TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

TEORÍA DE CONJUNTOS FINITOS

PABLO LUIS BAREA MARÍN

Sevilla, junio de 2023

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

TEORÍA DE CONJUNTOS FINITOS

DIRECTOR: FRANCISCO FÉLIX LARA MARTÍN
AUTOR: PABLO LUIS BAREA MARÍN

Sevilla, junio de 2023

Dedicado a mi madre, que pudo ver cómo comencé este viaje, pero no cómo lo he terminado.

"Por lo demás, el problema central es irresoluble: la enumeración, siquiera parcial, de un conjunto infinito."

Jorge Luis Borges, El Aleph

Resumen / Abstract

Resumen:

La Teoría de Conjuntos es un área del conocimiento comprendida entre la Lógica y las Matemáticas dedicada a la fundamentación de la segunda mediante herramientas tomadas de la primera. Este Trabajo de Fin de Grado busca servir de introducción *ab initio* a la Teoría de Conjuntos, prestando especial énfasis a las relaciones de buen orden y a las relaciones bien fundadas. Habiendo profundizado en ambas, aplicamos estos conocimientos a la Teoría de Conjuntos Finitos (FST) con el fin de, por un lado, estudiar las propiedades de varias nociones de finitud y probar en qué condiciones son equivalentes y, por otro, probar las relaciones de interdependencia entre varias teorías con respecto a FST, así como la independencia del Axioma de Regularidad de esta última teoría.

Palabras clave: conjunto, clase, axioma, independencia, buen orden, finitud

Abstract:

Set Theory is a field of knowledge between Logic and Mathematics dedicated to using tools from the former to fund the latter. This Degree's End Project aims to serve as an *ab intio*-introduction to Set Theory, placing a special emphasis in well order and well founded relations. Once we have studied both in detail, we apply what we have learnt to the Finite Set Theory (FST) aiming to, on the one hand, study some definitions of finiteness, their properties and prove under which conditions they are equivalent; and on the other, demonstrate the interdependence relations among some theories and FST, as well as the independence of the Axiom of Regularity from this last theory.

Key words: set, class, axiom, independence, well order, finiteness

Índice general

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado se presenta, simultáneamente, como una introducción rigurosa y mayormente autocontenida a la Teoría Axiomática de Conjuntos y como un estudio técnico de un aspecto particular de ésta: la noción de finitud y los conjuntos finitos desde un punto de vista propio de la Teoría de Modelos. Siendo dicho estudio el objetivo final del Trabajo, éste ha sido dividido en dos partes bien diferenciadas que presentaremos a continuación.

En la primera parte se introducen todos los conceptos necesarios para una correcta comprensión de los conjuntos finitos. Se compone de tres capítulos de temáticas distintas. A fin de que éstos rebasen su interés instrumental, hemos tratado de orientar su desarrollo hacia algunos resultados que consideramos centrales y sin los cuales sentimos que el trabajo de fundamentación quedaría incompleto.

En el primer capítulo se establecen, a través de la lógica de primer orden, las bases del lenguaje mediante el cual todo el estudio será llevado a cabo. Presenta, pues, una sección dedicada a la sintaxis y a la deducción formal, otra a la semántica, y una tercera al lenguaje propio de la Teoría de Conjuntos. La sintaxis de primer orden busca formalizar las reglas bajo las cuales una *fórmula* − intuitivamente hablando, una oración − *está bien formada* − *i.e.,* puede ser estudiada formalmente. Un conjunto de fórmulas cerradas conforma una *teoría*; esto es, el marco desde el cual se realiza un determinado estudio. Desde un punto de vista de la deducción formal, es especialmente importante la noción de *fórmula independiente*, pues son las fórmulas independientes las que amplían el alcance predicativo de las teorías. Mientras, la semántica de primer orden ahonda en el sentido que puede dotarse a las fórmulas bien formadas sintácticamente hablando. Asimismo, se enuncian algunos resultados que relacionan la deducción formal con la semántica. Con ellos buscamos explicar dos hechos. El primero de ellos es el traslado adecuado de las pruebas formales − que suelen ser tediosas y obscuras − a pruebas informales o dentro de un *modelo*, que es como se razona en Matemáticas. El segundo consiste en justificar la metodología hallada la última sección del último capítulo, esencialmente basada en encontrar distintos modelos de una misma teoría de tal manera que en unos sea cierta una fórmula y en otros su contraria. Tal y como comprobarán, mediante esta técnica lograremos demostrar la independencia del *Axioma de Regularidad* de cierta teoría compuesta exclusivamente por conjuntos finitos.

Finalmente, la última sección del capítulo particulariza la discusión de las dos secciones anteriores al objeto de estudio del Trabajo: la Teoría de Conjuntos. Se presentan los elementos que componen su lenguaje, se discurre brevemente sobre la noción de *igualdad* y, siendo lo más destacable, se presenta una herramienta básica que agiliza el lenguaje y facilita el estudio de los conjuntos: la noción de *clase*. A grandes rasgos, una clase representa una fórmula bien formada y consigue generalizar la noción de conjunto. En la misma sección terminaremos clasificándolas en dos tipos excluyentes: *conjunto* y *clase propia*. Hemos presentado su necesidad apelando a la emulación de las Matemáticas e ilustrado, mediante la célebre Paradoja de Russell, por qué se requiere una sólida fundamentación sintáctica de las clases para no derivar en contradicciones. Dicha fundamentación es, además, construida sin ampliar indebidamente nuestro lenguaje; es decir, sin añadir fórmulas que no podrían expresarse sin emplear clases. Por último, hemos añadido algunos resultados que aclaran cómo operan las clases con respecto a la relación binaria de igualdad y que resuelven la mencionada aporía.

El segundo capítulo está enfocado a la fundamentación de la Teoría Axiomática de Conjuntos. En virtud de ello, presenta dos secciones que compendian las nociones básicas de este Trabajo. La primera de ellas está dedicada a la presentación de los *axiomas* y *esquemas de axiomas* que históricamente ha adoptado la Teoría de Conjuntos. Hemos dedicido complementar su enumeración definiendo únicamente los conceptos mínimos necesarios para la correcta comprensión de éstos. De este modo, las demás ideas básicas han sido relegadas a la segunda sección, donde también se presentan las *funciones* y varias nociones derivadas de éstas. Así, en ambas secciones se encuentran definidas, por un lado, las distintas herramientas con las que manipularemos los conjuntos y, por otro, los respectivos resultados que afirman que dichas operaciones son conservativas − no convierten conjuntos en clases propias, luego están bien definidas.

El tercer y último capítulo de la primera parte discute un cierto tipo de estructura que puede atribuirse a los conjuntos y que se mostrará fundamental en el resto del Trabajo: el *orden*. En la primera sección definimos los *órdenes parciales*, los *órdenes totales* y los *buenos órdenes*. Asimismo, presentaremos algunos conceptos que se mostrarán útiles a lo largo del Trabajo y, en particular, enunciaremos tres resultados a los que recurriremos frecuentemente durante el mismo: el *Teorema de Minimización*, el *Principio de Inducción* y las *definiciones por recursión*. Únicamente presentaremos demostraciones de las dos primeras puesto que las definiciones por recursión aparecerán exclusivamente en un determinado contexto, donde adquieren una formulación más sencilla y clara. Antes de abandonar la primera sección, son definidas las funciones que preservan el orden, llamados *isomorfismos*, con el objetivo de demostrar el *Teorema de Comparación de Buenos Órdenes*, que afirma la existencia de un isomorfismo entre dos clases bien ordenadas o entre una de las clases y una *sección inicial* de la otra.

La segunda sección se centra en estudiar la relación binaria de pertenencia $\in$ como relación capaz de otorgar a cierto tipo de conjuntos − los conjuntos *transitivos* − una estructura de buen orden. Los conjuntos transitivos bien ordenados por $\in$ reciben el nombre de *ordinales*. La importancia de éstos reside en que, gracias al *Teorema de Mirimanoff* − que se basa en el Teorema de Comparación de Buenos Órdenes −, los órdinales establecen un "orden canónico" entre clases bien ordenadas mediante un isomorfismo. De ello se desprende que el estudio de los ordinales es suficiente para entender las relaciones de buen orden. Sin embargo, para llegar a estas conclusiones es preciso un estudio previo de la clase formada por los ordinales, referida como *Ord*. Destacamos la distinción entre *ordinal sucesor* y *ordinal límite* y la comprobación de que *Ord* es una clase propia bien ordenada por $\in$. Para finalizar la sección, estudiamos brevemente una subclase particular de *Ord*: la de los ordinales finitos. Esta subclase, denotada por ω, resultará ser la clase de los *números naturales* y, además, el menor ordinal límite y la menor *clase inductiva*. Su existencia como conjunto o como clase propia se descubrirá íntimamente ligada a la postulación del *Axioma del Infinito*, o equivalentemente, a la existencia de ordinales límite.

Por último, la tercera sección del capítulo estudia las *relaciones bien fundadas* −

un concepto más general que el de buen orden − con miras a presentar la clase de los *conjuntos hereditariamente finitos*. El interés de estudiar esta clase es instrumental, en tanto que aparecerá al estudiar la relación que guarda el Axioma de Regularidad con la Teoría de Conjuntos Finitos. Su emergencia es natural si consideramos que una de las propiedades que define una relación bien fundada se asemeja bastante al Axioma de Regularidad. Al tratarse de un concepto bastante fino, aquí sólo estudiaremos la *clase de los conjuntos bien fundados por* $\in$ a partir de la *clausura transitiva* de un conjunto. Para construir la clausura transitiva de un conjunto nos hará falta del Axioma del Infinito, lo que acabará siendo una restricción a salvar cuando estudiemos Regularidad en la Teoría de Conjuntos Finitos. Al margen de estos hechos, tras enunciar y probar algunos resultados esenciales − entre los cuales destaca la comprobación de que la clase formada por los conjuntos bien fundados es la mayor clase transitiva en la cual $\in$ es una relación bien fundada −, introducimos la definición de la *función rango* de conjuntos bien fundados. Mediante ella construiremos la jerarquía $\{R(n)\}_{n\in\omega}$ que define la clase de los conjuntos hereditariamente finitos. Esto será tratado en el cuarto capítulo del Trabajo, de modo que en lo que resta de sección nos limitamos a concluir algunas de las propiedades de la función R. Nos interesa particularmente hallar su formulación recursiva, que a efectos prácticos resulta más clara e intuitiva que su definición mediante la función rango ρ.

Como anunciamos al inicio de la introducción, la segunda parte del Trabajo plantea dos objetivos fundamentales: estudiar varias nociones de finitud y la relación existente entre ellas y comprobar el lugar que ocupan ciertos axiomas en una teoría que niegue el Axioma del Infinito. Para el desarrollo de esta parte hemos acudido al artículo de S. Baratella y R. Ferro [1] y hemos profundizado en aquellos detalles que ahí son mencionados de soslayo. A continuación detallaremos el desarrollo y los resultados más importantes de cada una de las cuatro secciones que componen este capítulo.

La primera sección introduce cierta notación propia del artículo, donde destaca la formulación de *EST (Elementary Set Theory)* como la teoría "básica" sobre la cual se realizará el estudio de tres conceptos de finitud: la ω-finitud, la Dedekind-finitud y la f-finitud. Acerca de las definiciones de finitud, acabaremos restringiéndonos al estudio de la tercera de ellas, que se define como la equipotencia con un número natural. La f-finitud resulta ser la definición más intuitiva y, a diferencia de las demás, permite arrojar una serie de propiedades importantes sin asumir el *Axioma de Elección*. Mientras, en lo que respecta a *EST*, la idea fundamental que se desarrollará durante todo el capítulo consiste en estudiar qué axiomas pueden añadírsele para obtener teorías en las que todos los conjuntos sean finitos. En este sentido, la aplicación más directa de este concepto consiste en añadirle a *EST* un axioma de finitud; a saber, que todos los conjuntos del universo sean f-finitos. Esta última teoría recibirá el nombre de *FST (Finite Set Theory)* y desde ella realizaremos todas las comparaciones con otras teorías compuestas exclusivamente por conjuntos finitos.

Antes de llegar a estas conclusiones, a fin de familiarizarnos con los conceptos, se estudian ciertas equivalencias entre definiciones de finitud en presencia del Axioma del Infinito y cómo la asunción de cualquiera de ellas como axioma de finitud niega el Axioma del Infinito. Estos resultados permiten probar, por un lado, que las definiciones de finitud son equivalentes en *ZFC* − luego estamos trabajando con un mismo concepto dentro de la teoría matemática estándar −; y por otro, que efectivamente tales definiciones de finitud niegan la existencia de conjuntos infinitos. Esto último será probado comprobando en cada caso que ω, la clase de los números naturales, no cumple la condición de finitud. Téngase en cuenta que esto es suficiente puesto que, según señalamos anteriormente, ω es la menor clase inductiva, luego si existiera un conjunto inductivo finito, necesariamente ω sería también un conjunto finito al estar contenido en él, lo cual es un absurdo según los resultados que serán probados. Además de estos hechos, también hemos añadido una breve discusión acerca de la equivalencia en *EST + Pow* (donde *Pow* denota el *Axioma del Conjunto Potencia*) del Axioma de Elección, y el *Teorema del Buen Orden*, denotado por *WO*. Esta digresión se debe a que esta equivalencia es gratuita en *FST* tras probar que *Pow* es un teorema de *FST* − donde, de hecho, *WO* resulta ser un teorema. Además, posteriormente se comprobará cómo estas tres fórmulas, junto con la negación del Axioma del Infinito, caracterizan *FST*.

Previo a estas conclusiones, dedicamos la segunda sección del capítulo al estudio de la equivalencia entre la f-finitud y la Dedekind-finitud mediante un cuarto concepto: la *Russell-finitud* o *R-finitud*. El interés de la *R-finitud* consiste en que, siendo equivalente a la f-finitud, habilita una serie de herramientas con las que probar ciertas propiedades naturales que caben esperar de una noción intuitiva de finitud y, en particular, las susodichas equivalencias entre definiciones. Entre estas herramientas destaca el *Teorema de Inducción Finita*, que habilita una nueva versión de esta útil técnica demostrativa y que será extensamente empleada en la sección. Por ejemplo, la inducción finita es necesaria para probar la equivalencia entre la R y la f-finitud, o también para comprobar que ω no es R-finito − a partir de la propiedad de que todo conjunto R-finito posee un elemento maximal y minimal.

En la sección también se introduce la definición de *conjunto numerable* tal y como es entendido en Matemáticas. Este último concepto será útil, primero, a la hora de probar la infinitud − no R-finitud − de un conjunto; segundo, al exponer la definición histórica de Dedekind-finitud (nuestra ω-finitud); y tercero, a demostrar, mediante la ω-finitud, la equivalencia entre la R-finitud y la Dedekind-finitud. Tras toda esta discusión, la sección continúa probando algunas propiedades naturales bajo un concepto intuitivo de finitud, como por ejemplo, que la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito. Hemos incluido un diagrama como el siguiente a fin de reflejar más claramente las conexiones entre definiciones y las propiedades de la finitud.

$$\begin{tikzcd}
(\forall z \subseteq x)[Fin^{\omega}(z)] & Fin^{f}(x) \arrow[dd, leftrightarrow] & (\forall z \subseteq x)[Fin^{R}(z)] \\
 & & Fin^{R}(\mathcal{P}(x)) \\
Fin^{\omega}(x) \arrow[uu] \arrow[r, leftrightarrow, "AC"] \arrow[d, leftrightarrow] & Fin^{R}(x) \arrow[uur] \arrow[r, "\text{Si, además, } Fin^{R}(y):"] \arrow[d, leftrightarrow] & Fin^{R}(x \cup y)] \arrow[u] \arrow[d] \\
Fin^{D}(x) & \begin{array}{c}\nexists y \text{ numerable infinito} \\ \text{tal que } y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))\end{array} & (\forall y \in x)[Fin^{R}(y)] \Rightarrow Fin^{R}(\bigcup x)
\end{tikzcd}$$

Finalmente, volvemos a ocuparnos de los conjuntos hereditariamente finitos, ahora sí, dando una definición formal de dicha clase. Se define, con este fin, las *propiedades hereditarias* y se demuestra que R_ω es precisamente la clase formada por todos los conjuntos hereditariamente finitos. Informalmente hablando, esto quiere decir que sus elementos son conjuntos finitos, al igual que los elementos de sus elementos, y los elementos de éstos; así *ad infinitum*. La sección concluye probando que R_ω es numerable infinito, que era de esperar si para su formulación necesitamos el Axioma del Infinito.

La tercera sección del capítulo comienza definiendo formalmente FST tal y como avanzamos anteriormente. Tras probar que Pow, WO y AC son teoremas en FST, conjugamos algunas de estas sentencias junto con la negación del Axioma del Infinito para obtener caracterizaciones de FST.

En último lugar, la cuarta sección pretende demostrar que el Axioma de Regularidad es independiente de FST. Para ello se recuperan las nociones semánticas que tratamos al principio de la primera parte y, de acuerdo con ellas, se construyen dos modelos basados en la clase de los conjuntos hereditariamente finitos de tal modo que en uno sea cierto el Axioma de Regularidad y en otro su negación. La construcción de ambos modelos está fundada en dos conceptos nuevos que se presentan según resulten necesarios: la *relativización de fórmulas a una clase* y las *fórmulas absolutas en una clase*. Una fórmula se dice relativizada a una determinada clase si todos los cuantificadores están restringidos para que contemplen exclusivamente elementos de la clase a la cual relativizamos. Mientras, una fórmula es absoluta en una clase si, al evaluarla en conjuntos pertenecientes a la clase, la validez de la fórmula relativizada es equivalente a la validez de la fórmula en el universo. Ambos conceptos rigen la metodología demostrativa de la sección: para cada estructura demostraremos, gracias a la transitividad de R_ω, que las fórmulas relativizadas son válidas en el universo, empleando si cabe que las fórmulas consideradas son absolutas.

Tras haber construido dichos modelos, introducimos el *Axioma de Regularidad Fuerte* a fin de comprobar que la equivalencia de ambas Regularidades en ZF^- no se preserva en FST. Esto es logrado probando que el Axioma de Regularidad Fuerte y el *Axioma de la Clausura Transitiva* son sendas fórmulas independientes de FST. Este último axioma resulta necesario en tanto que la construcción de la clausura transitiva, según se explicita en la sección dedicada a las clases bien fundadas, requiere del Axioma del Infinito, que FST niega. Un nuevo esquema recoge y expone las relaciones entre teorías probadas en las dos últimas secciones.

$$\begin{tikzcd}
 & EST + \neg Inf + UReg \arrow[d] & FST + UReg \arrow[d] & FST + SReg \arrow[l] \\
EST & EST + \neg Inf \arrow[l] \arrow[d] & FST \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & EST + Pow + \neg Inf \\
 & EST + Fin^D & EST + WO + \neg Inf &
\end{tikzcd}$$

A modo de conclusión, hemos incluido algunos comentarios acerca de la demostración de la independencia del axioma de f-finitud respecto de $EST + \neg Inf$. La dificultad de su construcción muestra por qué no ha recibido aquí un tratamiento más extenso.

Parte I

Fundamentos

1. Lógica de primer orden

1.1. Sintaxis y deducción formal de primer orden

La Teoría de Conjuntos nace en 1873 cuando Cantor descubre que no todos los conjuntos infinitos poseen el mismo "tamaño". En sus estudios, Cantor consideraba cualquier colección de objetos bien distinguidos como un conjunto, sin reparar en las contradicciones que una suposición así conlleva. Posteriormente, motivados por una "crisis fundacional de las Matemáticas", Zermelo (1908) y Fraenkel (1922) asentaron una serie de verdades universales desde las cuales esperaban poder estudiar correctamente las bases de las Matemáticas. Provocaron, pues, la axiomatización de la Teoría de Conjuntos.

La Teoría Axiomática de Conjuntos, al tratar cuestiones fundamentales, necesita una base sobre la que sostener todo el edificio. Ésta es la lógica de primer orden. Al no tratarse de un contenido central en los estudios de Grado, dedicaremos unas páginas a fundamentar los conceptos necesarios para construir lenguajes de primer orden y, más particularmente, el lenguaje propio de la Teoría de Conjuntos. Seguiremos para ello la introducción a la lógica de primer orden encontrada en el tercer capítulo del libro *Combinatorial Set Theory* [3].

La lógica de primer orden, como todo lenguaje, se funda en un alfabeto compuesto, en su caso, por los siguientes símbolos:

(i) **Variables**: representan los objetos del dominio de discurso.

(ii) **Operadores lógicos**: usaremos "$\neg$" para la negación, "$\wedge$" para la conjunción, "$\vee$" para la disyunción, "$\Rightarrow$" para la implicación y "$\Leftrightarrow$" para la equivalencia.

(iii) **Cuantificadores lógicos**: el símbolo "$\exists$" expresa la cuantificación existencial y "$\forall$" la cuantificación universal. El uso de ambos operadores está restringido únicamente a las variables.

(iv) **Símbolo de igualdad**: usamos " $=$ " para expresar la relación binaria de identidad entre dos objetos.

(v) **Símbolos de función**: nombran funciones fijas en el lenguaje que toman una cantidad de objetos para devolver otros como resultado de la operación. A las funciones les asociamos un número natural positivo, llamado *aridad*, para indicar el número de argumentos que la función toma.

(vi) **Símbolos de constante**: nombran elementos fijos del universo de discurso.

(vii) **Símbolos de predicado**: nombran relaciones entre objetos del dominio de discurso. Como en el caso anterior, también llevan asociados una *aridad*.

Nota. Hemos de realizar varios apuntes. En primer lugar, los símbolos (i) $-$ (iv) reciben el nombre de *símbolos lógicos*, mientras que el resto se denominan *símbolos extralógicos*. Es usual que los primeros sean invariantes en los diferentes lenguajes de primer orden que puedan considerarse: sin ellos resulta difícilmente concebible poder formalizar el lenguaje natural. Por tanto, serán los símbolos extralógicos aquellos que, en función de las necesidades de la materia de estudio, cambiarán para adaptarse a ella lo mejor posible. Ello motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Una colección $\mathcal{L}$ de símbolos extralógicos empleados para formalizar una teoría matemática se denomina el *lenguaje* de dicha teoría. Las fórmulas que se pueden construir en el lenguaje $\mathcal{L}$ se dirán $\mathcal{L}$-*fórmulas.*

En este trabajo el lenguaje empleado será el propio de la Teoría de Conjuntos, cuyos elementos serán especificados en la tercera sección del presente capítulo. Antes de llegar a él, es conveniente que formalicemos, en términos generales, cómo se construyen las expresiones de un lenguaje. Los elementos básicos serán los *términos*, a partir de los cuales se construirán *fórmulas*:

Definición 1.1.2. Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, diremos que son *términos*:

(i) Las variables $x, y, z, \ldots$

(ii) Las constantes $a, b, c, \ldots$

(iii) Si $t_1, t_2, \ldots t_n$ son términos y F es un símbolo de función n-ario, $F(t_1, t_2, \ldots t_n)$ es un término.

Definición 1.1.3. Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, diremos que las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas* (fórmulas) si se construyen de alguno de los siguientes modos:

(i) Si t_1 y t_2 son términos, $t_1 = t_2$ es una fórmula.

(ii) Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y R es un símbolo de predicado n-ario, $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una fórmula. Cuando la aridad de R sea 2, lo abreviaremos como $t_1 R\, t_2$.

(iii) Si φ es una fórmula, también lo es $\neg\varphi$.

(iv) Si φ y ψ son fórmulas, entonces también lo son: $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ y $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.

(v) Si φ es una fórmula y x una variable, entonces $\exists x\, \varphi$ y $\forall x\, \varphi$ son fórmulas.

Los dos primeros casos reciben el nombre de *fórmulas atómicas.*

Sentemos más terminología para aligerar el lenguaje:

Definición 1.1.4. Sea ψ una fórmula de la forma "$\exists x\, \varphi$" o "$\forall x\, \varphi$" y x una variable. Si x aparece en φ, diremos que x es una *variable ligada* en ψ. En caso contrario, diremos que x es una *variable libre* en ψ. Una fórmula ψ es una *fórmula cerrada* si no contiene variables libres.

Definición 1.1.5. Una colección de $\mathcal{L}-$fórmulas cerradas recibe el nombre de *teoría.*

En una teoría encontramos una colección especial de fórmulas, interpretadas como universalmente válidas, a partir de las cuales se deducen el resto de fórmulas válidas en este lenguaje mediante unas reglas de inferencia que presentaremos a continuación. Dicha colección de fórmulas reciben el nombre de *axiomas.* Dado que el objetivo del trabajo está en estudiar las relaciones existentes entre diferentes teorías de conjuntos finitos – que se diferencian entre sí en base a los axiomas que asumen – éstos son de suma importancia en el trabajo.

Los axiomas pueden diferenciarse en dos grupos. En primer lugar encontramos los *axiomas lógicos*, que tratan de capturar las reglas de todo razonamiento lógico. En función de los que asumamos nos encontraremos dentro del marco de distintas lógicas, como la clásica o la intuicionista. Desde un punto de vista matemático, el interés reside en los *axiomas extralógicos*; a saber, aquellos específicos a la teoría que es objeto de estudio. Los axiomas que asumiremos a lo largo del trabajo se detallarán de forma explícita en la Sección 2.

Independiente a esta distinción, existe además una clase especial de axiomas, los esquemas. Un *esquema de axiomas* no es más que una fórmula en la que interviene una función, relación o fórmula arbitraria, de tal manera que para cada sustitución adecuada de la misma se obtiene una fórmula individual válida, es decir, un axioma. De entre los axiomas que consideraremos de la Teoría de Conjuntos, aparecerá algún esquema.

En último lugar, hemos de notar que de una sucesión de axiomas no podemos deducir, por sí mismos, nuevas fórmulas verdaderas. Para ello recurrirmos a las reglas de inferencia, que en nuestro caso serán el conocido *Modus ponens* y la *Generalización*. Si φ y ψ son dos fórmulas:

$$\textit{MP:}\quad \frac{\varphi\,,\,\varphi \Rightarrow \psi}{\psi} \qquad\qquad \textit{Generalización:}\quad \frac{\varphi}{\forall x\ \varphi}$$

Aclaradas todas estas precauciones, podemos dar a continuación la definición de *prueba formal* y de *teoría consistente*. Esta última será de especial relevancia cuando estudiemos los diferentes modelos axiomáticos de Teoría de Conjuntos.

