Mathematics Teachers' Specialized Knowledge to Promote Algebraic Thinking in Early Childhood Education as from a task of additive decomposition (*El conocimiento especializado del profesorado de matemáticas para fomentar el pensamiento algebraico en la educación infantil a partir de una tarea de descomposición aditiva*)

M. Cinta Muñoz-Catalán[a], Mónica Ramírez-García[b], Nuria Joglar-Prieto[c] and José Carrillo Yáñez[d]

[a]Universidad de Sevilla; [b]La Salle Centro Universitario; [c]Universidad Complutense de Madrid; [d]Universidad de Huelva

(Received 29 March 2018; accepted 16 January 2020)

ABSTRACT

In this article we aim to deepen our understanding of the content and nature of the early childhood teacher's knowledge, focusing on those aspects which might promote students' algebraic thinking. Approaching arithmetic from the viewpoint of algebra as an advanced perspective and considering the analytical model *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, we analyze the specialized knowledge in a classroom of 5-year-olds handled by an experienced teacher in a lesson on the decomposition of the number 6. Moreover, alternative management of the session is proposed in order to promote early algebraic thinking. In the domain of *mathematical knowledge*, this analysis has revealed the specificity of the knowledge that this professional must have of the natural number. In the domain of *pedagogical content knowledge*, it has highlighted the many elements of the *knowledge of mathematics teaching* that should be possessed to promote algebraic thinking at this educational stage. These elements appear to be more closely related to a profound knowledge of the mathematics taught than to pedagogical knowledge of a more general nature.

KEYWORDS

Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, Early Childhood Teacher, Early-Algebra, Number Decomposition, Numerical Relationships

RESUMEN

En este artículo tratamos de profundizar en nuestra comprensión sobre el contenido y naturaleza del conocimiento del profesor de Educación Infantil, centrándonos en aquellos aspectos que podrían fomentar el pensamiento algebraico de los alumnos. Enfocando la aritmética desde el punto de vista del álgebra como perspectiva avanzada y, considerando el modelo analítico *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (*Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, MTSK), analizamos el conocimiento especializado en una clase de alumnos de cinco años en la que una profesora con experiencia imparte una lección sobre la descomposición del número 6. Asimismo, se propone una gestión alternativa de la sesión para fomentar el pensamiento algebraico de los alumnos. En el dominio del *conocimiento matemático,* este análisis revela la especificidad del conocimiento que este profesional debe poseer sobre el número natural. En el dominio del *conocimiento didáctico del contenido,* se ha puesto de relieve la riqueza en elementos del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* que debería poseer para promover el pensamiento algebraico en esta etapa educativa. Estos elementos parecen estar más estrechamente relacionados con un conocimiento profundo de las matemáticas que se enseñan, que con el conocimiento pedagógico de naturaleza más general.

PALABRAS CLAVE

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, profesor de infantil, álgebra temprana, descomposición numérica, relaciones numéricas

Translation from English / *Traducción del inglés*: Mercè Rius
CONTACT M. Cinta Muñoz-Catalán, Departamento Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla. Calle Pirotecnia, s/n, 41013 Sevilla, España. Email address: mcmunozcatalan@us.es

Introduction, background and motivation of the study

Some authors have argued that a solid mastery of algebra is needed in order to advance academically (Adelman, 1999). In Spain, however, while arithmetic is introduced in early childhood and primary education, algebra is left until secondary, as it is thought that only then students will be capacitated to progress from concrete to formal operational thinking.

Learning arithmetic, however, does not consist only of memorizing numerical facts and algorithms for performing arithmetic operations, but rather of identifying properties and relationships which are implicit in the structure of arithmetic. The principles that govern the solution of equations in algebra coincide with the structural properties of numerical fields and operations. For this reason, an understanding of numbers, operations, and properties provide the foundation for the manipulation of algebraic expressions when solving equations.

In the early childhood classroom, it is frequent to find activities that deal with the additive decomposition of the natural number. These activities can be expanded to explicitly address properties of adding natural numbers, such as the commutative and associative properties or the identity element. The Early-Algebra movement promotes the development of algebraic thinking in the youngest learners through activities involving patterns, functions, and structures (Clements et al., 2013; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Attention to the professional development of the early childhood teachers is relatively recent, and so little is known about the exact nature of their knowledge. In this respect, in a review by Parks and Wager (2015) of articles published over the last 20 years in the four most relevant journals dealing with this educational stage, it was shown that in the two most specific to this area (*Journal of Research in Mathematics Education* and *Journal of Mathematics Teacher Education)*, there was in general very little attention paid to the early childhood stage and, more specifically, to research on the mathematics teachers training at this educational level. Indeed, there are hardly any studies focusing on the content of their training, much less in algebra, and so there is not even a consensus on the specificity of the mathematical knowledge that must be learnt in order to teach this subject.

In this article, we focus on those aspects which may foster students' algebraic thinking in order to improve the understanding of the early childhood teacher knowledge through reflection on classroom observations. We have therefore adopted in this proposal the conceptualization of teacher knowledge considered in the analytical model *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018). To understand the specialized knowledge needed for the teaching of arithmetic from an algebraic perspective, we analyze the practices of an experienced teacher, Irene, as she presents the decomposition of the number 6 to a class of 5-year-olds. Firstly, this analysis is carried out focusing on aspects of specialized knowledge mobilized by the teacher which can be considered a precursor of algebraic thinking. Then, this analysis will be complemented by examining the specialized knowledge which would support possible alternative management of the session in order to promote the development of students' algebraic thinking. Thus, the objective is to understand the specialized knowledge for the teaching of algebra, which emerges from Irene's class on additive decompositions of the number 6, as well as from an alternative management of the session that would have fostered algebraic thinking in her students.

We begin presenting the theoretical foundations upon which the study is based, organized around two principal focuses: the considerations of algebra in early childhood education; and the *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* model (MTSK). We then describe the research methodology and analyze the lesson according to the specialized knowledge used to encourage an intuitive identification of the relationships between summands in the decomposition of 6 and the properties of numerical operations. Finally, we present some conclusions.

Early-Algebra in early childhood education

We share the perspective of Jacobs et al. (2007) that algebraic reasoning should be woven into the mathematics curriculum, rather than conceived of as a specific content area to be taught. Carpenter et al. (2003) do not propose incorporating algebraic manipulative in the first years of schooling, but rather fostering a way of thinking during arithmetic work that will provide a solid foundation for later algebraic content. Algebraic reasoning encompasses generalization and the formalization of patterns, numerical regularities and relationships (as generalized arithmetic does), the syntactically guided manipulation of symbolism, the study of structures extracted from calculations and relationships, the study of functional relationships, and modeling (Jacobs et al., 2007; Kaput, 1998; Socas, 2011). Introducing tasks that include 'analyzing relationships among quantities, identifying structures, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting' (Kieran, 2004, p. 149) foments algebraic reasoning at early ages (Carpenter et al., 2003). In particular, these studies highlight the idea that symbolic reasoning should not be limited to reasoning with algebraic notation, but should include the use of natural language, tables, graphics and other systems of representation, adjusted to each stage. Such proposals have led to a consolidation of the Early-Algebra movement within the field of mathematics education research.

But how can algebraic reasoning be dealt with in early childhood education? Although algebra would seem to be a subject to introduce at more advanced ages, work is done in early childhood and primary education with patterns, regularities, relationships, and representations that constitute a foundation for the notion of algebraic structure. In their curriculum recommendations, Clements et al. (2013) suggest including a block of content related to beginning algebra called 'patterns and structures', in which they aim to give importance to understanding mathematical structures. The recommendation by the NCTM (2000) that algebra should be introduced in early childhood has led researchers to consider what tasks might be used to begin working with such content at this stage. In particular, tasks that involve constructing functional relationships and regularities are considered a vehicle for establishing generalizations and relationships among varying quantities and identifying patterns, both in early primary courses (Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2000; Morales et al., 2017) and in early childhood education (Castro et al., 2017; Rittle-Johnson et al., 2015).

Our focus here is on the application of algebraic development in early childhood education. It is oriented toward an intuitive identification of numerical relationships and the fundamental properties of whole number addition, through tasks based on the additive decomposition of natural numbers.

In curriculum recommendations such as those of the NCTM (2000) and the *Common Core State Standards for Mathematics* (Common Core State Standards Initiative, 2010), it is proposed that children analyze and represent mathematical structures, as well as illustrate the properties and general principles of operations. For these reasons, the recommendations include using objects, drawings, and symbols to represent the decompositions of numbers less than or equal to 10 into two summands in a variety of ways, thus highlighting the idea of equality.

One widely researched difficulty in the context of arithmetic teaching-learning is the interpretation of the equal sign as operator, for its being normally presented as giving the result of an arithmetic operation. Carpenter et al. (2003) refer to relational thinking in the context of numerical equalities, relating it to the meaning of the equal sign as one of numerical equivalence. In this case, the student uses relational thinking to solve a numerical equation when he obtains the answer to it, establishing relationships between the numbers and expressions on both sides of the equal sign without the need to perform the operations expressed. For example, the solution of the equation $8+5=?+4$ implies a relational meaning of the equal sign involving properties such as additive compensation, $8+5=(8+1)+(5-1)$ (Molina et al., 2006). Primary education textbooks usually present standard equalities of the $a+b=c$ type, which favor an operational meaning (Ramírez & Rodríguez, 2011). Research has provided evidence that the use of non-standard equalities like $a=b+c$, $a+b=c+d$ or $a=a$ favor a relational interpretation of the equal sign and an understanding of the properties of addition and subtraction, such as: the commutative property of addition; compensation in both addition, $a+b=(a+c)+(b-c)$, and subtraction, $a-b=(a+c)-(b+c)$ or $a-b=(a-c)-(b-c)$; the associative property, through the decomposition of one of its summands; and the identity element (Molina et al, 2006). Along the same lines, Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, and McEldoon (2011) distinguish four levels of knowledge of equivalence which depend on the students' success in solving or identifying equivalence in different kinds of equations. Level 1 ("rigid operational") refers only solving equations with operations on the left and results on the right of the equal sign; Level 2 ("flexible operational") concerns when the student solves equations without operations in any member or with the operation to the right and the result to the left ; Level 3 ("basic relational") includes when the student uses equations containing operations on both sides of the equal sign; and Level 4 ("comparative relational") comprises when the student also uses compensation and other properties of the sum mentioned above to compare the two members of the equation without the need for making the calculations.

Theoretical background: professional knowledge with respect to the teaching of mathematics

Our understanding of the contents of the teacher's knowledge derives from the contribution of Shulman (1986), who drew attention to the specificity of professional knowledge in relation to the subject to be taught. He made a distinction between *content knowledge* (SMK) and *pedagogical content knowledge* (PCK). Many models of knowledge have emerged after that of Shulman, each of which stresses different aspects. In the case of mathematics, Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames, & Phelps, 2008) should be highlighted. From the starting point of Shulman's contribution (1986), MKT specifies the two domains in three sub-domains each. One of the most important contributions of the model is the recognition of a teacher-specific type of knowledge, which is not required for other professions. It does however have certain limitations as we indicated in Carrillo et al. (2018). In the first place, Common Content Knowledge is defined by taking as a reference the knowledge of well-educated adults, which is beyond the scope of the teacher's task. Secondly, the sub-domains tend to overlap, which has also been found by other researchers such as Silverman and Thompson (2008). Thirdly, "the object of analysis in this model is not the mathematical knowledge *used* by teachers… but rather the assessment of the mathematical knowledge *needed* to do so… Hence, the MKT model… focus their attention on practice as carried out in class, ignoring the knowledge that teachers might bring into play when carrying out any other kind of activity as a teacher" (Carrillo et al., 2018, p. 3).

As far as the early childhood teacher is concerned, many studies have encountered difficulties in the application of MKT in this stage. Mosvold et al. (2011) concluded that MKT is conditioned by the American context in which it arises and that it does not appear to be suitable for application to teachers from countries in which the kindergarten stage is part of a tradition of social pedagogy such as Norway. In these cases, it is necessary to redefine the work of the mathematics teacher, as tasks such as "presenting mathematical ideas" and "finding an example to make a specific mathematical point" made no sense in the Norwegian context, while other tasks emerged such as "facilitating and using activities and play" (p. 1810).

These limitations, together with our consideration that the specificity of the teacher's knowledge in relation to mathematics teaching is not limited to a single sub-domain but affects both SMK and PCK (Scheiner et al., 2019), led us to develop a conceptualization of the knowledge of mathematics teachers which we present in the following section.

