



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES**

TESIS DOCTORAL

**SEPARACIÓN CIEGA DE FUENTES Y SU APLICACIÓN A
RECEPTORES DE COMUNICACIONES DIGITALES:
CDMA, OFDM Y MC-CDMA**

**Autor: Rafael Boloix Tortosa
Director: Dr. Juan José Murillo Fuentes**

Sevilla, 2005



TESIS DOCTORAL

**SEPARACIÓN CIEGA DE FUENTES Y SU APLICACIÓN A
RECEPTORES DE COMUNICACIONES DIGITALES:
CDMA, OFDM Y MC-CDMA**

Autor:

Rafael Boloix Tortosa

Ingeniero de Telecomunicación

Director:

Dr. Juan José Murillo Fuentes

Profesor Contratado Doctor del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Sevilla

DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Sevilla, 2005

TESIS DOCTORAL: SEPARACIÓN CIEGA DE FUENTES Y SU APLICACIÓN A RECEPTORES DE COMUNICACIONES DIGITALES: CDMA, OFDM Y MC-CDMA

AUTOR: Rafael Boloix Tortosa
DIRECTOR: Dr. Juan José Murillo Fuentes

El tribunal nombrado para juzgar la tesis doctoral arriba indicada, compuesto por los doctores:

PRESIDENTE:

VOCALES:

SECRETARIO:

acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2005

El Secretario del Tribunal

A Marta

Agradecimientos

Quiero agradecer al director de esta tesis, Juan José Murillo Fuentes, el apoyo y dedicación que me ha proporcionado durante todo este tiempo. Sin su ayuda, tiempo, enseñanzas y amistad no hubiese sido posible.

Quisiera dar las gracias a todos mis compañeros del Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la Universidad de Sevilla, y en particular, a Carmen y Begoña por su sincera amistad.

Es obligado agradecer a mi familia y amigos el haberme soportado en los momentos de mayor presión, y muy particularmente a Marta. Sin ella, seguro que no lo habría conseguido.

Resumen

La tesis está dividida en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio de las técnicas de separación ciega de fuentes (BSS), mientras que en la segunda se estudia la aplicación de tales técnicas a los sistemas de comunicaciones digitales, en concreto a CDMA, OFDM y MC-CDMA.

En la parte que trata sobre separación ciega de fuentes, se plantea el modelo para el problema de mezclas lineales de las fuentes y se indican las condiciones necesarias para su solución. Se describen varios estimadores que proporcionan una solución en forma cerrada del problema para el caso particular de dos fuentes. Se presenta una visión unificada de varios de esos estimadores con un estimador general, y se extiende su aplicación al caso de tener mezclas de más de dos fuentes. Finalmente se describen las técnicas de separación ciega basadas en el descenso del gradiente natural.

La parte dedicada a la aplicación de la separación ciega de fuentes a los sistemas de comunicaciones digitales, comienza con una descripción de los sistemas CDMA, tanto síncrono como asíncrono. En el caso síncrono se presenta un algoritmo basado en BSS que se ajusta adecuadamente al modelo del sistema y permite la detección ciega de los símbolos transmitidos. En ese algoritmo, se emplea un banco de filtros adaptados a las secuencias de código de los usuarios antes de aplicar la técnica de separación ciega. Se comprueba el efecto beneficioso de este método, especialmente para combatir el efecto del ruido.

A continuación se realiza una descripción detallada de los sistemas OFDM, incluyendo los modelos de los dos sistemas más populares, el CP-OFDM y el ZP-OFDM. Se presenta un resultado que permite considerar un sistema ZP-OFDM como un sistema CP-OFDM con precodificación. Este resultado será la clave para, posteriormente, desarrollar nuevos algoritmos eficientes basados en técnicas de separación ciega de fuentes para el sistema ZP-OFDM. Se obtienen nuevas leyes de aprendizaje eficientes y de baja carga computacional, que se basan en el aprendizaje adaptativo mediante un método de gradiente de una matriz diagonal. Se presentan tanto algoritmos ciegos, como algoritmos semi-ciegos que parten de una solución aproximada encontrada de forma rápida con alguna información sobre los símbolos transmitidos que esté disponible en el receptor. Se comprueba mediante diferentes experimentos los buenos resultados proporcionados por los algoritmos propuestos.

Para finalizar, se adaptan los algoritmos propuestos para CDMA y OFDM a la combinación de ambos métodos, el sistema MC-CDMA. Se propone un algoritmo que permite la detección

centralizada de forma ciega en el caso del enlace descendente de un sistema MC-CDMA. Los resultados de los experimentos muestran que el detector propuesto proporciona mejores resultados que el detector MMSE.

Se incluyen también las conclusiones más importantes y se proponen líneas futuras de investigación.

Índice General

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | Motivación y objetivos | 1 |
| 1.2 | Estructura de la memoria | 2 |
| 2 | ICA como solución del problema de separación ciega de fuentes | 5 |
| 2.1 | Introducción al análisis de componentes independientes: separación ciega de fuentes | 5 |
| 2.2 | Modelo BSS | 6 |
| 2.2.1 | Condiciones para conseguir una solución | 7 |
| 2.2.2 | Solución en dos pasos: Blanqueado y rotación | 8 |
| 2.2.3 | Modelo BSS en ambientes ruidosos | 10 |
| 2.3 | Soluciones al problema BSS: funciones contraste | 11 |
| 2.3.1 | Independencia estadística: definición y medida | 11 |
| 2.3.2 | Funciones Contraste. | 12 |
| 2.3.3 | Aproximaciones basadas en estadísticos de orden superior | 15 |
| 2.3.4 | Medida de la separación calculada. | 18 |
| 2.4 | El estimador ponderado generalizado de cuarto orden: caso bidimensional | 19 |
| 2.4.1 | Efectividad del GWFOE | 21 |
| 2.5 | Extensión al caso n -dimensional | 22 |
| 2.5.1 | Optimización de Jacobi | 22 |
| 2.5.2 | Optimización de Jacobi inicializada | 23 |
| 2.5.3 | Complejidad computacional: optimización de Jacobi óptima | 25 |
| 2.5.4 | Optimización de Jacobi adaptativa | 26 |
| 2.5.5 | Optimización de Jacobi inicializada adaptativa | 27 |
| 2.5.6 | Complejidad computacional de los algoritmos basados en la optimización de Jacobi adaptativa | 29 |
| 2.5.7 | Efectividad de los algoritmos OJO-GWFOE y AIJO-GWFOE | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.6 | Algoritmos adaptativos basados en descenso de máxima pendiente | 33 |
| 2.6.1 | Gradiente estocástico. | 33 |
| 2.6.2 | Gradiente relativo y gradiente natural. | 34 |
| 2.6.3 | Ley de aprendizaje de gradiente natural estocástico para ML | 34 |
| 3 | Detección Multiusuario | 37 |
| 3.1 | Introducción a la Detección Multiusuario | 37 |
| 3.2 | Modelos CDMA síncrono y asíncrono | 38 |
| 3.2.1 | Espectro ensanchado de secuencia directa | 39 |
| 3.2.2 | Modelo síncrono discreto en el tiempo | 40 |
| 3.3 | Detectores multiusuario lineales | 41 |
| 3.3.1 | El filtro adaptado | 41 |
| 3.3.2 | El detector decorrelador | 44 |
| 3.3.3 | El detector MMSE | 45 |
| 3.4 | Aplicación de BSS a la detección multiusuario | 47 |
| 4 | Sistemas OFDM | 53 |
| 4.1 | Introducción | 53 |
| 4.2 | Modelo en tiempo discreto de un sistema multiportadora | 55 |
| 4.3 | Modelo en tiempo discreto para OFDM | 57 |
| 4.4 | Sistema OFDM con prefijo cíclico | 60 |
| 4.4.1 | Convolución circular | 61 |
| 4.4.2 | La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento | 62 |
| 4.4.3 | El prefijo cíclico | 63 |
| 4.4.4 | El prefijo cíclico y la DFT aplicados a OFDM | 64 |
| 4.4.5 | Representación matricial | 66 |
| 4.4.6 | Otras consideraciones sobre CP-OFDM | 68 |
| 4.5 | Sistema OFDM con relleno de ceros | 72 |
| 4.5.1 | Representación matricial | 72 |
| 4.5.2 | La convolución circular en el sistema ZP-OFDM | 74 |
| 4.5.3 | El sistema ZP-OFDM como un sistema CP-OFDM con codificación | 75 |
| 4.5.4 | El sistema ZP-OFDM frente al sistema CP-OFDM | 77 |
| 5 | Aplicación de separación ciega de fuentes a sistemas ZP-OFDM | 79 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.1 | Introducción | 79 |
| 5.2 | Estado del arte | 80 |
| 5.3 | El sistema ZP-OFDM visto como un problema BSS | 80 |
| 5.4 | Aplicación de BSS a ZP-OFDM: receptor completamente ciego | 81 |
| 5.4.1 | Adaptación del detector tipo HyHOS a OFDM | 82 |
| 5.4.2 | Nuevo receptor ciego para ZP-OFDM basado en la ley de aprendizaje de una matriz diagonal | 89 |
| 5.5 | Aplicación de BSS a ZP-OFDM: receptor semi-ciego | 96 |
| 5.5.1 | Estimación del canal en un sistema OFDM | 97 |
| 5.5.2 | Estimación rápida del canal basada en pilotos para un sistema ZP-OFDM | 98 |
| 6 | Aplicación de separación ciega de fuentes a MC-CDMA | 105 |
| 6.1 | El sistema CDMA multiportadora | 105 |
| 6.2 | Modelo MC-CDMA síncrono | 106 |
| 6.2.1 | Modelo para un usuario | 106 |
| 6.2.2 | Modelo para K usuarios | 106 |
| 6.3 | El sistema MC-CDMA síncrono visto como un problema BSS | 107 |
| 6.3.1 | Aplicación de BSS al sistema MC-CDMA síncrono | 107 |
| 6.3.2 | Pruebas del Algoritmo 6.1 | 109 |
| 7 | Conclusiones y líneas futuras | 113 |
| 7.1 | Conclusiones. | 113 |
| 7.2 | Líneas futuras. | 114 |

Índice de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Modelo BSS/ICA. | 7 |
| 2.2 | Modelo completo del problema BSS: blanqueado y rotación. | 9 |
| 2.3 | Ejemplo del proceso de separacion: vista en a) de la función de densidad de probabilidad conjunta de dos fuentes con distribución de tipo uniforme, en b) de las mezclas, en c) de las mezclas blanqueadas y en d) de la rotación de éstas. | 9 |
| 2.4 | ISR obtenida con el GWFOE en función del número de muestras para diferentes valores del peso ω . Las líneas discontinuas muestran el error cuadrático medio asintótico según (2.52). | 22 |
| 2.5 | Representación de $\Gamma(n, T) = 1$. Las líneas verticales representan el rango de (n, T) con valores de Γ entre 0,9 y 1,1. | 26 |
| 2.6 | Carga computacional en función del número de fuentes. | 30 |
| 2.7 | Caso $n = 6$: a) ISR promedio, b) número de flops y c) tiempo de CPU. | 31 |
| 2.8 | ISR para el caso $n = 3$ | 32 |
| 2.9 | ISR para el caso $n = 8$ (véase la leyenda de la Figura 2.8). | 32 |
| 3.1 | Retrasos para modelar el asincronismo. | 39 |
| 3.2 | Regiones de decisión en el espacio bidimensional de las salidas de los filtros adaptados: a) espacio de señal, b) espacio ortogonal ($A_1 = A_2$) y c) espacio ortogonal ($A_1 \ll A_2$). | 44 |
| 3.3 | Regiones de decisión del detector decorrelador para el caso de dos usuarios $A_1 = A_2$ | 45 |
| 3.4 | SINR para los detectores MMSE y HyHOS-I. | 50 |
| 3.5 | BER para los detectores MMSE, HyHOS-I y HyHOS-II. | 50 |
| 3.6 | BER para los detectores MMSE, HyHOS-I y HyHOS-II en un entorno muy ruidoso. | 51 |
| 4.1 | Ejemplo de portadoras ortogonales en a) el dominio del tiempo y b) el dominio de la frecuencia. | 54 |
| 4.2 | Transmisión monoportadora (modelo discreto en el tiempo). | 55 |
| 4.3 | Codificación vectorial. | 57 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.4 | Modelo en tiempo discreto de un sistema OFDM. | 58 |
| 4.5 | Modelo completo en tiempo discreto de un sistema OFDM. | 59 |
| 4.6 | Ejemplo de convolución circular de dos secuencias: a) secuencias originales, b) extensiones periódicas c) convolución periódica y convolución circular (recuadro). | 61 |
| 4.7 | Ejemplo de convolución circular obtenida de la convolución lineal con solapamiento: a) convolución lineal desplazada y b) resultado del solapamiento en el intervalo $[0, N = 8]$ | 62 |
| 4.8 | Ejemplo de convolución circular obtenida de la convolución lineal utilizando prefijo cíclico: a) secuencias $a_1(n)$ con prefijo cíclico y secuencia $a_2(n)$, b) convolución lineal y convolución circular (recuadro). | 63 |
| 4.9 | La inserción del prefijo cíclico en transmisión (a) y su eliminación en el receptor (b) permite evitar la IBI. | 65 |
| 4.10 | Ejemplo de utilización de un pulso no rectangular para reducir la interferencia en las bandas adyacentes: a) pulso con forma de raíz cuadrada de coseno alzado, b) espectro de las portadoras empleando un pulso rectangular, y c) espectro cuando se utiliza el pulso en a). | 69 |
| 4.11 | Modelo simplificado de un amplificador de potencia. La respuesta es lineal hasta un cierto nivel de entrada en el que se produce la saturación. | 70 |
| 4.12 | Efecto del error de sincronización: se comprueba la reducción de la amplitud de la señal muestreada y la aparición de ICI. | 71 |
| 4.13 | Modelo equivalente en tiempo discreto para ZP-OFDM. | 72 |
| 4.14 | El relleno con ceros permite evitar la IBI: a) bloques de datos precodificados con ZP, b) bloques recibidos sin solapamiento. | 73 |
| 5.1 | Magnitud de la respuesta en frecuencia del canal en los $N = 32$ subcanales del sistema. | 84 |
| 5.2 | Índice de separación en función del número de muestras. | 84 |
| 5.3 | BER frente a relación señal a ruido para: a) 400 muestras de entrenamiento y b) 2000 muestras de entrenamiento. | 85 |
| 5.4 | Símbolos recibidos por el subcanal 2 para una $SNR = 28$ dB: (a) antes de aplicar el Algoritmo 5.1, (b) empleando el Algoritmo 5.1 con EASI y (c) con M-EASI. | 86 |
| 5.5 | Índice de separación en función del número de muestras. | 87 |
| 5.6 | BER en función del número de muestras. | 87 |
| 5.7 | Índice de separación en función del número de muestras. | 88 |
| 5.8 | Índice de separación en función del número de muestras, para un caso sin ruido y promediando 500 canales generados de forma aleatoria. | 94 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.9 | BER en función del número de muestras empleadas en el entrenamiento, para un caso sin ruido y promediando 500 canales generados de forma aleatoria. | 95 |
| 5.10 | BER frente a relación señal a ruido empleando 400 muestras de entrenamiento y el canal del Experimento 5.2. | 96 |
| 5.11 | Probabilidad de error de bit. | 101 |
| 5.12 | Respuesta en frecuencia del canal original y canal modificado utilizado en el experimento de la Figura 5.13. | 102 |
| 5.13 | Probabilidad de error de bit. | 103 |
| 6.1 | BER para: a) $K = 8$ usuarios con $Q = 1$ y b) $K = 16$ usuarios con $Q = 1$ | 109 |
| 6.2 | BER para $K = 8$ usuarios con $Q = 8$ | 110 |

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación y objetivos

En los últimos años, se ha producido un enorme avance de lo que se tiende a denominar la Sociedad de la Información y el Conocimiento. De forma simplificada, esto equivale a decir lo siguiente: cada día, una mayor parte de la sociedad demanda sistemas de comunicaciones que de forma rápida, segura, eficiente y libre, permitan el acceso a todo un conjunto de variados servicios, desde los puramente profesionales a los completamente orientados al ocio. Por este motivo, el sector de las telecomunicaciones en general busca impulsar, diseñar e implantar sistemas de comunicaciones que cumplan con esos requisitos, y que puedan dar servicio a un número creciente de usuarios.

Hay varios ejemplos que muestran esta tendencia. El primero podría ser, por su popularidad, el desarrollo de los sistemas de telefonía móvil. Su mayor atractivo comenzó siendo la movilidad que proporcionaban al usuario, pero cada día ofrecen un mayor número de servicios a la par que una mayor velocidad, especialmente ahora que la implantación de la denominada tercera generación va siendo una realidad. Un segundo ejemplo se puede encontrar en el auge de los sistemas popularmente conocidos con el término “banda ancha”, por cable, como el ADSL, o inalámbricos, como el Wi-Fi (IEEE 802.11). Como último ejemplo, cabe destacar la implantación de la televisión digital terrestre (TDT), que sustituirá en los próximos años a la analógica, y que supondrá un nuevo medio por el que los usuarios podrán acceder a todo un conjunto de servicios.

Es interesante señalar que muchos de esos sistemas de comunicaciones de última generación, que están impulsando el desarrollo de la Sociedad de la Información, utilizan técnicas de transmisión multiportadora o técnicas de acceso múltiple, como CDMA. En los últimos años, los sistemas multiportadora se imponen como una de las mejores opciones cuando se quieren transmitir datos a gran velocidad. Entre estos sistemas destaca especialmente OFDM que, de forma simple y eficaz, permite el envío de altas tasas de datos. Por otro lado, el sistema de acceso CDMA se va imponiendo como método para permitir que varios usuarios accedan a un mismo medio de transmisión compartido.

Son muchos los estudios realizados en los últimos años sobre ambos, OFDM y CDMA. Muchos de esos estudios se centran en la utilización de técnicas “ciegas” que permitan reducir al máximo el envío de datos que no contienen información del usuario, facilitando las tareas de sincronización y detección. El término “ciega” se refiere precisamente a trabajar sin conocimiento de los datos enviados y/o de las condiciones del medio de transmisión. El objetivo es claro, consumir el menor ancho de banda posible en información no útil para el usuario y adaptarse rápidamente a los cambios del medio.

En esta línea, cuando se habla de técnicas ciegas hay que considerar las técnicas de separación ciega de fuentes (*blind source separation*), que han sido motivo de un profundo estudio en los últimos años. De forma genérica, las técnicas de separación ciega de fuentes permiten recuperar un conjunto de señales a partir de un conjunto de mezclas de las mismas. En el caso de mezclas lineales y asumiendo la independencia estadística de las señales es posible recuperar éstas sin requerir mas información que las mezclas.

Se puede exponer entonces el objetivo de esta tesis: el estudio de las técnicas de separación ciega de fuentes y su aplicación a las comunicaciones digitales, en concreto a los sistemas CDMA, OFDM, o la combinación de ambos, los sistemas MC-CDMA.

Concretando un poco más, y siguiendo la estructura que se detalla en el siguiente apartado, se busca alcanzar los siguientes objetivos:

- Analizar las posibles técnicas para solucionar el problema de separación ciega de fuentes, tanto las que proporcionan la solución de forma cerrada empleando funciones de contraste, como las que emplean algoritmos basados en gradientes. Se intentará proporcionar una visión unificada de los métodos propuestos para resolver el caso simple en el que se mezclan sólo dos fuentes, así como su extensión al caso de más fuentes, analizando también la complejidad computacional de los distintos métodos.
- Intentar identificar el modelo de un sistema CDMA con un problema de mezcla lineal de fuentes independientes para desarrollar algoritmos de detección basados en separación ciega de fuentes.
- Describir en profundidad el modelo de un sistema OFDM, en sus diferentes versiones: CP-OFDM y ZP-OFDM, identificar el modelo del sistema ZP-OFDM con un problema de mezcla lineal de fuentes independientes y desarrollar algoritmos basados en separación ciega que tengan en cuenta la particular estructura del sistema OFDM.
- Combinar los resultados obtenidos en CDMA y en OFDM para desarrollar algoritmos de detección para el sistema MC-CDMA basados en separación ciega de fuentes.

1.2 Estructura de la memoria

Para permitir al lector una visión rápida y estructurada del contenido de la tesis, se enumeran a continuación los contenidos de cada una de los capítulos en los que se ha dividido.

En el Capítulo 2 se introduce el problema de separación ciega de fuentes. Se plantea el modelo para el problema de mezclas lineales e instantáneas de las fuentes y se indican las condiciones necesarias para su solución. Se introduce el concepto de función contraste y se presentan distintas aproximaciones de ésta. A partir de esas aproximaciones, se pueden derivar estimadores que, de forma cerrada, proporcionan una solución en el caso particular de dos fuentes. Se unifican varios estimadores en un estimador general y se extiende su aplicación al caso de tener una mezcla de más de dos fuentes. Finalmente se describen las técnicas de separación ciega basadas en el descenso del gradiente natural.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de detección multiusuario. Se plantean los modelos del sistema CDMA para los casos síncronos y asíncrono, y se describen algunos detectores lineales para el caso síncrono. Se finaliza el capítulo con la descripción de un detector multiusuario basado en la combinación de los detectores lineales descritos con técnicas de separación ciega de fuentes.

En el Capítulo 4 se realiza una descripción detallada de los sistemas OFDM, incluyendo los modelos de los dos sistemas más populares, el CP-OFDM y el ZP-OFDM, y las ventajas e inconvenientes que presentan ambos. También se incluye un modelo que permite considerar un sistema ZP-OFDM como un sistema CP-OFDM con precodificación. Este resultado será la clave para el desarrollo de algoritmos eficientes en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 5 se presentan varios algoritmos que aplican separación ciega de fuentes al sistema ZP-OFDM. En primer lugar, se desarrolla un algoritmo en el que se aplican directamente técnicas de separación ciega de fuentes a ZP-OFDM. Posteriormente, se analiza la estructura del sistema ZP-OFDM para proponer nuevas técnicas de separación ciega más adecuadas, que proporcionan mejores resultados y de una forma más rápida. Finalmente, se considera un caso semi-ciego en el que se utilizan algunos símbolos de entrenamiento para conseguir una estimación del canal de transmisión. Esa estimación se utiliza como punto de partida de los algoritmos ciegos propuestos, con el objetivo de acelerar el proceso de separación. Se incluyen varios experimentos para ilustrar los excelentes resultados de los algoritmos propuestos.

En el Capítulo 6, se presenta una primera aproximación a la aplicación de separación ciega de fuentes al sistema MC-CDMA. Se propone un algoritmo, basado en los algoritmos propuestos para CDMA y OFDM, que permite la detección de forma ciega en el caso del enlace descendente de un sistema MC-CDMA.

Finalmente, en el Capítulo 7 se incluyen las conclusiones y se proponen líneas futuras de investigación.

Capítulo 2

ICA como solución del problema de separación ciega de fuentes

El presente capítulo sirve de introducción al problema de análisis de componentes independientes aplicado a la separación ciega de fuentes. Se estudia si es posible resolver dicho problema y bajo qué condiciones, para luego intentar ofrecer una visión intuitiva del proceso de separación, dividiendo tal proceso en dos etapas: blanqueado y rotación. Posteriormente, se introduce el concepto de función contraste para aportar una solución cerrada al problema en el caso de dos fuentes, y su posible extensión al caso general de n fuentes. Finalmente, se describen los métodos de resolución adaptativa que emplean el gradiente natural o relativo.

2.1 Introducción al análisis de componentes independientes: separación ciega de fuentes

La separación ciega de fuentes (BSS, *blind source separation*) [Haykin, 2000a][Hyvärinen, 2001] consiste en recuperar un conjunto de señales no observables, llamadas fuentes, a partir de mezclas observables de las mismas. En este caso, el término “ciega” se refiere a que las señales originales no son conocidas y que tampoco hay información disponible acerca del proceso de mezclado.

La clave de la separación de las fuentes originales radica en asumir la independencia estadística espacial de las fuentes. De esta idea de independencia estadística deriva el concepto de análisis de componentes independientes (ICA, *independent component analysis*), ya que ICA (para el caso lineal) consiste en encontrar la transformación lineal que minimice la dependencia estadística de un conjunto de componentes [Comon, 1994]. Considerando el caso de mezclas lineales, ambos problemas, ICA y BSS, son equivalentes, refiriéndose el primero a componentes y el segundo a fuentes. Por tanto, si las fuentes son independientes, se puede solucionar el problema BSS aplicando ICA .

Las aplicaciones potenciales de BSS son muy variadas, abarcando desde el procesado de señales hasta las finanzas. En el procesado de voz, por ejemplo, se puede aplicar separación ciega

de fuentes a la separación de las señales de varios oradores (esto se conoce como el problema del “cocktail-party”). La idea, en principio, es simple. Si una persona en una fiesta es capaz de aislar la voz de aquél con el que dialoga, parece razonable diseñar algoritmos que realicen la misma tarea.

La aplicación de ICA al procesado de imagen se puede estudiar desde el punto de vista de una transformación. La imagen se divide en bloques que dan lugar a señales. Éstas se multiplican por una matriz de separación que proporciona un nuevo conjunto de señales (componentes) independientes sobre las que trabajar. Entre los estudios llevados a cabo sobre el tema, se pueden destacar el reconocimiento y el realzado de imágenes, reconocimiento facial, [Cichocki, 1996], [Karhunen, 1997b] o su clasificación y codificación [Lee, 1999]. Asimismo, se puede utilizar para compresión [Bugallo, 2000], la detección de bordes y el watermarking [Murillo-Fuentes, 2001b] [Murillo-Fuentes, 2005].

Otra aplicación típica de BSS es la ingeniería biomédica. El encefalograma es un ejemplo en el que el uso de ICA para el procesado de señales biomédicas se muestra cualitativamente superior a métodos de procesado de señal tradicionales. En estas aplicaciones, y otras relacionadas como potenciales activados por eventos (ERP, Event Related Potentials), uno de los objetivos fundamentales es localizar el foco de actividad cerebral. Este problema permite utilizar ICA para descomponer las salidas de los electrodos en componentes originadas en el cerebro y componentes de ruido o artefactos [Lee, 1998], [Makeig, 1996], [Lathauwer, 1995]. Otra aplicación bien conocida es la separación del electrocardiograma fetal del electrocardiograma de la madre [Callaerts, 1989], [Lathauwer, 1995], [Bachakaris, 1996], [Cardoso, 1998a].

La aplicación de ICA/BSS a comunicaciones va ganando un interés cada vez mayor. En radiocomunicación, el modelo BSS extendido al caso complejo se ajusta al caso de conformado de haz [Cardoso, 1993], [Comon, 1997]. Otro ejemplo en el campo de la radiocomunicación es el que reconstruye la ortogonalidad de las polarizaciones multiplexadas en enlaces de microondas, eliminando así las interferencias entre transmisiones. En CDMA, se puede formar un sistema de mezclado empleando múltiples antenas o considerando la diversidad proporcionada por la ganancia del proceso. Así se forma un problema BSS que se puede resolver para conseguir la detección multiusuario [Castedo, 1997], [Joutsensalo, 1998], [Causey, 1998], [Gil-García, 2000], [Ristaniemi, 2000]. Con estos algoritmos es posible recuperar los usuarios sin tener conocimiento alguno sobre sus códigos de ensanchado e incluso sus retrasos. En OFDM, en los últimos años van apareciendo también algunas aplicaciones de ICA, tanto en la sincronización como en la detección [Wong, 2003], [Iglesia, 2003], [Sarperi, 2004], [Boloix-Tortosa, 2004].

2.2 Modelo BSS

El modelo más simple de BSS parte de la observación de n mezclas lineales e instantáneas del mismo número de señales independientes. De forma matricial se puede representar a través de la llamama ecuación de mezclas:

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{A}\mathbf{s}(i), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{s}(i) = [s_1(i), \dots, s_n(i)]^T$ es un vector $n \times 1$ cuyas entradas son las n señales fuente en el instante i , $\mathbf{x}(i)$ contiene las n observaciones de las mezclas y la matriz de mezcla \mathbf{A} , cuadrada y de dimensiones $n \times n$, contiene los coeficientes de la mezcla.

Recordando la definición del problema BSS introducida con anterioridad, éste consiste en recuperar el vector de fuentes, $\mathbf{s}(i)$, utilizando exclusivamente las señales observadas $\mathbf{x}(i)$. Para ello, se puede asumir independencia estadística e incluso algún conocimiento sobre la distribución de probabilidad de las fuentes o relacionada con ella.

La solución a este problema se puede obtener calculando una matriz de separación \mathbf{B} de dimensiones $n \times n$ que permite recuperar las fuentes:

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{B}\mathbf{x}(i) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{s}(i) = \mathbf{C}\mathbf{s}(i). \quad (2.2)$$

Por su parte, el problema equivalente planteado en ICA es calcular la matriz \mathbf{B} que minimice la dependencia estadística entre las entradas de $\mathbf{x}(i)$ según el modelo anterior.

La Figura 2.1 muestra de forma esquemática el proceso BSS o ICA.

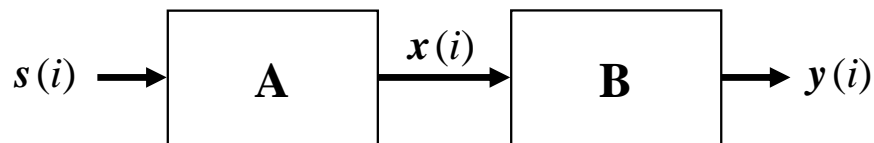


Figura 2.1: Modelo BSS/ICA.

Hasta este momento se ha supuesto que existe el mismo número de observaciones y de fuentes. En general se puede extender el problema a uno en el que el número de observaciones sea mayor que el número de fuentes ($m > n$). Este problema, como se explica en el Apartado 2.2.3, se puede reducir al caso anterior mediante un preprocesado adecuado. En presencia de ruido, esto favorece la reducción del mismo, aunque surge el problema de estimación del número de fuentes [Karhunen, 1997a]. El caso en el que el número de observaciones o mezclas sea inferior al número de fuentes ($m < n$), complica el problema de extracción de éstas [Cao, 1996]. En adelante, a no ser que se especifique lo contrario, se supondrá siempre el sistema cuadrado con $m = n$.

2.2.1 Condiciones para conseguir una solución

Para conseguir solucionar el problema BSS planteado mediante ICA, esto es, asumiendo independencia estadística, deben cumplirse ciertas condiciones.

En primer lugar, para que las mezclas sean separables la matriz de mezcla \mathbf{A} debe ser una matriz regular, es decir, que exista una matriz inversa [Cao, 1996].

En segundo lugar, considerando el teorema de Darmois-Skitovich y el lema propuesto por Cao [Cao, 1996], se puede añadir a la condición de no singularidad de la matriz de mezcla otra

condición para las fuentes: la independencia estadística dos a dos de las salidas garantiza la separación si, no hay más de una fuente Gaussiana.

El cumplimiento de las condiciones anteriores asegura la posibilidad de recuperación de las fuentes, sin embargo, es fácil demostrar [Comon, 1994] que no es posible recuperar el orden original ni el escalado de las mismas. En este sentido, en el caso ideal, cuando se calcula la matriz de separación \mathbf{B} se esperaría que \mathbf{C} en (2.2) fuera la matriz identidad. Sin embargo, se dice que una matriz \mathbf{C} no es de mezcla [Cardoso, 1998b] cuando tiene sólo una entrada distinta de cero en cada fila y columna. Es decir, se tiene $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{D}$, donde \mathbf{P} es una matriz de permutación y \mathbf{D} es una matriz diagonal no singular. Entonces, $\mathbf{y}(i) = \mathbf{C}\mathbf{s}(i)$ se denomina una copia de $\mathbf{s}(i)$ y tiene todas sus entradas independientes del resto.

2.2.2 Solución en dos pasos: Blanqueado y rotación

¿Podría emplearse estadísticos de segundo orden para alcanzar la separación de las fuentes?

El problema BSS no puede resolverse empleando exclusivamente estadísticos de segundo orden. Esto es debido a que la información de segundo orden permite llevar a cabo un blanqueado (decorrelación), es decir, expresar el espacio de mezclas en un sistema ortogonal, pero esto no implica la independencia estadística de estas proyecciones.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las señales fuente tienen varianzas unidad, de forma que la matriz de covarianza es la matriz identidad $E[\mathbf{s}(i)\mathbf{s}(i)^T] = \mathbf{I}$. En ese caso, se dice que el vector $\mathbf{s}(i)$ es espacialmente blanco. Por otro lado, se puede eliminar la componente de continua de las mezclas, de manera que tengan media cero, y encontrar una matriz de blanqueado \mathbf{W} para $\mathbf{x}(i)$. Esa matriz puede ser la raíz cuadrada de la inversa de la matriz de covarianza para $\mathbf{x}(i)$, $\mathbf{W} = (E[\mathbf{x}(i)\mathbf{x}(i)^H])^{-1/2}$. De esta forma, el vector $\mathbf{z}(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i)$ es espacialmente blanco. Se puede comprobar que el resto de la transformación necesaria para obtener $\mathbf{z}(i)$ de las fuentes es necesariamente una rotación, porque ésta relaciona dos vectores espacialmente blancos $\mathbf{s}(i)$ y $\mathbf{z}(i)$.

Se concluye que blanquear los datos no implica independencia estadística, pero reduce la mezcla a una rotación que asegura dicha independencia. En el mismo sentido, frente al análisis de componentes independientes (ICA), la teoría de análisis de componentes principales (PCA, *principal component analysis*) resuelve el blanqueado pero deja indeterminada la rotación.

En vista de este resultado, la matriz de separación se puede expresar como el producto $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{W}$, donde \mathbf{W} es una matriz de blanqueado y \mathbf{U} es una matriz de rotación. Podemos modificar el modelo del problema incluido en la Figura 2.1 para incluir este resultado,

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{B}\mathbf{x}(i) = \mathbf{U}\mathbf{z}(i) = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{s}(i), \quad (2.3)$$

como se muestra en la Figura 2.2.

En la Figura 2.3 se incluye un ejemplo visual del proceso de separación en dos pasos, blanqueado y rotación, para el caso bidimensional. Nótese que las salidas no tienen necesariamente que respetar el orden ni escalado originales de las fuentes.

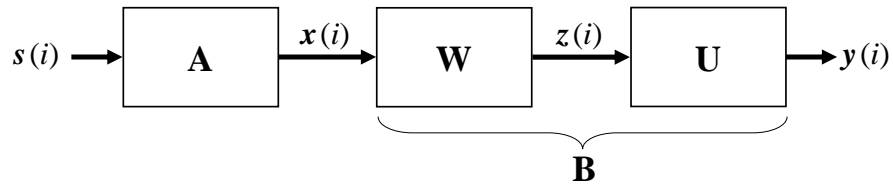


Figura 2.2: Modelo completo del problema BSS: blanqueado y rotación.

Se puede comprobar a partir de lo expuesto en este apartado, y también observando el ejemplo de la Figura 2.3, que un conjunto de mezclas de señales gaussianas no puede separarse con sólo imponer independencia estadística, ya que para estas señales los estadísticos de orden superior a dos son nulos. En este caso se puede ejecutar el blanqueado pero la rotación queda indeterminada debido a la simetría circular de su fdp (función de densidad de probabilidad)

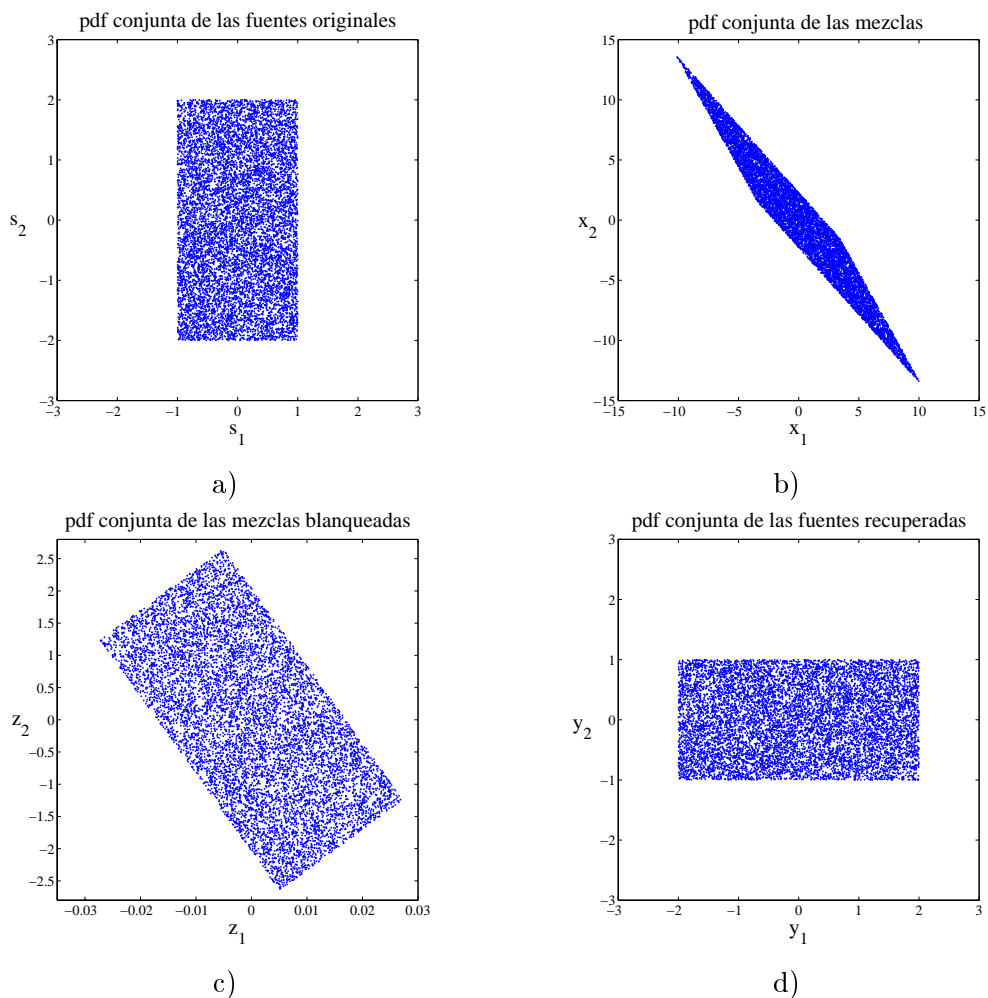


Figura 2.3: Ejemplo del proceso de separación: vista en a) de la función de densidad de probabilidad conjunta de dos fuentes con distribución de tipo uniforme, en b) de las mezclas, en c) de las mezclas blanqueadas y en d) de la rotación de éstas.

conjunta.

Algunas soluciones ICA se basan sólo en estadísticos de segundo orden. Para ello fuerzan la decorrelación de las salidas en distintos instantes de tiempo. Sin embargo, esto lleva a imponer una condición más allá de la independencia estadística: que las fuentes no sean blancas.

2.2.3 Modelo BSS en ambientes ruidosos

Es de sumo interés incluir el ruido en el modelo de separación para afrontar aplicaciones reales, como es el caso de las comunicaciones. Si las mezclas de las fuentes se realizan en un ambiente con ruido aditivo el modelo del problema se puede completar como sigue:

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{A}\mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i), \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{n}(i)$ es un vector de ruido en el instante i con entradas de varianza σ_n^2 .

Al obtener la matriz de separación, la salida se expresa como

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{B}\mathbf{x}(i) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{s}(i) + \mathbf{B}\mathbf{n}(i). \quad (2.5)$$

En el caso $n = m$, la estructura del problema con ruido se puede ver como un caso de BSS en el que el número de fuentes es el doble que el número de mezclas disponibles, ya que ahora, el número de fuentes es el de señales más el de los ruidos asociados. Por otro lado, nos encontramos con la dificultad de que hay más de una fuente gaussiana (si el ruido es gaussiano). Se concluye que el problema no se puede abordar desde la perspectiva desarrollada hasta ahora. Una posible solución es emplear estadísticos de orden superior bajo la suposición de que el ruido es ruido gaussiano [Comon, 1997], ya que muchos estadísticos de orden superior son invariantes frente a la presencia de señales gaussianas [Nikias, 1993].

Por otro lado, se ha comentado en un apartado anterior que, en el caso de disponer de más observaciones que fuentes ($m > n$), se puede llevar a cabo una reducción de dimensiones que supone además una reducción de ruido. Esto se consigue con un procesado previo adecuado. El método más común, como se muestra en el siguiente apartado, consiste en la proyección del sistema hacia uno cuadrado, empleando alguna técnica como el análisis de componentes principales (PCA, *principal component analysis*) o la descomposición en valores singulares (DVS o SVD, *singular value decomposition*). Mediante estas técnicas se pretende separar el subespacio n -dimensional de la señal del subespacio del ruido, para luego proyectar las observaciones en el subespacio de la señal, reduciendo de esta manera el efecto del ruido. Sin embargo, puede surgir el problema de estimación del número n de fuentes reales del sistema.

PCA y reducción de ruido

El procedimiento estándar para la reducción de dimensiones y del ruido es el siguiente [Haykin, 2000b]. En primer lugar se estima la matriz de autocorrelación de las mezclas $\mathbf{x}(i)$ (supuestas

éstas de media cero):

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i). \quad (2.6)$$

A continuación se calculan, mediante PCA, los m autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{R}_{xx} :

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^H, \quad (2.7)$$

donde la matriz diagonal $\mathbf{\Delta}$ contienen los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m \geq 0$ y la matriz \mathbf{Q} contienen los autovectores asociados a dichos autovalores.

El subespacio generado por los n autovectores correspondientes con los n autovalores mayores se puede considerar una aproximación del subespacio de la señal sin ruido. Por otro lado, el espacio del ruido corresponde con los autovectores asociados a los autovalores menores. Por tanto, podemos hacer una reducción de ruido y de dimensiones del problema proyectando el vector $\mathbf{x}(i)$ en el espacio de la señal y escalando para que cada componente tenga varianza unidad. Este proceso se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i) = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}^H\mathbf{x}(i), \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal que contiene los n autovalores mayores de la matriz de autocorrelación, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$, y \mathbf{V} es la matriz que contiene los autovectores asociados a esos autovalores.

2.3 Soluciones al problema BSS: funciones contraste

Existen diferentes alternativas a la hora de abordar un problema de separación ciega de fuentes. Entre ellas podemos destacar, por un lado, las que se basan en propiedades geométricas [Puntonet, 1998] y, por otro, las que se basan en propiedades estadísticas. Precisamente en estas últimas, que son las más extendidas y estudiadas, se centra el presente apartado.

2.3.1 Independencia estadística: definición y medida

Un vector aleatorio $\mathbf{y}(i) = [y_1(i), \dots, y_n(i)]^T$, con una función densidad de probabilidad conjunta $p(\mathbf{y}(i))$, tiene elementos estadísticamente independientes si esta función se puede escribir como producto de las fdp marginales p_k , $k \in [1, n]$, de las variables aleatorias $y_k(i)$:

$$p(\mathbf{y}(i)) = p_1(y_1(i))p_2(y_2(i)) \cdots p_n(y_n(i)) \quad (2.9)$$

Una medida de independencia útil y muy utilizada en separación ciega de fuentes es la divergencia de Kullback-Leibler o entropía relativa [Cover, 1991],[Amari, 1996],[Cardoso, 1996]. La divergencia de Kullback-Leibler entre las fdp $p(\mathbf{y})$ y $q(\mathbf{y})$, que se denota en \mathbb{R}^n

$$D_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{y})}{q(\mathbf{y})} d\mathbf{y}, \quad (2.10)$$

es siempre mayor o igual que cero, con igualdad $D_{pq} = 0$, si y sólo si $p(\mathbf{y})$ y $q(\mathbf{y})$ coinciden.

Cuando se aplica la divergencia de Kullback-Leibler entre una fdp conjunta $p(\mathbf{y}(i))$ y el producto de sus fdp marginales $q(\mathbf{y}) = \prod_{k=1}^n p_k(y_k(i))$, se denomina información mutua de las variables $y_1(i), \dots, y_n(i)$, y se suele denotar por

$$D_{pq} = I[y_1(i), \dots, y_n(i)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}(i)) \log \frac{p(\mathbf{y}(i))}{p_1(y_1(i))p_2(y_2(i)) \cdots p_n(y_n(i))} d\mathbf{y}(i). \quad (2.11)$$

Si $\mathbf{y}(i)$ tiene elementos estadísticamente independientes, entonces $p(\mathbf{y}(i))$ es una densidad factorizable y la información mutua se anula, por tanto puede ser utilizada como criterio de independencia.

