

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

MATRICES COCÍCLICAS DE HADAMARD

SOBRE EL GRUPO $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$.

DESCRIPCIÓN, CLASIFICACIÓN Y BÚSQUEDA

V^o B^o
de los Directores,

Memoria presentada por
M. Belén Gúemes Alzaga
para optar al grado de
Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Fdo.: Víctor Álvarez Solano
Félix Gudiel Rodríguez

Sevilla, 2011

Matrices cocíclicas de Hadamard sobre el grupo
 $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. Descripción, clasificación y búsqueda

M. Belén Güemes Alzaga

Sevilla, 2011

A Félix, Félix Ángel y Alonso

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores de tesis, los profesores Víctor Álvarez Solano y Félix Gudiel Rodríguez, su inestimable ayuda y apoyo, sin los cuales no hubiera sido posible la elaboración de este trabajo.

Introducción

Una matriz de Hadamard de orden n es una matriz cuadrada H de entradas “ ± 1 ” que verifica $H \cdot H^T = n \cdot I$, es decir, a la luz de la Geometría sus filas (respectivamente columnas) son ortogonales dos a dos, mientras que desde la Combinatoria, para cada par de filas, el número de coincidencias en las entradas debe ser el mismo que el de no coincidencias e, igual a la mitad del orden de la matriz.

El interés por las matrices de Hadamard (aunque fueron consideradas por vez primera en 1867 en un problema sobre teselaciones [21]), surge a finales del siglo XIX, cuando Hadamard mismo demuestra que este tipo de matrices facilitan soluciones para el problema de hallar la matriz A cuadrada de orden n de entradas reales $|a_{ij}| \leq k$, para un cierto $k > 0$, de determinante máximo [13]. En verdad, para una matriz A de este tipo, se tiene que $|A| \leq k^n n^{\frac{n}{2}}$, cota que se alcanza para cualquier matriz $k \cdot H$, siendo H una matriz de Hadamard de orden n . Además Hadamard demostró que este tipo de matrices son las únicas que alcanzan dicha cota.

Hay dos transformaciones elementales que se pueden llevar a cabo en una matriz sin cambiar su carácter Hadamard, es decir, que mantienen la ortogonalidad en los transformados:

- Negaciones de filas y/o columnas.
- Permutaciones de filas y/o columnas.

Teniendo en cuenta estas dos propiedades, y combinándolas adecuadamente, las tres primeras filas de toda matriz de Hadamard de orden n se pueden llevar a la forma que indicamos a continuación, lo que exige que n sea múltiplo de cuatro:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

La *Conjetura de Hadamard* plantea que el recíproco también es cierto: “existen matrices de Hadamard para cualquier orden múltiplo de 4”. Ésta fue enunciada alrededor de 1890. Actualmente la conjetura sigue abierta, pues aunque se conocen diversos métodos para construir matrices de Hadamard en una cantidad infinita de órdenes, existen infinitos órdenes en los que no se ha encontrado aún ninguna, como tampoco se conoce ningún orden divisible por 4 para el que se haya demostrado que no existen matrices de Hadamard.

La dificultad de trabajar con matrices de Hadamard no se limita a la todavía abierta Conjetura de Hadamard. En la práctica, aún sabiendo que existen matrices de Hadamard de un tamaño concreto, la construcción explícita de una de dichas matrices no es un problema sencillo en general.

En consecuencia, cualquier aportación en cuanto a la caracterización teórica de las matrices de Hadamard o a métodos para su construcción explícita resulta sumamente valiosa.

Han sido varios los enfoques desde los que se ha abordado esta problemática, tanto para intentar resolver la conjetura como para construir matrices de Hadamard. Actualmente, una de las aproximaciones que se estima con mayores probabilidades de éxito en la labor de construir matrices de Hadamard de todos los órdenes múltiplos de 4 es el que se basa en la construcción de matrices desarrolladas cocíclicamente.

En los últimos años se tiene una nueva perspectiva de la existencia y construcción de matrices de Hadamard desde el punto de vista de la Cohomología. Las herramientas y técnicas propias de ésta se extienden del Álgebra a la Teoría de Diseños Combinatorios.

Horadam y de Launey, en los años 90, fueron los primeros en buscar matrices cocíclicas de Hadamard ([17]). Ambos, gracias a este procedimiento, han generado matrices de Hadamard hasta completar todos los órdenes por debajo de 100 y conjeturan que este método permite generar matrices de Hadamard para cualquier orden $4t$. Grupos como $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ o los grupos diedrales D_{4t} parecen proporcionar suficientes matrices de Hadamard [1, 6, 12] para que aparezca, a su vez, una *conjetura cocíclica de Hadamard* [15].

Una matriz cocíclica [17] sobre un grupo finito $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_n\}$ consiste en una matriz M_f , cuya entrada (i, j) viene dada por $f(g_i, g_j)$, donde f es un 2-cociclo

sobre (G, \cdot) , es decir, una función $f : G \times G \rightarrow \{1, -1\}$ verificando:

$$f(g_i, g_j) \cdot f(g_i g_j, g_k) = f(g_j, g_k) \cdot f(g_i, g_j g_k) \quad \forall 1 \leq i, j, k \leq 4t.$$

Para que una matriz de este tipo sea Hadamard, es necesario y suficiente que la suma de cada fila, excepto la primera, sea cero. Esta condición se conoce como *test cocíclico de Hadamard* [17].

Llegado este punto, es conveniente destacar que las principales ventajas de trabajar con matrices cocíclicas de Hadamard se resumen en los siguientes hechos:

- El test cocíclico de Hadamard actúa en $O(t^2)$, mejor que el algoritmo usual para las matrices de Hadamard, no necesariamente cocíclicas, que actúa en $O(t^3)$.
- El espacio de búsqueda se reduce al conjunto de matrices cocíclicas sobre un grupo dado (es decir, 2^s matrices, siempre que una base para 2-cociclos sobre G posea s generadores), en lugar del conjunto completo, $\left(\begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ 4t - 1 \end{pmatrix} \right)$, de matrices binarias $4t \times 4t$ con la primera fila toda de unos y el resto formado por $2t$ unos y $2t$ menos unos.

A la hora de buscar matrices cocíclicas de Hadamard sobre un grupo se presentan los siguientes problemas:

- Determinar una base para los 2-cociclos sobre G .
- Buscar matrices cocíclicas de Hadamard entre el conjunto de todas las matrices cocíclicas.

Para resolver el primer problema se han propuesto varios métodos para construir bases de cociclos con las que se pueda llevar a cabo una búsqueda exhaustiva de matrices de Hadamard cocíclicas:

- Propuesto por Horadam y de Launey [16, 17], que sólo se aplica a grupos abelianos.

- Propuesto por Flannery [11], que sólo se aplica a grupos para los cuales el problema de las palabras es resoluble.
- Método de la reducción homológica, desarrollado por V. Álvarez et al [3], aplicable sólo a grupos con modelos homológicos conocidos.
- Método de la reducción cohomológica, desarrollado también por V. Álvarez et al [4], aplicable sólo a grupos con modelos cohomológicos conocidos (extiende en la práctica a los anteriores). Este método es el único que permite calcular n -cociclos, para $n > 2$.

Nosotros partiremos de la base de que una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ será de la forma $M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R$, siguiendo [2].

El segundo de los problemas no puede ser resuelto mediante una búsqueda exhaustiva, ya que el espacio total de matrices cocíclicas consta de un número exponencial de elementos en función del tamaño del grupo. Por tanto, es necesario recurrir a técnicas heurísticas, como las desarrolladas en [5] o [1] (en función de restauración de imágenes o algoritmos genéticos, respectivamente).

Resultados experimentales han puesto de manifiesto que determinados grupos, como $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ ó D_{4t} , generan más cantidad de matrices cocíclicas de Hadamard que otros [14, 12, 2, 3].

V. Álvarez y otros han abordado el problema de búsqueda de matrices cocíclicas de Hadamard sobre un grupo arbitrario, describiéndolas como producto punto a punto de los correspondientes elementos de una base de cociclos.

En su trabajo [2] se presenta un primer acercamiento al caso del grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. El objeto de la presente memoria es profundizar dicha descripción. La estructura de este grupo abeliano induce otra en el conjunto de cobordes y en las matrices de Hadamard que merece ser estudiada con detalle por sí misma y sus propiedades intrínsecas y, porque, por otro lado, dicho conocimiento permite el diseño y mejora de algoritmos para la búsqueda y computación de matrices Hadamard cocíclicas sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$.

Las ideas originales del trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- Las distribuciones, que son condiciones necesarias sobre el número y la elección

de cobordes que intervinieren en la determinación una matriz Hadamard.

- Las cuatro operaciones sobre el conjunto de matrices Hadamard de orden $4t$ que preservan dicho carácter. Estas proporcionan una clasificación en órbitas.
- Los diagramas como herramienta para representar caminos y condiciones de adyacencia. Simplifican la notación, la visión y comprensión de las operaciones así como la realización de pruebas.

En el primer capítulo se presenta una introducción a conceptos y resultados ya conocidos sobre matrices de Hadamard y matrices cocíclicas. Se presenta una descripción de los cobordes de la base y dos conceptos que están presentes a lo largo de toda la memoria, las ideas de caminos e intersecciones. Hay que señalar un resultado original basado en el test cocíclico de [17] y [6] que reduce la comprobación del test cocíclico a la mitad de las filas.

Los s -caminos proporcionan una forma ordenada de describir cuáles son las posiciones de -1 en la fila s -ésima del producto punto a punto de un conjunto dado de matrices cobarde generalizadas.

Una vez localizadas dichas posiciones de los -1 , interesa conocer cómo se “encuentran” con las posiciones de -1 presentes en la matriz representativa R . Se tiene una intersección si dos -1 coinciden en la misma posición. Resulta de particular interés para el desarrollo de este trabajo la fórmula:

$$2c + r = 2t + 2I \tag{0.1}$$

que, fijado t y para cada fila s , relaciona el número r de -1 de la matriz R , el número c de s -caminos y el número I de intersecciones.

El segundo capítulo está dedicado a la descripción en particular de cobordes, caminos e intersecciones en el caso abeliano. Se tomará como matriz representativa (ver [2] para más detalles) al producto de Kronecker:

$$R = 1_t \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En esta situación hay dos hechos que marcan las pautas de comportamiento de caminos e intersecciones:

- La partición en el conjunto de cobordes determinada por los caminos (ciclos) de cada fila, en particular, los ciclos de la fila cinco que determinan una partición en cuatro subconjuntos o componentes, uno por cada clase de congruencia módulo cuatro.
- Por otro lado, el comportamiento de los caminos, gobernado según congruencias módulo cuatro, se encuentra con la particular forma de la matriz R tomada, copia t^2 veces de un bloque 4×4 .

Merece mención especial la traducción de (0.1) al caso abeliano:

$$\begin{aligned} c = t & \quad \text{para filas} & s \equiv 1 \pmod{4} \\ c = I & \quad \text{para filas} & s \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

cuya primera condición sirve de base a los razonamientos relativos a distribuciones.

La idea de distribución tratada en el capítulo 3 tiene su origen en el intento de encontrar cotas para el número de cobordes de la base utilizados para determinar una matriz de Hadamard. Más allá de las cotas, que han resultado muy ajustadas, (de hecho, coinciden exactamente con los números de cobordes utilizados hasta $t = 71$), se ha obtenido una condición necesaria para los números exactos de cobordes necesarios, junto con la partición o reparto de este número en las cuatro clases de congruencia mod 4, que vienen dictadas por los ciclos de la fila 5.

La idea de clasificar el conjunto de cobordes en componentes según la congruencia módulo cuatro, presente a lo largo de todo el trabajo, hizo su primera aparición en este momento. Los caminos en las filas congruentes con $1 \pmod{4}$, (salvo la primera), deben sumar exactamente t . La nueva idea fue contar caminos no a lo largo de las filas, sino por componentes, estableciendo que el número total de caminos debe ser

$t(t-1)/2$, esto es, el número de caminos por fila por el número de filas a evaluar. Por otra parte también se probó que el número de caminos en una componente a lo largo de las $(t-1)/2$ filas a evaluar determina el número de cobordes utilizados. De aquí surgió la noción de reparto.

Este estudio de tipo más teórico se vió acompañado en todo momento de cálculos efectivos para aumentar los valores de t para los que se conocía el número de matrices Hadamard. De hecho, la programación y cálculos por un lado, y el estudio de tipo analítico por otro, se han retroalimentado, formando dos caras de la misma moneda. La programación ha proporcionado ejemplos a cuya luz se han podido estudiar nuevas propiedades, propiedades que permitían refinar a su vez la programación.

En un principio, se disponía de la lista de matrices expresadas respecto de la base para $t = 3$ y $t = 5$ y de una tabla en [15] que indicaba los números de matrices Hadamard, en este caso hasta $t = 9$.

La idea de reparto permitió aumentar las listas anteriores hasta $t = 7$, ordenadas además según repartos. En este momento se comenzaron a observar los patrones que dieron lugar a las operaciones, estudiadas en el capítulo 4.

Las cuatro operaciones presentadas actúan sobre el conjunto de matrices cocíclicas preservando el carácter Hadamard. Cada una de ellas puede ser interpretada como la acción de un determinado grupo sobre este conjunto, lo que proporciona una partición en órbitas. Dichas órbitas determinan, por un lado, una clasificación. Por otro, dada una matriz de Hadamard, se pueden obtener el resto de las matrices de su órbita.

Este hecho resulta de gran interés. Por ejemplo, las 840 matrices Hadamard de $t = 7$ pueden obtenerse sólo a partir de dos matrices, (precisamente, una matriz cualquiera de cada una de las dos órbitas existentes en este caso).

El último capítulo está dedicado a la descripción de los resultados obtenidos a nivel de cálculo, siguiendo la trayectoria histórica del trabajo.

A medida que se dispuso de más ejemplos se hizo necesaria una herramienta para representar los conjuntos de cobordes que determinan una matriz. Se construyeron los diagramas.

Los diagramas resultan de gran utilidad. En líneas generales, esta presentación

convenientemente ordenada de cobordes permite leer con más comodidad las condiciones de adyacencia de cobordes, el número, el tamaño de caminos y las posibles intersecciones en su caso.

Los diagramas arrojan luz sobre todas las operaciones que se habían definido con anterioridad y que adquirirían una interpretación visual muy clara, aunque su definición inicial pudiera ser un poco enrevesada. Se reescribieron algunas demostraciones que resultaban más farragosas sin esta herramienta. La utilización de los cobordes que se despreciaban al quedarnos con la base aparecía, también, de forma natural.

Los resultados obtenidos han permitido completar la tabla presente en [6] que enumera las matrices de tipo Williamson y $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ -Hadamard. Es más, dado t , se ha observado que existe una relación entre los cardinales de ambos conjuntos de matrices, que están en proporción $1/t$.

En todos los resultados obtenidos de forma exhaustiva (hasta $t = 15$), se ha observado que los diagramas presentan una configuración simétrica, lo que hace conjeturar la condición de simetría, no probada a la fecha y una de las líneas abiertas. Se ha supuesto simetría para continuar con la búsqueda cuando el coste computacional ha hecho imposible la búsqueda exhaustiva, obteniendo resultados hasta $t = 25$.

Las nuevos ejemplos obtenidos representados en diagramas proporcionan objeto de estudio para avanzar en la escalada de valores de t .

Contenido

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Preliminares | 1 |
| 1.1 | Matrices de Hadamard | 3 |
| 1.2 | Matrices cocíclicas | 9 |
| 1.2.1 | Cobordes, caminos e intersecciones | 12 |
| 2 | Matrices cocíclicas sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ | 17 |
| 2.1 | $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. Descripción del grupo. Orden | 19 |
| 2.2 | Descripción de los cobordes. Matriz R | 20 |
| 2.3 | Las filas 2, 3 y 4 son siempre Hadamard | 21 |
| 2.4 | Descripción de ciclos y caminos | 24 |
| 2.4.1 | Caminos en una fila y su fila correspondiente por inversos | 27 |
| 2.5 | Caminos e intersecciones en el caso abeliano | 28 |
| 3 | Distribuciones. Diagramas | 33 |
| 3.1 | Distribuciones | 36 |
| 3.1.1 | Cotas máxima y mínima sobre el número de cobordes | 41 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.1.2 | Sobre bases, sistemas de generadores y repartos | 45 |
| 3.2 | Representación gráfica. Diagramas | 46 |
| 4 | Operaciones. Clasificación por órbitas | 51 |
| 4.1 | Complementarios. El grupo \mathbb{Z}_2 | 54 |
| 4.2 | Trasladados. El grupo \mathbb{Z}_t | 58 |
| 4.3 | Intercambios. El grupo simétrico S_4 | 60 |
| 4.4 | Operaciones verticales. El grupo \mathbb{Z}_t^* | 65 |
| 4.5 | Las órbitas | 78 |
| 5 | Trayectoria del trabajo. Cálculos efectivos | 87 |
| 5.1 | Los inicios | 89 |
| 5.2 | Los primeros pasos | 91 |
| 5.3 | Ingredientes y recetas | 93 |
| 5.4 | Primeras operaciones y distribuciones | 95 |
| 5.5 | Diagramas | 99 |

Capítulo 1.

Preliminares

Capítulo 1.

Preliminares

1.1 Matrices de Hadamard

Una **matriz de Hadamard de orden n** es una matriz H , cuadrada, de dimensión $n \times n$, con todas sus entradas $\{1, -1\}$, que verifica

$$H \cdot H^T = n \cdot I_n, \quad (1.1)$$

es decir, sus filas (respectivamente, columnas) son ortogonales dos a dos. Ejemplos para $n = 1, 2, 4$ son, respectivamente:

$$H_1 = (1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de Hadamard han despertado interés desde hace tiempo, tanto por su estudio puramente teórico como por sus múltiples aplicaciones. Los primeros ejemplos fueron publicados por Sylvester [21] en 1867. Sylvester también observó que si H era una matriz de Hadamard también lo era la matriz

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

En concreto, la matriz indicada anteriormente como H_4 es un ejemplo de dicha afirmación, pues H_4 se puede construir a partir de H_2 , al igual que H_2 a partir de H_1 .

En 1893 Hadamard publicó ejemplos en órdenes 12 y 20 y mostró que pueden existir matrices Hadamard en órdenes 2^t , resultado previamente demostrado por

Sylvester. Hadamard estaba interesado en encontrar el determinante máximo de las matrices cuadradas ($A = (a_{ij})$) de orden n de entradas reales $|a_{ij}| \leq 1$, y mostró en [13] que este determinante máximo $n^{n/2}$ era alcanzado por matrices con entradas $\{1, -1\}$ si y sólo si satisfacían la condición (1.1).

Además, Hadamard demostró que tales matrices podrían existir sólo si $n = 1, 2$ o múltiplo de 4. Esta observación ha constituido la base de uno de los grandes problemas no resueltos en Matemáticas, la denominada *Conjetura de Hadamard*, que asevera que existen matrices de Hadamard de orden cualquier múltiplo de 4.

Al contrario que otras conjeturas, en las que si cabe han sido más relevantes las teorías desarrolladas sucesivamente para su resolución que los propios postulados enunciados en las conjeturas mismas (como el Teorema de Fermat o la conjetura de Goldbach, que propiciaron el nacimiento de la teoría algebraica de números), la existencia de matrices de Hadamard en cualquier orden $4t$ es fundamental por sus aplicaciones en muy diversos campos, tales como los diseños combinatorios, los códigos correctores de errores, los diseños de pesadas múltiples, el cálculo de matrices con determinante máximo, etc.

Un problema secundario relacionado con la conjetura de Hadamard, también de gran complejidad, es el de la determinación del número de matrices de Hadamard “esencialmente distintas” que existen para un orden determinado. La *equivalencia Hadamard* de matrices es la noción que se corresponde con esta idea de “diferencia sustancial” entre dos matrices H y H' , en el sentido de que han de diferir una de otra en el producto, salvo signo, de sendas matrices de permutación P y P' ,

$$PH = H'P',$$

es decir, que se pueden obtener una de otra mediante la permutación y/o negación de filas y/o columnas.

Dada una matriz de Hadamard, se puede negar cada fila cuyo primer elemento sea -1, y así obtener una matriz equivalente cuya primera columna está formada sólo por unos. De forma análoga, la primera fila se puede convertir en una fila toda de unos, negando las columnas que comiencen por -1. Toda matriz de esta forma se dice matriz de Hadamard *normalizada*.

Aunque considerar que las matrices de Hadamard existen en cualquier orden múltiplo de cuatro es una mera conjetura, lo que sí se puede probar de forma sen-

cilla es que, en caso de existir, estas matrices han de tener orden 1, 2 o $4t$, para $t \in \mathbb{N}$. De hecho, como hemos indicado anteriormente, salvo equivalencia Hadamard, las matrices de Hadamard de orden 1 y 2 son respectivamente:

$$H_1 = (1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para probar que las matrices de Hadamard de orden $n \geq 3$ son de orden un múltiplo de 4 basta considerar, sin pérdida de generalidad gracias a la equivalencia Hadamard, una matriz de Hadamard cuyas primeras filas sean de la forma:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & & i & & & & j & & & & k & & & & l \end{array}$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las filas resulta que:

$$\begin{cases} i + j - k - l = 0 \\ i - j + k - l = 0 \\ i - j - k + l = 0 \end{cases}$$

De lo que se deduce que $i = j = k = l$. Por otra parte, como $i + j + k + l = n$, resulta que, efectivamente, es $n = 4i$ (múltiplo de 4).

En definitiva, dada una matriz H de Hadamard de dimensión $n > 2$, entonces, n es par y cualesquiera dos filas distintas de H coinciden en exactamente $n/2$ de sus columnas. Más aún, si $n > 2$, entonces n es múltiplo de 4 y cualesquiera tres filas distintas de H coinciden en exactamente $n/4$ columnas.

Desde que se planteó la Conjetura de Hadamard, se ha intentado dar respuestas a las dos preguntas siguientes:

1. ¿Existen matrices de Hadamard de orden cualquier múltiplo de 4?
2. ¿Cómo construirlas?

Respecto a la primera pregunta, aún no se ha podido dar una respuesta definitiva, pero sí se han ensayado buenas aproximaciones, unas facilitando formas de construcción generales como la de Sylvester [21], Paley [19] y Williamson [24], otras de carácter asintótico, principalmente obtenidas por Seberry [23], Craigen [8], de Launey [9] y de Launey y Kharaghani [10].

Seberry demostró que dado un número impar m , existe una matriz de Hadamard de orden $2^t m \quad \forall t \geq [2 \log_2(m-3)] + 1$.

Craigen, casi veinte años después, demostró que para todo número positivo impar m , existe una matriz de Hadamard de orden $2^{2b} m$ siendo b el número de dígitos no nulos de la representación binaria de m y de orden $2^t m$ para $t = 6 \lfloor \frac{1}{16} \log_2 \frac{m-1}{2} \rfloor + 2$.

Recientemente, de Launey ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0$ el conjunto de números impares k para los cuales hay una matriz de Hadamard de orden $k 2^{2 + [\varepsilon + \log_2 k]}$ tiene densidad positiva en el conjunto de los números naturales.

De igual modo, de Launey y Kharaghani han probado que hay una matriz cocíclica de Hadamard de orden $2^{10+t} q$ para $t \geq 8 \lfloor \frac{\log_2(q-1)}{10} \rfloor$, siendo q un número impar.

Respecto a la segunda pregunta, se conocen numerosos métodos para construir matrices de Hadamard. Con ellos se consigue obtener familias infinitas de matrices de Hadamard, dando lugar a infinitos órdenes (múltiplos de 4) en los que existen estas matrices. Sin embargo, aún hay infinitos órdenes en los que todavía no se conocen matrices de Hadamard. Por otra parte, no se conoce ningún orden divisible por 4 para el que se haya demostrado la no existencia de matrices de Hadamard. En definitiva, la Conjetura de Hadamard sigue abierta.

En general, como ya se ha comentado anteriormente, si H es una matriz de Hadamard de orden n , también lo son las matrices $-H$ (opuesta de H) y H^T (traspuesta de H).

Algunos de los métodos de construcción están basados en el producto de Kronecker de dos matrices, definido de la siguiente forma: si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times m$ y B_1, B_2, \dots, B_m son matrices $n \times n$, el producto de Kronecker $A \otimes (B_1, B_2, \dots, B_m)$ es la matriz cuadrada de orden $mn \times mn$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B_1 & a_{12}B_1 & \cdots & a_{1m}B_1 \\ a_{21}B_2 & a_{22}B_2 & \cdots & a_{2m}B_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B_m & a_{m2}B_m & \cdots & a_{mm}B_m \end{pmatrix}.$$

Cuando $B_1 = B_2 = \dots = B_m = B$ podemos expresar $A \otimes (B, B, \dots, B)$ simplemente por $A \otimes B = (a_{ij} \cdot B)$.