The MTSK model with respect to early childhood teacher

At the early childhood stage, we cannot speak of the mathematics teacher as such. In Spain, mathematical content at this age is interwoven into three curriculum areas and is designed to contribute to the student's own self-awareness and personal autonomy, to the knowledge of their environment, and to the development of language from the perspective of communication and representation. It is for this reason that early childhood teachers, perhaps more than teachers at other educational stages, need to possess knowledge which allows mathematical learning to be encouraged in their students while linking such elements of knowledge to situations in which these are associated with other areas of knowledge and related to the experiences and interests of children at this age. This imposes a still greater demand on these professionals, who must rigorously identify the foundations of mathematics, stimulate a deep learning of these and recast them in a playful and functional way.

Although general pedagogical aspects play an important role in the knowledge of these professionals, we consider that the abstract nature of mathematics confers a specificity to the processes of teaching and learning mathematics at this stage. At the same time, this knowledge is specialized in the sense that it implies a certain way of knowing mathematics for teaching it to these specific learners which differs from that of primary or secondary school teachers (Muñoz-Catalán et al., 2017). We have thus decided to adopt the analytical model *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018), which leads us also to accept its conceptualization of this knowledge as being that which teachers need and use, that which is available to them and therefore underpins their actions.

The MTSK model distinguishes 6 sub-domains of knowledge, divided, according to the distinction posed by Shulman, between *Mathematical Knowledge* (MK) and *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Figure 1). It also includes the domain of *Beliefs* but will not be addressed in this study (Figure 1). We describe the sub-domains in accordance with the categories defining them. For further details on these categories see Carrillo et al. (2018), and to go more deeply into how to apply the model consult Carrillo et al. (2017).

Insert Figure 1 here

Mathematical Knowledge

The domain of mathematics includes knowledge of the discipline of mathematics itself, considered as a *profound understanding of fundamental mathematics* (Ma, 1999). It is divided into three sub-domains:

Knowledge of Topics (KoT) is understood as disciplinary knowledge, including procedures (from the 'how it is done' to the 'when it can be done' to the 'why'), definitions, properties and fundamentals, the phenomenology and applications of a concept, and the various registers of representation. This sub-domain considers intra-conceptual connections: relationships between the concepts or processes of a single subject. *KoT* elements would be, for example, knowing: the relationships established between summands when all the additive decompositions of the number are generated; or the registers that may be used to represent the decomposition of the number.

Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) is focused essentially on knowing the connections that enable an overall vision of mathematical knowledge. Three types have been identified; two of them (*Auxiliary and Transversal connections*) have still to be explored at this educational stage. The third type of connections that we consider should indeed define their knowledge, it is that *based on simplification or on increased complexity*, which allows elementary concepts to be understood and developed from an advanced perspective and advanced concepts from an elementary perspective. The importance of this type of connection becomes clear when we consider the introduction of algebra at the early childhood stage. Knowledge of such connections prevents the appearance of didactic obstacles and builds a solid base for future mathematical learning. Knowing that the way in which certain arithmetic concepts (such as numerical decomposition) are handled can stimulate aspects of algebraic reasoning (such as the identification of patterns and properties) has repercussions in how these are presented in the classroom and gives to the arithmetic being taught a focus of potentiality.

Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) is knowing the characteristic procedures of mathematical work, which include aspects of mathematical communication, argumentation, and proof that come into play when performing a mathematical practice such as problem solving, defining or proving, establishing an axiom, in the rigorous use of language and symbols, in knowing the conditions which are necessary and sufficient for making valid affirmations, and other practices of mathematical know-how such as modeling. Examples of this sub-domain include knowing whether the comparison of results is a valid mathematical process for identifying numerical relationships and properties.

Pedagogical Content Knowledge

Describes the knowledge that is typical by itself of the teaching and learning of mathematical content. The description of its three sub-domains follows.

Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) integrates knowledge of: (a) personal or formal theories of teaching associated with mathematical content; (b) limitations and potentialities of the physical or virtual manipulatives for teaching; (c) and strategies, techniques, tasks, and examples that are useful for teaching mathematics. Examples of knowledge in this sub-domain include: awareness of the potential of Numicon® (Atkinson, Campling, & Wing, 2015) for teaching numerical decomposition in its cardinal facet; converting different registers of representation to enhance the understanding of a given concept; or using verbal language to reinforce the relevant aspects of a problem which lead to its solution.

Knowledge of the Features of Learning Mathematics (KFLM) refers to knowing how students assimilate that content which arises from the very nature of mathematical concepts. It includes the knowledge of personal or formal theories of learning associated with both general mathematics and more specific content. Together with this is the knowledge of: (a) the strengths and difficulties associated with the learning of a given content, (b) the ways that students interact with this, and (c) the interests and expectations that students have about mathematics. An example of this sub-domain is the knowledge that early childhood learners require real and relevant situations which give meaning to the manipulation of objects, or the fact that they are not capable of understanding mathematical messages without visual support.

Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) includes knowledge of the official curriculum used in each country at a given time and of the standards defined by research groups or professional associations that deal with the teaching and learning of mathematics. This type of normative knowledge includes that of the expected level of conceptual and procedural development, as well as the sequencing of earlier or later topics. Thus, for example, knowing that the decomposition of 6 can be dealt with in the final course of early childhood education, knowing what properties of operations may be understood at this stage, and knowing that decomposition can be approached from a perspective of algebraic reasoning are all elements of this sub-domain.

Research methodology

This study has the general aim of understanding the nature of the early childhood teacher's knowledge with respect to the teaching of mathematics. We do so through practice, focusing on *numbers and operations*, an area of great importance at this educational stage (Clement, 2004) and an ideal setting in which to promote the development of early algebraic reasoning.

In Spain, it is rare to find professionals who teach arithmetic from this perspective, as attention to algebra in early childhood education is relatively recent and has barely been addressed by research in this area (Clements & Sarama, 2014). Moreover, attention to mathematics in pre-service and in-service education at this stage is scarce, usually focusing on arithmetic, and games and manipulatives without attention to specific contents. Moreover, the official curriculum of this stage in Spain is very extensive and contains no explicit guidance on how to promote algebraic thinking.

As we have mentioned above, we analyze the specialized knowledge in a classroom of 5-year-olds handled by an experienced teacher, Irene, in a lesson on additive decompositions. Irene was a teacher with more than 25 years of experience, interested in improving her practice in relation to mathematics. She designed this task and its implementation before beginning to participate in a collaborative context of professional development with other teachers and teacher educators. Her class responded to a thoughtful design with a clear objective: helping students to advance from the concrete level to the abstract based on the student's experience and using the Numicon®, which allows a discrete approach to natural numbers.

Although for Irene the focus of the task was on arithmetic content, aspects of her implementation promoted algebraic thinking; but, in addition, as the lesson progressed situations arose which would have been conducive to encouraging deeper algebraic thinking in the students. Combining our general objective of understanding the specialised knowledge desirable for teaching algebra in early childhood with the opportunity of attending Irene’s class, we set out to understand as a research objective the specialised knowledge for the teaching of algebra that emerged from her class and that upon which an alternative handling of Irene's lesson on the decomposition of the number 6 could have been built.

We approached this objective by adopting a posture close to that of the interpretative paradigm (Bassey, 1999), aware of the unique role that we as researchers were playing. Observing Irene's actions, we identify the aspects of her mobilized specialised knowledge and in parallel we reflect on the specialised knowledge needed for an alternative management of the lesson. This perspective positions us as intermediaries who establish a dialogical relationship between theoretical proposals and the realities of the early childhood classroom. This dialogue was driven by our *theoretical sensitivity* (Strauss & Corbin, 1994): our own knowledge and experience, drawn from our research work and from our role as teacher trainers. The specialised knowledge desirable for an alternative handling of the class was given the title *Specialised Knowledge Evoked in the Researcher by the Opportunities*, consistent with Liñán (2017).

The lesson under study lasted 30 minutes and was videorecorded. Analysis was done from a transcription of the lesson and began with an identification of episodes relevant to our research objective, after Schoenfeld (2000). We then applied an *interpretative approach* (Kvale, 1996) in which we identified fragments of the lesson whose recontextualization in the light of our conceptual framework enabled us to explain and justify the knowledge that supports the teacher's actions (those directly related with the implementation of the mathematical task, involving interaction with students). During the next stage of the analysis we use a methodological element that seemed especially powerful to us, that of *opportunities*, understood as being those moments or situations that arise in the classroom, and as a result of the teacher's actions, which allow the researcher to reflect on the specialised knowledge that would have supported an alternative management of these same situations and oriented them toward the development of algebraic reasoning. In this manner we obtained the *Specialised Knowledge Evoked in the Researcher by the Opportunities*. The *triangulation of experts*, drawing upon the variety of experience and training of the authors, became an important methodological tool for validating the research (Denzin, 1989).

Description of the lesson: 'The Bear Family Game'. The decomposition of the number 6

In this section we outline the lesson taught by Irene that begins with the students altogether. She proposes a familiar activity changing the representation mode of the house. Se had proposed the children two years earlier (when they were 3), a task about a doll house (see Figure 2a) where the children played with toy bears, placing them in different rooms. On the current occasion, the children are presented, on a large laminated board (Figure 2) with an iconic-graphic representation of this same dollhouse with a specific distribution of rooms arranged by the teacher (living room, kitchen, washroom, and bedroom). She takes out six bears, which comprise a family, and these are then moved around the house according to a story that she narrates. The teacher first introduces the members of the family as she places each of the bears in the living room. She then moves the grandfather bear to the washroom and poses the following questions: '*How many bears are there now in the living room? And in the washroom? How many were in the living room before the grandfather went to the washroom? How many are there now in the bedroom? And in the kitchen?*'

Insert Figure 2 here

After this, the teacher continues the story by moving members of the family from one room to another, demonstrating other decompositions of six and asking the students the following questions (order maintained):

'The little boy goes into the washroom with the grandfather (decomposition 4+2). *How many are there now in the living room?* (4) *How many are there now in the washroom?* (2) *And all together how many are there in the house? Still six, right?*

Then the little girl goes into the washroom (3+3). *How many are there in the kitchen?* (0) *And in the bedroom?* (0) *How many are there in the living room?* (3) *How many are there in the washroom?* (3)

The grandmother goes into the washroom (2+4). *How many are there in the washroom?* (4) *How many in the living room*? (2)

The father goes into the kitchen (1+1+4). *How many are there in the washroom?* (4) *How many in the living room?* (1) *How many are there in the kitchen?* (1).

Finally, all the bears are in their beds (1+1+1+1+1+1). *How many are there in the kitchen?* (0) *In the washroom*? (0) *In the living room?* (0) *And in the bedroom* (6). *But each one in his own bed.'*

Parallel to this, the teacher uses Numicon® shapes to represent the first six numbers, which they have worked with before. Irene asks the students to use this manipulative to represent the situation that appears at that moment in the house, and then the students check their answer by superimposing the shapes they have chosen on the 6-shape (Figure 2b). In the following ten minutes, the teacher goes on varying the placement of the figures in the house and asking the same questions, as well as incorporating new questions so that the students compare each situation with the one before and see that there is always a total of six bears in the house, independently of how they are distributed. After that, the students go to their table, where individually complete a worksheet on which they must draw one of the decompositions on a representation of the house, indicating symbolically how many bears are in each room. The rooms themselves were designated by symbols (a television for the living room, a toothbrush for the washroom and so on). Finally, there appears an equality in the symbolic-numerical register in which the expression to the left of the equal sign must be completed with the four summands corresponding to the decomposition drawn and in which the expression to the right is the total. In order to illustrate this part of the activity, Figure 3 is included to show a student's work. On the left-hand side a child draws a house with 5 bears in the living room. On the right-hand side she gives the names of each of the rooms alongside the icons that the teacher has included on the worksheet, and with the numerical symbols indicates that there are 0 bears in the bedroom, 0 in the kitchen, 0 in the washroom, and 5 in the living room.

Insert Figure 3 here

Specialised knowledge for promoting algebraic thinking

In the first place we analyze the specialized knowledge elements mobilized by Irene which support the encouragement of early algebraic thinking. Of all the specialized arithmetic knowledge elements mobilized, we only highlight those that can promote algebraic thinking among the students. Secondly, after indicating the opportunities which arise to promote this reasoning, we describe a possible alternative management of these opportunities, identifying elements of *Specialized Knowledge Evoked in the Researcher by the Opportunities* which could support this alternative management. We organize the analysis by following the components with which Jacobs et al. (2007) and Kaput (1998) characterize algebraic thinking synthesizing it in Table 1.