Por otro lado, la información mutua se puede reescribir en términos de la entropía diferencial de $\mathbf{y}(i)$,

$$H(\mathbf{y}(i)) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}(i)) \log p(\mathbf{y}(i)) d\mathbf{y}(i), \quad (2.12)$$

y de la entropía marginal,

$$H[y_k(i)] = - \int_{-\infty}^{\infty} p_k(y_k(i)) \log p_k(y_k(i)) dy_k(i) = -E[\log(p_k(y_k(i)))] , \quad (2.13)$$

de tal manera que

$$D_{pq} = I[y_1(i), \dots, y_n(i)] = \sum_{k=1}^n H[y_k(i)] - H[\mathbf{y}(i)]. \quad (2.14)$$

La información mutua escrita en esta forma recibió el nombre de “tasa de transmisión de información” cuando fue propuesta con anterioridad por Shannon.

2.3.2 Funciones Contraste.

El cálculo de (2.11) ó (2.14) como medida de independencia es demasiado lento y complicado computacionalmente debido a que ambas suponen el estudio de las fdp de las señales involucradas. Por este motivo se han escritos numerosos resultados sobre métodos que emplean medidas aproximadas de independencia que permiten resolver el problema de manera más simple.

Las funciones contraste fueron introducidas en el problema de BSS por Comon [Comon, 1994]. Una función contraste es una función real de la distribución de probabilidad que se suele denominar $\phi[\mathbf{y}]$, con $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Un contraste se dice que es válido cuando su mínimo coincide con la solución del problema BSS, es decir, cuando \mathbf{B} es una solución de separación y las entradas del vector \mathbf{y} son estadísticamente independientes. En ese caso, el contraste debe cumplir que, para toda matriz \mathbf{A} , se debe tener $\phi[\mathbf{Z}\mathbf{y}] \geq \phi[\mathbf{y}]$, con igualdad sólo cuando \mathbf{Z} sea un conjunto de permutaciones y escalados. El problema BSS se convierte, gracias a la función contraste, en un problema de optimización.

Otro concepto relacionado con la función contraste es el de proceso contraste, [Haykin, 2000c]. En separación ciega, un proceso contraste es una función real que depende de las muestras de T observaciones disponibles $\{\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)\}$ y que converge a la función contraste cuando T

tiende a infinito. Por tanto, en el contexto de la estimación basada en el contraste mínimo, el diseño de estimadores se puede dividir en dos pasos de diferente naturaleza: se debe encontrar una función contraste que se minimice en el valor de \mathbf{B} buscado, y se debe encontrar un proceso contraste que converja a esa función contraste.

En este apartado se describirán brevemente los contrastes más comunes. Un estudio detallado muy interesante de las funciones contraste en el contexto de la geometría de la información se puede encontrar en [Haykin, 2000c].

Contrastes ortogonales

Se ha explicado anteriormente (Apartado 2.2.2) que la mezcla se puede reducir a una rotación forzando la condición de blanqueado: $E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = I$. Se definen los denominados contrastes ortogonales $\phi^o[\mathbf{y}]$, que deben ser minimizados bajo dicha condición de blanqueado. El término “ortogonal” proviene de que, en este caso, la búsqueda de \mathbf{B} se reduce al espacio de matrices ortogonales. Esto puede simplificar el algoritmo de optimización. Por contra, la condición de blanqueado limita el funcionamiento de los algoritmos, como se estudia en [Cardoso, 1994].

Contraste basado en la máxima verosimilitud

Sea el caso general en el que se dispone de T observaciones $\{\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)\}$ del vector \mathbf{x} . Estas observaciones se modelan como realizaciones independientes de un vector aleatorio distribuido según una función de densidad de probabilidad parametrizada. En el caso del problema de separación ciega de fuentes, puesto que $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$, la parametrización puede ser con el par (\mathbf{A}, q) , formado por la matriz de mezcla \mathbf{A} y la distribución q propuesta para las fuentes \mathbf{s} . De esta manera, la fdp de \mathbf{x} para un par (\mathbf{A}, q) dado se puede expresar como:

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q) = |\det \mathbf{A}|^{-1} q(\mathbf{s}) = |\det \mathbf{A}|^{-1} q(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Para el conjunto de las observaciones $\mathbf{X}_T = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)]$, puesto que se han considerado independientes, la fdp parametrizada viene dada por,

$$p(\mathbf{X}_T; \mathbf{A}, q) = \prod_{i=1}^T p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q), \quad (2.16)$$

que se denomina verosimilitud.

El criterio de máxima verosimilitud (ML, *maximum likelihood*) propone calcular la matriz \mathbf{A} que maximiza (2.16). Maximizar esta expresión es equivalente a minimizar su logaritmo neperiano normalizado (dividido por T) cambiado de signo:

$$-\frac{1}{T} \log p(\mathbf{X}_T; \mathbf{A}, q) = -\frac{1}{T} \log \left(\prod_{i=1}^T p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q) \right) = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q). \quad (2.17)$$

Cuando T crece, el promedio de las muestras tiende a la esperanza matemática,

$$-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q) \rightarrow -E[\log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

donde $p(\mathbf{x})$ es la fdp de \mathbf{x} . Desarrollando esta expresión y recordando las definiciones de (2.10) y (2.12) se tiene:

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)] &= -\int_{-\infty}^{\infty} \log p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) \log \frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)} d\mathbf{x} - \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= D_{p(\mathbf{x})p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)} + H(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

La entropía $H(\mathbf{x})$ no depende del parámetro \mathbf{A} , por tanto, se puede definir un contraste ML igual a la divergencia $D_{p(\mathbf{x})p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)}$. Expresado de otro modo, el contraste ML es igual a la divergencia de Kullback-Leibler entre la distribución del vector \mathbf{x} y la distribución de un vector $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{s}}$, siendo $\underline{\mathbf{s}}$ un vector con una distribución propuesta q :

$$\phi_{ML} = D_{p(\mathbf{x})p(\mathbf{x}; \mathbf{A}, q)} = D_{\mathbf{x}\underline{\mathbf{x}}}. \quad (2.20)$$

Como la divergencia de Kullback-Leibler es invariante ante transformaciones invertibles, considerando la transformación mediante la matriz \mathbf{A}^{-1} , se llega a

$$\phi_{ML}(\mathbf{y}) = D_{\mathbf{x}\underline{\mathbf{x}}} = D_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{x}}} = D_{\mathbf{y}\underline{\mathbf{s}}}, \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ es el vector de salida.

Según el principio ML, se busca la matriz de separación que minimiza (2.21) bajo la suposición de que la fdp de las fuentes es q , lo que sugiere que o se conoce q , o se supone (opción más generalizada), o hay que ir calculando paralelamente esta fdp.

Contraste basado en la información mutua

Sea un vector \mathbf{w} con componentes independientes, es decir, su fdp conjunta se puede escribir como producto de las fdp marginales. Si buscamos minimizar la divergencia de Kullback-Leibler entre la distribución del vector \mathbf{y} y la distribución del vector \mathbf{w} , para todos los posibles \mathbf{w} , se puede encontrar que el mínimo se alcanza cuando $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{y}}$, siendo $\tilde{\mathbf{y}}$ un vector con entradas independientes y cada una distribuida de igual forma que la correspondiente entrada de \mathbf{y} .

Según este resultado, y recurriendo a la definición de información mutua introducida en el Apartado 2.3.1, se puede escribir la siguiente función de contraste de información mutua o de mínima entropía marginal (ME, *marginal entropy*) [Comon, 1994], [Hyvärinen, 1997]:

$$\phi_{ME}[\mathbf{y}] = D_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{y}}}, \quad (2.22)$$

donde $D_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{y}}}$ indica la divergencia de Kullback-Leibler entre la distribución del vector \mathbf{y} y la distribución del vector $\tilde{\mathbf{y}}$.

Especialmente interesante resulta el caso de este contraste bajo la condición de blanqueado, es decir, en el caso ortogonal,

$$\phi_{ME}^o[\mathbf{y}] = \sum_{i=1}^n H[y_i] - H[\mathbf{y}] \stackrel{c}{=} \sum_{i=1}^n H[y_i] \quad (2.23)$$

donde $\stackrel{c}{=}$ denota igualdad salvo en una constante aditiva. Obsérvese que el contraste ME ortogonal se reduce a minimizar la suma de las entropías marginales de las entradas del vector \mathbf{y} , puesto que la entropía de \mathbf{y} , $H[\mathbf{y}]$, es invariante ante rotaciones. Esta idea fue introducida por Comon en [Comon, 1994].

En [Haykin, 2000c] se demuestra que

$$\sum_{i=1}^n H[y_i] \stackrel{c}{=} - \sum_{i=1}^n N[y_i], \quad (2.24)$$

donde $N[y_i]$ es la negentropía de las entradas de \mathbf{y} . La negentropía se define como la divergencia de Kullback-Leibler entre una fdp y la fdp Gaussiana que tiene la misma media y varianza. Por tanto, la negentropía mide la separación de una fdp de la distribución normal. El teorema central del límite dice que la suma de infinitas variables aleatorias independientes tiende hacia una distribución normal. Extendiendo este teorema al caso de la separación ciega de fuentes, se puede afirmar que la mezcla de las fuentes conduce a una distribución más Gaussiana que el conjunto de fuentes por separado. Por eso, minimizar la suma de las entropías marginales de las entradas del vector \mathbf{y} equivale a maximizar la “no-Gaussianidad” de tales entradas [Haykin, 2000c].

Relación entre los contrastes ML y ME

Se puede relacionar el contraste de ML con el de ME de la siguiente manera:

$$\phi_{ML}[\mathbf{y}] = D_{\mathbf{y}\mathbf{s}} = D_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{y}}} + \sum_{i=1}^n D_{y_i\tilde{s}_i} = \phi_{ME}[\mathbf{y}] + \sum_{i=1}^n D_{y_i\tilde{s}_i} \quad (2.25)$$

La expresión (2.25) indica que cuando se minimiza la función de contraste de máxima verosimilitud se minimizan dos términos: el primero, es una medida de independencia de \mathbf{y} , el contraste ME, y el segundo, la suma de divergencias parciales de las entradas de \mathbf{y} y las fdp supuestas para las fuentes. Si la fdp de \mathbf{s} es tal que el segundo término se minimiza en la solución del primero entonces se ha resuelto el problema de separación. El contraste de información mutua es el contraste óptimo en el sentido de que el mínimo coincide con la solución. El problema radica en que no conocemos las fdp de \mathbf{s} (su cálculo es complicado y lento). La expresión de máxima verosimilitud permite descomponer el problema: por un lado se separa y por otro, se estiman las fdp. La gran ventaja es que se puede resolver el contraste de información mutua en un proceso iterativo [Haykin, 2000c], en el que primero se ejecuta la separación mediante un contraste ML, en el que se suponen conocidas las distribuciones de las fuentes, y luego se actualiza la estimación de esas distribuciones a partir de las distribuciones marginales de las fuentes recuperadas, buscando la minimización del segundo término de (2.25).

2.3.3 Aproximaciones basadas en estadísticos de orden superior

Se pueden emplear estadísticos de orden superior para definir funciones contraste que sean aproximaciones simples a aquellas derivadas a partir del principio de información mutua o máxima

verosimilitud.

El contraste ME de Comon

En BSS/ICA se emplean habitualmente los cumulantes, generalmente de segundo (Cum_{ij}) y cuarto orden (Cum_{ijkl}). Si se consideran variables aleatorias de media cero, y_i, y_j, y_l, y_k , los cumulantes de segundo orden son idénticos a los momentos de segundo orden,

$$\text{Cum}_{ij}[\mathbf{y}] = \text{Cum}[y_i, y_j] \triangleq \text{E}[y_i y_j] \quad (2.26)$$

y los de cuarto orden quedan:

$$\begin{aligned} \text{Cum}_{ijkl}[\mathbf{y}] &= \text{Cum}[y_i, y_j, y_l, y_k] \\ &\triangleq \text{E}[y_i y_j y_l y_k] - \text{E}[y_i y_j] \text{E}[y_l y_k] - \text{E}[y_i y_l] \text{E}[y_j y_k] - \text{E}[y_i y_k] \text{E}[y_j y_l] \end{aligned} \quad (2.27)$$

En el caso de fuentes independientes, estos cumulantes quedan:

$$\text{Cum}_{ij}[\mathbf{s}] = \sigma_i^2 \delta_{ij} \quad (2.28)$$

$$\text{Cum}_{ijkl}[\mathbf{s}] = k_i \delta_{ijkl} \quad (2.29)$$

donde δ es el símbolo de Kronecker y, σ_i^2 y k_i son la varianza y kurtosis, respectivamente, de la fuente s_i :

$$\sigma_i^2 \triangleq \text{Cum}_{ii}[\mathbf{s}] = \text{E}[s_i^2] \quad (2.30)$$

$$k_i \triangleq \text{Cum}_{iiii}[\mathbf{s}] = \text{E}[s_i^4] - 3\text{E}^2[s_i^2] \quad (2.31)$$

Los cumulantes se pueden emplear para aproximar la función contraste ML. Recuerdese que esa función contraste proporcionaba una medida de la diferencia entre la distribución del vector de salida \mathbf{y} y una distribución propuesta para las fuentes $\underline{\mathbf{s}}$. Esa diferencia se podría expresar de forma aproximada mediante el error cuadrático entre los cumulantes de ambas distribuciones, tanto para segundo orden, como para cuarto orden. De hecho, si se introducen parametrizaciones de las fdp, como las expansiones de Edgeworth [McCullagh, 1987], [Comon, 1994], o la de Gram-Charlier [Stuart, 1994],[Amari, 1996] se deriva el siguiente contraste:

$$D_{\mathbf{y}\underline{\mathbf{s}}} \approx \phi_{24}[\mathbf{y}] = \frac{1}{48} (12\phi_2[\mathbf{y}] + \phi_4[\mathbf{y}]), \quad (2.32)$$

donde,

$$\phi_2[\mathbf{y}] = \sum_{ij} (\text{Cum}_{ij}[\mathbf{y}] - \text{Cum}_{ij}[\underline{\mathbf{s}}])^2 = \sum_{ij} (\text{Cum}_{ij}[\mathbf{y}] - \underline{\sigma}_i^2 \delta_{ij})^2, \quad (2.33)$$

y para cuarto orden,

$$\phi_4[\mathbf{y}] = \sum_{ijkl} (\text{Cum}_{ijkl}[\mathbf{y}] - \text{Cum}_{ijkl}[\underline{\mathbf{s}}])^2 = \sum_{ijkl} (\text{Cum}_{ijkl}[\mathbf{y}] - \underline{k}_i \delta_{ijkl})^2, \quad (2.34)$$

donde $\underline{\sigma}_i^2$ y \underline{k}_i son la varianza y kurtosis de la fuente distribuida según $q_i(\underline{s}_i)$. La minimización del término en (2.33) lleva aparejada la decorrelación de las entradas del vector \mathbf{y} , mientras que

la de (2.34) conduce a la separación de las fuentes si todas tienen kurtosis (k_i) no nulas. La minimización conjunta de ambas proporciona la aproximación al contraste ML. La importancia aquí radica en la idea de utilizar de forma conjunta la información de segundo y cuarto orden. En algunas aproximaciones se emplean estas ecuaciones para resolver directamente el problema [Martín, 1997].

Bajo la condición de blanqueado, la expresión (2.33) se anula y la expresión (2.34) se puede reducir fácilmente, salvo en una constante, a:

$$\phi_4^o[\mathbf{y}] \stackrel{c}{=} -2 \sum_{i=1}^n k_i Cum_{iiii}[\mathbf{y}] = E[-2 \sum_{i=1}^n k_i (y_i^4 - 3)]. \quad (2.35)$$

Recuérdese que en el contraste de ML era necesario suponer alguna información acerca de las fuentes. Se observa que en este caso las suposiciones están acotadas hasta cuarto orden, es decir, sólo es necesario formular hipótesis acerca de las kurtosis de las fuentes.

De igual manera, se puede encontrar una aproximación para el contraste ME. Si minimizar el contraste ϕ_{ML} respecto a las distribuciones de las fuentes conduce al contraste de información mutua ϕ_{ME} (Apartado 2.3.2), minimizar ϕ_4^o (que aproxima ϕ_{ML}^o) respecto a las kurtosis de cada fuente permite obtener una aproximación al contraste ME ortogonal dada por:

$$\phi_{ME}^o[\mathbf{y}] = \sum_{ijkl \neq iiii} (Cum_{ijkl}[\mathbf{y}])^2 \stackrel{c}{=} - \sum_i (Cum_{iiii}[\mathbf{y}])^2. \quad (2.36)$$

Por tanto, para resolver el problema de BSS bajo la condición de ortogonalidad se puede recurrir a maximizar la suma de las kurtosis de las entradas al cuadrado del vector \mathbf{y} . Este resultado, que se obtuvo por primera vez en [Comon, 1994], es una aproximación del contraste y no supone nada acerca de las fdp de \mathbf{s} . El contraste es muy útil a excepción del caso en que las kurtosis de las fuentes sean nulas.

El contraste SICA

El contraste SICA (*Sinusoidal ICA*) [Murillo-Fuentes, 2001a],[Murillo-Fuentes, 2004b] proporciona la solución al problema BSS bidimensional de una forma rápida y sencilla. Los autores demuestran que, para el caso bidimensional, la función contraste en (2.36) se puede modelar como una senoide cuya fase proporciona el ángulo de rotación necesario para resolver el problema tras el blanqueado.

El método JADE

El método JADE desarrollado por Cardoso en [Cardoso, 1993] propone la minimización de un contraste equivalente al de (2.36) que consiste en la suma de los cumulantes cruzados:

$$\phi_{JADE}^o[\mathbf{y}] = \sum_{ijkl \neq ijkk} (Cum_{ijkl}[\mathbf{y}])^2. \quad (2.37)$$

El método MaxKur

En el caso en el que se conocen las kurtosis de las fdp de las entradas, estos contrastes se pueden simplificar. Si, por ejemplo, son negativas ($\forall i, k_i < 0$), se puede escribir (ver [Moreau, 1996], [Comon, 1997] [Hyvärinen, 1997] y [Cardoso, 1999]):

$$\phi_{Kur}^o[\mathbf{y}] = - \sum_i Cum_{iiii}[\mathbf{y}] \stackrel{c}{=} - \sum_{i=1}^n E^4[y_i]. \quad (2.38)$$

Esta expresión se puede ver como una aproximación de la suma de las entropías de las salidas cuando las kurtosis son de signo conocido. Este contraste sugiere maximizar las kurtosis de las salidas, por eso en [Cardoso, 1999] recibe el nombre de algoritmo MaxKur.

2.3.4 Medida de la separación calculada.

Las aproximaciones presentadas en el apartado anterior permiten en la práctica obtener, con mayor o menor eficacia, un resultado para la matriz de separación \mathbf{B} . Para poder comparar la precisión con la que los diferentes métodos calculan la separación, se deben encontrar unas medidas sencillas y de fácil cálculo. Habitualmente, se emplean comparaciones entre las fuentes recuperadas y las originales, o entre la matriz de separación y la matriz de mezcla. Dos de estas medidas son el índice de separación y la razón interferencia a señal (ISR).

El índice de separación en [Amari, 1996] puede ser utilizado como medida de la exactitud con la que se ha conseguido la separación. Este índice mide si la salida es una copia de la entrada, y su definición es la siguiente,

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{kj}|} - 1 \right) \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{P} = (p_{ij}) = \mathbf{B}\mathbf{A}$.

En el primer término se estudia, para cada fila de la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{P}$, la relación entre cualquier entrada y la de máximo valor absoluto en esa fila. En el caso de una solución perfecta, esta fila tendría sólo un elemento distinto de cero, por lo que el término se anularía. El segundo término del índice realiza la misma operación pero por columnas.

La razón interferencia a señal (ISR) calculada a la salida proporciona una buena medida de la calidad de la separación. Se puede emplear también una medida aproximada de esa ISR que sólo tenga en cuenta $\mathbf{P} = (p_{ij}) = \mathbf{B}\mathbf{A}$. Esta ISR aproximada se calcula de la siguiente manera:

$$ISR = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{|p_{ij}|^2}{(\max_k |p_{ik}|)^2} - 1 \right) \quad (2.40)$$

2.4 El estimador ponderado generalizado de cuarto orden: caso bidimensional

Empleando los contrastes descritos en el apartado anterior, o mediante otras aproximaciones basadas en similares propiedades estadísticas, se han propuesto numerosos métodos para obtener la solución del problema de separación ciega de fuentes. Especial importancia tienen los estimadores propuestos para el caso en el que sólo se han mezclado dos fuentes, el problema BSS bidimensional. A partir de la solución para el caso bidimensional se pueden resolver problemas de mayores dimensiones empleando técnicas iterativas equivalentes a la optimización de Jacobi (JO, *Jacobi optimization*) para la diagonalización de matrices, como se mostrará posteriormente.

Muchos estimadores propuestos para resolver el problema bidimensional se han obtenido a partir de funciones contraste basadas en aproximaciones mediante estadísticos de cuarto orden. En principio, puede parecer que estos estimadores son independientes unos de otros, o que tienen poco en común. Sin embargo, diferentes estudios [Ghogho, 2000],[Zarzoso, 2001a],[Murillo-Fuentes, 2003a],[Murillo-Fuentes, 2004a] tratan de revelar la existencia de una conexión entre muchos de esos estimadores. Recientemente, en [Zarzoso, 2005a] y [Zarzoso, 2005b] se ha propuesto una nueva clase de estimadores para el caso bidimensional, el denominado estimador ponderado generalizado de cuarto orden (GWFOE, *generalized weighted fourth-order estimator*). Dicho estimador unifica una gran variedad de expresiones de estimación aparentemente no relacionadas.

Como se indicó en el Apartado 2.2.2, bajo la condición del blanqueado la solución al problema BSS se reduce a encontrar una matriz unitaria que representa una rotación. En el caso bidimensional, esa matriz es una matriz de rotación de Givens,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

que relaciona las fuentes con las mezclas blanqueadas,

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{Q}\mathbf{s}(i). \quad (2.42)$$

Por tanto, bajo la condición de blanqueado, sólo hay que encontrar el parámetro $\theta \in]-\pi, +\pi]$.

En el caso bidimensional, podemos emplear notación compleja para expresar la relación anterior:

$$\mathbf{z}(i) = z_1(i) + jz_2(i) = r(i)e^{j\phi(i)} = \mathbf{Q}\mathbf{s}(i) = e^{j\theta}(s_1(i) + js_2(i)) = e^{j\theta}r(i)e^{j\alpha(i)}. \quad (2.43)$$

Se observa que $\phi(i) = \theta + \alpha(i)$, de manera que se puede recuperar las fuentes de las salidas $\mathbf{y}(i) = y_1(i) + jy_2(i) = r(i)e^{j\rho(i)}$ si la matriz de rotación \mathbf{U} en (2.3) invierte el giro para obtener $\rho(i) = \alpha(i) + k\pi/2$, siendo k cualquier entero.

La minimización de las funciones contraste definidas, para el caso bidimensional, conduce a la estimación del ángulo de rotación θ necesario para solucionar el problema. Dicha estimación

se puede expresar de forma sencilla en función de los siguientes promedios no lineales de los puntos complejos en (2.43), denominados *centroides* [Zarzoso, 1999] (el índice temporal i ha sido omitido para simplificar la notación):

$$\xi_\gamma \triangleq E[r^4 e^{j4\phi}] = (\kappa_{40}^z - 6\kappa_{22}^z + \kappa_{04}^z) + j4(\kappa_{31}^z - \kappa_{13}^z), \quad (2.44)$$

$$\xi_\eta \triangleq E^2[r^4 e^{j2\phi}] = (\kappa_{40}^z - \kappa_{04}^z) + j2(\kappa_{31}^z + \kappa_{13}^z), \quad (2.45)$$

$$\beta \triangleq E[r^4] - 8 = \kappa_{40}^z + 2\kappa_{22}^z + \kappa_{04}^z, \quad (2.46)$$

donde $\kappa_{kj}^z = \text{Cum} \underbrace{1 \dots 1}_k \underbrace{2 \dots 2}_j [z]$, con $k + j = 4$, es el cumulante de cuarto orden de z .

Si los escribimos en función de las estadísticas de las fuentes, los centroides quedan:

$$\xi_\gamma = \gamma e^{j4\theta}, \quad (2.47)$$

$$\xi_\eta = \eta e^{j2\theta}, \quad (2.48)$$

$$\beta = \gamma, \quad (2.49)$$

donde $\gamma \triangleq (\kappa_{40}^s + \kappa_{04}^s)$ y $\eta \triangleq (\kappa_{40}^s - \kappa_{04}^s)$.

Basándose en estos centroides, se puede definir el centroide compuesto ponderado

$$\xi_{GWFOE} = \omega \beta \xi_\gamma + (1 - \omega) \xi_\eta^2, \quad 0 < \omega < 1, \quad (2.50)$$

que conduce al estimador ponderado generalizado de cuarto orden:

$$\hat{\theta}_{GWFOE} = \frac{1}{4} \angle \xi_{GWFOE}, \quad (2.51)$$

el cual proporciona una estimación consistente de θ para cualquier distribución de las fuentes. Además, el estimador GWFOE unifica muchas soluciones analíticas propuestas con anterioridad, que se pueden obtener simplemente para diferentes valores del peso ω :

1. $\omega = 1$: el estimador EML [Zarzoso, 1999],
2. $\omega = 0$: el estimador AEML [Zarzoso, 2001b],
3. $\omega = 3/7$: el estimador SICA [Murillo-Fuentes, 2001a],[Murillo-Fuentes, 2004b],
4. $\omega = 1/3$: el estimador AML [Ghogho, 2000],
5. $\omega = 1/2$: el estimador MaSSFOC [Herrmann, 2001].

También, en [Zarzoso, 2005b] se demuestra que la solución proporcionada por JADE [Cardoso, 1993] en el caso bidimensional es equivalente a la proporcionada por el GWFOE con $\omega = 1/2$. Por otro lado, la parte del método CuBICA en [Blaschke, 2004] correspondiente con estadísticos de cuarto orden equivale a seleccionar $\omega = 3/7$ en el GWFOE. Además, si se toma $\beta = \pm 1$ en (2.50), el estimador ponderado generalizado de cuarto orden conduce también a los estimadores ML, MK y SKSE/SKDE de [Harroy, 1996],[Moreau, 1996],[Comon, 1997],[Cardoso,

1999],[Herrmann, 2001]. Éstos métodos requieren del conocimiento del signo de las kurtosis de las fuentes.

Como se ha visto, el uso del centroide ha permitido la conexión de diferentes soluciones para el caso bidimensional. La pregunta que se plantea es cómo encontrar el valor de ω que minimiza el error cuadrático medio (MSE, *mean square error*) asintótico (para un número creciente de muestras, T) del estimador GWFOE. Dicho MSE lo obtuvo Zarzoso en [Zarzoso, 2005a],[Zarzoso, 2005b], y viene dado por:

$$\text{MSE}_{GWFOE} = \frac{\text{E} \{ [\omega\gamma(s_1^3 s_2 - s_1 s_2^3) + (1-\omega)\eta(s_1^3 s_2 + s_1 s_2^3)]^2 \}}{T[\omega\gamma^2 + (1-\omega)\eta^2]^2} \quad (2.52)$$

Es interesante señalar que este MSE se reduce al de los estimadores AEML y EML cuando $\omega = 0$ y $\omega = 1$, respectivamente, lo cual se corresponde con los casos en los que el GWFOE coincide con estos estimadores. Si $|\kappa_{40}^s| \neq |\kappa_{04}^s|$, el mínimo de (2.52) viene dado por [Zarzoso, 2005a],[Zarzoso, 2005b]:

$$\omega_{opt} = \frac{1}{2} + \frac{\mu_{40}^s \mu_{04}^s [(\kappa_{40}^s)^2 - (\kappa_{04}^s)^2] + \kappa_{40}^s \kappa_{04}^s (\mu_{60}^s - \mu_{06}^s)}{2[(\kappa_{40}^s)^2 \mu_{06}^s - (\kappa_{04}^s)^2 \mu_{60}^s]}, \quad (2.53)$$

donde $\mu_{kj}^s = \text{E}[s_1^k s_2^j]$. Fuera del intervalo $\omega \in [1, 0]$, MSE_{GWFOE} es monótona y, por tanto, $\omega_{opt} = 1$ o $\omega_{opt} = 0$. Si $|\kappa_{40}^s| = |\kappa_{04}^s|$, entonces $\gamma = 0$ o $\eta = 0$. En ese caso, el comportamiento del GWFOE se reduce al del AEML o EML, respectivamente, para cualquier $0 < \omega < 1$.

En resumen, conocidas los estadísticos de las fuentes, se puede seleccionar el peso óptimo que conduce al mínimo MSE para GWFOE.

2.4.1 Efectividad del GWFOE

En [Zarzoso, 2005a] y [Zarzoso, 2005b] se pueden encontrar algunos experimentos que demuestran la efectividad del estimador ponderado generalizado de cuarto orden y la importancia del valor del peso ω elegido. Se reproduce aquí el experimento en el que se realiza una mezcla de dos fuentes independientes empleando una matriz unitaria con $\theta = 15^\circ$. Una de las fuentes tiene una distribución de tipo uniforme y la otra de tipo Rayleigh. En esta situación, y según la expresión (2.53), el peso óptimo es $\omega_{opt} = 0,7141$. Los centroides se calculan en su forma polar con (2.44)-(2.46). Como medida de efectividad en la separación se ha empleado la razón interferencia a señal (ISR). En la Figura 2.4 se muestra la ISR obtenida para los algoritmos EML, AEML, AML, MaSSFOC y GWFOE con el peso óptimo. Esta ISR ha sido promediada para ν realizaciones independientes, con $\nu T = 5 \cdot 10^6$. Se incluye en la misma figura el MSE asintótico esperado para cada algoritmo según la expresión (2.52). Se comprueba que el algoritmo GWFOE con el peso óptimo proporciona un resultado mejor que el resto de algoritmos. Además, se observa que existe una diferencia de hasta 10 dB entre el mejor y el peor resultado en función del peso elegido para el GWFOE. Este resultado destaca la importancia en la elección del peso. Por otro lado, la figura muestra que la aproximación asintótica dada en (2.52) es muy precisa en todos los casos, aumentando esa precisión con T .

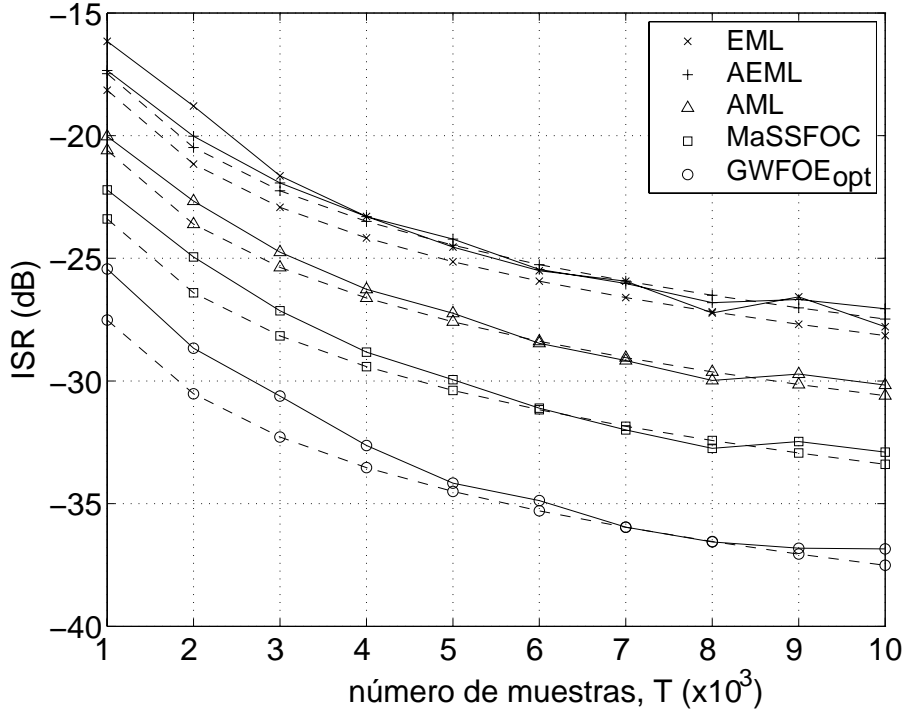


Figura 2.4: ISR obtenida con el GWFOE en función del número de muestras para diferentes valores del peso ω . Las líneas discontinuas muestran el error cuadrático medio asintótico según (2.52).

2.5 Extensión al caso n -dimensional

El estimador ponderado generalizado de cuarto orden, originalmente ideado para resolver problemas de separación ciega de fuentes de dos dimensiones, puede ser extendido a problemas de mayores dimensiones empleando técnicas iterativas equivalentes a la optimización de Jacobi. En los próximos apartados se mostrarán algunas de tales técnicas, las cuales se describen y comparan en detalle en [Zarzoso, 2005a] y [Zarzoso, 2005b]

2.5.1 Optimización de Jacobi

Comon [Comon, 1994] propuso aplicar un método de tipo optimización de Jacobi (JO) para extender el contraste bidimensional al caso n -dimensional. Básicamente, la JO aplicada a ICA consiste en descomponer la rotación a la que queda reducida la separación bajo la condición de blanqueo en un conjunto de rotaciones 2×2 aplicadas secuencialmente a cada par de salidas $[y_p(i), y_q(i)]^T$ $1 \leq p < q \leq n$, cuyos ángulos óptimos se despejan en forma cerrada mediante un estimador bidimensional, como el GWFOE.

Se incluye a continuación el algoritmo para la resolución del problema BSS N -dimensional empleando la optimización de Jacobi y utilizando el estimador GWFOE:

Algoritmo 2.1. *GWFOE n -dimensional empleando la optimización de Jacobi: JO-GWFOE.*

1. *Blanqueado.* Calcular una matriz de blanqueado \mathbf{W} y el vector de salida $\mathbf{z}(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i)$. Establecer $c = 1$ y $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$.
2. *Iteración c .* Para todos los pares $g = n(n-1)/2$, $1 \leq p < q \leq n$, hacer:
 - (a) Calcular el ángulo de Givens $\theta_{pq} = \hat{\theta}_{GWFOE}$ en (2.51) con $[z_p(i), z_q(i)]^T = [y_p(i), y_q(i)]^T$.
 - (b) Si $|\theta_{pq}| > \theta_{min}$, rotar $[y_p(i), y_q(i)]^T$ el ángulo θ_{pq} .
3. *¿Fin?* Si el número de iteraciones c alcanza el máximo $c = 1 + \sqrt{n}$ o ningún ángulo θ_{pq} ha sido actualizado, parar. En otro caso, ir al paso 2 para otra iteración con $c = c + 1$.

2.5.2 Optimización de Jacobi inicializada

En el algoritmo JO-GWFOE se debe calcular el ángulo $\theta_{pq} = \hat{\theta}_{GWFOE}$ en (2.51). Para ese cálculo, hay que obtener los centroides en (2.44)-(2.46) promediando para todo el conjunto de pares de muestras blanqueadas $[z_p(i), z_q(i)]^T$. Como el promedio se repite para varias iteraciones, este algoritmo puede ser muy costoso computacionalmente cuando el número de muestras es grande. Se puede plantear otra alternativa más eficiente de la siguiente manera. Mediante simple cálculo y trigonometría los tres centroides (2.44)-(2.46) se pueden escribir en función de los siguientes momentos del correspondiente par de salidas: $E[y_p(i)^{4-k}y_q(i)^k]$, para $k = 1, \dots, 4$. Considerando esto, se plantea la posibilidad de calcular este conjunto de momentos una sola vez al comienzo y simplemente rotarlos en cada paso del algoritmo, sin tener que volver a reutilizar las muestras de las observaciones. Ese es el principio del algoritmo basado en la optimización de Jacobi inicializada, propuesto en [Murillo-Fuentes, 2001c] y aplicado en [Murillo-Fuentes, 2003b].

Proposición 2.1. *Dado el modelo $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z}$ en (2.3), donde \mathbf{U} es una matriz de dimensiones $n \times n$, existe una matriz simétrica \mathbf{M}^z de dimensiones $r \times r$, $r = n(n+1)/2$, con entradas (a, b) dadas por*

$$\mathbf{M}^z(a(i, j), b(k, l)) = M_{ijkl}^z = E[z_i z_j z_k z_l], \quad (2.54)$$

donde

$$a(i, j) = n(i-1) + \frac{i}{2}(1-i) + j \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (2.55)$$

$$b(k, l) = n(k-1) + \frac{k}{2}(1-k) + l \quad 1 \leq k \leq l \leq n. \quad (2.56)$$

Además existen unos vectores \mathbf{v}_{pp} , \mathbf{v}_{pq} y \mathbf{v}_{qq} de longitud r tales que los momentos de cuarto

orden de las salidas $[y_p(i), y_q(i)]^T$ se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
E[y_p^4] &= \mathbf{v}_{pp}^T \mathbf{M}^z \mathbf{v}_{pp} \\
E[y_q^4] &= \mathbf{v}_{qq}^T \mathbf{M}^z \mathbf{v}_{qq} \\
E[y_p^2 y_q^2] &= \mathbf{v}_{pp}^T \mathbf{M}^z \mathbf{v}_{qq} \\
E[y_p y_q^3] &= \mathbf{v}_{pq}^T \mathbf{M}^z \mathbf{v}_{qq} \\
E[y_p^3 y_q] &= \mathbf{v}_{pp}^T \mathbf{M}^z \mathbf{v}_{pq},
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Demostración. Tras algunos cálculos simples, se puede comprobar que las expresiones en (2.57) son casos particulares de la siguiente:

$$E[y_p y_q y_r y_s] = \sum_{ij} U(p, i) U(q, j) \sum_{kl} U(r, k) U(s, l) M_{ijkl}^z. \tag{2.58}$$

Sea la matriz \mathbf{M}^z definida en (2.54), cuyas entradas son los momentos de orden cuarto μ_{ijkl}^z . El cálculo de (2.58) se puede reescribir introduciendo un par de “vectores de rotación”, como se indica en (2.57), cuyas entradas vienen dadas por

$$\mathbf{v}_{pq}(a) = \begin{cases} \mathbf{U}(p, i) \mathbf{U}(q, j) + \mathbf{U}(p, j) \mathbf{U}(q, i), & i \neq j \\ \mathbf{U}(p, i) \mathbf{U}(q, i), & i = j \end{cases}$$

donde $a = a(i, j)$ viene dada por (2.55). \square

La formulación introducida por la Proposición (2.1) permite encontrar de forma rápida los estadísticos de las salidas cuando se conoce la matriz de rotación. Nótese que $M_{ijkl}^z = M_{jikl}^z = M_{kji l}^z = M_{ikjl}^z = \dots$, por tanto, sólo se calcula el subconjunto de momentos diferentes M_{ijkl}^z , $1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$, lo que reduce el número de momentos calculados a $(n+3)!/((n-1)!4!)$. El siguiente algoritmo utiliza la inicialización descrita:

Algoritmo 2.2. *GWFOE n -dimensional empleando la optimización de Jacobi inicializada: IJO-GWFOE.*

1. *Blanqueado.* Calcular la matriz de blanqueado \mathbf{W} y $\mathbf{z}(i) = \mathbf{W} \mathbf{x}(i)$.
2. *Inicialización de los momentos.* Calcular \mathbf{M}^z en (2.54) estimando M_{ijkl}^z con las muestras blanqueadas. Inicializar la matriz de rotación como $\mathbf{U} = \mathbf{I}$.
3. *Iteración c.* Para todos los $g = n(n-1)/2$ pares, es decir, para $1 \leq p < q \leq n$, hacer
 - (a) Calcular los momentos para el par $[y_p(i), y_q(i)]^T$ en (2.57) con \mathbf{U} . Calcular el ángulo de Givens $\theta_{pq} = \hat{\theta}_{GWFOE}$ en (2.51).
 - (b) Si $|\theta_{pq}| > \theta_{min}$, actualizar la matriz de rotación \mathbf{U} con el ángulo de rotación θ_{pq} .
4. *¿Fin?* Si el número de iteraciones c satisface $c = 1 + \sqrt{n}$ o ningún ángulo θ_{pq} ha sido actualizado, para. En otro caso ir al paso 3 para otra iteración con $c = c + 1$.

La principal ventaja de este método es que la matriz \mathbf{M} se calcula sólo una vez. Los momentos para cada par de salidas necesarios en cada paso del algoritmo se calculan mediante simples productos de vectores y matrices. Sin embargo, para un número grande de componentes, el número de entradas de la matriz de momentos es del orden de $\mathcal{O}(n^4)$. En ese caso este método se hace inviable por motivos de memoria necesaria y porque los cálculos (2.57) consumen demasiados recursos. De forma similar al algoritmo presentado, el JADE [Cardoso, 1993] calcula una matriz de cumulantes al comienzo. Pero esta matriz se actualiza en cada paso del cálculo del ángulo de Givens. Otra diferencia es que esa matriz tiene más elementos que \mathbf{M}^z en (2.54).

2.5.3 Complejidad computacional: optimización de Jacobi óptima

Se puede calcular la complejidad computacional de los anteriores algoritmos JO-GWFOE e IJO-GWFOE, para después, determinar cuándo es mejor emplear la inicialización y cuando no. Para comparar ambos algoritmos, calcularemos el número de operaciones en punto flotante (flop), las cuales, como en [Zarzoso, 2000], se considera que están formadas por una multiplicación real seguida de una suma.

El número de pares de señal con los que se trabaja en los algoritmos es igual a $g = n(n-1)/2$ y el número máximo de iteraciones de la optimización de Jacobi viene dado por $K = 1 + \sqrt{n}$.

Considerando que la complejidad computacional de la estimación de un momento de cuarto orden a partir de las muestras blanqueadas es $3T$ flops, el número total de flops para el algoritmo JO-GWFOE es

$$f_{JO} = 15gKT + 4gKT = 19gKT, \quad (2.60)$$

donde el primer término tiene en cuenta la carga computacional correspondiente al cálculo de todos los momentos necesarios, mientras que el segundo término tiene en cuenta las rotaciones realizadas en el paso 2.b del algoritmo.

Por su parte, el número de flops necesarios para ejecutar el algoritmo IJO-GWFOE viene dado por:

$$f_{IJO} = 3T \binom{n+3}{4} + gKr(r+1), \quad (2.61)$$

donde $r = n(n+1)/2$ representa las dimensiones de la matriz de momentos \mathbf{M}^z en (2.54). El primer término de f_{IJO} tiene en cuenta el número de operaciones necesarias para calcular las entradas de esta matriz. Puesto que al calcular esos momentos se repiten algunas de las multiplicaciones, este primer término se puede reducir a

$$3T \binom{n+3}{4} \longrightarrow T \left\{ \binom{n+3}{4} + \binom{n+1}{2} \right\}. \quad (2.62)$$

El segundo término de f_{IJO} tiene en cuenta el número de flops necesarias para el cálculo de los momentos en (2.57) para cada ángulo de Givens.

Se puede encontrar la relación entre f_{JO} y f_{IJO} :

$$\Gamma(n, T) = \frac{f_{JO}}{f_{IJO}} = \frac{19gKT}{T \left\{ \binom{n+3}{4} + \binom{n+1}{2} \right\} + gKr(r+1)}. \quad (2.63)$$

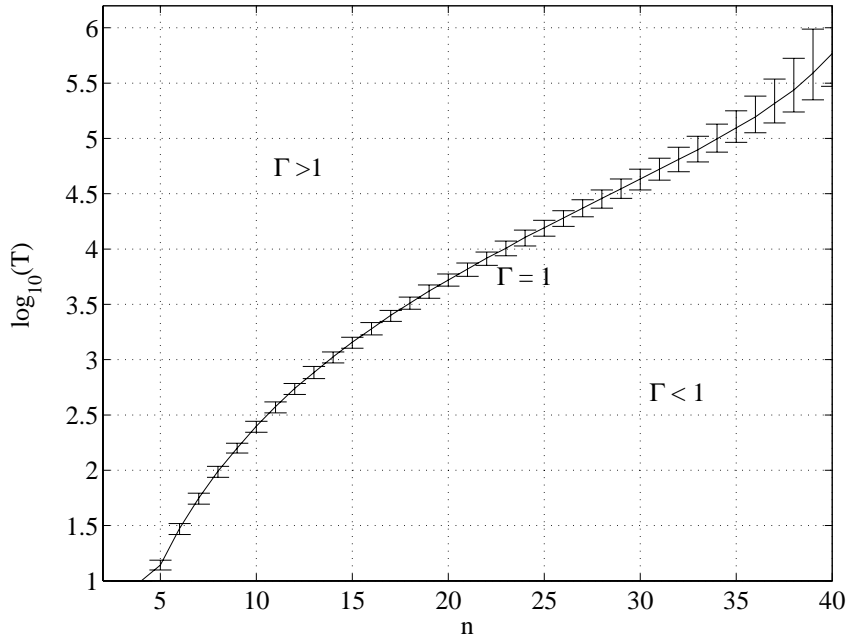


Figura 2.5: Representación de $\Gamma(n, T) = 1$. Las líneas verticales representan el rango de (n, T) con valores de Γ entre 0,9 y 1,1.