Como podemos observar, la matriz de Hadamard (1.2) construida por Sylvester responde al producto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes H$.

Dado que el producto de Kronecker verifica que $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, si H y H' son matrices de Hadamard de órdenes n_1 y n_2 respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} (H \otimes H')(H \otimes H')^T &= (H \otimes H')(H^T \otimes H'^T) = HH^T \otimes H'H'^T = \\ &= n_1 I_{n_1} \otimes n_2 I_{n_2} = n_1 n_2 I_{n_1 n_2}, \end{aligned}$$

por lo que, efectivamente, $H \otimes H'$ es también una matriz de Hadamard, de orden $n_1 \times n_2$.

Una de las primeras familias de matrices de Hadamard fue construida por Sylvester en [21], por iteraciones del producto de Kronecker de la matriz $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

consigo misma: $\{S_k = \bigotimes_{i=1}^k S_1 : k \geq 1\}$. Dichas matrices son simétricas y de orden 2^k para $k \geq 1$. Se verifica que si H es una matriz de Hadamard de orden n , para $k \geq 1$, entonces $(\bigotimes_{i=1}^k S_1) \otimes H$ es también una matriz de Hadamard, de orden $2^k \cdot n$.

Además de los trabajos de Sylvester y Hadamard ya mencionados, entre los más importantes orientados a la construcción de matrices de Hadamard de orden cualquiera prefijado, cabe destacar el de Scarpis [20], quien probó que cuando p es un número primo congruente con $3 \pmod{4}$, entonces existe una matriz de Hadamard de orden $p + 1$, mientras que si p es primo congruente con $1 \pmod{4}$, existe una matriz de Hadamard de orden $2(p + 1)$.

Más tarde, Paley [19] generalizó el trabajo de Scarpis, proponiendo una manera de construir infinitas matrices de Hadamard asociadas a cada número primo, una para

cada potencia de dicho número. La construcción de las matrices de Paley a partir de un número primo impar p requiere encontrar los llamados *residuos cuadráticos* (o simplemente *residuos*) módulo p^k , esto es, los cuadrados no nulos módulo p^k . En realidad, como $(p^k - a)^2 \equiv (-a)^2 \equiv a^2 \pmod{p^k}$, basta considerar los cuadrados de los $\frac{p^k-1}{2}$ primeros números. Los restantes números módulo p^k son los llamados no-residuos (a excepción del cero, que no se considera residuo ni no-residuo). Las matrices se construyen a partir de la *matriz de Jacobsthal* $Q = (q_{ij})$, que es una matriz $p^k \times p^k$ cuyas entradas son $q_{ij} = \chi(i - j)$, donde χ es la *función de Legendre* definida de la siguiente forma:

- $\chi(i) = 0$, si i es un múltiplo de p^k .
- $\chi(i) = 1$, si i es un residuo módulo p^k .
- $\chi(i) = -1$, si i es un no-residuo módulo p^k .

De este modo, si $S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & Q \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de dimensión $p^k + 1$, entonces:

- si $p^k \equiv 3 \pmod{4}$ la matriz $H_I = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & Q + I_{p^k} \end{pmatrix}$ es una matriz de Hadamard (Paley Tipo I) de dimensión $p^k + 1$.
- si $p^k \equiv 1 \pmod{4}$, la matriz $H_{II} = \begin{pmatrix} S + I_{p^k+1} & S - I_{p^k+1} \\ S - I_{p^k+1} & -S - I_{p^k+1} \end{pmatrix}$ es también una matriz de Hadamard (Paley Tipo II) de dimensión $2(p^k + 1)$. Ésta última también puede expresarse utilizando el producto de Kronecker:

$$H_{II} = S \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + I_{p^k+1} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Williamson [24] fue más allá del trabajo de Paley y consideró métodos innovadores que le permitieron encontrar matrices de Hadamard para algunos órdenes hasta entonces no estudiados. El método de Williamson consiste en la búsqueda de matrices de Hadamard a partir de matrices por bloques, restringidas a ciertas condiciones.

Así, si existen matrices A, B, C, D de orden w , con entradas $\{1, -1\}$, que satisfacen $XY^t = YX^t$ para $X \neq Y \in \{A, B, C, D\}$ y $AA^t + BB^t + CC^t + DD^t = 4wI_w$, entonces

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & -A & D & -C \\ C & -D & -A & B \\ D & C & -B & -A \end{pmatrix}$$

es una matriz de Hadamard (Williamson) de dimensión $4w$.

Más tarde, Cooper y Wallis [7] y Turyn [22] generalizaron el trabajo de Williamson.

Actualmente, una de las aproximaciones que se estima con mayores probabilidades de éxito en la labor de construir matrices de Hadamard de todos los órdenes múltiplos de 4, se basa en la construcción de matrices desarrolladas “cocíclicamente”. Horadam y de Launey en los años 90 fueron pioneros en la búsqueda de “matrices de Hadamard cocíclicas” [17]. Estas matrices se obtienen a partir de 2-cociclos, como veremos a continuación. Ambos autores han generado gracias a este procedimiento matrices de Hadamard hasta completar todos los órdenes por debajo de 100 y conjeturan que este método permite generar matrices de Hadamard para cualquier orden $4t$.

1.2 Matrices cocíclicas

La búsqueda de todo el conjunto de matrices Hadamard de tamaño $4t$ de forma exhaustiva requiere la resolución de un sistema no lineal de $\binom{4t}{2}$ ecuaciones, una por cada par de filas, y $16t^2$ incógnitas.

Comprobar si una matriz dada M es de Hadamard es una tarea algo más económica en cuanto a operaciones se refiere. Se trata de estudiar si las filas de M son ortogonales dos a dos.

Si la matriz M es cocíclica se tiene una comprobación con un coste computacional aún menor, el test cocíclico, que afirma que una matriz cocíclica es Hadamard si y sólo si la suma de los elementos de cada fila, salvo la primera, es nula.

Se ha probado que existen matrices cocíclicas de Hadamard de órdenes t hasta $t \leq 46$ ([18, 15]). Grupos como $\mathbf{Z}_t \times \mathbf{Z}_2^2$ o los grupos diedrales D_{4t} parecen propor-

cionar suficientes matrices de Hadamard [1, 6, 12] para que aparezca, a su vez, una **conjetura cocíclica de Hadamard** [15].

Se presentan a continuación nociones relativas al caso cocíclico que son necesarias en el desarrollo del presente trabajo, extraídas de [17, 2].

Definición 1.2.1 Sea (G, \cdot) un grupo de $4t$ elementos, $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_{4t}\}$. se define como **matriz cocíclica** sobre G a una matriz

$$M_f = \begin{pmatrix} f(g_1, g_1) & f(g_1, g_2) & \cdots & f(g_1, g_{4t}) \\ f(g_2, g_1) & f(g_2, g_2) & \cdots & f(g_2, g_{4t}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(g_{4t}, g_1) & f(g_{4t}, g_2) & \cdots & f(g_{4t}, g_{4t}) \end{pmatrix}$$

cuya entrada (i, j) viene dada por $f(g_i, g_j)$, donde f es un 2-cociclo sobre (G, \cdot) , es decir, una función $f : G \times G \rightarrow \{1, -1\}$ que verifica:

$$f(g_i, g_j) \cdot f(g_i g_j, g_k) = f(g_j, g_k) \cdot f(g_i, g_j g_k) \quad \forall 1 \leq i, j, k \leq 4t. \quad (1.3)$$

Por conveniencia, a veces nos referiremos al elemento del grupo g_i simplemente por i .

Para nuestro propósito, dado un grupo G , una vez obtenidas todas las matrices cocíclicas sobre él, nos interesa considerar sólo aquéllas que son de Hadamard. Para ello, nos vamos a basar en un resultado demostrado por Horadam y de Launey en [17]. Ellos establecieron una condición necesaria y suficiente, que denominamos **Test de Hadamard**, para determinar si una matriz cocíclica es de Hadamard:

Proposición 1.2.2 Una matriz cocíclica es de Hadamard si y sólo si la suma de los elementos de cualquier fila, salvo la primera (cuyas entradas son iguales entre sí), es nula, es decir, $M_f = (f(g_i, g_j))$ es de Hadamard $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4t} f(g_i, g_j) = 0$, con $2 \leq i \leq 4t$.

Demostración. Reproducimos aquí la demostración del test de Hadamard dada por Horadam y de Launey en [17].

M_f es de Hadamard $\Leftrightarrow \langle \text{fila } b, \text{fila } d \rangle = 0 \quad \forall g_b, g_d \in G, \text{ con } 1 \leq b, d \leq 4t \text{ y } b \neq d$. Es decir, para cada pareja $g_b \neq g_d \in G$ debe ser $\sum_{j=1}^{4t} f(g_b, g_j) \cdot f(g_d, g_j) = 0$.

Sea $g_a = g_d g_b^{-1}$ (con $g_a \neq 1$ por ser $g_b \neq g_d$), entonces $g_d = g_a g_b$.

Según (1.3), $f(g_a, g_b) \cdot f(g_a g_b, g_j) = f(g_b, g_j) \cdot f(g_a, g_b g_j) \quad \forall 1 \leq a, b, j \leq 4t$.

Si llamamos $A = f(g_a, g_b)$, $B = f(g_a g_b, g_j)$, $C = f(g_b, g_j)$, $D = f(g_a, g_b g_j)$, tenemos que se verifica $A \cdot B = C \cdot D$. Como $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = 1$, entonces podemos expresar que $C \cdot B = A \cdot D$, es decir:

$$f(g_b, g_j) \cdot f(g_a g_b, g_j) = f(g_a, g_b) \cdot f(g_a, g_b g_j).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4t} f(g_b, g_j) \cdot f(g_d, g_j) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4t} f(g_b, g_j) \cdot f(g_a g_b, g_j) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4t} f(g_a, g_b) \cdot f(g_a, g_b g_j) = 0 &\Leftrightarrow f(g_a, g_b) \cdot \sum_{j=1}^{4t} f(g_a, g_b g_j) = 0 \stackrel{f(g_a, g_b) \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4t} f(g_a, g_b g_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{4t} f(g_a, g_j) = 0 \end{aligned}$$

pues $g_b \cdot G = G$, salvo orden.

Es decir, dos filas g_b, g_d son ortogonales si y sólo si la fila $g_a = g_d g_b^{-1}$ suma 0. En particular, fijado g_b , la fila g_b será ortogonal a las restantes filas g_d si y sólo si la fila $g_d g_b^{-1}$ suma 0 para todo $g_d \neq g_b$, como se quería demostrar. ■

De esta demostración se obtiene de forma sencilla un resultado que reducirá, en general, a la mitad de las filas la comprobación del test cocíclico de Hadamard.

Corolario 1.2.3 *Sea M una matriz cocíclica. Si la fila g_d verifica el test cocíclico de Hadamard, la fila g_d^{-1} , correspondiente al inverso de g_d , también verifica el test cocíclico.*

Demostración. Acabamos de probar que las filas g_b y g_d son ortogonales, $\langle g_b, g_d \rangle = 0$, si y sólo si la fila $g_a = g_d g_b^{-1}$ verifica el test cocíclico de Hadamard.

Basta observar que $\langle g_b, g_d \rangle = 0 = \langle g_d, g_b \rangle$, por lo que la fila $g_b g_d^{-1} = (g_d g_b^{-1})^{-1}$ verifica el test cocíclico. ■

Llegado este punto, es conveniente destacar que las principales ventajas de trabajar con matrices cocíclicas de Hadamard se resumen en los siguientes hechos:

- El test cocíclico de Hadamard [17] actúa en $O(t^2)$, mejor que el algoritmo usual para las matrices de Hadamard (no necesariamente cocíclicas), que actúa en $O(t^3)$.
- El espacio de búsqueda se reduce al conjunto de matrices cocíclicas sobre un grupo dado (es decir, 2^s matrices, siempre que una base para 2-cociclos sobre G posea s elementos), en lugar del conjunto completo, $\left(\begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ 4t-1 \end{pmatrix} \right)$, de matrices binarias $4t \times 4t$ con la primera fila toda de 1s y el resto formada por $2t$ 1s y $2t$ -1s.

1.2.1 Cobordes, caminos e intersecciones

Cada **coborde elemental** ∂_d está construido a partir de la aplicación $\delta_d : G \rightarrow \{\pm 1\}$ asociada a un elemento $g_d \in G$, tal que:

$$\partial_d(g_i, g_j) = \delta_d(g_i)\delta_d(g_j)\delta_d(g_i g_j) \quad \text{para} \quad \delta_d(g_i) = \begin{cases} -1 & g_d = g_i. \\ 1 & g_d \neq g_i. \end{cases} \quad (1.4)$$

Sea $d \neq 1$. Entonces cada fila $s \neq 1, d$ en M_{∂_d} contiene precisamente dos -1 s, los cuales están localizados en las posiciones (s, d) y (s, e) , para $g_e = g_s^{-1} g_d$. Además, la primera fila está siempre formada por 1s, mientras que la d -ésima fila está formada por -1 s, excepto las posiciones $(d, 1)$ y (d, d) .

El conjunto de todos los cobordes elementales genera todo el conjunto de cobordes, sin embargo no son, en general, linealmente independientes (ver [3]).

Definición 1.2.4 *La d -ésima matriz coborde generalizada se obtiene negando la fila d -ésima de M_{∂_d} . Será denotada también por M_{∂_d} .*

Nota 1.2.5 *Dada la relación inequívoca, a lo largo de la memoria se hablará indistintamente de coborde, matriz coborde y matriz coborde generalizada, usando la notación δ_d ó M_{∂_d} según convenga.*

Se utilizarán matrices coborde generalizadas. Dado que una fila es Hadamard si y sólo si la suma de sus entradas es nula, la negación de dicha fila no altera su carácter Hadamard. De esta manera, cada fila de M_{∂_d} , salvo la primera, contiene exactamente dos entradas -1 , precisamente en las posiciones (s, d) y (s, e) con $g_e = g_s^{-1}g_d$. La entrada (s, d) sera denominada **fija**, mientras que la entrada (s, e) será denominada **flotante**.

Nota 1.2.6 *Por comodidad en la notación, la posición (s, e) con $g_e = g_s^{-1}g_d$ será denotada por $(s, s^{-1}d)$ en adelante.*

Puesto que una matriz cocilícica se puede expresar como un producto de cociclos, donde parte de los factores son cobordes, interesa describir la relación existente entre las posiciones de los -1 en los distintos cobordes.

Lema 1.2.7 *Dos matrices coborde generalizas distintas M_{∂_d} y M_{∂_f} comparten un -1 en la fila s -ésima o bien, en la posición $(s, d) = (s, s^{-1}f)$, o bien en la posición $(s, s^{-1}d) = (s, f)$. Se tiene entonces, que no hay más de dos matrices coborde generalizadas que compartan un -1 en la misma posición.*

Demostración. Dado un coborde generalizado M_{∂_d} , cada fila, salvo la primera, contiene exactamente dos entradas -1 en las posiciones (s, d) y $(s, s^{-1}d)$.

Supongamos que un coborde M_{∂_f} , distinto del anterior comparte una entrada -1 con M_{∂_d} en la fila s . Si la entrada compartida está en la posición (s, d) se tiene que necesariamente $d = s^{-1}f$, ya que $d \neq f$.

De la misma forma, si la posición compartida está en $(s, s^{-1}d)$, entonces $s^{-1}d = f$, ya que si $s^{-1}d = s^{-1}f$ se tiene que $d = f$.

■

Definición 1.2.8 *Un conjunto $\{M_{\partial_{i_j}} \mid 1 \leq j \leq r\}$ de matrices cobarde generalizadas define un **s-camino** si pueden ser ordenadas en una sucesión $(M_{l_1} \dots M_{l_r})$ de forma que matrices consecutivas compartan al menos una entrada negativa en la fila s . Dicho camino se denomina **ciclo** si la primera matriz y la última de la sucesión tienen una entrada negativa en la misma posición en la fila s .*

Los ciclos serán denotados por $[M_{l_1} \dots M_{l_r}]$.

Nota 1.2.9 *Teniendo en cuenta el lema anterior, dos matrices cobarde M_{∂_j} y M_{∂_k} serán adyacentes en un s-camino $(\dots M_{\partial_j} M_{\partial_k} \dots)$ si la posición flotante de M_{∂_j} coincide con la posición fija de M_{∂_k} (o al revés). Por otro lado, un s-camino proporciona dos -1 , en la posición fija de la primera matriz cobarde del camino y en la posición flotante de la última.*

Nota 1.2.10 *Se tiene que un s-camino se extiende de forma única, tanto a su izquierda como a su derecha. Por lo tanto, dentro del conjunto de cobordes generalizados, se puede prolongar de forma única a un s-camino maximal, que además resultará un ciclo. Los ciclos de una fila s son disjuntos dos a dos y cada cobarde pertenece a un único ciclo, (el que se obtiene al extender el camino formado por él mismo), con lo que el conjunto de los ciclos en una fila s determina una partición en el conjunto de cobordes. Este hecho resultará de interés en el desarrollo del trabajo.*

Se hace ver que toda matriz cocíclica se puede escribir como producto punto a punto de matrices:

$$M = M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R,$$

donde las matrices $M_{\partial_{i_j}}$ $1 \leq j \leq r$ son matrices cobarde generalizadas y la matriz R está asociada a cociclos representativos. (Ver [3] para más detalles).

Se hace necesario estudiar la relación entre las posiciones de los -1 dados por los caminos y las posiciones de los -1 en la correspondiente matriz R .

Definición 1.2.11 *Un s -camino define tantas intersecciones como entradas negativas comparte con la correspondiente fila s -ésima de la matriz R . En particular, un s -camino puede producir 0, 1 ó 2 intersecciones en una fila dada.*

Nota 1.2.12 *Los ciclos no proporcionan intersecciones.*

Proposición 1.2.13 *Dada una fila s de una matriz cocíclica de orden $4t$, $M = M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R$, sea c el número de s -caminos en los que se particiona M , I el número de intersecciones a que éstos dan lugar y r el número de -1 en la fila s de la matriz R . La fila s de la matriz cocíclica verifica el test de Hadamard, (i. e., suma cero), si y sólo si:*

$$2c + r - 2I = 2t.$$

Demostración. Según el test cocíclico se debe comprobar que en la fila s de la matriz M hay exactamente $2t$ posiciones con -1 .

Puesto que $M = M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R$, hay que contar el número de -1 que aparecen en la fila s de la expresión como producto punto a punto.

Cada s -camino proporciona dos -1 , se tienen, también r posiciones de -1 por parte de la matriz R . Sin embargo, cada vez que se da una intersección, se pierden dos -1 . De ahí el resultado. ■

Esta fórmula tiene una interesante traducción en el caso del grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$, que será presentada en el próximo capítulo.

Capítulo 2.

Matrices cocíclicas sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$

Capítulo 2.

Matrices cocíclicas sobre $\mathbf{Z}_t \times \mathbf{Z}_2^2$

2.1 $\mathbf{Z}_t \times \mathbf{Z}_2^2$. Descripción del grupo. Orden

El grupo abeliano de orden $4t$ con el que vamos a trabajar es $\mathbf{Z}_t \times \mathbf{Z}_2^2$ para t impar, lo que no supone ninguna limitación atendiendo a la construcción de Kronecker. Si llamamos a, b, c a los generadores del mismo, tenemos que

$$G = \langle a, b, c : a^t = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle.$$

Si representamos cada elemento g del grupo como una terna (i, j, k) , donde $g = a^i b^j c^k$, es decir, cada componente representa el exponente (respecto de los generadores del grupo) de dicho elemento, tenemos un orden determinado en el grupo, el inducido por el orden lexicográfico en las ternas; así $g_1 = 1, \dots, g_{4t} = a^{t-1}bc$.

$$\begin{array}{ccccccccc} g_1 & < & g_2 & < & g_3 & < & g_4 & < & \dots & < & g_{4t}. \\ (0, 0, 0) & & (0, 0, 1) & & (0, 1, 0) & & (0, 1, 1) & & & & (t-1, 1, 1). \\ 1 & & c & & b & & bc & & & & a^{t-1}bc. \end{array}$$

Así, el elemento d -ésimo del grupo, corresponde a la terna

$$\left(\left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \bmod 2, (d-1) \bmod 2 \right).$$

Por otro lado, la terna (i, j, k) corresponde al elemento $4i + 2j + k + 1$ -ésimo del grupo.

$$\left(\left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \bmod 2, (d-1) \bmod 2 \right) \longleftrightarrow 4i + 2j + k + 1. \quad (2.1)$$

La operación producto en el grupo se traduce en

$$(i, j, k)(i', j', k') = ((i + i') \bmod t, (j + j') \bmod 2, (k + k') \bmod 2),$$

con lo que el inverso de (i, j, k) es $(t - i, j, k)$.

Nota 2.1.1 *Para una mayor ligereza en la lectura, puesto que el presente trabajo estudiará únicamente el caso del grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ y no se dará lugar a confusión, nos referiremos a dicho grupo como $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ o grupo abeliano indistintamente.*

2.2 Descripción de los cobordes. Matriz R

Como indicamos en el capítulo anterior, el d -ésimo coborde, (asociado al d -ésimo elemento del grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$), será denotado por ∂_d .

Se considerarán, también, las **matrices coborde generalizadas** que resultan de negar la fila d -ésima de la matriz M_{∂_d} .

La matriz M_{∂_d} , salvo en la primera fila, cuyas entradas son siempre positivas, tiene sus entradas negativas en las posiciones situadas sobre la columna d -ésima, y en las posiciones $(s, s^{-1}d)$ en cada fila s . Se recuerda que para cada fila s , estas posiciones serán denominadas fija y flotante respectivamente. Con la notación utilizada, la posición fija de una matriz coborde viene dada por el número que la indexa.

Como ejemplo se presenta la matriz coborde M_{∂_7} en $t = 3$

$$M_{\partial_7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a la matriz R , correspondiente a los cociclos representativos (ver [2] para una explicación más detallada), se tomará:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz cocíclica M es obtenida como producto:

$$M = M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R.$$

El conjunto de matrices de cobordes $\{M_{\partial_1}, \dots, M_{\partial_{4t}}\}$ es sistema generador pero no base. En este trabajo se considerará la base $\mathcal{B} = \{M_{\partial_{4t-2}}, M_{\partial_{4t-3}}, \dots, M_{\partial_3}, M_{\partial_2}\}$, donde las matrices de los cobordes que no pertenecen a la base $\{M_{\partial_1}, M_{\partial_{4t-1}}, M_{\partial_{4t}}\}$ quedan expresados respecto de ella como sigue:

- $M_{\partial_1} = - \prod_{i=1}^{t-1} M_{\partial_{4i+1}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}$
- $M_{\partial_{4t-1}} = \prod_{i=0}^{t-2} M_{\partial_{4i+3}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}$
- $M_{\partial_{4t}} = \prod_{i=1}^{t-1} M_{\partial_{4i}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}$

2.3 Las filas 2, 3 y 4 son siempre Hadamard

En esta sección se verá que las filas 2, 3 y 4 de una matriz $M = M_{\partial_{i_1}} \dots M_{\partial_{i_r}} R$ siempre verifican el test cocíclico.

En cada fila s de la matriz M_{∂_d} los -1 se encuentran en los lugares (s, d) y (s, e) , donde $g_e = g_s^{-1}g_d$. Utilizando (2.1), tenemos que en cada fila s mayor que 1, los -1 están localizados en la columna d -ésima y en la

$$4\left[\left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s-1}{4} \right\rfloor\right] \bmod t + 2\left[\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor\right] \bmod 2 + (d-s) \bmod 2 + 1. \quad (2.2)$$

Nota 2.3.1 Con esta información es sencillo calcular los ciclos en cada fila, por ejemplo, para $t = 3$, en la fila 5, tenemos que los ciclos son $[M_{\partial_2}, M_{\partial_{10}}, M_{\partial_6}]$, $[M_{\partial_{11}}, M_{\partial_7}, M_{\partial_3}]$, $[M_{\partial_{12}}, M_{\partial_8}, M_{\partial_4}]$, $[M_{\partial_9}, M_{\partial_5}, M_{\partial_1}]$, mientras que en la fila 6, son $[M_{\partial_{10}}, M_{\partial_5}, M_{\partial_2}, M_{\partial_9}, M_{\partial_6}, M_{\partial_1}]$, $[M_{\partial_8}, M_{\partial_3}, M_{\partial_{12}}, M_{\partial_7}, M_{\partial_4}, M_{\partial_{11}}]$.