Insert Table 1 here

Specialized knowledge mobilized by Irene

The lesson begins with the students working on a board representing the 4-room house with the number 6 on its roof (see Figure 2), and another board to the left of this for the students to represent the distribution of bears in the house with Numicon® shapes (see Figure 5). Irene narrates a story about a family of bears who move around the representation of the house (register of representation, KoT), a relevant context for involving the students in the activity and one which gives meaning to the decomposition of the number (phenomenology, KoT, and strategy, KMT), while at the same time she knows that this is a situation which her students can grasp as it has been presented in earlier courses with smaller numbers (learning expectations and sequencing with earlier topics, KMLS).

Irene begins by assembling the family; naming each member and associating each bear to its material representation. It seems that she is aware of the need to devote time to creating the set and encouraging the students to conceive of it as such (property, KoT) before going on to identify its characteristics.

She poses problems of combination (definitions and properties, KoT) which describe a static relationship between two disjointed subsets, also called *parts*, which together form the total set or *whole*. The *part-whole* relationship is one of the most important elements of knowledge for understanding the number, the operations, and their properties as from the recognition of structures extracted from numerical relationships and patterns (Clements & Sarama, 2014; Jacobs et al., 2007). However, in the situation used by Irene, the generation of parts is done in a dynamic way. As Fuson (1992) said, until children have acquired the *part-whole* concept of the number, the composition of the parts into the whole or the decomposition of the whole into parts must be presented dynamically. Irene appears to be aware of this (ways of interacting with content, KFLM), as is reflected in the story she tells (resources, KMT). The questions she poses to the students when she moves a bear to a particular room reflect her knowledge of the relevant characteristics of this type of problem (properties, KoT), which compels her to be very precise in the type of questions that she asks and in the vocabulary and speaking time she uses for the task (registers of representation, KoT; language as a teaching resource, KMT): “How many bears are there now in the living room? (part) And in the washroom? (part) How many were there in the living room before the grandfather went into the washroom?” (whole).

Irene repeats the activity systematically with different additive decompositions (see Figure 4), which allows the promotion of the recognition of numerical patterns or regularities (strategies, KMT).

Insert Figure 4 here

In a decomposition subsequently presented, two bears remain in the living room and four in the washroom. The child takes the pieces of number four and number two, which are the same as those used in that of number two and number four, and before the child superimposes them on that of number 6, Irene says: ‘*Is there also any there that says four and two?*’. The child superimposes the shapes in the same decomposition that there was of number two and number four and the teacher says: ‘*They are the same, right? If it's already there, it's the same. You don't have to put it there because it's already there, isn't it?*’ It shows that Irene knows the commutative property of the sum (properties, KoT) and decides not to approach it *(opportunity),* possibly basing herself on her knowledge of learning expectations (KMLS), and even decides to begin the decomposition with 3 summands for the first time.

On the other hand, Irene asks her students to represent with Numicon® each situation constructed on the laminated board. She is aware of the potential of the manipulative (resources, KMT) to represent the cardinal of a set and for the composition and decomposition of numbers. Moreover, she combines in parallel different representations of the same numerical decomposition, again systematically, facilitating conversions in both directions between two representations (the manipulative with the laminated board and the bears, and the manipulative with Numicon®) by means of precise use of language, attaching great importance to visual support (strategies, KMT). She converts the actions that she carries out on objects into a system of representation step by step in the other, basing herself on verbal and body language. The representation of the situation of the decomposition with the Numicon® shapes (of the grid type) is very important to help all the children to detect patterns visually. Previous studies have shown the importance of working explicitly on the connections between different representations of the same mathematical object, in this case of a numerical relationship, transferring this relationship from one representation to another.

Irene promotes the use of *subitization* as a favorable strategy in the count involved in the decomposition and composition of the number 6 (procedures, KoT; resources and strategy, KMT). She is also aware that the students are already accustomed to this manipulative and that they need to visualize mathematical objects (ways of interacting with the content, KFLM) (Figure 5).

Insert Figure 5 here

In the session described Irene decides to make available to the students only the pieces with from 1 to 6 holes. She says beforehand: '*Well, I'm going to take out the one with 6 holes, the one we forgot about*'; she places the shape with 6 holes on the left-hand laminated board and gives another identical one to the student saying: '*And this one to check*'. At this point her language becomes disconnected from the nature of the objects manipulated (losing the context of the bear family) and she refers to them by using numbers such as cardinals of the subsets, which is in keeping with the promotion of algebraic thinking. By means of her language, she introduces a new representation of the additive decomposition in question (the natural language register), advancing towards the progressive symbolization and formalization of mathematical knowledge (role of symbols and the use of formal language, KPM). Once again she connects different components of each representation present at that stage of the episode, passing carefully from less abstract representations, with a stronger connection to the initial context of the dollhouse activity, to more abstract representations such as numerical symbols (initially in the register of oral language and in writing at the end of the session) (registers of representation, KoT; resources, KMT; learning theories, KFLM).

The use of different systems of representation throughout the episode allows the students to work on mathematical contents by means of a direct modeling process (Carpenter et al., 2003) (phenomenology, KoT), which is an essential component of algebraic thinking.

When Irene gives the students the 6-shape to check their result, she is in fact, checking the decomposition with these dotted shapes as a way of validating the answer (forms of validation, KPM). Once the student has checked the answer, he places the composition made with the 5- and 1-shapes next to the 6-shape, which was placed earlier by the teacher. The decomposition of four and two proceeds in the same way. In this way Irene intends to help her students to find a general rule: '*It doesn't matter how the bears are placed in the house, there are always six of them*'. This is again an important aspect in the study of structures abstracted from calculations and relationships. In order to do so she asks them to check it and she shows them how to do this with the manipulative (resources, KMT). The practice of checking appears as a way of validating a response, which could be related to the form of reasoning (KPM).

The set is then reconstituted as six bears in the living room, in order to be decomposed into 6 times 1, reinforced by the narrative element that each bear goes to the bedroom to sleep in its own bed. For Irene, the decomposition of numbers with 1 as iterative unit, the basis for determining the cardinal of a set (procedures, KoT), is vitally important, as it is the constitution of the set itself (properties, KoT). In this way, she can reconstruct the number 6, reinforcing the idea that the sum of the *parts* forms the *whole* (properties, KoT). Again, these are core aspects for promoting the development of structural thinking among her students.

In the second part of the lesson, when the children solve the problems posed by the teacher, they have to create a decomposition of the number given in four summands and represent it in two different registers of representation (iconic-graphic and symbolic-numerical) (Figure 3) (registers of representation, KoT; strategies, KMT). This fact highlights her knowledge of the meaning of the equal sign in connection with the operational interpretation of the sign (properties, KoT); the children's work is at Level 1, the rigid operational level, according to Rittle-Johnson et al. (2011). Throughout the session, in all systems of representation Irene strengthens this same operational sense of the work with numerical equivalence.

Possible alternative management of the session to promote algebraic reasoning and specialized knowledge evoked in the researcher

Subsequently aspects of possible alternative management of the episodes previously highlighted to promote algebraic thought among students are discussed in greater depth. The suggestions could be spread over several sessions depending on the teacher's specific objective at each moment so as to help her students to develop specific algebraic reasoning skills.

In relation to the importance of systematization in order to promote recognition of numerical patterns or regularities and the search for generalizations, the teacher may complete the decompositions until the first summand is zero and at the same time have the students reflect on what occurs in each summand and in total (Figure 4). By means of the study of these patterns it is possible to introduce more complex structures relating to the number, the operations, and their properties, beginning to develop in the students key algebraic reasoning skills in the processes of the solving of algebraic equations to which they will be have to be exposed in the future (connection based on increased complexity, KSM). Among them we highlighted the compensative property of the sum and the relational interpretation of the equal sign. From action, the teacher generated each decomposition by removing a bear from the living room and adding it to the washroom in an orderly and successive manner (*opportunity*). Alternative managment could have led to concentrate attention on the pattern attracted by each decomposition and on the relation between the two summands. This management would have been based on knowledge of the compensative property of the sum (properties, KoT), including the use of this property to generate the decompositions (procedures, KoT) and would have allowed the ensuring of the construction of all possible decompositions of 6 (form of validation, KPM) (Figure 4). In addition to promoting the recognition of numerical regularities, at this point owing to its importance at this stage the start of the symbolic designation (learning expectations, KMLS) could have begun to work openly on the syntactically guided manipulating of symbols, introducing the symbolic register of representation (the role of the symbols, KPM) so as to record step by step the transformations of the situation (including the equal sign as a symbol to establish the relationship between numerically equivalent expresions reinforcing its relational interpretation; definitions and properties, KoT). She could have done so for example on the blackboard with expressions of the following type: 6+0=5+1, 5+1=4+2, 4+2=3+3, 3+3=2+4, 2+4=1+5, and 1+5=0+6. In this way she would emphasize at the same time, by means of language, the comparison of these numerical equivalences represented with the Numicon® shapes (strategies, KMT). This would allow the making of the checks with the remaining decompositions one by one or by superimposing all the shapes (Figure 6).

Insert Figure 6 here

The work proposed concerning the property of the compensation of the sum and numerical equivalence in the previous paragraph occurs by means of the mathematical process of comparison in order to search for relationships. This allows the initial introduction of the students to Level 4, the relational comparative level, according to Rittle-Johnson et al. (2011) (form of epistemological genesis, KPM).

At one point during the session Irene introduces the concept of zero as the absence of quantity (concept, KoT), and asks: ‘*How many little bears are there now in the bedroom? And in the kitchen?*’ (*opportunity*). Alternative management in which the number of bears in the house is counted with the empty rooms also taken into consideration would have had the students experiment (here and during the session in a systematic manner) that when 0 is added to a natural number the result does not vary. Thus, it would have been possible to establish intuitively the basis of the property of the identity element of the sum (properties, KoT) based on the extension of an arithmetic property by means of a generalization process (connection based on increased complexity, KSM). We would like to point out here that Irene takes this aspect into account in the designing of the worksheet which she provides at the end of the session (Figure 3) (*opportunity*). In order to help her students to recognize this property, she could have asked questions of the type '*What happens with the rooms in which there are no bears? Do we need to notice the empty rooms to know how many bears there are in the house in total? If we know that there are six bears in the house in total and that five are in the living room and one in the washroom, can there be any in the kitchen?*' (strategies, KMT).

As far as an initial work on the commutative property from an algebraic approach is concerned, an attempt could be made to have the students discover the equivalence between two decompositions of the a+b=b+a type. When decomposition 2 (living room) and 4 (washroom) arises, the way in which she asks how many there are in each room is inverted (*'How many are there in the washroom?* (4) *How many in the living room?'* (2)), equalling it to 4 and 2 (*opportunity*).

Knowledge that the sum is not semantically commutative (phenomenology and properties, KoT); the use of a representation spatially opposed to the present of 4 and 2 with the Numicon® shapes (resources, KMT); and the importance of order when asking the students (beginning with the living room and continuing with the washroom) (strategies, KMT) could help them to reflect on the equivalence of both representations from the perspective of the result, which is the basis of the commutative property.

Finally, and although we consider that this is outside the scope of the mathematical contents to work on in early childhood education, we wish to include a final comment on the associative property of the sum of natural numbers as one more example of the study of structures and systems abstracted from calculations and relations. The last decomposition which Irene puts forward to act in the same way on the manipulatives is 1+1+4 (*opportunity*). An approach to this specific activity from an algebraic point of view would have allowed her to propose to her students a situation in which they can observe that $1+1+4=(1+1)+4=2+4=1+(1+4)=1+5$, the basis of the associative property of the sum of natural numbers and an expression in which compensative property is also reflected (properties, KoT).

