

MTSK EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE PRIMARIA

NURIA JOGLAR-PRIETO¹, M.^a DEL MAR LIÑÁN-GARCÍA^{2,3} Y
LUIS CARLOS CONTRERAS⁴

¹*Universidad Complutense de Madrid,*

²*Universidad de Sevilla,*

³*Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU,*

⁴*Universidad de Huelva*

DOI: 10.14679/1465

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de los maestros se aborda, básicamente, desde dos perspectivas: la teórica y la práctica (Boyd et al., 2009). Desde el enfoque teórico, los formadores guían a los estudiantes para maestro (en adelante EPM), en el estudio de principios didácticos, el análisis de debates académicos sobre el aprendizaje de los alumnos, y tratan aspectos de la filosofía de la educación (naturaleza de la educación y de la sociedad). En las sesiones de formación articuladas desde el enfoque práctico, el aprendizaje de los EPM incluye el tratamiento de los materiales curriculares que van a utilizar y la realización de prácticas de enseñanza. Este capítulo aborda esta segunda perspectiva, dado que algunos estudios han mostrado que tiene mayor probabilidad de ser eficaz y de mejorar los resultados de los EPM (Boyd et al., 2009).

Como señalan Hill et al. (2020), los programas de formación de maestros de áreas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas), funcionan mejor cuando se centran en construir conocimientos que los EPM necesitan movilizar durante la enseñanza. Estos incluyen tanto aspectos del conocimiento de los materiales curriculares que se pueden utilizar en el aula, como del conocimiento especializado del contenido para enseñar y de las características de la enseñanza y el aprendizaje de esos contenidos (todos ellos incluidos en el modelo MTSK).

En ese sentido, y más específicamente en el caso de las matemáticas, se muestran más eficaces los programas centrados en ayudar a los EPM a usar adecuadamente los

diversos recursos curriculares (Nie et al., 2013), a analizar, diseñar, mejorar lecciones o unidades didácticas específicas y a planificar y secuenciar clases de matemáticas de forma colaborativa. En alguna metodología utilizada para el desarrollo profesional docente como la Lesson Study (Lewis et al., 2012), además de diseñar y analizar lecciones de matemáticas de forma colaborativa, los participantes las implementan en aulas reales bajo la supervisión de sus compañeros. También son más eficaces los programas formativos que involucran a los EPM en la reflexión y el análisis de episodios de clases de matemáticas grabadas en vídeo (Major y Watson, 2018).

En este capítulo se presentan dos tareas para desarrollar la formación matemática de EPM de Educación Primaria desde el enfoque práctico desarrollado en los párrafos anteriores. Por lo tanto, están articuladas desde sus futuras tareas profesionales y desde los aspectos del conocimiento matemático especializado para enseñar que pretendemos que movilicen y los que, efectivamente, movilizan para resolverlas. En particular, hemos elegido las habilidades “mirar profesionalmente” las acciones del profesor en el aula y reconocer las prácticas matemáticas y los objetos y procesos implicados en la resolución de problemas matemáticos (Fernández, 2019).

La propuesta está fundamentada metodológicamente en dos pilares. Por un lado, en el contenido de la formación matemática de los maestros de dicha etapa entre los que se incluyen los siguientes referentes: (a) las competencias que deben adquirirse para llegar a ser maestro de Educación Primaria en España (Orden Ministerial ECI/3857/2007, 2007), (b) los *Standards for the Preparation of Middle Level Mathematics Teachers*, (NCTM¹, 2020); y (c) el estudio *TEDS-M*, del IEA². Por otro lado, nos apoyamos en el modelo analítico MTSK (Carrillo et al., 2018) en tres momentos. En primer lugar, será el organizador de los descriptores de los contenidos curriculares de la formación matemática de los maestros de Educación Primaria recogidos en los referentes citados. En segundo lugar, nos servirá para sustentar el diseño de las tareas formativas propuestas y como estructurador de las mismas (Barrera-Castarnado y Liñán-García, 2021). Finalmente, usaremos MTSK como modelo de análisis del conocimiento especializado que los EPM movilizan al resolverlas. Las dos tareas formativas presentadas han sido llevadas al aula en varias ocasiones por los autores del capítulo. Los resultados obtenidos nos llevan a desarrollar en mayor profundidad el tercer uso del MTSK descrito. El objetivo principal es reflejar la riqueza de cada tarea para ayudar a los EPM a construir aspectos del conocimiento especializado, y por lo tanto a alcanzar los estándares especificados para su formación.

EL CONTENIDO DE LA FORMACIÓN COMO REFERENTE

Abordamos, a continuación, los elementos que caracterizan la formación inicial de maestros de Educación Primaria, sustentados sobre los tres referentes descritos en la introducción (Tabla 1).

¹ NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics*.

² IEA, *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, es una asociación independiente, compuesta por universidades, institutos o agencias ministeriales dedicadas a la investigación sobre evaluación educativa, que representan al sistema educativo de su país. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte es miembro de la IEA.