Centrémonos ahora en las filas 2, 3 y 4, donde los ciclos son muy fáciles de calcular.

Lema 2.3.2 Para cualquier t impar, los ciclos en la fila 2 son de la forma $[M_{\partial_d}, M_{\partial_{d+1}}]$ con i par.

Demostración. Para demostrar este resultado, nos basta calcular el lugar en que se encuentra el -1 flotante de cada coborde en la fila 2, lo que se hace sustituyendo en la fórmula (2.2) el valor de la fila $s = 2$. En este caso $\lfloor \frac{s-1}{4} \rfloor = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor = 0$, lo que nos da $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \bmod 2 + d \bmod 2 + 1$, que, al compararlo con la posición fija, que es $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \bmod 2 + (d-1) \bmod 2 + 1$, implica que el flotante de un coborde par está justo a la derecha del fijo (puesto que $d-1$ vale 1 módulo 2), mientras que el flotante de un coborde impar está inmediatamente a la izquierda del fijo. De aquí el resultado. ■

Corolario 2.3.3 La fila 2 es Hadamard.

Demostración. Como los -1 de la fila 2 de R están en las columnas impares y los 2-caminos deben estar formados por un único coborde con sendos -1 en un lugar par e impar, el número de -1 en la fila 2 se mantiene constante igual a $2t$. ■

Lema 2.3.4 Para cualquier t impar, los ciclos en la fila 3 son de la forma $[M_{\partial_d}, M_{\partial_{d+2}}]$ con $i \equiv 1, 2$ módulo 4.

Demostración. De nuevo basta calcular el lugar en que se encuentra el -1 flotante de cada coborde en la fila 3, lo que, como en el caso de la fila 2, se hace sustituyendo en la fórmula (2.2) el valor de la fila $s = 3$. Aquí $\lfloor \frac{s-1}{4} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor = 1$, con lo que el -1 flotante está en la posición $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor - 1) \bmod 2 + (d-1) \bmod 2 + 1$. La posición fija en este caso es $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \bmod 2 + (d-1) \bmod 2 + 1$, y el -1 flotante de un coborde congruente con 1 o 2 módulo 4 está situado dos lugares a la derecha del fijo, puesto que en ambos casos, $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ es par y vale 0 módulo 2. Por otra parte, si el coborde es congruente con 3 o 4, $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ es impar y el -1 flotante está colocado dos lugares a la izquierda del fijo. De aquí el resultado. ■

Corolario 2.3.5 *La fila 3 es Hadamard.*

Demostración. Como los -1 de la fila 3 de R están en las columnas congruentes con 2 y 3 módulo 4 y los 3-caminos deben estar formados por un único coborde con sendos -1 en columnas congruentes con 1 y 3, o bien con 2 y 4, el número de -1 en la fila 3 sigue siendo igual a $2t$. ■

Lema 2.3.6 *Para cualquier t impar, las componentes maximales en la fila 4 son de la forma $[M_{\partial_d}, M_{\partial_{d+3}}]$ si d es congruente con 1 módulo 4 y $[M_{\partial_d}, M_{\partial_{d+1}}]$ si d es congruente con 2 módulo 4.*

Demostración. Se vuelve de nuevo a calcular el lugar en que se encuentra el -1 flotante de cada coborde en la fila 4. Sustituyendo en la fórmula (2.2) el valor de la fila $s = 4$, se tiene que $\lfloor \frac{s-1}{4} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor = 1$, lo que proporciona la posición $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \bmod 2 + d \bmod 2 + 1$. Si se compara con la posición fija, que es $4\lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor \bmod t + 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \bmod 2 + d \bmod 2 + 1$, se obtiene el resultado, puesto que el sumar dos, como en el caso anterior, se modifica con la suma de 1 si d impar, o con la resta de 1 para d par. ■

Corolario 2.3.7 *La fila 4 es de Hadamard.*

Demostración. Los -1 de la fila 4 de R están en las columnas congruentes con 3 y 4 módulo 4. Los 3-caminos deben estar formados por un único coborde con sendos

-1 en lugares congruentes con 1 y 4, o bien con 2 y 3. Por tanto, el número de -1 en la fila 4 es exactamente $2t$.

■

A la vista de lo anterior y recordando que si una fila de una matriz verifica la condición Hadamard, su fila correspondiente por inversos lo hace, a partir de ahora, sólo será necesario comprobar la condición Hadamard de una matriz de orden $4t$ en las $2t - 2$ filas $5, 6, \dots, 2t + 2$.

2.4 Descripción de ciclos y caminos

Como hemos visto, un coborde M_{∂_d} tiene dos -1 en la fila s , situados en la columna d y en la columna dada por la fórmula (2.2).

Estas posiciones han sido denominadas fija y flotante respectivamente. Debido a esta distribución de los -1 dos cobordes M_{∂_d} y M_{∂_t} forman un s -camino $(M_{\partial_d}, M_{\partial_t})$ si la posición flotante del primero coincide con la posición fija del segundo, por lo que la expresión (2.2) determina el criterio de formación de caminos y ciclos.

En la sección anterior se han caracterizado caminos y ciclos de las filas 2, 3 y 4. Merece la pena estudiar con más detenimiento las pautas de formación de caminos en las filas s con $s \geq 5$.

Lema 2.4.1 *Dado un coborde M_{∂_d} se tiene la siguiente caracterización para la formación de s -caminos, $5 \leq s \leq 4t$:*

- Si $s \equiv 1 \pmod{4}$, $M_{\partial_{d-s+1}}$ forma un camino con M_{∂_d} .
- Si $s \equiv 2 \pmod{4}$, $M_{\partial_{d-s+2-(-1)^d}}$ forma un camino con M_{∂_d} .
- Si $s \equiv 3 \pmod{4}$, $M_{\partial_{d-s+3-2(-1)^{\lceil \frac{d \pmod{4}}{2} \rceil}}}$ forma un camino con M_{∂_d} .
- Si $s \equiv 0 \pmod{4}$, $M_{\partial_{d-s+4+(-1)^d(1-4(1-\lfloor \frac{d \pmod{4}}{2} \rfloor))}}$ forma un camino con M_{∂_d} .

Demostración. Basta sustituir en la fórmula (2.2).

■

Por otra parte, se recuerda que en cada fila s los correspondientes ciclos determinan una partición en el conjunto de cobordes. Para las filas s con $5 \leq s \leq 4t$ y, salvo que $\text{mcd}(t, \lfloor \frac{(s-1)}{4} \rfloor) > 1$, dicha partición es la siguiente:

- Filas s con $s \equiv 1 \pmod{4}$.

Aparecen cuatro ciclos, uno por cada una de las clases residuales módulo cuatro, que contienen precisamente todos los cobordes cuyo índice es congruente con cada una de las clases.

- Filas s con $s \equiv 2 \pmod{4}$.

Aparecen 2 ciclos. Uno contiene todos los cobordes cuyo índice es congruente con 2 o con 1. El otro ciclo contiene las congruencias con 0 y con 3.

- Filas s con $s \equiv 3 \pmod{4}$.

De nuevo se tienen dos ciclos que contienen las congruencias 0 y 2 en un ciclo y 1 y 3 en el otro.

- Filas s con $s \equiv 0 \pmod{4}$.

Hay dos ciclos. El primero contiene las congruencias 2 y 3. El segundo las congruencias 0 y 1.

Nota 2.4.2 *Por comodidad en la notación, en lo sucesivo, un camino $(M_{\partial_{i_1}}, M_{\partial_{i_2}}, \dots, M_{\partial_{i_k}})$ será denotado por la sucesión ordenada de los índices que etiquetan sus cobordes (i_1, i_2, \dots, i_k) . En el caso de ciclos se escribirá la sucesión de índices entre corchetes.*

Por ejemplo, en $t = 5$ el 5-camino $(M_{\partial_{14}}, M_{\partial_{10}}, M_{\partial_6})$ será denotado por $(14, 10, 6)$. El 2-ciclo $[M_{\partial_5}, M_{\partial_6}]$ será escrito como $[5, 6]$.

Como ilustración de las descripciones anteriores se presentan en la Tabla 2.1 los ciclos de $t = 5$.

| Filas | Ciclos |
|-------|---|
| 2 | [1,2],[3,4],[5,6],[7,8],[9,10],[11,12], [13,14],[15,16],[17,18],[19,20] |
| 3 | [2,4],[1,3],[5,7],[6,8],[9,11],[10,12], [13,15],[14,16],[17,19],[18,20] |
| 4 | [2,3],[1,4],[5,8],[6,7],[9,12],[10,11], [13,16],[14,15],[17,20],[18,19] |
| 5 | [18,14,10,6,2],[19,15,11,7,3],[20,16,12,8,4],[17,13,9,5,1] |
| 6 | [18,13,10,5,2,17,14,9,6,1],[16,11,8,3,20,15,12,7,4,19] |
| 7 | [14,12,6,4,18,16,10,8,2,20],[13,11,5,3,17,15,9,7,1,19] |
| 8 | [14,11,6,3,18,15,10,7,2,19],[13,12,5,4,17,16,9,8,1,20] |
| 9 | [2,14,6,18,10],[11,3,15,7,19],[12,4,16,8,20],[13,5,17,9,1] |
| 10 | [14,5,18,9,2,13,6,17,10,1],[12,3,16,7,20,11,4,15,19] |
| 11 | [10,4,14,8,18,12,2,16,6,20],[9,3,13,7,17,11,1,15,5,19] |
| 12 | [10,3,14,7,18,11,2,15,6,19],[9,4,13,8,17,12,1,16,5,20] |
| 13 | [2,10,18,6,14],[11,19,7,15,3],[12,20,8,16,4],[13,1,9,17,5] |
| 14 | [14,1,10,17,6,13,2,9,18,5],[12,19,15,4,11,20,7,16,3] |
| 15 | [10,20,6,16,2,12,18,8,14,4],[9,19,5,15,1,11,17,7,13,3] |
| 16 | [10,19,6,15,2,11,18,7,14,3],[9,20,5,16,1,12,17,8,13,4] |
| 17 | [18,2,6,10,14],[19,3,7,11,15],[20,4,8,12,16],[17,1,5,9,13] |
| 18 | [18,1,6,9,14,17,2,5,10,13],[16,19,4,7,12,15,20,3,8,11] |
| 19 | [14,20,2,8,10,16,18,4,6,12],[13,19,1,7,9,15,17,3,5,11] |
| 20 | [14,19,2,7,10,15,18,3,6,11],[13,20,1,8,9,16,17,4,5,12] |

Tabla 2.1: Ciclos para $t = 5$.

En las filas s donde $\text{mcd}(t, \lfloor \frac{s-1}{4} \rfloor) = k > 1$ cada uno de los ciclos descritos anteriormente escinde exactamente en k nuevos ciclos.

Como ejemplo, se presenta el caso de $t = 9$. Las filas que presentan escisión son las filas 13, 14, 15 y 16 (y sus filas correspondientes por inversos). La Tabla 2.2 recoge los ciclos de estas filas.

| Fila | Ciclos |
|---------|--|
| fila 13 | [26,14,2],[30,18,6],[34,22,10],[27,15,3],[31,19,7],[23,11,35], [24,12,36],[28,16,4],[32,20,8],[29,17,5],[33,21,9],[25,13,1] |
| fila 14 | [26,13,2,25,14,1],[16,3,28,15,4,27],[18,5,30,17,6,29], [20,7,32,19,8,31],[22,9,34,21,10,33],[24,11,36,23,12,35] |
| fila 15 | [16,2,28,14,4,26],[27,13,3,25,15,1],[19,5,31,17,7,29], [20,6,32,18,8,30],[21,11,33,23,9,35],[22,12,34,24,10,36] |
| fila 16 | [15,2,27,14,3,26],[28,13,4,25,16,1],[20,5,32,17,8,29] [19,6,31,18,7,30],[21,12,33,24,9,36],[22,11,34,23,10,35] |

Tabla 2.2: Ciclos de las filas 13, 14, 15 y 16. $t = 9$.

2.4.1 Caminos en una fila y su fila correspondiente por inversos

Según el orden elegido para el grupo, a la fila s -ésima de una matriz coborde generalizada se le asocia el elemento s -ésimo del grupo. Dada la fila la fila s , su **fila inversa** es aquella asociada al elemento inverso del s -ésimo elemento del grupo.

En la Tabla 2.1 se observa un hecho curioso, las filas correspondientes por inversos presentan los mismos ciclos, pero leídos de forma inversa. Este resultado es cierto en general.

Proposición 2.4.3 *Los caminos y ciclos de la fila inversa a una dada son los mismos caminos o ciclos de la dada leídos de forma inversa.*

Demostración. Se considera el s -camino $M_{\partial_{a_1}} \dots M_{\partial_{a_r}}$ donde cada coborde M_{d_i} tiene sus entradas negativas en las posiciones (s, d_i) y $(s, s^{-1}d_i)$. La condición de camino dicta que $d_i = s^{-1}d_{i-1}$ para $2 \leq i \leq r$.

La matriz M_{d_i} tiene en la fila s^{-1} entradas negativas de la fila s en las posiciones (s^{-1}, d_i) y $(s^{-1}, s^{-1}d_i)$. Es decir, la posición flotante de la matriz M_{d_i} es $(s^{-1}, sd_i) = (s^{-1}, ss^{-1}d_{i-1}) = (s^{-1}, d_{i-1})$ para $2 \leq i \leq r$, es decir, la posición fila de $M_{d_{i-1}}$ con lo que los cobordes M_{d_i} y $M_{d_{i-1}}$ forman un s^{-1} -camino. ■

2.5 Caminos e intersecciones en el caso abeliano

En el capítulo anterior se presentó la condición que deben cumplir todas las filas de una matriz de Hadamard:

$$2c + r = 2t + 2I \quad (2.3)$$

donde c es el número de caminos de la fila, r el número de -1 en la matriz R e I el número de intersecciones.

En esta sección se estudia la traducción de esta fórmula al caso abeliano.

Dado que la matriz R tomada es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si se consideran filas s con $s \equiv 1 \pmod{4}$ se tiene que $r = 0$ y no hay intersecciones I . En el resto de las filas se da que $r = 2t$. Con estas consideraciones la relación (2.3) se lee como:

- $\mathbf{c} = \mathbf{t}$ para filas $s \equiv 1 \pmod{4}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{I}$ para filas $s \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$.

La condición para filas congruentes con $1 \pmod{4}$ proporciona un interesante criterio sobre el número de cobordes que intervienen en la determinación de una matriz de Hadamard y merece un capítulo aparte.

En el resto de las filas, la condición de Hadamard se traduce en que el número de caminos es precisamente el número de intersecciones. Por ello es interesante saber qué intersecciones proporciona cada uno de los caminos.

Se observa que las posiciones de los -1 a las que da lugar un s -camino $(M_{\partial_{i_1}}, \dots, M_{\partial_{i_r}})$ vienen dados por la posición fija del primer coborde del s -camino (s, i_1) , y por la posición flotante del último coborde $(s, s^{-1}i_r)$. Estas posiciones determinan las posibles intersecciones del camino.

Definición 2.5.1 *La longitud de un camino es el número de cobordes que lo forman. Así se hablará de caminos de longitud par o caminos pares y caminos de longitud impar o caminos impares.*

A la vista de las pautas que guardan los -1 en las filas 6, 7 y 8 (y congruentes módulo 4) en la matriz R , y las posiciones de los -1 que determinan los posibles caminos a estudiar, se tienen los siguientes casos:

- Si el camino está formado por un número par de cobordes se determinan dos intersecciones o ninguna, de la siguiente forma:
 - En la fila 6 y congruentes hay dos intersecciones si el camino empieza por un coborde cuyo índice es par (congruente con 2 o 0 módulo 4), ninguna si empieza por un coborde de índice impar.
 - En la fila 7 y congruentes hay dos intersecciones si el camino empieza por un coborde congruente con 2 o 3 módulo 4 y ninguna en el resto de los casos.
 - En la fila 8 y congruentes hay dos intersecciones si el camino comienza por un coborde congruente con 3 o 0 módulo 4 y ninguna para el resto de las congruencias.

El hecho que sustenta esta afirmación es que la distancia entre los dos -1 que proporciona un camino par, (la posición fija del primer coborde del camino y la posición flotante del último), es siempre 8 o múltiplo de 8. Basta con mirar el índice del primer coborde (posición fija) del s -camino para saber con qué entrada de la fila s se va a encontrar en la matriz R . Si esta entrada es -1 en

R , la posición flotante se encontrará también con un -1 , (la matriz R repite configuración cada 4 posiciones) y se tienen dos intersecciones. En otro caso no se tendrá ninguna intersección.

Por ejemplo en $t = 5$ se tiene el 6-camino par $(10, 5, 2, 17)$ con -1 en las posiciones 10 y 14, que proporciona dos intersecciones. El 6-camino $(13, 10, 5, 2)$ presenta dos -1 en las posiciones 13 y 17, lo que no da lugar a ninguna intersección.

- Si el s -camino está formado por un número impar de cobordes, éste determina siempre una única intersección.
 - En la fila 6 y congruentes las posiciones fija y flotante de un s -camino cuya posición fija es congruente con 1 o con $3 \pmod{4}$ distan un número de posiciones $3 + 8i + 4(s - 6)$. En los caminos cuya posición fija es congruente con 2 o $0 \pmod{4}$ dichas posiciones fija y flotante distan $5 + 4i + 4(s - 6)$. En cualquier caso, si la posición fija encuentra un -1 , la flotante encuentra un 1 y viceversa. Se tiene así una única intersección.
 - En la fila 7 y congruentes las posiciones fija y flotante de un s -camino con posición fija congruente con 1 o con $2 \pmod{4}$ distan $2 + 8i + 4(s - 7)$ posiciones. En los caminos cuya posición fija es congruente con 0 o $3 \pmod{4}$ distan $6 + 4i + (s - 7)$. De nuevo se tiene una única intersección para un camino impar.
 - En la fila 8 y congruentes la distancia de las posiciones fija y flotante es $7 + 8i + 4(s - 8)$ si la posición fija del camino es congruente con $0 \pmod{4}$, $1 + 8i + 4(s - 8)$ si la posición fija es congruente con $1 \pmod{4}$, $3 + 8i + 4(s - 8)$ si es congruente con $2 \pmod{4}$, y, por último, $5 + 8i + 4(s - 8)$ si es congruente con $3 \pmod{4}$. En todos los casos se tiene una intersección.

Como ejemplo, de nuevo en $t = 5$ se tiene el 6-camino $(13, 10, 5)$, que da una intersección en la posición 2, en este ejemplo, la flotante del camino, y ninguna intersección en la posición 13.

Nota 2.5.2 *En resumen, los s -caminos de longitud impar proporcionan una única intersección. Para los s -caminos de longitud par, hay dos intersecciones si el índice del primer coborde del camino es congruente con las posiciones que ocupan los -1 en la correspondiente fila s -ésima de la matriz R y ninguna en otro caso.*

Se hablará entonces de la condición de productividad de un camino par y de **caminos productivos** si proporcionan dos intersecciones o **caminos improductivos** en otro caso.

Proposición 2.5.3 *Sea M una matriz cocíclica sobre el grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. Si una fila $s > 5$, con $s \not\equiv 1 \pmod{4}$, verifica el test de Hadamard, hay un número par de s -caminos pares, i. e., un número par de caminos de longitud par. Además, exactamente la mitad deben proporcionar dos intersecciones y la otra mitad ninguna.*

Demostración. Para que se verifique el test de Hadamard en una de estas filas, debe haber el mismo número de caminos que de intersecciones. Puesto que los caminos impares proporcionan una única intersección, debe haber tantos caminos pares productivos como improductivos, con lo que el número total de caminos de longitud par es un número par. ■

Capítulo 3.
Distribuciones. Diagramas

Capítulo 3.

Distribuciones. Diagramas

A la luz de la condición sobre el número de caminos en las filas congruentes con $1 \pmod 4$ para una matriz cocíclica Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$, se obtienen interesantes resultados sobre el número de cobordes que intervienen en su generación.

En particular, no sólo se determinan cotas superior e inferior para el número de cobordes, sino el número exacto, junto con la partición o reparto de este número en las cuatro clases de congruencia $\pmod 4$, que vienen dictadas por los ciclos de la fila 5.

El final del capítulo está dedicado a los diagramas, que son una representación gráfica para un conjunto dado de cobordes. Los diagramas resultan una herramienta de gran utilidad para la descripción y el estudio de los caminos a lo largo de las distintas filas.

Nota 3.0.4 *Por mayor comodidad en la notación, de aquí en adelante, denotaremos a cada conjunto de cobordes que determina una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ por la sucesión de sus índices de ordenados de mayor a menor y según su congruencia con las distintas clases residuales módulo 4. Por ejemplo, para $t = 11$ la matriz de Hadamard obtenida como el producto de cobordes:*

$$M = M_{\partial_{38}} M_{\partial_{22}} M_{\partial_{10}} M_{\partial_{31}} M_{\partial_{27}} M_{\partial_7} M_{\partial_3} M_{\partial_{28}} M_{\partial_{20}} M_{\partial_{16}} M_{\partial_8} M_{\partial_{41}} M_{\partial_{37}} M_{\partial_{33}} M_{\partial_{25}} M_{\partial_5} R$$

será denotada por:

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\} \quad (3.1)$$

3.1 Distribuciones

Se considerarán cuatro componentes o clases, una por cada clase de congruencia módulo cuatro. Se recuerda que esta es la partición del conjunto total de cobordes determinada por los ciclos de la fila 5.

La condición que impone que el número de caminos en cada fila congruente con $1 \pmod{4}$ debe ser t proporciona un criterio necesario, aunque no suficiente, para el número exacto de cobordes que dan lugar a una matriz de Hadamard. Es más, se puede determinar el número exacto de cobordes que han de tomarse en cada componente.

Como ilustración de la idea elegimos, por ejemplo, para $t = 11$, la matriz de Hadamard del ejemplo (3.1):

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}.$$

La Tabla 3.1 muestra el número de caminos que aparecen en cada componente y en cada fila a evaluar.

Se recuerda que para comprobar la condición $t = c$, sólo es necesario evaluar las filas $\{5, 9, \dots, 2t - 1\}$, un total de $(t - 1)/2$ filas.

| | $\equiv 2$ | $\equiv 3$ | $\equiv 0$ | $\equiv 1$ | caminos por fila |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------------|
| fila 5 | 3 | 2 | 3 | 3 | 11 |
| fila 9 | 3 | 4 | 2 | 2 | 11 |
| fila 13 | 2 | 4 | 2 | 3 | 11 |
| fila 17 | 1 | 3 | 4 | 3 | 11 |
| fila 21 | 3 | 1 | 3 | 4 | 11 |
| caminos por componente | 12 | 14 | 14 | 15 | 55 |

Tabla 3.1: Un ejemplo en $t = 11$. Números de caminos por filas y componentes.

Puesto que el número de filas a evaluar es $(t - 1)/2$, el número total de caminos es el producto $t(t - 1)/2 = \binom{t}{2}$, ($55 = 11 \cdot 5$, en este ejemplo). Este total se obtiene

también como la suma por columnas en la tabla, es decir, la suma del número de caminos que aparecen en cada una de las cuatro componentes, lo que lleva a plantear la pregunta:

¿Cuántos caminos determinan k cobordes en la misma componente desde la fila quinta hasta la fila $2t - 1$?

Lema 3.1.1 *Dos matrices coborde M_{∂_r} y M_{∂_s} con índices r y s en la misma clase de congruencia mod 4 son adyacentes exactamente una vez a lo largo de las filas $5 \leq s \leq 2t - 1$, $s \equiv 1 \pmod{4}$, más concretamente, en la fila $\min\{|r - s| + 1, 4t - |r - s| + 1\}$.*

Demostración. La prueba viene dada por la propia estructura de los ciclos.