Conclusions

Irene' characteristics and her lesson implementation have enabled us to identify some elements of the specialised knowledge needed by the early childhood teacher to promote algebraic reasoning in students through establishing relationships of additive structure. Irene's own objective was not to promote algebraic reasoning but rather to present decomposition as a important content for a class of 5-year-olds (KMLS). However, there are elements of mobilized knowledge in her practice that have proven to be relevant for promoting algebraic reasoning. In the domain of MK, the knowledge of the teaching of the number six at this stage has emerged as a key element built upon: the *part-whole* relationship (KoT) and the type of problems that establish this (combination, KoT); enumeration as a procedure for constructing a set with quantitative criteria (KoT); subitizing the geometric pattern with Numicon® to support the reconstruction of the whole (KoT); and the diversity of registers with which numbers can be represented (KoT). We would also note the rigorous use of language to encourage flexible reasoning in the students within each register and to connect the various systems of representation (KoT), as well as help them advance progressively toward symbolization and formalization (KPM), the foundation of algebraic reasoning. It is not a question of teachers learning advanced mathematics, as they seem to imply the training courses presented in the journals consulted by Parks and Oliver (2015). The focus must rest on the epistemological bases of the mathematical contents of the stage, some of which are pre-mathematic in nature, and in their connection with higher contents.

In the domain of PCK, we note her knowledge of: the needs of the students, so as to manage manipulatives that make numerical notions tangible and visible (KFLM); the need to pose situations that are simultaneously meaningful for students (KFLM) and relevant for working numerical decomposition; the role of conversion between systems of representation so as to foment an understanding of numerical notions (KMT, KFLM); and the characteristics and limitations of the manipulatives employed (KMT).

On the other hand, the order in which the teacher proceeds in her movements and places manipulatives, the order in which successive binary decompositions are proposed , the need for a correspondence between the representation that the students create with Numicon® and that done by the teacher with counters, and the simultaneous presentation of the various decompositions being examined (inviting comparison as a means of establishing relationships between the summands – KPM) are all pedagogical decisions underpinned by elements of the *Knowledge of Mathematic Teaching* that are especially relevant for the promotion of algebraic reasoning.

Such decisions stimulate the search for relationships, which would have established a base from which to present the fundamental properties of school mathematical operations at this early educational stage, further enhanced by the teacher's knowledge of these properties (KoT) and allow us to reflect on the specialized knowledge that would support the management from the connection of increased complexity of arithmetics towards algebra (KSM). One could even talk of the comparison as a transversal connection between numerical equivalence and equations (KSM).

The sub-domain *Knowledge of the Structure of Mathematics* seems to have had a special role in our reflections on the specialised knowledge desirable for potentiating algebraic reasoning. Knowledge of the connection between algebra and arithmetic (complexification connection) has provoked the identification of the elements of specialised knowledge in both the MK and PCK domains. This subdomain allows the teacher to add another dimension to the mathematical content to be taught at this stage and has specific repercussions on their knowledge on how to put it into practice (PCK).

As we have indicated in previous studies (Muñoz-Catalán et al., 2017), the MTSK model has shown to be relevant for analyzing teaching practices at the early childhood stage, highlighting the subtlety and specificity of the teacher's knowledge (Our reflections led us to conclude that this knowledge is conceptually dense, highly cohesive, and heavily mathematical in nature). It has also shed light on an element of knowledge which until now has seemed to be external: *Knowledge of Practices in Mathematics*. The informal nature of the mathematical practices used in the early childhood classroom, and the linking of these to the use of manipulative, has perhaps resulted in a lesser consideration for this subdomain of knowledge with respect to early childhood teachers. However, in our analysis of the lesson, the comparison of outcomes has emerged as a powerful practice for establishing relationships between mathematical elements (relational thinking) and should be considered the germ of other mathematical processes such as classifying or defining. The proving of results as a way for the students to validate responses and a rigorous use of language to potentiate the progressive formalization and abstraction of mathematical notions, emerge as other practices characteristic of this stage that stimulate algebraic reasoning.

The results discussed in this paper might be useful to improve the quality of early childhood teacher's mathematics courses. In fact, they have served as an instrument for subsequent analyses of the session, carried out jointly by the teacher and the researchers-trainers, in the collaborative environment described in section 5 above. The close collaboration between them has allowed teachers to propose and implement refined designs of the activity, based on the aspects of specialized knowledge revealed in our work, in order to facilitate the development of children's algebraic reasoning.

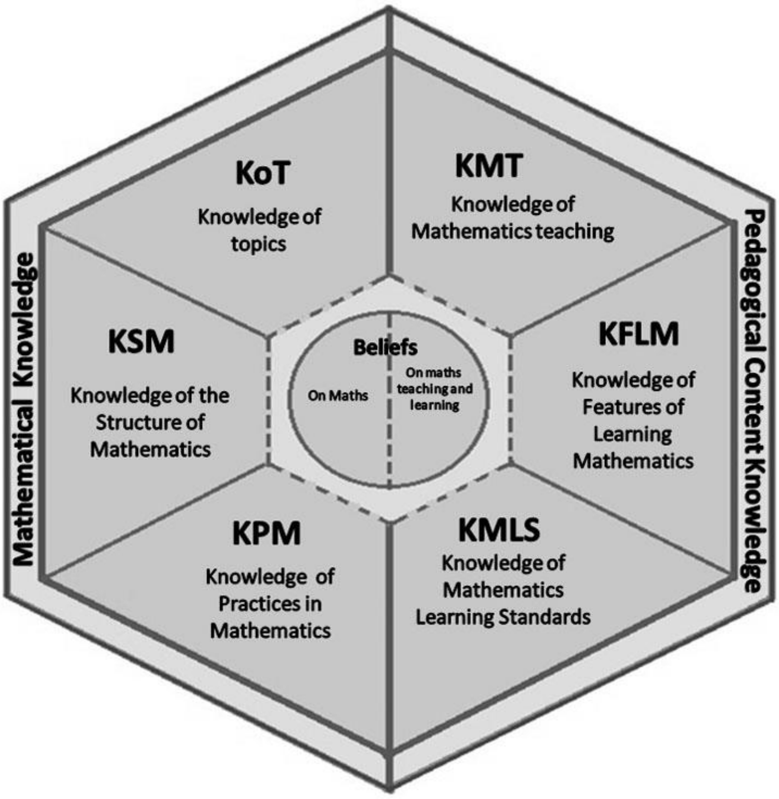

Figure 1. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) (taken from Carrillo et al., 2018).

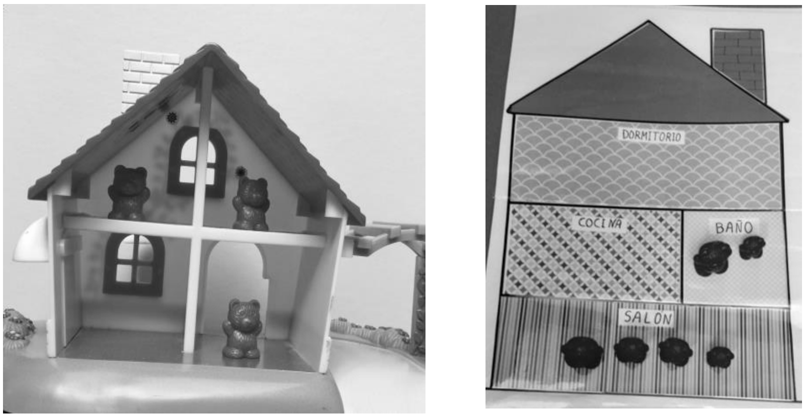

Figure 2. Dollhouse and corresponding board representation (2a and 2b, respectively).

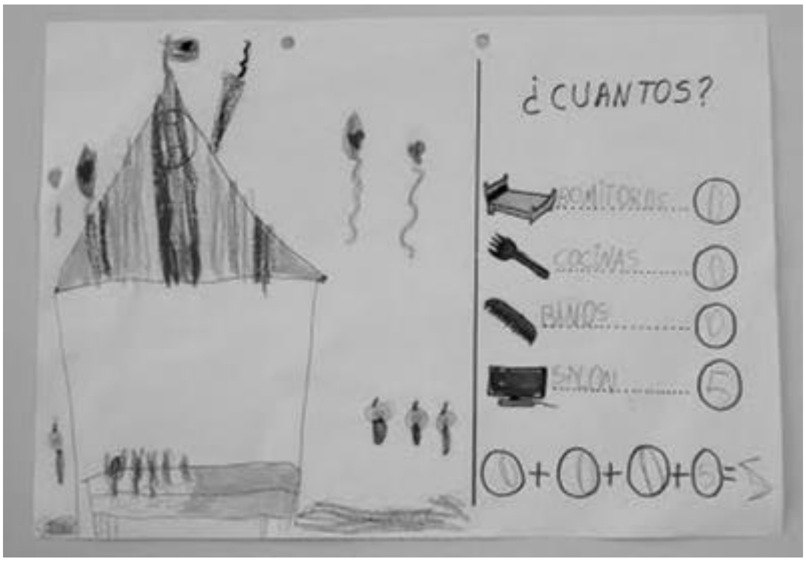

Figure 3. Worksheet combining iconic-graphic and symbolic-numerical representation.

Figure 4. Representation with Numican® of the binary decompositions of 6.

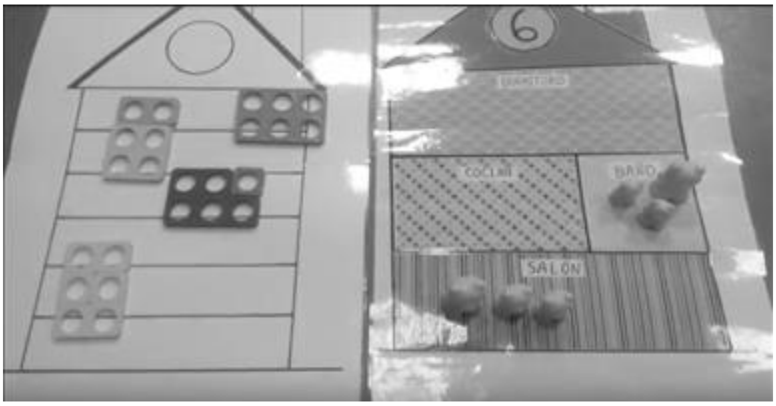

Figure 5. Decompositions of 6 into two summands with Numicon®.

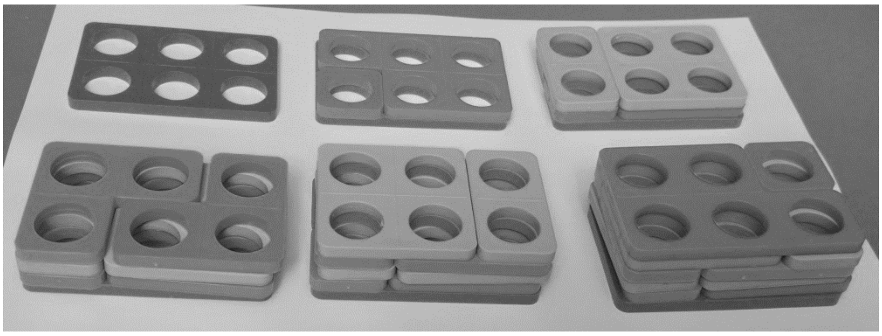

Figure 6. Validation by means of superimposition of all the decompositions of 6.