Los Estándares de la Asociación Profesional Especializada para la preparación de maestros de Educación Primaria (NCTM, 2020) incorporan el estado de opinión y los resultados de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en ese nivel educativo. En particular, están muy influenciados por el creciente consenso sobre el principio de asegurar el éxito matemático para todos los estudiantes destacado en NCTM (2014). Así, plantean propuestas desde el convencimiento de que sólo una preparación adecuada contribuirá a que los EPM sean capaces de involucrar a sus estudiantes a través de formas de enseñanza y aprendizaje eficaces. Proponen 4 estándares, enunciados en forma de conocimiento y acciones (en relación con las cuales proporcionan formas de evidenciarlas). El primero de ellos es conocer y comprender el contenido matemático que serán responsables de enseñar (a esto se refieren en el texto como «matemáticas significativas»). Los maestros han de mostrar y aplicar su comprensión de números y operaciones, álgebra y funciones, estadística y probabilidad y geometría y medida, además de las conexiones entre estos temas (KoT, KSM).

Tabla 1. Estándares NCTM (2020), dominios TEDS-M (2012) y competencias de la ley española (orden ministerial 2007)³.

NCTM (2020)	TEDS-M (2012)	Orden ministerial (2007)	MTSK pretendido
Estándar 1. <i>Knowing and Understanding Meaningful Mathematics</i>	Dominio 1. Conocimientos Conceptuales (organizado en bloques de contenido)	Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc).	KoT
		Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.	KSM
Estándar 2. <i>Knowing and Using Mathematical Processes</i>	Dominio 2. Procesos cognitivos del conocimiento matemático: (a) conocer, (b) aplicar, (c) razonar	Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.	KoT
		Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico	KPM KSM

³ La ley vigente en España es muy general y, por tanto, tiene muy poca precisión. Los subdominios y categorías MTSK asociadas están determinadas por la relación entre los ítems de la orden ministerial y los estándares NCTM (2020) o los dominios TEDS-M IEA (2012). Se señalan en negrita los subdominios que parecen tener más relevancia en cada estándar NCTM y /o dominio TEDS-M.

NCTM (2020)	TEDS-M (2012)	Orden ministerial (2007)	MTSK pretendido
Estándar 3. <i>Knowing Students and Planning for Mathematical Learning</i>	Dominio 3. Conocimientos en Didáctica de la Matemática (a) Conocimiento sobre el currículo de matemáticas	Conocer el currículo escolar de matemáticas.	KMLS
Estándar 4. <i>Teaching Meaningful Mathematics</i>	(b) Planificar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Aplicación de la enseñanza de las matemáticas	Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes	KFLM KMT

Entendemos que dicha comprensión ha de ser profunda (Ma, 1999) y debe incluir los conceptos y sus relaciones intra e inter conceptuales, los procedimientos matemáticos (lo que implica saber utilizarlos de forma «flexible, precisa, eficiente y apropiada», p. 6), sus aplicaciones (lo que incorpora la capacidad para formular y resolver problemas y ver la matemática como una herramienta útil en las actividades cotidianas) y el razonamiento lógico, unido a las capacidades de argumentar y justificar que tendrán que promover en sus estudiantes. Este estándar hace referencia también a ciertas concepciones de los futuros maestros, pero no lo consideraremos en este capítulo.

El estándar número 2, el conocimiento y capacidad para aplicar los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y comunicación matemática y diseño de modelos matemáticos, es, de alguna manera, el desarrollo de uno de los aspectos ya citados en el anterior, pero trascendiendo al contenido matemático concreto para reflexionar sobre las propias prácticas matemáticas (KPM).

Si los dos primeros se refieren específicamente al conocimiento del contenido matemático que ha de tener un maestro (MK dentro del modelo MTSK, véase la Tabla 1), el estándar número 3, conocer a los estudiantes y planificar el aprendizaje matemático, se centra ya en el ámbito del conocimiento didáctico del contenido (PCK). Los maestros deben integrar su conocimiento matemático con el relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes como guía para planificar una formación accesible que proporcione igualdad de oportunidades. Se amalgama aquí el conocimiento del contenido (MK) con el conocimiento sobre su enseñanza (KMT) y su aprendizaje, con el foco puesto en atender a las características de todos los estudiantes al planificar la instrucción (KFLM).

Finalmente, bajo la denominación de «enseñar matemáticas significativas», con el estándar número 4, se busca que los maestros establezcan objetivos de aprendizaje de alta demanda cognitiva y usando diferentes registros de representación, a través prácticas de enseñanza efectivas y equitativas que permitan un aprendizaje matemático riguroso. Esas prácticas han de propiciar la participación de todos los estudiantes, favoreciendo la comprensión conceptual y el uso fluido y flexible de los procedimientos. En este estándar se refieren así explícitamente al subdominio KMT, interrelacionando de nuevo todo el conocimiento del contenido matemático referido en los estándares 1 y 2, y el conocimiento de las características del aprendizaje matemático de los alumnos

del estándar 3 con las categorías Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, y Recursos materiales y virtuales del MTSK.

Por otra parte, en nuestro segundo referente internacional, el estudio TEDS-M, los EPM tuvieron que responder a cuestiones sobre las matemáticas y sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Sus respuestas se organizaron teniendo en cuenta tres grandes dominios de conocimiento (véase Tabla 1). En lo que se refiere a los conocimientos conceptuales (Dominio 1; KoT y KSM) se incluyeron los bloques del contenido de la Educación Primaria y Secundaria como referentes (números y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, azar y probabilidad); esto se complementaba con el dominio 2 (KoT y KPM) sobre procesos cognitivos del conocimiento matemático (conocer, aplicar, razonar). Ambos dominios se basaron en el marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (Mullis et al., 2005). Por último, el dominio 3 sobre el conocimiento en didáctica de la matemática (PCK), fue desarrollado *ad hoc* por los investigadores a cargo del estudio. Este dominio abarcaba el conocimiento sobre el currículo, sobre la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (predecir respuestas típicas de los estudiantes, seleccionar actividades apropiadas), y sobre la implementación en el aula de estas actividades (diagnosticar las respuestas del alumnado, incluidos errores preconcebidos, analizar y evaluar las soluciones y argumentos matemáticos del alumnado, explicar o representar conceptos y procedimientos matemáticos).

