



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

**ESTUDIO DE LAS COMPONENTES DE FATOU
DE FUNCIONES RACIONALES SOBRE LA
ESFERA DE RIEMANN**

Trabajo de Fin de Máster realizado por:

JULIA MARTÍNEZ DE LA FUENTE

Tutor: JUAN CARLOS GARCÍA VÁZQUEZ

Profesor Titular de la Universidad de Sevilla

Índice general

Abstract	3
Introducción	4
1. Preliminares	7
1.1. Distancias sobre la esfera de Riemann.	7
1.2. Valencia.	8
1.3. Conjuntos invariantes.	9
1.4. Familias normales.	10
1.5. Puntos excepcionales.	11
1.6. Propiedades de los conjunto de Julia.	12
2. Estructura del conjunto de Fatou	13
2.1. La topología de la esfera.	13
2.2. Componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou.	16
2.3. La característica de Euler.	18
2.4. La fórmula de Riemann-Hurwitz para aplicaciones recubridoras.	21
2.5. Aplicaciones entre componentes del conjunto de Fatou.	29
2.6. El número de componentes del conjunto de Fatou.	35
2.7. Componentes del conjunto de Julia.	37
3. Puntos periódicos	40
3.1. Clasificación de los puntos periódicos.	40
3.2. Existencia de puntos periódicos.	43
3.3. Ciclos (súper) atractivos.	45
3.4. Ciclos repulsivos.	51
3.5. Ciclos racionalmente indiferentes.	53

3.6. Ciclos irracionalmente indiferentes.	70
3.7. Anexo: Puntos fijos.	72
4. Componentes invariantes hacia delante	77
4.1. Las cinco posibilidades.	77
4.2. Funciones límite.	78
4.3. Dominios parabólicos.	83
4.4. Discos de Siegel y anillos de Herman.	86
4.5. Conectividad de componentes invariantes.	92
5. El Teorema de los Dominios Errantes	95
5.1. El Teorema de los Dominios Errantes.	95
5.2. Un resultado preliminar.	96
5.3. Estructuras conformes.	100
5.4. Conjugadas quasiconformes de funciones racionales.	105
5.5. Comportamiento frontera de aplicaciones conjugadas.	107
5.6. Prueba del Teorema 5.1.3.	113
6. Componentes errantes de Fatou para funciones enteras	121
6.1. La función de Baker.	122
Referencias	135

Abstract

This master thesis is focused on the study of Fatou set of rational functions on the Riemann sphere. In these notes, we classify the components of the Fatou set and we prove the No Wandering Domains Theorem. We also conclude this work with an example of an entire function whose Fatou set has wandering domains.

This manuscript is a continuation of a previous degree thesis I presented in 2022 which was devoted to the study of Julia sets of rational functions. Therefore, in the first chapter, we include a summary of the notions covered in the degree thesis that will be treated as elementary throughout the remaining of this work.

The second chapter aims to provide some knowledge about Fatou set structure. In this chapter we study the Euler characteristic for regular subdomains of the Riemann sphere to establish the Riemann-Hurwitz relation for Fatou set components. We also bound the number of invariant connected components that a Fatou set of a rational function might have.

In the third chapter, we classify periodic points and cycles of an analytic function which are immediately applied to prove various results concerning the local behaviour of rational functions at these points.

In Chapters 4 and 5, we classify completely Fatou connected components. We shall remark one significant result from each chapter: in Chapter 4, Theorem 4.1.2, which establishes that a forward invariant component of the Fatou set is one of five possibilities and; in the fifth chapter, the No Wanderings Domains Theorem by D. Sullivan which assures that every component of the Fatou set of a rational map is eventually periodic.

Finally, in the sixth chapter, we provide an example of an entire function which has wandering domains. This example was given by I. N. Baker, in 1974, before Sullivan proved his theorem.

Introducción

Este trabajo está dedicado a estudiar en profundidad las dinámicas complejas descritas por las iteraciones de funciones racionales sobre la esfera de Riemann. El propósito de estas notas es clasificar las componentes del conjunto de Fatou de una función racional. El conjunto de Fatou de una función racional se define como el abierto maximal de la esfera de Riemann donde la familia de iteradas de la función racional es equicontinua. Siguiendo esta línea de trabajo, el Teorema de los Dominios Errantes de Sullivan será una pieza fundamental a la hora de establecer la clasificación de las componentes de Fatou. Finalmente, el trabajo concluirá con un ejemplo de función entera cuyo conjunto de Fatou tiene dominios errantes, ejemplo que Baker publicó en la segunda mitad del siglo XX.

Esta memoria es una continuación del Trabajo de Fin de Grado, [17], que presenté en el año 2022 antes de terminar el Grado en Matemáticas. En aquel momento, el objeto de estudio fueron los conjuntos de Julia de las funciones racionales; en esta ocasión, el objeto de estudio serán los conjuntos de Fatou. Esto entra dentro del ámbito de estudio de las Dinámicas Complejas y el nombre de conjunto de Fatou hace honor al matemático francés Pierre J. L. Fatou (1878-1929).

El primer capítulo de esta memoria es un resumen que incluye los conceptos y resultados más relevantes que aparecen en el Trabajo de Fin de Grado y que han sido de vital importancia para desarrollar estas notas. Con el propósito de mantener el carácter preliminar de este capítulo, los resultados que en él se incluyen no están desarrollados con detalle. Podemos consultar todos ellos en los Capítulos 2, 3 y 4 del libro de Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, [9].

El Capítulo 2 está dedicado a estudiar en profundidad la estructura de los conjuntos de Fatou. En este capítulo, se prueba que toda función racional transforma una componente conexa de Fatou en otra de manera sobreyectiva y respetando las fronteras. Además, se define la característica de Euler para subdominios regulares de la esfera de Riemann y, con ella, se puede generalizar la conocida Fórmula de Riemann-Hurwitz para componentes conexas del conjunto de Fatou. Por otro lado, en este capítulo también se determina el

número de componentes completamente invariantes que puede tener el conjunto de Fatou y en la última sección se prueba un resultado que asegura que si el conjunto de Julia de una función racional es desconexo, entonces tiene una cantidad no numerable de componentes.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio y clasificación de los puntos periódicos de las funciones racionales. La mayor parte de los resultados y definiciones que aparecen en este capítulo se cumplen para funciones analíticas en general. Dado un punto de la esfera compleja, se puede distinguir si este es atractivo, repulsivo o indiferente, según el valor de la derivada de la función en el punto. Esta clasificación se puede extender, además, a ciclos y probaremos que los ciclos (súper) atractivos pertenecen al conjunto de Fatou, los repulsivos al conjunto de Julia y los indiferentes podrán pertenecer a ambos conjuntos. El resto del capítulo está dedicado a estudiar al comportamiento de las iteradas de una función racional en los entornos de dichos puntos.

En el Capítulo 4 se establece la clasificación de las componentes conexas invariantes hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional. El Teorema 4.1.2 asegura que, una componente conexa invariante hacia delante del conjunto de Fatou solo puede ser súper atractiva, atractiva, parabólica, un disco de Siegel o un anillo de Herman.

El Capítulo 5 está dedicado a probar el Teorema de los Dominios Errantes de Sullivan (Teorema 5.1.3). Este resultado fue probado en 1985 por el matemático estadounidense Dennis Sullivan, en el artículo *Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I. Solution of the Fatou-Julia Problem on Wandering Domains*, [22], y establece que toda componente del conjunto de Fatou de una función racional es eventualmente periódica, es decir, existe un número natural m tal que la iterada m -ésima de la función racional de dicha componente es periódica. La prueba del Teorema 5.1.3 se razona por reducción al absurdo, suponiendo que el conjunto de Fatou tiene una componente errante y llegando, finalmente, a una contradicción. En el Lema 5.2.2, probaremos que si el conjunto de Fatou tiene una componente errante, entonces tiene una componente errante que es simplemente conexa. Esta idea se atribuye a I. N. Baker y simplifica en gran medida la prueba del teorema que él planteó en su artículo. Para llevar a cabo esta demostración necesitaremos estudiar algunas nociones previas sobre estructuras conformes que desarrollaremos en las Secciones 5.3, 5.4 y 5.5 de este capítulo.

Los Capítulos 4 y 5 resuelven completamente el problema de clasificación de las componentes conexas del conjunto de Fatou de una función racional. Como consecuencia del Teorema de los Dominios Errantes de Sullivan, para toda componente conexa del conjunto de Fatou de una función racional existe una iterada de la función racional que es periódica. Luego, la correspondiente componente es invariante hacia delante bajo esa iteración, satis-

faciendo así las hipótesis del Teorema 4.1.2, que determina que debe ser de alguno de las cinco posibilidades estudiadas en el Capítulo 4.

Después de terminar el estudio de las componentes conexas del conjunto de Fatou de una función racional y concluir que estas no pueden ser errantes, en el Capítulo 6 se desarrolla un ejemplo de función entera (y trascendente) cuyo conjunto de Fatou contiene dominios errantes. Este ejemplo fue propuesto por el matemático australiano Irvine Noel Baker y está desarrollado en dos artículos, ambos anteriores a la prueba de Sullivan. En el primero de ellos, *Multiply Connected Domains of Normality in Iteration Theory*, [8], publicado en 1963, Baker define la función entera g como

$$g(z) = Cz^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right),$$

siendo C y cada r_n constantes positivas adecuadas y comprueba que satisface algunas propiedades. En el segundo artículo, *An Entire Function Which Has Wandering Domains*, [7], publicado en 1974, once años después que el primero, Baker prueba que el conjunto de Fatou de g tiene dominios errantes.

Para realizar esta memoria he consultado distintas fuentes, siendo el libro de Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, [9], la principal de ellas. También he consultado los libros de John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, [18], de Lennart Carleson y Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, [11] y de Norbert Steinmetz, *Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems*, [21], cuyo contenido es cercano al que plantea Beardon en sus notas aunque son lecturas más densas y de mayor nivel. Para el Capítulo 6 he estudiado en profundidad los artículos *Multiply Connected Domains of Normality in Iteration Theory*, [8], y *An Entire Function Which Has Wandering Domains*, [7], de I. N. Baker.

Capítulo 1

Preliminares

En lo que sigue, denotaremos por \mathbb{C}_∞ a la esfera compleja o de Riemann. En este capítulo, a modo de recopilación, incluiré algunos resultados, definiciones y propiedades más importantes que formaron parte de mi Trabajo de Fin de Grado, [17]. Todos estos resultados pueden consultarse en el libro [9], *Iteration of Rational Functions*, del matemático inglés Alan F. Beardon.

1.1. Distancias sobre la esfera de Riemann.

Comenzamos la sección recordando las nociones de distancias cordal y esférica. En primer lugar, la distancia cordal, que denotamos por σ , es la longitud (euclídea) del segmento que une dos puntos de la esfera de Riemann. Para todo par de puntos z y w de la esfera compleja, la distancia cordal satisface las relaciones:

$$\sigma(z, w) \leq 2 \quad \text{y} \quad \sigma\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \sigma(z, w).$$

Por otro lado, tenemos la distancia esférica. Dados dos puntos de la esfera de Riemann, la distancia esférica, que denotamos por σ_0 , se define como la menor longitud de la geodésica que une ambos puntos. Las distancias cordal y esférica satisfacen que, para todo par de puntos z y w de la esfera compleja,

$$\frac{2}{\pi}\sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \sigma_0(z, w).$$

Sea R una función racional. El siguiente resultado garantiza que, para ciertos parámetros, la imagen por R de una componente interior de una curva cerrada hemiesfera no corta al exterior de la imagen por R de dicha curva. Podemos encontrar su prueba en el Capítulo 2 de [9].

Teorema 1.1.1. *Sea R una función racional. Existe un número positivo δ tal que si γ es una curva cerrada de σ_0 -diámetro menor que δ , entonces la imagen por R de una componente interior de γ no corta al exterior de la imagen de γ por R . Esto es, si Ω es una componente interior de γ entonces $R(\Omega)$ no corta al exterior de $R(\gamma)$.*

1.2. Valencia.

Sean z_0 un punto del plano complejo y f una función no constante y holomorfa en un entorno de z_0 . Definimos la *valencia* de f en z_0 , que denotamos por $v_f(z_0)$, como el número entero k tal que se cumple que el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

existe, es finito y no nulo. Esto es, la valencia de f en z_0 es el número de soluciones de la ecuación $f(z) = f(z_0)$. La valencia de una función en un punto satisface la igualdad

$$v_{f \circ g}(z_0) = v_f(g(z_0))v_g(z_0),$$

donde z_0 , $g(z_0)$ y $f \circ g(z_0)$ son puntos del plano complejo. Con esta relación, se puede generalizar la definición de valencia a la esfera compleja completa como

$$v_f(z_0) = v_F(g(z_0)),$$

siendo $F = h \circ f \circ g^{-1}$ y g y h dos transformaciones de Möbius tales que $g(z_0)$ y $h \circ f(z_0)$ son puntos de \mathbb{C} . Esta definición incluye los casos en los que algunos de los puntos z_0 , $f(z_0)$ o ambos a la vez toman el valor infinito.

Sea R una función racional, se cumple que

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} (v_R(z) - 1) < +\infty,$$

pues $v_R(z) = 1$ para todo punto de la esfera compleja, salvo una cantidad finita.

El siguiente resultado acota de manera precisa el sumatorio anterior.

Teorema 1.2.1. *Sea R una función racional no constante. Entonces, se cumple la siguiente relación:*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} (v_R(z) - 1) = 2\text{gr}(R) - 2. \quad (1.1)$$

Ésta es conocida como la Fórmula de Riemann-Hurwitz y podemos consultar su prueba en [9, p. 43-44].

Como consecuencia del Teorema 1.2.1, el siguiente resultado establece una cota de los puntos críticos de una función racional en la esfera compleja. Podemos encontrar su prueba en el Capítulo 2 de [9].

Proposición 1.2.2. *Sea R una función racional de grado d mayor o igual que uno. Entonces, R tiene, a lo más, $2d - 2$ puntos críticos en \mathbb{C}_∞ . Si R es un polinomio, entonces R tiene, a lo más, $d - 1$ puntos críticos en \mathbb{C} .*

1.3. Conjuntos invariantes.

La siguiente definición nos será de utilidad más adelante.

Definición 1.3.1. *Sean $g: X \rightarrow X$ una aplicación y E un subconjunto de X . Decimos que E es:*

- i) Invariante hacia delante, si $g(E) = E$.*
- ii) Invariante hacia atrás, si $g^{-1}(E) = E$.*
- iii) Completamente invariante, si $g(E) = E = g^{-1}(E)$.*

Nota. Un conjunto preserva algún tipo de invarianza recogida en la Definición 1.3.1 bajo una aplicación dada. En el caso de la Definición 1.3.1 los conjuntos son invariantes bajo g . A lo largo de estas notas no precisaremos esta información a no ser que evitarla de lugar a confusión.

De la definición anterior observamos que si la aplicación g es sobreyectiva, entonces se cumple que $g(X) = X$ y, por tanto, para saber si g es completamente invariante, basta comprobar la condición dada en ii).

El siguiente resultado nos ayudará a relacionar la definición anterior con los conjuntos de Julia y de Fatou de una función racional. Podemos consultar su prueba en [9, p. 53]

Teorema 1.3.2. *Sean X un espacio topológico, $g: X \rightarrow X$ una aplicación abierta y continua y E un conjunto completamente invariante contenido en X . Entonces, se cumple que el complementario de E en X , el interior de E , la frontera de E y la clausura de E son conjuntos completamente invariantes.*

Del resultado anterior se deduce inmediatamente que

Teorema 1.3.3. *Sea R una función racional. Entonces, los conjuntos de Julia y de Fatou de R son completamente invariantes.*

El resultado que aparece a continuación establece que si definimos una aplicación continua y sobreyectiva sobre un espacio topológico con una cantidad finita de componentes, dichas componentes son completamente invariantes bajo alguna iteración de la función. Podemos consultar su prueba en [9, p. 55].

Proposición 1.3.4. *Sean X un espacio topológico con un número finito de componentes, X_1, \dots, X_n . Sea $f: X \rightarrow X$ una aplicación continua y sobreyectiva. Entonces, existe un número natural m tal que, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, la componente X_j es completamente invariante bajo f^m .*

1.4. Familias normales.

Comenzamos esta sección recordando la noción de familia equicontinua y las definiciones de conjunto de Julia y de Fatou de una función racional

Definición 1.4.1. *Sean (X, d) y (X_1, d_1) dos espacios métricos, \mathcal{F} una familia de funciones definidas de (X, d) en (X_1, d_1) y x_0 un punto de X . Se dice que \mathcal{F} es equicontinua en x_0 si para todo ε positivo, existe δ positivo tal que para todo punto x de X y para toda función f de \mathcal{F} se verifica:*

$$\text{si } d(x_0, x) < \delta, \text{ entonces } d_1(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Decimos que la familia \mathcal{F} es equicontinua en un conjunto $X_0 \subset X$ si \mathcal{F} es equicontinua en todo punto de X_0 .

Definición 1.4.2. *Sea R una función racional no constante. Se define el conjunto de Fatou de R , que denotamos por $F(R)$, como el abierto maximal contenido en la esfera compleja donde la familia de iteradas de R es equicontinua. El conjunto de Julia de R , que denotamos por $J(R)$, se define como el complementario del conjunto de Fatou en la esfera compleja, esto es,*

$$J(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus F(R).$$

A continuación, recordamos las nociones de convergencia local uniforme y convergencia normal.

Definición 1.4.3. *Decimos que una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones definidas entre dos espacios métricos, (X_1, d_1) y (X_2, d_2) converge localmente uniformemente en X_1 a una función*

f si, para todo punto x de X_1 , existe un entorno U_x de x tal que f_n converge uniformemente a f en U_x . En este caso, f_n converge uniformemente en compactos de X_1 .

Definición 1.4.4. Decimos que una familia \mathcal{F} de funciones definidas entre dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) respectivamente es normal en X_1 si toda sucesión de funciones de \mathcal{F} contiene una subsucesión que converge localmente uniformemente en X_1 .

A continuación aparecen dos resultados bien conocidos de variable compleja. El primero de ellos relaciona las nociones de familia normal y equicontinua y podemos encontrar su prueba en [2, p. 222]. La prueba del segundo la podemos encontrar en [12, p. 219].

Teorema 1.4.5 (Teorema de Arzelà-Ascoli). Sean D una región de la esfera compleja y \mathcal{F} una familia de funciones continuas definidas de D en la esfera compleja. Entonces, \mathcal{F} es equicontinua en D si y solo si \mathcal{F} es una familia normal en D .

Teorema 1.4.6. (Teorema de Vitali). Supongamos que la familia de funciones analíticas $\{f_1, f_2, \dots\}$ es normal en una región D de la esfera de Riemann y que (f_n) converge puntualmente a alguna función f en algún abierto no vacío $W \subset D$. Entonces, f se extiende a una función analítica F en D y $f_n \rightarrow F$ localmente uniformemente sobre D .

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de normalidad para familias de funciones definidas sobre la esfera compleja. Podemos encontrar su prueba en el Capítulo 3 de [9].

Teorema 1.4.7. Sean \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en una región D de la esfera compleja. Supongamos que existen una constante positiva m y que, para toda función f de \mathcal{F} , existen tres puntos distintos a_f, b_f y c_f en \mathbb{C}_∞ tales que:

- a). Si f es una función de \mathcal{F} , entonces no toma los valores a_f, b_f y c_f en D .
- b). $\min\{\sigma(a_f, b_f), \sigma(b_f, c_f), \sigma(c_f, a_f)\} \geq m$.

Entonces, \mathcal{F} es normal en D .

1.5. Puntos excepcionales.

Comenzamos esta sección definiendo la siguiente relación de equivalencia: sean x e y dos puntos de X , definimos la relación \sim sobre X como:

$$x \sim y \text{ si y solo si existen } n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tales que } g^n(x) = g^m(y).$$

Definición 1.5.1. Llamamos órbita de x a la clase de equivalencia dada por la relación anterior que contiene a x y la denotaremos por $[x]$.

Definición 1.5.2. Sea R una función racional. Decimos que un punto z es excepcional para R si $[z]$ es finito. Denotamos por $E(R)$ al conjunto de puntos excepcionales de R .

Definición 1.5.3. Sea z un punto de \mathbb{C}_∞ . Llamamos conjunto de predecesores de z al conjunto:

$$O^-(z) = \{w: R^n(w) = z, \text{ para algún } n\} = \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(\{z\}).$$

A los puntos de $O^-(z)$ los llamamos predecesores de z .

Como $O^-(z)$ está contenido en $[z]$, si z es un punto excepcional de R , entonces su conjunto de predecesores es finito. El siguiente teorema garantiza el recíproco.

Teorema 1.5.4. Dado un punto z de la esfera compleja, el conjunto de predecesores de z es finito si y solo si z es un punto excepcional.

1.6. Propiedades de los conjunto de Julia.

El teorema que aparece a continuación reúne algunos resultados referentes al conjunto de Julia de una función racional. Podemos encontrar las pruebas de los mismos en la Sección 2 del Capítulo 4 de [9].

Teorema 1.6.1. Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Entonces,

- i) El conjunto de Julia de R es infinito.
- ii) El conjunto de Julia de R es, o bien la esfera compleja completa, o bien tiene interior vacío.
- iii) Para todo número natural n , se cumple que $F(R) = F(R^n)$ y $J(R) = J(R^n)$.
- iv) (Propiedad de Minimalidad de Julia). El conjunto de Julia de R es el conjunto completamente invariante más pequeño que contiene, al menos, tres puntos.
- v) El conjunto de Julia de R es perfecto y, por tanto, no numerable.
- vi) El conjunto de Julia de R está contenido en la clausura del conjunto de puntos periódicos de R .
- vii) Si R y S conmutan, entonces los conjuntos de Julia de R y S coinciden.

Capítulo 2

Estructura del conjunto de Fatou

Sea R una función racional definida de la esfera de Riemann, que denotamos por \mathbb{C}_∞ , en sí misma. El propósito de este capítulo es estudiar la estructura del conjunto de Fatou de una función racional.

A lo largo de estas notas, consideraremos R una función racional definida de la esfera compleja \mathbb{C}_∞ en sí misma, $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Las primeras secciones contienen algunas de las propiedades elementales tanto de la topología de la esfera de Riemann como de los conjuntos de Fatou de una función racional. Más adelante, utilizaremos la característica de Euler para ver que la posición de los puntos críticos de R jugará un papel fundamental a la hora de determinar la estructura del conjunto de Fatou de R , que denotamos por $F(R)$ y trataremos de generalizar la conocida relación de Riemann-Hurwitz para el caso en el que R esté definida entre dos subdominios de la esfera compleja. Finalmente, hablaremos del número de componentes conexas de F y de relaciones entre ellas; y terminaremos dando un resultado sobre el número de componentes del conjunto de Julia de una función racional cuando éste es desconexo.

2.1. La topología de la esfera.

Es primordial conocer la topología de la esfera de Riemann antes de estudiar en profundidad los conjuntos de Fatou de las funciones racionales pues, algunas propiedades de estos conjuntos son consecuencia directa de propiedades topológicas de la esfera compleja.

Antes de comenzar dando los primeros resultados, aprovechamos para introducir la notación que vamos a utilizar a lo largo de estas notas. En todo momento trabajaremos sobre la esfera compleja o de Riemann, que denotaremos por \mathbb{C}_∞ . Asimismo, denotaremos por $\mathbb{C}_\infty \setminus E$ al complementario del conjunto E en \mathbb{C}_∞ .

Sea D un dominio de la esfera compleja, definimos la *conectividad* de D como el número de componentes conexas de la frontera de D , que denotamos por ∂D . Diremos que D es simplemente conexo si toda curva cerrada en D puede ser deformada (en D) a un punto de D .

A continuación, enunciaré tres resultados conocidos que nos serán de utilidad.

Proposición 2.1.1. *La clausura de un conjunto conexo es conexa.*

Proposición 2.1.2. *Sea K un conjunto compacto contenido en \mathbb{C}_∞ . Entonces, K es desconexo si y solo si existe una curva de Jordan que separa K , esto es, si existe γ una curva de Jordan tal que $\gamma \cap K = \emptyset$ y K corta al interior y al exterior de γ .*

Proposición 2.1.3. *Un dominio D de la esfera compleja es simplemente conexo si y solo si su complementario en \mathbb{C}_∞ es conexo.*

Los siguientes resultados son dos variaciones de la Proposición 2.1.3:

Proposición 2.1.4. *Un dominio D de la esfera compleja es simplemente conexo si y solo si su frontera, ∂D , es conexa.*

Demostración. Sea D un dominio de la esfera compleja que no es simplemente conexo. Como D es abierto, entonces el conjunto $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ es compacto. Además, como D no es simplemente conexo, la Proposición 2.1.3 nos asegura que $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ no es conexo. Aplicando la Proposición 2.1.2, deducimos que existe una curva de Jordan γ en D que separa al complementario de D . Deducimos así que la frontera de D es desconexa. Tenemos pues que si la frontera de D es conexa, entonces D es simplemente conexo.

Por otro lado, supongamos que la frontera de D es desconexa. Aplicando nuevamente la Proposición 2.1.2, sabemos que existe una curva de Jordan γ que separa ∂D en dos conjuntos disjuntos, digamos D_1 y D_2 . Luego, en D hay puntos arbitrariamente cerca tanto de D_1 como de D_2 . También tenemos que D es arcoconexo (pues es abierto y conexo), luego

$$D \cap \gamma \neq \emptyset.$$

Tenemos por construcción que

$$\partial D \cap \gamma = \emptyset.$$

De modo que, γ está contenida en D y D_1 y D_2 están contenidos en diferentes componentes del complementario de D . Por tanto, D no es simplemente conexo. Concluimos así que, si D es simplemente conexo, entonces ∂D es conexo.

□

Proposición 2.1.5. *Sea D un abierto de la esfera compleja. Entonces, $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ es conexo si y solo si cada componente de D es simplemente conexa.*

Demostración. Supongamos que el conjunto $K = \mathbb{C}_\infty \setminus D$ es desconexo. Como K es compacto, la Proposición 2.1.2 nos asegura que existe una curva de Jordan γ contenida en D que separa K . Como la curva γ es conexa, está contenida en una única componente de D , digamos D_1 . Sea X la componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma$ que no contiene al punto del infinito. Se cumple que

$$K \cap X \neq \emptyset,$$

pues, por construcción hay, al menos, una componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ contenida en X ;

$$D \cap X \neq \emptyset,$$

pues γ está contenida en D ; y

$$K \cap D = (\mathbb{C}_\infty \setminus D) \cap D = \emptyset.$$

Luego, el conjunto D_1 no es simplemente conexo. Deducimos así que si cada componente de D es simplemente conexa, entonces $K = \mathbb{C}_\infty \setminus D$ es conexo.

Para probar la otra implicación, suponemos que K es conexo y consideramos D_1 una componente de D . Llamamos Q a la unión de K con el resto de componentes de D , esto es,

$$Q = K \cup \left(\bigcup_{n \geq 2} D_n \right) = \mathbb{C}_\infty \setminus D_1,$$

donde $D_n \subset D$, para todo n . Luego, Q es compacto. Como $\partial D_n \subset K$, para todo n , cada conjunto $K \cup D_n$ es conexo y, por tanto, también lo es la unión de ellos, $Q = K \cup (\cup_{n \geq 2} D_n)$. Aplicando la Proposición 2.1.3, deducimos que D_1 es simplemente conexo. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la Proposición 2.1.5:

Teorema 2.1.6. *Sea R una función racional. Entonces, $J(R)$ es conexo si y solo si cada componente de $F(R)$ es simplemente conexa.*

Terminamos la sección con el siguiente resultado:

Proposición 2.1.7. *Sea $\{D_\alpha\}$ una colección de dominios simplemente conexos ordenados linealmente por la inclusión. Entonces, $\cup_\alpha D_\alpha$ es un dominio simplemente conexo.*

Demostración. Sea $D = \cup_{\alpha} D_{\alpha}$. Como cada D_{α} es un dominio, D es abierto. Vamos a ver que D también es conexo:

Tenemos por hipótesis que el conjunto $\{D_{\alpha}\}$ está linealmente ordenado por la inclusión, esto es, para cada par de subíndices α y β se verifica que o bien $D_{\alpha} \subset D_{\beta}$, o bien $D_{\beta} \subset D_{\alpha}$. De modo que, si D no fuera conexo, podríamos escribir D como la unión de dos abiertos disjuntos, $D = A \cup B$; y existirían dos subíndices α y β tales que $D_{\alpha} \subset A$ y $D_{\beta} \subset B$. Esto es, ni $D_{\alpha} \subset D_{\beta}$ ni $D_{\beta} \subset D_{\alpha}$, algo que no puede ocurrir. Deducimos así que D es un dominio.

Para probar que D es simplemente conexo, tomamos una curva cerrada γ contenida en D . De este modo, la familia $\{D_{\alpha}\}$ forma un recubrimiento abierto de γ , luego γ está contenida en una unión finita de conjuntos D_{α} . Más aún, como $\{D_{\alpha}\}$ es un conjunto ordenado linealmente por la inclusión, existe β tal que $\gamma \subset D_{\beta}$. Por tanto, γ puede ser deformada en D_{β} a un punto de D_{β} . Como $D_{\beta} \subset D$, concluimos que D es simplemente conexo. \square

2.2. Componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou.

En esta sección comenzamos la discusión sobre la estructura del conjunto de Fatou de una función racional. A lo largo de estas notas y siempre que no de lugar a confusión, denotaremos por $J = J(R)$ al conjunto de Julia de R y por $F = F(R)$ al conjunto de Fatou de R . Empezaremos estudiando las componentes completamente invariantes de $F(R)$.

El siguiente es el resultado central de esta sección:

Teorema 2.2.1. *Sean R una función racional de grado, al menos, dos y F_0 una componente conexa completamente invariante de $F(R)$. Entonces:*

- i) $\partial F_0 = J(R)$.*
- ii) F_0 es o bien simplemente conexo o bien infinitamente conexo.*
- iii) Todas las componentes de $F \setminus F_0$ son simplemente conexas.*
- iv) F_0 es simplemente conexo si y solo si J es conexo.*

Demostración. En primer lugar, como F_0 es una componente conexa completamente invariante de $F(R)$, entonces su clausura también lo es. La Propiedad de Minimalidad de Julia (Teorema 1.6.1 iv)) establece que $J(R)$ es el conjunto completamente invariante más

pequeño que contiene, al menos, tres puntos. Deducimos así que $J(R)$ está contenido en la clausura de F_0 . Finalmente, como la intersección de los conjuntos de Julia y de Fatou de una función racional es vacía, concluimos que $J = \partial F_0$, terminando así la prueba del apartado i).

Para probar ii), distinguimos dos casos. Por un lado, si la conectividad de F_0 es infinita, entonces F_0 es infinitamente conexo.

Por otro lado, si la conectividad de F_0 es finita, digamos $c(F_0) = c < \infty$, entonces la frontera de F_0 tiene c componentes conexas y denotamos por E_1, \dots, E_c a las c distintas componentes conexas del complementario de F_0 . Aplicando la Proposición 1.3.4, deducimos que existe un número natural m tal que cada componente conexa E_j es completamente invariante bajo R^m . Como $J(R)$ es infinito (Teorema 1.6.1 i)) y está contenido en el complementario de F_0 , existe $j \in \{1, \dots, c\}$ tal que E_j es infinito. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j = 1$. Aplicando la Propiedad de Minimalidad de Julia a $J(R^m)$ (Teorema 1.6.1 iv)), deducimos que $J(R^m)$ está contenido en E_1 y como se cumple que $J(R) = J(R^m)$ (Teorema 1.6.1 iii)), tenemos que

$$J(R) \subset E_1.$$

Finalmente, como para todo $j = 1, \dots, c$ se cumple que $E_j \cap J \neq \emptyset$, aplicando el apartado i) anterior, deducimos que $\partial E_j = J$, para todo $j = 1, \dots, c$. Por tanto, $c = 1$ y F_0 es simplemente conexo.

Como J es infinito y está contenido en el complementario de F_0 , existe $j \in \{1, \dots, c\}$ tal que E_j es infinito. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j = 1$. Aplicando la Propiedad de Minimalidad de $J(R^m)$, deducimos que $J(R^m)$ está contenido en E_1 y como $J(R) = J(R^m)$, tenemos que

$$J(R) \subset E_1.$$

Finalmente, como para todo $j = 1, \dots, c$ se cumple que $E_j \cap J \neq \emptyset$ (pues $J(R)$ es el complementario de F_0), aplicando el apartado i) anterior, deducimos que $\partial E_j \cap J$, para todo $j = 1, \dots, c$. Por tanto, $c = 1$ y F_0 es simplemente conexo.

Para probar iii), observamos que la clausura de F_0 se puede escribir como $F_0 \cup J$ (esto es consecuencia del apartado i) de este teorema). Además, la Proposición 2.1.1 nos asegura que como F_0 es conexo, también lo es su clausura; luego $F_0 \cup J$ es conexo. Aplicando la Proposición 2.1.5, deducimos que cada componente de

$$\mathbb{C}_\infty \setminus (F_0 \cup J) = F \setminus F_0$$

es simplemente conexa, como queríamos probar.

Finalmente, sabemos por el apartado i) de este teorema que $\partial F_0 = J$. Aplicando la Proposición 2.1.4 concluimos que F_0 es simplemente conexo si y solo si J es conexo. \square

Aplicando el Teorema 2.2.1 directamente al caso en el que el conjunto de Fatou es conexo, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.2. *Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Si $F(R)$ es conexo, entonces ocurre una y solo una de las siguientes condiciones:*

- i). $F(R)$ es simplemente conexo y $J(R)$ es conexo.*
- ii). $F(R)$ es infinitamente conexo y $J(R)$ tiene un número infinito de componentes.*

En el caso en el que la función racional sea un polinomio, $R = P$, el conjunto $\{\infty\}$ es completamente invariante, luego también lo es la componente no acotada de $F(P)$. Veamos:

Sea F_∞ la componente conexa de $F(P)$ que contiene al punto del infinito. Se cumple que

$$F_\infty = \{z \in \mathbb{C}_\infty : P^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Tomamos z un punto de F_∞ y $w = P(z)$. Como z pertenece a F_∞ , entonces si $n \rightarrow \infty$, se cumple que $P^n(z) \rightarrow \infty$ y, en particular, $P^n(w) \rightarrow \infty$.

Recíprocamente, si P es polinomio de grado d y tomamos z un punto de $P(F_\infty)$, entonces existen w_1, \dots, w_d preimágenes de z en \mathbb{C}_∞ . Finalmente, como $P^n(z) \rightarrow \infty$, entonces $P^n(w_j) \rightarrow \infty$, para todo $j = 1, \dots, d$. Obtenemos así otra consecuencia directa del Teorema 2.2.1:

Teorema 2.2.3. *Sea F el conjunto de Fatou de un polinomio no lineal. Entonces:*

- i). La componente no acotada del conjunto de Fatou es o bien simplemente conexa o bien infinitamente conexa.*
- ii). Cada componente acotada de F es simplemente conexa.*

2.3. La característica de Euler.

En esta sección introduciremos de manera breve e informal la llamada *característica de Euler*. Sea S una superficie compacta o con borde. Para nosotros, S será la esfera o un subdominio del plano con su frontera, siempre que dicha frontera se pueda escribir como una unión finita de curvas cerradas y simples.

Definición 2.3.1. Sea S como anteriormente. Diremos que T es una triangulación de S si T es una partición de S en una cantidad finita de conjuntos dos a dos disjuntos que llamamos vértices, aristas y caras y que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Cada vértice de T es un punto de S .
- ii) Para cada arista e , existe $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ un homeomorfismo que transforma el intervalo abierto (a, b) en la arista e y los puntos inicial y final, a y b respectivamente, en vértices de T .
- iii) Para cada cara f , sea Q un triángulo cerrado de \mathbb{C} . Existe $\psi: Q \subset \mathbb{C} \rightarrow S$ un homeomorfismo que transforma las aristas y vértices de Q en aristas y vértices de T y tal que f es la imagen por ψ del interior de Q .

Es importante resaltar que una triangulación T de S divide S en conjuntos disjuntos dos a dos, donde cada uno de ellos es un vértice, una arista o una cara.

Definición 2.3.2. Dada una triangulación T de S , llamamos *símplice de T* a cada uno de los subconjuntos de T .

Sea T una triangulación de S . Distinguiremos entre símplices de dimensión 0, 1 y 2 que serán los vértices, aristas y caras de T , respectivamente.

