline{f} - \overline{f}|_{p,\omega} < \varepsilon, \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}} \text{ y } \forall m > \frac{1}{\delta}.$$
En efecto, se tiene
$$\begin{aligned} |(\rho_m * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|\rho_m(y)\, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_m(y)\, dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$
y por tanto,
$$|(\rho_m * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \leq \int_{B(0,\frac{1}{m})} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_m(y)\, dy.$$
Luego entonces,
$$\begin{aligned} \int_\omega |(\rho_m * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p\, dx &\leq \int_{B(0,\frac{1}{m})} \rho_m(y)\, dy \int_\omega |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p\, dx \\ &< \varepsilon^p, \end{aligned}$$
para $m > \frac{1}{\delta}$ (por (5.1)).

2. La familia $\mathcal{H} = (\rho_m * \overline{\mathcal{F}})|_{\overline{\omega}}$ verifica, para cada m, las hipótesis del teorema de Ascoli-Arzelà. En efecto, en primer lugar se tiene
$$|\rho_m * \overline{f}|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq |\rho_n|_{\infty,\mathbb{R}^n} |\overline{f}|_{1,\mathbb{R}^n} \leq C_m, \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}.$$
Y por otra parte, se tiene
$$\begin{aligned} |(\rho_m * \overline{f})(x_1) - (\rho_m * \overline{f})(x_2)| &\leq |x_1 - x_2| |\overline{f}|_{1,\mathbb{R}^n} \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\rho_m(z_1) - \rho_m(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \\ &\leq C_m |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$
De donde resulta que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ y a fortiori en $L^p(\omega)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$ se fija $m > \frac{1}{\delta}$ de forma que
$$|(\rho_m * \overline{f}) - f|_{p,\omega} < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$
Como $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$, se puede recubrir $\mathcal{H}$ con un número finito de bolas de radio ε (en $L^p(\omega)$). Las bolas correspondientes de radio 2ε recubren entonces $\mathcal{F}|_\omega$. Por consiguiente $\mathcal{F}|_\omega$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. Esto concluye el resultado.

□

Vamos a usar el resultado anterior para formular un criterio de compacidad en $L^p(\Omega)$ mejor que en un subconjunto relativamente compacto, ω.

Teorema 5.4. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p < \infty$. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$. Supongamos que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \omega \subset\subset \Omega, \quad \exists \delta > 0, \quad \delta < \textit{dist}\,(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \textit{ tal que} \tag{5.2}$$

$$|\tau_h f - f|_{p,\omega} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \textit{ con } |h| < \delta \textit{ y } \forall f \in \mathcal{F},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega \subset\subset \Omega \textit{ tal que } |f|_{p,\Omega\setminus\overline{\omega}} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{5.3}$$

Entonces, $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ se fija $\omega \subset\subset \Omega$ tal que

$$|f|_{p,\Omega\setminus\overline{\omega}} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Por el Teorema 5.3 se sabe que $\mathcal{F}|_\omega$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. Se puede entonces recubrir $\mathcal{F}|_\omega$ con un número finito de bolas de radio ε en $L^p(\omega)$. Sea

$$\mathcal{F}|_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon) \text{ con } g_i \in L^p(\omega),$$

estas bolas se consideran en $L^p(\omega)$. Se pone

$$\widetilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & \text{si } x \in \omega, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Se comprueba con facilidad que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^k B(\widetilde{g}_i, 2\varepsilon)$ (estas bolas se consideran en $L^p(\Omega)$). Esto finaliza la prueba del resultado. □

Antes de probar los teoremas de compacidad para los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ usando el resultado anterior, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 5.5. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tenemos*

$$|\tau_{-h} u - u|_{p,\Omega'} \leq |h| |u|_{1,p,\Omega}, \tag{5.4}$$

para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ y para cada $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \textit{dist}\,(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Demostración. Supongamos primero que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si $h \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h\, dt,$$

donde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Así, elevando a p e integrando en $\Omega' \subset\subset \Omega$, deducimos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\tau_{-h} u - u|^p &\leq |h|^p \int_0^1 dt \int_{\Omega'} |\nabla u(x+th)|^p\, dx \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\Omega'+th} |\nabla u(y)|^p\, dy. \end{aligned}$$

Si $|h| <$ dist $(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ entonces, existe $\Omega'' \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega' + th \subset \Omega''$ para $t \in [0,1]$. Entonces

$$|\tau_{-h} u - u|_{p,\Omega'}^p \leq |h|^p \int_{\Omega''} |\nabla u|^p, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall h : |h| < \text{dist } (\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega). \tag{5.5}$$

Supongamos ahora que $1 \leq p < \infty$ y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, existe $\{u_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_m \to \nabla u$ en $(L^p(\Omega''))^n$ (Teorema 3.1.1). Podemos aplicar (5.5) a cada u_m y pasando al límite, cuando $m \to \infty$, para conseguir (5.4).