Los estándares del NCTM (2020) conocer y comprender matemáticas significativas, junto con el conocimiento y capacidad para aplicar los procesos matemáticos, mantienen una relación muy estrecha con el dominio conceptual del conocimiento matemático y con el de los procesos cognitivos del conocimiento matemático de TEDS-M (2012).

Aunque de forma mucho más escueta, en el contexto español, la Orden ministerial ECI/3857/2007 (2007) recoge en concreto tres competencias que deben adquirir los EPM en el módulo de matemáticas que están incluidas en los estándares y dominios anteriores (Tabla 1).

De la misma forma, conocer a los estudiantes y planificar el aprendizaje matemático junto con enseñar matemáticas significativas, están relacionados con el dominio del conocimiento en didáctica de la matemática de TEDS-M (2012) y tres competencias del currículo español. Desde nuestra perspectiva, tal y como hemos ido señalando y resumiendo en la Tabla 1, los estándares, dominios y competencias de los tres referentes de la formación de maestros se sustentan en la estructura del conocimiento especializado reflejada en el modelo analítico MTSK.

Partiendo de estas premisas, consideramos MTSK como marco organizativo, de las dos tareas formativas que vamos a presentar, en tres niveles: (a) se diseñan teniendo en cuenta los contenidos de los tres referentes curriculares (organizados desde MTSK), (b) con intención de que, en su resolución, se movilice, al menos, determinado conocimiento especializado estructurado según el modelo MTSK, lo que Barrera-Castarnado y Liñán-García (2021) llaman “conocimiento especializado pretendido” en una tarea de formación, para, finalmente, (c) observar cómo las tareas formativas ayudarán a los EPM a construir diferentes aspectos del conocimiento especializado, «su MTSK».

que necesitarán movilizar para enseñar matemáticas en su aula (Montes et al., 2019; Sullivan et al., 2010; Carrillo y Climent, 2009; Sánchez y García, 2009).

TAREAS FORMATIVAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Las tareas formativas en la formación inicial de maestros están vinculadas estrechamente a las prácticas de los docentes, es decir, a las «tareas profesionales», entendidas como el sistema de actividades del profesor que conforman su práctica cuando enseña matemáticas en su aula (Muñoz-Catalán et al., 2017; Da Ponte et al., 2012; Sánchez y García, 2009). Cuando un profesor de matemáticas diseña las actividades para ayudar a comprender un determinado concepto o procedimiento, cuando busca la forma de responder a una pregunta de un estudiante, cuando intenta interpretar las razones de las dificultades de un contenido concreto, cuando decide qué tarea realizar de las propuestas en el libro de texto, o cuando reflexiona sobre qué recurso puede serle de más utilidad en el aula, serían ejemplos de tareas profesionales. Estas tareas profesionales no solo se realizan durante la planificación de las sesiones y en su implementación, también tras la clase es necesario un espacio para la reflexión sobre cómo se ha desarrollado y qué consecuencias tiene lo ocurrido durante una sesión de clase en la planificación de la siguiente. Como señalan Santagata y Guarino (2011), una reflexión es más completa y eficaz cuando se realiza dentro de un marco organizativo que la estructure, que ayude a identificar las claves de lo que ha sucedido en el aula, con un análisis integral que pueda conducir a otras formas de abordar ese contenido u otra forma de conducir la clase y desde una «mirada profesional» (Fernández et al., 2018; Jacobs et al., 2010).

La literatura relacionada presenta diferentes clasificaciones de tareas formativas atendiendo a una variedad de parámetros. Nos vamos a centrar en las tipificaciones que son especialmente relevantes dado el carácter situado y contextualizado del trabajo del profesor de matemáticas. Sánchez y García (2009) diferencian tareas de organización del contenido matemático para la enseñanza frente a las destinadas a la comprensión de la gestión del contenido matemático y el discurso en el aula, cerrando su clasificación con las correspondientes al análisis e interpretación del pensamiento y conocimiento matemático de los estudiantes. Carrillo y Climent (2009), a su vez, organizan las tareas en tres grupos. Las primeras son aquellas que enfrentan al estudiante con su conocimiento del contenido matemático, las segundas las que le ofrecen situaciones de clase que el estudiante debe observar críticamente, y, por último, se refieren a las tareas que plantean el diseño y simulación de situaciones de clase, donde se puede proponer incluso una teatralización en la que se dan ciertas condiciones que se deben simular (Lampert et al., 2013; Wæge y Fauskanger, 2020). Siguiendo otro enfoque, Sullivan et al. (2010) desgranar las tareas profesionales propuestas en el proyecto Task Type and Mathematics Learning (TTML), que podemos vincular con los siguientes tres tipos de tareas formativas: las centradas en la modelización y ejemplificación, la contextualización a través de problemas, incluyendo aquellos que exigen una investigación más profunda por ser abiertos, y las investigaciones interdisciplinares.