Definición 2.3.3. Sean T una triangulación de S y s un símplice de T de dimensión $m \in \{0, 1, 2\}$. Definimos a *característica de Euler de s* , que denotamos por $\chi(s)$, como

$$\chi(s) = (-1)^m.$$

De la definición anterior se deduce que dadas T una triangulación de S y v , e y f un vértice, una arista y una cara de T respectivamente, entonces

$$\chi(v) = \chi(f) = 1 \quad \text{y} \quad \chi(e) = -1.$$

Podemos extender la Definición 2.3.3 de característica de Euler de un símplice a un conjunto finito de símplices:

Definición 2.3.4. Sean T una triangulación de S y S_0 un subconjunto de S formado por una unión de símplices, $S_0 = \{s_1, \dots, s_r\}$, donde cada s_j tiene dimensión $n_j \in \{0, 1, 2\}$. Definimos la *característica de Euler de S_0* como la suma de las características de Euler de sus símplices, esto es,

$$\chi(S_0) = \sum_{j=1}^r \chi(s_j) = \sum_{j=1}^r (-1)^{n_j}.$$

En particular, si la triangulación T de S está compuesta por F caras, E aristas y V vértices, entonces la característica de Euler de S , $\chi(S)$, es por definición

$$\chi(S) = F - E + V. \quad (2.1)$$

El motivo principal por el que estamos interesados en estudiar la característica de Euler de una superficie es que ésta es un invariante topológico y no depende de la triangulación elegida. De modo que, siempre podremos tomar una triangulación adecuada para nuestros propósitos. A lo largo de estas notas, cuando nos refiramos a una triangulación y a la característica de Euler de un dominio, estaremos asumiendo que la clausura de la región se puede triangular y la propia región se puede escribir como una unión de símlices.

Los cálculos necesarios para obtener la característica de Euler de S se pueden simplificar usando la siguiente idea:

Supongamos que T es una triangulación de S y S_1 y S_2 son dos subconjuntos de S tales que cada uno de ellos está compuesto por la unión de símlices de T . Entonces, se cumple que

$$\chi(S_1 \cup S_2) + \chi(S_1 \cap S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2). \quad (2.2)$$

Veamos esto con algunos ejemplos: la frontera de S , que denotamos por ∂S , es la unión de vértices y aristas (ninguna cara puede cortar a la frontera de S). Luego, si denotamos por S_0 al interior de S , tenemos que

$$\chi(S) = \chi(S_0) + \chi(\partial S).$$

Dada una curva C cerrada y simple, toda triangulación de C estará compuesta por símlices de dimensión 0 y 1; estos son, vértices y aristas. Además, como la curva C es cerrada y sin autointersecciones, se puede escribir como unión de la misma cantidad de vértices y de aristas, luego

$$\chi(C) = 0.$$

Por tanto, si la frontera de una superficie S está compuesta por una unión finita de curvas cerradas y simples disjuntas dos a dos, entonces S y su interior, S_0 , tienen la misma característica de Euler.

Por otro lado, es fácil ver que $\chi(\mathbb{C}_\infty) = 2$ y $\chi(D) = 1$ para cualquier disco D abierto o cerrado de \mathbb{C}_∞ , pues la esfera de Riemann se puede triangular con dos caras, un vértice y una arista y un disco se puede triangular con una cara, un vértice y una arista.

Ahora, supongamos que D es el complementario (en \mathbb{C}_∞) de k discos topológicos cerrados y dos a dos disjuntos, que denotamos por Q_1, \dots, Q_k , tales que la frontera de cada uno de

ellos está compuesta por una curva de Jordan. Tenemos así que la frontera de D tiene k componentes conexas, esto es, $c(D) = k$, y podemos triangular la esfera de modo que tanto D como cada disco Q_1, \dots, Q_k se pueda escribir como unión de símlices. Aplicando la fórmula dada en (2.2) obtenemos que

$$2 = \chi(\mathbb{C}_\infty) = \chi(D) + \sum_{j=1}^k \chi(Q_j).$$

Luego, $\chi(D) = 2 - k$. Observamos que dado un dominio D de la esfera, se verifica:

1. $\chi(D) = 2$ si y solo si $D = \mathbb{C}_\infty$.
2. $\chi(D) = 1$ si y solo si $D \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ es simplemente conexo.
3. $\chi(D) = 0$ si y solo si $D \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ es doblemente conexo.

En los demás casos, $\chi(D) < 0$. En las próximas secciones aplicaremos estas ideas a componentes del conjuntos de Fatou de una función racional y veremos que hay una gran diferencia entre los casos donde $\chi(D) \geq 0$ y $\chi(D) < 0$.

2.4. La fórmula de Riemann-Hurwitz para aplicaciones recubridoras.

Empezamos la sección con la siguiente definición:

Definición 2.4.1. Sean U y V dos subconjuntos de \mathbb{C}_∞ , $f: U \rightarrow V$ una función y m un número natural. Decimos que f es un m -recubrimiento de U en V si para todo $w \in V$, la ecuación

$$f(z) = w$$

tiene exactamente m soluciones en U (contando multiplicidades). Si la aplicación f es abierta, decimos que f es un m -recubrimiento abierto.

El propósito de esta sección es generalizar la Fórmula de Riemann-Hurwitz que aparece en el Teorema 1.2.1 al caso en el que la función racional R esté definida en U y tome valores en V , ambos subdominios de \mathbb{C}_∞ .

En primer lugar, vamos a probar que para cualquier dominio U de la esfera compleja se cumple que

$$\partial R(U) \subset R(\partial U).$$

Sean $w \in \partial R(U)$ y (w_n) una sucesión contenida en $R(U)$ tal que $w_n \rightarrow w$, si $n \rightarrow \infty$. Entonces, existe una sucesión (z_n) contenida en U tal que

$$R(z_n) = w_n,$$

para todo número natural n . Como \bar{U} es compacto, existe $z \in \bar{U}$ tal que, salvo subsucesión, $z_n \rightarrow z$, si $n \rightarrow \infty$. Tenemos así que si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$R(z_n) \rightarrow R(z) \quad \text{y} \quad R(z_n) = w_n \rightarrow w.$$

Concluimos pues que $R(z) = w$. Además, z pertenece a la frontera de U pues, si no, consideramos un abierto que contenga al punto z , V_z , que esté contenido en U . Como R es una aplicación abierta, se cumple que el conjunto $R(U)$ es un abierto de \mathbb{C}_∞ y

$$R(V_z) \subset R(U).$$

Esto da lugar a una contradicción pues el punto $R(z) = w$ pertenece a la frontera de $R(U)$. Finalmente, se cumple que $\partial R(U) \subset R(\partial U)$, como queríamos probar.

Luego, tenemos que si R transforma U en V , entonces

$$\partial V \subset R(\partial U). \tag{2.3}$$

Supongamos ahora que U es una componente conexa de $R^{-1}(V)$ y consideramos el caso en el que R transforma U en V . Supongamos que ζ es un punto de la frontera de U . Entonces, $R(\zeta)$ pertenece a la clausura de V y, como R es una aplicación abierta y U es una componente de $R^{-1}(V)$, concluimos que $R(\zeta)$ pertenece a la frontera de V . Deducimos así que

$$R(\partial U) \subset \partial V.$$

Además, la aplicación $R: U \rightarrow V$ es sobreyectiva. La contención $R(U) \subset V$ es inmediata y si esta contención fue estricta, entonces podríamos unir un punto de $R(U)$ con un punto de $V \setminus R(U)$ mediante una curva contenida en V . Esta curva tendría que cortar a la frontera de $R(U)$ y esta intersección estaría contenida en V (y no en su frontera). Esto entra en contradicción con el hecho de que

$$\partial R(U) \subset R(\partial U) \subset \partial V. \tag{2.4}$$

Concluimos así que si U es una componente conexa de $R^{-1}(V)$, entonces la aplicación $R: U \rightarrow V$ es sobreyectiva y, además,

$$\partial V = R(\partial U).$$

Este hecho es muy interesante pues nos permite cambiar el punto de vista sobre R y es que tomando U una componente conexa de $R^{-1}(V)$, podemos considerar R como una aplicación que transforma U en V de manera sobreyectiva y que, además, respeta las fronteras.

Tomando U y V como antes, el objetivo de esta sección es usar la función racional R para relacionar las características de Euler de las dos regiones U y V como en la Sección 2.3. Estas relaciones contribuirán, a su vez, al estudio de los puntos críticos de R .

Definición 2.4.2. Sean R una función racional y z un punto de la esfera compleja. Se define la deficiencia de R en z , que denotamos por $\delta_R(z)$, como

$$\delta_R(z) = v_R(z) - 1, \quad (2.5)$$

donde $v_R(z)$ es la valencia de R en z .

Esta definición se puede generalizar a conjuntos de la siguiente forma:

Definición 2.4.3. Sean R una función racional y A un subconjunto de \mathbb{C}_∞ . Definimos la deficiencia total de R sobre A , que denotamos por $\delta_R(A)$, como

$$\delta_R(A) = \sum_{z \in A} \delta_R(z).$$

La deficiencia total de R sobre un conjunto A es finitamente aditiva, esto es, dados A y B dos subconjuntos de \mathbb{C}_∞ , entonces se cumple que

$$\delta_R(A \cup B) = \delta_R(A) + \delta_R(B).$$

A lo largo de estas notas y siempre que no de lugar a confusión, evitaremos el subíndice R cuando notemos la deficiencia y usaremos δ en lugar de δ_R .

Observamos que la expresión (2.5) es la que aparece en la Fórmula de Riemann-Hurwitz (Teorema 1.2.1) y se cumple que $\delta_R(z) \neq 0$ solo en una cantidad finita de puntos. Con esta nueva notación, la relación de Riemann-Hurwitz se puede escribir como:

$$\delta(\mathbb{C}_\infty) = 2\text{gr}(R) - 2$$

En particular, si $R = P$ es un polinomio, entonces

$$\delta(\mathbb{C}) = \text{gr}(P) - 1.$$

El siguiente paso es relacionar las nociones de característica de Euler de U y V , $\chi(U)$ y $\chi(V)$; grado de R , $\text{gr}(R)$, y deficiencia total de U , $\delta_R(U)$. Para ello, asumiremos que:

- 1) V es un dominio de \mathbb{C}_∞ cuya frontera está compuesta una cantidad finita de curvas de Jordan dos a dos disjuntas.
- 2) U es una componente de $R^{-1}(V)$.
- 3) No hay valores críticos de R en ∂V .

Con estas hipótesis, podemos probar el siguiente resultado:

Teorema 2.4.4. *Bajo las hipótesis anteriores, existe m un número natural tal que R es un m -recubrimiento definido de U en V y se cumple que*

$$\chi(U) + \delta_R(U) = m\chi(V). \quad (2.6)$$

Antes de demostrar este teorema, vamos a ver algunas consecuencias que se deducen de él. En primer lugar, si tomamos $U = V = \mathbb{C}_\infty$, entonces

$$\chi(U) = \chi(V) = \chi(\mathbb{C}_\infty) = 2$$

y $m = \text{gr}(R)$. Este es el caso de la Fórmula de Riemann-Hurwitz (Teorema 1.2.1).

Por otro lado, si consideramos $V \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ un dominio simplemente conexo, entonces $\chi(V) = 1$ y, aplicando la ecuación dada en (2.6), obtenemos que

$$\delta_R(U) = m - \chi(U) = (m - 1) + (1 - \chi(U)),$$

donde $m - 1$ y $1 - \chi(U)$ son dos números enteros no negativos, pues $\text{gr}(R) \geq 1$ y U es una componente de $R^{-1}(V)$ que es distinta de \mathbb{C}_∞ , luego $\chi(U) < 2$. De modo que

- i) O bien $\delta_R(U) > 0$, esto es,

$$\delta_R(U) = \sum_{z \in U} \delta_R(z) > 0.$$

En este caso, existe $z \in U$ tal que $v_R(z) > 1$ y R tiene puntos críticos en U .

- ii) O bien $\delta_R(U) = 0$. Entonces, $m = \chi(U)$ y $m - 1$ y $1 - \chi(U)$ son enteros no negativos. Por tanto, $m = \chi(U) = 1$, U es simplemente conexo y R es un homeomorfismo definido de U en V .

De hecho, si V es simplemente conexo y $R^{-1}(V)$ es conexo, entonces $U = R^{-1}(V)$ y $m = \text{gr}(R)$ y, aplicando la expresión (2.6) del Teorema 2.4.4 obtenemos que

$$\delta_R(U) = m - \chi(U).$$

Esto es,

$$\delta_R(R^{-1}(V)) = (m - 1) + (1 - \chi(R^{-1}(V))).$$

Como $V \subsetneq \mathbb{C}_\infty$, entonces $R^{-1}(V) \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ y, por tanto, se cumple que

$$\chi(R^{-1}(V)) \leq 1$$

y se da la igualdad si y solo si $R^{-1}(V)$ es simplemente conexo. De modo que,

$$1 - \chi(R^{-1}(V)) \geq 0.$$

Concluimos así que

$$\delta_R(R^{-1}(V)) \geq d - 1,$$

donde $d = \text{gr}(R)$ y $\delta_R(R^{-1}(V)) = d - 1$ si y solo si $R^{-1}(V)$ es simplemente conexo. Estas ideas conforman la prueba del siguiente resultado:

Corolario 2.4.5. *Sea R una función racional de grado d . Supongamos que V es un dominio simplemente conexo y $R^{-1}(V)$ es conexo. Entonces, se cumple que*

$$\delta_R(R^{-1}(V)) \geq d - 1,$$

donde la igualdad se tiene si y solo si $R^{-1}(V)$ es simplemente conexo.

Demostración del Teorema 2.4.4. En primer lugar, observamos que U es una componente del complementario de $R^{-1}(\partial V)$ en \mathbb{C}_∞ , pues por hipótesis tenemos que U es una componente de $R^{-1}(V)$ y al principio de la sección hemos probado que R transforma U en V y ∂U en ∂V de manera sobreyectiva.

Ahora, vamos a probar la primera parte del teorema: existe un número natural m tal que R es un m -recubrimiento de U en V . Esto es, queremos probar que para todo $w \in V$, la ecuación dada por

$$R(z) = w \tag{2.7}$$

tiene exactamente m soluciones en U (contando multiplicidades). Sea w un punto de V , denotamos por $N(w)$ al número de soluciones de la ecuación (2.7) en U . Vamos a ver que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto N(w) \end{aligned}$$

es continua y, por tanto, es constante en V :

Se cumple que, para todo $\zeta_j \in U$ tal que $R(\zeta_j) = w$, existe un abierto N_j que contiene a ζ_j tal que R es un k -recubrimiento de N_j en $R(N_j)$, donde k es la valencia de R en el punto ζ_j . Consideramos

$$E = \bar{U} \setminus \bigcup_j N_j.$$

Este es un conjunto compacto y no contiene ningún punto z de U tal que $R(z) = w$. De modo que, $R(E)$ es también un conjunto compacto y la distancia de éste a w es estrictamente positiva. Por tanto, existe \mathcal{N} un entorno de w tal que

$$\mathcal{N} \cap R(E) = \emptyset.$$

Además, para cada punto w_1 de \mathcal{N} , las soluciones en U de la ecuación dada por $R(z) = w_1$ pertenecen al conjunto $\cup_j N_j$. Por tanto, $N(w_1) = N(w)$. Deducimos así que la función $w \mapsto N(w)$ es constante en \mathcal{N} y, por tanto, es continua en w . Como V es conexo, concluimos que existe un número natural m tal que R es un m -recubrimiento de U en V .

El siguiente paso es generalizar este resultado al caso en el que R transforma ∂U en ∂V . Esto es, queremos probar que R también define un m -recubrimiento entre ∂U y ∂V . Para ello, tomamos $\zeta \in \partial V$ y consideramos z_1, \dots, z_d las d preimágenes de ζ , donde d denota el grado de R . Observamos que ζ tiene exactamente d preimágenes, pues la hipótesis 3) nos asegura que no hay valores críticos de R en ∂V . Como ζ pertenece a la frontera de V y R transforma ∂U en ∂V de forma sobreyectiva, entonces $z_j \notin U$, para todo $j = 1, \dots, d$. Podemos reetiquetar así las preimágenes de ζ como z_1, \dots, z_t a las primeras t -preimágenes de ζ que pertenecen a la frontera de U ; y z_{t+1}, \dots, z_d , aquellas preimágenes de ζ que no pertenecen a la clausura de U .

Ahora, tomamos N un entorno de ζ y, para cada $j = 1, \dots, d$, tomamos N_j un entorno de z_j satisfaciendo las siguientes propiedades:

- 1) Para todo $i \neq j$, $N_i \cap N_j = \emptyset$.
- 2) Para todo $j \in \{t+1, \dots, d\}$, se cumple que $U \cap N_j = \emptyset$.
- 3) La función racional R es un homeomorfismo de N_j en N y denotamos por R_j^{-1} a cada inversa.
- 4) El conjunto $N \cap V$ es conexo.

La propiedad 4) es consecuencia de una propiedad local de curvas de Jordan. Sea $j \in \{1, \dots, t\}$. Entonces, se cumple que

$$N_j \cap U \neq \emptyset,$$

pues z_j pertenece a la frontera de U y la imagen por R de cada $N_j \cap U$ está contenida en $N \cap V$. Deducimos así que $R_j^{-1}(N \cap V)$ es un subconjunto conexo de $R_j^{-1}(V)$. Como $R^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, concluimos que para todo $j \in \{1, \dots, t\}$ se cumple que

$$R_j^{-1}(N \cap V) \subset U.$$

Veamos también que $m = t$. Sea α un punto de $N \cap V$. Acabamos de ver que la anti-imagen de un punto de $N \cap V$ pertenece a U . En particular, $R_j^{-1}(\alpha)$ pertenece a U para cada $j \in \{1, \dots, t\}$. Por tanto, $t \leq m$. Por otro lado, si $j \in \{t+1, \dots, d\}$, entonces $R_j^{-1}(\alpha)$ no pertenece a U ; luego $m \leq t$. Concluimos así que $m = t$.

Finalmente, queremos probar que la frontera de U está compuesta por una unión finita de curvas de Jordan dos a dos disjuntas. Tenemos por hipótesis que ∂V está compuesta por una cantidad finita de curvas de Jordan y que nos hay valores críticos de R en V (hipótesis 1) y 3)). Tomamos ζ un punto de la frontera de V . Entonces, ζ pertenece a una de las curvas de Jordan que componen la frontera de V , que denotamos por γ , y consideramos $R_1^{-1}, \dots, R_m^{-1}$ las m ramas de R^{-1} definidas en un entorno de ζ y tales que para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, se tiene que

$$R_j^{-1}(\zeta) = z_j,$$

donde cada z_j pertenece a la frontera de U y es una preimagen de ζ por R . Además, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, la rama R_j^{-1} de R^{-1} se puede prolongar analíticamente a lo largo de γ , pues γ está contenida en la frontera de V y no hay valores críticos de R en ∂V . Esta prolongación induce una permutación en el conjunto $\{1, \dots, m\}$. De la hipótesis 3) deducimos que las prolongaciones analíticas de las ramas R_j^{-1} , para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ que hemos tomado transforman la curva γ contenida en la frontera de V en curvas cerradas y simples de la frontera de U . Concluimos así que existe k un número natural tal que R es un k -recubrimiento de cada una de esas curvas en curva contenida en la frontera de V , esto es, R define un k -recubrimiento de ∂U en ∂V .

Ya solo falta probar la expresión dada en 2.6. Para ello, consideramos T una triangulación de la clausura de V tal que todos los valores críticos de R en V son vértices de T . Sean f , e y v el número de caras, aristas y vértices respectivamente de T . Entonces, aplicando la fórmula dada en (2.1) tenemos que

$$\chi(V) = f - e + v.$$

Vamos a probar que R induce una triangulación T_0 de la clausura de U . Esto es consecuencia de que R es un m -recubrimiento definido de U en V . Para hallarla, tomaremos las imágenes inversas de los símlices de T . De este modo, los vértices de T_0 se corresponderán

con las imágenes inversas de los vértices de T (estos nuevos vértices están contenidos en la clausura de U). Además, T_0 tiene exactamente $mv - \delta_R(U)$ vértices, pues si w es un vértice de T , entonces la ecuación dada por

$$R(z) = w \tag{2.8}$$

tiene $m - \delta_R(z)$ soluciones distintas en U . Como hemos escogido una triangulación T de la clausura de V tal que todos los valores críticos de R en V son vértices de T , deducimos que

$$\sum_{\substack{z \in U: \\ R(z)=w}} (m - \delta_R(z)) = mv - \sum_{z \in U} \delta_R(z) = mv - \delta_R(U)$$

es el número de vértices de T_0 .

Por otro lado, cada arista de T es transformada por R^{-1} en una arista de T_0 y, como no hay valores críticos de R en ninguna arista de T (todos los valores críticos están en los vértices de T) la ecuación (2.8) tiene exactamente m soluciones distintas. Deducimos así que T_0 tiene exactamente me aristas.

Razonamos cuál es el número de caras de T_0 de manera análoga al caso anterior: cada cara F de T es un dominio simplemente conexo. El Teorema de Monodromía nos asegura que cada rama de R^{-1} es univaluada en F y, además, cada rama de R^{-1} transforma F en un subdominio simplemente conexo de U . Deducimos así que T_0 tiene exactamente mf caras. Finalmente, se cumple que

$$\chi(U) = mf - me + (mv - \delta_R(U)) = m(f - e + v) - \delta_R(U) = m\chi(V) - \delta_R(U),$$

terminando así la prueba del teorema. □

Terminamos la sección con una consecuencia directa del Teorema 2.4.4. Recordamos que si D es un dominio de la esfera compleja acotado por $c(D)$ curvas de Jordan, entonces

$$\chi(D) = 2 - c(D). \tag{2.9}$$

Proposición 2.4.6. *Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 2.4.4, se verifica la desigualdad:*

$$c(U) \geq c(V) \tag{2.10}$$

Demostración. Si $c(U) \geq c(V)$, entonces, aplicando la fórmula (2.9) deducimos que

$$\chi(U) = 2 - c(U) \leq 2 - c(V) = \chi(V).$$

De modo que, probar la desigualdad del enunciado, (2.10), es equivalente a probar que

$$\chi(U) \leq \chi(V).$$

Para ello, distinguimos los siguientes casos:

1. Si $\chi(V) = 2$, entonces $V = \mathbb{C}_\infty$ y como $U \subset \mathbb{C}_\infty = V$, entonces $\chi(U) \leq 2 = \chi(V)$.
2. Si $\chi(V) = 1$, entonces $\chi(U) \leq \chi(V)$ pues si no tendríamos que $\chi(U) = 2$. En ese caso, U y, por tanto V serían la esfera compleja completa, con $\chi(V) = 2$, llegando así a una contradicción.
3. Si $\chi(V) \leq 0$, el Teorema 2.4.4 nos asegura que

$$\chi(U) \leq \chi(U) + \delta(U) = m\chi(U) \leq \chi(V),$$

pues $\delta(U) \geq 0$ y $m \leq 1$.

□

2.5. Aplicaciones entre componentes del conjunto de Fatou.

En la Sección 2.3 hemos definido la característica de Euler de un dominio D de la esfera compleja cuya frontera está compuesta por una cantidad finita de curvas de Jordan. Sin embargo, la frontera de D puede ser mucho más complicada; es posible que ni siquiera podamos triangular la clausura de D . Estos casos (cuando D sea una componente del conjunto de Fatou), serán los que nos resulten de mayor interés.

Sea D un subdominio de \mathbb{C}_∞ . En esta sección vamos a definir la característica de Euler de D , que denotamos por $\chi(D)$, como el valor del límite de la característica de Euler de subdominios “suaves” que recorran D . De este modo, podremos usar la característica de Euler como herramienta para estudiar cómo transforma una función racional R una componente del conjunto de Fatou en otra.

Empezaremos estudiando subdominios de \mathbb{C}_∞ . En la definición que aparece a continuación vamos a determinar la noción de subdominio “suave” que vamos a utilizar.

Definición 2.5.1. *Sea D un dominio de la esfera compleja. Un subdominio Ω de D se dice subdominio regular de D si satisface las siguientes condiciones:*

- i) Ω está acotado por una cantidad finita de curvas de Jordan disjuntas dos a dos, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tales que, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, la curva γ_j está contenida en D .

ii) El complementario de Ω en \mathbb{C}_∞ está compuesto por n discos topológicos, W_1, \dots, W_n , acotados por las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ respectivamente y tales que

$$(\mathbb{C}_\infty \setminus D) \cap W_j \neq \emptyset,$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 2.5.2. De la definición anterior se deduce que la región Ω_1 dada por

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

es un subdominio regular de \mathbb{C} , pues está acotado por una única curva de Jordan, que denotamos por γ_1 ; $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega_1$ es un disco topológico acotado por γ_1 y se cumple que

$$(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega_1) \neq \emptyset.$$

Sin embargo, la región Ω_2 definida como $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ no es un subdominio regular de \mathbb{C} , pues

$$(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| < 1\}) = \emptyset.$$

Observamos que la característica de Euler está definida para todo subdominio regular Ω de D . A su vez, si un subdominio Ω de D satisface la condición i) pero no ii), siguiendo con la notación anterior, podemos construir fácilmente un subdominio regular Ω_0 de D como:

$$\Omega_0 = \Omega \cup \left(\bigcup_{k \in K} (W_k \cup \gamma_k) \right),$$

siendo $K = \{k \in \mathbb{N} : W_k \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus D) = \emptyset\}$. Se cumple que la conectividad de Ω es mayor o igual que la de Ω_0 y, por tanto,

$$\chi(\Omega_0) = 2 - c(\Omega_0) \geq 2 - c(\Omega) = \chi(\Omega).$$

Sea D un dominio de la esfera compleja. Nuestro siguiente objetivo es escribir D como límite de subdominios regulares de D .

Lema 2.5.3. Sea D un subdominio propio de la esfera compleja. Entonces:

- i) Cualquier subconjunto compacto de D está contenido en algún subdominio regular de D .
- ii) Si Ω_1 y Ω_2 son subdominios regulares de D , entonces existe un subdominio regular Ω de D que contiene a ambos.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\infty \in D$ (el razonamiento es válido tomando cualquier otro punto $z \in D$). Sea n un número entero positivo. Consideramos un recubrimiento $\{Q_n^\alpha\}_\alpha$ de la esfera compleja formado por cuadrados cerrados (es decir, cuadrados con sus aristas) de diámetro $1/2^n$, formando así una rejilla. Sea K_n la unión de los cuadrados cerrados que contiene algún punto del complementario de D , esto es

$$K_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} Q_n^\alpha,$$

donde $\Lambda = \{\alpha: (\mathbb{C}_\infty \setminus D) \cap Q_n^\alpha \neq \emptyset\}$; y sea D_n la componente conexa del complementario de K_n en \mathbb{C}_∞ que contiene al punto del infinito. Se cumple que, para cada número natural n , $K_{n+1} \subset K_n$, luego $D_n \subset D_{n+1}$. Además, $\cup_n D_n = D$ y, para cada n , D_n es un abierto conexo acotado por una curva de Jordan, que denotamos por γ_n , contenida en D y $\mathbb{C}_\infty \setminus D_n$ está compuesto por un disco topológico acotado por γ_n . Tenemos así que, para cada número natural n , D_n es un subdominio regular de D . De modo que $\{D_n\}_n$ forma una sucesión creciente de subdominios regulares de D cuya unión es D .

Con esto, tenemos que dado un compacto K contenido en D , la familia $\{D_n\}$ es un recubrimiento abierto de K . Como K es compacto, puede ser recubierto por una cantidad finita de D_n y como la sucesión $\{D_n\}$ es creciente, existe un número natural m tal que K está contenido en D_m . Concluimos así que cualquier compacto contenido en D está contenido en un subdominio regular de D , terminando la prueba de i).

Para probar ii) observamos que si Ω_1 y Ω_2 son subdominios regulares de D , entonces la unión de las clausuras de Ω_1 y Ω_2 es un subconjunto compacto de D . Aplicando el apartado i), concluimos que la unión de las clausuras de Ω_1 y Ω_2 está contenida en algún subdominio regular de D .

□

A continuación, vamos a probar que $\chi(\Omega)$ es una función monótona de la clase $\mathcal{R}(D)$ compuesta por todos los subdominios regulares de D . De este modo, existirá el límite de $\chi(\Omega)$ (que puede ser incluso $-\infty$) cuando Ω se aproxime a D en $\mathcal{R}(D)$.

Lema 2.5.4. *La característica de Euler χ es una función decreciente en $\mathcal{R}(D)$. Es decir, si Ω_1 y Ω_2 son subdominios regulares de D tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, entonces $\chi(\Omega_2) \leq \chi(\Omega_1)$.*

Demostración. Sean W_1, \dots, W_n y V_1, \dots, V_m las componentes del complementario de Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Como $\Omega_1 \subset \Omega_2$, se cumple que

$$V_1 \cup \dots \cup V_m \subset W_1 \cup \dots \cup W_n.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, tomamos z_j en $W_j \setminus D$. Como z_j no pertenece a D , existe un número entero $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que z_j pertenece a V_k . Luego, como V_k y W_j son conjuntos conexos, entonces V_k está contenido en W_j . Deducimos así que cada W_j contiene algún V_k y, por tanto, se cumple que

$$c(\Omega_2) \geq c(\Omega_1),$$

donde $c(\Omega_j)$ es la conectividad de Ω_j , $j = 1, 2$. Aplicando la fórmula dada en (2.9), concluimos que

$$\chi(\Omega_2) = 2 - c(\Omega_2) \leq 2 - c(\Omega_1) = \chi(\Omega_1).$$

□

El Lema 2.5.3 afirma que la clase $\mathcal{R}(D)$ de subdominios regulares de D es una red y el Lema 2.5.4 prueba la monotonía de la función $\chi: \mathcal{R}(D) \rightarrow \{2, 1, 0, \dots, -\infty\}$. Ahora sí, podemos generalizar la definición de característica de Euler de un subdominio de \mathbb{C}_∞ :

Definición 2.5.5. *Sea D un subdominio de \mathbb{C}_∞ . Se define la característica de Euler de D como:*

$$\chi(D) = \inf\{\chi(\Omega) : \Omega \text{ es un subdominio regular de } D\}.$$

Esto es, o bien

1. $\chi(D) = -\infty$ y existen subdominios regulares Ω_n tales que $\chi(\Omega_n) \rightarrow -\infty$ o, equivalentemente, $c(\Omega_n) \rightarrow +\infty$; o bien
2. Existe un subdominio regular Ω_0 de D tal que

$$\chi(\Omega_0) = \chi(D) > -\infty.$$

Aplicando el Lema 2.5.4, deducimos que si Ω es un subdominio regular que contiene a Ω_0 , entonces

$$\chi(D) \geq \chi(\Omega) \geq \chi(\Omega_0) = \chi(D)$$

y, por tanto, $\chi(\Omega) = \chi(D)$. Observamos que, si $\chi(D)$ es finito, siempre existe un subdominio regular Ω_0 de D tal que $\chi(\Omega_0) = \chi(D)$, pues la función χ toma valores en los números enteros.

Si D es un dominio simplemente conexo, entonces su frontera, ∂D , es conexa y el complementario de cada subdominio regular Ω de D tiene una única componente conexa (Proposiciones 2.1.4 y 2.1.5). Por tanto, $\chi(D) = 1$ para un dominio D simplemente conexo,

independientemente de la naturaleza de ∂D . Generalizando lo anterior, si D es un subdominio de \mathbb{C}_∞ que tiene conectividad k , entonces $\chi(\Omega) = 2 - k$ para todo subdominio regular suficientemente grande de Ω y, por tanto, $\chi(D) = 2 - k$, de nuevo, independientemente de la naturaleza de ∂D .

Llegamos así al siguiente resultado:

Teorema 2.5.6. *Sean F_0 y F_1 componentes del conjunto de Fatou F de una función racional R y supongamos que $R(F_0) \subset F_1$. Entonces, existe un entero m tal que R es un m -recubrimiento de F_0 en F_1 y*

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(F_1). \quad (2.11)$$

Definición 2.5.7. *Llamamos relación de Riemann-Hurwitz a la igualdad dada en (2.11).*

Demostración del Teorema 2.5.6. En primer lugar, es fácil ver que como $R(F_0) \subset F_1$, se da la igualdad y, entonces, F_0 es una componente de $R^{-1}(F_1)$. Como R es localmente un k -recubrimiento abierto, el número $N(w)$ de soluciones de la ecuación $R(z) = w$ en F_0 es una función continua y, por tanto, constante para todo $w \in F_1$. Deducimos así que existe un número natural m tal que R es un m -recubrimiento de F_0 en F_1 .

La prueba de la igualdad dada en la expresión (2.11) se basa en la construcción de subdominios regulares Ω_0 y Ω_1 de F_0 y F_1 respectivamente. Tomamos un punto w en F_1 y construimos un subdominio regular Ω_0 de F_0 que contenga:

- i) Todos los puntos críticos de R que pertenezcan a F_0 .
- ii) Todas las pre-ímagenes z_1, \dots, z_m de w que pertenezcan a F_0 .

A su vez, tomamos un subdominio regular Ω_1 de F_1 que contenga a la imagen por R de la clausura de Ω_0 , $R(\overline{\Omega_0})$. Este conjunto es compacto pues es imagen de un compacto por una aplicación continua. Entonces, cada componente de $R^{-1}(\Omega_1)$ está contenida en F y como no hay valores críticos de R en $\partial R^{-1}(\Omega_1)$ (pues los puntos críticos de R pertenecen a Ω_0), el Teorema 2.4.4 nos asegura que R es un m -recubrimiento de cada componente de $R^{-1}(\Omega_1)$ en Ω_1 . Además, una de las componentes Ω_2 de $R^{-1}(\Omega_1)$ contiene a Ω_0 que es un conjunto conexo que satisface a condición ii). Deducimos así que Ω_2 es la única componente de $R^{-1}(\Omega_1)$ tal que $\Omega_2 \cap F_0 \neq \emptyset$ y se cumple que

$$\Omega_0 \subset \Omega_2 = R^{-1}(\Omega_1) \cap F_0 = F_0.$$

Vamos a probar que Ω_2 es un subdominio regular de F_0 . Para ello, basta probar que cada componente del complementario de $\overline{\Omega_2}$ corta al conjunto de Julia de R . Tomamos pues

W una componente del complementario de la clausura de Ω_2 . Ésta está acotada por una curva de Jordan γ (que separa W de Ω_2). Luego, hay puntos en W (y cerca de γ) que toman valores en alguna componente B contenida en el complementario de la clausura de Ω_1 en \mathbb{C}_∞ . Como $R^{-1}(B) \cap \Omega_2 = \emptyset$, entonces W contiene alguna componente, que denotamos por V , de $R^{-1}(B)$. Sin embargo, como Ω_1 es una subregión regular de F_1 , B contiene algún punto que no pertenece a F_1 y, por tanto, B contiene algún punto de $J(R)$. Deducimos así que tanto V como W cortan a $J(R)$ y, por tanto, Ω_2 es una subregión regular de F_0 .

Tenemos pues que $\Omega_0 \subset \Omega_2 \subset F_0$ y $\Omega_1 \subset F_1$. Aplicando el Lema 2.5.4 deducimos que

$$\chi(\Omega_0) \geq \chi(\Omega_2) \geq \chi(F_0) \quad \text{y} \quad \chi(\Omega_1) \geq \chi(F_1).$$

Como todos los puntos críticos de R que pertenecen a F_0 están en Ω_0 (como hemos visto en i)), entonces

$$\delta_R(\Omega_0) = \delta_R(\Omega_2) = \delta_R(F_0).$$

Aplicando el Teorema 2.4.4, obtenemos

$$\chi(\Omega_2) + \delta_R(F_0) = m\chi(\Omega_1). \quad (2.12)$$

Para todo α tal que $\alpha > \chi(F_0)$, tomamos Ω_0 tal que $\alpha > \chi(\Omega_0)$. Entonces, $\alpha > \chi(\Omega_2)$ y se cumple que

$$\alpha + \delta_R(F_0) \geq m\chi(\Omega_1) \geq m\chi(F_1).$$

Tomando límite cuando $\alpha \rightarrow \chi(F_0)$, llegamos a

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \geq m\chi(F_1).$$

Por otro lado, tomamos cualquier Ω_0 subdominio regular de F_0 satisfaciendo las hipótesis anteriores. Entonces, para todo Ω_1 contenido en F_1 tal que $\Omega_1 = R^{-1}(\Omega_2) \supset \overline{\Omega_0}$, se cumple que

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \leq \chi(\Omega_2) + \delta_R(F_0) = m\chi(\Omega_1).$$

Ahora, tomamos β tal que $\beta > \chi(F_1)$. Existe $\Omega_1 < \beta$ tal que

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \leq m\chi(\Omega_1) < m\beta.$$

Tomando límite cuando $\beta \rightarrow \chi(F_1)$, deducimos que

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \leq m\chi(F_1).$$

Concluimos así que

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(F_1).$$

□

2.6. El número de componentes del conjunto de Fatou.

Supongamos que R es una función racional de grado $d \geq 2$. Queremos obtener información acerca del número de componentes del conjunto de Fatou de R . En primer lugar, dado un número entero k mayor o igual que dos, supongamos que F_1, \dots, F_k , son componentes completamente invariantes de $F(R)$. Como k es mayor o igual que dos, aplicando el apartado iii) del Teorema 2.2.1 a cada componente F_j , deducimos que F_j es simplemente conexa, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ y, por tanto, $\chi(F_j) = 1$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Aplicando el Teorema 2.5.6 a cada componente F_j , obtenemos que

$$\delta_R(F_j) = (d-1)\chi(F_j) = d-1,$$

para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Con esto y con la relación de Riemann-Hurwitz deducimos que

$$k(d-1) = \sum_{j=1}^k \delta_R(F_j) \leq \delta_R(\mathbb{C}_\infty) = 2d-2$$

y, por tanto, $k \leq 2$. Acabamos de probar el siguiente resultado:

Teorema 2.6.1. *El conjunto de Fatou de una función racional contiene, a lo más, dos componentes completamente invariantes y, si hay dos, entonces cada una de ellas es simplemente conexa.*

En el siguiente ejemplo observamos que ambas posibilidades planteadas en el Teorema 2.6.1 ocurren:

Ejemplo 2.6.2. 1) Si $R(z) = z^2 - 2$, entonces $J(R) = [-2, 2]$ y

$$F(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$$

tiene una única componente conexa que es completamente invariante.