Definición 1.1.6. Sea T una colección de axiomas extralógicos formulados en cierto lenguaje $\mathcal{L}$. Una $\mathcal{L}$-fórmula φ es *demostrable en* T, denotado $T \vdash \varphi$, si existe una secuencia finita $\varphi_1 \dots \varphi_n$ de $\mathcal{L}$-fórmulas tales que $\varphi_n = \varphi$, y, para todo $i = 1 \dots n$, o bien φ_i es un axioma en T, o bien φ_i se obtiene aplicando las reglas de inferencia a una o varias fórmulas anteriores.

En este caso, decimos que $\varphi_1 \dots \varphi_n$ conforman una *prueba formal de* φ. Si no existe una prueba formal de una fórmula ψ, diremos que ψ *no es demostrable en* T, y lo denotaremos $T \nvdash \psi$.

Observación. Véase que $T \nvdash \varphi$ no es equivalente a $T \vdash \neg\varphi$. La primera notación expresa la inexistencia de una prueba formal de φ en T, de modo que, coloquialmente hablando, no puede decirse que φ sea cierto en T. La segunda directamente indica la imposibilidad de sostener φ en T.

Definición 1.1.7. Una teoría T de lenguaje $\mathcal{L}$ se dice *consistente*, denotado $Con(T)$, si no existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Resulta sencillo probar que, si una colección de $\mathcal{L}$-fórmulas T es inconsistente, toda fórmula φ es demostrable en T. Esto provoca que nuestro interés resida en las teorías consistentes, a saber, aquellas que no incurren en contradicciones.

Parte del objetivo del trabajo consiste en probar las relaciones existentes entre diferentes teorías; es decir, entre diferentes colecciones de axiomas extralógicos. En este sentido, resulta muy interesante la noción de *independencia*, puesto que justificará la adición de axiomas a una teoría T para ampliar el rango de fórmulas demostrables. Formalmente:

Definición 1.1.8. Dada T una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$, una fórmula φ se dice *independiente de* T si, ni ella ni su negación son demostrables en T. Formalmente; si $T \nvdash \varphi$ y $T \nvdash \neg\varphi$.

Como adelantábamos antes de presentar la definición, si una fórmula φ es independiente de T, podemos generar una nueva teoría $T' = T \cup \{\varphi\}$ de modo que, si T es consistente, entonces T' también lo será.

1.2. Semántica de primer orden

Hasta el momento la deducción formal de primer orden ha capturado las reglas por las cuales pueden considerarse una serie de fórmulas válidas e inferir, a partir de ellas, nuevas fórmulas que mantienen cierta cohesión dentro de la teoría en cuestión. Esto se ha realizado al margen del significado de las fórmulas consideradas. La semántica de primer orden se esfuerza por interpretar dichas fórmulas razonablemente, de modo que las pruebas formales definidas anteriormente puedan ser sustituidas por pruebas "informales"; a saber, las demostraciones que en la práctica matemática se emplean. Esto se consigue ofreciendo una definición rigurosa de lo que signfica para una fórmula "ser verdadera" dentro de una determinada "interpretación". Para ilustrar este hecho, debemos introducir nuevas definiciones:

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Una *$\mathcal{L}$-estructura* $\mathcal{U}$ consta de una colección no vacía A, llamada dominio de $\mathcal{U}$ y una aplicación que asocia: a cada símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$, un elemento $c^{\mathcal{U}} \in A$; a cada símbolo de relación n-aria $R \in \mathcal{L}$, un conjunto de n-tuplas $R^{\mathcal{U}}$ de elementos de A; y a cada símbolo de función n-aria $F \in \mathcal{L}$, una función $F^{\mathcal{U}}$ de las n-tuplas de A en A.

Asimismo, una *asignación en una $\mathcal{L}$-estructura* es una función j que asigna a cada variable de $\mathcal{L}$ un elemento de A. Finalmente, una *interpretación* I es un par $(\mathcal{U}, j)$ donde $\mathcal{U}$ es una $\mathcal{L}-$estructura y una asignación j en $\mathcal{U}$.

Con la definición anterior sencillamente hemos formalizado el paso de los símbolos del lenguaje $\mathcal{L}$ a otros elementos de A donde tendrá lugar la interpretación del significado de las fórmulas que escribamos. No obstante, necesitamos todavía un concepto antes de formalizar cómo dotar de significado a los términos y las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición 1.2.2. Dada una interpretación $I = (\mathcal{U}, j)$ un elemento $a \in A$ y una variable x, definimos la *interpretación inducida* $I_{a,x} = (\mathcal{U}, j_{a,x})$, como aquella interpretación en $\mathcal{U}$ donde $j_{a,x}$ es una asignación definida como sigue:

$$j_{a,x}(y) = \begin{cases} a & \text{si } y = x \\ j(y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 1.2.3. Dada una interpretación $I = (\mathcal{U}, j)$, para cada término $t \in \mathcal{L}$, obtenemos un elemento $I(t) \in A$ del siguiente modo:

(i) Para cada variable x, $I(x) := j(x)$

(ii) Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, $I(c) := c^{\mathcal{U}}$

(iii) Para cada símbolo de función n-aria $F \in \mathcal{L}$ y n términos $t_1 \dots t_n$,

$$I(F(t_1, \dots, t_n)) := F^{\mathcal{U}}(I(t_1), \dots, I(t_n))$$

Definición 1.2.4. Dada una interpretación $I = (\mathcal{U}, j)$ y una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$, diremos que φ *es cierta en* I, denotado por $I \vDash \varphi$, si:

(i) Si φ es de la forma $t_1 = t_2$:

$$I \vDash t_1 = t_2 \Leftrightarrow I(t_1) = I(t_2)$$

(ii) Si φ es de la forma $R(t_1, \dots, t_n)$:

$$I \vDash R(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow (I(t_1), \dots, I(t_n)) \in R^{\mathcal{U}}$$

(iii) Si φ es de la forma $\neg\psi$:

$$I \vDash \neg\psi \Leftrightarrow \text{no se verifica } I \vDash \psi$$

(iv) Si φ es de la forma $\exists x\, \psi$:

$$I \vDash \exists x\, \psi \Leftrightarrow \text{existe } a \in A \text{ tal que } I_{a,x} \vDash \varphi$$

(v) Si φ es de la forma $\psi \wedge \chi$:

$$I \vDash \psi \wedge \chi \Leftrightarrow I \vDash \psi \text{ y } I \vDash \chi$$

Nota. En la definición anterior se observa que no se ha especificado cómo interpretar una fórmula en la que aparezcan los operadores lógicos "$\vee$", "$\Rightarrow$"y"$\Leftrightarrow$" y el cuantificador lógico "$\forall$". Puede probarse que todos ellos pueden describirse exclusivamente mediante los operadores "$\neg$","$\wedge$" y el cuantificador lógico "$\exists$", luego bastaría reescribir los primeros símbolos lógicos como su correspondiente combinación de los segundos para determinar si una fórmula cualquiera es verdadera bajo I.

Definición 1.2.5. Sea T una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$. Una $\mathcal{L}$-estructura M es *modelo* de T si para cada asignación j en M y para cada fórmula $\varphi \in T$ se verifica $(M, j) \vDash \varphi$. En ese caso, lo denotaremos $M \vDash T$. Si se tiene lo opuesto; a saber, si existe una fórmula $\varphi \in T$ y una asignación j tal que $(M, j) \nvDash \varphi$, lo denotaremos $M \nvDash T$.

Nota. Dado que, por definición, una $\mathcal{L}-$teoría T contiene únicamente fórmulas cerradas, se deduce que una $\mathcal{L}-$estructura M será modelo de T si y sólo si $(M, j) \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in T$ y para alguna asignación j. En efecto, como φ contiene únicamente variables ligadas, por definición de asignación, todas ellas actuarán sobre φ de idéntica forma.

Los siguientes teoremas relacionan la deducción formal en la lógica de primer orden con la semántica de primer orden. Los enunciaremos sin dar una prueba de ellos. Como consecuencia de estos resultados se deduce que las pruebas formales pueden ser reemplazadas por pruebas "informales". Efectivamente, gracias a los resultados que encontraremos a continuación, bastará tomar un modelo arbitrario de la teoría T considerada y probar en él que se sostiene la fórmula en cuestión. Formalmente hablando, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 1.2.6 (Teorema de corrección)**.** *Sea T una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$ y $\varphi \in \mathcal{L}$. Si $T \vdash \varphi$, entonces cualquier $\mathcal{L}$-estructura M que cumpla $M \vDash T$ verifica $M \vDash \varphi$.*

Teorema 1.2.7 (Teorema de completitud)**.** *Sea T una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$ y $\varphi \in \mathcal{L}$ una fórmula cerrada. Entonces $T \vdash \varphi$ o existe un modelo M tal que $M \vDash T \cup \{\neg\varphi\}$. Es decir, si para toda $\mathcal{L}$-estructura M que verifique $M \vDash T$ se tiene $M \vDash \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Una interesante aplicación del teorema anterior es la siguiente proposición, que tampoco demostraremos:

Proposición 1.2.8. *Sea T una teoría de lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces $Con(T)$ si y sólo si T tiene un modelo.*

Definición 1.2.9. Sea T una colección de $\mathcal{L}$-fórmulas y φ una $\mathcal{L}$-fórmula cerrada no contenida en T. Decimos que φ *es consistente con T* si $Con(T)$ implica $Con(T \cup \{\varphi\})$.

Nota. A partir del teorema de completitud y la definición anterior se deduce que una $\mathcal{L}$-fórmula cerrada ψ es independiente de T si ψ y $\neg\psi$ son ambas consistentes con T. Para convencerse de ello basta aplicar 1.2.7 tras darse cuenta de que, por definición de fórmula independiente, la primera posibilidad de la disyuntiva que afirma dicho teorema no es factible ni para φ ni para $\neg\varphi$. Gracias a este hecho, combinado con 1.2.8, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.2.10. *Sea T una teoría consistente. Una fórmula cerrada φ es independiente de T si y sólo si existen modelos M_1 y M_2 de T tales que $M_1 \vDash \varphi$ y $M_2 \vDash \neg\varphi$.*

1.3. Lenguaje de la Teoría de Conjuntos

Tras haber presentado los fundamentos de la lógica de primer orden que emplearemos en este Trabajo de Fin de Grado, podemos especificar el lenguaje que utilizaremos a lo largo del trabajo, esto es, el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Seguiremos el cuarto capítulo de [6], que completaremos con algún resultado adicional para ganar cierta generalidad.

El lenguaje de la Teoría de Conjuntos mantiene los símbolos lógicos que anotamos al principio de la primera sección. No posee símbolos de función y el único símbolo de predicado es la relación binaria de pertenencia, denotada por $\in$. Las variables representarán conjuntos y la igualdad entre conjuntos se define como un símbolo primitivo que verifica los siguientes axiomas lógicos, donde R denota una relación binaria:

Identidad: $x = x$

Sustitución: $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow R(x_1, x_2) \Rightarrow R(y_1, y_2)$

Hemos de notar que esta definición de igualdad todavía no la ha dotado de un significado preciso. Esto lo lograremos mediante el *Axioma de Extensionalidad*, que será presentado más adelante. Antes de ello, resulta necesario que estudiemos cómo escribir fórmulas adecuadas dentro del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Pero primero:

Proposición 1.3.1. *El símbolo de igualdad " $=$ " es una relación de equivalencia.*

Demostración. La reflexividad queda garantizada por el Axioma de Identidad. Para probar la simetría, supongamos $x = y$. Dado que se tiene $x = y \wedge x = x$, por Sustitución en el predicado $=$, se verifica $x = x \Rightarrow y = x$. Como el lado izquierdo de la implicación es siempre cierto, se obtiene $y = x$. Por tanto, $x = y \Rightarrow y = x$.

Para probar la transitividad, supongamos $x = y$ e $y = z$. Por Reflexividad, $y = x$. Si aplicamos Sustitución a $y = x \wedge y = z$, deducimos $y = y \Rightarrow x = z$. Como el lado derecho de la implicación es siempre cierto, se obtiene $x = z$, como queríamos demostrar. □

Si limitáramos el lenguaje de la Teoría de Conjuntos a considerar únicamente los conjuntos como elementos del discurso, nos encontraríamos con graves limitaciones expresivas. Nos gustaría, como en Matemáticas, mantener la capacidad de definir conjuntos a la partir de la propiedad que deben verificar sus elementos. Esto, además, debe poder realizarse sin que el lenguaje derive en antinomias. Tengamos como ejemplo la célebre paradoja de Russell. Si suponemos ingenuamente que toda propiedad describe un conjunto, podríamos definir el conjunto $Ru = \{x \mid x \notin x\}$. Pero entonces:

$$Ru \in Ru \Leftrightarrow Ru \notin Ru \qquad (!!!)$$

Claro queda, pues, que son necesarias diversas precauciones. Con el fin de emular esta herramienta matemática, introducimos el concepto de *clase*, que según veremos más adelante generalizará el concepto de conjunto. Una clase no es más que la representación de una fórmula φ.

Con las clases buscamos extender el lenguaje de la Teoría de Conjuntos a las fórmulas, de tal forma que podamos operar con ellas al igual que con los conjuntos sin preocuparnos por la corrección de la expresión $-$ en términos de si los símbolos empleados se aplican a los objetos adecuados. Esto nos obliga, al igual que hicimos en la sección referida a la sintaxis, a formalizar bajo qué condiciones una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$ ampliado a las clases es correcta. Por tanto, en primer lugar ampliamos la noción de fórmula bien formada que describimos anteriormente:

Definición 1.3.2. Diremos que fórmula bien formada es una *fórmula bien formada en sentido amplio* (fórmula) si está construida atendiendo a las siguientes normas:

(i) Si a y b son variables, "$a \in b$" es una fórmula.

(ii) Si a y b son variables y φ y ψ son fórmulas, entonces "$a \in \{x \mid \varphi(x)\}$", "$\{x \mid \varphi(x)\} \in b$" y "$\{x \mid \varphi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\}$" son fórmulas, donde x es una variable ligada en $\{x \mid \varphi(x)\}$.

(iii) Si φ y ψ son fórmulas, entonces "$\neg\varphi$", "$\varphi \vee \psi$", "$\varphi \wedge \psi$", "$\varphi \Rightarrow \psi$" y "$\varphi \Leftrightarrow \psi$" son fórmulas.

(iv) Si φ es una fórmula y x es una variable ligada, entonces "$\exists x\, \varphi(x)$" y "$\forall x\, \varphi(x)$" son fórmulas.

La definición anterior únicamente ha añadido un nuevo modelo de construcción de fórmulas. La siguiente definición busca expresar qué significa.

Definición 1.3.3. Si φ y ψ son fórmulas, definimos los siguientes esquemas:

(i) $[a \in b]^* \Leftrightarrow a \in b$

(ii) $[a \in \{x \mid \varphi(x)\}]^* \Leftrightarrow \varphi^*(a) \Leftrightarrow [\varphi(a)]^*$

(iii) $[\{x \mid \varphi(x)\} \in a]^* \Leftrightarrow \exists y\, [y \in a \wedge \forall z[z \in y \Leftrightarrow \varphi^*(y)]]$

(iv) $[\{x \mid \varphi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\}]^* \Leftrightarrow \exists y\, [y \in \{x \mid \psi^*(x)\} \wedge \forall z[z \in y \Leftrightarrow \varphi^*(y)]]$

(v) $[\neg\varphi]^* \Leftrightarrow \neg\varphi^*$

(vi) $[\varphi \wedge \psi]^* \Leftrightarrow \varphi^* \wedge \psi^*$

(vii) $[\forall x\, \varphi(x)]^* \Leftrightarrow \forall x\, \varphi^*(x)$

Nota. Si suponemos ciertos los esquemas de 1.3.3, puede probarse fácilmente, por inducción en el número de símbolos lógicos, que toda fórmula bien formada en sentido amplio φ es expresable como una única fórmula bien formada (en sentido estándar) φ^*. Considerando este resultado, se colige que hemos ampliado adecuadamente el lenguaje de la Teoría de Conjuntos para considerar una clase de objetos de discurso más amplia. Más aún, la prueba de este resultado ofrece un procedimiento efectivo para reescribir fórmulas bien formadas en sentido amplio a fórmulas bien formadas, y viceversa.

Por último, necesitamos especificar qué consideraremos como términos dentro de la Teoría de Conjuntos y cómo se comporta la igualdad respecto a las clases. Con ambas nociones podremos generar fórmulas dentro del lenguaje y derivaremos una serie de conclusiones básicas; principalmente, que todo conjunto es una clase y que, por tanto, las clases extienden la categoría de los conjuntos.

Definición 1.3.4. Por *término de clase (clase)* se entenderá bien una variable, que denotaremos por $x, y, z, \ldots$ o bien una expresión de la forma $\{x \mid \varphi(x)\}$, donde φ es una fórmula bien formada en sentido amplio. Éstas últimas serán expresadas por las mayúsculas $A, B, C, \ldots$

Nota. Reservaremos la letra V para denotar la clase universal, es decir, aquella conformada por todos los conjuntos. Formalmente:

$$V := \{x \mid x = x\}$$

Las variables representan conjuntos mientras que el género de las clases deberá ser determinado según cada caso. Una clase puede o no ser un conjunto. En este segundo caso se dirá que es una *clase propia.*

Definición 1.3.5. La igualdad entre clases se define como sigue:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\, [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

Nota. El lector comprobará, más adelante, que la definición de igualdad entre clases es idéntica a la que ofreceremos entre conjuntos mediante el Axioma de Extensionalidad. Esta elección no es fortuita, pues como establecimos anteriormente las clases generalizan el género de los conjuntos.

Los siguientes resultados son fácilmente demostrables:

Proposición 1.3.6. $A \in B \Leftrightarrow \exists x\, [x = A \wedge x \in B]$

Proposición 1.3.7. *La igualdad entre clases es una relación de equivalencia. Es decir, verifica:*

(i) $A = A$

(ii) $A = B \Rightarrow B = A$

(iii) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Proposición 1.3.8. *Si A y B son clases y φ es una fórmula:*

$$A = B \Rightarrow [\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)]$$

Nota. Las proposiciones anteriores han probado que los elementos de las clases son conjuntos y no otras clases. Esto es coherente con el significado que hemos pretendido en las clases: una fórmula no puede verificar, en tanto que fórmula, otra fórmula. Además, se extiende el Principio de Sustitución para términos de clases. Dicho de otro modo, si A y B representan la misma clase y se verifica $\varphi(A)$, entonces $\varphi(B)$.

Proposición 1.3.9. *Los conjuntos son clases:*

$$a = \{x \mid x \in a\}$$

Al haber enunciado que los conjuntos son clases, hemos justificado que la noción de clase generalice la de conjunto. Más aún, los diferentes resultados que hemos presentado permiten resolver la paradoja de Russell presentada al principio de la sección. Efectivamente, el siguiente lema permite probar que *Ru* es una clase propia, logrando que la objección que Russell hizo al *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege no tenga cabida. Ciertamente, si *Ru* es una clase propia, no tiene sentido predicar que pertenece a otra clase.

Lema 1.3.10. $A \in \{x \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow (\exists x)[x = A \wedge \varphi(x)]$

Teorema 1.3.11. *Ru es una clase propia.*

Demostración. Por el lema anterior, Ru es un conjunto si y sólo si $Ru \in Ru \Leftrightarrow Ru \notin Ru$. Dado que esto último no es cierto, Ru no puede ser un conjunto, de modo que es una clase propia. □

En resumen, la introducción de las clases y la distinción entre clase propia y conjunto ha logrado un lenguaje de la Teoría de Conjuntos más expresivo, que no amplía el conjunto de fórmulas bien formadas y que no deriva, aparentemente[1], en contradicciones.

[1]Esta apreciación se debe a que, de acuerdo con el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, ninguna teoría T puede demostrar su propia consistencia. Por tanto, el empleo de las clases como extensión del lenguaje de la Teoría de Conjuntos es un acercamiento apropiado "hasta que se demuestre lo contario"; esto es, hasta que se descubra una nueva contradicción similar a la de Russell.

2. Fundamentación de la Teoría de Conjuntos

2.1. Axiomática

Tras haber fundamentado el lenguaje sobre el cual se desarrolla la Teoría de Conjuntos, podemos presentar los elementos que conforman el foco de atención de este Trabajo: los axiomas. Presentaremos *ad hoc* los conceptos mínimos necesarios para la comprensión de los axiomas y posteriormente ofreceremos, en base a ellos, algunos resultados muy generales de la Teoría de Conjuntos. El desarrollo que el lector hallará a continuación está inspirado en los capítulos quinto y sexto de [6].

Los dos primeros axiomas nos aseguran que el universo del lenguaje es no vacío y determinan el significado del símbolo de igualdad, según adelantábamos en el capítulo anterior.

Axioma 1 (Axioma del vacío)**.** *Existe un conjunto que no posee elementos.*

$$\exists y \, \forall x \, [x \notin y]$$

Denotaremos por 0 *a dicho conjunto.*

Axioma 2 (Axioma de Extensionalidad)**.** *Dos conjuntos* a *y* b *son idénticos si poseen los mismos elementos.*

$$\forall x \, [x \in a \Leftrightarrow x \in b] \Rightarrow a = b$$

El siguiente axioma fue propuesto por Fraenkel en 1922 con el objetivo de generalizar el Esquema de Separación de Zermelo, que presentaremos más adelante. Este axioma afirma que si para todo conjunto x existe un único y que verifica la fórmula $\varphi(x, y)$, entonces la clase formada por todos los segundos argumentos que verifican φ para algún elemento $x \in a$ es un conjunto; a saber, que las funciones envían conjuntos en conjuntos. Si la formulación resulta un tanto enrevesada no es sino porque todavía no hemos definido propiamente lo que es una función.

Axioma 3 (Esquema de Reemplazamiento)**.** *Las funciones envían conjuntos en conjuntos. Formalmente, para todo* a*, se tiene la fórmula:*

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, [\, \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \Rightarrow y = z \,] \Rightarrow \exists u \, \forall y [y \in u \Leftrightarrow (\exists x \in a)[\, \varphi(x, y) \,]]$$

Los siguientes axiomas amplían las construcciones posibles entre conjuntos. Para comprenderlos son necesarias las siguientes definiciones:

Definición 2.1.1. Se definen:

(i) *Intersección de clases*: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(ii) *Intersección de una clase*: $\bigcap A := \{y \mid (\forall x \in A)[y \in x]\}$

(iii) *Unión de una clase*: $\bigcup A := \{y \mid (\exists x \in A)[y \in x]\}$

(iv) *Unión de clases*: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Definición 2.1.2. Se definen, respectivamente, el *par no ordenado de a y b*, el *conjunto unitario de a* y la *n-tupla no ordenada de $a_1 \ldots a_n$* como:

(i) $\{a, b\} := \{x \mid x = a \vee x = b\}$

(ii) $\{a\} := \{a, a\}$

(iii) $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} := \{x \mid x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_n\}$

Axioma 4 (Axioma del Par)**.** *El par no ordenado de dos conjuntos es un conjunto.*

$$\forall x \, \forall y \; \exists z \; \forall u \, [u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y]$$

Corolario 2.1.3. *El conjunto unitario de todo conjunto es un conjunto.*

Axioma 5 (Axioma de la Unión)**.** *La clase formada por los elementos que pertenecen a los elementos de un conjunto es un conjunto.*

$$\forall x \; \exists z \; \forall u \, [u \in z \Leftrightarrow (\exists y \in x)[u \in y]]$$

Corolario 2.1.4. *La unión de dos conjuntos es un conjunto.*

Demostración. Sean x e y dos conjuntos. Basta ver que:

$$\bigcup \{x, y\} = \{u \mid (\exists z \in \{x, y\})[u \in z]\} = \{u \mid \exists z \, [(z = x \vee z = y) \wedge u \in z]\} = x \cup y$$

El extermo izquierdo de la cadena de identidades es un conjunto gracias al Axioma del Par y al Axioma de la Unión. Consecuentemente, $x \cup y$ es un conjunto. □

Corolario 2.1.5. *La unión de n conjuntos es un conjunto.*

Demostración. Basta reiterar el razonamiento anterior $n - 1$ veces □

Corolario 2.1.6. *La n-tupla no ordenada de n conjuntos es un conjunto.*

Demostración. Basta hacer la unión de los n conjuntos unitarios. □

Todos los axiomas hasta ahora mencionados conforman, siguiendo el artículo de Baratella-Ferro [1], la denominada Teoría Elemental de Conjuntos (EST). Recibe esta denominación porque, en comparación con los axiomas que faltan por presentar, resultan imprescindibles en la mayoría de teorías.

El siguiente bloque de axiomas busca habilitar herramientas más sofisticadas dentro de la Teoría de Conjuntos. Es por ello que parte del estudio axiomático de la Teoría de Conjuntos consiste en no aceptar la validez de alguno de ellos y comprobar cómo, con semejantes restricciones, se relacionan ente sí los demás. Por ejemplo, la Teoría de Conjuntos Finitos (FST) $-$ la estudiada en este Trabajo $-$ afirma la existencia exclusiva de cierto tipo de conjuntos finitos, de lo cual se deriva la inexistencia de conjuntos inductivos o infinitos.

Axioma 6 (Axioma del Infinito)**.** *Existe un conjunto inductivo.*

$$\exists x\,[\,0 \in x \wedge (\forall y \in x)[\,y \cup \{y\} \in x\,]]$$

El siguiente axioma ofrece un método de construcción de conjuntos alternativo a los descritos anteriormente. Ahora bien, los conjuntos que logra obtener contienen, con mucha facilidad, una gran cantidad de elementos.