En las tres clasificaciones descritas, los autores incluyen tareas formativas relacionadas con el análisis de situaciones de aula en diferentes formatos para acercar el

aula de primaria a la formación inicial, y con el diseño de enunciados y la resolución de problemas. Tanto las tareas formativas que facilitan el análisis de situaciones de aula, como las que permiten diseñar y resolver problemas, juegan un papel clave para generar oportunidades de aprendizaje de los diferentes aspectos de MTSK. Por ello, nos vamos a centrar en analizar más detenidamente estos dos tipos de tareas formativas. Al describir nuestros ejemplos, presentaremos explícitamente el contenido matemático que se pretende enseñar a enseñar desde una perspectiva especializada (conocimiento especializado pretendido, Barrera-Castarnado y Liñán-García, 2021). Así, en la descripción de la tarea se distinguirán los aspectos del conocimiento especializado que pretendemos que se movilicen y se pondrá de relieve cómo ciertos aspectos de la tarea facilitan que los EPM construyan conocimientos matemáticos sobre los temas concretos abordados (por ejemplo, elementos del conocimiento especializado dentro de la categoría de registros de representación o de la de procedimientos dentro del subdominio del KoT), así como sobre distintas prácticas matemáticas (KPM) como es el caso de la resolución de problemas o el papel de los símbolos y del lenguaje formal en matemáticas o sobre conexiones de simplificación y complejización dentro del KSM. Además, mostraremos cómo la tarea formativa desarrollada les ayuda a conocer y comprender diferentes formas de enseñar ese contenido (aspectos de KMT), a identificar dificultades y obstáculos en el aprendizaje matemático de los alumnos de primaria (aspectos de KFLM) y a analizar materiales curriculares (aspectos de KMLS), sustentando de esta forma nuestra propuesta desde el modelo MTSK.

TAREAS FORMATIVAS BASADAS EN EL ANÁLISIS DE SITUACIONES DE AULA

Teacher noticing como constructo teórico

Partiendo de las tareas relacionadas con la revisión crítica de situaciones de aula (Carrillo y Climent, 2009) y las destinadas a la comprensión del discurso en el aula y el análisis del pensamiento de los estudiantes de primaria (Sánchez y García, 2009), así como las que incluyen la representación de situaciones de aula por parte de los EPM que actúan como estudiantes o maestros de Primaria (Lampert *et al.* 2013), hemos justificado la necesidad de plantear tareas en las que se analizan situaciones de aula como mecanismo de acercar la práctica a la formación inicial. Como veremos, estas tareas pueden implementarse en diferentes formatos, siempre incluyendo un entrenamiento individualizado sobre la observación del aula y la retroalimentación formador-EPM.

Los profesores de matemáticas, durante el desarrollo de sus clases, tienen que estar muy atentos a lo que ocurre en el aula, ser capaces de interpretar lo que está ocurriendo, y decidir cómo responder ante cualquier situación. Es especialmente relevante en su trabajo identificar e interpretar evidencias sobre cómo están comprendiendo sus estudiantes las ideas matemáticas trabajadas o sobre las metas de aprendizaje de sus estudiantes. El *teacher noticing* es un constructo teórico que abarca los procesos mediante los cuales los profesores (en nuestro caso de matemáticas), han de gestionar la información que se les presenta a lo largo de una clase con el fin último de tratar de ayudarles a mejorar su práctica de enseñanza (Sherin *et al.*, 2011). Autores como Star *et al.* (2011) entienden que el constructo *teacher noticing* abarca solamente aquello

en lo que se fija el profesor, así como aquello en lo que decide no fijarse. Otros, además, se preocupan de las interpretaciones que dan a lo que observan (Sherin et al., 2011), entendiéndolo como una *professional vision* en la que los profesores se fijan selectivamente en eventos que luego a partir de su conocimiento tratan de interpretar.

Finalmente, autores como Jacobs et al. (2010) o Fernández et al. (2018) tienen una visión aún más amplia de *teacher noticing*, considerando un tercer nivel del constructo definiendo el *professional noticing* o la mirada profesional de situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, que engloba no solo el proceso de fijarse en un evento e interpretarlo, sino además el de ofrecer alternativas a las decisiones que el profesor toma (o no toma) para dar respuesta a ese suceso. El desarrollo del *noticing*, en cualquiera de sus tres niveles (solamente detectar eventos, detectarlos e interpretarlos, o finalmente detectar eventos, ofrecer interpretaciones de los mismos y una gestión alternativa a la que toma el profesor observado), ha ayudado a mejorar la capacidad de reflexión y la calidad de la enseñanza de los docentes (Star et al., 2011) y, por lo tanto, a construir y desarrollar aspectos de su MTSK durante ese proceso. Entendemos además que profesores con un conocimiento especializado robusto serán capaces de detectar más eventos, de interpretarlos adecuadamente y de ofrecer gestiones alternativas fundamentadas.

Las situaciones de aula incluidas dentro de una tarea de este tipo pueden ser descritas en forma de narrativas, representadas por los propios EPM delante de sus compañeros o presentadas en formato vídeo recogiendo una situación real de aula. Siempre que se analizan situaciones de aula es importante que los EPM se posicionen desde un paradigma interpretativo, aspecto que se señala al comenzar este tipo de actividades.