Table 1: Synthesis of the specialized knowledge for promoting algebraic thinking in students, emerged from Irene's class

Subdomain	Categories	Specialized knowledge she mobilizes	Specialized knowledge evoked in the researcher by the opportunities
KoT	Registers of representation	-She uses an iconic-graphic representation of the dollhouse to support the content of additive decomposition. -She uses a specific language as a register of representation.	-To know the importance of connecting every decomposition with different manipulatives and the corresponding symbolic representations in both directions.
	Definition and Properties	-Irene devotes time to creating the set and encourages the students to conceive of it as such. - She poses combination problems to emphasize the part-whole scheme. - She presents the bear family one by one (constituting the set by iterating the unit). -She uses the equal sign in connection with the operational interpretation of it.	-To know the commutative and compensatory properties of the sum. -To know that the sum is not semantically commutative. -To conceive zero as the absence of quantity and its role in the sum when is added to a natural number (identity element of the sum). -To know and emphasize during the session with different representations the use of the equal sign as one of numerical equivalence.
	Procedures	- She values subitization as an important counting strategy for additive composition and decompositions of the number 6. - For Irene, the basis for determining the cardinal of a set is the decomposition of numbers with 1 as iterative unit.	-To use the compensatory property of the sum to generate all the decomposition of the number 6.
	Phenomenology	-She tells the story about a family of bears as a relevant context for the content of additive decomposition.	
KSM	Connection based on increased complexity		-To know that promoting the recognition of numerical patterns or regularities by means of systematicity, is the basis for key algebraic reasoning skills involved in the processes of solving algebraic equations.
KPM	Rol of symbol and formal language	-By means of language, she advances towards the progressive symbolization and formalization of mathematical knowledge (natural number as the cardinal of a subset).	-To know the importance of working openly on the syntactically guided manipulating of symbols, introducing the symbolic register of representation

	Forms of validation	-Irene and her students check the decomposition with the dotted shapes as a way of validating the answer.	-To know that that systematicity in the generation of the decomposition of number 6 would have allowed the ensuring of the construction of all possible decompositions.
	Form of epistemological genesis		-To know that the mathematical process of comparison promotes the search for relationships, patterns and generalization.
KMT	Strategy	-She uses a story about a family of bears as a teaching strategy. - She facilitates conversions in both directions between the manipulative representations used (the manipulative with the laminated board and the bears, and the manipulative with Numicon®).	-To know that counting the number of bears in the house considering the empty rooms facilitates the meaning of 0 and its role in the sum (identity element). -To know that maintaining the order of rooms when asking how many bears there are in them facilitates the meaning of the commutative property of sum. -To know that to establish the equivalence between commutative expressions and the rest of decompositions reinforce the relational interpretation of the equal sign
	Teaching resource	-She uses questioning with specific prompts, pauses and vocabulary, to highlight the important elements of the task. - She is aware of the potential of Numicon®.	-To know that comparing the representation spatially opposed of 4+2 y 2+4 (i.e.) with the Numicon® shapes, can promote the reflection on the equivalence of both representations from the perspective of the result (commutative property).
KFLM	Ways of interacting with content	- She expects the first approach of her students to the combination problems to be carried out dynamically.	
KMLS	Learning expectations and sequencing with earlier topics	-She proposes the bears story as a situation her students can grasp, since they worked on it with smaller numbers on previous years.	- To value the importance of the beginning to the symbolic designation in this stage.

El conocimiento especializado del profesorado de matemáticas para fomentar el pensamiento algebraico en la educación infantil a partir de una tarea de descomposición aditiva

Introducción, antecedentes y motivaciones

Algunos autores defienden que, para avanzar académicamente, es necesario un dominio sólido del álgebra (Adelman, 1999). No obstante, en España, aunque la aritmética se introduce en la educación infantil y primaria, la enseñanza del álgebra se pospone hasta la educación secundaria puesto que se considera que solo entonces los alumnos están capacitados para progresar de un pensamiento concreto a un pensamiento operacional formal.

Sin embargo, el aprendizaje de la aritmética no consiste únicamente en memorizar hechos numéricos y algoritmos para realizar operaciones aritméticas, sino en identificar propiedades y relaciones implícitas en la estructura de la aritmética. Los principios que gobiernan la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los campos numéricos y de sus operaciones. Por eso, el conocimiento de los números, las operaciones y sus propiedades constituyen la base fundamental para la manipulación de las expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones.

En el aula de educación infantil, es frecuente encontrar actividades que incluyen la descomposición aditiva del número natural. Estas actividades pueden ampliarse para abordar explícitamente las propiedades de la suma de números naturales, como, por ejemplo, las propiedades conmutativa y asociativa o el elemento neutro. La corriente *Álgebra temprana* promueve el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños mediante actividades con patrones, funciones y estructuras (Clements et al., 2013; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

La atención prestada al desarrollo profesional de los profesores de infantil es relativamente reciente y, por tanto, se conoce muy poco la naturaleza exacta de su conocimiento. En este sentido, en la revisión que Parks y Wager (2015) realizaron de los artículos de los últimos 20 años en las cuatro revistas más relevantes sobre esta etapa educativa, se constató que en las dos revistas más especializadas en este ámbito (*Journal of Research in Mathematics Education* and *Journal of Mathematics Teacher Education)*, se había prestado muy poca atención a la etapa infantil en general y, más especialmente, a la investigación sobre la formación de los profesores de matemáticas de este nivel educativo. De hecho, apenas existen estudios centrados en el contenido de esta formación, mucho menos en álgebra, y por tanto ni siquiera existe consenso sobre la especificidad del conocimiento matemático que se debe aprender para impartir esta materia.

En este artículo nos centramos en aquellos aspectos que podrían fomentar el pensamiento algebraico de los alumnos con el objetivo de mejorar la comprensión del conocimiento del profesor de infantil a través de la reflexión basada en las observaciones en el aula. Por tanto, hemos adoptado en esta propuesta la conceptualización del conocimiento del profesor considerada en el modelo MTSK (*Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*) (Carrillo et al., 2018). Para comprender mejor el conocimiento especializado necesario para la enseñanza de la aritmética desde una perspectiva algebraica, analizamos la práctica docente de una profesora con experiencia, Irene, cuando lleva al aula actividades para introducir la descomposición del número 6 con alumnos de infantil (5 años). En primer lugar, el análisis se centra en elementos del conocimiento especializado movilizado por la profesora que pueden considerarse promovedores de pensamiento algebraico. A continuación, se amplía el análisis a aquel conocimiento especializado que podría sustentar posibles gestiones alternativas de la sesión con el objetivo de fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos. En definitiva, el objetivo es comprender el conocimiento especializado necesario para la enseñanza del álgebra que emerge de esta lección sobre la descomposición aditiva del número seis, así como de una gestión alternativa de esta misma sesión con la que se fomentaría el pensamiento algebraico de sus alumnos.

Comenzamos presentando los fundamentos teóricos sobre los que se asienta el estudio, organizados en torno a dos focos principales: la consideración del álgebra en educación infantil y el modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK). A continuación, se describe la metodología de investigación utilizada y se analiza la lección desde el punto de vista del conocimiento especializado usado para fomentar una identificación intuitiva de las relaciones entre sumandos en la descomposición del número 6 y las propiedades de las operaciones numéricas. Por último, presentamos algunas conclusiones del estudio.

El álgebra temprana en educación infantil

Compartimos la perspectiva de Jacobs et al. (2007), de que el pensamiento algebraico debe estar entretejido en el currículum matemático en lugar de ser concebid como un área específica de contenido a impartir. Carpenter et al. (2003) no proponen incorporar el álgebra manipulativa en los primeros años de escolarización sino fomentar un estilo de pensamiento durante las tareas aritméticas que proporcione una base sólida para desarrollar el contenido algebraico posterior. El razonamiento algebraico incluye la generalización y la formalización de patrones, regularidades y relaciones numéricas (como ocurre en la aritmética generalizada), la manipulación del simbolismo guiada sintácticamente, el estudio de estructuras extraídas de cálculos y relaciones, el estudio de relaciones funcionales y la modelización (Jacobs et al., 2007; Kaput, 1998; Socas, 2011). La introducción de tareas que “incluyan las relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, la prueba y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149) fomenta el razonamiento algebraico a edades tempranas (Carpenter et al., 2003). En particular, estos estudios ponen de relieve que el razonamiento simbólico no debería limitarse al razonamiento con notación algebraica, sino que debería hacer uso también del lenguaje natural, tablas, gráficos y otros sistemas de representación en función de la edad en cada etapa. Estas propuestas han dado lugar a la consolidación de la corriente Álgebra Temprana en la investigación de la enseñanza de matemáticas.

Pero, ¿cómo se debe abordar el razonamiento algebraico en la educación infantil? Aunque el álgebra podría considerarse una materia más apropiada para edades más avanzadas, en educación infantil y primaria se trabaja con patrones, regularidades, relaciones y representaciones y estas tareas son fundamentales para el concepto de estructura algebraica. En sus recomendaciones curriculares, Clements et al. (2013) sugieren incluir un bloque de contenido relacionado con la iniciación al álgebra denominado "patrones y estructuras", en el que quieren poner de relieve la importancia de comprender ciertas estructuras matemáticas. La recomendación de la NCTM (2000) sobre la introducción del álgebra en la educación infantil ha hecho que los investigadores consideren las diversas tareas que podrían utilizarse para empezar a trabajar con este tipo de contenidos en esta etapa. En concreto, las tareas que requieren construir relaciones funcionales y regularidades se consideran un vehículo apropiado para establecer generalizaciones y relaciones entre cantidades variables y para identificar patrones, tanto en los primeros cursos de primaria (Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2000; Morales et al., 2017) como en la educación infantil (Castro et al., 2017; Rittle-Johnson et al., 2015).

El foco de este artículo es la aplicación del desarrollo del álgebra en la educación infantil. Se orienta hacia la identificación intuitiva de las relaciones numéricas y de las propiedades fundamentales de la suma de números enteros mediante tareas basadas en la descomposición aditiva de números naturales.

En diversas recomendaciones curriculares, como las de NCTM (2000), y la iniciativa para los *Common Core State Standards Initiative* (Common Core State Standards Initiative, 2010), se propone que los niños analicen y representen estructuras matemáticas y e ilustren las propiedades y principios generales de las operaciones. Para ello, las recomendaciones incluyen el uso de objetos, dibujos y símbolos para representar las descomposiciones de números iguales o inferiores a 10 en dos sumandos de diversas maneras, ilustrando así la idea de igualdad.

Una de las dificultades ampliamente investigada en el contexto del aprendizaje y la enseñanza de la aritmética es la interpretación del signo igual (=) como operador, puesto que se suele utilizar habitualmente para presentar el resultado de una operación aritmética. Carpenter et al. (2003) hacen referencia al pensamiento relacional en el contexto de las igualdades numéricas, relacionándolo con el significado del signo igual como un signo de equivalencia numérica. En este caso, el estudiante hace uso del pensamiento relacional para resolver una ecuación numérica y obtener la respuesta, estableciendo relaciones entre los números y las expresiones en ambos lados del signo sin necesidad de realizar las operaciones expresadas. Por ejemplo, la solución de la ecuación 8+5=?+4 requiere un significado relacional del signo igual que implica propiedades como la compensación aditiva, 8+5=(8+1)+(5-1) (Molina et al., 2006). Los libros de texto de primaria suelen incluir expresiones estándar de igualdades tipo $a+b=c$, que priman el significado operacional (Ramírez & Rodríguez, 2011). La investigación ofrece evidencia de que el uso de igualdades no estándar como $a=b+c$, $a+b=c+d$ o $a=a$ favorecen la interpretación relacional del signo igual y una comprensión de las propiedades de la adición y de la sustracción como la propiedad conmutativa de la suma, la compensación tanto en la suma $a+b=(a+c)+(b-c)$ como en la resta $a-b=(a+c)-(b+c)$ o $a-b=(a-c)-(b-c)$, la propiedad asociativa mediante la descomposición de alguno de sus sumandos y el elemento neutro (Molina et al, 2006). En esta misma línea, Rittle-Johnson, Matthews, Taylor y McEldoon (2011) distinguen cuatro niveles de equivalencia en función de los resultados obtenidos por los estudiantes en la resolución o identificación de las equivalencias en diversos tipos de ecuaciones. El nivel 1 ("rígido operacional") hace referencia únicamente a la resolución de ecuaciones con operaciones a la izquierda del signo igual y resultados a la derecha; en el nivel 2 ("operacional flexible"), el estudiante resuelve ecuaciones sin operaciones en ninguno de sus miembros o con la operación a la derecha y el resultado a la izquierda; en el nivel 3 ("relacional básico"), el estudiante utiliza ecuaciones con operaciones en ambos lados del signo igual y, por último, en el nivel 4 ("relacional comparativo"), el estudiante utiliza la compensación y otras propiedades de la suma mencionadas anteriormente para comparar los dos miembros de la ecuación sin necesidad de hacer los cálculos.

Marco teórico: conocimiento profesional sobre la enseñanza de las matemáticas

Nuestra comprensión del contenido del conocimiento del profesor procede de la contribución de Shulman (1986), quien puso la atención en la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia impartida. Shulman estableció una distinción entre el *conocimiento de la materia* (SMK) y el *conocimiento didáctico del contenido* (PCK). Tras el modelo de Shulman, surgieron muchos otros que situaron el énfasis en distintos aspectos. En el caso de las matemáticas, destaca el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* o MKT (Conocimiento matemático para la enseñanza) de Ball, Thames & Phelps (2008). Sobre la base de la propuesta de Shulman (1986), el MKT establece tres subdominio en cada uno de los dos dominios anteriores. Una de las contribuciones más importantes de este modelo es el reconocimiento de un tipo de conocimiento que es específico del docente, no necesario para otras profesiones. No obstante, presenta algunas limitaciones como bien señalan Carrillo et al. (2018). En primer lugar, el *conocimiento común del contenido* se define tomando como referencia el conocimiento de los adultos bien formados, que es externo a la labor de enseñanza del profesor. En segundo lugar, estos subdominio tienden a solaparse, como ya constataron otros investigadores como Silverman y Thompson (2008). En tercer lugar, “el objeto de análisis en este modelo no es el conocimiento matemático *utilizado* por los profesores […] sino la valoración del conocimiento *necesario* para hacer uso de él […]. Por tanto, el modelo MKT […] centra su atención en la práctica docente tal y como esta se desarrolla en el aula, sin tener en cuenta el conocimiento que los profesores podrían poner en juego cuando implementan cualquier otra actividad docente” (Carrillo et al., 2018, p. 3).