Definición 2.1.7. Se define la *contención (estricta) entre clases* como sigue:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B]$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Definición 2.1.8. Sea a un conjunto. Se define la *potencia de un conjunto*, también llamado como las *partes de un conjunto*, como sigue:

$$\mathcal{P}(a) \coloneqq \{x \mid x \subseteq a\}$$

Nota. Véase que la operación de tomar la potencia no la hemos definido, *sensu stricto*, para clases propias.

Axioma 7 (Axioma de las Partes)**.** *La clase formada por la potencia de un conjunto es un conjunto.*

$$\forall x\ \exists y\ \forall u\,[u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x]$$

El siguiente axioma busca impedir la posibilidad de que un conjunto sea miembro de sí mismo:

Axioma 8 (Axioma de Regularidad)**.** *Todo conjunto no vacío posee un elemento $\in$-minimal:*

$$\forall x\,[x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in x)[y \cap x = 0]]$$

Proposición 2.1.9. *Para cualquier colección de n conjuntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tiene* $\neg[a_1 \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_1]$

Demostración. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Se tiene que A es un conjunto gracias al Axioma del Par. Por reducción al absurdo, si $a_1 \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_1$, entonces $(\forall x \in A)[x \cap A \neq 0]$, lo que contradice Regularidad. □

Corolario 2.1.10. *Para todo conjunto a, se tiene $a \notin a$*

En último lugar presentamos el Axioma del Producto Cartesiano y el Axioma de Elección. El primero nos permite tomar el producto cartesiano de dos conjuntos, mientras que el segundo postula la existencia de una función de elección. Si les otorgamos un lugar distinguido del resto de axiomas es debido a que, si bien serán mencionados en algunas ocasiones, apenas serán empleados. Respecto al Axioma del Producto Cartesiano, en el cuarto capítulo probaremos que puede deducirse de otros axiomas que ya hemos postulado, de manera que su formulación sólo es necesaria cuando negamos alguno de los que se emplea en dicha demostración. En lo que concierne al Axioma de Elección, lo formulamos aún no habiendo introducido la noción de función. Hemos preferido este acercamiento para poder tratar las nociones básicas sobre funciones en una sección aparte, esperando así obtener una mayor claridad en la exposición.

Definición 2.1.11. El *producto cartesiano de clases* viene dado por:

$$A \times B := \{x \mid (\exists y \in A)(\exists z \in B)[x = \langle y, z\rangle]\}$$

donde $\langle y, z\rangle$ denota el par ordenado de y y z $-$ ver 2.2.1 $-$.

Axioma 9 (Axioma del Producto Cartesiano)**.** *La clase formada por el producto cartesiano de dos conjuntos es un conjunto:*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\,[u \in z \Leftrightarrow (\exists v \in x)(\exists w \in y)[u = \langle v, w\rangle]]$$

Axioma 10 (Axioma de Elección)**.** *Para todo conjunto existe una función de elección. Formalmente:*

$$\forall x\,\exists f\,[\,\mathit{Fun}(f)\ \wedge\ \mathit{Dom}(f) = x \wedge (\forall y \in x)\,[\,y \neq 0 \Rightarrow f(y) \in y\,]]$$

Tras haber presentado los axiomas más importantes de la Teoría de Conjuntos, podemos definir algunas de las teorías más relevantes: la de Zermelo y sus derivadas.

Definición 2.1.12. Definimos:

$\mathit{ZF} := \mathit{EST} + \mathit{Partes} + \mathit{Infinito} + \mathit{Regularidad}$

$\mathit{ZFC} := \mathit{ZF} + \mathit{Elección}$

$\mathit{ZF}^- := \mathit{ZF} - \mathit{Regularidad}$

Concluimos esta sección con el que es, históricamente hablando, uno de los axiomas originales de la teoría de conjuntos que desarrollo Zermelo en 1908. Debido a estas razones, así como su utilidad, con frecuencia nos referiremos a él como si de un axioma se tratara.

Proposición 2.1.13 (Esquema de Separación de Zermelo, 1908)**.** *Sea A una clase. Entonces:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall u\,[u \in y \Leftrightarrow u \in x \wedge u \in A]$$

Demostración. Consideremos la fórmula $\varphi(x, y)$ definida como $x \in A \wedge x = y$. Dado que trivialmente se verifica:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \Rightarrow y = z]$$

podemos aplicar Reemplazamiento y deducir:

$$\forall x\,\exists y\,\forall z[z \in y \Leftrightarrow (\exists u \in x)[\,u \in A \wedge u = z\,]]$$

obteniéndose el resultado buscado. □

Mediante Separación son fácilmente demostrables los siguientes resultados:

Corolario 2.1.14. $A \subseteq a \Rightarrow \exists x\,[x = A]$

Demostración. Emplear Separación a $A \cap a$. □

Corolario 2.1.15. $a \neq 0 \Rightarrow \exists x\,[x = \bigcap a]$

Demostración. Como $a \neq 0$, la propiedad que define $\bigcap a$ no se cumple trivialmente, es decir, $\bigcap a \neq V$. De este modo, basta señalar que $\bigcap a \subseteq \bigcup a$ y aplicar el corolario anterior. □

Corolario 2.1.16. *La intersección de dos conjuntos es un conjunto.*

2.2. Clases, relaciones y funciones

En esta sección se introducen algunos conceptos y resultados fundamentales de la Teoría de Conjuntos a fin de no darlos por supuestos durante el desarrollo del Trabajo. El lector comprobará que se formalizarán diversos conceptos elementales en Matemáticas. Al margen de las definiciones, enunciaremos únicamente aquellos resultados que, debido a su naturaleza, se omiten en los estudios de Grado.

Los siguientes conceptos están principalmente tomados del quinto y sexto capítulo de [6] y del octavo capítulo de [2].

Definición 2.2.1. Se definen, respectivamente, el *par ordenado de a y b* y la *n-tupla ordenada de $a_1, a_2, \ldots, a_n$* como:

$$\langle a, b\rangle := \{x \mid x = a \vee x = \{a, b\}\} = \{a, \{a, b\}\}$$

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle := \langle\langle a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$$

Proposición 2.2.2. *La n-tupla ordenada de n conjuntos es un conjunto.*

Demostración. Emplear el Axioma del Par n veces. □

Definición 2.2.3. Se define la *diferencia entre clases* como:

$$A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Proposición 2.2.4. *Sea A una clase. Entonces la diferencia entre cualquier conjunto x y la clase A es un conjunto. Formalmente:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z[z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \notin A]$$

Demostración. En efecto, la diferencia entre un conjunto a y una clase A puede describirse como $a - A = \{x \in a \mid x \notin A\}$, de modo que el Esquema de Separación da el resultado. □

Definición 2.2.5. Se dice que una clase R es una *relación* si todos sus elementos son pares ordenados. Formalmente:

$$R \text{ es una relación} \Leftrightarrow R \subseteq V \times V$$

Escribiremos "$a\,R\,b$" si $\langle a, b\rangle \in R$.

Definición 2.2.6. Sea A una clase. Se define:

(i) $A^1 := A$

(ii) $A^n := A \times A^{n-1}$

(iii) $A^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\}$

Es interesante observar que $A^{-1} \subseteq V^2$ aún cuando $A \not\subseteq V^2$, luego A^{-1} es una relación. La siguiente definición introduce formalmente el concepto de función:

Definición 2.2.7. Diremos que una clase A es una *aplicación* o *función*, denotado por *Fun*(A), si es una relación que verifica:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\, [\langle x, y\rangle \in A \wedge \langle x, z\rangle \in A \Rightarrow y = z]$$

En este caso, denotaremos por $A(x)$ a la imagen de x por A. Dicho de otro modo, $A(x) = y$ si $\langle x, y\rangle \in A$.

Definición 2.2.8. Definimos:

(i) *Dominio de A*: $Dom(A) := \{x \mid \exists y[\langle x, y\rangle \in A]\}$

(ii) *Rango de A*: $Ran(A) := \{y \mid \exists x[\langle x, y\rangle \in A]\}$

(iii) *Restricción de A a B*: $A|_B := A \cap (B \times V)$

(iv) *Imagen de B por A*: $A[B] := Ran(A|_B)$

Resulta importante comprobar que, cuando A sea un conjunto, todas las clases anteriores son conjuntos y no clases propias. Para ello necesitamos un lema íntimamente ligado al Esquema de Reemplazamiento.

Lema 2.2.9. *Si A verifica $\forall x, y, z\, [\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in A \Rightarrow y = z]$, entonces $A[a]$ es un conjunto.*

Demostración. Basta comprobar que $A[a] = \{y \mid (\exists x \in a)[\langle x, y\rangle \in A]\}$, donde el lado derecho de la igualdad es justamente la conclusión de aplicar Reemplazamiento a la hipótesis. □

Corolario 2.2.10. *Dado un conjunto a, también son conjuntos:*

(i) a^{-1} *(ii)* $Dom(a)$ *(iii)* $Ran(a)$

Demostración. En cada caso basta aplicar el lema anterior a las siguientes funciones:

$$A_1 := \{\langle\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle\rangle \mid x, y \in V\} \qquad A_2 := \{\langle\langle x, y\rangle, x\rangle \mid x, y \in V\}$$
$$A_3 := \{\langle\langle x, y\rangle, y\rangle \mid x, y \in V\}$$

Se comprueba fácilmente que, para $i = 1, 2, 3$; el conjunto $A_i[a]$ es, respectivamente, a^{-1}, $Dom(a)$ y $Ran(a)$. □

Corolario 2.2.11. *Se tiene que $A \times B$ es un conjunto si y sólo si lo es $B \times A$.*

Demostración. Si consideramos la función $C := \{\langle\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\rangle \mid x, y \in V\}$, resulta fácil convencerse de las siguientes igualdades:

$$C[A \times B] = \{\langle b, a\rangle \mid (\exists\langle a, b\rangle \in A \times B)[\langle\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\rangle \in C]\} = B \times A$$
$$C[B \times A] = \{\langle a, b\rangle \mid (\exists\langle b, a\rangle \in B \times A)[\langle\langle b, a\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in C]\} = A \times B$$

La aplicación del lema anterior arroja el resultado. □

Tras haber estudiado bajo qué condiciones los conceptos formalizados anteriormente son o no conjuntos, a continuación asentamos cierta notación para aligerar el lenguaje referido a las funciones. A partir de ahora, y siguiendo la notación habitual en Matemáticas, reservaremos las minúsculas $f, g, h \ldots$ para expresar funciones. Insístase en que, a pesar de la notación, éstas siguen siendo clases y no necesariamente conjuntos.

Definición 2.2.12. Sean f y g dos funciones. Definimos:

(i) $f : A \longrightarrow B$ si $Dom(f) = A \wedge Ran(f) \subseteq B$

(ii) Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, definimos la composición de g con f como:

$$g \circ f := \{\langle u, w\rangle \mid \langle u, v\rangle \in f \wedge \langle v, w\rangle \in g\}$$

En este caso, lo denotaremos por $g \circ f : A \longrightarrow C$.

(iii) $f : A \longrightarrow B$ es *inyectiva* si $(\forall x, y \in A)[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$. Lo denotamos por $Inj(f)$.

(iv) $f : A \longrightarrow B$ es *sobreyectiva* si $Ran(f) = B$.

(v) $f : A \longrightarrow B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

(vi) Definimos la *restricción de f a A* como: $f|_A := \{\langle y, z\rangle \in f \mid y \in A\}$

(vii) Definimos la *imagen de C por f* como: $f[C] := \{y \mid (\exists x \in C)[f(x) = y]\}$

(viii) Definimos la *antiimagen de C por f* como: $f^{-1}[C] := \{x \mid f(x) \in C\}$

Lema 2.2.13. *Sea A una clase y x un conjunto. Se tiene:*

(i) Si existe $f : x \longrightarrow A$ sobreyectiva, entonces A es un conjunto.

(ii) Si existe $f : A \longrightarrow x$ inyectiva, entonces A es un conjunto.

Demostración. Probemos cada una de las afirmaciones:

(i) Si $f : x \longrightarrow A$ es sobreyectiva, entonces $f[x] = A$. Por Reemplazamiento se desprende el resultado.

(ii) Sea $f : A \longrightarrow x$ inyectiva. Entonces $f[A] \subseteq x$, luego $f[A]$ es un conjunto. De este modo, $f : A \longrightarrow f[A]$ es biyectiva y por (i), considerando f^{-1} se deduce que A es un conjunto como queríamos.

$\square$

Definición 2.2.14. Dos conjuntos a y b se dicen *equipotentes* si existe una biyección entre ellos. Lo denotaremos $a \sim b$.

Lema 2.2.15. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

3. Ordenación de clases

Los diversos conceptos de finitud que manejaremos en la segunda parte del Trabajo resultan estar estrechamente ligados a la noción de número natural. Esto resulta bastante lógico si consideramos, bajo una aproximación intuitiva de finitud, que todo conjunto finito posee un número preciso de elementos y que es posible llegar a enumerarlos. Como consecuencia de este hecho, resulta necesario estudiar cómo la Teoría de Conjuntos ha formalizado esta idea. En particular, nos interesa estudiar una propiedad que define a los números naturales y que, con las herramientas adecuadas, seremos capaces de trasladar al resto de conjuntos finitos: el orden. En este capítulo profundizaremos en el concepto de clase bien ordenada, de conjunto ordinal y de conjunto bien fundado a fin de lograr, posteriormente, una comprensión más profunda acerca de los conjuntos finitos.

Dado que la noción de conjunto bien fundado, aun siendo anterior a las demás, es tratada aquí de forma puramente instrumental, relegaremos su respectiva sección al final del capítulo. Esperamos subrayar así el interés teórico del resto de conceptos.

3.1. Clases bien ordenadas

Como adelantábamos anteriormente, estamos interesados en el estudio de cierta estructura de orden que puede atribuirse a los conjuntos finitos. Se hace necesario, pues, que estudiemos el concepto y las propiedades elementales de los conjuntos ordenados por una relación R. Comenzaremos definiendo la estructura básica sobre la cual se construyen las clases ordenadas, y acto seguido veremos qué condiciones debe cumplir una relación para ser considerada un orden. Por último, tras introducir las funciones que preservan el orden − llamados isomorfismos −, ofreceremos una serie de propiedades con el objetivo de probar el Teorema de Comparación de Buenos Órdenes, que asegura la existencia de un único isomorfismo entre dos clases cualesquiera.

Los resultados siguientes están tomados principalmente del noveno capítulo de [2].

Definición 3.1.1. Una *estructura relacional* es un par conformado por una clase A y una relación $R \subseteq A \times A$. Lo denotamos por $\langle A, R\rangle$.

Definición 3.1.2. Una relación R es una *relación de orden parcial* si es transitiva e irreflexiva, es decir, si verifica:

(Transitividad)	$\forall x, y, z[\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R]$
(Irreflexividad)	$\forall x[\langle x, x\rangle \notin R]$

En este caso, si $R \subseteq A \times A$, la estructura $\langle A, R\rangle$ recibirá el nombre de *clase parcialmente ordenada*. Por último, diremos que un orden parical $R \subseteq A \times A$ es un *orden total sobre A* (u *orden sobre A*) si verifica la condición de tricotomía, a saber,

$\forall x, y\,[\,xRy \vee x = y \vee yRx\,]$. De este modo, diremos que la estructura $\langle A, R\rangle$ es una *clase ordenada.*

Definición 3.1.3. Un orden total R sobre A es un *buen orden sobre* A si verifica:

(Adecuación a izquierda)	$(\forall x \in A)\,\exists z\,\forall y\,[y \in z \Leftrightarrow y \in A \wedge y\,R\,x]$
(Existencia de elemento mínimo)	$(\forall x \subseteq A)[x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)\,\neg[z\,R\,y]]$

En estas condiciones, la estructura $\langle A, R\rangle$ es una *clase bien ordenada.* El elemento $R-$ mínimo se denota $\mathit{inf}_R(A)$.

Nota. Con el objetivo de familiarizarse con la notación usual empleada para los ordinales y facilitar la lectura, emplearemos el símbolo $<$ para representar relaciones de orden, sean parciales, totales o de buen orden. En adición, extenderemos esta notación para cubrir, en una misma fórmula, varias situaciones comunes:

(i) $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$

(ii) $x \not< y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \notin <$

En último lugar, cuando se sobreentienda la relación de orden bajo la cual tomamos el elemento ínfimo $-$ véase que la totalidad, la irreflexividad y la transitividad aseguran que el ínfimo es único $-$, omitiremos el subíndice y lo denotaremos simplemente como *inf*(A).

Lema 3.1.4. *Si* $\langle A, <\rangle$ *es una clase parcialmente ordenada, totalmente ordenada o una clase bien ordenada y* $B \subseteq A$*, entonces* $\langle B, <\rangle$ *es, respectivamente, una clase parcialmente ordenada, totalmente ordenada o una clase bien ordenada.*

Demostración. Basta darse cuenta todas las propiedades que R debe cumplir con elementos de B se verifican trivialmente en tanto que son elementos de A. □

Definición 3.1.5. Sea $\langle A, <\rangle$ una clase ordenada y sea B una subclase de A.

(i) B se dice *cofinal* si todo elemento de A es mayorado o igualado por algún elemento de B. Formalmente:

$$\mathit{Cof}(B) \Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B \vee (\exists y \in B)[x < y]]$$

(ii) Un elemento $z \in A$ es una *cota superior de* B si z es mayor o igual que todo elemento de B. Una cota superior de B se dice *estricta* si es mayor que todos los elementos de B.

(iii) Un elemento $z \in A$ es el *supremo de* B si es la menor de las cotas superiores de B.

(iv) Decimos que B está *acotado en* $\langle A, <\rangle$ si existe una cota superior $z \in A$ de B. Análogamente, diremos que B está *estrictamente acotado* si la cota superior de A es estricta.

(v) Diremos que B es una *sección inicial de* $\langle A, <\rangle$ si para algún elemento y de A, se tiene $B = \{x \in A \mid x < y\}$. El lado derecho de la igualdad también se denomina *sección inicial determinada por* y, que denotaremos por A_y.

(vi) B es un *segmento inicial de* $\langle A, < \rangle$ si verifica:

$$(\forall x, y \in A)[x \in B \wedge y < x \Rightarrow y \in B]$$

Proposición 3.1.6 (Teorema de Minimización)**.** *Dado $<$ un buen orden sobre A, toda subclase no vacía posee un ínfimo. Formalmente:*

$$B \subseteq A \wedge B \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)[\, x \leq y \,]$$

Demostración. Sea $a \in B \subseteq A$. Como $<$ es un buen orden, la clase $C = \{\, z \in A \mid z \leq a \,\}$ es un conjunto, y por Separación, también lo es $D = \{\, z \in C \mid z \in B \,\} = C \cap B$. Véase que $a \in D$, luego D es no vacío. Además, dado que $<$ es un buen orden sobre D, existe $b \in A$ tal que $b = \mathit{inf}(D)$. Veamos que b cumple las propiedades que buscamos:

i) $b \in D \subseteq B \Rightarrow b \in B$

ii) Como para todo $y \in D$, se tiene $b \leq y$, el conjunto $\{y < b \mid y \in D\}$ es vacío. Si $\{y < b \mid y \in D\} = \{y < b \mid y \in B\}$, necesariamente $(\forall y \in B)[b \leq y]$. Basta pues demostrar la igualdad de conjuntos para obtener el resultado.

La contención directa es inmediata, puesto que $D \subseteq B$. La recíproca se hace evidente al resaltar que, si $y < b \leq a \Rightarrow y \leq a$, luego por definición de C, $b \in C$. Así, como $b \in B$, $b \in C \cap B = D$.

□

Nota. Véase que la existencia de elemento mínimo se tiene, por definición, exclusivamente para conjuntos. El Teorema de Minimización logra extender esta útil propiedad a cualquier subclase de la clase bien ordenada.

Proposición 3.1.7 (Principio de Inducción)**.** *Sea $<$ un buen orden sobre A, $B \subseteq A$. Entonces:*

$$(\forall x \in A)[(\forall y < x)[\, y \in B \Rightarrow x \in B \,]] \Rightarrow A = B$$

Demostración. Supongamos $(\forall y < x)[\, y \in B \Rightarrow x \in B \,]$ y, por reducción al absurdo, sea $x \in A$ tal que $x \notin B$. Gracias al Teorema de Minimización, existe $a \in A$ tal que $a = inf(A - B)$. Así, para todo $y < a$ se tiene $y \in B$, luego por hipótesis $a \in B$. Esta conclusión contradice $a \in A - B$. □

Antes de presentar cierto tipo de funciones que preservan el buen orden entre clases, debemos introducir una de las construcciones más versátiles que puede lograrse entre buenos órdenes: las definiciones por recursión. Dado que únicamente aparecerán en este Trabajo de Fin de Grado a la hora de estudiar el Axioma de Regularidad, ofreceremos su enunciado sin demostración alguna. Cuando estudiemos, en la sección posterior, los ordinales, volveremos a ofrecer una definición por recursión adaptada a estos conjuntos mucho más práctica:

Proposición 3.1.8 (Definición por recursión)**.** *Sea $<$ un buen orden sobre A y consideremos $g : V \longrightarrow V$. Entonces existe una única función $f : A \longrightarrow V$ tal que:*

$$(\forall x \in A)[f(x) = g((f\big|_{A_x}))]$$

Definición 3.1.9 (Isomorfismo entre clases bien ordenadas)**.** Sean $<$ y $<'$ sendas relaciones de buen orden sobre A y B:

(i) Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es *creciente* si preserva el orden entre elementos de A. Formalmente:

$$(\forall x, y \in A)[\, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$$

(ii) Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice un *isomorfismo*, denotado $f : A \cong B$, si es biyectiva y creciente.

(iii) Dos clases A y B son *isomorfas*, denotado $A \cong B$, si existe un isomorfismo entre ellas.

Proposición 3.1.10. *Sea $\langle A, <\rangle$ una clase bien ordenada. Si $f : A \longrightarrow A$ es creciente, entonces para todo elemento $x \in A$ se tiene $x \leq f(x)$.*

Demostración. Sea $C = \{y \in A \mid y \leq F(y)\}$. Veamos que $C = A$. Para ello, por reducción al absurdo, supongamos que $A - C \neq 0$. Por el Teorema de Minimización, existe $a = \mathit{inf}(A - C)$. Así:

$$\begin{aligned}
& a \notin C \Rightarrow a \nleq F(a) \\
[\![< \text{ es un orden total }]\!] \qquad & \Rightarrow F(a) < a \\
& \Rightarrow F(F(a)) < F(a) \\
& \Rightarrow F(a) \in A - C
\end{aligned}$$

Pero $F(a) < a$ contradice que a sea el ínfimo de $A - C$. □

Corolario 3.1.11. *Los isomorfismos entre clases bien ordenadas son únicos.*

Demostración. Sea $\langle A, <\rangle$ una clase ordenada. Es inmediato comprobar que la aplicación identidad es un isomorfismo de A. Veamos que cualquier otro isomorfismo $f : A \longrightarrow A$ es necesariamente la identidad. Como veremos más adelante, esto será suficiente para afirmar el enunciado del corolario en su totalidad.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \neq f(a)$. Entonces, si denotamos por B a la clase formada por los elementos de A para los que f no se comporta como la identidad, por el Teorema de Minimización existe $b \in B$ tal que b es $<$ −mínimo. Por 3.1.10, $b \leq f(b)$, luego por definición de b, $b < f(b)$. Más aún, puede probarse que para todo $x \in A$, $f(x) \neq b$, de donde se desprende que f no es sobreyectiva, lo que contradice que f sea un isomorfismo.

Probemos dicho aserto. Sea $x \in A$. Entonces $x < b \vee x = b \vee x > b$. En el primer caso, por definición de b, necesariamente se tiene que $f(x) = x < b$. El segundo ya lo hemos cubierto. En el tercer y último caso, como $x > b$ y f es creciente, necesariamente $f(x) > f(b)$. Pero como $f(b) > b$, $f(x) > b$. En cualquiera de los tres casos, se obtiene $f(x) \neq b$.

En último lugar, para probar la unicidad, sean $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, <\rangle$ dos clases ordenadas y consideremos dos isomorfismos f y g de A a B. Entonces $g^{-1} \circ f$ es un isomorfismo de A en A. Lo inferido anteriormente muestra que $g^{-1} \circ f = Id$, lo que equivale a afirmar que $f = g$, tal y como queríamos probar. □

Corolario 3.1.12. *Se verifica:*

(i) A *no es isomorfa a una subclase suya estrictamente acotada.*

(ii) A *no es isomorfa a una sección inicial suya.*

(iii) $(\forall x, y \in A)[A_x \cong A_y \Rightarrow x = y]$.

Demostración. Por definición, las secciones iniciales están estrictamente acotadas por un elemento de A, luego *(ii)* se sigue de *(i)*. Más aún, de *(ii)* se sigue que dos secciones iniciales isomorfas son iguales, es decir, están determinadas por el mismo elemento. Por tanto, únicamente hará falta probar la primera afirmación.

