

FACULTAD DE MATEMÁTICAS



Departamento de Análisis Matemático

TRABAJO FIN DE GRADO

**Conjuntos fractales y curvas que
llenan el espacio: sistemas de
funciones iteradas**

Autor: **Pedro Porras Del Río**

Dirigido por: Juan Carlos García Vazquez

Junio 2023

“Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida”. J. L. von Neumann.

Índice

Índice	1
Introducción	7
Conceptos previos	9
1. Medida y dimensión de Hausdorff	17
1.1. Construcción de la medida de Hausdorff	19
1.2. Dimensión	24
1.3. Ejemplos	25
1.3.1. El conjunto de Cantor	25
1.3.2. El Triángulo de Sierpinski	31
1.3.3. La curva de von Koch	34
2. Sistemas de funciones iteradas	39
2.1. Conjuntos autosimilares	40
2.2. Dimensión de conjuntos autosimilares	46
3. Curvas que llenan el espacio	50
3.1. GIFS	54
3.1.1. GIFS ordenados y lineales	56
3.2. Condición de cadena	59
3.3. Estudio de un GIFS	62
3.4. Construcción de curvas que llenan el espacio	67
3.4.1. IFS recorrido en red	68
3.4.2. Visualización	72
Bibliografía	77

Resumen

Este trabajo tiene como propósito el estudio de conjuntos y curvas con ciertas propiedades ‘peculiares’, como son los conjuntos fractales y las curvas que llenan el espacio.

Primero, para entender la complejidad de estos conjuntos y poder calcular su dimensión, estudiaremos la medida y dimensión de Hausdorff. Posteriormente, introduciremos los sistemas de funciones iteradas que nos facilitarán el estudio de los conjuntos fractales. Por último, generalizaremos estos sistemas para poder estudiar las curvas que llenan el espacio, estudiaremos los sistemas de funciones iteradas por un grafo dirigido (GIFS).

Abstract

The purpose of this work is to study sets and curves with certain ‘peculiar’ properties, such as fractal sets and space-filling curves.

Firstly, in order to understand the complexity of these sets and calculate their dimension, we will study the Hausdorff measure and dimension. Subsequently, we will introduce iterated function systems (IFS) that will facilitate the study of fractal sets. Finally, we will generalize these systems to study space-filling curves by introducing linear graph-directed iterated function system (linear GIFS).

Introducción

En 1975 Benoît Mandelbrot inició una pequeña revolución en el mundo de las matemáticas. Hasta ese momento, los estudios se centraban en conjuntos y funciones suficientemente regulares que podían ser estudiados sin mayor dificultad con herramientas del cálculo infinitesimal o la geometría euclídea entre otros. Sin embargo, se conocían estructuras que no encajaban en esta definición, como el copo de nieve de Koch o el triángulo de Sierpinski pero se les consideraba como una curiosidad.

Mandelbrot acuñó el término fractal (del latín *fractum*, que significa ‘roto’) para describir todos estos objetos irregulares que no podían ser estudiados con los métodos tradicionales. También defendió algunas utilidades como su uso para modelizar de forma más realista fenómenos naturales como las nubes, las costas o los perfiles montañosos y que por tanto, debía crear una teoría matemática a su alrededor. Todas estas reflexiones las publicó en su libro de 1977 “The Fractal Geometry of Nature” [11]. Esta obra tuvo una gran influencia, hizo que matemáticos provenientes de distintas ramas se interesaran por los fractales y quisieran estudiarlo desde sus respectivos campos.

Como consecuencia, la geometría fractal es un campo caótico lleno de pequeñas incongruencias, definiciones alternativas y, en general, poco consenso. Sin ir más lejos, a día de hoy aún no existe una definición formal universal de lo que es un fractal, la definición original propuesta por Mandelbrot (que el conjunto tenga dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que su dimensión topológica), fue descartada por el propio Mandelbrot por excluir conjuntos que él claramente consideraba fractales.

El matemático italiano Giuseppe Peano descubrió a finales del siglo XIX la curva de Peano, que se construye tomando un cuadrado y dividiéndolo en nueve cuadrados más pequeños, luego conectando los cuadrados mediante curvas para formar una línea continua que llena todo el cuadrado original. Poco después, el matemático francés Henri Lebesgue introdujo la noción de medida, que permite medir el tamaño de conjuntos y curvas. En la década de 1920, el matemático polaco Waclaw Sierpinski construyó la llamada curva

de Sierpinski, que se construye dividiendo un triángulo en cuatro triángulos más pequeños y conectándolos con curvas para formar una curva continua que llena todo el triángulo original. Otro ejemplo famoso de curva que llena el espacio es la curva de Hilbert, descubierta por el matemático alemán David Hilbert en 1891.

En este trabajo vamos a estudiar estos tipos de conjuntos. Comenzaremos con un primer capítulo sobre la medida y dimensión de Hausdorff. Nos servirá para formar las bases para el estudio de conjuntos fractales, donde calcularemos la dimensión de algunos ejemplos. Posteriormente, en el capítulo 2 para facilitar el estudio de estos conjuntos introduciremos los sistemas de funciones iteradas. En el capítulo 3 generalizaremos estos sistemas para poder estudiar las curvas que llenan el espacio. Para ello, estudiaremos unas nuevas estructuras, los GIFS.

Conceptos previos

En este apartado se presentan definiciones y resultados básicos de teoría de la medida que se manejarán a lo largo del trabajo. No se incluyen demostraciones ya que la mayoría de los resultados fueron probados en el curso *Series de funciones e Integral de Lebesgue* o en *Integración de funciones de varias variables*, asignaturas del grado en Matemáticas. Sin embargo, quien desee encontrarlas puede hacerlo en [1].

Sea X un conjunto no vacío.

Definición 0.0.1. Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Decimos que \mathcal{M} es una σ -álgebra sobre X cuando se verifican las siguientes condiciones:

- $X \in \mathcal{M}$.
- Si $A \in \mathcal{M}$ entonces $A^c \in \mathcal{M}$.
- Si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Llamamos *espacio medible* al par (X, \mathcal{M}) , y *conjunto medible* a cada miembro de \mathcal{M} .

Definición 0.0.2. Sea (X, \mathcal{M}) un espacio medible. Una *medida* sobre (X, \mathcal{M}) es una aplicación $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y es numerablemente aditiva, es decir, si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ y los A_n son dos a dos disjuntos, entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. La terna (X, \mathcal{M}, μ) se denomina *espacio de medida*.

Un espacio de medida se dice que es *completo* si $[A \in \mathcal{M}, B \subset A \text{ y } \mu(A) = 0]$ implica que $B \in \mathcal{M}$. Se dice que μ es σ -*finita* si existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ tal que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Proposición 0.0.3. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Se verifica:

1. μ es monótona, es decir, si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2. Si $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subset B$ y $\mu(A) < +\infty$ entonces

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. μ es finitamente aditiva, es decir, si $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{M}$ son dos a dos disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

4. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

5. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ es creciente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

6. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ es decreciente y $\mu(A_1) < +\infty$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Definición 0.0.4. Llamamos *medida exterior* sobre un conjunto X a una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ nula sobre el conjunto vacío, monótona y numerablemente subaditiva, es decir:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ entonces $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Teorema 0.0.5 (Teorema de Carathéodory). *Sea μ^* una medida exterior sobre un conjunto X . Consideremos la familia*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*) = \{M \subset X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c) \ \forall A \subset X\}.$$

Se verifica:

- \mathcal{M} es una σ -álgebra sobre X .
- La aplicación $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida sobre \mathcal{M} .
- La medida μ es completa. Además, si $\mu^*(M) = 0$, entonces $M \in \mathcal{M}$.

La familia \mathcal{M} que acabamos de definir se denomina la σ -álgebra de los conjuntos medibles-Carathéodory relativos a la medida exterior μ^* .

Corolario 0.0.6. Sea μ^* una medida exterior sobre X . Entonces $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu)$ es un espacio de medida completo, donde $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)}$.

Sea d una distancia sobre X .

Definición 0.0.7. Se dice que una medida exterior μ^* sobre X es métrica respecto de d si cumple

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \text{si } d(A, B) > 0.$$

Teorema 0.0.8. Si μ^* es una medida exterior métrica sobre X , todo boreliano de X es μ^* -medible.

Dado un intervalo acotado I de extremos $a < b$, definimos $\text{long}(I) := b - a$. Si I es un intervalo no acotado, definimos $\text{long}(I) := \infty$. Consideramos I como el producto cartesiano de N intervalos, es decir, $I = I_1 \times \cdots \times I_N$, con $\text{vol}(I) := \prod_{k=1}^N \text{long}(I_k)$. De esta forma, definimos la *medida exterior de Lebesgue* de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mediante la expresión

$$\lambda_d^*(E) = \inf \left\{ \sum_k \text{vol}(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \subset \mathbb{R}^d \right\}$$

donde cada I_k es un producto cartesiano de d intervalos.

Nota 0.0.9. Si trabajamos con una dimensión fija omitiremos d , escribiendo únicamente $\lambda^*(E)$ para no sobrecargar la notación.

Definición 0.0.10. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se dice *medible Lebesgue* si es medible-Carathéodory respecto de la medida exterior de Lebesgue λ_d^* , es decir, si verifica $\lambda_d^*(A) = \lambda_d^*(A \cap E) + \lambda_d^*(A \cap E^c)$ para todo $A \subset X$.

Denotaremos por \mathcal{L} la σ -álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue de \mathbb{R}^d ($\mathcal{L} = \mathcal{M}(\lambda_d^*)$). Se denomina *medida de Lebesgue* a la aplicación $\lambda_d : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\lambda_d := \lambda_d^*|_{\mathcal{L}}$. Por el Corolario 0.0.6, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}, \lambda_d)$ es un espacio de medida completo.

A continuación vamos a presentar un resultado que nos será clave en el primer capítulo para relacionar la medida de Lebesgue con la de Hausdorff. Dado que no ha sido demostrado en ninguna asignatura del grado y es de gran importancia para nosotros, presentaremos una prueba completa del mismo.

Consideremos:

$$\mu_d^*(E) = \inf \left\{ \sum_k \lambda_d(B_k), E \subset \bigcup_j B_j \right\}$$

donde esta vez el ínfimo se toma en los recubrimientos numerables de E por bolas abiertas B_j . Es nuestro objetivo demostrar que $\lambda_d^*(E) = \mu_d^*(E)$ para todo subconjunto E de \mathbb{R}^d .

Para la demostración de dicho teorema será necesario una colección de resultados previos.

Lema 0.0.11. (*Vitali*) Sea $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ una colección finita de bolas abiertas de \mathbb{R}^d . Entonces existe una subcolección de bolas disjuntas B_{i_1}, \dots, B_{i_k} de la familia original, de tal modo que

$$\lambda_d\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k \lambda_d(B_{i_j}).$$

Demostración. Supongamos que B y B' son un par de bolas que se cortan, con el radio de B' no más grande que el radio de B . Entonces B' está contenida en una bola \tilde{B} concéntrica con B y con radio igual a 3 veces el de B . Esta es la idea clave que usaremos a continuación.

Comencemos con la demostración. Elijo B_{i_1} una bola de \mathcal{B} que tenga el mayor radio de la familia. Quitemos de \mathcal{B} esta bola y todas las bolas que la corten. Todas las bolas que la corten deben estar contenidas en una bola \tilde{B}_{i_1} que es concéntrica con B_{i_1} y con radio 3 veces el de B_{i_1} . Las bolas que quedan forman una familia \mathcal{B}' . Elijo B_{i_2} bola con mayor radio de la familia restante y quito de \mathcal{B}' todas las bolas que corten a B_{i_2} . Continúo con este proceso. A lo sumo después de N pasos terminará. Así que en general obtendré una colección finita de bolas disjuntas B_{i_1}, \dots, B_{i_k} de la familia original. Probemos que tal colección de bolas cumple el enunciado del lema. Sean \tilde{B}_{i_j} esas bolas concéntricas con B_{i_j} pero con 3 veces su radio. Cualquier bola $B \in \mathcal{B}$ debe cortar a una de las bolas elegidas B_{i_j} y debe tener radio menor que B_{i_j} , pues si no fuera así, hubiera tomado esa bola en lugar de B_{i_j} y por ello $B \subset \tilde{B}_{i_j}$. Entonces

$$\lambda_d\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^k \tilde{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{k=1}^k \lambda_d(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^k \lambda_d(B_{i_j})$$

y el lema está terminado. \square

Observación 0.0.12. Dado que las bolas son disjuntas se tiene

$$\sum_{j=1}^k \lambda_d(B_{i_j}) = \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}\right).$$

Definición 0.0.13. Una colección de bolas \mathcal{B} se dice que es un recubrimiento de Vitali de un conjunto E si para cada $x \in E$ y para cada $\eta > 0$ existe una bola $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $\lambda_d(B) < \eta$. Así que cada punto es cubierto por bolas de medida arbitrariamente pequeña.

Lema 0.0.14. (Vitali) Supongamos que E es un conjunto de medida finita y sea \mathcal{B} un recubrimiento de Vitali de E . Para cualquier $\delta > 0$ podemos encontrar una colección de bolas B_1, \dots, B_N en la familia \mathcal{B} de modo que son disjuntas dos a dos y tales que

$$\sum_{j=1}^N \lambda_d(B_j) \geq \lambda_d(E) - \delta.$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta < \lambda_d(E)$. Podemos conseguir una colección inicial de bolas disjuntas B_1, \dots, B_{N_1} en \mathcal{B} tales que

$$\sum_{j=1}^{N_1} \lambda_d(B_j) \geq \frac{\delta}{3^d}.$$

En efecto, podemos encontrar $E' \subset E$ compacto de modo que $\lambda_d(E') \geq \delta$. Por la compacidad de E' podemos recubrirlo por una cantidad finita de bolas de \mathcal{B} y por el lema anterior podemos conseguir una subcolección de bolas disjuntas B_1, \dots, B_{N_1} tales que

$$\sum_{j=1}^{N_1} \lambda_d(B_j) \geq \frac{1}{3^d} \lambda_d\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) \geq \frac{1}{3^d} \lambda_d(E') \geq \frac{\delta}{3^d}.$$

Ahora, con B_1, \dots, B_{N_1} como nuestra sucesión inicial de bolas, existen dos posibilidades:

- O bien $\sum_{j=1}^{N_1} \lambda_d(B_j) \geq \lambda_d(E) - \delta$ y ya hemos terminado con $N = N_1$, o bien
- $\sum_{j=1}^{N_1} \lambda_d(B_j) < \lambda_d(E) - \delta$.

En el segundo caso, ponemos $E_2 = E \setminus \bigcup_{j=1}^{N_1} \overline{B_j}$; tenemos que $\lambda_d(E_2) > \delta$ pues la medida de B_j coincide con la de $\overline{B_j}$. Repetimos de nuevo el argumento anterior. Elegimos $E'_2 \subset E_2$ compacto con $\lambda_d(E'_2) \geq \delta$ y observamos que las bolas en \mathcal{B} que son disjuntas de $\bigcup_{j=1}^{N_1} \overline{B_j}$ recubren E_2 y de hecho forman un recubrimiento de Vitali para E_2 y por ello para E'_2 . Así que existe una colección finita de bolas B_j con $N_1 < j \leq N_2$, de tal modo que

$\sum_{N_1 < j \leq N_2} \lambda_d(B_j) \geq \delta/3^d$. Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_d(B_j) \geq \frac{2\delta}{3^d}$$

y las bolas (B_j) con $1 \leq j \leq N_2$ son disjuntas.

De nuevo dos alternativas o bien $\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_d(B_j) \geq \lambda_d(E) - \delta$ o no. En el primer caso hemos terminado con $N = N_2$ y en el segundo repetimos proceso. Si llegamos a la etapa k -ésima con este proceso, habremos seleccionado una colección de bolas disjuntas cuya suma de medidas es mayor que $k\delta/3^d$. En cualquier caso, nuestro proceso culminará en el momento en que $k \geq 3^d(\lambda_d(E) - \delta)/\delta$ puesto que en ese caso se tendrá obligatoriamente que $\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_d(B_j) \geq \frac{k\delta}{3^d} \geq \lambda_d(E) - \delta$. Esto termina el lema. \square

Corolario 0.0.15. *En el lema anterior se pueden elegir las bolas de modo que*

$$\lambda_d(E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j) < 2\delta.$$

Demostración. Sea O un abierto con $E \subset O$ y $\lambda_d(O \setminus E) < \delta$. Como estamos tratando con un recubrimiento de Vitali, podemos restringir nuestra elección a bolas que estén contenidas dentro del abierto O . Si lo hacemos así, entonces

$$(E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j) \cup \bigcup_{j=1}^N B_j \subset O$$

donde la unión de la parte izquierda es una unión disjunta. Se verifica también

$$\lambda_d(\bigcup_{j=1}^N B_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_d(B_j) \geq \lambda_d(E) - \delta.$$

Por tanto,

$$\lambda_d(E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j) \leq \lambda_d(O) - \lambda_d(\bigcup_{j=1}^N B_j) \leq \lambda_d(O) - (\lambda_d(E) - \delta) = \lambda_d(O \setminus E) + \delta < 2\delta.$$

Esto termina la prueba del corolario. \square

Por fin tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema.

Teorema 0.0.16. $\lambda_d^*(E) = \mu_d^*(E)$ para todo subconjunto E de \mathbb{R}^d .

Demostración. Como toda bola abierta se puede poner como una unión numerable de cubos cerrados casi disjuntos, se tiene que

$$\lambda_d^*(E) \leq \mu_d^*(E)$$

pues todo recubrimiento numerable por bolas abiertas de E es también un recubrimiento numerable por cubos de E . Así que centrémonos en probar la desigualdad contraria $\mu_d^*(E) \leq \lambda_d^*(E)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a probar que existe una colección de bolas abiertas (B_j) de tal modo que $E \subset \bigcup_j B_j$ y

$$\sum_j \lambda_d(B_j) \leq \lambda_d^*(E) + \varepsilon$$

Con esto ya estaría demostrado que $\mu_d^*(E) \leq \lambda_d^*(E)$.

Supongamos primero que E es un conjunto medible y de medida finita. Sea $\varepsilon' > 0$ un número positivo arbitrario. Sea $E \subset O$ abierto de modo que $\lambda_d(O \setminus E) < \varepsilon'$ (por definición equivalente de medida). Por el corolario anterior podemos encontrar bolas abiertas B_1, \dots, B_N y disjuntas tales que

$$\lambda_d(E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j) \leq 2\varepsilon'$$

con $\bigcup_{j=1}^N B_j \subset O$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_d(B_j) &= \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^N B_j\right) \\ &\leq \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^N B_j \cap E\right) + \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^N B_j \cap E^c\right) \\ &\leq \lambda_d(E) + \lambda_d(O \cap E^c) \\ &= \lambda_d(E) + \lambda_d(O \setminus E) \\ &\leq \lambda_d(E) + \varepsilon' \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el conjunto $E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j$. Existe un recubrimiento de tal conjunto por cubos de tal modo que la suma de sus medidas sea $\leq 3\varepsilon'$ (pues su medida exterior es menor que $2\varepsilon'$). Reemplacemos cada uno de los

cubos Q_l por una bola B_l que lo contenga de modo que la medida de la bola sea $\lambda_d(B_l) \leq c_d|Q_l|$ para cierta constante c_d y todo l . De forma que

$$\sum_l \lambda_d(B_l) \leq c_d \sum_l |Q_l| \leq 3\epsilon' c_d$$

Al final tengo un recubrimiento numerable por bolas $\{B_j\}$ del medible E , pues $E \setminus \bigcup_{j=1}^N B_j \subset \bigcup_l B_l$. Denotamos todas las bolas por B_j de modo que $E \subset \bigcup_j B_j$. Tenemos entonces

$$\sum_j \lambda_d(B_j) \leq \lambda_d(E) + \epsilon' + 3\epsilon' c_d$$

Tomando el $\epsilon' > 0$ adecuadamente tengo el resultado.

Sea ahora E un subconjunto cualquiera. Sea $\epsilon > 0$. Existe $E \subset \bigcup Q_j$ de modo que

$$\sum_j |Q_j| \leq \lambda_d^*(E) + \epsilon$$

Para cada Q_j puedo encontrar una colección numerable de bolas de modo que $Q_j \subset \bigcup_k B_{j,k}$ y de tal modo que

$$\sum_k \lambda_d(B_{j,k}) \leq |Q_j| + \epsilon/2^j$$

Entonces considero $(B_{j,k})$ y listo. He obtenido un recubrimiento por abiertos de E de modo que

$$\sum_{j,k} \lambda_d(B_{j,k}) \leq \sum_j |Q_j| + \epsilon \leq \lambda_d^*(E) + \epsilon + \epsilon = \lambda_d^*(E) + 2\epsilon.$$

El teorema está demostrado. □

Capítulo 1

Medida y dimensión de Hausdorff

A lo largo de la historia se han desarrollado muchas maneras de estimar la “dimensión” de conjuntos “finos” o “altamente irregulares” para poder generalizar la idea de que puntos, curvas y superficies tienen dimensiones 0, 1 y 2 respectivamente. Entre todas ellas, la dimensión de Hausdorff es la más estudiada.