En la Figura 2.5 se representa $\Gamma(n, T) = 1$ en el plano (n, T) . A la vista de esta figura, y puesto que el número de muestras es habitualmente mayor que 10^2 , se debe emplear el algoritmo IJO-GWFOE cuando el número de fuentes sea pequeño: $n \leq 5$. Cuando n crece, el número de momentos M_{ijkl}^z se hace del orden de $\mathcal{O}(n^4)$, de manera que $\Gamma(n, T) < 1$ para cualquier T . En este caso, se debe emplear el algoritmo JO-GWFOE. En general, en función de $\Gamma(n, T)$, se puede exponer el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2.3. *GWFOE n -dimensional empleando la optimización de Jacobi computacionalmente óptima: OJO-GWFOE.*

1. Calcular $\Gamma(n, T)$ en (2.63) y decidir.
 - (a) Si $\Gamma(n, T) < 1$, emplear el algoritmo JO-GWFOE.
 - (b) En caso contrario, emplear el algoritmo IJO-GWFOE.

2.5.4 Optimización de Jacobi adaptativa

El algoritmo JO-GWFOE se puede extender de forma simple a una versión adaptativa, el algoritmo GWFOE basado en la optimización de Jacobi adaptativa (AJO, *adaptive Jacobi optimization*). En el algoritmo JO-GWFOE, los centroides en (2.44)-(2.46) se deben calcular para cada iteración c y cada par de señal (p, q) . En la versión adaptativa, los centroides se deben

actualizar además para cada nueva muestra recibida en el instante t :

$$\xi_{\gamma}^{(c,pq)}(t+1) = (1-\lambda)\xi_{\gamma}^{(c,pq)}(t) + \lambda r_{c,pq}^4(t)e^{j4\phi_{c,pq}(t)}, \quad (2.64)$$

$$\xi_{\eta}^{(c,pq)}(t+1) = (1-\lambda)\xi_{\eta}^{(c,pq)}(t) + \lambda r_{c,pq}^2(t)e^{j2\phi_{c,pq}(t)}, \quad (2.65)$$

$$\beta^{(c,pq)}(t+1) = (1-\lambda)\beta^{(c,pq)}(t) + \lambda(r_{c,pq}^4(t) - 8), \quad (2.66)$$

donde λ es el coeficiente de adaptación.

Igualmente la matriz de blanqueo, necesaria para obtener el vector de mezcla blanqueo $\mathbf{z}(t)$, se puede actualizar de forma adaptativa, por ejemplo mediante el algoritmo basado en el gradiente relativo (se verá en el Apartado 2.6):

$$\mathbf{W}(t+1) = \mathbf{W}(t) + \alpha \frac{\mathbf{I} - \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T}{1 + \alpha|\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)|} \mathbf{W}(t), \quad (2.67)$$

donde α es el coeficiente de adaptación, que puede ser igual o no a λ .

Algoritmo 2.4. *GWFOE n -dimensional empleando la optimización de Jacobi adaptativa: AJO-GWFOE.*

Establecimiento inicial de valores: $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}_{n \times m}$

En cada instante de muestreo, ejecutar el algoritmo JO-GWFOE cambiando los siguientes pasos:

1. *Paso 1.* Actualizar la matriz de blanqueo $\mathbf{W}(t)$ empleando (2.67). Calcule $\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t)$. Establezca $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t)$ y $c = 1$.
2. *Paso 2.a.* Emplear $[z_p(t), z_q(t)]^T = [y_p(t), y_q(t)]^T$ para actualizar los centroides $\xi_{\gamma}^{(c,pq)}(t)$, $\xi_{\eta}^{(c,pq)}(t)$, $\beta^{(c,pq)}(t)$ en (2.64)-(2.66). Calcular el ángulo de Givens $\theta_{pq} = \hat{\theta}_{GWFOE}$ en (2.51) con esos centroides.

Se puede comprobar que este algoritmo, que es la versión adaptativa del algoritmo JO-GWFOE, es equivalente al algoritmo adEML en [Zarzoso, 2000] cuando $\omega = 1$, puesto que éste es la versión adaptativa del EML.

2.5.5 Optimización de Jacobi inicializada adaptativa

Los centroides adaptativos en (2.64)-(2.66) se pueden también expresar en función de los momentos de las salidas calculados adaptativamente. Así, se puede partir del cálculo de una matriz de momentos inicial \mathbf{M}^z , introducida en la Proposición 2.1, y actualizarla con cada nueva muestra con

$$\mathbf{M}^z(t+1) = (1-\nu)\mathbf{M}^z(t) + \nu\mathcal{M}^z(t), \quad (2.68)$$

donde $\mathcal{M}^z(t)$ se calcula igual que la matriz \mathbf{M}^z en (2.54) pero empleando sólo las muestras en el instante t de las mezclas blanqueadas, $\mathbf{z}(t)$. Esta técnica fue introducida en [Murillo-Fuentes,

2001c] y aplicada en [Murillo-Fuentes, 2003a]. Empleando (2.68), se puede encontrar la versión adaptativa del algoritmo IJO-GWFOE:

Algoritmo 2.5. *GWFOE n -dimensional empleando la optimización de Jacobi inicializada adaptativa: AIJO-GWFOE.*

Establecimiento inicial de valores: $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}_{n \times m}$ y $\mathbf{V}(0) = \mathbf{I}_n$.

En cada instante de muestreo:

1. *Blanqueado.* Actualizar la matriz de blanqueado $\mathbf{W}(t)$ como en (2.67) y calcular $\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t)$.
2. *Actualización de la Matriz de Momentos.* Calcular de forma adaptativa la matriz $\mathbf{M}^z(t)$ en (2.68) empleando $\mathbf{z}(t)$ para calcular $\mathcal{M}^z(t)$.

Cada N muestras: establecer el número de iteración $c = 1$ y ejecutar los pasos 3)-4) del algoritmo IJO-GWFOE.

En el Algoritmo AJO-GWFOE, en una iteración dada, los centroides se actualizan a partir de las muestras del último par de salidas estimadas, $[y_p(i), y_q(i)]^T$. Pero estas salidas dependen de los estadísticos actualizados con los anteriores pares de salidas y en los pasos de iteración anteriores. Por tanto, los estadísticos de las últimas iteraciones no pueden converger hasta que lo hacen los de las iteraciones precedentes. Más aún, fluctuaciones alrededor del punto de convergencia de los estadísticos en la primeras iteraciones hacen que los estadísticos en las últimas iteraciones también fluctúen de una manera difícil de predecir. Como el número de iteraciones crece con las dimensiones del problema, el AJO-GWFOE muestra problemas de convergencia cuando el número de fuentes es grande.

En cambio, en el Algoritmo AIJO-GWFOE el aprendizaje de la separación y el cálculo de la solución se han desacoplado. En una primera etapa, los momentos se actualizan con la última muestra de las observaciones blanqueadas. En una segunda etapa, se puede calcular la matriz de separación actual $\mathbf{B}(t)$. La solución de la matriz de separación es adecuada si el aprendizaje de \mathbf{M}^z ha convergido. Resultados clásicos sobre análisis de algoritmos adaptativos [Benveniste, 1990] muestran que, si los momentos de las salidas blanqueadas están bien definidos, el punto de equilibrio de la actualización de la matriz de momentos (2.68) es localmente asintóticamente estable. Por tanto, el proceso en dos etapas del AIJO-GWFOE mejora la estabilidad y la tasa de convergencia del AJO-GWFOE.

Por otro lado, destacar que en el Algoritmo AIJO-GWFOE, el cálculo de la separación se puede hacer sólo cada N muestras, lo que puede acelerar el proceso.

2.5.6 Complejidad computacional de los algoritmos basados en la optimización de Jacobi adaptativa

En este apartado, se va a calcular la complejidad computacional del Algoritmo AIJO-GWFOE para compararla con la de los Algoritmos AJO-GWFOE, AROT [Comon, 1989] y EASI [Cardoso, 1996].

Leyendo el Algoritmo AIJO-GWFOE, se observa que en cada instante de muestreo se deben ejecutar las siguientes acciones:

1. Blanqueado: el proceso de blanqueado en (2.67) supone $n^3 + n^2$ flops.
2. Cálculo de la matriz de momentos: como se ha descrito anteriormente, el número de flops necesarios para calcular $\mathcal{M}^z(t)$ se puede reducir a $\binom{n+3}{4} + \binom{n+1}{2}$.
3. Actualización de la matriz de momentos: la actualización de $\mathbf{M}^z(t)$ en (2.68) precisa $r^2 = \binom{n+1}{2}^2$ flops.

Además, cada N muestras se calculan las salidas, de manera que para todos los pares de señales se ejecuta lo siguiente:

4. Cálculo de los momentos: como se ha descrito antes, el número de flops necesarios para calcular los centroides en (2.57) es aproximadamente $gKr(r+1)$, donde K indicaba el número máximo de iteraciones y g el número de pares.
5. Cálculo de $\hat{\theta}_{GWFOE}$: empleando (2.51) se precisan aproximadamente $f = 26$ flops para cada par.
6. Rotación: 4 flops para cada par.

En total se tienen $\binom{n+3}{4} + \binom{n+1}{2} \left[\binom{n+1}{2} + 1 \right] + n^3 + n^2$ flops por iteración, más un número de flops no superior a $(1 + \sqrt{n}) \frac{n(n-1)}{2} \left[\binom{n-1}{2}^3 + \binom{n+1}{2} + 26 + 4 \right]$ cada N iteraciones.

Para comparar esta carga con el Algoritmo AJO-GWFOE, se considera el Algoritmo adEML (caso $\omega = 1$). En [Zarzoso, 2000] se han estimado las siguientes cargas computacionales para los Algoritmos adEML, AROT y EASI:

- adEML: $C_{adEML} = C_{AJO-GWFOE} = (18 + f)(1 + \sqrt{n}) \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$ flops por iteración,
- AROT: $C_{AROT} = (14 + f)(1 + \sqrt{n}) \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$ flops por iteración,
- EASI: $C_{EASI} = n^3 + 3n^2 + hn$ flops por iteración,

donde $f = 26$ flops y h representa el número de flops necesarios para cada elemento de la no-linealidad (por ejemplo, para una no-linealidad cúbica, $h = 2$).

Se observa que al tomar $N = 1$, la carga computacional del AIJO es siempre superior que la adEML, AROT o EASI. Sin embargo, si N aumenta y el número de fuentes no es grande, se

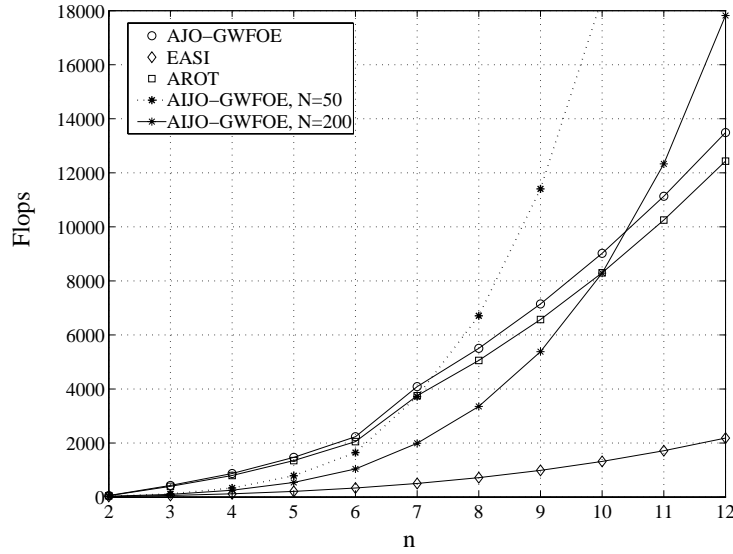


Figura 2.6: Carga computacional en función del número de fuentes.

puede conseguir que la complejidad del AIJO esté por debajo de la de los Algoritmos adEML y AROT, y cerca de la complejidad del EASI. Esta afirmación se muestra en la Figura 2.6, donde se han representado las cargas computacionales de los algoritmos para el caso $N = 50$ y $N = 200$. Se puede comprobar que cuando se selecciona $N = 50$ y el número de fuentes $n \leq 7$, o cuando se selecciona $N = 200$ y $n \leq 10$, el Algoritmo AIJO tiene una carga computacional inferior a la del adEML y AROT, y acercándose al orden de magnitud de la carga computacional de EASI.

2.5.7 Efectividad de los algoritmos OJO-GWFOE y AIJO-GWFOE

1. Algoritmo OJO-GWFOE

En [Zarzoso, 2005a] y [Zarzoso, 2005b] se compara la respuesta del Algoritmo OJO-GWFOE utilizando SICA ($\omega = 3/7$) con el JADE [Cardoso, 1993],[Cardoso, WWW], ME de Comon [Comon, 1994],[Comon, WWW] y FastICA [Hyvärinen, 1999],[Hurri, 1998]. Se reproducen aquí los resultados obtenidos.

En todos los casos se ha empleado el mismo método de blanqueado, para centrar la comparación en la rotación. El código del Algoritmo ME de Comon se ha modificado ligeramente para ahorrar algunas operaciones. Los Algoritmos OJO-GWFOE, JADE y ME de Comon paran si la actualización de todos los ángulos de los pares es inferior a $\theta_{min} = \pi/360$ radianes, o se han realizado un número de iteraciones superior a $K = 1 + \sqrt{n}$. El FastICA se ha ejecutado con sus valores por defecto, incluida la estabilización. Las matrices de mezcla tienen entradas formadas por números aleatorios en el intervalo $[-1, 1]$. Se han mezclado $n = 6$ señales con media cero, varianza uno y las siguientes distribuciones: uniforme, Laplaciana, Rayleigh, exponencial, Gaussiana y lognormal. Se estudia la efectividad de los algoritmos en el rango $3 \cdot 10^3 \leq T \leq 3 \cdot 10^4$.

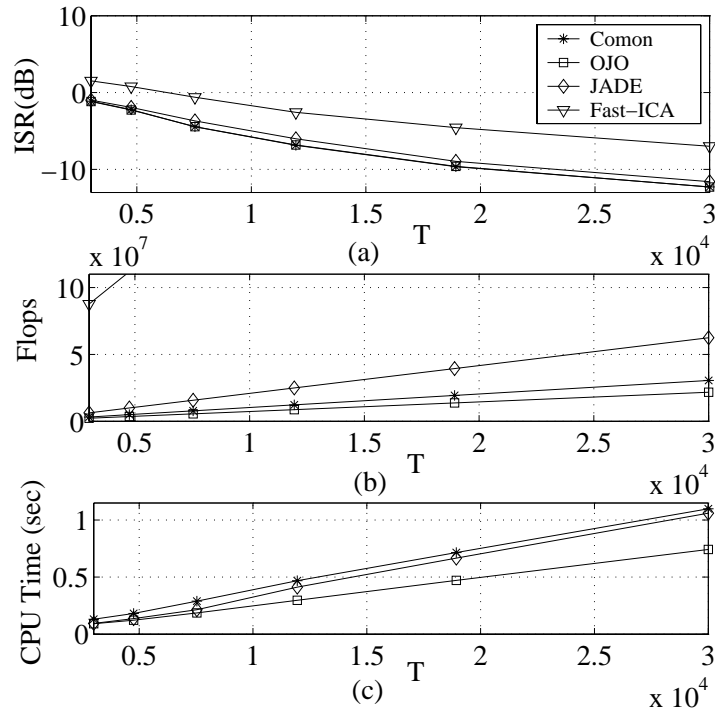


Figura 2.7: Caso $n = 6$: a) ISR promedio, b) número de flops y c) tiempo de CPU.

Los experimentos se han realizado empleando MATLAB con un procesador Intel Pentium 4 a 2,4 GHz y con una memoria RAM de 512 Mb. Se han utilizado el contador de flops y de tiempo de CPU para comparar las cargas computacionales de los algoritmos. El resultado se muestra en la Figura 2.7, donde se observa que la ISR del OJO-GWFOE y del ME de Comon son muy parecidas, como cabría esperar. La ISR del JADE es también parecida a la de los anteriores algoritmos, siendo el resultado para el FastICA el peor. Respecto a la carga computacional, se observa que el algoritmo OJO-GWFOE supera a los otros algoritmos. Es interesante comprobar que el Algoritmo JADE necesita un número de operaciones superior al ME, pero consume menos tiempo de CPU. Por su parte, el Algoritmo FastICA, empleando los parámetros por defecto no tiene un buen comportamiento en este experimento, mostrando una convergencia bastante pobre y una carga computacional que se sale del rango representado en la Figura.

2. Algoritmo AIJO-GWFOE

Al algoritmo AIJO-GWFOE utilizando SICA ($\omega = 3/7$) se compara en [Zarzoso, 2005a] y [Zarzoso, 2005b] con los algoritmos AJO-GWFOE usando $\omega = 1$ y el algoritmo EASI [Cardoso, 1996]. El coeficiente de adaptación para el blanqueo y para el EASI se fijó a $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$. El coeficiente de aprendizaje se fijó a $\nu = 10^{-3}$. La solución para el algoritmo AIJO-GWFOE se calculó en cada muestra, es decir, para $N = 1$. En primer lugar se considera la mezcla de tres fuentes independientes: una secuencia binaria, un proceso uniformemente distribuido y una señal senoidal de frecuencia y fase aleatorias. Como medida de eficacia en la separación se ha

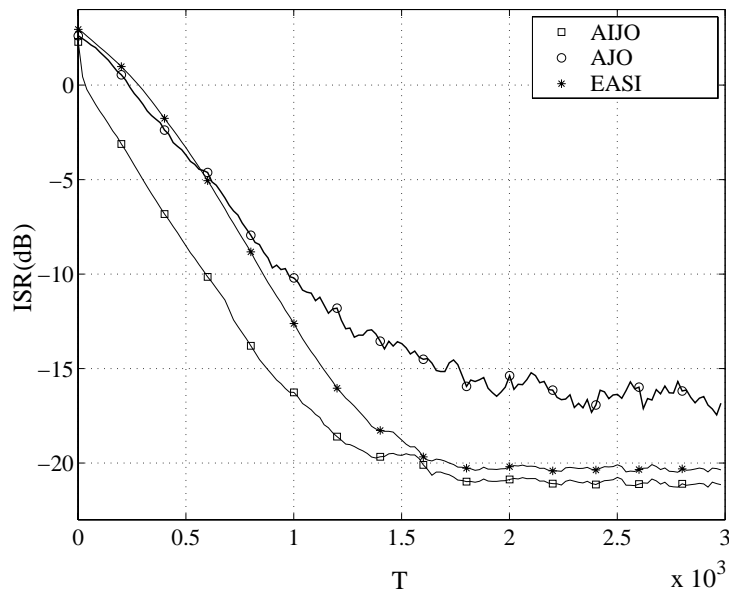


Figura 2.8: ISR para el caso $n = 3$.

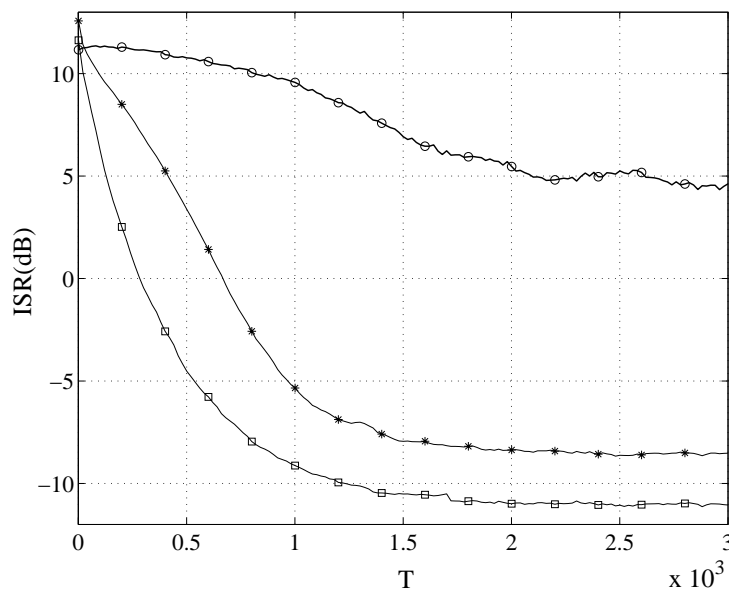


Figura 2.9: ISR para el caso $n = 8$ (véase la leyenda de la Figura 2.8).

empleado la ISR. En la Figura 2.8 se muestra dicha ISR para los tres algoritmos. Se comprueba como el algoritmo AIJO-GWFOE converge antes y alcanza un valor estacionario menor que los otros dos.

En un segundo experimento se han mezclado ocho fuentes independientes: seis procesos uniformemente distribuidos, una secuencia binaria y una señal senoidal de frecuencia y fase aleatorias. La Figura 2.9 muestra la ISR en esta nueva situación. De nuevo se muestra el buen comportamiento del algoritmo AIJO-GWFOE, en claro contraste con el AJO-GWFOE

con $\omega = 1$, que muestra una pobre convergencia.

2.6 Algoritmos adaptativos basados en descenso de máxima pendiente

En los apartados anteriores se ha introducido una técnica que permite resolver el problema BSS n -dimensional extendiendo la solución para el caso bidimensional. También se ha mostrado que se puede resolver el caso bidimensional empleando estimadores, como por ejemplo el GWFOE, obtenidos al minimizar una función contraste. Cuando se trata de minimizar una función respecto de un parámetro, una alternativa muy conocida es el descenso de máxima pendiente. La técnica de minimización basada en descenso de máxima pendiente consiste en actualizar la solución en un instante mediante un pequeño desplazamiento en sentido opuesto al del gradiente en dicho punto de la función que se quiere minimizar.

En el espacio Euclídeo, el gradiente convencional indica la dirección óptima de actualización de la solución hacia el mínimo de la función objetivo. Es decir, si la función que se quiere minimizar, o función de coste, es $L(\mathbf{B})$, la ley de aprendizaje basada en el gradiente convencional quedaría:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda \nabla L(\mathbf{B}_k), \quad (2.69)$$

donde λ es una tasa de aprendizaje positiva generalmente muy pequeña.

Sin embargo, en BSS el parámetro respecto al que se debe minimizar es la matriz de separación \mathbf{B} , que pertenece al espacio de matrices invertibles. Dicho espacio no es Euclídeo, por tanto la dirección de máximo descenso no es el gradiente convencional, $\nabla L(\mathbf{B})$, sino el gradiente natural o relativo, $\tilde{\nabla} L(\mathbf{B})$, que tiene en cuenta la métrica del espacio.

2.6.1 Gradiente estocástico.

La función de coste $L(\mathbf{B})$ se puede definir en términos de las medidas de la señal o en términos de las distribuciones de probabilidad correspondientes a medidas concretas de la señal. Cuando la función de coste depende de las medidas de la señal, como sucede en criterios deterministas (por ejemplo, en las funciones de coste de mínimos cuadrados), el gradiente también depende de las medidas de la señal y se puede evaluar cuando esas medidas han sido obtenidas. Por el contrario, cuando la función de coste $L(\mathbf{B})$ se define en términos de distribuciones de probabilidad desconocidas de un conjunto de medidas de la señal, se deben emplear esas medidas para estimar el gradiente. En general, se puede definir una función de coste basada en las medidas de la señal $l(\mathbf{B})$ de manera que se cumpla que

$$L(\mathbf{B}) = E[l(\mathbf{B})]. \quad (2.70)$$

Así, se obtiene la ley de aprendizaje basada en el gradiente estocástico [Haykin, 2000b],

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda \nabla l(\mathbf{B}_k). \quad (2.71)$$

A medida que el número de muestras de la señal empleadas para el cálculo crece, el valor de $\nabla l(\mathbf{B})$ tiende al gradiente $\nabla L(\mathbf{B})$. El número de muestras necesarias para que esta ley de aprendizaje sea efectiva depende de la aplicación concreta.

2.6.2 Gradiente relativo y gradiente natural.

El gradiente natural fue introducido por [Amari, 1997]. De forma independiente y por un camino diferente, [Cardoso, 1997] introdujo el gradiente relativo, equivalente al natural.

Como se ha comentado, la matriz \mathbf{B} es una matriz invertible, por tanto, el espacio de los parámetros consiste en todas las matrices no singulares. Esto es un grupo multiplicativo donde la matriz identidad es la unidad. Además, forma un grupo de Lie. Esta propiedad se utilizó en [Amari, 1998] para introducir una métrica natural de Riemann en el espacio de \mathbf{B} . Se demuestra que la verdadera dirección de máximo descenso de una función $L(\mathbf{B})$ en el espacio de Riemann de \mathbf{B} no viene dada por el gradiente convencional, sino por

$$-\tilde{\nabla}L(\mathbf{B}) = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{B})\nabla L(\mathbf{B}), \quad (2.72)$$

donde \mathbf{G}^{-1} es la inversa de la métrica \mathbf{G} del espacio. En el problema de separación ciega de fuentes, el cálculo de la métrica conduce a [Haykin, 2000b]

$$\tilde{\nabla}L(\mathbf{B}) = \nabla L(\mathbf{B})\mathbf{B}^T\mathbf{B}. \quad (2.73)$$

Una vez definido este tipo de gradiente, su ley de aprendizaje queda:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda\tilde{\nabla}L(\mathbf{B}_k) = \mathbf{B}_k - \lambda\nabla L(\mathbf{B}_k)\mathbf{B}_k^T\mathbf{B}_k. \quad (2.74)$$

Estas relaciones se extienden fácilmente al caso estocástico. Si $L[\mathbf{y}] = E[l(\mathbf{y})]$ se escribe

$$\tilde{\nabla}l = \nabla l\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B}^T\mathbf{B} \quad (2.75)$$

y la ley de aprendizaje estocástica para el gradiente natural queda:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda\frac{\partial l}{\partial \mathbf{B}_k}\mathbf{B}_k^T\mathbf{B}_k \quad (2.76)$$

2.6.3 Ley de aprendizaje de gradiente natural estocástico para ML

Una vez definida la ley de aprendizaje para el gradiente natural, falta calcular la función de coste que permita obtener la separación. Esta función se puede obtener a partir del contraste ML, donde se considera una fdp supuesta $q(\mathbf{y})$:

$$D_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{y})}{q(\mathbf{y})} d\mathbf{y}. \quad (2.77)$$

Esta divergencia se puede descomponer como se hizo para llegar a (2.14),

$$D_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log q(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.78)$$

Desarrollando el segundo término queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log q(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \sum_{i=1}^n \log q_i(y_i) d\mathbf{y} = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \log q_i(y_i) \right]. \quad (2.79)$$

El primer término de (2.78) es la entropía diferencial de \mathbf{y} en (2.12) cambiada de signo. Por tanto, considerando la transformación $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, ese término queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}) \log p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -H(\mathbf{y}) = -H(\mathbf{x}) - \log |\det(\mathbf{B})| \quad (2.80)$$

Finalmente, ignorando el término $H(\mathbf{x})$, que no depende de la matriz \mathbf{B} , se puede encontrar la siguiente función de coste para la versión estocástica del gradiente,

$$l(\mathbf{y}) = -\log |\det \mathbf{B}| - \sum_{i=1}^n \log q_i(y_i). \quad (2.81)$$

El gradiente convencional de esta función (gradiente estocástico) viene dado por [Haykin, 2000b]:

$$\nabla l(\mathbf{y}) = -\mathbf{B}^T + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\mathbf{x}^T, \quad (2.82)$$

donde $\varphi_i(y_i) = -\frac{q'_i(y_i)}{q_i(y_i)}$ recibe el nombre de función de activación o de puntuación. Suponiendo las distribuciones de las fuentes desconocidas, estas funciones de puntuación también lo son. Cada autor propone su propia función de puntuación [Amari, 1998].

De este resultado, y recordando (2.76), se puede obtener la ley de aprendizaje de gradiente natural estocástico para ML,

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda[\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\mathbf{y}^T]\mathbf{B}_k. \quad (2.83)$$

Esta familia de leyes de aprendizaje, a parte de mostrar una convergencia más rápida que la basada en el gradiente convencional, presenta un buen comportamiento independiente de la matriz de mezcla, al menos para niveles bajos de ruido. Es lo que se conoce como “comportamiento uniforme” (*uniform performance*).

Existen distintas versiones de la ley de aprendizaje de gradiente relativo o natural de ML. En [Haykin, 2000b] se incluyen algunas, de las cuales cabe destacar:

- NG-ML generalizado

Si la ley de aprendizaje (2.83) fuerza la cancelación de la correlación entre una función no lineal de la salida $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ y la propia salida \mathbf{y} , es posible escribir una nueva ley de aprendizaje que cancele la correlación entre dos funciones no lineales de \mathbf{y} , $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ y $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$. De esta forma la ley de aprendizaje queda

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda[\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_k)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_k)^T]\mathbf{B}_k, \quad (2.84)$$

donde $\boldsymbol{\Delta}$ es una matriz diagonal, y $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ y $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$ se deben elegir para que $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$ o $\mathbb{E}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$.

Esta idea se expuso en primer lugar en [Cichocki, 1994]. No es una ley de aprendizaje eficiente en el caso sin ruido, pero tiene un comportamiento robusto en presencia de ruido aditivo.

- Algoritmo EASI

En [Cardoso, 1996] se presenta un método basado en el gradiente relativo, el llamado EASI (*equivariant adaptive separation via independence*), cuya ley de aprendizaje es

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda [\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T - \mathbf{I} + (\varphi(\mathbf{y}_k) \mathbf{y}_k^T - \mathbf{y}_k \varphi(\mathbf{y}_k)^T)] \mathbf{B}_k, \quad (2.85)$$

y en su versión normalizada,

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda \left[\frac{\mathbf{y} \mathbf{y}^T - \mathbf{I}}{1 + \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{y}} + \frac{\varphi(\mathbf{y}) \mathbf{y}^T - \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y})^T}{1 + \lambda |\mathbf{y}^T \varphi(\mathbf{y})|} \right] \mathbf{B}_k. \quad (2.86)$$

En el desarrollo de esta ley de aprendizaje [Cardoso, 1996], primero se realiza la proyección de (2.83) en el espacio de matrices simétricas y luego en el espacio de matrices antisimétricas, despreciando los términos en $(\varphi(\mathbf{y}_k) \mathbf{y}_k^T)$ ó $\mathbf{y}_k \varphi(\mathbf{y}_k)^T$ de orden superior. El resultado es una primera parte que lleva a cabo la decorrelación o blanqueado, y otra que efectúa una rotación.

Indicar también que en el caso de señales complejas, los operadores $(\cdot)^T$ se convierten en $(\cdot)^H$, es decir, en la traspuesta conjugada.

- Algoritmo M-EASI

En [Murillo-Fuentes, 2000] y [Murillo-Fuentes, 2001c] se introdujo el concepto de gradiente de la mediana. La aplicación de ese gradiente a una ley de aprendizaje similar a la del algoritmo EASI conduce al algoritmo M-EASI:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda \left[\frac{\mathbf{y} \operatorname{sgn}(\mathbf{y})^H - \mathbf{I}}{1 + \lambda \cdot \operatorname{sgn}(\mathbf{y})^H \mathbf{y}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi(\mathbf{y}) \mathbf{y}^H - \operatorname{sgn}(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y})^H}{1 + \lambda |\mathbf{y}^H \varphi(\mathbf{y})|} \right] \mathbf{B}_k, \quad (2.87)$$

con $\operatorname{sgn}(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(\Re(\mathbf{y})) + j \operatorname{sgn}(\Im(\mathbf{y}))$ si $\mathbf{y} \in \mathbb{C}$.

Una ventaja importante de este algoritmo es que es capaz de recuperar las fases en el caso de fuentes moduladas digitalmente.

Capítulo 3

Detección Multiusuario

El presente capítulo sirve de introducción a la detección multiusuario (MUD, *multi-user detection*), que consiste en la detección de la información transmitida por un determinado usuario cuando comparte el canal de comunicación con otros usuarios que transmiten de forma simultánea. En los próximos apartados se definirán los modelos básicos de los canales síncrono y asíncrono en CDMA, y en particular para el caso de espectro ensanchado de secuencia directa. Posteriormente, se introducirá el concepto de detector multiusuario lineal. En primer lugar, se definirá el detector lineal más simple, basado en el filtro adaptado. Con el objetivo de mejorar la detección en presencia de interferencia multiusuario, se introducen otros dos detectores multiusuario lineales: el decorrelador y el MMSE. Finalmente, se describe un detector multiusuario para CDMA basado en separación ciega de fuentes. En éste, se combinan la técnica de detección basada en estadísticos de segundo orden con estadísticos de orden superior.

3.1 Introducción a la Detección Multiusuario

El acceso de múltiples usuarios a un mismo canal de comunicaciones para permitir el envío de información de manera simultánea por todos ellos ha sido motivo de estudio desde el inicio del desarrollo las telecomunicaciones. En un sistema de comunicaciones en el que el número de usuarios potenciales es elevado, y en el que éstos necesitan ocupar un ancho de banda cada vez mayor para permitir tasas de transmisión elevadas, es necesario buscar mecanismos que permitan que el canal se comparta de forma eficiente.

Una manera de permitir el acceso de múltiples usuarios a un mismo canal de transmisión consiste en dividirlo en “porciones” en el dominio del tiempo o de la frecuencia, cada una de las cuales será utilizada en cada momento por un único usuario. Este tipo de técnicas se conocen como acceso múltiple por división de frecuencia (FDMA, *Frequency-Division Multiple Access*) o por división de tiempo (TDMA, *Time-Division Multiple Access*). En FDMA, a cada usuario se le asigna una portadora de frecuencia diferente. La información que cada usuario transmite se ubica en un cierto canal de frecuencia que no debe solapar con los canales de otros usuarios. En TDMA, el tiempo se particiona en instantes (*slots*) asignados a cada usuario. En este caso

todos los usuarios deben estar sincronizados para que sus instantes de transmisión no solapen. Tanto FDMA como TDMA se basan en la filosofía de no permitir que más de un usuario ocupe un cierto canal de tiempo-frecuencia.

Existe otra técnica de acceso múltiple en la que la información de los usuarios se solapa tanto en el tiempo como en la frecuencia. Dicha técnica se conoce como acceso múltiple por división de código (CDMA, *Code-Division Multiple Access*), y en ella a cada usuario se le asigna una señal código o forma de onda diferente (*signature waveform*) que permite diferenciar su transmisión de la del resto de usuarios. Habitualmente, se emplean códigos ortogonales entre sí. En ese caso, un filtro adaptado al código de cada usuario permite recuperar la información modulada con ese código, eliminando la que ha sido modulada con el resto de códigos.

La situación es más compleja en un sistema de comunicaciones móviles CDMA. La ubicación de los usuarios puede ser cualquiera dentro del área de cobertura. Además, cada usuario puede acceder en cualquier instante al canal para transmitir su información, y ésta puede recorrer diferentes y múltiples trayectos para alcanzar al receptor. Por tanto, la información del usuario de interés se recibe junto con versiones retrasadas de ella misma. Además, se reciben las emisiones de los demás usuarios y versiones retrasadas de éstas. En este caso se habla de interferencia por acceso múltiple. Es ciertamente complicado que toda esa interferencia se pueda eliminar completamente en el receptor, aunque los códigos se hayan diseñado para ser ortogonales. Esto es debido a que es difícil conseguir que los códigos sean también ortogonales a versiones retrasadas de ellos mismos o a versiones retrasadas de otro código. La falta de ortogonalidad entre los códigos puede conducir a la aparición de un problema típico de sistemas CDMA, el denominado problema cerca-lejos (*near-far problem*). Este problema aparece cuando la señal correspondiente al usuario de interés tiene un nivel de potencia mucho menor que el de la señal de un usuario interferente, situación que sucede, por ejemplo, cuando el usuario de interés está mucho más cerca de la estación base que el otro usuario. Si los códigos de ambos usuarios no son perfectamente ortogonales, la elevada potencia de la señal interferente puede causar graves dificultades de detección.

Se puede definir el objetivo de la detección multiusuario como el diseño y análisis de la demodulación digital en presencia de interferencia por acceso múltiple [Verdu, 1998].

3.2 Modelos CDMA síncrono y asíncrono

El modelo básico CDMA síncrono para K usuarios en presencia de ruido Gaussiano aditivo viene dado por:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + n(t) \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

donde T es la inversa de la tasa de datos, $s_k(t)$ es la forma de onda asignada al usuario k normalizado para tener energía unidad, $\|s_k\|^2 = 1$, y A_k es la amplitud de la señal del usuario k recibida. El bit transmitido por cada usuario viene dado por $b_k(t) \in \{-1, +1\}$ y $n(t)$ representa el ruido blanco Gaussiano.

En el caso asíncrono, se debe introducir un retraso para cada usuario respecto a un origen arbitrario. Dicho retraso se puede representar como $\tau_k \in [0, T)$, $k = 1, \dots, K$ (véase la Figura 3.1), y en muchos casos se considera por conveniencia $\tau_1 = 0$.

A diferencia del caso síncrono, en el que es suficiente con representar la señal recibida en un intervalo de longitud T , en el caso asíncrono se debe tener en cuenta que los usuarios envían realmente ráfagas de bits: $b_k[-M], \dots, b_k[0], \dots, b_k[M]$, donde se ha supuesto que la longitud de la ráfaga es $2M + 1$. Generalizando ahora (3.1) para el caso asíncrono, el modelo CDMA queda:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=-M}^M A_k b_k[i] s_k(t - iT - \tau_k) + n(t) \quad t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Se puede comprobar que el modelo síncrono en (3.1) es un caso particular del modelo (3.2) en el que todos los retrasos son idénticos: $\tau_1 = \dots = \tau_K$

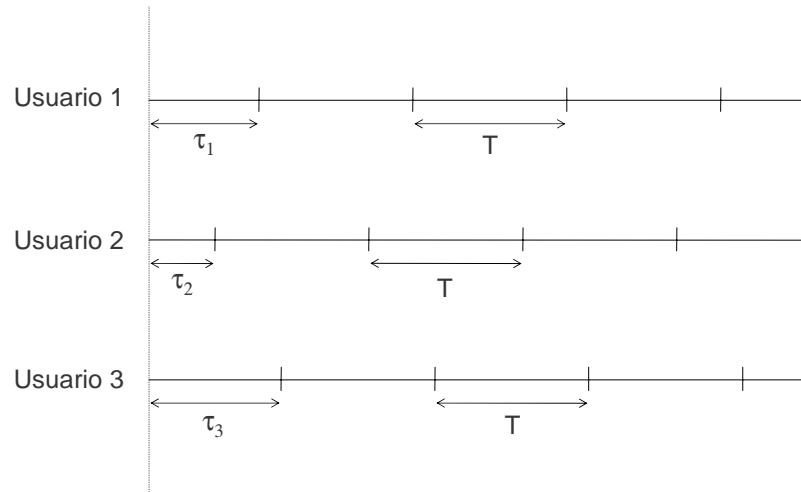


Figura 3.1: Retrasos para modelar el asincronismo.

3.2.1 Espectro ensanchado de secuencia directa

Los sistemas CDMA de espectro ensanchado y secuencia directa (DSSS-CDMA, *Direct-Sequence Spread Spectrum*), emplean una determinada estructura particular para las formas de onda asignadas a los usuarios. El concepto “secuencia directa” se refiere al procedimiento específico para construir esas formas de onda a partir de ciertos códigos de ensanchado. Este procedimiento viene caracterizado por [Verdu, 1998]:

1. emplear una forma de onda p_{T_c} , denominada *chip*, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{T_c}(t) p_{T_c}(t - nT_c) dt = 0; \quad (3.3)$$

2. el número de chips por bit será N , valor conocido como factor de ensanchado, ganancia de ensanchado o ganancia de proceso;

3. una secuencia de código de longitud N , (c_1, \dots, c_N) , modulará de forma antipodal la forma de onda de chip;

de tal manera que se obtiene la forma de onda

$$s(t) = \sum_{i=1}^N (-1)^{c_i} p_{T_c}(t - (i-1)T_c). \quad (3.4)$$

Algunos ejemplos de formas de onda de chip comunes son el pulso rectangular de duración T_c o la sinc (truncada en el tiempo),

$$p_{T_c}(t) = \text{sinc}\left(\frac{2t}{T_c} - 1\right). \quad (3.5)$$

La asignación de la secuencia de longitud N , (c_1, \dots, c_N) , o código de ensanchado, permite distinguir cada usuario. Es importante destacar que dicha secuencia no contiene información: se supone conocida al menos por el usuario al que está asignada. Diversas técnicas combinatorias permiten construir secuencias de códigos de tipo pseudoruido tales que, para unos valores dados de longitud de la secuencia N , y de número de usuarios K , tengan baja correlación cruzada para todos los posibles retardos entre ellas. Ejemplos de algunas de esas técnicas son las secuencias Gold, Kasami y *bent*.

3.2.2 Modelo síncrono discreto en el tiempo

Los detectores multiusuarios, normalmente disponen de un bloque de entrada cuyo objetivo es obtener un proceso discreto en el tiempo de la señal continua recibida.

Supongamos que en el transmisor se han empleado filtros conformadores de pulso de Nyquist y que en el receptor se emplea un filtro adaptado muestreado a la frecuencia de chip. Tras una conversión serie-paralelo, se puede llegar al siguiente modelo matricial para el sistema síncrono en tiempo discreto:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

donde \mathbf{C} es la matriz cuyas columnas contienen los códigos de los K usuarios, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_K]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_K]^T$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_1, \dots, A_K\}$, y \mathbf{n} es un vector que contiene el ruido blanco Gaussiano aleatorio.

Por otro lado, la conversión a tiempo discreto se puede realizar con un banco de filtros en los que se realiza la correlación de la señal de entrada con ciertas señales deterministas, generalmente los códigos de los usuarios. En el caso síncrono, empleando un banco de filtros adaptados a los códigos de los usuarios, la salida del filtro k -ésimo, correspondiente al usuario k -ésimo, $k \in [1, K]$, es

$$v_k = A_k b_k + \sum_{j \neq k} A_j b_j \rho_{jk} + n_k, \quad (3.7)$$

donde,

$$v_k = \int_0^T x(t) s_k(t) dt, \quad (3.8)$$

la correlación cruzada entre las formas de onda $s_j(t)$ y $s_k(t)$ viene dada por,

$$\rho_{jk} = \langle s_j, s_k \rangle = \int_0^T s_j(t)s_k(t)dt \quad (3.9)$$

y

$$n_k = \int_0^T n(t)s_k(t)dt \quad (3.10)$$

es una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza σ^2 .

En forma matricial, (3.7) se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

donde \mathbf{R} es la matriz $K \times K$ de correlaciones cruzadas normalizadas ($\rho_{ii} = 1$), $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_K]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_K]^T$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_1, \dots, A_K\}$, y \mathbf{n} es un vector Gaussiano aleatorio de media cero y con matriz de covarianza $E[\mathbf{n}\mathbf{n}^T] = \sigma^2\mathbf{R}$.

Puede demostrarse que no se pierde información relevante para la demodulación debido al banco de filtros adaptados descrito [Verdu, 1998].

3.3 Detectores multiusuario lineales

En este apartado se describirán, de forma resumida, algunas estrategias de detección multiusuario lineales para el caso síncrono. Estos detectores no son óptimos, pues no conducen a la mínima probabilidad de error posible, pero consiguen un buen comportamiento cercano al óptimo con una considerable reducción de complejidad. Un estudio detallado de estos detectores, así como del detector óptimo se puede encontrar en [Verdu, 1998].