Supongamos finalmente que $p = \infty$ y sea $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Entonces, como Ω' es relativamente compacto, elegimos Ω'' tal que $\Omega' \subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Entonces $u|_{\Omega''} \in W^{1,q}(\Omega'')$, para todo $q \in [1, \infty]$. Por tanto por los argumentos precedentes,

$$|\tau_{-h} u - u|_{q,\Omega'} \leq |h| |u|_{1,q,\Omega''}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

y como $q \to \infty$, tenemos

$$|\tau_{-h} u - u|_{\infty,\Omega'} \leq |h| |u|_{1,\infty,\Omega''} \leq |h| |u|_{1,\infty,\Omega}.$$

Esto concluye la prueba. □

Observación 5.6. Si $1 < p \leq \infty$, el recíproco es también cierto, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ y para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| <$ dist $(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$|\tau_{-h} - u|_{p,\Omega'} \leq C|h|, \tag{5.6}$$

para una $u \in L^p(\Omega)$ dada, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $|u|_{1,p,\Omega} \leq C$. Para ver la demostración veáse [2]. Esto no es cierto cuando $p = 1$. Las funciones que satisfacen (5.6) forman una clase mayor que $W^{1,1}(\Omega)$. Son conocidas como funciones de **variación acotada** (es decir, funciones de L^1 cuya derivada distribucional tiene medida acotada) y tales espacios de funciones son llamados **Espacios BV**. Para una descripción de tales espacios ver [5] o [3].

Podemos ya enunciar y probar el resultado principal de este capítulo. Se tiene:

Teorema 5.7 (**Rellich-Kondrasov**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces las siguientes inclusiones son compactas:*
(i) si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \rightrightarrows L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q < p^*$,
(ii) si $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \rightrightarrows L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q < \infty$,
(iii) si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \rightrightarrows \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Cuando $p > n$, hemos visto que las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ son continuas de tipo Hölder. Si B es la bola unidad en $W^{1,p}(\Omega)$, se sigue del Teorema 4.3.3 y el análogo de la desigualdad (4.12), que las funciones en B son uniformemente acotadas y equicontinuas en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Por tanto, B es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ por el **Teorema de Ascoli-Arzelà**.

Supongamos por el momento, que el resultado es cierto para $p < n$. Notemos que cuando $p \to n$, $p^* \to \infty$. Así, como Ω es acotado $W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,n-\varepsilon}(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$ y cualquier $q < \infty$ dado, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $1 \leq q < (n-\varepsilon)^*$. Por tanto usando el caso $p = n - \varepsilon < n$, podemos deducir que $W^{1,n}(\Omega)$ se incluye de forma compacta en $L^q(\Omega)$ para cualquier $1 \leq q < \infty$.

Luego el teorema quedará probado si probamos el caso $p < n$. Sea B la bola unidad en $W^{1,p}(\Omega)$. Ahora verificaremos las condiciones (i) y (ii) del Teorema 5.4. Sea $1 \leq q < p^*$. Entonces elegimos α tal que $0 < \alpha \leq 1$ y

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Entonces (como en el Corolario 4.1.5), si $u \in B$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| < \text{dist }(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$,

$$\begin{aligned} |\tau_{-h}u - u|_{p,\Omega'} &\leq |\tau_{-h}u - u|_{1,\Omega'}^{\alpha} |\tau_{-h}u - u|_{p^*,\Omega'}^{1-\alpha} \\ &\leq (|h|^{\alpha}|u|_{1,1,\Omega}^{\alpha})(2|u|_{p^*,\Omega})^{1-\alpha} \\ &\leq C|h|^{\alpha}, \end{aligned}$$

usando el Lema 5.5. Elegimos h, lo suficientemente pequeño, tal que $C|h|^p < \varepsilon$. Esto verificará (5.2).