2) Si $R(z) = z^2$, entonces $J(R)$ es la circunferencia unidad, que denotamos por C , y

$$F(R) = \mathbb{C}_\infty \setminus C$$

tiene dos componentes conexas que son completamente invariantes y simplemente conexas: el disco unidad, que denotamos por \mathbb{D} , y $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

El Teorema 2.6.1 no excluye la posibilidad de que $F(R)$ no pueda tener más componentes además de las posibles dos componentes completamente invariantes. Sin embargo, el siguiente resultado establece que si $F(R)$ tiene dos componentes conexas completamente invariantes, entonces esas son las únicas componentes de $F(R)$. Podemos consultar su prueba en [9, p. 200-201].

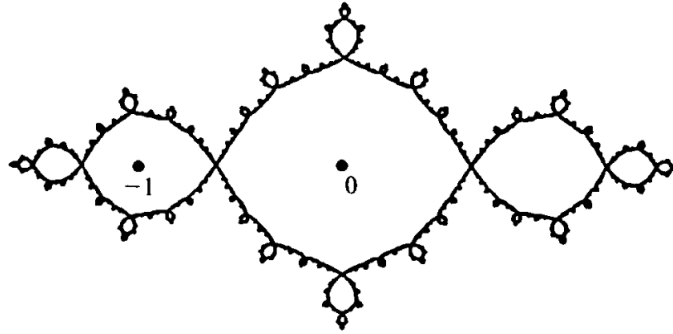


Figura 2.1: Conjunto de Julia del polinomio $P(z) = z^2 - 1$.

Teorema 2.6.3. *Si el conjunto de Fatou de una función racional R tiene dos componentes conexas completamente invariantes, entonces esas son las dos únicas componentes conexas de $F(R)$.*

A continuación, se incluyen dos ejemplos de funciones racionales cuyos conjuntos de Fatou de una función racional.

Ejemplo 2.6.4. 1) *El conjunto de Julia de la función racional R dada por:*

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}$$

es la esfera compleja completa. Por tanto, $F(R) = \emptyset$. Este ejemplo fue dado en 1918 por el matemático francés Samuel Lattès.

2) *El conjunto de Fatou del polinomio P dada por:*

$$P(z) = z^2 - 1$$

tiene infinitas componentes conexas, como podemos observar en la Figura 2.1.

Teorema 2.6.5. *El conjunto de Fatou de una función racional R tiene 0, 1, 2 o infinitas componentes conexas.*

Demostración. Si $\text{gr}(R) = 1$, es fácil ver que entonces F tiene o bien 1 o bien 2 componentes conexas, satisfaciendo así el teorema.

Para $\text{gr}(R) \geq 2$, hemos visto ejemplos donde $F(R)$ tiene 0, 1, 2 e infinitas componentes conexas (como los conjuntos de Fatou vistos en los ejemplos 2.6.2 y 2.6.4). Vamos a probar que esas son las únicas posibilidades:

Supongamos que

$$F(R) = \bigcup_{j=1}^k F_j,$$

donde $k \in \mathbb{N}$. El Lema 1.3.4 nos asegura que para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe un número natural m_j tal que F_j es completamente invariante bajo R^{m_j} . Por tanto, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, la componente F_j es completamente invariante bajo $R^{m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k}$. Si $k > 2$, llegaríamos a una contradicción, pues el Teorema 2.6.1 nos asegura que

$$F\left(R^{\prod_{j=1}^k m_j}\right)$$

tiene, a lo más, dos componentes conexas completamente invariantes. Concluimos así que $k \leq 2$, como queríamos probar. □

2.7. Componentes del conjunto de Julia.

En esta sección supondremos que R es una función racional de grado $d \geq 2$. Se cumple que $J(R)$ no tiene puntos aislados (Teorema 1.6.1 v)) y, si J es disconexo, entonces tiene una cantidad infinita de componentes conexas. Veamos esto último:

Supongamos que $J(R)$ tiene una cantidad finita de componentes conexas, J_1, \dots, J_n . Como $J(R)$ es infinito, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que J_k es infinito. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $k = 1$. Aplicando la Proposición 1.3.4, deducimos que existe m un entero positivo tal que cada componente J_k es completamente invariante bajo R^m , para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. La Propiedad de Minimalidad de Julia (Teorema 1.6.1 iv)) establece que $J(R)$ es el conjunto cerrado y completamente invariante más pequeño que contiene, al menos, tres puntos. Concluimos así que

$$J(R) = J(R^m) = J_1$$

y, por tanto, $J(R)$ es conexo.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización más fuerte:

Teorema 2.7.1. *Si $J(R)$ es un conjunto disconexo, entonces tiene una cantidad no numerable de componentes y cada punto de $J(R)$ es un punto de acumulación de infinitas componentes conexas distintas de $J(R)$.*

Antes de probar el Teorema 2.7.1, vamos a enunciar el siguiente resultado que nos será de utilidad y cuya prueba podemos consultar en [9, p. 96-98].

Lema 2.7.2. *Sea K un subconjunto compacto y conexo del plano complejo. Entonces, $R^{-1}(K)$ tiene, a lo más, d componentes y cada una de ellas es transformada por R en K .*

Demostración del Teorema 2.7.1. Sea K el conjunto de puntos de $J(R)$ que son puntos de acumulación de infinitas componentes de $J(R)$. Nuestro primer objetivo es usar la Propiedad de Minimalidad de Julia (Teorema 1.6.1 iv)) para probar que $J(R) \subset K$ y deducir así que $J(R) = K$.

En primer lugar, vemos que K no es el conjunto vacío: como $J(R)$ es disconexo, el Teorema 2.7.1 nos asegura que tiene infinitas componentes conexas. Sea $(z_n)_n$ una sucesión de elementos de $J(R)$ tal que z_n y z_m pertenecen a una componente distinta de $J(R)$ si $n \neq m$. Como $J(R)$ es un conjunto compacto, existe $z \in J(R)$ tal que, tomando subsucesión si es necesario, $z_n \rightarrow z$ si $n \rightarrow \infty$. Acabamos de encontrar un punto z donde infinitas componentes de $J(R)$ se acumulan. Deducimos así que z pertenece a K . Además, K es cerrado.

Ahora, tomamos w un punto de $J(R)$ que no esté en K . Existe U un abierto de \mathbb{C}_∞ tal que w pertenece a U y U solo corta a una cantidad finita de componentes de $J(R)$, que denotamos por J_1, \dots, J_n . Como además $J(R)$ es un conjunto completamente invariante (Teorema 1.3.3), se cumple que

$$R(U) \cap J = \left(\bigcup_{k=1}^n R(U \cap J_k) \right) \cap J \subset \left(\bigcup_{k=1}^n R(J_k) \right) \cap J = \bigcup_{k=1}^n R(J_k),$$

siendo $J = J(R)$. Luego, $R(U)$ únicamente corta a una cantidad finita de componentes de $J(R)$. Deducimos así que si $w \in J(R) \setminus K$, entonces $R(w) \in J(R) \setminus K$ y, por tanto, $R^{-1}(K) \subset K$.

Como $K \subset J(R)$ todos los puntos de K son no-excepcionales (pues los puntos excepcionales de una función racional R de grado mayor o igual que dos pertenecen a $F(R)$) y, por tanto, el Teorema 1.5.4 nos asegura que su órbita hacia atrás es infinita. Como $R^{-1}(K) \subset K$, deducimos que K es infinito.

Ahora, tomamos $\zeta \in K$. Entonces, existe una sucesión de componentes distintas de $J(R)$, $\{J_n\}$ que se acumulan en ζ . El Lema 2.7.2 nos asegura que, a lo más, hay d componentes de $\{J_n\}$ que se pueden transformar por R en una componente dada de $J(R)$. Como además R es continua en ζ , deducimos que sigue habiendo infinitas componentes de $J(R)$ que se acumulan en $R(\zeta)$ y, por tanto, $R(\zeta)$ pertenece a K . Concluimos así que $R(K) \subset K$ y $J(R) = K$.

Ya solo nos falta ver que $J(R)$ tiene una cantidad no numerable de componentes conexas. Razonamos por reducción al absurdo:

Supongamos que $J(R)$ tiene una cantidad numerable de componentes, J_1, \dots, J_n, \dots . Entonces, $J(R)$ es un espacio métrico compacto que es unión numerable de J_n . Aplicando el Teorema de las Categorías de Baire (que podemos consultar en [19, p. 97]) deducimos que $J(R)$ no es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Tenemos que, en particular, la clausura de J_1 tiene interior no vacío respecto de la topología relativa de $J(R)$. Sin embargo, J_1 es una componente de $J(R)$ cerrada en $J(R)$, luego, el interior de J_1 tampoco es vacío en $J(R)$. Acabamos de llegar a contradicción pues hemos probado que todo punto de $J(R)$ es punto de acumulación de infinitas componentes de $J(R)$. Finalmente, concluimos que $J(R)$ tiene una cantidad no numerable de componentes conexas.

□

Capítulo 3

Puntos periódicos

Sea R una función racional definida sobre la esfera de Riemann. El objetivo de este capítulo es estudiar los puntos fijos y los puntos periódicos de R y determinar el papel que desempeñan en la teoría de iteración. Una herramienta fundamental va a ser la conjugación con una función analítica, pues conjugando con una función analítica adecuada, conseguiremos reemplazar la función original por una función lineal y esto nos permitirá estudiar el comportamiento dinámico cerca de los puntos fijos.

3.1. Clasificación de los puntos periódicos.

En el Anexo 3.7 explicamos que un punto fijo ζ de R se clasifica según el llamado *multiplicador* de R en ζ , que denotamos por $m(R, \zeta)$. Como éste es invariante por conjugación con una transformación de Möbius, podemos suponer sin pérdida de generalidad que ζ es un punto de \mathbb{C} y, entonces, el multiplicador de R en ζ es

$$m(R, \zeta) = R'(\zeta),$$

esta es la derivada de R en el punto ζ .

Antes de comenzar dando la primera definición de la sección, es importante destacar que la clasificación de los puntos fijos es un problema local que se aplica a cualquier función analítica, no solo a funciones racionales y, en particular, se aplica a la inversa local (cuando ésta exista) de una función racional.

Definición 3.1.1. *Sea ζ un punto de \mathbb{C} que es un punto fijo de una función f que es analítica en un entorno de ζ . Entonces, el punto ζ es:*

- i) *Súper atractivo*, si $f'(\zeta) = 0$.
- ii) *Atractivo*, si $0 < |f'(z)| < 1$.
- iii) *Repulsivo*, si $|f'(z)| > 1$.
- iv) *Racionalmente indiferente*, si $f'(\zeta)$ es una raíz de la unidad.
- v) *Irracionalmente indiferente*, si $|f'(\zeta)| = 1$ pero $f'(\zeta)$ no es una raíz de la unidad.

Merece la pena distinguir los casos i) y ii) pues, en el primer caso, el punto ζ es, además, un punto crítico de f mientras que en el segundo caso eso no ocurre. Por tanto, f tendrá inversa local en un entorno de ζ si éste es un punto atractivo pero no si es súper atractivo. En otras ocasiones, sin embargo, nos interesará estudiar ambos casos a la vez. Cuando eso ocurra, diremos que el punto ζ es (súper) atractivo, incluyendo así ambas posibilidades.

Análogamente, habrá ocasiones donde nos interesará reunir en uno los casos iv) y v). En ese caso, diremos que ζ es un punto fijo indiferente. Si ζ es un punto fijo indiferente, la mejor aproximación lineal de f en un entorno de ζ es la rotación de centro ζ dada por la función $z \mapsto \zeta + f'(\zeta)(z - \zeta)$ y el orden de la misma será finito o infinito dependiendo de si ζ satisface la condición dada en iv) o en v) respectivamente.

La noción de punto periódico y la clasificación de los mismos proviene directamente de la clasificación de los puntos fijos de f . Un punto ζ es un punto *periódico* de una función racional R si es un punto fijo de alguna iteración, R^n , de R . En ese caso, existe n un número natural, tal que

$$\zeta, R(\zeta), R^2(\zeta), \dots, R^{n-1}(\zeta) \quad (3.1)$$

son puntos distintos entre sí pero $R^n(\zeta) = \zeta$. Llamamos *ciclo* de ζ al conjunto formado por los puntos dados en (3.1); y decimos que n es el *período* de ζ . De este modo, los puntos fijos de R son puntos de período uno. En general, ζ tiene período n si y solo si n es el menor número natural tal que ζ es un punto fijo de R^n .

Podemos entonces considerar los puntos periódicos de R de período n como puntos fijos de la iterada R^n y clasificarlos así según el criterio dado en la Definición 3.1.1. Además, conjugando si es necesario con una transformación de Möbius adecuada, podemos suponer que los ciclos no contienen al punto del infinito y escribir

$$\zeta_m = R^m(\zeta),$$

para todo $m = 0, 1, 2, \dots$, donde ζ_m es un punto de \mathbb{C} . De este modo, se cumple que

$\zeta_{m+n} = \zeta_m$. Aplicando la Regla de la Cadena n veces a la iterada R^n , obtenemos

$$\begin{aligned}
 (R^n)'(\zeta_m) &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(R^k(\zeta_m)) \\
 &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(R^k(R^m(\zeta))) \\
 &= \prod_{k=m}^{m+n-1} R'(R^k(\zeta)) \\
 &= \prod_{k=m}^{m+n-1} R'(\zeta_k) \\
 &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(\zeta_k).
 \end{aligned}$$

Vemos así que la derivada $(R^n)'$ tiene el mismo valor en cada elemento ζ_j del ciclo. Luego, todos los puntos del ciclo se clasifican del mismo modo como puntos fijos de R^n . Como consecuencia de esto, podemos extender la clasificación anterior a ciclos y podemos hablar así de multiplicador de un ciclo o ciclos atractivos.

Un punto ζ se dice *pre-periódico* de R si no es periódico pero existe un número natural k tal que $R^k(\zeta)$ es un punto periódico de R . En este caso, existen m y n números naturales tales que

$$\zeta, R(\zeta), R^2(\zeta), \dots, R^m(\zeta), \dots, R^{m+n-1}(\zeta)$$

son puntos distintos y

$$R^{m+n}(\zeta) = R^m(\zeta).$$

Muchos de los puntos periódicos tienen asociados puntos pre-periódicos, por ejemplo, el origen es un punto pre-periódico del polinomio P dado por

$$P(z) = z^2 - 2,$$

pues se cumple que $P(0) = -2$, $P^2(0) = P(-2) = 2$ y $P^3(0) = P(2) = 2$.

A lo largo de este capítulo, discutiremos cómo los ciclos atractivos, repulsivos e indiferentes se relacionan con los conjuntos de Julia y de Fatou. Brevemente, los ciclos (súper) atractivos se encuentran en el conjunto de Fatou de una función racional, mientras que los ciclos repulsivos se encuentran en el conjunto de Julia de la misma. Sin embargo, los ciclos indiferentes pueden estar en Julia o en Fatou, dependiendo del caso. Determinar dónde se encuentran los ciclos indiferentes es complicado y necesitaremos varias herramientas para

ello. Como hemos comentado al principio del capítulo la idea de conjugación con una función analítica adecuada va a ser fundamental.

3.2. Existencia de puntos periódicos.

En esta sección, comentaremos brevemente el problema de la existencia de puntos periódicos. Es claro que para hallar los puntos periódicos de período n de una función racional R , buscamos las soluciones de la siguiente ecuación

$$R^n(z) = z$$

y todas las soluciones de esta ecuación son puntos periódicos. Sin embargo, el período de los mismos puede que no sea exactamente el n fijado, sino que sea un número natural m menor que n . Por ejemplo, si consideramos la función racional R dada por

$$R(z) = z^2 - z, \tag{3.2}$$

es fácil comprobar que todas las soluciones de la ecuación $R^2(z) = z$ son también soluciones de la ecuación $R(z) = z$. Por tanto, R no tiene puntos periódicos de período dos.

A raíz de este ejemplo nos surgen cuestiones como las siguientes: ¿con qué frecuencia una función racional no tiene puntos periódicos?, o ¿puede existir, por ejemplo, una función racional que únicamente tenga una cantidad finita de puntos periódicos? La respuesta a esta pregunta es no. De hecho, en la mayoría de los casos, los puntos periódicos de un período dado existen. En este ámbito, los polinomios presentan un comportamiento peculiar. Es conocido el siguiente resultado para polinomios, cuya demostración puede consultarse en [9, p. 145-147].

Teorema 3.2.1. *Sea P un polinomio de grado, al menos, dos. Supongamos que P no tiene puntos periódicos de período n . Entonces, $n = 2$ y P está conjugado con el polinomio $z \mapsto z^2 - z$.*

Observamos que el ejemplo dado en (3.2) es el único caso, salvo conjugación, que podíamos dar de polinomio que no tuviese puntos periódicos de período n dado.

Siguiendo esta línea, existe un resultado para funciones racionales en general más débil que el Teorema 3.2.1, cuya demostración puede consultarse en [9, p. 147-148]

Teorema 3.2.2. *Sea R una función racional de grado $d \geq 2$. Supongamos que R no tiene puntos periódicos de período n . Entonces, el par (d, n) es uno de los siguientes:*

$$(2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2).$$

Además, cada uno de esos pares aparece para una cierta función racional.

Esto muestra, por ejemplo, que todas las funciones racionales tienen puntos periódicos de período $4, 5, 6, \dots$, y que toda función racional de grado mayor o igual que cinco tiene puntos periódicos de todos los períodos posibles. Estos resultados fueron presentados por I. N. Baker en [6].

En términos generales, si una función racional no tiene puntos periódicos de período n , entonces cada solución de la ecuación $R^n(z) = z$ es solución de la ecuación $R^m(z) = z$, donde m es un número natural menor que n que lo divide.

Para terminar esta sección, vamos a probar que toda función racional de grado $d \geq 2$ tiene infinitos puntos periódicos. Una forma de verlo es usando el Teorema 1.6.1 vi). De este teorema se deduce que, como $J(R)$ es infinito, para toda función racional R de grado mayor o igual que dos, el conjunto de puntos periódicos de R es infinito. El mismo resultado se puede ver de forma más directa:

Sean p un número natural primo y R una función racional de grado $d \geq 2$ tal que R no tiene puntos periódicos de período p . Entonces, toda solución ζ de la ecuación $R^p(z) = z$ tiene período k , donde k es un número natural menor que p que lo divide. Por tanto, $k = 1$ y ζ es un punto fijo de R . Como R y R^p tienen $d + 1$ y $d^p + 1$ puntos fijos respectivamente, deducimos que existe algún punto fijo ζ de R tal que R^p tiene más puntos fijos en ζ que R (Corolario 3.7.9). Esto únicamente ocurre si $R'(\zeta) \neq 1$ y $R'(\zeta)^p = 1$. Finalmente, R tiene, a lo más, $d + 1$ puntos fijos y, para cada uno de ellos, $R'(\zeta)^q = 1$, para, a lo más, un número primo q . Por tanto, cada función racional R tiene puntos periódicos de período primo p , para todos los primos p salvo, a lo más, para $d + 1$. Esto es una prueba directa de que toda función racional de grado $d \geq 2$ tiene infinitos puntos periódicos.

Si consideramos R un polinomio cuadrático que no tiene puntos periódicos de período dos, entonces, salvo conjugación, se cumple que $R(0) = 0$ y $R'(0) = -1$. Por tanto, R será un polinomio de la forma

$$R(z) = az^2 - z.$$

Tomando la transformación lineal $h(z) = 1/az$ se cumple que

$$h \circ P \circ h^{-1}(z) = R(z),$$

donde P es el polinomio cuadrático $P(z) = z^2 - z$. Esto es, todo polinomio cuadrático que no tiene puntos periódicos de período dos está conjugado con P .

3.3. Ciclos (súper) atractivos.

En esta sección vamos a probar que los ciclos (súper) atractivos pertenecen al conjunto de Fatou de una función racional, algo que comentamos al principio del capítulo.

Supongamos que ζ es un punto fijo (súper) atractivo de una función racional R . Entonces, $|R'(\zeta)| < 1$. De modo que, existe un número real α donde se cumple que

$$|R'(\zeta)| < \alpha < 1.$$

Además, por la definición de derivada de R en ζ , existe un disco D centrado en ζ tal que

$$|R(z) - \zeta| = |R(z) - R(\zeta)| < \alpha |z - \zeta|,$$

para todo $z \in D$. Deducimos así que

$$|R^n(z) - R^n(\zeta)| = |R^n(z) - \zeta| < \alpha^n |z - \zeta|,$$

para todo número natural n . En particular, cada R^n transforma el disco D en sí mismo. Luego, D está contenido en el conjunto de Fatou de R y es claro que $R^n \rightarrow \zeta$ uniformemente en D (pues $0 < \alpha < 1$). Aplicando el Teorema de Vitali, se cumple que $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en la componente del conjunto de Fatou de R que contiene al punto fijo ζ . Como $F(R^q) = F(R)$, para todo número natural q , podemos enunciar y dar por demostrado el siguiente resultado para ciclos (súper) atractivos.

Teorema 3.3.1. *Sea $\{\zeta_1, \dots, \zeta_q\}$ un ciclo (súper) atractivo de R . Entonces, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$, ζ_j pertenece a una componente conexa de $F(R)$, que denotamos por F_j y si $n \rightarrow \infty$, entonces*

$$R^{nq} \longrightarrow \zeta_j,$$

localmente uniformemente en F_j .

A continuación, vamos a introducir algunas nociones que nos serán de utilidad.

Definición 3.3.2. *Sea ζ un punto fijo (súper) atractivo de R . Llamamos cuenca local de ζ a la componente conexa del conjunto de Fatou de R que contiene a ζ .*

Sean ζ un punto fijo (súper) atractivo de R y B la cuenca local de ζ . Observamos que si $n \rightarrow \infty$, entonces para todo número entero no negativo m y para todo z perteneciente a $R^{-m}(B)$, se cumple que $R^n(z) \rightarrow \zeta$.

Definición 3.3.3. Sean ζ un punto fijo (súper) atractivo de R y B la cuenca local de ζ . Llamamos cuenca o conjunto estable de ζ al conjunto

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} R^{-m}(B) = \{z \in F(R) : z \in R^{-m}(B), \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Podemos extender las definiciones anteriores a los ciclos como sigue

Definición 3.3.4. Sea el conjunto

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_q\} \tag{3.3}$$

un ciclo (súper) atractivo de R . Definimos su cuenca local como la unión de las componentes del conjunto de Fatou F_1, \dots, F_q que contienen a los puntos ζ_1, \dots, ζ_q respectivamente.

Observamos que, como consecuencia del Teorema 3.3.1, todas las componentes F_1, \dots, F_q de $F(R)$ anteriores son distintas.

Definición 3.3.5. Definimos la cuenca del ciclo (3.3) como la unión de la cuenca local del mismo y todas sus imágenes inversas.

A pesar de que una función racional de grado $d \geq 2$ tiene infinitos ciclos, probaremos más tarde que la cantidad de ciclos (súper) atractivos que puede tener es finita (de hecho, esta cantidad es, a lo más, $2d - 2$). De este modo, un polinomio cuadrático tendrá, a lo más, un ciclo (súper) atractivo en \mathbb{C} , teniendo en cuenta que, en ese caso, ∞ es un punto fijo (súper) atractivo.

Nuestro siguiente objetivo es analizar el comportamiento de una función analítica f en un entorno de un punto fijo atractivo ζ que no es súper atractivo. Este análisis nos permitirá comprender en su totalidad el comportamiento de la dinámica de f “cerca” de ζ .

Supongamos que f es una función analítica en un entorno \mathcal{N} de un punto fijo atractivo ζ (que no es súper atractivo) y que $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$. Ahora, sean g una función analítica y univalente en \mathcal{N} tal que $g(\zeta) = 0$ y F la función dada por $F = g \circ f \circ g^{-1} = gfg^{-1}$. Para simplificar la notación y siempre que no de lugar a confusión, suprimiré el símbolo de la composición. Entonces, F está definida y es analítica en el entorno del origen $g(\mathcal{N})$. Como se cumple que

$$F'(0) = f'(\zeta),$$

tenemos que el origen es un punto fijo atractivo de F . Decimos que F es la *conjugada (analítica) local* de f mediante la transformación g .

La siguiente pregunta que nos hacemos es: ¿hay alguna forma de escoger g para que los coeficientes de la serie de Taylor de F sean los más “simples” posibles? Los beneficios que

surgen dependen de cómo de simple podamos escoger F . En cualquier caso, las iteradas de f en un entorno de ζ se reflejan en el comportamiento de las iteradas de F , puesto que $F^n = gf^n g^{-1}$, para todo número natural n .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\zeta = 0$ (los resultados correspondientes a un punto fijo general ζ pueden obtenerse fácilmente por conjugación con una transformación de Möbius). El desarrollo en serie de Taylor de la función f en el origen es de la forma

$$f(z) = az + bz^2 + \dots,$$

donde $0 < |a| < 1$. Como $F'(0) = f'(\zeta) \neq 0$ (pues ζ es un punto atractivo y no súper atractivo de f), entonces

$$F(z) = az + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

En el siguiente teorema vamos a demostrar que podemos conseguir que F sea de la forma $F(z) = az$.

Teorema 3.3.6. *Sea f una función analítica en un entorno del origen tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = a$, donde $0 < |a| < 1$. Entonces, existe una única función g analítica en algún disco $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$, de radio r positivo, tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$ y tal que existe $0 < \rho < r$ de modo que*

$$gfg^{-1}(z) = az,$$

para todo z tal que $|z| < \rho$.

Demostración. En primer lugar, escribimos

$$f(z) = az + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = az + A(z),$$

donde $A(z)$ es la serie de potencias de f empezando en el término de grado dos (o superior). Como la serie dada por f es convergente en algún valor z_0 no nulo, la sucesión $(a_n z_0^n)_n$ está acotada. De hecho,

$$a_n z_0^n \rightarrow 0$$

si $n \rightarrow \infty$ y, por tanto, existe una constante positiva M tal que $|a_n| |z_0|^n \leq M$, para todo n . Podemos tomar un número real λ , definir la función $\varphi(z) = \lambda z$ y considerar la conjugada $\varphi f \varphi^{-1}$ de f de modo que todos sus coeficientes de Taylor de grado mayor o igual que dos tengan módulo menor o igual que uno. En efecto, observamos que

$$\varphi f \varphi^{-1}(z) = \lambda f\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \lambda \left(\frac{a}{\lambda} z + \frac{a_2}{\lambda^2} z^2 + \frac{a_3}{\lambda^3} z^3 + \dots \right),$$

luego, tomando $\lambda = C/|z_0|$ con C una constante positiva, se cumple que para cada n ,

$$\left| \frac{a_n |z_0|^n}{C^n} \right| \leq \frac{M}{C^n}$$

y, tomando C suficientemente grande, podemos conseguir que los módulos de los nuevos coeficientes de la serie de Taylor de $\varphi f \varphi^{-1}$ sean menores o iguales que uno (a partir del término de grado dos).

A lo largo de esta prueba nos va a ser más cómodo trabajar tomando g como g^{-1} y viceversa, así que consideraremos la composición $g^{-1} f g$. La estrategia de la parte de la prueba que nos queda es la siguiente: consideraremos una serie de potencias formal arbitraria g que satisfaga la igualdad

$$f \circ g(z) = g(az). \quad (3.4)$$

Con esta relación, determinaremos los coeficientes de g sin tener en cuenta la convergencia. Después, probaremos que el radio de convergencia de la serie g construida de esta forma es positivo y, finalmente, bastará renombrar $g = g^{-1}$.

Consideramos pues la siguiente serie de potencias formal:

$$g(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots = z + B(z).$$

La relación (3.4) establece que

$$az + aB(z) + A(g(z)) = az + B(az).$$

Desarrollando la expresión anterior, deducimos que

$$\sum_{n \geq 2} b_n (a^n - a) z^n = \sum_{n \geq 2} a_n (z + b_2 z^2 + \dots)^n. \quad (3.5)$$

Como $|a| < 1$, entonces $a^n \neq a$, para todo $n \geq 2$. De este modo, si igualamos las series que aparecen en la expresión (3.5) término a término, los coeficientes b_n quedan completamente determinados. Razonando por inducción, obtenemos una fórmula de la forma

$$b_n (a^n - a) = P_n(a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_{n-1}),$$

donde para cada n , P_n es un polinomio cuyas variables son a_j y b_k , donde $j = 2, \dots, n$ y $k = 2, \dots, n-1$ respectivamente. Además, para cada n , los coeficientes del polinomio P_n son positivos y, como $|a_n| \leq 1$, para todo $n \geq 2$, entonces se cumple que

$$|a| (1 - |a|) |b_n| \leq P_n(1, \dots, 1, |b_2|, \dots, |b_{n-1}|).$$

La expresión anterior nos proporciona una cota superior del ritmo de crecimiento de los coeficientes b_n .

Consideramos ahora la función

$$H(z) = z - \alpha (z^2 + z^3 + \dots),$$

donde $\alpha = 1/(|a| - |a|^2)$. Es claro que la función H es analítica en el disco unidad con derivada no nula en el origen y, por tanto, en un entorno del origen tiene inversa local que es de la forma:

$$h(z) = z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \dots,$$

Ésta es una función analítica en un entorno del origen. Por tanto, para todo z suficientemente cerca del origen, se cumple que

$$z = H(h(z)) = h(z) - \alpha \sum_{m>2} h(z)^m.$$

Esta identidad se reduce a

$$\sum_{m \geq 2} (z + \beta_2 z^2 + \dots)^m = |a| (1 - |a|) \sum_{n \geq 2} \beta_n z^n.$$

Obtenemos así que los coeficientes β_n satisfacen la relación:

$$|a| (1 - |a|) \beta_n = P_n(1, \dots, 1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}).$$

Razonando por inducción, es claro que en primer lugar, $\beta_n \geq 0$, para todo $n \geq 2$; y, en segundo lugar, que $|b_n| \leq \beta_n$, para todo $n \geq 2$. Deducimos así que en un entorno del origen se cumple que la serie de potencias formal g es convergente y, por tanto, es analítica. Con esto, tenemos que en un entorno del origen la identidad anterior se satisface la relación anterior,

$$f \circ g(z) = g(az),$$

y, como la función g tiene inversa local en un entorno del origen, concluimos la prueba del teorema.

□

Este resultado implica mucho más de lo que hemos afirmado. Consideremos el caso en el que f sea una función racional, que denotamos por R , y sea B la cuenca local de un punto fijo atractivo ζ de R . Según hemos visto en la demostración del Teorema 3.3.6, existen un

disco W centrado en ζ tal que $R(W) \subset W$ y una serie de potencias g analítica en W tal que

$$g \circ R(z) = ag(z),$$

para todo punto z de W . Sea W_n la componente de $R^{-n}(W)$ que contiene al punto fijo ζ . Vamos a probar que

$$B = W \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots \quad (3.6)$$

En primer lugar, como cada W_n es un subconjunto conexo del conjunto de Fatou de R , entonces

$$W_n \subset B,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y se cumple que

$$W \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots \subset B.$$

Por otro lado, dado un punto z perteneciente a B , unimos z con ζ mediante una curva γ contenida en B . Entonces, existe un número natural n tal que $R^n(\gamma) \subset W$ y, como la curva γ es conexa, γ está contenida en W_n . Acabamos de probar que para todo punto z de B , existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que z pertenece a W_n , esto es,

$$B \subset W \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots,$$

terminando así la prueba de la expresión dada en (3.6).

Ahora, para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definimos g_n sobre W_n la función dada por:

$$g_n(z) = a^{-n}g(R^n(z)).$$

Se cumple que, para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la función g_n es analítica en W_n ; y, para todo z suficientemente cerca del origen, se verifica la igualdad

$$g_n(z) = g(z),$$

pues, en un entorno del origen se cumple que $g \circ R^n(z) = a^n g(z)$. Deducimos así que la sucesión dada por (g_n) nos proporciona una prolongación analítica de g en la cuenca local B de ζ y, como consecuencia de ello, se cumple que

$$g \circ R(z) = ag(z),$$

para todo punto z de B . Finalmente, observamos que

$$g(W_n) = a^{-n}g(R^n(W_n)).$$

Como R^n transforma de manera sobreyectiva cada componente $R^{-n}(W)$ en W , tenemos que

$$g(W_n) = a^{-n}g(W).$$

Tenemos pues que $g(W)$ es un entorno abierto del origen y, como $|a| < 1$, deducimos que

$$g(B) = g(W \cup W_1 \cup \dots) = \mathbb{C}.$$

Acabamos de probar el siguiente resultado:

Teorema 3.3.7. *Sea ζ un punto fijo atractivo de una función racional R , con $R'(\zeta) = a$; y sea B la cuenca local de ζ . Entonces, existe una única función g que es analítica en B , tal que $g(\zeta) = 0$, $g'(\zeta) = 1$, $g(B) = \mathbb{C}$ y tal que satisface la relación*

$$g \circ R(z) = ag(z),$$

para todo $z \in B$.

Observación. A diferencia de lo que ocurre con la conjugación $gRg^{-1}(z) = az$, la ecuación funcional dada por $gR(z) = ag(z)$ no necesita de la existencia de la inversa de g . De hecho, el Teorema de Liouville nos asegura que no puede existir la función inversa de g en B .

3.4. Ciclos repulsivos.

En esta sección, vamos a hacer un estudio de los puntos fijos y ciclos repulsivos de una función racional. Como veremos, a diferencia de los atractivos, todo ciclo repulsivo está contenido en el conjunto de Julia. Este caso se puede deducir a partir del estudio del caso atractivo de funciones analíticas pues si suponemos que

$$f(z) = \zeta + \lambda(z - \zeta) + \dots,$$

con $|\lambda| > 1$, entonces la inversa de f en un entorno de ζ es de la forma

$$f^{-1}(z) = \zeta + \frac{1}{\lambda}(z - \zeta) + \dots,$$

que presenta en ζ un punto fijo atractivo.

Teorema 3.4.1. *Todo ciclo repulsivo de una función racional R está contenido en $J(R)$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que el origen es un punto fijo repulsivo de R . Entonces, en un entorno del origen, podemos escribir

$$R(z) = az + \dots,$$

donde $|a| = |R'(0)| > 1$. Luego, si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$(R^n)'(0) = a^n \rightarrow \infty.$$

Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que el origen pertenece a $F(R)$. Entonces, la familia de iteradas $\{R^n\}_{n \geq 1}$ es normal en un entorno \mathcal{N} del origen. Por tanto, existe una sucesión de iteradas de R , (R^m) , que converge uniformemente en \mathcal{N} a una función analítica g . Como el origen es un punto fijo de R , entonces también lo es de g , esto es, $g(0) = 0$ y, como g es analítica en \mathcal{N} , entonces $g'(0)$ toma un valor finito. Sin embargo, la convergencia uniforme de R^n a g implica que

$$g'(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} (R^m)'(0) = \infty,$$

llegando así a una contradicción. Concluimos pues que el punto fijo repulsivo 0 pertenece al conjunto de Julia de R . En general, si $\zeta \in \mathbb{C}_\infty$ es un punto fijo repulsivo de R , entonces (por conjugación) $\zeta \in J(R)$.

Finalmente, si $\{\zeta_1, \dots, \zeta_q\}$ es un ciclo repulsivo de R , entonces $\zeta_k \in J(R^k)$, para todo $k = 1, \dots, q$. Como $J(R^k) = J(R)$, para todo número natural k (Teorema 1.6.1 iii)) concluimos que todo ciclo repulsivo de R está contenido en el conjunto de Julia de R . □

Podemos interpretar el Teorema 3.3.7 en el contexto de los puntos fijos repulsivos del siguiente modo: sea ζ un punto fijo repulsivo de R . Entonces, $|R'(\zeta)| > 1$. Como consecuencia del Teorema de la Aplicación Inversa, hay una rama de R^{-1} cuya derivada satisface la siguiente igualdad:

$$(R^{-1})'(\zeta) = \frac{1}{R'(R^{-1}(\zeta))}.$$

Como ζ es un punto fijo de R , se cumple que $R^{-1}(\zeta) = \zeta$. Por tanto,

$$|(R^{-1})'(\zeta)| = \frac{1}{|R'(\zeta)|} < 1.$$

De modo que, existe una rama de R^{-1} para la que ζ es un punto fijo atractivo. Aplicando el Teorema 3.3.7 a esta rama, deducimos que R es localmente conjugada con la función $z \mapsto R'(\zeta)z$ en un entorno de ζ .