Considerando el caso síncrono, un detector multiusuario lineal \mathbf{V} permite obtener una estimación de las señales transmitidas mediante

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Considerando (3.11), se puede escribir

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}. \quad (3.13)$$

Si se dispone de la información sobre el número total de usuarios, K , y de todos los códigos de ensanchado, ésta se puede emplear en el diseño del detector, denominado entonces detector centralizado (*centralized*). En caso contrario, si sólo conocemos el código de ensanchado del usuario de interés, el detector diseñado será de tipo no-centralizado (*non-centralized*).

3.3.1 El filtro adaptado

Sea el caso de un canal con un único usuario en presencia de ruido aditivo Gaussiano blanco. En este caso, es ampliamente conocido que el detector óptimo, en el sentido de maximizar la relación señal a ruido, es el filtro adaptado [Haykin, 1994].

En el caso de un sistema CDMA, la salida obtenida del filtro adaptado al usuario k -ésimo se obtuvo en (3.7). Si el código de este usuario es ortogonal al de los demás, entonces $\rho_{jk} = 0$, $j \neq k$, de manera que (3.7) se reduce a $v_k = A_k b_k + n_k$. Este resultado es el que se obtiene en el caso de un único usuario, en el que el filtro adaptado es el detector óptimo.

Cuando los códigos de los usuarios no son ortogonales, aparece una interferencia que reduce la efectividad del filtro adaptado. Con el objetivo de estudiar el efecto de esa interferencia, se estudia el caso simple en el que sólo hay dos usuarios, $K = 2$. El desarrollo que se incluye a continuación se puede encontrar detallado en [Verdu, 1998].

La probabilidad de error del usuario 1 viene dada por

$$P_1^c(\sigma) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A_1 - A_2|\rho_{12}|}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A_1 + A_2|\rho_{12}|}{\sigma}\right), \quad (3.14)$$

expresión que tiene el siguiente límite superior:

$$P_1^c(\sigma) \leq Q\left(\frac{A_1 - A_2|\rho_{12}|}{\sigma}\right). \quad (3.15)$$

Este límite es menor que $1/2$ si se supone que la amplitud relativa del usuario interferente no es dominante, es decir,

$$\frac{A_2}{A_1} < \frac{1}{|\rho_{12}|}. \quad (3.16)$$

En este caso, el comportamiento del detector lineal de filtro adaptado es similar al caso de un único usuario considerando una relación señal a ruido reducida de valor

$$\left(\frac{A_1 - A_2|\rho_{12}|}{\sigma}\right)^2. \quad (3.17)$$

Si la amplitud relativa del interferente es grande, tal que

$$\frac{A_2}{A_1} > \frac{1}{|\rho_{12}|}, \quad (3.18)$$

este tipo de detectores presenta un comportamiento anómalo: aparece el denominado problema cerca-lejos (*near-far problem*). Este comportamiento anómalo se caracteriza por una probabilidad de error que deja de ser monótona con σ , puesto que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P_1^c(\sigma) = \frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

y también,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} P_1^c(\sigma) = \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

El problema cerca-lejos se debe a que la polaridad de la salida del filtro adaptado al usuario 1 está gobernada por b_2 en lugar de b_1 . Puede incluso suceder que la probabilidad de error en ausencia de ruido sea $1/2$, debido a que la interferencia cambia la salida del filtro adaptado al otro lado de la frontera de decisión. Entonces, la presencia de un cierto nivel de ruido puede reducir la probabilidad de error en lugar de aumentarla, haciendo que la salida del filtro pase al

lado correcto de las regiones de decisión. Se puede demostrar que el nivel de ruido que conduce a la menor probabilidad de error corresponde con

$$\sigma^2 = \frac{A_1 A_2 \rho_{12}}{\operatorname{arctanh}\left(\frac{A_1}{A_2 \rho_{12}}\right)}. \quad (3.21)$$

En el caso límite en el que

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{|\rho_{12}|}, \quad (3.22)$$

la probabilidad de error se reduce a

$$P_1^e(\sigma) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}Q\left(\frac{2A_1}{\sigma}\right). \quad (3.23)$$

Este resultado tiene la siguiente interpretación: con probabilidad 1/2, la señal del usuario 2 cancela la del usuario 1 a la salida del filtro adaptado, y con probabilidad 1/2, la señal del usuario 2 dobla la contribución de la señal del usuario 1 a la salida del filtro adaptado.

La generalización del cálculo de la probabilidad de error de dos usuarios a un número arbitrario de ellos es directa.

Es útil visualizar la operación del detector en un diagrama del espacio de señal. Para el caso de dos usuarios, condicionado en (b_1, b_2) , el vector que contiene (v_1, v_2) es Gaussiano con media $(A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho_{12}, A_2 b_2 + A_1 b_1 \rho_{12})$ y matriz de covarianzas

$$\operatorname{cov}(v_1, v_2) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

En la Figura 3.2.a se representan las cuatro posibles hipótesis para el caso $A_1 = A_2 = 1$ y para un cierto ρ_{12} . Las regiones de decisión para el caso del detector de filtro adaptado a un usuario son los cuatro cuadrantes. Sin embargo, se debe notar que las componentes del vector tienen una cierta correlación. Para contrarrestar esta situación, en lugar de representar en un espacio de señal (v_1, v_2) , es más conveniente representar en otro cuyas componentes, (\hat{v}_1, \hat{v}_2) , se obtienen de la correlación de la forma de onda recibida con una base ortonormal, (ϕ_1, ϕ_2) dada por:

$$\phi_1 = s_1 \quad (3.25)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} s_2 - \frac{\rho_{12}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} s_1 \quad (3.26)$$

Condicionado en (b_1, b_2) , el vector (\hat{v}_1, \hat{v}_2) es Gaussiano con media

$$(A_1 b_1 < s_1, \phi_1 > + A_2 b_2 < s_2, \phi_1 >, A_1 b_1 < s_1, \phi_2 > + A_2 b_2 < s_2, \phi_2 >) \quad (3.27)$$

y matriz de covarianzas

$$\operatorname{cov}(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

En la Figura 3.2.b se representan las fronteras de las regiones de decisión en el plano (\hat{v}_1, \hat{v}_2) . El comportamiento anómalo del detector de filtro adaptado a un usuario en la situación cerca-lejos dada por (3.18) se ilustra en la Figura 3.2.c, que corresponde con las mismas signaturas que las empleadas en la Figura 3.2.b), pero con $A_1 \ll A_2$.

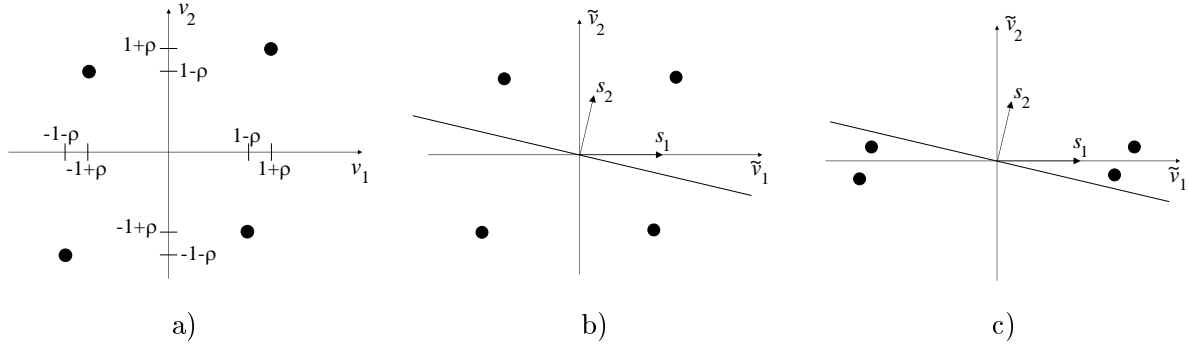


Figura 3.2: Regiones de decisión en el espacio bidimensional de las salidas de los filtros adaptados: a) espacio de señal, b) espacio ortogonal ($A_1 = A_2$) y c) espacio ortogonal ($A_1 \ll A_2$).

3.3.2 El detector decorrelador

En el apartado anterior, se ha comentado que el receptor de filtro adaptado puede errar en su decisión incluso en ausencia de ruido. Se puede encontrar un receptor capaz de recuperar sin error los datos transmitidos en ausencia de ruido sin necesidad de conocer las amplitudes recibidas de cada usuario. Si se supone que la matriz de correlaciones cruzadas \mathbf{R} es no singular, al multiplicar el vector de salida por la matriz $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1}$, se tiene

$$\hat{b}_k = \text{sgn}((\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v})_k) = \text{sgn}((\mathbf{A}\mathbf{b})_k) = b_k. \quad (3.29)$$

Se puede concluir que si los códigos de los usuarios son linealmente independientes, este detector alcanza la demodulación perfecta para cada usuario activo.

En presencia de ruido

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}. \quad (3.30)$$

Observe que la componente k -ésima está libre de interferencia causada por cualquier otro usuario, es decir, es independiente de todo $\{b_j\}, j \neq k$. Por esto, a este tipo de detectores se le llama detector decorrelador. Dos características deseables de este detector multiusuario son [Verdu, 1998]:

1. No requiere conocimiento sobre las amplitudes recibidas.
2. Se puede hacer fácilmente no-centralizado, ya que la demodulación de cada usuario se puede implementar de forma completamente independiente.

En la Figura 3.3 se muestran las regiones de decisión para el detector decorrelador en el caso de dos usuarios con amplitudes $A_1 = A_2$. La localización de las señales depende de las amplitudes, mientras que las regiones de decisión son independientes de ellas.

Para el cálculo de la relación señal a ruido para el detector decorrelador se puede encontrar que, gracias a la segunda característica antes descrita, la salida para el usuario k -ésimo depende sólo de $A_k b_k$ y del ruido, para el que se tiene una correlación

$$\mathbb{E}[(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n})(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n})^T] = \mathbb{E}[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{R}^{-1}] = \sigma^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \sigma^2\mathbf{R}^{-1}. \quad (3.31)$$

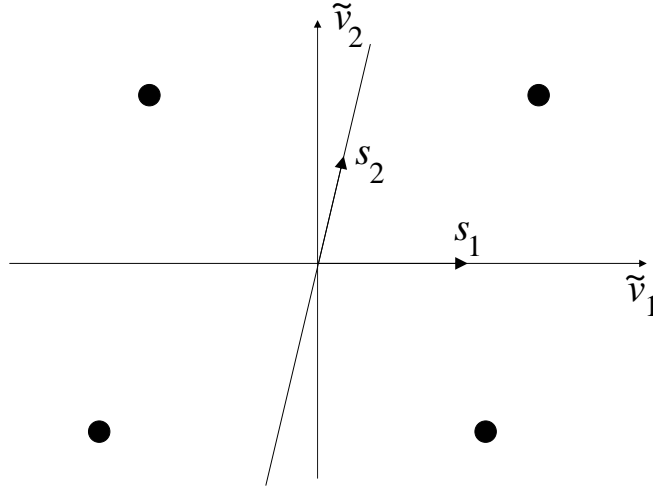


Figura 3.3: Regiones de decisión del detector decorrelador para el caso de dos usuarios $A_1 = A_2$.

Por tanto, la probabilidad de error de bit para el usuario k -ésimo es [Verdu, 1998]

$$P_k^d(\sigma) = Q\left(\frac{A_k}{\sigma\sqrt{(\mathbf{R}^{-1})_{kk}}}\right) = Q\left(\frac{A_k}{\sigma}\sqrt{1 - \mathbf{a}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{a}_k}\right), \quad (3.32)$$

que es independiente de las amplitudes interferentes. El vector \mathbf{a}_k es la k -ésima columna de \mathbf{R} sin el elemento de la diagonal, y \mathbf{R}_k es la matriz de dimensiones $(K - 1) \times (K - 1)$ que se obtiene al eliminar de \mathbf{R} la k -ésima fila y columna. Como era de esperar, si el usuario k -ésimo es ortogonal a todos los demás, entonces el decorrelador coincide con el filtro adaptado.

En el caso de dos usuarios la probabilidad de error se reduce a

$$P_k^d(\sigma) = Q\left(\frac{A_k\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}{\sigma}\right). \quad (3.33)$$

Si se compara con el caso del filtro adaptado, vemos que si la amplitud del usuario interferente es suficientemente pequeña, el filtro adaptado es preferible al decorrelador. Esto es debido a que mientras las componentes debidas al usuario de interés en ambos casos son idénticas, el ruido tiene varianza σ^2 en el caso del filtro adaptado y $\sigma^2/(1 - \rho_{12}^2)$ para el caso del decorrelador. Así, el coste de eliminar completamente la interferencia multiusuario es un aumento del ruido.

3.3.3 El detector MMSE

El detector MMSE (*Minimum Mean Square Error*) trata de minimizar el error cuadrático medio que se produce entre el símbolos b_k , para cada usuario k , y la salida de la transformación lineal $\mathbf{m}_k^T \mathbf{v}$:

$$E[(b_k - \mathbf{m}_k^T \mathbf{v})^2]. \quad (3.34)$$

Se tienen K problemas de optimización que se pueden resolver simultáneamente considerando una matriz \mathbf{M} , $K \times K$, cuyas columnas son los vectores \mathbf{m}_k :

$$\min_{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{K \times K}} \mathbb{E}[\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v}\|^2] = \min_{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{K \times K}} \text{traza}\{\text{cov}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v})\}, \quad (3.35)$$

donde \mathbf{v} viene dado según (3.11), y la esperanza es respecto al vector de bits transmitidos, \mathbf{b} , y al vector de ruido, \mathbf{n} , que tiene media cero y matriz de covarianzas $\sigma^2 \mathbf{R}$.

Se calcula

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v}) &= \mathbb{E}[(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v})(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v})^\text{T}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^\text{T}] - \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{v}^\text{T}]\mathbf{M}^\text{T} - \mathbf{M}\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{b}^\text{T}] + \mathbf{M}\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^\text{T}]\mathbf{M}^\text{T}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Considerando que la correlación entre el ruido y los datos es nula,

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^\text{T}] = \mathbf{I} \quad (3.37)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{v}^\text{T}] = \mathbf{A}\mathbf{R} \quad (3.38)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{b}^\text{T}] = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (3.39)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^\text{T}] = \mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}. \quad (3.40)$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v}) &= \mathbf{I} + \mathbf{M}(\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R})\mathbf{M}^\text{T} - \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{M}^\text{T} - \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{A} \\ &= [\mathbf{I} + \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}]^{-1} + (\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}})(\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R})(\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}})^\text{T}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}, \quad (3.42)$$

y se ha supuesto que \mathbf{A} es no-singular. Como la matriz $\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}$ es no-negativa definida, la traza del último término de (3.41) es siempre no-negativa. Entonces, se concluye que la matriz $\bar{\mathbf{M}}$ definida en (3.42) conduce a la mínima suma de errores cuadráticos medios:

$$\min_{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{K \times K}} \mathbb{E}[\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{v}\|^2] = \text{traza}\{[\mathbf{I} + \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}]^{-1}\}. \quad (3.43)$$

De acuerdo con (3.42) el detector lineal MMSE conduce a la siguiente decisión:

$$\hat{b}_k = \text{sgn}\left(\frac{1}{A_k}([\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{v})_k\right) = \text{sgn}([\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{v})_k. \quad (3.44)$$

Por tanto, el detector lineal MMSE sustituye la transformación $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1}$ del detector decorrelador por $\mathbf{V} = [\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}$, donde

$$\sigma^2\mathbf{A}^{-2} = \text{diag}\left\{\frac{\sigma^2}{A_1^2}, \dots, \frac{\sigma^2}{A_K^2}\right\}. \quad (3.45)$$

Debe hacerse notar que no se ha impuesto que la matriz \mathbf{R} sea no-singular, y que la dependencia de este detector con las amplitudes recibidas es sólo a través de las relaciones señal a ruido A_k/σ .

Como se ha visto, el detector de filtro adaptado está optimizado para combatir el efecto del ruido aditivo Gaussiano, mientras que el decorrelador está pensado para eliminar la interferencia multiusuario sin considerar el ruido. El detector lineal MMSE se puede ver como una solución de compromiso que tiene en cuenta tanto la importancia relativa de cada usuario interferente, como el ruido. Se puede incluso considerar el filtro adaptado y el decorrelador como casos limitados del MMSE. Si, por ejemplo, se mantiene constante A_1 y se hace tender a cero el resto de amplitudes, entonces la primera fila de $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$ tiende a

$$\left[\frac{A_1^2}{A_1^2 + \sigma^2}, 0, \dots, 0 \right], \quad (3.46)$$

que corresponde con el filtro adaptado para el usuario 1. Además, cuando σ crece, $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$ tiende a una matriz fuertemente diagonal, y el detector MMSE se aproxima también al detector de filtro adaptado. Por otro lado, si mantenemos constantes todas las amplitudes y hacemos tender σ a cero, entonces $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1} \rightarrow \mathbf{R}^{-1}$, y por tanto, el MMSE converge hacia el decorrelador. Así, el detector MMSE tiene la misma resistencia al problema cerca-lejos que el decorrelador.

El cálculo de la probabilidad de error del MMSE no es tan directo como el del decorrelador, ya que no se elimina toda la interferencia multiusuario. De hecho, la estadística de la decisión (condicionada en el bit de interés) incluye la suma de una variable aleatoria Gaussiana, debida al ruido aditivo, y una variable aleatoria binomial, debida a la interferencia multiusuario. Para el caso que se trata aquí, el caso síncrono, la primera componente de la salida del detector MMSE se puede escribir como

$$(\mathbf{V}\mathbf{v})_1 = ([\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{v})_1 = B_1(b_1 + \sum_{k=2}^K \beta_k b_k) + \sigma \tilde{n}_1, \quad (3.47)$$

donde

$$\beta_k = \frac{B_k}{B_1}, \quad (3.48)$$

$$B_k = A_k([\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{R})_{1k}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{n}_1 \sim \mathcal{N}(0, ([\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{R})_{11}). \quad (3.50)$$

El coeficiente β_k cuantifica la contribución del usuario interferente k , relativa a la contribución del usuario de interés, a la estadística de decisión. La probabilidad de error queda [Verdu, 1998]:

$$P_1^m(\sigma) = 2^{1-K} \sum_{b_2, \dots, b_K \in [-1, 1]^{K-1}} Q\left(\frac{A_1}{\sigma} \frac{(\mathbf{V}\mathbf{R})_{11}}{\sqrt{(\mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{V})_{11}}} (1 + \sum_{k=2}^K \beta_k b_k)\right). \quad (3.51)$$

3.4 Aplicación de BSS a la detección multiusuario

La aplicación de separación ciega de fuentes a CDMA ha sido estudiada por varios autores [Castedo, 1997], [Joutsensalo, 1998], [Causey, 1998], [Gil-García, 2000], [Ristaniemi, 2000]. Basta con comparar el modelo en tiempo discreto para el sistema DSSS-CDMA síncrono de la

expresión (3.6) con el modelo matricial del problema de separación ciega de fuentes en (2.4), para comprobar que la relación entre ambos es directa. El sistema DSSS-CDMA síncrono, se puede ver como un problema de mezcla lineal de los símbolos transmitidos por cada usuario, donde la matriz de mezcla en (2.4) viene dada por \mathbf{CA} , donde \mathbf{C} es la matriz de códigos de los K usuarios y $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_1, \dots, A_K\}$ contiene las amplitudes de los usuarios.

Esta identificación entre el problema de detección multiusuario y BSS permite plantear un receptor basado en los algoritmos de separación ciega para el caso K -dimensional introducidos en el Capítulo 2.

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{BCA}\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{n}. \quad (3.52)$$

Esta expresión identifica la matriz de separación \mathbf{B} con un detector multiusuario lineal. Por tanto, se tienen dos posibilidades para obtener el detector de forma ciega. Una primera opción es emplear un método bloque en el que se utilizan todos los símbolos recibidos en una cierta ráfaga. En este caso, se puede aplicar alguno de los algoritmos que se basan en la optimización de Jacobi descritos en el Apartado 2.5. La segunda opción es desarrollar una detección adaptativa, que va actualizando \mathbf{V} con cada nueva muestra recibida. En este otro caso, se pueden aplicar los algoritmos que se basan en la optimización de Jacobi adaptativa, descritos en el Apartado 2.5, o en el descenso con el gradiente natural, descritos en el Apartado 2.6. Sin embargo, la aplicación directa de BSS para obtener un detector completamente ciego supone un problema de una complejidad computacional bastante grande, especialmente cuando se trabaja en el espacio de los chips (N), en lugar de trabajar en el espacio de los usuarios (K). Por otro lado, los algoritmos de separación ciega de fuentes introducidos en el Capítulo 2 no tienen en cuenta la presencia de ruido.

En [Murillo-Fuentes, 2002b] y [Caamaño-Fernández, 2004] se propone una posible solución a este problema. Dicha solución se basa en combinar la estructura de los detectores lineales presentados en el Apartado 3.3, y en concreto el MMSE, con la separación ciega de fuentes. El motivo es que el detector lineal MMSE tiene un buen comportamiento frente al ruido y frente a la interferencia. El detector ciego propuesto debe, en la medida de lo posible, intentar mantener las buenas propiedades frente al ruido del MMSE. Por otro lado, el detector $\mathbf{V}_{MMSE} = [\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$ emplea sólo estadísticos de segundo orden para eliminar la interferencia. Los algoritmos de separación ciega de fuentes tratan de imponer independencia, lo que supone ir “más allá” de los estadísticos de orden 2 (recuérdese el resultado del Apartado 2.2.2).

La solución planteada, para el caso bloque y el caso adaptativo se presenta en los siguientes apartados.

MUD basado en el GWFOE: HyHOS I

Se propone obtener un detector lineal dado por

$$\mathbf{V}_{HyHOS} = \mathbf{V}_{BH} = \mathbf{BC}^H = \mathbf{UWC}^H, \quad (3.53)$$

donde $(\cdot)^H$ indica la traspuesta conjugada.

Como se muestra en (3.53), se propone una reducción de dimensiones, desde el espacio de chips N al espacio de los usuarios K , mediante filtros adaptados a los códigos de los usuarios. De esta forma, se reduce también el efecto del ruido. Obsérvese que este paso es análogo a decir que la detección no se está realizando a partir del vector \mathbf{x} en (2.4), sino a partir del vector \mathbf{v} en (3.11). Posteriormente, se debe emplear alguna técnica de segundo orden para conseguir el blanqueado de las señales, calculando \mathbf{W} . Por último, se emplea alguna de las versiones del estimador generalizado, por ejemplo SICA, para obtener la rotación \mathbf{U} mediante la optimización de Jacobi (inicializada o no). En resumen, en este detector, denominado HyHOS-I, se ha sustituido la matriz $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$ del detector MMSE por la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{W}$. Entonces, esta última etapa se puede ver como una decorrelación de orden cuarto, de manera que se va más allá del MMSE basado únicamente en segundo orden.

Obsérvese que este detector \mathbf{V}_{HyHOS} es de tipo centralizado, pues necesita conocer todas las secuencias de códigos de los usuarios. Si ese es el caso, como sucede al menos en la estación base, es directo introducirlos como un algoritmo de subespacio con un coste nulo en cuanto a complejidad se refiere. De hecho, no se tiene pérdida de información al realizar esta proyección de subespacio [Verdu, 1998] y permite combatir el ruido.

MUD basado en el Gradiente Natural: HyHOS II

Ahora se plantea emplear el gradiente natural para el cálculo de \mathbf{V}_{HyHOS} de forma adaptativa a medida que van llegando nuevas muestras. Procediendo como en el caso anterior, $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{C}^H \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{v}$. En primer lugar, se emplea un banco de filtros adaptados a las secuencias de código de los usuarios. Posteriormente, se calcula la matriz de separación, \mathbf{B} . En este caso, esta matriz se calcula empleando un algoritmo basado en el gradiente natural, por ejemplo, el Algoritmo EASI o el M-EASI

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda \mathbf{K}_B(\mathbf{y}) \mathbf{B}_k \quad (3.54)$$

donde $\mathbf{K}_B(\mathbf{y})$ viene dada en (2.86) o (2.87), según se utilice el EASI o el M-EASI. Este detector se ha denominado HyHOS II.

Usuario de interés.

Como se describió en el Capítulo 2, la solución al problema BSS permite recuperar las fuentes, pero no el orden original de éstas. Por este motivo, cada fila de los detectores descritos \mathbf{V}_{HyHOS} recupera uno de los usuarios, pero se desconoce cual de ellos. Una posible opción para encontrar al usuario de interés es calcular la correlación de las filas de \mathbf{V}_{HyHOS} con el código de ensanchado de ese usuario.

Resultados Experimentales

Para comprobar el buen funcionamiento de los detectores HyHOS propuestos, se considera un sistema CDMA síncrono en el que se transmiten símbolos BPSK empleando códigos Gold con un

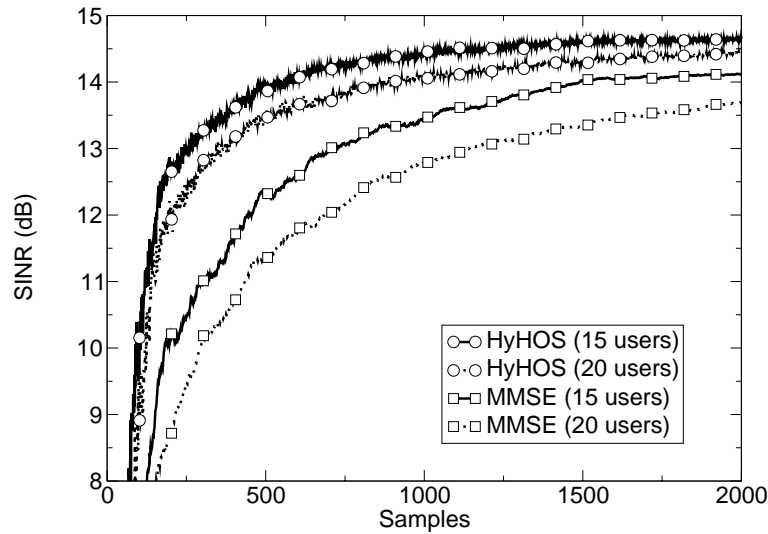


Figura 3.4: SINR para los detectores MMSE y HyHOS-I.

factor de ensanchado $N = 31$. En todas las pruebas que se incluyen a continuación se han promediado 500 simulaciones y la potencia de los usuarios interferentes se distribuye uniformemente entre 0 y 30 dB por encima de la del usuario de interés.

En primer lugar, se va a comparar la convergencia del detector HyHOS-I empleando SICA y el detector MMSE. En la Figura 3.4 se muestra la relación señal a interferencia más ruido (SINR, *signal-to-interference-plus-noise ratio*) a la salida de ambos detectores en función del número de muestras. Se han incluido los resultados para $K = 15$ y $K = 20$ usuarios en el sistema. La relación señal a ruido (SNR, *signal-to-noise ratio*) se ha fijado en $\text{SNR} = 15$ dB. Se puede ver que el detector HyHOS-I converge en sólo 2000 muestras, mientras que el MMSE tiene una velocidad

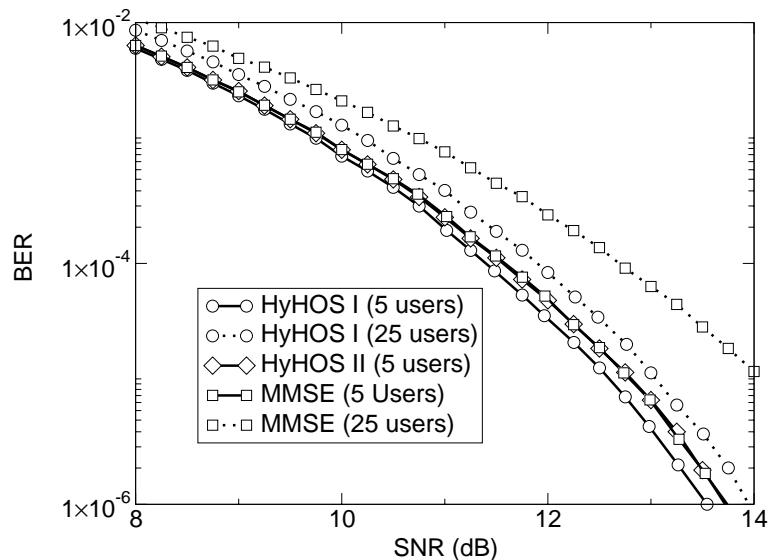


Figura 3.5: BER para los detectores MMSE, HyHOS-I y HyHOS-II.

de convergencia menor, y no puede alcanzar el nivel del HyHOS-I cuando el número de usuarios es elevado.

En segundo lugar, en la Figura 3.5 se muestra la probabilidad de error de bit (BER, *bit error rate*) de ambos detectores en función de la relación señal a ruido para un entorno poco ruidoso. En esta ocasión se han considerado los casos $K = 5$ y $K = 25$ usuarios. La BER se calcula tras un entrenamiento con 2000 muestras. Se incluye también el resultado obtenido con el detector HyHOS-II empleando M-EASI para $K = 5$ usuarios. La tasa de aprendizaje del Algoritmo M-EASI se estableció en $\lambda = 1/t$ y para la función de puntuación se eligió una función cúbica de las salidas $\varphi_i(y_i) = y_i^3$. En vista de los resultados mostrados en la figura se comprueba que el comportamiento del detector HyHOS, en lo que se refiere a probabilidad de error, es similar al del MMSE cuando el número de usuarios es bajo, pero bastante mejor cuando ese número es grande.

Para finalizar, se comprueba la resistencia al ruido de los detectores HyHOS propuestos repitiendo el experimento anterior en un entorno muy ruidoso. Se comprueba en la Figura 3.6 los excelentes resultados, similares a los conseguidos con el detector MMSE.

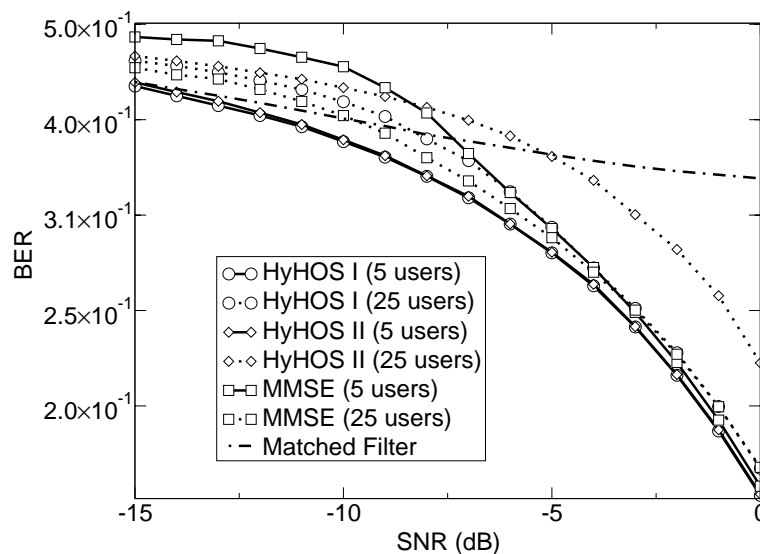


Figura 3.6: BER para los detectores MMSE, HyHOS-I y HyHOS-II en un entorno muy ruidoso.

Como resumen, se puede afirmar que el detector HyHOS tiene una convergencia hacia la solución mucho más rápida que el MMSE, debido a que se utilizan estadísticos de orden superior. Además, la solución alcanzada es similar o mejor que la del MMSE. Por otro lado, la resistencia al problema cerca-lejos y al ruido de los detectores HyHOS es buena, como se muestra en los experimentos incluido. Por contra, el principal inconveniente de este tipo de detectores es la elevada carga computacional de los algoritmos de separación ciega.

Capítulo 4

Sistemas OFDM

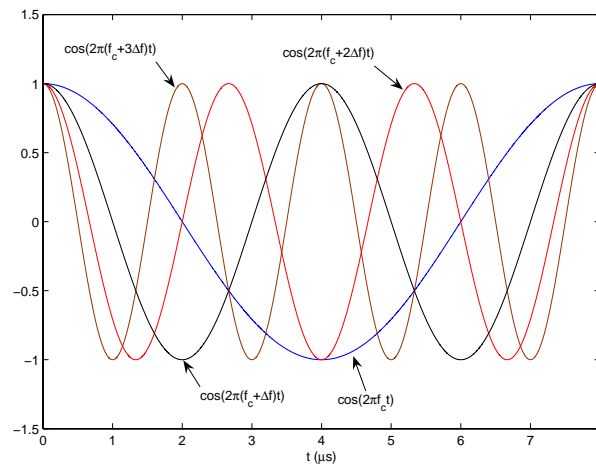
4.1 Introducción

OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) [Edfors, 1996], es una técnica de transmisión multiportadora que divide el espectro disponible en múltiples subcanales. Por cada uno de esos subcanales se transmite una portadora modulada por un flujo de datos de baja tasa. A la vista de esta definición, puede parecer que OFDM es similar a un sistema FDM (*Frequency Division Multiplexing*). Sin embargo, en OFDM la utilización del espectro es mucho más eficiente, empleando subcanales mucho más estrechos y superpuestos. Para prevenir la interferencia de una portadora con las vecinas hay que hacer que todas las portadoras sean ortogonales entre sí (de ahí el término '*orthogonal*'). Esto se consigue haciendo que cada portadora tenga un número entero de ciclos en el tiempo de duración de un símbolo. Así, el espectro correspondiente a cada portadora presentará un nulo a la frecuencia de las restantes portadoras, como se puede ver en la Figura 4.1. La ortogonalidad de las portadoras permite, al menos teóricamente, que los subcanales sean tan estrechos como se desee. Si son suficientemente estrechos, con un ancho de banda menor que el ancho de banda de coherencia del canal, se puede considerar que cada uno experimentará un desvanecimiento plano, facilitando la igualación, puesto que el canal es AWGN, y la recuperación de los datos.

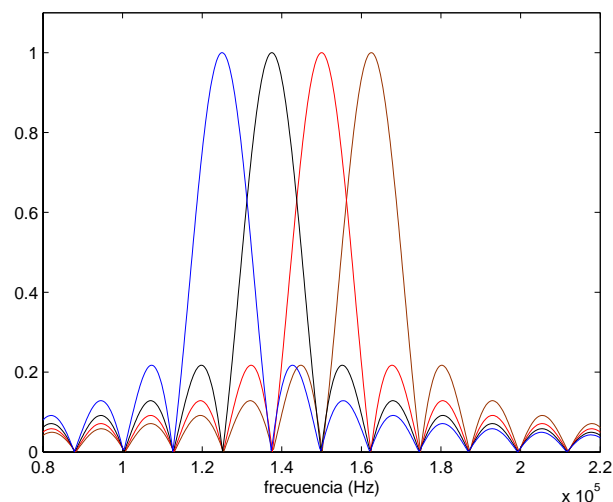
En OFDM, los datos a transmitir se agrupan en bloques que se transmiten en paralelo por los subcanales. OFDM se incluye, por tanto, entre los sistemas de transmisión bloque a bloque. La transmisión de los datos en bloques de igual tamaño es un método adecuado para mitigar los efectos de la interferencia entre símbolos (ISI, *inter-symbol interference*) [Wang, 2000]. Esta propiedad es importante, puesto que en la transmisión de datos digitales a través de un medio dispersivo, la interferencia entre símbolos inducida por el canal es uno de los principales factores que limitan el buen funcionamiento del sistema [Proakis, 2001]. La interferencia entre símbolos (ISI) en OFDM puede deberse a dos factores: la interferencia entre los símbolos de un mismo bloque o ICI (*inter-carrier interference*) y la interferencia entre símbolos de bloques consecutivos o IBI (*inter-block interference*). Para eliminar completamente de forma sencilla la IBI, se puede dejar un espacio de guarda entre dos bloques transmitidos consecutivamente. Existen diferentes

alternativas para ese espacio de guarda, aunque todas, obviamente, suponen una reducción de la tasa total de símbolos y, posiblemente, un aumento de la potencia necesaria en transmisión (si en ese espacio de guarda se transmiten símbolos no útiles).

El inicio de los sistemas con múltiples portadoras ortogonales, concebidos e implementados como sistemas analógicos, se remonta hasta los años 60. Sin embargo, fue su implementación completamente digital, la que propició un importante aumento de la popularidad de los sistemas OFDM. Se recomienda al lector interesado en obtener más información sobre la historia de este tipo de sistemas la lectura de [Bingham, 1990]. En la actualidad, OFDM es el sistema de transmisión empleado en varios estándares, entre los que se encuentran los sistemas de televisión digital terrestre (DVB, *digital video broadcast*) [ETSI Normalization Committee, 1996] y



a)



b)

Figura 4.1: Ejemplo de portadoras ortogonales en a) el dominio del tiempo y b) el dominio de la frecuencia. .

de radio digital terrestre (DAB, *digital audio broadcast*) [ETSI Normalization Committee, 1997] en Europa, y las redes de área local inalámbricas (IEEE 802.11a, ETSI BRAN HIPERLAN/2 [ETSI Normalization Committee, 1999]). También, bajo el nombre de DMT (*digital multi-tone*), ha sido elegido para los estándares de modems para línea de cobre de alta velocidad, conocidos bajo las siglas xDSL (*digital subscriber line*).

4.2 Modelo en tiempo discreto de un sistema multiportadora

El modelo en tiempo continuo más simple que se puede pensar para obtener una modulación multiportadora incluirá, en primer lugar, un bloque que permita la conversión de la secuencia lineal de datos a transmitir, de tasa R bits por segundo (bps) en N subsecuencias en paralelo, de tasas R/N bps. A continuación existirán N bloques, cada uno de los cuales es un sistema de modulación monoportadora ajustado a cada una de las portadoras correspondientes a los N subcanales. Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, el número de subcanales se debe elegir de manera que el ancho de banda de cada subcanal sea menor que el ancho de banda de coherencia del canal. Como puede imaginarse, este modelo con transmisor y receptor analógico presenta múltiples inconvenientes. En primer lugar, el requisito de un sistema monoportadora independiente para cada subcanal, hace el sistema prohibitivo cuando se precisa un elevado número de subcanales. En segundo lugar, los requisitos de calidad de estos sistemas analógicos, necesarios para que N portadoras mantengan una ortogonalidad perfecta y para que los filtros de recepción se ajusten perfectamente a cada uno de los subcanales, son prácticamente imposibles de lograr.

Los motivos expuestos han motivado el desarrollo de un método en tiempo discreto que simplifique el proceso de obtención de un conjunto de subcanales ortogonales. Un estudio detallado de lo que se explica a continuación se puede encontrar en [Andrews, 2004].

Sea un sistema monoportadora como el de la Figura 4.2, en el que se transmite una secuencia de datos modulados $s(k)$ a través de un canal discreto en el tiempo con respuesta impulsiva $h(k)$. Se supone que la respuesta impulsiva del canal cuando se muestra a la tasa de datos es finita (FIR, *finite impulse response*), y de longitud $L + 1$. Los símbolos recibidos $x(k)$ se obtienen de la convolución de la secuencia de datos con $h(k)$ y la adición de ruido blanco Gaussiano $n(k)$,

$$x(k) = \sum_{l=0}^L h(l)s(k-l) + n(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.1)$$

Si se consideran, por simplicidad, únicamente los N primeros símbolos recibidos, este proceso

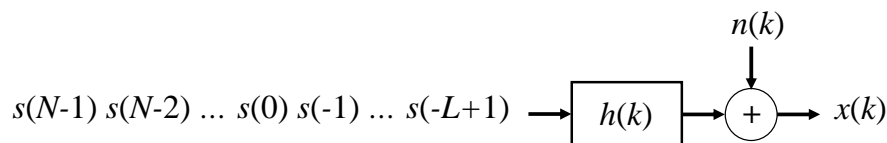


Figura 4.2: Transmisión monoportadora (modelo discreto en el tiempo).

se puede escribir en notación matricial, como sigue:

$$\begin{bmatrix} x(N-1) \\ x(N-2) \\ \vdots \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \cdots & h(L) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(0) & \cdots & h(L-1) & h(L) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h(0) & \cdots & h(L-1) & h(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(N-1) \\ s(N-2) \\ \vdots \\ s(-L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(N-1) \\ n(N-2) \\ \vdots \\ n(0) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

y de forma compacta,

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (4.3)$$

donde la matriz \mathbf{H} , de dimensiones $N \times (N+L)$, es conocida como la matriz de convolución. Puede observarse como el efecto de la ISI está incluido en dicha matriz: el vector \mathbf{s} contiene $N+L$ símbolos.

Entre los objetivos de la modulación multiportadora está el conseguir la transmisión de un bloque de N símbolos sin ISI, para lo cual es necesario descomponer la matriz de convolución en N vectores de canal ortogonales. Esto se puede lograr calculando la descomposición en valores singulares (DVS) de \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^H [\boldsymbol{\Sigma}_{N \times N} \mathbf{0}_{N \times (N+L)}] \mathbf{V}, \quad (4.4)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices unitarias de dimensiones $N \times N$ y $(N+L) \times (N+L)$, respectivamente, y $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz diagonal que contiene los valores singulares λ_i , $i \in [1, N]$, de \mathbf{H} (cuyo rango es N).

De esta descomposición, y suponiendo conocido el canal, se puede extraer la siguiente estrategia de transmisión. Los símbolos de la secuencia $s(k)$ se dividen en bloques de N elementos. El vector \mathbf{s} que contiene cada bloque a transmitir (ahora agrupa sólo N elementos), se multiplica por $\hat{\mathbf{V}}^H$, que es la matriz de dimensiones $(N+L) \times (N)$ que contiene la N primeras columnas de la matriz \mathbf{V}^H . Dichas columnas son ortogonales entre sí, al ser \mathbf{V} unitaria. Los símbolos del vector resultante $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{s}$ se transmiten por el canal. En recepción, el producto del vector \mathbf{x} por la matriz \mathbf{U} permite recuperar los símbolos transmitidos afectados por el ruido, \mathbf{y} . El proceso, que viene representado en la Figura 4.3, se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{U}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{H}\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{n} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{U}^H [\boldsymbol{\Sigma}_{N \times N} \mathbf{0}_{N \times (N+L)}] \mathbf{V}\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{n} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{N \times N} \mathbf{s} + \mathbf{U}\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A este sistema se le denomina codificación vectorial (*vector coding*) y es un método muy extendido para la transmisión de señales discretas en el tiempo. Obsérvese que gracias a la precodificación y a la postcodificación, los símbolos atraviesan el canal sin sufrir ISI, quedando cada uno de ellos multiplicados por una ganancia escalar que corresponde con cada uno de los valores singulares de la matriz de convolución. Además, el vector de ruido $\mathbf{U}\mathbf{n}$ mantiene los mismos estadísticos que el ruido \mathbf{n} , debido a que la matriz \mathbf{U} es unitaria. Sin embargo, una desventaja importante es que la tasa de símbolos disminuye, puesto que se transmiten $N+L$

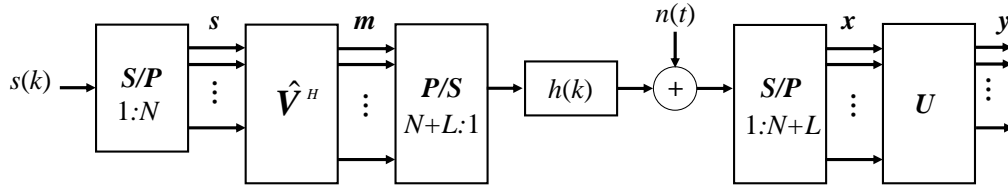


Figura 4.3: Codificación vectorial.

símbolos precodificados que contienen información de únicamente N símbolos de información. En concreto, el caso considerado en la expresión (4.5) equivale a dejar un espacio de guarda vacío entre la transmisión de dos bloques de datos consecutivos. Es fácil comprobar que se obtendría el mismo resultado si en lugar de transmitir $\hat{V}^H \mathbf{s}$ se transmite el producto de \mathbf{V}^H con el vector de longitud $N + L$ obtenido al extender \mathbf{s} con L ceros. En general el espacio de guarda se podría rellenar con otros símbolos diferentes a cero, pero tal caso supondría un consumo adicional de potencia de transmisión.

Además de la reducción en la tasa de datos, el sistema de codificación vectorial para la transmisión de bloques de datos libres de ISI tiene varios problemas prácticos. En primer lugar, es necesario calcular la DVS de la matriz del canal, que es en principio desconocida. Habría que buscar un método de estimación de canal y de realimentación de la información estimada al transmisor, para que éste conozca la precodificación necesaria. En segundo lugar hay que señalar que la complejidad en el cálculo de la DVS crece rápidamente con N y, por los motivos citados en la introducción de este capítulo, interesa que el número de subcanales sea lo mayor posible. Estas razones han determinado la búsqueda de métodos más simples que sigan la filosofía de buscar la descomposición de la matriz de convolución en N vectores de canal ortogonales. Como se verá en los próximos apartados, OFDM es uno de esos métodos. En OFDM se consigue la recepción de los bloques de datos libres de ISI con una complejidad baja y sin necesidad de conocimiento del canal.