Para finalizar la sección 3.1, describimos un ejemplo concreto de una tarea formativa para ayudar a los EPM a desarrollar su mirada profesional (tercera acepción vista arriba) en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética de números naturales en Primaria en la que se pretende que los EPM aprendan, desde un enfoque reflexivo, cómo trabajar el cálculo mental en esa etapa.

Una tarea formativa para desarrollar la mirada profesional de los EPM y su conocimiento especializado sobre el cálculo mental

La tarea está articulada en tres actos de la siguiente manera. En primer lugar se explica a los EPM que se va a plantear una operación en la pizarra que tienen que resolver en silencio individualmente de tantas formas como sean capaces, se comenta cómo se van a gestionar sus intervenciones a través de un código de signos con las manos cuando ya tengan sus respuestas (Parrish, 2010) Al diseñar la tarea se tiene en cuenta que el conocimiento especializado pretendido (Barrera-Castarnado y Liñán-García, 2021), como iremos indicando someramente en la descripción, pues nos vamos a centrar en el conocimiento especializado movilizado como hemos adelantado anteriormente. Así, se les pide que se sienten alrededor de la pizarra, donde se encuentra la formadora, formando una semicircunferencia, para que ella pueda verlos a todos, y que piensen en silencio sus respuestas. Mientras piensan la respuesta, ponen el dedo pulgar de una mano apuntando hacia un lateral, paralelo al suelo, cuando ya tienen una respuesta, deben poner el dedo pulgar hacia arriba, y deben seguir pensando otras formas de resolver el problema planteado, levantando un dedo más por cada

estrategia diferente que encuentran. Consideremos, por ejemplo, la operación $26+27$. Cuando la formadora ya ve que todos los EPM tienen al menos un dedo levantado, comienza a dialogar con los estudiantes para que compartan sus respuestas. Así, ella va recogiendo las respuestas de los EPM de forma organizada en la pizarra, convirtiendo consecutivamente las respuestas de los EPM del registro de la lengua natural oral al simbólico-numérico escrito (Figura 1) y mostrando en paralelo varias respuestas para facilitar la comparación entre ellas (Star y Rittle-Johnson, 2009).

Figura 1. Registro de las tres primeras respuestas de los EPM por la formadora (parte 1).

$26 + 27 = 53$

$6 + 7 = 13$ $20 + 20 = 40$ $40 + 13 = 53$ $26 + 27 =$ $= (20 + 6) + (20 + 7)$ $= (20 + 20) + (6 + 7)$ $40 + 13$ Commutativa asociativa	$\begin{array}{r} 26 \\ + 27 \\ \hline 53 \end{array}$ $40 \quad (13)$ $40 + 13$ 53	$25 + 25 = 50$ $50 + 3 = 53$ $26 + 27 = (25 + 1) + (25 + 2)$ $= (25 + 25) + (1 + 2)$ Commutativa asociativa $(\mathbb{N}, +)$
---	--	---

Gracias a los signos que hacen con las manos, la formadora sabe qué alumnos tienen exactamente 1, 2, 3 o más estrategias diferentes para calcular esa suma, así como los que tienen la misma que un compañero está explicando, lo que la ayuda a gestionar la participación con criterio (KMT). La formadora trata de que los EPM justifiquen verbalmente con rigor sus respuestas, explicitando las operaciones y las propiedades en las que se han basado para llegar a su solución (KoT). Se van comparando en paralelo en la pizarra las diferentes estrategias que han utilizado, explicitando similitudes y diferencias entre ellas, y enfatizando las características matemáticas de cada una (KoT y KPM). Durante este primer acto se ha puesto a los EPM en el lugar de alumnos de primaria para teatralizar una situación de aula con una tarea sencilla de cálculo mental, pero enfatizando los procesos a través de los cuales han llegado a sus respuestas, no solo el valor del resultado de la operación, situación en la que los EPM muestran su MK actual. En particular, en la Figura 1 se puede observar cómo las dos primeras estrategias que surgen están vinculadas al algoritmo tradicional de la suma con llevadas, tanto procedimental como representacionalmente (KoT).

En el segundo acto de la tarea se muestra un breve episodio de vídeo donde una maestra pone en práctica esa misma actividad de cálculo mental con un grupo de 20 estudiantes de 4.º curso de Educación Primaria (9-10 años) siguiendo exactamente la misma organización de aula que han representado en el primer acto. Esta parte de la tarea formativa está a su vez organizada en dos fases. Una primera en la que se pretende que los EPM detecten e interpreten eventos en ese episodio de forma espontánea (se les pide que observen atentamente el episodio y que al final anoten lo que consideren relevante), y una segunda en la que se volverá a mostrar el episodio para que comple-