Ahora si $u \in B$ y $\Omega' \subset\subset \Omega$, se sigue por la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}|u|_{q,\Omega\setminus\overline{\Omega'}} &\leq |u|_{p^*,\Omega\setminus\overline{\Omega'}}|\Omega \setminus \overline{\Omega}'|^{1-(q/p^*)}\\ &\leq C|\Omega \setminus \overline{\Omega}'|^{1-(q/p^*)},\end{aligned}$$

dicha cantidad es más pequeña que un cierto $\varepsilon > 0$ dado y elegiendo $\Omega' \subset\subset \Omega$ que sea tan cercano a Ω como necesitemos. Esto verifica (5.3). Por tanto B es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$ y así se concluye la prueba del resultado. $\square$

Si Ω es un dominio acotado, el teorema anterior es válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$ (no son necesarias las hipótesis de regularidad). Veamos este resultado:

Teorema 5.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces las siguientes inclusiones son compactas:*
(i) si $p < n$, $W_0^{1,p}(\Omega) \rightrightarrows L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q < p^*$,
(ii) si $p = n$, $W_0^{1,n}(\Omega) \rightrightarrows L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q < \infty$,
(iii) si $p > n$, $W_0^{1,p}(\Omega) \rightrightarrows \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Tomemos $R > 0$ tal que $\overline{\Omega} \subset B(0,R)$. Así, la inyección $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($p < n$ y $q \in [1,p^*]$ la descomponemos como:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \overset{cont.}{\longmapsto} \widetilde{u} \in W^{1,p}(B(0,R)) \overset{compacta}{\longmapsto} \widetilde{u} \in L^q(B(0,R)),$$

y

$$\widetilde{u} \in L^q(B(0,R)) \overset{cont.}{\longmapsto} \widetilde{u}|_\Omega = u \in L^p(\Omega).$$

Como se trata de una composición de funciones continuas con una compacta, la composición es compacta. Esto concluye el resultado. $\square$

Capítulo 6

Teoría de la Traza

En esta sección asignaremos un significado a las expresiones como

$$u|_{\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega},$$

(es decir, valores de u y su derivada normal sobre $\partial\Omega$) cuando $u \in H^m(\Omega)$, Ω es un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) con frontera $\partial\Omega$. Como hemos visto en el Capítulo 2, no tiene sentido hablar de los valores de u en un conjunto de medida nula cuando $u \in H^m(\Omega)$. Por tanto necesitamos generalizar la noción de los valores en la frontera de dichas funciones.

Empezaremos con el caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (este es no acotado) y estudiaremos completamente la situación en este dominio. En este caso, $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ y, por tanto, identificaremos la frontera con $\mathbb{R}^{n-1}$. El caso de un abierto regular Ω se seguirá por el uso de las cartas locales y la correspondiente partición de la unidad.

La teoría que vamos a desarrollar también se puede hacer para otros valores de p, pero restringiremos nuestra atención al caso $p = 2$.

Teorema 6.1. *Sea* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. *Entonces, existe una aplicación lineal y continua* $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ *tal que si* $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, *entonces*

$$\gamma_0(v) = v|_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Demostración. Sea $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x', x_n)$ con

$x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ahora

$$
\begin{aligned}
|v(x',0)|^2 &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}(|v(x',x_n)|^2)\,dx_n \\
&= -2\int_0^\infty v(x',x_n)\frac{\partial v}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx_n \\
&\leq \int_0^\infty \left[(v(x',x_n))^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}(x',x_n)\right)^2\right]\,dx_n.
\end{aligned}
$$

Integrando a ambos lados de la relación respecto de x', obtenemos

$$\left|v(x',0)\right|^2_{2,\mathbb{R}^{n-1}} \leq \|v\|^2_{1,2,\mathbb{R}^n_+}.$$

Luego la aplicación $v \to v|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ es continua en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con la topología de $H^1(\mathbb{R}^n)$. Pero la restricción de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R}^n_+$ (espacio que hemos llamado $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{R}^n_+}}(\mathbb{R}^n)$), es densa en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ por el Corolario 3.2.3. Por tanto existe una única extensión continua a $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ de esta aplicación. Veamos ahora que si $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ entonces, $\gamma_0(v) = v|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Como vimos en el Capítulo 3, $\mathbb{R}^n_+$ posee un operador de prolongación y así si $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ entonces

$$V = Pv \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad V|_{\mathbb{R}^n_+} = v.$$

Si regularizamos, $V_m = V * \rho_m \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ y vimos (Teorema 1.3.20) que

$$V_m \to V \text{ en } H^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow V_m|_{\mathbb{R}^n_+} \to V|_{\mathbb{R}^n_+} = v.$$