En esta sección vamos a definir de forma rigurosa la medida y dimensión de Hausdorff junto con algunas de sus propiedades, finalmente estudiaremos algunos ejemplos de conjuntos fractales. Para ello, nos basamos en algunas referencias como [1], [2], [3] y [4].

Antes, vamos a ver una idea intuitiva de cómo se puede calcular la dimensión de ciertos conjuntos. Sean n y m dos números enteros positivos, sea E un conjunto tal que $nE = E_1 \cup \dots \cup E_m$, donde E_j son copias casi disjuntas de E . Entonces diremos que el conjunto E tiene dimensión α si $m = n^\alpha$. Con nE nos referimos a que escalamos el conjunto E por n .

Por ejemplo, sea $n = 3$, $E = [0, 1]^2$, el cuadrado unidad. Entonces $3E = [0, 3]^2 = E_1 \cup \dots \cup E_9$, donde cada E_j es una copia trasladada de E . Por tanto, diremos que la dimensión de E es 2. Veamos que pasaría con un conjunto más complejo, el conjunto de Cantor (construcción en la sección 1.3.1). Si E es el conjunto de Cantor entonces $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$, pues si denotamos \mathcal{C} al conjunto de Cantor en $[0, 1]$, entonces $3\mathcal{C}$ consiste en 2 copias de \mathcal{C} , una en $[0, 1]$ y otra en $[2, 3]$, ya que al construir dicho conjunto quitamos el tercio central en la primera iteración. Aquí, $n = 3$, $m = 2$, despejando α de $m = n^\alpha$ llegamos al resultado.

Para otros conjuntos diferentes, si queremos calcular una aproximación de su dimensión lo que hacemos es cubrir el plano mediante un mallado de cuadrados y contamos el número de cuadrados (a) que cortan al conjunto;

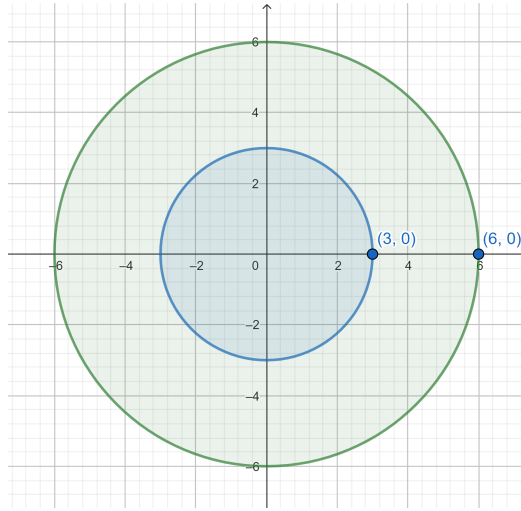


Figura 1.1: Mallado sobre los discos de radio 3 y 6.

luego escalamos el conjunto por n , de nuevo contamos cuantos cuadrados cortan este nuevo conjunto (b), y tenemos $\frac{b}{a} \approx n^\alpha$, de donde despejando α obtendremos una aproximación de la dimensión de este conjunto.

Ejemplo 1.0.1. Veamos que pasaría para un conjunto sencillo. Consideremos el disco con centro en el origen y radio 3. Escalamos este por un factor de $n = 2$, obteniendo el disco con centro origen y radio 6, como observamos en la Figura 1.1.

Ahora contamos el número de cuadrados que cortan el primer disco, y obtenemos $a = 208$, contando los que cortan al disco mayor obtenemos $b = 756$, por tanto, $\frac{756}{208} \approx 3,635 \approx 2^\alpha$, despejando tenemos

$$\alpha \approx \frac{\log 3,635}{\log 2} = 1,86.$$

Como sabemos la dimensión del disco es 2 y hemos obtenido α que se aproxima a este número. Si tomamos un mallado mas fino, es decir, con el diámetro de los cuadrados mas pequeño, obtendremos un α mucho más cercano a 2.

Esta idea se extiende a todo tipo de conjuntos, también a los que son menos regulares como el triángulo de Sierpinski. Como hemos mencionado en el ejemplo anterior, parece intuitivo pensar que mientras menor sea el tamaño de estos cuadrados, mas exacta será nuestra aproximación. Luego si llamamos δ al diámetro de estos cuadrados, cuando $\delta \rightarrow 0$ tendremos una muy buena aproximación de la dimensión. Esta idea es la que usaremos para definir la medida de Hausdorff.

Nota 1.0.2. El mallado no solo tiene porqué ser con cuadrados, también puede ser con cubos o con otro tipo de conjuntos.

La idea de medida esta ligada con la de dimensión. Denotaremos $m_\alpha(E)$ como la medida α -dimensional de E sobre conjuntos de dimensión α .

Como veremos, si α es mayor que la dimensión del conjunto E , entonces $m_\alpha(E) = 0$ y si α es menor entonces $m_\alpha(E) = \infty$. Por ejemplo, la medida de Lebesgue en \mathbb{R} de \mathcal{C} es 0, lo que nos dice que la dimensión de \mathcal{C} ha de ser menor que 1 (como ya hemos podido intuir). Veamos entonces como definir esta idea con rigor.

1.1. Construcción de la medida de Hausdorff

De forma parecida a como se define la medida de Lebesgue, definimos la **medida exterior α -dimensional de Hausdorff**. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$; escribimos:

$$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta, F_k \subset \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.1)$$

donde $\text{diam } S = \sup\{|x - y| : x, y \in S\}$ y los F_k conjuntos cualquiera. Sea $\delta > 0$ fijo. Observemos que la cantidad:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) = \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta \quad \forall k \right\} \quad (1.2)$$

aumenta a la vez que δ decrece, luego $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq m_\alpha^*(E)$ para todo $\delta > 0$, así que el limite

$$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$$

existe y podría ser finito o infinito.

Observación 1.1.1. En la definición es crucial el hecho de que los elementos del recubrimiento tengan diámetro menor que δ , pues la clave de la definición es hacer este δ muy cercano a 0, como vimos en el Ejemplo 1.0.1.

Observación 1.1.2. Con la medida de Lebesgue que conocemos, para el caso del conjunto de Cantor \mathcal{C} tenemos por construcción (véase en la sección 1.3.1) que en la etapa n , el conjunto \mathcal{C}_n esta formado por 2^n intervalos cerrados de amplitud $1/3^n$. Dado que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$, por monotonía, se sigue que $0 \leq m(\mathcal{C}) \leq (2/3)^n$ para todo n . Haciendo $n \rightarrow \infty$ resulta que $m(\mathcal{C}) = 0$. De ahí la importancia en la definición de elevar a α el diámetro de los elementos del recubrimiento. Esto nos permitirá medir \mathcal{C} , pues en este caso, con

un razonamiento análogo, tendríamos que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \leq 2^n(3^{-n})^\alpha$ para todo n y como veremos en la sección 1.3.1 la dimensión será $\alpha = \log 2 / \log 3$, por tanto, verifica $3^\alpha = 2$ y tenemos entonces $2^n(3^{-n})^\alpha = 1$. Luego $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1$. De este modo, ya no podemos razonar como antes para decir que su medida es 0; de hecho en la sección mencionada veremos también que $m_\alpha(\mathcal{C}) > 0$.

Que $m_\alpha^*(\emptyset) = 0$ se sigue directamente de la definición. Se verifican también las siguientes propiedades que nos garantizan que m_α^* es una medida exterior.

Proposición 1.1.3 (Monotonía). *Si $E_1 \subset E_2$, entonces $m_\alpha^*(E_1) \leq m_\alpha^*(E_2)$.*

Demostración. Es evidente, pues si una familia de conjuntos cubre a un conjunto E_2 también cubre a un subconjunto $E_1 \subset E_2$, y el ínfimo decrece a medida que un conjunto crece, luego tendremos que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1) \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_2)$. Tomando límite $\delta \rightarrow 0$ se llega al resultado. \square

Proposición 1.1.4 (Sub-aditividad). *Sea $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ entonces $m_\alpha^*(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) \leq \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j)$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$, y tomemos para cada j una colección de conjuntos $\{F_{j,k}\}_{k=1}^\infty$ que cubren a E_j con diámetro menor que δ tal que

$$\sum_{k=1}^\infty (\text{diam } F_{j,k})^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon/2^j$$

con $\epsilon > 0$. Esto podemos hacerlo por definición de ínfimo. Consideramos $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$; entonces el conjunto $\bigcup_{j,k} F_{j,k}$ cubre a E por conjuntos de diámetro menor que δ , es decir, $E \subset \bigcup_{j,k} F_{j,k}$. Tenemos

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty (\text{diam } F_{j,k})^\alpha \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \sum_{j=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^j} \leq \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j) + \epsilon$$

pues sabemos que $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1$. Dado que ϵ es cualquiera, tenemos la desigualdad $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum_j m_\alpha^*(E_j)$. Luego, hacemos tender δ a 0, de forma que

$$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j)$$

\square

Por tanto, concluimos que m_α^* es una medida exterior. Por el Corolario 0.0.6, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(m_\alpha^*), m_\alpha)$ es un espacio de medida completo. Llamamos a m_α la medida de Hausdorff de dimensión α .

Proposición 1.1.5. m_α^* es una medida exterior métrica para la distancia euclídea d sobre \mathbb{R}^d para todo $\alpha > 0$.

Demostración. Para ver que es métrica, tenemos que probar que si $d(E_1, E_2) > 0$, entonces $m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2)$. Como ya hemos visto que es una medida exterior, nos basta probar que $m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2) \leq m_\alpha^*(E_1 \cup E_2)$ pues la otra desigualdad ya la tenemos por sub-aditividad.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $d(E_1, E_2) > \epsilon$, sea un recubrimiento cualquiera de $E_1 \cup E_2$ con conjuntos $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ de diámetro menor que δ , con $\delta < \epsilon$. Sean $F'_j = E_1 \cap F_j$ y $F''_j = E_2 \cap F_j$. Entonces $\{F'_j\}$ y $\{F''_j\}$ son recubrimientos disjuntos de E_1 y E_2 respectivamente, ya que $d(E_1, E_2) > \epsilon$ y $\delta < \epsilon$. Por tanto

$$\sum_j (\text{diam } F'_j)^\alpha + \sum_i (\text{diam } F''_i)^\alpha \leq \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha.$$

Tomando ínfimo tenemos

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1) + \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_2) \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1 \cup E_2)$$

haciendo tender δ a 0 llegamos a $m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2) \leq m_\alpha^*(E_1 \cup E_2)$ que es lo que estábamos buscando. \square

Nos será conveniente restringirnos a los Borelianos ya que por el Teorema 0.0.8 los podremos medir. Consideramos entonces $m_\alpha(E)$, donde E es un Boreliano.

Veamos ahora algunas propiedades que satisface $m_\alpha(E)$.

Lema 1.1.6. Si $\{E_j\}$ es una familia numerable de conjuntos de Borel disjuntos y $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, entonces

$$m_\alpha(E) = \sum_{j=1}^\infty m_\alpha(E_j)$$

Demostración. Dado que $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(m_\alpha^*), m_\alpha)$ es un espacio de medida tenemos este resultado. \square

Proposición 1.1.7. La medida de Hausdorff es invariante bajo traslaciones

$$m_\alpha(E + h) = m_\alpha(E) \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^d$$

y bajo rotaciones

$$m_\alpha(r(E)) = m_\alpha(E)$$

donde r es una rotación en \mathbb{R}^d .

Es más, se tiene también que

$$m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Demostración. Si tenemos un recubrimiento $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ de E , $\{F_j + h\}_{j=1}^{\infty}$ lo será de $E + h$ y $\{r(F_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de $r(E)$, y dado que el diámetro de un conjunto es invariante bajo traslaciones y rotaciones, se sigue la primera parte de la proposición. Para la última parte solo tenemos que tener en cuenta que $\text{diam}(\lambda S) = \lambda \text{diam}(S)$ para todo $\lambda > 0$. \square

Proposición 1.1.8. *La cantidad $m_0(E)$ cuenta el número de puntos en E .*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Tenemos que para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}_0^{\delta}(\{x\}) = 1$ de donde obtenemos que $m_0(\{x\}) = 1$. Como m_0 es una medida, por la aditividad numerable se deduce que cuenta el número de puntos de E . \square

Proposición 1.1.9. *Se satisfacen las siguientes relaciones entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue*

1. *Se tiene $m_1^*(E) = \lambda_1^*(E)$ para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}$.*
2. *Si E es un subconjunto de Borel de \mathbb{R}^d y $\lambda(E)$ es su medida de Lebesgue, entonces $m_d(E) \approx \lambda(E)$ en el sentido de que*

$$c_d m_d(E) \leq \lambda_d(E) \leq 2^d c_d m_d(E)$$

La constante c_d es $\lambda_d(B)/(\text{diam} B)^d$ para la bola unidad B , es decir, $c_d = v_d/2$ donde v_d denota el volumen de la bola unidad en \mathbb{R}^d .

Demostración. 1. Sabemos que $\text{vol}(I_k) = \text{long}(I_k) = \text{diam}(I_k)$ si I_k es un intervalo. Tenemos

$$\lambda_1^*(E) = \inf \left\{ \sum_k \text{diam}(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \subset \mathbb{R} \right\}$$

donde los I_k son intervalos en \mathbb{R} . También

$$\mathcal{H}_1^{\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_k \text{diam} F_k : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam} F_k \leq \delta \ \forall k \right\}$$

donde los F_k son cualquiera. Dado que

$$\left\{ \sum_k \text{diam}(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \subset \mathbb{R} \right\} \subset \left\{ \sum_k \text{diam} F_k : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam} F_k \leq \delta \ \forall k \right\}$$

como el ínfimo decrece a medida que el conjunto crece, se tiene entonces que $\lambda_1^*(E) \geq \mathcal{H}_1^{\delta}(E)$. Haciendo tender δ a 0 tenemos

$$\lambda_1^*(E) \geq m_1^*(E).$$

Dado F_k , existe I_k del mismo diámetro que F_k tal que $F_k \subset I_k$. De forma que

$$\left\{ \sum_k \text{diam } F_k : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta \ \forall k \right\} \subset \left\{ \sum_k \text{diam } (I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \subset \mathbb{R} \right\}$$

Como el ínfimo decrece a medida que el conjunto crece, se tiene entonces que $\mathcal{H}_1^\delta(E) \geq \lambda_1^*(E)$. Haciendo tender δ a 0 tenemos

$$m_1^*(E) \geq \lambda_1^*(E).$$

Por tanto, podemos concluir que $m_1^*(E) = \lambda_1^*(E)$

2. Como vimos en el Teorema 0.0.16, la medida de Lebesgue de E se puede escribir también como

$$\lambda_d(E) = \inf \left\{ \sum_j \lambda_d(B_j) : B_j \text{ es un recubrimiento de } E \text{ por bolas} \right\}$$

así que por definición de ínfimo, para cada $\epsilon, \delta > 0$, existe un recubrimiento por bolas $\{B_j\}$ de E tal que $\sum_j \lambda_d(B_j) \leq \lambda_d(E) + \epsilon$. Dado que $c_d = \lambda_d(B)/(\text{diam } B)^d$ tenemos:

$$\mathcal{H}_d^\delta(E) \leq \sum_j (\text{diam } B_j)^d = \frac{1}{c_d} \sum_j \lambda_d(B_j) \leq \frac{1}{c_d} (\lambda_d(E) + \epsilon).$$

Hacemos tender δ y ϵ a cero, obteniendo entonces $m_d(E) \leq \frac{1}{c_d} \lambda_d(E)$. Por tanto, $c_d m_d(E) \leq \lambda_d(E)$.

Para la desigualdad contraria, consideramos para cada $\epsilon > 0$ un δ -recubrimiento $\{F_j\}$ de E tal que $\sum_j (\text{diam } F_j)^d \leq m_d(E) + \epsilon$, esto es posible gracias a que m_d se define mediante un ínfimo. Podemos encontrar una colección de bolas $\{B_j\}$ tales que $F_j \subset B_j$ tomando unas bolas con un diámetro mayor al de F_j . En concreto, $\text{diam } B_j = 2 \text{diam } F_j$. Entonces

$$\lambda_d(E) \leq \sum_j \lambda_d(B_j) = \sum_j c_d (\text{diam } B_j)^d = 2^d c_d \sum_j (\text{diam } F_j)^d \leq 2^d c_d (m_d(E) + \epsilon).$$

Hacemos tender ϵ a cero y obtenemos $\lambda_d(E) \leq 2^d c_d m_d(E)$ como estábamos buscando. \square

Proposición 1.1.10. *Si $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta > \alpha$, entonces $m_\beta^*(E) = 0$. También, si $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha$, entonces $m_\beta^*(E) = \infty$.*

Demostración. Sea F tal que $\text{diam}(F) < \delta$ y $\beta > \alpha$, entonces se verifica

$$(\text{diam } F)^\beta = (\text{diam } F)^{\beta-\alpha}(\text{diam } F)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha}(\text{diam } F)^\alpha.$$

Por tanto, tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\beta^\delta(E) &= \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } F_k)^\beta : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta \ \forall k \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_k \delta^{\beta-\alpha} (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta \ \forall k \right\} \\ &= \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E). \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{H}_\beta^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} m_\alpha^*(E).$$

Como $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta - \alpha > 0$, tomando límite a ambos lados cuando δ tiende a cero, obtenemos $m_\beta^*(E) = 0$.

El contrarrecíproco nos da que $m_\beta^*(E) = \infty$ pues $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha$. Veámoslo, siguiendo el mismo razonamiento anterior y teniendo en cuenta que ahora $\beta < \alpha$. Tenemos entonces

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \delta^{\alpha-\beta} \mathcal{H}_\beta^\delta(E) \leq \delta^{\alpha-\beta} m_\beta^*(E)$$

que equivale a

$$\delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq m_\beta^*(E).$$

Como ahora $\beta - \alpha < 0$ haciendo tender δ a 0 a ambos lados y teniendo en cuenta que $m_\alpha^*(E) > 0$, obtenemos $m_\beta^*(E) = \infty$ pues $\delta^{\beta-\alpha} \rightarrow \infty$ cuando $\delta \rightarrow 0$. \square

1.2. Dimensión

Ya podemos definir con rigor la idea que teníamos de dimensión. Consideremos un conjunto de Borel E de \mathbb{R}^d ; por lo visto anteriormente en la Proposición 1.1.10, sabemos que existe un único α tal que

$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$

Es decir, α viene dado por

$$\alpha = \sup\{\beta : m_\beta(E) = \infty\} = \inf\{\beta : m_\beta(E) = 0\}$$

En ese caso diremos que E tiene **dimensión α de Hausdorff**. Si $0 < m_\alpha(E) < \infty$ diremos entonces que E tiene dimensión α *estricta* de Hausdorff.

En una primera aproximación usaremos el término *fractal* para conjuntos que tienen dimensión no entera.

No solo hay una forma de definir la dimensión de un conjunto, hemos visto una de ellas, pero hay más y se usa la mas conveniente según las propiedades y características que interesen estudiar.

1.3. Ejemplos

En general, calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto es bastante difícil, pero en algunos casos podemos acotar inferior y superiormente su medida de Hausdorff, para así luego determinar la dimensión del conjunto. En esta sección vamos a ver algunos ejemplos calculando su dimensión para así afianzarnos con la definición. Parte de estos ejemplos han sido desarrollados en [1].

1.3.1. El conjunto de Cantor

Estudiaremos este ejemplo en profundidad, puesto que en otros casos se usan técnicas parecidas.

Comencemos recordando la *construcción* de este conjunto, consideramos el intervalo $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ y eliminamos de él el tercio central abierto $(1/3, 2/3)$, resulta el conjunto $\mathcal{C}_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \subset \mathcal{C}_0$. Ahora eliminamos de este los dos tercios centrales abiertos de los intervalos que lo componen, obteniendo $\mathcal{C}_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \subset \mathcal{C}_1$. Continuamos de forma inductiva, observemos que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n \forall n$. Podemos verlo dibujado en la Figura 1.2. Definimos $\mathcal{C} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$. A \mathcal{C} le llamamos el conjunto de Cantor.

Necesitaremos conocer la *función de Cantor-Lebesgue* F , también conocida como escalera de Cantor. F es una función continua, $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, creciente, $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$, pero $F'(x) = 0$ en casi todo punto.

Veamos como se construye, sabemos que $\mathcal{C}_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, sea F_1 la función continua creciente en $[0, 1]$ que satisface $F_1(0) = 0$, $F_1(x) = 1/2$ si $1/3 \leq x \leq 2/3$, $F_1(1) = 1$ y F_1 es lineal en \mathcal{C}_1 . Análogamente, construimos F_2 sabiendo que F_2 es lineal en \mathcal{C}_2 y verifica

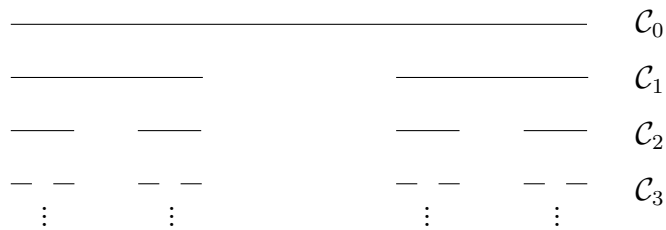


Figura 1.2: Construcción del conjunto de Cantor

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 1/9 \leq x \leq 2/9 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3/4 & \text{si } 7/9 \leq x \leq 8/9 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Repetimos este proceso de forma inductiva y obtenemos una sucesión de funciones crecientes continuas $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n-1} \forall x \in [0, 1]$. Así que F_n converge uniformemente a una función continua F llamada la función de Cantor-Lebesgue. Ver la Figura 1.3 para los primeros pasos de su construcción.