Por lo que respecta al profesor de infantil, muchos estudios describen las dificultades experimentadas al aplicar el modelo MKT en esta etapa. Mosvold et al. (2001) concluyeron que el MKT está condicionado por el contexto estadounidense en el que surgió y no resulta adecuado para docentes de otros países en los que la etapa infantil forma parte de una tradición pedagógica social como Noruega. En estos casos es necesario redefinir el trabajo del profesor de matemáticas, puesto que tareas como “presentar conceptos matemáticos” o “encontrar un ejemplo para ilustrar un concepto matemático concreto” no tienen sentido en el contexto noruego, en el que surgieron otras tareas tales como “facilitar y aplicar actividades y juegos” (p. 1810).

Estas limitaciones, así como nuestro convencimiento de que la especificidad del conocimiento del profesor respecto a la enseñanza de matemáticas no se limita a una subdominio determinado sino que afecta tanto al SMK como al PCK (Scheiner et al., 2019), nos llevó a desarrollar una conceptualización del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas que describimos en la sección siguiente.

El modelo MTSK en relación con el profesor de infantil

En las fases tempranas del desarrollo no podemos hablar del profesor de matemáticas como tal. En España, los contenidos matemáticos de esta edad están entretejidos en tres áreas del currículum de manera que contribuyan a la autoconciencia y la autonomía personal del alumno, al conocimiento del entorno y al desarrollo del lenguaje desde el punto de vista de la comunicación y la representación. Por eso, los profesores de infantil, tal vez más que los de otras etapas educativas, necesitan un conocimiento que les permita promover el aprendizaje matemático de sus alumnos a partir de relacionar estos elementos de conocimiento a situaciones en las que estos se enlazan con otras áreas de conocimiento y con las experiencias e intereses de los niños de esta edad. Estas condiciones imponen una exigencia aún mayor a este profesional, que debe identificar rigurosamente los fundamentos matemáticos, promover un aprendizaje profundo y revestirlos de un aparataje lúdico y funcional.

Aunque ciertos aspectos pedagógicos desempeñan un papel importante en el conocimiento de estos profesionales, consideramos que la naturaleza abstracta de las matemáticas confiere especificidad a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en esta etapa. Al mismo tiempo, se trata de un conocimiento especializado en el sentido de que implica una manera determinada de conocer las matemáticas para enseñarlas a estos estudiantes en particular y que es distinta de la de los docentes de primaria o secundaria (Muñoz-Catalán et al., 2017). Por tanto, decidimos adoptar el modelo analítico de MTSK (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*; Carrillo et al., 2018), lo que nos lleva a aceptar su conceptualización de este conocimiento como el que los profesores necesitan y utilizan, del que disponen y, por tanto, sobre el que se fundamentan sus acciones.

El modelo MTSK distingue seis subdominios del conocimiento divididos, según la distinción establecida por Shulman, en *conocimiento matemático* (MK) y el *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) (Figura 1). También incluye el dominio *Creencias*, pero no vamos a abordarlo en este estudio (Figura 1). Describimos los seis subdominios en función de las categorías que los definen. Para mayor detalle sobre estas categorías, véase Carrillo et al. (2018) y para conocer en profundidad cómo aplicar el modelo, véase Carrillo et al. (2017).

Insert Figure 1 here

Conocimiento matemático

El dominio matemático incluye el conocimiento de la propia disciplina, considerado como *un conocimiento profundo de las matemáticas básicas* (Ma, 1999). Este conocimiento se divide en tres subdominios:

Conocimiento de los temas (KoT) es entendido como un conocimiento de la disciplina que incluye procedimientos (desde el "cómo se hace" al "cuándo se puede aplicar" y "por qué"), definiciones, propiedades y fundamentos, la fenomenología y aplicaciones de un concepto y los diversos registros de representación. En este subdominio se tienen en cuenta las conexiones intra-conceptuales: las relaciones entre los conceptos y procesos de un tema concreto. Serían elementos del KoT, por ejemplo, conocer las relaciones entre los sumandos cuando se generan todas las descomposiciones aditivas, o los registros que se pueden utilizar para representar la descomposición del número.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM), está centrado esencialmente en conocer las conexiones que facilitan una visión global del conocimiento matemático. Se han identificado tres tipos de conexiones, dos de ellas (conexiones auxiliares y transversales) todavía no se han explorado en esta etapa educativa. El tercer tipo de conexión que debería definir su conocimiento son las conexiones de simplificación o complejización, que ayudan a comprender y desarrollar conceptos básicos a partir de una perspectiva avanzada y a la inversa, comprender y desarrollar conceptos avanzados a partir de una perspectiva elemental. La importancia de este tipo de conexiones se evidencia cuando consideramos la introducción del álgebra durante la etapa infantil. El conocimiento de este tipo de conexiones evita la aparición de obstáculos didácticos y permite construir una base sólida para el aprendizaje matemático futuro. Saber que el modo en que se manejan ciertos conceptos aritméticos (como la descomposición numérica) puede estimular ciertos aspectos del razonamiento algebraico (como la identificación de patrones y propiedades) tiene repercusiones en cómo se presentan estos conceptos en el aula y confiere al contenido aritmético impartido cierta potencialidad.

Conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM), abarca conocer los procedimientos del trabajo matemático, entre los que se incluyen aspectos de comunicación, argumentación y demostración matemática, que intervienen al realizar ciertas prácticas matemáticas como la resolución de problemas, la definición o demostración de un proceso, el establecimiento de un axioma, el uso riguroso de lenguaje y símbolos matemáticos, el conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para realizar afirmaciones válidas, y otras prácticas del quehacer matemático (como la modelización). Entre otros ejemplos de este subdominio se incluye saber que la comparación de resultados es un proceso matemático válido para identificar relaciones y propiedades numéricas.

Conocimiento didáctico del contenido

Caracteriza el conocimiento propio de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. Sus tres subdominios correspondientes se describen a continuación:

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): integra el conocimiento de (a) teorías didácticas personales o formales asociadas al contenido matemático, (b) limitaciones y potencialidades de los recursos manipulativos, físicos o virtuales, y (c) las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que son de utilidad para la enseñanza de las matemáticas. Algunos ejemplos de conocimientos de este subdominio son: conocimiento del potencial de Numicon® (Atkinson, Campling, & Wing, 2015) para enseñar la descomposición numérica en su faceta cardinal, convertir distintos registros de representación para mejorar la comprensión de un concepto determinado, o usar el lenguaje verbal para reforzar los aspectos relevantes de un problema que conducen a su resolución.

El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)* hace referencia al conocimiento de cómo los alumnos asimilan el contenido procedente de la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento de teorías personales o formales del aprendizaje asociadas tanto a la matemática general como a contenidos más específicos. Junto a este se sitúa el conocimiento de: (a) las fortalezas y dificultades relacionadas con el aprendizaje de un contenido concreto, (b) el modo en que los estudiantes se relacionan con este y (c) los intereses y las expectativas de los estudiantes sobre las matemáticas. Un ejemplo de este subdominio es el conocimiento de que los niños en edad infantil requieren situaciones reales y relevantes que den significado a la manipulación de objetos, o el hecho de que no sean capaces de comprender mensajes matemáticos sin un apoyo visual.

Conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas (KMLS): incluye el conocimiento del currículum oficial vigente en cada país en un momento dado y de los estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales que se encargan del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de conocimiento normativo incluye el conocimiento del nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental, así como de la secuenciación de temas previos o posteriores. Por ejemplo, saber que la descomposición de 6 puede abordarse en el último curso de infantil, saber qué propiedades de las operaciones pueden comprender los alumnos a esta edad, y saber que la descomposición puede abordarse desde el punto de vista del razonamiento algebraico, son elementos de este subdominio.

Metodología del estudio

El objetivo general de este estudio es comprender la naturaleza del conocimiento del profesor de primaria respecto a la enseñanza de las matemáticas. Y lo hacemos a través de la práctica, centrándonos en *números y operaciones*, un área de gran importancia en esta etapa educativa

(Clement, 2004) y un contexto perfecto para fomentar el desarrollo del razonamiento algebraico temprano.

En España, es muy raro encontrar profesionales que trabajen la aritmética desde esta perspectiva, puesto que la inclusión del álgebra en educación infantil es relativamente reciente y apenas ha sido objeto de estudio en las investigaciones en este campo (Clements & Sarama, 2014). Además, la atención que se presta a las matemáticas tanto durante su formación inicial como es escasa y suele centrarse en aritmética, juegos y recursos manipulativos sin tener en cuenta contenidos específicos. Asimismo, el currículum oficial para esta edad en España es muy genérico y no contiene directrices explícitas sobre cómo fomentar el pensamiento algebraico.

Como ya se ha mencionado, analizamos el conocimiento especializado en una clase de alumnos de 5 años impartida por una profesora con experiencia, Irene, durante una sesión sobre la descomposición aditiva. Irene contaba con más de 25 años de experiencia y estaba interesada en mejorar su práctica docente en relación con las matemáticas. Esta profesora diseñó la tarea y su puesta en práctica antes de participar en un contexto colaborativo de desarrollo profesional con otros docentes y formadores de profesores. Su clase respondió a un diseño muy cuidado con un claro objetivo: ayudar a los estudiantes a avanzar de lo concreto a lo abstracto, basado en las experiencias del estudiante y utilizando el material Numicon®, que facilita un enfoque discreto de los números naturales.

Aunque para Irene el foco de la tarea era el contenido aritmético, ciertos aspectos de su implementación fomentaban el pensamiento algebraico. Pero, además, a medida que la lección avanzaba, surgieron situaciones que hubieran podido fomentar un pensamiento algebraico más profundo por parte de los alumnos. Combinando nuestro objetivo general de comprender el conocimiento especializado deseable para la enseñanza del álgebra en la etapa infantil, con la oportunidad de asistir a la clase de Irene, nos propusimos como objetivo de investigación comprender el conocimiento especializado para la enseñanza del álgebra que emergía de su clase y el conocimiento que podría haber sustentado una gestión alternativa de la lección de Irene sobre la descomposición del número 6.

Para lograr este objetivo, adoptamos una postura próxima al paradigma interpretativo (Bassey, 1999), conscientes del papel especial que desempeñamos como investigadores. Durante la observación de las acciones de Irene, identificamos aspectos del conocimiento especializado movilizado y, en paralelo, reflexionamos sobre el conocimiento especializado necesario para llevar a cabo una gestión alternativa de la lección. Esta perspectiva nos sitúa como intermediarios que establecen una relación dialógica entre las propuestas teóricas y la realidad de la clase de infantil. Este diálogo fue guiado por nuestra *sensibilidad teórica* (Strauss & Corbin, 1994): nuestros propios conocimientos y experiencia, procedentes de nuestro trabajo de investigación y de nuestro rol como formadores de profesores. El conocimiento especializado deseable para una gestión alternativa de la clase lo denominamos *Conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades*, en sintonía con Liñán (2017).

La lección objeto de estudio tenía una duración de 30 minutos y se grabó en vídeo. El análisis se realizó sobre la base de una transcripción de la sesión y comenzó con la identificación de episodios relevantes para los objetivo de esta investigación, según Schoenfeld (2000). Después, se aplicó un *enfoque interpretativo* (Kvale, 1996) para identificar fragmentos de la lección cuya recontextualización a la luz de nuestro marco conceptual nos permitía explicar y justificar el conocimiento que sustenta las acciones de la profesora (aquellas directamente relacionadas con la implementación de la tarea matemática y que incluyen las interacciones con los estudiantes). Durante la siguiente fase de análisis, introducimos un elemento metodológico que nos parecía especialmente potente, el de las *oportunidades*, entendidas como aquellos momentos o situaciones que surgen en la clase, como consecuencia de las acciones de la profesora, y que permiten al investigador reflexionar sobre el conocimiento especializado que hubiese sustentado una gestión alternativa de esas mismas situaciones, orientándolas hacia el desarrollo del razonamiento algebraico. De este modo, obtenemos el *conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades*. La *triangulación de expertos,* haciendo uso de la variedad de experiencia y formación de los autores, constituyó una valiosa herramienta metodológica para validar la investigación (Denzin, 1989).