ten lo observado e interpretado en la fase anterior tras una puesta en común guiada por la formadora desde los subdominios del MTSK. En este momento, a partir de los eventos observados por los EPM, la formadora pide que analicen explícitamente el contenido matemático (definiciones y propiedades, KoT) y cómo aparece ese contenido representado, en qué registros de representación (KoT), en las respuestas de los niños. De esta manera, dado que los diseñadores de la actividad han tenido en cuenta el conocimiento especializado pretendido con la tarea, se da una oportunidad a los EPM para desarrollar aspectos de su KoT relacionados con la suma de números naturales y sus propiedades (asociativa y conmutativa en este caso concreto, sobre los que la formadora elaborará conexiones con estructuras algebraicas en conjuntos numéricos, KSM), con los registros de representación del número natural y las operaciones (analizando fortalezas y debilidades de cada uno y explicitando las conversiones de los tratamientos, al pedir que se fijen en cómo representan sus respuestas tanto los niños como la maestra, o cómo representaron ellos o su formadora las respuestas anteriormente), con los procedimientos (discutiendo explícitamente sobre el «algoritmo tradicional» que surge como primera opción espontáneamente en la parte 1 de la tarea así como la representación en forma prototípica en columna del mismo), con la idea de flexibilidad matemática procedimental y representacional (Heinze et al., 2009) como práctica matemática (KPM). A continuación, la formadora sigue con su guion pidiendo a los EPM que se fijen en las estrategias de enseñanza (KMT) que, tanto la maestra en el vídeo como ella misma en la parte anterior, han puesto en juego durante la sesión para permitir que los estudiantes compartan y justifiquen sus respuestas, las comparen y decidan si alguna es mejor que otra y por qué. Es decir, estrategias de enseñanza que fomentan oportunidades en el aula para desarrollar la flexibilidad matemática. Se facilita también una reflexión abierta sobre la importancia de la argumentación en matemáticas y la precisión y el rigor en el uso del lenguaje (KPM), y estableciendo así un fuerte nexo entre los dos dominios de su conocimiento especializado (MK y PCK). Así mismo, se reflexiona sobre cómo se ha gestionado el error matemático en el aula, dándose cuenta los EPM de que no se penaliza en ningún momento (KMT). Paralelamente pueden reflexionar sobre las dificultades que ellos han tenido durante la sesión, y así tratar de identificar las que podrían tener los alumnos del vídeo, o sus futuros alumnos (KFLM).

Para completar esta tarea, se pediría a los EPM, en un tercer acto, que buscaran información en los documentos normativos curriculares de su entorno sobre el tratamiento del cálculo mental con números naturales en la etapa de primaria (KMLS) y que en grupos de 4-5 personas diseñaran una tarea similar para abordar las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación de números naturales.

TAREAS FORMATIVAS BASADAS EN EL PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La literatura ha sido concluyente en los últimos años respecto a los beneficios que genera trabajar con problemas en el proceso de formación de maestros, tanto en su diseño (Leavy y Hourigan, 2020), como en la reflexión sobre su resolución (Lowrie, 2002; Luo, 2009; Tichá y Hošpesová, 2009).

La formación de maestros, desde la perspectiva de la resolución de problemas (RP), va más allá de encontrar el resultado de un problema e implica desarrollar la capacidad de analizar tanto el proceso de resolución, como las características del resultado obtenido (coherente con la idea de flexibilidad matemática desarrollada en la tarea anterior). Dicho proceso es incompleto si no incluye interrogarse acerca de qué ocurriría si cambiaran determinadas condiciones iniciales. Cuando se enseña a los EPM a hacerse este tipo de preguntas, les mostramos una forma de hacer matemáticas (KPM), abriendo la puerta al planteamiento de nuevos problemas; en este caso, aquí es donde aparece el conocimiento especializado pretendido que estructura la tarea. Como señalan Singer et al. (2011), cuando se forma de manera sistemática en la transformación de problemas, cambiando representaciones, operaciones o condiciones, se posibilita la comparación de varios problemas evaluando similitudes y diferencias, incrementando la capacidad de apreciar lo esencial de lo auxiliar y ayudando a comprender la estructura que los hace semejantes. Ver el final de cada problema como el principio de otro hace que el planteamiento y resolución de problemas se convierta en un ciclo dinámico y constante en el que, a diferencia de planteamientos convencionales de ejercitación repetitiva, el producto final pierde importancia frente a la reflexión acerca de la argumentación sobre las estrategias que se utilizan para lograrlo (Karimi et al., 2019).

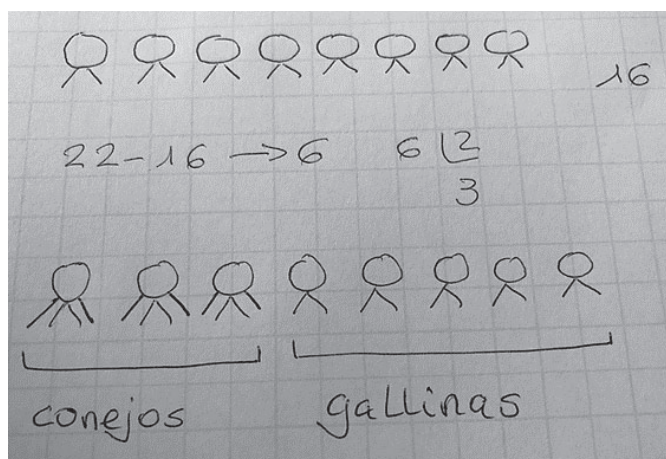
Vamos a mostrar un ejemplo de tarea formativa enfocada desde nuestra propuesta. A lo largo de la misma, el EPM analizará el papel que juega este proceso en la enseñanza, se inmiscuirá en sus propios procesos cognitivos para poder relacionarlos con los de sus futuros alumnos (como en la tarea anterior), analizará el papel que el planteamiento y resolución de problemas tiene en el currículo y su relación con las competencias matemáticas que se promueven, e incrementará sus habilidades de pensamiento crítico.