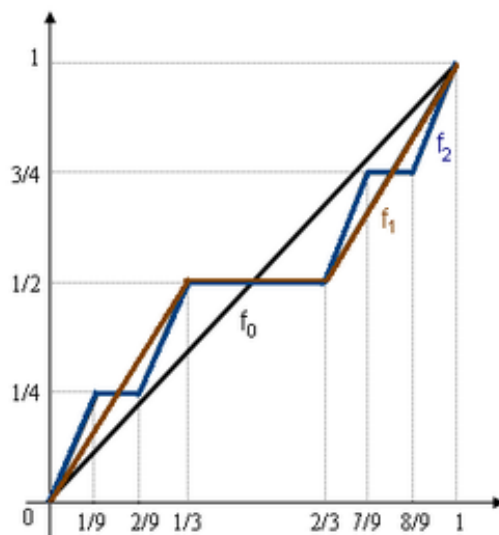


Figura 1.3: Construcción de la función de Cantor-Lebesgue

Observación 1.3.1. F es constante fuera del conjunto de Cantor (en su complementario). Dado que $m(\mathcal{C}) = 0$, la función es constante en casi todo punto, luego $F'(x) = 0$ en casi todo punto. Es una función sobreyectiva de \mathcal{C} en $[0, 1]$.

Este hecho tiene una sorprendente consecuencia, dado que $F'(x) = 0$ en casi todo punto, tenemos entonces

$$0 = \int_0^1 F'(x)dx$$

Pero aplicando el teorema fundamental del calculo, esta integral debería ser $F(1) - F(0) = 1$ sin embargo $0 \neq 1$, luego de manera natural nos surge la pregunta sobre que debe cumplir una función para que se le pueda aplicar dicho teorema, ver sección 3.2 del capítulo 3 de [1]. Este es otro de los motivos por los que esta función ha tenido bastante importancia.

Observación 1.3.2. La función $F_n(x)$ se puede expresar como

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(x)dx$$

donde

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \mathcal{X}_{\mathcal{C}_n}(x),$$

con $\mathcal{X}_{\mathcal{C}_n}$ la función característica de \mathcal{C}_n .

Antes de calcular la dimensión de \mathcal{C} , necesitaremos la siguiente definición y algunos resultados.

Definición 1.3.3. Una función f definida sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ satisface la *condición de Lipschitz con exponente γ* si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma \quad \forall x, y \in E.$$

Proposición 1.3.4. Sea una función f definida en un conjunto compacto E que satisface la *condición de Lipschitz con exponente γ* . Entonces

- (i) $m_\beta(f(E)) \leq M^\beta m_\alpha(E)$ si $\beta = \alpha/\gamma$.
- (ii) $\dim f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim(E)$.

Demostración. (i) Sea $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ un recubrimiento de E con diámetro menor que δ , entonces $\{f(E \cap F_k)\}_{k=1}^\infty$ cubre a $f(E)$. Tenemos que si $x, y \in E \cap F_k$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma$, por tanto, $\text{diam } f(E \cap F_k) \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma$. De ahí

$$\sum_k (\text{diam } f(E \cap F_k))^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha.$$

Como teníamos un recubrimiento cualquiera, tomando ínfimo deducimos que

$$\mathcal{H}_{\alpha/\gamma}^\delta(f(E)) \leq M^{\alpha/\gamma} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$$

haciendo tender δ a cero obtenemos $m_\beta(f(E)) \leq M^{\alpha/\gamma} m_\alpha(E)$ que es lo que queríamos probar.

(ii) Sea $\mu := \dim(E)$. Por definición, para todo $\sigma > \mu$, $m_\sigma(E) = 0$. Esto implica por el apartado (i) que $m_{\sigma/\gamma}(f(E)) = 0$, es decir, $\dim(f(E)) \leq \sigma/\gamma$ para todo $\sigma > \mu$, por tanto, $\dim f(E) \leq \mu/\gamma = (\dim E)/\gamma$. \square

Proposición 1.3.5. *La función de Cantor-Lebesgue F en \mathcal{C} satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma = \log 2 / \log 3$.*

Demostración. Sean $x, y \in [0, 1]$, se tiene entonces

$$|F_n(x) - F_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| \quad \forall x, y.$$

En efecto, por lo visto en la observación 1.3.2, dados $0 \leq x \leq y \leq 1$ tendremos que

$$|F_n(y) - F_n(x)| = \left| \int_x^y f_n(t) dt \right| \leq \int_x^y |f_n(t)| dt \leq \int_x^y (3/2)^n dt = (3/2)^n |y - x|$$

y hemos obtenido la desigualdad que queríamos. Se satisface también $|F(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}$. Combinando ambas aproximaciones y usando la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F_n(x) - F_n(y)| + |F(x) - F_n(x)| + |F(y) - F_n(y)| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^n} (3^n |x - y| + 2). \end{aligned}$$

Fijados x e y queremos minimizar el término de la derecha tomando un n de forma que los dos términos tengan la misma magnitud. Para ello, tomamos n tal que $3^n |x - y|$ esté entre 1 y 3. Si ahora tomamos γ tal que $3^\gamma = 2$. Como $1 \leq 3^n |x - y|$, tenemos entonces que $3^{-n} \leq |x - y|$, Por tanto:

$$|F(x) - F(y)| \leq M 2^{-n} = M (3^\gamma)^{-n} = M (3^{-n})^\gamma \leq M |x - y|^\gamma$$

donde M es una cierta constante, por ejemplo $M = 5$. De ahí deducimos que $\gamma = \log 2 / \log 3$ es el exponente para tal condición. \square

Teorema 1.3.6. *El conjunto de Cantor \mathcal{C} tiene dimensión de Hausdorff estricta $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1$ con $\alpha = \log 2/\log 3$. De la propia construcción de \mathcal{C} se sigue cada \mathcal{C}_k es una unión finita de 2^k intervalos de longitud 3^{-k} . Sea $\delta > 0$, tomemos K tal que $3^{-K} < \delta$, luego tenemos un recubrimiento del conjunto con diámetro menor que δ , por tanto

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \leq 2^K(3^{-K})^\alpha$$

dado que α satisface $3^\alpha = 2$, se tiene $2^K(3^{-K})^\alpha = 1$, haciendo tender δ a 0 se obtiene el resultado, $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1$.

Probemos ahora que $0 < m_\alpha(\mathcal{C})$, lo que llevará a probar que $\dim(\mathcal{C}) = 1$. Esto es más complejo, para ello se necesita la función de Cantor-Lebesgue F y los resultados previos. Sea $\alpha = \gamma = \log 2/\log 3$. Sabiendo que $F(\mathcal{C}) = [0, 1]$, $\beta = \alpha/\gamma = 1$, se tiene por la Proposición 1.3.4 que

$$m_\beta(F(\mathcal{C})) = m_1([0, 1]) \leq M^\beta m_\alpha(\mathcal{C}).$$

Despejando de la desigualdad, obtenemos

$$m_\alpha(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{M^\beta} > 0.$$

Por tanto, tras probar ambas desigualdades, se llega a $0 < m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1 < \infty$ con $\alpha = \log 2/\log 3$. Ya se puede afirmar entonces que $\dim \mathcal{C} = \frac{\log 2}{\log 3}$. \square

Nuestro objetivo ahora es ver que $m_\alpha(\mathcal{C}) = 1$ con α la dimensión de \mathcal{C} . Para ello, necesitaremos antes el siguiente lema.

Lema 1.3.7. *(Lema del número de Lebesgue) Sea X compacto y $\{G_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento finito por abiertos de X . Entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que para todo $x \in X$ existe un índice $i(x)$ de modo que $B(x, \epsilon) \subset G_{i(x)}$*

Demostración. Supongamos que no existe tal $\epsilon > 0$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X de modo que $B(x_n, 1/n)$ no está contenido en ninguno de los abiertos del recubrimiento. Como X es compacto, existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente a un $x \in X$. Este x debe pertenecer a uno de los abiertos del recubrimiento, digamos G_x . Dado que G_x es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset G_x$. Como $x_{n_k} \rightarrow x$ cuando $k \rightarrow \infty$, existirá un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $x_{n_k} \in B(x, \delta/2) \subset G_x$. Pero entonces, para k lo suficientemente grande, de forma que $1/n_k < \delta/2$, vamos a tener que

$B(x_{n_k}, 1/n_k) \subset B(x, \delta) \subset G_x$ lo que es una contradicción. En efecto, si $y \in B(x_{n_k}, 1/n_k)$ entonces

$$|y - x| \leq |y - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

□

Teorema 1.3.8. *Para $\alpha = \log 2 / \log 3$ se tiene que $m_\alpha(\mathcal{C}) = 1$.*

Demostración. Ya hemos visto que $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1$. Veamos entonces la desigualdad contraria.

Sea $\{I_j\}$ un recubrimiento finito por intervalos abiertos de \mathcal{C} , es decir, $\mathcal{C} \subset \bigcup_j I_j$. Aplicando el Lema del número de Lebesgue (1.3.7), sabemos que existe $\epsilon > 0$ de modo que para cada $x \in \mathcal{C}$, se tiene $B(x, \epsilon) \subset I_j$ para algún j . Sabemos que \mathcal{C}_k esta formado por al menos 2^k intervalos de amplitud 3^{-k} y $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$. Tomamos k de forma que $3^{-k} < \epsilon < 3^{-k+1}$, llamamos $\{I'_l\}$ a cada uno de estos intervalos. Luego si $x \in \mathcal{C}$ entonces $x \in I'_l \subset B(x, \epsilon) \subset I_j$ para algún l y j . Por tanto, $\bigcup_l I'_l \subset \bigcup_j I_j$. Por la elección de k tenemos $|I_j| \geq |I'_l| = 3^{-k}$ para todo j y l , luego

$$\sum_j |I_j|^\alpha \geq \sum_l |I'_l|^\alpha = \sum_{l=1}^{2^k} (3^{-k})^\alpha = 2^k (3^{-k})^\alpha = 1$$

pues $\alpha = \log 2 / \log 3$.

Veamos ahora que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \geq 1$. Sea $\{I_r\}$ tal que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{r=1}^\infty I_r$ y $\text{diam } I_r < \delta$. Dado que \mathcal{C} es compacto, de todo recubrimiento por abiertos de \mathcal{C} puedo obtener un subrecubrimiento finito. Por lo que acabamos de hacer anteriormente, podemos concluir entonces que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \geq 1$. Haciendo tender δ a 0 obtenemos que $m_\alpha(\mathcal{C}) \geq 1$, que es lo que queríamos probar. □

Nota 1.3.9. Sea $0 < \lambda < 1/2$. Podemos construir análogamente $\mathcal{C}(\lambda)$, el conjunto de Cantor asociado al parámetro λ . Partimos del intervalo $[0, 1]$, tendremos en la etapa 1 los intervalos $I_{1,1} = [0, \lambda]$ y $I_{1,2} = [1-\lambda, 1]$, continuamos este proceso como hicimos anteriormente. Es decir, si tenemos los intervalos de la etapa $k-1$, definimos los intervalos $I_{k,1}, \dots, I_{k,2^k}$ eliminando la mitad de cada intervalo $I_{k-1,j}$, un intervalo de longitud $(1-2\lambda)d(I_{k-1,j}) = (1-2\lambda)\lambda^{k-1}$. De forma que la etapa k estará formada por 2^k intervalos de longitud λ^k . Definimos entonces

$$\mathcal{C}(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}.$$

Por tanto, el conjunto de Cantor que hemos tratado en esta sección será $\mathcal{C} = \mathcal{C}(1/3)$. No obstante, siempre nos referiremos al conjunto de Cantor, como el de parámetro $1/3$, en caso contrario lo indicaremos.

Para calcular la dimensión de $\mathcal{C}(\lambda)$, en lugar de tener que hacer una prueba del estilo de la que acabamos de realizar, lo haremos de forma mucho mas fácil al final de capítulo 2.

1.3.2. El Triángulo de Sierpinski

Este es un ejemplo parecido al anterior pero en el plano. Comencemos viendo la construcción de este conjunto, partiendo de un triángulo cerrado equilátero sólido S_0 con lados de longitud 1. Ahora se divide este triángulo en 4, quitando el triángulo central como se puede observar en la Figura 1.4 (tomada de [5]), generando así 3 triángulos cerrados cuya unión es S_1 . Repitiendo este proceso de forma inductiva generamos una sucesión de conjuntos donde cada S_k esta formado por la unión de 3^k triángulos equiláteros cerrados, con lado de longitud 2^{-k} , y además satisface $S_{k+1} \subset S_k$ para todo $k \geq 0$.

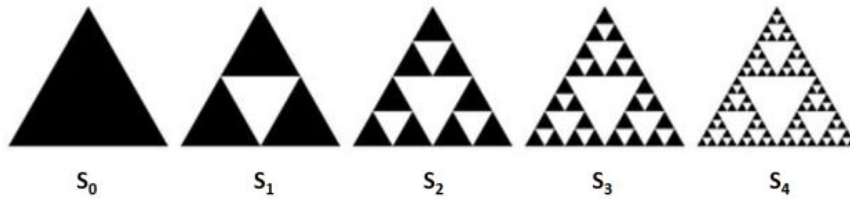


Figura 1.4: Construcción del triángulo de Sierpinski

El *triángulo de Sierpinski* es el conjunto compacto definido así:

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k.$$

La idea que se emplea en la demostración del siguiente teorema es muy importante, dado que en el siguiente capítulo será crucial para la demostración de un teorema mucho mas general. Por ello, se realizará la prueba con detalle.

Teorema 1.3.10. *El triángulo de Sierpinski \mathcal{S} tiene dimensión estricta de Hausdorff $\alpha = \log 3 / \log 2$.*

Demostración. Probaremos que $m_\alpha(\mathcal{S}) \leq 1$ y posteriormente $m_\alpha(\mathcal{S}) > 0$ con $\alpha = \log 3 / \log 2$ lo que permite deducir que α es su dimensión.

La desigualdad $m_\alpha(\mathcal{S}) \leq 1$ se sigue de la definición. Pues sea $\delta > 0$, tomemos K tal que $2^{-K} < \delta$. El conjunto S_K cubre \mathcal{S} y consiste en 3^K triángulos de diámetro $2^{-K} < \delta$, teniendo en cuenta que $2^\alpha = 3$, se tiene

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{S}) \leq 3^K (2^{-K})^\alpha = 1$$

haciendo $\delta \rightarrow 0$ se llega al resultado, $m_\alpha(\mathcal{S}) \leq 1$.

Probar $m_\alpha(\mathcal{S}) > 0$ es mas complicado (esta es la parte verdaderamente interesante de la demostración). Para ello, definimos *el vértice* de un triángulo como su vértice inferior izquierdo; entonces, hay 3^k vértices en la etapa k (uno por cada triángulo), y observemos que todos estos vértices están en \mathcal{S} .

Fijado $\delta > 0$, sea $\{F_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j$, con $\text{diam } F_j < \delta/2$. Queremos probar que

$$\sum_j (\text{diam } F_j)^\alpha \geq c > 0$$

para cierta constante $c > 0$, ya que en tal caso tendríamos $\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{S}) > 0$, y como $m_\alpha(\mathcal{S})$ crece a la vez que δ decrece, deduciríamos que $m_\alpha(\mathcal{S}) > 0$.

Observemos que cada F_j esta contenido en una bola B_j de diámetro δ pues el diámetro de F_j es $\delta/2$. Tenemos entonces que $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ es un recubrimiento por abiertos de \mathcal{S} ya que $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j$. Como $\text{diam } B_j = 2 \text{diam } F_j$ tenemos:

$$\left\{ \sum_j (\text{diam } F_j)^\alpha : \mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j \right\} \subset \frac{1}{2^\alpha} \left\{ \sum_j (\text{diam } B_j)^\alpha : \mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j \right\}.$$

Como el ínfimo decrece a medida que el conjunto crece, tendremos entonces

$$\inf_j \left\{ \sum_j (\text{diam } F_j)^\alpha : \mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j \right\} \geq \frac{1}{2^\alpha} \inf_j \left\{ \sum_j (\text{diam } B_j)^\alpha : \mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j \right\}.$$

Por tanto, si probamos que es positivo este último término de la desigualdad se llega al resultado deseado. Pues se tendría entonces que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{S}) = \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha : \mathcal{S} \subset \bigcup_{k=1}^\infty F_k, \text{diam } F_k \leq \delta \ \forall k \right\} > 0$.

Para probar lo que nos queda, tenemos en cuenta que \mathcal{S} es compacto, por tanto, de todo recubrimiento por abiertos de \mathcal{S} se puede extraer un subrecubrimiento finito $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ tal que $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$.

Luego hay que probar que si $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$, donde $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ es una colección de bolas con diámetro menor que δ , entonces

$$\sum_{j=1}^N (\text{diam } B_j)^\alpha \geq c > 0.$$

Para ello, sea k tal que:

$$2^{-k} \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam } B_j < 2^{-k+1}.$$

Necesitaremos bajo estas consideraciones el siguiente lema.

Lema 1.3.11. *Supongamos una bola $B \subset \mathcal{B}$ que satisface*

$$2^{-l} \leq \text{diam } B < 2^{-l+1} \quad \text{para algún } l \leq k.$$

Entonces B contiene como mucho $c3^{k-l}$ vértices de la etapa k , con c una constante positiva.

Demostración. Sea B^* la bola con mismo centro que B pero con tres veces su diámetro y sea Δ_k el triángulo de entre todos los de la etapa k cuyo vértice v esta en B . Si Δ'_l denota el triángulo de la etapa l que contiene a Δ_k (recordemos que $l \leq k$), como $\text{diam } B \geq 2^{-l}$, entonces:

$$v \in \Delta_k \subset \Delta'_l \subset B^*$$

como podemos observar en la Figura 1.5 (tomada de [5]). Recordemos que Δ'_l es uno de los 3^l triángulos de la etapa l , igual para Δ_k .

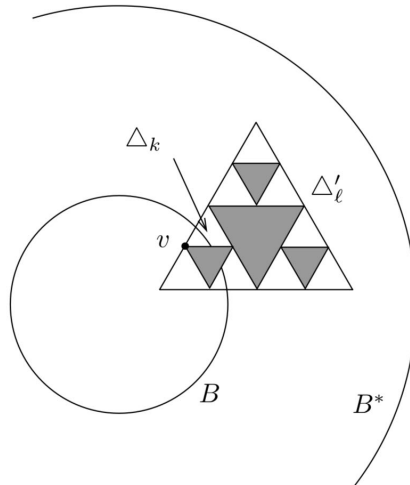


Figura 1.5: Elección de bolas

Sea c el número máximo de triángulos distintos Δ'_l de la etapa l contenidos en B^* . Dado que cada $\Delta_k \subset \Delta'_l$, observamos que cada triángulo Δ'_l contiene $3^k/3^l = 3^{k-l}$ triángulos de la etapa k . Por ejemplo, en la Figura 1.5, Δ'_l contiene $9 = 3^2$ triángulos de la etapa k , lo que nos dice que en el dibujo

$k - l = 2$. Puesto que hay como máximo c triángulos de la etapa l contenidos en B^* deducimos que B contiene como máximo $c3^{k-l}$ vértices de triángulos de la etapa k . El lema queda probado. \square

Volviendo a la demostración del teorema, si consideramos N_l el número de bolas de \mathcal{B} que satisfacen $2^{-l} \leq \text{diam } B_j < 2^{-l+1}$, podemos afirmar que:

$$\sum_{j=1}^N (\text{diam } B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l 2^{-l\alpha}.$$

Gracias al lema, sabemos que el número total de vértices de triángulos de la etapa k que pueden ser cubiertos por una colección \mathcal{B} no pueden ser más de $c \sum_l N_l 3^{k-l}$. Dado que todos los 3^k vértices del triángulo de la etapa k pertenecen a \mathcal{S} , y todos los vértices de la etapa k han de ser cubiertos, debemos tener $c \sum_l N_l 3^{k-l} \geq 3^k$. Entonces

$$\sum_l N_l 3^{-l} \geq c,$$

donde c representa una cierta constante positiva. Por la definición de α , tenemos que $2^{-l\alpha} = 3^{-l}$ y entonces finalmente concluimos que:

$$\sum_{j=1}^N (\text{diam } B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l 2^{-l\alpha} = \sum_l N_l 3^{-l} \geq c > 0$$

como queríamos demostrar. \square

1.3.3. La curva de von Koch

Comencemos con la *construcción* de dicha curva. Sea el intervalo $K_0 = [0, 1]$ en el eje x en el plano xy ; consideramos K_1 , como podemos ver en la Figura 1.6, compuesto por 4 segmentos de longitud $1/3$, en la siguiente iteración dividimos cada uno de estos segmentos en otros 4 de longitud $1/9$, de forma que K_2 tiene $16 = 4^2$ segmentos de longitud $1/9 = 3^{-2}$. Repetimos este proceso sucesivamente, de forma que en la etapa j , K_j esta formado por 4^j segmentos de longitud 3^{-j} . La curva de von Koch \mathcal{K} queda definida como

$$\mathcal{K} = \lim_{j \rightarrow \infty} K_j$$

Antes de continuar, recordemos la noción de dimensión que dimos al principio del capítulo, dado que se verifica que $3\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_4$, tenemos que $4 = 3^\alpha$ de donde despejando α se obtiene que $\alpha = \log 4 / \log 3$, luego aparentemente esta será su dimensión.