Descripción de la lección: 'El juego de la familia de osos'. Descomposición del número 6

En esta sección describimos en términos generales la sesión impartida por Irene, que comienza con todos los estudiantes juntos. Irene propone una actividad familiar cambiando el modo de representación de la casa. Dos años antes (cuando los alumnos tenían 3 años), les propuso una tarea sobre una casa de muñecos (véase Figura 2a) en la que los niños jugaban con osos de juguete, colocándolos en distintas habitaciones. En esta ocasión, se mostró a los niños un gran dibujo laminado (Figura 2b) con una representación icónico-gráfica de la misma casa de muñecas y con una distribución específica de las estancias, establecida por la profesora (salón, cocina, baño y dormitorio). La profesora sacó seis osos que formaban una familia y los fue moviendo por la casa en función de la historia que narraba a los alumnos. Al comienzo, la docente presentó a los miembros de la familia a medida que los iba situando en el salón. Después, movió al abuelo al baño y preguntó a los alumnos: "*¿Cuántos osos hay ahora en el salón? ¿Y en el baño? ¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo oso fuese al baño? ¿Cuántos hay ahora en el dormitorio? ¿Y en la cocina?"*

Insert Figure 2 here

Después, la docente prosigue con la narración, moviendo a los miembros de la familia de una estancia a otra, mostrando otras descomposiciones del número 6 y preguntando a los estudiantes las siguientes preguntas (en este orden):

“El osito pequeño va al baño con el abuelo (descomposición 4+2). *¿Cuántos osos hay ahora en el salón?* (4) *¿Cuántos osos hay en el baño?* (2) *¿Y en total, cuántos osos hay en la casa? ¿Sigue habiendo seis, no?”*

Después, la osita pequeña va al baño (3+3). *¿Cuántos osos hay en la cocina?* (0) *¿Y en el dormitorio?* (0) *¿Cuántos hay en el salón?* (3) *¿Cuántos hay en el baño?* (3)

La abuela oso va también al baño (2+4). *¿Cuántos osos hay en el baño?* (4) *¿Cuántos hay en el salón?* (2)

El papá oso va a la cocina (1+1+4). *¿Cuántos osos hay en el baño?* (4) *¿Cuántos hay en el salón?* (1) *¿Cuántos hay en la cocina?* (1).

Por último, todos los osos se van a la cama (1+1+1+1+1+1). *¿Cuántos osos hay en la cocina?* (0) *¿Y en el baño?* (0) *¿Y en el salón?* (0) *¿Y en el dormitorio?* (6). *Pero cada uno está en su cama.”*

En paralelo, la docente utiliza el material Numicon®, que los niños conocen para representar los primeros seis números. Irene pide a los alumnos que utilicen este material para representar la situación que hay en ese momento en la casa y después los alumnos comprueban sus respuestas superponiendo las piezas seleccionadas sobre la forma correspondiente al 6 (Figura 2b). En los siguientes diez minutos, la docente sigue variando la ubicación de las figuras en la casa y sigue formulando las mismas preguntas, al mismo tiempo que va incorporando preguntas nuevas, de modo que los alumnos puedan comparar cada situación con la anterior y comprueben que siempre hay un total de seis osos en la casa, con independencia de su distribución. Después, los alumnos regresan a las mesas para completar una tarea individual en una hoja de actividades en la que deben dibujar una de las descomposiciones o una representación de la casa, indicando simbólicamente cuántos osos hay en cada estancia. Las distintas estancias están indicadas mediante símbolos (una televisión para el salón, un cepillo de dientes para el baño, etc.). Al final aparece un símbolo de igual en el registro simbólico-numérico en el que los alumnos deben completar la expresión a la izquierda del igual con los cuatro sumandos correspondientes a la descomposición que han dibujado y, la expresión a la derecha del igual, indicando el total. Para ilustrar esta parte de la actividad, en la Figura 3 se muestra la tarea del estudiante. A la izquierda, una niña dibuja una casa con 5 osos en el salón. A la derecha, indica el nombre de cada una de las estancias junto a las imágenes que la docente ha incluido en la hoja de actividades y con símbolos numéricos indica que hay 0 osos en el dormitorio, 0 en la cocina, 0 en el baño y 5 en el salón.

Insert Figure 3 here

Conocimiento especializado para fomentar del pensamiento algebraico

En primer lugar, analizamos los elementos de conocimiento especializado movilizados por Irene, que facilitan el fomento del pensamiento algebraico temprano. De todos los elementos del conocimiento aritmético especializado movilizado, destacamos únicamente aquellos que pueden fomentar el pensamiento algebraico de los alumnos. En segundo lugar, indicamos las oportunidades que consideramos que pueden fomentar este tipo de razonamiento, describimos una posible gestión alternativa de estas oportunidades, e identificamos elementos del *conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades* que podrían sustentar esta gestión alternativa. Organizamos el análisis, sintetizado en la Tabla 1, siguiendo los componentes con los que Jacobs et al. (2007) y Kaput (1998) caracterizan el pensamiento algebraico.

Insert Table 1 here

Conocimiento especializado movilizado por la profesora

La sesión comienza con la tarea de los estudiantes en una lámina que representa una casa de cuatro estancias con el número 6 en el tejado (Figura 2), y otro tablero a la izquierda de este para que los estudiantes representen la distribución de los osos en la casa utilizando piezas Numicon® (Figura 5). Irene narra una historia sobre una familia de osos que se van desplazando en la representación de la casa (registro de representación, KoT), un contexto relevante para implicar a los estudiantes en la actividad y que confiere significado a la descomposición del número (fenomenología, KoT, y estrategia, KMT), mientras que, al mismo tiempo, sabe que es una situación que sus alumnos pueden comprender, puesto que ya la han visto en otros cursos anteriores utilizando números más pequeños (expectativas de aprendizaje y secuenciación con temas anteriores, KMLS).

Irene comienza reuniendo a toda la familia de osos. Nombra a cada uno de sus miembros y asocia cada uno de ellos con su representación material. Parece evidente que es consciente de la necesidad de dedicar cierto tiempo a crear el conjunto y a ayudar a los alumnos a concebirlo como tal (propiedad, KoT), antes de proceder a identificar sus características.

La docente formula problemas de combinación (definiciones y propiedades, KoT) que describen una relación estática entre dos subconjuntos disjuntos, llamados *partes*, que, juntas, forman el conjunto total o *todo*. La relación *parte-todo* es uno de los componentes más importantes del conocimiento para comprender los números, las operaciones y sus propiedades desde el reconocimiento de las estructuras extraídas a partir de relaciones numéricas y patrones (Clements & Sarama, 2014; Jacobs et al., 2007). No obstante, en la situación creada por Irene, la generación de las partes se lleva a cabo de manera dinámica. Como dijo Fuson (1992), hasta que los niños no adquieren el esquema *parte-todo* del número, la composición de las partes en el todo o la descomposición del todo en sus partes debe presentarse de manera dinámica. Irene parece ser consciente de esto (modos de interactuar con el contenido, KFLM), como se refleja en su narración (recursos, KMT). Las preguntas que formula a sus alumnos cuando mueve uno de los osos a una de las estancias de la casa reflejan su conocimiento de las características relevantes de este tipo de problema (propiedades, KoT), y que la llevan a ser muy precisa en el tipo de preguntas que formula y en el vocabulario y el tiempo que dedica a sus intervenciones en la tarea (registros de representación, KoT; el lenguaje como recurso didáctico, KMT): "¿Cuántos osos hay ahora en el salón? (parte) ¿Y en el baño? (parte) ¿Cuántos osos había en el salón antes de que el abuelo oso fuese al baño?" (todo).

Irene repite la actividad sistemáticamente con distintas descomposiciones aditivas (véase Figura 4), lo que le permite fomentar el reconocimiento de patrones o regularidades numéricas (estrategias, KMT).

Insert Figure 4 here

En una de las descomposiciones presentadas posteriormente, quedan dos osos en el salón y cuatro en el baño. El niño toma las piezas que indican el número 4 y el número 2, que son las mismas utilizadas para indicar el número 2 y el número 4 y, antes de que las superponga sobre la que representa el número 6, Irene comenta: "*¿Hay alguna pieza que diga cuatro y dos?"*. El niño solapa las piezas en la misma descomposición que había de número dos y número cuatro y la profesora dice: "*Son las mismas, ¿verdad? Si ya están allí, son las mismas. No tienes que ponerlas porque ya están allí, ¿verdad?"*. Esto demuestra que Irene conoce la propiedad conmutativa de la suma (propiedades, KoT) y decide no abordarla (*oportunidad*), posiblemente basándose en su conocimiento de las expectativas de aprendizaje (KMLS), e incluso decide iniciar la descomposición con 3 sumandos por primera vez.

Por otro lado, Irene pide a sus alumnos que representen cada una de las situaciones en el tablero de la izquierda utilizando el material Numicon®. Es consciente del potencial de los recursos manipulativos (recursos, KMT) para representar el cardinal de un conjunto y para la composición y descomposición de números. Además, combina en paralelo distintas representaciones de la misma descomposición numérica, de nuevo sistemáticamente, facilitando conversiones en ambas direcciones entre dos representaciones (los osos en el tablero laminado y las piezas Numicon®) mediante un uso preciso del lenguaje, prestando especial atención a los apoyos visuales (estrategias, KMT). Irene convierte las acciones que ejecuta con los objetos en un sistema de representación, paso a paso, en el otro sistema, ayudándose del lenguaje verbal y gestual. La representación de la situación concreta de descomposición con las piezas Numicon® (regletas perforadas siguiendo una cuadrícula) es de gran importancia para ayudar a los niños a detectar patrones visualmente. Estudios previos demuestran la importancia de trabajar explícitamente las conexiones entre las distintas representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso una relación numérica, traduciendo esta relación de una representación a otra.

Irene fomenta el uso de la *subitización* como estrategia favorable en el conteo realizado en la composición y descomposición del número 6 (procedimientos, KoT; recursos y estrategia, KMT). También es consciente de que los alumnos ya están acostumbrados a este material y que necesitan visualizar los objetos matemáticos (modos de interactuar con el contenido, KFLM) (Figura 5).

Insert Figure 5 here

En esta sesión, Irene decide poner a disposición de sus alumnos únicamente las piezas que tienen de 1 a 6 orificios. Antes, comenta: "*Bueno, voy a sacar la pieza del 6, la que nos habíamos olvidado*". Y coloca la pieza con 6 orificios sobre la lámina de la izquierda y le da una pieza idéntica al alumno, diciendo: "*Y esta, para comprobar*". En este momento, su lenguaje se desvincula de las características de los objetos manipulados (se pierde el contexto de la familia de osos) y se refiere a ellos utilizando números como cardinales de los subconjuntos, en coherencia con el fomento del pensamiento algebraico. A través del lenguaje, introduce una nueva representación de la descomposición aditiva en cuestión (registro de la lengua natural), avanzando hacia la simbolización y formalización progresivas del conocimiento matemático (el papel de los símbolos y el uso del lenguaje natural, KPM). De nuevo, vincula distintos componentes de cada representación creada en cada fase del episodio, avanzando cuidadosamente de las representaciones menos abstractas, vinculadas más estrechamente con el contexto inicial de la actividad en la casa de muñecos, a una representación más abstracta como los símbolos numéricos (inicialmente en el registro de lenguaje oral y por escrito al final de la sesión) (registros de representación, KoT; recursos, KMT; teorías del aprendizaje, KFLM).

El uso de distintos sistemas de representación a lo largo de la sesión permite a los alumnos trabajar en contenidos matemáticos mediante un proceso de modelización directa (Carpenter et al., 2003) (fenomenología, KoT), un componente esencial del pensamiento algebraico.