Sean $B \subseteq A$ y $a \in A$ tales que para todo $x \in B$ se tiene $x < a$. Si existe $f : A \cong B$ entonces $f : A \longrightarrow A$ es creciente y $f(a) \in B$, luego $f(a) < a$. Esto último contradice 3.1.10. □

Teorema 3.1.13 (Teorema de Comparación de Buenos Órdenes)**.** *Si* $\langle A, < \rangle$ *y* $\langle B, <' \rangle$ *son dos clases ordenadas, se verifica únicamente una de las tres condiciones:*

(i) $A \cong B$ *(ii)* $(\exists x \in A)[A_x \cong B]$ *(iii)* $(\exists y \in B)[A \cong B_y]$

Demostración. La unicidad de cualquiera de las afirmaciones se obtiene por 3.1.12, pues una clase no puede ser isomorfa a una sección inicial suya. Consideramos la relación:

$$f \coloneqq \{\langle x, y \rangle \in A \times B \mid A_x \cong B_y\}$$

Se observa que $Dom(f)$ y $Ran(f)$ son segmentos iniciales de A y B respectivamente. Más aún, $f : Dom(f) \cong Ran(f)$. En efecto, la aplicación $f : Dom(f) \longrightarrow Ran(f)$ es inyectiva por el tercer apartado de 3.1.12 y sobreyectiva por definición. Además, f es creciente, porque $x < y \Leftrightarrow A_x \subset A_y \Rightarrow B_{f(x)} \subset B_{f(y)} \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

En último lugar, veamos que f agota los elementos de A o de B; es decir, que se verifica $Dom(f) = A \vee Ran(f) = B$. Por reducción al absurdo, si esto no ocurriera, podríamos considerar $a = inf(A - Dom(f))$ y $b = inf(B - Ran(f))$. Bajo estas condiciones, se comprueba que $A_a \cong B_b$. Probémoslo:

Primeramente, por definición de a y de b, respectivamente, no existe ningún elemento de B_b cuya antiimagen sea a y no existe ningún elemento de A_a cuya imagen por f sea b, pues este hecho entra en contradicción con la definición de a y de b. Más aún, todo elemento de A_a encuentra su imagen por f en B_b. En efecto, si existiera $x \in A_a$ tal que $f(x) = y \geq b$, necesariamente $A_x \cong B_y$ y $b \in B_y$, luego existe $z < x$ tal que $A_z \cong A_b$. Así, $f(z) = b \in Ran(f)$, lo que contradice la definición de b. Análogamente puede probarse que todo elemento de B_b posee su antiimagen en A_a. Dado que $f|_{A_a} : A_a \longrightarrow B_b$ es creciente y biyectiva, necesariamente $A_a \cong B_b$, ergo $f(a) = b$. Esto último contradice, una vez más, la definición de a y b. Así, se obtiene $Dom(f) = A \vee Ran(f) = B$, de donde se desprende el resultado. □

3.2. Ordinales

Uno de los conceptos fundamentales en torno al cual gira este Trabajo de Fin de Grado es el de ordinal, en tanto que su construcción pretende establecer un buen orden canónico. Gracias a su definición, obtenemos una forma muy natural de introducir cierto orden entre los elementos de un conjunto mediante la relación de pertenencia.

En esta sección presentaremos los resultados básicos referidos a los números ordinales. Estableceremos sus propiedades fundamentales y lograremos demostrar que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal. Por último, estudiaremos brevemente la clase conformada por los ordinales y la relación que mantienen con el Axioma del Infinito. Seguimos los resultados encontrados en el noveno capítulo de [2] y alguno adicional tomado de [5].

Definición 3.2.1. Una clase A es *transitiva*, denotado $\mathit{Tr}(A)$, si verifica:

$$\forall x \in A\,[\,x \subseteq A\,]$$

El siguiente lema nos ofrece dos formas de construir clases sin perder la transitividad. La utilidad de este resultado se hará flagrante llegado el momento.

Lema 3.2.2. *Se verifica:*

(i) $\mathit{Tr}(x) \Rightarrow \mathit{Tr}(x \cup \{x\})$

(ii) $(\forall x \in A)[\mathit{Tr}(x)] \Rightarrow \mathit{Tr}(\bigcap A) \wedge \mathit{Tr}(\bigcup A)$

Demostración. Probemos cada aserto.

(i) Sea $y \in x \cup \{x\}$. Entonces $y \in x$ o $y = x$. En ambos casos, dado que x es transitivo, se tiene $y \subseteq x$.

(ii) Comprobemos que cada clase es transitiva.

Por definición se tiene $\bigcap A = \{y \mid (\forall x \in A)[y \in x]\}$. Si $A = 0$, entonces $\bigcap 0 = V$, luego el resultado se tiene trivialmente. En otro caso, sean $x \in A$, $y \in \bigcap A$ y $z \in y$. Entonces $y \in x \Rightarrow y \subseteq x \Rightarrow z \in x$. Como x es arbitrario, $z \in \bigcap A$.

La prueba para $\bigcup A$ es análoga, luego el resultado queda demostrado.

□

Definición 3.2.3. Un conjunto x es un *ordinal*, denotado $\mathit{Ord}(x)$, si es transitivo y está bien ordenado por $\in$.

Usaremos las variables $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ para representar conjuntos ordinales. Además, denotaremos por Ord la clase de los ordinales, es decir, $\mathit{Ord} := \{x \mid \mathit{Ord}(x)\}$. Siguiendo la notación de la sección anterior, dependiendo del contexto emplearemos tanto la notación $x < y$ como $x \in y$ según qué se quiera subrayar: la primera será usada para resaltar la estructura de orden entre ordinales y la segunda, para destacar la pertenencia de unos ordinales a otros.

Lema 3.2.4. *Se tiene:*

(i) $0 \in Ord$

(ii) $a \in \alpha \Rightarrow a \in Ord$. *Así, Ord es una clase transitiva.*

(iii) $\alpha \notin \alpha$

(iv) $\alpha \cup \{\alpha\} \in Ord$

Demostración. Probemos cada aserto:

(i) Trivial pues 0 no tiene elementos.

(ii) Como α es transitivo, $a \in \alpha \Rightarrow a \subseteq \alpha$. Pero como $a = \alpha$ implicaría, por Sustitución, $\alpha < \alpha$, contradiciendo que las relaciones de orden sean irreflexivas, necesariamente $a \subset \alpha$. De este modo, por 3.1.4 $<$ es un buen orden sobre a. Basta pues probar $Tr(a)$:

Sea $c < b < a$ y probemos que $b \subseteq a$. Como $Tr(\alpha), a, b, c \in \alpha$. Como $<$ es una relación de buen orden sobre α, en particular es transitiva, luego $c < a$. De este modo, $b \subseteq a$.

(iii) Como $<$ es irreflexiva, $\alpha \notin \alpha$.

(iv) Por 3.2.2, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es transitivo. Veamos que $<$ bien ordena al conjunto. La transitividad no depende de $\alpha \cup \{\alpha\}$, mientras que *(iii)* garantiza la irreflexividad, que ya se tenía para todos los elementos salvo, quizás, para α. La totalidad es inmediata gracias a la transitividad de $<$ y de α y a que $\alpha \in (\alpha \cup \{\alpha\})$. La adecuación a izquierda también es inmediata gracias a que, por definición, todos los elementos de *Ord* son conjuntos. Comprobemos, en fin, la existencia de elemento $<-$ mínimo:

Sea $B \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ no vacío. Consideremos $C := B \cap \alpha$. Distinguimos dos casos:

·) $C = 0$. Entonces $B = \{\alpha\}$ tiene elemento mínimo.

·) $C \neq 0$. Como $C \subseteq \alpha$, por el Teorema de Minimización existe $b = \mathit{inf}(C)$. Por último, dado que se tiene $b \in C \subseteq \alpha$, necesariamente $b < \alpha$, luego $\mathit{inf}(C) = \mathit{inf}(B)$.

□

Nota. La irreflexividad de $<$ en tanto que buen orden sobre los conjuntos transitivos ha ilustrado que no es necesario el Axioma de Regularidad para conseguir que un conjunto nunca pueda ser elemento de sí mismo. Esto nos permitirá prescindir de dicho axioma en la teoría de ordinales que aquí desarrollaremos y, como se verá más adelante, justificará que en FST no aparezca como axioma. Dado que el objetivo principal del Axioma de Regularidad es evitar esta situación, surge una pregunta muy natural que estudiaremos a su debido tiempo: ¿qué lugar ocupa Regularidad en FST?

Definición 3.2.5. Dado un ordinal α, se define su *sucesor* como:

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

Asimismo, un ordinal α se dice que es un *ordinal sucesor*, denotado $Suc(\alpha)$, si

$$\exists \beta \, [\, \alpha = \beta + 1 \,]$$

Por último, diremos que un ordinal α es un *ordinal límite*, denotado por $Lim(\alpha)$, si ni es vacío ni sucesor.

Nota. La cuarta propiedad de la proposición anterior ofrece un método para construir ordinales sucesores. Puesto que el vacío es uno de los conjuntos de los cuales tenemos garantizada su existencia, resulta natural que lo empleemos como elemento básico a partir del cual construir nuevos ordinales. El siguiente ejemplo ilustra cómo:

Ejemplo 3.2.6. Podemos construir algunos ordinales sucesores tomando reiteradamente el sucesor del conjunto vacío. Así, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&0 = 0 && [\![\text{léase: cero es igual al conjunto vacío}]\!]\\
&1 = 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}\\
&2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}\\
&n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\} \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

De acuerdo con los extremos de la última identidad y considerando que $\in$ resalta la relación de pertenencia, mientras que $<$ la de orden, se tiene:

$$m \in n \Leftrightarrow m < n$$

Por último, en vista de la construcción de los ordinales anteriores, es inmediato definir $n + m$ como sumarle 1 a n un total de m veces.

Lema 3.2.7. $\alpha + 1 = \beta + 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $\alpha \neq \beta$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& \alpha + 1 = \beta + 1 \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} = \beta \cup \{\beta\}\\
& \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \alpha \in \beta \cup \{\beta\} \wedge \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}\\
[\![\alpha \neq \beta]\!] \quad & \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha\\
& \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \alpha \in \alpha
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación contradice 3.2.4 □

Dedicaremos el resto de la sección a demostrar que $\langle Ord, < \rangle$ es una clase bien ordenada y a comprobar cómo el Axioma del Infinito está íntimamente ligado a la existencia de ordinales límite. Para ello serán necesarios varios resultados auxiliares. También aprovecharemos su exposición para introducir el concepto de máximo entre ordinales, que será útil más adelante.

Lema 3.2.8. $\alpha \in Ord \wedge A \subseteq \alpha \wedge Tr(A) \Rightarrow A \in Ord \wedge (A = \alpha \vee A \in \alpha)$

Demostración. Como $A \subseteq \alpha$, $<$ bien ordena A. Como, por hipótesis, A es transitivo, se tiene que $A \in Ord$.

Para la segunda parte de la prueba, supongamos a continuación que $A \neq \alpha$. Entonces $\alpha - A \neq 0$. Tomamos $\beta = Inf(\alpha - A)$. Observamos que gracias a la definición de β, para todo $\gamma \in \beta$, $\gamma \in A$; es decir, $\beta \subseteq A$. Probemos que $A \subseteq \beta$, de modo que $A \in \alpha$.

Sea $\gamma \in A$. Como β y γ son ordinales en α y $\langle \alpha, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado, sabemos que en particular se verifica:

$$\beta < \gamma \vee \beta = \gamma \vee \beta < \gamma$$

Observamos que si $\beta < \gamma$, por la transitividad de A, se tiene que $\beta \in A$, lo que contradice su definición. Una conclusión análoga se deduce si suponemos que $\beta = \gamma$. Como consecuencia, la única posibilidad válida es $\gamma \in \beta$, lo que prueba lo que buscábamos. $\square$

El siguiente teorema será probado a través de los lemas 3.2.10, 3.2.11 y 3.2.12. Hemos preferido esta exposición para hacer más asequibles las pruebas y resaltar adecuadamente cada propiedad que cumple la clase *Ord* respecto a $<$.

Teorema 3.2.9. *$\langle Ord, < \rangle$ es una clase bien ordenada.*

Lema 3.2.10. *$<$ es un orden total sobre Ord.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Ord$. Verifiquemos cada una de las propiedades que definen un orden total:

(i) **Irreflexividad:**
Se tiene $\alpha \not< \alpha$ gracias a 3.2.4.

(ii) **Transitividad:**
Como $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$ y γ es transitivo, necesariamente $\alpha \in \gamma$, esto es, $\alpha < \gamma$

(iii) **Tricotomía:**
Sea $\gamma = \alpha \cap \beta \subseteq \alpha$. Como γ es transitivo y está contenido en α, por 3.2.8 es un ordinal. Más aún el mismo resultado permite deducir que $\gamma \leq \alpha \wedge \gamma \leq \beta$, pues α y β son transitivos. Si demostramos $\gamma = \alpha \vee \gamma = \beta$, lograremos inmediatamente el resultado.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\gamma < \alpha \wedge \gamma < \beta$. Entonces $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, situación que no ocurre entre ordinales según hemos visto en 3.2.4.

$\square$

Lema 3.2.11. *Las secciones iniciales de $\langle Ord, < \rangle$ determinadas por α son conjuntos. Como consecuencia, $<$ es adecuada a izquierda en Ord.*

Demostración. Sea A una sección inicial de *Ord*. Por definición, existe $\alpha \in Ord$ tal que $A = \{x \mid x < \alpha\}$. Basta aplicar Extensionalidad para deducir que $A = \alpha$, de modo que A es un conjunto. $\square$

Lema 3.2.12. *Sea a un conjunto no vacío contenido en Ord. Entonces se tiene:*

$$\bigcap a \in Ord \wedge inf(a) = \bigcap a \in a$$

Así, como a es arbitrario, todo subconjunto no vacío de Ord posee un elemento mínimo.

Demostración. Como $a \neq 0$, por 2.1.15 $\bigcap a$ es un conjunto. Por 3.2.2 sabemos que $\bigcap a$ es transitivo y, además, $\bigcap a \subseteq \alpha$ para cualquier $\alpha \in a$. De este modo, por 3.2.8, $\bigcap a \in Ord$.

Para probar la segunda parte del resultado, consideremos $\beta = \bigcap a$. Veamos que β es $<-$mínimo en a, esto es, $\beta \in a$ y $(\forall \gamma \in a)[\beta \leq \gamma]$:

(*i*) $(\forall \gamma \in a)[\beta \leq \gamma]$:

$$\begin{aligned} \gamma \in a &\Rightarrow \bigcap a \subseteq \gamma \\ &\Rightarrow \beta \subseteq \gamma \\ &\Rightarrow \beta \leq \gamma && [\![3.2.8]\!] \end{aligned}$$

(*ii*) $\beta \in a$:

$$\begin{aligned} \beta \notin a &\Rightarrow (\forall \gamma \in a)[\beta \neq \gamma] \\ &\Rightarrow (\forall \gamma \in a)[\beta < \gamma] && [\![\text{véase (i)}]\!] \\ &\Rightarrow (\forall \gamma \in a)[\beta \in \gamma] \\ &\Rightarrow \beta \in \bigcap a = \beta && \text{lo que contradice } 3.2.4 \end{aligned}$$

□

Como decíamos, el Teorema 3.2.9 se sigue de los lemas anteriores.

Corolario 3.2.13. $\alpha, \beta \in Ord \Rightarrow \alpha \cup \beta \in Ord$

Demostración. Como Ord es una clase bien ordenada, se tiene $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$. Supongamos sin pérdida de generalidad $\alpha < \beta$. Entonces $\beta \subseteq \alpha$, luego $\alpha \cup \beta = \alpha$, de modo que $\alpha \cup \beta$ es un ordinal como queríamos probar. □

Definición 3.2.14. Se define el *máximo entre* α *y* β, denotado por *máx*(α, β), como $\alpha \cup \beta$.

Proposición 3.2.15. *Sea* $a \subseteq Ord$*. Entonces* $sup(a) = \bigcup a$*.*

Demostración. Probaremos primeramente que $\bigcup a$ es un ordinal y luego que es la menor cota superior de a.

Para ver que es un ordinal, sabemos por 3.2.2 que $\bigcup a$ es transitivo. Se observa que $\bigcup a \subseteq Ord$. En efecto, si $z \in \bigcup a$, entonces existe $y \in a$ tal que $z \in y$. Como $a \subseteq Ord$ por hipótesis, $y \in Ord$. Como por 3.2.4, Ord es una clase transitiva, $y \subseteq Ord$ luego $z \in Ord$ como queríamos probar.

Habiendo demostrado que $\bigcup a \subseteq Ord$, podemos considerar $\beta = inf(Ord - \bigcup a)$. Claramente β verifica $\bigcup a \subseteq \beta$. Aplicando 3.2.8, $\bigcup a \in Ord$, pues $\bigcup a$ es un conjunto.

Veamos en último lugar que $\bigcup a$ es la menor de las cotas superiores de a. Por definición, si $\beta \neq \bigcup a$ es una cota superior de a, entonces para todo $\gamma \in a$, $\gamma \leq \beta$. Por transitividad, $\gamma \subseteq \beta$, luego $\bigcup a \subset \beta$, es decir, $\bigcup a < \beta$ – 3.2.8. De este modo, $\bigcup a$ es la menor de las cotas superiores de a. □

Teorema 3.2.16. *Ord es una clase propia.*

Demostración. Si *Ord* fuera un conjunto, por 3.2.4-(ii) sería transitivo; y como $<$ bien ordena *Ord*, *Ord* sería, de hecho, un ordinal. Pero entonces $Ord \in Ord$, lo que no ocurre entre ordinales según 3.2.4-(iii). □

Conocido este hecho, los siguientes teoremas nos permiten adaptar tanto las definiciones por recursión como el Principio de Inducción a la clase de los conjuntos ordinales. No ofreceremos una demostración de ambos:

Teorema 3.2.17 (Principio de Inducción sobre ordinales)**.** *Sea C una subclase de Ord. Si se verifican:*

(i) $0 \in C$

(ii) $\alpha \in C \Rightarrow \alpha + 1 \in C$

(iii) $(\forall \beta < \alpha)[\beta \in C] \Rightarrow \alpha \in C$ *si α es límite.*

Entonces $C = Ord$

Teorema 3.2.18 (Definición por recursión sobre ordinales)**.** *Sean $g, h : V \longrightarrow V$ dos funciones y a un conjunto. Existe una única función $f : Ord \longrightarrow V$ tal que:*

(i) $f(0) = a$

(ii) $f(\alpha + 1) = g(f(\alpha))$

(iii) $f(\alpha) = h(\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\})$ *si α es límite.*

El siguiente resultado justifica la elección del estudio de los ordinales como herramienta para estudiar los conjuntos bien ordenados, en tanto que postula la existencia de un único isomorfismo entre ambos tipos de conjuntos.

Teorema 3.2.19 (Teorema de Mirimanoff, 1917)**.** *Para cada conjunto bien ordenado $\langle a, r\rangle$ existe un único ordinal α tal que $\langle a, r\rangle \cong \langle \alpha, <\rangle$. Análogamente, para cada clase propia bien ordenada $\langle A, <\rangle$, se tiene $\langle A, <\rangle \cong \langle Ord, \in\rangle$. En ambos casos el isomorfismo es único.*

Demostración. Sea $\langle a, r\rangle$ un conjunto bien ordenado. Por el Teorema de Comparación de Buenos Órdenes, dado que a es conjunto y las subclases de a son conjuntos, necesariamente existe $\alpha \in Ord$ tal que $\langle a, r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$. Análogamente, si $\langle A, R\rangle$ es una clase propia bien ordenada, el mismo teorema nos permite afirmar que $\langle A, R\rangle \cong \langle Ord, <\rangle$. Ciertamente, ésta es la única posibilidad factible de la disyuntiva de dicho teorema: tanto $A \cong Ord_\alpha$ como $Ord \cong A_x$, implicarían (respectivamente), por Reemplazamiento, que A y *Ord* son conjuntos, cuando el primero es una clase propia por hipótesis y el segundo es una clase propia por 3.2.16.

La unicidad del isomorfismo se obtiene, en ambos casos, gracias a 3.1.11. □

Una consecuencia de este teorema, que emplearemos más adelante y que únicamente enunciaremos, es la siguiente:

Corolario 3.2.20. *Sea $a \subseteq Ord$, $<$ un buen orden entre ordinales y β el único ordinal al que el conjunto a es isomorfo. Entonces, si $a \subseteq \alpha$, $\beta \leq \alpha$.*

Para finalizar la sección, veamos la relación que existe entre los ordinales límite y el Axioma del Infinito. Antes de ello, debemos introducir el ordinal que, según se demostrará acto seguido, será la menor clase inductiva, pues su existencia como conjunto se identificará con la postulación del Axioma del Infinito.

Definición 3.2.21. Definimos por ω a la clase formada por los ordinales finitos. Formalmente:

$$\omega := \{\alpha \mid \alpha = 0 \vee (Suc(\alpha) \wedge (\forall \beta < \alpha)[Suc(\beta) \vee \beta = 0])\}$$

Véase que su construcción coincide con la del ejemplo 3.2.6. Como consecuencia, afirmamos que ω representa la clase de los números naturales.

Proposición 3.2.22. *Se verifica:*

(i) *ω es una clase transitiva.*

(ii) *ω es una clase inductiva*[1].

(iii) *Si A es una clase inductiva, $\omega \subseteq A$.*

Demostración.

(i) Si $\alpha \in \omega$ y $\beta < \alpha$ entonces $\beta = 0$ o β es necesariamente un ordinal sucesor, luego $\beta \in \omega$.

(ii) Sea $\alpha \in \omega$ no vacío. Entonces α es sucesor y todos los ordinales β menores que α o son sucesores o son el vacío. Dado que $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ y $\beta < \alpha + 1 \Leftrightarrow \beta < \alpha \vee \beta = \alpha$, claramente todos los ordinales menores que $\alpha + 1$ o son sucesores o son el vacío. De este modo, $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$ y, consecuentemente, ω es inductivo.

(iii) Sea A una clase inductiva y $\alpha \in \omega$. Entonces $\alpha = 0$ o α es un ordinal sucesor. Probemos por inducción que $\alpha \in A$:

·) Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha \in A$ trivialmente.

·) Supongamos que existe $\alpha \in \omega$ tal que $\alpha \in A$. Es claro ver que $\alpha + 1 \in \omega$ pues ω es inductivo. Ahora bien, como A es una clase inductiva por hipótesis, $\alpha \cup \{\alpha\} \in A$. Dado que $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$, se tiene el resultado.

Por tanto, $\omega \subseteq A$ para toda clase inductiva A. Concluimos pues que ω es la menor clase inductiva. □

Proposición 3.2.23. *$Lím(\alpha) \Leftrightarrow \alpha$ es inductivo*

Demostración. Supongamos $Lím(\alpha)$. Como $\langle Ord, < \rangle$ es un buen orden, necesariamente se verifica $0 < \alpha \vee 0 = \alpha \vee \alpha < 0$. Se comprueba trivialmente que sólo la primera posibilidad es factible atendiendo a la propiedad que define α. Consideremos a continuación $\beta \in \alpha$ y comprobemos que $\beta + 1 \leq \alpha$. Una vez más, se tiene la disyuntiva: $\beta + 1 < \alpha \;\vee\; \beta + 1 = \alpha \;\vee\; \alpha < \beta + 1$. Como α es límite, no puede darse la igualdad, mientras que $\beta \in \alpha$ niega $\alpha < \beta + 1$. En efecto, si $\alpha \leq \beta + 1$, entonces $\beta \subseteq \alpha \subseteq \beta \cup \{\beta\}$, luego $\alpha = \beta + 1$, lo que contradice que α sea un ordinal límite. Por tanto, $\beta + 1 < \alpha$, es decir, $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$, luego α es inductivo.

[1] Recuérdese que en el Axioma del Infinito definimos una clase inductiva.

Recíprocamente, si α es inductivo, entonces para todo $\beta < \alpha$, $\beta + 1 < \alpha$. Si α fuera sucesor, existiría un ordinal γ tal que $\gamma + 1 = \alpha$. Pero entonces como $\gamma < \gamma + 1$, por hipótesis, $\gamma + 1 \in \gamma + 1$. Contradicción. □

Corolario 3.2.24. $\exists \alpha \, [\mathit{Lím}(\alpha)] \Leftrightarrow \mathit{Inf}$

Nota. Los dos resultados anteriores han probado que todo axioma que asevere la existencia de un conjunto inductivo afirma, implícitamente, que ω es un conjunto. En efecto, por construcción siempre será la menor clase inductiva, y por 2.1.14, ω será un conjunto. Por este motivo, el Axioma del Infinito postula *precisamente* la existencia de ω como conjunto. Véase, si uno no se ve convencido, la formulación de dicho axioma y compárese con el Ejemplo 3.2.6.

3.3. Relaciones bien fundadas

En esta sección introducimos algunos conceptos fundamentales acerca de las clases bien fundadas con el objetivo de poder emplear, posteriormente, la clase de los conjuntos hereditariamente finitos. Construiremos la clase de los conjuntos bien fundados a partir de la clausura transitiva de un conjunto y luego definiremos la función rango con el objetivo de describir la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados. **Estas construcciones requieren el Axioma del Infinito, luego será supuesto durante el desarrollo de esta sección**. Más adelante se comprobarán las limitaciones de este requerimiento en las teorías posteriores. Un desarrollo más exhaustivo puede encontrarse en el segundo capítulo de [5].

Necesitamos un par de conceptos extra para poder definir la clase de los conjuntos bien fundados

Definición 3.3.1. Dada una clase A, una relación R es una *relación bien fundada sobre* A si verifica:

Adecuación a izquierda:	$(\forall x \in A) \, \exists z \, \forall y \, [y \in z \Leftrightarrow y \in A \land y \, R \, x]$
Existencia de elemento minimal:	$(\forall x \subseteq A)[x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)[\neg(z \, R \, y) \lor y = z]]$

Nota. La definición de elemento minimal induce la *elemento maximal*. Dada una clase bien fundada $\langle A, R \rangle$, y $x \subseteq A$ no vacío, se dice que $y \in x$ es un *elemento maximal* de x si para todo $z \in x$, verifica $[\neg y \, R \, z \, \lor \, z = y]$.

Por último, dado que R no es un orden total, los elementos maximal y minimales, si existen, no tienen por qué ser únicos.

Nota. Obsérvese que las propiedades que definen una relación bien fundada son aquellas que añadimos a un orden total para obtener un buen orden. Como consecuencia de este hecho, se mantiene el siguiente resultado, que ya demostramos para un orden cualquiera (ver 3.1.4):

Lema 3.3.2. *Si R es una relación bien fundada en A y $B \subseteq A$, entonces R es una relación bien fundada sobre B.*

Nota. Sobre relaciones bien fundadas también existe un principio de inducción. Dado que su demostración se basa, al igual que en el caso de buenos órdenes, en un Teorema de Minimización − que no usaremos −, y puesto que sólo emplearemos este tipo de inducción en un resultado meramente instrumental, omitiremos su demostración en aras de la concisión. Esperamos así ofrecer una exposición clara y más general[2] de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados.