A través de la búsqueda de la estructura común a una familia de problemas resolubles por el heurístico «ensayo-error controlado», el objetivo general de la tarea es comprender el proceso que lleva de resolver a enunciar problemas. A partir de un enunciado genérico de uno de estos problemas, los EPM tendrán que realizar sucesivas transformaciones de este, haciendo variar los datos en primera instancia, y también los contextos en las siguientes. Este objetivo general implica la movilización de diferentes elementos de MTSK que se irán señalando.

La tarea comienza con un enunciado de un problema de un libro de texto de 4.º curso de Primaria («en una granja hay gallinas y conejos; he contado 8 cabezas y 22 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay?»), para cuya resolución no damos ninguna indicación limitante.

En primer lugar, abordaremos un debate de carácter curricular (KMLS) aprovechando que los EPM lo suelen resolver con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Les invitamos a pensar en una solución apropiada para Educación Primaria (KMLS, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado), tras de lo cual les mostramos una solución gráfica de un niño de 4.º curso (Figura 2), indicándoles lo que el niño explicaba verbalmente: «he puesto las 8 cabezas; a cada una le he puesto dos patas, pues todos tienen 2 o más; luego he contado las que me faltaban por poner y las he puesto de 2 en 2».

Figura 2. Representación de la solución realizada por un niño de 4.º de Educación Primaria.



Esta solución permite a los EPM reflexionar acerca de la validez matemática del proceso seguido (KPM, procesos asociados a la RP), que incluye cómo un simple cambio de registro de representación (KoT, registros de representación), nos conduce a una primera solución del problema. Esta situación muestra una línea que vincula el proceso de resolución de los EPM, usando un registro algebraico, con la solución del niño, usando un registro gráfico y simbólico-numérico, lo que permite poner de relieve ante los futuros maestros la transición entre ambos como un proceso de simplificación/complejización (KSM). Esto les da la oportunidad de reflexionar acerca de los diversos procesos que se pueden utilizar para resolver problemas, promoviendo la idea de flexibilidad matemática representacional (Heinze et al., 2009). La transición aludida parte del análisis de la solución del niño (KFLM, fortalezas y dificultades), que lleva a comprender que encierra el hecho de que se parte de una solución particular (8 gallinas) que resuelve una de las ecuaciones, y que luego se ajusta con una simple transformación para que cumpla la otra⁴ (KoT, procedimientos). Para consolidar esta idea, se les pide que cambien al registro exclusivamente simbólico-numérico (KoT, registros de representación) para que hagan lo mismo con otro par de valores que cumplan la primera ecuación de forma que analicen cómo se comportan y cómo se hará entonces el ajuste antes mencionado (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Tras el análisis de esta relación, pre algebraica-algebraica, se inicia el proceso que pasa de resolver a plantear problemas. Se pide a los EPM que enuncien otros problemas con diferentes características: a) manteniendo solo los datos (enuncia un problema similar en el que intervengan los números 8 y 22), b) variando solo los datos y manteniendo el contexto, o c) con un contexto similar (ruedas de coches y motocicletas, por ejemplo). En el caso de a) contribuiremos a poner en juego su KPM, respecto a la RP,

⁴ Se trata de un procedimiento aritmético muy similar al de “falsa posición”, ya usado por los egipcios, que permite resolver ecuaciones lineales. Para ello se parte de un valor cualquiera (método simple) o de dos valores (doble falsa posición). A partir de estas falsas posiciones se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad.

y su KoT, respecto a los registros de representación, y a la conexión de ambos con su KFLM y su KMLS. En el caso de b) y c), se avanzará en comprender qué elementos en un enunciado son independientes (puedo decidir libremente el total de animales y su distribución), y cuáles son dependientes (lo anterior lleva un valor unívoco para las patas) (KPM, procesos asociados a la RP).

A continuación, se les pedirán sucesivas transformaciones de datos y contextos que modifiquen la relación 2/4 de los problemas anteriores, incluso utilizando números enteros (enunciado relativo a prueba tipo test donde las preguntas acertadas cuenta 3 puntos y las erróneas restan 1, por ejemplo), hasta llegar a la estructura común de todos ellos (KPM, procesos asociados a la RP), pues se trata, en todos los casos, de un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas con coeficientes enteros del tipo

$$\begin{aligned}x + y &= a & a, b, m, n \in \mathbb{Z} \\ mx + ny &= b\end{aligned}$$

Este proceso de resolución de problemas usando heurísticos apropiados para la Educación Primaria, para pasar después a las sucesivas transformaciones del enunciado, ayuda también a comprender el fundamento de los heurísticos (KoT, procedimientos) y dota a los EPM de herramientas para seguir profundizando en las dificultades que pueden tener los estudiantes de Primaria en su papel de plantear y resolver problemas (KFLM, fortalezas y dificultades) y en la forma de trabajar para ayudarles a superarlas (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) a través de la elección adecuada dentro de una gama de posibilidades de ejemplos de enunciados.

Las dos tareas presentadas son solo dos ejemplos de tareas formativas que solemos trabajar utilizando MTSK como estructurador. Otras, como las que incorporan el uso de la historia de las matemáticas o la elaboración de portfolios reflexivos, también pueden ser estructuradas desde este modelo analítico manteniendo una organización coherente del conocimiento especializado a construir, a la vez que conservan el espíritu de la formación desde la práctica profesional atendiendo a los estándares curriculares.