4.3 Modelo en tiempo discreto para OFDM

El modelo en tiempo discreto para un sistema OFDM [Scaglione, 1999] se muestra en la Figura 4.4. Como se puede ver, este modelo es análogo al de la Figura 4.3, salvo por las matrices de pre- y postcodificación. La adecuada selección de esas matrices es la clave de la simplicidad de diseño del sistema OFDM.

En el apartado anterior, el análisis de la transmisión se centró únicamente en la recepción del primer bloque de N símbolos. Se va a analizar ahora con más detalle la transmisión continuada de un flujo de datos.

En primer lugar, la secuencia de datos $s(k)$ se divide en bloques de N elementos. El i -ésimo bloque de datos a transmitir se puede expresar mediante el siguiente vector:

$$\mathbf{s}(i) = [s(iN), s(iN + 1), \dots, s(iN + N - 1)]^T. \quad (4.6)$$

Este bloque de símbolos es precodificado antes de ser transmitido para dar lugar a un bloque que contiene $M = N + L$ símbolos. El vector de símbolos codificados será:

$$\mathbf{m}(i) = \mathbf{F}\mathbf{s}(i) = [m(iM), m(iM + 1), \dots, m(iM + M - 1)]^T, \quad (4.7)$$

donde \mathbf{F} es una matriz de dimensiones $M \times N$. Se aprecia de nuevo una reducción de la tasa de transmisión, puesto que se van a transmitir M símbolos codificados por cada bloque de N símbolos de información. Esa reducción de la tasa, tal como se vio en (4.5), representa el empleo de un periodo de guarda de L símbolos de duración, y es la clave para conseguir eliminar la ISI, como se explicará con detalle más adelante.

Cuando los símbolos codificados se transmiten en serie por un canal con respuesta impulsiva $h(k)$ y se añade un ruido blanco Gaussiano $n(k)$, se obtiene la siguiente secuencia de símbolos recibidos,

$$x(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)m(k-l) + n(k). \quad (4.8)$$

Si agrupamos estos símbolos en bloques de M elementos, el i -ésimo bloque recibido vendrá dado por el vector

$$\mathbf{x}(i) = [x(iM), x(iM + 1), \dots, x(iM + M - 1)]^T = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_l \mathbf{m}(i-l) + \mathbf{n}(i), \quad (4.9)$$

donde el vector de ruido $\mathbf{n}(i)$ se ha formado como en (4.7) y la matriz \mathbf{H}_l , de dimensiones $M \times M$ es

$$\mathbf{H}_l = \begin{bmatrix} h(lM) & h(lM - 1) & \dots & h(lM - M + 1) \\ h(lM + 1) & h(lM) & \dots & h(lM - M + 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(lM + M - 1) & h(lM + M - 2) & \dots & h(lM) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Finalmente, se procede a la postcodificación de los símbolos recibidos mediante la matriz \mathbf{G} de dimensiones $N \times M$:

$$\mathbf{y}(i) = [y(iN), y(iN + 1), \dots, y(iN + N - 1)]^T = \mathbf{G} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_l \mathbf{m}(i-l) + \mathbf{G}\mathbf{n}(i). \quad (4.11)$$

Se observa que la transmisión continuada de un flujo de datos conduce a la aparición de ISI. Esta interferencia podrá ser controlada bajo las siguientes condiciones:

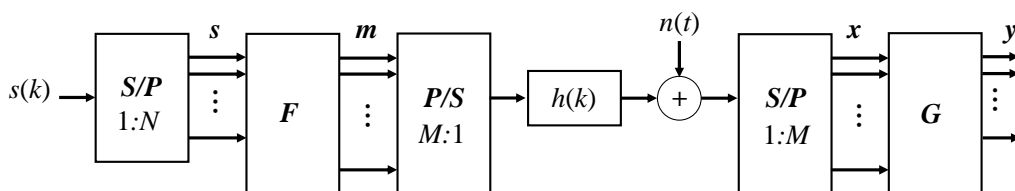


Figura 4.4: Modelo en tiempo discreto de un sistema OFDM.

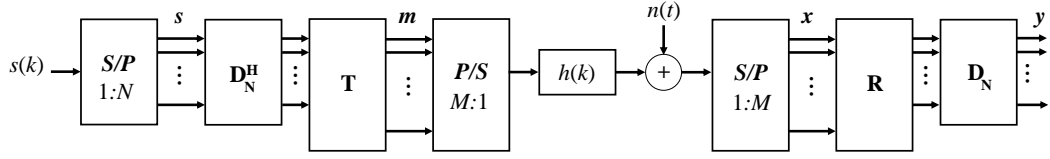


Figura 4.5: Modelo completo en tiempo discreto de un sistema OFDM.

Proposición 4.1. *Se considera que el canal es de tipo FIR de orden menor o igual que L , es decir, $h(k) = 0$ para $k < 0$ y $k > L$.*

Proposición 4.2. *El tamaño del bloque transmitido $M = N + L$ y $M > 2L$.*

Si estas proposiciones se cumplen, entonces se puede comprobar que \mathbf{H}_l tiene todos sus elementos iguales a ceros para $l < 0$ y $l > 1$, y por tanto,

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F} \mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_1 \mathbf{F} \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i), \quad (4.12)$$

y tras \mathbf{G}

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{G} \mathbf{H}_0 \mathbf{F} \mathbf{s}(i) + \mathbf{G} \mathbf{H}_1 \mathbf{F} \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i). \quad (4.13)$$

Se observa que la interferencia se ha limitado al efecto del bloque inmediatamente anterior al actual. Se habla del efecto interferente de los datos de un bloque sobre otro bloque, de ahí el concepto de interferencia entre bloques, IBI, introducido anteriormente. Esta IBI se puede eliminar totalmente empleando el periodo de guarda adecuado. Para mostrar cómo se puede conseguir esto, se separa la precodificación \mathbf{F} en dos partes, como se muestra en la Figura 4.5. Una parte en la que se realiza la precodificación de los N símbolos de datos y otra en la que se realiza la adición del periodo de guarda. Este último proceso viene representado por una matriz \mathbf{T} de dimensiones $M \times N$ que se definirá más adelante, mientras que la precodificación viene representada por una matriz unitaria \mathbf{D}_N^H . Por tanto,

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H. \quad (4.14)$$

De igual manera, se puede separar en la matriz \mathbf{G} el tratamiento del periodo de guarda, representado por una matriz \mathbf{R} de dimensiones $N \times M$ que se definirá más adelante, y una matriz unitaria de postcodificación \mathbf{D}_N :

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}_N \mathbf{R}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo \mathbf{F} y \mathbf{G} en (4.13),

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{D}_N \mathbf{R} \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_N \mathbf{R} \mathbf{H}_1 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i). \quad (4.16)$$

se comprueba que se eliminaría completamente la IBI si se consigue que $\mathbf{R} \mathbf{H}_1 \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Puesto que las matrices \mathbf{R} y \mathbf{T} son las responsables del tratamiento del periodo de guarda, sólo deben modificar los L símbolos correspondientes a ese periodo, dejando los restantes N inalterados. Esto podría suponer una limitación a la hora de intentar eliminar la IBI. Sin embargo, si se

cumple la Proposición 4.1, se puede comprobar que la matriz \mathbf{H}_1 queda

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & h(L) & \cdots & h(1) \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots & h(L) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

y sólo tiene elementos distintos de cero en una submatriz de dimensiones $L \times L$. Así, \mathbf{R} y \mathbf{T} deben únicamente intentar anular el efecto de esa submatriz para obtener

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{D}_N \mathbf{R} \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i), \quad (4.18)$$

donde la matriz \mathbf{H}_0 ,

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h(L) & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(0) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

es una matriz Toeplitz triangular inferior de dimensiones $M \times M$ cuya primera columna es $[h(0) \cdots h(L) \ 0 \cdots 0]^T$. Esta matriz es la responsable de la interferencia entre símbolos del mismo bloque. Esa interferencia se puede ver como una interferencia entre las portadoras de los distintos subcanales por los que se están transmitiendo en paralelo los símbolos del bloque. Por este motivo se la conoce con el nombre de ICI (*inter-carrier interference*).

Entre las posibles opciones para conseguir eliminar la IBI destacan dos: un primer método que utiliza un periodo de guarda en el que no se transmite nada (o se transmiten símbolos iguales a cero), conocido como sistema *zero-padding* (ZP), y un segundo método en el que se añade un prefijo cíclico (CP, *cyclic prefix*). Se procede a continuación a analizar este segundo método para encontrar la matriz unitaria \mathbf{D}_N que se emplea en OFDM.

4.4 Sistema OFDM con prefijo cíclico

En un sistema OFDM con prefijo cíclico (CP-OFDM), el espacio de guarda no se deja vacío, sino que se rellena con símbolos. Estos símbolos suponen un gasto de potencia de transmisión, pero a cambio simplifican el proceso de detección de los datos eliminando la ICI. Este es el objetivo del prefijo cíclico, y se basa en las propiedades de la transformada discreta de Fourier (DFT, *discrete Fourier transform*) de una convolución circular.

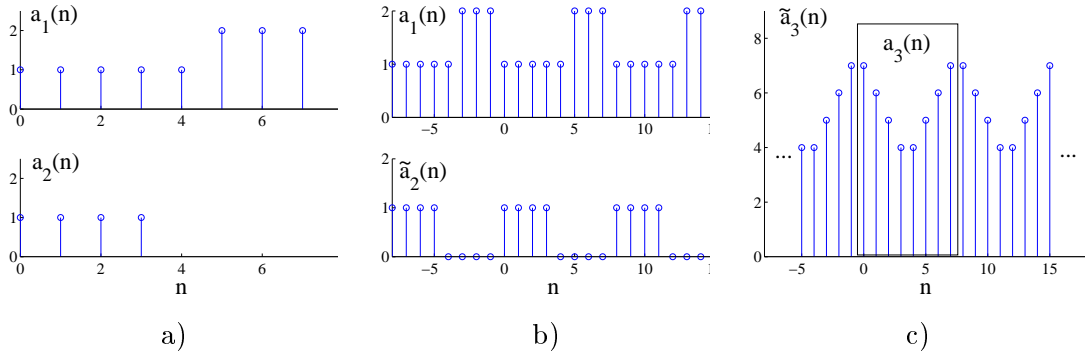


Figura 4.6: Ejemplo de convolución circular de dos secuencias: a) secuencias originales, b) extensiones periódicas c) convolución periódica y convolución circular (recuadro).

4.4.1 Convolución circular

Sean dos secuencias $a_1(n)$ y $a_2(n)$, de N y $L + 1 < N$ datos, respectivamente. Sea también la secuencia $\hat{a}_2(n)$ que se obtiene al añadir ceros a la secuencia $a_2(n)$ hasta alcanzar longitud N . Si $A_1(k)$ y $\hat{A}_2(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, son las transformadas discretas de Fourier, de las secuencias $a_1(n)$ y $\hat{a}_2(n)$, respectivamente: ¿cuál será la secuencia $a_3(n)$ cuya DFT es $A_3(k) = A_1(k)\hat{A}_2(k)$?

Esta secuencia se puede calcular [Oppenheim, 1989] partiendo de la convolución periódica de las secuencias periódicas asociadas a $a_1(n)$ y a $\hat{a}_2(n)$. Tales secuencias se pueden obtener mediante las siguientes expresiones:

$$\tilde{a}_1(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_1(n + rN), \quad (4.20)$$

$$\tilde{a}_2(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{a}_2(n + rN). \quad (4.21)$$

La convolución periódica dará como resultado la secuencia periódica $\tilde{a}_3(n)$,

$$\tilde{a}_3(n) = \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{a}_1(r)\tilde{a}_2(n - r), \quad (4.22)$$

y $a_3(n)$ será,

$$a_3(n) = \tilde{a}_3(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (4.23)$$

Este proceso que permite obtener la secuencia $a_3(n)$, se denomina convolución circular de N puntos de las secuencias $a_1(n)$ y $a_2(n)$, y se representa por

$$a_3(n) = a_1(n) \circledast a_2(n). \quad (4.24)$$

En la Figura 4.6 se muestra un ejemplo de convolución circular de dos secuencias empleando la convolución periódica.

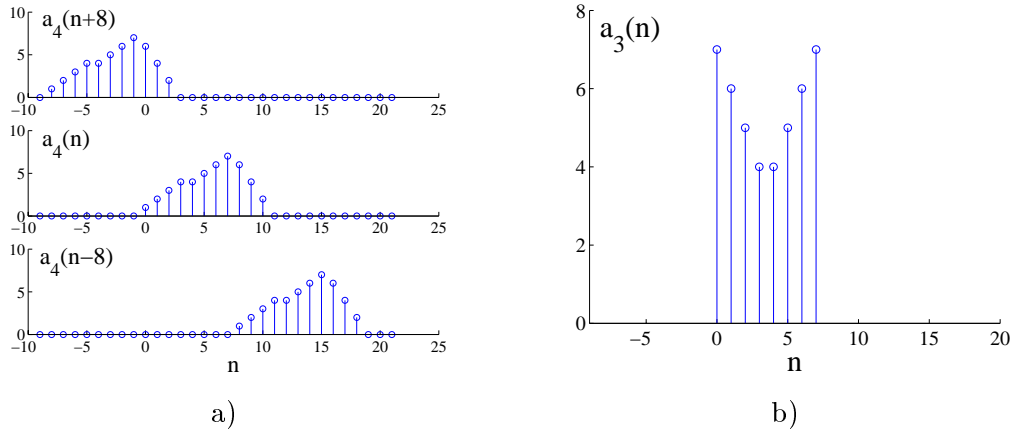


Figura 4.7: Ejemplo de convolución circular obtenida de la convolución lineal con solapamiento: a) convolución lineal desplazada y b) resultado del solapamiento en el intervalo $[0, N = 8]$.

4.4.2 La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento

La propiedad más interesante de cara a su aplicación a OFDM es que la convolución circular de dos secuencias tiene una DFT igual al producto de las transformadas de éstas. La idea en CP-OFDM es conseguir que los símbolos recibidos sean el producto (entrada a entrada) de la DFT del canal por los símbolos transmitidos. Para ello, se necesita obtener la convolución circular de un bloque de datos enviados y la respuesta impulsiva del canal. La pregunta es: ¿es posible obtener una convolución circular de una convolución lineal, como la de la expresión (4.8)?

La solución a esta cuestión se encuentra en la interpretación de una convolución circular como una convolución lineal con solapamiento (*aliasing*) [Oppenheim, 1989]. En pocas palabras, se puede encontrar la convolución circular de N puntos entre dos secuencias calculando primero su convolución lineal y añadiéndole después esa misma convolución lineal desplazada N puntos hacia delante y hacia atrás.

Para demostrar esta afirmación, sean la secuencias del apartado anterior, $a_1(n)$ y $a_2(n)$, y su convolución lineal,

$$a_4(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_1(l)a_2(k-l). \quad (4.25)$$

Las secuencias $a_1(n)$ y $a_2(n)$ tienen longitudes N y $L+1$, respectivamente, de manera que la longitud de la secuencia $a_4(n)$ es $N+L$.

La transformada de Fourier de (4.25) vendrá dada por

$$A_4(e^{j\omega}) = A_1(e^{j\omega})A_2(e^{j\omega}), \quad (4.26)$$

donde $A_1(e^{j\omega})$ y $A_2(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de las secuencias $a_1(n)$ y $a_2(n)$, respectivamente. Muestreando (4.26) a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$, se obtiene

$$A_4(k) = A_1(k)A_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (4.27)$$

donde $A_1(k)$, $A_2(k)$ y $A_4(k)$ son las DFTs de N puntos de las secuencias $a_1(n)$, $a_2(n)$ y $a_4(n)$, respectivamente. Como la secuencia $a_2(n)$ sólo tiene $L + 1$ elementos, su DFT de N puntos es igual a $\hat{A}_2(k)$, es decir, a la DFT de la secuencia $\hat{a}_2(n)$, definida en el apartado anterior. Por tanto, la transformada inversa de Fourier discreta (IDFT) de (4.27) conduce a la convolución circular en (4.24).

Resumiendo, $a_3(n) = a_1(n) \circledast a_2(n)$ en (4.24) se puede obtener calculando la IDFT de la DFT de N puntos de $a_4(n)$. Debido a la periodicidad de la IDFT, la secuencia $a_3(n)$ viene dada por

$$a_3(n) = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_4(n + rN), & 0 \leq n \leq N - 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.28)$$

Recordando que la longitud de la secuencia $a_4(n)$ es $N + L$, se comprueba que el resultado de la convolución circular es equivalente a la convolución lineal en (4.25) con el solapamiento indicado en (4.28).

En la Figura 4.7 se muestra un ejemplo de esta propiedad. En la Figura 4.7.a se representa la convolución lineal de las secuencias $a_1(n)$ y $a_2(n)$ del ejemplo de la Figura 4.6 desplazada según se indica en (4.28). En la Figura 4.7.b se observa que el solapamiento de los últimos L elementos de $a_4(n + N)$ sobre los primeros L elementos de $a_4(n)$ conduce a $a_3(n)$.

4.4.3 El prefijo cíclico

En el apartado anterior, se ha demostrado que se puede conseguir la convolución circular de las secuencias $a_1(n)$, de longitud N , y $a_2(n)$, de longitud $L + 1$, a partir de la convolución lineal. Para ello, se deben añadir a los primeros L elementos de la convolución lineal sus L últimos elementos, consiguiendo así el solapamiento indicado en (4.28).

Se plantea ahora la posibilidad de añadir a una de las secuencias un prefijo con los elementos

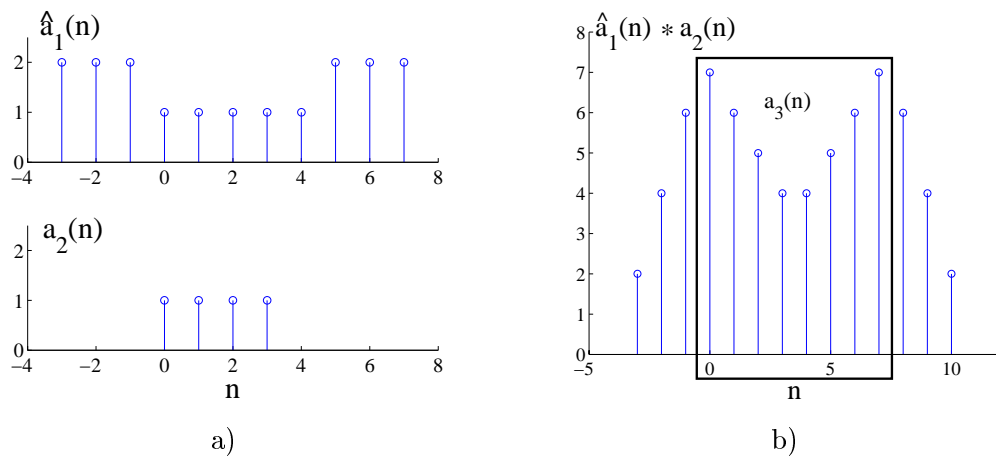


Figura 4.8: Ejemplo de convolución circular obtenida de la convolución lineal utilizando prefijo cíclico: a) secuencias $a_1(n)$ con prefijo cíclico y secuencia $a_2(n)$, b) convolución lineal y convolución circular (recuadro).

adecuados para conseguir ese mismo solapamiento directamente al aplicar la convolución lineal.

Para ver qué datos hay que incluir en ese prefijo, considérense los L últimos elementos de la secuencia $a_1(n)$. Se puede formar con ellos un prefijo que se añade delante de la $a_1(n)$, como se muestra en el ejemplo de la Figura 4.8.a, dando lugar a una nueva secuencia $\hat{a}_1(n)$ de longitud $M = N + L$. A dicho prefijo se le llama prefijo cíclico (CP, *cyclic prefix*), puesto que consiste en repetir al comienzo de la secuencia el final de ésta. Al calcular la convolución lineal de $\hat{a}_1(n)$ con $a_2(n)$, el prefijo añadido produce entre $n = 0$ y $n = L - 1$ el mismo solapamiento que en (4.28), como se muestra en la Figura 4.8.b. De este modo, se obtiene la convolución circular (4.24) tomando

$$a_3(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{a}_1(l)a_2(k-l), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.29)$$

4.4.4 El prefijo cíclico y la DFT aplicados a OFDM

La relación entre la convolución circular y la convolución lineal empleando un prefijo cíclico, así como las propiedades de la DFT de una convolución circular tienen una aplicación directa a OFDM. Esa aplicación conduce al denominado sistema CP-OFDM. Para ver como sería un sistema CP-OFDM, se parte del modelo del sistema OFDM general de la Figura 4.5.

En ese modelo, cada bloque de símbolos de datos $\mathbf{s}(i)$ se precodifica con la matriz unitaria \mathbf{D}_N^H . Al bloque de N símbolos resultante $\mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i)$ se le añade al comienzo un periodo de guarda de longitud L , obteniéndose el bloque de M símbolos $\mathbf{m}(i)$. En el sistema CP-OFDM, ese periodo de guarda será un prefijo cíclico que incluye una copia de los últimos L símbolos de $\mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i)$ (Figura 4.9.a):

$$\mathbf{m}(i) = \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i), \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{CP} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times (N-L)} & \mathbf{I}_L \\ & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

A continuación, los símbolos de $\mathbf{m}(i)$ se transmiten por el canal. Al receptor le llega la convolución lineal de esos símbolos y la respuesta impulsiva del canal $h(k)$ (expresión (4.8)). Dicha respuesta impulsiva del canal tiene una longitud menor o igual que $L + 1$ (Proposición 4.1), por lo que la convolución lineal tendrá una longitud $M + L = L + N + L$. Esta extensión hace que los L últimos símbolos de esta convolución solapen con los L primeros de la convolución correspondiente al bloque $\mathbf{m}(i-1)$ (véase la Figura 4.9.b). Eliminando el prefijo cíclico de cada bloque recibido $\mathbf{x}(i)$ se evita la IBI. En el modelo de la Figura 4.5 esa función la realiza la matriz

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{CP} = [\mathbf{0}_{N \times L} \quad \mathbf{I}_N]. \quad (4.32)$$

Por otro lado, y gracias también al prefijo cíclico, los N símbolos restantes, es decir, los símbolos del vector $\mathbf{R}\mathbf{x}(i)$, se corresponden con la convolución circular de los símbolos del bloque $\mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i)$ con la respuesta impulsiva del canal $h(k)$. Si calculamos en el receptor la DFT de esta convolución circular, se obtiene el producto de las DFTs de N puntos de los símbolos precodificados y de

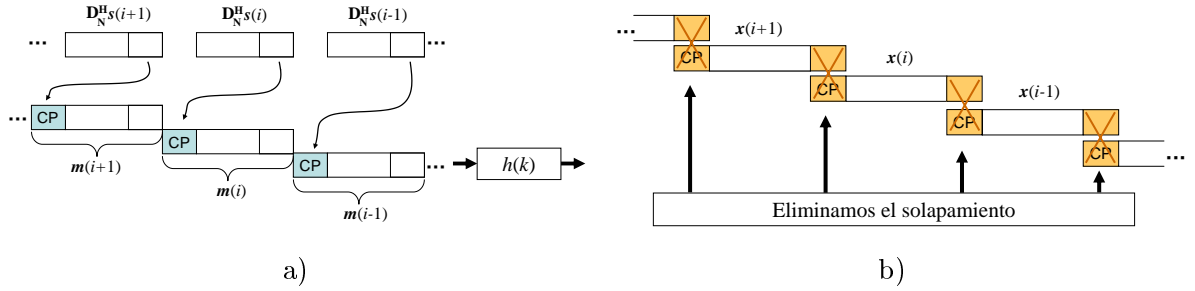


Figura 4.9: La inserción del prefijo cíclico en transmisión (a) y su eliminación en el receptor (b) permite evitar la IBI.

$h(k)$. Aquí, se ha aprovechado la propiedad de la DFT de la convolución circular para obtener en recepción el producto de un término que sólo depende de los datos enviados por otro que sólo depende del canal. El cálculo de esa DFT se puede realizar seleccionando adecuadamente la matriz de postcodificación \mathbf{D}_N . Habitualmente se emplea la matriz de Fourier, que permite el cálculo de la DFT de los elementos de un vector columna empleando un algoritmo FFT (*fast Fourier transform*). Esa matriz de Fourier o de FFT, en su versión normalizada, es la matriz de dimensiones $N \times N$ que tiene como elemento (m, n) ,

$$\mathbf{D}_N(m, n) = (N)^{-1/2} \exp(-j2\pi nm/N), \quad 0 \leq m, n \leq N - 1. \quad (4.33)$$

Por su parte, la matriz de precodificación \mathbf{D}_N^H será la conjugada traspuesta de la matriz de Fourier. Esa matriz, que recibe el nombre de matriz de IFFT normalizada, realiza la IDFT de la secuencia contenida en un vector columna. Así, la DFT de los símbolos precodificados queda,

$$\mathbf{D}_N \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) = \mathbf{s}(i). \quad (4.34)$$

En resumen, el uso de un periodo de guarda formado por un prefijo cíclico y la utilización de las matrices de IFFT y FFT como pre- y post-codificadores, permiten que en un sistema CP-OFDM los símbolos atraviesen el canal sin sufrir ISI, quedando cada uno de ellos multiplicado por el correspondiente valor de la DFT de N puntos de la respuesta impulsiva del canal. El uso de la transformada discreta de Fourier, permiten distinguir dos dominios en el modelo del sistema OFDM, el temporal y el de la frecuencia. Así, los símbolos que se quieren enviar $\mathbf{s}(i)$ se pueden considerar pertenecientes al dominio de la frecuencia, mientras que los símbolos precodificados $\mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i)$ (y también $\mathbf{m}(i)$) se dice que pertenecen al dominio del tiempo.

Obsérvese que este resultado es similar al obtenido con la codificación vectorial. Esta similitud quedará más clara en el siguiente apartado, en el que se va a encontrar la representación matricial de lo aquí descrito. Esta representación matricial será la clave para la aplicación de sistemas de separación ciega de fuentes al sistema OFDM, puesto que permite reducir dicho sistema a un modelo de mezclas lineales en un entorno ruidoso.

4.4.5 Representación matricial

El sistema descrito en el apartado anterior se puede escribir en notación matricial incluyendo las matrices definidas en (4.31) y (4.32) en el modelo de la expresión (4.18):

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{D}_N \mathbf{R}_{CP} \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{CP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_N \mathbf{R}_{CP} \mathbf{n}(i) = \mathbf{D}_N \mathbf{H}_{CP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_N \mathbf{R}_{CP} \mathbf{n}(i), \quad (4.35)$$

donde \mathbf{D}_N es la matriz de FFT normalizada de dimensiones $N \times N$ y \mathbf{H}_0 es una matriz Toeplitz triangular inferior de dimensiones $M \times M$ cuya primera columna es $[h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$, como se muestra en (4.19). Así, se puede comprobar que \mathbf{H}_{CP} es una matriz circulante de dimensiones $N \times N$ dada por

$$\mathbf{H}_{CP} = \mathbf{R}_{CP} \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{CP} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) & h(0) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

En (4.35) el bloque de símbolos $\mathbf{s}(i)$ está multiplicado por la matriz $\mathbf{D}_N \mathbf{H}_{CP} \mathbf{D}_N^H$. Esta matriz debería ser diagonal para que el vector de símbolos recibidos $\mathbf{y}(i)$ estuviera formado por cada elemento del vector $\mathbf{s}(i)$ multiplicado por un valor complejo. Se puede comprobar que efectivamente esa matriz es diagonal y que contiene los valores de la respuesta en frecuencia del canal.

Lema 4.1. *Diagonalización de una matriz circulante.*

Sea \mathbf{H}_{CP} una matriz circulante de dimensiones $N \times N$ según (4.36). La descomposición de \mathbf{H}_{CP} a partir de sus autovalores y autovectores viene dada por:

$$\mathbf{H}_{CP} = \mathbf{V}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}, \quad (4.37)$$

donde \mathbf{V} contiene los autovectores \mathbf{v} de la matriz y $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}]$ es una matriz diagonal que contienen los autovalores. Se puede comprobar que $\mathbf{V} = \mathbf{D}_N$, la matriz de FFT normalizada, y que la diagonal de $\mathbf{\Lambda}$ contiene la respuesta en frecuencia del canal $\tilde{\mathbf{h}} = [H(0) H(2\pi/N) \cdots H(2\pi(N-1)/N)]^T = \sqrt{N} \mathbf{D}_N [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$.

Demostración. Se parte de la definición de autovector:

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{H}_{CP} \mathbf{v}, \quad (4.38)$$

donde \mathbf{v} es el autovector correspondiente con el autovalor λ . Las columnas de la matriz \mathbf{V}^H son los autovectores de \mathbf{H}_{CP} , y se debe demostrar que las columnas de la matriz de IFFT normalizada, \mathbf{D}_N^H , también lo son. Comenzamos por la primera columna de \mathbf{D}_N^H :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_0 \mathbf{v} = \mathbf{H}_{CP} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^L h(l) \\ \sum_{l=0}^L h(l) \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^L h(l) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^L h(l) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

de donde se comprueba que $\lambda_0 = \sum_{l=0}^L h(l)$.

Para la segunda columna de \mathbf{D}_N^H :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+j2\pi/N} \\ \vdots \\ e^{+j2\pi(N-1)/N} \end{bmatrix} \\
 \lambda_0 \mathbf{v} &= \mathbf{H}_{CP} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} h(0) + h(1)e^{+j2\pi(N-1)/N} + \dots + h(L)e^{j2\pi(N-L)/N} \\ h(0)e^{+j2\pi/N} + h(1) + \dots + h(L)e^{+j2\pi(N-L+1)/N} \\ \vdots \\ h(0)e^{+j2\pi(N-1)/N} + h(1)e^{+j2\pi(N-2)/N} + \dots + h(L)e^{j2\pi(N-L-1)/N} \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{l=0}^L h(l)e^{-j2\pi l/N} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+j2\pi/N} \\ \vdots \\ e^{+j2\pi(N-1)/N} \end{bmatrix}, \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

de donde se comprueba que $\lambda_1 = \sum_{l=0}^L h(l)e^{-j2\pi l/N}$.

Por inducción, se puede llegar a la siguiente relación:

$$\lambda_k = H(2\pi k/N) = \sum_{l=0}^L h(l)e^{-j2\pi kl/N}. \tag{4.41}$$

□

Según este lema, la matriz \mathbf{H}_{CP} se puede diagonalizar de la siguiente manera,

$$\mathbf{H}_{CP} = \mathbf{D}_N^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{D}_N \longrightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}_N \mathbf{H}_{CP} \mathbf{D}_N^H, \tag{4.42}$$

y por lo tanto (4.35) queda,

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}(i) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i) = \begin{bmatrix} H(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & H(2\pi(N-1)/N) \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i). \tag{4.43}$$

Como se puede ver, y tal como se adelantó en el apartado anterior, en CP-OFDM los símbolos enviados se reciben libres de IBI, gracias a que el CP sirve como periodo de guarda, pero también libres de ICI. Esto es posible gracias a que el CP permite obtener la matriz de canal circulante en (4.36), que se diagonaliza mediante la FFT y la IFFT. Se muestra ahora con más claridad cómo este resultado es idéntico al obtenido con la codificación vectorial (4.5). Sin embargo, a diferencia de ese sistema, en CP-OFDM la pre- y postcodificación son muy simples, pues consisten en los cálculos de la IFFT y FFT, respectivamente. Por otro, los datos se reciben multiplicados por los

valores de la respuesta en frecuencia del canal en cada uno de los N subcanales. Si se pudiera estimar de alguna forma el valor de esa respuesta en frecuencia del canal, se podrían, en un caso sin ruido y bajo ciertas condiciones que se comentarán en el siguiente apartado, recuperar perfectamente los símbolos enviados.

4.4.6 Otras consideraciones sobre CP-OFDM

Se ha visto que CP-OFDM es un sistema de transmisión multiportadora con una estructura muy simple gracias al uso de las matrices de FFT e IFFT. Además, los símbolos se reciben libres de IBI y de ICI gracias al empleo de un prefijo cíclico. Sin embargo, no todo es ideal en este sistema, y existen ciertos inconvenientes que debemos considerar:

Nulos en la respuesta en frecuencia del canal

Si la respuesta en frecuencia del canal

$$\tilde{\mathbf{h}} = [H(0) H(2\pi/M) \cdots H(2\pi(M-1)/M)]^T = \sqrt{N} \mathbf{D}_N [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$$

tienen un cero en uno de sus elementos $H(2\pi k/M)$, los símbolos transmitidos por el correspondiente subcanal k no podrán ser recuperados. Esto es equivalente a decir que la matriz \mathbf{H}_{CP} es singular en ese caso [Wang, 2000]. Este es uno de los principales inconvenientes del uso del prefijo cíclico.

En los sistemas OFDM para la transmisión por líneas de cobre, conocidos como DMT, se puede tener información sobre el estado del canal (CSI, *channel state information*). Esa información se puede utilizar para conocer si algún subcanal está afectado por un cero de la respuesta en frecuencia de $h(k)$ y, en ese caso, descartarlo para la transmisión. La información del canal se emplea también para calcular la asignación óptima de potencia y de bits a cada subcanal. Sin embargo, en los sistemas OFDM inalámbricos o móviles, el cálculo del CSI es más complicado, y puede no ser posible seguir la misma estrategia.

Reducción de la tasa de símbolos y de la relación señal a ruido

En los sistemas OFDM, el uso de un periodo de guarda supone una reducción de la tasa de símbolos efectiva. En el caso concreto de CP-OFDM, durante el periodo de guarda se transmiten los símbolos del prefijo cíclico. Esos símbolos se descartan en el receptor para eliminar la IBI y por tanto, además de suponer una reducción de la tasa de símbolos efectiva, suponen un gasto de potencia de transmisión. La reducción en la relación señal a ruido será tanto mayor cuanto más largo sea el prefijo cíclico:

$$SNR_{loss} = 10 \log_{10} \left(\frac{N}{N+L} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{N}{M} \right). \quad (4.44)$$

En general, la longitud relativa L/N del prefijo no es demasiado grande, y las ventajas de una transmisión libre de IBI e ICI son superiores a una reducción en la relación señal a ruido (SNR)

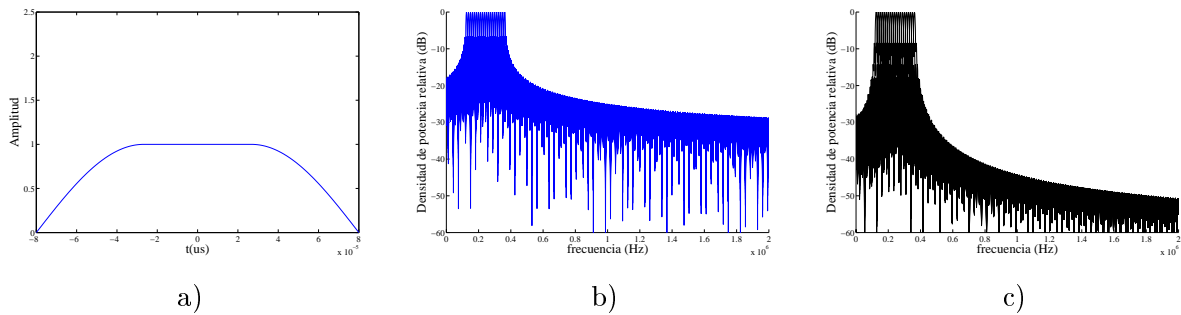


Figura 4.10: Ejemplo de utilización de un pulso no rectangular para reducir la interferencia en las bandas adyacentes: a) pulso con forma de raíz cuadrada de coseno alzado, b) espectro de las portadoras empleando un pulso rectangular, y c) espectro cuando se utiliza el pulso en a).

limitada. Por ejemplo, esa reducción será inferior a 1 dB para una longitud relativa del prefijo cíclico menor que 0,2.

Conformado de los pulsos

En la Figura 4.1 se mostró un ejemplo de portadoras ortogonales. En ese ejemplo se supuso un enventanado rectangular de los pulsos enviados y, por tanto, la respuesta en frecuencia de cada portadora tenía la forma de una sinc. Así, el espectro de densidad de potencia del sistema OFDM decae como $1/f^2$, sin embargo, esto puede resultar insuficiente en algunos sistemas. Se puede entonces emplear algún otro tipo de conformado de pulso, como el coseno alzado (véase [Edfors, 1996] y las referencias allí incluidas). Empleando este tipo de pulsos el espectro cae mucho más rápido, como se muestra en la Figura 4.10, y se reduce la interferencia con las bandas de frecuencia adyacentes.

Efectos no lineales en los amplificadores de potencia

Uno de los principales problemas de los sistemas de transmisión multiportadora es que la señal transmitida no tiene una amplitud constante. En efecto, en un sistema OFDM, la razón entre el valor máximo y el valor medio de la potencia de los símbolos transmitidos puede ser bastante grande. Esta razón, que recibe el nombre de PAR (*peak to average ratio*), es una medida del rango dinámico que tiene la señal a transmitir y determina si el amplificador de potencia puede funcionar o no en su región lineal (Figura 4.11). Si la PAR es muy elevada, es difícil que la zona lineal del amplificador sea lo suficientemente grande como para cubrir todo el rango dinámico de la señal, de manera que se puede producir distorsión no lineal. Esta distorsión destruye la ortogonalidad de las portadoras produciendo ICI. Además, produce interferencias fuera de banda que pueden afectar a sistemas adyacentes. La PAR de una señal $u(k)$ se puede calcular mediante

$$PAR = \frac{\max_k |u(k)|^2}{E[|u(k)|^2]}, \quad (4.45)$$

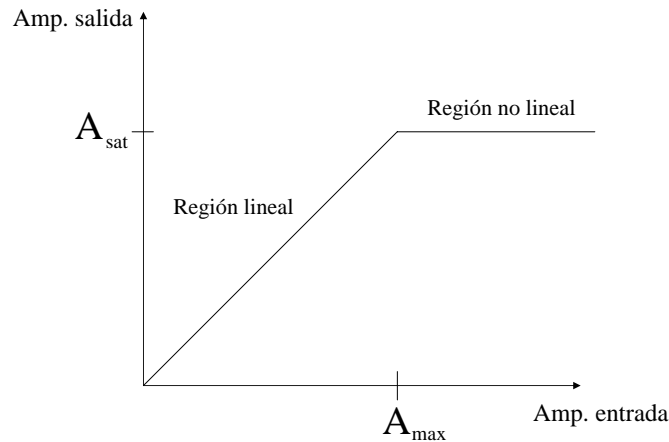


Figura 4.11: Modelo simplificado de un amplificador de potencia. La respuesta es lineal hasta un cierto nivel de entrada en el que se produce la saturación.

donde, en OFDM, la señal $u(k)$ a transmitir contiene los símbolos $s(k)$ precodificados mediante el cálculo de la IDFT,

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^L s(l) e^{-j2\pi kl/N}. \quad (4.46)$$

Si N es grande, se puede aplicar el teorema central del límite y aproximar $u(k)$ por una variable aleatoria compleja Gaussiana [Andrews, 2004]. Si se consideran N de estas variables Gaussianas independientes e idénticamente distribuidas, $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, L$, tal que para todas ellas $E[u_i^2] = 1$, la potencia promedio será

$$E \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) \right)^2 \right] = \frac{1}{N} (E[x_1^2] + E[x_2^2] + \dots + E[x_N^2]) = 1, \quad (4.47)$$

y el valor máximo será

$$\max_k |u(k)|^2 = \max_i \left[\frac{1}{\sqrt{N}} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) \right]^2 = \frac{1}{N} N^2 = N, \quad (4.48)$$

de manera que se obtiene una $PAR = N$, el número de subcanales del sistema OFDM. Por tanto, aunque desde el punto de vista de la SNR y de la tasa de símbolos interesa que el número de subcanales sea lo mayor posible respecto a la longitud de la respuesta impulsiva del canal, el efecto de la PAR y la distorsión no lineal que acarrea puede ser demasiado perjudicial. Existen diferentes técnicas para reducir o corregir el efecto de la distorsión debida a la PAR en OFDM. Estos métodos pueden consistir en un simple recorte (*clipping*) de los símbolos complejos antes de su transmisión, en técnicas de corrección de la distorsión o incluso en técnicas de codificación. Un estudio bastante completo de estas técnicas se puede encontrar en [Tellado, 2000] y [Tellado-Mourello, 1999].

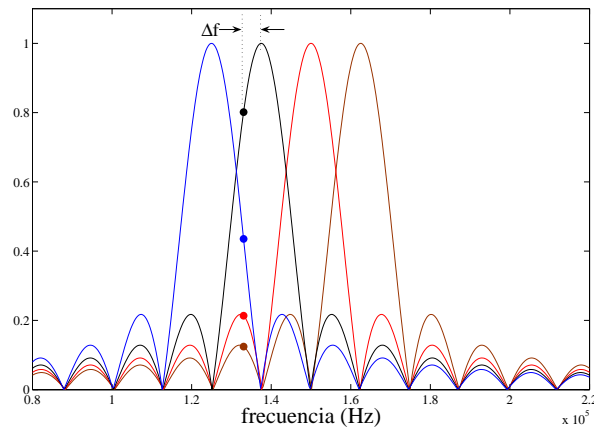


Figura 4.12: Efecto del error de sincronización: se comprueba la reducción de la amplitud de la señal muestreada y la aparición de ICI.

Sincronización

Uno de los argumentos en contra de los sistemas OFDM es su alta sensibilidad a los errores de sincronización. Estos errores pueden deberse a problemas de sincronización de símbolo y de sincronización de la frecuencia de la portadora.

Respecto a la sincronización de los símbolos, se pueden producir errores en la estimación del tiempo de cada símbolo. Un error en el tiempo de comienzo de los símbolos (*timing error*) conduce a una rotación en la fase de las portadoras. Si el error es lo suficientemente pequeño, se puede considerar que el cambio en la fase está provocado por el canal y se puede corregir al estimar éste. En caso contrario, se producirá ISI. Existen principalmente dos métodos para la sincronización temporal, los basados en señales piloto y los basados en el prefijo cíclico.

También se puede producir un error en la frecuencia de muestreo de los símbolos. El muestreo de la señal en tiempo continuo viene determinado por el reloj del receptor. Este reloj puede tener una desviación en su frecuencia que puede conducir también a la aparición de ISI.

Otro aspecto que puede afectar negativamente a la sincronización de los símbolos es el ruido de fase de la portadora. Éste está causado por imperfecciones en los osciladores del transmisor y receptor.

Respecto a la sincronización de la frecuencia de la portadora, las posibles desviaciones se pueden deber a las diferencias entre los osciladores del transmisor y receptor, a efectos Doppler o a ruido de fase introducido por canales no lineales. Estos errores conducen a una reducción de la amplitud de la señal, al no muestrear en su punto máximo. Esa misma causa es la responsable de la introducción de ICI, pues se pierde la ortogonalidad de las portadoras, como se muestra en la Figura 4.12.

La sincronización en OFDM es un tema ampliamente estudiado, por lo que la bibliografía al respecto es extensa [Edfors, 1996].

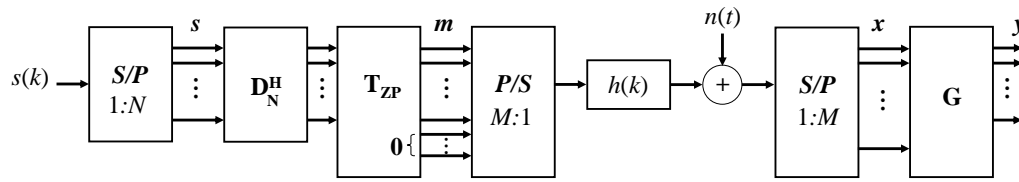


Figura 4.13: Modelo equivalente en tiempo discreto para ZP-OFDM.