Luego, V_m converge uniformemente a V en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$V_m(x',0) \to V(x',0) = v(x',0),$$

es decir, tenemos la convergencia uniforme también en $\mathbb{R}^{n-1}$. Pero se tiene que $\gamma_0(V_m|_{\mathbb{R}^n_+}) = V_m(x',0) \to \gamma_0(V|_{\mathbb{R}^n_+}) = \gamma_0(v)$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ y así,

$$\gamma_0(v)(x',0) = v(x',0) \quad \text{p.c.t.} x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

Antes de continuar debemos hacer mención a los espacios de Sobolev fraccionarios, es decir, $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \in \mathbb{R}$. Estos espacios se consiguen usando la transformada de Fourier o usando los cocientes incrementales. Si construimos los espacios de Sobolev de orden fraccionario usando cocientes incrementales la generalización a cualquier Ω es más sencilla que si usamos la transformada de Fourier. Para más información se puede consultar [4] o [1].

Enunciaremos un resultado que afirma que el rango de la aplicación γ_0, llamada la **aplicación traza** (de orden 0), no es todo $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Más precisamente tenemos el siguiente resultado (veáse [4]):

Teorema 6.2. *El rango de la aplicación γ_0 es el espacio $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Observación 6.3. Con pocas modificaciones en la demostración del teorema 6.2, es fácil probar la aplicación γ_0 de $H^m(\mathbb{R}^{n-1})$ en $H^{m-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. De igual forma, si $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$ podemos imitar la prueba del Teorema 6.1 y ver que $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x',0)$ está en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ y de nuevo que está de hecho en $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Podemos extender $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x',0)$ a una aplicación continua

$$\gamma_1 : H^2(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

cuyo rango es $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Más generalmente, tenemos una serie de aplicaciones lineales y continuas γ_j en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que la aplicación

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$$

de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ en $(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))^m$ y el rango es el espacio

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Ahora vamos a estudiar el núcleo de la aplicación γ_0. Ya hemos visto (Teorema 3.1.15) que, si u es continua en $\overline{\Omega}$ y u es cero sobre $\partial\Omega$, entonces $u \in H^1_0(\Omega)$. Veremos que $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ es precisamente el núcleo de la aplicación γ_0. En efecto, como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \subset \ker\,(\gamma_0)$ que es un subespacio cerrado de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tenemos ya que $H^1_0(\mathbb{R}^n_+) \subset \ker\,(\gamma_0)$. La prueba de la inclusión contraria es más delicada y necesita varios pasos.

Lema 6.4 (**Fórmula de Green**). *Sean $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx, \quad \text{si } 1 \le i \le (n-1), \tag{6.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u\frac{\partial v}{\partial x_n}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}v\,dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\,dx. \tag{6.2}$$

Demostración. Si $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces las relaciones (6.1) y (6.2) se siguen integrando por partes. El caso general es consecuencia de la densidad de $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{R}^n_+}}(\mathbb{R}^n)$ en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ y por la continuidad de la aplicación $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. □

Corolario 6.5. *Si $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ y al menos una de ellas está en ker (γ_0) entonces,* (6.1) *se cumple para todo $i : 1 \le i \le n$.*

Lema 6.6. *Sea $v \in$ ker (γ_0). Entonces, la prolongación por cero fuera de $\mathbb{R}^n_+$, denotada $\widetilde{v}$, está en $H^1(\mathbb{R}^n)$, y*

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i} = \widetilde{\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)}, \quad 1 \le i \le n. \tag{6.3}$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para $i : 1 \le i \le n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{v}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} v\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx' = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial v}{\partial x_i}\phi\,dx' = -\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)}\phi\,dx,$$

por el Corolario 6.5. Deducimos así el resultado. □

Sea $h > 0$ y consideremos $\overline{h} = he_n \in \mathbb{R}^n$ donde e_n es el vector unitario $(0, 0, ..., 0, 1)$. Consideremos la función $\tau_{\overline{h}}\widetilde{v}$, donde $\widetilde{v}$ es la prolongación por cero fuera de $\mathbb{R}^n_+$ de $v \in$ ker (γ_0). Entonces, $\tau_{\overline{h}}\widetilde{v}$ se anula para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n < h$. (Renombremos la función $\tau_{\overline{h}}\widetilde{v}(x) = \widetilde{v}(x - \overline{h})$).