3.5. Ciclos racionalmente indiferentes.

El objetivo de esta sección es estudiar los resultados más relevantes referentes a los ciclos racionalmente indiferentes de una función racional. En general, no es fácil determinar si un ciclo indiferente está contenido en el conjunto de Fatou o en el conjunto de Julia de una función racional. Sin embargo, si el ciclo es racionalmente indiferente, podemos asegurar lo siguiente:

Teorema 3.5.1. *Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Entonces, todo ciclo racionalmente indiferente de R está contenido en $J(R)$.*

Demostración. Decimos que ζ pertenece a un ciclo racionalmente indiferente de R de longitud m si R^m deja fijo a ζ y $(R^m)'(\zeta)$ es una raíz de la unidad. En primer lugar, supongamos que ζ es un punto fijo racionalmente indiferente de la función racional R . Por conjugación, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto fijo $\zeta = 0$ y podemos escribir

$$R(z) = az + bz^r + \dots,$$

donde $b \neq 0$, $r \geq 2$ y $a^k = 1$ para algún número natural k . Si escribimos $S = R^k$, entonces la serie de potencias de S es de la forma

$$S(z) = z + cz^p + \dots,$$

donde p es un entero mayor o igual que dos y c es distinto de cero, pues el grado de R es mayor o igual que dos y, entonces S no puede ser la función identidad. Aplicando el Corolario 3.7.7, deducimos que S^n es de la forma

$$S^n(z) = z + ncz^p + \dots$$

De modo que si $n \rightarrow \infty$, entonces $(S^n)^{(p)}(0) \rightarrow \infty$, donde $(S^n)^{(p)}(0)$ denota la p -ésima derivada de S^n en 0. Deducimos así que la familia de iteradas $\{S^n\}_{n \geq 1}$ no es normal en ningún entorno del origen pues, si lo fuera, existirían una subsucesión de (S^n) y una función analítica φ con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi^{(p)}(0) = \infty$ y tal que $S^{n_j} \rightarrow \varphi$, si $j \rightarrow \infty$. Como $S^n = R^{kn}$, para todo número natural n , deducimos que la familia de iteradas $\{R^n\}_{n \geq 1}$ tampoco es normal en un entorno del origen y, por tanto, ζ pertenece a $J(R)$.

Finalmente, para todo punto ζ de un ciclo racionalmente indiferente de longitud m , concluimos que $\zeta \in J(R^m)$ y, por tanto, $\zeta \in J(R)$.

□

Sin embargo, si R es una función racional de grado uno, entonces todo ciclo racionalmente indiferente de R está contenido en $F(R)$. En efecto, si R es una transformación de Möbius, entonces es conjugada o bien con un polinomio de la forma $T(z) = \alpha z$ o bien con uno de la forma $T(z) = z + 1$. En el primer caso, tanto 0 como ∞ son puntos fijos que están en el conjunto de Fatou. En el segundo también es claro que ∞ es un punto fijo que está en el conjunto de Fatou.

El resto de la sección está dedicada a describir con detalle las dinámicas que siguen las iteradas de una función racional R en los entornos de ciclos racionalmente indiferentes. Resulta más complicado determinar el comportamiento de R^n en estos entornos que en un entorno de un punto fijo atractivo o repulsivo. Una de las explicaciones de este hecho es que R no es localmente conjugada con la función lineal definida por la derivada de f en el punto fijo, $z \rightarrow \zeta + f'(\zeta)z$, puesto que esta aplicación es una rotación de orden finito alrededor de ζ y el orden de R no puede ser finito a menos que el grado de R sea 1 (pues el grado de R^n es n por el grado de R). Es por ello que debemos encontrar otro modo de describir la dinámica de R^n cerca de un ciclo racionalmente indiferente.

El lema que aparece a continuación muestra la idea fundamental de esta sección.

Lema 3.5.2. *Sean p un número natural y f una función analítica que satisface la igualdad*

$$f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{p+2}), \quad (3.7)$$

para todo $z \in N$, donde N es un entorno del origen. Sean $\omega_1, \dots, \omega_p$ las p -raíces de la unidad; y sean η_1, \dots, η_p las p -raíces de -1 . Entonces, para todo par de números positivos suficientemente pequeños r_0 y θ_0 , se cumple que

i) $|f(z)| < |z|$ en cada sector

$$S_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \left| \frac{z}{\omega_j} \right| < r_0, \left| \arg \frac{z}{\omega_j} \right| < \theta_0 \right\}.$$

ii) $|f(z)| > |z|$ en cada sector

$$\Sigma_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \left| \frac{z}{\eta_j} \right| < r_0, \left| \arg \frac{z}{\eta_j} \right| < \theta_0 \right\}$$

Demostración. Partiendo de la igualdad dada en (3.7), podemos escribir

$$\frac{f(z)}{z} = 1 - z^p (1 + v(z)),$$

donde v es una función analítica en N que fija al origen y consideramos

$$S = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \frac{1}{2}, |\arg \zeta| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

el sector circular abierto de amplitud $\pi/2$. Ahora, tomando valores de r_0 y θ_0 suficientemente pequeños adecuados, podemos conseguir que si z es un punto de S_j , entonces $z^p(1+v(z))$ pertenezca a S y, análogamente, si z es un punto de Σ_j , entonces $-z^p(1+v(z))$ pertenezca a S . Finalmente, como la distancia de cualquier punto de S al punto 1 es estrictamente menor que uno, entonces se cumple que

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = |1 - z^p(1+v(z))| < 1$$

y, por tanto, $|f(z)| < |z|$, para todo punto z de S_j . Análogamente, como la distancia de cualquier punto de $-S$ al punto 1 es estrictamente mayor que uno, concluimos que $|f(z)| > |z|$, para todo punto z de Σ_j , como queríamos probar. □

Los valores ω_j y η_j del Lema 3.5.2 son las $2p$ -raíces de la unidad y están alternativamente e igualmente espaciadas en la circunferencia unidad. Si f se puede escribir como

$$f(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2}), \quad a \neq 0,$$

se obtiene un resultado similar al anterior cambiando las raíces p -ésimas de 1 y -1 por las soluciones de las ecuaciones $az^p = -1$ y $az^p = 1$ respectivamente. También en ese caso, tanto f como f^{-1} existen en un entorno del origen y se cumple que

$$f^{-1}(z) = z - az^{p+1} + O(z^{p+2}).$$

Luego, tomando r_0 y θ_0 suficientemente pequeños, se cumple que $|f^{-1}(z)| > |z|$ en cada sector S_j y $|f^{-1}(z)| < |z|$ en cada sector Σ_j .

El ejemplo que aparece a continuación ilustra de forma clara lo que más adelante estudiaremos formalmente.

Ejemplo 3.5.3. *El polinomio P definido como*

$$P(z) = z - z^2$$

tiene un punto fijo racionalmente indiferente en el origen. Si $0 < z < 1$, entonces $0 < P(z) < z$ y se cumple que

$$P^n(z) \longrightarrow 0,$$

si $n \rightarrow \infty$ (pues $P^n(z)$ solo puede converger a un punto fijo de P). Si $z < 0$, entonces $P(z) < z < 0$ y se cumple que

$$P^n(z) \longrightarrow \infty,$$

si $n \rightarrow \infty$. Estas observaciones son consistentes con el Lema 3.5.2. A continuación, vamos a estudiar el comportamiento de $P^n(z)$ para otros valores de z

Sea σ la transformación de Möbius dada por $\sigma(z) = \sigma^{-1}(z) = 1/z$ y consideramos $Q = \sigma P \sigma^{-1}$ una función racional conjugada con P . Tenemos que

$$Q(z) = \frac{z^2}{z-1} = z + 1 + \frac{1}{z-1}.$$

Observamos que si $\operatorname{Re}(z) > 1$, entonces $\operatorname{Re}(1/(z-1)) > 0$, pues

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z) - 1}{(\operatorname{Re}(z) - 1)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

y

$$\operatorname{Re}(Q(z)) = \operatorname{Re}\left(z + 1 + \frac{1}{z-1}\right) > \operatorname{Re}(z) + 1.$$

En particular, si $t > 1$, entonces

$$Q(\Omega_t) \subset \Omega_{t+1},$$

siendo $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > t\}$. Reescribiendo esto en términos de P , observamos que si r es un número positivo suficientemente pequeño, entonces $1/r > 1$ y si z es un número complejo cuya parte real es mayor que $1/r$, entonces $Q^n(z) \rightarrow \infty$, si $n \rightarrow \infty$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\sigma(z) = z^{-1}$ transforma el disco $|z - r| < r$ en la región $\Omega_{r/2}$, se cumple que

$$P^n(z) = \sigma^{-1} Q^n \sigma(z) \longrightarrow 0,$$

si $n \rightarrow \infty$, uniformemente en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - r| < r\}$.

Dada la simplicidad de la expresión de Q , podemos precisar aún más. Supongamos que Π es una región del plano complejo que no corta al disco cerrado de radio tres centrado en el origen y tal que

$$Q(\Pi) \subset \Pi.$$

Entonces, para todo punto z perteneciente a Π se cumple que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(Q(z)) &= \operatorname{Re}\left(z + 1 + \frac{1}{z-1}\right) \\ &\geq \operatorname{Re}(z) + 1 - \left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right| \\ &\geq \operatorname{Re}(z) + 1 - \frac{1}{|z-1|} \\ &\geq \operatorname{Re}(z) + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

pues $|z-1| > 2$, para todo $z \in \Pi$. Deducimos así que

$$\operatorname{Re}(Q^n(z)) \geq \operatorname{Re}(z) + \frac{n}{2}$$

y para todo z perteneciente a Π se cumple que $Q^n(z) \rightarrow \infty$, si $n \rightarrow \infty$.

Queremos saber qué forma puede tener el dominio Π . Un candidato obvio para el mismo es el semiplano dado por $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re}(z) \geq 3\}$. Sin embargo, podemos encontrar otro dominio que satisfaga las condiciones requeridas y sea aún mayor. Vamos a ver que podemos tomar Π como el exterior de una parábola.

Sea

$$\Pi = \{x + iy : y^2 > 12(3-x)\}.$$

La frontera de Π es la parábola dada por la ecuación $x = 3 - y^2/12$, que corta al eje x cuando $x = 3$ y al eje y cuando $y \in \{-6, 6\}$; y no corta al disco cerrado centrado en el origen de radio tres. Si escribimos

$$z = x + iy, \quad Q(z) = u + iv, \quad \frac{1}{|z-1|} = a + ib,$$

entonces, despejando adecuadamente en la expresión de $Q(z)$, deducimos que

$$u = x + 1 + a, \quad v = y + b.$$

Luego, si z es un punto de Π , se cumple que

$$\begin{aligned}v^2 - 12(3-u) &= (y+b)^2 - 12(3-(x+1+a)) \\ &= (y^2 - 12(3-x)) + b^2 + 2by + 12(1+a) \\ &\geq 12 - 2|by| - 12|a|,\end{aligned}$$

pues $y^2 - 12(3-x) > 0$ y $b^2 > 0$. Pero si z es un punto de Π , entonces $|z| \geq 3$ y se cumple que

$$|a| \leq |a+ib| \leq \frac{1}{|a|-1} < \frac{1}{2}$$

y

$$|yb| \leq \frac{|z|}{|z|-1} < \frac{3}{2}.$$

Deducimos así que si z es un punto de Π , entonces $v^2 > 12(3-u)$ y, por tanto, $Q(z)$ pertenece a Π . Finalmente, se cumple que $Q(\Pi) \subset \Pi$ y $P^n(z) \rightarrow 0$, para todo $z \in \sigma(\Pi)$, terminando así el análisis de las iteradas del polinomio $P(z) = z - z^2$.

Con el objetivo de analizar la situación para un punto fijo racionalmente indiferente general, necesitamos introducir nuevos conceptos, como el de *pétalo* que, a grandes rasgos, jugará el papel de $\sigma(\Pi)$ del Ejemplo 3.5.3 anterior.

Definición 3.5.4. Llamamos *pétalos* (en el origen) a los conjuntos de la forma:

$$\Pi_k(t) = \left\{ re^{i\theta} : r^p < t(1 + \cos(p\theta)), \left| \frac{2k\pi}{p} - \theta \right| < \frac{\pi}{p} \right\},$$

donde t es un número positivo, p es un número entero positivo y k pertenece al conjunto $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

De la definición anterior observamos inmediatamente que los pétalos son disjuntos dos a dos, esto es, si $m \neq n$ se cumple que

$$\Pi_m(t) \cap \Pi_n(t) = \emptyset$$

y cada pétalo sostiene un ángulo de amplitud $2\pi/p$ radianes en el origen. De este modo, la suma total que forman los ángulos de todos los pétalos en el origen es 2π .

Definición 3.5.5. Sean p un número natural, k un número entero comprendido entre cero y $p-1$ y t un número positivo. Sea $\Pi_k(t)$ un pétalo, llamamos *eje de $\Pi_k(t)$* a la recta de simetría del pétalo $\Pi_k(t)$, esto es, al rayo que pasa por el origen que forma un ángulo $\theta = 2k\pi/p$ con el eje real positivo.

A continuación, vamos a probar el resultado más importante de esta sección. Éste nos proporcionará una forma de describir las dinámicas de las iteradas R^n en los pétalos que rodean un punto fijo ζ , donde $R'(\zeta) = 1$. Por conjugación, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\zeta = 0$. Además, suponemos que el desarrollo en serie de Taylor de R es de la forma

$$R(z) = z(1 - z^p + bz^{2p} + cz^{2p+1} + \dots).$$

Conjugando con una transformación de Möbius de la forma $z \mapsto \alpha z$, podemos asegurar que el coeficiente que acompaña al término de orden $p+1$ es -1 . De modo que, la parte

importante de nuestras suposiciones es que no haya términos del desarrollo en serie de Taylor entre los términos de orden $p + 1$ y $2p + 1$. El motivo de tomar esta hipótesis es para poder describir explícitamente los pétalos. Sin ella, únicamente podríamos asegurar la existencia de los pétalos como imágenes conformes de los $\Pi_k(t)$ descritos anteriormente.

A pesar de que nuestro interés se centra en el estudio de las funciones racionales, vamos a probar el siguiente resultado para funciones analíticas en general. De este modo, el resultado se podrá aplicar a las distintas ramas R^{-1} de R que, en general, no son funciones racionales.

Teorema 3.5.6 (Teorema del Pétalo.). *Sea f una función analítica cuyo desarrollo en serie de Taylor en el origen es de la forma:*

$$f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{2p+1}). \quad (3.8)$$

Entonces, para todo t suficientemente pequeño se cumple que

a) La función f transforma cada pétalo $\Pi_k(t)$ en sí mismo, esto es,

$$f(\Pi_k(t)) \subset \Pi_k(t).$$

b) Si $n \rightarrow \infty$, entonces $f^n(z) \rightarrow 0$ uniformemente en cada pétalo.

c) Si $n \rightarrow \infty$, entonces $\arg f^n(z) \rightarrow 2k\pi/p$ localmente uniformemente en Π_k .

d) En un entorno de los ejes de cada pétalo se cumple que

$$|f(z)| < |z|.$$

e) La función $f: \Pi_k(t) \rightarrow \Pi_k(t)$ restringida a cada pétalo es conjugada de una traslación.

Observamos que, como consecuencia del apartado a), las iteradas de f están definidas en cada pétalo $\Pi_k(t)$ y el apartado c) implica que la sucesión de las iteradas de f converge a cero cuando n tiende a infinito a lo largo de un camino que es asintótico al eje de cada pétalo $\Pi_k(t)$.

Demostración. Para todo $r_0 > 0$ consideramos los subconjuntos del plano complejo

$$S_{r_0} = S = \left\{ re^{i\theta} : 0 < r < r_0, |\theta| < \frac{\pi}{p} \right\}$$

y

$$W_{r_0} = W = \left\{ re^{i\theta} : r > \frac{1}{r_0^p}, |\theta| < \pi \right\}.$$

En lo que sigue, vamos a suponer que $0 < r_0 < 1$ y más adelante precisaremos el valor de r_0 .

La aplicación $\sigma: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por $\sigma(z) = 1/z^p$ es analítica y sobreyectiva y, en particular, es un biholomorfismo definido de S en W . De modo que, la función inversa de σ , $\sigma^{-1}: W \rightarrow S$ está bien definida y está dada por

$$\sigma^{-1}(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde estamos considerando la rama principal de la raíz p -ésima. Podemos definir así una función $g: W \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ como

$$g(z) = \sigma f \sigma^{-1}(z) = \left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{z^{1/p}}\right)}\right)^p.$$

Este procedimiento intercambia la acción de f sobre S por la acción de g sobre W como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_\infty \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ W & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

Nuestro primer objetivo es trasladar la información acerca de la estructura de los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de f que tenemos en la (3.8) a información acerca de g . A partir de la expresión dada en (3.8), obtenemos el desarrollo en serie de Laurent de la función $(f(z))^{-p}$ en un entorno del origen como

$$\frac{1}{f(z)^p} = \frac{1}{z^p} + p + Az^p + v(z),$$

donde A es una constante y v es una función analítica que satisface la siguiente desigualdad

$$|v(z)| \leq B |z|^{p+1},$$

para todo $z \in \mathcal{N}$, siendo B es una constante mayor que cero y \mathcal{N} es un entorno del origen. Si tomamos r_0 suficientemente pequeño, entonces se cumple que $S \subset \mathcal{N}$.

Ahora, tomamos w un punto de W . Entonces, $\sigma^{-1}(w)$ pertenece a S y se cumple que

$$g(w) = \sigma f \sigma^{-1}(w) = \left(\frac{1}{f\sigma^{-1}(w)}\right)^p = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w), \quad (3.9)$$

donde

$$|\theta(w)| = |v\sigma^{-1}(w)| \leq B |\sigma^{-1}(w)|^{p+1} \leq \frac{B}{|w|^{1+\frac{1}{p}}}. \quad (3.10)$$

Las expresiones dadas en (3.9) y (3.10) van a ser muy importantes para sacar las conclusiones siguientes, pues de ellas se deduce que si el módulo de w , es suficientemente grande, entonces g actúa aproximadamente como una traslación, $w \mapsto w+p$. Usando esto, se puede comprobar que si α es lo suficientemente grande, entonces

$$g(\Omega) \subset \Omega,$$

siendo $\Omega = \{w \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re}(w) \geq \alpha\}$. Sin embargo, el Ejemplo 3.5.3 nos sugiere que podemos mejorar esta aproximación. Vamos a probar que podemos cambiar el semiplano Ω por una región Π que esté acotada por la izquierda por una parábola, que denotamos por γ .

Elegimos un número real K tal que

$$K > \max \left\{ \frac{1}{r_0^p}, 3(|A| + B) \right\} > 1.$$

La última desigualdad de la expresión anterior se cumple pues hemos tomado $r_0 < 1$. Consideramos la región Π definida como

$$\Pi = \{x + iy : y^2 > 4K(K - x)\}.$$

Tenemos así que Π está acotada por la izquierda por la parábola $y^2 = 4K(K - x)$. Además, Π está contenida en W y se cumple que el disco abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < K\}$ no corta a Π .

A continuación, vamos a probar que el conjunto Π es invariante hacia delante bajo la función g . En primer lugar, escribimos

$$w = x + iy, \quad g(w) = X + iY, \quad \frac{A}{w} + \theta(w) = a + ib. \quad (3.11)$$

De la expresión de g dada en (3.9), deducimos que

$$X = x + p + a, \quad Y = y + b.$$

Luego, si $w \in \Pi$, entonces

$$\begin{aligned} Y^2 - 4K(K - X) &= (y + b)^2 - 4K(K - x - p - a) \\ &= (y^2 - 4K(K - x)) + b^2 + 2yb + 4K(a + p) \\ &\geq 4Kp - (2|yb| + 4K|a|). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Supongamos ahora que w es un punto de Π . Entonces, se cumple que $|w| > K > 1$ y, como consecuencia de esto, junto a las expresiones dadas en (3.10) y (3.11), tenemos que

$$2|yb| + 4K|a| \leq 6|w||a + ib| \leq 6(|A| + B) < 2K < 4Kp.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (3.12), deducimos que

$$Y^2 - 4K(K - X) > 0$$

y, por tanto, $g(w)$ pertenece a Π , terminando así la prueba de que Π es invariante hacia delante bajo g .

Para probar el apartado a) del Teorema 3.5.6, consideramos la región Π_0 definida como

$$\Pi_0 = \sigma^{-1}(\Pi).$$

Como $g = \sigma f \sigma^{-1}$, entonces $f = \sigma^{-1} g \sigma$ y se cumple que

$$f(\Pi_0) = \sigma^{-1} g \sigma(\Pi_0) = \sigma^{-1} g \sigma(\sigma^{-1}(\Pi)) \subset \sigma^{-1} g(\Pi) = \sigma^{-1}(\Pi) = \Pi_0.$$

Para ver que Π_0 es un pétalo para algún valor de t basta probar que σ^{-1} transforma la parábola $Y^2 = 4K(K - X)$ en la frontera de un pétalo. Para ello, consideramos $z = r e^{i\theta}$ un punto de S y $w = \rho e^{i\varphi}$ un punto de W , donde $w = \sigma(z)$. Entonces,

$$r^p e^{i\theta p} = z^p = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}.$$

Tenemos así que

$$\varphi = -p\theta, \quad \rho r^p = 1. \quad (3.13)$$

Observamos que el punto $\rho e^{i\varphi}$ pertenece a la parábola de ecuación $Y^2 - 4K(K - X) = 0$ si y solo si se cumple que

$$\rho^2 \sin^2 \varphi - 4K(K - \rho \cos \varphi) = 0,$$

esto es, si y solo si

$$\rho^2 \sin^2 \varphi + 4K\rho \cos \varphi - 4K^2 = 0.$$

Entendiendo la expresión anterior como una ecuación de segundo grado en función de ρ y resolviendo la misma en términos de φ , obtenemos que Π es de la forma

$$\rho = \frac{2K(1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = \frac{2K}{1 + \cos \varphi}.$$

Luego, en los puntos de la parábola dada por la ecuación $Y^2 = 4K(K - X)$, se cumple que $\rho(1 + \cos \varphi) = 2K$. Deducimos así que

$$\Pi = \{\rho e^{i\varphi} : 2K < \rho(1 + \cos \varphi)\}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en (3.13), obtenemos inmediatamente la siguiente descripción en polares para Π_0 ,

$$\Pi_0 = \left\{ r e^{i\theta} : 2K r^p < 1 + \cos(p\theta) \right\},$$

donde vemos claramente que Π_0 es un pétalo para $t = 1/2K$.

A continuación, vamos a probar que $g^n(w) \rightarrow \infty$ uniformemente en Π . Para ello, denotamos por $\Pi + t$ al conjunto obtenido al trasladar el conjunto Π una distancia t a la derecha, esto es,

$$\Pi + t = \{x + iy : y^2 > 4K(K + t - x)\}.$$

Vamos a probar que $g(\Pi + t) \subset \pi + (t + p/2)$:

Sea z un punto de $\Pi + t$. Entonces, usando la misma notación que en (3.11), deducimos que

$$\begin{aligned} Y^2 - 4K - \left(K + t + \frac{p}{2} - X\right) &= y^2 - 4K(K - x) + b^2 + 2yb \\ &\quad + 4K(p + a) - 2K(p + 2t). \end{aligned}$$

Como K , p y t son números positivos, entonces se cumple que $-2K(p + 2t) < 0$ y

$$y^2 - 4K(K - x) + b^2 + 2yb + 4K(p + a) - 2K(p + 2t) > 4Kp - (2|yb| + 4K|a|).$$

Por tanto,

$$Y^2 - 4K \left(K + t + \frac{p}{2} - X\right) > 2Kp - (2|yb| + 4K|a|) > 0.$$

Acabamos de probar que $g(\Pi + t) \subset \Pi + (t + p/2)$, pues la desigualdad anterior nos muestra que para cada punto z perteneciente a $\Pi + t$, el punto imagen $g(z) = X + iY$ está contenido en la región $\Pi + (t + p/2)$. Además, si $z \in \Pi$, entonces

$$g^n(z) \in \Pi + \frac{np}{2}.$$

Luego, si escribimos $g^n(z) = X + iY$, entonces dado z un punto de Π se cumple que

$$\begin{aligned} |g^n(z)|^2 &= X^2 + Y^2 \\ &> X^2 + 4K(K - X) \\ &> X^2 + 4K \left(K + \frac{np}{2} - X\right) \\ &= (X - 2K)^2 + 2npK > n. \end{aligned}$$

Deducimos así que $|g^n(z)| > \sqrt{n}$. Esto también lo podemos ver de forma geométrica puesto que la intersección del conjunto $\Pi + np/2$ con el disco cerrado $\{|z| \leq n\}$ es vacía. Tenemos así

que g^n converge a infinito uniformemente en Π . Esto implica el apartado b) del Teorema 3.5.6 para el caso en el que $k = 0$, pues $f^n = \sigma^{-1}g^n\sigma$. La misma prueba que hemos hecho para estudiar la convergencia de f en este pétalo se puede hacer para los demás pétalos.

A continuación vamos a probar el apartado c) del Teorema 3.5.6. Como vimos en la expresión (3.9), tenemos que

$$g(w) = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w).$$

Podemos escribir la iterada $(k + 1)$ -ésima de la expresión como

$$g^{k+1}(w) = g(g^k(w)) = g^k(w) + p + \frac{A}{g^k(w)} + \theta(g^k(w)). \quad (3.14)$$

De modo que, para cada número natural n , podemos escribir

$$g^n(w) = w + np + A \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{g^k(w)} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \theta(g^k(w)). \quad (3.15)$$

Ahora, tomamos un compacto cualquiera Q contenido en la región Π . Denotaremos por C_1, C_2, \dots a números positivos que únicamente dependen del compacto Q . Asumiremos pues que en cualquier expresión en la que aparezca alguno de los C_j , el punto w que esté implicado estará necesariamente en Q . Si $w \in \Pi$, entonces se cumple que

$$\left| \frac{A}{w} + \theta(w) \right| \leq \frac{|A| + B}{|w|} \leq \frac{|A| + B}{K} < \frac{1}{3}.$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g(w)) &\geq \operatorname{Re}(w) + p - \left| \frac{A}{w} + \theta(w) \right| \\ &> \operatorname{Re}(w) + p - \frac{1}{3} \\ &\geq \operatorname{Re}(w) + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Obtenemos así que

$$\operatorname{Re}(g^n(w)) > \operatorname{Re}(w) + \frac{np}{2}$$

y, a partir de un valor de n suficientemente grande, se cumple que

$$|g^n(w)| \geq C_1 n. \quad (3.16)$$

Recordamos que la acotación (3.10) establece que

$$|\theta(w)| = |v(\sigma^{-1}(w))| \leq B |\sigma^{-1}(w)|^{p+1} \leq \frac{B}{|w|^{1+\frac{1}{p}}}.$$

Con esta y con la acotación dada en (3.16) deducimos que

$$|\theta(g^n(w))| \leq \frac{B}{|g^n(w)|^{1+\frac{1}{p}}} \leq \frac{C_2}{n^{1+1/p}}. \quad (3.17)$$

Finalmente, aplicando las cotas dadas en las expresiones (3.15), (3.16) y (3.17), obtenemos que

$$|g^n(w) - np| \leq C_4 \log n, \quad (3.18)$$

puesto que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log(n)$$

y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/p}}$$

es convergente. Esta desigualdad controla la derivada vertical de $g^n(z)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Con ella, deducimos que el argumento de $g^n(w)$ tiende a cero localmente uniformemente en Π cuando $n \rightarrow +\infty$. Esto se debe a que el punto $g^n(w)$ pertenece al disco centrado en el punto np del eje real y de radio $C_4 \log n$ y, por tanto, el módulo de la tangente del argumento de $g^n(w)$ tiende a cero, lo que implica que el argumento de $g^n(w)$ tiende a cero. Ahora bien, como $g = \sigma f \sigma^{-1}$, se cumple que

$$g \circ \sigma = \sigma \circ f.$$

Luego,

$$g^n \circ \sigma = \sigma \circ f^n$$

y, tomando $w = \sigma(z)$ tenemos que el producto de la iterada n -ésima de g con la iterada n -ésima de f elevada a p es igual a uno, esto es,

$$g^n(w) (f^n(z))^p = 1.$$

Finalmente, desarrollando la expresión del argumento de $f^n(z)$ y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, deducimos que

$$\arg(f^n(z)) = -\frac{1}{p} \arg(g^n(w)) \rightarrow 0$$

en $\Pi_0(t)$, terminando así la prueba del apartado c) del Teorema 3.5.6.

El apartado d) del Teorema 3.5.6 es una consecuencia inmediata del Lema 3.5.2. Pasamos pues a probar el apartado e), el último de este teorema. Para ello, vamos a probar que la aplicación $g: \Pi \rightarrow \Pi$ es conjugada de una traslación. A partir de este resultado, el

apartado e) del Teorema 3.5.6 sigue inmediatamente y eso terminaría la demostración del Teorema 3.5.6.

Recordemos que la expresión (3.15) anterior establecía que

$$g^n(w) = w + np + A \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{g^k(w)} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \theta(g^k(w)).$$

Reemplazando $g^k(w)$ por kp en la expresión anterior y desarrollando adecuadamente, obtenemos que

$$g^n(w) = w + np + \frac{A}{p} \log n + O(1).$$

Ahora, para cada n , definimos las funciones u_n como

$$g^n(w) = np + \frac{A}{p} \log n + u_n(w). \quad (3.19)$$

Si probamos que la sucesión dada por (u_n) converge uniformemente en Π a una cierta función u que es holomorfa y univalente en Π , habremos terminado la prueba de que $g: \Pi \rightarrow \Pi$ es conjugada de una traslación y, con ello, habremos terminado la prueba del teorema. Veamos por qué:

Si la sucesión (u_n) converge uniformemente en Π a una cierta función u que es holomorfa y univalente en Π , entonces se cumple que al simplificar y tomar límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (n+1)p + \frac{A}{p} \log(n+1) + u_{n+1}(w) &= g^{n+1}(w) \\ &= g^n(g(w)) \\ &= np + \frac{A}{p} \log n + u_n(g(w)), \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente fórmula para u :

$$u(w) + p = u(g(w)). \quad (3.20)$$

Como f es inyectiva en un entorno del origen, entonces g es inyectiva en Π (si K es suficientemente grande). Además, para cada n , tenemos que g^n es inyectiva y, por tanto, u_n también. Aplicando el Teorema de Hurwitz deducimos que o bien u es inyectiva o bien es constante. Pero como la relación dada por

$$u(w) + p = u(g(w))$$

se cumple para $p \neq 0$, entonces u no puede ser constante. Por tanto, como se satisface la relación $u \circ g(z) = u(z) + p$ y u no es una función constante, podemos tomar $z = u^{-1}(w)$ en la expresión anterior y deducir que

$$u \circ g \circ u^{-1}(w) = w + p,$$

esto es, la restricción de g a Π es conjugada con la traslación $w \rightarrow w + p$ definida de $u(\Pi)$ en $u(\Pi)$.

Ya solo nos falta probar que la sucesión (u_n) converge localmente uniformemente en Π a cierta función holomorfa e inyectiva. Veamos:

Como

$$g^n(w) = np + \frac{A}{p} \log n + u_n(w),$$

se cumple que

$$u_{n+1}(w) - u_n(w) = (g^{n+1}(w) - g^n(w)) - p - \frac{A}{p} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

y, como sabemos que

$$g^{k+1}(w) = g(g^k(w)) = g^k(w) + p + \frac{A}{g^k(w)} + \theta(g^k(w)),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} u_{n+1}(w) - u_n(w) &= \frac{A}{g^n(w)} + \theta(g^n(w)) - \frac{A}{p} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= A \left(\frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np} \right) + \theta(g^n(w)) + \frac{A}{p} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Tenemos que probar que cada una de las series de funciones siguientes

$$\sum_n \left| \frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np} \right|, \quad \sum_n |\theta(g^n(w))|, \quad \sum_n \left| \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \quad (3.21)$$

converge localmente uniformemente en cada compacto Q contenido en Π .

La convergencia de la segunda serie que aparece en la expresión (3.21) es consecuencia de la cota dada en (3.17). Por otro lado, como consecuencia del Teorema del Valor Medio aplicado a la función dada por $z \mapsto z - \log(1+z)$ en el intervalo $[0, 1/n]$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\left| \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

con la que concluimos la convergencia de la tercera serie dada en (3.21). Finalmente, como vimos en la expresión (3.18) que

$$|g^n(w) - np| \leq C_4 \log n$$

y en la expresión (3.16) que

$$|g^n(w)| \geq C_1 n,$$

tenemos que

$$\left| \frac{1}{g^n(w)} - \frac{1}{np} \right| = \left| \frac{np - g^n(w)}{np g^n(w)} \right| \leq C_6 \frac{\log n}{n^2},$$

concluyendo así la convergencia de la primera serie dada en (3.21). Terminamos así la prueba del Teorema 3.5.6. □

El Teorema 3.5.6, con la hipótesis (3.8), describe las dinámicas de R en los pétalos que rodean al origen, siendo éste un punto fijo racionalmente indiferente de f . Para terminar esta sección, vamos a enunciar otros resultados que también describen el comportamiento de las iteradas de f en un entorno de un punto racionalmente indiferente pero sin exigirle a f que satisfaga la condición dada en (3.8). Las pruebas de estos resultados utilizan las mismas técnicas que hemos visto en la prueba del Teorema 3.5.6, y podemos consultarlas en [9, p. 122-132].

Teorema 3.5.7. *Sea f una función analítica en un entorno del origen que satisface la igualdad*

$$f(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2}), \quad a \neq 0,$$

cuando $z \rightarrow 0$. Entonces, en un entorno del origen, f es conjugada con una función de la forma

$$F(z) = z - z^{p+1} + O(z^{2p+1})$$

Los Teoremas 3.5.6 y 3.5.7 describen el comportamiento de las iteradas de cualquier aplicación de la forma

$$f(z) = z + az^{p+1} + \dots$$

sobre los p pétalos de f en el origen. Si en lugar de considerar f una función analítica consideramos una función racional R , se obtienen resultados sobre la relación entre los pétalos y el conjunto de Fatou de R .

Teorema 3.5.8. *Sea R una función racional. Supongamos que*

$$R(z) = z + az^{p+1} + \dots$$

no se anula en un entorno del origen. Sean Π_k los pétalos de R y, para cada k , consideramos F_k la componente conexa de $F(R)$ que contiene a Π_k . Entonces:

1. *Si $n \rightarrow \infty$, entonces $R^n(z) \rightarrow 0$ y $\arg(R^n(z)) \rightarrow 2\pi k/p$ sobre F_k .*
2. *Las componentes conexas F_0, \dots, F_{p-1} de $F(R)$ son distintas.*

Como consecuencia de estos resultados, observamos que si el origen es un punto fijo racionalmente indiferente, entonces pertenece a la frontera de las $2p$ componentes F_k de $F(R)$ que aparecen en el Teorema 3.5.8. Cada una de las componentes F_k contiene un pétalo Π_k que forma un ángulo de $2\pi/p$ en el origen. La aplicación R lleva cada F_k en sí mismo y además $R^n(z) \rightarrow 0$ localmente uniformemente en cada F_k . Como la convergencia al origen se hace a través de un camino que es asintótico al eje de cada pétalo, se cumple que diferentes pétalos pertenecen a diferentes componentes conexas de $F(R)$. Además, para cada punto z de F_k , eventualmente la órbita $R^n(z)$ pertenece al pétalo Π_k , o dicho de otro modo, la unión de las imágenes inversas de Π_k cubre todo F_k .

A su vez, observamos que los puntos racionalmente indiferentes pueden pertenecer a la frontera de otras componentes de F distintas de las F_k dadas en el teorema. De hecho, si $P(z) = z + \dots$ es un polinomio de grado mayor que uno, entonces el origen no pertenece solo a la frontera de las componentes F_k , sino que también pertenece a la frontera de la componente completamente invariante F_∞ que contiene al punto del infinito, que es distinta de las F_k , puesto que $P_n \rightarrow \infty$ sobre la componente F_∞ . Como F_∞ es conexa, debe contener una fina entrada que se prolonga hasta el origen “entre” los pétalos.

Finalmente, se puede extender el Teorema 3.5.8 al caso en el que $R(0) = 0$ y $R'(0)$ sea una raíz de la unidad distinta de uno, esto es, el caso donde R sea una función racional de la forma

$$R(z) = az + bz^{p+1} + \dots,$$

donde $a = e^{2\pi ir/q}$, $a \neq 1$ y r y q son enteros primos entre sí.

Teorema 3.5.9. *Sea $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ un ciclo racionalmente indiferente de R y supongamos que el multiplicador de R^m en cada punto del ciclo es $\exp(2\pi ir/q)$, siendo r y q dos enteros primos entre sí. Entonces, existen un número natural k y F_1, \dots, F_{mkq} componentes distintas de $F(R)$, tales que en cada punto del ciclo ζ_j , existen exactamente kq de tales componentes conteniendo cada una de ellas un pétalo de ángulo $2\pi/kq$ centrado en el punto ζ_j .*

Más aún, R actúa como una permutación τ sobre el conjunto de componentes $\{F_1, \dots, F_{mkq}\}$, donde τ es una composición de k ciclos disjuntos de longitud mq y se cumple que un pétalo centrado en ζ_j es enviado por la acción de R a un pétalo centrado en ζ_{j+1} .