Si los índices r y s pertenecen a la misma clase de congruencia $|r - s|$ es múltiplo de 4, y las matrices coborde son adyacentes en las filas $|r - s| + 1$ y $4t - |r - s| + 1$, (que son correspondientes por inversos, como ya se comentó con anterioridad). Puesto que se van a considerar filas desde la 5 hasta la $2t - 1$, se tomará la fila $\min\{|r - s| + 1, 4t - |r - s| + 1\}$. ■

Corolario 3.1.2 *Fijado t , un conjunto de k cobordes en una componente, determina $k(t - 1)/2 - \binom{k}{2} = k(t - k)/2$ caminos en dicha componente.*

Cada una de las filas de la Tabla 3.2 indica, para el correspondiente t , el número de caminos determinados por k cobordes, $1 \leq k \leq t - 1$.

Nota 3.1.3 *Para cada t el número de caminos determinados por k cobordes (pertenecientes a la misma clase de congruencia) a lo largo de las $(t - 1)/2$ filas es $k(t - k)/2$.*

Nota 3.1.4 *La tabla no contempla la posibilidad de elección de t cobordes en una componente, dado que en ese caso se tiene un ciclo, que, a diferencia de los caminos, no computa a efectos de la condición de Hadamard $t = c$.*

elección apropiada de *cuatro números de caminos determinados en cada una de las correspondientes componentes.*

Nota 3.1.8 *Las entradas de la cuaterna no deben ser necesariamente distintas.*

Para cada t pueden aparecer varias distribuciones distintas. Veremos ahora que siempre es posible encontrar, al menos, una de estas distribuciones.

Proposición 3.1.9 *Para cada t impar siempre existe al menos una distribución $(k_1(t - k_1)/2, k_2(t - k_2)/2, k_3(t - k_3)/2, k_4(t - k_4)/2)$.*

Demostración. Fijemos t . Se observa que

$$4 \binom{(t+1)/2}{2} - \frac{t(t-1)}{2} = \frac{(t-1)}{2}$$

Es decir, la suma cuatro veces del número máximo de caminos excede exactamente $(t - 1)/2$ unidades la cantidad que deben sumar los términos de una posible distribución. Por lo tanto, algunos términos en esta suma donde los cuatro sumandos iguales son números máximos de caminos, deben ser sustituidos por otras entradas de la misma fila en la tabla de manera que la suma se rebaje en $(t - 1)/2$ unidades. Puesto que la diferencia entre este número máximo de caminos, en la columna central derecha de la tabla, y las distintas entradas de una fila son, a su vez, números triangulares, el problema es equivalente a obtener el número entero $(t - 1)/2$ como suma, como máximo, de cuatro números triangulares.

En 1796 Gauss demostró que cualquier entero positivo puede ser escrito como suma de tres números triangulares como máximo, no necesariamente distintos, con lo que para cualquier t se puede encontrar como mínimo, una distribución. Además, en al menos una de ellas, debe aparecer el número máximo de caminos como sumando.

■

Las distribuciones dictan exactamente el número de caminos y, equivalentemente, el número de cobordes que han de intervenir en cada componente. La condición es

| t | caminos | distribuciones | suma de números triangulares |
|----|---------|----------------|------------------------------|
| 3 | 3 | (1,1,1,0) | 0+0+0+1=1 |
| 5 | 10 | (3,3,2,2) | 0+0+1+1=2 |
| 7 | 21 | (6,6,6,3) | 0+0+0+3=3 |
| | | (6,5,5,5) | 0+1+1+1=3 |
| 9 | 36 | (10,10,9,7) | 0+0+1+3=4 |
| | | (9,9,9,9) | 1+1+1+1=4 |
| 11 | 55 | (15,14,14,12) | 0+1+1+3=5 |
| 13 | 78 | (21,21,21,15) | 0+0+0+6=6 |
| | | (21,21,18,18) | 0+0+3+3=6 |
| | | (20,20,20,18) | 1+1+1+3=6 |
| 15 | 105 | (28,28,27,22) | 0+0+1+6=7 |
| | | (28,27,25,25) | 0+1+3+3=7 |
| 17 | 136 | (36,35,35,30) | 0+1+1+6=8 |
| | | (35,35,33,33) | 1+1+3+3=8 |
| 19 | 171 | (45,45,42,39) | 0+0+3+6=9 |
| | | (44,44,44,39) | 1+1+1+6=9 |
| | | (45,42,42,42) | 0+3+3+3=9 |
| 21 | 210 | (55,55,55,45) | 0+0+0+10=10 |
| | | (55,54,52,49) | 0+1+3+6=10 |
| | | (54,52,52,52) | 1+3+3+3=10 |
| 23 | 253 | (66,66,65,56) | 0+0+1+10=11 |
| | | (65,65,63,60) | 1+1+3+6=11 |
| 25 | 300 | (78,78,72,72) | 0+0+6+6=12 |
| | | (78,77,77,68) | 0+1+1+10=12 |
| | | (78,75,75,72) | 0+3+3+6=12 |
| | | (75,75,75,75) | 3+3+3+3=12 |

Tabla 3.3: Tabla de distribuciones para los primeros t .

necesaria, pero no suficiente. En algunos casos no hay ninguna matriz de Hadamard correspondiente a dicha distribución. El menor valor de t donde se da esta situación es $t = 19$ para la distribución $(45, 42, 42, 42)$.

En la Tabla 3.3 se presentan las distribuciones para los primeros valores de t , indicando cual es el número total de caminos en todas las componentes y filas a evaluar, las posibles distribuciones, y cómo obtenerlas escribiendo el correspondiente entero como suma de números triangulares.

Ahora vamos a pensar en las cantidades de cobordes que hay que tomar en cada componente para obtener una distribución. Puesto que la Tabla 3.2 es simétrica, para cada distribución se pueden tomar 2^4 posibles elecciones.

Definición 3.1.10 *Se llamará **reparto de cobordes** a una cuadrupla ordenada de cantidades de cobordes en cada una de las cuatro componentes de manera que se da lugar a una distribución. Se denotará por $[k_1, k_2, k_3, k_4]$. Un reparto mínimo es el que dicta la parte derecha de la Tabla 3.2. Se hace ver que $k_i < (t - 1)/2$ $1 \leq i \leq 4$ y que es el **único** reparto de la distribución con el número mínimo de cobordes.*

3.1.1 Cotas máxima y mínima sobre el número de cobordes

Las ideas de la sección anterior permiten calcular exactamente en cada distribución el número mínimo de cobordes necesarios para obtener una matriz de Hadamard en los casos que sea posible. Este número es la suma de las entradas del reparto mínimo de la distribución. Sin embargo, se hace necesario calcular a priori la distribución y su reparto.

Es posible dar cotas superiores e inferiores bastante ajustadas cuyo cálculo sólo depende de t .

Proposición 3.1.11 *El número mínimo de cobordes necesario para determinar una matriz de Hadamard es $\lceil 2(t - \sqrt{t}) \rceil$.*

El número máximo de cobordes necesario para determinar una matriz de Hadamard es $\lfloor 2(t + \sqrt{t}) \rfloor$.

Demostración. Supongamos que se tiene un reparto $[k_1, k_2, k_3, k_4]$. El número total de cobordes es $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$.

En principio, los k_i cobordes de una componente determinan $k_i(t-1)/2$ caminos a lo largo de las $(t-1)/2$ filas a evaluar, a los que hay que restar $\binom{k_i}{2}$, es decir, los caminos que se borran, dado que dos cobordes son adyacentes una y sólo una vez.

El número total de caminos será, pues, $k_i(t-1)/2 - \binom{k_i}{2}$ y, análogamente, en el resto de las componentes.

Como la suma de los caminos en cada fila es t , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^4 \left[\frac{k_i(t-1)}{2} - \binom{k_i}{2} \right] = \frac{t(t-1)}{2} = \binom{t}{2}.$$

Dado que $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$

$$\frac{n(t-1)}{2} - \sum_{i=1}^4 \binom{k_i}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$$

$$\frac{(n-t)(t-1)}{2} = \sum_{i=1}^4 \binom{k_i}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{k_i^2 - k_i}{2}$$

$$(n-t)(t-1) = \sum_{i=1}^4 k_i^2 - n$$

$$t(n-t+1) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \quad \text{con} \quad n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4.$$

Ahora estudiaremos cuatro casos según la clase de congruencia de $n \pmod{4}$. La idea es dividir n en cuatro partes lo más homogéneas posible. La razón es la siguiente: Supongamos que se tienen los números naturales n, n_1 y n_2 con $n = n_1 + n_2$. Los valores de n_1 y n_2 que minimizan la suma de cuadrados $n_1^2 + n_2^2$ son aquellos cuyo valor es lo más parecido posible como ilustra el gráfico:

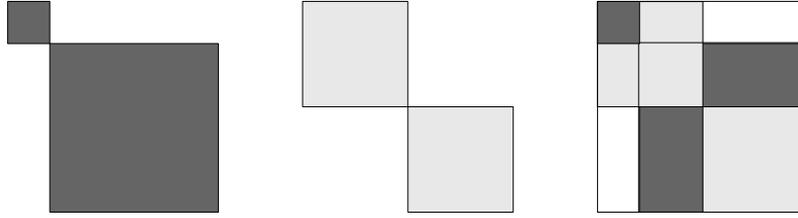


Figura 3.1: Relación $n_1^2 + n_2^2 \geq 2\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2$.

Se trata de encontrar el mínimo n tal que:

• **$n \equiv 0 \pmod{4}$.**

En este caso $\frac{n}{4}$ es entero y escribimos:

$$t(n+1-t) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \geq 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Se debe considerar el intervalo donde la función

$$\frac{n^2}{4} - tn + (t^2 - t) \leq 0$$

alcanza valores negativos. La parábola tiene dos ceros en los puntos:

$$n = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - (t^2 - t)}}{1/2} = \frac{t \pm \sqrt{t}}{1/2} = 2(t \pm \sqrt{t})$$

por lo que:

$$n \in [[2(t - \sqrt{t})], [2(t + \sqrt{t})]].$$

• **$n \equiv 1 \pmod{4}$.**

$$t(n+1-t) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \geq 3\left(\frac{n-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{n+3}{4}\right)^2 = \frac{4n^2 + 12}{16}$$

$$\frac{n^2}{4} - tn + \left(t^2 - t + \frac{3}{4}\right) \leq 0$$

$$n = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 3/4 - t^2 + t}}{1/2} = 2 \left(t \pm \sqrt{t - \frac{3}{4}} \right).$$

Puesto que $t - 3/4 < t$ se tiene que $\sqrt{t - 3/4} < \sqrt{t}$. Se tiene entonces que para la cota superior $t + \sqrt{t - 3/4} < t + \sqrt{t}$ y para la cota inferior $t - \sqrt{t - 3/4} > t - \sqrt{t}$.

• **$n \equiv 2 \pmod{4}$.**

$$t(n + 1 - t) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \geq 2 \left(\frac{n-2}{4} \right)^2 + 2 \left(\frac{n+2}{4} \right)^2 = \frac{n^2}{4} + 1$$

$$\frac{n^2}{4} - tn + (t^2 - t + 1) \leq 0$$

$$n = 2(t \pm \sqrt{t-1})$$

que, por un razonamiento análogo al caso anterior, satisface las desigualdades para la cotas.

• **$n \equiv 3 \pmod{4}$.**

$$t(n + 1 - t) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \geq \left(\frac{n-3}{4} \right)^2 + 3 \left(\frac{n+1}{4} \right)^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{n^2}{4} - tn + (t^2 - t + \frac{3}{4}) \leq 0.$$

Que es la misma relación obtenida en el caso $n \equiv 1 \pmod{4}$.

■

La siguiente tabla compara los valores de las cotas inferiores y superiores con los números mínimos y máximos de cobordes utilizados dados por los correspondientes repartos. En las filas de los números mínimos y máximos de cobordes pueden aparecer varias cantidades para un mismo t según se tengan distintas distribuciones.

Como se observa, la cota es ajustada. De hecho, los valores de cotas y número de cobordes utilizados coinciden hasta $t = 71$.

| | | | | | | | | | | | |
|-------------|---|----|----|--------|----|-------------|--------|--------|--------|------------|--------|
| t | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| # mín. cob. | 3 | 6 | 9 | 12, 13 | 16 | 19, 20, 21 | 23, 24 | 26, 27 | 30, 31 | 33, 34, 36 | 37, 39 |
| cota min. | 3 | 6 | 9 | 12 | 16 | 19 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 |
| cota max. | 9 | 14 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 46 | 51 | 55 |
| #max. cob. | 9 | 14 | 19 | 24, 23 | 28 | 33, 32, 31, | 37, 36 | 42, 41 | 46, 45 | 51, 50, 48 | 55, 53 |

3.1.2 Sobre bases, sistemas de generadores y repartos

Se recuerda que, elegida la base de cobordes $\{M_{\partial_{4t-2}}, M_{\partial_{4t-3}}, \dots, M_{\partial_3}, M_{\partial_2}\}$ los cobordes $\{M_{\partial_1}, M_{\partial_{4t-1}}, M_{\partial_{4t}}\}$ se escriben como:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad M_{\partial_1} &= - \prod_{i=1}^{t-1} M_{\partial_{4i+1}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}. \\
 \bullet \quad M_{\partial_{4t-1}} &= \prod_{i=0}^{t-2} M_{\partial_{4i+3}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}. \\
 \bullet \quad M_{\partial_{4t}} &= \prod_{i=1}^{t-1} M_{\partial_{4i}} \prod_{i=0}^{t-1} M_{\partial_{4i+2}}.
 \end{aligned}$$

La expresión para una matriz de Hadamard es única si se utiliza la base de cobordes. Sin embargo, se tienen 8 expresiones distintas para la misma matriz si se emplea la totalidad del conjunto de cobordes. Veamos cuáles son los repartos correspondientes a las distintas expresiones.

Fijado t , partamos del caso de una matriz expresada respecto de la base, expresión con reparto $[k_1, k_2, k_3, k_4]$, que no tiene por qué coincidir con el mínimo en general. Supongamos, por ejemplo, que k_1 es el número de cobordes en la componente congruente con $2 \pmod{4}$. Se recuerda que los cobordes que no aparecen en la base son 1 , $4t$ y $4t - 1$. Si se hace intervenir sólo uno de ellos, se tienen tres expresiones distintas, una por cada uno de los tres cobordes no presentes en la base. Los repartos correspondientes serían: $[t - k_1, t - k_2, k_3, k_4]$, $[t - k_1, k_2, t - k_3, k_4]$ y $[t - k_1, k_2, k_3, t - k_4]$.

Si se hacen intervenir dos de ellos simultáneamente se tienen tres expresiones más, combinaciones de tres elementos tomados de dos en dos, cuyos correspondientes

| |
|---|
| $\{ \{ 18,14,6,2 \}, \{ 11 \}, \{ 16,8 \}, \{ 13,9,5 \} \}$ |
| $\{ \{ 10 \}, \{ 19,15,7,3 \}, \{ 16,8 \}, \{ 13,9,5 \} \}$ |
| $\{ \{ 10 \}, \{ 11 \}, \{ 20,12,4 \}, \{ 13,9,5 \} \}$ |
| $\{ \{ 10 \}, \{ 11 \}, \{ 16,8 \}, \{ 17,1 \} \}$ |
| $\{ \{ 18,14,6,2 \}, \{ 19,15,7,3 \}, \{ 20,12,4 \}, \{ 13,9,5 \} \}$ |
| $\{ \{ 18,14,6,2 \}, \{ 19,15,7,3 \}, \{ 16,8 \}, \{ 17,1 \} \}$ |
| $\{ \{ 18,14,6,2 \}, \{ 11 \}, \{ 20,12,4 \}, \{ 17,1 \} \}$ |
| $\{ \{ 10 \}, \{ 19,15,7,3 \}, \{ 20,12,4 \}, \{ 17,1 \} \}$ |

Tabla 3.4: $t = 5$. Ejemplo. Ocho expresiones para una misma matriz Hadamard.

repartos son: $[k_1, t - k_2, t - k_3, k_4], [k_1, t - k_2, k_3, t - k_4]$ y $[k_1, k_2, t - k_3, t - k_4]$. La última escritura es la que hace aparecer los tres cobordes no pertenecientes a la base, con reparto $[t - k_1, t - k_2, t - k_3, t - k_4]$.

Se observa que cada una de las distintas expresiones que da lugar a la misma matriz de Hadamard tiene un reparto distinto, es decir, no hay dos representantes de la misma matriz con el mismo reparto.

Por ejemplo, para $t = 5$ la Tabla 3.4 presenta las ocho expresiones distintas que determinan una misma matriz de Hadamard. La primera de ellas es la expresión respecto de la base, la cuarta la que proporciona el reparto mínimo.

3.2 Representación gráfica. Diagramas

Las matrices cocíclicas sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ se pueden visualizar o representar mediante diagramas en los que se pueden leer los cobordes que intervienen en la determinación de la matriz.

Dichos diagramas resultan una herramienta de gran utilidad. En líneas generales, esta presentación convenientemente ordenada de cobordes permite leer con más comodidad las condiciones de adyacencia de cobordes, el número, el tamaño de caminos y, en su caso, las condiciones de productividad en lo que se refiere a intersecciones.

Definición 3.2.1 Dado un producto punto a punto de cobordes $M = M_{\partial_{d_1}} \dots M_{\partial_{d_k}} R$ que define una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$, su **diagrama** es una matriz de 4 filas y t columnas cuya entrada a_{ij} $1 \leq i \leq 4$ $1 \leq j \leq t$ es \times , ($a_{ij} = \times$) si $4t - 4(j - 1) - 3 + i \pmod{4} \in \{d_1, \dots, d_k\}$ y vacía en otro caso.

Se ha definido diagrama para un conjunto de cobordes. Una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ tiene asociados tantos diagramas como expresiones distintas la definen.

Como ejemplo se presenta un diagrama correspondiente a un conjunto de cobordes en $t = 11$, que generan una matriz de Hadamard, con una indicación de los lugares ocupados por estos:

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$$

$$\begin{array}{|ccccccccccc|} \hline 42 & \mathbf{38} & 34 & 30 & 26 & \mathbf{22} & 18 & 14 & \mathbf{10} & 6 & 2 \\ \hline 43 & 39 & 35 & \mathbf{31} & \mathbf{27} & 23 & 19 & 15 & 11 & \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \hline 44 & 40 & 36 & 32 & \mathbf{28} & 24 & \mathbf{20} & \mathbf{16} & 12 & 8 & 4 \\ \hline \mathbf{41} & \mathbf{37} & \mathbf{33} & 29 & \mathbf{25} & 21 & 17 & 13 & 9 & \mathbf{5} & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccccccccc|} \hline - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ \hline - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ \hline - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \hline \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \\ \hline \end{array}$$

Aunque, por conveniencia de escritura, el diagrama se presente de forma plana, se debe entender, más que como un rectángulo, como un cilindro con cuatro pisos, dado que las componentes son ciclos.

Se hace notar que, para la presentación ordenada de cobordes en un diagrama, se han elegido los criterios de adyacencia que dictan los ciclos de la fila cinco. Por lo tanto, se puede obtener fácilmente no sólo el número de caminos determinados en dicha fila, sino el número de caminos en cada una de sus cuatro componentes, sin más que contar grupos de cruces en cada fila con la precaución de ver la representación como un cilindro.

Los ciclos en las filas 6, 7 y 8 se recuperan leyendo en zig-zag pares de filas convenientes del diagrama. Para obtener uno de los ciclos de la fila 6 se deben leer en zig-zag la primera y cuarta filas, segunda y tercera para el otro. Los de la fila 7 se tienen con la lectura de la primera y tercera por un lado y segunda y cuarta por otro. Por último, los ciclos de la fila 8 se obtienen con primera y segunda filas, y la tercera y cuarta.

Por ejemplo, en el caso de la fila 8, donde una de las dos componentes maximales contiene los cobordes congruentes con 2 y con 3 y la otra contiene las congruencias con 4 y 1, los ciclos maximales se pueden leer como indica la Figura 3.2.

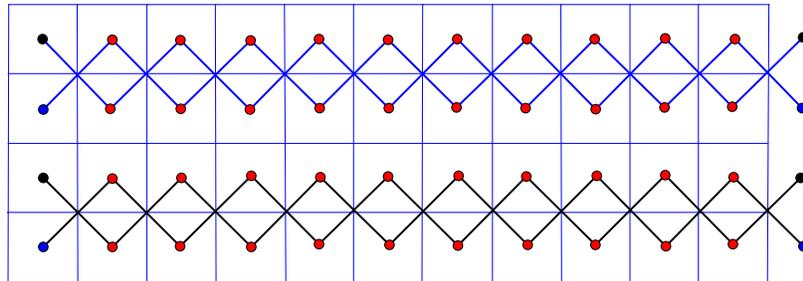


Figura 3.2: Ciclos en la fila 8. $t = 11$.

El carácter de productividad de los caminos de longitud par viene indicado por la clase de congruencia módulo 4 a la que pertenece el coborde inicial (o final) del camino, lo que en los diagramas se puede inspeccionar con facilidad según en la fila en la que arranque el camino, leído de izquierda a derecha.

Los caminos de nuestro ejemplo en la fila 8 están presentados en la Figura 3.3.

En la primera componente se tienen 3 caminos de longitud 1, (38), (31), (3), y dos de longitud 2, uno de ellos productivo (27, 32) y otro improductivo (10, 7).

En la segunda componente se tienen 9 caminos de longitud 1, (28), (20), (16), (8), (41), (37), (33), (25), (5).

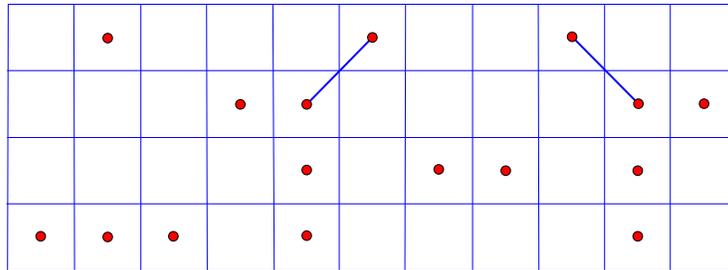


Figura 3.3: Caminos en fila 8. El ejemplo de $t = 11$.

Aun en los casos en los que hay escisión, los caminos del resto de las filas congruentes con 6, 7 y 8 pueden ser estudiados siguiendo la misma idea, pero separando los saltos en zig-zag por el criterio dado por el correspondiente ciclo. Por ejemplo, los ciclos de la fila 12 se presentan en la Figura 3.4.

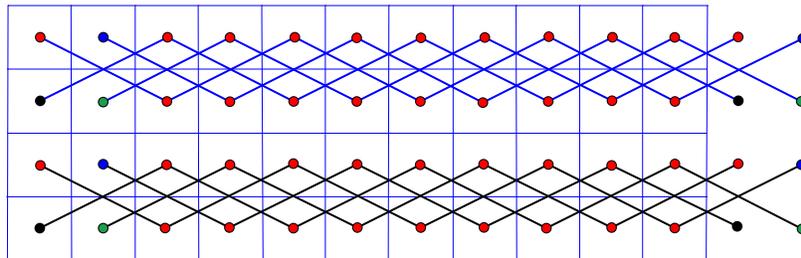


Figura 3.4: Ciclos en fila 12. $t = 11$.

Nota 3.2.2 *La relación entre diagramas y lectura de caminos en cualquier fila congruente con $1 \pmod{4}$, se verá en la sección correspondiente a operaciones verticales del capítulo siguiente.*

En todas las matrices obtenidas de forma exhaustiva hasta $t = 15$ se observan ciertos patrones de simetría. Por ejemplo, en la matriz presentada en este capítulo se tiene simetría en las posiciones de las \times respecto de la columna marcada.

$$\left| \begin{array}{c|cccccccc} - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{array} \right|$$

Definición 3.2.3 *Un diagrama asociado a un producto punto a punto de cobordes $M = M_{\partial_1} \dots M_{\partial_k} R$ es **simétrico** si hay alguna columna respecto de la cual las posiciones marcadas del diagrama, \times , guardan simetría. Puesto que, si uno de los diagramas que representa una matriz cocíclica abeliana es simétrico, todos los demás lo son, (se obtienen tomando conjuntos de cobordes complementarios en las correspondientes componentes), se dirá, por extensión, que la matriz cocíclica guarda simetría.*

Tras llevar a cabo la búsqueda exhaustiva hasta $t = 15$, se ha comprobado que todas las matrices cocíclicas Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ hasta $t = 15$ están representadas por diagramas que guardan simetría. Este hecho, junto con las pautas observadas en la construcción de matrices cocíclicas Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ lleva a conjeturar si estas matrices están caracterizadas por condiciones de simetría en los diagramas.