Sistema OFDM en banda base frente a paso de banda

Hasta el momento se ha evitado hacer mención a la diferencia que habría entre un sistema OFDM en banda base y otro en paso de banda. En nuestra discusión se ha trabajado siempre con números complejos, tanto antes como después de las transformadas discretas de Fourier, es decir, tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo. Sin embargo, las señales en banda base deben ser reales en el dominio del tiempo, o análogamente, las señales deben ser simétricas conjugadas en el dominio de la frecuencia. Esto significa que en un sistema OFDM en banda base, los bloques de símbolos que se quieren transmitir se deben extender de forma simétrica conjugada para que el resultado de la IDFT sea una secuencia real. Viendo esto en el modelo del sistema OFDM de la Figura 4.5, los bloques $s(i)$, que contienen N elementos, van a dar lugar a $2N$ elementos en el canal, por lo que la tasa de muestreo en recepción debe ser el doble. En esta tesis, no se va a realizar esta operación, y se trabaja con señales complejas en ambos dominios.

4.5 Sistema OFDM con relleno de ceros

Uno de los principales problemas del sistema CP-OFDM, como ya se ha comentado, es que hay símbolos que no se pueden recuperar cuando la respuesta en frecuencia del canal vale cero a la frecuencia de la portadora de alguno de los subcanales. Por este motivo, en los últimos años va aumentando el interés por una alternativa al prefijo cíclico que permite resolver este problema. Esa alternativa consiste en la utilización de un periodo de guarda situado antes del bloque a transmitir y compuesto por ceros [Giannakis, 1997],[Scaglione, 1999],[Wang, 2000],[Muquet, 2002b]. A este tipo de sistemas OFDM se le conoce con el nombre de *Zero-Padding* (ZP-OFDM). Como se explicará posteriormente, el uso del ZP permite eliminar la IBI y, al menos en ausencia de ruido, recuperar perfectamente los símbolos transmitidos independientemente de los ceros de la respuesta en frecuencia del canal.

4.5.1 Representación matricial

El sistema ZP-OFDM es similar al sistema CP-OFDM, y por tanto puede ser descrito por un modelo similar al de éste (Figura 4.13). Únicamente hay que realizar los cambios necesarios para emplear un periodo de guarda al comienzo de cada bloque y relleno con ceros. Estos cambios suponen no poder seguir empleando, al menos en principio, la propiedad de la convolución

circular, ni por tanto el simple método de recepción del sistema CP-OFDM.

En primer lugar tendremos que cambiar la matriz \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{ZP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{L \times N} \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

que nos permite obtener el bloque de símbolos a transmitir

$$\mathbf{m}(i) = \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i). \quad (4.50)$$

En recepción, suponiendo que se cumplen las Proposiciones 4.1 y 4.2, volvemos a tener, la expresión (4.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F} \mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_1 \mathbf{F} \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Recordando (4.17) que la matriz \mathbf{H}_1 sólo tiene elementos distintos de cero en una submatriz de dimensiones $L \times L$, se comprueba que

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{T}_{ZP} = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

y por lo tanto, se consigue una recepción libre de IBI sin necesidad de eliminar ningún símbolo en recepción (Figura 4.14),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i). \end{aligned} \quad (4.53)$$

La matriz \mathbf{H}_{ZP} , de dimensiones $M \times N$, corresponde con las primeras N columnas de \mathbf{H}_0 ,

$$\mathbf{H}_{ZP} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(L) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & h(0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & h(L) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

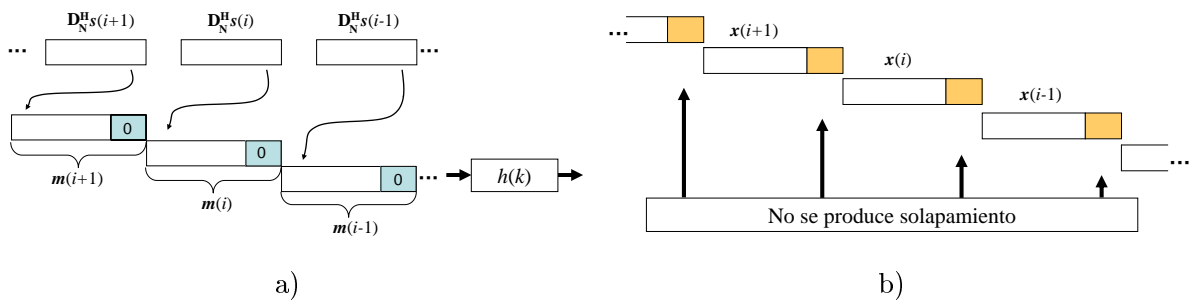


Figura 4.14: El relleno con ceros permite evitar la IBI: a) bloques de datos precodificados con ZP, b) bloques recibidos sin solapamiento.

Como se puede ver, esta matriz, que es la causante de la ICI, es Toeplitz triangular inferior de rango completo y, por tanto, siempre podrá “invertirse”, independientemente de que la respuesta en frecuencia del sistema se anule en alguno de los subcanales [Giannakis, 1997],[Scaglione, 1999],[Wang, 2000],[Muquet, 2002b]. De esta forma, se puede eliminar completamente la ICI y recuperar perfectamente los símbolos transmitidos, al menos en ausencia de ruido. Esta propiedad de inversión de la matriz con independencia de los ceros de la función de transferencia del canal es la principal ventaja del sistema ZP-OFDM frente al CP-OFDM [Muquet, 2002b], y es equivalente a afirmar que el sistema ZP-OFDM alcanza la máxima ventaja por diversidad (MDA, *maximum diversity advantage*) [Wang, 2001].

Al igual que en CP-OFDM, con la adecuada elección de una matriz de postcodificación \mathbf{G} , se pueden recuperar los datos enviados,

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{G}\mathbf{H}_{ZP}\mathbf{D}_N^H\mathbf{s}(i) + \mathbf{G}\mathbf{n}(i). \quad (4.55)$$

En ZP-OFDM se utilizan receptores, \mathbf{G} , que aprovechan todos los símbolos recibidos en cada bloque $\mathbf{x}(i)$, puesto que, gracias a la diversidad lograda en recepción por el uso del ZP, esos M símbolos contienen información de los N símbolos del bloque $\mathbf{s}(i)$. Esta redundancia es la que permite recuperar los datos independientemente de los ceros de la respuesta en frecuencia del canal. En [Scaglione, 1999] se proponen como igualadores el de cero forzado de norma mínima (ZF, *minimum norm zero forcing*) y el de mínimo error cuadrático medio (MMSE, *minimum mean square error*):

$$\mathbf{G}_{ZF} = \mathbf{D}_N\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{D}_N(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{G}_{MMSE} = \mathbf{R}_{ss}\mathbf{D}_N\mathbf{H}^H(\sigma^2\mathbf{I}_M + \mathbf{H}\mathbf{D}_N^H\mathbf{R}_{ss}\mathbf{D}_N\mathbf{H}^H)^{-1}, \quad (4.57)$$

donde $(\cdot)^\dagger$ indica la pseudoinversa Moore-Penrose de la matriz, σ^2 es la varianza del ruido blanco aditivo Gaussiano y \mathbf{R}_{ss} es la matriz de covarianzas de los símbolos $\mathbf{s}(i)$. El igualador ZF conduce a una estimación de los símbolos transmitidos libre de interferencia, pero puede conducir a un ruido $\mathbf{G}_{ZF}\mathbf{n}(i)$ con una varianza demasiado grande si el número de condición de la matriz $\mathbf{D}_N\mathbf{H}^\dagger$ es grande. Por el contrario, como sucedía en el caso de la detección multiusuario (Apartado 3.3.3), el MMSE conduce a un compromiso entre la supresión de la interferencia y el nivel de ruido, minimizando el error cuadrático medio entre los símbolos transmitidos y los estimados tras el igualador. Obsérvese que ambos igualadores necesitan conocer o estimar el canal, y su implementación es bastante más compleja que el sistema de igualación empleado habitualmente en CP-OFDM, basado únicamente en la inversión de la matriz diagonal que contiene la respuesta en frecuencia del canal. No obstante, se pueden encontrar esquemas de igualación de tipo ZF y MMSE también para el sistema CP-OFDM. Es fácil comprobar que el igualador ZF en este caso se corresponde con el método estándar de igualación.

4.5.2 La convolución circular en el sistema ZP-OFDM

En el apartado anterior se ha argumentado que en el sistema ZP-OFDM, al utilizar el relleno con ceros en lugar del prefijo cíclico ya no se tenía una convolución circular entre la IFFT de

los símbolos de datos y la respuesta impulsiva del canal. Por este motivo, no se utilizaba la misma estrategia en recepción que en el sistema CP-OFDM, debiéndose emplear un igualador más complejo. Sin embargo, existe un método para poder utilizar en ZP-OFDM un sistema de recepción similar al de CP-OFDM. El fundamento de dicho método se encuentra de nuevo en la obtención de una convolución circular a partir de la convolución lineal con solapamiento. En el Apartado 4.4.2 se mostró que se puede conseguir la convolución circular a partir de la lineal si se añaden a los primeros L elementos de la convolución lineal sus L últimos elementos. En CP-OFDM esto se conseguía al incluir el prefijo cíclico. En el sistema ZP-OFDM, gracias a que los ceros añadidos eliminan la IBI, recibimos en cada vector $\mathbf{x}(i)$ la convolución lineal completa, de longitud M , de los símbolos de $\mathbf{s}(i)$ precodificados con la IFFT con la respuesta impulsiva del canal $h(k)$. Por tanto, podemos tomar los últimos L símbolos de $\mathbf{x}(i)$ y añadirlos a los primeros. Este método recuerda el sistema *overlap-add* (OLA) para el cálculo de convolución en bloques (*block convolution*), descrito en [Oppenheim, 1989, pág. 558], por lo que recibió el nombre de receptor ZP-OFDM-OLA en [Muquet, 2001] y [Muquet, 2002b]. Matricialmente se puede describir dividiendo en (4.53) el vector $\mathbf{x}(i)$ en dos partes: la parte superior $\mathbf{x}_u(i)$, que contiene los N primeros elementos, y la parte inferior $\mathbf{x}_l(i)$, que contiene los L últimos elementos. Extendemos el vector $\mathbf{x}_l(i)$ con ceros para tener longitud N y se lo añadimos al vector $\mathbf{x}_u(i)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{OLA}(i) &= \mathbf{x}_u(i) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_l(i) \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}_{CP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \check{\mathbf{n}}(i).\end{aligned}\quad (4.58)$$

Se comprueba que el sistema ZP-OFDM-OLA es idéntico a un sistema CP-OFDM, salvo que en el proceso descrito se colorea el ruido y se incrementa ligeramente su efecto al añadir los últimos elementos a los primeros. En la mayoría de los casos, si L es mucho menor que N y la varianza del ruido no es grande, este efecto no tiene demasiada influencia, y el comportamiento de ambos sistemas es similar. La relación entre ZP-OFDM-OLA y CP-OFDM queda más clara si se observa que éste último sistema está relacionado con el método OLS (*overlap-save*) para la convolución en bloques [Oppenheim, 1989, pág. 558]. Ambos métodos, OLA y OLS, son duales, como lo son también los sistemas ZP-OFDM-OLA y CP-OFDM (al menos en ausencia de ruido).

4.5.3 El sistema ZP-OFDM como un sistema CP-OFDM con codificación

En el apartado anterior se ha visto como se puede obtener un sistema similar al CP-OFDM a partir de un sistema ZP-OFDM. Ahora se quiere mostrar que un sistema ZP-OFDM es un análogo a un sistema CP-OFDM con una precodificación de los símbolos de datos y empleando M subcanales en lugar de N . Esta idea se presenta mediante un ejemplo en [Manton, 2001], y su demostración se puede extraer de forma indirecta de [Muquet, 2001] y [Muquet, 2002b]. Tal demostración se basa en el Lema 4.1, que permite diagonalizar una matriz circulante multiplicando dicha matriz por la izquierda y la derecha por las matrices de FFT e IFFT, respectivamente. A continuación, se muestra como aplicar esto al sistema ZP-OFDM.

Considérese el bloque de símbolos recibidos en un sistema ZP-OFDM dado por expresión

(4.53):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i).\end{aligned}\quad (4.59)$$

La matriz \mathbf{H}_0 , como se puede apreciar en (4.19), es una matriz Toeplitz y no una matriz circulante. Sin embargo, gracias al uso de los ceros en el periodo de guarda, las últimas L columnas de esa matriz no afectan a los símbolos recibidos. Por tanto, esas columnas podrían ser cualquiera, y se pueden cambiar por otras de tal manera que siempre se mantiene la igualdad

$$\mathbf{H}_{ZP} = \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP}. \quad (4.60)$$

En concreto, esas últimas columnas podrían ser las que hicieran \mathbf{H}_0 circulante:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & \cdots & h(L) & \cdots & h(1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & h(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(L) & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \right. & h(L) & \cdots & h(1) \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & h(2) \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left| \right. & \ddots & \ddots & 0 \\ \left| \right. & h(L-1) & \cdots & h(0) \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Considerando así esta matriz, se puede diagonalizar con el método del Lema 4.1.

Aplicando esta característica al bloque de símbolos recibidos, se puede seleccionar $\mathbf{G} = \mathbf{D}_M$, matriz de FFT de dimensiones $M \times M$, y obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_M(i) &= \mathbf{G} \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{G} \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{D}_M \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i).\end{aligned}\quad (4.62)$$

Para conseguir diagonalizar \mathbf{H}_0 en (4.62), se inserta el término $\mathbf{D}_M^H \mathbf{D}_M = \mathbf{I}$ a su derecha y se aplica el Lema 4.1,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_M(i) &= \mathbf{D}_M \mathbf{H}_0 [\mathbf{D}_M^H \mathbf{D}_M] \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{\Lambda}_M (\mathbf{D}_M \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H) \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i),\end{aligned}\quad (4.63)$$

donde la matriz $\mathbf{V} = \mathbf{D}_M \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H$ es una matriz de codificación de los símbolos $\mathbf{s}(i)$ conocida y la matriz $\mathbf{\Lambda}_M$ es la matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda}_M = \begin{bmatrix} H(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & H(2\pi(M-1)/M) \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

que contiene la respuesta en frecuencia del canal $\tilde{\mathbf{h}}_M = [H(0) H(2\pi/M) \cdots H(2\pi(M-1)/M)]^T = \sqrt{M} \mathbf{D}_M [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$.

Comparando este resultado con el obtenido para el sistema CP-OFDM en la expresión (4.43), se observa que el sistema ZP-OFDM es igual a un sistema CP-OFDM en el que se transmiten bloques de M símbolos codificados $\mathbf{v}(i) = \mathbf{V} \mathbf{s}(i)$ por M subcanales. Como el canal se ha supuesto de tipo FIR de orden L , su respuesta en frecuencia $\tilde{\mathbf{h}}_M$ se anulará como máximo en L puntos, por lo que siempre quedan otros $M - L = N$ valores para recuperar los símbolos enviados. Esta es la principal ventaja de este sistema.

4.5.4 El sistema ZP-OFDM frente al sistema CP-OFDM

En la descripción del sistema ZP-OFDM realizada en los apartados precedentes ya se han ido nombrando algunas de las ventajas de este sistema frente a CP-OFDM. Sin embargo, el sistema ZP-OFDM también presenta inconvenientes.

Como principal ventaja, destaca la capacidad del sistema ZP-OFDM para recuperar los símbolos transmitidos en casos en los que el sistema CP-OFDM no es capaz de hacerlo. En concreto, el hecho de que la matriz \mathbf{H}_{ZP} sea Toeplitz y de rango M , hace que se pueda invertir independientemente de los ceros de la respuesta en frecuencia del canal. Además, en el sistema ZP-OFDM no se envían símbolos durante el periodo de guarda, lo que supone una reducción en la potencia necesaria en transmisión. Sin embargo, el hecho de tener M símbolos en recepción en lugar de N , tiene algunos efectos negativos. El primero es que la igualación de los M símbolos para recuperar los N símbolos enviados no es tan simple como en CP-OFDM. Por otro lado, puesto que los símbolos recibidos en el periodo de guarda no se descartan, el efecto de ruido en ese periodo debe ser también considerado.

Respecto a la tasa de símbolos y a la eficiencia espectral, ambos sistemas tienen el mismo comportamiento puesto que emplean un periodo de guarda de igual duración.

El sistema ZP-OFDM tiene los mismos problemas que el CP-OFDM con los efectos no lineales en los amplificadores de potencia, debido a su elevada PAR. En [Muquet, 2001] se realiza una comparación de ambos sistemas respecto de la probabilidad de recorte de los símbolos (*clipping probability*) en el amplificador: número de símbolos recortados en un bloque respecto del número total de símbolos en el bloque. En ese estudio se calcula la diferencia que debe haber entre la SNR a la salida del transmisor en el sistema CP-OFDM y en ZP-OFDM, para tener la misma probabilidad de recorte, llegando a la siguiente expresión:

$$\Delta_{SNR} := SNR_{CP} - SNR_{ZP} \approx 10 \log_{10} \left(1 + \frac{L}{N} \right). \quad (4.65)$$

Por tanto, si se transmite el mismo nivel de potencia en los dos sistemas, en ZP-OFDM se necesita un amplificador con un umbral de recorte ligeramente superior al de CP-OFDM.

Capítulo 5

Aplicación de separación ciega de fuentes a sistemas ZP-OFDM

5.1 Introducción

En este capítulo se van a presentar nuevas técnicas de detección para la recuperación de los símbolos transmitidos en un sistema ZP-OFDM basadas en separación ciega de fuentes. En primer lugar, se muestra que un sistema OFDM se puede identificar con un modelo de mezcla lineal e instantánea de los símbolos transmitidos. En segundo lugar, se comprueba que esa mezcla lineal viene representada por una matriz de mezclas que siempre se puede invertir. Por tanto, las técnicas de separación ciega de fuentes son alternativas adecuadas para la recuperación de los símbolos. Por otro lado, se buscan estrategias que aprovechan la particular estructura del sistema ZP-OFDM para tratar de reducir la complejidad de los algoritmos basados en separación ciega.

El capítulo se estructura de la siguiente manera. En el siguiente apartado se analiza el estado del arte, comentando brevemente los trabajos sobre separación ciega de fuentes aplicada a OFDM presentados por otros autores hasta el momento. A continuación se muestra que los modelos de los sistemas OFDM presentados en el capítulo anterior se corresponden con los modelos de mezclas lineales de fuentes presentados en el Capítulo 2. Por tanto, se pueden recuperar los símbolos transmitidos con las técnicas de separación ciega de fuentes. Se introduce un algoritmo totalmente ciego para la igualación en un sistema ZP-OFDM basado en métodos de separación ciega existentes. Dicho algoritmo proporciona excelentes resultados, sin embargo presenta una convergencia lenta y una elevada carga computacional. Para poder solucionar estos inconvenientes, se desarrollan nuevas leyes de aprendizaje de gradiente natural de bajo coste computacional, y que proporcionan una solución rápida. La clave de esas novedosas técnicas es que únicamente actualizan una matriz diagonal. Posteriormente, se destacarán los principales inconvenientes que surgen al emplear un sistema totalmente ciego. Finalmente, se propone solucionar tales problemas modificando el algoritmo ciego para hacer uso de las secuencias de entrenamiento o señales piloto que se envían en los sistemas OFDM para estimar el canal o

efectuar la sincronización, dando lugar a un algoritmo semi-ciego. El buen funcionamiento de este algoritmo se comprueba en un contexto realista, el del sistema inalámbrico HIPERLAN2.

5.2 Estado del arte

No son muchas las aplicaciones de separación ciega de fuentes o ICA a sistemas OFDM, y las que hay se centran fundamentalmente en la utilización de diversidad espacial mediante el uso de varias antenas en transmisión y recepción. En ese camino se encuentran los trabajos de [Wong, 2003], [Iglesia, 2003] y [Sarperi, 2004]. Frente a estos trabajos, esta tesis se centra en la aplicación de BSS al sistema OFDM de una sola antena. Comprobaremos que el modelo del sistema OFDM se reduce al de un modelo de mezcla lineal de fuentes independientes, sin necesidad de incluir más antenas, y por tanto se puede resolver con BSS.

5.3 El sistema ZP-OFDM visto como un problema BSS

El modelo equivalente en tiempo discreto del sistema ZP-OFDM viene dado por la expresión (4.53),

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Como se comentó en el Apartado 4.5, y como se observa en (5.1), la interferencia entre bloques se ha eliminado gracias al periodo de guarda relleno con ceros. Sin embargo, persiste una interferencia entre los símbolos de distintos subcanales dentro del mismo bloque (ICI), que debe ser eliminada. Esta interferencia aparece como resultado de la mezcla lineal e instantánea de los N símbolos de $\mathbf{s}(i)$, que dan lugar al vector de M símbolos \mathbf{x} . Por tanto, aparece un problema de separación ciega de fuentes, en el que M sensores proporcionan muestras de señales obtenidas de la mezcla lineal e instantánea de N fuentes independientes desconocidas. Comparando (5.1) con el modelo del problema BSS para el caso ruidoso, dado por la expresión (2.4),

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{A} \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i),\tag{5.2}$$

se identifica una matriz de mezcla para el sistema ZP-OFDM dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \\ &= \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Si, como se ha comprobado, el sistema ZP-OFDM se puede identificar con un problema BSS, se pueden aplicar los algoritmos de separación ciega descritos en el Capítulo 2 (o cualquier otro no necesariamente incluido ahí) para recuperar los símbolos transmitidos. Este proceso de detección será posible si se cumplen las condiciones para obtener una solución descritas en el Apartado 2.2.1. Se puede comprobar que efectivamente se cumplen tales condiciones, puesto que

las fuentes se pueden considerar independientes, ninguna de ellas es Gaussiana (si no se considera el ruido entre ellas) y, lo más importante, la matriz de mezcla siempre se puede invertir, con independencia de los ceros de la respuesta en frecuencia del canal. Se recuerda que esta última propiedad supone la principal ventaja del sistema ZP-OFDM frente al CP-OFDM, como se explicó en el Apartado 4.5.1.

La matriz de mezcla en (5.3), tiene dos componentes. Una de esas componentes, \mathbf{D}_N^H , es conocida, y por tanto, no necesita ser calculada. Además, al ser la matriz \mathbf{D}_N de rango completo, la estimación de \mathbf{H}_{ZP} con un método ciego asegura la recuperación de los símbolos $\mathbf{s}(i)$ de forma única [Wang, 2000].

En resumen, las propiedades de la matriz de mezcla del sistema ZP-OFDM lo hacen un sistema adecuado para la aplicación de técnicas de separación ciega para la detección.

5.4 Aplicación de BSS a ZP-OFDM: receptor completamente ciego

La primera solución que a uno se le ocurre para recuperar de forma ciega los símbolos de $\mathbf{s}(i)$ en (5.1) es la aplicación directa de un algoritmo de separación ciega de fuentes que permita encontrar la matriz de separación \mathbf{B} para obtener la siguiente estimación de los símbolos transmitidos,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}(i) &= \mathbf{B}\mathbf{x}(i) \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{s}(i) + \mathbf{B}\mathbf{n}(i) \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{H}_0\mathbf{T}_{ZP}\mathbf{D}_N^H\mathbf{s}(i) + \mathbf{B}\mathbf{n}(i) \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{H}_{ZP}\mathbf{D}_N^H\mathbf{s}(i) + \mathbf{B}\mathbf{n}(i) \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{s}(i) + \mathbf{B}\mathbf{n}(i),
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde, tal como se describe en (2.2), \mathbf{C} es una matriz $N \times N$ con un sólo elemento distinto de cero por cada fila y columna. En esta solución, se está seleccionando un receptor \mathbf{G} para el sistema ZP-OFDM en (4.55) igual a la matriz de separación.

En la elección del algoritmo más adecuado para resolver este problema hay que conocer las particularidades del sistema OFDM. En primer lugar, al tratarse de un sistema de comunicaciones digitales, el algoritmo debe trabajar con señales complejas. Y en segundo lugar, en un sistema OFDM el número de subcanales es bastante grande, es decir, el número de fuentes que se van a mezclar es bastante grande. En este sentido, el algoritmo debe ser suficientemente rápido para proporcionar una solución útil en un sistema de comunicaciones real.

Entre los algoritmos descritos en el Capítulo 2, el Algoritmo JADE [Cardoso, 1993] y los algoritmos basados en el gradiente natural o relativo (Apartado 2.6), son capaces de trabajar con complejos. De momento, y mientras no se extiendan al caso complejo, los algoritmos basados en el GWFOE (excepto el JADE) no pueden utilizarse aquí. El JADE, es un algoritmo que trabaja en bloque y con una velocidad bastante limitada cuando el número de fuentes es muy grande.

Por su parte, los algoritmos basados en el gradiente permiten un aprendizaje adaptativo de la solución. Además, estos algoritmos tienen propiedades ventajosas, como son la estabilidad, la supereficiencia y la equivarianza, que los hacen claros candidatos para su aplicación al problema propuesto. En el presente capítulo se va a trabajar con los algoritmos basados en el gradiente.

Finalmente, antes de presentar las soluciones propuestas, hay que destacar que, como se puede ver en (5.4), el número de sensores disponibles M es mayor que el número de fuentes N . Se debe emplear algún método de reducción de dimensiones adecuado, que además proporcione alguna ventaja en relación con el ruido.

5.4.1 Adaptación del detector tipo HyHOS a OFDM

En el Capítulo 3 se describe un detector multiusuario que combina una proyección con un banco de filtros adaptados a los códigos de los usuarios y un algoritmo de separación ciega de fuentes. Se puede considerar que el sistema ZP-OFDM es análogo a un sistema CDMA en el que los “usuarios” se corresponden con los símbolos que se transmiten por cada subcanal. Cada subcanal es ortogonal a los demás, por tanto, en cierto modo actúa como un “código” que permite separar los distintos “usuarios”. Esta equivalencia entre sistemas CDMA y OFDM ya se puso de manifiesto en [Scaglione, 1999], y en base a ella, se propone un receptor para ZP-OFDM que combina la utilización de filtros adaptados, en este caso a los subcanales, y un algoritmo de separación ciega de fuentes basado en el gradiente natural [Boloix-Tortosa, 2004].

En particular, se van a utilizar los Algoritmos EASI [Cardoso, 1996] y M-EASI [Murillo-Fuentes, 2002a] para calcular la matriz de separación de forma adaptativa. Las leyes de aprendizaje de estos algoritmos se puede encontrar en el Apartado 2.6.3.

Por otro lado, como se ha comentado, antes de iniciar el proceso de separación, se procede a una proyección del espacio M -dimensional de los símbolos recibidos al espacio N -dimensional. Para ello, de manera análoga a como se hizo en el caso del detector HyHOS para CDMA (Apartado 3.4)[Caamaño-Fernández, 2004], emplearemos un banco de filtros adaptados a cada una de las portadoras de los subcanales, eliminando el periodo de guarda. El proceso completo quedaría

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}(i) &= \mathbf{B}[\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}] \mathbf{x}(i) \\
 &= \mathbf{B}[\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}] \mathbf{A} \mathbf{s}(i) + \mathbf{B} \mathbf{n}(i) \\
 &= \mathbf{B}[\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}] \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{B} \mathbf{n}(i) \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{s}(i) + \mathbf{B} \mathbf{n}(i),
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde $[\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}]$ representa el banco de filtros adaptados y la eliminación del periodo de guarda.

Los beneficios de ese banco de filtros son la mejora de la relación señal a ruido en cada subcanal y, en cierto grado, de la razón señal a interferencia en cada subcanal. Así, tras el banco de filtros y en cada instante i , tendremos N símbolos cada uno de los cuales contendrá principalmente información del símbolo transmitido por el subcanal correspondiente. Esto, en

cierta medida, contribuye a que los símbolos se recuperen en el mismo orden que tenían los símbolos originales. Los numerosos experimentos realizados han corroborado esta afirmación, sin embargo, al tratarse de un método ciego, puede suceder que en algún caso el orden de los símbolos no se conserve. Otra dificultad, consecuencia también de emplear un método ciego y más grave en este caso, es que los símbolos se pueden separar completamente pero pueden estar multiplicados por una constante compleja desconocida. Tanto en este caso, como en el caso de incertidumbre en el orden de los símbolos, es necesaria alguna información adicional para poder recuperarlos sin error. Una posibilidad sería disponer de alguna mínima secuencia de datos de entrenamiento.

El algoritmo que describe el receptor ciego para ZP-OFDM basado en separación ciega de fuentes utilizando el gradiente natural es el siguiente:

Algoritmo 5.1. *Receptor ZP-OFDM basado en NG-BSS.*

1. *Filtros Adaptados.* Pasar los símbolos recibidos por los filtros adaptados, es decir, obtener $\hat{\mathbf{x}}(i) = [\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}] \mathbf{x}(i)$.
2. *Gradiente Natural.* Partiendo de $\mathbf{B} = (1 + j)\mathbf{I}_N$ y con cada bloque de símbolos $\hat{\mathbf{x}}(i)$, actualizar la matriz de separación \mathbf{B} con (2.86) o (2.87), para EASI o M-EASI, respectivamente.
3. *Solución.* Tras un número de iteraciones que aseguren la convergencia, calcular la salida con el último valor de la matriz de separación: $\mathbf{B}[\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}] \mathbf{x}(i)$.

Pruebas del Algoritmo 5.1

1. Experimento 5.1

Para comprobar el funcionamiento del receptor ZP-OFDM basado en NG-BSS propuesto en el Algoritmo 5.1, en este primer experimento se transmiten símbolos 4-QAM independientes y equiprobables por un sistema ZP-OFDM. El número de subcanales utilizados es $N = 32$, es decir, cada bloque $\mathbf{s}(i)$ contiene $N = 32$ símbolos.

El canal considerado tiene una respuesta impulsiva equivalente en tiempo discreto $h(k) = \{0.6121, -0.5331 - 0.4481j, 0.369j, 0.0513 - 0.0388j\}$, por tanto, la longitud del periodo de guarda es $L = 3$. Este canal, propuesto como ejemplo en [Ding, 2003], se ha elegido para obtener una considerable ICI. La magnitud de la DFT del canal en cada uno de los subcanales se representa en la Figura 5.1.

La longitud de los bloques de símbolos transmitidos, una vez añadidos los ceros del periodo de guarda, es de $M = N + L = 35$. Se han transmitido un total de 10^5 bloques, lo que supone un total de $6.4 \cdot 10^6$ bits. En recepción se ha aplicado el Algoritmo 5.1, tanto con EASI como M-EASI, para recuperar los símbolos transmitidos. En ambos casos, la tasa de adaptación se fijó a $\lambda = 1/t$ y la función de puntuación seleccionada fue $\varphi_i(y_i) = |y|^2 y$. La eficacia del algoritmo se

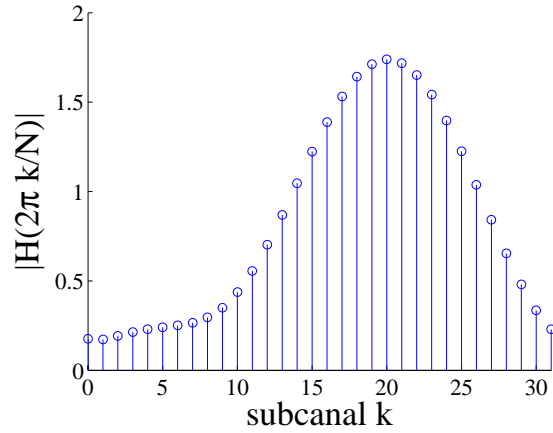


Figura 5.1: Magnitud de la respuesta en frecuencia del canal en los $N = 32$ subcanales del sistema.

va a comparar con el receptor MMSE aplicado también a los símbolos obtenidos tras los filtros adaptados, como se hizo en las pruebas del detector HyHOS en el Capítulo 3. Para este receptor MMSE se supone conocido el canal, mientras que la matriz de covarianzas de los símbolos a la salida de los filtros adaptados se va actualizando con cada nueva muestra:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(i+1) = (1 - \nu)\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(i) + \nu\hat{\mathbf{x}}(i)\hat{\mathbf{x}}^H(i), \quad (5.6)$$

donde ν es una constante de aprendizaje positiva de valor muy pequeño (en este caso se ha fijado a 10^{-5}).

En primer lugar se estudia la convergencia del algoritmo. En la Figura 5.2 se muestra la relación interferencia a señal (ISR) en función del número de muestras para el Algoritmo 5.1,

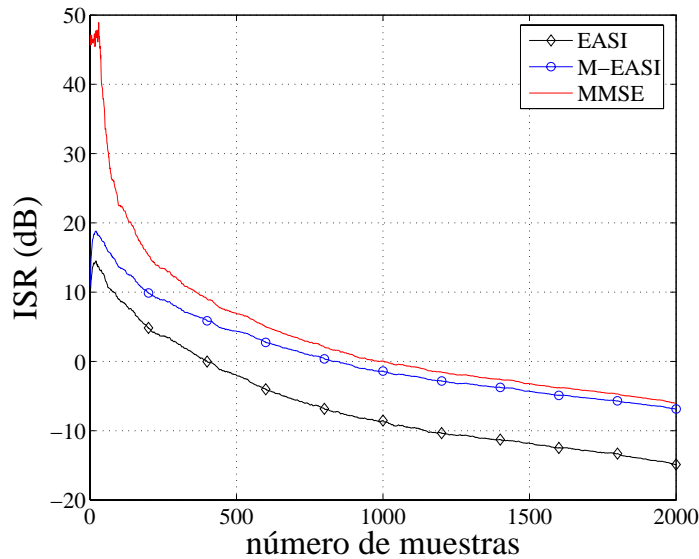
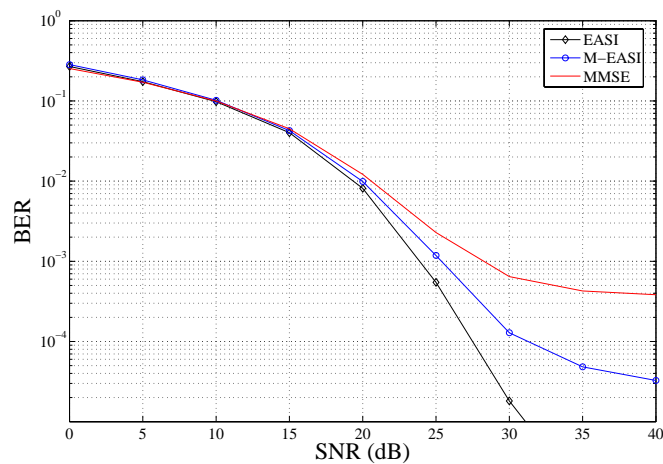
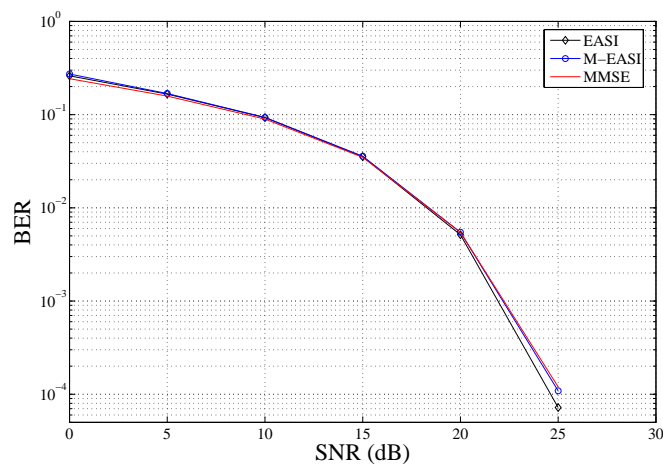


Figura 5.2: Índice de separación en función del número de muestras.

tanto con EASI como M-EASI, y para el MMSE. La relación señal a ruido en esta prueba se fijó en $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$. Se observa que el Algoritmo 5.1 tiene una convergencia más rápida que el MMSE. Este resultado es interesante, pues hay que indicar que el receptor MMSE conoce el canal, mientras que el receptor del Algoritmo 5.1 es completamente ciego. Sin embargo, aplicar el receptor MMSE después del banco de filtros adaptados no es la mejor estrategia en ZP-OFDM. Es mucho más conveniente utilizar las M muestras recibidas en la aplicación del MMSE, como se indica en (4.57), o hacer una reducción de dimensiones proyectando en el espacio de la señal, como se verá en el siguiente apartado. Respecto a la elección del método más adecuado para la separación ciega, se comprueba que la convergencia del Algoritmo EASI es más rápida que la del M-EASI. En segundo lugar, se estudia la probabilidad de error de bit (BER) en función de la relación señal a ruido obtenida con el receptor ciego propuesto y con el MMSE. En las Figuras 5.3.a) y 5.3.b) se muestran los resultados obtenidos cuando se han utilizado 400 y 2000 muestras de entrenamiento.



a)



b)

Figura 5.3: BER frente a relación señal a ruido para: a) 400 muestras de entrenamiento y b) 2000 muestras de entrenamiento.

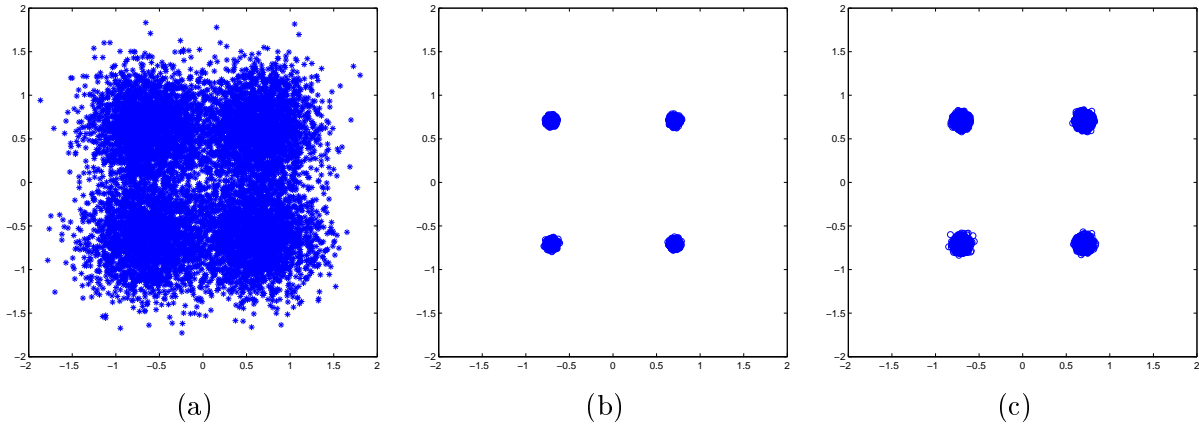


Figura 5.4: Símbolos recibidos por el subcanal 2 para una $\text{SNR} = 28$ dB: (a) antes de aplicar el Algoritmo 5.1, (b) empleando el Algoritmo 5.1 con EASI y (c) con M-EASI.

muestras en el entrenamiento, respectivamente. Se comprueban los buenos resultados obtenidos con el Algoritmo 5.1, que mejoran los obtenidos con el MMSE.

Como ejemplo visual de la eficacia del algoritmo propuesto en la reducción de la ICI, en la Figura 5.4 se representa la constelación de la señal recibida a través del subcanal 2, antes y después de aplicar el algoritmo propuesto, en el caso $\text{SNR} = 28$ dB. Se puede observar en la Figura 5.4.a) el efecto de la ICI sobre los símbolos y como se consigue eliminar esa interferencia en las Figuras 5.4.b) y 5.4.c), en las que se ha aplicado el algoritmo con EASI y M-EASI, respectivamente. La dispersión de los símbolos recibidos se reduce enormemente y, de esta manera, se consigue reducir la probabilidad de error.

2. Experimento 5.2

Con el fin de poder generalizar los resultados mostrados en el anterior experimento, en un segundo experimento se han generado de forma aleatoria quinientos canales con respuesta impulsiva de igual longitud que en el ejemplo anterior, $L + 1 = 4$.

En primer lugar, en ausencia de ruido, se calcula la ISR a la salida del receptor MMSE en (4.57) y del receptor del Algoritmo 5.1 en función del número de muestras. En este caso, el MMSE ya no se aplica a la salida de los filtros adaptados. El resultado se muestra en la Figura 5.5. Se puede observar el buen comportamiento del método propuesto, independientemente del canal. Este resultado muestra la propiedad de equivarianza de los algoritmos de separación ciega empleados. Por otro lado, se puede ver que el receptor MMSE tiene muchas fluctuaciones en su convergencia.

En una segunda prueba, se ha calculado la BER obtenida en ausencia de ruido en función del número de muestras empleadas en el entrenamiento del receptor propuesto y del MMSE en (4.57). Para cada uno de los quinientos canales generados, se han transmitido $2.5 \cdot 10^4$ bloques, promediando las probabilidades de error obtenidas en cada caso empleando 100, 200, 400, 1000, 2000 y 5000 muestras de entrenamiento. En la Figura 5.6 se muestran los resultados.

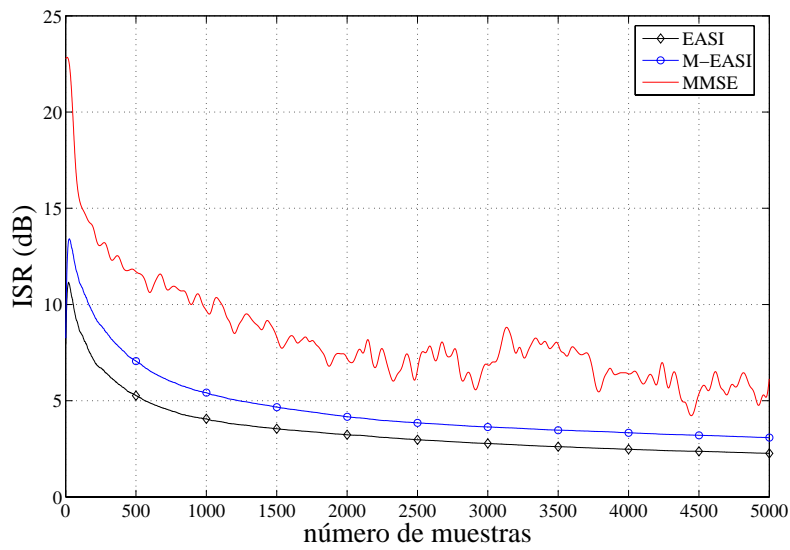


Figura 5.5: Índice de separación en función del número de muestras.

Se concluye que el receptor propuesto en el Algoritmo 5.1 elimina de forma ciega la ICI, alcanzando unos niveles de BER superiores al MMSE. Los experimentos demuestran también la capacidad del algoritmo para conservar el orden de los símbolos recuperados, sin embargo aparecen dos inconvenientes importantes. En primer lugar, la convergencia no es muy rápida. Son necesarias muchas iteraciones para obtener una solución adecuada, al menos mil símbolos. En segundo lugar, el escalado de los símbolos recuperados por un cierto valor complejo desconocido puede rotar de forma incontrolada la constelación de la señal, aumentando la BER. Esta

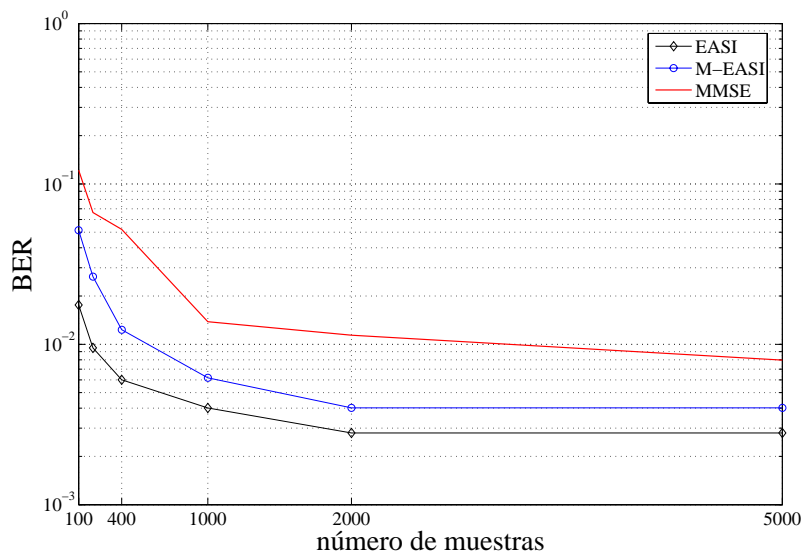


Figura 5.6: BER en función del número de muestras.

incertidumbre, no se puede corregir sin tener alguna información adicional sobre los símbolos transmitidos. Aunque no se ha indicado explícitamente, los resultados mostrados en este apartado incluyen una corrección de la fase del escalado de cada símbolo recuperado.