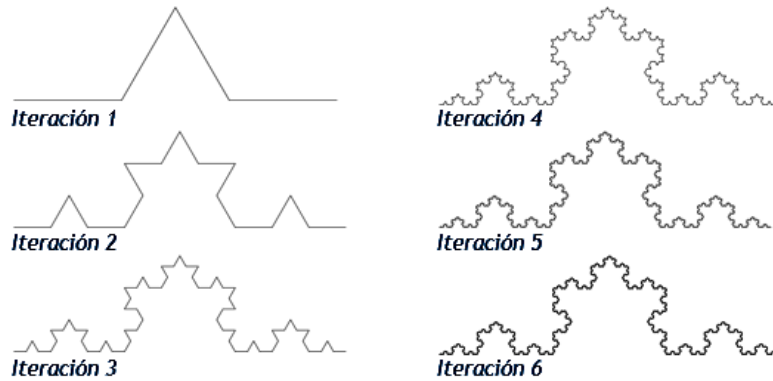


Figura 1.6: Primeras etapas de la construcción de la curva de von Koch

Notemos por $K_j(t)$ con $(0 \leq t \leq 1)$ la parametrización de K_j para todo j . Entonces podemos escribir la siguiente formula:

$$K_J(t) = K_1(t) + \sum_{j=1}^{J-1} (K_{j+1}(t) - K_j(t)).$$

Dado que $|K_{j+1}(t) - K_j(t)| \leq 3^{-j} \quad \forall 0 \leq t \leq 1$ y $j \geq 0$, se tiene que la serie

$$K_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (K_{j+1}(t) - K_j(t))$$

converge absolutamente y uniformemente a una función continua $\mathcal{K}(t)$ que es la parametrización de \mathcal{K} . Esta función es parecida a la de Cantor-Lebesgue, en el sentido que veremos a continuación.

Queremos ver ahora que la función $\mathcal{K}(t)$ satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma = \log 3 / \log 4$, pero para ello, se necesita antes el siguiente lema.

Proposición 1.3.12. *Supongamos que $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que satisface*

$$|f_j(t) - f_j(s)| \leq A^j |t - s| \text{ para algún } A > 1$$

y

$$|f_j(t) - f_{j+1}(t)| \leq B^{-j} \text{ para algún } B > 1.$$

Entonces el limite $f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t)$ existe y satisface

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^\gamma,$$

donde $\gamma = \log B / \log AB$.

Demostración. Se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t))$ es convergente pues por hipótesis se tiene que $|f_{j+1}(t) - f_j(t)| \leq B^{-j}$ y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} B^{-j}$ es convergente.

Por tanto, el límite continuo f viene dado por la convergencia uniforme de la siguiente serie

$$f(t) = f_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t)).$$

Entonces

$$|f(t) - f_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} B^{-k} \leq cB^{-j}.$$

Con c una cierta constante. Con esta desigualdad y la que viene dada por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f_j(t) - f_j(s)| + |f(t) - f_j(t)| + |f(s) - f_j(s)| \\ &\leq A^j|t - s| + cB^{-j} + cB^{-j} \\ &\leq c(A^j|t - s| + B^{-j}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde c es una constante positiva cualquiera. Sean t y s fijados con $t \neq s$. Queremos tomar j para minimizar $A^j|t - s| + B^{-j}$. Esto se consigue tomándolo de forma que los dos términos; $A^j|t - s|$ y B^{-j} sean de la misma magnitud. Precisamente, tomamos j satisfaciendo

$$(AB)^j|t - s| \leq 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq (AB)^{j+1}|t - s|.$$

Como $AB > 1$ y $|t - s| \leq 1$ tal j debe existir. De la primera desigualdad obtenemos

$$A^j|t - s| \leq B^{-j}.$$

Elevando a γ la segunda desigualdad, se tiene $1 \leq ((AB)^\gamma)^{j+1}|t - s|^\gamma$. Tomamos γ tal que $(AB)^\gamma = B$, es decir, $\gamma = \log B / \log AB$. Entonces se tiene $1 \leq B^{j+1}|t - s|^\gamma$, es decir,

$$B^{-j} \leq B|t - s|^\gamma.$$

Luego ya tenemos que ambos sumandos de (1.3) son comparables y por tanto

$$|f(t) - f(s)| \leq M(A^j|t - s| + B^{-j}) \leq M(B^{-j} + B^{-j}) \leq M|t - s|^\gamma$$

con $\gamma = \log B / \log AB$ y M una cierta constante que es lo que queríamos probar. \square

Corolario 1.3.13. *La función $\mathcal{K}(t)$ satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma = \log 3 / \log 4$.*

Demostración. Se tiene que \mathcal{K}_j satisface

$$|\mathcal{K}_{j+1}(t) - \mathcal{K}_j(t)| \leq 3^{-j}$$

y

$$|\mathcal{K}_j(t) - \mathcal{K}_j(s)| \leq (4/3)^j |t - s|$$

luego tomando $A = 4/3$ y $B = 3$ en la Proposición 1.3.12, deduzco que \mathcal{K} satisface la condición de Lipschitz con

$$\gamma = \frac{\log B}{\log AB} = \frac{\log 3}{\log 4}.$$

\square

Teorema 1.3.14. *La curva de von Koch \mathcal{K} tiene dimensión $\log 4 / \log 3$.*

Demostración. Combinando la Proposición 1.3.4 y el Corolario 1.3.13 se deduce el resultado. Tenemos que $\mathcal{K}(t)$ satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma = \log 3 / \log 4$, entonces por el segundo apartado de la proposición tenemos que

$$\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{K}([0, 1]) \leq \frac{1}{\gamma} \dim [0, 1] = \frac{1}{\gamma} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Para probar que $m_\gamma(\mathcal{K}) > 0$ y entonces concluir $\dim \mathcal{K} = \log 4 / \log 3$ se requiere un argumento muy similar al que se explicó en el triángulo de Sierpinski. Una vez más se usa esta idea tan importante que generalizaremos en el siguiente capítulo y por eso no se realiza ahora la prueba. \square

Observación 1.3.15. La curva \mathcal{K} pertenece a una familia de curvas. Sea l la longitud de cada segmento en la primera etapa \mathcal{K}_1 , para cada l , $1/4 < l < 1/2$, consideramos $\mathcal{K}_1^l(t)$ dado por cuatro segmentos de longitud l . El caso $l = 1/3$ es el que hemos tratado, por un procedimiento análogo, definimos \mathcal{K}^l y podemos ver que

$$\dim(\mathcal{K}^l) = \frac{\log 4}{\log 1/l}.$$

Por tanto, obtenemos curvas con dimensión α , $1 < \alpha < 2$. Observemos que si $l \rightarrow 1/4$ la curva límite tiene dimensión 1, mientras que si $l \rightarrow 1/2$, la curva límite tiene dimensión 2 y puede ser vista como una curva que rellena el espacio.

Con el Teorema 2.2.2, que veremos en el siguiente capítulo, podremos hacer el cálculo de esta dimensión de forma rápida y sencilla.

Capítulo 2

Sistemas de funciones iteradas

Acabamos de ver la dificultad que puede llegar a tener el cálculo de la dimensión de ciertos conjuntos fractales. Para simplificar este cálculo, el objetivo de este capítulo es generalizar en cierto modo la construcción de los conjuntos estudiados. Para ello, introduciremos los *sistemas de funciones iteradas*, concepto atribuido a John E. Hutchinson en su trabajo [6]. Todos los resultados de este capítulo van enfocados para poder acabar enunciando y probando el Teorema 2.2.2 que permitirá calcular rápidamente la dimensión de determinados conjuntos. Para el desarrollo de este capítulo nos hemos basado en [1], [2] y [3] entre otros.

Antes de nada, veamos otro ejemplo, llamado *polvo de Cantor* \mathcal{D} , en dos dimensiones. Para cada $0 < \rho < 1/2$, el conjunto \mathcal{D}^ρ se construye comenzando con el cuadrado unidad. En la primera etapa, eliminamos todo menos los cuadrados en las esquinas del cuadrado unidad con lado ρ . A este conjunto lo llamamos \mathcal{D}_1 ; en la siguiente etapa, en cada uno de los 4 cuadrados de la etapa 1, eliminamos todo menos los 4 cuadrados abiertos de las esquinas de lado ρ^2 y obtenemos \mathcal{D}_2 , como podemos ver en la Figura 2.1. Repetimos esto sucesivamente de forma que \mathcal{D}_k estará formado por 4^k cuadrados de lado ρ^k .

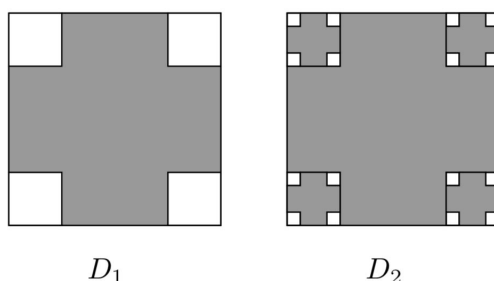


Figura 2.1: Construcción del polvo de Cantor.

Obtenemos una familia $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \supset \dots \supset \mathcal{D}_k$ de conjuntos compactos cuya intersección es el polvo de Cantor para el parámetro ρ . Se tiene

$$\mathcal{D}^\rho = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_k.$$

Observemos que este ejemplo junto con el conjunto de Cantor \mathcal{C} , el triángulo de Sierpinski \mathcal{S} , y la curva de von Koch \mathcal{K} , todos comparten una importante propiedad: cada uno de estos conjuntos contienen copias escaladas de ellos mismos, ya que han sido construidos iterando un proceso que los va escalando.

Por ejemplo, el intervalo $[0, 1/3]$ tiene una copia del *conjunto de Cantor* escalada por un factor de $1/3$, igual para el intervalo $[2/3, 1]$, luego

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

y así reiteradamente, cada uno de los subconjuntos en que se dividen los \mathcal{C}_i ($i = 1, 2$) contienen 2 copias del conjunto de Cantor escaladas por $1/9$.

Para el *triángulo de Sierpinski*, todo triángulo de la etapa k es una copia de \mathcal{S} escalada por un factor de 2^{-k} , por ejemplo para la etapa 1

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$$

donde cada \mathcal{S}_i es una copia trasladada de \mathcal{S} escalada por un factor de $1/2$.

Análogamente para la *curva de von Koch*, cada segmento en la etapa inicial de la construcción es una copia de dicha curva escalada y posiblemente rotada, es decir en la etapa inicial tenemos:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$$

donde \mathcal{K}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ se obtiene escalando \mathcal{K} por $1/3$, trasladando y rotándolo.

Por último, para el *polvo de Cantor*, todo cuadrado de la etapa k es una copia de \mathcal{D}^ρ escalada por un factor de ρ^k , por ejemplo para la etapa 1

$$\mathcal{D}^\rho = \mathcal{D}^{\rho_1} \cup \mathcal{D}^{\rho_2} \cup \mathcal{D}^{\rho_3} \cup \mathcal{D}^{\rho_4}$$

donde cada \mathcal{D}^{ρ_i} es una copia trasladada de \mathcal{D}^ρ escalada por un factor de ρ .

2.1. Conjuntos autosimilares

En esta sección vamos a estudiar en profundidad la generalización de la propiedad que acabamos de comentar. Para ello, daremos una definición precisa de conjunto autosimilar.

Definición 2.1.1. Una aplicación $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ se dice que es una *similaridad* sobre un conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$ con proporción $r > 0$ si

$$|S(x) - S(y)| = r|x - y|, \quad \forall x, y \in F$$

Observación 2.1.2. Se puede probar que toda similaridad de \mathbb{R}^d es la composición de una traslación, un giro o una dilatación por r . [1]

Definición 2.1.3. Diremos que el conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$ es *autosimilar* si es una unión de copias de él mismo, esto es, si existen similaridades $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

En geometría fractal, la familia $\{S_1, \dots, S_N\}$ es llamada un sistema de funciones iteradas, **IFS** (del inglés *Iterated function system*). Diremos que F es el conjunto invariante del IFS.

Proposición 2.1.4. *El conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de von Koch y el polvo de Cantor son conjuntos autosimilares.*

Demostración. Si $F = \mathcal{C}$, encontramos dos similaridades dadas por:

$$S_1(x) = x/3 \quad \text{y} \quad S_2(x) = x/3 + 2/3$$

luego $\mathcal{C} = S_1(\mathcal{C}) \cup S_2(\mathcal{C})$ y por tanto $m = 2$ y $r = 1/3$.

Si $F = \mathcal{S}$, tenemos las tres similaridades dadas por:

$$S_1(x) = x/2 \quad , \quad S_2(x) = x/2 + \alpha \quad \text{y} \quad S_3(x) = x/2 + \beta$$

donde α y β son los dibujados en la Figura 2.2 (izquierda) ,figura tomada de [5]. Luego $\mathcal{S} = S_1(\mathcal{S}) \cup S_2(\mathcal{S}) \cup S_3(\mathcal{S})$ y por tanto $m = 3$ y $r = 1/2$.

Si $F = \mathcal{K}$, hay 4 similaridades dadas por:

$$S_1(x) = \frac{x}{3}, \quad S_2(x) = \rho \frac{x}{3} + \alpha, \quad S_3(x) = \rho^{-1} \frac{x}{3} + \beta \quad \text{y} \quad S_4(x) = \frac{x}{3} + \gamma$$

donde α, β y γ son los dibujados en la Figura 2.2 (derecha) y ρ es la rotación centrada en el origen y ángulo $\pi/3$, luego $\mathcal{K} = S_1(\mathcal{K}) \cup S_2(\mathcal{K}) \cup S_3(\mathcal{K}) \cup S_4(\mathcal{K})$ y por tanto $m = 4$ y $r = 1/3$.

Si $F = \mathcal{D}$, hay 4 similaridades, son fáciles de obtener, por tanto, $m = 4$ y $r = \rho$.

□

Observación 2.1.5. Si $F = \mathcal{C}(\lambda)$, encontramos dos similaridades dadas por $S_1(x) = \lambda x$ y $S_2(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$. Luego $\mathcal{C}(\lambda) = S_1(\mathcal{C}(\lambda)) \cup S_2(\mathcal{C}(\lambda))$ y por tanto $m = 2$ y $r = \lambda$.

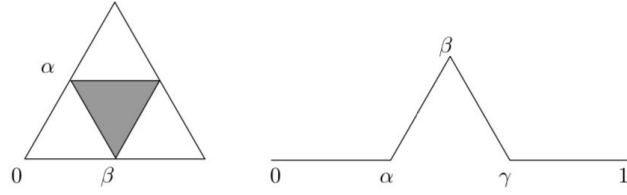


Figura 2.2: Similaridades del triángulo de Sierpinski y la curva de von Koch.

Probaremos ahora un teorema que nos será fundamental, pues nos garantiza la existencia y unicidad de conjuntos autosimilares si las similaridades tienen proporción menor que 1.

Teorema 2.1.6. *Sea el IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$, donde cada similaridad tiene la misma proporción r que satisface $0 < r < 1$. Entonces existe un único conjunto compacto no vacío F tal que*

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

Es decir, existe un único conjunto invariante para el IFS.

Para la prueba de este teorema, necesitaremos dos lemas previos.

Nota 2.1.7. *Sea un conjunto A , denotamos $\tilde{S}(A)$ a la unión de todas las similaridades sobre este conjunto, es decir, $\tilde{S}(A) = S_1(A) \cup \dots \cup S_m(A)$.*

Lema 2.1.8. *En las hipótesis del Teorema 2.1.6, existe una bola cerrada B tal que $S_j(B) \subset B$ para todo $j = 1, \dots, m$.*

Demostración. Si S es una similaridad con proporción r , entonces

$$|S(x)| \leq |S(x) - S(0)| + |S(0)| = r|x| + |S(0)|.$$

Buscamos $R_j > 0$, tal que si $|x| < R_j$ entonces $|S_j(x)| < R_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Para ello, tomamos R_j tal que $rR_j + |S_j(0)| \leq R_j$, es decir, $R_j \geq |S_j(0)|/(1 - r)$. En ese caso, sea x tal que $|x| < R_j$ entonces

$$|S_j(x)| \leq r|x| + |S_j(0)| \leq rR_j + |S_j(0)| \leq R_j.$$

Para cada S_j tenemos una bola B_j centrada en el origen y con radio R_j y gracias a la elección de su radio, por la desigualdad anterior tenemos $S_j(B_j) \subset B_j$. Sea B la bola con mayor radio R de todas las bolas B_j . Dado que $R \geq R_j$ se verifican todas las relaciones, entonces tenemos que $S_j(B) \subset B$ para todo j . \square

Observación 2.1.9. En las hipótesis del Teorema 2.1.6 se tiene entonces que $\tilde{S}(B) \subset B$.

Definición 2.1.10. Sea A y B son dos conjuntos compactos, entonces definimos la *distancia de Hausdorff* como

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\delta : B \subset A^\delta \text{ y } A \subset B^\delta\}$$

donde $A^\delta = \{x : d(x, A) < \delta\}$.

Observación 2.1.11. Observemos que si $A = B = \emptyset$, entonces $\text{dist}(A, B) = 0$, y que si alguno de los dos es vacío, entonces $\text{dist}(A, B) = \infty$.

Para comprobar que es una distancia bien definida sobre los conjuntos compactos tenemos el siguiente lema.

Sea d una distancia. Definimos la distancia de un punto a un conjunto como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, z) : z \in A\}.$$

Lema 2.1.12. *La función distancia de Hausdorff definida en subconjuntos compactos de \mathbb{R}^d satisface:*

- (a) $\text{dist}(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.
- (b) $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$.
- (c) $\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B)$.
- (d) $\text{dist}(A \cup A', B \cup B') \leq \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(A', B')\}$.
- Si S_1, \dots, S_m son similaridades de proporción r , entonces
- (e) $\text{dist}(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) \leq r \text{dist}(A, B)$.

Demostración. (a) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos compactos no vacíos tales que $\text{dist}(A, B) = 0$. Se tiene entonces por definición que, para cada $\delta > 0$, $B \subset A^\delta$ y $A \subset B^\delta$. Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que $A \neq B$ luego existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Como B es cerrado, su complementario B^c es abierto, luego existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B^c$. Tenemos entonces que $d(x, B) > r$, luego $x \notin B^r$. Como $x \in A$ tenemos entonces que $A \not\subset B^r$, lo cual es una contradicción, por tanto $A = B$. El recíproco es trivial.

(b) Es trivial.

(c) Sea $\epsilon > 0$. Consideramos $A, B, C \subset \mathbb{R}^d$, $\beta = \text{dist}(A, C) + \epsilon/2$ y $\gamma = \text{dist}(C, B) + \epsilon/2$. Se tiene entonces $A \subset C^\beta, C \subset A^\beta, C \subset B^\gamma$ y $B \subset C^\gamma$, y en consecuencia

$$B \subset C^\gamma \subset (A^\beta)^\gamma \subset A_{\beta+\gamma}.$$

Veamos la última inclusión. Sea $x \in (A^\beta)^\gamma$. Entonces $d(x, A^\beta) < \gamma$, luego existe $y_0 \in A^\beta$ tal que $|x - y_0| < \gamma$. Pero $d(y_0, A) < \beta$ implica que existe algún $z_0 \in A$ tal que $|y_0 - z_0| < \beta$. Se tiene

$$d(x, A) \leq |x - z_0| \leq |x - y_0| + |y_0 - z_0| < \gamma + \beta,$$

luego $x \in A^{\beta+\gamma}$. Análogamente, se tiene

$$A \subset C^\beta \subset (B^\gamma)^\beta \subset B_{\gamma+\beta}.$$

Con estas dos desigualdades hemos probado que $\beta + \gamma \in \{\delta : B \subset A^\delta \text{ y } A \subset B^\delta\}$, luego

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B) + \epsilon.$$

Dado que la desigualdad se verifica para todo $\epsilon > 0$, hacemos tender ϵ a 0 y el resultado queda probado.