Teorema 3.2.4 *Si matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ está representada por diagramas simétricos y verifica que el número de caminos es igual a t en las filas congruentes con $1 \pmod{4}$ y mayores o iguales a 5, es Hadamard.*

Demostración. Se debe probar que para las filas 6, 7, 8 y congruentes el número de caminos es igual al número de intersecciones. Dado que los caminos de longitud impar determinan una única intersección, basta comprobar que hay tantos caminos de longitud par productivos como improductivos. Puesto que el diagrama guarda simetría, todos los caminos, salvo los situados sobre la columna que sirve de eje de simetría, que deben ser de longitud impar necesariamente, aparecen a pares. Por simetría también, si uno de ellos es productivo, su camino simétrico es improductivo y viceversa. ■

Capítulo 4.
Operaciones. Clasificación por
órbitas

Capítulo 4.

Operaciones. Clasificación por órbitas

En este capítulo estudiaremos cómo actúan cuatro operaciones sobre el conjunto de matrices cocíclicas Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. Cada una de ellas puede ser interpretada como la acción de un determinado grupo sobre este conjunto, lo que proporciona una partición en órbitas. Dichas órbitas determinan, por una lado, una clasificación. Por otro, dada una matriz de Hadamard, se pueden obtener el resto de las matrices de su órbita.

Nota 4.0.5 *Las matrices obtenidas por las distintas operaciones no aparecen, en general, expresadas respecto de los cobordes de la base. Esto no supone ninguna imprecisión. Cualquier producto de cobordes que genere una misma matriz de Hadamard debe cumplir las condiciones de Hadamard relativas a número de caminos e intersecciones.*

Por otro lado, puesto que las operaciones se definirán actuando sobre un conjunto de cobordes y, dado que al no utilizar sólo los cobordes de la base, una misma matriz puede ser descrita por varias expresiones, (ya vimos que de ocho formas diferentes), se debe hacer la siguiente pregunta: ¿Las imágenes de dos conjuntos distintos de cobordes que generan la misma matriz dan lugar a una misma matriz imagen? La respuesta es afirmativa. En esta situación es coherente hablar de una operación actuando sobre una matriz, independientemente del conjunto de cobordes que la determina.

A nivel de cálculos efectivos interesa tomar el reparto mínimo, puesto que, salvo la complementaria, todas las operaciones conservan el número de cobordes que intervienen en la expresión y para una matriz o su complementaria éste es único. Haciendo

actuar las distintas operaciones sobre dicho reparto, se obtendrán imágenes, expresadas también en sus repartos mínimos, que, en principio, corresponden a distintas matrices de Hadamard.

Sin embargo hay situaciones (por ejemplo, algunas operaciones de intercambio en $t = 3$), donde se obtiene el mismo conjunto de cobordes como imagen, u otras donde un intercambio genera la misma expresión que una operación vertical, (como es el caso en $t = 5$). Estos casos dependen de la configuración de cada diagrama considerado, por lo que el tamaño de las distintas órbitas se debe estudiar para cada uno de ellos particularmente. Más adelante en este capítulo se presentarán ejemplos que ilustran con detalle este comentario.

Todas las matrices de Hadamard obtenidas mediante búsqueda exhaustiva hasta $t = 15$ son simétricas. A partir de ahora dirigiremos nuestro estudio a una búsqueda en el caso simétrico.

4.1 Complementarios. El grupo \mathbb{Z}_2

Dado un conjunto de cobordes para un cierto t y fijada una de las cuatro clases de congruencia mod 4, por ejemplo la i -ésima, $1 \leq i \leq 4$, se puede construir una matriz cocíclica generada por los cobordes presentes en el subconjunto complementario al de partida en la componente i -ésima y los mismos cobordes presentes originalmente en el resto de las componentes.

Definición 4.1.1 *Sea el conjunto de cobordes:*

$$\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\}$$

el conjunto complementario en la componente i -ésima, $1 \leq i \leq 4$, denotado por $C_i(\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\})$, está formado por el subconjunto complementario de los cobordes $\{c_{i1}, \dots, c_{ir_i}\}$ en el subconjunto de cobordes de la componente i -ésima y por los cobordes dados en el resto de componentes maximales.

Por ejemplo, el complementario de la expresión anterior en la componente 2 es:

$$C_2(\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}) = \\ \{\{42, 34, 30, 26, 18, 14, 6, 2\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$$

En términos de diagramas:

$$C_2 \left(\begin{array}{cccccccccccc} - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{array} \right) = \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc} \times & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & - & \times & \times \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{array} \right)$$

Lema 4.1.2 *Si las matrices son expresadas respecto de la base de cobordes, el cálculo del complementario en cualquier componente se reduce al cálculo del complementario en la componente congruente con 2.*

Demostración. Los cobordes 1 , $4t - 1$ y t no forman parte de la base de cobordes. Cada uno de ellos se expresa respecto de ella como producto de todos los que aparecen en su misma componente y los que aparecen en la componente congruente con 2. Por otro lado, se recuerda que si un mismo coborde aparece dos veces en un producto punto a punto, se cancela.

En el cálculo del complementario en una componente distinta de la congruente con 2 aparecen necesariamente los cobordes 1 , $4t - 1$ o t según el complementario efectuado. Al expresar el resultado obtenido respecto de la base, se tiene el complementario en la componente congruente con 2 del conjunto de cobordes de partida.

■

Como ejemplo ilustrativo de este hecho:

$$C_1(\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}) =$$

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{29, 21, 17, 13, 9, 1\}\} =$$

$$\{\{42, 34, 30, 26, 18, 14, 6, 2\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$$

A partir de ahora, consideraremos sólo el complementario del conjunto de cobordes $\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\}$ respecto de la componente congruente con 2, complementario que se denotará por $C\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\}$.

Se puede probar que si dos productos de cobordes dan lugar a la misma matriz de Hadamard sus dos expresiones complementarias dan lugar también a la misma matriz. La prueba consiste en precisar las 8 expresiones para una matriz de Hadamard, calcular sus imágenes por esta operación y comprobar que se tienen las 8 expresiones distintas para una misma matriz imagen. Por lo tanto, se puede hablar sin imprecisión de la matriz complementaria de una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$.

Proposición 4.1.3 *Si un conjunto de cobordes determina una matriz Hadamard, su conjunto complementario determina una matriz de Hadamard.*

Demostración. El complementario de un conjunto de caminos en un ciclo proporciona el mismo número de caminos.

Para las condiciones en el resto de filas basta observar que si se tiene un conjunto de cobordes con una configuración simétrica su conjunto complementario también guarda simetría. ■

Nota 4.1.4 *Se hace notar que la operación complementaria cambia el número de cobordes de la expresión sobre la que actúa, reemplazando los k_2 cobordes que intervienen en la componente congruente con $2 \pmod{4}$ por $t - k_2$ cobordes.*

Ahora precisaremos y estudiaremos la relación existente entre los repartos que determinan las ocho expresiones que representan una matriz, y los determinados por las expresiones de su matriz complementaria. Como vimos en el capítulo anterior, de los 2^4 repartos posibles para una distribución, hay 8 correspondientes a las distintas expresiones que generan la matriz. Los otros 8 repartos restantes son, precisamente, los correspondientes a las expresiones que generan la matriz complementaria.

Fijado t y una expresión para una matriz M con reparto $[k_2, k_3, k_4, k_1]$, (reparto que, en principio, no tiene por qué ser el reparto mínimo de la distribución), la primera columna de la tabla siguiente muestra los repartos de sus ocho expresiones, la segunda, los repartos de las expresiones complementarias. En total se tienen los 2^4 repartos posibles.

| M | $C(M)$ |
|--|------------------------------------|
| $[k_1, k_2, k_3, k_4]$ | $[t - k_1, k_2, k_3, k_4]$ |
| $[t - k_1, t - k_2, k_3, k_4]$ | $[k_1, t - k_2, k_3, k_4]$ |
| $[t - k_1, k_2, t - k_3, k_4]$ | $[k_1, k_2, t - k_3, k_4]$ |
| $[t - k_1, k_2, k_3, t - k_4]$ | $[k_1, k_2, k_3, t - k_4]$ |
| $[k_1, t - k_2, t - k_3, k_4]$ | $[t - k_1, t - k_2, t - k_3, k_4]$ |
| $[k_1, t - k_2, k_3, t - k_4]$ | $[t - k_1, t - k_2, k_3, t - k_4]$ |
| $[k_1, k_2, t - k_3, t - k_4]$ | $[t - k_1, k_2, t - k_3, t - k_4]$ |
| $[t - k_1, t - k_2, t - k_3, t - k_4]$ | $[k_1, t - k_2, t - k_3, t - k_4]$ |

A la vista de la tabla se observa que, puesto que el reparto mínimo viene dado sólo por una de las 2^4 cuádruplas anteriores, no todas las matrices de Hadamard admiten una expresión con reparto mínimo. Lo que sí es cierto, es que si una matriz de Hadamard no tiene una expresión con reparto mínimo, lo tiene su matriz complementaria, hecho que resultará de interés para cálculos efectivos posteriores.

Por otra parte, dado el reparto de una expresión para una matriz, es posible saber si la propia matriz admite una expresión con reparto mínimo o lo hace su complementaria. Si la cuádrupla tiene un número par de elementos k_i mayores que $(t - 1)/2$, se tiene la matriz que proporciona el reparto mínimo. En otro caso, se tiene la complementaria.

Se tienen así, salvo complementarios en el caso del reparto mínimo, dos expresiones señaladas por su unicidad para describir una matriz de Hadamard respecto de generadores, la dada por los cobordes de la base y la expresión cuyo reparto es el mínimo. Dichas expresiones no coinciden en general.

Un ejemplo para este hecho se ha presentado ya en la tabla (3.4) del capítulo anterior. Se tiene una matriz de Hadamard cuya expresión respecto de los cobordes de la base es:

$$\{\{18, 14, 6, 2\}, \{11\}, \{16, 8\}, \{13, 9, 5\}\}$$

mientras que la expresión que proporciona su reparto mínimo es:

$$\{\{10\}, \{11\}, \{16, 8\}, \{17, 1\}\}.$$

Por otro lado el producto de cobordes en $t = 11$

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$$

muestra un ejemplo donde la escritura respecto de la base proporciona el reparto mínimo.

En todos los casos estudiados hasta ahora, esta operación complementaria agrupa las matrices de Hadamard para cada t en dos órbitas, de manera que la estructura determinada en cada una de ellas por el resto de las operaciones es idéntica, como si se tratara de la reflexión en un espejo. Más adelante se presentará un ejemplo, el caso $t = 3$, que ilustra este hecho.

4.2 Traslados. El grupo \mathbb{Z}_t

Puesto que el carácter Hadamard para una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ viene dado por condiciones de posición y adyacencia de los cobordes que la generan, una idea natural es desplazar simultáneamente las posiciones de dichos cobordes.

Definición 4.2.1 El conjunto i -trasladado $0 \leq i \leq t - 1$ del conjunto de cobordes $\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\}$, denotado por $\mathbb{T}_i(\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\})$, es el conjunto:

$$\{\{c_{21}+4i, \dots, c_{2r_2}+4i\}, \{c_{31}+4i, \dots, c_{3r_3}+4i\}, \{c_{41}+4i, \dots, c_{4r_4}+4i\}, \{c_{11}+4i, \dots, c_{1r_1}+4i\}\}$$

donde las sumas se efectúan mod $4t$.

Como ejemplo, el tercer trasladado del conjunto presentado en $t = 11$

$$T_3(\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}) =$$

$$\{\{34, 22, 6\}, \{43, 39, 19, 15\}, \{40, 32, 28, 20\}, \{37, 17, 9, 5, 1\}\}$$

Los diagramas correspondientes:

$$T_3 \begin{array}{cccccccccccc} | & - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ | & - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ | & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ | & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \\ | & - & - & \times & - & - & \times & - & - & - & \times & - \\ | & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & - & - \\ | & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & - \\ | & - & \times & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times \end{array} =$$

Como se observa en los diagramas, la operación i -trasladada desplaza las posiciones marcadas i espacios a la izquierda.

Como en el caso de los complementarios, el i -trasladado actuando sobre las ocho expresiones que representan a la misma matriz cocíclica abeliana da lugar a ocho conjuntos de cobordes que generan la misma matriz cocíclica abeliana, por lo que se puede hablar, sin perder rigor, del i -trasladado de una matriz.

Esta operación se puede ver como una acción del grupo \mathbb{Z}_t sobre un conjunto de matrices cocíclicas abelianas. El elemento del grupo i , $0 \leq i \leq t-1$ actúa sobre cada matriz cocíclica sumando $4i \bmod 4$ a todos y cada uno de los cobordes que aparecen en una de sus expresiones.

Proposición 4.2.2 *El conjunto de cobordes i -trasladado de un conjunto de cobordes que genera una matriz cocíclica Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ genera también una matriz Hadamard.*

Demostración. Los trasladados mantienen las posiciones relativas por lo que, en todas las filas, se conserva el número, la longitud y, donde corresponda, el carácter de productividad relativo a intersecciones de caminos de longitud par. ■

Nota 4.2.3 *Para esta demostración no se ha usado hipótesis de simetría.*

Para cada matriz cocíclica Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ se puede construir su órbita por trasladados. El cardinal de esta órbita es exactamente t , (basta ver que el eje de simetría ocupa cada vez una posición diferente).

Proposición 4.2.4 *Las operaciones complementaria y traslación conmutan.*

Demostración. A la vista del correspondiente diagrama se observa que desplazar posiciones y calcular el complementario da lugar al mismo resultado que efectuar la misma tarea en distinto orden. ■

Nota 4.2.5 *Esta prueba, al igual que otras en la presente memoria, fue pensada en un primer momento usando la expresión respecto de la base de cobordes. La prueba, sin ser complicada, resulta más pesada en cuanto a la notación. En general, la escritura por diagramas proporciona una herramienta que simplifica un buen número de demostraciones.*

4.3 Intercambios. El grupo simétrico S_4

La propia palabra *intercambio* ilustra de forma clara el efecto de estas operaciones sobre un conjunto de cobordes. Se permutan o intercambian las condiciones de adyacencia presentes entre las cuatro componentes.

Por comodidad en la notación el conjunto de cobordes:

$$\{\{c_{21}, \dots, c_{2r_2}\}, \{c_{31}, \dots, c_{3r_3}\}, \{c_{41}, \dots, c_{4r_4}\}, \{c_{11}, \dots, c_{1r_1}\}\}$$

será denotado por $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$.

Por otra parte la expresión $\mathbf{c}_j + \mathbf{k}$ denota $\{c_{j1} + k, \dots, c_{jr_j} + k\}$, es decir, a cada elemento del subconjunto en la componente congruente con j se le suma $k \pmod{4t}$.

Definición 4.3.1 *Dado el conjunto de cobordes $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$ se definen las operaciones de intercambio:*

- $s_{23}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}, \mathbf{c}_2 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$.
- $s_{24}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_4 - \mathbf{2}, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2 + \mathbf{2}, \mathbf{c}_1\}$.
- $s_{21}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_1 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_2 - \mathbf{1}\}$.
- $s_{34}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4 - \mathbf{1}, \mathbf{c}_3 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_1\}$.
- $s_{31}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \mathbf{2}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_3 - \mathbf{2}\}$.
- $s_{41}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_1 + \mathbf{3}, \mathbf{c}_4 - \mathbf{3}\}$.

Aunque se han descrito seis operaciones, se considerará, también, cualquier composición de las mismas.

El siguiente ejemplo muestra la acción de la operación s_{34} , que intercambia las condiciones de las componentes congruentes con 3 y 4:

$$s_{34}(\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}) = \\ \{\{38, 22, 10\}, \{27, 19, 15, 7\}, \{32, 28, 8, 4\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}.$$

La misma operación de intercambio actuando sobre cualquiera de las ocho expresiones que representan a una matriz cocíclica abeliana da lugar a la misma matriz, por lo que se pueda hablar, como en las operaciones anteriores, de operaciones de intercambio sobre una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$.

Es muy ilustrativo presentar cómo actúa una operación de intercambio sobre el diagrama asociado a un conjunto de cobordes. El ejemplo anterior se ve así:

$$S_{34} \begin{vmatrix} - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{vmatrix}$$

Se observa que se ha efectuado una permutación en las filas segunda y tercera del diagrama, filas correspondientes a las componentes congruentes con 3 y 4 mod 4. De hecho el conjunto de operaciones de intercambio es isomorfo al grupo simétrico S_4 . Las seis operaciones descritas anteriormente se corresponden, precisamente, con las seis transposiciones.

En principio, el cardinal de una órbita por intercambios es 24, el número de permutaciones de cuatro elementos. Si hay filas repetidas en el correspondiente diagrama, es decir, condiciones de adyacencia idénticas en algunas de las componentes, se tienen permutaciones de cuatro elementos con repetición, dictada por las filas iguales en el diagrama, pudiendo aparecer órbitas de tamaños 1, 4, 6, 12 y 24 en función de las repeticiones. Así, por ejemplo, para el diagrama en $t = 3$:

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{vmatrix}$$

se tienen como imágenes cuatro posibles diagramas, puesto que hay tres filas repetidas y se tienen permutaciones de cuatro elementos con repetición de tres. Hay ejemplos de diagramas en $t = 5$, así como algunos en los casos $t = 7$ y $t = 9$, donde se obtienen como imágenes 12 diagramas distintos. Los diagramas mostrados en la Tabla 4.1

$$\left| \begin{array}{cccccc} \times & - & - & - & - & \times \\ \times & - & - & - & - & \times \\ - & \times & - & - & \times & - \\ - & \times & - & \times & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccccc} - & - & - & \times & - & - \\ - & - & \times & \times & \times & - \\ - & \times & - & \times & - & \times \\ \times & - & - & \times & - & \times \end{array} \right|$$

Tabla 4.1: $t = 7$. Diagramas con órbitas por intercambios de tamaño 12 y 24.

correspondientes a $t = 7$ presentan casos donde el tamaño de la imagen es 12 y 24 respectivamente.

Proposición 4.3.2 *Si $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$ es un conjunto de cobordes que determina una matriz cocíclica Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$, entonces $s_{ij}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\})$, $1 \leq i < j \leq 4$ determina también una matriz Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ -cocíclica.*

Demostración. Cualquier intercambio conserva el número de caminos en la fila 5 y congruentes. Por otro lado, a la vista del diagrama que determina el conjunto de cobordes, efectuar un intercambio es hacer una permutación en las filas del diagrama, lo que conserva la simetría. ■

Nota 4.3.3 *Este resultado se puede probar sin utilizar las condiciones de simetría, basta con asumir que los caminos productivos e improductivos están equilibrados en número no sólo en el conjunto de las componentes definidas en cada fila, sino en cada uno de los subconjuntos en que se dividen éstas atendiendo al valor mod 4 de los cobordes que las componen.*

Por ejemplo, en $t = 9$ el conjunto de cobordes

$$\{\{26, 10\}, \{23, 19, 15\}, \{36, 24, 16, 4\}, \{33, 25, 9, 1\}\}$$

genera una matriz de Hadamard. En la fila 8 se tienen los siguientes caminos pares $\{(26, 23), (15, 10), (25, 24), (16, 9), (4, 33), (1, 36)\}$. La siguiente tabla recoge el equilibrio en cuanto productividad no sólo por fila, sino también según congruencias.

| | | |
|--------------------|--|---|
| Ciclos fila 8 | [34, 31, 26, 23, 18, 15, 10, 7, 2, 35, 30, 27, 22, 19, 14, 11, 6, 3] | [36, 29, 28, 21, 20, 13, 12, 5, 4, 33, 32, 25, 24, 17, 16, 9, 8, 1] |
| Cam. Productivos | (15, 10) | (16, 9), (4, 33) |
| Cam. Improductivos | (26, 23) | (25, 24), (1, 36) |

De hecho, se puede probar que ambos resultados son equivalentes, es decir, las operaciones de intercambio preservan la condición Hadamard si y sólo si hay equilibrio según clases residuales entre caminos productivos e improductivos.

Proposición 4.3.4 *Dado un conjunto de cobordes que determina una matriz, las operaciones complementaria y de intercambio conmutan.*

Demostración. Puesto que los intercambios s_{23} , s_{24} y s_{21} generan todas las operaciones de intercambio basta probarlo para estos casos.

Se toma, por ejemplo, el intercambio s_{23} . La comprobación es similar para los demás casos. Dado el conjunto de cobordes $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$

$$Cs_{23}(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = C(\{\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}, \mathbf{c}_2 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{C(\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}), \mathbf{c}_2 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$$

$$s_{23}C(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = s_{23}(\{C(\mathbf{c}_2), \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}) = \{\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}, C(\mathbf{c}_2) + \mathbf{1}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}$$

Por otro lado, según la relación que existe entre distintas expresiones para una misma matriz de Hadamard, se tiene que:

$$\begin{aligned} \{C(\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}), \mathbf{c}_2 + \mathbf{1}, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\} &= \{C(C(\mathbf{c}_3 - \mathbf{1})), C(\mathbf{c}_2 + \mathbf{1}), \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\} = \\ &= \{\mathbf{c}_3 - \mathbf{1}, C(\mathbf{c}_2 + \mathbf{1}), \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_1\}. \end{aligned}$$

Puesto que $C(\mathbf{c}_2 + \mathbf{1}) = C(\mathbf{c}_2) + \mathbf{1}$, se obtienen como imágenes dos conjuntos de cobordes distintos que representan la misma matriz. ■

Proposición 4.3.5 *Dado un conjunto de cobordes las operaciones de intercambio y traslación conmutan.*

Demostración. Las operaciones de intercambio y traslación se corresponden con permutar filas y con desplazarlas en el diagrama correspondiente.

Aquí se obtiene el mismo conjunto de cobordes como imagen en las dos posibles composiciones de las operaciones. ■

4.4 Operaciones verticales. El grupo \mathbb{Z}_t^*

Como hemos visto, el carácter Hadamard de una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ queda determinado por la posición y las condiciones de adyacencia de los cobordes que la determinan. Hasta ahora, dichas condiciones se han estudiado mediante la presentación dada por los diagramas, que son dictados por posiciones de cobordes en los ciclos de la fila 5. Cabe preguntarse qué sucede si la configuración de cruces dada por un diagrama es superpuesta o “calcada” sobre otra presentación similar que esté dictada por las condiciones de adyacencia sobre ciclos de cualquier otra fila congruente con 1 módulo 4 y, dado que sólo son objeto de estudio la primera mitad de las filas, menor que $2t - 1$.

En esta sección veremos que las operaciones anteriores dan lugar a otra matriz de Hadamard. Este tipo de operaciones serán denominadas **verticales** y se pueden interpretar como acciones de homotecias sobre conjuntos de cobordes.

En el presente trabajo consideramos las posibles homotecias de razón desde 2 hasta $(t - 1)/2$ y evaluamos sólo la primera mitad de filas de la matriz, salvo las cuatro primeras. Veremos que se tienen exactamente $\phi(t)/2$ operaciones de este tipo.

Se presenta la acción de una de las posibles operaciones verticales sobre el ejemplo que sirve de hilo conductor en el capítulo, la matriz de Hadamard en $t = 11$ generada por los cobordes:

$$\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}.$$

El diagrama para esta elección de cobordes es:

$$\begin{vmatrix} - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & - \\ - & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times \\ - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - \\ \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & - \end{vmatrix}$$

Recordamos que las cruces y los huecos vienen determinados por la presencia o no de los cobordes en las posiciones indicadas a continuación:

$$\begin{vmatrix} 42 & \mathbf{38} & 34 & 30 & 26 & \mathbf{22} & 18 & 14 & \mathbf{10} & 6 & 2 \\ 43 & 39 & 35 & \mathbf{31} & \mathbf{27} & 23 & 19 & 15 & 11 & \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ 44 & 40 & 36 & 32 & \mathbf{28} & 24 & \mathbf{20} & \mathbf{16} & 12 & \mathbf{8} & 4 \\ \mathbf{41} & \mathbf{37} & \mathbf{33} & 29 & \mathbf{25} & 21 & 17 & 13 & 9 & \mathbf{5} & 1 \end{vmatrix}$$

Fijadas las posiciones de las cruces, supongamos ahora que la elección de cobordes no viene dada por los ciclos de la fila cinco, sino, por ejemplo, por los de la fila nueve. Si fijamos el centro de la homotecia en la última columna, $(2, 3, 4, 1)^t$, Se debieran elegir cobordes de acuerdo al siguiente criterio:

$$\begin{vmatrix} 38 & \mathbf{30} & 22 & 14 & 6 & \mathbf{42} & 34 & 26 & \mathbf{18} & 10 & 2 \\ 39 & 31 & 23 & \mathbf{15} & \mathbf{7} & 43 & 35 & 27 & 19 & \mathbf{11} & \mathbf{3} \\ 40 & 32 & 24 & 16 & \mathbf{8} & 44 & \mathbf{36} & \mathbf{28} & 20 & \mathbf{12} & 4 \\ \mathbf{37} & \mathbf{29} & \mathbf{21} & 13 & \mathbf{5} & 41 & 33 & 25 & 17 & \mathbf{9} & 1 \end{vmatrix}$$

Se tiene $\{\{30, 42, 18\}, \{15, 7, 11, 3\}, \{8, 36, 28, 12\}, \{37, 29, 21, 5, 9\}\}$, que da lugar a una matriz de Hadamard.