Teorema 3.3.3 (Principio de inducción sobre relaciones bien fundadas)**.** *Sea φ una fórmula. Se verifica:*

$$\forall x\,[\forall y\,(y\,R\,x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)] \Rightarrow \forall x\,\varphi(x)$$

Definición 3.3.4. Se define la *clausura transitiva* de una clase A, denotado por $Tc(A)$, como la menor clase transitiva que contiene a A.

Lema 3.3.5. *Se verifica:*

(i) La clausura transitiva de un conjunto es un conjunto.

(ii) $B \subseteq Tc(A) \Rightarrow B \subseteq Tc(B) \subseteq Tc(A)$

Demostración. Veamos cada una de las afirmaciones:

(i) Sea x un conjunto. Definamos la relación $xRy \Leftrightarrow y \in x$. Se observa que la siguiente clase, $R[x]$, es un conjunto, pues:

$$R[x] = \{y \mid (\exists u \in x)[uRy]\} = \{y \mid (\exists u \in x)[y \in u]\} = \bigcup x$$

y el extremo derecho de la cadena de identidades es un conjunto gracias al Axioma de la Unión.

Dado que asumimos *Inf*, podemos definir por recursión la función f como:

$f(0) = x$

$f(n+1) = R[f(n)]$

Si definimos recursivamente $\bigcup^0 y = y$, $\bigcup^{n+1} y = \bigcup(\bigcup^n y)$ y $\bigcup^* y = \bigcup_{n\in\omega}(\bigcup^n y)$, es inmediato probar por inducción que $f(n) = \bigcup^n x$. Esta observación hace evidente que $\bigcup Ran(f) = \bigcup^* x$. Dado que el lado izquierdo de la igualdad es un conjunto por Reemplazamiento y Unión, basta probar que el lado derecho es la clausura transitiva de x:

En primer lugar, probemos que $\bigcup^* x$ es transitivo. Para ello sea $y \in \bigcup^* x$. Entonces existe un natural n tal que $y \in \bigcup^n x$. Si $z \in y$, entonces $z \in \bigcup(\bigcup^n x) = \bigcup^{n+1} x$, luego $z \in \bigcup^* x$

En segundo y último lugar, veamos que $\bigcup^* x$ es el menor conjunto transitivo que contiene a x. Para ello sea y un conjunto transitivo que contiene a x y supongamos, por reducción al absurdo, que $\bigcup^* x \nsubseteq y$. Sea n el menor natural para el cual existe $z \in \bigcup^n x$ tal que $z \notin y$. Obsérvese que $n \geq 1$ pues $x \subseteq y$ por hipótesis. Podemos considerar el conjunto $\bigcup^{n-1} x$, que está contenido en y

[2]Véase la nota posterior a 3.3.15 para una justificación de este hecho.

por la elección de n. Pero como y es transitivo, los elementos de sus elementos pertenecen a y, luego en particular $z \in \bigcup^n x = \bigcup(\bigcup^{n-1} x) \subseteq y$; de modo que $z \in y$ lo cual es un absurdo.

Como consecuencia de estos razonamientos, hemos probado que gracias al Axioma del Infinito existe la clausura transitiva de cualquier conjunto. Además, ésta es de la forma $\bigcup^* x$.

(ii) Inmediato siguiendo la definición de $Tc(B)$, pues $Tc(A)$ también es transitivo y $B \subseteq Tc(A)$.

□

Definición 3.3.6 (Mirimanoff, 1917)**.** Se define la clase de los conjuntos bien fundados como sigue:

$$Wf := \{x \mid \in \text{ es una relación bien fundada sobre } Tc(x)\}$$

Teorema 3.3.7. *Wf es la mayor clase transitiva en la que $\in$ es una relación bien fundada.*

Demostración. Probemos en primer lugar que Wf es una clase transitiva. Si $x \in Wf$, entonces $\in$ es una relación bien fundada sobre $Tc(x)$. Sea $y \in x$. Entonces $y \in Tc(x)$, luego $y \subseteq Tc(x)$ al ser transitivo. Por 3.3.5, $Tc(y) \subseteq Tc(x)$, luego por 3.3.2, $\in$ es una relación bien fundada sobre $Tc(y)$, de modo que $y \in Wf$.

En segundo lugar, veamos que $\in$ es una relación bien fundada sobre Wf. La adecuación a izquierda es trivial gracias al Axioma de Extensionalidad, luego bastará con probar la existencia de elemento $\in$-minimal para un conjunto arbitrario. Sea $x \subseteq Wf$ un conjunto no vacío y consideremos $y \in x$ arbitrario. Si $y \cap x = 0$, hemos dado con el elemento minimal buscado. En otro caso, $Tc(y) \cap x$ es un subconjunto no vacío de $Tc(y)$, pues contiene a $y \cap x$, que es no vacío. Dado que Wf es una clase transitiva, $\in$ es una relación bien fundada sobre $Tc(y)$, luego existe $z \in Tc(y) \cap x$ tal que $z \cap (Tc(y) \cap x)) = 0$.

Veamos que z es el conjunto buscado; es decir, que verifica $z \cap x = 0$. Si suponemos, por reducción al absurdo, $z \cap x \neq 0$, seguiríamos el razonamiento anterior para encontrar un elemento minimal $z' \in Tc(z) \cap x$. Como $Tc(z) \cap x \subseteq Tc(y) \cap x$, todo elemento $\in -$minimal de $Tc(y) \cap x$ lo es de $Tc(z) \cap x$. De este hecho se desprende que $z \cap (Tc(z) \cap x) = 0$. Ahora bien, $z \cap x \subseteq z \cap (Tc(z) \cap x) = 0$, y esto último contradice $z \cap x \neq 0$.

En tercer y último lugar, sea T una clase transitiva en la que $\in$ es una relación bien fundada. Sea $x \in T$. Entonces, por transitividad, $x \subseteq T$, luego $Tc(x) \subseteq T$. Por 3.3.2, $\in$ es una relación bien fundada sobre $Tc(x)$. De este modo, $x \in Wf$ como queríamos probar. □

Lema 3.3.8. *$x \subseteq Wf \Rightarrow x \in Wf$.*

Demostración. Por definición de clausura transitiva, $Tc(x) \subseteq Wf$. Basta emplear 3.3.2 para obtener que $\in$ es una relación bien fundada sobre $Tc(x)$, luego $x \in Wf$. □

Dedicaremos el resto de la sección a comprobar cómo se relaciona la clase de los conjuntos bien fundados con otra clase de conjuntos, a saber, aquellos definidos a partir de la función R, que construye la jerarquía acumulativa de conjuntos bien fundados. Como resultado, obtendremos una construcción explícita de los conjuntos bien fundados. Para ello será necesario introducir, primeramente, la función rango respecto de $\in$.

Definición 3.3.9. Se define por recursión la función *rango de* $x \in Wf$ como:

$$\rho : Wf \longrightarrow Ord$$

dada por:
$$\rho(x) := sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}$$

Nota. Véase que $\{\rho(y)+1 \mid y \in x\}$ es un conjunto por Reemplazamiento, luego podemos tomar supremo.

Proposición 3.3.10. *Para todo $x \in Wf$, $\rho(x) \in Ord$.*

Demostración. Por inducción en $\in$. Sea $x \in Wf$ y supongamos que para todo $y \in x$, $\rho(y) \in Ord$. Entonces $sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\} = \bigcup\{\rho(y) \mid y \in x\}$, que es un ordinal gracias a la hipótesis de inducción. □

Lema 3.3.11. *Si $y \in x$ y $x \in Wf$, entonces $y \in Wf \wedge \rho(y) < \rho(x)$.*

Demostración. Es inmediato ver que $y \in Wf$, pues Wf es transitiva según vimos en 3.3.7. Por tanto, podemos considerar $\rho(y)$.

Por otro lado, como $\rho(x) = sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}$ y $\rho(y) \in \{\rho(y) \mid y \in x\}$, al emplear la definición de supremo se obtiene el resultado. □

Proposición 3.3.12. *La clase $\{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\}$ es un conjunto.*

Demostración. Por inducción en α:

·) Si $\alpha = 0$, la clase es el conjunto vacío.

·) Supongamos que la fórmula es cierta para α y probémosla para su sucesor. Para ello bastará demostrar que $\{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha + 1\} \subseteq \mathcal{P}(\{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\})$, pues por hipótesis de inducción $\mathcal{P}(\{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\})$ es un conjunto y 2.1.14 dará el resultado.

Si $y \in \{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha + 1\}$, entonces $\rho(y) \leq \alpha$. Por 3.3.11 claramente $(\forall z \in y)[\rho(z) < \rho(y) \leq \alpha]$, luego $y \subseteq \{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\}$, como queríamos probar.

·) Supongamos que α es un ordinal límite. Entonces

$$\{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha}\{x \in Wf \mid \rho(x) < \beta\}$$

Véase que el lado derecho es un conjunto gracias a 2.1.4 y Reemplazamiento.

□

Definición 3.3.13. Definimos la función R sobre los ordinales como:

$$R(\alpha) := \{x \in Wf \mid \rho(x) < \alpha\}$$

Nota. Véase que R manda conjuntos en conjuntos gracias al resultado anterior.

Teorema 3.3.14. *Se verifica:*

(i) $R(\alpha)$ *es un conjunto transitivo. Por tanto,* $\bigcup_{\alpha \in Ord} R(\alpha)$ *es una clase transitiva.*

(ii) $Wf = \bigcup_{\alpha \in Ord} R(\alpha)$

Demostración. (i) Sea $x \in R(\alpha)$ e $y \in x$. Por un lado, $\rho(x) < \alpha$, y por otro, gracias a 3.3.11, $\rho(y) < \rho(x)$, luego $\rho(y) < \alpha$, luego $y \in R(\alpha)$.

(ii) Por definición de $R(\alpha)$, todo elemento de Wf tiene asociado mediante ρ un ordinal α, luego $Wf \subseteq \bigcup_{\alpha < Ord} R(\alpha)$. Por otro lado, la relación $\in$ es bien fundada en $\bigcup_{\alpha < Ord} R(\alpha)$. Efectivamente, si $x \in R(\alpha)$, podemos considerar la clase $u := \{\rho(y) \mid y \in x\} \subseteq Ord$, que es un conjunto por Reemplazamiento. Tomando el menor ordinal $\alpha \in u$ y un elemento $y \in x$ tal que $\rho(y) = \alpha$, es claro ver que $y \cap x = 0$. En efecto, si la intersección no fuera vacía, existiría $z \in x \cap y$ de tal modo que, por 3.3.11, $\rho(z) < \rho(y) = \alpha$. Por otro lado, como $z \in x$, $\rho(z) \in u$. Esto, no obstante, contradice la definición de α como menor elemento de u.

Dado que $\in$ es una relación bien fundada en $\bigcup_{\alpha < Ord} R(\alpha)$ y, por 3.3.7, Wf es la mayor clase transitiva en la que $\in$ es una relación bien fundada, $\bigcup_{\alpha < Ord} R(\alpha) \subseteq Wf$. Por tanto, ambas clases son idénticas.

□

Lema 3.3.15. *Se verifica:*

(i) $x \subseteq R(\alpha) \Leftrightarrow x \in Wf \wedge \rho(x) \leq \alpha$

(ii) Si $x \in Wf$*, entonces* $\rho(x)$ *es el menor ordinal* α *tal que* $x \subseteq R(\alpha)$

(iii) $R(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{P}(R(\beta))$

(iv) Si $\alpha \leq \beta$*, entonces* $R(\alpha) \subseteq R(\beta)$

(v) $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$

(vi) Si α *es un ordinal límite, entonces* $R(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} R(\beta)$

Demostración. Probemos cada propiedad:

(i) Si $x \subseteq R(\alpha)$, entonces $x \subseteq Wf$, luego $x \in Wf$ por 3.3.8. Finalmente, por definición de supremo, $\rho(x) \leq \alpha$, pues el rango de todo elemento de x está estrictamente acotado por α.

Recíprocamente, supongamos $x \in Wf \wedge \rho(x) \leq \alpha$ y sea $y \in x$. Por 3.3.11, $\rho(y) < \rho(x)$, luego $\rho(y) < \alpha$, de modo que $y \in R(\alpha)$.

(ii) Sea $x \in Wf$. Por (i), sabemos que $x \subseteq R(\rho(x))$. Si $\beta < \rho(x)$, entonces se tiene:

$$\neg(x \in Wf \wedge \rho(x) \leq \beta)$$

Aplicando de nuevo (i) deducimos que $x \nsubseteq R(\beta)$.

(iii) Lo probaremos por doble contención:

$\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in R(\alpha)$ y denotemos por β a $\rho(x)$. Sabemos que $\beta < \alpha$, luego por (ii), $x \subseteq R(\beta)$, luego $x \in \mathcal{P}(R(\beta))$.

$\boxed{\supseteq}$ Si $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(R(\beta))$, entonces existe $\gamma < \alpha$ tal que $x \subseteq R(\gamma)$. Por tanto, empleando (i), $x \in Wf$. Además, si denotamos por β al menor de estos ordinales, por (ii) se tiene que $\rho(x) = \beta < \alpha$, luego $x \in R(\alpha)$.

(iv) Inmediato.

(v) Lo demostraremos por doble inclusión. Tengamos en cuenta que $R(\alpha) \subseteq R(\alpha+1)$:

$\boxed{\subseteq}$ Si $x \in R(\alpha+1)$, por (iii) existe $\beta < \alpha+1$ tal que $x \in \mathcal{P}(R(\beta))$. Véase que $\beta \leq \alpha$. Por otro lado, $x \subseteq R(\beta)$, y por (iv) obtenemos $x \subseteq R(\alpha)$, de modo que $x \in R(\mathcal{P}(\alpha))$

$\boxed{\supseteq}$ Si $x \in \mathcal{P}(R(\alpha))$ entonces $x \subseteq R(\alpha)$, luego $x \in R(\alpha+1)$ gracias a la observación anterior.

(vi) Lo demostraremos por doble inclusión:

$\boxed{\subseteq}$ Si $x \in R(\alpha)$, entonces $\rho(x) < \alpha$. Como α es límite, existe $\beta < \alpha$ tal que $\rho(x) < \beta < \alpha$. De este modo, $x \in R(\beta)$, luego $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$.

$\boxed{\supseteq}$ Si $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in R(\beta)$. Empleando (iv) se deduce $x \in R(\alpha)$.

□

Nota. En el lema anterior hemos demostrado que, a partir de la función rango, existe una fórmula explícita para calcular los conjuntos que forman la clase *Wf*. Dicha fórmula es la que queda reflejada en la siguiente definición, que como quizá sepa el lector, puede proponerse como definición alternativa bajo la cual construir la clase *Wf*. De haber recurrido, empero, a esta construcción, hubiéramos perdido la relación que mantiene la jerarquía acumulativa con los conjuntos bien fundados y hubiéramos tenido que recuperarla mediante argumentos más obscuros. Aún así, si la hacemos explícita al aproximarnos al término de la sección, es porque resulta mucho más cómodo trabajar con ella que con el rango:

Definición 3.3.16. Se define por recursión sobre ordinales la función R como sigue:

(i) $R(0) := 0$

(ii) $R(\alpha) := \mathcal{P}(R(\beta))$ si α es sucesor y $\beta + 1 = \alpha$.

(iii) $R(\alpha) := \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$ si α es límite.

Para finalizar, enunciamos y demostramos el siguiente lema, que será necesario posteriormente cuando estudiemos el Axioma de Regularidad:

Lema 3.3.17. *Si $x \in R(\alpha)$, entonces existe un ordinal sucesor β tal que $x \in R(\beta)$*

Demostración. Notamos primeramente que $\alpha \neq 0$ pues $R(0) = 0$. Si α es sucesor, el enunciado se verifica trivialmente. En otro caso, por 3.3.15, $R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$. Entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in R(\beta)$. Como α es límite, necesariamente $\beta + 1 < \alpha$. De este modo, por 3.3.15-(iv), $x \in R(\beta) \subseteq R(\beta+1) \subseteq R(\alpha)$, de modo que $x \in R(\beta+1)$ donde claramente $\beta + 1$ es un ordinal sucesor. $\square$

Parte II

Teoría de conjuntos finitos

4. Teoría de conjuntos finitos

4.1. Nociones básicas de finitud. Relaciones entre axiomas.

Tras haber sentado las bases propias de la Lógica de Primer Orden y de la Teoría Axiomática de Conjuntos, profundizaremos en diferentes alternativas de la primera. Estamos interesados en el estudio de una teoría axiomática de conjuntos que niegue el Axioma del Infinito. Si bien, inicialmente, esto niega la existencia del conjunto formado por todos los números naturales, a continuación comprobaremos que esto no resulta necesario para trabajar con la noción de ordinal natural. A grandes rasgos, esta restricción impide aquellos razonamientos que necesitan que ω sea un conjunto para garantizar que la clase construida sea un conjunto y no una clase propia.

Salvo que se indique lo contrario, los resultados ulteriores pueden encontrarse en el artículo de Baratella $-$ Ferro [1].

Definición 4.1.1. Un conjunto x es un *número natural*, denotado $Nat(x)$, si verifica:

$$Ord(x) \wedge \forall y [\, y \leq x \Rightarrow \neg Lim(y)]$$

Salvo que se indique lo contrario, reservaremos las letras $n, m...$ para denotar números naturales.

Nota. Resulta sencillo comprobar que la definición que acabamos de ofrecer de número natural implica que ω es exactamente la clase formada por los números naturales. Véase, además, que $\omega \notin \omega$ pues $Lim(\omega)$.

Recordemos que la Teoría Elemental de Conjuntos, denotada por EST, se define como aquella que asume los siguientes axiomas:

Vacío:
$\exists y\ \forall x\, [x \notin y]$

Extensionalidad:
$\forall x\ \forall y\, [\forall z\, [z \in x \Leftrightarrow z \in y] \Rightarrow x = y]$

Reemplazamiento:
$\forall x\ \forall y\ \forall z\, [\, \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \Rightarrow y = z\,] \Rightarrow \exists u\ \forall y\, [\, y \in u \Leftrightarrow (\exists x \in a)[\, \varphi(x, y)]]$

Par:
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\, [u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y]$

Unión:
$\forall x\ \exists z\ \forall u\, [u \in z \Leftrightarrow (\exists y \in x)[u \in y]]$

Nótese que el Axioma del Infinito $-$ aquel que pretendemos negar $-$ no pertenece a EST. Ha de subrayarse que el Principio de Inducción en clases bien ordenadas puede ser probado con los axiomas de *EST* (véase la construcción que ha derivado en 3.1.7 y su demostración), luego podemos emplear este argumento en las demostraciones ulteriores. Hechas estas consideraciones, a continuación se estudian algunos conceptos de finitud y cómo éstos se relacionan entre sí a partir de los axiomas que admitamos. Se tienen las siguientes definiciones:

Definición 4.1.2. Un conjunto x es *ω-finito*, denotado $Fin^{\omega}(x)$, si no existe ninguna función inyectiva de la clase de números naturales a un subconjunto suyo. Formalmente:

$$\nexists f\,[\,Fun(f) \wedge Inj(f) \wedge Dom(f) = \omega \wedge Ran(f) \subseteq x\,]$$

Definición 4.1.3. Un conjunto x es *f-finito*, denotado $Fin^{f}(x)$, si existe una biyección de un número natural en él. Formalmente:

$$\exists f\,\exists n\,[\,Fun(f) \wedge Inj(f) \wedge Nat(n) \wedge Dom(f) = n \wedge Ran(f) = x\,]$$

Definición 4.1.4. Un conjunto x es *Dedekind-finito*, denotado $Fin^{D}(x)$, si no existe ninguna aplicación inyectiva de x en algún subconjunto propio suyo. Formalmente:

$$\nexists f\,\exists y\,[\,y \subseteq x \wedge y \neq x \wedge Fun(f) \wedge Inj(f) \wedge Dom(f) = x \wedge Ran(f) = y\,]$$

A lo largo de este capítulo entenderemos la finitud como *f-finitud*, dado que las demás caracterizaciones requieren el Axioma de Elección para arrojar resultados similares.

Los siguientes resultados relacionan las diferentes nociones de finitud que hemos presentado en este capítulo. Antes de comenzar con ellos, es oportuno verificar el siguiente resultado.

Lema 4.1.5. *EST* $\vDash$ *Axioma del Producto Cartesiano*

Demostración. Sean x e y dos conjuntos. Para cada $z \in y$, sea $f_z : x \longrightarrow V$ definida por $f_z(v) = \langle v, z\rangle$. Véase que $Ran(f_z) = \{y \mid (\exists v \in x)[\,f_z(v) = y\,]\}$ y que, por Reemplazamiento, $Ran(f_z)$ es un conjunto. A continuación definimos la función g de dominio y como $g(z) = Ran(f_z)$. Se tiene que $Ran(g) = \{\,Ran(f_z) \mid z \in y\,\}$, que es un conjunto por Reemplazamiento. Por último, por el Axioma de la Unión, $\bigcup Ran(g)$ es un conjunto, y además se tiene:

$$\bigcup Ran(g) = \{\,z \mid (\exists u \in Ran(g))[\,z \in u\,]\} = \{\,z \mid (\exists v \in y)[\,z \in Ran(f_v)\,]\} =$$

$$= \{\,z \mid (\exists v \in y)(\exists w \in x)[\,f_v(w) = z\,]\} = x \times y$$

□

Lema 4.1.6. *EST + Inf* $\vdash \forall x\,[\,Fin^{\omega}(x) \Leftrightarrow Fin^{D}(x)]$

Demostración. Para probar la implicación directa, supongamos que existe un conjunto a tal que $\neg Fin^{D}(a)$. Entonces existe una aplicación biyectiva $g : a \longrightarrow b$ para algún $b \subset a$. Si denotamos por g^n a la composición de la función g consigo misma n veces, donde $g^0 = id$, se observa que $Dom(g^n) = a$ para todo $n > 0$. Como $b \subset a$, existe

$z \in a - b$. Definimos $f : \omega \longrightarrow b$ como $f(n) = g^n(z)$. Claramente $Ran(f) \subseteq a$. Si probamos que f es inyectiva, habremos encontrado una aplicación inyectiva de ω en un subconjunto de a; esto es, habremos demostrado $\neg Fin^\omega(a)$.

Supongamos que f no es inyectiva. Entonces existen dos naturales $n < m$ tales que $f(n) = f(m)$. Por el Principio de Minimización, la clase $\{n \mid (\exists m > n)[f(n) = f(m)]\}$ posee un mínimo, que denotaremos n para no extender la notación. Claramente $m > 0$ y, además, se prueba que $n \neq 0$ pues $Ran(f^m) \subseteq b$ y $f(0) = g^0(z) = z \in a - b$. Por tanto, $m > n > 0$. Basta considerar que g es biyectiva en la cadena de igualdades $f(m) = g^m(z) = g(g^{m-1}(z)) = g(g^{n-1}(z)) = g^n(z) = f(n)$ para deducir la igualdad $g^{m-1}(z) = g^{n-1}(z)$; es decir, $f(m-1) = f(n-1)$. Esto contradice la elección de n como el mínimo elemento de la clase. Por tanto, f es inyectiva, como queríamos probar.

Para el recíproco, sea x tal que $\neg Fin^\omega(x)$. Entonces existe una aplicación inyectiva $f : \omega \longrightarrow x$. Sea $y = x - f(0)$. Se tiene claramente que $y \subset x$. Definimos la aplicación $g : x \longrightarrow y$ como sigue:

·) Si $z \in Ran(f)$, existe un único $n \in \omega$ tal que $f(n) = z$. Así, $g(z) \coloneqq f(n+1)$.

·) Si $z \notin Ran(f)$, entonces $g(z) \coloneqq z$.

Gracias a la inyectividad de f y la definición de y, g es inyectiva. Esto prueba $\neg Fin^D(x)$. □

Lema 4.1.7. *EST* $\vdash \forall x Fin^\omega(x) \Rightarrow \neg Inf$

Demostración. Por reducción al absurdo, si suponemos el Axioma del Infinito, la clase ω es un conjunto. Claramente $\neg Fin^\omega(\omega)$. Contradicción. □

Corolario 4.1.8. *EST* $\vdash \forall x Fin^D(x) \Rightarrow \neg Inf$

Demostración. Por reducción al absurdo, si suponemos el Axioma del Infinito, la clase ω es un conjunto. Claramente $\neg Fin^\omega(\omega)$. Por el lema 4.1.6, esto es equivalene a $\neg Fin^D(\omega)$. Contradicción. □

Lema 4.1.9. *EST* $\vdash \forall x Fin^f(x) \Rightarrow \neg Inf$

Demostración. Por reducción al absurdo, si suponemos el Axioma del Infinito, la clase ω es un conjunto. Veamos que $\neg Fin^f(\omega)$. En efecto, si $Fin^f(\omega)$, existiría un natural $n \in \omega$ para el cual existe una biyección $f : n \longrightarrow \omega$. Esta biyección puede convertirse en un isomorfismo definiendo la relación $<'$ sobre ω como sigue. Si $x, y \in n$:

$$x < y \Leftrightarrow f(x) <' f(y)$$

Es sencillo y natural probar que $<'$ es un buen orden gracias a que f es una biyección. Baste únicamente señalar que, empleando que f es una biyección, cada propiedad que $<'$ debe cumplir para afirmar que es un buen orden es deducida trasladándola, mediante f, a n, donde $<$ es un buen orden. Nótese, además, que es necesario emplear Remplazamiento para lograr la adecuación a izquierda en $\langle \omega, <' \rangle$.