(d) Sea $d_1 = \text{dist}(A, B)$, $d_2 = \text{dist}(A', B')$ y $d = \max\{d_1, d_2\}$. Para cada $\epsilon > 0$ se tiene entonces $A \subset B^{d+\epsilon}$ y $A' \subset (B')^{d+\epsilon}$, luego

$$A \cup A' \subset B^{d+\epsilon} \cup (B')^{d+\epsilon} \subset (B \cup B')^{d+\epsilon}.$$

Análogamente

$$B \cup B' \subset (A \cup A')^{d+\epsilon}.$$

Haciendo tender ϵ a 0 obtenemos

$$\text{dist}(A \cup A', B \cup B') \leq d$$

(e) Dado $\epsilon > 0$, consideramos $\delta = \text{dist}(A, B) + \epsilon$. Se tiene entonces $A \subset B^\delta$ y $B \subset A^\delta$. Luego tenemos

$$S_j(A) \subset S_j(B^\delta) \subset (S_j(B))^{r\delta} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos la última inclusión. Sea $y \in S_j(B^\delta)$, entonces existe $x \in B^\delta$, tal que $S_j(x) = y$. Como $d(x, B) < \delta$, existe $z \in B$ tal que $|x - z| < \delta$, así que

$$d(y, S_j(B)) \leq |y - S_j(z)| = |S_j(x) - S_j(z)| = r|x - z| < r\delta,$$

luego $y \in (S_j(B))^{r\delta}$. Análogamente, tendremos

$$S_j(B) \subset S_j(A^\delta) \subset (S_j(A))^{r\delta} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

En consecuencia, $\text{dist}(S_j(A), S_j(B)) \leq r\delta = r(\text{dist}(A, B) + \epsilon)$. Haciendo tender ϵ a 0 obtenemos

$$\text{dist}(S_j(A), S_j(B)) \leq r(\text{dist}(A, B)) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Por el apartado (d) se concluye

$$\text{dist}(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) \leq r(\text{dist}(A, B))$$

como queríamos probar. □

Las tres primeras propiedades nos garantizan que la distancia está bien definida. Una vez llegados a este punto ya podemos pasar a la demostración del teorema.

Demostración. (Teorema 2.1.6). Sea B un conjunto como el definido en el Lema 2.1.8, y denotamos $F_k = \tilde{S}^k(B)$, donde \tilde{S}^k denota la composición de k veces \tilde{S} , es decir, $\tilde{S}^k = \tilde{S}^{k-1} \circ \tilde{S}$, con $\tilde{S}^1 = \tilde{S}$.

Cada F_k es un compacto no vacío, pues la bola B es cerrada, verificando

$$F_k = \tilde{S}^{k-1}(\tilde{S}(B)) \subset \tilde{S}^{k-1}(B) = F_{k-1}$$

luego $F_k \subset F_{k-1}$. Denotamos

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

entonces F es un compacto, no vacío y

$$\tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{S}(F_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{k+1} = \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k$$

y dado que $\bigcap_{k=2}^{\infty} F_k$ equivale a F , tenemos que $\tilde{S}(F) = F$.

Solo nos falta probar la unicidad de F . Supongamos G otro conjunto compacto tal que $\tilde{S}(G) = G$. Usando el apartado (d) del Lema 2.1.12, tenemos $\text{dist}(F, G) \leq r \text{dist}(F, G)$. Dado que $r < 1$ esto implica que $\text{dist}(F, G) = 0$, luego $F = G$ gracias al apartado (a) del Lema 2.1.12. □

Nota 2.1.13. Observa que la construcción del conjunto F en la prueba se hace en realidad como hicimos para definir los conjuntos fractales que ya hemos visto. Por ejemplo, si $F = \mathcal{C}$, considerando $B = [0, 1]$ tenemos que $\mathcal{C}_k = \tilde{S}^k([0, 1])$, y estos son los conjuntos de la etapa k que habíamos definido. Para el triángulo de Sierpinski, consideramos B como el triángulo equilátero de lado 1. Con los demás se procede de forma análoga.

Observación 2.1.14. Es más, si cada similaridad tiene una razón de proporcionalidad diferente y todas menor que 1; tenemos también que existe un único conjunto invariante para el IFS. La prueba es análoga a la que hemos realizado, tomando como razón de proporcionalidad r la máxima de todas las que componen el IFS. No obstante, la prueba se puede consultar en la página 119 de [2].

2.2. Dimensión de conjuntos autosimilares

Tras ver el teorema anterior, surge la pregunta ¿Es posible determinar la dimensión de Hausdorff del conjunto F ? La respuesta es que si imponemos una condición técnica extra sí se puede. Este nuevo resultado nos simplificará mucho el cálculo, pues ya no tendremos que hacer todas las cuentas que vimos en los ejemplos del primer capítulo.

En cierto modo, esta condición es que los conjuntos $S_1(F), \dots, S_m(F)$ no se solapen *demasiado*. Por ejemplo, si estos conjuntos fueran disjuntos tendríamos

$$m_\alpha(F) = \sum_{j=1}^m m_\alpha(S_j(F)).$$

Dado que cada S_j está escalado por r , tendríamos que $m_\alpha(S_j(F)) = r^\alpha m_\alpha(F)$, y por tanto

$$m_\alpha(F) = mr^\alpha m_\alpha(F).$$

Si $m_\alpha(F)$ es finita, despejando tenemos $mr^\alpha = 1$, entonces

$$\alpha = \frac{\log m}{\log 1/r}.$$

Definición 2.2.1. Decimos que el IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$ satisface la *condición del conjunto abierto*, OSC (del inglés, ‘*open set condition*’), si existe un abierto \mathcal{O} acotado tal que

$$S_1(\mathcal{O}) \cup \dots \cup S_m(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$$

y los $S_j(\mathcal{O})$ son disjuntos. No es necesario que \mathcal{O} contenga a F .

Para los ejemplos que hemos visto se satisface esta condición, pues si F es el *conjunto de Cantor*, tomaremos \mathcal{O} como el intervalo abierto $(0, 1)$. Para el *triángulo de Sierpinski* tomamos el triángulo abierto unitario. Para el *polvo de Cantor* tomaremos el cuadrado abierto unidad. Finalmente, para la curva de *von Koch* tomaremos el interior del triángulo que delimitan los vértices de dicha curva en la primera iteración.

Teorema 2.2.2. *Sea el IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$, satisfaciendo la condición del conjunto abierto y cada una con la misma proporción r que satisface $0 < r < 1$. Entonces el conjunto invariante del IFS tiene dimensión de Hausdorff igual a $\log(m)/\log(1/r)$.*

Demostración. Llamemos F a este conjunto autosimilar, y sea $\alpha = \log m / \log(1/r)$. Primero probaremos que $m_\alpha(F) < \infty$ y entonces $\dim(F) \leq \alpha$; luego probaremos que $m_\alpha(F) > 0$, lo que nos permitirá concluir que α es su dimensión.

Comencemos probando $m_\alpha(F) < \infty$. Esta desigualdad no necesitará la condición de que sean separables. Recordemos que $F_k = \tilde{S}^k(B)$ con B la bola dada por el Lema 2.1.8. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\tilde{S}^k(B) &= \tilde{S}^{k-1}(\tilde{S}(B)) = \tilde{S}^{k-1}\left(\bigcup_{n_1=1}^m S_{n_1}(B)\right) = \tilde{S}^{k-2}\left(\tilde{S}\left(\bigcup_{n_1=1}^m S_{n_1}(B)\right)\right) \\ &= \tilde{S}^{k-2}\left(\left(\bigcup_{n_1=1}^m \tilde{S}(S_{n_1}(B))\right)\right) = \tilde{S}^{k-2}\left(\bigcup_{n_1, n_2} S_{n_2}(S_{n_1}(B))\right) = \dots \\ &= \bigcup_{n_1, \dots, n_k} S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ \dots \circ S_{n_k}(B)\end{aligned}$$

donde $1 \leq n_i \leq m$ y $1 \leq i \leq k$. Por tanto, $\tilde{S}^k(B)$ es la unión de m^k conjuntos de diámetro menor que cr^k (con $c = \text{diam } B$). Sea $k > 0$. Tenemos

$$F = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \subset F_k = \tilde{S}^k(B).$$

Luego $F \subset \tilde{S}^k(B)$. Sea $\delta > 0$, tomando k tal que $cr^k \leq \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha^\delta(F) &\leq \sum_{n_1, \dots, n_k} (\text{diam } S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ \dots \circ S_{n_k}(B))^\alpha \\ &\leq \sum (cr^k)^\alpha = c^\alpha r^{k\alpha} m^k \leq c' m^k r^{\alpha k} \leq c',\end{aligned}$$

dado que $mr^\alpha = 1$, porque $\alpha = \log m / \log(1/r)$. Como c' es independiente de δ , haciendo tender δ a 0 tenemos $m_\alpha(F) \leq c' < \infty$, que es lo que buscábamos.

Para probar $m_\alpha(F) > 0$, ahora sí tendremos que usar la condición de que son separables. Hemos de tener muy presente la prueba del Teorema 1.3.10, pues lo que vamos a hacer es generalizar este resultado.

Consideremos un punto \bar{x} en B . Definimos los *vértices* de la etapa k como los m^k puntos contenidos en F dados por:

$$S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ \dots \circ S_{n_k}(\bar{x}), \quad \text{donde } 1 \leq n_i \leq m \quad \text{con } i = 1, \dots, k.$$

Cada vértice viene dado por (n_1, \dots, n_k) . De forma similar, definimos los *conjuntos abiertos* de la etapa k como

$$S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ \dots \circ S_{n_k}(\mathcal{O}), \quad \text{con } 1 \leq n_i \leq m \quad \text{con } i = 1, \dots, k.$$

donde \mathcal{O} satisface la condición del conjunto abierto (OSC). Estos también vienen determinados por (n_1, \dots, n_k) . Observemos que los *conjuntos abiertos*

de la etapa k son disjuntos, dado que lo son los de la primera generación y los siguientes estarán contenidos en estos.

Al igual que hicimos para el triángulo de Sierpinski, si $l \leq k$ cada *conjunto abierto* de la etapa l contiene m^{k-l} conjuntos abiertos de la etapa k . Ahora asociamos cada *vértice* de la etapa k con un conjunto abierto si tienen la misma etiqueta (n_1, \dots, n_k) y lo denotamos $\mathcal{O}(v)$ ($\mathcal{O}_k(v)$ cuándo sea necesario). Recordemos que tanto \bar{x} como \mathcal{O} son fijados desde el principio, y como \mathcal{O} tiene un diámetro finito tenemos

- (a) $d(v, \mathcal{O}(v)) \leq cr^k$
- (b) $c'r^k \leq \text{diam } \mathcal{O}(v) \leq cr^k$

donde c y c' son ciertas constantes. Como ya mencionamos para el triángulo de Sierpinski, es suficiente probar que si $F \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$, donde $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ es una colección de bolas con diámetro menor que δ ; entonces

$$\sum_{j=1}^N (\text{diam } B_j)^\alpha \geq c > 0$$

Para ello, sea k tal que:

$$r^k \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam } B_j < r^{k-1}.$$

Necesitaremos bajo estas consideraciones el siguiente lema.

Lema 2.2.3. *Supongamos una bola $B \subset \mathcal{B}$ que satisfice*

$$r^l \leq \min_{1 \leq j \leq N} \text{diam } B_j < r^{l-1} \quad \text{para algun } l \leq k$$

Entonces B contiene como mucho cm^{k-l} vértices de la etapa k , con c una constante.

Demostración. Denotaremos $\mathcal{O}_i(v)$ como el conjunto abierto asociado a v de la etapa i . Sea ahora B^* tal que $B \subset B^*$ y las propiedades (a) y (b) nos garanticen que $\mathcal{O}_l(v) \subset B^*$, dado que $\mathcal{O}_k(v) \subset \mathcal{O}_l(v)$, tenemos por tanto, $\mathcal{O}_k(v) \subset B^*$ también.

B^* puede contener como máximo c conjuntos \mathcal{O}_l . Entonces, B^* puede contener como máximo cm^{k-l} conjuntos \mathcal{O}_k . Por tanto, como $B \subset B^*$, B puede contener como máximo cm^{k-l} vértices de la etapa k , como queríamos demostrar. \square

Finalmente, denotemos N_l el número de bolas en \mathcal{B} tal que

$$r^l \leq \text{diam } B_j < r^{l-1}.$$

Por el lema deducimos inmediatamente que el número total de vértices de la etapa k que pueden ser cubiertos por \mathcal{B} no pueden ser más de $c \sum_l N_l m^{k-l}$. Dado que todos los m^k vértices de la etapa k están en F y por tanto, son cubiertos también, tenemos $c \sum_l N_l m^{k-l} > m^k$. De aquí deducimos:

$$\sum_l N_l m^{-l} \geq c$$

Dado que α verifica $r^{l\alpha} = m^{-l}$, teniendo en cuenta que $\text{diam } B_j \geq r^l$ para las N^l bolas que hemos mencionado. Se tiene

$$\sum_{j=1}^N (\text{diam } B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l r^{l\alpha} \geq c > 0$$

como queríamos demostrar. \square

Con este teorema ya podemos estudiar todos estos conjuntos simplemente analizando las similitudes que lo componen. Para los ejemplos que hemos estudiado por lo visto en la demostración de la Proposición 2.1.4; tenemos

- Si F es el conjunto de Cantor, tenemos $m = 2$ y $r = 1/3$, por tanto, según el teorema la dimensión es $\log 2 / \log 3$.
- Para el triángulo de Sierpinski, tenemos $m = 3$ y $r = 1/2$, por tanto, según el teorema la dimensión es $\dim \mathcal{S} = \log 3 / \log 2$.
- Para la curva de von Koch tenemos $m = 4$ y $r = 1/3$, por tanto, según el teorema la dimensión es $\dim \mathcal{K} = \log 4 / \log 3$.
- Para el polvo de Cantor con $0 < \rho < 1/2$ tenemos $m = 4$ y $r = \rho$, por tanto, según el teorema la dimensión es $\dim \mathcal{D} = \log 4 / \log \rho^{-1}$.

Además, como vimos en la Observación 2.1.5. Si F es el conjunto de Cantor de parámetro λ , tenemos $m = 2$ y $r = \lambda$, por tanto, según el teorema la dimensión es $\log 2 / \log(1/\lambda)$.

La curva \mathcal{K}^l que definimos en la Observación 1.3.15, se crea con 4 similitudes de proporción l , con $l \in (0, 1/2)$. Por tanto, su dimensión será

$$\dim(\mathcal{K}^l) = \frac{\log 4}{\log 1/l}.$$

Capítulo 3

Curvas que llenan el espacio

Desde la construcción de Peano en 1890, las curvas que llenan el espacio han despertado un gran interés en los matemáticos. Después de esta construcción muchas otras curvas de este tipo han sido desarrolladas por matemáticos. Una gran colección de estas se pueden encontrar, por ejemplo, en la web ‘www.fractalcurves.com’.

El objetivo principal de este capítulo es generalizar la estructura del IFS estudiado en el capítulo anterior para poder estudiar las curvas que llenan el espacio de conjuntos autosimilares mediante los llamados GIFS. Para ello seguiremos el esquema desarrollado en el artículo de Hui Raon y Shu-Qin Zhang [5]. Para completar pruebas y ejemplos hemos necesitado consultar otras referencias como [3] o [14] entre otras. Todas las imágenes de esta sección han sido de realización propia con el entorno *tikzpicture*, excepto alguna, que se indicará de donde proviene.

En 1994 Hans Sagan recogió en [12] la construcción de las curvas de llenado del cuadrado más conocidas hasta ese momento. En dicho libro hace la construcción para cada curva de forma específica y concreta. El método de los GIFS nos permitirá el estudio de todas estas curvas bajo un mismo punto de vista. Es más, no solo nos servirá para curvas que llenan el cuadrado sino también para rellenar otras formas, incluso servirá para rellenar objetos que no tienen dimensión entera.

Para la construcción de curvas que llenan el espacio, es natural buscar métodos sistemáticos. Hay dos métodos bien conocidos como son el *L-system* desarrollado por Lindenmayer, un biólogo [7] en 1968, y el *método de conjuntos recursivos* introducido en 1982 por Dekking. El artículo [9] de Dekking es importante pues de ahí surge la noción de sistema de funciones iteradas dirigidas por grafos. Otro trabajo de gran importancia es Hata [10], que trata con una clase de conjuntos autosimilares que verifican una cierta condición, la “Condición de cadena”. El método de los GIFS que vamos a estudiar puede

ser visto como una mejora de estos métodos anteriores.

Primero, vamos a ver como funcionan los métodos anteriores:

■ *L-system.*

Fue desarrollado en 1968 por el biólogo Aristid Lindenmayer, para modelar el crecimiento de las plantas. Decimos que $G = (V, W, P)$ es un L-system si V es un alfabeto de símbolos, W el axioma inicial y P un conjunto de reglas de producción que definen como cambian los símbolos. También esta formado por un ángulo fijo θ , los símbolos $+$ y $-$ indica que sumamos o restamos el ángulo θ al ángulo en que nos encontremos.

Veamos varios ejemplos de este sistema.

Conjunto de Cantor; aunque no sea una curva que llena el espacio, veamos como funciona este método para ir familiarizándonos con el. Tenemos $G = (V, W, P)$ con $V = \{A, B\}$, $W = A$, $P = \{A \rightarrow ABA, B \rightarrow BBB\}$, de forma que si vemos A dibujamos hacia delante y si vemos B movemos hacia delante sin dibujar. Para renormalizar usamos $f(z) = \frac{1}{3}z$. Aplicando la regla de producción n veces a A , y renormalizando n veces, obtenemos la n -ésima aproximación del conjunto de Cantor.

Curva de Hilbert; veamos como se construye esta curva que llena el espacio utilizando el método L-system. Consideramos $G = (V, X, P)$ con $V = \{F, X, Y\}$, $P = \{X \rightarrow -YF + XFX + FY-, Y \rightarrow +XF - YFY - FX+\}$, $\theta = 90$.

Conjunto de símbolos V :

F : mover hacia adelante y trazar una línea

$+$: girar a la derecha 90 grados

$-$: girar a la izquierda 90 grados

Aplicamos las reglas de producción iterativamente para expandir la cadena de símbolos. Luego, interpretamos los símbolos para generar la representación gráfica de la curva de Hilbert.

Veamos varias iteraciones:

Iteración 0: X

Iteración 1: -YF+XFX+FY-

Iteración 2: - -XF-YFY-FX+F-YF+XFX+FY+F+XFX-YFY-FX- -
F-YF+XFX+FY+F+XFX-YFY-FX+F-YF+XFX+FY-

Abelson y diSessa tratan en [8] como implementar gráficos de tortuga (lenguaje LOGO) en otros lenguajes de programación. Para ver gráficamente como sería el desarrollo de esta curva, vamos a ayudarnos del lenguaje Logo y Python, donde desarrollaremos un código para el dibujo de esta curva que nos ayudará a entender como funciona el L-system. Podemos ver en el Código 3.1, como se programa en Python. En la Figura 3.1 podemos ver la tercera iteración de la curva de Hilbert dibujada con el código.

```

1 # Importar el modulo de LOGO
2 import turtle
3 from PIL import Image
4 # Funcion para generar la cadena de simbolos de la curva de
  Hilbert
5 def generar_curva_hilbert(iteraciones, cadena_actual):
6     if iteraciones == 0:
7         return cadena_actual
8     else:
9         nueva_cadena = ""
10        for simbolo in cadena_actual:
11            if simbolo == "X":
12                nueva_cadena += "-YF+XFX+FY-"
13            elif simbolo == "Y":
14                nueva_cadena += "+XF-YFY-FX+"
15            else:
16                nueva_cadena += simbolo
17        return generar_curva_hilbert(iteraciones - 1,
  nueva_cadena)
18 # Configuracion de la ventana y la tortuga
19 wn = turtle.Screen()
20 wn.bgcolor("white"); wn.setup(width=800, height=600)
21 wn.title("Curva de Hilbert")
22 t = turtle.Turtle()
23 t.speed(0); t.width(2)
24 # Configuracion de la curva de Hilbert
25 iteraciones = 5
26 cadena_inicial = "X"
27 angulo = 90; longitud = 10
28 cadena_final = generar_curva_hilbert(iteraciones,
  cadena_inicial)
29 # Dibujo de la curva de Hilbert
30 for simbolo in cadena_final:
31     if simbolo == "F":

```



```

32     t.forward(longitud)
33     elif simbolo == "+":
34         t.right(angulo)
35     elif simbolo == "-":
36         t.left(angulo)
37 # Salida del dibujo
38 turtle.done()

```

Código 3.1: Código Python del L-System para generar la curva de Hilbert



Figura 3.1: Curva de Hilbert dibujada con el código.

- *Método de conjuntos recursivos.*

Consideraremos (σ, \mathcal{A}) , donde σ es un conjunto de reglas de sustitución definidas sobre el alfabeto \mathcal{A} . En este método asociaremos a cada letra un vector, de forma que cuando en una palabra leamos una letra, dibujaremos su vector correspondiente.

Definamos la curva del dragón para este método. Sea σ el conjunto de reglas definidas sobre $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ dada por $\sigma = \{a \rightarrow ab, b \rightarrow cb, c \rightarrow cd, d \rightarrow ad\}$. Los vectores correspondientes a a, b, c, d son $v_a = (1, 0), v_b = (0, 1), v_c = (-1, 0), v_d = (0, 1)$. Para renormalizar $f(z) = \frac{z}{1+i}$.

La tercera iteración de a , es $\sigma^3(a) = abc bcdcb$. Para dibujar una palabra, si encontramos la letra x nos movemos dibujando una línea en el vector v_x . Podemos verlo en la Figura 3.2.

En comparación con el otro método, este nos es más eficiente pues no tenemos que recordar en todo momento el ángulo.