Merece la pena estudiar el ejemplo con más detalle. Vamos a comparar las condiciones de adyacencia presentes en las filas congruentes con uno módulo cuatro en la matriz de partida y su transformada.

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 5. MATRIZ ORIGINAL Y TRASFORMADA

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 42 | 38 | 34 | 30 | 26 | 22 | 18 | 14 | 10 | 6 | 2 |
| 43 | 39 | 35 | 31 | 27 | 23 | 19 | 15 | 11 | 7 | 3 |
| 44 | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 41 | 37 | 33 | 29 | 25 | 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 1 |

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 42 | 38 | 34 | 30 | 26 | 22 | 18 | 14 | 10 | 6 | 2 |
| 43 | 39 | 35 | 31 | 27 | 23 | 19 | 15 | 11 | 7 | 3 |
| 44 | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 41 | 37 | 33 | 29 | 25 | 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 1 |

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 9. MATRIZ ORIGINAL Y TRASFORMADA

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 38 | 30 | 22 | 14 | 6 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | 2 |
| 39 | 31 | 23 | 15 | 7 | 43 | 35 | 27 | 19 | 11 | 3 |
| 40 | 32 | 24 | 16 | 8 | 44 | 36 | 28 | 20 | 12 | 4 |
| 37 | 29 | 21 | 13 | 5 | 41 | 33 | 25 | 17 | 9 | 1 |

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 38 | 30 | 22 | 14 | 6 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | 2 |
| 39 | 31 | 23 | 15 | 7 | 43 | 35 | 27 | 19 | 11 | 3 |
| 40 | 32 | 24 | 16 | 8 | 44 | 36 | 28 | 20 | 12 | 4 |
| 37 | 29 | 21 | 13 | 5 | 41 | 33 | 25 | 17 | 9 | 1 |

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 13. MATRIZ ORIGINAL Y TRASFORMADA

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 34 | 22 | 10 | 42 | 30 | 18 | 6 | 38 | 26 | 14 | 2 |
| 35 | 23 | 11 | 43 | 31 | 19 | 7 | 39 | 27 | 15 | 3 |
| 36 | 24 | 12 | 44 | 32 | 20 | 8 | 40 | 28 | 16 | 4 |
| 33 | 21 | 9 | 41 | 29 | 17 | 5 | 37 | 25 | 13 | 1 |

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 34 | 22 | 10 | 42 | 30 | 18 | 6 | 38 | 26 | 14 | 2 |
| 35 | 23 | 11 | 43 | 31 | 19 | 7 | 39 | 27 | 15 | 3 |
| 36 | 24 | 12 | 44 | 32 | 20 | 8 | 40 | 28 | 16 | 4 |
| 33 | 21 | 9 | 41 | 29 | 17 | 5 | 37 | 25 | 13 | 1 |

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 17. MATRIZ ORIGINAL Y TRASFORMADA

$$\begin{array}{cccccccccc} 30 & 14 & 42 & 26 & \mathbf{10} & \mathbf{38} & \mathbf{22} & 6 & 34 & 18 & 2 \\ \mathbf{31} & 15 & 43 & \mathbf{27} & 11 & 39 & 23 & \mathbf{7} & 35 & 19 & \mathbf{3} \\ 32 & \mathbf{16} & 44 & \mathbf{28} & 12 & 40 & 24 & \mathbf{8} & 36 & \mathbf{20} & 4 \\ 29 & 13 & \mathbf{41} & \mathbf{25} & 9 & \mathbf{37} & 21 & \mathbf{5} & \mathbf{33} & 17 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{30} & 14 & \mathbf{42} & 26 & 10 & 38 & 22 & 6 & 34 & \mathbf{18} & 2 \\ 31 & \mathbf{15} & 43 & 27 & \mathbf{11} & 39 & 23 & \mathbf{7} & 35 & 19 & \mathbf{3} \\ 32 & 16 & 44 & \mathbf{28} & \mathbf{12} & 40 & 24 & \mathbf{8} & \mathbf{36} & 20 & 4 \\ \mathbf{29} & 13 & 41 & 25 & \mathbf{9} & \mathbf{37} & \mathbf{21} & \mathbf{5} & 33 & 17 & 1 \end{array}$$

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 21. MATRIZ ORIGINAL Y TRASFORMADA

$$\begin{array}{cccccccccc} 26 & 6 & 30 & \mathbf{10} & 34 & 14 & \mathbf{38} & 18 & 42 & \mathbf{22} & 2 \\ \mathbf{27} & \mathbf{7} & \mathbf{31} & 11 & 35 & 15 & 39 & 19 & 43 & 23 & \mathbf{3} \\ \mathbf{28} & \mathbf{8} & 32 & 12 & 36 & \mathbf{16} & 40 & \mathbf{20} & 44 & 24 & 4 \\ \mathbf{25} & \mathbf{5} & 29 & 9 & \mathbf{33} & 13 & \mathbf{37} & 17 & \mathbf{41} & 21 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 26 & 6 & \mathbf{30} & 10 & 34 & 14 & 38 & \mathbf{18} & \mathbf{42} & 22 & 2 \\ 27 & \mathbf{7} & 31 & \mathbf{11} & 35 & \mathbf{15} & 39 & 19 & 43 & 23 & \mathbf{3} \\ \mathbf{28} & \mathbf{8} & 32 & \mathbf{12} & \mathbf{36} & 16 & 40 & 20 & 44 & 24 & 4 \\ 25 & \mathbf{5} & \mathbf{29} & \mathbf{9} & 33 & 13 & \mathbf{37} & 17 & 41 & \mathbf{21} & 1 \end{array}$$

Se observa que, salvo trasladados, hay coincidencia en posiciones y condiciones de adyacencia entre las filas de la matriz original y las de la matriz transformada según los emparejamientos indicados en la siguiente tabla:

Por lo tanto, se conservan los números de caminos y la condición Hadamard para las filas congruentes con $1 \pmod{4}$, esto es $c = t$, se verifica en la matriz obtenida.

Esta coincidencia de posiciones y adyacencia, hace que el número, la longitud y carácter productivo o improductivo de caminos en filas congruentes con $6, 7$ y $8 \pmod{4}$ sea también idéntico en filas de la matriz original y las correspondientes según el criterio dictado por la Tabla 4.2 de la transformada.

| | | | |
|------|----|---|---|
| | | $\{ \{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\},$ $\{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\} \}$ | $\{ \{30,42,18\}, \{15, 7, 11, 3\},$ $\{8, 36, 28, 12\}, \{ 37, 29, 21, 9, 5\} \}$ |
| fila | 5 | A | E |
| fila | 9 | B | A |
| fila | 13 | C | D |
| fila | 17 | D | B |
| fila | 21 | E | C |

Tabla 4.2: $t = 11$. Matriz original, transformada y condiciones de adyacencia.

Veamos esta idea con más detalle comparando dos grupos de filas adecuados. Como hemos visto, los caminos de la fila 17 de la matriz dada y la fila 13 de la transformada siguen, salvo trasladados, el mismo patrón:

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 17. MATRIZ ORIGINAL

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|
| 30 | 14 | 42 | 26 | 10 | 38 | 22 | 6 | 34 | 18 | 2 |
| 31 | 15 | 43 | 27 | 11 | 39 | 23 | 7 | 35 | 19 | 3 |
| 32 | 16 | 44 | 28 | 12 | 40 | 24 | 8 | 36 | 20 | 4 |
| 29 | 13 | 41 | 25 | 9 | 37 | 21 | 5 | 33 | 17 | 1 |

CAMINOS DETERMINADOS EN LA FILA 13. MATRIZ TRASFORMADA

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 34 | 22 | 10 | 42 | 30 | 18 | 6 | 38 | 26 | 14 | 2 |
| 35 | 23 | 11 | 43 | 31 | 19 | 7 | 39 | 27 | 15 | 3 |
| 36 | 24 | 12 | 44 | 32 | 20 | 8 | 40 | 28 | 16 | 4 |
| 33 | 21 | 9 | 41 | 29 | 17 | 5 | 37 | 25 | 13 | 1 |

Nota 4.4.1 De la primera expresión se puede obtener fácilmente, sin más que leer en zig-zag los correspondientes pares de filas, los ciclos de la fila 18 (lectura en zig-zag de la primera y cuarta filas para uno de ellos, y segunda y tercera para el otro), fila 19 (primera y tercera por un lado y segunda y cuarta por otro) y fila 20 (primera y segunda, tercera y cuarta). En la segunda expresión se puede leer de la misma forma los ciclos de las filas 14, 15 y 16.

Las siguientes tablas muestran cómo los caminos de las filas 18 en la original y 14 en la transformada por un lado, 19 en la original y 15 en la transformada, y 20 en la original y 16 en la transformada son los mismos en número, tamaño y carácter productivo o improductivo.

- CAMINOS DE LA FILA 18 EN LA MATRIZ ORIGINAL Y FILA 14 EN LA TRANSFORMADA.

| | Matriz original $\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\},$ $\{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$ | Matriz transformada $\{\{30, 42, 18\}, \{15, 7, 11, 3\},$ $\{8, 36, 28, 12\}, \{37, 29, 21, 5, \}\}$ |
|--------------|--|--|
| Cam. impares | (7), (8), (27), (28), (25, 20, 37, 22, 5), (41), (38), (33) | (7), (8), (11), (12), (9, 42, 29, 18, 5), (21), (30), (37) |
| Cam. prod. | (20, 3) | (28, 15) |
| Cam. improd. | (31, 16) | (3, 36) |

- CAMINOS DE LA FILA 19 EN LA MATRIZ ORIGINAL Y FILA 15 EN LA TRANSFORMADA.

| | Matriz original $\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\},$ $\{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$ | Matriz transformada $\{\{30, 42, 18\}, \{15, 7, 11, 3\},$ $\{8, 36, 28, 12\}, \{37, 29, 21, 5, \}\}$ |
|--------------|--|--|
| Cam. impares | (31), (25), (37), (5), (3), (16), (38), (20) | (3), (9), (29), (5), (15), (36), (30), (28) |
| Cam. prod. | (7, 33), (22, 20) | (7, 37), (18, 8) |
| Cam. improd. | (41, 27), (28, 10) | (21, 11), (12, 42) |

- CAMINOS DE LA FILA 20 EN LA MATRIZ ORIGINAL Y FILA 16 EN LA TRANSFORMADA.

| | Matriz original $\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\},$ $\{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$ | Matriz transformada $\{\{30, 42, 18\}, \{15, 7, 11, 3\},$ $\{8, 36, 28, 12\}, \{37, 29, 21, 5, \}\}$ |
|--------------|--|--|
| Cam. impares | $(31), (38), (3)$ $(16, 41, 28), (8, 33, 20), (25), (37), (5)$ | $(15), (30), (3)$ $(36, 21, 12), (8, 37, 28), (9), (29), (5)$ |
| Cam. prod. | $(27, 10)$ | $(11, 42)$ |
| Cam. improd. | $(22, 2)$ | $(18, 7)$ |

De forma similar, se puede comprobar que el resto de grupos de filas de la matriz obtenida verifican las condiciones de Hadamard.

La operación anterior se puede interpretar como la acción sobre las columnas de la matriz de una homotecia de centro la última columna de la derecha en el diagrama y razón 2. Si denotamos las columnas de la matriz como sigue:

$$\begin{pmatrix} 42 & 38 & 34 & 30 & 26 & 22 & 18 & 14 & 10 & 6 & 2 \\ 43 & 39 & 35 & 31 & 27 & 23 & 19 & 15 & 11 & 7 & 3 \\ 44 & 40 & 36 & 32 & 28 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 41 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 17 & 13 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$$

La imagen de la columna \mathcal{C}_i es precisamente la columna $\mathcal{C}_{2(i-1)+1 \bmod 11}$. Se tiene una homotecia cuyo centro es la columna \mathcal{C}_1 y su razón es 2.

En concreto, el coborde 3 de la primera columna queda invariante, los cobordes 7, 8, 5 de la segunda se transforman en 11, 12, 9, el coborde 10 de la tercera se transforma en el coborde 18...

Es fácil comprobar que la imagen de un coborde l que pertenezca a la clase residual $1 < i < 4$ es precisamente $2(l - i) + i \bmod 44$.

La elección de otra columna como centro, manteniendo la misma razón, da lugar a imágenes que difieren en una operación de traslación.

| | fila 5 | fila 9 | fila 13 | fila 17 | fila 21 |
|------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|
| configuración original | A | B | C | D | E |
| razón 2 | E | A | D | B | C |
| razón 3 | D | C | A | E | B |
| razón 4 | C | E | B | A | D |
| razón 5 | B | D | E | C | A |

Tabla 4.3: Configuraciones para $t = 11$.

Hemos presentado como ejemplo el caso de homotecia de razón 2, (el caso en el que las posiciones de las cruces de los diagramas se superponen sobre los ciclos de la fila 9).

Igualmente se podría haber construido homotecias de razón 3, 4 o 5, que se corresponden con superponer la configuración de cruces del diagrama sobre los ciclos de la filas 13, 17 o 21. Todas estas homotecias, al igual que la de razón 2, conservan la condición Hadamard.

La Tabla 4.3 expresa la relación que hay entre las configuraciones, salvo trasladados, de las filas congruentes con $1 \pmod{4}$ de la matriz original y las de las matrices obtenidas por las homotecias de razones desde 2 hasta 5.

La tabla 4.3 resulta de utilidad para describir el comportamiento de un conjunto de cobordes que determine un camino en una fila congruente con $1 \pmod{4}$ en el resto de ellas.

En concreto se puede resolver la siguiente pregunta:

Dado un camino de longitud 5 situado en una de las filas congruentes con $1 \pmod{4}$, ¿cuántos caminos determinan sus cobordes en el resto de filas congruentes con $1 \pmod{4}$?

Puesto que los ciclos son disjuntos, la tabla se puede restringir a la configuración determinada por un conjunto de cobordes en un único ciclo.

Supongamos ahora que se tiene un camino de longitud 5 en la fila 5. Los cobordes de este camino determinan 2 caminos en la fila 9, 3 en la 13, 4 en la 17 y, por último

| | fila 5 | fila 9 | fila 13 | fila 17 | fila 21 |
|------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|
| configuración original | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| razón 2 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| razón 3 | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| razón 4 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 |
| razón 5 | 2 | 4 | 5 | 3 | 1 |

Tabla 4.4: $t = 11$. Número de caminos en filas $s \equiv 1 \pmod{4}$ y homotecias.

5 en la 21.

La idea es reescribir la Tabla 4.3 con el número de caminos de cada configuración:

Esta tabla se puede comparar con la del grupo de unidades $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{11}^*$.

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 1 | 4 | 7 | 10 | 2 | 5 | 8 |
| 4 | 4 | 8 | 1 | 5 | 9 | 2 | 6 | 10 | 3 | 7 |
| 5 | 5 | 10 | 4 | 9 | 3 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 6 | 6 | 1 | 7 | 2 | 8 | 3 | 9 | 4 | 10 | 5 |
| 7 | 7 | 3 | 10 | 6 | 2 | 9 | 5 | 1 | 8 | 4 |
| 8 | 8 | 5 | 2 | 10 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 |
| 9 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Para ello, observamos dos cuestiones:

- Fijado un centro y suponiendo los diagramas simétricos, las homotecias de razones r y $|t - r|$ determinan la misma imagen.
- Esta relación entre r , con $2 \leq r \leq (t - 1)/2$ y su opuesto $t - r$ es, precisamente, la determinada por las filas de la matriz $4r + 1$ y $4(t - r) + 1$, filas correspondientes por inversos.

| | fila 5 | fila 9 | fila 13 | fila 17 | fila 21 | razón |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 1 | <u>1</u> | 2 | 3 | 4 | 5 | razón 1 |
| 2 | 2 | 4 | 5 | 3 | <u>1</u> | razón 5 |
| 3 | 3 | 5 | 2 | <u>1</u> | 4 | razón 4 |
| 4 | 4 | 3 | <u>1</u> | 5 | 2 | razón 3 |
| 5 | 5 | <u>1</u> | 4 | 2 | 3 | razón 2 |

Tabla 4.5: $t = 11$. Homotecias y números de caminos por fila.

En nuestro ejemplo, y siguiendo esta idea, podemos identificar los elementos 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7 y 5 y 6 para reescribir de nuevo la tabla del grupo multiplicativo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{11}^*$ como sigue:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | <u>1</u> | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | <u>1</u> |
| 2 | 2 | 4 | 5 | 3 | <u>1</u> | <u>1</u> | 3 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 5 | 2 | <u>1</u> | 4 | 4 | <u>1</u> | 2 | 5 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | <u>1</u> | 5 | 2 | 2 | 5 | <u>1</u> | 3 | 4 |
| 5 | 5 | <u>1</u> | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | <u>1</u> | 5 |
| 5 | 5 | <u>1</u> | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | <u>1</u> | 5 |
| 4 | 4 | 3 | <u>1</u> | 5 | 2 | 2 | 5 | <u>1</u> | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 5 | 2 | <u>1</u> | 4 | 4 | <u>1</u> | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 5 | 3 | <u>1</u> | <u>1</u> | 3 | 5 | 4 | 2 |
| 1 | <u>1</u> | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | <u>1</u> |

Nota 4.4.2 Como curiosidad, las identificaciones anteriores son precisamente las dadas por el subgrupo normal $H = \langle 1, 10 \rangle$ de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{11}^*$ en la construcción del correspondiente grupo cociente.

En cualquiera de los cuadrantes marcados se observan los patrones dados por la Tabla 4.4. Por ejemplo, en el primero de ellos podemos observar:

¿Cuál es el motivo de que la tabla anterior relacione una homotecia de razón 3, por ejemplo, con multiplicar por 4 en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{11}^*$ bajo la identificación descrita?

Tal como ha sido presentada, la homotecia de razón 3 “coloca” el número 1 (el camino) en la columna tercera de la Tabla 4.5. ¿Por qué elemento hay que multiplicar 3 para obtener 1? Por su inverso, 4.

Por lo tanto, para poder dar una descripción de cómo actúa una homotecia de razón r sobre una configuración, basta con multiplicar los números que etiquetan la fila de la configuración original por el inverso de r , sujeto a las identificaciones pertinentes.

Definición 4.4.3 *Fijado un t y dado un conjunto de cobordes que determina un diagrama (C_t, \dots, C_1) , la **operación vertical r -ésima**, denotada por V_r , $1 \leq r \leq (t-1)/2$ con $r \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_t^*$ es la homotecia de razón r y centro la columna $C_{\frac{t+1}{2}}$.*

Las siguientes consideraciones son válidas, más allá del ejemplo anterior, para todo valor de t :

- Si suponemos configuraciones simétricas (diagramas simétricos), para cualquier t impar, una homotecia de razón r y la homotecia de razón opuesta $|t-r|$, ambas con centro en la columna centro de simetría, actúan de forma idéntica sobre un conjunto de cobordes.
- Por otra parte, esta relación entre r , $2 \leq r \leq (t-1)/2$ y su opuesto $t-r$ es, precisamente, la determinada por las filas de la matriz $4r+1$ y $4(t-r)+1$, filas correspondientes por inversos.

Se consideran homotecias de razón $r \leq (t-1)/2$, ya que las de razón $r \geq (t+1)/2$ están asociadas a filas correspondientes por inversas a las primeras, que determinan los mismos caminos, salvo su lectura en orden inverso.

Nota 4.4.4 *La idea que subyace en las operaciones verticales es superponer las condiciones de adyacencia determinadas por un conjunto de cobordes en los ciclos de la fila 5, sobre los ciclos de otra fila congruente con $1 \pmod{4}$. Si la fila considerada es la $4r+1$ se tiene una homotecia de razón r .*

Sin embargo, en la definición de operaciones verticales, aún tomando $r \leq (t-1)/2$, no se han considerado como razón todos los elementos del anillo \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_t .

Se ha impuesto que las posibles razones sean unidades del anillo, es decir, los r tales que $\text{mcd}(r, t) = 1$.

Esto se debe a que si se toma un divisor de cero, al aplicar la operación, hay distintas columnas que tienen asignada la misma columna imagen, mientras que hay otras columnas que no son imagen de ninguna.

Para que la operación funcione se precisa que la razón sea una unidad, para tener una biyección entre las columnas del diagrama de partida y el diagrama imagen.

Se recuerda que las filas cuyos ciclos escinden son precisamente las de la forma $4i + 1$ donde $\text{mcd}(i, t) > 1$, es decir, los valores de i que son divisores de cero del anillo \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_t .

Como ejemplo de la observación anterior presentamos el caso de $t = 9$.

Supongamos que se tiene un diagrama escrito por columnas como:

$$(\mathcal{C}_9, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1).$$

Si se efectúa una homotecia de centro la columna \mathcal{C}_5 y razón 2 la imagen de la columna \mathcal{C}_i es $V_2(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_{2(i-5)+5 \bmod 9}$. Se obtendría como imagen el diagrama con las columnas de origen reordenadas como sigue:

$$(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_3).$$

Supongamos que se intenta hacer una homotecia con el mismo centro anterior y razón 3. La imagen de la columna \mathcal{C}_i debe ser ahora $V_3(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_{3(i-5)+5 \bmod 9}$. Se tiene que $V_3(\mathcal{C}_6) = V_3(\mathcal{C}_9) = V_3(\mathcal{C}_3)$, en la octava columna del diagrama imagen. Las columnas \mathcal{C}_5 , \mathcal{C}_8 y \mathcal{C}_2 debieran ocupar la quinta columna del diagrama imagen, mientras que \mathcal{C}_7 , \mathcal{C}_4 y \mathcal{C}_1 debieran situarse sobre la segunda columna en la imagen. Por otra parte, las posiciones primera, tercera, cuarta, sexta, séptima y novena en el diagrama imagen quedarían vacías.

Nota 4.4.5 Como en los casos anteriores, una operación vertical actuando sobre dos representantes distintos de la misma matriz de Hadamard da lugar a imágenes que determinan la misma matriz.

Proposición 4.4.6 *Las operaciones verticales conservan la condición de Hadamard.*

Demostración. Las operaciones verticales mantienen el número de caminos en las filas congruentes con 1 mod 4.

En cuanto a condiciones de simetría, el resultado es cierto si el centro de la homotecia coincide con el centro de simetría del diagrama a considerar. En caso de no coincidencia del centro de la homotecia y el centro de simetría se obtiene una imagen trasladada de la obtenida en caso de coincidencia, que también guarda simetría respecto de la columna que corresponda. ■

El tamaño de la órbita de una matriz por operaciones verticales es, como máximo la mitad del cardinal de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_t^*$, es decir, $\phi(t)/2$.

Dependiendo de la configuración particular que presente cada diagrama, puede suceder que una operación de intercambio de lugar a la misma imagen que una operación vertical. Un ejemplo sencillo se tiene en $t = 5$ para la expresión $\{\{10\}, \{11\}, \{16, 8\}, \{17, 1\}\}$, que determina una matriz Hadamard, donde la operación vertical V_2 coincide con la operación de intercambio que permuta las dos últimas filas del diagrama, como se puede observar en la tabla 4.6.

$$V_2 \begin{vmatrix} - & - & \times & - & - \\ - & - & \times & - & - \\ - & \times & - & \times & - \\ \times & - & - & - & \times \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & - & \times & - & - \\ - & - & \times & - & - \\ \times & - & - & - & \times \\ - & \times & - & \times & - \end{vmatrix} = s_{41} \begin{vmatrix} - & - & \times & - & - \\ - & - & \times & - & - \\ - & \times & - & \times & - \\ \times & - & - & - & \times \end{vmatrix}$$

Tabla 4.6: $t = 7$. Coincidencia de la operación vertical V_2 y el intercambio s_{41} .

Los dos resultados siguientes son sencillos a la vista de los diagramas.