Lema 6.7. *Sea $1 \le p < \infty$ y $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\lim_{\overline{h} \to 0} |\tau_{\overline{h}}f - f|_{p,\mathbb{R}^n} = 0 \tag{6.4}$$

Demostración. Por la traslación invariante de la medida de Lebesgue, $\tau_{\overline{h}}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ también. Sea $\varepsilon > 0$ dado y elegimos $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|f - \phi|_{p,\mathbb{R}^n} < \varepsilon/3. \tag{6.5}$$

Sea $a > 0$ tal que sop $\phi \subset [-a, a]^n$. Luego, como ϕ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, existe un $\delta > 0$ y si $|\overline{h}| < \delta$, tenemos

$$|\phi(x - \overline{h}) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}(2(a+1))^{-(n/p)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x - \overline{h}) - \phi(x)|^p\,dx = \int_{[-(a+1),(a+1)]^n} |\phi(x - \overline{h}) - \phi(x)|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Por tanto para $|\overline{h}| < \delta$,

$$|\tau_{\overline{h}}\phi - \phi|_{p,\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.6}$$

Finalmente, de nuevo por la traslación invariante de la medida de Lebesgue, tenemos

$$|\tau_{\overline{h}}f - \tau_{\overline{h}}\phi|_{p,\mathbb{R}^n} = |f - \phi|_{p,\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.7}$$

El resultado ahora se sigue combinando (6.5), (6.6) y (6.7) por la desigualdad triangular. $\square$

Como consecuencia, deducimos:

Corolario 6.8. *Si $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_{\overline{h}}v - v\|_{1,2,\mathbb{R}^n} = 0$$

Demostración. Claramente por el lema anterior $\tau_{\overline{h}}v \to v$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. También es fácil comprobar que para cualquier $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{\overline{h}}v) = \tau_{\overline{h}}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Por tanto por el lema precedente de nuevo, $\dfrac{\partial(\tau_{\overline{h}}v)}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Podemos ya demostrar uno de los resultados principales de este capítulo. Se tiene:

Teorema 6.9. *ker $(\gamma_0) = H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$.*

Demostración. Ya hemos visto que $H_0^1(\mathbb{R}^n_+) \subset \ker(\gamma_0)$. Sea ahora $v \in \ker(\gamma_0)$. Entonces hemos visto que la extensión $\widetilde{v}$ por cero está en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Usando la sucesión de funciones truncantes $\{\zeta_k\}_{k\geq 1}$, del Teorema 2.15, tenemos que $\zeta_k\widetilde{v} \to \widetilde{v}$ cuando $k \to \infty$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$ (visto en el Paso 2 del Teorema 2.15). Las funciones $\zeta_k\widetilde{v}$ tienen soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y se anulan para $x_n < 0$. Ahora fijemos k tal que

$$\|\widetilde{v} - \zeta_k\widetilde{v}\|_{1,2,\mathbb{R}^n} < \eta,$$

donde $\eta > 0$ es una cantidad positiva dada. De nuevo podemos elegir h lo suficientemente pequeño tal que si $\overline{h} = he_n$, entonces

$$\|\tau_{\overline{h}}(\zeta_k\widetilde{v}) - \zeta_k\widetilde{v}\|_{1,2,\mathbb{R}^n} < \eta.$$

Ahora $\tau_{\overline{h}}(\zeta_k\widetilde{v})$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n_+$ y se anula para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_n < h$. Sea $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la sucesión de funciones regularizantes. Si $\varepsilon > 0$

es elegido lo suficientemente pequeño entonces $\rho_\varepsilon * \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v})$ tendrá soporte contenido en el conjunto

$$B(0,\varepsilon) + K \cap \{x \mid x_n \geq h > 0\},$$

donde $K = \text{sop }(\tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v}))$ es compacto. Por tanto

$$\rho_\varepsilon * \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+),$$

y sabemos que cuando $\varepsilon \to 0$, $\rho_\varepsilon * \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v}) \to \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v})$. Luego podemos elegir ε lo suficientemente pequeño tal que

$$\|\rho_\varepsilon * \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v}) - \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v})\|_{1,2,\mathbb{R}^n} < \eta.$$

Por tanto hemos encontrado una función $\phi_\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$,

$$\phi_\eta = \rho_\varepsilon * \tau_{\overline{h}}(\zeta_k \widetilde{v}),$$

tal que

$$\|\phi_\eta - v\|_{1,2,\mathbb{R}^n} \leq \|\phi_\eta - \widetilde{v}\|_{1,2,\mathbb{R}^n} < 3\eta.$$