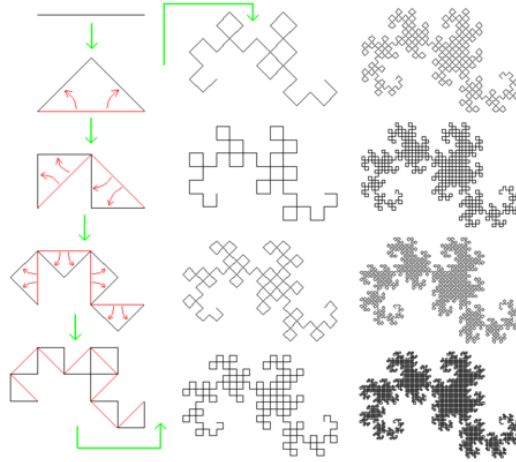


Figura 3.2: Iteraciones de la curva del dragón.

3.1. GIFS

En esta sección introduciremos la noción de sistema lineal de funciones iteradas por un grafo dirigido, lo que llamaremos GIFS lineal.

Comencemos con la definición de GIFS.

Definición 3.1.1. Sea $G = (\mathcal{A}, \Gamma)$ un grafo dirigido, con \mathcal{A} el conjunto de vértices (estados) y Γ el conjunto de aristas. Sea

$$\mathcal{G} = (g_\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)_{\gamma \in \Gamma}$$

una familia de similaridades como las estudiadas en el capítulo anterior. Llamamos a la tripleta $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G})$, o simplemente \mathcal{G} , un GIFS. Denominamos al par (\mathcal{A}, Γ) la *base del grafo* del GIFS.

Observación 3.1.2. A veces, pero no siempre, denotamos $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ y Γ_{ij} al conjunto de aristas que van del vértice i al j (pues puede haber mas de una).

Decimos que el GIFS anterior satisface la condición OSC si existen N conjuntos abiertos U_1, \dots, U_N tales que

$$\bigcup_{j=1}^N \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{ij}} g_\gamma(U_j) \subset U_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

y las uniones de la izquierda no se solapan.

Tenemos una “generalización” del Teorema 2.1.6 sobre los conjuntos invariantes asociados.

Teorema 3.1.3. *Dado un GIFS, existen N conjuntos compactos no vacíos $\{E_i\}_{i=1}^N$ únicos verificando*

$$E_i = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{ij}} g_\gamma(E_j), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.1)$$

Llamamos a $\{E_i\}_{i=1}^N$ los conjuntos invariantes del GIFS. El objeto de construcción definido es

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

Demostración. Para cada i , denotaremos $\mathbb{H}(U_i)$ el espacio métrico formado por los subconjuntos compactos no vacíos de U_i , dotado de la distancia de Hausdorff. Ya probamos en el Lema 2.1.12 que la distancia de Hausdorff $dist$ es una distancia en $\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$, como los U_i son subconjuntos de \mathbb{R}^d lo tendremos también. $\mathbb{H}(U_i)$ es un espacio métrico completo, pues U_i es un espacio métrico completo para cada i [2].

Consideramos el espacio producto $\prod_{i=1}^N \mathbb{H}(U_i)$ con la distancia D dada por el máximo de la distancia de Hausdorff entre sus coordenadas correspondientes. Definimos una aplicación F de este producto en si mismo de la siguiente forma

$$F(M_1, \dots, M_N) = (N_1, \dots, N),$$

donde

$$N_i = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{ij}} g_\gamma(M_j).$$

Esta es una aplicación contractiva (ver [14]). Por tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach tendrá un único punto fijo en $\prod_{i=1}^N \mathbb{H}(U_i)$. Este será la lista de conjuntos invariantes que buscamos. \square

Nota 3.1.4. Las ecuaciones (3.1) nos dan toda la información sobre la estructura de los GIFS, por tanto, otra forma de definirlos. A estas ecuaciones las llamaremos *conjunto de ecuaciones del GIFS*.

Notación acerca de los GIFS

Sea G un grafo dirigido.

Llamamos *camino* a una secuencia de aristas $w = w_1 w_2 \dots w_n$ en G si el estado terminal de w_i coincide con el estado inicial de w_{i+1} para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Usaremos la siguiente notación para hablar de los conjuntos de caminos de una longitud determinada en $G = (\mathcal{A}, \Gamma)$. Para $i \in \mathcal{A}$, denotamos

- Γ_i^k el conjunto de todos los caminos con longitud k que salen del estado i .
- Γ_i^* el conjunto de todos los caminos con longitud finita que salen del estado i .
- Γ_i^∞ el conjunto de todos los caminos con longitud infinita que salen del estado i .

Observemos que $\Gamma_i^* = \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_i^k$.

Sea un camino $w = (w_k)_{k=1}^\infty$, llamamos *prefijo de w de longitud n* a

$$w|_n = w_1 w_2 \dots w_n.$$

Para $w_1 \dots w_n \in \Gamma_i^n$, denotamos

$$[w_1 \dots w_n] := \{\gamma \in \Gamma_i^\infty; \gamma|_n = w_1 \dots w_n\}$$

al *cilindro asociado* con $w_1 \dots w_n$. Para un camino $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$, $t(\gamma)$ es el estado final del camino. Definimos entonces el conjunto

$$E_\gamma := g_{\gamma_1} \circ \dots \circ g_{\gamma_n}(E_{t(\gamma)}).$$

Con esta notación, si iteramos las ecuaciones (3.1) k -veces, obtenemos

$$E_i = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_i^k} E_\gamma.$$

Definimos la proyección $\pi : (\Gamma_1^\infty, \dots, \Gamma_N^\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \dots, \mathbb{R}^d)$, donde cada componente $\pi_i : \Gamma_i^\infty \rightarrow \mathbb{R}^d$ esta definida por

$$\{\pi_i(w)\} := \bigcap_{n \geq 1} E_{w|_n}.$$

Para cada $x \in E_i$, decimos que w es una codificación de x si $\pi_i(w) = x$.

3.1.1. GIFS ordenados y lineales

Sea $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G})$ un GIFS. Para estudiar las propiedades de conectividad de los conjuntos invariantes, necesitamos dar una estructura de orden a los GIFS. Para ello, introducimos un orden parcial en el conjunto de aristas, pues no ordenaremos todas las aristas, solo las que parten de un mismo vértice. Sea $\Gamma_i = \Gamma_i^1$ el conjunto de aristas que parten del vértice i .

Definición 3.1.5. Llamamos un GIFS ordenado a $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$, si \prec es un orden parcial en Γ tal que

- \prec es un orden lineal cuando nos restringimos a Γ_i para todo $i \in \mathcal{A}$;
- Los elementos de Γ_i y Γ_j no son comparables si $i \neq j$.

El orden \prec induce un orden lexicográfico en cada Γ_i^k . Consideremos dos caminos en Γ_i^k ; escribimos $\gamma_1 \dots \gamma_k \prec w_1 \dots w_k$ si y solo si $\gamma_1 \dots \gamma_{l-1} = w_1 \dots w_{l-1}$ y $\gamma_l \prec w_l$ para algún $1 \leq l \leq k$. Observemos que (Γ_i^k, \prec) es un orden lineal para todo i y todo k , es decir, podemos ordenar todos los caminos de la misma longitud que salen de un mismo vértice. Decimos que dos caminos de $\gamma, w \in \Gamma_i^k$ ($\gamma \prec w$) son *adyacentes* si no hay ningún camino entre ellos con respecto al orden \prec , es decir, si no existe ningún camino $z \in \Gamma_i^k$ tal que $\gamma \prec z \prec w$.

Definición 3.1.6. Sea un GIFS ordenado $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$ con conjuntos invariantes $\{E_i\}_{i=1}^N$. Decimos que es un GIFS lineal si para todo $i \in \mathcal{A}$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$E_\gamma \cap E_w \neq \emptyset$$

donde γ, w son caminos adyacentes en Γ_i^k .

Observación 3.1.7. Un IFS $\{S_1, \dots, S_N\}$ de los estudiados en el capítulo anterior, es un caso especial de GIFS en el que hay un único vértice y el conjunto de aristas es un conjunto de N aristas que parten y acaban en dicho vértice. Para tener un IFS ordenado asumimos el orden natural entre las aristas. Por convenio, denotamos a las aristas por $1, \dots, N$. En lugar de llamar a $i_1 \dots i_k \in \{1, \dots, N\}^k$ un camino, lo llamamos palabra.

Antes de continuar, veamos un ejemplo de como usando un IFS podemos definir un GIFS, así afianzaremos el manejo de estas definiciones.

Ejemplo 3.1.8 (Curva de Sierpinski). Posteriormente este ejemplo nos ayudará para construir la curva de Sierpinski. Consideremos el IFS $\{S_j\}_{j=1}^4$ dado por

$$S_j(z) = \frac{z + d_j}{2}, \quad \text{donde } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (0, 1, 1 + i, i).$$

El conjunto invariante de este IFS (E_1) es el cuadrado unidad. Veámoslo:

Para ello, usaremos los resultados vistos en el capítulo anterior y así este ejemplo también nos servirá un poco de guía de como manejar los teoremas estudiados. En primer lugar, observemos que las 4 similaridades son de proporción $1/2$, pues todas son de la forma $S(z) = z/2 + \beta$, con β una constante que varía según la similaridad, tenemos por tanto que

$$|S(w) - S(z)| = \left| \frac{w}{2} - \frac{z}{2} \right| = \frac{1}{2} |w - z|.$$

$S_4(\bar{\mathcal{O}})$	$S_3(\bar{\mathcal{O}})$
$S_1(\bar{\mathcal{O}})$	$S_2(\bar{\mathcal{O}})$

Figura 3.3: Similaridades aplicadas a $\bar{\mathcal{O}}$.

Dado que todas las similaridades tienen la misma proporción menor que 1, estamos por tanto en las hipótesis del Teorema 2.1.6, luego existe un único conjunto compacto no vacío F tal que

$$F = S_1(F) \cup S_2(F) \cup S_3(F) \cup S_4(F).$$

Sea \mathcal{O} el cuadrado unidad abierto. Como podemos ver en la Figura 3.3 se satisface $\bar{\mathcal{O}} = S_1(\bar{\mathcal{O}}) \cup S_2(\bar{\mathcal{O}}) \cup S_3(\bar{\mathcal{O}}) \cup S_4(\bar{\mathcal{O}})$. Por la unicidad de F , la única opción es que $F = \bar{\mathcal{O}}$. Luego el conjunto invariante asociado a este IFS es el cuadrado unidad, y por tanto el conjunto autosimilar del IFS.

Observamos también que \mathcal{O} verifica la OSC, por tanto, podemos aplicar el Teorema 2.2.2, el cual nos dice que la dimensión del conjunto F anterior es

$$\dim(F) = \frac{\log m}{\log 1/r} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

con m y r el número y la proporción de las similaridades respectivamente. Que efectivamente es la dimensión del cuadrado unidad.

Recordemos ahora las ecuaciones que definen un GIFS:

$$E_i = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{ij}} g_\gamma(E_j), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Aquí E_i es el conjunto invariante asociado al vértice i cuya existencia la tenemos por el Teorema 3.1.3. Considerando $N = 4$ y $g_\gamma \in \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ con γ una arista. Sean los conjuntos E_1, E_2, E_3, E_4 los dibujados en la Figura 3.4. Definimos el siguiente GIFS:

$$\begin{cases} E_1 = S_1(E_1) + S_1(E_2) + S_2(E_4) + S_2(E_1) \\ E_2 = S_2(E_2) + S_2(E_3) + S_3(E_1) + S_3(E_2) \\ E_3 = S_3(E_3) + S_3(E_4) + S_4(E_2) + S_4(E_3) \\ E_4 = S_4(E_4) + S_4(E_1) + S_1(E_3) + S_1(E_4) \end{cases}$$

Usamos ‘+’ en lugar de ‘ \cup ’ para indicar el orden de las similaridades. Por ejemplo, del vértice 1 salen 4 aristas, la primera de ellas sera la que vuelve a 1 con similaridad asociada S_1 , en segundo lugar, la arista que va a 2 con similaridad asociada S_1 y así sucesivamente. En la Figura 3.5 podemos ver el grafo asociado a este GIFS, indicando a que similaridad se asocia cada arista. Para ver que esto es un GIFS lineal lo haremos fácilmente con la condición de cadena que introduciremos en la siguiente sección. Aparentemente la condición del conjunto abierto se verifica.

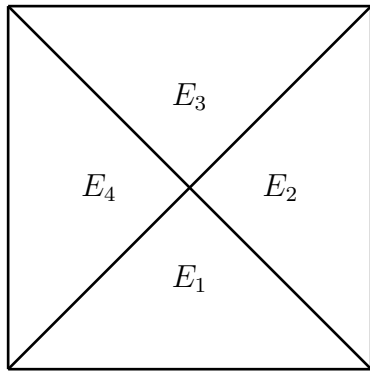


Figura 3.4: Conjuntos invariantes del GIFS.

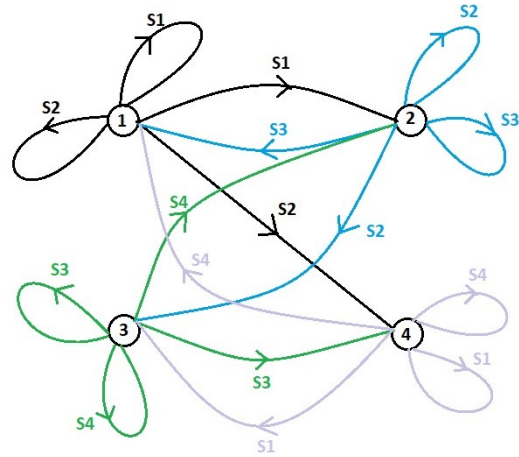


Figura 3.5: Grafo asociado.

En la sección 3.3 estudiaremos este ejemplo con detalle, ahí entenderemos mejor porque definimos el GIFS con esa estructura específica.

3.2. Condición de cadena

Parece ser que el trabajo de saber si un GIFS es lineal o no es bastante complicado. En esta sección introduciremos una nueva condición que nos facilitará este trabajo.

Sea $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$ un GIFS ordenado, con conjuntos invariantes $\{E_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ únicos. Para una arista $w \in \Gamma$, denotamos por g_w su similaridad asociada y $t(w)$ el estado terminal.

Definición 3.2.1. Para cada $i \in \mathcal{A}$, llamamos *menor camino* a un camino $w \in \Gamma_i^\infty$, si $w|_n$ es el menor camino en Γ_i^n para todo n . En ese caso, decimos que $a = \pi_i(w)$ es la *cabeza* de E_i . Análogamente, definimos el *mayor camino* w' de Γ_i^∞ y llamamos a $b = \pi_i(w')$ la *cola* de E_i .

Definición 3.2.2. Decimos que un GIFS ordenado satisface la *condición de cadena* si para cualquier $i \in \mathcal{A}$, y para cualesquiera dos aristas adyacentes $w, \gamma \in \Gamma_i$ con $\omega \prec \gamma$, se tiene

$$g_w(\text{cola de } E_t(w)) = g_\gamma(\text{cabeza de } E_t(\gamma)).$$

Ejemplo 3.2.3. Sea un IFS $\{S_1, \dots, S_N\}$ con K el conjunto invariante, tal que, $K = S_1(K) + S_2(K) + \dots + S_N(K)$. La menor codificación (menor camino) es 1^∞ , asociado siempre a la similaridad S_1 , y el mayor es N^∞ , asociado a S_N . Entonces la cabeza de K es el punto fijo de S_1 y la cola de K es el punto fijo de S_N , denotados por $Fix(S_1)$ y $Fix(S_N)$ respectivamente.

Por tanto, la condición de cadena se satisface si y solo si

$$S_i(Fix(S_N)) = S_{i+1}(Fix(S_1)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ejemplo 3.2.4. Antes de continuar, para coger manejo y afianzar bien esta idea, vamos a ver que el IFS del Ejemplo 3.1.8 no satisface la condición de cadena. Recordemos que tenemos el IFS $\{S_j\}_{j=1}^4$ dado por

$$S_j(z) = \frac{z + d_j}{2}, \quad \text{donde } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (0, 1, 1 + i, i).$$

El conjunto invariante de este IFS es el cuadrado unidad. Hemos de calcular el punto fijo de S_1 , $Fix(S_1)$, y el de S_4 , $Fix(S_4)$. Hemos de ver entonces que no se verifica

$$S_j(Fix(S_4)) = S_{j+1}(Fix(S_1)) \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Dado que $S_1(z) = z/2$, tenemos entonces que el único punto fijo es el 0, luego $A = 0$. Por otro lado, $S_4(z) = z/2 + i/2$, dado que $S_4(i) = i$, es el punto fijo del cuadrado unidad que estábamos buscando, luego $B = i$. Tenemos que

$$S_1(i) = i/2 \neq 1/2 = S_2(0).$$

Por tanto, no se verifican todas las ecuaciones de (3.2), luego el IFS no verifica la condición de cadena. Como veremos en el siguiente Teorema, no será un IFS lineal. En cambio, en la sección 3.3 veremos que el GIFS que definimos a partir de este IFS si la verifica.

Teorema 3.2.5. *Un GIFS ordenado es un GIFS lineal si y solo si satisface la condición de cadena.*

Demostración. \Leftarrow | Supongamos en primer lugar que $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$ satisface la condición de cadena. Sea $i \in \mathcal{A}$, sean ω y γ dos caminos adyacentes en

Γ_i^n con $\omega \prec \gamma$ y n cualquiera. Vamos a probar que $E_\omega \cap E_\gamma \neq \emptyset$, lo que nos llevará al resultado. Denotamos por $\eta = \omega \wedge \gamma$ al mayor prefijo común de ambos caminos. De forma que si $k = |\eta|$, entonces ambos caminos pueden ser escritos como $\omega = \eta\omega_{k+1}\dots\omega_n$ y $\gamma = \eta\gamma_{k+1}\dots\gamma_n$. Dado que ω y γ son adyacentes, tendremos entonces

- ω_{k+1} y γ_{k+1} son aristas adyacentes en Γ_j donde $j = t(\eta)$, y $\omega_{k+1} \prec \gamma_{k+1}$.
- $\omega_{k+2}\dots\omega_n$ es el mayor camino en $\Gamma_{t(\omega_{k+1})}^{n-k-1}$ y $\gamma_{k+2}\dots\gamma_n$ es el menor camino en $\Gamma_{t(\gamma_{k+1})}^{n-k-1}$.

En efecto, la segunda parte se sigue del hecho de que si $\omega_{k+2}\dots\omega_n$ no fuera el mayor camino, entonces habría un camino mayor iniciando en ω_{k+2} , y este nuevo camino estaría entre ω y γ . Análogamente para el otro caso, si $\gamma_{k+2}\dots\gamma_n$ no fuera el menor camino, habría un camino menor partiendo de γ_{k+2} , y este nuevo camino estaría entre ω y γ .

Por el segundo punto, tenemos entonces que

$$b = \pi_i(\omega_{k+2}\dots\omega_n) = (\text{cola de } E_{t(\omega_{k+1})}) \in E_{\omega_{k+2}\dots\omega_n}$$

dado que el código de b comienza con $\omega_{k+2}\dots\omega_n$. Por tanto

$$g_{\omega_{k+1}}(\text{cola de } E_{t(\omega_{k+1})}) \in E_{\omega_{k+1}\dots\omega_n}.$$

Análogamente,

$$g_{\gamma_{k+1}}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_{k+1})}) \in E_{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n}.$$

Dado que $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$ satisface la condición de cadena y ω_{k+1} y γ_{k+1} son aristas adyacentes, se tiene entonces que

$$g_{\omega_{k+1}}(\text{cola de } E_{t(\omega_{k+1})}) = g_{\gamma_{k+1}}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_{k+1})}).$$

Por tanto, $E_{\omega_{k+1}\dots\omega_n} \cap E_{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n} \neq \emptyset$. Así que

$$\begin{aligned} E_\omega \cap E_\gamma &= g_{\omega_1} \circ \dots \circ g_{\omega_n}(E) \cap g_{\gamma_1} \circ \dots \circ g_{\gamma_n}(E) \\ &= g_\eta \circ g_{\omega_{k+1}} \circ \dots \circ g_{\omega_n}(E) \cap g_\eta \circ g_{\gamma_{k+1}} \circ \dots \circ g_{\gamma_n}(E) \\ &= g_\eta(g_{\omega_{k+1}} \circ \dots \circ g_{\omega_n}(E) \cap g_{\gamma_{k+1}} \circ \dots \circ g_{\gamma_n}(E)) \\ &= g_\eta(E_{\omega_{k+1}\dots\omega_n} \cap E_{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n}) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

\Rightarrow | Supongamos ahora que $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{G}, \prec)$ es un GIFS lineal. Sea $i \in \mathcal{A}$, sean ω_1 y γ_1 dos aristas adyacentes en Γ_i satisfaciendo $\omega_1 \prec \gamma_1$. Sea $(\omega_k)_{k=2}^\infty$ el mayor camino en $\Gamma_{t(\omega_1)}^\infty$ y $(\gamma_k)_{k=2}^\infty$ el menor camino en $\Gamma_{t(\gamma_1)}^\infty$. Denotamos

$$\omega|_k = \omega_1\dots\omega_k \quad \text{and} \quad \gamma|_k = \gamma_1\dots\gamma_k,$$

entonces para todo $k \geq 1$, $\omega|_k$ y $\gamma|_k$ son caminos adyacentes en Γ_i^k . Sabemos que se verifica

$$g_{\omega_1}(\text{cola de } E_{t(\omega_1)}) = \pi_i((\omega_p)_{p \geq 1}) \in E_{\omega|_k},$$

$$g_{\gamma_1}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_1)}) = \pi_i((\gamma_p)_{p \geq 1}) \in E_{\gamma|_k},$$

para todo $k \geq 1$. Dado que $E_{\omega|_k} \cap E_{\gamma|_k} \neq \emptyset$, para todo k por ser un GIFS lineal. Conforme k se hace mayor, estos conjuntos son cada vez mas pequeños, pues las similitudes lo hacen mas pequeño cada vez, luego la intersección será cada vez mas pequeña. Por tanto, la distancia entre $g_{\omega_1}(\text{cola de } E_{t(\omega_1)})$ y $g_{\gamma_1}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_1)})$ puede ser todo lo pequeña que queramos. Sea $\varepsilon > 0$. Tendremos entonces que $d(g_{\omega_1}(\text{cola de } E_{t(\omega_1)}), g_{\gamma_1}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_1)})) \leq \varepsilon$, haciendo tender ε a 0, deducimos que la distancia es 0. Por tanto

$$g_{\omega_1}(\text{cola de } E_{t(\omega_1)}) = g_{\gamma_1}(\text{cabeza de } E_{t(\gamma_1)}),$$

y la condición de cadena se verifica. El teorema queda probado. □

3.3. Estudio de un GIFS

En esta sección vamos a estudiar en profundidad el GIFS del Ejemplo 3.1.8. Veremos que el GIFS definido a partir del IFS es lineal. Esto nos hará entender mejor porque definimos así la estructura del GIFS. Para finalmente, en la siguiente sección ver como nos ayudan en la obtención de curvas que llenan el espacio.