3.6. Ciclos irracionalmente indiferentes.

Terminamos este capítulo clasificando los puntos irracionalmente indiferentes de una función racional.

Definición 3.6.1. Una función analítica f es linealizable en un entorno de un punto fijo ζ si f es conjugada con la función lineal

$$f_0(z) = \zeta + f'(\zeta)(z - \zeta)$$

en un entorno del punto ζ . Esto es, si existen un entorno N de ζ y una función g que fije ζ tal que f es analítica en N , g es analítica e inyectiva en $N \cup f(N)$ y se cumple que $g \circ f \circ g^{-1} = f_0$ en $g(N)$.

En este capítulo hemos visto que R es linealizable en un entorno de cada punto fijo atractivo y repulsivo. En un entorno de un punto fijo ζ indiferente, la condición de que R sea o no linealizable depende únicamente de si ζ pertenece al conjunto de Julia o de Fatou de R .

Teorema 3.6.2. Sea ζ un punto fijo indiferente de una función racional R . Entonces, R es linealizable en un entorno de ζ si y solo si ζ pertenece a $F(R)$.

Demostración. Supongamos que R es linealizable cerca de un punto fijo indiferente ζ . Entonces, podemos escribir

$$g \circ R \circ g^{-1} = \varphi,$$

donde φ es una rotación alrededor de ζ y g es una función analítica e inyectiva cerca de ζ que fija ζ . Sea D un disco centrado en ζ lo suficientemente pequeño. Entonces se cumple que $\varphi(D) = D$ y, por tanto, R transforma $g^{-1}(D)$ sobre sí mismo de forma sobreyectiva. Deducimos así que la familia de iteradas de R es normal en el abierto $g^{-1}(D)$ y, por tanto, ζ pertenece al conjunto de Fatou de R . Acabamos de probar que si R es linealizable en un entorno de ζ entonces ζ es un punto del conjunto de Fatou de R .

Por otro lado, supongamos que ζ es un punto de $F(R)$. Vamos a probar que R es linealizable en un entorno de ζ . Conjugando con una transformación de Möbius adecuada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\zeta = 0$. Como el origen pertenece a $F(R)$,

existe un entorno abierto del origen donde la familia de iteradas de R es equicontinua. Entonces, existe un entorno \mathcal{N} del origen tal que para todo número natural n y para cualquier punto z de \mathcal{N} , se cumple que

$$|R^n(z)| = |R^n(z) - R^n(0)| < 1. \quad (3.22)$$

Sea $\alpha = R'(0)$. Como el origen es un punto fijo indiferente, se cumple que el módulo de α es uno y, para todo número natural n mayor que uno, definimos la función

$$T_n(z) = \frac{1}{n} \left(z + \frac{R(z)}{\alpha} + \cdots + \frac{R^{n-1}(z)}{\alpha^{n-1}} \right).$$

Como el módulo de α es uno y se cumple que $(R^k)'(0) = \alpha^k$, tenemos que $T_n'(0) = 1$. Además, como consecuencia de la expresión dada en (3.22), para todo punto z perteneciente a \mathcal{N} , se cumple que

$$|T_n(z)| \leq 1. \quad (3.23)$$

Para todo $n \geq 1$, las funciones T_n satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\alpha} T_n(R(z)) + z &= (n+1)T_{n+1}(z) \\ &= nT_n(z) + \frac{R^n(z)}{\alpha^n} \end{aligned}$$

y, despejando adecuadamente en la expresión anterior, deducimos que

$$T_n(R(z)) - \alpha T_n(z) = -\frac{\alpha z}{n} + \frac{R^n(z)}{n\alpha^{n-1}} \longrightarrow 0, \quad (3.24)$$

si $n \rightarrow \infty$, uniformemente en \mathcal{N} . Como consecuencia de la expresión dada en (3.23), la sucesión (T_n) es normal en \mathcal{N} . De modo que, para cierta sucesión creciente de números naturales (n_k) , la sucesión T_{n_k} converge localmente uniformemente en \mathcal{N} a una cierta función analítica g que, como consecuencia de la expresión dada en (3.24), satisface la relación

$$g(R(z)) = \alpha g(z),$$

para todo z perteneciente a \mathcal{N} . Como se cumple que $T_n'(0) = 1$, para todo número natural n , entonces se da la igualdad $g'(0) = 1$. Por tanto, g no es una función constante y además es inyectiva en un cierto entorno del origen. Acabamos de probar así que si ζ pertenece al conjunto de Fatou de R , entonces R es linealizable. □

3.7. Anexo: Puntos fijos.

Sea R una función racional no constante definida sobre la esfera de Riemann. Podemos escribir

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde P y Q son polinomios primos entre sí. Decimos que $\zeta \in \mathbb{C}_\infty$ es un punto fijo de R si se cumple que

$$R(\zeta) = \zeta.$$

Observamos que ∞ es un punto fijo de R si y solo si $\text{gr}(P) > \text{gr}(Q)$. Por otro lado, si $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de R , entonces $Q(\zeta) \neq 0$ y, se cumple que

$$P(\zeta) = \zeta Q(\zeta). \quad (3.25)$$

Recíprocamente, si P y Q satisfacen la expresión dada en (3.25), entonces $Q(\zeta) \neq 0$ (si no, P y Q se anularían simultáneamente en ζ , algo que no puede ocurrir pues P y Q son coprimos) y, por tanto, ζ es un punto fijo de R . De modo que, los puntos fijos de R en \mathbb{C} son las soluciones de la ecuación:

$$P(z) - zQ(z) = 0. \quad (3.26)$$

Observamos que la ecuación anterior no tiene por qué tener soluciones en \mathbb{C} (por ejemplo, si $R(z) = z + 1/z$).

Una vez que somos capaces de localizar los puntos fijos de R , queremos saber cuántos tiene, esto es, conocer su multiplicidad. Si estos son contados de la misma forma que los ceros de una función analítica, entonces se cumple que R tiene exactamente $d + 1$ puntos fijos en \mathbb{C}_∞ , donde d es el grado de R .

A partir de este momento, consideraremos f una función analítica de la esfera compleja. Sean $\zeta \in \mathbb{C}$ un punto fijo de f y g la función dada por

$$g(z) = f(z) - z.$$

Entonces, f tiene k puntos fijos en ζ si y solo si g tiene un cero de orden k en ζ . Observamos que las nociones de número de puntos fijos y valencia no van siempre de la mano. Por ejemplo, el polinomio $P(z) = z + z^3$ tiene, en el origen, tres puntos fijos; sin embargo, su valencia en el origen es uno, o el polinomio $Q(z) = z^3$ tiene un único punto fijo en el origen pero con valencia tres.

La definición anterior no se aplica al caso en el que ∞ es un punto fijo de R . Para extender la definición, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 3.7.1. Sea ζ un punto de \mathbb{C} que es un punto fijo de una función analítica f y sea φ una función analítica, inyectiva y acotada en un entorno de ζ . Entonces, $\varphi f \varphi^{-1}$ tiene en $\varphi(\zeta)$ el mismo número de puntos fijos que f en ζ .

Demostración. Supongamos que f tiene k puntos fijos en ζ . Consideramos la siguiente igualdad:

$$\frac{\varphi f \varphi^{-1}(z) - z}{(z - \varphi(\zeta))^k} = \left(\frac{\varphi f \varphi^{-1}(z) - \varphi \varphi^{-1}(z)}{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)} \right) \left(\frac{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)}{(\varphi^{-1}(z) - \zeta)^k} \right) \left(\frac{(\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1} \varphi(\zeta))^k}{(z - \varphi(\zeta))^k} \right).$$

Basta probar que, en la expresión anterior, cada factor de la derecha tiene límite finito y distinto de cero cuando z tiende a $\varphi(\zeta)$. Veamos:

El primer término que analizamos es

$$\frac{\varphi f \varphi^{-1}(z) - \varphi \varphi^{-1}(z)}{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)}. \quad (3.27)$$

Éste es de la forma

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v},$$

de modo que, aplicando la Fórmula Integral de Cauchy en un ciclo que rodea a $\varphi(\zeta)$ obtenemos que la expresión dada en (3.27) tiende a $\varphi'(\zeta)$, cuando $f \varphi^{-1}(z)$ y $\varphi^{-1}(z)$ tienden a ζ .

El segundo término que analizamos es

$$\frac{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)}{(\varphi^{-1}(z) - \zeta)^k}. \quad (3.28)$$

Como tenemos por hipótesis que f tiene k puntos fijos en ζ , entonces el límite de expresión dada en (3.28) cuando z tiende a $\varphi(\zeta)$ es finito y distinto de cero.

Finalmente, el tercer término que estudiamos,

$$\frac{(\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1} \varphi(\zeta))^k}{(z - \varphi(\zeta))^k} \quad (3.29)$$

tiende a $(\varphi'(\zeta))^{-k}$ si z tiende a $\varphi(\zeta)$. Concluimos así que $\varphi f \varphi^{-1}$ tiene en $\varphi(\zeta)$ el mismo número de puntos fijos que f en ζ .

□

Observación. Siguiendo con la notación del resultado anterior, sean φ_1 y φ_2 dos funciones analíticas inyectivas y acotadas en un entorno de ζ . Entonces $\varphi_1 f \varphi_1^{-1}$ tiene en $\varphi_1(\zeta)$ el

mismo número de puntos fijos que f en ζ que, a su vez, tiene el mismo número de puntos fijos en ζ que $\varphi_2 f \varphi_2^{-1}$ en $\varphi_2(\zeta)$. Esto es, el resultado anterior es independiente de la función φ escogida.

A partir del Lema 3.7.1 podemos generalizar la definición de punto fijo de R al caso en el que $z = \infty$ de la siguiente forma: si $R(\infty) = \infty$, podemos conjugar R con una función φ que satisfaga las hipótesis del lema y tal que $\varphi(\infty) = \zeta \in \mathbb{C}$ y estudiar así los puntos fijos de $\varphi f \varphi^{-1}$ en $z = \zeta$.

En el siguiente resultado, recogemos el caso particular del Lema 3.7.1, cuando $f = R$ es una función racional:

Teorema 3.7.2. *Sean ζ un punto fijo de una función racional R y g una transformación de Möbius. Entonces, gRg^{-1} tiene el mismo número de puntos fijos en $g(\zeta)$ que R en ζ .*

Teorema 3.7.3. *Sea R una función racional de grado, al menos, 1. Entonces, R tiene exactamente $d + 1$ puntos fijos en \mathbb{C}_∞ .*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R(\infty) \neq \infty$, pues hemos visto que toda función racional R es conjugada de una función racional S que no fija al punto del infinito, donde ambas funciones, R y S , tienen el mismo grado (éste se conserva por conjugación) y, por tanto, tienen el mismo número de puntos fijos.

Ahora, escribimos $R = P/Q$, donde P y Q son polinomios primos entre sí. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ un punto fijo de R . Como $Q(\zeta) \neq 0$, el número de ceros de $(z) - z$ en ζ es exactamente, el mismo número de ceros de $P(z) - zQ(z)$ en ζ . De modo que, el número de puntos fijos de R es, exactamente, el número de soluciones de la ecuación dada por $P(z) = zQ(z)$ en \mathbb{C} . Como R no fija al punto del infinito, tenemos que

$$\text{gr}(P) \leq \text{gr}(Q) = \text{gr}(R).$$

Por tanto, el grado de $P(z) - zQ(z)$ es, exactamente, $\text{gr}(R) + 1$, terminando así la demostración. □

Definición 3.7.4. *Sean R una función racional y $\zeta \in \mathbb{C}$ un punto fijo de R . Llamamos multiplicador de R en ζ , que denotamos por $m(R, \zeta)$, a la derivada de R evaluada en ζ . Esto es,*

$$m(R, \zeta) = R'(\zeta).$$

Observamos que el multiplicador de R en ζ es invariante por conjugación (siempre que el punto fijo correspondiente siga estando en \mathbb{C}). De este modo, definimos:

Definición 3.7.5. Sean R una función racional que fija al punto del infinito y g una transformación de Möbius tal que $g(\infty) \in \mathbb{C}$. Definimos el multiplicador de R en ∞ como

$$m(R, \infty) = m(gRg^{-1}, g(\infty)).$$

Acabamos de definir un multiplicador invariante por conjugación de R en cualquiera de sus puntos fijos.

Para ilustrar esto, supongamos que

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m},$$

donde $a_nb_m \neq 0$ y $n > m$. Luego, ∞ es un punto fijo de R . Vamos a hallar el valor del multiplicador de R en el punto del infinito, $m(R, \infty)$.

Por definición, $m(R, \infty)$ es la derivada de $S(z) = 1/R(1/z)$ en el origen. Esto es,

$$S'(0) = \begin{cases} \frac{b_m}{a_n}, & \text{si } n = m + 1; \\ 0, & \text{si } n > m + 1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$R'(\infty) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{si } \zeta \neq \infty; \\ \frac{1}{R'(\infty)}, & \text{si } \zeta = \infty. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $R(z) = 3z$, entonces ∞ es un punto fijo atractivo de R y, en este caso, $m(R, \infty) = 1/3$.

Para terminar esta sección estudiamos el número de puntos fijos de una iteración f^n de f en un punto fijo de f .

Teorema 3.7.6. Supongamos que f es una función analítica que se puede escribir como

$$f(z) = az + b_1z^{r+1} + \dots \tag{3.30}$$

en un entorno del origen, donde $a \neq 0$, $b_1 \neq 0$ y $r \geq 1$. Entonces,

$$f^n(z) = a^n z + b_n z^{r+1} + \dots, \tag{3.31}$$

donde

$$b - n = a^{n-1} b_1 \left(1 + a^r + a^{2r} + \dots + a^{(n-1)r} \right).$$

Demostración. Razonando por inducción en n , es fácil ver que si f es una función de la forma (3.30), entonces la iterada n -ésima de f es de la forma (3.31). Sustituyendo las series de potencias de f , f^n y f^{n+1} en la relación $f^{n+1}(z) = f(f^n(z))$ e identificando los coeficientes término a término, obtenemos que

$$b_{n+1} = ab_n + a^{n(r+1)}b_1.$$

Si escribimos $\beta_n = b_n/a^n$, entonces se cumple que

$$\beta_{n+1} = \beta_n + a^{nr}b_1.$$

Resolviendo la ecuación anterior para β_n obtenemos directamente la expresión de b_n , para cada n . □

Para terminar, los siguientes resultados se deducen inmediatamente del Teorema 3.7.6:

Corolario 3.7.7. *Si $a = 1$, entonces $b_n = nb_1$.*

Demostración. Para probar este resultado, basta sustituir $a = 1$ en la siguiente expresión:

$$b_n = a^{n-1}b_1 \left(1 + a^r + a^{2r} + \dots + a^{(n-1)r}\right).$$

□

Corolario 3.7.8. *Se cumple que $b_n = 0$ si y solo si $a^r \neq 1$ y $a^{nr} = 1$.*

Demostración. Se cumple que $b_n = 0$ si y solo si

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{kr} = \frac{1 - a^{nr}}{1 - a^r} = 0,$$

pues $a \neq 0$ y $b_1 \neq 0$. □

Si $a^n \neq 1$, entonces $a \neq 1$. De modo que, si f^n tiene un único punto fijo en el origen, entonces f también. Llegamos así al siguiente resultado:

Corolario 3.7.9. *La iteración f^n de f tiene, al menos, tantos puntos fijos en el origen como f y, si tiene más, entonces se cumple que $a \neq 1$ pero $a^n = 1$.*

Capítulo 4

Componentes invariantes hacia delante

El objetivo de este capítulo es proporcionar una clasificación de las componentes invariantes hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional. A lo largo de este capítulo consideraremos R una función racional de grado, al menos, dos y denotaremos por $F(R)$ a su conjunto de Fatou.

4.1. Las cinco posibilidades.

En la siguiente definición se incluyen las cinco posibilidades de componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional.

Definición 4.1.1. Sea F_0 una componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de R . Decimos que la componente F_0 es:

- i) Atractiva, si contiene un punto fijo atractivo de R .*
- ii) Súper atractiva, si contiene un punto fijo súper atractivo de R .*
- iii) Parabólica (o un dominio de Leau), si la frontera de F_0 contiene un punto fijo racionalmente indiferente de R , ζ , y se cumple que $R^n \rightarrow \zeta$ en F_0 .*
- iv) Un disco de Siegel, si $R: F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada con una rotación Euclídea del disco unidad en sí mismo.*
- v) Un anillo de Herman, si $R: F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada con una rotación euclídea de algún anillo en sí mismo.*

Observación. En los apartados iv) y v) de la Definición 4.1.1, las rotaciones son de orden infinito pues, en otro caso, existiría n tal que R^n fuese la identidad y, entonces, R sería una función racional de grado uno.

Sabemos que las componentes atractivas, súper atractivas y parabólicas existen y la existencia de los discos de Siegel se puede consultar en el Capítulo 6 de [9]. La prueba de la existencia de los anillos de Herman la comentaremos en la Sección 4.4 de este capítulo.

El resultado que aparece a continuación es el más relevante de este capítulo. Éste establece que las cinco posibilidades de componentes invariantes hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional dadas en la Definición 4.1.1 son las únicas.

Teorema 4.1.2. *Una componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional es de alguna de las cinco posibilidades recogidas en la Definición 4.1.1.*

El resto del capítulo está dedicado a probar el Teorema 4.1.2. A continuación, comentaré brevemente la estrategia general de la misma.

Podemos diferenciar las cinco posibilidades planteadas en la Definición 4.1.1 del siguiente modo: sea F_0 la componente del conjunto de Fatou que queremos clasificar. Podemos considerar aquellas funciones que se pueden expresar como el límite de alguna subsucesión de R^n en F_0 . De este modo, obtenemos que en i) y en ii), el único límite posible es el punto fijo ζ de R que se encuentra en F_0 . En iii), la única función límite posible es el punto fijo racionalmente indiferente ζ de R que se encuentra en ∂F_0 . Finalmente, en iv) y en v), existe una función límite no constante. Para completar la descripción, observamos que la única diferencia entre i) y ii) es si el punto fijo de R , ζ , contenido en F_0 es un punto crítico de R o no. Por otro lado, podemos distinguir iv) y v) según la conectividad de F_0 o según si existe o no algún punto fijo de R en F_0 .

4.2. Funciones límite.

El objetivo de esta sección es estudiar una clase de funciones llamada *funciones límite*. Para facilitar la notación, denotaremos por F_0 a una componente conexa (no necesariamente invariante hacia delante) del conjunto de Fatou de una función racional R . Estas funciones surgen al estudiar la convergencia localmente uniforme de subsucesiones de (R^n) en F_0 .

Definición 4.2.1. *Una función φ es una función límite en una componente F_0 de F si existe una subsucesión de (R^n) que converge localmente uniformemente a φ en F_0 . Denotamos por $\mathcal{F}(F_0)$ a la clase de funciones límite en F_0 .*

Como consecuencia del Teorema 1.4.5, tenemos que la familia de iteradas de R , $(R^n)_{n \geq 1}$, es normal en F_0 y, por tanto, la clase de funciones límite en F_0 nunca es vacía; y, como consecuencia del Teorema 1.4.6, se cumple que toda función perteneciente a la clase de funciones límite de F_0 , $\mathcal{F}(F_0)$, es analítica en F_0 . Si F_0 es invariante hacia delante y φ es una función límite en F_0 , entonces $\varphi(F_0)$ está contenido en la clausura de F_0 . En particular, si φ es la función que toma el valor constante ζ , entonces ζ pertenece a la unión de F_0 y su frontera, $F_0 \cup \partial F_0$. Además, si z es un punto de F_0 , entonces $R(z)$ también lo es (pues F_0 es invariante hacia delante) y, por tanto, se cumple que

$$R(\zeta) = R\left(\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(z)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} R^n(R(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(R(z)) = \varphi(R(z)) = \zeta.$$

Acabamos de probar así el siguiente resultado:

Lema 4.2.2. *Si F_0 es invariante hacia delante y existe una función límite que toma un valor constante ζ , entonces ζ es un punto fijo de R .*

Si la componente F_0 es (súper)-atractiva y tiene un punto fijo ζ , entonces R^n converge a ζ localmente uniformemente en F_0 y, por tanto, la clase $\mathcal{F}(F_0)$ contiene una única función. Esto también ocurre si la componente F_0 es parabólica, esto es, si existe ζ un punto fijo racionalmente indiferente de R en la frontera de F_0 y $R^n \rightarrow \zeta$ en F_0 , entonces la clase de funciones límite en F_0 , $\mathcal{F}(F_0)$, también contiene una única función.

A continuación, trataremos de diferenciar las componentes i), ii) y iii) de iv) y v) en algún sentido. Antes de ello, recordamos que un *automorfismo* de un dominio D es una aplicación biyectiva y analítica definida de D en sí mismo. Denotamos por $\text{Aut}(D)$ al grupo de automorfismos de D .

Teorema 4.2.3. *Sea F_0 una componente invariante hacia delante de F y supongamos que toda función de $\mathcal{F}(F_0)$ es constante. Entonces, $\mathcal{F}(F_0)$ contiene exactamente una función, que toma el valor constante ζ , donde $R(\zeta) = \zeta$ y $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente de F_0 .*

Teorema 4.2.4. *Sea F_0 una componente invariante hacia delante de F . Si $\mathcal{F}(F_0)$ contiene alguna función no constante, entonces R es un automorfismo de F_0 y la función identidad, que denotamos por I , pertenece a la clase de funciones límite de F_0 .*

Demostración del Teorema 4.2.3. Sea d el grado de R . Sabemos por el Teorema 3.7.3 que R tiene, a lo más, $d + 1$ puntos fijos en \mathbb{C}_∞ . Tenemos por hipótesis que todas las funciones de la clase de funciones límite de F_0 son constante, por tanto, aplicando el Lema 4.2.2, deducimos que $\mathcal{F}(F_0)$ contiene, a lo más, $d + 1$ funciones.

En primer lugar, supongamos que existe una función en $\mathcal{F}(F_0)$ que toma el valor constante ζ , donde ζ es un punto de F_0 . Entonces, $R(\zeta) = \zeta$ y, tomando subsucesión si es necesario, se cumple que $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en F_0 . Sea N un disco abierto centrado en el punto ζ tal que su clausura esté contenida en F_0 y sea \overline{N} su clausura. Entonces, existe un número natural m , tal que $R^m(\overline{N})$ está estrictamente contenido en N . Aplicando el Lema de Schwarz, deducimos que $|(R^m)'(\zeta)| < 1$. Como R deja fijo a ζ , entonces se cumple que

$$|R'(\zeta)|^m = |(R^m)'(\zeta)| < 1$$

y, por tanto, ζ es un punto fijo (súper)-atractivo de R . De este modo, concluimos que la sucesión de iteradas, $(R^n)_{n \geq 1}$ converge localmente uniformemente a ζ en F_0 y, en este caso, hemos visto que la clase de funciones límite de F_0 tiene una única función cuyo valor es constantemente ζ .

Supongamos ahora que $\mathcal{F}(F_0)$ tiene una cantidad finita de funciones constantes donde cada una de ellas toma un valor que es, a su vez, un punto fijo de R en la frontera de F_0 . Sea K un compacto conexo de F_0 tal que existe un par de puntos de la forma w y $R(w)$ contenidos en él. De este modo, tenemos que $R(K)$ corta a K , $R^2(K)$ corta a $R(K)$, etc. En general, se cumple que $R^{j+1}(K) \cap R^j(K) \neq \emptyset$ y, por tanto, el conjunto

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} R^n(K) \tag{4.1}$$

es conexo.

Ahora, consideramos ζ_1, \dots, ζ_r los puntos fijos de R en ∂F_0 (estos son una cantidad finita) y V_1, \dots, V_r entornos dos a dos disjuntos de ζ_1, \dots, ζ_r respectivamente. Si existiera una sucesión estrictamente creciente de enteros k_j tal que cada $R^{k_j}(K)$ cortara al complementario de $\bigcup_{j=1}^r V_j$, entonces ninguna subsucesión de (R^{k_j}) convergería localmente uniformemente a ningún punto ζ_1, \dots, ζ_r , llegando así a una contradicción. Por tanto, existe un número natural n_0 tal que

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} R^n(K) \subset \bigcup_{j=1}^r V_j.$$

Como el conjunto dado en (4.1) es conexo y se cumple que

$$V_i \cap V_j = \emptyset,$$

para todo $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$, entonces existe un número entero $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que el conjunto dado en (4.1) está contenido en V_j . Podemos suponer sin pérdida de generalidad

que $j = 1$ y, en ese caso, tenemos que

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} R^n(K) \subset V_1.$$

Deducimos así que ζ_1 es la única función límite posible en F_0 . Además, como a partir de un n suficientemente grande se cumple que

$$R^n(K) \subset V_1,$$

tenemos que $R^n \rightarrow \zeta_1$ uniformemente en K y, por tanto, R^n converge localmente uniformemente a ζ_1 en F_0 . □

Demostración del Teorema 4.2.4. Partimos de la hipótesis de que toda función de la clase de funciones límite de F_0 es analítica y no constante. En primer lugar, vamos a probar que si φ es una función de $\mathcal{F}(F_0)$, entonces se cumple que

$$\varphi(F_0) \subset F_0. \tag{4.2}$$

Como φ es una función límite de F_0 , existe una sucesión de números naturales n_j tal que $R^{n_j} \rightarrow \varphi$ localmente uniformemente en F_0 . Tomamos un punto w de F_0 . Como φ no es una función constante, los ceros de la función $z \mapsto g_1(z) = \varphi(z) - \varphi(w)$ son aislados. Ahora, consideramos un disco cerrado centrado en w y contenido en F_0 ; y llamamos C a la frontera del mismo, donde se cumple que $\varphi \neq \varphi(w)$. Como $R^{n_j} \rightarrow w$ localmente uniformemente en F_0 , entonces $R^{n_j} \rightarrow w$ uniformemente en el compacto que acabamos de considerar y, por tanto, para todo $z \in C$, se cumple que a partir de un j suficientemente grande,

$$|R^{n_j} - \varphi(z)| < \inf_C |\varphi(z) - \varphi(w)|.$$

Aplicando el Teorema de Rouché, deducimos que las funciones g_1 y g_2 dadas por $\varphi(z) - \varphi(w)$ y $R^{n_j} - \varphi(w)$ respectivamente tienen el mismo número de ceros en el interior de C (contando multiplicidades). Como g_1 se anula en w , deducimos que $\varphi(w)$ pertenece al conjunto $R^{n_j}(F_0)$ y, como F_0 es invariante hacia delante bajo R , entonces $\varphi(w)$ pertenece a F_0 . Acabamos de probar así la contención dada en (4.2).

Consideramos ahora la función no constante φ y la sucesión de enteros (n_j) como antes. Tomando subsucesión si es necesario y renombrando adecuadamente, obtenemos que

$$m_j = n_j - n_{j-1} \rightarrow +\infty,$$

si $j \rightarrow \infty$. De este modo, se cumple que la familia de iteradas $\{R^{m_j}\}$ es normal en F_0 (pues la familia $\{R^n\}_{n \geq 1}$ lo es). Luego, existe una función ψ definida en F_0 tal que

$$R^{m_j} \rightarrow \psi$$

localmente uniformemente en F_0 , si $j \rightarrow \infty$ en N un subconjunto de \mathbb{N} .

Ahora, tomamos z un punto de F_0 . Se cumple que $R^{n_j}(z) \rightarrow \varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ pertenece a F_0 (esto es consecuencia de la expresión dada en (4.2)). Como $j \rightarrow \infty$ en N , entonces R^{m_j} converge uniformemente a ψ en un conjunto compacto que contiene a $\varphi(z)$ y, por tanto, tomando límite cuando $j \rightarrow \infty$ en N , se cumple que

$$\psi \circ \varphi(z) = \lim R^{m_j} (R^{n_j-1}(z)) = \lim R^{n_j}(z) = \varphi(z). \quad (4.3)$$

Como φ no es una función constante, concluimos que ψ es la función identidad, esto es, $\psi = I$ en F_0 . Acabamos de probar así que la identidad pertenece a la clase de funciones límite de F_0 . Por último, es fácil ver que R es un automorfismo de F_0 . De hecho, como F_0 es invariante hacia delante se cumple que

$$R(F_0) = F_0$$

y, por tanto, R es sobreyectiva. Además, R también es inyectiva pues si tomamos z y w dos puntos de F_0 tales que $R(z) = R(w)$, entonces

$$R^{m_j}(z) = R^{m_j-1}(R(z)) = R^{m_j-1}(R(w)) = R^{m_j}(w)$$

y, tomando límite cuando $j \rightarrow \infty$ en N , deducimos que

$$z = I(z) = I(w) = w,$$

terminando así la prueba del teorema. □

El resultado que aparece a continuación aprovecha alguna de las estrategias utilizadas en la prueba del Teorema 4.2.4.

Teorema 4.2.5. *En las condiciones anteriores, si φ es una función límite de F_0 no constante, entonces φ es un automorfismo de F_0 .*

Demostración. Como hemos visto en la prueba del Teorema 4.2.4, R es un automorfismo de F_0 , luego podemos considerar su inversa, $S: F_0 \rightarrow F_0$. De este modo, se cumple que la familia de iteradas $\{S^n\}$ es normal en F_0 (pues que las iteradas S^n no toman valores

en el conjunto de Julia de R). Por tanto, dada una sucesión de números naturales (n_j) tal que $R^{n_j} \rightarrow \varphi$ localmente uniformemente en F_0 , podemos tomar una subsucesión (m_j) de (n_j) tal que S^{m_j} converja localmente uniformemente a una función ψ en F_0 . Como vimos en (4.2), se cumple que $\varphi(F_0) \subset F_0$, de modo que

$$\psi \circ \varphi(z) = \lim S^{m_j}(R^{m_j}(z)) = z, \quad (4.4)$$

y, por tanto, la función φ es inyectiva en F_0 . De la expresión (4.4) también se deduce que la función ψ no es constante y, análogamente a la prueba de la expresión dada en (4.2) del Teorema 4.2.4, se cumple que

$$\psi(F_0) \subset F_0.$$

De este modo, podemos intercambiar los papeles de las funciones φ y ψ en la expresión (4.4) y deducir que para todo punto z de F_0 , se tiene que

$$\varphi \circ \psi(z) = z.$$

Concluimos así que φ es una biyección analítica de F_0 en sí mismo y, por tanto, φ es un automorfismo de F_0 . □

4.3. Dominios parabólicos.

Supongamos que F_0 es una componente conexa invariante hacia delante del conjunto de Fatou de R . En esta sección, diremos que

$$R^n \rightarrow \partial F_0 \quad (4.5)$$

si para cada conjunto compacto K contenido en F , se cumple que

$$K \cap R^n(K) = \emptyset,$$

para todo n salvo una cantidad finita. En este caso, toda función límite φ de F_0 satisface que

$$\varphi(F_0) \subset \partial F_0.$$

Como el interior de la frontera de F_0 es vacío (pues F_0 es un dominio) podemos aplicar el Teorema de la Aplicación Abierta y deducir así que φ es una función constante. Por tanto, si $R^n \rightarrow \partial F_0$, entonces el Teorema 4.2.3 nos asegura que existe un punto fijo de R , ζ , en ∂F_0 tal que $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en F_0 . El resultado que aparece a continuación incluye estas conclusiones y añade otras, también interesantes.

Teorema 4.3.1. *Sea F_0 una componente invariante hacia delante de $F(R)$. Supongamos que $R^n \rightarrow \partial F_0$, si $n \rightarrow \infty$. Entonces, existe ζ un punto fijo racionalmente indiferente de R en ∂F_0 tal que:*

i) Si $n \rightarrow \infty$, entonces $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en F_0 .

ii) $R'(\zeta) = 1$.

Demostración. Al principio de esta sección vimos que si $R^n \rightarrow \partial F_0$, siendo F_0 una componente invariante hacia delante de $F(R)$, entonces existe un punto fijo de R , ζ , que pertenece a la frontera de F_0 . Esto prueba el apartado i) de este teorema.

Para probar (ii), observamos que

$$|R'(\zeta)| \geq 1,$$

pues, en otro caso, ζ sería un punto fijo (súper)-atractivo de R y, por tanto, pertenecería a $F(R)$. Por otro lado, también se cumple que $|R'(\zeta)| \leq 1$, pues, si no ζ podría ser un punto fijo repulsivo de R . Como ζ pertenece a $\partial F_0 (\subset J(R))$ y solo estamos tomando límite en puntos de $F(R)$, entonces $R^n(z) \neq \zeta$, para todo z . Concluimos así que ζ no puede ser un punto fijo repulsivo de R y, por tanto,

$$|R'(\zeta)| = 1. \tag{4.6}$$

Por conjugación con una transformación de Möbius, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\zeta = 0$ y el punto del infinito está contenido en la frontera de F_0 . A continuación, denotamos por $\lambda = R'(0)$. Como $|\lambda| = 1$, entonces R es inyectiva en un entorno \mathcal{N} del origen.

Como $R^n \rightarrow 0$ localmente uniformemente en F_0 , existe un número natural N tal que el conjunto W definido como

$$W = \bigcup_{n=N}^{\infty} R^n(V),$$

siendo V un subdominio de F_0 cuya clausura está contenida en F_0 y tal que $R(V) \cap V \neq \emptyset$; es un subdominio conexo e invariante hacia delante de $\mathcal{N} \cap F_0$.

Ahora, tomamos ζ_0 un punto de W y, para cada número entero $n \geq 1$, definimos la función φ_n sobre W como

$$\varphi_n(z) = \frac{R^n(z)}{R^n(\zeta_0)}.$$

Se cumple que la familia de funciones $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es normal en W (podemos consultar la prueba en [9, p. 127]). Por tanto, existe una subsucesión de números naturales (n_j) tal que

la sucesión (φ_{n_j}) converge localmente uniformemente a una función φ en W . Para todo n_j se cumple que

$$\varphi_{n_j}(R(z)) = \varphi_{n_j}(z) \frac{R^{n_j}(R(z))}{R^{n_j}(z)} = \varphi_{n_j}(z) \frac{R^{n_j}(R(z)) - R(0)}{R^{n_j}(z) - 0},$$

pues W es invariante hacia delante bajo R . Tomando límite cuando $n_j \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\varphi(R(z)) = R'(0)\varphi(z) = \lambda\varphi(z). \quad (4.7)$$

El Teorema de Hurwitz nos asegura que la función φ o es constante o es inyectiva en W . Si φ es constante en W , entonces φ toma el valor constante 1 (este es valor que toma en el punto ζ_0); y de la expresión dada en (4.7) deducimos que $\lambda = 1$, como queríamos probar.

Si φ no es una función constante en W , entonces tiene inversa en W , que denotamos por φ^{-1} , que transforma de manera sobreyectiva $\varphi(W)$ en W . Sin embargo, de la expresión (4.7) tenemos que

$$\varphi(R^n(\zeta_0)) = \lambda^n \varphi(\zeta_0) = \lambda^n.$$

Como vimos en la expresión dada en (4.6), $|\lambda| = 1$, y se puede probar que, en estas condiciones, existe una sucesión creciente de enteros m_j tal que $\lambda^{m_j} \rightarrow 1$. Deducimos así que $\varphi(R^{m_j}(\zeta_0)) \rightarrow 1$ y, como $\varphi(w)$ es un abierto que contiene al punto 1 (pues $1 = \varphi(\zeta_0)$), se cumple que a partir de j suficientemente grande,

$$\varphi(R^{m_j}(\zeta_0)) \in \varphi(w).$$

Para esos valores de j , también se cumple que

$$R^{m_j}(\zeta_0) = \varphi^{-1}(\lambda^{m_j}) \rightarrow \varphi^{-1}(1) = \zeta_0.$$

Esto no puede ocurrir pues sabemos que $R^n \rightarrow 0$ en W y $0 \neq \zeta_0$. Concluimos así que φ es una función constante y $\lambda = 1$. □

Damos fin a esta sección sabiendo que si F_0 es una componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional R , entonces se cumple que:

Si toda función límite de F_0 es constante, entonces existe un punto fijo ζ de R tal que $R^n \rightarrow \zeta$ en F_0 y $\zeta \in F_0 \cup \partial F_0$. Si $\zeta \in F_0$, entonces F_0 es una componente (súper)-atractiva de $F(R)$ (Teorema 4.2.3), mientras que si $\zeta \in \partial F_0$, entonces F_0 es una componente parabólica de $F(R)$ (Teoremas 4.2.3 y 4.3.1). Por tanto, si toda función límite en $\mathcal{F}(F_0)$ es constante, entonces la componente F_0 es de alguno de los tipos i), ii) o iii) de la Definición 4.1.1.