REFERENCIAS

- Barrera-Castarnado, V.J. y Liñán-García, M.M. (2021). El conocimiento especializado en Matemáticas en las tareas formativas para la formación inicial de profesores de Educación Primaria. En J. M. Romero, M. Ramos, C. R. y J. M. Sola. (Eds.), *Escenarios educativos investigadores: hacia una educación sostenible* (pp. 934–946). Dykinson.
- Boyd, D.J., Grossman, P.L., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 31(4), 416–440. <https://doi.org/10.3102/0162373709353129>
- Carrillo J. y Climent N. (2009). From Professional Tasks in Collaborative Environments to Educational Tasks in Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm, R. y Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. Mathematics Teacher Education* (Vol. 4, pp. 215-234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15

- Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Branco, N. (2012). Prácticas profesionales de los profesores de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 65–86. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.5>
- Fernández C. (2019). Aprendizaje del profesor: Desarrollo de competencias. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 215-217). Ediciones Universidad Salamanca.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 535-540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hill, H.C., Lynch, K., Gonzalez, K.E. y Pollard, C. (2020). Professional development that improves STEM outcomes. *Phi Delta Kappan*, 101(5), 50-56. <https://doi.org/10.1177/0031721720903829>
- Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202. <http://www.jstor.org/stable/20720130>.
- Karimi, S., Shahvarani, A. y Haghverdi, M. (2019). The role of problem-based Mathematics teaching according to the Kirkpatrick's Model on problem-solving performance of mathematics teachers. *Journal for Educators, Teachers and Trainers*, 10, 12-26. https://jett.labosfor.com/pdf_890_4a86f699e85cb6d320de9964f60dd3c2.html
- Lampert, M., Franke, M.L., Kazemi, E., Ghouseini, H., Turrou, A. C., Beasley, H., Cunard, A. y Crowe, K. (2013). Keeping It Complex: Using Rehearsals to Support Novice Teacher Learning of Ambitious Teaching. *Journal of Teacher Education*, 64(3), 226-243. <https://doi.org/10.1177/0022487112473837>
- Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 341-361. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w>
- Lewis, C. C., Perry, R.R., Friedkin, S. y Roth, J. R. (2012). Improving Teaching Does Improve Teachers: Evidence from Lesson Study. *Journal of Teacher Education*, 63(5), 368-375. <https://doi.org/10.1177/0022487112446633>
- Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 3(3), 354-364. <https://doi.org/10.2304/ciec.2002.3.3.4>
- Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83-98. http://www.educationforatoz.com/images/_6_Fenqjen_Luo_Final.pdf

- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Major, L. y Watson, S. (2018). Using video to support in-service teacher professional development: the state of the field, limitations and possibilities. *Technology, Pedagogy and Education*, 27(1), 49–68. <https://doi.org/10.1080/1475939X.2017.1361469>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M, informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Madrid: MECD-IEA. <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/teds-m-estudio-internacional-sobre-la-formacion-inicial-en-matematicas-de-los-maestros-informe-espanol/matematicas-profesores/15408>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157-176). Ediciones Universidad Salamanca.
- Mullis, I., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, G. Y., Arora, A., y Erberber, E. (2005) *TIMSS 2007 Assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2005. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED494654.pdf>
- Muñoz-Catalán, M. C., Gavilán, J. M. y Liñán-García, M. M. (2017). La escritura como recurso para promover el conocimiento especializado del estudiante para maestro en matemáticas. En E. J. Gallardo-Saborido y F. Núñez-Román (Eds.), *Escribir en las disciplinas: intervenciones para desarrollar los géneros académicos y profesionales en la Educación Superior* (pp. 39-57). Síntesis.
- Nie, B., Freedman, T., Hwang, S., Wang, N., Moyer J.C. y Cai, J. (2013). An investigation of teachers' intentions and reflections about using Standards-based and traditional textbooks in the classroom. *ZDM Mathematics Education* 45, 699–711. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0493-7>
- Orden Ministerial ECI/3857/2007 de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 312, 53747-53750.
- https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2007-22449
- Parrish, S. D. (2010). *Number Talks: Helping Children Build Mental Math and Computations Strategies*. Math Solutions.
- Sánchez, V. y García, M. (2009). Task for Primary Student Teacher: A task of Mathematics Teacher Educators. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Task in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 37-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_4

- Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education*, 43, 133–145. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3>
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes* (pp. 3-13). Routledge.
- Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. y Leung, E. C. K. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–166). PME.
- Star, J. R., Lynch, K. y Perova, N. (2011). Using video to improve preservice mathematics teachers' abilities to attend to classroom features: A replication study. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes* (pp. 117–133). Routledge.
- Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408–426. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.11.004>
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133–142. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163>
- The National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston: NCTM.
- The National Council of Teachers of Mathematics (2020). *Standards for the Preparation of Middle Level Mathematics Teachers*. Reston: NCTM. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/NCTM_Middle_School_2020_Final.pdf
- Tichá, M. y Hošpesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in preservice teacher training. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the ERME 6* (pp. 1941-1950). INRP.
- Wæge, K. y Fauskanger, J. (2020). Teacher time outs in rehearsals: in-service teachers learning ambitious mathematics teaching practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09474-0>.