Recordemos, tenemos el IFS $\{S_j\}_{j=1}^4$ dado por

$$S_j(z) = \frac{z + d_j}{2}, \quad \text{donde } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (0, 1, 1 + i, i).$$

Sean los conjuntos E_1, E_2, E_3, E_4 los dibujados en la Figura 3.4. Definimos el siguiente GIFS

$$\begin{cases} E_1 = S_1(E_1) + S_1(E_2) + S_2(E_4) + S_2(E_1) \\ E_2 = S_2(E_2) + S_2(E_3) + S_3(E_1) + S_3(E_2) \\ E_3 = S_3(E_3) + S_3(E_4) + S_4(E_2) + S_4(E_3) \\ E_4 = S_4(E_4) + S_4(E_1) + S_1(E_3) + S_1(E_4) \end{cases}$$

Queremos ver que este es un GIFS lineal. Por lo visto en la sección anterior, hemos de comprobar que se verifica la condición de cadena. Tenemos

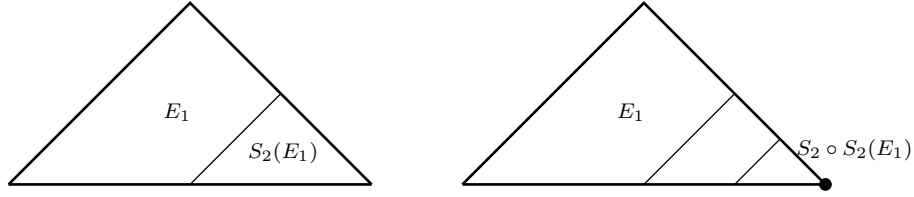


Figura 3.6: Efecto de aplicar S_2 a E_1 sucesivamente.

que $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, luego hemos de probar que para cualesquiera dos aristas adyacentes $w, \gamma \in \Gamma_i$, $i \in \mathcal{A}$, con $\omega \prec \gamma$, se tiene

$$g_w(\text{cola de } E_{t(w)}) = g_\gamma(\text{cabeza de } E_{t(\gamma)}).$$

Recordemos que en la definición usamos “+” en lugar de “ \cup ” para dotarlo de una estructura de orden.

Comencemos por $i = 1$. Sean dos aristas adyacentes en 1, por ejemplo, las dos primeras. Luego si $\omega, \gamma \in \Gamma_1$ son estas aristas, tenemos entonces que $g_\omega = S_1$ y $g_\gamma = S_1$. La arista ω es la que se queda en el nodo 1, mientras que γ es la que va del nodo 1 al 2. Podemos verlo en la Figura 3.5. Por tanto, $t(\omega) = 1$ y $t(\gamma) = 2$. Para que se verifique la condición de cadena se ha de verificar entonces $g_w(\text{cola de } E_{t(w)}) = g_\gamma(\text{cabeza de } E_{t(\gamma)})$, lo que equivale a

$$S_1(\text{cola de } E_1) = S_1(\text{cabeza de } E_2).$$

Cola de E_1 ; sabemos que el mayor camino $\omega' \in \Gamma_1^\infty$ es el camino que siempre se queda en 1, cuya arista está asociada a S_2 . Luego

$$b = \text{cola de } E_1 = \pi_1(\omega') = \bigcap_{n \geq 1} E_{w'|_n} = 1.$$

En efecto, $E_{w'|_n}$ es la composición n veces de S_2 aplicado a E_1 , es decir,

$$E_{w'|_n} = \underbrace{S_2 \circ \dots \circ S_2}_{n \text{ veces}}(E_1).$$

$S_2(E_1)$ es un triángulo mas pequeño que E_1 , $S_2 \circ \dots \circ S_2(E_1)$, será cada vez un triángulo menor como podemos ver en la Figura 3.6, la intersección de todos estos triángulos será el vértice inferior derecho, pues es común a todos estos triángulos, luego efectivamente $b = 1$, que es el punto fijo de S_2 .

Cabeza de E_2 ; sabemos que el menor camino $\gamma' \in \Gamma_2^\infty$ es el camino que siempre se queda en 2, cuya arista esta asociada a S_2 . Luego

$$a = \text{cabeza de } E_2 = \pi_2(\gamma') = \bigcap_{n \geq 1} E_{\gamma'|_n} = 1.$$

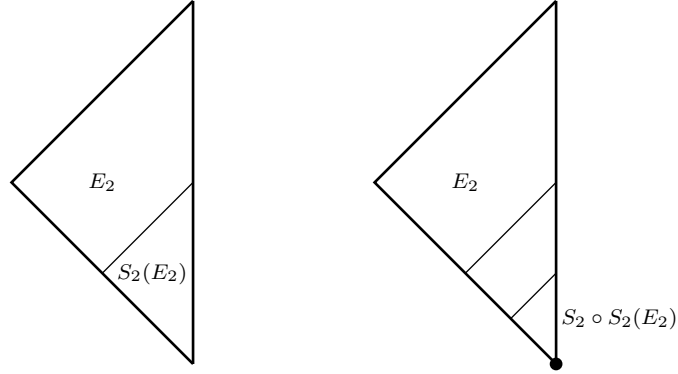


Figura 3.7: Efecto de aplicar S_2 a E_2 sucesivamente.

En efecto, $E_{\gamma'|n}$ es la composición n veces de S_2 aplicado a E_2 , es decir,

$$E_{\gamma'|n} = \underbrace{S_2 \circ \dots \circ S_2}_{n \text{ veces}}(E_2).$$

$S_2(E_2)$ es un triángulo mas pequeño que E_2 , $S_2 \circ \dots \circ S_2(E_2)$, será cada vez un triángulo menor como podemos ver en la Figura 3.7. La intersección de todos estos triángulos será el vértice inferior, pues es común a todos los triángulos, luego efectivamente $a = 1$. Observemos que es el punto fijo de S_2 .

Finalmente;

$$S_1(\text{cola de } E_1) = S_1(b) = S_1(1) = S_1(a) = S_1(\text{cabeza de } E_2).$$

Luego estas dos aristas verifican la condición de cadena.

Sean ahora otras dos aristas adyacentes en 1, por ejemplo, la segunda y la tercera. Luego si $\omega, \gamma \in \Gamma_1$ son estas aristas, tenemos entonces que $g_\omega = S_1$ y $g_\gamma = S_2$. La arista ω es la que va del nodo 1 al 2, mientras que γ es la que va del nodo 1 al 4. Podemos verlo en la Figura 3.5. Por tanto, $t(\omega) = 2$ y $t(\gamma) = 4$. Para que se verifique la condición de cadena, se ha de verificar entonces $g_\omega(\text{cola de } E_{t(\omega)}) = g_\gamma(\text{cabeza de } E_{t(\gamma)})$, lo que equivale a

$$S_1(\text{cola de } E_2) = S_2(\text{cabeza de } E_4).$$

Cola de E_2 ; sabemos que el mayor camino $\omega' \in \Gamma_2^\infty$ es el camino que siempre se queda en 2, cuya arista esta asociada a S_3 . Luego

$$b = \text{cola de } E_2 = \pi_2(\omega') = \bigcap_{n \geq 1} E_{w'|n} = 1 + i.$$

En efecto, $E_{w'|n}$ es la composición n veces de S_3 aplicado a E_2 , es decir,

$$E_{w'|n} = \underbrace{S_3 \circ \dots \circ S_3}_{n \text{ veces}}(E_2).$$

$S_3(E_2)$ es un triángulo mas pequeño que E_2 , $S_3 \circ \dots \circ S_3(E_2)$, será cada vez un triángulo menor. Luego la intersección de todos estos triángulos será el vértice superior pues es común a todos los triángulos, luego efectivamente $b = 1 + i$. Observemos que es el punto fijo de S_3 .

Cabeza de E_4 ; sabemos que el menor camino $\gamma' \in \Gamma_4^\infty$ es el camino que siempre se queda en 4, cuya arista esta asociada a S_4 . Luego

$$a = \text{cabeza de } E_4 = \pi_4(\gamma') = \bigcap_{n \geq 1} E_{\gamma'|_n} = i.$$

En efecto, $E_{\gamma'|_n}$ es la composición n veces de S_4 aplicado a E_4 , es decir,

$$E_{\gamma'|_n} = \underbrace{S_4 \circ \dots \circ S_4}_{n \text{ veces}}(E_4).$$

Se procede de forma análoga a los demás casos, observemos que i es el punto fijo de S_4 .

Finalmente, tenemos que

$$S_1(\text{cola de } E_2) = S_1(1 + i) = \frac{1 + i}{2} = S_2(i) = S_2(\text{cabeza de } E_4).$$

Luego estas dos aristas verifican la condición de cadena.

Por otro lado, sean ahora otras dos aristas adyacentes en 1, por ejemplo, la tercera y la cuarta. Luego si $\omega, \gamma \in \Gamma_1$ son estas aristas, tenemos entonces que $g_\omega = S_2$ y $g_\gamma = S_2$. Como podemos ver en la Figura 3.5, $t(\omega) = 4$ y $t(\gamma) = 1$. Para que se verifique la condición de cadena, se ha de verificar entonces

$$S_2(\text{cola de } E_4) = S_2(\text{cabeza de } E_1).$$

Cola de E_4 ; sabemos que el mayor camino $\omega' \in \Gamma_4^\infty$ es el camino que siempre se queda en 4, cuya arista esta asociada a S_1 . Luego

$$b = \text{cola de } E_4 = \pi_2(\omega') = \bigcap_{n \geq 1} E_{\omega'|_n} = 0.$$

En efecto, como en los ejemplos anteriores, $b = 0$, pues es el punto fijo de S_1 .

Cabeza de E_1 ; sabemos que el menor camino $\gamma' \in \Gamma_1^\infty$ es el camino que siempre se queda en 1, cuya arista esta asociada a S_1 . Luego

$$a = \text{cabeza de } E_1 = \pi_1(\gamma') = \bigcap_{n \geq 1} E_{\gamma'|_n} = 0.$$

En efecto, $a = 0$, pues es el punto fijo de S_1 .

Finalmente;

$$S_2(\text{cola de } E_4) = S_2(b) = S_2(0) = S_2(a) = S_2(\text{cabeza de } E_1).$$

Luego estas dos aristas verifican la condición de cadena.

Por último, sean ahora otras dos aristas adyacentes en 1, por ejemplo, la cuarta y la primera. Luego si $\omega, \gamma \in I_1$ son estas aristas, tenemos entonces que $g_\omega = S_2$ y $g_\gamma = S_1$. La arista ω se queda en el nodo 1, mientras que γ también se queda en el 1. Por tanto, $t(\omega) = 1$ y $t(\gamma) = 1$. Ojo, ahora $\gamma \prec \omega$, para que se verifique la condición de cadena, se ha de verificar entonces

$$S_1(\text{cola de } E_1) = S_2(\text{cabeza de } E_1)$$

Tanto la cola de E_1 como la cabeza de E_1 ya las hemos calculado anteriormente, y vimos que eran 1 y 0 respectivamente. Finalmente;

$$S_1(\text{cola de } E_1) = S_1(1) = 1/2 = S_2(0) = S_2(\text{cabeza de } E_1).$$

Luego todas las aristas que parten del nodo 1 verifican la condición de cadena.

Nota 3.3.1. Si repetimos este proceso con todas las aristas que son adyacentes en cada nodo, veremos que el GIFS satisface la condición de cadena.

Esto siempre se va a verificar debido a la estructura con la que definimos el GIFS como vamos a observar a continuación.

Observación 3.3.2. Sea un nodo $i \in \mathcal{A}$. Por la estructura con la que definimos el GIFS, tenemos que el mayor camino en i es quedarse en este nodo, asociando este camino siempre a la similaridad S_{i+1} , por lo que como hemos razonado en los ejemplos anteriores, la cola de E_i será el punto fijo de S_{i+1} .

Análogamente, el menor camino en i es quedarse en el nodo, asociando esta arista con la similaridad S_i , por lo que la cabeza de E_i será siempre el punto fijo de S_i .

Dado que los puntos fijos de las similaridades S_i con $i \in \mathcal{A}$, son $0, 1, 1+i$ e i respectivamente, se tiene entonces que las cabezas y cola de cada conjunto son las indicadas en la Figura 3.8. De aquí, se deduce fácilmente que se verifica la condición de cadena para este GIFS.

Nota 3.3.3. Como vimos en el Ejemplo 3.2.4, el IFS no era lineal, pues no satisfacía la condición de cadena. En cambio, el GIFS que definimos a partir de el si es lineal.

En la siguiente sección veremos la importancia que tiene saber que este es un GIFS lineal. Por ello, vimos en la sección anterior la condición de cadena, que ha sido el camino para probar que este es un GIFS lineal.

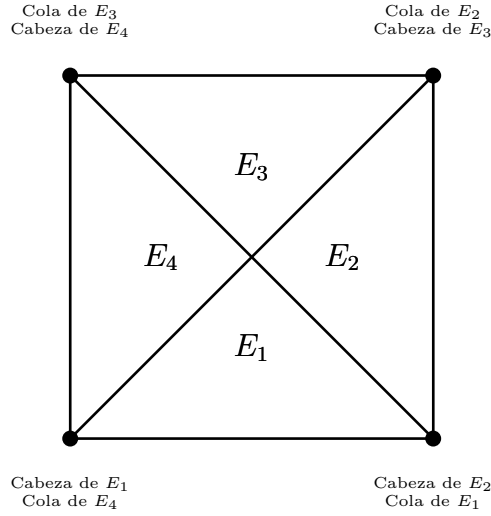


Figura 3.8: Cabezas y colas de cada conjunto.

3.4. Construcción de curvas que llenan el espacio

El objetivo de esta sección es entender que relación hay entre los GIFS y las curvas que llenan el espacio. Para ello, primero hemos de detallar que entendemos por curva que llena el espacio.

Debido a las buenas propiedades que satisfacen muchas de estas curvas, definimos la parametrización óptima de conjuntos generales de la siguiente forma.

Definición 3.4.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de dimensión Hausdorff α . Una aplicación $\phi : [0, 1] \rightarrow K$ se dice una parametrización óptima de K si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. ϕ preserva la medida, es decir,

$$m_\alpha(\phi(F)) = c\lambda_1(F) \quad \text{y} \quad \lambda_1(\phi^{-1}(B)) = c^{-1}m_\alpha(B).$$

para cualquier conjunto de Borel $F \subset [0, 1]$ y $B \subset K$, donde $c = m_\alpha(K)$.

2. Existe $K' \subset K$ y $I' \subset [0, 1]$ tal que $m_\alpha(K \setminus K') = \lambda_1([0, 1] \setminus I') = 0$ y $\phi : I' \rightarrow K'$ es una biyección.
3. ϕ es $1/\alpha$ -Hölder continua, es decir, existe una constante $c' > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c'|x - y|^{1/\alpha} \quad \text{para todo } x, y \in [0, 1].$$

Observación 3.4.2. Por el teorema de Mazurkiewicz-Hahn ([12]), un conjunto es la imagen por una aplicación continua de $[0, 1]$ si y solo si es compacto, conexo, y localmente conexo.

Se han realizado numerosos estudios acerca de la continuidad de Hölder, se han visto la existencia de parametrizaciones de este tipo para algunas clases de conjuntos autosimilares ([10]).

Definición 3.4.3. Sea K un conjunto de dimensión de Hausdorff α . A una parametrización óptima de K la llamaremos **curva que llena el espacio** si K tiene interior no vacío. En cualquier otro caso, la llamaremos *curva de relleno fractal*.

Teorema 3.4.4. *Consideramos un GIFS lineal satisfaciendo la condición del conjunto abierto (OSC). Sean $\{E_j\}_{j=1}^N$ los conjuntos invariantes asociados, verificando $0 < m_\alpha(E_j) < \infty$ para $j = 1, \dots, N$, donde α es su dimensión correspondiente. Entonces E_j admite una parametrización óptima para todo $j = 1, \dots, N$. En particular, si todo E_j tiene interior no vacío, cada E_j admite una curva que rellena el espacio.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en la sección 8 de [5]. □

Por tanto, ya podemos ver la importancia de que un GIFS sea lineal, pues nos permite demostrar que hay una curva que llena sus conjuntos invariantes. La construcción de esta la veremos más adelante. La prueba del Teorema 3.4.4 es constructiva; por lo tanto, para construir curvas que llenan el espacio basta con buscar una estructura de GIFS lineal del conjunto dado.

Observación 3.4.5. Sabemos que el Ejemplo 3.1.8, estudiado en la sección anterior en profundidad, es un GIFS lineal que verifica todas las condiciones del Teorema 3.4.4. Por tanto, todos los conjuntos invariantes asociados, es decir, cada triángulo de la Figura 3.4, admite una curva que llena el espacio, y la unión de estas curvas es una curva cerrada que llena el cuadrado unidad, la curva de Sierpinski.

3.4.1. IFS recorrido en red

Como hemos visto, el IFS del Ejemplo 3.1.8 no es lineal, lo que hicimos fue buscar una estructura específica de GIFS usando el IFS de forma que este si fuera lineal. Pero esta estructura no es fácil de encontrar ni siempre es posible hacerlo, por ello en esta sección estudiaremos el *IFS recorrido en red* en el plano. Pues este tipo de IFS nos permitirá siempre construir un GIFS lineal, es más sabremos como hacerlo.

Sea $\mathbb{L} = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ una red cuadrada. Decimos que dos puntos en \mathbb{L} son vecinos si su distancia es 1. Entonces obtenemos un grafo al que seguiremos denotando por \mathbb{L} .

Sea P un camino en \mathbb{L} pasando por los puntos $0 = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = d$ en este orden. Sea $\mathcal{S} = \{S_k\}_{k=1}^n$ un IFS ordenado en \mathbb{C} tal que

$$S_k(\{0, d\}) = \{z_{k-1}, z_k\}, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Llamamos a \mathcal{S} IFS recorrido en red respecto del camino P . Para que se verifique lo anterior, como las similaridades son composición de una traslación, giro y una dilatación, estas serán de la forma $S_k(z) = \alpha z + \beta$, o $S_k(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y por tanto, para que se verifiquen las ecuaciones (3.3) tenemos cuatro elecciones posibles para cada k . Si indicamos cada una de las cuatro similaridades con un segmento lineal con media flecha en la punta que indica el sentido y según a que lado este la mitad de la flecha cual de las dos posibilidades de este sentido es. Podemos entonces describir el IFS como un camino compuesto de segmentos marcados. Si todos los S_k son de la forma $\alpha z + \beta$, entonces decimos que \mathcal{S} es libre de simetrías de reflexión.

Teorema 3.4.6. *Sea K el conjunto invariante de un IFS recorrido en red. Entonces podremos construir un GIFS lineal con a lo sumo dos estados y con conjunto invariante K (pues los dos conjuntos invariantes que tendrá el GIFS serán K). Es más, podemos tomar el GIFS lineal de forma que satisfaga la OSC si el IFS original lo satisface.*

Demostración. Sea $\{S_k\}_{k=1}^n$ un IFS recorrido en red definido por (3.3). Sea K el conjunto invariante. Para $k = 1, \dots, n$ definimos

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{si } (S_k(0), S_k(d)) = (z_{k-1}, z_k), \\ -1, & \text{si } (S_k(0), S_k(d)) = (z_k, z_{k-1}). \end{cases} \quad (3.4)$$

Entonces, definimos un GIFS ordenado con dos estados $\{1, -1\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} E_1 = S_1(E_{v_1}) + \dots + S_n(E_{v_n}) \\ E_{-1} = S_n(E_{-v_n}) + \dots + S_1(E_{-v_1}) \end{cases} \quad (3.5)$$

(Podemos verlo como que la primera ecuación corresponde al camino P , y la otra al camino contrario de P .) Claramente $E_1 = E_{-1} = K$, pues al ser K el conjunto invariante del IFS, se verifica $K = \bigcup_{i=1}^n S_i(K)$.