Luego, como η es arbitrario, se sigue que

$$\text{ker }(\gamma_0) \subset \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)} = H^1_0(\mathbb{R}^n_+).$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Observación 6.10. De forma análoga se puede probar que si

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1}),$$

entonces el núcleo de γ en $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ es precisamente el espacio $H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Pasemos al caso de Ω un conjunto abierto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada. Sean $\{U_j, T_j\}_{j=1}^k$ las cartas locales asociadas a la frontera $\partial\Omega$ y sean $\{\phi_j\}_{j=1}^k$ la partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{U_j\}$ de $\partial\Omega$. Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces $(\phi_j u|_{U_j \cap \Omega}) \circ T_j \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ y así podemos definir la traza como un elemento de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Volviendo atrás por T_j^{-1} podemos definir la traza en $U_j \cap \partial\Omega$. Uniendo ambas tenemos que la traza $\gamma_0 u$ en $L^2(\partial\Omega)$ y la imagen (por la definición de los espacios) es precisamente $H^{1/2}(\partial\Omega)$. De forma similar, si la frontera es más regular podemos definir trazas de orden superior γ_j. En particular tenemos el siguiente resultado (veáse [4]).

Teorema 6.11 (**Teorema de la Traza**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de clase $\mathcal{C}^{m+1}$ con frontera $\partial\Omega$ acotada. Entonces, existe una aplicación traza $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$ de $H^m(\Omega)$ en $(L^2(\Omega))^m$ tal que*

(i) Si $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $\gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}$, $\gamma_1(v) = \left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}$, ..., $\gamma_{m-1} = \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}}(v)|_{\partial\Omega}$, donde ν es el vector normal unitario exterior a la frontera $\partial\Omega$.

(ii) El rango de la aplicación γ es el espacio

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega).$$

(iii) EL núcleo de γ es $H_0^m(\Omega)$.

El Teorema de la Traza nos ayuda a obtener el Teorema de Green para funciones en $H^1(\Omega)$, donde Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada. Si $\nu(x)$ denota el vector normal unitario exterior a la frontera $\partial\Omega$ (definido únicamente en $\partial\Omega$), denotamos sus componentes a lo largo de los ejes por $\nu_i(x)$. Por tanto escribimos de forma general,

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_n).$$

Por ejemplo si $\Omega = B(0;1)$ entonces $\nu(x) = x$ para todo $|x| = 1$. Por tanto $\nu_i(x) = x_i$ en este caso.

Teorema 6.12 (**Teorema de Green o fórmula de Green**). *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Entonces, para $1 \leq i \leq n$,*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i. \tag{6.8}$$

Demostración. Por el Corolario 3.4, $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\Omega)$. Si $u_m, v_m \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ entonces tenemos el clásico Teorema de Green

$$\int_\Omega u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_m + \int_{\partial\Omega} u_m v_m \nu_i. \tag{6.9}$$

y eligiendo $u_m \to u$, $v_m \to v$ en $H^1(\Omega)$ deducimos (6.8) por la continuidad de la aplicación traza γ_0. Esto concluye el resultado. □

Para concluir este capítulo vamos a hablar sobre la traza de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty)$ y Ω abierto de clase $\mathcal{C}^1$ con $\partial\Omega$ acotada.

Teorema 6.13. *Sean Ω un abierto de clase $\mathcal{C}^1$ con $\partial\Omega$ acotada y $p \in (1, \infty)$. Entonces, se tiene*

$$\gamma_0 : u \in W^{1,p}(\Omega) \mapsto \gamma_0 u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega).$$

Además se verifica la siguiente desigualdad

$$\|\gamma_0 u\|_{1-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega},$$

con $C > 0$ dependiendo de Ω.

Podemos encontrar más información sobre la traza de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ en [6].

Bibliografía

[1] ADAMS, R.A. AND FOURNIER, J.F, *Sobolev Spaces*, Second Edition, Volumen 140, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Kidlington, 2003.

[2] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional: Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[3] GIUSTI, E., *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhauser, Boston, 1984.

[4] KESAVAN, S., *Topics in Functional Analysis and Application*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 1989.

[5] MAZ'JA, V.G., *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[6] NECAS, J., *Direct Methods in the Theory of Elliptic Ecuations*, Springer, Prague, 2012.