A continuación buscamos una sección inicial z de $\langle\omega, <'\rangle$ isomorfa a n. Esto nos permitirá obtener un isomorfismo entre $\langle\omega, <'\rangle$ y $\langle z, <'\rangle$, contradiciendo 3.1.12-(ii). Para ello, aprovechando que por reducción al absurdo estamos suponiendo el Axioma del Infinito, definimos por recursión la aplicación $g : \omega \longrightarrow \omega$ dada por:

$$g(n) = \begin{cases} min_{<'}(\omega) & \text{si } n = 0 \\ min_{<'}(\{x \mid x' > g(n)\}) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Sea $z \coloneqq g[n]$. Gracias a la definición de g, $<'$ bien ordena z. Además, $n \cong z$ mediante g. Por tanto, se tiene: $z \cong n \cong \omega$, y en particular, $z \cong \omega$. Así, ω es isomorfa a una sección inicial suya, lo que contradice 3.1.12-(ii). □

Antes de abandonar *EST* en favor de *FST*, resulta interesante comprobar cómo se relacionan las siguientes fórmulas – algunas de las cuales el lector reconocerá como axiomas – dentro de esta teoría. Sea *WO* la fórmula que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado; *AC* aquella que afirma la existencia de una función de elección para cada familia no vacía de conjuntos y *Pow* la que afirma la existencia del conjunto potencia de cualquier conjunto. Formalmente:

WO: $\forall x\, \exists R\, [R \text{ bien ordena } x]$

Pow: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [\, z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x\,]$

AC: $\forall x\, \exists f\, [Fun(f) \wedge Dom(f) = x \wedge (\forall y \in x)\, [\, y \neq 0 \Rightarrow f(y) \in y\,]]$

La prueba usual de la equivalencia entre *WO* y *AC* requiere usar *Pow*, que no es un axioma de *EST*. Como veremos más adelante, *Pow* es un teorema de *FST*, luego sólo hará falta demostrar, bien *AC*, bien *WO*, para deducir la restante. En lo que resta de sección justificaremos la mencionada equivalencia mediante el *Teorema del Buen Orden*. **Para probarlo trabajaremos en *EST + Pow***. Además, nos hará falta el siguiente lema auxiliar:

Lema 4.1.10. *Sea x un conjunto. Se tiene que x es bien ordenable si y sólo si existe una aplicación $f : x \longrightarrow Ord$ inyectiva.*

Demostración. La implicación directa es consecuencia de 3.2.19 (Teorema de Mirimanoff), que afirma la existencia de un isomorfismo entre x y algún ordinal α si x es bien ordenable. Para ver el recíproco, basta definir la relación $<'$ sobre x como sigue. Sean $y, z \in x$:

$$z <' y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

Dado que f es inyectiva y $Ran(f)$ está bien ordenado por $<$, es fácil ver que $<'$ es un buen orden sobre x, como queríamos probar.

□

Corolario 4.1.11. *Un conjunto x es bien ordenable si y sólo si existe $\alpha \in Ord$ y existe una aplicación $f : \alpha \longrightarrow x$ biyectiva.*

Demostración. La implicación directa es consecuencia del Teorema de Mirimanoff, empleando que x es un conjunto. La recíproca, del lema anterior. □

Teorema 4.1.12 (Teorema del Buen Orden)**.** *Suponiendo AC, todo conjunto puede ser bien ordenado*

Demostración. Sean x un conjunto, $y \in x$ y g una función de elección sobre $\mathcal{P}(x)$. Por recursión definimos $f : Ord \longrightarrow x$ como sigue:

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(x - f[\alpha]) & \text{si } x \neq f[\alpha] \\ y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos, primeramente, que existe $\alpha \in Ord$ tal que $x = f[\alpha]$. Si suponemos lo contrario, podemos considerar dos ordinales $\beta < \gamma \in Ord$ tales que $x \neq f[\gamma]$. Como $\beta < \gamma$, claramente $f(\beta) \in f[\gamma]$. Por otro lado, como $x \neq f[\gamma]$, necesariamente $f(\gamma) = g(x - f[\gamma]) \in x - f[\gamma]$. Esto nos permite deducir que $f(\beta) \neq f(\gamma)$. Como β y γ son arbitrarios, hemos deducido que f es inyectiva. Pero si f es inyectiva, por 2.2.13 Ord es un conjunto, lo cual es un absurdo.

Dado que, por lo razonado anteriormente, existe $\alpha \in Ord$ tal que $x = f[\alpha]$, podemos considerar el ordinal $\delta = inf\,(\{\alpha \mid x = f[\alpha]\})$. Tomando $h = f|_{\delta} : \delta \longrightarrow x$, se tiene que h es un conjunto por su definición, y además $h[\delta] = f[\delta] = x$, luego h es sobreyectiva. Por último, la elección de δ nos permite probar que h es inyectiva siguiendo un razonamiento análogo al del párrafo anterior. De este modo, h es biyectiva y 4.1.11 prueba que x es bien ordenable, como queríamos demostrar.

□

Teorema 4.1.13. *Son equivalentes:*

a) El Axioma de Elección.

b) Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Demostración. La implicación directa se corresponde con el teorema anterior. Para ver la recíproca, consideramos $<$ un buen orden sobre $\bigcup x$ y $f : x \longrightarrow V$ la aplicación definida por casos:

$$f(b) = \begin{cases} inf_{<}(b) & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De este modo, si consideramos un conjunto $b \in x$ no vacío, entonces $b \subseteq \bigcup x$ y $f(b) = inf_{<}(b) \in b$. Por tanto, f es una función de elección sobre x. □

4.2. Relación entre conceptos de finitud

En la sección anterior habíamos presentado tres conceptos diferentes para predicar la finitud de un conjunto. Sin embargo, de esas tres definiciones tuvimos que limitarnos a una de ellas puesto que las demás nos obligarían a asumir prontamente el Axioma de Elección, lo cual no es deseable. Como consecuencia, habíamos soslayado el estudio de estas nociones *per se* en favor de un estudio somero de éstas en relación con el Axioma del Infinito.

En la presente sección discutiremos las relaciones existentes entre los diferentes conceptos de finitud anteriormente presentados a través de una nueva definición de finitud: la *Russell-finitud* o *R-finitud*. Mediante ésta, y asumiendo el Axioma de Elección, todas las nociones de finitud presentadas hasta el momento se tornarán equivalentes. En el proceso obtendremos algunas propiedades de los conjuntos finitos bajo la nueva definición y comprobaremos cómo se relacionan con la f-finitud. Concluiremos la sección presentando R_ω, es decir, la mencionada clase de los conjuntos hereditariamente finitos, pues cobrará protagonismo posteriormente en este mismo capítulo.

En los siguientes resultados de la sección asumiremos *Pow* como axioma. Más tarde se verá que *Pow* es un teorema de *FST*, luego todo lo que deduzcamos a continuación será aplicable cuando estudiemos dicha teoría. Los resultados están tomados de [5].

Definición 4.2.1 (Russell y Whitehead, 1912)**.** Dados un conjunto a y $u \subseteq \mathcal{P}(a)$, diremos que u es una *familia inductiva de subconjuntos de* a si verifica:

(i) $0 \in u$

(ii) $(\forall x \in u)(\forall y \in a)[x \cup \{y\} \in u]$

En estas condiciones, un conjunto a se dice *R-finito*, denotado $Fin^R(a)$, si pertenece a toda familia inductiva de subconjuntos de a. En caso contrario, diremos que a es un conjunto *infinito*.

Lema 4.2.2. *0 es R-finito.*

Lema 4.2.3. *Si a es R-finito, también lo es $a \cup \{z\}$ para cualquier z.*

Demostración. Sea u una familia inductiva de subconjuntos de $a \cup \{z\}$. Se observa que $u \cap \mathcal{P}(a)$ es una familia inductiva de subconjuntos de a. Efectivamente, si tomamos $x \in u \cap \mathcal{P}(a) \subseteq u$ y consideramos un conjunto $y \in a \subseteq a \cup \{z\}$ arbitrario, como por hipótesis u es una familia inductiva de subconjuntos de $a \cup \{z\}$, entonces $x \cup \{y\} \in u$.

Habiendo probado este hecho, como $Fin^R(a)$, $a \in u \cap \mathcal{P}(a) \subseteq u$, luego $a \in u$. Como u es una familia de subconjuntos inductivos de $a \cup \{z\}$ y $z \in a \cup \{z\}$, $a \cup \{z\} \in u$, lo que prueba por definición de finitud el resultado. □

Teorema 4.2.4 (de inducción finita)**.** *Sea φ una fórmula. Si se verifican:*

(i) $\varphi(0)$

(ii) Para cada conjunto R-finito a y todo $z \notin a$, $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a \cup \{z\})$.

Entonces $\varphi(a)$ para todo conjunto a R-finito.

Demostración. Sea a un conjunto R-finito. Definimos $u = \{b \mid b \subseteq a \wedge Fin^R(b) \wedge \varphi(b)\}$. Es inmediato comprobar que $0 \in u$. Más aún, si $x \in u \wedge y \in a$, entonces $Fin^R(x)$ y $\varphi(x)$. Por 4.2.3, $Fin^R(x \cup \{y\})$. Además, por (ii), $\varphi(x \cup \{y\})$. Así, u es una familia inductiva. Como a es R-finito, $a \in u$, luego $\varphi(a)$. □

Los tres resultados anteriores prueban fácilmente el siguiente resultado:

Corolario 4.2.5. *Todo número natural es R-finito.*

Demostración. Por inducción sobre ω:

·) Si $n = 0$, el resultado se obtiene trivialmente.

·) Supongamos que n es R-finito. Por 4.2.3, también lo es $n \cup \{n\}$, que coincide con el conjunto $n + 1$.

□

Proposición 4.2.6. *Si $Fin^R(a)$ y f es una función que verifica $a \subseteq Dom(f)$, entonces $f[a]$ es R-finito.*

Demostración. Por inducción finita en a.

·) Si $a = 0$, entonces $f[a] = 0$, que es R-finito.

·) Supongamos por hipótesis de inducción que a y $f[a]$ son R-finitos. Dado que se tiene la igualdad:

$$f[a \cup \{u\}] = f[a] \cup \{f(u)\}$$

y el lado derecho es R-finito por el Lema 4.2.3, se obtiene el resultado.

□

Corolario 4.2.7. *Si dos conjuntos a y b son equipotentes y a es R-finito, entonces b es R-finito.*

Todos estos resultados nos permiten probar el siguiente teorema, que afirma la equivalencia entre la *R-finitud* y la *f-finitud* de conjuntos.

Teorema 4.2.8. *Un conjunto es R-finito si y sólo si es equipotente a algún número natural.*

Demostración. Para probar la implicación directa, supongamos que a es R-finito y demostremos por inducción finita que a es f-finito:

·) Si $a = 0$, a es inmediatamente f-finito.

·) Supongamos por hipótesis de inducción que existe una biyección $f : a \longrightarrow n$ entre a y n. Sea $z \notin a$. Entonces $f \cup \{\langle z, n\rangle\}$ es una biyección entre $a \cup \{z\}$ y $n \cup \{n\} = n + 1$, luego $a \cup \{z\}$ es equipotente a un número natural.

Para probar el recíproco, sea $f : a \longrightarrow n$ una biyección. Por 4.2.5, n es R-finito, y por 4.2.7, a es R-finito al ser equipotente a n. □

La siguiente proposición nos indica que, bajo esta noción de finitud, basta un orden parcial para asegurar la existencia de un elemento minimal y de un y maximal.

Proposición 4.2.9. *Sea $b \neq 0$ un conjunto R-finito y $<$ un orden parcial sobre b. Entonces b posee un elemento minimal x y un elemento maximal y, ambos respecto a $<$.*

Demostración. Probaremos que b posee un elemento minimal; una demostración similar logra el resultado adicional. Por inducción finita en b:

·) Si b es el conjunto vacío, el resultado se cumple inmediatamente.

·) Supongamos que el resultado es cierto para b R-finito y consideremos $z \notin b$ y el conjunto $b \cup \{z\}$. Si b es vacío, z es minimal en $0 \cup \{z\}$. En otro caso, sea $u \in b$ el elemento minimal cuya existencia se tiene garantizada por la hipótesis de inducción. Si $z < u$, z es minimal en $b \cup \{z\}$ por transitividad. En otro caso u es minimal en $b \cup \{z\}$.

□

Proposición 4.2.10. $Inf \vdash \neg Fin^R(\omega)$.

Demostración. Sabemos que $(\omega, <)$ es un orden total. Si ω fuera R-finito, por 4.2.9 se deduce que existe un elemento maximal $m \in \omega$ tal que para todo $n \in \omega$, $n < m$. En particular, $m + 1 < m$. Contradicción. □

Proposición 4.2.11. *Todo subconjunto de un conjunto R-finito es R-finito.*

Demostración. Sean a un conjunto R-finito y $b \subseteq a$ un subconjunto no vacío. Fijamos $z \in b$ y definimos la función $f : a \longrightarrow a$ como sigue:

$$f(c) = \begin{cases} c & \text{si } c \in b \\ z & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por 4.2.6, como $a = Dom(f)$, $f[a]$ es R-finito. Ahora bien, gracias a la definición de f, se tiene $f[a] = b$, luego b es R-finito como queríamos demostrar. □

La proposición anterior justifica la siguiente definición, propuesta por Bolzano en 1851 y por Cantor en 1878:

Definición 4.2.12. Decimos que un conjunto a es *numerable* si es finito o equipotente con ω. En este último caso, diremos que a es *numerable infinito*.

La definición de numerabilidad permite, por ejemplo, caracterizar la clase ω con respecto a la R-finitud y estudiar la infinitud de conjuntos:

Proposición 4.2.13. *Todo conjunto acotado de ω es finito y todo subconjunto cofinal de ω es numerable infinito.*

Demostración. Sea $a \subseteq \omega$. Si n es la cota de a, entonces $a \subseteq n \cup \{n\} = n + 1$. Como los naturales son finitos y los subconjuntos de conjuntos finitos son conjuntos finitos, a es finito (baste emplear 4.2.5 y 4.2.11 respectivamente).

Para probar la segunda parte, observamos en primer lugar que todo subconjunto finito b de ω está acotado. Efectivamente, por 4.2.9 poseerá elemento maximal. Por otro lado, si $a \subseteq \omega$ y β denota el único ordinal al que $\langle a, < \rangle$ es isomorfo (Teorema de Mirimanoff), entonces $\beta \leq \omega$ por 3.2.20. Si a es cofinal, no puede ocurrir $\beta < \omega$, pues entonces a sería finito, lo que implicaría por la observación anterior que a estaría acotado. Por tanto, $\beta = \omega$, luego a es numerable infinito. □

Proposición 4.2.14. *Sea a un conjunto. Si a posee un subconjunto numerable infinito, entonces es infinito (es decir, no es R-finito). El recíproco es cierto si a es bien-ordenable.*

Demostración. Supongamos que $b \subseteq a$ y b es numerable infinito. Por reducción al absurdo, si a fuera finito, entonces b sería finito por 4.2.11. Como b es numerable infinito, $b \sim \omega$, luego por 4.2.7, ω sería finito, lo que contradice 4.2.10.

Supongamos a continuación que $\langle a, < \rangle$ es una clase bien ordenada y a es infinito. Por el Teorema de Mirimanoff sabemos que existe un único ordinal α y un único isomorfismo f tal que $\langle a, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$. Si $\alpha < \omega$ entonces a es finito, pues $a \sim \alpha < \omega$ (Teorema 4.2.8). Esto contradice la hipótesis de que a sea infinito. Por tanto, $\alpha \geq \omega$. Como f es una biyección, $f^{-1}[\omega] \subseteq a$ es numerable infinito. Hemos encontrado un subconjunto numerable infinito de a, como queríamos probar. □

Corolario 4.2.15. *$EST + Pow + AC \vdash \neg Fin^R(a) \Leftrightarrow$ existe $b \subseteq a$ tal que b es numerable infinito.*

Demostración. El resultado se sigue de 4.2.14 considerando que AC y WO son equivalentes en $EST + Pow$. □

Proposición 4.2.16. *Todo conjunto finito totalmente ordenado está bien ordenado y el ordinal al que es isomorfo es un número natural.*

Demostración. Sea a un conjunto finito totalmente ordenado por $<$. Por 4.2.11, cada subconjunto de b es finito, de manera que, gracias a 4.2.9 cada subconjunto no vacío de a posee un elemento mínimo. Por tanto, $\langle a, < \rangle$ está bien ordenado. Por Mirimanoff existe un único ordinal α para el cual existe un isomorfismo f entre $\langle a, < \rangle$ y $\langle \alpha, \in \rangle$. Como a es finito, por 4.2.7 también lo es α.

Veamos que en tales condiciones α es un número natural. Si no lo fuera, α contendría un ordinal límite. En particular, $\omega \in \alpha$, pues ω es el menor ordinal límite. Pero por 4.2.14, esto implicaría que α no es finito. Contradicción.

Habiendo probado que α es natural, hemos deducido que a es isomorfo a un número natural, como queríamos demostrar.

□

El siguiente teorema fundamenta la definición de conjunto Dedekind-finito. Nótese que requiere el Axioma del Infinito.

Teorema 4.2.17 (Dedekind, 1888)**.** *Un conjunto a es equipotente a un subconjunto propio suyo si y sólo si a contiene un subconjunto numerable infinito.*

Demostración. Véase que el enunciado es equivalente a 4.1.6. En efecto, el primero de los términos de la equivalencia coincide con la negación de la definición de Dedekind-finitud, mientras que el segundo, con la negación de la ω-finitud.

□

Nota. El teorema anterior nos permite probar que ningún conjunto finito es equipotente a algún subconjunto propio suyo, pues todos los subconjuntos de un conjunto finito son finitos y, si existiera tal biyección, el conjunto original contendría un subconjunto numerable infinito, lo que negaría que fuera finito. De esta observación se desprende que no hay dos números naturales diferentes equipotentes entre sí. Este último resultado puede probarse sin asumir *Pow*, tal y como veremos en la tercera sección de este capítulo.

Del Teorema de Dedekind también podemos deducir que, si admitimos el Axioma de Elección, un conjunto es finito si y sólo si no es equipotente a ningún subconjunto propio suyo. El lector reconocerá esta caracterización como la definición de Dedekind-finitud que presentamos en la sección anterior. Sin embargo, la definición histórica de Dedekind-finitud es otra. A continuación presentaremos dicha definición que Dedekind y Pierce propusieron como noción de finitud y, tras probar algunas propiedades básicas, comprobaremos que es equivalente a la definición que ofrecimos en la sección anterior y que usaremos en lo sucesivo.

Definición 4.2.18 (Definición histórica de Dedekind-finitud)**.** Un conjunto x que no contenga ningún subconjunto numerable infinito se dice *Dedekind-finito.*

Nota. Véase que la definición histórica de la Dedekind-finitud coincide con la definición de ω-finitud que hemos ofrecido. Consecuentemente, a partir de ahora nos referiremos a dicha definición histórica como ω-finitud.

Proposición 4.2.19. *Se verfican las siguientes afirmaciones:*

(i) Todo conjunto R-finito es ω-finito.

(ii) Ningún conjunto infinito bien ordenable es ω-finito.

(iii) Un conjunto x es ω-finito si y sólo si no existe ninguna aplicación inyectiva de x en algún subconjunto propio suyo.

(iv) Un subconjunto de un conjunto ω-finito es ω-finito.

Demostración. Probemos cada una de las aseveraciones:

(i) Se obtiene negando 4.2.14.

(ii) Sea x un conjunto y $<$ una relación de buen orden sobre x. Si x es infinito, por 4.2.14 contiene un subconjunto numerable infinito, luego no es ω-finito por definición.

(iii) Se obtiene negando el Teorema de Dedekind.

(iv) Si $y \subset x$, x es ω-finito e y no, entonces existe $z \subset y$ tal que z es numerable infinito. Pero $z \subset x$, luego x no sería ω-finito.

□

Tras haber discutido varias nociones de finitud, las equivalencias que hemos logrado probar entre ellas dan como resultado el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ll}
Fin^f(x) := & (\exists n)[n \sim x] \\
 & \updownarrow \\
Fin^R(x) := & (\forall u)[u \text{ es una familia inductiva de } x] \Rightarrow x \in u \\
 & \updownarrow AC \\
Fin^\omega(x) := & (\nexists y \subset x)[y \text{ es numerable infinito}] \\
 & \updownarrow \\
Fin^D(x) := & (\nexists y \subset x)[y \sim x]
\end{array}$$

Finalizamos la sección probando algunas propiedades que verifican los conjuntos R-finitos y los conjuntos infinitos, con miras de completar el diagrama anterior y remarcar la importancia que ha tenido la R-finitud a la hora de probar las distintas equivalencias y propiedades de nuestra noción de finitud. Tras esto podremos presentar la clase de los conjuntos hereditariamente finitos, que protagonizará una sección posterior. Por aligerar la notación, dado que hemos comprobado que todas las nociones de finitud presentadas hasta el momento son equivalentes − bajo el Axioma de Elección −, omitiremos, salvo cuando sea estrictamente necesario, la noción de finitud que manejamos. Se sobrentenderá, por defecto, que *finito* se refiere a *R-finito*.

Comencemos profundizando en las propiedades que verifican los conjuntos finitos. Nótese que nos referimos únicamente a las construcciones que amplían uno o varios conjuntos finitos dados, pues por 4.2.11 se desprende inmediatamente, por ejemplo, la finitud de la intersección de un conjunto finito con una clase o de la diferencia de un conjunto finito con una clase.

Proposición 4.2.20. *Si a y b son finitos, entonces $a \cup b$ es finito.*

Demostración. Por inducción finita en b:

·) Si $b = 0$, el resultado se tiene trivialmente.

·) Supongamos por hipótesis de inducción que para todo conjunto finito a, se tiene que $a \cup b$ es finito. Probemos que $a \cup b \cup \{z\}$ es finito, con $z \notin b$. Para ello basta recurrir a 4.2.3, que afirma que $a \cup \{z\}$ es finito al serlo a. Aplicando la hipótesis de inducción se obtiene el resultado.

□

Proposición 4.2.21. *Si a es finito y todos sus miembros son finitos, entonces $\bigcup a$ es finito.*

Demostración. Por inducción finita en a:

·) Si $a = 0$, el resultado se tiene trivialmente.

·) Supongamos por hipótesis de inducción que $\bigcup a$ es finito. Sea $z \notin a$ finito. Por 4.2.3, $a \cup \{z\}$ es finito. Basta ver que $\bigcup(a \cup \{z\}) = \bigcup a \cup z$ y aplicar 4.2.20 para deducir que el lado derecho de la igualdad es finito. Por tanto, $\bigcup(a \cup \{z\})$, como se quería demostrar.

□

Proposición 4.2.22. *Si a es finito, también lo es $\mathcal{P}(a)$*

Demostración. Por inducción finita en a:

·) Si $a = 0$, $\mathcal{P}(0) = \{0\} = 0 \cup \{0\} = 1$. Como 1 es finito, $\mathcal{P}(0)$ también.

·) Supongamos que el resultado es cierto para todo a finito y sea $z \notin a$. Entonces:

$$\mathcal{P}(a \cup \{z\}) = \mathcal{P}(a) \cup \{t \cup \{z\} \mid t \in \mathcal{P}(a)\}$$

Si logramos probar que el miembro derecho de la unión es finito, por 4.2.20 obtendremos el resultado. Para ello comprobaremos que dicho conjunto es equipotente a $\mathcal{P}(a)$.

Definimos la función $g : \{x \cup \{z\} \mid x \in \mathcal{P}(a)\} \longrightarrow \mathcal{P}(a)$ como sigue:

$$g(x) = x - \{z\}$$

Consideramos las equivalencias $z \notin a \Leftrightarrow \{z\} \not\subset a \Leftrightarrow \{z\} \notin \mathcal{P}(a)$, es claro ver que $(y \cup \{z\}) - \{z\} = y \in \mathcal{P}(a)$ para todo $y \in \mathcal{P}(a)$. Así, g es biyectiva, lo que demuestra el resultado.

□

Proposición 4.2.23. *Si a es un conjunto infinito, todo conjunto finito b es equipotente a algún subconjunto c de a.*

Demostración. Por inducción finita en b.

·) Si $b = 0$, entonces $b \sim 0 \subseteq a$.

·) Supongamos que el resultado es cierto para b finito y sea $z \notin b$. Por hipótesis de inducción, existe $c \subset a$ tal que $c \sim b$. Sea f dicha biyección. Como $a - c \neq 0$, existe $d \in a - c$. Por 4.2.3, $c \cup \{d\}$ es finito, luego basta definir $g : c \cup \{d\} \longrightarrow b \cup \{z\}$ de la forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in c \\ z & \text{si } x = d \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que g es biyectiva gracias a la biyectividad de f. Finalmente, dado que $Dom(f)$ es finito, $Im(f) = b \cup \{z\}$ también por 4.2.7.

□

Proposición 4.2.24 (Tarski, 1924)**.** *Un conjunto es infinito si y sólo si el conjunto potencia de su conjunto potencia incluye un conjunto numerable infinito.*

Demostración. La implicación recíproca es fácilmente demostrable considerando que, por 4.2.22, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ es finito al serlo a. Como consecuencia, 4.2.14 nos asegura que no puede contener un conjunto numerable infinito.

Para probar la directa, supongamos que a es infinito y definamos la función f en ω como sigue:

$$f(n) = \{b \mid b \in \mathcal{P}(a) \wedge b \sim n\}$$

Por 4.2.23, para todo $n < \omega$, se tiene $f(n) \neq 0$. La propia definición de f nos permite deducir que es una función inyectiva, pues si $b \in f(n)$:

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow b \sim n \wedge b \sim m \Rightarrow n \sim m \Rightarrow n = m$$

donde la última implicación es justificada por la primera nota acerca del Teorema de Dedekind. De este modo, *Ran(f)* $\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ es numerable infinito, pues *Ran(f)* $\sim \omega$. $\square$

Nota. En 4.2.14 probamos, asumiendo *WO*, que un conjunto es infinito si contiene un conjunto numerable infinito. El resultado anterior permite caracterizar los conjuntos infinitos con una propiedad similar evitando una restricción tan fuerte en la teoría que manejamos, a cambio de agrandar considerablemente el conjunto en el que se debe comprobar la propiedad.