Queremos ver que es un GIFS lineal. Para ello, primero debemos probar que la cabeza y cola de E_1 son 0 y d , respectivamente, también que la cabeza y cola de E_{-1} son d y 0 , respectivamente.

Veamos, dado que $v_1 = \pm 1$ y $v_n = \pm 1$, consideramos cuatro casos. Supongamos que $v_1 = 1$ y $v_n = 1$. Denotamos la k -ésima arista saliendo del nodo i por $\lambda_{i,k}$, entonces la primera arista saliendo del nodo 1 es una arista que vuelve a 1, por tanto $(\lambda_{1,1})^\infty$ es el menor camino. De aquí se sigue que la cabeza de E_1 es 0, pues es el punto fijo de S_1 , ya que $S_1(0) = z_0 = 0$. Análogamente, el mayor camino que parte del nodo 1 es $(\lambda_{1,n})^\infty$, así que la cola de E_1 es d , el punto fijo de S_n , pues $S_n(d) = z_n = d$. Por el mismo argumento, la cabeza y cola de E_{-1} son d y 0 respectivamente, pues son el punto fijo de S_n , la similaridad asociada al menor camino del vértice -1 , y de S_1 , la similaridad asociada al mayor camino del vértice -1 . Obtenemos el resultado que queríamos. Los otros tres casos se prueban análogamente. Es mas, si todos los v_k son igual a 1, o todos los v_k son igual a -1 , entonces el GIFS (3.5) se convierte en un IFS lineal.

Una vez probado esto, usando (3.4) deduciremos que el GIFS (3.5) satisface la condición de cadena. En efecto, para que se verifique la condición de cadena, se ha de verificar

$$S_k(\text{cola de } E_{v_k}) = S_{k+1}(\text{cabeza de } E_{v_{k+1}}).$$

Para cada k tenemos cuatro opciones para el valor de v_k y de v_{k+1} . Si $v_k = 1$ y $v_{k+1} = 1$, entonces tenemos $S_k(\text{cola de } E_1) = S_k(d) = z_k = S_{k+1}(0) = S_{k+1}(\text{cabeza de } E_1)$. Si $v_k = 1$ y $v_{k+1} = -1$, entonces $S_k(\text{cola de } E_1) = S_k(d) = z_k = S_{k+1}(d) = S_{k+1}(\text{cabeza de } E_{-1})$. Si $v_k = -1$ y $v_{k+1} = 1$, entonces $S_k(0) = z_k = S_{k+1}(0)$. Si $v_k = -1$ y $v_{k+1} = -1$, entonces $S_k(0) = z_k = S_{k+1}(d)$.

Luego verifica la condición de cadena, y por el Teorema 3.2.5 será un GIFS lineal.

Para la condición del conjunto abierto, si el IFS original la satisfacía con el conjunto U , entonces el nuevo GIFS la satisface con los conjuntos abiertos $\{U, U\}$. Por tanto, el teorema queda probado. \square

En [13] se pueden ver mas algoritmos para comprobar la OSC en un IFS recorrido en red.

Observación 3.4.7. Con este Teorema podemos ver la ventaja que tenemos ahora con estos nuevos IFS, pues siempre vamos a poder generar una curva que llene su conjunto invariante (si tiene interior no vacío). Es más, en la prueba del Teorema veremos como se crean estos GIFS lineales, que nos garantizaran la existencia de dicha curva por el Teorema 3.4.4.

La curva de Peano, la curva de Hilbert y la curva del dragón son todas generadas por un IFS recorrido en red (libre de simetrías de reflexión). En el siguiente ejemplo, estudiaremos la curva de Hilbert.

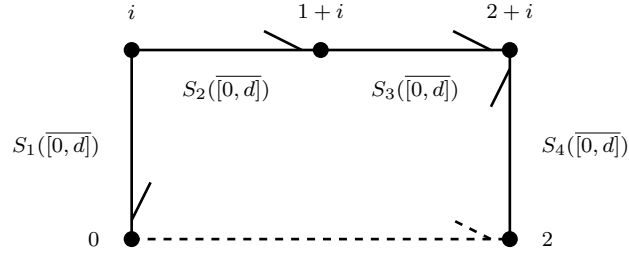


Figura 3.9: Camino para la curva de Hilbert.

Ejemplo 3.4.8. (*Curva de Hilbert*) Sea el segmento inicial que va de 0 a 2, consideramos el camino P que va de 0 a 2 dado por $0 = z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 = 2$, donde $z_1 = 1, z_2 = 1 + i, z_3 = 2 + i$. Buscamos un IFS $\mathcal{S} = \{S_k\}_{k=1}^n$ tal que

$$S_k(\{0, d\}) = \{z_{k-1}, z_k\}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Sea entonces el IFS recorrido en red dado por $S_1(z) = \frac{-iz}{2} + i, S_2(z) = \frac{z}{2} + i, S_3(z) = \frac{z}{2} + (1 + i), S_4(z) = \frac{iz}{2} + 2$. En efecto, este IFS verifica:

$$\begin{cases} (S_1(0), S_1(d)) = (i, 0) \\ (S_2(0), S_2(d)) = (i, 1 + i) \\ (S_3(0), S_3(d)) = (1 + i, 2 + i) \\ (S_4(0), S_4(d)) = (2, 2 + i) \end{cases}$$

Todo esto lo podemos ver en la Figura 3.9, donde lo hemos dibujado acorde al criterio que establecimos al principio de este apartado. Podemos observar que este dibujo nos da toda la información que necesitamos del IFS recorrido en red. Por el Teorema 3.4.6 si K es su conjunto invariante, podemos construir un GIFS lineal donde sus dos conjuntos invariantes son iguales a K . Vamos a construir este GIFS como hicimos en la prueba de este Teorema.

Claramente $v_2 = v_3 = 1$ y $v_1 = v_4 = -1$. Por tanto, el GIFS lineal correspondiente es:

$$\begin{cases} E_1 = S_1(E_{-1}) + S_2(E_1) + S_3(E_1) + S_4(E_{-1}) \\ E_{-1} = S_4(E_1) + S_3(E_{-1}) + S_2(E_{-1}) + S_1(E_1) \end{cases} \quad (3.6)$$

Como hemos mencionado antes, $E_1 = E_{-1} = K$. Por lo visto en el Teorema 3.4.4, K admitirá una parametrización óptima. En este caso, como podemos ver en la Figura 3.10 K será el cuadrado de lado 2 ya que $K = S_1(K) \cup S_2(K) \cup S_3(K) \cup S_4(K)$ que tiene interior no vacío. Luego con este GIFS construiremos una curva que llena el cuadrado, la famosa curva de Hilbert, veremos su construcción en el Ejemplo 3.4.9 de la siguiente sección.

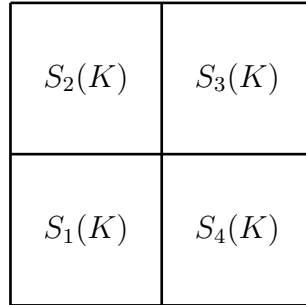


Figura 3.10: Similaridades sobre K , el cuadrado de lado 2.

3.4.2. Visualización

Llegados a este punto, solo nos queda ver como podemos construir y visualizar estas curvas que llenan el espacio.

Comencemos con un IFS lineal. Sea $\mathcal{S} = \{S_k\}_{k=1}^N$ un IFS lineal satisfaciendo la OSC, con conjunto invariante K . Por lo visto en el Teorema 3.4.4 podemos construir una parametrización óptima ϕ de K . Esta será la curva que llene K . Para visualizar la curva límite ϕ , necesitamos elegir un patrón inicial. En efecto, podemos elegir cualquiera, aunque un patrón inicial adecuado nos hará mas bonita la visualización.

Denotemos por L_0 el patrón inicial, con a y b el punto inicial y final, respectivamente. (Normalmente para simplificar tomaremos L_0 como un segmento lineal que denotaremos $\overline{[a, b]}$.)

Fijado $n \geq 1$. Para cada camino $\omega \in \{1, \dots, N\}^n$, definimos $x_\omega = S_\omega(x)$, y denotaremos ω^+ el camino siguiente a ω (si $\omega \neq (N)^n$). Por ejemplo, si $\omega = 12$ entonces $x_\omega = S_\omega(x) = S_1 \circ S_2(x)$ y $\omega^+ = 13$. Conectamos $a_\omega = S_\omega(a)$ y $b_\omega = S_\omega(b)$ mediante $S_\omega(L_0)$, y conectamos también b_ω con a_{ω^+} mediante un segmento lineal, obtenemos entonces la curva

$$L_n = \sum_{|\omega|=n} (S_\omega(L_0) + \overline{[b_\omega, a_{\omega^+}]})$$

Aquí usamos \sum para indicar que L_n es la unión de pequeñas curvas, donde el orden esta dado por ω . Llamamos L_n la n -ésima aproximación de la curva ϕ que rellena el conjunto autosimilar del IFS. Como hemos comentado, diferentes elecciones de patrones iniciales darán diferentes aproximaciones en apariencia, sin embargo, la curva límite será la misma.

Por otro lado, para un GIFS lineal, necesitamos tomar un patrón inicial para cada E_j , que denotaremos como L_0^1, \dots, L_0^N . Denotaremos el punto inicial del patrón L_0^j por a_j y el punto final por b_j . Sabemos que E_j admite una curva

que lo rellena, definimos entonces la n -ésima aproximación de esta curva por

$$L_n^j = \sum_{|\omega| \in \Gamma_j^n} (g_\omega(L_0^{t(\omega)}) + \overline{[b_\omega, a_{\omega^+}]})$$

donde $b_\omega = g_\omega(b_{t(\omega)})$ y $a_{\omega^+} = g_{\omega^+}(a_{t(\omega^+)})$.

Ejemplo 3.4.9. Estudiemos la curva de Hilbert; como vimos en el Ejemplo 3.4.8, el IFS recorrido en red que considerábamos generaba el siguiente GIFS:

$$\begin{cases} E_1 = S_1(E_{-1}) + S_2(E_1) + S_3(E_1) + S_4(E_{-1}) \\ E_{-1} = S_4(E_1) + S_3(E_{-1}) + S_2(E_{-1}) + S_1(E_1) \end{cases}$$

Por tanto, tenemos dos nodos 1 y -1 , el conjunto invariante $E_1 = E_{-1} = K$, donde K es el cuadrado de lado 2. Como ya sabemos que es un GIFS lineal, habrá una curva que llena este cuadrado. Vamos a construir esta curva.

Como patrones iniciales tomamos el centro del cuadrado, es decir, $L_0^1 = L_0^{-1} = 1 + i$. Por tanto, $a_j = 1 + i = b_j$ para $j = -1, 1$. Denotaremos por ω_i el camino i -ésimo que parte del nodo 1, ω'_i será el camino i -ésimo que parte del nodo -1 . Calculemos la primera aproximación de la curva asociada al nodo 1, pues la del nodo -1 es la misma pero recorrida en el otro sentido. Tenemos entonces:

$$L_1^1 = \sum_{|\omega| \in \Gamma_1^1} \underbrace{(g_\omega(L_0^{t(\omega)}) + \overline{[g_\omega(b_{t(\omega)}), g_{\omega^+}(a_{t(\omega^+)})])}_{C_\omega} = \sum_{|\omega| \in \Gamma_1^1} C_\omega.$$

Con $\Gamma_1^1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ y $g_{\omega_1} = S_1$, $g_{\omega_2} = S_2$, $g_{\omega_3} = S_3$ y $g_{\omega_4} = S_4$.

Para ω_1 ;

$$\begin{aligned} C_{\omega_1} &= S_1(L_0^{-1}) + \overline{[S_1(b_{-1}), S_2(a_1)]} = S_1(1 + i) + \overline{[S_1(1 + i), S_2(1 + i)]} \\ &= \frac{1 + i}{2} + \overline{\left[\frac{1 + i}{2}, \frac{1 + 3i}{2}\right]} = \overline{\left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Para ω_2 ;

$$\begin{aligned} C_{\omega_2} &= S_2(L_0^1) + \overline{[S_2(b_1), S_3(a_1)]} = S_2(1 + i) + \overline{[S_2(1 + i), S_3(1 + i)]} \\ &= \overline{\left[\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, \frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Para ω_3 ;

$$\begin{aligned} C_{\omega_3} &= S_3(L_0^1) + \overline{[S_3(b_1), S_4(a_{-1})]} = S_3(1 + i) + \overline{[S_3(1 + i), S_4(1 + i)]} \\ &= \overline{\left[\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right]}. \end{aligned}$$

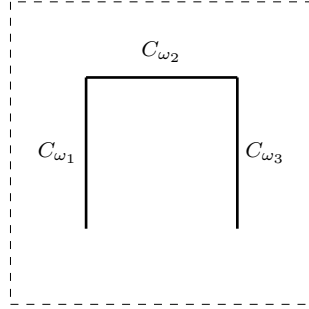


Figura 3.11: Primera aproximación de la curva de Hilbert.

Por tanto, la primera aproximación de la curva de Hilbert que podemos ver dibujado en la Figura 3.11, es

$$L_1^1 = C_{\omega_1} + C_{\omega_2} + C_{\omega_3}.$$

Para la segunda aproximación, la curva L_2^1 , tendremos muchos mas segmentos, en concreto como Γ_1^2 tiene 16 posibles caminos, quitamos el último de ellos que es el camino $\omega_4\omega_4'$, donde ω_4' denota el cuarto camino que sale del nodo -1 . Por tanto, para dibujar esta curva necesitaremos 15 segmentos que se crean como los anteriores. La curva tendrá la siguiente forma:

$$L_2^1 = \sum_{|\omega| \in \Gamma_1^2} \underbrace{(g_\omega(L_0^{t(\omega)}) + \overline{[g_\omega(b_{t(\omega)}), g_{\omega^+}(a_{t(\omega^+)})])}_{C_\omega} = \sum_{|\omega| \in \Gamma_1^2} C_\omega.$$

Vamos a calcular dos de ellos, sea el camino $\omega_2\omega_2 \in \Gamma_1^2$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} C_{\omega_2\omega_2} &= g_{\omega_2\omega_2}(L_0^1) + \overline{[g_{\omega_2\omega_2}(b_1), g_{\omega_2\omega_3}(a_1)]} \\ &= \overline{[S_2 \circ S_2(1+i), S_2 \circ S_3(1+i)]} \\ &= \overline{\left[S_2\left(\frac{1+3i}{2}\right), S_2\left(\frac{3+3i}{2}\right) \right]} \\ &= \overline{\left[\frac{1}{4} + \frac{7}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{7}{4}i \right]}. \end{aligned}$$

Sea ahora el camino $\omega_2\omega_3 \in \Gamma_1^2$

$$\begin{aligned} C_{\omega_2\omega_3} &= g_{\omega_2\omega_3}(L_0^1) + \overline{[g_{\omega_2\omega_3}(b_1), g_{\omega_2\omega_4}(a_{-1})]} \\ &= \overline{[S_2 \circ S_3(1+i), S_2 \circ S_4(1+i)]} \\ &= \overline{\left[S_2\left(\frac{3+3i}{2}\right), S_2\left(\frac{3+i}{2}\right) \right]} \\ &= \overline{\left[\frac{3}{4} + \frac{7}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{5}{4}i \right]}. \end{aligned}$$

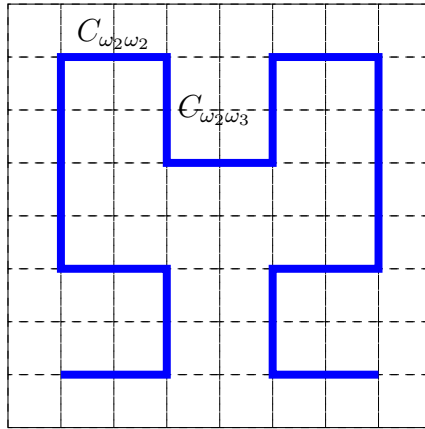


Figura 3.12: Segunda aproximación de la curva de Hilbert.

En la Figura 3.12 aparece dibujada la segunda aproximación de la curva de Hilbert. En ella, podemos ver cuales son los segmentos que hemos obtenido. Observemos que tomamos caminos adyacentes, y los segmentos correspondientes son correlativos en el dibujo. Los otros 15 segmentos se obtienen análogamente.

Ejemplo 3.4.10. En este ejemplo trataremos el caso particular de la curva de Sierpinski pues ha sido desarrollado en profundidad en la sección 3.3. Recordemos que este GIFS está compuesto por los conjuntos invariantes dados en la Figura 3.13 (izquierda), luego hemos de tomar 4 patrones iniciales que serán los dados en la Figura 3.13 (centro).

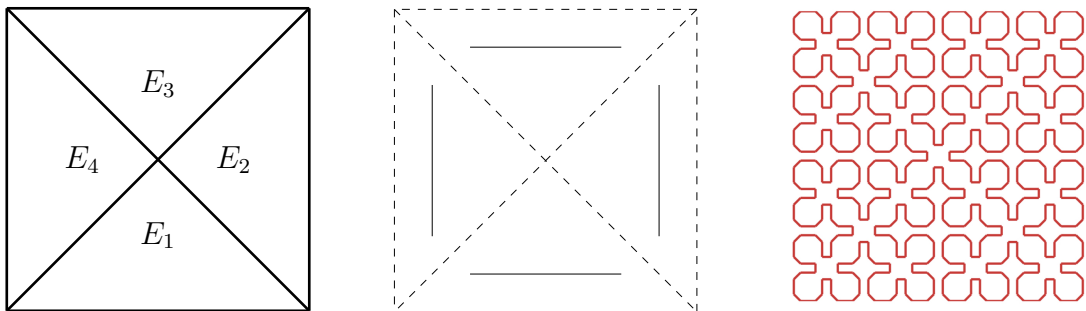


Figura 3.13: Conjuntos invariantes, patrones iniciales y 3ª iteración de la curva de Sierpinski.

Si siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, construiremos las distintas aproximaciones de la curva de Sierpinski. En la Figura 3.13 (derecha) podemos ver la tercera iteración, imagen tomada de [5].

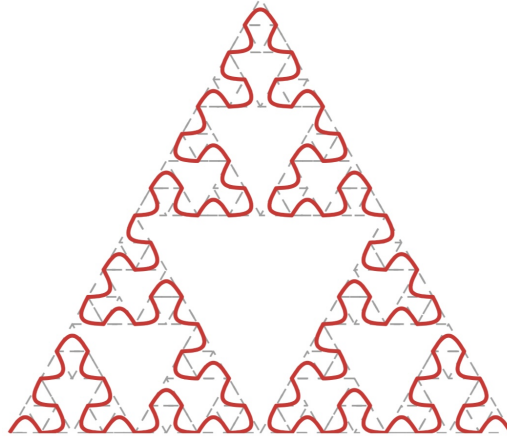


Figura 3.14: Curva que llena el triángulo de Sierpinski

Ya hemos visto como con esta teoría podemos estudiar curvas que llenan conjuntos clásicos, como el cuadrado. Pero va mas allá, puesto que también podemos rellenar otros conjuntos autosimilares mas complejos, que no tengan dimensión entera, como por ejemplo el triángulo de Sierpinski. En la Figura 3.14, tomada de [5], podemos ver dibujada esta curva. En [13] se amplía la teoría que hemos estudiado introduciendo algunas nuevas definiciones para desarrollar curvas como esta o la alfombra de Sierpinski. En definitiva, la construcción de curvas que llenan un objeto con dimensión no entera.

Bibliografía

- [1] STEIN E. M. Y SHAKARCHI R., *Real Analysis: measure theory, integration and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.
- [2] EDGAR G., *Measure, topology, and fractal geometry*, Springer New York, 2008.
- [3] FALCONER, K. J., *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] MATTILA P., *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] RAO H Y ZHANG S., *Space-filling curves of self similar sets (I): iterated function systems with order structures*. Nonlinearity **29** 2112. 2016.
- [6] HUTCHINSON J. E. , *Fractals and self-similarity*, Indian Univ. Math. J. **30** 713-747. 1981.
- [7] LINDENMAYER A. , *Mathematical models for cellular interaction in development, parts I and II*, J. Theor. Biol. **30** 280-315. 1968.
- [8] ABELSON, H., DISESSA, A., *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. MIT Press. 1981.
- [9] DEKKING F. M. , *Recurrent sets*, Adv. Math. **44** 78-104. 1982.
- [10] HATA M, *On the structure of self-similar sets*, Japan J. Appl. Math. **2** 381-414. 1985.
- [11] MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, 1977.
- [12] SAGAN H , *Space-filling Curve*, New York: Springer, 1994.
- [13] DAI X., RAO H. Y ZHANG S., *Space-filling curves of self-similar sets (II): edge-to-trail substitution rule*. Nonlinearity **32** 1772. 2019.

- [14] MAULDIN D Y WILLIAMS S, *Hausdorff dimension in graph directed constructions* Trans. Am. Math. Soc. **309** 811-29. 1988.