Para concluir este apartado, es importante destacar que la utilización del banco de filtros adaptados elimina los símbolos que se reciben en el periodo de guarda. Dichos símbolos contienen información útil sobre los símbolos transmitidos, por tanto, puede ser más conveniente aprovecharlos para conseguir una reducción de ruido mediante un proyectado diferente al de los filtros adaptados.

Alternativa a los filtros adaptados: PCA y reducción de ruido en ZP-OFDM

En lugar de eliminar los símbolos recibidos en el periodo de guarda, se propone como alternativa aprovecharlos para realizar una reducción de ruido. Esta reducción de ruido se puede conseguir, tal como se indicó en el Apartado 2.2.3, mediante una descomposición en subespacios de los símbolos recibidos: por un lado, el subespacio de la señal y por otro, el del ruido. Recordando dicho procedimiento, en primer lugar hay que estimar la matriz de autocorrelación de las mezclas $\mathbf{x}(i)$ (supuestas éstas de media cero):

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i). \quad (5.7)$$

A continuación se calculan, mediante PCA, los M autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{R}_{xx} :

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^H, \quad (5.8)$$

donde la matriz diagonal $\mathbf{\Delta}$ contiene los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_M \geq 0$ y la matriz \mathbf{Q} contiene los autovectores asociados a dichos autovalores. Se puede hacer una reducción de ruido y de

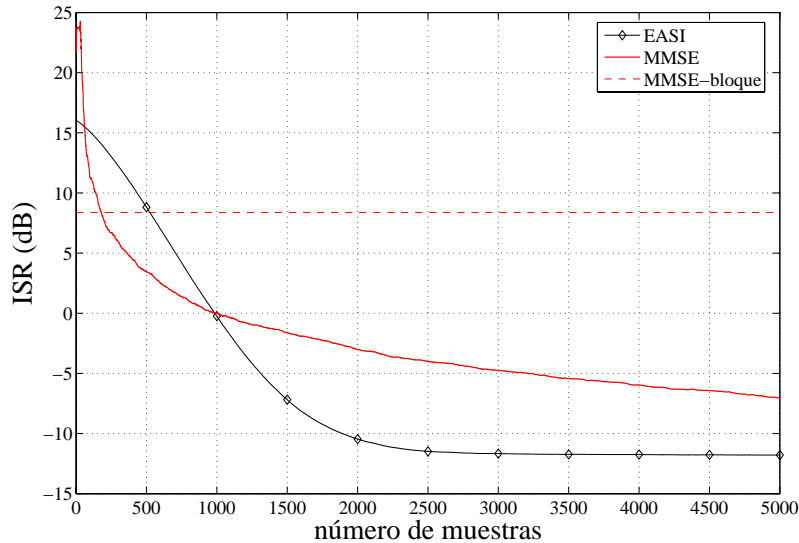


Figura 5.7: Índice de separación en función del número de muestras.

dimensiones del problema proyectando el vector $\mathbf{x}(i)$ en el espacio de la señal y escalando para que cada componente tenga varianza unidad. Este proceso se escribe de la siguiente manera,

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{W} \mathbf{x}(i) = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^H \mathbf{x}(i), \quad (5.9)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal que contiene los N autovalores mayores de \mathbf{R}_{xx} , $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_N$, y \mathbf{V} es la matriz que contiene los autovectores asociados a esos autovalores.

Se ha comprobado, repitiendo el Experimento 5.2 del apartado anterior, que el uso de este método de reducción de dimensiones en lugar de los filtros adaptados es muy favorable. Se han generado de forma aleatoria quinientos canales con respuesta impulsiva de longitud $L + 1 = 4$. Por cada canal y en ausencia de ruido, se han transmitido cinco mil bloques de símbolos. Esos cinco mil bloques son blanqueados y proyectados empleando (5.9) antes de aplicar la detección. En la Figura 5.7 se muestra el ISR promedio en ausencia de ruido para el MMSE aplicado tras el blanqueado y para el método propuesto en el Algoritmo 5.1 utilizando la ley de aprendizaje del EASI en (2.86) sin el término de blanqueado. Como referencia, se incluye también en la figura el resultado obtenido al aplicar el receptor MMSE en (4.57) que se ha calculado directamente con los cinco mil bloques sin ejecutar la proyección (línea discontinua). Se observa que se obtiene una mejor solución que en el caso de los filtros adaptados, sin embargo, este método no es adaptativo, pues utiliza todos los bloques en el cálculo de \mathbf{W} .

Este proceso de reducción del ruido se aplicará al algoritmo que se presenta en el Apartado 5.5.2.

5.4.2 Nuevo receptor ciego para ZP-OFDM basado en la ley de aprendizaje de una matriz diagonal

El receptor ciego propuesto en el apartado anterior proporciona un buen resultado para la probabilidad de error de bit, pero tiene una convergencia muy lenta, de manera que necesita muchas muestras en el proceso de aprendizaje de matriz de separación. Por otro lado, la carga computacional del Algoritmo EASI o M-EASI es bastante alta, de manera que no sólo son necesarias muchas muestras, sino que además esas muestras requieren un tiempo de procesamiento demasiado elevado para permitir la aplicación práctica del Algoritmo 5.1. En este apartado se presenta un nuevo receptor ciego basado en una ley de aprendizaje de gradiente para una matriz diagonal, que tiene una convergencia muy rápida y una carga computacional muy reducida.

En el Apartado 4.5.3 se mostró que un sistema ZP-OFDM es equivalente a un sistema CP-OFDM en el que se emplean M subcanales en lugar de N y en el que se aplica una precodificación conocida. La consecuencia más importante de esta equivalencia, como se vio en ese apartado, es que en un sistema ZP-OFDM los símbolos recibidos se pueden ver como los símbolos $\mathbf{s}(i)$ codificados y multiplicados por una matriz diagonal dependiente del canal. Puesto que la codificación es conocida, sólo hay que invertir la matriz diagonal para recuperar los símbolos enviados. Esto último es la clave que va a permitir el desarrollo de un nuevo receptor ciego de baja carga computacional y rápida convergencia. En lugar de tener que invertir una matriz de mezcla de

dimensiones $N \times N$ como en (5.3), sólo hay que invertir una matriz diagonal desconocida con M entradas.

El proceso es el siguiente. Se parte del resultado presentado en Apartado 4.5.3, que permitía diagonalizar la matriz del canal en (4.59),

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i),\end{aligned}\quad (5.10)$$

empleando la matriz de FFT de M puntos, \mathbf{D}_M , para llegar a (4.63)

$$\mathbf{x}_M(i) = \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i), \quad (5.11)$$

donde la matriz $\mathbf{V} = \mathbf{D}_M \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H$ es una matriz de codificación de los símbolos $\mathbf{s}(i)$ conocida y la matriz $\mathbf{\Lambda}_M = \mathbf{D}_M \mathbf{H}_0 \mathbf{D}_M^H$ es la matriz diagonal que contiene la respuesta en frecuencia del canal $\tilde{\mathbf{h}}_M = [H(0) H(2\pi/M) \cdots H(2\pi(M-1)/M)]^T = \sqrt{M} \mathbf{D}_M [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$.

Se puede considerar el siguiente problema de separación ciega de fuentes,

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{B} \mathbf{x}_M(i) = \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{B} \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i), \quad (5.12)$$

en el que se quiere encontrar una matriz de separación \mathbf{B} para recuperar los símbolos enviados.

La matriz de codificación $\mathbf{V} = \mathbf{D}_M \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H$ de dimensiones $M \times N$, es conocida por el receptor. Además, es una matriz de rango N , de manera que se cumple que $\mathbf{V}^\dagger \mathbf{V} = \mathbf{I}_N$, siendo \mathbf{V}^\dagger la matriz pseudoinversa de \mathbf{V} . Por otro lado, esta pseudoinversa vale $\mathbf{V}^\dagger = (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^H = \mathbf{V}^H$. Así, se puede fijar una matriz de separación dada por

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^H \mathbf{P}, \quad (5.13)$$

de manera que, si \mathbf{P} es la inversa de $\mathbf{\Lambda}_M$, se recuperan perfectamente los datos (al menos en ausencia de ruido): $\mathbf{y} = \mathbf{s}$.

Como conclusión, para lograr la separación únicamente hay que buscar una matriz diagonal \mathbf{P} de dimensiones $M \times M$ que sea la inversa de la matriz diagonal que contiene la respuesta en frecuencia del canal. La complejidad del problema se ha reducido de un orden $\mathcal{O}(N^2)$ a $\mathcal{O}(M)$, es decir, a encontrar M elementos de una matriz en lugar de N^2 .

Ley de aprendizaje aproximada para la matriz diagonal \mathbf{P}

Se puede intentar obtener una ley de aprendizaje basada en el gradiente natural que permite calcular la matriz diagonal \mathbf{P} de forma adaptativa. En este apartado se presenta un método aproximado para encontrar dicha ley.

La expresión (2.83), obtenida en el Apartado 2.6.3, proporciona la ley de aprendizaje basada en el gradiente natural para una matriz de separación. En el caso de señales complejas, esa ley de aprendizaje es

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \lambda [\mathbf{I} - \varphi(\mathbf{y}) \mathbf{y}^H] \mathbf{B}_k. \quad (5.14)$$

En el problema de separación ciega que se nos plantea, la matriz que se quiere obtener es \mathbf{P} , que está relacionada con la matriz de separación en (5.13) a través de la matriz \mathbf{V}^H . Esta matriz es de rango N , por lo que no se puede afirmar que $\mathbf{V}\mathbf{V}^H$ sea exactamente la matriz identidad. Sin embargo, se puede comprobar que $\mathbf{V}\mathbf{V}^H \approx \frac{N}{M}\mathbf{I}_M$. Este resultado aproximado ya fue utilizado en [Muquet, 2002b] para encontrar su receptor FAST-MMSE. Considerando entonces esta aproximación y suponiendo que se puede aplicar la ley de aprendizaje en (5.14) a la matriz de separación $\mathbf{B} = \mathbf{V}^H\mathbf{P}$, se puede multiplicar cada uno de los términos de (5.14) por la izquierda por \mathbf{V} para obtener la siguiente ley de aprendizaje para \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \lambda \mathbf{V}[\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\mathbf{y}^H]\mathbf{V}^H\mathbf{P}_k. \quad (5.15)$$

Como la matriz \mathbf{P} es diagonal, y para trabajar sólo con matrices diagonales, se fuerza que el término $\mathbf{V}[\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\mathbf{y}^H]\mathbf{V}^H$ sea diagonal, dando como resultado la siguiente ley de aprendizaje aproximada para la matriz diagonal:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \lambda \text{diag} \{ \text{diag} (\mathbf{V}[\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\mathbf{y}^H]\mathbf{V}^H) \} \mathbf{P}_k. \quad (5.16)$$

Esta ley de aprendizaje, que denominaremos de forma simplificada NGD-I, permite encontrar de forma muy rápida y simple la matriz de separación, calculando únicamente una matriz diagonal de forma adaptativa con cada nueva muestra de la señal. Aunque esta ley se ha obtenido tras varias aproximaciones, los resultados experimentales, que se mostrarán posteriormente, corroboran su buen funcionamiento.

Desarrollo de la ley de aprendizaje para ML aplicada a la matriz diagonal

En lugar de emplear la aproximación anterior, se puede intentar desarrollar la ley de aprendizaje para la matriz diagonal \mathbf{P} partiendo de la función de coste para la versión estocástica del gradiente en (2.81)

$$l(\mathbf{y}) = -\log |\det \mathbf{B}| - \sum_{i=1}^N \log q_i(y_i). \quad (5.17)$$

Esta función de coste supone una matriz de separación cuadrada, mientras que la matriz de separación $\mathbf{B} = \mathbf{V}^H\mathbf{P}$ no lo es. Por tanto, la utilización de esta función de coste como punto de partida supone también una aproximación. Recordando que la matriz \mathbf{V} es fija y conocida, para encontrar el gradiente de esta función respecto de la matriz diagonal \mathbf{P} , debemos calcular su derivada respecto de cada elemento p_{ii} de \mathbf{P} . La derivada del primer término en $\log |\det \mathbf{B}|$ respecto de cada elemento p_{ii} de la matriz es directa, y conduce a $1/p_{ii}$. Por otro lado, para el segundo término se tiene,

$$\frac{d}{dp_{ii}} \sum_{k=1}^N \log q_k(y_k) = \sum_{k=1}^N \frac{q'_k(y_k)}{q_k(y_k)} \frac{dy_k}{dp_{ii}}. \quad (5.18)$$

Los elementos de \mathbf{y} se relacionan con los de $\mathbf{x}_M(i)$ por medio de (5.12), de manera que se puede escribir

$$y_k = \sum_{j=1}^M v_{jk}^* p_{jj} x_{Mj}, \quad (5.19)$$

donde v_{jk}^* es el elemento (j, k) de la matriz \mathbf{V} conjugado y x_{Mj} es el elemento j de \mathbf{x}_M . Al derivar y_k respecto de p_{ii} , se queda sólo el término $j = i$ de este sumatorio. Así, la derivada del segundo término queda

$$\frac{d}{dp_{ii}} \sum_{k=1}^N \log q_k(y_k) = \sum_{k=1}^N \frac{q'_k(y_k)}{q_k(y_k)} v_{ik}^* p_{ii} x_{Mi} = - \sum_{k=1}^N \varphi_k(y_k) v_{ik}^* p_{ii} x_{Mi}, \quad (5.20)$$

donde $\varphi_k(y_k) = -\frac{q'_k(y_k)}{q_k(y_k)}$ es la función de puntuación.

En definitiva, volviendo a la notación matricial, se tiene el siguiente gradiente para la actualización de \mathbf{P} ,

$$\nabla l(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{-1} - \begin{bmatrix} x_{M1} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{M2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}_2^* & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{MM} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}_M^* \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ contiene las funciones de puntuación y \mathbf{V}_j^* es la columna j de la matriz \mathbf{V}^H .

De forma más compacta, este gradiente se puede escribir como sigue

$$\nabla l(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{-1} - \text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}^H) \}, \quad (5.22)$$

donde $\text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}^H) \}$ significa formar una matriz diagonal tomando los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}^H$.

Continuando con la idea presentada en el Apartado 2.6.3, partiendo del gradiente estocástico convencional, se puede obtener el gradiente natural. Así, la ley de aprendizaje de gradiente natural estocástico para ML que permite calcular la matriz diagonal \mathbf{P} queda

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_k - \lambda [\mathbf{P}^{-1} - \text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}^H) \}] \mathbf{P}_k \mathbf{P}_k \\ &= \mathbf{P}_k - \lambda [\mathbf{I} - \text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{V}^H) \}] \mathbf{P}_k. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Finalmente, hay que indicar que el desarrollo realizado no ha tenido en cuenta que las señales son complejas. Teniendo en cuenta esa realidad, la ley de aprendizaje se podría escribir como sigue:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \lambda [\mathbf{I} - \text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{x}_M \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{V}^H) \}^* \mathbf{P}_k^*] \mathbf{P}_k, \quad (5.24)$$

donde el operador $(\cdot)^*$ significa que se conjugan todos los elementos de la matriz.

Esta ley de aprendizaje, que denominaremos de forma simplificada NGD-II, se ha obtenido desarrollando directamente la función de coste $l(\mathbf{y})$ en (5.17). Por tanto, cabe esperar que la solución que proporciona NGD-II sea mejor que la que se obtendría con el NGD-I.

Para concluir, partiendo de la ley NGD-II, se puede encontrar una tercera ley que no dependa del vector \mathbf{x}_M , sólo de las salidas \mathbf{y} . Para obtenerla, se parte de la relación entre \mathbf{x}_M y los datos \mathbf{s} . Si suponemos que la matriz \mathbf{P} es aproximadamente la que proporciona la solución del problema

de separación ciega, se puede aproximar el vector \mathbf{y} por \mathbf{s} . Por tanto, al menos cerca de la solución, se tiene

$$\mathbf{x}_M(i) \approx \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{y}(i), \quad (5.25)$$

de donde se saca

$$x_{Mq} \approx \sum_{j=1}^N v_{qj} y_j. \quad (5.26)$$

Sustituyendo esto en (5.21), y reescribiendo adecuadamente el gradiente convencional,

$$\nabla l(\mathbf{P}) = [\mathbf{I} - \text{diag} \{ \text{diag}(\mathbf{V}^* \boldsymbol{\varphi} \mathbf{y}^T \mathbf{V}^T) \}] \mathbf{P}^{-1}. \quad (5.27)$$

De este resultado, y repitiendo los pasos (5.23) y (5.24), se puede obtener directamente el gradiente natural y la ley de aprendizaje correspondiente para el caso de señales complejas. Esa ley se denomina de forma abreviada NGD-III. Como se comprueba en los experimentos que se presentarán a continuación, la ley NGD-III tiene un buen comportamiento cuando se parte de un punto suficientemente cercano de la solución. En caso contrario, puede incluso no converger.

Receptor ciego para ZP-OFDM basado en las leyes de aprendizaje NGD

Las leyes de aprendizaje NGD presentadas en los anteriores apartados permiten proponer el siguiente algoritmo de recepción ciega para un sistema ZP-OFDM:

Algoritmo 5.2. *Receptor ZP-OFDM basado en las leyes de aprendizaje NGD.*

1. *Cálculo de la DFT de M puntos.* Multiplicar los símbolos recibidos $\mathbf{x}(i)$ por la matriz de DFT, \mathbf{D}_M , para obtener $\mathbf{x}_M(i)$ en (4.63).
2. *Gradiente Natural.* Partiendo de $\mathbf{P} = (1 + j) \cdot \mathbf{I}_N$ y con cada bloque de símbolos $\mathbf{x}_M(i)$, actualizar la matriz diagonal \mathbf{P} con las leyes de aprendizaje NGD-I (5.16), NGD-II (5.24) o NGD-III (5.27).
3. *Solución.* Tras un número de iteraciones que aseguren la convergencia, calcular la matriz de separación con el último valor de la matriz diagonal \mathbf{P} : $\mathbf{B} = \mathbf{V}^H \mathbf{P}$ y obtener las salidas $\mathbf{y}(i) = \mathbf{B} \mathbf{x}_M(i)$.

Este algoritmo permite de forma genérica emplear cualquiera de las tres leyes de aprendizaje propuestas. En el siguiente apartado las compararemos para comprobar su eficacia y poder seleccionar la que proporcione un mejor resultado.

Pruebas del Algoritmo 5.2

Para comprobar el funcionamiento del Algoritmo 5.2, se van a repetir los experimentos del Apartado 5.4.1 aplicando ahora el nuevo receptor propuesto.

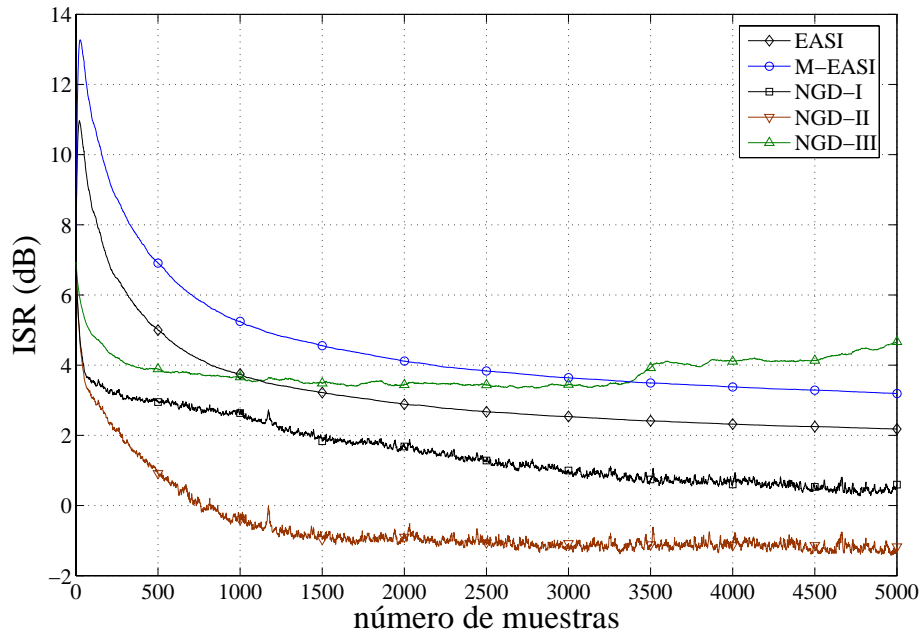


Figura 5.8: Índice de separación en función del número de muestras, para un caso sin ruido y promediando 500 canales generados de forma aleatoria.

En primer lugar se procede como en el Experimento 5.2 del Apartado 5.4.1. Se han generado de forma aleatoria quinientos canales con respuesta impulsiva de longitud $L + 1 = 4$. En ausencia de ruido, se calcula la ISR en función del número de muestras a la salida del receptor propuesto en el Algoritmo 5.2. El resultado, que se muestra en la Figura 5.8, se compara con el obtenido con el receptor MMSE y el receptor del Algoritmo 5.1 cuando se utilizan EASI y MEASI.

Se puede observar cómo el método propuesto en el Algoritmo 5.2, cuando se utilizan las leyes de aprendizaje NGD-I y NGD-II, tiene una velocidad de convergencia muy superior a la de los demás receptores, alcanzándose rápidamente en un número reducido de muestras unos niveles de ISR muy buenos. El comportamiento del algoritmo con la ley NGD-III necesita una aclaración. Al introducir esa ley se hizo la suposición de que los símbolos a la salida eran una aproximación de las fuentes. Si esa aproximación no es cierta, la ley de aprendizaje NGD-III no tiene porque converger a la solución. En el experimento realizado, en aproximadamente el 1% de los casos, el Algoritmo 5.2 empleando la ley BGD-III no alcanzó la solución de separación. El efecto de esa divergencia se ve reflejado en la forma que presenta la representación del valor de ISR para este caso.

En una segunda prueba, se calculó la BER obtenida en ausencia de ruido en función del número de muestras empleadas en el entrenamiento de los receptores. De nuevo, para cada uno de los quinientos canales generados, se han transmitido $2.5 \cdot 10^4$ bloques, promediando las probabilidades de error obtenidas en cada caso empleando 100, 200, 400, 1000, 2000 y 5000 muestras de entrenamiento. En la Figura 5.9 se muestran los resultados. Se observan claramente los buenos

resultados obtenidos con el Algoritmo 5.2 cuando se utilizan las leyes de aprendizaje NGD-I y NGD-II, donde con sólo cien muestras de entrenamiento se alcanzan niveles de probabilidad de error mejores que los obtenidos con los demás métodos. La ley NGD-II permite además reducir de forma muy notable la BER cuando se aumenta en número de muestras de entrenamiento. La ley NGD-I no presenta esa propiedad, lo que puede deberse a las aproximaciones realizadas para deducir esta ley de aprendizaje. Se ha observado en las simulaciones que para algunos de los canales generados los valores de BER obtenidos con NGD-I son muy buenos, mejorando incluso los obtenidos con la ley NGD-II. Sin embargo, para otros canales los niveles de BER, aunque mejoran siempre los obtenidos con el Algoritmo 5.1, son peores que los de la ley NGD-II y no mejoran al aumentar el número de muestras de entrenamiento. Estos resultados condicionan el promedio presentado en la figura. Por último, indicar que de nuevo se aprecian los problemas de convergencia que puede presentar la ley NGD-III.

Como último resultado, se ha calculado la probabilidad de error de bit en función de la relación señal a ruido para cada uno de los receptores en el caso particular del canal propuesto en el Experimento 5.1 del Apartado 5.4.1. En la Figura 5.10 se muestran los resultados obtenidos cuando sólo se han utilizado cuatrocientas muestras en el entrenamiento. Se comprueba que, gracias a la rápida convergencia del Algoritmo 5.2, éste proporciona mejores resultados que los otros receptores. Además, se puede ver que en este caso concreto la probabilidad de error es ligeramente menor empleando al ley NGD-I que la NGD-II. Por otro lado, la ley NGD-III no ha sufrido problemas de convergencia en esta prueba y proporciona unos buenos resultados.

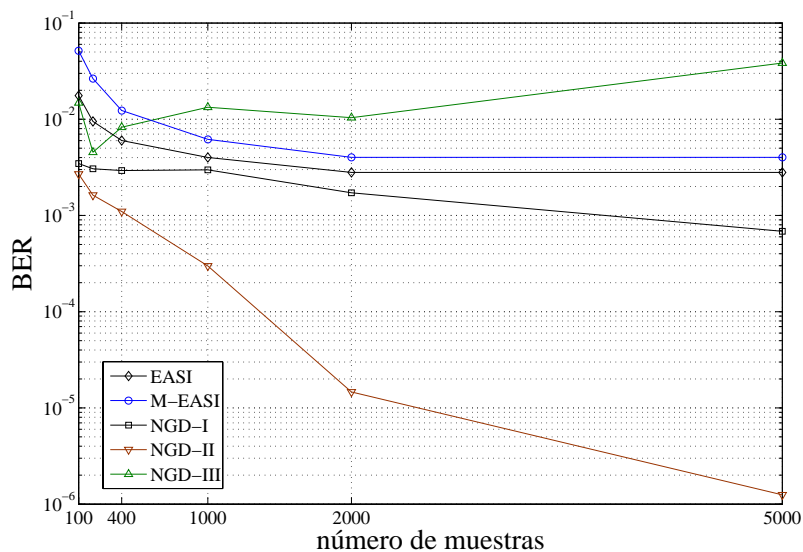


Figura 5.9: BER en función del número de muestras empleadas en el entrenamiento, para un caso sin ruido y promediando 500 canales generados de forma aleatoria.

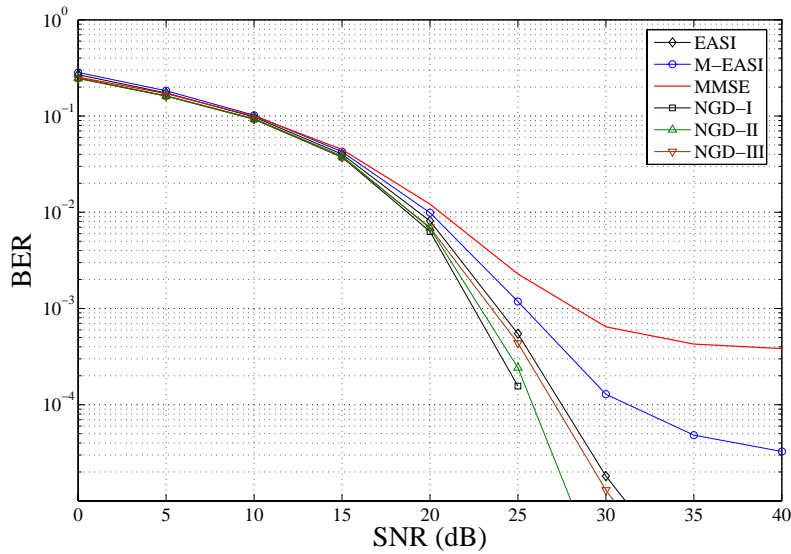


Figura 5.10: BER frente a relación señal a ruido empleando 400 muestras de entrenamiento y el canal del Experimento 5.2.

5.5 Aplicación de BSS a ZP-OFDM: receptor semi-ciego

Los algoritmos de separación ciega de fuentes basadas en el gradiente natural convergen de forma eficiente a la solución. Sin embargo, cuando el número de fuentes mezcladas es muy grande, la convergencia puede ser demasiado lenta. Los novedosos métodos presentados basados en el aprendizaje de una matriz diagonal permiten acelerar la convergencia y conseguir la detección ciega de los símbolos transmitidos en con un número de muestras de entrenamiento bastante reducido. Por otro lado, se han comentado los posibles errores de detección debido a las incertidumbres que pueden aparecer en el orden y escalado de los símbolos recuperados por el algoritmo ciego. Pensando en una posible solución a estos problemas se plantea el siguiente razonamiento. El algoritmo de separación basado en el gradiente natural busca minimizar la función de coste. Cuanto más alejado de un mínimo es el punto de partida del algoritmo, más “pasos” deberá dar para alcanzarlo. Además, la función de coste tiene varios mínimos, en todos ellos se recuperan las fuentes, pero con un orden y un escalado que puede ser diferente. La elección aleatoria del punto de partida impide controlar el mínimo hacia el que se tiende y, por tanto, impide controlar el orden de las fuentes recuperadas. Se plantea la posibilidad de encontrar un punto de partida adecuado para el algoritmo que esté cerca de uno de los mínimos, de manera que la convergencia sea más rápida. Además, si realmente se consigue que ese punto de partida esté suficientemente cerca de un mínimo, se puede esperar que el orden que proporciona la solución en el punto de partida se mantenga en la solución obtenida tras el algoritmo de separación ciega. Por otro lado, en muchos sistemas OFDM se envían secuencias de símbolos conocidas por el receptor, especialmente para tareas de sincronización y estimación del canal. Esas secuencias se podrían emplear para estimar la mezcla que los símbolos transmitidos están

sufriendo al atravesar el canal. En definitiva, traducido al sistema ZP-OFDM, hay que encontrar una estimación de la respuesta impulsiva del canal que proporcione una estimación de la matriz del canal \mathbf{H}_{ZP} , es decir, una estimación de la matriz de mezclas en (5.3).

5.5.1 Estimación del canal en un sistema OFDM

La estimación del canal en un sistema OFDM ha sido objeto de muchos estudios en los últimos años. Una estimación precisa del canal no sólo permite recuperar adecuadamente los símbolos transmitidos, además proporciona la información necesaria para la utilización de algoritmos de asignación óptima de tasa binaria y de potencia de transmisión a cada subcanal, en función de las condiciones de éstos. A esa información sobre las condiciones del canal en un determinado instante se le denomina habitualmente CSI (*channel state information*).

Entre los métodos para la estimación del canal se pueden distinguir tres estrategias: estimación de canal basada en secuencias de entrenamiento, estimación ciega y estimación semi-ciega. A continuación se comentan brevemente ambas estrategias. El lector interesado en conocer más sobre la estimación de canal en OFDM puede consultar [Muquet, 2001] y [Edfors, 1996], y las referencias ahí incluidas.

1. Estimación de canal basada en secuencias de entrenamiento

En los sistemas de comunicaciones modernos, los símbolos de datos se transmiten normalmente en tramas. En esas tramas, bien al comienzo o bien de forma intercalada, es habitual que se introduzcan secuencias de datos conocidas por el receptor. Esas secuencias de datos se conocen con el nombre de secuencias de entrenamiento o símbolos piloto, y permiten que el receptor ejecute algún tipo de algoritmo de estimación de la CSI.

Algunos de esos algoritmos emplean diversas técnicas de interpolación en el dominio temporal o el de la frecuencia para obtener la CSI entre los pilotos [Sandell, 1996]. En [Morelli, 1999] se comparan dos técnicas de estimación de la respuesta impulsiva del canal usando pilotos, las basadas en la máxima verosimilitud (MLE, *maximum likelihood estimator*) y las basadas en el mínimo error cuadrático medio (MMSE, *minimum mean square error estimator*).

En otros casos, se propone estimar el canal de forma única al comienzo de la trama. Se supone que esa estimación es válida durante toda la trama si las variaciones del canal son lentas. Los métodos más simples de estimación trabajan en el dominio de la frecuencia y se basan en que el bloque de símbolos recibido se corresponde con el bloque de símbolos transmitido multiplicado por una matriz diagonal. La división elemento a elemento de los símbolos recibidos y transmitidos permite recuperar esa matriz diagonal, que contiene la respuesta en frecuencia del canal, como se vio en (4.43) para CP-OFDM y (4.63) para ZP-OFDM [Muquet, 2002b].

La elección de los pilotos es importante para facilitar la estimación del canal, especialmente en lo que refiere al efecto del ruido. Como ejemplo, en [Tellambura, 1999] se puede

encontrar un estudio acerca de la mejor elección sobre la secuencia de pilotos.

2. Estimación de canal ciega

La utilización de secuencias de entrenamiento para la estimación del canal supone una disminución de la eficiencia espectral. Para evitar esto, se puede emplear un método de estimación ciego en el que todos los símbolos transmitidos sean de información. En los últimos años se han desarrollado varios estimadores ciegos para los sistemas OFDM [Liu, 1996]. Casi todos se basan en la utilización de alguna característica de la estructura del sistema y de la señal transmitida para estimar el canal. Por ejemplo, hay métodos basados en la redundancia que introduce el prefijo cíclico y/o un sobremuestreo de la señal y que hacen que la señal OFDM sea cicloestacionaria. Otros métodos emplean técnicas de subespacio tanto para ZP-OFDM [Scaglione, 1999], como para CP-OFDM [Muquet, 2002a].

3. Estimación de canal semi-ciega

Como se ha comentado anteriormente, los sistemas modernos de comunicaciones suelen enviar símbolos piloto para tareas de sincronización y/o estimación del canal. Por tanto, si esos símbolos están disponibles es conveniente aprovecharlos para la estimación de la CSI. Sin embargo, con el fin de aumentar la eficiencia espectral conviene que las secuencias de entrenamiento sean lo más cortas posible. Así, surge una alternativa intermedia entre la estimación ciega y la que emplea secuencias de entrenamiento: la estimación semi-ciega. En este tipo de técnicas se emplean secuencias de entrenamiento muy cortas que proporcionan una primera estimación burda del canal. Esa estimación se refina de forma ciega a medida que van llegando símbolos de información. La ventaja principal de estos algoritmos es que el número de pilotos a transmitir se puede reducir enormemente. Por otro lado, la convergencia hacia una solución de estimación con valores de TMSE y FMSE pequeños es mucho más rápida que en las técnicas ciegas.

Un ejemplo de este tipo de estimación es la técnica denominada *decision directed* (DD), en la que se emplea un único piloto al comienzo de una trama. Ese piloto permite estimar el canal y recuperar los símbolos transmitidos. Posteriormente, considerando que los símbolos han sido recuperados sin error, se utilizan para actualizar la estimación inicial del canal. El problema de estos algoritmos es, precisamente, que los símbolos empleados para la actualización del canal sí tienen errores, lo que conduce a errores en la estimación.

5.5.2 Estimación rápida del canal basada en pilotos para un sistema ZP-OFDM

Se plantea ahora la cuestión de qué técnica de estimación del canal es la más idónea para aplicarla en el receptor semi-ciego para ZP-OFDM basado en BSS. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de esa estimación es acelerar el proceso de recepción, esa técnica debe ser lo más rápida posible. La precisión de la estimación es importante pero no crítica. Se trata de obtener

un punto de partida “aceptable” que será mejorado con el algoritmo de separación ciega.

En [Muquet, 2002b] se presenta una técnica de estimación del canal basada en pilotos para el sistema ZP-OFDM. Esta técnica es rápida y simple, y se basa en el resultado presentado en el Apartado 4.5.3, que identificaba el sistema ZP-OFDM con un sistema CP-OFDM con codificación. En ese apartado se llegó a la expresión (5.11):

$$\mathbf{x}_M(i) = \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{D}_M \mathbf{n}(i), \quad (5.28)$$

donde la matriz $\mathbf{V} = \mathbf{D}_M \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{D}_N^H$ es una matriz de codificación de los símbolos $\mathbf{s}(i)$ conocida y la matriz $\mathbf{\Lambda}_M$ es la matriz diagonal que contiene la respuesta en frecuencia del canal $\tilde{\mathbf{h}}_M = [H(0) H(2\pi/M) \cdots H(2\pi(M-1)/M)]^T = \sqrt{M} \mathbf{D}_M [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T$. Se observa que esta respuesta en frecuencia del canal se puede estimar de manera muy simple si se conocen los símbolos $\mathbf{s}(i)$ enviados, es decir, si se han transmitido unos pilotos conocidos por el receptor. Esta estimación se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\hat{H}(2\pi k/M) = \frac{x_{Mk}(i)}{\nu_k(i)} = H(2\pi k/M) + \frac{n_k(i)}{\nu_k(i)}, \quad (5.29)$$

donde $x_{Mk}(i)$, $\nu_k(i)$ y $n_k(i)$ son los elementos k -ésimos de los vectores $\mathbf{x}_M(i)$, $\mathbf{v}(i) = \mathbf{V} \mathbf{s}(i)$ y $\mathbf{n}(i)$, respectivamente, con $k \in [0, M-1]$, y el bloque $\mathbf{s}(i)$ está formado por símbolos piloto. La estimación será mejor cuanto menor sea la varianza del ruido.

Si se envían T bloques de símbolos piloto, se puede promediar la estimación conseguida en (5.29) con cada uno de esos bloques:

$$\hat{H}(2\pi k/M) = \sum_{j=0}^{T-1} \hat{H}^{(j)}(2\pi k/M), \quad (5.30)$$

donde $\hat{H}^{(j)}(2\pi k/M)$ es la estimación $\hat{H}(2\pi k/M)$ calculada en (5.29) con el j -ésimo bloque de símbolos piloto recibido.

Una vez encontrada la estimación $[\hat{H}(0) \hat{H}(2\pi/M) \cdots \hat{H}(2\pi(M-1)/M)]^T$, ésta se puede mejorar imponiendo que el canal sea FIR de orden L . Para eso, se calcula la IDFT de la estimación, y se conservan sólo los L primeros elementos del resultado. Esos elementos forma la estimación de la respuesta impulsiva del canal.

Receptor semi-ciego para ZP-OFDM.

Combinando el método de estimación de canal para el sistema ZP-OFDM presentado en el apartado anterior con los Algoritmos 5.1 y 5.2, se puede encontrar un receptor semi-ciego para el sistema ZP-OFDM [Boloix-Tortosa, 2005a]. En este caso, se supone un sistema ZP-OFDM en el que las transmisiones se realizan en tramas formadas por un número finito de bloques de símbolos K , en las que los T primeros bloques enviados contienen símbolos piloto conocidos por el receptor.

El algoritmo genérico que describe el método semi-ciego de recepción propuesto es el siguiente:

Algoritmo 5.3. *Receptor semi-ciego ZP-OFDM basado en BSS.*

Para cada trama recibida:

1. *Estimación inicial del canal.* Para cada uno de los T bloques que contienen símbolos piloto, estimar la respuesta en frecuencia del canal en (5.29) y obtener el promedio en (5.30). A partir de ese promedio, calcular la respuesta impulsiva del canal.
2. *Estimación inicial de la matriz de mezcla.* Con la respuesta impulsiva del canal calculada, encontrar la matriz de mezcla del sistema ZP-OFDM:
 - $\mathbf{A} = \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H$ si se quiere emplear el Algoritmo 5.1
 - $\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V}$ si se quiere emplear el Algoritmo 5.2
3. *Proyección de las mezclas.*
 - Si se quiere emplear el Algoritmo 5.1, obtener la proyección de las mezclas, $\mathbf{z} = \mathbf{W} \mathbf{x}$.
 - Si se quiere emplear el Algoritmo 5.2, obtener $\mathbf{z} = \mathbf{x}_M$
4. *Inicialización del algoritmo de separación ciega.* Obtener la matriz de separación inicial partiendo de la matriz de mezcla estimada en el paso 2:
 - $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{W} \mathbf{H}_{ZP} \mathbf{D}_N^H]^{-1}$ si se quiere emplear el Algoritmo 5.1
 - $\mathbf{P}_0 = [\mathbf{\Lambda}_M]^{-1}$ si se quiere emplear el Algoritmo 5.2
5. *Gradiente Natural.* Con los restantes $K - T$ símbolos de la trama proyectados \mathbf{z} , actualizar la matriz \mathbf{B} o \mathbf{P} empleando los Algoritmos 5.1 o 5.2.
6. *Solución.* Con el último valor de la matriz \mathbf{B} o \mathbf{P} , calcular la salida \mathbf{y} .

Como se puede ver, este algoritmo únicamente propone una inicialización de los algoritmos ciegos presentados en anteriores apartados.

En el paso 3 del algoritmo, y si se va a utilizar el método del Algoritmo 5.1, la matriz de proyección \mathbf{W} puede ser el banco de filtros adaptados, $\mathbf{W} = [\mathbf{D}_N \mathbf{0}_{N \times L}]$, o la matriz en (5.9) que proyecta las mezclas en el espacio de la señal para proporcionar una reducción de ruido. Como los símbolos se reciben en tramas de K bloques, esta segunda opción es viable, pues se puede esperar hasta recibir todos los símbolos de la trama para calcular la matriz \mathbf{W} en (5.9). Además, como se comprobó en el Apartado 5.4.1, este método conducía a mejores resultados que la utilización de los filtros adaptados.

En el paso 5, como se va a trabajar con un número finito de muestras igual a $K - T$, en las leyes de aprendizaje del gradiente natural se pueden utilizar las versiones no estocásticas. Por ejemplo, la versión no estocástica normalizada de la ley de aprendizaje en (2.83) sería

$$\mathbf{B}_k \leftarrow \mathbf{B}_{k-1} - \lambda \frac{\mathbf{E}[\varphi(\mathbf{y}) \mathbf{y}^T - \mathbf{I}]}{1 + \lambda |\varphi(\mathbf{y})^T \mathbf{y}|} \mathbf{B}_{k-1}, \quad (5.31)$$

donde en la práctica la esperanza matemática se puede aproximar por el promedio muestral.

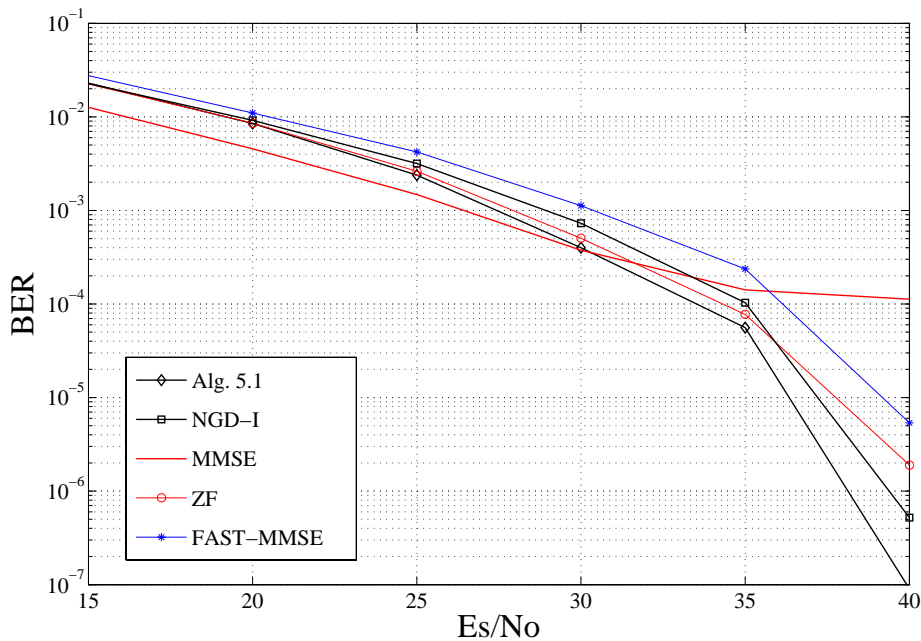


Figura 5.11: Probabilidad de error de bit.

Pruebas del Algoritmo 5.3: aplicación a HIPERLAN/2

En este apartado se comprueba el comportamiento del Algoritmo 5.3 cuando se aplica en un contexto realista como es HIPERLAN2 (HL2) [ETSI Normalization Committee, 1999].

HL2 es un sistema inalámbrico multiportadora que opera en la banda de 5-GHz y que utiliza $N = 64$ portadoras. Por doce de esas portadoras no se transmite información (*null carriers*), y otras cuatro contienen pilotos para tareas de sincronización. Por tanto, se dispone de cuarenta y ocho portadoras para datos. La longitud del periodo de guarda es de $L = 16$ símbolos, por tanto, los bloques recibidos tienen $M = N + L = 80$ símbolos. La transmisión se realiza en tramas de quinientos bloques de símbolos, de los cuales los dos primeros contienen símbolos pilotos conocidos por el receptor.

Como el número de fuentes en este problema es muy grande y el estándar HL2 proporciona bloques de símbolos piloto, en lugar de utilizar un algoritmo ciego, es más práctico aplicar el Algoritmo 5.3. En los experimentos realizados se han transmitido símbolos 4-QAM, y en lugar de prefijo cíclico se ha utilizado *zero-padding*. Se han generado cuarenta canales diferentes correspondientes con el modelo de canal tipo A especificado por el estándar [ETSI Normalization Committee, 1998]. Por cada canal se han transmitido cincuenta tramas de quinientos símbolos. Los símbolos piloto en los dos primeros bloques de la trama se han generado aleatoriamente y se suponen conocidos por el receptor. Se supone también que el canal no cambia en los quinientos símbolos que dura la trama. Los cuatro subcanales por los que se transmiten pilotos para tareas de sincronización se han considerado en los experimentos como canales de datos, por lo que el número de fuentes a separar es cincuenta y dos.