Tras esta discusión, el diagrama anterior es ampliado de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
(\forall z \subseteq x)[Fin^{\omega}(z)] & Fin^{f}(x) & (\forall z \subseteq x)[Fin^{R}(z)] \\
 & & Fin^{R}(\mathcal{P}(x)) \\
Fin^{\omega}(x) \arrow[uu] \arrow[r, leftrightarrow, "AC"] \arrow[d, leftrightarrow] & Fin^{R}(x) \arrow[uu, leftrightarrow] \arrow[uur] \arrow[r, "\text{Si, además, } Fin^{R}(y):"] \arrow[d, leftrightarrow] & Fin^{R}(x \cup y)] \arrow[u] \arrow[d] \\
Fin^{D}(x) & \begin{array}{c}\nexists y \text{ numerable infinito} \\ \text{tal que } y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))\end{array} & (\forall y \in x)[Fin^{R}(y)] \Rightarrow Fin^{R}(\bigcup x)
\end{tikzcd}$$

En lo que resta de sección buscaremos introducir la clase de los conjuntos hereditariamente finitos y la relacionaremos con los conceptos de finitud tratados en esta misma sección. Posteriormente volverá a aparecer esta clase para probar la independencia de varios axiomas respecto de *FST*.

Denotaremos por R_ω a $R(\omega)$. Recordemos que para poder hablar de R_ω necesitamos asumir el Axioma del Infinito y que 3.3.14 nos garantiza que es una clase transitiva.

Proposición 4.2.25. *Todo subconjunto finito de R_ω pertenece a R_ω.*

Demostración. Sea x un subconjunto finito de R_ω. Consideramos la función f que a cada elemento y de x le asocia el menor ordinal γ tal que $y \in R(\gamma)$. f está bien definida puesto que $x \subseteq R_\omega$, de modo que la clase $u := \{f(y) \mid y \in x\}$ es, de hecho, un conjunto (Reemplazamiento) finito (4.2.6). Por tanto, 4.2.9 nos asegura que u está acotado superiormente; sea α dicha cota. Entonces $x \subseteq R(\alpha+1)$, luego $y \in R(\alpha+2) \subseteq R_\omega$, como queríamos probar. $\square$

Definición 4.2.26. Sea φ una fórmula. Decimos que un conjunto y *posee hereditariamente la propiedad* φ si $\{y\} \cup Tc(y) \subseteq \{x \mid \varphi(x)\}$.

Lema 4.2.27. *Un conjunto y posee hereditariamente la propiedad φ si y sólo si existe un conjunto transitivo x verificando $y \in x \subseteq \{z \mid \varphi(z)\}$.*

Demostración. Para ver la implicación directa, basta ver que $\{y\} \cup Tc(y)$ es un subconjunto transitivo de $\{x \mid \varphi(x)\}$. Para la recíproca, si $y \in u$ donde u es un subconjunto transitivo de $\{x \mid \varphi(x)\}$, es claro ver que, por definición de clausura transitiva, $\{y\} \cup Tc(y) \subseteq u$, obteniéndose que y posee hereditariamente la propiedad φ por definición. $\square$

Teorema 4.2.28. *R_ω es la clase formada por todos los conjuntos hereditariamente finitos bien fundados por $\in$. Además, si suponemos el Axioma de Regularidad, R_ω es la clase formada por todos los conjuntos hereditariamente finitos.*

Demostración. Primeramente, es claro ver que para todo ordinal $n < \omega$, $R(n)$ es finito. Efectivamente, por inducción en n, $R(0)$ es finito y también lo es $R(n+1) = \mathcal{P}(R(n))$ gracias a 4.2.22 si suponemos que $R(n)$ es finito.

Sea $x \in R_\omega$. Entonces existe un ordinal finito $n \in \omega$ tal que $x \in R(n)$. Como $R(n)$ es transitivo y finito, todo elemento de $R(n)$ es finito al emplear la transitividad y 4.2.11. Además, $R(n) \in Wf$, luego aplicando otra vez la transitividad y 3.3.2 $\in$ es una relación bien fundada para todo elemento de $R(n)$. Así, se tiene:

$$x \in R(n) \subseteq \{z \mid z \text{ es finito} \wedge \in \text{ es una relación bien fundada sobre } z\}$$

Luego x posee hereditariamente la propiedad deseada.

Por último, supongamos que existe un conjunto hereditariamente finito y que no pertenezca a R_ω. Sea z el conjunto hereditariamente finito $\in -$minimal que no pertenezca a R_ω. Todo $u \subseteq z$ es un conjunto hereditariamente finito, y como z es el menor conjunto hereditariamente finito que no pertenece a R_ω, necesariamente $u \in R_\omega$. Pero entonces z es un subconjunto finito de R_ω, luego por 4.2.25 $z \in R_\omega$, lo cual es una contradicción.

Concluimos entonces que R_ω es la clase de los conjuntos hereditariamenete finitos si asumimos el Axioma de Regularidad. $\square$

Finalizamos la sección ofreciendo un resultado que relaciona la clase de los conjuntos hereditariamente finitos bien fundados con todo el desarrollo de finitud que hemos tratado anteriormente:

Proposición 4.2.29. *R_ω es numerable infinito.*

Demostración. Probaremos este resultado mediante ciertas técnicas matemáticas no probadas en este Trabajo de Fin de Grado. Definimos la función $f : R_\omega \longrightarrow \omega$ como sigue:

$$f(x) = \sum_{y \in x} 2^{f(y)}$$

Se observa que f está bien definida, pues la suma es finita y, consecuentemente, un número natural. Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad:
Por reducción al absurdo, sea n el menor natural para el que existen $x, z \in R_\omega$ tales que $f(x) = f(z) = n$. Dado que todo natural posee una única expresión en binario, necesariamente $\{f(y) \mid y \in x\} = \{f(y) \mid y \in z\}$. Ahora bien, dado que $f(y) < n$ para todo $y \in x \cup z$, f es inyectiva en todos los elementos de x y z, de modo que $x = z$.

Sobreyectividad:
Supongamos que $Ran(f) \subset \omega$, y sea n el menor natural de $\omega - Ran(f)$. Consideramos la expresión binaria de n; a saber, $n = \sum_{k \in t} 2^k$, donde t es un subconjunto de n por construcción de los números naturales. Como $t \subseteq n$, $(\forall k \in t)[k < n]$. Así, al ser n el menor elemento de $\omega - Ran(f)$, $t \subseteq Ran(f)$, luego podemos considerar $s = f^{-1}[t]$. Así, $n = \sum_{k \in t} 2^k = \sum_{x \in s} 2^{f(x)} = f(s)$, lo que contradice que $n \notin Ran(f)$.

□

4.3. Teoría de conjuntos finitos (FST)

Tras haber probado los anteriores resultados clásicos de finitud, en lo que sigue trabajaremos con una extensión de *EST*, *FST*; a saber, *EST* con el siguiente axioma de finitud.

$Fin: \qquad \forall x\, Fin^f(x)$

Procedamos a deducir algunos resultados básicos:

Teorema 4.3.1. *$FST \vdash Pow$*

Demostración. Para probar el resultado basta comprobar que, para todo número natural, la colección formada por $\mathcal{P}(n)$ es, de hecho, un conjunto. En efecto, si probamos:

$$\forall n\, [Nat(n) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, [\, y \in x \Leftrightarrow y \subseteq n\,]]$$

entonces, dado x f-finito, existe una aplicación f de n en x que induce la biyección $f^* : \mathcal{P}(n) \longrightarrow \mathcal{P}(x)$ dada por:

$$f^*(u) = \{y \mid \exists m \in x\, [f(m) = y]\} = f[x] \qquad \text{donde } u \subseteq n,$$

y empleando el Esquema de Reemplazamiento, se deduce que la colección de subconjuntos $\mathcal{P}(x)$, es efectivamente un conjunto.

Demostremos por inducción que, para todo n, $\mathcal{P}(n)$ es un conjunto:

·) Si $n = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0) = \{0\} = 0 \cup \{0\} = 1$, y 1 es un conjunto f-finito.

·) Supongamos que la propiedad es cierta para n. Consideremos la clase $y = \{x \cup \{n\} \mid x \in \mathcal{P}(n)\}$, que es un conjunto finito equipotente con n por Reemplazamiento. Así, $\mathcal{P}(n+1) = \mathcal{P}(n \cup \{n\}) = y \cup \mathcal{P}(n)$ es un conjunto finito equipotente con $2n$, como queríamos probar.

□

Nota. El teorema anterior también puede ser probado mediante las propiedades de la R-finitud y su equivalencia con la f-finitud.

Proposición 4.3.2. $FST \vdash WO$

Demostración. Sea x un conjunto. Por hipótesis, $Fin^f(x)$, luego existe una biyección $f : n \longrightarrow x$. Como n es un ordinal, basta aplicar 4.1.11 para obtener el resultado. □

Corolario 4.3.3. $FST \vdash AC$

Demostración. Se tiene inmediatamente contemplando, de acuerdo con 4.1.13, la equivalencia entre AC y WO que se posee en EST cuando Pow es una fórmula válida. Téngase en cuenta que, de acuerdo con lo probado anteriormente, $FST \vdash Pow \wedge WO$.

□

A continuación estudiamos algunas relaciones entre los axiomas presentados hasta ahora. Para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.3.4. $EST \vdash \forall n \forall m\, [\, Nat(n) \wedge Nat(m) \wedge \exists f\, [\, Fun(f) \wedge Dom(f) = m \wedge Ran(f) = n \wedge Inj(f) \Rightarrow n = m\,]]$

Demostración. Como n y m son naturales, necesariamente $n \in m \vee n = m \vee m \in n$. Supongamos sin pérdida de generalidad que se tiene $n \in m \wedge n \neq m$. Por transitividad de los naturales, $n \subset m$. De acuerdo con las hipótesis, existe una aplicación inyectiva de m en un subconjunto propio suyo. Así, $\neg Fin^D(m)$. Como AC es un teorema en FST según 4.3.3, necesariamente $\neg Fin^f(m)$. Contradicción. □

Corolario 4.3.5. $FST \vdash \forall x\, \exists! n\, \exists f\, [\, Nat(n) \wedge Fun(f) \wedge Inj(f) \wedge Dom(f) = n \wedge Ran(f) = x\,]$

Demostración. La existencia del natural se tiene por la *f-finitud* de todo conjunto, mientras que su unicidad se consigue en virtud del lema anterior. □

Teorema 4.3.6. $EST \vdash Pow \wedge \neg Inf \Rightarrow \forall x\, Fin^f(x)$

Demostración. Asumamos *Pow* y, por reducción al absurdo, sea x tal que $\neg Fin^f(x)$. Empleando la equivalencia entre finitudes y que los naturales son trivialmente conjuntos f-finitos, gracias a 4.2.23, se tiene la fórmula:

$$\forall n\, \exists y\, \exists f\, [\, y \subset x \wedge f : n \longrightarrow y \,\wedge\, f \text{ biyectiva}\,]$$

Sea $u = \{\, y \in \mathcal{P}(x) \mid \exists n\, \exists f[\, Nat(n) \wedge Fun(f) \wedge Dom(f) = n \wedge Ran(f) = y \wedge Inj(f)]\}$. Definimos la función $h : u \longrightarrow n$ de modo que $h(y)$ es el natural n para el que existe una biyección entre n e y. Este natural n es único. En efecto, si existieran n y m y sendas biyecciones h y h', entonces existe una biyección $h \circ h'^{-1} : m \longrightarrow n$ la cual, por el Lema 4.3.4, provoca que n y m sean necesariamente iguales.

Consideremos a continuación $Ran(h)$, que es un conjunto por Reemplazamiento. Comprobemos que es un conjunto inductivo:

·) $0 \in Ran(h)$ pues 0 pertenece a todo conjunto potencia y $h(0) = 0$.

·) Sea $y \in Ran(h)$. Entonces existe n tal que $h(n) = y$. Entonces $Fin^f(y)$ e $y \neq x$. Tomamos $z \in x - y$. Claramente $y \cup \{z\}$ es f-finito, de modo que $y \cup \{z\} \subset x$. Por último, como existe una biyección f entre $n \cup \{n\}$ e $y \cup \{z\}$ (basta ampliar f para que $f(z) = \{n\}$), $n + 1 = n \cup \{n\} \in Ran(h)$, como queríamos probar.

Esto prueba que $Ran(h)$ es un conjunto inductivo, lo que contradice $\neg Inf$. □

Corolario 4.3.7. $EST \vdash \forall x Fin^f(x) \Leftrightarrow (Pow \wedge \neg Inf)$

Demostración. La implicación recíproca se tiene por el Teorema 4.3.6. Para ver la implicación directa, por el Teorema 4.3.1 se tiene *Pow*, mientras que el Lema 4.1.9 prueba *Inf*. □

Teorema 4.3.8. $EST \vdash \forall x Fin^f(x) \Leftrightarrow (WO \wedge \neg Inf)$

Demostración. La implicación directa es probada por los Lemas 4.1.9 y 4.3.2. Para probar la recíproca, por Mirimanoff sabemos que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal. Si α es el ordinal para el cual $(x, R) \cong (\alpha, \in)$, como estamos asumiendo $\neg Inf$, por 3.2.24 se tiene que para todo $\beta \leq \alpha$, $\neg Lim(\beta)$; es decir, $Nat(\alpha)$.

□

4.4. El Axioma de Regularidad

A continuación pretendemos demostrar que el Axioma de Regularidad, formulado usualmente como:

UReg: $\quad \forall x[\, x \neq 0 \Rightarrow \exists y[\, y \in x \wedge y \cap x = 0\,]]$

es independiente de *FST*. Para llegar a este resultado, construiremos dos modelos de *FST* tales que en uno *UReg* es un teorema, mientras que en el otro lo es su negación.

Debido a la complejidad de estos modelos, a lo largo de la sección presentaremos ciertas nociones para indicar con mayor precisión el *modus operandi* de las siguientes demostraciones según vayan siendo necesarias. Dado que el interés de estos resultados es instrumental, remitimos a [4] para encontrar su justificación última. Hechas tales precauciones, dado que en las siguientes demostraciones necesitamos verificar la veracidad de diversos axiomas en distintos modelos, comenzamos definiendo en qué consiste la *relativización de una fórmula* a una clase M:

Definición 4.4.1. Sean M una clase y φ una fórmula. Definimos la *relativización de φ a M*, denotado por φ^M, por inducción en φ, como sigue:

(i) $(x = y)^M := (x = y)$

(ii) $(x \in y)^M := (x \in y)$

(iii) $(\varphi \wedge \psi)^M := (\varphi^M \wedge \psi^M)$

(iv) $(\neg\varphi)^M := (\neg\varphi^M)$

(v) $(\exists x\, \varphi)^M := \exists x\, (x \in M \wedge \varphi^M)$

(vi) $(\forall x\, \varphi)^M := \forall x\, (x \in M \Rightarrow \varphi^M)$

Nota. Informalmente hablando, una fórmula relativizada φ^M se obtiene reemplazando todas las apariciones de variables libres $x \in V$ por variables libres $x \in M$, y restringir todos los cuantificadores "$\exists$" y "$\forall$" de tal modo que el rango de las variables que invocan esté restringido a M, que hace en la relativización el papel del universo. De este modo, cuando relativizamos una fórmula, su validez depende únicamente de la clase M a la que la relativizamos. Fuera de ella, empero, su validez no es siquiera planteada.

El siguiente lema formaliza el comentario anterior:

Lema 4.4.2. *Sean M una clase y φ una fórmula. Son equivalentes:*

(i) φ es válida en $(M, \in)$; es decir, $(M, \in) \vDash \varphi$

(ii) Se verifica φ^M

Probemos que $(R_\omega, \in)$ es modelo de *FST + UReg* empleando el lema anterior. Dividiremos la prueba en dos lemas por razones que se harán evidentes llegado el momento:

Lema 4.4.3. $(R_\omega, \in) \vDash$ *EST + UReg*

Demostración. Probemos que se sostiene la relativización de los axiomas que componen *EST*. Para ello será fundamental la transitividad de R_ω:

(i) **Extensionalidad:**
Sean r y s dos elementos de R_ω. Hemos de probar:

$$(\forall x \in R_\omega)[x \in r \Leftrightarrow x \in s] \Rightarrow r = s$$

Como R_ω es una clase transitiva, $r, s \subseteq R_\omega$. Por tanto, todos los elementos de r y s pertenecen a R_ω, de modo que la fórmula anterior es equivalente a:

$$\forall x\, [x \in r \Leftrightarrow x \in s] \Rightarrow r = s$$

y por Extensionalidad se obtiene el resultado.

(ii) **Vacío:**
Verifiquemos que existe $y \in R_\omega$ tal que para todo $x \in R_\omega$, $x \notin y$. Como $R(1) = \{0\}$ y $R_\omega = \bigcup_{n<\omega} R(n)$, claramente $0 \in R_\omega$. Evidentemente se satisface $\forall x \in R_\omega$, $x \notin 0$, como queríamos probar.

(iii) **Par:**
Sean r y s dos elementos de R_ω. Verifiquemos la fórmula:

$$(\exists y \in R_\omega)(\forall x \in R_\omega)[x \in y \Leftrightarrow x = r \vee x = s]$$

Para ello veamos que $\{r, s\} \in R_\omega$. Esto es suficiente para probar la relativización, pues R_ω es una clase transitiva:

Como $r \in R_\omega = \bigcup_{n<\omega} R(n)$, existe un natural n tal que $r \in R(n)$. Análogamente, sea m aquel natural verificando $s \in R(m)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $n > m$. Dado que $R(m) \subseteq R(n)$, $s \in R(n)$, luego $\{r, s\} \subseteq R(n)$. Así, $\{r, s\} \in \mathcal{P}(R(n)) = R(n + 1)$, luego $\{r, s\} \in R_\omega$ como queríamos probar.

(iv) **Unión:**
Verifiquemos la fórmula:

$$(\exists x \in R_\omega)\, \forall y\, [y \in x \Leftrightarrow (\exists z \in R_\omega)[y \in z]]$$

Sea $r \in R_\omega$. Si logramos probar $\bigcup r \subseteq R(n)$ para algún natural n, podremos afirmar que $\bigcup r \in R(n+1) \subseteq R_\omega$. Empleando la transitividad de R_ω obtendremos el resultado.

Dado que $r \in R_\omega$, existe un natural m tal que $r \in R(m)$. Por tanto, $r \subseteq R(m+1)$. Sea pues $s \in r$, entonces $s \in R(m+1)$. Como $R(m+1)$ es transitiva, $s \subseteq R(m+1)$. Así, deducimos que el ordinal n buscado es $m + 1$.

(v) **Reemplazamiento:**
Sea $\varphi(r, s)$ una fórmula tal que:

$$(\forall r, s, t \in R_\omega)[\varphi^{R_\omega}(r, s) \wedge \varphi^{R_\omega}(r, t) \Rightarrow s = t]$$

Demostremos que dado $r \in R_\omega$, existe $t \in R_\omega$ tal que:

$$t = \{\, y \in R_\omega \mid (\exists s \in r)[\varphi^{R_\omega}(s, y)]\}$$

Por Reemplazamiento, existe $a = \{\, y \in R_\omega \mid (\exists s \in r)[\varphi^{R_\omega}(s, y)]\}$. Veamos que $a \in R_\omega$. Para ello tomamos n como el mayor natural para el cual existe $y \in R(n) \subseteq R_\omega$ verificando la fórmula:

$$(\exists s \in r)\varphi^{(R_\omega, \in)}(s, y)$$

Dado que $r \in R_\omega$, r es finito, luego dicho máximo n está bien definido como número natural. Como $R(m) \subseteq R(n)$ para todo $m \leq n$, claramente $a \subseteq R(n)$, luego $a \in \mathcal{P}(R(n)) = R(n + 1)$, de modo que $a \in R_\omega$.

(vi) **Regularidad:**
Dado $r \in R_\omega$ no vacío, hemos de probar la fórmula:

$$(\exists s \in R_\omega)[s \in r \land (\nexists t \in R_\omega)[t \in r \land t \in s]]$$

Sea $r \in R_\omega$ no vacío. Entonces existe un natural no nulo n tal que $r \in R(n)$. Por transitividad, $r \subseteq R(n)$. Gracias que $(Ord, <)$ es un buen orden, por el Teorema de Minimización podemos tomar $m \coloneqq min\{\, l \mid (\exists s \in r)[s \in R(l)]\} > 0$. Notamos por l el natural anterior a m, esto es, $l + 1 = m$.

Demostremos que el conjunto $s \in r$ mediante el cual hemos obtenido m verifica la propiedad que buscamos. Claramente $s \in R_\omega$. Notemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$s \in R(m) \Leftrightarrow s \in R(l+1) \Leftrightarrow s \in \mathcal{P}(R(l)) \Leftrightarrow s \subseteq R(l)$$

Por reducción al absurdo, si existe $t \in r \cap s$, entonces $t \in r \subseteq R_\omega$ y, dado que $s \subseteq R(l)$, se tiene que $t \in R(l)$. Esto último contradice la definición de m como el menor elemento del conjunto $\{\, l \mid (\exists s \in r)[s \in R(l)]\}$. Por tanto, $s \cap r = 0$ como queríamos demostrar.

□

Para deducir que $(R_\omega, \in)$ es modelo de *Fin* y concluir el resultado buscado, nos damos cuenta que la definición de *Fin* lleva, implícitamente, una serie de conceptos que aumentan la complejidad de la fórmula a verificar. Efectivamente, tendríamos que comprobar, por ejemplo, qué es una función o qué significa ser natural desde la "perspectiva" de R_ω. Para salvar este problema, recurrimos a la noción de *fórmula absoluta*, de *fórmula acotada* y a un par de lemas auxiliares que nos garantizan el carácter absoluto de ciertas fórmulas en modelos transitivos de *EST* como R_ω.

Definición 4.4.4. Sean $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una fórmula con n variables libres; M y N dos clases tales que $M \subseteq N$. Diremos que φ es *absoluta en* M, N si:

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in M)[\varphi^M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^N(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Además, diremos que φ *es absoluta en* M si lo es en M, V.

Nota. De acuerdo con la definición anterior, si logramos probar que una determinada fórmula es absoluta en R_ω, y además dicha fórmula es cierta en V, obtenemos inmediatamente que la fórmula relativizada a R_ω es cierta.

Lema 4.4.5. *Las siguientes fórmulas son absolutas en cualquier clase transitiva M que sea modelo de EST:*

(i) Dom(R)	*(ii) Ran(R)*
(iii) R es una función	*(iv) R es una biyección*

Definición 4.4.6. Sean x e y dos conjuntos. Una fórmula φ se dice *acotada* si puede construirse inductivamente mediante los siguientes esquemas:

(i) Las fórmulas "$x \in y$" y "$x = y$" son acotadas.

(ii) Si φ y ψ son acotadas, también lo son las fórmulas: "$\neg\varphi$", "$\varphi \wedge \psi$", "$\varphi \vee \psi$", "$\varphi \Rightarrow \psi$" y "$\varphi \Leftrightarrow \psi$".

(iii) Si φ es una fórmula acotada, también lo son "$\exists x\,(x \in y \wedge \varphi)$" y "$\forall x\,(x \in y \wedge \varphi)$".

Lema 4.4.7. *Si φ es una fórmula acotada y M es una clase transitiva, entonces φ es una fórmula absoluta en M. En particular, esto se cumple para las fórmulas que expresan 'ser un ordinal' y 'ser un ordinal límite'.*

Mediante estos dos lemas, podemos probar que *Fin* es válido en $(R_\omega, \in)$.

Lema 4.4.8. $(R_\omega, \in) \vDash Fin$

Demostración. Para probar el resultado, debemos demostrar que se cumple la definición relativizada de la f-finitud para todo conjunto $r \in R_\omega$. Dicha fórmula, de acuerdo con 4.4.1, es de la forma:

$$\exists f\, \exists n\, [\, Fun^{R_\omega}(f) \wedge Inj^{R_\omega}(f) \wedge Nat^{R_\omega}(n) \wedge Dom(f)^{R_\omega} = n \wedge Ran(f)^{R_\omega} = r\,]$$

De acuerdo con 4.4.5, todas las fórmulas salvo $Nat^{R_\omega}(n)$ son absolutas. Ahora bien, como $Nat(n) \Leftrightarrow Ord(x) \wedge \forall y\,[\,y \leq x \Rightarrow \neg Lim(y)]$, se observa que que la definición de número natural está compuesta por una fórmula absoluta y una fórmula acotada en la que intervienen nuevas fórmulas absolutas. Como consecuencia de 4.4.5 y 4.4.7, deducimos que *Fin* es una fórmula absoluta, luego bastará verificar que todo elemento de R_ω es f-finito para obtener el resultado. Esto último es inmediato pues, como vimos en 4.2.28, todo conjunto de R_ω es (hereditariamente) R-finito. Como la R-finitud y la f-finitud son equivalentes en *EST* + *Pow* (recordemos que *Pow* es necesario para poder hablar de R_ω), deducimos el resultado. □

Como consecuencia de los anteriores lemas, se tiene:

Corolario 4.4.9. $(R_\omega, \in) \vDash FST + UReg$

A continuación introducimos un modelo con el que probar la independencia del Axioma de Regularidad. Para ello será necesaria una función auxiliar. Sea f una biyección en R_ω que deja invariantes todos sus elementos salvo 0 y 1, que intercambia. Definimos la estructura (R_ω, E), donde E es una relación binaria que verifica:

$$x\, E\, y \Leftrightarrow x \in f(y)$$

Veamos que (R_ω, E) es modelo de *EST* + $\neg$*Inf* + $\neg$*UReg*. Combinándolo con el corolario anterior, por 1.2.10 se desprenderá que *UReg* es independiente a *EST* + $\neg$*Inf*

Lema 4.4.10. $(R_\omega, E) \vDash EST + \neg Inf + \neg UReg$

Demostración. De manera similar a 4.4.2, bastará comprobar que se verifica la relativización $\varphi^{(R_\omega, E)}$ para cada fórmula φ que define *EST* + $\neg$*Inf* + $\neg$*UReg*; donde $\varphi^{(R_\omega, E)}$ está definida de manera natural.