4.4. Discos de Siegel y anillos de Herman.

El propósito de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *Sean R una función racional de grado, al menos, dos y F_0 una componente invariante hacia delante de $F(R)$. Supongamos que la clase de funciones límite de F_0 , $\mathcal{F}(F_0)$, no contiene funciones constantes. Entonces, F_0 es o bien un disco de Siegel o bien un anillo de Herman.*

Observamos que, probando el Teorema 4.4.1 habremos completado la prueba del Teorema 4.1.2.

La idea de la prueba del Teorema 4.4.1 es la siguiente: como F_0 está contenido en $\mathbb{C}_\infty \setminus J(R)$ y sabemos por la Propiedad de Minimalidad de Julia (Teorema 1.6.1 iv)) que el conjunto de Julia de R tiene, al menos, tres puntos, entonces el espacio recubridor universal de F_0 es el disco unidad, que denotamos por \mathbb{D} ; y, por tanto, F_0 es conformalmente equivalente a \mathbb{D}/Γ , donde Γ es el grupo recubridor (de transformaciones de Möbius) actuando sobre \mathbb{D} . Ahora, los automorfismos conformes R^n de F_0 se acumulan en la aplicación identidad (consecuencia del Teorema 4.2.4) y, si reescribimos esta información en términos del grupo Γ normalizado, llegamos a que el grupo Γ es abeliano. Sin embargo, los únicos grupos abelianos recubridores son cíclicos y, si hacemos una lista con todos los posibles grupos cíclicos candidatos y estudiamos sus correspondientes espacios cocientes, llegamos a que \mathbb{D}/Γ y, por tanto, F_0 , es un dominio o simplemente o doblemente conexo. Deducimos así que F_0 es conformemente equivalente o bien a un disco o bien a un anillo. El resto del argumento de la prueba es directo. Veamos la misma con detalles:

Las nociones de topología necesarias para entender esta parte del estudio las podemos consultar [9, p. 157-159] y en el primer capítulo de [1].

Antes de dar la prueba del Teorema 4.4.1, enunciemos otro resultado que nos será de interés y cuya prueba podemos encontrar en [9, p. 134-136].

Teorema 4.4.2. *Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Supongamos que ζ es un punto fijo indiferente de R que pertenece a una componente conexa F_0 del conjunto de Fatou de R . Entonces, F_0 es simplemente conexa y $R: F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada a una rotación de orden infinito del disco unidad, \mathbb{D} .*

Cualquier componente F_0 de $F(R)$ satisfaciendo el Teorema 4.4.2 es un disco de Siegel.

Demostración del Teorema 4.4.1. Como el conjunto de Julia de R es infinito (Teorema 1.6.1 i)), el espacio recubridor universal de F_0 es el disco unidad, \mathbb{D} . Denotamos por Γ al grupo recubridor actuando sobre \mathbb{D} y denotamos por π a la aplicación recubridora universal

definida de \mathbb{D} sobre F_0 . Conjugando R con una transformación de Möbius si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el origen pertenece a F_0 y podemos tomar π tal que $\pi(0) = 0$.

Tomamos V un entorno del origen tal que la restricción π_0 de π en V sea inyectiva. El Teorema 4.2.4 nos asegura que la función identidad pertenece a la clase de funciones límite de F_0 , luego $R^n \rightarrow I$ localmente uniformemente en F_0 , si $n \rightarrow \infty$ a lo largo de alguna sucesión de número naturales. A partir de n suficientemente grande, se cumple que $R^n(0) \in \pi_0(V)$. De modo que, para esos valores de n , podemos definir las funciones S_n como

$$S_n = \pi_0^{-1} R^n \pi,$$

siendo cada una de ellas analítica en algún entorno del origen. Las propiedades de las aplicaciones recubridoras universales nos aseguran que cada S_n se prolonga analíticamente al disco unidad, \mathbb{D} y, como éste es simplemente conexo, entonces cada S_n es univaluada en \mathbb{D} . De hecho, cada S_n es una elevación de R^n , luego se cumple que

$$R^n \circ \pi = \pi \circ S_n$$

a lo largo de \mathbb{D} . Tenemos por definición que $S_n(0)$ es un punto de V y, como $n \rightarrow \infty$ (en la sucesión que hemos considerado anteriormente),

$$S_n(0) = \pi_0^{-1} R^n \pi(0) \rightarrow 0.$$

Distinguimos así dos casos:

1. Si $S_n(0) = 0$ para algunos valores de n .
2. Si $S_n(0) \neq 0$, para todo n .

En primer lugar, estudiamos el Caso 1. Para los valores de n que estamos considerando, se cumple que

$$R^n(0) = R^n \circ \pi(0) = \pi \circ S_n(0) = \pi(0) = 0,$$

luego el origen es un punto fijo de R^n . Como el origen pertenece al conjunto de Fatou de R^n , entonces no es un punto fijo repulsivo de R^n . Pero tampoco es un punto fijo atractivo de R^n , pues si lo fuera, podríamos considerar las iteradas de R^n actuando sobre el conjunto $\{z, R(z), \dots, R^{n-1}(z)\}$. De este modo, observaríamos que la sucesión de iteradas $(R^m)_{m \geq 1}$ converge a 0, entrando en contradicción con la hipótesis de que $\mathcal{F}(F_0)$ contiene funciones no constantes. Deducimos así que el origen es un punto fijo indiferente de R^n y, aplicando el Teorema 4.4.2, deducimos que F_0 es un disco de Siegel para R^n . En particular, F_0 es

simplemente conexo y, por tanto, R (que, por el Teorema 4.2.4 es un automorfismo analítico de F_0) está conjugada (por el Teorema del isomorfismo de Riemann) con una transformación de Möbius M , sobre el disco unidad \mathbb{D} . Deducimos así que M^n tiene un punto fijo, ξ , en \mathbb{D} (que se corresponde con el punto fijo 0 de R en F_0) y, por tanto, ξ también es un punto fijo de M . Tenemos así que R fija al origen y, además, el origen es un punto fijo indiferente de R (si no, el cero no podría ser punto fijo indiferente de R^n). Aplicando nuevamente el Teorema 4.4.2, concluimos que F_0 es un disco de Siegel para R .

A continuación, vamos a estudiar el Caso 2. Tenemos que $R^n \rightarrow I$ localmente uniformemente en F_0 , si $n \rightarrow \infty$ en alguna sucesión de números naturales adecuada. De modo que, existe un entorno \mathcal{N} del origen tal que

$$R^n(\mathcal{N}) \subset \pi_0(V);$$

luego, S_n converge a la función identidad, I , uniformemente en \mathcal{N} . Como la familia de funciones $\{S_n\}$ es normal en \mathbb{D} (para cada n , S_n transforma el disco unidad \mathbb{D} en sí mismo), el Teorema de Vitali (Teorema 1.4.6) nos asegura que

$$S_n \rightarrow I$$

localmente uniformemente en \mathbb{D} . Más aún, como para todo n , S_n es un automorfismo del disco unidad, se puede probar que $S_n^{-1} \rightarrow I$ localmente uniformemente en \mathbb{D} .

Ahora, tomamos un elemento γ del grupo recubridor Γ y consideramos la sucesión dada por $(S_n^{-1} \circ \gamma \circ S_n)_n$. En primer lugar, como cada S_n pertenece al grupo normalizado de Γ , $N(\Gamma)$, esos elementos pertenecen a Γ . Por otro lado, como las sucesiones $(S_n)_n$ y $(S_n^{-1})_n$ convergen localmente uniformemente a I en \mathbb{D} , se cumple que

$$S_n^{-1} \circ \gamma \circ S_n \rightarrow \gamma.$$

Como la Γ -órbita de un punto de \mathbb{D} no se puede acumular en \mathbb{D} , deducimos que a partir de n suficientemente grande, digamos para todo $n > n(\gamma)$, se cumple que

$$S_n^{-1} \circ \gamma \circ S_n = \gamma$$

y, por tanto, S_n conmuta con γ . Si tomamos γ y ρ dos elementos de Γ y razonando como en el caso anterior, observamos que a partir de n suficientemente grande, S_n conmuta con ambos elementos de Γ , γ y ρ .

A partir de este momento, en lugar del disco unidad vamos a considerar el semiplano superior, que denotamos por \mathbb{H} , como el espacio recubridor universal de F_0 . De este modo, el nuevo grupo recubridor (actuando sobre \mathbb{H}) es algún grupo conjugado $h \circ \Gamma \circ h^{-1}$, donde

h es una transformación de Möbius y se cumple que $h(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ aunque, con el objetivo de simplificar la notación, seguiremos utilizando Γ y S_n , donde Γ es el nuevo grupo recubridor y S_n son automorfismos del semiplano superior (estas siguen siendo elevaciones de R^n). Tomando una transformación de Möbius h adecuada, podemos suponer que el elemento γ que tomamos de Γ es una de las aplicaciones

$$z \mapsto z + 1, \quad z \mapsto kz,$$

donde $k > 1$.

Hemos visto que a partir de un valor de n suficientemente grande, S_n conmuta con γ y ρ dos elementos de Γ . Es fácil ver que la única transformación de Möbius que preserve \mathbb{H} y que conmuta con la aplicación dada por $z \mapsto z + t$, donde t toma valores reales, son las aplicaciones de la forma

$$z \mapsto z + s,$$

siendo s algún número real. Esto es, Γ es un grupo discreto y real de traslaciones y, salvo conjugación con una transformación de Möbius, está generado por la aplicación $z \mapsto z + 1$. En este caso, la aplicación cociente está dada por $z \mapsto e^{2\pi iz}$ y, por tanto, \mathbb{H}/Γ es el disco punzado

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}.$$

Tenemos así que existe φ una biyección analítica definida del disco punzado en F_0 . Además, φ se puede extender a una biyección analítica definida del disco unidad en $F_0 \cup \{\xi\}$, donde ξ es un punto aislado de la frontera de F_0 que está contenido en J . Acabamos de llegar a una contradicción pues el conjunto de Julia de una función racional no tiene puntos aislados (Teorema 1.6.1 v)). Por tanto, γ no es la aplicación $z \mapsto z + 1$.

Sabemos pues que $\gamma(z) = kz$, donde $k > 1$. Razonando como en el caso anterior, tenemos que las únicas transformaciones de Möbius que conmutan con γ son las aplicaciones de la forma

$$z \mapsto tz, t > 0 \quad \text{o} \quad z \mapsto \frac{\mu}{z}.$$

Las aplicaciones del segundo tipo son de orden dos. De modo que, si las aplicaciones S_n fueran de este tipo, entonces R^2 sería la identidad definida en F_0 , algo que o puede ocurrir. Tenemos así que cada S_n es de la forma $z \mapsto tz$, donde t toma valores reales positivos. Como a partir de un n suficientemente grande, el elemento ρ de Γ conmuta con S_n , entonces ρ es, a su vez, una aplicación o bien de la forma

$$z \mapsto sz,$$

donde $s > 0$ y $s \neq 1$ o bien de la forma

$$z \mapsto \frac{\mu}{z}.$$

Como ρ no tiene puntos fijos en \mathbb{H} , entonces ρ es una aplicación de la forma $z \mapsto sz$. Finalmente, como ρ es un elemento cualquiera de Γ , deducimos que Γ es un subgrupo discreto de $\{z \mapsto tz: t > 0\}$ y, por tanto, es un grupo cíclico generado por una aplicación de la forma $z \mapsto kz$.

Tenemos pues que \mathbb{H}/Γ es una región doblemente conexa. Esto se obtiene topológicamente, identificando los bordes del conjunto

$$\{z \in \mathbb{H}: 1 < |z| < k\}$$

bajo la aplicación $z \mapsto kz$ y, como ésta es conformemente equivalente a F_0 , concluimos que F_0 es doblemente conexo. Para terminar la prueba de este resultado, nos hace falta el lema que aparece a continuación:

Lema 4.4.3. *Sea A el conjunto definido como*

$$A = \left\{ z: \frac{1}{r} < |z| < r \right\},$$

donde $r > 1$. Entonces, todos los automorfismos de A de orden infinito son rotaciones.

Demostración. En primer lugar, se puede probar que si $\gamma(z) = kz$, donde $k > 1$ y Γ es el grupo generado por γ , entonces existen dos constantes r y λ y una función $q: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que

$$q(z) = re^{\lambda \log z},$$

que transforma de manera sobreyectiva el semiplano superior, \mathbb{H} , en A y que satisface la igualdad $q(z) = q(w)$ si y solo si existe un número natural m tal que $w = \gamma^m(z)$. En ese caso, el espacio cociente \mathbb{H}/Γ (y, por tanto, F_0) es conformemente equivalente al anillo $q(\mathbb{H})$.

Luego, si f es un automorfismo de A , entonces $k > 1$ y podemos escribir $A = q(\mathbb{H})$. Razonando de manera análoga el caso de la prueba del Teorema 4.4.1, podemos elevar la aplicación f a una transformación de Möbius, que denotamos por \tilde{F} , definida de \mathbb{H} en sí mismo de manera sobreyectiva, satisfaciendo la igualdad

$$q \circ \tilde{F} = f \circ q. \tag{4.8}$$

Acabamos de ver que dados dos puntos cualesquiera z y w de \mathbb{H} tales que $q(z) = q(w)$, existe un número natural m tal que $\tilde{F}(z) = \gamma^m \tilde{F}(w)$. De modo que, para cada z perteneciente a

\mathbb{H} , existe un número natural $m(z)$ tal que

$$\tilde{F}(kz) = k^{m(z)}\tilde{F}(z).$$

Observamos que la función $m(z)$ varía de forma continua con z y, como \mathbb{H} es un conjunto conexo, $m(z)$ es constante en \mathbb{H} , tomando el valor m . Por tanto, para todo punto z de \mathbb{H} , se cumple que $\tilde{F}(kz) = k^m\tilde{F}(z)$ y, razonando por inducción, concluimos que

$$\tilde{F}(k^n z) = k^{mn}\tilde{F}(z).$$

Recordamos que \tilde{F} es una transformación de Möbius y, tomando límite cuando n tiende a infinito, tenemos que $\tilde{F}(\infty)$ es, o bien ∞ (si $m > 0$) o bien 0 (si $m < 0$). Observamos que $m \neq 0$ pues, si no \tilde{F} sería una función constante con valor $\tilde{F}(\infty)$. Tomando límite cuando n tiene a $-\infty$, tenemos que $\tilde{F}(0)$ es, o bien 0 ; o bien ∞ . Luego, o bien \tilde{F} fija a ambos puntos ($\tilde{F}(0) = 0$ y $\tilde{F}(\infty) = \infty$) o bien los intercambia ($\tilde{F}(0) = \infty$ y $\tilde{F}(\infty) = 0$). De modo que, \tilde{F} es una aplicación de la forma

$$z \mapsto az, \quad \text{o} \quad z \mapsto \frac{b}{z},$$

donde $a > 0$ y $b < 0$. Usando la igualdad dada en (4.8), se puede probar que f es de alguna de las siguientes formas:

$$z \mapsto e^{i\theta}z \quad \text{o} \quad z \mapsto \frac{e^{i\theta}}{z},$$

siendo θ un número real. Como f es de orden infinito, es una rotación. Terminamos así la prueba del Lema 4.4.3, del Teorema 4.4.1 y del Teorema 4.1.2. □

Damos fin a esta sección con algunas breves observaciones sobre la existencia de los anillos de Herman. Sea R una función racional definida como

$$R(z) = \lambda z^2 \left(\frac{1 + \bar{\alpha}z}{z + \alpha} \right),$$

donde $|\lambda| = 1$ y $0 < |\alpha| < 1$. Siguiendo con la notación anterior, se puede probar que si $|\alpha|$ es suficientemente pequeño, entonces R es un homeomorfismo de la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$ en sí misma. Si escogemos λ y α adecuadamente, entonces la función racional $R: V \rightarrow V$ es analíticamente conjugada con una rotación (de orden infinito) de $\partial\mathbb{D}$ en sí misma y, además, esta conjugación se extiende a un entorno V del origen, R -invariante en $\partial\mathbb{D}$ tal que $R: V \rightarrow V$ es analíticamente conjugada con una rotación de un anillo. Es claro que la familia de iteradas $\{R^n\}_{n \geq 1}$ es normal en V y, si F_0 es la componente de $F(R)$ que

contiene a V , entonces la clase de las funciones límite de F_0 , $\mathcal{F}(F_0)$, contiene funciones límite no constantes. Deducimos así que para tales elecciones de λ y α , F_0 es o un disco de Siegel o un anillo de Herman. Como los puntos 0 e ∞ son puntos fijos súper-atractivos de R , F_0 no es una región simplemente conexa. Concluimos así que F_0 es un anillo de Herman.

4.5. Conectividad de componentes invariantes.

En esta sección vamos a estudiar algunos resultados sobre la conectividad de una componente F_0 de $F(R)$. Para ello, necesitamos probar previamente dos resultados sobre puntos críticos:

Teorema 4.5.1. *Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Si una componente F_0 del conjunto de Fatou de R contiene un punto fijo de R (súper)-atractivo, entonces F_0 contiene un punto crítico de R .*

Demostración. Si F_0 contiene un punto fijo súper-atractivo de R , entonces, F_0 contiene un punto crítico de R (el mismo punto fijo súper-atractivo de R es, a su vez, punto crítico de R).

Supongamos pues que F_0 contiene un punto fijo atractivo de R , que denotamos por ζ (y no es súper atractivo). Por conjugación con una transformación de Möbius, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\zeta \neq \infty$. Por tanto, $|R'(\zeta)| < 1$. Ahora, en F_0 construimos el disco V como

$$V = \{z: |z - \zeta| < r\}$$

tal que se cumpla que $R(\overline{V}) \subset V$.

Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que F_0 no contiene ningún punto crítico de R . Para cada n , definimos U_n como la componente de $(R^n)^{-1}(V)$ que contiene a ζ . Se cumple que U_n está contenido en F_0 , de modo que, aplicando la fórmula dada en el Teorema 2.4.4, deducimos que

$$1 \geq \chi(U_n) = \chi(U_n) + \delta(U_n) = m\chi(V) = m \geq 1.$$

Tenemos así que $m = \chi(U_n) = 1$ y para cada n , R es un homeomorfismo del dominio simplemente conexo U_n sobre V .

Ahora, se cumple que $U_n \subset U_{n+1}$ (pues U_n es conexo, contiene a ζ y satisface que $R^{n+1}(U_n) \subset R(V)$); luego,

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$$

Como ζ es un punto fijo atractivo, entonces $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en F_0 . Tomamos z un punto en F_0 y unimos los puntos z y ζ mediante una curva, que denotamos por σ , en F_0 . Como σ es compacto, existe un número natural n tal que $R^n(\sigma)$ pertenece a V y, por tanto, σ y también z , pertenecen a U_n . Acabamos de probar así que

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

y F_0 es simplemente conexo (Proposición 2.1.7). Aplicando la Fórmula de Riemann-Hurwitz dada en el Teorema 2.5.6, deducimos que

$$1 + 0 = \chi(F_0) + \delta(F_0) = m\chi(F_0) = m \geq 1.$$

Esto muestra que R es un homeomorfismo del dominio simplemente conexo F_0 en sí mismo. El Teorema del Isomorfismo de Riemann establece que $R: F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada con un automorfismo S del disco unidad que fija el origen y, como tal, S es una rotación euclídea del disco unidad, \mathbb{D} . Sin embargo, esto implica que

$$1 = |S'(0)| = |R'(\zeta)| < 1,$$

llegando así a una contradicción. Finalmente, concluimos que, bajo las hipótesis del teorema, F_0 contiene un punto crítico de R . □

El siguiente resultado proporciona una caracterización de cuándo una componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de R que contiene un punto fijo de R racionalmente indiferente posee algún punto crítico de R . Podemos consultar la prueba del mismo en el Capítulo 9 de [9].

Teorema 4.5.2. *Sean R una función racional de grado, al menos, dos, F_0 una componente invariante hacia delante de $F(R)$ y ζ un punto fijo racionalmente indiferente de R perteneciente a F_0 . Si $R^n \rightarrow \zeta$ localmente uniformemente en F_0 , entonces F_0 contiene un punto crítico de R .*

A continuación, podemos dar algunos resultados sobre la conectividad de las componentes invariantes hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional:

Teorema 4.5.3. *Sea R una función racional de grado, al menos, dos. Entonces, toda componente invariante hacia delante de $F(R)$ es simplemente, doblemente o infinitamente conexa.*

Demostración. Sea F_0 una componente invariante hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional. Entonces, por el Teorema 4.1.2 sabemos que F_0 es del alguno de los tipos que aparecen en la Definición 4.1.1. Si F_0 es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces F_0 es simplemente y doblemente conexa respectivamente.

Veamos pues qué ocurre cuando F_0 es de alguno de los tipos (i), (ii) o (iii). En primer lugar, los Teoremas 4.5.1 y 4.5.2 nos aseguran que F_0 contiene un punto crítico de R . Supongamos también que la conectividad de F_0 es finita (pues en otro caso tendríamos que F_0 sería infinitamente conexo, satisfaciendo así el teorema). Como F_0 es invariante hacia delante, existe un número natural m , tal que la restricción de R a F_0 es un m -recubrimiento de F_0 en sobre mismo. Aplicando la Fórmula de Riemann-Hurwitz dada en el Teorema 2.5.6 tenemos que

$$\chi(F_0) + \delta(F_0) = m\chi(F_0),$$

donde todos los términos son finitos. Deducimos así que

$$(m - 1)\chi(F_0) = \delta(F_0) > 0,$$

luego $m \geq 2$ y $\chi(F_0) > 0$. Por tanto, $\chi(F_0) = 1$ y F_0 es simplemente conexo, como queríamos probar.

□

Del Teorema 4.5.3 y su prueba se deducen los siguientes resultados.

Corolario 4.5.4. *Si $F(R)$ es conexo, entonces es simplemente o infinitamente conexo.*

Corolario 4.5.5. *Si una componente de $F(R)$ contiene un punto fijo de R , entonces esta componente es simplemente o infinitamente conexa.*

Corolario 4.5.6. *Una componente invariante hacia delante de $F(R)$ es doblemente conexa si y solo si es un anillo de Herman.*

Si una componente invariante hacia delante de $F(R)$ es de alguno de los tipos i), ii) o iii) de la Definición 4.1.1, entonces el Teorema 4.5.3 y el Corolario 4.5.6 establecen que F_0 es una componente simplemente o infinitamente conexa.

Con este capítulo ponemos fin en estas notas al estudio de las componentes invariantes hacia delante del conjunto de Fatou de una función racional.

Capítulo 5

El Teorema de los Dominios Errantes

Este capítulo de las notas está dedicado a enunciar y probar el Teorema 5.1.3 de los dominios errantes de Sullivan.

5.1. El Teorema de los Dominios Errantes.

Sea R una función racional de grado $d \geq 2$. Consideramos la sucesión

$$\Omega, R(\Omega), R^2(\Omega), \dots, R^n(\Omega), \dots \quad (5.1)$$

de las imágenes sucesivas de una componente conexa Ω del conjunto de Fatou de R . En lo que sigue, consideraremos R una función racional de grado, al menos, dos y $F = F(R)$ su conjunto de Fatou.

Definición 5.1.1. Una componente Ω del conjunto de Fatou $F(R)$ es:

- i) Periódica, si existe un número natural n tal que $R^n(\Omega) = \Omega$.*
- ii) Eventualmente periódica, si existe un número natural m tal que $R^m(\Omega)$ es periódica.*
- iii) Errante, si los conjuntos $R^n(\Omega)$, $n \geq 0$, son disjuntos dos a dos.*

Definición 5.1.2. Decimos que Ω es un dominio errante de R si Ω es una componente errante de $F(R)$.

El matemático Fatou planteó la cuestión de si pueden o no existir dominios errantes para funciones racionales. Fue D. P. Sullivan en su artículo *Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, [22], publicado en el año 1985, quién demostró que estos dominios no pueden existir. El objetivo de este capítulo es saber por qué. A continuación, enunciaremos el resultado del que hablamos y a lo largo de este capítulo estudiaremos su prueba:

Teorema 5.1.3. *Toda componente del conjunto de Fatou de una función racional es eventualmente periódica.*

5.2. Un resultado preliminar.

La prueba del Teorema 5.1.3 se hace por reducción al absurdo, suponiendo que la función racional R tiene un dominio errante y tratando de llegar así a una contradicción. Aunque Sullivan no lo incluyó en sus notas, nosotros vamos a probar en esta sección que si la función racional R tiene un dominio errante, entonces R también tiene un dominio errante que es simplemente conexo. Este resultado se atribuye al matemático australiano I. N. Baker y supone una simplificación de la prueba original del Teorema 5.1.3 que aparece en del artículo de Sullivan. Aunque no he encontrado ningún artículo de Baker donde pruebe este resultado, [18, p. 262-263] y [23] se lo atribuyen a él en sus publicaciones.

A lo largo de esta sección, denotaremos por $\text{diam}(E)$ al diámetro del subconjunto E de la esfera de Riemann respecto de la métrica esférica en \mathbb{C}_∞ . Siguiendo el propósito marcado, probamos el siguiente resultado:

Lema 5.2.1. *Supongamos que W es un dominio errante de R . Entonces, para todo compacto K contenido en W , se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(R^n(K)) = 0. \quad (5.2)$$

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que W es un dominio errante y existe un compacto no vacío K contenido en W que no satisface la condición dada en (5.2), esto es, existe un número positivo ε y una subsucesión creciente (n_j) de índices tales que

$$\text{diam}(R^{n_j}(K)) \geq \varepsilon, \quad (5.3)$$

para todo $j = 1, 2, \dots$

Como la familia de iteradas $\{R^n\}$ es normal en W , existe una subsucesión de (R^{n_j}) que converge localmente uniformemente a una cierta función analítica g . De hecho, si etiquetamos adecuadamente, podemos asumir que la misma subsucesión (R^{n_j}) satisface esta

propiedad. Ahora, si la función g es constante en W , digamos $g \equiv \alpha$ en W , entonces la sucesión R^{n_j} converge a α uniformemente en K (pues K es un compacto contenido en W). Por tanto, a partir de un índice j suficientemente grande, $R^{n_j}(K)$ estará contenido en una bola (respecto de la distancia esférica en \mathbb{C}_∞) de radio $\varepsilon/3$ centrada en α . Esto entra en contradicción con la expresión dada en (5.3). Deducimos así que la sucesión R^{n_j} converge localmente uniformemente en W a una función g que no es constante en W .

Como g es una función analítica no constante en W , existe un punto ζ de W donde la derivada de g no se anula, esto es, donde $g'(\zeta) \neq 0$. Consideramos C una circunferencia centrada en ζ de modo que tanto C como el disco D que encierra estén contenidos en W y donde g sea inyectiva, esto es,

$$g(z) \neq g(\zeta),$$

para todo $z \in C$. Como R^{n_j} converge localmente uniformemente en W y C es un compacto contenido en W , existe un índice j_0 tal que

$$|R^{n_j}(z) - g(z)| < \inf_{w \in C} |g(w) - g(\zeta)| < |g(z) - g(\zeta)|,$$

para todo $j \geq j_0$ y para todo $z \in C$. Aplicando el Teorema de Rouché al disco D y a las funciones $R^{n_j}(z) - g(z)$ y $g(z) - g(\zeta)$, deducimos que las funciones

$$R^{n_j}(z) - g(\zeta) = (R^{n_j}(z) - g(z)) + (g(z) - g(\zeta));$$

y $g(z) - g(\zeta)$ deben tener el mismo número de ceros en D . Como $g(z) - g(\zeta)$ se anula, al menos, una vez en D , existe un punto z de D tal que $R^{n_j}(z) = g(\zeta)$. Luego, el punto $g(\zeta)$ está contenido en el conjunto $R^{n_j}(D)$, para todo $j \geq j_0$. Llegamos así a una contradicción pues cada $R^{n_j}(D)$ está contenido en el conjunto $R^{n_j}(W)$ correspondiente y partíamos de la hipótesis de que W es un dominio errante, esto es,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} R^{n_j}(W) = \emptyset.$$

Finalmente, concluimos que para todo compacto K contenido en W se cumple que $\text{diam}(R^n(K)) \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$. □

El siguiente resultado establece que si R tiene una componente errante, entonces R tiene una componente errante que es simplemente conexa.

Lema 5.2.2. *Supongamos que R tiene un dominio errante. Entonces, para alguna componente conexa W de $F(R)$ las componentes*

$$W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots \quad (5.4)$$

contenidas en $F(R)$ son disjuntas dos a dos (W es un dominio errante), simplemente conexas y no contienen puntos críticos de R . Más aún, cada una de ellas se transforma de manera homeomorfa y sobreyectiva en la siguiente mediante la acción de la función racional R .

Demostración. Supongamos que R tiene un dominio errante $\Omega \subset F(R)$. Sabemos que R tiene una cantidad finita de puntos críticos en \mathbb{C}_∞ (de hecho, el Corolario 1.2.2 nos asegura que R tiene, a lo más, $2d - 2$ puntos críticos en \mathbb{C}_∞ , donde d es el grado de R). Por tanto, solo una cantidad finita de los conjuntos $R^n(\Omega)$, contienen puntos críticos de R . Luego, si tomamos un número natural N suficientemente grande, obtenemos un dominio errante W de R donde $W = R^N(W)$ y, para todo número natural n , $W_n = R^n(W)$ no contiene puntos críticos de R . De este modo, R actúa como un m_n -recubrimiento de W_n en W_{n+1} , donde $m_n \in \mathbb{N}$, para todo n ; y, aplicando el Teorema 2.5.6 de Riemann-Hurwitz, obtenemos que

$$\chi(W_n) = m_n \chi(W_{n+1}). \quad (5.5)$$

Solo falta probar que la componente de W ($= W_0$) de $F(R)$ es simplemente conexa pues, en ese caso, de la expresión dada en (5.5) obtendríamos que

$$m_0 \chi(W_1) = \chi(W_0) = 1.$$

Esto es, R es un homeomorfismo de W_0 en W_1 y, por tanto, W_1 es una componente simplemente conexa de F y $m_0 = 1$. Aplicando nuevamente la fórmula dada en (5.5) tendríamos que W_2 es también simplemente conexa y $m_1 = 1$. Iterando el proceso para todo n , deducimos que si W es simplemente conexa, entonces para todo número natural n , W_n es una componente simplemente conexa de $F(R)$, $m_n = 1$ y R actúa como un homeomorfismo entre W_n y W_{n+1} .

Para probar que W es una componente simplemente conexa razonamos por reducción al absurdo: supongamos que la región W no es simplemente conexa. Entonces, existe una curva cerrada y simple γ contenida en W que no es homotópicamente trivial en W (esto es, γ rodearía un conjunto que contiene puntos del conjunto de Julia de R). Definimos $\gamma_n = R^n(\gamma)$, estas son las imágenes sucesivas de la curva γ por las iteraciones de R . La aplicación

$$R^n: W \longrightarrow R^n(W)$$

es sobreyectiva, abierta y localmente inyectiva, pues R no tiene puntos críticos en W . Tenemos pues que R es un recubrimiento. Esto nos asegura que γ_n no es homotópicamente trivial en $R^n(W)$ pues, si lo fuera, el Teorema de Monodromía, cuya prueba podemos encontrar en [13, p. 247-249], nos permitiría tomar la deformación de γ_n en un punto en $R^n(W)$ y levantarlo a una deformación de γ en un punto en W .

Recordamos que si γ es una curva cerrada en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ , entonces el complementario de γ en la esfera es una unión de dominios disjuntos dos a dos. Si γ está contenida en una hemiesfera, entonces exactamente una de las componentes conexas del complemento contiene una hemiesfera. A esa componente conexa le llamamos exterior de γ y a las otras componentes conexas las llamamos interiores. Según el Teorema 1.1.1, para la aplicación racional R debe existir un número positivo δ tal que si γ es una curva cerrada de σ_0 -diámetro menor que δ , entonces la imagen $R(U)$ de cualquiera de las componentes interiores U de γ no corta a la componente exterior de $R(\gamma)$.

Siguiendo con la prueba del Lema 5.2.2, tomamos un número positivo δ como en el Teorema 1.1.1 y, tomando $K = \gamma$ en el Lema 5.2.1, tenemos que existe un número natural m tal que, para todo $n \geq m$,

$$\text{diam}(\gamma_n) \leq \delta.$$

Como consecuencia del Teorema 1.1.1, si $n \geq m$, entonces R transforma la unión γ_n y sus componentes interiores en la unión γ_{n+1} y sus componentes interiores. Aplicando el Teorema 1.4.7, deducimos que la familia de iteradas $\{R^n : n \geq 1\}$ es normal en cada componente interior de γ_m y, por tanto, cada componente interior de γ_n pertenece al conjunto de Fatou de R . De modo que, la unión de γ_m y sus componentes interiores es un conjunto conexo y compacto contenido en $F(R)$. Aplicando la Proposición 2.1.3, deducimos que su complementario en la esfera es un conjunto simplemente conexo. Tenemos pues que γ_m es homotópica a un punto en $F(R)$ y, por tanto, en el dominio W_m . Acabamos de llegar a una contradicción pues partíamos de la hipótesis de que γ rodeaba a un conjunto de puntos de $J(R)$. Concluimos así que W es simplemente conexo. □

Para finalizar esta sección, observamos que como consecuencia del Lema 5.2.2, en la prueba por reducción al absurdo del Teorema 5.1.3 podremos suponer sin pérdida de generalidad que existe un dominio errante de R que es simplemente conexo y satisface las propiedades anteriormente descritas.

5.3. Estructuras conformes.

Esta sección está dedicada al estudio de las estructuras conformes

Dada una función f con derivadas parciales continuas en un dominio D de \mathbb{C}_∞ , se introducen los operadores diferenciales:

$$\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Observamos que si f es analítica, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z),$$

donde la primera de las ecuaciones anteriores es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Una generalización de estas ecuaciones es la llamada *ecuación de Beltrami*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{5.6}$$

donde μ es una función adecuada en cierto sentido que está definida en D y toma valores complejos. La idea principal es que si $\mu = 0$ en D , entonces cualquier solución de la ecuación de Beltrami (5.6) lo suficientemente regular es una función analítica en D , mientras que, en la situación general, μ se toma como medida de desviación de una solución de ser conforme.

También ocurre que, dada una función f definida sobre D , podemos usar la ecuación (5.6) de Beltrami para encontrar el coeficiente μ que satisfaga la igualdad. Si ese coeficiente μ existe, lo llamamos *dilatación compleja de f* , lo denotamos por μ_f (en este caso, μ depende enteramente de f) y su expresión viene dada por:

$$\mu_f(z) = \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}.$$

Esta teoría tiene sentido para una gran clase de funciones μ , pues no es necesario que μ sea continua, lo que le proporciona a este concepto gran versatilidad. Sólo necesitamos que las funciones $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ sean medibles Lebesgue y satisfagan la desigualdad

$$\|\mu\|_\infty < 1 \tag{5.7}$$

en D , de modo que $|\mu| \leq \|\mu\|_\infty$ en casi todo punto de D . Si tenemos una función μ satisfaciendo las condiciones anteriores, decimos que μ es un *coeficiente de Beltrami* sobre el dominio D .

Definición 5.3.1. *Dados un dominio D y un coeficiente de Beltrami μ sobre D , decimos que un homeomorfismo $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es quasiconforme con dilatación compleja μ (o μ -conforme) sobre D si f es una L^2 -solución de la ecuación (5.6) de Beltrami en D .*

Con el fin de entender mejor la definición anterior y el concepto de *quasiconforme*, observamos lo siguiente:

En primer lugar una aplicación quasiconforme f es diferenciable en el sentido de la variable real en casi todo punto de D y sólo necesitaremos que la ecuación (5.6) de Beltrami se cumpla en casi todo punto de D . Por otro lado, la idea intuitiva que hay detrás de la ecuación (5.6) de Beltrami es que en casi todo punto z de un dominio complejo D , la función f transforma circunferencias infinitesimales centradas en z en elipses infinitesimales E centradas en $f(z)$, donde la excentricidad y la orientación vienen determinadas por $\mu(z)$. La condición dada en (5.7) se traduce en que μ controla la distorsión inducida por f e implica que la excentricidad de E está acotada en D .

El resultado que aparece a continuación es el Teorema Fundamental de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (5.6) de Beltrami

Teorema 5.3.2. *Sea μ un coeficiente de Beltrami en un dominio D contenido en la esfera de Riemann. Entonces,*

- i) Existe una aplicación quasiconforme con dilatación compleja μ sobre D .*
- ii) Si φ y ψ son dos aplicaciones quasiconformes con dilataciones complejas μ sobre D , entonces la composición $\varphi\psi^{-1}$ es analítica.*
- iii) Dos soluciones de la ecuación de Beltrami difieren solo por composición con un homeomorfismo analítico. En particular, si D es la esfera de Riemann completa, entonces existe una única solución de la ecuación de Beltrami que fije 3 puntos dados en la esfera de Riemann.*

La prueba de los apartados i) y ii) del Teorema 5.3.2 la podemos encontrar en [16, p. 24-28], y la prueba del apartado iii) la podemos encontrar en [14, p. 95-104].