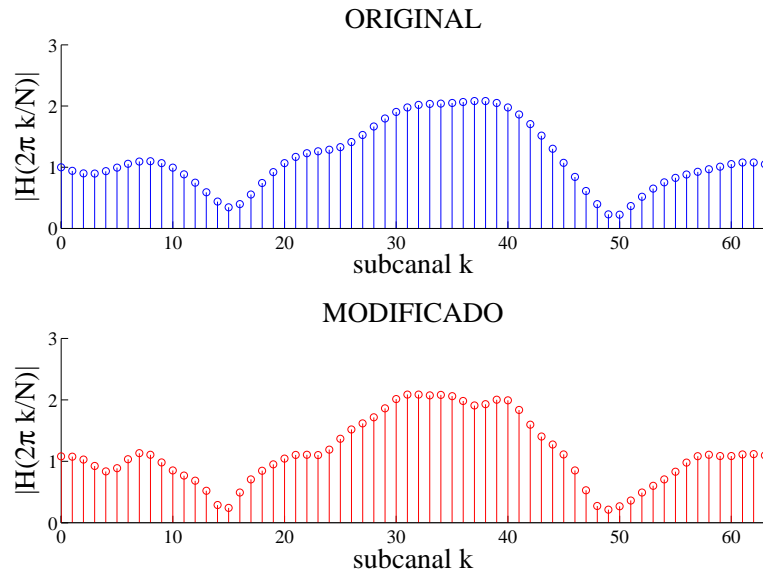


Figura 5.12: Respuesta en frecuencia del canal original y canal modificado utilizado en el experimento de la Figura 5.13.

Siguiendo los pasos indicados por el algoritmo, para cada trama recibida, los dos primeros bloques de símbolos se emplean en la estimación de la respuesta impulsiva del canal. Con esa estimación, se calcula la matriz \mathbf{B} o la matriz \mathbf{P} inicial, según el caso. Posteriormente, con las $K - T = 500 - 2 = 498$ muestras restantes se actualiza esa matriz con un método ciego. En este caso, se ha aplicado el Algoritmo 5.1, utilizando la ley de aprendizaje en (5.31), con $\varphi_i(y_i) = |y|^2 y$. Por otro lado, la reducción de dimensiones en el paso 3 del algoritmo se ha realizado con \mathbf{W} en (5.9). En el Algoritmo 5.2 se han utilizado la versión no estocástica de la ley de aprendizaje NGD-I. En todos los casos, la tasa de aprendizaje es $\lambda = 0,05$ y para cada trama se han realizado cien iteraciones de la ley de aprendizaje.

En la Figura 5.11 se muestra la probabilidad de error de bit obtenida al promediar el resultado para los cuarenta canales. En la figura, además de los métodos propuestos se incluyen el receptor MMSE en (4.57), en el que el canal se supone perfectamente conocido, y los receptores ZF en (4.57) y FAST-MMSE en [Muquet, 2002b], ambos utilizando la estimación inicial del canal obtenida en el Paso 2 del Algoritmo 5.3. Se observa que los métodos propuestos proporcionan resultados mejores que los otros métodos. Si bien, se puede observar que la mejora no es demasiado importante respecto al ZF, lo que es debido a que el método de estimación del canal utilizado, aunque rápido y simple, proporciona una muy buena estimación. Por tanto, el algoritmo propuesto consigue la mejora adicional que le es posible con las muestras disponibles. Esa mejora es importante si se compara con el receptor FAST-MMSE, que se propone como un método de baja complejidad. También tiene una complejidad reducida el método presentado cuando se emplea la ley de aprendizaje NGD-I. Finalmente, es interesante indicar que el efecto del número limitado de muestras disponibles en cada trama viene reflejado claramente en el comportamiento del MMSE, que tiene un mínimo de BER que no puede superar al no poder

estimar la matriz de covarianzas de las mezclas adecuadamente.

Sería interesante comprobar cómo responde el algoritmo cuando la solución de partida no es tan buena como la proporcionada con el método de estimación empleado anteriormente. Es de esperar que en ese caso el algoritmo propuesto proporcione una mejora importante. En el siguiente experimento se ha seleccionado uno de los canales de entre los cuarenta generados en el experimento anterior y, de forma artificial, se ha modificado añadiéndole a su respuesta impulsiva un ruido Gaussiano. Dicho ruido se ha fijado para que el error cuadrático medio obtenido al comparar la respuesta impulsiva modificada y la respuesta original sea de -20 dB. En la Figura 5.12 se muestra la respuesta en frecuencia del canal original y del canal modificado. Se ha repetido el experimento anterior pero considerando que esa respuesta impulsiva del canal modificada es la que proporciona el método de estimación. Los resultados se muestran en la Figura 5.13. Se ha incluido también el resultado cuando se utiliza la ley de aprendizaje NGD-III, para comprobar su funcionamiento cuando el punto de partida de la matriz \mathbf{P} está cerca de la solución. Se comprueba que el método propuesto consigue mejorar de manera importante la solución inicial. Por otro lado, es importante destacar que la ley de aprendizaje NGD-III utilizada en el Algoritmo 5.3 no tuvo problemas de convergencia en ninguna de las simulaciones realizadas, gracias a que el punto de partida proporcionado por la estimación del canal estaba cerca de la solución.

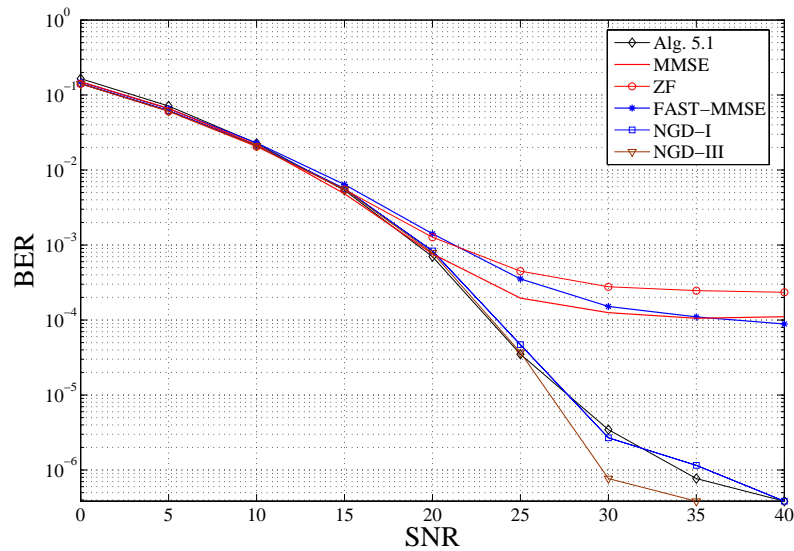


Figura 5.13: Probabilidad de error de bit.

Capítulo 6

Aplicación de separación ciega de fuentes a MC-CDMA

6.1 El sistema CDMA multiportadora

El término MC-CDMA (*multicarrier* CDMA)[Hara, 1997] incluye de forma genérica a todo un conjunto de sistemas que combinan la técnica de acceso múltiple descrita en el Capítulo 3, CDMA, con la modulación OFDM descrita en el Capítulo 4. Por lo tanto, MC-CDMA es un sistema multiusuario y multiportadora. En este sistema, como sucede en CDMA, varios usuarios pueden acceder simultáneamente a un medio compartido para transmitir sus datos empleando una modulación OFDM. Los usuarios se pueden identificar y separar gracias al código particular que se le ha asignado. MC-CDMA, por tanto, hereda las ventajas de CDMA y de la modulación OFDM, pero también sus problemas, como las dificultades de sincronización y efectos no lineales en los amplificadores. Sin embargo, la combinación de CDMA y OFDM proporciona una ventaja particular frente a los sistemas OFDM, y es que reduce la tasa de símbolos transmitida, lo que facilita la sincronización de las transmisiones.

Los sistemas CDMA multiportadora se pueden clasificar principalmente en dos grupos: los que aplican el código de ensanchado a la secuencia de datos original y luego transmiten cada chip por un subcanal, es decir, aplican el código de ensanchado a los símbolos en el dominio de la frecuencia, y los que aplican el código de ensanchado en el dominio del tiempo. Los sistemas pertenecientes al primer tipo son los que habitualmente reciben el nombre de MC-CDMA, o también OFDM-CDMA. Los que aplican el código en el dominio temporal, se denominan MC DS-CDMA (*multicarrier direct-sequence*-CDMA) o MT-CDMA (*multitone* CDMA) [Hara, 1997].

En capítulos anteriores se ha estudiado la aplicación de técnicas de separación ciega de fuentes a CDMA y a OFDM. Si, como se ha dicho, MC-CDMA es una combinación de ambos, parece evidente que estas técnicas se pueden extender al caso MC-CDMA. Este breve capítulo supone un primer acercamiento a ese objetivo. En él, se estudia la aplicación de técnicas de separación ciega al enlace descendente de un sistema MC-CDMA en el que sólo se emplea una

antena en el transmisor y receptor. Esta última característica distingue el método presentado en este capítulo con otros estudios sobre la aplicación de separación ciega de fuentes al sistema MC-CDMA MIMO (*multiple-input multiple-output*), en el que se emplean varias antenas [Iglesia, 2004].

6.2 Modelo MC-CDMA síncrono

6.2.1 Modelo para un usuario

El modelo básico de un sistema MC-CDMA en que sólo hay un único usuario se reduce a un sistema OFDM como el siguiente:

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{u}(i) + \mathbf{n}(i), \quad (6.1)$$

donde la matriz \mathbf{T} depende del tipo de sistema OFDM considerado, CP o ZP, y los símbolos transmitidos $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{s}$ están formados por los símbolos de datos \mathbf{s} ensanchados con la secuencia de código asignada al usuario. Es decir, el vector \mathbf{u} contiene chips.

En un caso general, se pueden transmitir Q símbolos simultáneamente. Entonces, el vector \mathbf{s} tiene Q elementos y la matriz \mathbf{C} de dimensiones $N \times Q$ se obtiene del siguiente producto de Kronecker:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_Q \otimes \mathbf{c}, \quad (6.2)$$

donde el vector \mathbf{c} contiene la secuencia de ensanchado asignada al usuario. La longitud C de esta secuencia, es decir, la ganancia de proceso, debe ser tal que $N = QC$. En el caso más simple, $Q = 1$ y $C = N$, y sólo se envía un símbolo en cada bloque OFDM transmitido.

6.2.2 Modelo para K usuarios

Cuando hay K usuarios en el sistema y en un caso general, cada uno podría iniciar la transmisión en un momento diferente. En la mayoría de los sistemas multiusuario, se intenta que éstos estén, hasta cierto punto, sincronizados. Si se considera el caso en el que los usuarios han sincronizado sus transmisiones, el modelo del sistema MC-CDMA para K usuarios se reduce a

$$\mathbf{x}(i) = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k(i) + \mathbf{n}(i), \quad (6.3)$$

donde

$$\mathbf{x}_k(i) = \mathbf{H}_{0k} \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{u}_k(i), \quad (6.4)$$

contiene los símbolos procedentes del usuario k que han llegado al receptor a través de su canal, que se corresponde con la matriz \mathbf{H}_{0k} en (4.19). El vector $\mathbf{u}_k(i) = \mathbf{C}_k \mathbf{s}_k$ contiene los símbolos del usuario k ensanchados con su código correspondiente \mathbf{c}_k .

El caso síncrono puede aparecer, por ejemplo, cuando se considera la transmisión desde una estación base a un usuario, es decir, el caso del enlace descendente. Se puede suponer que una

estación base transmite a todos los usuarios de su área de cobertura de forma síncrona, aunque la transmisión desde éstos a la estación base sea asíncrona. En esa situación, la expresión (6.3) se simplifica de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i) &= \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \mathbf{u}_k(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k(i) + \mathbf{n}(i),\end{aligned}\quad (6.5)$$

debido a que el canal desde la estación base hasta el receptor es único. Empleando notación matricial para eliminar el sumatorio, (6.5) queda

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H [\mathbf{C}_1 \ \cdots \ \mathbf{C}_K] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(i) \\ \cdots \\ \mathbf{s}_K(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i). \quad (6.6)$$

6.3 El sistema MC-CDMA síncrono visto como un problema BSS

Se puede comprobar que la expresión (6.6) es idéntica a un problema de separación ciega de fuentes en el que el vector de fuente ha sido multiplicado por una matriz de mezcla de valor

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H [\mathbf{C}_1 \ \cdots \ \mathbf{C}_K]. \quad (6.7)$$

En el caso $Q = 1$ y $C = N$, las fuentes se reducen al vector $[s_1(i) \ \cdots \ s_K(i)]^T$ y la matriz de mezcla a

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H [\mathbf{c}_1 \ \cdots \ \mathbf{c}_K], \quad (6.8)$$

donde las columnas de la matriz $[\mathbf{c}_1 \ \cdots \ \mathbf{c}_K]$ son los códigos de ensanchado de los K usuarios.

A la vista de este resultado, se puede pensar en aplicar algún algoritmo de separación ciega de fuentes para recuperar los símbolos correspondientes al usuario de interés.

6.3.1 Aplicación de BSS al sistema MC-CDMA síncrono

Como se hizo para ZP-OFDM en el Capítulo 4, la primera solución que a uno se le ocurre para recuperar de forma ciega los símbolos de $\mathbf{s}_k(i)$ en (6.6) es la aplicación directa de un algoritmo de separación ciega de fuentes que permita encontrar la matriz de separación \mathbf{B} para obtener la siguiente estimación de los símbolos transmitidos,

$$\hat{\mathbf{s}}(i) = \mathbf{B} \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{D}_N^H [\mathbf{C}_1 \ \cdots \ \mathbf{C}_K] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(i) \\ \cdots \\ \mathbf{s}_K(i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{n}(i). \quad (6.9)$$

En este caso, a diferencia de lo que sucedía en el sistema ZP-OFDM, el número de fuentes a separar no es siempre igual al número de subcanales. Ahora, el número de fuentes depende del número de usuarios K y de símbolos Q de cada usuario por bloque OFDM. Obsérvese, por ejemplo, que en el caso $Q = 1$ sólo hay que separar K fuentes. Por tanto, mientras que el número QK sea inferior al número de subcanales, la complejidad del problema de separación ciega para MC-CDMA será inferior al problema de separación ciega para ZP-OFDM.

Por otro lado, y como se introdujo en el Apartado 5.5, sería interesante encontrar una primera solución al problema de separación que sirva como punto de partida para acelerar la convergencia del algoritmo. Por ejemplo, si se trata de un sistema MC-CDMA en el que los símbolos se transmiten en tramas, y en el que hay disponibles símbolos piloto, se puede emplear el método de estimación del canal descrito en el Apartado 5.5.2, cuando se emplea ZP, o su equivalente cuando se emplea CP. Sin embargo, para eso es necesario que el receptor conozca no sólo los pilotos transmitidos, sino también todos los códigos de todos los usuarios (detector centralizado). Estas ideas se pueden concretar en el siguiente algoritmo [Boloix-Tortosa, 2005b]:

Algoritmo 6.1. *Detector centralizado semi-ciego para el enlace descendente en MC-CDMA basado en BSS.*

Para cada trama recibida:

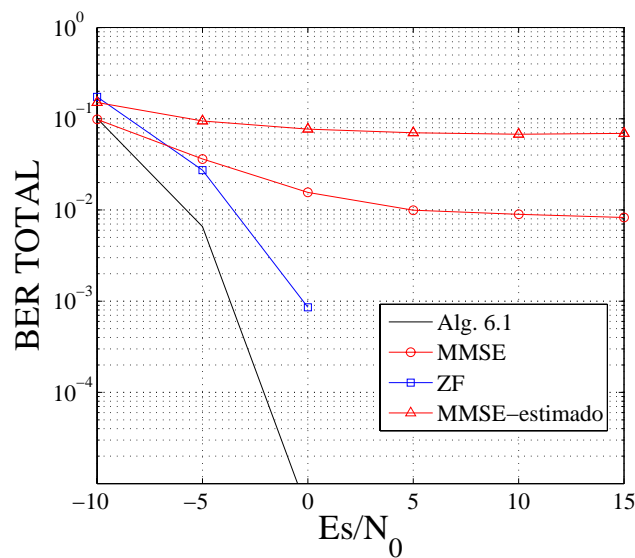
1. *Estimación inicial del canal.* Con los T bloques que contienen símbolos piloto, estimar la respuesta impulsiva del canal con el método descrito en el Apartado 5.5.2, o su equivalente para CP.
2. *Estimación inicial de la matriz de mezcla.* Con la respuesta impulsiva del canal estimada, encontrar la matriz de mezcla \mathbf{A} del sistema MC-CDMA en (6.7).
3. *Proyección de las mezclas.* Obtener la proyección $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ para reducir las dimensiones de $M = N + L$ a QK , con \mathbf{W} calculada como en (5.9).
4. *Inicialización del algoritmo de separación ciega.* Obtener la matriz de separación inicial partiendo de la matriz de mezcla estimada en el paso 2: $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{W}\mathbf{A}]^{-1}$.
5. *Gradiente Natural.* Con los restantes símbolos \mathbf{z} de la trama, actualizar la matriz \mathbf{B} empleando un algoritmo de gradiente natural.
6. *Solución.* Con el último valor de la matriz \mathbf{B} , calcular la salida $\hat{\mathbf{s}}$.

En este algoritmo se ha considerado que se dan las condiciones adecuadas para que se pueda estimar el canal. En caso contrario, se debe aplicar un algoritmo completamente ciego, que sería análogo a éste sin los pasos 1 y 2, e inicializando la matriz de separación en el paso 4 a la matriz $\mathbf{B} = (1 + j)\mathbf{I}_N$.

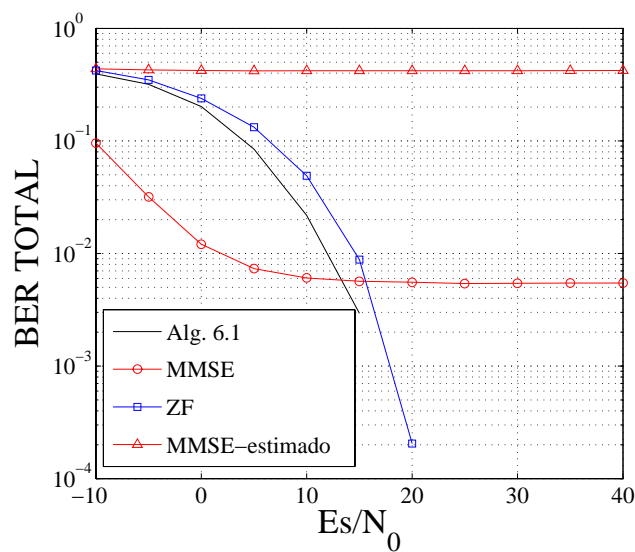
6.3.2 Pruebas del Algoritmo 6.1

En este apartado se va a comprobar el funcionamiento del método de detección presentado. Se considera aquí un hipotético sistema MC-CDMA establecido sobre HIPERLAN2 con ZP. En este caso, se va a suponer que los $N = 64$ subcanales de HL2 son canales de datos.

Para cada uno de los resultados mostrados a continuación, se han transmitido cuatrocientas tramas de quinientos bloques a través del canal de HL2 mostrado en la Figura 5.12. Como en HL2, los dos primeros bloques de cada trama son pilotos iguales para todos los usuarios y conocidos por el receptor que se utilizarán para estimar el canal, el cual se supone que no



a)



b)

Figura 6.1: BER para: a) $K = 8$ usuarios con $Q = 1$ y b) $K = 16$ usuarios con $Q = 1$.

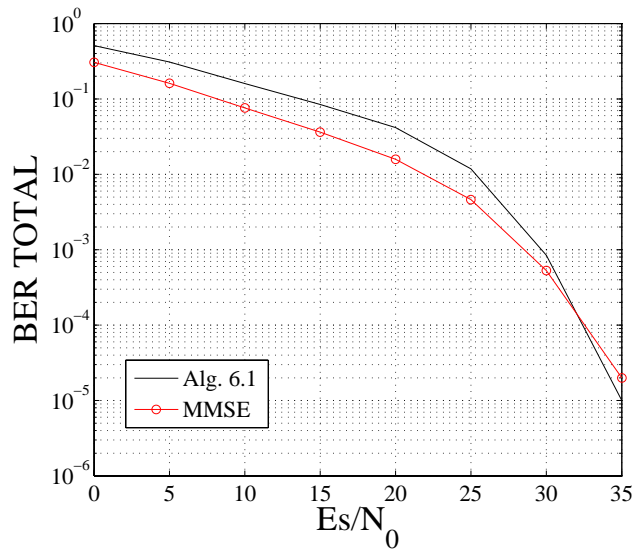


Figura 6.2: BER para $K = 8$ usuarios con $Q = 8$.

cambia en toda la trama. En el receptor se ha ejecutado el Algoritmo 6.1 utilizando la ley de aprendizaje de gradiente natural en (5.31), con cien iteraciones y una tasa $\lambda = 0,05$.

En un primer experimento sencillo se suponen $K = 8$ usuarios que transmiten un único símbolo ($Q = 1$), por tanto, las secuencias de ensanchado tienen longitud $C = 64$. Como se trata de un sistema síncrono, se eligen secuencias ortogonales de tipo Hadamard. En la Figura 6.1.a se muestra la BER promediada para todos los usuarios en función de la relación señal a ruido que se obtiene a la salida del detector propuesto. Se incluye también la BER obtenida con el detector MMSE. Para este detector se han supuesto dos casos. En uno de ellos el detector conoce perfectamente el canal. En el otro, el detector emplea la estimación del canal calculada en el paso 2 del Algoritmo 6.1. También se incluye en la figura el resultado del ZF que utiliza la estimación del canal.

Para comprobar el comportamiento del método propuesto cuando aumenta el número de usuarios, el experimento anterior se ha repetido para $K = 16$ usuarios que transmiten un único símbolo. En la Figura 6.1.b se muestra la BER promediada para todos los usuarios obtenida con cada detector.

Finalmente, en el último experimento se quiere comprobar el efecto que tiene la utilización de códigos que no son perfectamente ortogonales y el aumento del número de símbolos que transmite cada usuario. De esta manera, se consideran de nuevo $K = 8$ usuarios que transmiten $Q = 8$ símbolos simultáneamente. Los códigos de cada usuario, que tienen ahora longitud $C = 8$, han sido generados de forma aleatoria. El resto de condiciones se mantienen iguales a los experimentos anteriores. En la Figura 6.2 se compara la BER promediada para todos los usuarios resultado de aplicar el Algoritmo 6.1 y un detector MMSE que conoce perfectamente el canal. Se comprueba que el comportamiento del algoritmo propuesto es similar, mejorando incluso para bajos niveles de ruido, al comportamiento del detector MMSE.

Se observan los buenos resultados obtenidos con el algoritmo propuesto. Se concluye que las técnicas de separación ciega de fuentes son, también en MC-CDMA, elecciones adecuadas para el diseño de algoritmos de detección ciegos o semi-ciegos, que partiendo de una solución inicial encontrada mediante un procedimiento rápido y simple, sean capaces de mejorarla de forma ciega.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras

7.1 Conclusiones.

En esta tesis se revisan las técnicas de separación ciega de fuentes para analizar su posible aplicación a receptores de sistema de comunicaciones digitales, en concreto, a CDMA, OFDM y MC-CDMA.

En la revisión de las técnicas de separación ciega de fuentes, se ha analizado el estimador GWFOE para el caso de dos fuentes. Se ha indicado que ese estimador representa de forma unificada varios estimadores propuestos con anterioridad. La diferencia entre estos estimadores radica en la elección del peso del estimador GWFOE. Se ha extendido este estimador al caso de n fuentes empleando la optimización de Jacobi, así como sus versiones inicializada y adaptativa. Un estudio de la carga computacional de las distintas opciones permite elegir la más apropiada para cada aplicación.

Por otro lado, se ha descrito un algoritmo de detección ciega para el sistema CDMA síncrono que emplea unos filtros adaptados a las secuencias de código de los usuarios como proceso previo a técnica de separación ciega de fuentes. Se ha comprobado que este proceso tiene unos efectos beneficiosos para luchar contra el efecto del ruido y el problema cerca-lejos.

Respecto a OFDM, se ha realizado un estudio pormenorizado de los sistemas CP-OFDM y ZP-OFDM. El objetivo de ese estudio ha sido encontrar un modelo de mezcla lineal de los datos transmitidos, para poder aplicar separación ciega de fuentes en su recuperación. Hay que destacar la importancia de la representación del sistema ZP-OFDM como un sistema CP-OFDM con precodificación que se introdujo en el Apartado 4.5.3. Esta representación es la clave que ha permitido el desarrollo de las leyes de aprendizaje para una matriz diagonal denominadas de forma genérica NGD. Al trabajar sólo con una matriz diagonal, el proceso de aprendizaje de la matriz es muy rápido y presenta una carga computacional muy baja. Además se ha comprobado el correcto funcionamiento de las leyes NGD con varios experimentos.

Finalmente, y ya que se han desarrollado algoritmos para CDMA y para OFDM, parecía lógico tratar de aplicarlos a la combinación de ambos sistemas: MC-CDMA. Se ha presentado

un algoritmo para el caso del enlace descendente de un sistema MC-CDMA inalámbrico que permite la detección ciega.

7.2 Líneas futuras.

Algunas líneas de investigación que se abren al término de esta tesis son:

- En primer lugar, sería interesante tratar de extender el estimador GWFOE al caso de señales complejas, para poder utilizarlo en los algoritmos propuestos.
- Ni en el caso de CDMA, ni en MC-CDMA, se ha considerado en esta tesis el modelo asíncrono. Se han propuesto algunas técnicas que están basadas en la extracción ciega de fuentes o en deconvolución ciega [Tugnait, 1997] con imposición de restricciones utilizando los códigos de ensanchado del usuario de interés. La aplicación de esas técnicas al caso MC-CDMA parece casi inmediata.
- Se deja en el tintero el estudio de estabilidad de las leyes de aprendizaje de tipo NGD propuestas. Éste estudio permitiría establecer bajo qué condiciones esas leyes convergen, especialmente en el caso de la ley NGD-III.

REFERENCIAS

- Amari, S. I. (1997). Neural learning in structured parameter spaces — natural riemannian gradient. En *Advances in Neural Information Processing Systems*, de Mozer, M. C., Jordan, M. I. y Petsche, T. (editores), volumen 9, página 127. The MIT Press.
- Amari, S. I. (1998). Natural gradient works efficiently in learning. *Neural Computation*, 10(2):251–276.
- Amari, S. I., Cichocki, A. y Yang, H. H. (1996). A new learning algorithm for blind signal separation. En *Advances in Neural Information Processing Systems*, de Touretzky, D. S., Mozer, M. C. y Hasselmo, M. E. (editores), volumen 8, páginas 757–763. The MIT Press.
- Andrews, J. y Goldsmith, A. (2004). Multicarrier modulation. *Available online*, <http://www.ece.utexas.edu/wncg/ee381k2/>.
- Bachakaris, E., Nandi, A. y Zarzoso, V. (1996). Foetal ECG extraction using blind source separation method. En *Eighth European Signal Processing Conference*, Trieste.
- Benveniste, A., Métivier, M. y Priouret, P. (1990). *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*. Springer-Verlag, Berlin.
- Bingham, J. (1990). Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come. *IEEE Communications Magazine*, 28:5–14.
- Blaschke, T. y Wiskott, L. (2004). CuBICA: Independent component analysis by simultaneous third- and fourth-order cumulant diagonalization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 52(5):1250–1256.
- Boloix-Tortosa, R. y Murillo-Fuentes, J. J. (2004). Blind source separation in the adaptive reduction of inter-channel interference for OFDM. *Lecture Notes on Computer Sciences 3195: Independent Component Analysis and Blind Signal Separation. ICA 2004.*, páginas 1142–1149.
- Boloix-Tortosa, R., Payan-Somet, F. J. y Murillo-Fuentes, J. J. (2005a). Semi-blind equalization of one-antenna OFDM systems based on higher-order statistics. En *10th International OFDM-Workshop*, Hamburg, Germany.

- Boloix-Tortosa, R., Payan-Somet, F. J. y Murillo-Fuentes, J. J. (2005b). Semi-blind multiuser detection in zero padded OFDM-CDMA systems. En *5th International Workshop Multi-Carrier Spread Spectrum (MC-SS 2005)*, Oberpfaffenhofen, Germany.
- Bugallo, M. F., Dapena, A. y Castedo, L. (2000). Image compression via independent component analysis. En *Learning*, Leganés.
- Caamaño-Fernández, A., Boloix-Tortosa, R., Ramos, J. y Murillo-Fuentes, J. J. (2004). Hybrid higher-order statistics learning in multiuser detection. *IEEE Trans. on Man and Cybernetics Part C*, 34(4):417–424.
- Callaerts (1989). *Signal separation methods based on singular value decomposition and their application to the real-time extraction of the fetal electrocardiogram from cutaneous recordings*. Tesis Doctoral, K.U. Leuven - E.E. Dept.
- Cao, X. R. y Liu, R. W. (1996). General approach to blind source separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(3):562–571.
- Cardoso, J. (1994). On the performance of orthogonal source separation algorithm. En *EUSIP-CO*, páginas 776–779, Edinburgh.
- Cardoso, J. (1997). Estimating equations for source separation. En *IEEE International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, volumen 5, páginas 3449–3452, Munich, Germany.
- Cardoso, J. (1998a). Multidimensional independent component analysis. En *IEEE International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, volumen 5, Seattle, WA.
- Cardoso, J. F. (1998b). Blind signal separation: Statistical principles. *Proc. of the IEEE*, 86(10):2009–2025.
- Cardoso, J. F. (1999). High-order contrasts for independent component analysis. *Neural Computation*, 11(1):157–192.
- Cardoso, J. F. (WWW). Web page: Jade for real-valued data. <ftp://sig.enst.fr/pub/jfc/Algo/Jade/jadeR.m>.
- Cardoso, J. F. y Laheld, B. H. (1996). Equivariant adaptive source separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(12):3017–3030.
- Cardoso, J. F. y Souloumiac, A. (1993). Blind beamforming for non gaussian signals. *Proceedings IEE F*, 140(6):362–370.
- Castedo, L., Escudero, C. J. y Dapena, A. (1997). A blind signal separation method for multiuser communications. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(5):1343–1348.
- Causey, R. T. y Barry, J. R. (1998). Blind multiuser detection using linear prediction. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(9):1702–1710.

- Cichocki, A., Kasprzak, W. y Amari, S. (1996). Neural network approach to blind separation and enhancement of images. En *Eighth European Signal Processing Conference*, volumen 1, páginas 579–582.
- Cichocki, A., Unbehauen, R. y Rummert, E. (1994). Robust learning algorithm for blind separation of signals. *Electronic Letters*, 30:1386–1387.
- Comon, P. (1989). Separation of stochastic processes. En *Workshop Higher Order Spectral Anal.*, Va, CO.
- Comon, P. (1994). Independent component analysis, a new concept? *Signal Processing*, 36(3):287–314.
- Comon, P. (WWW). Web page: Matlab source codes. <http://www.i3s.unice.fr/~comon/matlab.html>.
- Comon, P. y Moreau, E. (1997). Improved contrast dedicated to blind separation in communications. En *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volumen V, páginas 3453–3456, Munich, Germany.
- Cover, T. y Thomas, J. A. (1991). *Elements of Information Theory*. Wiley, New York.
- Ding, Y., Davidson, T.Ñ., Lou, Z.-Q. y Wong, K. M. (2003). Minimum ber block precoders for zero-forcing equalization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(09):2410–24–23.
- Edfors, O., Sandell, M., van de Beek, J.-J., Landström, D. y Sjöberg, F. (1996). An introduction to orthogonal frequency-division multiplexing. *Tutorial*, página <http://courses.ece.uiuc.edu/ece459/spring02/ofdm/tutorial.pdf>.
- ETSI Normalization Committee (1995-1997). Radio broadcasting system, digital audio broadcasting (dab) to mobile, portable and fixed receivers. Norme ETSI, Sophia-Antipolis, Valbonne, France. Doc. ETS 300 402.
- ETSI Normalization Committee (1996). Digital broadcasting system for television, sound and data service; framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television. Norme ETSI, Sophia-Antipolis, Valbonne, France. Doc. ETS 300 744.
- ETSI Normalization Committee (1998). Channel models for HIPERLAN/2 in different indoor scenarios. Norme ETSI, Sophia-Antipolis, France.
- ETSI Normalization Committee (1999). Broadband Radio Access Networks (BRAN); High Performance Radio Local Area Networks (HIPERLAN) type 2; system overview. Norme ETSI, Sophia-Antipolis, France, Doc. ETR0 230 002.
- Ghogho, M., Swami, A. y Durrani, T. (2000). Approximate maximum likelihood blind source separation with arbitrary source pdfs. En *Proc. SSAP'00*, Pocono Manor Inn, Pennsylvania.

- Giannakis, G. B. (1997). Filterbanks for blind channel identification and equalization. *IEEE Signal Processing Lett.*, 4:184–187.
- Gil-García, E., Cruces, S. y Crespo, C. (2000). Detección ciega de señales DS-CDMA. En *XV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Zaragoza, Spain.
- Hara, S. y Prasad, R. (1997). Overview of multicarrier cdma. *IEEE Communications Magazine*, páginas 126–133.
- Harroy, F. y Lacoume, J.-L. (1996). Maximum likelihood estimators and cramer-rao bounds in source separation. *Signal Processing*, 55(2):167–177.
- Haykin, S. (1994). *Communication Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Haykin, S. (editor) (2000a). *Unsupervised Adaptive Filtering*, volumen I, Blind Separation of sources. Wiley Interscience, NY.
- Haykin, S. (editor) (2000b). *Unsupervised Adaptive Learning. Volume I Blind Source Separation*, chapter Blind Signal Separation and Extraction: Neural and Information-Theoretic Approaches, páginas 63–138. Volumen I, Blind Separation of sources of [Haykin, 2000a].
- Haykin, S. (editor) (2000c). *Unsupervised Adaptive Learning. Volume I Blind Source Separation*, chapter Entropic Contrast for Source Separation: Geometry and Stability, páginas 13–62. Volumen I, Blind Separation of sources of [Haykin, 2000a].
- Herrmann, F. y Nandi, A. (2001). Blind separation of linear instantaneous mixture using close forms estimators. *Signal Processing*, 81:1537–1556.
- Hurri, J., Gävert, H., Särelä, J. y Hyvärinen, A. (1998). FastICA version 2.1, web page. <http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica/index.shtml>.
- Hyvärinen, A. (1997). Independent component analysis by minimization of mutual information.
- Hyvärinen, A. (1999). Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 10(3):626–634.
- Hyvärinen, A., Karhunen, J. y Oja, E. (2001). *Independent component analysis*. John Willey and Sons.
- Hyvärinen, A. y Oja, E. (1997). A fast fixed-point algorithm for independent component analysis. *Neural Computation*, 9(7):1483–1492.
- Iglesia, D. I., Dapena, A. y Escudero, C. J. (2003). Multiuser detection in MIMO OFDM systems using blind source separation. En *Sixth Baiona Workshop on Signal Processing in Communications*, Baiona, Pontevedra, Spain.
- Iglesia, D. I., Dapena, A. y Escudero, C. J. (2004). Blind source separation detection in MIMO OFDM systems using blind source separation. En *15th International Symposium Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. PIMRC 2004*, volumen 4, páginas 2925–2929.

- Joutsensalo, J. y Ristaniemi, T. (1998). Learning algorithms for blind multiuser detection in CDMA downlink. En *PIMRC*.
- Karhunen, J., Cichoki, A., Kasprad, W. y Pajunen, P. (1997a). On neural blind separation with noise suppression and reduction. *International Journal of Neural Systems*, 8(2):219–237.
- Karhunen, J., Hyvarinen, A., Vigario, R., Hurri, J. y Oja, E. (1997b). Applications of neural blind separation to signal and image processing. En *International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, volumen 1, páginas 131–134, Munich, Germany.
- Lathanuwer, L. D., Moor, B. D. y Vandewalle, J. (1995). Fetal electro-cardiogram extraction by source separation. En *IEEE Signal Processing Workshop on Higher order statistics*, páginas 134–138, Aiguabrava.
- Lee, T. (1998). *Independent Component Analysis. Theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Lee, T., Lewicki, M. y Sejnowski, T. (1999). Unsupervised classification with non-gaussian mixture models using ICA. En *Advances in Neural Information Processing Systems*, volumen 11, páginas 58–64, Cambridge, MA. The MIT Press.
- Liu, H., Xu, G., Tong, L. y Kailath, T. (1996). Recent developments in blind channel equalization: From cyclostationarity to subspaces. *Signal Processing*, 50(1-2):83–99.
- Makeig, S., Bell, A. J., Jung, T. P. y Sejnowski, T. J. (1996). Independent component analysis of electroencephalographic data. En *Advances in Neural Information Processing Systems*, de Touretzky, D. S., Mozer, M. C. y Hasselmo, M. E. (editores), volumen 8, páginas 145–151, Denver. The MIT Press.
- Manton, J. H. (2001). A channel coded CP-OFDM interpretation of TZ-OFDM systems. En *11th IEEE signal processing workshop on statistical signal processing*, Singapore.
- Martín, R. y Acha, J. (1997). Blind separation of sources using a new polynomial equation. *Electronic Letters*, 33(3):176–177.
- McCullagh, P. (1987). *Tensor Methods in Statistics*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall.
- Moreau, E. y Macchi, O. (1996). Higher order contrast for self-adaptive source separation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 10(1):19–46.
- Morelli, M. y Mengali, U. (1999). A comparison of pilot-aided channel estimation methods for OFDM systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(12):3065–3073.
- Muquet, B. (2001). *Novel receiver and decoding schemes for wireless OFDM systems with cyclic prefix or zero padding*. Tesis Doctoral, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris.

- Muquet, B., de Courville, M. y Duhamel, P. (2002a). Subspace-based blind and semi-blind channel estimation for OFDM systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(7):1699–1712.
- Muquet, B., Wang, Z., Giannakis, G. B., de Courville, M. y Duhamel, P. (2002b). Cyclic prefixing or zero padding for wireless multicarrier transmissions? *IEEE Trans. on Communications*, 50(12):2136–2148.
- Murillo-Fuentes, J. y González-Serrano, F. (2000). Improving stability in blind source separation with the stochastic median gradient. *Electronic Letters*, 36(19):1662–1663.
- Murillo-Fuentes, J. y González-Serrano, F. (2001a). Independent component analysis with sinusoidal fourth-order contrast. En *Proc. ICASSP'01*, volumen V, páginas 2785–2788, Salt Lake City, USA.
- Murillo-Fuentes, J. y González-Serrano, F. (2002a). Median equivariant adaptive separation via independence: application to communications. *Neurocomputing*, 49(1):389–409.
- Murillo-Fuentes, J., Molina-Bulla, H. y González-Serrano, F. (2001b). Independent component analysis applied to digital image watermarking. En *Proc. ICASSP'01*, volumen III, páginas 1997–2000, Salt Lake City, USA.
- Murillo-Fuentes, J. J. (2001c). *Aplicación de técnicas de separación ciega de fuentes al procesamiento de señal y comunicaciones*. Tesis Doctoral, DTSC. Universidad Carlos III de Madrid, Spain.
- Murillo-Fuentes, J. J. y Boloix-Tortosa, R. (2005). Robust blind image watermarking with independent component analysis: an embedded algorithm. *Lecture Notes on Computer Sciences 3512: Computational Intelligence and Bioinspired system. IWANN 2005.*, páginas 1100–1106.
- Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R. y Caamaño, A. J. (2002b). Centralized blind multiuser detection using sica. En *Learning'02*, Leganés, Madrid.
- Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R. y González-Serrano, F. J. (2003a). Adaptive initialized jacobi optimization in independent component analysis. En *Proc. ICA2003*, páginas 1065–1070, Nara, Japan.
- Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R. y González-Serrano, F. J. (2003b). Initialized jacobi optimization in independent component analysis. En *Proc. ICA2003*, páginas 1053–1058, Nara, Japan.
- Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R., Hornillo-Mellado, S. y Zarzoso, V. (2004a). Independent component analysis based on marginal entropy approximations. En *Proc. ISIAC'04*, Seville, Spain.
- Murillo-Fuentes, J. J. y González-Serrano, F. J. (2004b). A sinusoidal contrast function for the blind separation of statistically independent sources. *IEEE Tras. on Signal Processing*.

- Nikias, C. y Petrolu (1993). *Higher order spectra analysis: a non-linear signal processing framework*. Prentice-Hall.
- Oppenheim, A. V. y Schafer, R. W. (1989). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall International Inc., New Jersey.
- Proakis, J. (2001). *Digital Communications*. Mc-Graw-Hill, New York, fourth edición.
- Puntonet, C. y Prieto, A. (1998). Neural net approach for blind separation of sources based on geometric properties. *Neurocomputing*, 18(1-3):141–164.
- Ristaniemi, T. (2000). *Synchronization and Blind Signal Processing in CDMA*. Tesis Doctoral, Faculty of Information Technology. University of Jyväskylä, Finland.
- Sandell, M. y Edfors, O. (1996). A comparative study of pilot-based channel estimator for wireless OFDM. *Res. Rep. TULEA*, página Lulea Univ. of Technolgy. Sweeden.
- Sarperi, L., Nandi, A. K. y Zhu, X. (2004). Multiuser detection and channel estimation in MIMO OFDM systems via blind source separation. *Proc. ICA 2004. LNCS 3195: Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, páginas 1189–1196.
- Scaglione, A., Giannakis, G. y Barbarossa, S. (1999). Redundant filterbank precoders and equalizers - Part I: Unification and optimal designs - Part II: Blind channel estimation, synchronization and direct equalization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47:1988–2022.
- Stuart, A. y Ord, J. K. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, volumen I. London: Edward Arnold, sixth edición.
- Tellado, J. (2000). *Multicarrier Modulation with low PAR: Applicatins to DSL and wireless*. Kluwer Academic Publisher.
- Tellado-Mourelo, J. (1999). *Peak to average power reduction for multicarrier modulation*. Tesis Doctoral, Stanford University.
- Tellambura, C., Parker, M. G., Guo, Y. J., Shepherd, S. J. y Barton, S. K. (1999). Optimal sequences for channel estimation using discrete fourier transform techniques. *IEEE Trans. on Communications*, 47(2):230–238.
- Tugnait, J. K. (1997). Identification and deconvolution of multichanel lineal non-gaussian processes using higher order statiststics and inverse filter criteria. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(3):658–672.
- Verdu, S. (1998). *Multiuser Detection*. Cambridge University Press, The Edimburg Building, Cambridge.
- Wang, Z. y Giannakis, G. B. (2000). Wireless multicarrier communications: where Fourier meets Shannon. *IEEE Signal Processing Magazine*, páginas 29–48.

- Wang, Z. y Giannakis, G. B. (2001). Linearly precoded or coded ofdm against wireless channel fades? En *3rd IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, Taoyuan, Taiwan.
- Wong, C. S., Obradovic, D. y Madhu, N. (2003). Independent component analysis (ICA) for blind equalization of frequency selective channels. En *IEEE 13th Workshop on Neural Networks for Signal Processing, NNSP'03*, páginas 419 – 428.
- Zarzoso, V., Herrmann, F. y Nandi, K. (2001a). Weighted closed-form estimators for blind source separation. En *Proc. SSP01*, volumen 4, páginas 2141–2146, Singapore.
- Zarzoso, V., Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R. y Nandi, A. K. (2005a). Independent component analysis with optimized pairwise processing. En *EUSIPCO*, Antalya, Turkey.
- Zarzoso, V., Murillo-Fuentes, J. J., Boloix-Tortosa, R. y Nandi, A. K. (2005b). Optimal pairwise fourth-order independent component analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Submitted.
- Zarzoso, V. y Nandi, A. K. (1999). Blind separation of independent sources for virtually any source probability density function. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(9):2419–2432.
- Zarzoso, V. y Nandi, A. K. (2000). Adaptive blind source separation for virtually any source probability density function. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(2):477–488.
- Zarzoso, V., Nandi, A. K., Herrmann, F. y Millet-Roig, J. (2001b). Combined estimation scheme for blind source separation with arbitrary source PDF's. *IEE Electronic Letters*, 37(2):132–133.