(i) **Extensionalidad:**
Sean $r, s \in R_\omega$ Se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{array}{ll} & (\forall t \in R_\omega)[t\,E\,r \Leftrightarrow t\,E\,s] \Leftrightarrow (\forall t \in R_\omega)[t \in f(r) \Leftrightarrow t \in f(s)] \\ [\![\, Ran(f) = R_\omega \text{ transitivo} \,]\!] & \Leftrightarrow \forall t\,[t \in f(r) \Leftrightarrow t \in f(s)] \\ [\![\, \text{Extensionalidad} \,]\!] & \Leftrightarrow f(r) = f(s) \\ [\![\, \text{Inyectividad de } f \,]\!] & \Rightarrow r = s \end{array}$$

(ii) **Vacío:**
Veamos que $(\forall r \in R_\omega)\,\neg[r\,E\,1]$. Sea, pues, $r \in R_\omega$:

$$r\,E\,1 \Leftrightarrow r \in f(1) \Leftrightarrow r \in 0$$

Claramente el extremo derecho de la cadena de equivalencias no se satisface nunca. Por tanto, $1 = 0^{(R_\omega, E)}$ como queríamos probar.

(iii) **Par:**
Sean r y s dos elementos de R_ω:

$$\begin{array}{ll} & \exists t\,\forall x\,[x\,E\,t \Leftrightarrow x = r \vee x = s] \Leftrightarrow \exists t\,\forall x\,[x \in f(t) \Leftrightarrow x = r \vee x = s] \\ [\![\, (R_\omega, \in) \vDash EST \,]\!] & \Leftrightarrow f(t) = \{r, s\} \\ [\![\, f \text{ biyectiva} \,]\!] & \Leftrightarrow t = f^{-1}\{r, s\} \end{array}$$

Como $f^{-1}\{r, s\}$ es un conjunto en $(R_\omega, \in)$ gracias a Reemplazamiento se obtiene el resultado.

(iv) **Unión:**
Sea $r \in R_\omega$:

$$\begin{array}{ll} & \exists s\,\forall z\,[z\,E\,s \Leftrightarrow (\exists y\,E\,r)[z\,E\,y]] \Leftrightarrow \exists s\,(\forall z \in R_\omega)[z \in f(s) \Leftrightarrow (\exists y \in f(r)[z \in f(y)]] \\ [\![f \text{ biyectiva, } u = f^{-1}(z) \in R_\omega]\!] & \Leftrightarrow \exists s\,(\forall u \in R_\omega)[u \in s \Leftrightarrow (\exists y \in f(r))[u \in y]] \\ & \Leftrightarrow \exists s\,[s = \bigcup f(r)] \end{array}$$

Dado que $\bigcup f(r)$ es un conjunto en $(R_\omega, \in)$, se obtiene el resultado.

(v) **Reemplazamiento:**
Sea $r \in R_\omega$ tal que:

$$(\forall s \in R_\omega)(\forall t \in R_\omega)[\varphi^{(R_\omega, E)}(r, s) \wedge \varphi^{(R_\omega, E)}(r, t) \Rightarrow s = t]$$

Sean $u, a \in R_\omega$. Se tiene:

$$\begin{array}{ll} & \exists u\,\forall s\,[s\,E\,u \Leftrightarrow (\exists r\,E\,a)[\varphi^{(R_\omega, E)}(r, s)]] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists u\,\forall s\,[s \in f(u) \Leftrightarrow (\exists r \in f(a))[\varphi^{(R_\omega, E)}(r, s)]] \\ [\![\hat{u} = f(u), \hat{a} = f(a)]\!] & \Leftrightarrow \exists \hat{u}\,\forall s\,[s \in \hat{u} \Leftrightarrow (\exists r \in \hat{a})[\varphi(r, s)]] \end{array}$$

Dado que $(R_\omega, \in)$ es modelo de Reemplazamiento, se verifica la última fórmula de la cadena de equivalencias anterior, obteniéndose el resultado buscado.

(vi) **Finitud:**
En primer lugar, veamos que: $(x \cup \{x\})^{(R_\omega,E)} = f^{-1}(f(x^{(R_\omega,E)}) \cup x^{(R_\omega,E)})$

$$\begin{aligned}(\forall y \in R_\omega)[y\,E\,t \Leftrightarrow y\,E\,s \vee y = s] &\Leftrightarrow \forall r[r \in f(t) \Leftrightarrow r \in f(s) \vee y = s]\\ &\Leftrightarrow f(t) = f(s) \cup \{s\}\\ &\Leftrightarrow t = f^{-1}(f(s) \cup \{s\})\end{aligned}$$

Por reducción al absurdo, si suponemos $(R_\omega, E) \vDash \mathit{Inf}$, existiría $r \in R_\omega$ tal que:

$$\begin{aligned}&1\,E\,r \wedge (\forall s \in R_\omega)[s\,E\,r \Rightarrow (s \cup \{s\})^{(R_\omega,E)}\,E\,r] \Leftrightarrow\\ &\quad\Leftrightarrow 1 \in f(r) \wedge (\forall s \in R_\omega)[s \in f(r) \Rightarrow (s \cup \{s\})^{(R_\omega,E)} \in f(r)]\\ &\quad\Leftrightarrow 1 \in f(r) \wedge (\forall s \in R_\omega)[s \in f(r) \Rightarrow f^{-1}(f(s) \cup \{s\}) \in f(r)]\end{aligned}$$

Es inmediato verificar que los conjuntos $1, \{1\}, \{1, \{1\}\}, \ldots$ pertenecen a $f(r)$, pues están construidos como los sucesores del conjunto vacío en (R_ω, E). Efectivamente:

$$\begin{aligned}&1 \in f(r) \wedge \{1\} = 1 \cup \{1\} \Rightarrow \{1\} \in f(r)\\ &\{1\} \in f(r) \wedge \{1, \{1\}\} = \{1\} \cup \{\{1\}\} \Rightarrow \{1, \{1\}\} \in f(r)\end{aligned}$$

Definimos por recursión sobre números naturales la función g como:

$$g(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(n+1) = g(n) \cup \{g(n)\}$$

Así, la función h con dominio en $f(r)$ y definida por:

$$h(s) = \begin{cases} n & \text{si } s = g(n) \text{ para algún natural } n,\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

verifica $\mathit{Ran}(h) = \omega$. Pero como $(R_\omega, \in) \vDash$ *Reemplazamiento*, necesariamente se desprende $(R_\omega, \in) \vDash \mathit{Inf}$, lo que contradice $(R_\omega, \in) \vDash \mathit{FST} + \mathit{UReg}$.

(vii) **¬UReg:**
Comprobemos que 0 es un elemento de R_ω que no verifica el Axioma de Regularidad en (R_ω, E). Dado que:

$$0 = \{x \mid x\,E\,0\} = \{x \mid x \in f(0)\} = f(0) = 1 = \{0\}$$

Claramente se tiene $0\,E\,0$, luego el Axioma de Regularidad falla en 0.

□

Teorema 4.4.11. *UReg es independiente de EST y ¬Inf*

Demostración. En efecto, hemos identificado dos modelos de $\mathit{EST} + \neg\mathit{Inf}$, $(R_\omega, \in)$ y (R_ω, E), tales que del primero se desprende *UReg*, mientras que del otro se colige su negación. Por tanto, se verifica 1.2.10, obteniéndose el resultado. □

Lema 4.4.12. $(R_\omega, E) \vDash Pow$

Demostración. Sea $r \in R_\omega$. Buscamos un conjunto $s \in R_\omega$ tal que:

$$\begin{aligned}(\forall t \in R_\omega)[\, t\, E\, s \Leftrightarrow (t \subseteq r)^{(R_\omega,E)}] &\Leftrightarrow (\forall t \in R_\omega)[\, t \in f(s) \Leftrightarrow (\forall u\, E\, t)\ u\, E\, r\,]\\ &\Leftrightarrow (\forall t \in R_\omega)[\, t \in f(s) \Leftrightarrow (\forall u \in f(t))[u \in f(r)]]\\ &\Leftrightarrow (\forall t \in R_\omega)[\, t \in f(s) \Leftrightarrow f(t) \subseteq f(r)]\end{aligned}$$

Consideramos la clase $s \coloneqq f^{-1}(\{t \in R_\omega \mid f(t) \subseteq f(r)\})$. Es inmediato ver que s es un conjunto gracias al Axioma de Separación. Gracias a su definición, s es el conjunto potencia de r. □

Teorema 4.4.13. *El Axioma de Regularidad es independiente de FST.*

Demostración. Al haber probado, de acuerdo con la proposición anterior, que Pow es cierto en (R_ω, E), y empleando que FST es equivalente a $EST + Pow + \neg Inf$ (4.3.7), hemos conseguido probar, a partir de 4.4.10, que $(R_\omega, E) \vDash FST + \neg UReg$. Una vez más, al haber construido sendos modelos de FST que afirman y niegan el Axioma de Regularidad, por 1.2.10 se obtiene el resultado. □

Para finalizar la sección, introducimos el Axioma de Regularidad Fuerte con el objetivo de comprobar que la equivalencia en *ZF* de este axioma con *UReg* − a partir de ahora Regularidad Usual − no se preserva en *FST*. Se enuncia del siguiente modo:

$SReg : \forall x\, \exists \alpha\, [Ord(\alpha) \wedge x \subseteq R(\alpha)]$

Hemos de hacer dos consideraciones previas. En primer lugar, dado que en la fórmula interviene la función R, en principio cabría esperar que necesitaríamos tanto *Inf* como *Pow* para poder considerar *SReg* como una fórmula válida dentro de *FST*. No obstante, tal y como subrayamos en la sección de relaciones bien fundadas, podemos definir R recursivamente siempre que tengamos la posibilidad de tomar la potencia de un conjunto. Como *Pow* es un teorema en *FST*, tiene sentido considerar *SReg*. En segundo lugar, tal y como veremos más adelante, la demostración de la equivalencia de regularidades en *ZF* se basa en la posibilidad de construir la clausura transitiva de un conjunto x arbitrario, para lo cual necesitamos *Inf* según vimos al demostrar 3.3.5-(i). Como consecuencia de esto, resulta natural esperar que, de admitir un axioma que asegura la existencia de dicho conjunto transitivo, pueda probarse la equivalencia de ambos axiomas en *FST*. Como avanzábamos, esto no resulta ser así, y el motivo radica en que esta axioma de existencia es, de hecho, independiente de *FST*.

En vista de la disquisición anterior, denotamos por *Trcl* a la fórmula que afirma que, para todo conjunto existe un conjunto transitivo que lo contiene. Formalmente:

Trcl: $\forall x\, \exists y\, [Tr(y) \wedge x \subseteq y]$

Probemos primeramente que ambas Regularidades son equivalentes en ZF^-. Recordemos antes sus formulaciones para acudir a ellas más comodamente:

UReg: $\forall x[\, x \neq 0 \Rightarrow \exists y[\, y \in x \wedge y \cap x = 0\,]]$

SReg: $\forall x\, \exists \alpha\, [Ord(\alpha) \wedge x \subseteq R(\alpha)]$

Comencemos probando la equivalencia en ZF^{-} de ambas Regularidades.

Lema 4.4.14. *$EST \vdash SReg \Rightarrow UReg + Trcl$.*

Demostración. Probemos cada una de las fórmulas:

(i) **UReg:**
Sea $x \in R_\omega$ no vacío. Por hipótesis, existe un ordinal α tal que $x \subseteq R(\alpha)$. Procediendo como cuando demostramos que de $(R_\omega, \in)$ se desprende Regularidad se obtiene el resultado.

(ii) **Trcl:**
Sea $x \in R_\omega$. Por hipótesis existe un ordinal α tal que $x \subseteq R(\alpha)$. Por 3.3.14, $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo, luego verifica trivialmente *Trcl*.

□

Lema 4.4.15. *$EST \vDash UReg + Trcl \Rightarrow SReg$*

Demostración. Supongamos el Axioma de Regularidad Usual. Entonces la relación $\in$ es una relación bien fundada sobre V. Por tanto, 3.3.7 afirma que $V = Wf$. Sea $x \in Wf$. Como, por 3.3.14 $Wf = \bigcup_{\alpha \in Ord} R(\alpha)$, existe un ordinal α tal que $x \in R(\alpha)$. Basta aplicar que $R(\alpha)$ es transitivo para obtener el resultado. □

Teorema 4.4.16. *$ZF^{-} \vdash SReg \Leftrightarrow UReg$*

Demostración. Basta considerar que ZF^{-} comprende, en particular, los axiomas de $EST + Inf$, de donde se desprende *Trcl* según vimos en la demostración de 3.3.5-(i). Los Lemas 4.4.14 y 4.4.15 ofrecen inmediatamente el resultado. □

Tras haber probado la equivalencia entre ambas Regularidades en ZF^{-}, veamos que ésta no se mantiene en *FST*. Como decíamos, para ello demostraremos que *SReg* y *Trcl* son independientes de *FST*. Para probar la independencia de la segunda fórmula, nos hará falta el siguiente resultado, tomado de [4] y que no demostraremos al ser puramente técnico:

Lema 4.4.17. *Si ZF es consistente, entonces también lo es ZF + $(*)$, siendo $(*)$ la fórmula:*

$$(*) \qquad \exists x\,[\,x = \{x_n \mid n < \omega\} \wedge \forall i, j \in \omega (x_i \neq x_j) \wedge (\forall n \in \omega) x_n = \{x_{n+1}\}]$$

Probemos primeramente la independencia de la Regularidad Fuerte:

Teorema 4.4.18. *SReg es independiente de FST.*

Demostración. Comprobemos que los modelos de *FST* construidos hasta ahora permiten probar este resultado:

Por un lado, gracias a 4.4.14 sabemos que la fórmula $FST \vdash \neg UReg \Rightarrow \neg SReg$ es verdadera. Más aún, gracias a 4.4.10, también es cierta la fórmula $(R_\omega, E) \vDash \neg UReg$. De ambos hechos deducimos $(R_\omega, E) \vDash \neg SReg$.

Por otro lado, es inmediato ver que $(R_\omega, \in) \vDash SReg$. En efecto, si $x \in R_\omega$, entonces existe $\beta \in \omega$ tal que $x \in R(\beta)$ Dado que β es un ordinal sucesor, existe $\gamma \in \omega$ tal que $\beta = \gamma + 1$. Entonces $x \subseteq R(\gamma)$.

Dado que hemos construidos sendos modelos que niegan y verifican la veracidad de *SReg*, deducimos que *SReg* es independiente de *FST* como queríamos probar. □

Teorema 4.4.19. *Trcl es independiente de FST*

Demostración. En primer lugar, como $(R_\omega, \in) \vDash SReg$, empleando 4.4.14 deducimos que $(R_\omega, \in) \vDash Trcl$. Para encontrar un modelo de su negación, empleamos 4.4.17 para considerar los conjuntos:

$$\begin{aligned} y_0 &:= \{x_n \mid n \in \omega\}, \qquad \text{donde } x_n = \{x_{n+1}\} \quad \forall n \in \omega \\ y_{n+1} &:= \{x \subset y_n \mid Fin^f(x)\} \end{aligned}$$

Sea $M := \bigcup_{n\in\omega} y_n$. Probemos que M es un modelo transitivo de $FST + \neg Trcl$.

(i) M es transitivo:
Si $z \in x \in M$, entonces existe un natural n tal que $z \in x \in y_n$. Probemos que $z \in M$ distinguiendo los siguientes casos:

·) Si $n = 0$, $z \in x \in x_n \mid n \in \omega$, luego $z \in x_m = \{x_{m+1}\}$ para cierto natural m. Por tanto, $z = x_{m+1} \in y_0$, luego $z \in M$

·) Si $z \in x \in y_{n+1}$, por definición de y_{n+1}, $x \subseteq y_n$, luego $z \in y_n \subseteq M$.

(ii) $(M, \in) \vDash FST$:
Probemos cada uno de los axiomas. Véase que la transitividad de M provoca que la prueba que expondremos a continuación se asemeje mucho a la de 4.4.3. En virtud de este hecho, para no reincidir en las mismas ideas, indicaremos detalladamente cómo se realizaría cada prueba cuando proceda:

·) **Extensionalidad:**
La transitividad de M consigue que el Axioma de Extensionalidad sea una fórmula absoluta en M. Como Extensionalidad es un axioma en *ZF*, tenemos el resultado.

·) **Vacío:**
Se observa que el conjunto vacío en *ZF* es también el conjunto vacío de $(M, \in)$. En efecto, $0 \in M$ pues $0 \in y_1$ ya que 0 es f-finito y $0 \subseteq y_0$. Esto permite afirmar que el Axioma del Conjunto Vacío es una fórmula absoluta en M.

·) **Par:**
Si demostramos que $\{x, y\} \in M$ para cualquier par de conjuntos x e y de M, deduciremos que el Axioma del Par es una fórmula absoluta en M.

Sean n y m tales que $x \in y_n$ e $y \in y_m$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $n \leq m$. Demostremos que $\{x, y\} \subseteq y_m$. Para ello es claro que bastará ver, por inducción en n, que $y_n \subseteq y_{n+1}$ para todo $n \in \omega$:

-) Sea $x \in y_0$. Entonces x es f-finito y $x = x_j$ para algún $j \in \omega$. Por tanto, $x = \{x_{j+1}\} \subseteq y_0$. Consecuentemente, $x \in y_1$

-) Supongamos por hipótesis de inducción que $y_n \subseteq y_{n+1}$. Sea $x \in y_{n+1}$. Entonces x es f-finito y $x \subseteq y_n \subseteq y_{n+1}$, luego necesariamente $x \in y_{n+2}$. Esto prueba $y_{n+1} \subseteq y_{n+2}$.

La inducción anterior prueba que $\{x, y\} \subseteq y_m$. Como este conjunto es f-finito, $\{x, y\} \in y_{m+1} \subseteq M$, como queríamos probar.

·) **Unión:**
Si demostramos que $\bigcup x \in M$ para cualquier $x \in M$, obtendremos que el Axioma de la Unión es una fórmula absoluta en M. Observemos que, como M es transtivo, $x \in M \Rightarrow x \subset M$, luego todo elemento $z \in x$ es f-finito. Por tanto, por 4.2.21, $\bigcup x$ es f-finito. Basta pues encontrar algún n tal que $\bigcup x \subset y_n$ para obtener el resultado.

Sea $n \in \omega$ tal que $x \in y_n$. Distinguimos dos casos:

-) Si $n = 0$, entonces $x = x_j$ para algún $j \in \omega$. Probemos $y \in y_1 \subseteq M$:

$$\begin{aligned} y \in \bigcup x &\Leftrightarrow \exists z\, [y \in z \wedge z \in x = x_j = \{x_{j+1}\}] \\ &\Leftrightarrow y \in z \wedge z = x_{j+1} = \{x_{j+2}\} \Leftrightarrow y = x_{j+2} \end{aligned}$$

-) Si $n > 0$, sea m tal que $m + 1 = n$. Entonces $x \subset y_m$. Si $y \in \bigcup x$, existe $z \in x \subset y_m$ tal que $y \in z$. Empleando que $y_l \subseteq y_{l+1}$ para todo $l \in \omega$ (véase la prueba de *Par* inmediatamente anterior), deducimos:

$$z \in y_m \Rightarrow z \in y_n \Rightarrow z \subseteq y_m \Rightarrow y \in y_m$$

Ambos casos prueban $\bigcup x \subseteq y_n$ para cierto $n \in \omega$, completando la prueba.

·) **Reemplazamiento:**
Un razonamiento análogo al que recurrimos cuando probamos Reemplazamiento en $(R_\omega, \in)$ arroja el resultado, pues si $x \in M$, entonces x es f-finito (luego aquel máximo n está bien definido) y vuelve a tenerse la contención $y_n \subseteq y_{n+1}$ para todo $n \in \omega$.

·) **Fin:**
Al igual que en 4.4.8, se tiene que la fórmula que define *Fin* es absoluta, pues lo anterior demuestra que $(M, \in) \vDash EST$ y $Nat(a)$ es una fórmula acotada. Basta, pues, probar que todo elemento $x \in M$ es f-finito, lo que es inmediato por definición de y_n.

Los razonamientos anteriores han probado que, efectivamente, $(M, \in) \vDash FST$.

(iii) $(M, \in) \vDash \neg Trcl$:
Sea $a = x_0 = \{x_1\} \in M$. Supongamos por reducción al absurdo que existe $b \in M$ transitivo que contiene al conjunto a. Si probamos que $x_{n+1} \in b$ para todo $n \in \omega$, deduciremos que b es una clase propia en $(M, \in)$ pues $(M, \in) \vDash FST$.

Por inducción en $n \in \omega$:

·) Si $n = 1$, entonces $x_1 \in b \Leftrightarrow \{x_1\} \subseteq b$. Esto último es cierto pues $\{x_1\} = a \subseteq b$ por hipótesis.

·) Supongamos por hipótesis de inducción que $x_{n+1} \in b$. Análogamente al caso anterior, $x_{n+2} \in b \Leftrightarrow \{x_{n+2}\} \subseteq b \Leftrightarrow x_{n+1} \subseteq b$. Esto último es cierto pues b es transitivo y $x_{n+1} \in b$ por hipótesis de inducción

La inducción anterior comprueba b es una clase propia en $(M, \in)$ al no ser f-finito, de modo que $a \in M$ no está contenido en ningún conjunto transitivo.

Habiendo pues encontrado un modelo de *FST* + *Trcl* y otro de *FST* + ¬ *Trcl*, deducimos que el Axioma de la Clausura Transitiva es independiente de *FST*. □

Nota. Estrictamente hablando, el lema anterior ha sido probado añadiendo la hipótesis de la consistencia de *ZF*. Del mismo modo, el resto de resultados de independencia del Axioma de Regularidad asumen la consistencia de ZF^-. En ambos casos se trata de una hipótesis razonable en tanto que todo el edificio matemático está construido bajo esta suposición. De lo contrario, según vimos, toda proposición matemática sería demostrable desde dentro de las Matemáticas.

Teorema 4.4.20. *El Axioma de Regularidad Usual y el Axioma de Regularidad Fuerte no son equivalentes en FST.*

Demostración. Por 4.4.14 sabemos que la fórmula $FST \vdash SReg \Rightarrow UReg$ es cierta. La fórmula que expresa la implicación recíproca, empero, no lo es. Por reducción al absurdo, si lo fuera, entonces $FST \vdash UReg \Rightarrow Trcl$. No obstante, en el lema anterior encontramos un modelo (N, E') de $FST + UReg + \neg Trcl$. Contradicción. □

Una vez que han sido probadas las relaciones que mantienen el Axioma de Regularidad y la negación del Axioma del Infinito con *FST*, podemos compendiar los resultados anteriores en el siguiente esquema. Una doble flecha indica que ambas teorías son equivalentes, mientras que una flecha unidireccional $T_1 \longrightarrow T_2$ señala que la teoría T_1 contiene a T_2. Nótese que el estudio de la independencia del Axioma de Regularidad respecto de *EST* y *FST* ha sido necesario para poder afirmar que sendas teorías son consistentes y, por tanto, tiene sentido considerarlas como teorías dignas de estudio.

$$\begin{tikzcd}
 & & FST + SReg \arrow[d] & \\
 & EST + \neg Inf + UReg \arrow[d] & FST + UReg \arrow[d] & \\
EST & EST + \neg Inf \arrow[l] \arrow[d] & FST \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow] & EST + Pow + \neg Inf \\
 & EST + Fin^D & & \\
 & & EST + WO + \neg Inf &
\end{tikzcd}$$

Habiendo demostrado las relaciones recogidas en el esquema anterior, el segundo de los objetivos de este Trabajo ha sido satisfecho. Merece la pena, antes de finalizar, señalar cierto detalle que aquí no hemos cubierto: la independencia de *Fin* respecto de *EST* + ¬*Inf*.

En el propio artículo de Baratella - Ferro [1] se incluye una demostración pormenorizada de este hecho. Para ello se emplean conceptos mucho más finos, como los *modelos de permutaciones*, que se escapan del alcance de este Trabajo. Detengámonos unos instantes para ilustrar, de soslayo, las indicaciones que Kunen les dio a los autores italianos para construir el modelo deseado.

Si x es un conjunto e y es un subconjunto suyo, se considera el conjunto $H(y)$ formado por todas las permutaciones de x que dejan fijo a y. A partir de ahí, se genera una clase M transitiva construida de tal modo que a todo elemento y de la clausura transitiva de $x \in M$ le corresponda un subconjunto F_y con k elementos fijos bajo cualquier permutación de $H(F_y)$.

Puede probarse que la estructura $(M, \in)$ es modelo de *EST* + ¬*Inf* + ¬*Fin*. Mediante este modelo, se obtiene que *Pow, WO* y *Fin* son todos independientes de *EST* + ¬*Inf*. Efectivamente, la afirmación de cualquiera de las dos primeras fórmulas derivaría, por 4.3.7 y 4.3.8 respectivamente, en la afirmación de *Fin*, llevándonos a una contradicción. De aquí se deduce $(M, \in) \vDash \neg Pow + \neg WO$. Bastaría entonces cotejar este modelo con cualquiera de los modelos de *FST* que aquí hemos construido para obtener la independencia de las tres fórmulas.

Considerando esta relación de independencia, ahora sí, el diagrama anterior queda completamente justificado[1].

[1]Puede argüirse que deberíamos realizar un tratamiento similar al que acabamos de realizar con la independencia de *Fin* respecto de *EST* + ¬*Inf* para justificar la independencia de *Inf* respecto de *EST*. Este hecho puede probarse inmediatamente con los resultados ya incluidos en el Trabajo. Es suficiente considerar, por un lado, la suposición de que *ZF* es consistente y, por otro, que cualquier modelo de *FST* que aquí hemos construido lo es, en particular, de *EST* + ¬*Inf*.

Bibliografía

[1] Baratella, S. y Ferro, R. (1993). A theory of sets with the negation of the axiom of infinity. *Mathematical Logic Quarterly*, 39(1):338–352.

[2] Fernández Magarit, A. (2012). *Lógica Matemática y Teoría de Conjuntos*. Editado por Cordón Franco A. y Lara Martín F.F.. Fénix Editorial, Sevilla.

[3] Halbeisen, L. J. (2012). *Combinatorial set theory*, volume 121. Springer.

[4] Kunen, K. (2014). *Set theory an introduction to independence proofs*. Elsevier.

[5] Levy, A. (1979). *Basic set theory*. Springer-Verlag.

[6] Takeuti, G. y Zaring, W. M. (2012). *Introduction to axiomatic set theory*, volume 1. Springer Science & Business Media.