Tomando μ la función constantemente nula y ψ la función identidad en D , obtenemos:

Corolario 5.3.3. *Si φ es quasiconforme con dilatación compleja cero en D , entonces φ es conforme en D , esto es, φ es un homeomorfismo analítico definido de D en su imagen.*

Nota. Dados un dominio simplemente conexo D de la esfera compleja conformemente equivalente al disco unidad, \mathbb{D} ; y un coeficiente de Beltrami μ sobre D , existe una aplicación quasiconforme $\varphi: D \rightarrow \mathbb{D}$ que es biyectiva y con dilatación compleja μ en casi todo D . Este

resultado se conoce como el Teorema de la Aplicación Medible de Riemann y, en el caso en el que $\mu \equiv 0$, tenemos el clásico Teorema de la Aplicación de Riemann.

El Teorema 5.3.2 nos conduce a la idea de que cada coeficiente de Beltrami μ sobre el dominio D crea una estructura de superficie de Riemann sobre D . Para D y μ dados, esta estructura conforme está definida por el atlas $\mathcal{A}(\mu)$ que consiste en la familia de cartas $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$ que son quasiconformes y con dilatación compleja μ sobre D . El primer apartado del teorema garantiza que cada punto de D pertenece al dominio de alguna carta φ ; y el segundo apartado del teorema establece que la transición entre dos cartas es analítica. De este modo, $\mathcal{A}(\mu)$ define una estructura sobre D que la convierte en superficie de Riemann. Denotaremos por $D[\mu]$ a tal superficie de Riemann, resaltando así la dependencia de la misma respecto del coeficiente de Beltrami y diremos que esta es la estructura μ -conforme sobre D . Si $\mu \equiv 0$, entonces $D[\mu]$ es simplemente D con su estructura como subdominio de \mathbb{C}_∞ y, siempre que no haya lugar a confusión, denotaremos con D a $D[0]$.

Definición 5.3.4. *Dada una superficie de Riemann $D[\mu]$, diremos que una aplicación*

$$f: D[\mu] \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

es μ -analítica si es una aplicación analítica entre la superficie de Riemann $D[\mu]$ y la superficie de Riemann \mathbb{C}_∞ con la estructura usual. Si además f es un homeomorfismo, diremos que f es una aplicación μ -conforme sobre D .

Observamos que la Definición 5.3.4 de aplicación μ -analítica es la definición clásica de aplicación holomorfa entre superficies de Riemann, donde f se dice holomorfa si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa como aplicación definida de \mathbb{C}_∞ en sí mismo para cualesquiera cartas φ y ψ de $D[\mu]$ y \mathbb{C}_∞ respectivamente.

La siguiente definición es una generalización de la Definición 5.3.4.

Definición 5.3.5. *Sean $\Omega[\mu]$ y $\Lambda[\eta]$ dos estructuras conformes, diremos que la aplicación $f: \Omega[\mu] \rightarrow \Lambda[\eta]$ es analítica si para cada par de cartas (U, ϕ) y (V, ψ) en $\Omega[\mu]$ y en $\Lambda[\eta]$ respectivamente, tales que la intersección de U con $f^{-1}(V)$ no es vacía, se tiene que la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es analítica en el sentido usual de \mathbb{C} .*

En el caso en el que μ sea idénticamente cero, mantenemos la definición usual de aplicación analítica o conforme. Asimismo, observamos que si f es una función μ -analítica en D y g es una función analítica en $f(D)$ (en el sentido clásico), entonces la composición de ambas, $g \circ f$, es μ -analítica en D , pues es composición de funciones analíticas. En general, un homeomorfismo φ definido sobre un abierto de una superficie de Riemann, \mathcal{R} , en la esfera compleja es analítico si y solo si es una carta en el atlas maximal de \mathcal{R} .

El siguiente resultado recoge las ideas que acabamos de describir.

Lema 5.3.6. *Sea φ un homeomorfismo definido en D . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- i) *El homeomorfismo φ es μ -conforme sobre D .*
- ii) *El homeomorfismo φ es una carta en $D[\mu]$.*
- iii) *La aplicación entre superficies de Riemann $\varphi: D[\mu] \rightarrow \mathbb{C}_\infty[0]$ es analítica.*

Antes de terminar esta sección, vamos a estudiar cómo se transfiere una estructura conforme de un dominio a otro en términos de dilataciones complejas. Si g es una aplicación biyectiva definida de una superficie de Riemann X y toma valores en un conjunto cualquiera Y , entonces g puede usarse para transferir de forma natural la estructura conforme definida sobre X a una estructura conforme sobre Y , de modo que la aplicación $g: X \rightarrow Y$ sea analítica.

El resultado que aparece a continuación nos será de utilidad más adelante.

Lema 5.3.7. *Sean f y g dos aplicaciones μ -conforme y ν -conforme respectivamente tales que la composición de ambas, $g \circ f$, está bien definida. Entonces,*

$$\mu_{g \circ f}(z) = \mu_g(f(z)) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}.$$

Demostración. En primer lugar, despejando adecuadamente de la ecuación de Beltrami tenemos que

$$\mu_f(z) = \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}.$$

En segundo lugar, aplicando la Regla de la Cadena en Derivadas Parciales, deducimos que

$$\partial(g \circ f) = (\partial g \circ f) \partial f + (\bar{\partial} g \circ f) \partial \bar{f}$$

y

$$\bar{\partial}(g \circ f) = (\bar{\partial} g \circ f) \bar{\partial} f + (\partial g \circ f) \bar{\partial} \bar{f}.$$

Finalmente, se cumple que $\bar{\partial} \bar{f} = \overline{\partial f}$ y $\bar{\partial} \bar{f} = \overline{\partial f}$. Como f es una función analítica, entonces $\bar{\partial} f = 0$ y $\partial f = f'$. Concluimos pues que

$$\mu_{g \circ f}(z) = \frac{(\bar{\partial} g \circ f)(z) \overline{f'(z)}}{(\partial g \circ f)(z) f'(z)} = \mu_g(f(z)) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)},$$

como queríamos probar. □

Lema 5.3.8. *Supongamos que μ y ν son dos coeficientes de Beltrami sobre los dominios U y V respectivamente y sea $g: U \rightarrow V$ una función analítica en el sentido clásico y sobreyectiva. Entonces, son equivalentes:*

i) *La aplicación $g: U[\mu] \rightarrow V[\nu]$ es analítica.*

ii) *En casi todo U , se cumple que*

$$\nu(g(z)) = \frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}} \mu(z).$$

Demostración. Sea ψ una aplicación ν -conforme definida sobre V . Aplicando el Lema 5.3.7, deducimos que la dilatación compleja de la composición $\psi \circ g$ es la función μ_1 dada por

$$\mu_1(z) = \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} \nu(g(z)).$$

Según la Definición 5.3.5 de aplicaciones analíticas entre superficies de Riemann, la condición i) del Lema 5.3.8 se cumple si y solo si la composición de funciones

$$\psi \circ g: U[\mu] \xrightarrow{g} V[\nu] \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}_\infty[0]$$

es analítica.

Para probar que i) implica ii) suponemos que la aplicación $g: U[\mu] \rightarrow V[\nu]$ es analítica. Entonces, la composición de funciones $\psi \circ g$ es analítica (pues es composición de funciones analíticas) y, por tanto, es μ -conforme en un entorno de cada punto z de U salvo, a lo más, en un conjunto de puntos aislados. Deducimos así que $\mu = \mu_1$ en casi todo U , esto es, ii).

Recíprocamente, si ii) se cumple, entonces la composición de funciones $\psi \circ g$ es μ -conforme en un entorno de cada punto z de U salvo, a lo más, en un conjunto de puntos aislados $\{z_j\}$. De modo que, $\psi \circ g$ es analítica en el complementario del conjunto $\{z_j\}$ y, como g es continua en U , $\psi \circ g$ es analítica en U . Concluimos así que g es analítica en U .

□

El Lema 5.3.8 nos servirá para transferir estructuras de dos formas posibles. En primer lugar, si g es un homeomorfismo analítico definido de U en V y μ es un coeficiente de Beltrami en U , entonces podemos definir ν un coeficiente de Beltrami sobre V según la fórmula dada en ii) como

$$\nu(g(z)) = \frac{g'(z)}{\overline{g'(z)}} \mu(z)$$

y la condición dada en i) garantiza que g es una función analítica definida de $U[\mu]$ en $V[\nu]$. Acabamos de transferir así la estructura de U en V . De otro modo, si no suponemos que la función g sea inyectiva, el proceso que hemos seguido anteriormente para definir ν puede no ser válido en general. Sin embargo, si ν es un coeficiente de Beltrami sobre V dado, sí que podemos usar la fórmula dada en ii) para definir μ y forzar así que g sea analítica (apartado i)). En este caso, la estructura de transfiere de V a U . Recurriremos a estas dos ideas más adelante.

5.4. Conjugadas quasiconformes de funciones racionales.

En esta sección, ponemos el foco en la conjugación $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ de una función racional R con una aplicación φ que es μ -conforme y está definida de la esfera compleja en sí misma (φ es un homeomorfismo). En general, la aplicación $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ no es analítica. Sin embargo, se puede caracterizar cuándo esta composición sí lo es. El siguiente resultado recoge esta idea.

Lema 5.4.1. *Sean R una función racional y φ una aplicación μ -conforme definida de la esfera de Riemann en sí misma. Entonces, $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ es una función racional si y solo si*

$$\mu(R(z)) = \frac{R'(z)}{R'(z)}\mu(z), \quad (5.8)$$

en casi toda la esfera y, cuando eso ocurre, se cumple que el grado de $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ coincide con el grado de R .

Observación. Un hecho muy relevante del Lema 5.4.1 es que éste garantiza que si se cumple la relación dada en (5.8), entonces, aunque la aplicación φ no sea analítica, la conjugación $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ sí lo es.

Demostración. En primer lugar, aplicando el Lema 5.3.8, observamos que la relación dada en (5.8) es equivalente a probar que la aplicación

$$R: \mathbb{C}_\infty[\mu] \longrightarrow \mathbb{C}_\infty[\mu]$$

sea analítica. Esto es equivalente, a su vez, a que la composición $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ sea una función analítica definida de la esfera compleja en sí misma con la estructura compleja usual (pues φ es una carta de la superficie de Riemann $\mathbb{C}_\infty[\mu]$). Acabamos de probar así que la condición dada en (5.8) es equivalente a que la aplicación $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ sea analítica sobre la esfera de Riemann y esto es equivalente, a su vez, a que la composición de funciones anterior sea una

función racional. Más aún, el grado de $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ coincide con el grado de R , pues φ es un homeomorfismo definido de la esfera en sí misma, el grado de $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ viene dado por la cardinalidad del conjunto $(\varphi \circ R \circ \varphi^{-1})^{-1}\{w\}$ para la mayoría de puntos w de la esfera compleja y este cardinal coincide con el cardinal del conjunto $R^{-1}\{w\}$, terminando así la prueba de este resultado. □

En el siguiente resultado adaptamos el Lema 5.4.1 al caso en el que R tenga dominios errantes, siguiendo así los pasos de la demostración del Teorema 5.1.3. En la prueba del mismo, denotaremos por $[W]$ a la órbita de W que es el conjunto $\{R^n(W)\}_{n \geq 0}$.

Lema 5.4.2. *Sea R una función racional. Supongamos que W es un dominio errante tal que todas las componentes $(R^n(W))$ son disjuntas, simplemente conexas y sin puntos críticos de R . Entonces, todo coeficiente de Beltrami μ definido sobre W se extiende a un coeficiente de Beltrami sobre toda la esfera de Riemann con la propiedad de que si φ es una aplicación μ -conforme de la esfera en sí misma, entonces $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ es una aplicación racional con el mismo grado que R .*

Demostración. Empezamos considerando μ un coeficiente de Beltrami sobre W . Nuestro objetivo es extender μ a toda la esfera compleja de modo que tal extensión satisfaga la condición (5.8),

$$\mu(R(z)) = \frac{R'(z)}{R'(z)}\mu(z),$$

en casi todo punto de la esfera compleja. Como la esfera es unión disjunta del conjunto completamente invariante $[W]$ y su complementario (completamente invariante también), que denotamos por K , podemos entender μ a $[W]$ y a K de forma separada y, después, comprobar que la ecuación anterior se cumple en cada uno de los conjuntos. Con esto, definimos μ idénticamente cero sobre K , asegurándonos así que la condición (5.8) anterior se satisface en este conjunto de forma trivial.

Por otro lado, vemos la extensión de μ al conjunto $[W]$. En primer lugar, aplicando el Lema 5.3.8 y según las ideas del final de la Sección 5.3, podemos definir μ en los conjuntos disjuntos dos a dos $W_n = R^n(W)$, $n \geq 0$ asegurando que la aplicación

$$\nu(g(z)) = \frac{g'(z)}{g'(z)}\mu(z)$$

es analítica. A continuación, definimos μ sobre las imágenes inversas de cada W_n , exigiendo que R sea una aplicación analítica entre cualquier componente Ω y su imagen por R (con

su μ -estructura). Este proceso determina μ de forma única sobre $[W]$ y se caracteriza por el hecho de que para cada una de las componentes Ω del conjunto invariante $[W]$, la aplicación

$$R: \Omega[\mu] \longrightarrow R(\Omega)[\mu]$$

es analítica. Como consecuencia de esto, la relación (5.8)

$$\mu(R(z)) = \frac{R'(z)}{R'(z)}\mu(z)$$

se cumple en casi todo $[W]$, como queríamos probar. □

Hemos puesto fin a esta sección probando un resultado muy importante en el desarrollo de la demostración del Teorema 5.1.3 y es que todo coeficiente de Beltrami definido sobre una componente errante de R que satisface las condiciones del Lema 5.2.2 se puede extender a un coeficiente de Beltrami sobre la esfera de Riemann completa. Además, la composición de R con una aplicación definida de la esfera en sí misma y cuya dilatación compleja sea dicho coeficiente de Beltrami es otra aplicación racional que tiene el mismo grado que R .

5.5. Comportamiento frontera de aplicaciones conjugadas.

Hay un momento en la prueba del Teorema 5.1.3 de Sullivan que estamos construyendo en el que es necesario comparar los valores frontera de dos funciones conjugadas entre sí por una aplicación conforme. Es por ello que dedicamos esta sección al estudio de comportamientos frontera de aplicaciones conjugadas.

El siguiente resultado nos será de utilidad más adelante. Podemos consultar su prueba en [3, p. 30].

Teorema 5.5.1. *Toda función quasiconforme de un disco abierto en sí mismo puede ser extendido a un homeomorfismo sobre el disco cerrado.*

Sean μ un coeficiente de Beltrami sobre el disco unidad, que denotamos por \mathbb{D} ; y g una aplicación conforme definida del disco unidad en un dominio simplemente conexo W contenido en el plano complejo, \mathbb{C} . Vamos a usar g para transferir μ a un coeficiente de Beltrami ν sobre W tal y como se explica en el Lema 5.3.8.

Supongamos que Φ es una aplicación ν -conforme definida de W en sí mismo tal que Φ se extiende a un homeomorfismo sobre la clausura de W cumpliendo que Φ es la función identidad, que denotamos por $\Phi = I$, sobre la frontera de W . Entonces, la aplicación

$$\varphi = g^{-1} \circ \Phi \circ g$$

es una aplicación μ -conforme definida del disco unidad en sí mismo (en particular, φ es un homeomorfismo del disco en sí mismo). Por tanto, el Teorema 5.5.1 nos asegura que φ se puede extender a un homeomorfismo sobre el disco cerrado, $\bar{\mathbb{D}}$. Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de φ en la frontera del disco unidad, sabiendo que Φ se comporta en W como la identidad.

Cuando comparamos aplicaciones que son conjugadas por una aplicación conforme, resulta natural preguntarse por los invariantes conformes de dichas aplicaciones. Uno de ellos es la métrica hiperbólica. Dado un homeomorfismo Φ definido de una región simplemente conexa Ω en sí misma, definimos la función desplazamiento hiperbólico de Φ por la fórmula

$$z \mapsto \rho_{\Omega}(\Phi(z), z),$$

donde ρ_{Ω} denota la métrica hiperbólica sobre Ω . Esta métrica existe salvo que la región Ω sea conformemente equivalente al plano o a la esfera compleja.

La aplicación conforme $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ es una isometría respecto de las métricas hiperbólicas sobre el disco unidad y W , de modo que la propiedad de tener un desplazamiento acotado es invariante por la conjugación por g .

Volviendo al punto de partida, si Φ tiene un desplazamiento acotado en el abierto simplemente conexo W respecto de la métrica hiperbólica en W , ρ_W , entonces φ tiene un desplazamiento acotado en el disco unidad respecto de la métrica hiperbólica sobre el disco unidad, $\rho_{\mathbb{D}}$; y el recíproco también es cierto. Esto implica además que φ coincide con la función identidad sobre la frontera del disco unidad, como se prueba en el siguiente lema.

Lema 5.5.2. *Sea $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función tal que su función desplazamiento está acotada por d . Entonces, existe una constante M tal que*

$$|z - \varphi(z)|^2 \leq M(1 - |z|) \tag{5.9}$$

y, por tanto, φ se extiende de forma continua como la función identidad sobre la frontera del disco unidad.

Demostración. Para comenzar la prueba de este lema, necesitamos utilizar la siguiente fórmula del seno hiperbólico, cuya prueba podemos encontrar en [1, p. 18]

$$\sinh^2\left(\frac{\rho_{\mathbb{D}}(z, w)}{2}\right) = \frac{4|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \tag{5.10}$$

Sabemos por hipótesis que el desplazamiento de φ está acotado por una constante d , esto es,

$$\rho_{\mathbb{D}}(\varphi(z), z) < d,$$

para todo punto z de la esfera compleja. Como el seno hiperbólico es una función creciente en los reales, existe una constante d_2 tal que

$$\sinh^2 \left(\frac{\rho_{\mathbb{D}}(\varphi(z), z)}{2} \right) \leq d_2.$$

Aplicando esta cota en la fórmula (5.10) anterior, deducimos que

$$\frac{4|\varphi(z) - z|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |z|^2)} \leq d_2$$

y despejando adecuadamente, llegamos a que

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - z|^2 &\leq \frac{d_2}{4} (1 - |\varphi(z)|^2) (1 - |z|^2) \\ &= \frac{d_2}{4} (1 - |\varphi(z)|)(1 + |\varphi(z)|)(1 - |z|)(1 + |z|) \\ &\leq M(1 - |z|), \end{aligned}$$

siendo $M > 0$ es una constante, probando así la desigualdad dada en (5.9).

Por otro lado, si tomamos z un punto de la frontera del disco unidad y (z_n) una sucesión de puntos contenida en \mathbb{D} tal que $z_n \rightarrow z$, si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$|\varphi(z_n) - z| \leq |\varphi(z_n) - z_n| + |z_n - z| \leq M^{1/2}(1 - |z_n|)^{1/2} + |z_n - z| \rightarrow 0,$$

si $n \rightarrow \infty$. Concluimos así que φ se extiende de forma continua a la frontera del disco unidad como la función identidad. □

Buscamos un criterio que nos asegure cuando la aplicación Φ tiene un desplazamiento acotado sobre W . Para ello, supondremos que ν es un coeficiente de Beltrami definido sobre la esfera compleja de modo que Φ sea una aplicación ν -conforme definida de la esfera de Riemann en sí misma. Con esta información adicional, podemos obtener un criterio para que la función de desplazamiento definida sobre Φ esté acotada respecto de la métrica cordal sobre la esfera compleja y, después, convertir esta condición en un criterio para Φ que le suponga tener acotada sobre el abierto W la función desplazamiento hiperbólico.

El siguiente resultado nos proporciona una cota de la función desplazamiento de una aplicación ν -conforme respecto de la métrica cordal, que denotamos por σ .

Lema 5.5.3. *Para todo número positivo ε , existe un número positivo δ tal que si ν es un coeficiente de Beltrami definido sobre la esfera compleja tal que $\|\nu\| < \delta$, entonces*

$$\sigma(F(z), z) < \varepsilon,$$

para todo punto z de la esfera compleja y para toda función F que sea una aplicación ν -conforme definida de la esfera compleja en sí misma y que fije los puntos $0, 1$ y ∞ .

En la prueba del Lema 5.5.3, necesitamos el siguiente resultado, cuya demostración podemos encontrar en [16, p. 29].

Teorema 5.5.4. Sean μ y μ_n coeficientes de Beltrami sobre \mathbb{C}_∞ tales que $\|\mu_n\|_\infty \leq k < 1$, donde $k > 0$; y $\lim \mu_n(z) = \mu(z)$ en casi todo punto de la esfera compleja. Si f y f_n son aplicaciones quasiconformes con dilataciones complejas μ y μ_n respectivamente que fijan los puntos $0, 1$ e ∞ , entonces

$$f_n(z) \longrightarrow f(z),$$

si $n \rightarrow \infty$, uniformemente en \mathbb{C}_∞ respecto de la métrica esférica.

Demostración del Lema 5.5.3. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que, bajo las hipótesis del lema, existen $\varepsilon > 0$, una sucesión (F_n) de aplicaciones ν_n -conformes respectivamente y una sucesión (z_n) de puntos de la esfera tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- i) La aplicación F_n deja fijos los puntos $0, 1$ y ∞ .
- ii) Se cumple que $\|\nu_n\| < 1/n$.
- iii) Se cumple que $\sigma(F_n(z_n), z_n) \geq \varepsilon$.

Siguiendo con la notación del Teorema 5.5.4, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $f_n = F_n$ y $\mu_n = \nu_n$ y tomamos $f = I$, siendo I la función identidad en \mathbb{C}_∞ . De la condición dada en i) deducimos que cada f_n fija los puntos $0, 1$ y ∞ y de la condición dada en ii) deducimos que para cada n , $\|\nu_n\| < 1/n < 1$. Aplicando el Teorema 5.5.4, concluimos que F_n converge uniformemente a la función identidad en la esfera compleja, llegando así a una contradicción con iii) y terminando la prueba del lema. □

Tomando δ_0 como el valor de δ correspondiente a tomar $\varepsilon = 1/8$ en el Lema 5.5.3 anterior y aplicando, a su vez, el Teorema 5.5.4, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 5.5.5. Sean ρ la métrica hiperbólica sobre un subdominio simplemente conexo W de la esfera compleja y ν un coeficiente de Beltrami definido en la esfera compleja. Si

$$\|\nu\| < \delta_0,$$

entonces para toda Φ aplicación ν -conforme definida sobre la esfera compleja satisfaciendo:

i) el dominio W es invariante hacia delante bajo Φ , esto es, $\Phi(W) = W$,

ii) la aplicación Φ coincide con la identidad sobre la frontera de W ;

se tiene que

$$\rho_W(\Phi(z), z) < \log 2,$$

en W .

Demostración. El enunciado del Lema 5.5.5 es invariante por conjugación por transformaciones de Möbius, de modo que, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto del infinito pertenece a la frontera de W . Además, supongamos que W , ρ , ν y Φ satisfacen las hipótesis del Lema 5.5.3 con $\|\nu\| < \delta_0$.

Tomamos ζ un punto de W . Sea $r(\zeta)$ la distancia euclídea de ζ a la frontera de W y supongamos que esta distancia se alcanza en el punto $\alpha \in \partial W$. Como la frontera de W es un conjunto conexo (pues W es simplemente conexo) que contiene los puntos ∞ y α , existe otro punto β en la frontera de W tal que

$$|\beta - \alpha| = |\zeta - \alpha| = r(\zeta) \quad (5.11)$$

y definimos la función h como

$$h(z) = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Esta función es resultado de un giro (euclídeo) centrado en el origen compuesto con una homotecia y una traslación. Definimos F como

$$F = h\Phi h^{-1}.$$

Esta es una aplicación ν -conforme definida de la esfera compleja en sí misma que fija los puntos 0 , 1 e ∞ , pues como los puntos ∞ , α y β pertenecen a la frontera de W y Φ coincide con la función identidad sobre ∂W , entonces Φ fija los tres puntos anteriores y, además, se cumple que $h(\alpha) = 0$, $h(\beta) = 1$ y $h(\infty) = \infty$. Aplicando el Lema 5.5.3 tenemos que

$$\sigma(F(z), z) < \frac{1}{8} \quad (5.12)$$

para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$, esto es, la función desplazamiento en la métrica hiperbólica está acotado por $1/8$.

Si escribimos $z = h(\zeta)$, se cumple que

$$\sigma(h(\Phi(\zeta)), h(\zeta)) < \frac{1}{8} < \sigma(1, 2)$$

y, como

$$|h(\zeta)| = \left| \frac{\zeta - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1,$$

pues vimos en (5.11) que $|\zeta - \alpha| = |\beta - \alpha|$; entonces $|h(\Phi(\zeta))| \leq 2$. Deducimos así que

$$2|h(\Phi(\zeta)) - h(\zeta)| = \sigma(h(\Phi(\zeta)), h(\zeta)) \sqrt{(1 + |h(\Phi(\zeta))|^2)(1 + |h(\zeta)|^2)} < \frac{1}{2}.$$

Por definición de h , tenemos que

$$2 \left| \frac{\Phi(\zeta) - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\zeta - \alpha}{\beta - \alpha} \right| < \frac{1}{2}.$$

Deducimos así que

$$|\Phi(\zeta) - \zeta| < \frac{r(\zeta)}{4},$$

donde $r(\frac{\phi(\zeta) - \zeta}{r(\zeta)}) = |\beta - \alpha|$. Como se cumple que el disco euclídeo $D_0 = \{z: |z - \zeta| < r(\zeta)\}$ está contenido en W , si denotamos por ρ_0 a la métrica hiperbólica en el disco D_0 , el Principio de Comparación para la métrica hiperbólica (cuya prueba podemos encontrar en [10, p. 33]) establece que

$$\rho_W(\Phi(\zeta), \zeta) \leq \rho_0(\Phi(\zeta), \zeta) \leq \log \left(\frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \leq \log(2),$$

pues la distancia hiperbólica en el disco unidad, \mathbb{D} , de un punto z al origen viene dada por la fórmula

$$\log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

$\rho_0(\Phi(\zeta), \zeta)$ es la distancia hiperbólica en \mathbb{D} entre los puntos

$$0 = \frac{\zeta - \zeta}{r(\zeta)} \quad \text{y} \quad \frac{\phi(\zeta) - \zeta}{r(\zeta)};$$

y

$$\left| \frac{\phi(\zeta) - \zeta}{r(\zeta)} \right| < 1/4.$$

□

Como conclusión de esta sección, tenemos que si $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ y $\Phi: W \rightarrow W$ son aplicaciones como las que hemos descrito anteriormente tales que $\varphi = g^{-1} \circ \Phi \circ g$ y Φ satisface las hipótesis del Lema 5.5.5, entonces φ se puede extender como la función identidad en la frontera del disco unidad.

5.6. Prueba del Teorema 5.1.3.

Esta sección está dedicada a completar la prueba del Teorema de los Dominios Errantes de Sullivan, el Teorema 5.1.3, que establece que toda componente del conjunto de Fatou de una función racional es eventualmente periódica. Esto implica que el conjunto de Fatou de una función racional no tiene componentes errantes.

Como mencionamos anteriormente, para probar este resultado razonamos por reducción al absurdo: supongamos que R tiene un dominio de Fatou errante. Entonces, existe una componente W del conjunto de Fatou de R satisfaciendo las propiedades dadas en el Lema 5.2.2, esto es, existe una componente conexa W de $F(R)$ tal que

$$W, R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$$

son componentes simplemente conexas de $F(R)$, disjuntas dos a dos, sin puntos críticos de R y, además, para cada número natural n , R es un homeomorfismo definido de W_n en $W_{n+1} = R(W_n)$.

Como W es un dominio simplemente conexo y el conjunto de Julia de R , $J(R)$, es infinito (Teorema 1.6.1 i)), el Teorema de la Aplicación de Riemann establece que existe una equivalencia conforme g definida del disco unidad en W .

Ahora, sea μ un coeficiente de Beltrami definido sobre el disco unidad, \mathbb{D} . Mediante g , podemos transferir μ a un coeficiente de Beltrami ν definido sobre W como hicimos en el Lema 5.3.8. Esto es, definimos ν un coeficiente de Beltrami sobre W que verifique la ecuación

$$\nu(g(z)) = \frac{g'(z)}{g(z)} \mu(z)$$

en casi todo el disco unidad. Además, aplicando el Lema 5.4.2, podemos extender el nuevo coeficiente ν a toda la esfera compleja.

Ahora, planteamos y resolvemos la ecuación (5.6) de Beltrami sobre la esfera compleja, tomando el coeficiente de Beltrami ν anterior,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \nu \frac{\partial f}{\partial z} \tag{5.13}$$

y obtenemos así una función $\varphi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que es una transformación ν -conforme y tal que la composición $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ es una función racional del mismo grado que R (todo esto es consecuencia del Lema 5.4.2). Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que φ fija los puntos $0, 1$ e ∞ , pues en otro caso, podemos componer φ con una transformación de Möbius adecuada y renombrar φ (esta composición de funciones sigue verificando la ecuación (5.13)). De este modo, la función φ queda unívocamente determinada por el coeficiente

de Beltrami μ pues si dos aplicaciones ν -conformes definidas de la esfera compleja en sí misma fijan los puntos $0, 1$ e ∞ , entonces ambas aplicaciones son la misma. Hemos creado así la siguiente correspondencia:

$$\mu \xrightarrow{h_1} \nu \xrightarrow{h_2} \varphi \xrightarrow{h_3} \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}. \quad (5.14)$$

La composición $h_1 \circ h_2 \circ h_3$ es una aplicación definida sobre el espacio de los coeficientes de Beltrami sobre el disco unidad y toma valores en el espacio de funciones racionales de grado d , donde $d = \text{gr}(R)$.

Hablando en términos generales, el espacio de coeficientes de Beltrami definidos sobre el disco unidad es un espacio de dimensión infinita, mientras que el espacio de las funciones racionales de grado d es un espacio de dimensión finita. Esto implica, de algún modo, que la aplicación $\mu \mapsto \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ transforma un subespacio vectorial “grande” de coeficientes de Beltrami en una misma función racional S .

Estas ideas están recogidas en el siguiente resultado.

Lema 5.6.1. *Sea $\eta_0 > 0$. Entonces, para cada $0 \leq t \leq 1$, podemos construir un coeficiente de Beltrami μ_t sobre el disco unidad que satisfaga las siguientes propiedades:*

- i) $\|\mu_t\|_\infty < \eta_0$.*
- ii) La transformación dada en (5.14) hace corresponder cada μ_t con la misma función racional S .*

Más aún, esta construcción se puede hacer de modo que para cada z , la aplicación dada por $t \mapsto \varphi_t(z)$ sea continua en el intervalo $[0, 1]$, donde φ_t es la imagen de μ_t bajo $h_2 \circ h_1$ (estas son las dos primeras aplicaciones de (5.14)).

Demostración. Sea d el grado de R y tomamos N un entero mayor que $4d + 2$ (se puede probar que el espacio de funciones racionales de grado d tiene $4d + 2$ grados de libertad sobre \mathbb{R}). Consideramos ε_1 un número real muy pequeño que determinaremos más adelante y, para cada vector T del cubo $[0, \varepsilon_1]^N$, vamos a construir un coeficiente de Beltrami μ_T sobre el disco unidad, \mathbb{D} y una aplicación Ψ definida del disco unidad sobre sí mismo que sea μ_T -conforme. De hecho, vamos a construir las aplicaciones Ψ_T y, a partir de ellas, definiremos los coeficientes de Beltrami μ_T como sus dilataciones complejas.

En primer lugar, dividimos el intervalo $[0, 2\pi]$ (que identificamos con $\partial\mathbb{D}$) en $2N$ subintervalos consecutivos de la misma longitud que denotamos por $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_N, B_N$. Para cada uno de los arcos A_j , construimos w_j una función de clase \mathcal{C}^∞ definida sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ con las siguientes propiedades:

1. $w_j(x) > 0$, para todo x perteneciente al interior de A_j .
2. $w_j(x) = 0$, en otro caso.
3. $|w'_j(x)| < 1/2$, para todo x y para todo j .

A continuación, dado $T = (t_1, \dots, t_N)$ un vector del cubo $[0, \varepsilon_1]^N$ (con ε_1 un número positivo aún sin determinar), definimos la aplicación $\Psi_T: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$\Psi_T(z) = ze^{i \sum_{j=1}^N t_j w_j(\theta)},$$

donde z es de la forma $re^{i\theta}$ y tomamos μ_T un coeficiente de Beltrami sobre \mathbb{D} como la dilatación compleja de Ψ_T . Partiendo de las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

se puede calcular la dilatación compleja μ_T de Ψ_T en términos de las derivadas parciales $\frac{\partial \Psi_T}{\partial r}$ y $\frac{\partial \Psi_T}{\partial \theta}$ y obtener así

$$\mu_T(re^{i\theta}) = \frac{e^{2i\theta} \sum_{j=1}^N t_j w'_j(\theta)}{2 + \sum_{j=1}^N t_j w'_j(\theta)}.$$

De este modo, tenemos que para todo T se cumple que

$$|\mu_T(re^{i\theta})| \leq \frac{\sum_{j=1}^N |t_j w'_j(\theta)|}{2 - \sum_{j=1}^N |t_j w'_j(\theta)|} \leq \frac{N\varepsilon_1}{2 - N\varepsilon_1}.$$

Observamos que

- i) Si el argumento de z pertenece a alguno de los intervalos B_j , entonces $\Psi_T(z) = z$.
- ii) Distintos valores de T generan distintas funciones Ψ_T , hecho que es muy relevante.
- iii) Dado cualquier $\eta > 0$, puedo tomar $\varepsilon_1 > 0$ tal que el cociente $N\varepsilon_1/(2 - N\varepsilon_1)$ sea suficientemente pequeño y así

$$\|\mu_T\|_\infty < \eta.$$

Necesitaremos las observaciones i) y ii) anteriores para terminar la prueba del Teorema 5.1.3 pues estas determinan las propiedades que satisfacen las funciones Ψ_T con las que se llegará a una contradicción. La observación iii) nos asegura que tomando un valor de ε_1 suficientemente

pequeño se cumple la desigualdad dada en el apartado i) del Lema 5.6.1. Por tanto, fijamos ese valor de ε_1 adecuado y terminamos así la prueba de este apartado.

Dado un vector $T \in [0, \varepsilon_1]^N$, hemos construido una función Ψ_T y un coeficiente de Beltrami μ_T definido como su dilatación compleja sobre el disco unidad. De este modo y según la correspondencia dada en (5.14), podemos escribir

$$T \mapsto \mu_T \mapsto \nu_T \mapsto \varphi_T \mapsto R_T = \varphi_T \circ R \circ \varphi_T^{-1}. \quad (5.15)$$

La idea de la prueba es factorizar la aplicación dada por $T \rightarrow R_T$ a través de un vector intermedio cuyas componentes son los ceros y los polos de R_T y, entonces, mostrar que el primer factor y, por tanto, la composición, es constante sobre alguna curva.

Podemos reemplazar R por una conjugación respecto de una transformación de Möbius y asumir que

- 1) R tiene a_1, \dots, a_d ceros distintos en \mathbb{C} .
- 2) R tiene b_1, \dots, b_d polos distintos en \mathbb{C} .
- 3) $R(0) = 1$.

Recordamos que la aplicación φ_T dada en (5.15) fija los puntos $0, 1$ e ∞ . Por tanto, R_T es la única función racional con ceros en los puntos $\varphi_T(a_j)$, $j = 1, \dots, N$, polos en los puntos $\varphi_T(b_j)$, $j = 1, \dots, N$ y satisfaciendo la igualdad $R_T(0) = 1$. De este modo, solo tenemos que probar que la aplicación $\Pi: (0, \varepsilon_1)^N \rightarrow \mathbb{C}^{2d}$ dada por

$$\Pi(T) = (\varphi_T(a_1), \dots, \varphi_T(a_d), \varphi_T(b_1), \dots, \varphi_T(b_d))$$

es constante sobre alguna curva.

En el artículo [4], se prueba que si la aplicación dada por $T \mapsto \mu_T(z)$ es de clase \mathcal{C}^∞ , entonces las aplicaciones

$$T \rightarrow \varphi_T(a_j) \quad \text{y} \quad T \rightarrow \varphi_T(b_j)$$

también son de clase \mathcal{C}^∞ . Luego, si denotamos por \mathcal{C} al cubo $(0, \varepsilon_1)^N$, concluimos que Π es una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ definida en el cubo \mathcal{C} y que toma valores en \mathbb{C}^{2d} .