Proposición 4.4.7 *Las operaciones verticales y complementarias conmutan.*

Proposición 4.4.8 *Las operaciones verticales y de intercambio conmutan.*

4.5 Las órbitas

Como hemos visto, existen dos repartos señalados, el dado por la expresión de una matriz de Hadamard respecto de los cobordes de la base y el reparto mínimo, que corresponde o bien a una matriz, o bien a su complementaria.

A nivel de cálculos efectivos resulta interesante considerar el reparto mínimo con el objeto de efectuar la búsqueda en un sólo reparto, en lugar de hacerlo en todos.

Las operaciones de traslación, intercambio y verticales mantienen siempre el número de cobordes del conjunto sobre el que actúan. Por otra parte, la imagen de una matriz es la misma, independientemente de su representación utilizada. Por lo tanto, para estas operaciones, dada una matriz (o su complementaria) se puede obtener todas las matrices de sus órbitas calculando las imágenes de la expresión que da el reparto mínimo.

Una vez hecho esto, se pueden calcular las complementarias de las matrices obtenidas, con lo se tienen todas las distintas órbitas.

Hasta ahora hemos hablado de las órbitas correspondientes a complementarios, traslaciones, intercambios u operaciones verticales.

Definición 4.5.1 *La órbita total de una matriz cocíclica Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ es el conjunto formado por la unión de las órbitas de la matriz por complementarios, traslaciones, intercambios y operaciones verticales.*

El tamaño de la órbita total no es siempre el producto de los tamaños de las distintas órbitas por complementarios, trasladados, operaciones de intercambio y verticales. Como vimos en la sección anterior, dependiendo de las configuraciones que aparezcan en los diagramas se puede obtener una misma matriz como imagen por intercambios y por operaciones verticales. El tamaño oscilará entre $2t|P|$ y $2t|P|\phi(t)/2$, en cualquier caso, y será siempre múltiplo de $2t|P|$, donde $|P|$ es el cardinal de permutaciones con repetición del representante correspondiente al reparto mínimo de la órbita.

Resulta interesante aclarar con ejemplos la relación entre distribuciones y órbitas totales.

Las distribuciones dictan el número de cobordes que han de tomarse en cada clase de congruencia mod 4, sin aportar condiciones para la elección en concreto de cobordes en cada clase. Se tiene una condición necesaria pero no suficiente.

En algunas ocasiones, una distribución determinada (o equivalentemente, su reparto mínimo) no da lugar a ninguna matriz de Hadamard, y, por lo tanto, a ninguna órbita. Por ejemplo, para $t = 19$ con el reparto $[7, 7, 7, 9]$ no se ha encontrado ninguna matriz Hadamard (asumiendo simetría).

También puede suceder que una misma distribución dé lugar a varias órbitas totales. Por ejemplo, la distribución $(10, 10, 9, 7)$ en $t = 9$, con reparto mínimo $[2, 3, 4, 4]$ proporciona dos órbitas totales distintas, representadas en los diagramas de la Tabla 4.7.

$$\left| \begin{array}{cccccccc} - & - & - & \times & - & \times & - & - & - \\ - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - \\ \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times \\ \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccccccc} - & - & - & \times & - & \times & - & - & - \\ \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times \\ - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - \\ \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times \end{array} \right|$$

Tabla 4.7: $t = 9$. Dos órbitas totales distintas para la distribución $(10, 10, 9, 7)$.

Definición 4.5.2 *Un representante de una órbita total es un diagrama simétrico respecto de la columna central, con el menor número de cobordes, con número creciente de cobordes en cada fila.*

Resulta ilustrativo ver cómo dada una matriz de Hadamard (o su complementaria), se pueden obtener **todas** las matrices de su órbita total calculando las imágenes de la expresión que proporciona el reparto mínimo.

En $t = 3$ se tienen 24 matrices de Hadamard. Hay una única distribución $(1, 1, 1, 0)$ con reparto mínimo asociado $[0, 1, 1, 1]$ que da lugar a una única órbita total. Supongamos que partimos de la matriz de Hadamard determinada por el conjunto de cobordes $\{\{\}, \{7\}, \{8\}, \{5\}\}$.

Sobre este conjunto se tienen cuatro imágenes distintas por intercambio. La siguiente tabla presenta la órbita por intercambios, complementarios y trasladados:

$t = 3$. ÓRBITA TOTAL DE $\{\{\}, \{7\}, \{8\}, \{5\}\}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c}
 & s_{21} & s_{24} & s_{23} \\
 \hline
 \begin{array}{c} - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \times & \times & \times \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & \times \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & \times \\ - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & \times \\ - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

1-TRASLADADOS

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c}
 & s_{21} & s_{24} & s_{23} \\
 \hline
 \begin{array}{c} - & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & - \\ \times & - & - \\ - & - & - \\ \times & - & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & - & - \\ - & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \times & \times & \times \\ \times & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & \times \\ \times & - & - \\ \times & - & - \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & \times \\ \times & - & - \\ - & - & - \\ \times & - & - \end{array} & \begin{array}{c} - & \times & \times \\ - & - & - \\ \times & - & - \\ \times & - & - \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

2-TRASLADADOS

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c}
 & s_{21} & s_{24} & s_{23} \\
 \hline
 \begin{array}{c} - & - & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \end{array} & \begin{array}{c} - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \\ - & - & \times \end{array} & \begin{array}{c} - & - & \times \\ - & - & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \times & \times & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \end{array} & \begin{array}{c} \times & \times & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \end{array} & \begin{array}{c} \times & \times & - \\ - & - & \times \\ - & - & - \\ - & - & \times \end{array} & \begin{array}{c} \times & \times & - \\ - & - & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Las imágenes anteriores expresadas respecto de la base de cobordes dan lugar a los diagramas siguientes, que son exactamente correspondientes a las expresiones de las 24 matrices de Hadamard respecto de la base:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} \right| \end{array}$$

$$\text{Compl.} \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & - & \times \\ - & \times & - \\ - & \times & - \\ - & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & - & \times \\ - & \times & - \\ - & - & - \\ - & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & - & \times \\ - & - & - \\ - & \times & - \\ - & \times & - \end{array} \right|$$

1-TRASLADADOS

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ \times & - & - \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} s_{21} \\ \left| \begin{array}{ccc} \times & - & - \\ - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ - & - & - \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} s_{24} \\ \left| \begin{array}{ccc} - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ - & - & - \\ \times & - & - \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} s_{23} \\ \left| \begin{array}{ccc} - & \times & \times \\ - & - & - \\ - & \times & \times \\ \times & - & - \end{array} \right| \end{array} \end{array}$$

$$\text{Compl.} \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ \times & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ - & \times & \times \\ - & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & - & - \\ - & \times & \times \\ - & - & - \\ \times & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & - & - \\ - & - & - \\ - & \times & \times \\ \times & - & - \end{array} \right|$$

2-TRASLADADOS

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ \times & \times & - \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} s_{21} \\ \left| \begin{array}{ccc} - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} s_{24} \\ \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & - \\ - & - & \times \\ - & - & - \\ \times & \times & - \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} s_{23} \\ \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & - \\ - & - & - \\ - & - & \times \\ \times & \times & - \end{array} \right| \end{array} \end{array}$$

$$\text{Compl.} \quad \left| \begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ \times & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \times & \times & - \\ - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & - & \times \\ - & - & \times \\ - & - & - \\ \times & \times & - \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} - & - & \times \\ - & - & - \\ - & - & \times \\ \times & \times & - \end{array} \right|$$

La siguiente tabla muestra el número de matrices de Hadamard para cada t .

La tercera columna indica, para cada reparto mínimo, el tamaño de las posibles órbitas por complementarios, intercambios y operaciones verticales, la cuarta, la suma de los parciales de la tercera. La quinta columna recoge el número total de matrices de Hadamard, incluidos trasladados, obtenidos para cada t .

Las reducciones en el tamaño de las órbitas con coincidencia en intercambios y operaciones verticales quedan expresadas en la reducción del tamaño en la órbita vertical.

| t | Reparto mínimo | Compl. Inter. Vert. # Órbitas | Subtotal | # Órbita total |
|-----|----------------|-------------------------------|----------|----------------|
| 3 | [0, 1, 1, 1] | $2 \times 4 \times 1 = 8$ | 8 | 24 |
| 5 | [1, 1, 2, 2] | $2 \times 12 \times 1 = 24$ | 24 | 120 |
| 7 | [2, 2, 2, 3] | $2 \times 12 \times 3 = 72$ | 120 | 840 |
| | [1, 3, 3, 3] | $2 \times 24 \times 1 = 48$ | | |
| 9 | [3, 3, 3, 3] | $2 \times 24 \times 1 = 48$ | 264 | 2376 |
| | [2, 3, 4, 4] | $2 \times 12 \times 3 = 72$ | | |
| | [2, 3, 4, 4] | $2 \times 24 \times 3 = 144$ | | |
| 11 | [3, 4, 4, 5] | $2 \times 24 \times 5 = 240$ | 240 | 2640 |
| 13 | [3, 6, 6, 6] | $2 \times 24 \times 6 = 288$ | 648 | 8424 |
| | [4, 4, 6, 6] | $2 \times 24 \times 3 = 144$ | | |
| | [4, 5, 5, 5] | $2 \times 24 \times 3 = 144$ | | |
| | [4, 5, 5, 5] | $2 \times 12 \times 3 = 72$ | | |
| 15 | [4, 6, 7, 7] | $2 \times 24 \times 4 = 192$ | 576 | 8640 |
| | [4, 6, 7, 7] | $2 \times 24 \times 4 = 192$ | | |
| | [4, 6, 7, 7] | $2 \times 24 \times 2 = 96$ | | |
| | [5, 5, 6, 7] | $2 \times 12 \times 4 = 96$ | | |

Se hace ver que los números de matrices indicados en la cuarta columna son precisamente los números de matrices de tipo Williamson como se puede ver en [6].

Definición 4.5.3 *Una matriz de Williamson es una matriz de Hadamard por bloques*

de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & -A & D & -C \\ C & -D & -A & B \\ D & C & -B & -A \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde cada uno de los bloques A, B, C, D es una matriz $t \times t$ simétrica circulante.

Nota 4.5.4 La definición usual de matriz de Williamson es equivalente Hadamard a la que nosotros hemos dado, puesto que difiere de la matriz (4.1) en la negación de las filas que van desde la $t+1$ hasta la $4t$, ambas inclusive. Para nuestros propósitos, la matriz (4.1) es más apropiada.

En el Lema 3.4 del artículo [6] se demuestra que las matrices de Williamson son Hadamard equivalente a matrices cocíclicas de Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$. Reproducimos dicho resultado a continuación.

Lema 4.5.5 [6] Una matriz de Williamson del tipo (4.1) es Hadamard equivalente a una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ que es $t \times t$ circulante hacia atrás por bloques 4×4 ,

$$\begin{pmatrix} W_1 & \dots & \dots & W_t \\ W_2 & \ddots & W_t & W_1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ W_t & W_1 & \dots & W_{t-1} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

en la que $W_{i+1} = W_{t-i+1}$ para $1 \leq i \leq t-1$, y cada W_i es de la forma

$$\begin{pmatrix} n_i & x_i & y_i & z_i \\ x_i & -n_i & z_i & -y_i \\ y_i & -z_i & -n_i & x_i \\ z_i & y_i & -x_i & -n_i \end{pmatrix}.$$

Si tenemos en cuenta la base de 2-cociclos sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ con la que venimos trabajando, es fácil reconocer que la matriz (4.2) corresponde, en verdad, al producto punto a punto de la matriz R por un cierto conjunto de matrices cobordes generalizadas $\{M_{\partial_{d_1}}, \dots, M_{\partial_{d_k}}\}$.

Este subconjunto de cobordes debe verificar una condición adicional, dada al final del Lema 4.5.5, de modo que $W_{i+1} = W_{t-i+1}$ para $1 \leq i \leq t-1$, quedando W_1 sin pareja. Esto se traduce en que la columna de simetría en el diagrama que representa la matriz (4.2) es precisamente la última a la derecha, asociada a los cobordes $\partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_1$. Este hecho lleva directamente a concluir el siguiente resultado.

Proposición 4.5.6 *Sea \mathcal{H} el conjunto de matrices cocíclicas de Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ con un diagrama simétrico, en el sentido de (3.2.3). Entonces, el conjunto de matrices de Williamson del tipo (4.1) es un subconjunto de \mathcal{H} de tamaño $\frac{|\mathcal{H}|}{t}$. Más aún, para cada matriz de Hadamard $H \in \mathcal{H}$, precisamente una y sólo una de las matrices trasladadas $T_i H$, $1 \leq i \leq t$, es una matriz de Williamson del tipo (4.1).*

Demostración. Tal como se ha explicado antes, una condición necesaria y suficiente para que una matriz cocíclica de Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ del tipo (4.2) sea una matriz de Williamson es que $W_{i+1} = W_{t-i+1}$ para $1 \leq i \leq t-1$. Es decir, que la columna que da la simetría en el diagrama que representa la matriz sea la última columna, asociada a los cobordes $\partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_1$. Esto es posible para uno y sólo uno de los trasladados de cualquier matriz $H \in \mathcal{H}$. ■

A nivel de cálculos efectivos, se han obtenido de forma exhaustiva todas las matrices hasta $t = 15$. En todos los casos de esta búsqueda se tiene el caso de simetría en diagramas. A partir de $t = 17$, la búsqueda ha seguido el criterio de simetría.

La suposición de la simetría ha proporcionado otra condición más de búsqueda, relativa a la paridad de las columnas de los diagramas. La expresión paridad de una columna en un diagrama se refiere a la del conjunto de cruces que aparecen sobre ella.

Proposición 4.5.7 *Dado un diagrama simétrico, la paridad de la columna eje de simetría es distinta de la del resto de las columnas.*

Demostración. Se debe tener en cuenta que el número de caminos en cada fila congruente con 1 módulo 4 y mayor o igual que 5 es exactamente t , número impar. Los caminos que se leen en el diagrama son precisamente los de la fila 5. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la columna eje de simetría coincide con la

columna central del diagrama. (En otro caso se llevaría a cabo la correspondiente traslación).

Clasificaremos estos caminos en tres tipos o conjuntos, los que están situados sobre la columna central-eje de simetría, los que están situados sobre la primera y t -ésima columna y los caminos que no tocan a ninguna de estas tres columnas. Por simetría, este último conjunto debe tener un cardinal par. Entonces, si hay un número impar de caminos sobre la columna central debe haber un número par de caminos sobre las columnas primera y t -ésima para que la suma total de caminos sea un número impar. De la misma forma, si la columna central contiene un número par de caminos, las columnas extremas lo tienen impar.

Colocando columnas, salvo la central, en los extremos del diagrama mediante una operación vertical, se tiene el resultado para las columnas para las que esta operación es válida. Las restantes conforman ciclos interiores por homotecias sobre los que se puede razonar de manera análoga.

■

A modo ilustrativo se presentan los siguientes diagramas correspondientes a $t = 13$:

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{reparto } [3, 6, 6, 6] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & - & - \\
 \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times \\
 - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - \\
 \times & \times & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{reparto } [4, 4, 6, 6] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & - \\
 - & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & - \\
 - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - \\
 \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

En el primero, la columna central, que es eje de simetría, tiene un número impar de cruces. El resto de las columnas lo tienen par. En el segundo diagrama la columna central es par, mientras que el resto de las columnas son impares.

Capítulo 5.

Trayectoria del trabajo. Cálculos efectivos

Capítulo 5.

Trayectoria del trabajo. Cálculos efectivos

El orden en el que se presentan los resultados de la memoria persigue facilitar la comprensión al lector. Sin embargo, no se corresponde completamente con la trayectoria seguida para el estudio del problema.

Este capítulo se añade a título de resumen de los avances que se han ido produciendo a lo largo del trabajo, y cómo estos avances han servido para ir encontrando matrices de Hadamard de tamaño cada vez mayor, hecho que ha retroalimentado el avance del mismo. También sirve para reinterpretar, desde el punto de vista de los resultados finales, los resultados intermedios, que se irán exhibiendo cronológicamente y en términos de los conceptos que han originado.

5.1 Los inicios

Al principio del trabajo los datos de partida consistían en la relación exhaustiva de las matrices cocíclicas de Hadamard sobre el grupo $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ de orden $4t$ para los valores más pequeños de t , es decir, $t = 3$ y $t = 5$, de los que eran conocidos su número (24 y 120 respectivamente) y su expresión respecto de los elementos de la base de cobordes.

Con las notaciones introducidas en el trabajo, todas las matrices para $t = 3$ quedarían representadas por:

$$\begin{array}{r}
 t = 3 \quad \text{rep. } [0, 1, 1, 1] \\
 \left| \begin{array}{ccc}
 - & - & - \\
 - & \times & - \\
 - & \times & - \\
 - & \times & -
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (1,1,1,0) \\
 2 \times 4 \times 1 \times 3 = 24
 \end{array}
 \end{array}$$

cuya órbita total se expresa como producto de las órbitas por complementarios, por intercambios, operaciones verticales y trasladados.

Las 120 matrices de $t = 5$ quedan descritas por el diagrama:

$$\begin{array}{r}
 t = 5 \quad \text{rep. } [1, 1, 2, 2] \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 - & - & \times & - & - \\
 - & - & \times & - & - \\
 - & \times & - & \times & - \\
 \times & - & - & - & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (3,3,2,2) \\
 2 \times 12 \times 1 \times 5 = 120
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabla 5.1: Diagrama representante para $t = 5$.

puesto que a partir de él se pueden generar todas las matrices de Hadamard por medio de complementarios, intercambios, traslaciones y operaciones verticales. Desde luego, en aquel momento, no se conocía nada de esto.

Nota 5.1.1 *En el caso $t = 5$ se tienen exactamente 2 operaciones verticales si se cuenta la identidad, ésta y la de razón 2. La Tabla 5.1 expresa sólo una para hacer el cómputo total de matrices. Esto se debe a que en este caso, como hemos visto, la operación vertical de razón 2 coincide con la operación de intercambio s_{41} . El número total se presentará de la misma manera siempre que se dé la misma circunstancia, por ejemplo en una de las distribuciones del caso $t = 7$, en una de las de $t = 9$, en alguna en $t = 13$...*

Estas matrices se habían obtenido por medio de una búsqueda exhaustiva entre los $4t - 3$ elementos de la base de cobordes, considerando todos los posibles subconjuntos de cobordes y comprobando si cada uno de estos subconjuntos definía o no una matriz de Hadamard. Una tal búsqueda no podía llegar muy lejos, puesto que el espacio para $t = 7$ se componía de 2^{25} posibles conjuntos de cobordes.

5.2 Los primeros pasos

En buena parte del trabajo, hasta que el estudio de la actuación de las operaciones y la representación en diagramas hizo evidente lo ventajoso de trabajar con todo el conjunto de cobordes en lugar de la base, sólo se utilizó ésta.

Un primer paso interesante se produjo cuando se consiguió acotar el número de cobordes necesarios para determinar una matriz de Hadamard, del que se encontraron una cota inferior y superior, a la postre bastante ajustadas.

Para $t = 7$ se calculó el número mínimo de cobordes necesarios, 9 (correspondientes al reparto $[2, 2, 2, 3]$), y se obtuvieron 76 matrices. Dado que se trabajaba sólo con los elementos de la base, después se vió que se trataba de matrices cuya expresión respecto de la base coincide con la expresión que da el reparto mínimo. Para este caso particular se comprobaron $\binom{25}{9}$ subconjuntos. Sin embargo, el coste operativo no hacía fácil el cálculo en el resto de números de cobordes 10, 11, ..., 19 hasta llegar a la cota superior.

Los razonamientos utilizados para calcular cotas mínimas y máximas constituyeron el germen de las ideas de distribuciones y repartos. Éstos permitieron parcelar la búsqueda considerando, no sólo el número de cobordes utilizados, sino también el **reparto** de cobordes entre las cuatro componentes que formaban los cobordes atendiendo a su congruencia módulo 4.

Aún no estaba desarrollada la idea de operaciones de intercambio. Además se seguía trabajando respecto de la base y era necesario distinguir entre cuatro paquetes de cobordes, el paquete que contenía a los t cobordes congruentes con $2 \pmod{4}$ y los otros tres paquetes para el resto de clases de congruencia, que contenían cada uno $t-1$ cobordes. Por lo tanto, para realizar una búsqueda exhaustiva se trabajó buscando en las posibles permutaciones de cada una de las 2^4 cuadruplas que proporcionaban los distintos repartos.

En $t = 7$ se calcularon para cada una de las dos distribuciones $(6, 6, 6, 3)$ y $(6, 5, 5, 5)$ las 64 posibles permutaciones de los 2^4 repartos, 4 por cada uno de ellos. Para cada una de estas permutaciones de cuadruplas $[k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}, k_{i_4}]$ el espacio

de búsqueda tenía tamaño

$$\binom{t}{k_{i_1}} \times \binom{t-1}{k_{i_2}} \times \binom{t-1}{k_{i_3}} \times \binom{t-1}{k_{i_4}}.$$

Tras un trabajo laborioso se obtuvieron 336 matrices para la distribución (6, 6, 6, 3) y 504 para la distribución (6, 5, 5, 5), todas ellas expresadas respecto de la base.

Con la herramienta de los diagramas, las 840 matrices Hadamard en $t = 7$ quedan representadas por:

$$\begin{array}{l} t = 7 \quad \text{rep. } [1, 3, 3, 3] \\ \left| \begin{array}{ccccccc} - & - & - & \times & - & - & - \\ - & - & \times & \times & \times & - & - \\ - & \times & - & \times & - & \times & - \\ \times & - & - & \times & - & - & \times \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{distr } (6, 6, 6, 3) \\ 2 \times 24 \times 7 \times 1 = 336 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t = 7 \quad \text{rep. } [2, 2, 2, 3] \\ \left| \begin{array}{ccccccc} - & - & \times & - & \times & - & - \\ - & - & \times & - & \times & - & - \\ \times & - & - & - & - & - & \times \\ \times & - & - & \times & - & - & \times \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{distr } (6, 5, 5, 5) \\ 2 \times 12 \times 7 \times 3 = 504 \end{array} \end{array}$$

También se calcularon así las matrices para $t = 5$ descritas respecto de la base y ordenadas ahora por repartos.

La observación de un número mayor de casos y su ordenación por repartos, permitió definir la operación *complementario* respecto de la componente congruente con 2 módulo 4, que preservaba el carácter Hadamard de la matriz. También se comenzaron a observar los primeros patrones que apuntaban a las operaciones de intercambio de componentes. En aquellos momentos se trabajaba únicamente con los elementos de la base de cobordes, lo que hacía que el complementario respecto de otra componente no tuviera sentido. Por otro lado, algunos intercambios no eran fácilmente identificables, puesto que involucraban cobordes no pertenecientes a la base.

Sin embargo, el programa construido para esta búsqueda no era de utilidad en $t = 9$. Se obtuvieron, de forma muy laboriosa y casi artesanal, las 196 matrices

con reparto $[3, 3, 3, 3]$ que están expresadas respecto de la base. Faltaba calcular las matrices respecto de la base en el resto de repartos. Se hizo necesario refinar el criterio de búsqueda y aparecieron los ingredientes y las recetas.

5.3 Ingredientes y recetas

Definición 5.3.1 *Dado t , un ingrediente es una $(t-1)/2$ -tupla $(c_1, \dots, c_{(t-1)/2})$ donde cada uno de los c_i es el número de caminos que determina un subconjunto de cobordes de una componente en la fila $4i+1$, $1 \leq i \leq (t-1)/2$.*

Una receta es una matriz de cuatro columnas y $(t-1)/2$ filas donde cada columna es un ingrediente y la suma de los elementos de cada fila es t .

Una receta establece precisamente la condición de que el número de caminos en cada fila debe ser exactamente t .

La idea de recetas e ingredientes ya ha aparecido en el capítulo dedicado a las distribuciones, con un ejemplo en la Tabla 3.1. En ella se indica en número de caminos determinados en cada componente de las filas 5, 9, 13, 17 y 21 por la matriz de Hadamard $\{\{38, 22, 10\}, \{31, 27, 7, 3\}, \{28, 20, 16, 8\}, \{41, 37, 33, 25, 5\}\}$. La receta en este caso es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota 5.3.2 *La descripción de las distintas operaciones actuando sobre los recetas es sencilla:*

- *La acción de la operación complementaria mantiene una receta invariante, puesto que el complementario de un conjunto de cobordes en una componente determina el mismo número de caminos en cada fila.*

- *Las operaciones de traslación también dejan las recetas invariantes.*
- *Las operaciones de intercambio permutan columnas de la matriz receta.*
- *Las operaciones verticales reordenan las filas de la matriz receta según el criterio dado por la homotecia.*

La idea de que, en algunas ocasiones, la acción sobre una matriz de una operación vertical y una operación de intercambio puedan coincidir, se intuyó, antes de los diagramas, a partir de las recetas. El ejemplo de la Tabla 4.6 en $t = 5$ del capítulo anterior proporciona las siguientes recetas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \{\{10\}, \{11\}, \{16, 8\}, \{17, 1\}\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} s_{41}(M)$$

$V_2(M)$

El hecho de que haya distribuciones que presentan más de una órbita total también puede reflejarse en las recetas.