El conjunto de puntos T donde el rango de $D\Pi$ es máximo, digamos $\text{rango}(D\Pi) = k$, es un abierto contenido en el cubo \mathcal{C} y lo denotamos por \mathcal{C}_0 . Luego, la restricción de Π a \mathcal{C}_0 es una aplicación de rango constante. Bajo estas condiciones, el Teorema de la Función Implícita establece que la imagen inversa de un punto de $\Pi(\mathcal{C}_0)$ es una variedad diferenciable contenida en \mathcal{C}_0 de dimensión $N - k > 0$. Por tanto, podemos asegurar que existe una curva contenida en \mathcal{C}_0 donde la aplicación Π es constante. □

Como consecuencia del Lema 5.6.1 tenemos que para todo t en el intervalo $[0, 1]$, existe una función $t \mapsto \varphi_t$ tal que

$$\varphi_t \circ R \circ \varphi_t^{-1} = S = \varphi_0 \circ R \circ \varphi_0^{-1}. \quad (5.16)$$

Si para cada $0 \leq t \leq 1$, escribimos

$$\Phi_t = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t, \quad (5.17)$$

tenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.6.2. *Sea Φ la función definida en (5.17). Entonces,*

- i) Para todo punto z de la esfera compleja, se cumple que $\Phi(z) = z$.*
- ii) Para cada t , la aplicación $z \mapsto \Phi_t(z)$ conmuta con R .*
- iii) Para cada t , la aplicación $z \mapsto \Phi_t(z)$ es un homeomorfismo definido de la esfera compleja en sí mismo.*
- iv) Para cada t , la aplicación $z \mapsto \Phi_t(z)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Para probar i) basta desarrollar la expresión de Φ_0 :

$$\Phi_0(z) = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0(z) = z.$$

Partiendo de la expresión dada en (5.16), tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_t \circ R &= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \circ R \\ &= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \circ R \circ \varphi_t^{-1} \circ \varphi_t \\ &= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ R \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \\ &= R \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \\ &= R \circ \Phi_t, \end{aligned}$$

esto es, la aplicación Φ_t conmuta con R , probando así ii). Como φ_0 y φ_t son homeomorfismos, entonces también lo es la composición de ellos, probando así iii). Finalmente, sabemos por el Lema 5.6.1 que la aplicación $t \mapsto \varphi_t(z)$ es continua en $[0, 1]$. Por tanto, la composición $t \mapsto \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t(z)$ también lo es.

□

El siguiente resultado establece que, las aplicaciones Φ_t , $0 \leq t \leq 1$, actúan como la identidad sobre el conjunto de Julia de R y dejan invariantes cada componente conexa del conjunto de Fatou de R .

Lema 5.6.3. *Para cada $t \in [0, 1]$, se cumple que $\Phi_t = I$ en el conjunto de Julia de R , esto es, para todo $z \in J(R)$, $\Phi_t(z) = z$. Además, Φ_t transforma cada componente del conjunto de Fatou de R en sí misma (de forma sobreyectiva).*

Demostración. Para cada número entero positivo p , consideramos el conjunto de puntos fijos de la iterada R^p y lo denotamos por F_p . Partiendo del apartado ii) del Corolario 5.6.2, deducimos que si z es un punto de F_p , entonces $\Phi_t(z)$ también lo es. Esto es, la aplicación Φ_t transforma cada conjunto finito de puntos F_p en sí mismo (para cada entero positivo p , el conjunto F_p es invariante hacia delante por Φ_t). Sabemos por el apartado iv) del Corolario 5.6.2 que para cada punto z de F_p , la aplicación dada por $t \mapsto \Phi_t(z)$ definida en el intervalo $[0, 1]$ que toma valores en el conjunto discreto F_p es continua. De modo que, la aplicación Φ_t es constante y, por el apartado i) del Corolario 5.6.2, deducimos que

$$\Phi_t(z) = z,$$

para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $z \in F_p$. Por tanto, para todo $t \in [0, 1]$, la aplicación Φ_t es la función identidad sobre la unión de los conjuntos F_p , $\cup_p F_p$ y, el apartado iii) nos asegura que también lo es en su clausura. Como el apartado vi) del Teorema 1.6.1 establece que el conjunto de Julia de una función racional R está contenido en la clausura de los puntos periódicos de R , concluimos que la restricción de Φ_t a $J(R)$ es la identidad.

Por otro lado, la aplicación Φ_t es un homeomorfismo definido de la esfera compleja en sí misma. Como hemos visto que esta aplicación deja invariante al conjunto de Julia de R , deducimos que Φ_t actúa como una permutación en las componentes conexas de $F(R)$. Sea F_0 una componente conexa del conjunto de Fatou de R y tomamos z un punto de F_0 . De los apartados i) y iv) del Corolario 5.6.1, deducimos que la imagen del intervalo $[0, 1]$ bajo Φ_t es una curva, γ , contenida en $F(R)$ cuyo punto inicial es z . Como F_0 es conexo, entonces γ está contenida en F_0 y, por tanto, se cumple que para todo t , la aplicación Φ_t transforma la componente (arbitraria) F_0 de F sobre sí misma, como queríamos probar.

□

Como Φ_t transforma cada componente conexa F_0 de $F(R)$ sobre sí misma, los homeomorfismos φ_t transforman W sobre los dominios simplemente conexos W_0 , donde $W_0 = \varphi_0(W)$ es independiente de t . Por tanto, existe h una equivalencia conforme definida de W_0 sobre

el disco unidad y , para todo $t \in [0, 1]$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{g} W = \Phi_t(W) \xrightarrow{\varphi_t} W_0 = \varphi_0(W) \xrightarrow{h} \mathbb{D}, \quad (5.18)$$

donde g es una equivalencia conforme entre \mathbb{D} y W .

En la construcción de ν_t (sobre \mathbb{C}_∞) a partir de μ_t (sobre \mathbb{D}) que hicimos en (5.14), tenemos que

$$\|\nu\|_\infty = \|\mu\|_\infty.$$

Aplicando el apartado i) del Lema 5.6.1 deducimos que

$$\|\nu\|_\infty < \eta_0,$$

donde μ_t se transfiere mediante a ν_t en la correspondencia (5.14). Tomando un valor de η_0 suficientemente pequeño, podemos asegurar que la norma infinito de la dilatación compleja de $\Phi_t = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t$ es menor que el valor de δ_0 dado en el Lema 5.5.5. Aplicando, a su vez, el Lema 5.5.5 y el comentario que le sucede, concluimos que para todo $t \in [0, 1]$, la función desplazamiento de la aplicación dada por $g^{-1} \circ \Phi_t \circ g$ definida del disco unidad en sí mismo está acotada y, por tanto, se puede extender a la frontera del disco unidad de manera continua como la identidad.

Por otro lado, observamos que cada una de las aplicaciones de la siguiente composición

$$\mathbb{D}[\mu_t] \xrightarrow{g} W[\nu_t] \xrightarrow{\varphi_t} W_0[0] \xrightarrow{h} \mathbb{D}[0]$$

es analítica. Tenemos así que la aplicación $\psi_t = h \circ \varphi_t \circ g$ es una aplicación μ_t -conforme definida del disco unidad sobre sí mismo y, por tanto, ψ_t se extiende a un homeomorfismo definido del disco unidad cerrado sobre sí mismo. Más aún, en el disco unidad abierto se cumple que, para todo $t \in [0, 1]$,

$$\psi_0^{-1} \circ \psi_t = g^{-1} \circ \Phi_t \circ g.$$

Por tanto, en la frontera del disco unidad, la composición $\psi_0^{-1} \circ \psi_t$ es igual a la identidad y, en ese caso, $\psi_0 = \psi_t$.

Ahora, sea Ψ_t una aplicación μ_t -conforme definida del disco unidad sobre sí mismo. Aplicando el Teorema 5.3.2, sabemos que existe un automorfismo de Möbius M_t del disco \mathbb{D} tal que

$$\psi_t = M_t \circ \Psi_t.$$

Deducimos así que,

$$M_t \circ \Psi_t = M_0 \circ \Psi_0$$

sobre la frontera del disco unidad. En la prueba del Lema 5.6.1 hemos construido unas aplicaciones Ψ_t tales que $\Psi_t = \Psi_0$ en algunos arcos de $\partial\mathbb{D}$. Podemos deducir así que las transformaciones de Möbius M_t y M_0 son iguales y, por tanto, también son iguales las aplicaciones Ψ_0 y Ψ_t . Esto no puede ocurrir pues de la construcción de Ψ_t se deduce que

$$\Psi_t \neq \Psi_0,$$

llegando así a una contradicción. Esto completa la demostración del Teorema 5.1.3 de Sullivan.

Los Capítulos 4 y 5 de estas notas terminan de clasificar completamente las componentes conexas del conjunto de Fatou de una función racional R . Sea Ω una componente conexa del conjunto de Fatou de una función racional. El Teorema 5.1.3, establece que toda componente conexa del conjunto de Fatou de una función racional es eventualmente periódica. Esto es, existe un número natural m tal que la iterada m -ésima de R en Ω es periódica y, por tanto, existe una iterada de R tal que $R^m(\Omega)$ es invariante hacia delante. Como el conjunto de Fatou de una función racional coincide con el conjunto de Fatou de cualquiera de las iteradas de R , concluimos que toda componente del conjunto de Fatou de una función racional es una componente invariante hacia delante de alguna iteración de la función racional y, por tanto, el Teorema 4.1.2 nos asegura que es de alguno de las cinco posibilidades de la Definición 4.1.1.

Capítulo 6

Componentes errantes de Fatou para funciones enteras

Hemos estudiado en el Teorema 5.1.3 de Sullivan que las funciones racionales no tienen dominios errantes. Sin embargo, si tomamos funciones que no sean racionales el teorema no se cumple. I. N. Baker, matemático australiano de final del siglo veinte fue el primero en dar un ejemplo de función entera (y trascendente) con dominios errantes.

Sea f una función entera definida sobre \mathbb{C} , se define el *conjunto de Julia de f* , que denotamos por $J(f)$, como el conjunto de puntos de la esfera compleja donde la familia de iteradas de f , $\{f^n(z)\}$, no es normal en el sentido de Montel. Asimismo, el *conjunto de Fatou de f* , que denotamos por $F(f)$, es el complementario del conjunto de Julia de f en la esfera. Siempre que f no sea una función racional de grado cero o uno, se cumple que $J(f)$ es un conjunto perfecto y no vacío y su complementario tiene una cantidad infinita numerable de componentes conexas, siendo cada una de ellas un dominio maximal donde la familia de iteradas de f es normal. Además, los conjuntos de Julia y de Fatou de f son conjuntos completamente invariantes bajo la acción de f . Finalmente, dada Ω una componente conexa del conjunto de Fatou de f , decimos que Ω es una *componente errante* de f si se cumple que $f^k(\Omega) \cap f^n(\Omega) = \emptyset$, para todo par de enteros (k, n) satisfaciendo $k \geq 1$, $n \geq 1$ y $k \neq n$.

Por otro lado, recordamos las nociones de dominio simplemente y múltiplemente conexo. Sea D un dominio del plano complejo. Decimos que D es *simplemente conexo* si toda curva cerrada en D puede ser deformada (en D) a un punto de D . A su vez, decimos que D es un dominio *múltiplemente conexo* si no es simplemente conexo.

6.1. La función de Baker.

El ejemplo que vamos a desarrollar a continuación consta de dos partes, reflejadas en dos artículos de I. N. Baker. En el primero de ellos, *Multiply connected domains of normality in iteration theory*, [8], publicado en 1963, Baker prueba la existencia de una función g que es entera y trascendente y tal que una de las componentes de su conjunto de Fatou en \mathbb{C} es múltiplemente conexa, algo desconocido hasta el momento. Es en el segundo artículo, *An entire function which has wandering domains*, [7], publicado en 1974, once años después, donde Baker prueba que esa componente múltiplemente conexa de $F(g)$ es un dominio errante. La función g viene dada en el siguiente lema.

Lema 6.1.1. *Existe una función entera g dada por el producto*

$$g(z) = Cz^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \quad (6.1)$$

siendo $1 < r_1 < r_2 < \dots$ una sucesión estrictamente creciente y $C > 0$ una constante; que satisfacen

$$|g(e^{i\theta})| < \frac{1}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (6.2)$$

y

$$r_{n+1} < g(r_n) < 2r_{n+1}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Demostración. Tomamos r_1 y $C > 0$ tales que

$$Ce^{\frac{2}{r_1}} < \frac{1}{4}, \quad Cr_1 > \frac{23}{20} = 1,15 \quad \text{y} \quad r_1 > 1. \quad (6.4)$$

Podemos tomar, por ejemplo $C = 1/4e$ y $r_1 > 23e/5 \approx 12,5$. A continuación, definimos la sucesión (r_n) de forma inductiva, escribiendo

$$r_2 = Cr_1^2 \left(1 + \frac{r_1}{r_1}\right) = 2Cr_1^2$$

y, en general

$$r_{n+1} = Cr_n^2 \left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right) \left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right) = Cr_n^2 \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right), \quad (6.5)$$

para todo $n = 1, 2, \dots$. Entonces, como $Cr_1 > 1,15$, se cumple que

$$r_2 = 2Cr_1 \cdot r_1 > \frac{23}{10}r_1$$

y, razonando inductivamente, deducimos que

$$r_{n+1} > \frac{23}{10}r_n \quad (6.6)$$

pues tenemos por (6.5) que

$$r_{n+1} \geq 2Cr_n^2 > 2Cr_1r_n > \frac{23}{10}r_n$$

En particular, se cumple que la sucesión (r_n) es estrictamente creciente y, además,

$$r_n > \left(\frac{23}{10}\right)^{n-1} r_1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.7)$$

$$r_{n+k} > \left(\frac{23}{10}\right)^k r_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

Consideramos el compacto $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$, donde M es una constante positiva. Como consecuencia de la desigualdad dada en (6.7), para cada punto z de K se cumple que

$$\left|1 + \frac{z}{r_n} - 1\right| = \left|\frac{z}{r_n}\right| \leq \frac{M}{r_n} \leq \frac{M}{r_1 2 \cdot 3^{n-1}} \leq \frac{M}{r_1 2^{n-1}}$$

y la serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1}$ es convergente. Deducimos así que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right) \quad (6.9)$$

converge uniformemente en K y, por tanto, la función g es entera.

Tomando $0 \leq \theta \leq 2\pi$ entonces, como consecuencia de las expresiones dadas en (6.1), (6.7) y (6.4), tenemos que

$$|g(e^{i\theta})| \leq C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right) < C \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2^{1-n}r_1^{-1}) < C \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{r_1 2^{n-1}}} = Ce^{\frac{2}{r_1}} < \frac{1}{4},$$

donde hemos utilizado la acotación

$$1 + x < e^x, \quad \forall x > 0$$

para acotar el producto infinito. Acabamos de probar así que

$$|g(e^{i\theta})| < \frac{1}{4},$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, terminando la prueba de (6.2).

Además, como $r_{n+1} > r_n$, para todo n , tenemos que

$$\begin{aligned}
 r_{n+1} &= Cr_n^2 \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right) \\
 &< Cr_n^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right) \\
 &= g(r_n) \\
 &= r_{n+1} \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right)
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de aplicar la expresión de r_{n+1} dada en (6.5). Aplicando ahora la condición dada en (6.8), deducimos que

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right) < \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2,3^k}\right) < 2,$$

terminando así la prueba de (6.3) y del lema. □

La prueba del Lema 6.1.1 anterior presenta una pequeña variación respecto de la prueba original de Baker. Para probar la desigualdad de la derecha de la expresión dada en (6.3), Baker asegura en su artículo que

$$g(r_n) < r_{n+1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = 2r_{r+1}.$$

Lo cierto es que esta igualdad no se cumple. De hecho, el producto infinito que aparece en la expresión anterior es mayor que dos. Puesto que este resultado es muy importante en el desarrollo posterior de esta teoría y necesitamos esta cota hemos planteado una alternativa. El cambio que hemos propuesto es en la elección inicial de la constante C y de r_1 . Intentando respetar todo lo posible las indicaciones dadas por Baker, también nosotros hemos exigido que

$$Ce^{\frac{2}{r_1}} < \frac{1}{4}, \quad C > 0 \quad \text{y} \quad r_1 > 1$$

pero, en este caso, el lugar de exigir que $Cr_1 > 1$, hemos puesto que

$$Cr_1 > \frac{23}{20} = 1,15. \tag{6.10}$$

De este modo, solo ha habido que hacer pequeños cambios durante la prueba para que la demostración de la expresión dada en (6.2) no sufriera grandes cambios y las desigualdades

dadas en (6.3) se respetaran. Igual que Baker, nosotros también hemos dado un par de valores $C = 1/4e$ y $r_1 > 1,15$ que respetan las condiciones iniciales.

A continuación, el siguiente resultado nos dará otro par de cotas para la función g que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 6.1.2. *Sea $g(z)$ la función del Lema 6.1.1. Entonces, para todo $n \geq 1$ se cumple que*

$$g(r_n^{\frac{1}{2}}) < r_{n+1}^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

y

$$\frac{1}{4}g(r_n^2) > r_{n+1}^2. \quad (6.12)$$

Demostración. En primer lugar, si $|z| = r$, entonces

$$|g(z)| = Cr^2 \left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_k} \right) \right| \leq Cr^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_k} \right) = g(r).$$

Esto es, $g(r)$ es el módulo máximo de $g(z)$ para $|z| = r$. Aplicando el Teorema de las tres circunferencias de Hadamard a la función

$$V(s) = \log(g(e^s)),$$

obtenemos que,

$$V(2s) - V(0) > 2(V(s) - V(0)),$$

para todo $s > 0$; o, equivalentemente,

$$V(2s) > 2V(s) - V(0).$$

Deducimos así que, para todo $s > 0$,

$$\log(g(e^{2s})) > 2\log(g(e^s)) - \log(g(1)) = \log\left(\frac{g(e^s)^2}{g(1)}\right)$$

y, por tanto,

$$g(e^{2s}) > \frac{g(e^s)^2}{g(1)}.$$

Si escribimos $e^s = r$, obtenemos que

$$g(r^2) > \frac{g(r)^2}{g(1)} > 4g(r)^2, \quad (6.13)$$

para todo $r > 0$, pues sabemos por (6.3) que $|g(1)| < 1/4$.

Si tomamos $r = r_n^{1/2}$ en la expresión (6.13) anterior y aplicamos la desigualdad de la derecha dada en (6.3), llegamos a

$$4g(r_n^{1/2})^2 < g(r_n) < 2r_{n+1},$$

de donde se deduce la expresión dada en (6.11). Finalmente, tomando $r = r_n$ en la fórmula dada en (6.13) y aplicando la primera desigualdad de la expresión (6.3), obtenemos que

$$g(r_n^2) > 4g(r_n)^2 > 4r_{n+1}^2,$$

terminando así la prueba de (6.12) y del lema. □

El Teorema de Convexidad de Hadamard que hemos utilizado en la prueba del Lema 6.1.2 establece lo siguiente:

Teorema 6.1.3. *Sea f una función convexa en el intervalo $[a, b]$. Entonces,*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Podemos encontrar su prueba en [5, p. 9]. A su vez, el siguiente resultado, también atribuido a Hadamard, nos asegura que podemos aplicar el Teorema 6.1.3 a la función $V(s)$. Podemos encontrar su prueba en [15, p. 257]

Teorema 6.1.4 (de las tres circunferencias). *Sea f una función holomorfa en un anillo cerrado $0 < r_1 < |z| = r < r_2$. Sean*

$$s = \frac{\log r_1 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}$$

y $M(r) = M_f(r) = \max |f(z)|$. Entonces,

$$\log(M(r)) \leq (1-s)\log(M(r_1)) + s\log(M(r_2)).$$

El siguiente resultado nos proporcionará una cota de la función g sobre el eje real.

Lema 6.1.5. *Sean $g(z)$ la función dada en el Lema 6.1.1 y B_n a región del plano complejo*

$$B_n = \left\{ r > 0: 4r_n < r < \frac{1}{4}r_{n+1} \right\}. \tag{6.14}$$

Entonces, a partir de n suficientemente grande y para todo $r \in B_n$, se cumple que

$$g(r) < 4|g(-r)|.$$

Demostración. De la expresión dada en (6.5), deducimos que

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} > Cr_n \longrightarrow +\infty,$$

si $n \rightarrow \infty$. Por tanto, a partir de n suficientemente grande, el conjunto B_n no es vacío.

Para llevar a cabo la prueba, vamos a necesitar las siguientes acotaciones del logaritmo:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &< x, \text{ para todo } x > 0, \\ -\log(1-x) &< 2x, \text{ para todo } 0 < x < 1/2. \end{aligned}$$

A partir de ellas, deducimos que

$$\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| < 3x, \text{ para todo } 0 < x < 1/2. \quad (6.15)$$

Además, también se cumple que

$$\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \log \left| \frac{1+1/x}{1-1/x} \right|. \quad (6.16)$$

Volviendo a la prueba, tenemos que

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{g(r)}{g(-r)} \right| &= \log \left| \frac{Cr^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1+r/r_n)}{Cr^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1-r/r_n)} \right| \\ &= \log \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|1+r/r_n|}{|1-r/r_n|} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} I_k + I_n + I_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} I_k, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde

$$I_n = \log \left| \frac{1+r/r_n}{1-r/r_n} \right|. \quad (6.18)$$

A continuación, consideramos r un punto de B_n . Para $k \leq n-1$, tenemos que

$$0 < \frac{r_k}{r} < \frac{r_k}{4r_n} < \frac{1}{8}, \quad (6.19)$$

pues vimos en (6.6) que $r_{n+1} > 2r_n$. Desarrollando (6.15) y aplicando las acotaciones dadas en (6.18) y (6.19), deducimos que

$$0 < I_k = \log \left| \frac{1+r_k/r}{1-r_k/r} \right| < \frac{3r_k}{r} < \frac{3r_k}{4r_n}.$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} I_k &< \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k}{r_n} \\
&= \frac{3}{4} \frac{r_{n-1}}{r_n} \left(1 + \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} + \frac{r_{n-2} r_{n-3}}{r_{n-1} r_{n-2}} + \dots \right) \\
&< \frac{3}{4} \frac{r_{n-1}}{r_n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\
&< \frac{3}{2} \frac{r_{n-1}}{r_n}. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Por otro lado, consideramos r un punto de B_n . Queremos acotar el sumatorio infinito de la expresión (6.17) anterior. Para $k \geq n+2$ se cumple que

$$0 < \frac{r}{r_k} < \frac{r_{n+1}}{4r_{n+2}} < \frac{1}{8}. \tag{6.21}$$

Análogamente al caso anterior, desarrollando la expresión dada en (6.15) y aplicando las cotas dadas en (6.18) y en (6.21), obtenemos

$$0 < I_k = \log \left(\frac{1 + r/r_k}{1 - r/r_k} \right) < \frac{3r}{r_k} < \frac{3}{4} \frac{r_{n+1}}{r_k}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{\infty} I_k &< \frac{3}{4} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{r_{n+1}}{r_k} \\
&< \frac{3}{4} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} 2^{n+2-k} \\
&= \frac{3}{2} \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando las acotaciones dadas en (6.17), (6.18) y en (6.22), deducimos que, para todo punto r de B_n , se cumple que

$$\begin{aligned}
\log \left| \frac{g(r)}{g(-r)} \right| &< \frac{3}{2} \frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{3}{2} \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} + \log \left| \frac{1 + r_n/r}{1 - r_n/r} \right| + \log \left| \frac{1 + r/r_{n+1}}{1 - r/r_{n+1}} \right| \\
&< \frac{3}{2} \frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{3}{2} \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} + 2 \log \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se da pues tanto r_n/r como r/r_{n+1} son menores que $1/4$. Pero, como vimos al principio de la demostración, se cumple que $r_{n+1}/r_n \rightarrow +\infty$, si $n \rightarrow +\infty$. Luego, a partir de n suficientemente grande, como $2 \log(5/3) < \log(4)$, tenemos que

$$\frac{3}{2} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} \right) + 2 \log \frac{5}{3} < \log 4$$

y, podemos concluir que

$$g(r) < 4|g(-r)|,$$

como queríamos probar. □

El resultado que aparece a continuación establece que el conjunto de Fatou de la función g definida anteriormente contiene una componente conexa que es múltiplemente conexa.

Teorema 6.1.6. *Sea $g(z)$ la función dada en el Lema 6.1.1. Para cada n , definimos el anillo A_n como*

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : r_n^2 < |z| = r < r_{n+1}^{1/2} \right\}. \quad (6.23)$$

Entonces, existe entero $N > 0$ tal que para todo $n > N$, la aplicación $g(z)$ transforma el anillo A_n en A_{n+1} y se cumple que

$$g^m(z) \longrightarrow \infty,$$

si $m \rightarrow \infty$, uniformemente en A_n . Para cada $n > N$, A_n pertenece a una componente múltiplemente conexa del conjunto de Fatou de g , que denotamos por $F(g)$.

Demostración. En primer lugar, como consecuencia de la expresión dada en (6.5), observamos que si fijamos cualquier número natural m , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n^m} = \infty.$$

Por tanto, a partir de n suficientemente grande, los anillos A_n no son vacíos. Más aún, si $r_n > 4$ y $r_{n+1} > 16$, entonces el anillo A_n está contenido en B_n (siendo B_n el conjunto dado en (6.14)), pues se cumple que

$$4r_n < 4r_n^2 < r_{n+1}^2 < \frac{1}{4}r_{n+1}.$$

Tenemos pues que existe un número entero $N > 0$ tal que para todo $n > N$ y para cada punto z de A_n , se cumple que

$$|g(z)| \leq g(|z|) < g(r_{n+1}^{1/2}) < r_{n+2}^{1/2}, \quad (6.24)$$

al aplicar la acotación dada en (6.11); mientras que, aplicando la acotación dada en (6.12), como el anillo A_n está contenido en B_n , la expresión dada en (6.1.5) establece que

$$|g(z)| \geq g(-|z|) > \frac{g(|z|)}{4} > \frac{g(r_n^2)}{4} > r_{n+1}^2. \quad (6.25)$$

La primera desigualdad es consecuencia de que

$$\left|1 + \frac{z}{r_n}\right| > 1 - \frac{|z|}{r_n}. \quad (6.26)$$

Las expresiones (6.24) y (6.25) anteriores muestran que g transforma A_n en A_{n-1} , esto es $g(A_n) \subset A_{n+1}$. Deducimos así que, para todo $n > N$,

$$g^p(A_n) \subset A_{n+p}, \quad (6.27)$$

esto es, la p -ésima iterada de g transforma A_n en A_{n+p} . Como la distancia de A_{n+p} al origen es r_{n+p}^2 , entonces

$$g^p(z) \longrightarrow \infty,$$

si $p \rightarrow \infty$ uniformemente en A_n .

Ahora, consideramos el disco unidad cerrado, $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$. De la expresión dada en (6.2) y del Lema de Schwarz, se deduce que

$$|g(z)| \leq \frac{1}{4}|z|.$$

Entonces, iterando g en la expresión anterior obtenemos

$$|g^n(z)| \leq \frac{1}{4^n}|z|.$$

Por tanto,

$$g^n(z) \longrightarrow 0,$$

si $n \rightarrow +\infty$, uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$. Luego, el disco unidad cerrado pertenece a un dominio de normalidad de la familia de iteradas (g^n) , que denotamos por G_1 (esto es, $\overline{\mathbb{D}} \subset G_1 \subset F(g)$). Análogamente, como la familia de iteradas también converge uniformemente en A_n , entonces también pertenece a un dominio de normalidad de (g^n) , digamos G_n . Finalmente, como las componentes G_n no pueden contener ningún punto de G_1 pues $g^n \rightarrow 0$ en G_1 y $g^n \rightarrow \infty$ en G_n y, como en cada anillo A_n podemos encontrar una curva cerrada que rodee al origen, concluimos que cada componente G_n del conjunto de Fatou de g es múltiplemente conexa, como queríamos probar. □

Los resultados anteriores pertenecen al artículo [8]. El resultado que aparece a continuación pertenece al segundo artículo seleccionado de Baker, [7] y establece que el conjunto de Fatou de g tiene componentes errantes.

Teorema 6.1.7. *Siguiendo con la notación anterior, se cumple que para todo $n > N$, las componentes conexas G_n del conjunto de Fatou de g , $F(g)$, son todas distintas y, cada una de ellas es, por tanto, un dominio errante.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que existen dos números enteros mayores que N tales que sus anillos A_n correspondientes pertenecen a la misma componente conexa de $F(g)$. Esto es, supongamos que existen dos enteros m y l tales que $m > N$, $l > 0$ y $m + l > N$. Entonces, podemos encontrar un camino continuo contenido en $F(g)$, Γ , que una un punto de A_m con un punto de A_{m+l} . Como, para todo $n > N$, A_n es un anillo centrado en el origen, entonces el camino Γ debe cortar al conjunto A_{m+1} y, por tanto, A_{m+1} pertenece a la misma componente conexa de $F(g)$ que A_m . De modo que, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l = 1$.

Como el conjunto de Fatou de g es completamente invariante, entonces para todo número entero $k \geq 1$, el camino $g^k(\Gamma)$ (esto es, la k -ésima iterada de g en Γ) está contenido en $F(g)$ y, además, une las componentes A_{m+k} y A_{m+k+1} . Tenemos así que para todo $n > m$, los conjuntos A_n pertenecen a la misma componente conexa del conjunto de Fatou de g , que denotamos por G_m . Como consecuencia del Teorema 6.1.6, la componente G_m es múltiplemente conexa. Además, como $A_n = \{z \in \mathbb{C} : r_n^2 < |z| < \sqrt{r_{n+1}}\}$ y $r_n \rightarrow +\infty$, la componente conexa G_m no es acotada.

Para llegar a una contradicción, basta probar que, a partir de un valor de n suficientemente grande, digamos N_0 , no podemos encontrar un camino continuo Γ contenido en $F(g)$ que una los anillos A_n y A_{n+2} .

Para todo $n > N_0$, se cumple que

$$4r_n^2 < r_{n+1}^{\frac{1}{2}}, \quad (6.28)$$

pues $r_n \rightarrow +\infty$, si $n \rightarrow +\infty$. Ahora, tomamos $n > \max\{N, N_0\}$ y supongamos que existe un camino continuo contenido en el conjunto de Fatou de g que une los anillos A_n y A_{n+2} . Entonces, sean $z_1 = 2r_n^2$ y $z_2 = r_{n+3}/2$ dos puntos de A_n y A_{n+2} respectivamente, podemos unir z_1 y z_2 con una poligonal contenida en $F(g)$. Además, existe un subdominio simplemente conexo H de $F(g)$ que contiene a la poligonal anterior. Como H es simplemente conexo y es distinto de \mathbb{C} , existe una transformación conforme $\psi: \mathbb{D} \rightarrow H$ tal que $\psi(0) = z_1$ y $\psi(u) = z_2$, para cierto punto u contenido en el disco unidad ($|u| < 1$).

Como la sucesión de iteradas de g converge localmente uniformemente a ∞ en A_n , entonces lo mismo ocurre en la toda la componente conexa G_n de $F(g)$ a la que pertenece A_n . Luego, para cada número natural p , $g^p(G_n)$ es un dominio donde la sucesión de iteradas de g converge localmente uniformemente a infinito. Deducimos así que $g^p(G_n)$ no corta a

la componente conexa G_1 de $F(g)$ que contiene al disco unidad cerrado, pues en G_1 , la sucesión de iteradas de g converge uniformemente a cero. De modo que, sobre G_n y, en particular, sobre H , la función g omite los valores 0 y 1. Análogamente, para cada número natural p , las funciones

$$F^p(t) = g^p(\psi(t))$$

definidas sobre el disco unidad, \mathbb{D} , omiten los valores 0 y 1.

A continuación, podemos aplicar el Teorema de Schottky, que podemos encontrar en [20, p. 58]. Éste nos garantiza que existe una constante B que no depende de p tal que

$$\begin{aligned} |g^p(z_2)| &= |F^p(u)| \\ &\leq \exp\left(\left(\frac{1}{1-|u|}\right)\left((1+|u|)\log(\max\{1, |F^p(0)|\}) + 2B\right)\right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Pero, como para cada $p \in \mathbb{N}$, $g^p(z_1)$ es positivo y se cumple que $g^p(z_1) \rightarrow \infty$, si $p \rightarrow +\infty$, entonces, teniendo en cuenta que $F^p(0) = g^p(z_1)$, de la expresión (6.29) anterior deducimos que, a partir de p suficientemente grande, se cumple que

$$|g^p(z_2)| \leq K|g^p(z_1)|^L,$$

siendo K y L dos constantes que únicamente dependen de z_1 y z_2 (y no dependen de p). De modo que, para todo p suficientemente grande,

$$0 < g^p\left(\frac{r_{n+3}^{1/2}}{2}\right) \leq K(g^p(2r_n^2))^L. \quad (6.30)$$

Sin embargo, aplicando la cota dada en (6.28), tenemos que

$$2r_n^2 < r_{n+1}^{1/2} < r_{n+1} \quad (6.31)$$

y, como las iteradas de g son funciones positivas y crecientes en el intervalo $(0, +\infty)$, entonces, aplicando las acotaciones dadas en (6.3), (6.28) y en (6.31), obtenemos que

$$g^k(2r_n^2) < g^k(r_{n+1}) = g^{k-1}(g(r_{n+1})) < g^{k-1}(2r_{n+2}) < g^{k-1}\left(\frac{1}{2}r_{n+3}^{1/2}\right).$$

Para todo número real x suficientemente grande, se cumple que

$$g(x) > Kx^L.$$

Por tanto, para todo k suficientemente grande tenemos que

$$g^k\left(\frac{1}{2}r_{n+3}^{1/2}\right) = g\left(g^{k-1}\left(\frac{1}{2}r_{n+3}^{1/2}\right)\right) > g\left(g^k(2r_n^2)\right) > K\left(g^k(2r_n^2)\right)^L,$$

que contradice a la expresión dada en (6.30). Acabamos de probar así la primera parte del teorema, esto es, hemos probado que para todo $n > N$, las componentes conexas G_n del conjunto de Fatou de g que contienen a los anillos A_n respectivamente son todas diferentes y, además, cada uno de ellos es un dominio acotado.

Para probar que cada G_n es un dominio errante razonamos por reducción al absurdo: supongamos que existe un número natural n tal que G_n no es un dominio errante. Esto es, supongamos que existen $n > N$, $k > 0$ y $l > 0$ enteros tales que

$$g^k(G_n) \cup g^{k+l}(G_n) \neq \emptyset. \quad (6.32)$$

Como vimos en (6.27), $g^k(G_n)$ está contenido en G_{n+k} . Por tanto, de la expresión (6.32) anterior deducimos que

$$g^l(G_{n+k}) \subset G_{n+k}.$$

De este modo, la sucesión de iteradas $(g^{lk}(z))_{n=1}^{+\infty}$ está contenida en G_{n+k} y estaría, por tanto, acotada. Acabamos de llegar a una contradicción, pues tenemos que

$$g^k(z) \longrightarrow \infty,$$

si $k \rightarrow +\infty$ uniformemente de G_{n+k} . Finalmente, concluimos que para cada $n > N$, G_n es un dominio errante.

□

Bibliografía

- [1] Marco Abate. *Holomorphic Dynamics on Hyperbolic Riemann Surfaces*. Vol. 89. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2022.
- [2] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [3] L. V. Ahlfors. *Lectures On Quasiconformal Mappings*. Vol. 38. American Mathematical Soc., 2006.
- [4] L. V. Ahlfors y B. Lipman. «Riemann's Mapping Theorem for Variable Metrics». En: *Annals of Mathematics* (1960), págs. 385-404.
- [5] Alfonso G. Azpeitia. «Convex functions and the Hadamard inequality». En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 28.1 (1994), págs. 7-12.
- [6] I Noel Baker. «Fixpoints of Polynomials and Rational Functions». En: *Journal of the London Mathematical Society* 1.1 (1964), págs. 615-622.
- [7] Irvine N. Baker. «An Entire Function Which Has Wandering Domains». En: *Journal of the Australian Mathematical Society* 22.2 (1976), págs. 173-176.
- [8] Irvine N. Baker. «Multiply Connected Domains of Normality in Iteration Theory». En: *Mathematische Zeitschrift* 81 (1963), págs. 206-214.
- [9] Alan F. Beardon. *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2000.
- [10] Alan F. Beardon y D Minda. «The hyperbolic metric and geometric function theory, Quasiconformal mappings and their applications, Narosa, New Delhi, 2007». En: *MR* 2492498 (2011), págs. 9-56.
- [11] Lennart Carleson y Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science-Verlag, 1993.
- [12] Chi-Tai Chuang. *Normal Families of Meromorphic Functions*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.

- [13] John B Conway. *Functions of one complex variable*. Vol. 11. Springer-Verlag, 1978.
- [14] Edson De Faria y Welington De Melo. *Mathematical tools for one-dimensional dynamics*. Vol. 115. Cambridge University Press, 2008.
- [15] Serge Lang. *Complex analysis*. Vol. 103. Springer Science & Business Media, 1993.
- [16] Olli Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, 1987.
- [17] Julia Martínez de la Fuente. «Iteraciones de funciones racionales sobre la esfera de Riemann». En: (2022).
- [18] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable.(AM-160):(AM-160)-*. Vol. 160. Princeton University Press, 2006.
- [19] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [20] Joel L. Schiff. *Normal families*. Springer Science & Business Media, 1993.
- [21] Norbert Steinmetz. *Rational iteration: complex analytic dynamical systems*. Vol. 16. Gruyter Studies in Mathematics, 1993.
- [22] Dennis Sullivan. «Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains». En: *Annals of mathematics* 122.2 (1985), págs. 401-418.
- [23] Saeed Zakeri. «Sullivan’s proof of fatou’s no wandering domain conjecture». En: *manuscript available on <http://www.math.qc.edu/zakeri/notes/wander.pdf>* (2002).