Como vimos en el capítulo anterior, la distribución $(10, 10, 9, 7)$ en $t = 9$, con reparto mínimo $[2, 3, 4, 4]$, proporciona dos órbitas totales distintas, representadas en los diagramas de la figura 4.7. Estos diagramas proporcionan como recetas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

que no pueden corresponder a la misma órbita total ya que no se puede obtener uno a partir de otro mediante permutaciones de columnas o una reordenación de filas adecuada.

Sin embargo, este hecho fue localizado a la luz de los diagramas.

5.4 Primeras operaciones y distribuciones

El cálculo basado en repartos no terminaba de calcular las matrices de Hadamard para $t = 9$, hasta que se introdujeron las nociones de **ingredientes** y **recetas**, que permitieron clasificar los conjuntos de cobordes atendiendo al ingrediente que describía el número de caminos que determinaban en cada una las filas del intervalo $[5, 2t + 2]$ que eran congruentes con 1 módulo 4. Así, las recetas exitosas, aquellas cuya suma de 4 ingredientes valía t , tomando cada ingrediente de entre los asociados al número de cobordes prescrito en cada componente, permitían restringir la búsqueda a una cantidad mucho menor de configuraciones de cobordes. Con ello, se obtuvieron las matrices que representan a las 2376 matrices de Hadamard para $t = 9$, a saber:

$$\begin{array}{c}
 t = 9 \quad \text{rep. } [2, 3, 4, 4] \\
 \left| \begin{array}{cccccccc}
 - & - & - & \times & - & \times & - & - & - \\
 - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - \\
 \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times \\
 \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (10,10,9,7) \\
 2 \times 12 \times 9 \times 3 = 648
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 9 \quad \text{rep. } [2, 3, 4, 4] \\
 \left| \begin{array}{cccccccc}
 - & - & - & \times & - & \times & - & - & - \\
 \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times \\
 - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - \\
 \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (10,10,9,7) \\
 2 \times 24 \times 9 \times 3 = 1296
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 9 \quad \text{rep. } [3, 3, 3, 3] \\
 \left| \begin{array}{cccccccc}
 - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - \\
 - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - \\
 - & \times & - & - & \times & - & - & \times & - \\
 \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (9,9,9,9) \\
 2 \times 24 \times 9 \times 1 = 432
 \end{array}
 \end{array}$$

No sólo se podía parcelar el espacio de búsqueda, sino que el test de Hadamard era más rápido, puesto que del hecho de estar buscando sobre la base de una receta exitosa, se infería que las filas congruentes con 1 módulo 4 ya eran Hadamard, con lo que había que pasar el test únicamente para las filas del intervalo $[5, 2t + 2]$ que no eran congruentes con 1 módulo 4.

También se llevó a cabo la búsqueda para $t = 11$

$$\begin{array}{c}
 t = 11 \quad \text{rep. } [3, 4, 5, 5] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & - \\
 - & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & - \\
 \times & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times \\
 - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & \times & - & -
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (15,14,14,12) \\
 2 \times 24 \times 5 \times 11 = 2640
 \end{array}$$

Para $t = 13$

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{rep. } [3, 6, 6, 6] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & - \\
 \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & - \\
 - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times \\
 \times & \times & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (21,21,21,15) \\
 2 \times 24 \times 6 \times 13 = 3744
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{rep. } [4, 4, 6, 6] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - \\
 - & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times \\
 - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times \\
 \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (21,21,18,18) \\
 2 \times 24 \times 3 \times 13 = 1872
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{rep. } [4, 5, 5, 5] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & - \\
 - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - \\
 - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times \\
 - & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (20,20,20,18) \\
 2 \times 24 \times 3 \times 13 = 1872
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 13 \quad \text{rep. } [4, 5, 5, 5] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & - \\
 - & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - \\
 \times & - & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & - \\
 \times & - & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & -
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (20,20,20,18) \\
 2 \times 12 \times 3 \times 13 = 936
 \end{array}$$

Se tiene un total de 8424 matrices de Hadamard para $t = 13$.

Finalmente, también se llevó a cabo la búsqueda para $t = 15$:

$$\begin{array}{c}
 t = 15 \quad \text{rep. } [4, 6, 7, 7] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & - & - & - \\
 - & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & - \\
 - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - \\
 \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (28,28,27,22) \\
 2 \times 24 \times 4 \times 15 = 2880
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 15 \quad \text{rep. } [4, 6, 7, 7] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & - \\
 - & \times & - & \times & \times & - & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & - \\
 - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - \\
 \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (28,28,27,22) \\
 2 \times 24 \times 4 \times 15 = 2880
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 15 \quad \text{rep. } [4, 6, 7, 7] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & - \\
 - & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & - \\
 - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - \\
 \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (28,28,27,22) \\
 2 \times 24 \times 2 \times 15 = 1440
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 15 \quad \text{rep. } [5, 5, 6, 7] \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccc}
 - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - \\
 - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - \\
 - & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & - \\
 - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & -
 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l}
 \text{distr. } (28,27,25,25) \\
 2 \times 12 \times 4 \times 15 = 1440
 \end{array}
 \end{array}$$

Se tiene un total de 8640 matrices de Hadamard para $t = 15$.

De forma simultánea a la búsqueda mediante recetas e ingredientes se profundizó en las ideas de complementarios e intercambios. A la vista de la forma de la matriz R era natural pensar que trasladar caminos y condiciones de adyacencia horizontalmente debía conservar también el carácter Hadamard.

Se estudió la clasificación en órbitas por complementarios e intercambios en $t = 3$, dibujando cada una de éstas como un cubo donde los vértices representaban a matrices Hadamard. Se observó que el complementario de una órbita por intercambios era imagen especular de la órbita de partida. Las 24 matrices de Hadamard dieron lugar a tres cubos, que eran precisamente los tres trasladados posibles. La figura 5.1 muestra uno de ellos. Las aristas y las diagonales marcadas en un par de caras del cubo representan las operaciones complementaria y de intercambios según se indica.

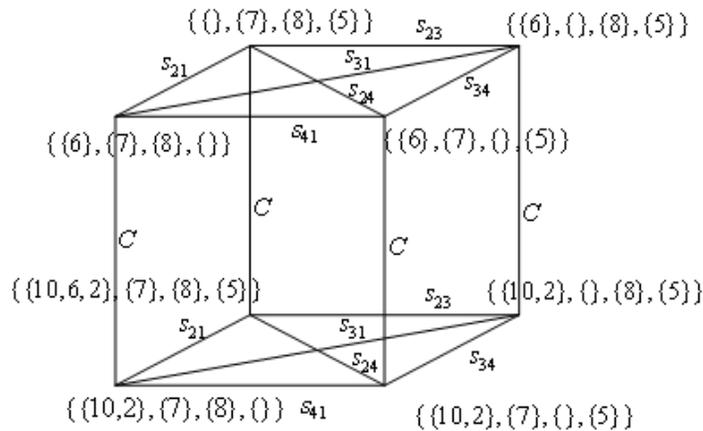


Figura 5.1: Órbita. $t = 3$.

Se estudió también con detalle el comportamiento de intercambios, complementarios y trasladados en $t = 5$, localizando órbitas de tamaño 12 para intercambios que se repetían de forma homogénea en complementarios y trasladados.

La necesidad de procesar esta enorme cantidad de nuevas observaciones dió lugar a la noción de **diagrama** para representar los conjuntos de cobordes elegidos, hecho que motivó la definición de una nueva operación, la traslación vertical, y el uso de la totalidad del conjunto de cobordes generadores, en lugar de los de la base. Esta representación en forma de diagrama arrojaba luz sobre todas las operaciones que se habían definido con anterioridad y que adquirirían una interpretación visual muy clara, aunque su definición inicial pudiera ser un poco enrevesada. La utilización de los cobordes que se despreciaban al quedarnos con la base aparecía, también, de forma natural.

El uso ahora de todo el conjunto de cobordes hizo revisar las posibles formas de expresar una matriz de Hadamard respecto de éste. Se estudió entonces la relación

entre las ocho expresiones de una matriz, las de la complementaria y los repartos, lo que condujo a la idea de utilizar la única expresión de una matriz (o su complementaria) que daba el reparto mínimo, en lugar de la expresión respecto de la base, para efectuar la búsqueda.

5.5 Diagramas

Otra ventaja que supuso la expresión de los cobordes en forma de diagrama fue el hecho de observar que la configuración simétrica de una elección cualquiera de cobordes definía el mismo ingrediente que ella, lo que, junto con el hecho de que los ingredientes “raros”, es decir, aquellos que tenían un menor número de configuraciones asociadas, eran los que producían matrices de Hadamard, llevó a fijar la atención en las configuraciones simétricas respecto de algún eje (gracias a la traslación horizontal, respecto de eje central del diagrama).

Estas configuraciones simétricas verifican una relación de paridad, en la que la paridad de la columna central del diagrama es distinta de la paridad de cada una de las otra columnas del mismo, lo que nos ha permitido adelantar la búsqueda, lamentablemente sin garantía de exhaustividad, hasta $t = 23$. Enumeramos a continuación los resultados obtenidos:

$$\begin{array}{c}
 t = 17 \quad \text{rep. } [5, 7, 7, 8] \\
 2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264 \quad \text{distr. } (36,35,35,30) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - & - \\
 \times & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & \times \\
 - & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - & - \\
 \times & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 17 \quad \text{rep. } [5, 7, 7, 8] \\
 2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264 \quad \text{distr. } (36,35,35,30) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - & - \\
 \times & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - & - & - & \times \\
 \times & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & \times \\
 - & - & - & \times & \times & \times & - & \times & - & \times & - & \times & \times & \times & - & - & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 17 \quad \text{rep. } [5, 7, 7, 8] \\
 2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264 \quad \text{distr. } (36, 35, 35, 30) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - & - \\
 - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - \\
 - & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & - \\
 - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 17 \quad \text{rep. } [6, 6, 7, 7] \\
 2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264 \quad \text{distr. } (35, 35, 33, 33) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & - \\
 \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & - & \times \\
 - & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & - \\
 - & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Se han obtenido un total de 13056 matrices Hadamard para $t = 17$.

$$\begin{array}{c}
 t = 19 \quad \text{rep. } [6, 7, 9, 9] \\
 2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208 \quad \text{distr. } (45, 45, 42, 39) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - & - \\
 - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & - \\
 - & \times & - & \times & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & \times & - & \times & - \\
 - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & - & \times & - & \times & \times & \times & - & - & - & \times & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 19 \quad \text{rep. } [6, 7, 9, 9] \\
 2 \times 12 \times 9 \times 19 = 4104 \quad \text{distr. } (45, 45, 42, 39) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
 - & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - \\
 - & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - \\
 \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times \\
 \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 19 \quad \text{rep. } [6, 7, 9, 9] \\
2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208 \quad \text{distr. } (45, 45, 42, 39) \\
\left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
- & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - \\
- & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & - \\
- & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - \\
- & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & -
\end{array} \right|
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 19 \quad \text{rep. } [6, 8, 8, 8] \\
2 \times 24 \times 3 \times 19 = 2736 \quad \text{distr. } (44, 44, 44, 39) \\
\left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
- & \times & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & \times & - \\
- & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - \\
- & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - \\
\times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times
\end{array} \right|
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 19 \quad \text{rep. } [6, 8, 8, 8] \\
2 \times 24 \times 3 \times 19 = 2736 \quad \text{distr. } (44, 44, 44, 39) \\
\left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
- & \times & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & \times & - \\
- & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - \\
- & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & - \\
\times & \times & \times & - & - & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times
\end{array} \right|
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 19 \quad \text{rep. } [6, 8, 8, 8] \\
2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208 \quad \text{distr. } (44, 44, 44, 39) \\
\left| \begin{array}{cccccccccccccccc}
- & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & - \\
- & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - \\
\times & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & - & \times \\
- & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & -
\end{array} \right|
\end{array}$$

Para el reparto $[7, 7, 7, 9]$, correspondiente a la distribución $(45, 42, 42, 42)$, no se ha encontrado ninguna matriz de Hadamard. Se han encontrado 34200 matrices Hadamard para $t = 19$.

$$\begin{array}{c}
 t = 21 \quad \text{rep. } [6, 10, 10, 10] \\
 2 \times 24 \times 2 \times 21 = 2016 \quad \text{distr. } (55, 55, 55, 45) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 - & - & - & - & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & - & - & - & - \\
 \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times \\
 - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - \\
 - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & \times & - & - & - & \times & \times & \times & \times & - & \times & - & - & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 21 \quad \text{rep. } [7, 8, 9, 10] \\
 2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048 \quad \text{distr. } (55, 54, 52, 49) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 - & - & \times & - & - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & - & \times & - & - \\
 \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times \\
 - & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - \\
 - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & \times & \times & -
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 21 \quad \text{rep. } [7, 8, 9, 10] \\
 2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048 \quad \text{distr. } (55, 54, 52, 49) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & - \\
 - & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & - \\
 \times & \times & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & \times & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 t = 21 \quad \text{rep. } [7, 8, 9, 10] \\
 2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048 \quad \text{distr. } (55, 54, 52, 49) \\
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & - & - \\
 - & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - \\
 - & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & - \\
 \times & \times & \times & - & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & - & \times & \times & \times
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 21 \quad \text{rep. } [8, 8, 8, 9] \\
2 \times 12 \times 6 \times 21 = 3024 \quad \text{distr. } (54, 52, 52, 52) \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
- & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - \\
- & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - \\
- & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - \\
- & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & -
\end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 21 \quad \text{rep. } [8, 8, 8, 9] \\
2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048 \quad \text{distr. } (54, 52, 52, 52) \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
- & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & - & - \\
\times & \times & - & - & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & - & - & \times & \times \\
- & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & - \\
\times & - & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & \times & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & - & \times
\end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
t = 21 \quad \text{rep. } [8, 8, 8, 9] \\
2 \times 24 \times 2 \times 21 = 2016 \quad \text{distr. } (54, 52, 52, 52) \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
- & - & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & - & - & - \\
- & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - \\
- & \times & - & \times & \times & \times & - & - & - & - & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & \times & - \\
- & - & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & - & -
\end{array} \right)
\end{array}$$

Se han encontrado un total de 31248 matrices Hadamard para $t = 21$.

$$\begin{array}{c}
t = 23 \quad \text{rep. } [8, 9, 10, 10] \\
2 \times 24 \times 11 \times 23 = 12144 \quad \text{distr. } (65, 65, 63, 60) \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
- & - & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & - & - \\
- & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & - \\
- & - & \times & - & \times & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & \times & - & - \\
- & - & \times & \times & - & - & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & \times & \times & - & - & \times & \times & - & -
\end{array} \right)
\end{array}$$

Para el otro posible reparto $[7, 10, 11, 11]$ correspondiente a la distribución $(66, 66, 65, 56)$ no se ha encontrado ninguna matriz de Hadamard. Para $t = 23$ se han encontrado 12144 matrices Hadamard.

Por último, presentamos los resultados obtenidos para $t = 25$. En este caso, debido al coste operativo, los resultados se limitan al reparto $[9, 10, 10, 12]$ con distribución $(78, 75, 75, 72)$ para el que se han obtenido un total de 6000 matrices Hadamard representadas por el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{c}
 t = 25 \quad \text{rep. } [9, 10, 10, 12] \\
 2 \times 24 \times 5 \times 25 = 6000 \quad \text{distr. } (78, 75, 75, 72)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
 - & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & \times & - & - & \times & - & - & \times & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & - \\
 - & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & - & \times & \times & - & \times & \times & - & \times & - & - & - & \times & \times & - & - & - \\
 \times & \times & - & - & - & \times & \times & - & - & \times & - & - & - & - & - & \times & - & - & \times & \times & - & - & - & \times & \times \\
 \times & \times & - & \times & - & \times & - & - & - & - & \times & \times & - & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & \times & - & \times & \times
 \end{array} \right|$$

No se ha conseguido datos para los casos con reparto $[8, 11, 11, 12]$ (distribución $(78, 77, 77, 68)$), reparto $[9, 9, 12, 12,]$ (distribución $(78, 78, 72, 72)$) y reparto $[10, 10, 10, 10]$ (distribución $(75, 75, 75, 75)$).

La Tabla 5.2 con los resultados obtenidos suponiendo simetría en los diagramas desde $t = 17$ hasta $t = 25$. Para $t = 25$ se indica únicamente el reparto para el que se tiene algún resultado, sin enumerar el resto de los repartos en los que no se podido efectuar la búsqueda.

En la actualidad se presentan varios problemas abiertos.

Se ha probado que una matriz cocíclica abeliana representada por diagramas simétricos que además verifica que el número de caminos en filas congruentes con $1 \pmod{4}$ y mayores o iguales a 5 es igual a t , es siempre Hadamard. Uno de los problemas abiertos es la prueba del recíproco de este resultado, más en concreto, que los diagramas para una matriz cocíclica sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$ y Hadamard son necesariamente simétricos.

Hemos supuesto condición de simetría en los diagramas para la búsqueda cuando, desafortunadamente, el coste computacional no la ha hecho posible de forma exhaustiva. Sin embargo, el hecho de que en los casos buscados exhaustivamente los diagramas sean siempre simétricos y lo conocido sobre condiciones de adyacencia, caminos e intersecciones, apuntan a que los diagramas deben verificar siempre simetría, resultado en estudio y aún no probado.

Los diagramas se crearon como herramienta para la interpretación de los resultados

| t | Reparto mínimo | Distribución | # Órbitas | # Total matrices |
|----|----------------|---------------|---|------------------|
| 17 | [5,7,7,8] | (36,35,35,30) | $2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264$ | 13056 |
| | [5,7,7,8] | (36,35,35,30) | $2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264$ | |
| | [5,7,7,8] | (36,35,35,30) | $2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264$ | |
| | [6,6,7,7] | (35,35,33,33) | $2 \times 24 \times 4 \times 17 = 3264$ | |
| 19 | [6,7,9,9] | (45,45,42,39) | $2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208$ | 34200 |
| | [6,7,9,9] | (45,45,42,39) | $2 \times 12 \times 9 \times 19 = 4104$ | |
| | [6,7,9,9] | (45,45,42,39) | $2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208$ | |
| | [6,8,8,8] | (44,44,44,39) | $2 \times 24 \times 3 \times 19 = 2736$ | |
| | [6,8,8,8] | (44,44,44,39) | $2 \times 24 \times 3 \times 19 = 2736$ | |
| | [6,8,8,8] | (44,44,44,39) | $2 \times 24 \times 9 \times 19 = 8208$ | |
| | [7,7,7,9] | (45,42,42,42) | no hay | |
| 21 | [6,10,10,10] | (55,55,55,45) | $2 \times 24 \times 2 \times 21 = 2016$ | 31248 |
| | [7,8,9,10] | (55,54,52,49) | $2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048$ | |
| | [7,8,9,10] | (55,54,52,49) | $2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048$ | |
| | [7,8,9,10] | (55,54,52,49) | $2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048$ | |
| | [8,8,8,9] | (54,52,52,52) | $2 \times 12 \times 6 \times 21 = 3024$ | |
| | [8,8,8,9] | (54,52,52,52) | $2 \times 24 \times 6 \times 21 = 6048$ | |
| | [8,8,8,9] | (54,52,52,52) | $2 \times 24 \times 2 \times 21 = 2016$ | |
| 23 | [8,9,10,10] | (65,65,63,60) | $2 \times 24 \times 11 \times 23 = 12144$ | 12144 |
| | [7,10,11,11] | (66,66,65,56) | no hay | |
| 25 | [9,10,10,12] | (78,75,75,72) | $2 \times 24 \times 5 \times 25 = 6000$ | |

Tabla 5.2: Tamaño de las órbitas. Caso simétrico.

obtenidos. Siguiendo la línea de trabajo en la que los cálculos ilustran nuevas ideas y a la luz de las condiciones de paridad en las columnas de los diagramas, se esperan obtener más resultados sobre la construcción de diagramas simétricos que den lugar a matrices cocíclicas Hadamard sobre $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$.

Por otra parte también está pendiente un diseño de búsqueda heurística.

Referencias

- [1] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *A genetic algorithm for cocyclic Hadamard matrices*, AAECC-16 Proceedings, LNCS 3857, M.Fossorier, H. Imai and A. Poli (Editors), Springer Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 144–153 (2006).
- [2] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *A system of equations for describing cocyclic Hadamard matrices*. Journal of Comb. Des., **16** (4), 276–290, (2008).
- [3] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *The homological reduction method for computing cocyclic Hadamard matrices*, J. Symb. Comput, **44**, 558–570, (2009).
- [4] Álvarez V., Armario J.A., Frau M.D. y Real P.: *The cohomological reduction method for computing n -dimensional cocyclic matrices*. Enviado a J. Symb. Comput. (2009).
- [5] Baliga A. y Chua J.: *Self-dual codes using image restoration techniques*, Proceedings AAECC'14, LNCS **2227**, S. Boztas and I.E. Shparlinski (Editors), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 46–56 (2001).
- [6] A. Baliga and K.J. Horadam, *Cocyclic Hadamard matrices over $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_2^2$* , Australas. J. Combin., vol. 11, pp. 123–134, 1995.
- [7] Cooper J. y Wallis J.: *A construction for Hadamard arrays*, Bull. Austral. Math. Soc., **7**, pp. 269–277 (1972).
- [8] Craigen R.: *Signed groups, sequences, and the asymptotic existence of Hadamard matrices*, J. Combin. Theory A 71 (1995) pp. 241-254.
- [9] de Launey W.: *On the asymptotic existence of Hadamard matrices*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 116, 1002–1008, (2009).

- [10] de Launey W. y Kharaghani H.: *On the asymptotic existence of cocyclic Hadamard matrices*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 116, 1140–1153, (2009).
- [11] Flannery D.L.: *Calculation of cocyclic matrices*, J. Pure Appl. Algebra 112 (2), pp. 181–190 (1996).
- [12] Flannery D.L.: *Cocyclic Hadamard matrices and Hadamard groups are equivalent*, J. Algebra **192**, pp. 749–779 (1997).
- [13] Hadamard J.: *Résolution d’une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math. **17** (parte 1), pp. 240–246 (1893).
- [14] Horadam K.J.: *Progress in cocyclic matrices*, Congressus Numerantium **118**, pp 161-171 (1996).
- [15] Horadam K.J.: *Hadamard matrices and their applications*, Princenton University Press (2007).
- [16] Horadam K.J. y de Launey W. : *Cocyclic development of designs*, J. Algebraic Combin., **2** (3), pp. 267–290 (1993). *Erratum*: J. Algebraic Combin., (1), pp. 129 (1994).
- [17] Horadam K.J. y de Launey W. : *Generation of cocyclic Hadamard matrices*, chap. 20 in Computational Algebra and Number Theory, eds. W. Bosma and van der Poorten, Mathematics and its Applications 325, Kluwer Academic, pp. 279–290 (1995).
- [18] Ito N.: *On Hadamard groups IV*, J. Algebra, 234 (2000), pp 651-663.
- [19] Paley R.E.A.C.: *On orthogonal matrices*, J. Math. and Physics, **12**, pp. 311–320 (1933).
- [20] Scarpis U.: *Sui determinants di valore massime*, Rend. R. Inst. Lombardo Sci. e Lett (2), **31**, pp. 1441–1446 (1898).
- [21] Sylvester J.J.: *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colors, with applications to Newton’s rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers*, Phil. Mag. (4), **34**, pp. 461–475 (1867).

- [22] Turyn R.J.: *An infinite class of Williamson matrices*, J. Combin. Theory Ser. A **12**, pp. 319–321 (1972).
- [23] Wallis J.S.: *On the existence of Hadamard matrices* J. Combinatorial Theory A 21 (1976), pp. 188–195.
- [24] Williamson J.: *Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares*, Duke Math. J., **11**, pp. 65–81 (1944).