Cuando Irene entrega a los alumnos la pieza del número 6 para comprobar sus resultados, en realidad está comprobando la descomposición con las piezas a modo de validación de la respuesta (formas de validación, KPM). Cuando el alumno comprueba la respuesta, coloca la composición obtenida con las piezas 5 y 1 junto a la pieza correspondiente al 6, que la profesora había colocado previamente. La descomposición de cuatro y dos se desarrolla del mismo modo. Así, Irene trata de ayudar a sus alumnos a identificar la regla general: "*No importa cómo están colocados los osos en la casa, siempre hay seis osos*". Este es, de nuevo, un aspecto importante en el estudio de estructuras abstraídas a partir de cálculos y relaciones. Para ello, Irene pide a los alumnos que comprueben el resultado y les enseña cómo hacerlo con los materiales (recursos, KMT). La práctica de comprobar aparece, pues, como una manera de validar la respuesta, posiblemente relacionada con la forma de razonamiento (KPM).

Después, se reconstituye el grupo como seis osos en el salón, para descomponerlo de nuevo en 6 x 1, reforzado por el elemento narrativo de los osos que van a dormir al dormitorio, pero cada uno en su cama. Para Irene, la descomposición de los números con el 1 como unidad iterativa, base para determinar el cardinal de un conjunto (procedimientos, KoT), es de vital importancia, puesto que designa la constitución del propio conjunto (propiedades, KoT). De nuevo, estos aspectos son clave para favorecer el desarrollo del pensamiento estructural en sus alumnos.

En la segunda parte de la lección, en la que los niños resuelven los problemas planteados por la profesora, estos tienen que crear una descomposición del número indicado en cuatro sumandos y representarlo en dos registros de representación distintos (icónico-gráfico y simbólico-numérico) (Figura 3) (registros de representación, KoT; estrategias, KMT). Este aspecto pone de relieve su conocimiento del significado del signo igual en conexión con la interpretación operacional del signo (propiedades, KoT). El trabajo de los niños se encuentra en el Nivel 1, el nivel rígido operacional, según Rittle-Johnson et al. (2011). A lo largo de la sesión y en todos los sistemas de representación, Irene refuerza este mismo sentido operacional del trabajo con equivalencia numérica.

Posible gestión alternativa de la sesión para fomentar el pensamiento algebraico y conocimiento especializado evocado al investigador

A continuación, se procede a debatir en mayor profundidad ciertos aspectos de una posible gestión alternativa de los episodios previamente descritos para fomentar el pensamiento algebraico de los alumnos. Las sugerencias se podrían distribuir en diversas sesiones en función del objetivo concreto del profesor en cada momento, de modo que se facilite el desarrollo de habilidades específicas de razonamiento algebraico.

Por lo que respecta a la importancia de la sistematización para fomentar el reconocimiento de patrones o regularidades numéricas y la búsqueda de generalizaciones, la profesora podría completar las descomposiciones hasta que el primer sumando sea cero y, al mismo tiempo, hacer que los alumnos reflexionen sobre lo que ocurre en cada sumando y en el total (Figura 4). Mediante el estudio de estos patrones, es posible introducir estructuras más complejas relacionadas con el número, las operaciones y sus propiedades, propiciando el desarrollo de un razonamiento algebraico clave en los alumnos durante el proceso de resolución de ecuaciones algebraicas a las que se enfrentarán en el futuro (conexión de complejización, KSM). Entre estas, destacamos la propiedad compensativa de la suma y la interpretación relacional del signo igual. A partir de la acción, la docente generó cada una de las descomposiciones retirando uno de los osos del salón e incorporándolo al baño de manera ordenada y sucesiva (*oportunidad*). Una gestión alternativa podría centrar la atención en el patrón creado por cada descomposición y en la relación entre los dos sumandos. Esta gestión podría basarse en el conocimiento de la propiedad compensativa de la suma (propiedades, KoT) y hacer uso de esta propiedad para generar las descomposiciones (procedimientos, KoT), lo que podría haber facilitado la construcción de todas las descomposiciones posibles del número 6 (forma de validación, KPM) (Figura 4). Además de fomentar el reconocimiento de regularidades numéricas en este momento y, por su relevancia en esta etapa de iniciación a la designación simbólica (expectativas de aprendizaje, KMLS), se podría haber comenzado a trabajar explícitamente en la manipulación sintáctica guiada de los símbolos, introduciendo el registro de representación simbólico-numérico(el papel de los símbolos, KPM) para representar paso a paso las transformaciones de la situación (incluyendo el signo igual para establecer la relación entre expresiones numéricamente equivalentes y reforzar su interpretación relacional; definiciones y propiedades, KoT). Lo podía haber hecho, por ejemplo, en la pizarra utilizando expresiones de tipo 6+0=5+1, 5+1=4+2, 4+2=3+3, 3+3=2+4, 2+4=1+5 y 1+5=0+6. De este modo, a través del lenguaje, podría enfatizar al mismo tiempo la comparación de estas equivalencias numéricas representadas con el material Numicon® (estrategias, KMT), lo que facilitaría la comprobación con el resto de las descomposiciones, una a una, superponiendo todas las piezas (Figura 6).

Insert Figure 6 here

La tarea propuesta en el párrafo anterior sobre la propiedad compensativa de la suma y la equivalencia numérica tiene lugar a través del proceso matemático de la comparación para buscar relaciones. Así se facilita la introducción inicial de los alumnos al nivel 4, el nivel relacional comparativo, según Rittle-Johnson et al. (2011) (forma de génesis epistemológica, KPM).

En un momento determinado de la lección, Irene introduce el concepto del cero como la ausencia de cantidad (concepto, KoT), y pregunta: "*¿Cuántos osos hay ahora en el dormitorio? ¿Y en la cocina?"* (*oportunidad*). En una gestión alternativa en la que se contase el número de osos en la casa teniendo en cuenta las estancias vacías hubiese permitido a los alumnos experimentar (en ese momento y durante la lección de manera sistemática) que, cuando se suma 0 a un número natural, el resultado no varía. De este modo, se hubiesen podido establecer de manera intuitiva las bases de la propiedad del elemento neutro de la suma (propiedades, KoT) basándose en la extensión de los ejemplos aritméticos mediante un proceso de generalización (conexión de complejización, KSM). Aquí queremos señalar que Irene tiene en cuenta este aspecto en el diseño de la hoja de actividades que reparte a los niños al final de la sesión (Figura 3) (*oportunidad*). Para ayudar a sus alumnos a reconocer esta propiedad, podría haber formulado preguntas de tipo "*¿Qué pasa con las estancias en las que no hay osos? ¿Necesitamos tener en cuenta las estancias vacías para saber cuántos osos hay en total en la casa? Si sabemos que hay seis osos en total en la casa y que cinco están en el salón y uno en el baño, ¿puede haber alguno en la cocina?*" (estrategias, KMT).

Por lo que respecta a una tarea inicial sobre la propiedad conmutativa desde un enfoque algebraico, se podría intentar que los alumnos descubran la equivalencia entre dos descomposiciones de tipo a+b=b+a. Cuando surge la descomposición de 2 (salón) y 4 (baño), el orden en que Irene pregunta cuántos osos hay en cada una de las estancias está invertido ("*¿Cuantos hay en el baño?* (4), *¿Cuántos hay en el salón?* (2), igualándolos a 4 y 2 (*oportunidad*).

El conocimiento de que la suma no es semánticamente conmutativa (fenomenología y propiedades, KoT), el uso de una representación espacialmente opuesta a la actual de 4 y 2 con las piezas Numicon® (recursos, KMT) y la importancia del orden al formular las preguntas a los estudiantes (comenzando por el salón y después el baño) (estrategias, KMT) podrían ayudarles a reflexionar sobre la equivalencia de ambas representaciones desde el punto de vista del resultado, base de la propiedad conmutativa.

Por último, aunque consideramos que queda fuera del alcance de los contenidos matemáticos con los que se trabaja en la educación infantil, queremos incluir un comentario final sobre la propiedad asociativa de la suma de números naturales como un ejemplo más del estudio de estructuras y sistemas extraídos a partir de cálculos y relaciones. La última descomposición que Irene propone para actuar del mismo modo con el material es 1+1+4 (*oportunidad*). Un enfoque algebraico de esta actividad le permitiría proponer a sus alumnos una situación en la que pudiesen observar que 1+1+4=(1+1)+ 4 =2+4=1+(1+4) =1+5, sería la base de la propiedad asociativa de la suma de números naturales y una expresión en la que también se refleja la propiedad conmutativa (propiedades, KoT).

Conclusiones

Las características de Irene y su implementación de la sesión nos han permitido identificar algunos elementos de conocimiento especializado necesarios en el profesor de infantil para fomentar el pensamiento algebraico de sus alumnos, estableciendo relaciones de estructura aditiva. El objetivo de Irene no era fomentar el pensamiento algebraico sino presentar la descomposición como un contenido relevante para una clase de alumnos de 5 años (KMLS). No obstante, existen elementos de conocimiento movilizado en su práctica docente que han mostrado ser relevantes para fomentar el razonamiento algebraico. En el ámbito del MK, el conocimiento de la enseñanza del número seis en esta etapa emerge como un elemento clave basado en: la relación *parte-todo* (KoT) y el tipo de problemas (combinación) que hacen que surja (KoT); la enumeración como proceso para construir un conjunto en función de criterios cuantitativos (KoT); la subitización de los patrones geométricos con Numicon® para respaldar la reconstrucción del *todo* (KoT); y la diversidad de registros con los que se pueden representar los números (KoT). Cabe señalar también el uso riguroso del lenguaje para fomentar el razonamiento flexible en los estudiantes en cada registro, y para conectar los diversos sistemas de representación (KoT), así como para fomentar progresivamente un avance hacia la simbolización y la formalización (KPM), ambos aspectos fundamentales del pensamiento algebraico. No se trata de que los profesores aprendan matemáticas avanzadas, como parecen sugerir los cursos que se presentan en los artículos académicos consultados por Parks y Oliver (2015). El foco debe situarse en las bases epistemológicas de los contenidos matemáticos de la etapa, algunos de los cuales son de naturaleza prematemática, así como en sus conexiones con contenidos más elevados.

En el dominio del PCK, destacamos su conocimiento de lo siguiente: las necesidades de los estudiantes para gestionar el uso de recursos de modo que los conceptos numéricos se hagan tangibles y visibles (KFLM); la necesidad de presentar situaciones que sean a la vez significativas para los alumnos (KFLM) y relevantes para la tarea de descomposición numérica (KoT); el papel de la conversión entre sistemas de representación, de modo facilite la comprensión de los conceptos numéricos (KMT, KFLM) y las características y limitaciones de los recursos utilizados (KMT).

Por otro lado, el orden en que la profesora progresa en sus movimientos y sitúa los recursos, el orden en que propone las correspondientes descomposiciones binarias, la necesidad de correspondencia entre la representación que los estudiantes crean con Numicon® y la que la docente elabora con contadores, y la presentación simultánea de las diversas descomposiciones trabajadas (invitando a comparar como medio para establecer relaciones entre los sumandos – KPM) son todas decisiones pedagógicas respaldadas por elementos del *Conocimiento de la enseñanza de matemáticas* especialmente relevantes para el fomento del razonamiento algebraico.

Estas decisiones estimulan la búsqueda de relaciones, que establecerían las bases sobre las que presentar las propiedades de las operaciones de la matemática escolar en esta etapa inicial, completadas por el conocimiento que el docente posee sobre estas propiedades (KoT), y nos permiten reflexionar sobre el conocimiento especializado que respaldaría la gestión desde la conexión de complejización de la aritmética progresiva hacia el álgebra (KSM). Incluso podría hablarse de la comparación como una conexión transversal entre la equivalencia numérica y las ecuaciones (KSM).

El subdominio *Conocimiento de la estructura matemática* podría haber desempeñado un papel especial en nuestras reflexiones sobre el conocimiento especializado deseable para fomentar el razonamiento algebraico. El conocimiento de la conexión entre el álgebra y la aritmética (conexión de complejización) ha provocado la identificación de los elementos de conocimiento especializado tanto en el dominio del MK como en el del PCK. Este subdominio permite al docente añadir otra dimensión al contenido matemático que tiene que impartir en esta etapa, con repercusiones específicas en su conocimiento sobre cómo llevarlo a la práctica (PCK).

Como indicamos en estudios previos (Muñoz-Catalán et al., 2017), el modelo MTSK ha demostrado ser relevante para analizar las prácticas docentes en la etapa infantil, subrayando la sutileza y especificidad del conocimiento del profesor (nuestras reflexiones nos conducen a concluir que este conocimiento es conceptualmente denso, altamente cohesivo y con una gran carga matemática). También arroja luz sobre un elemento del conocimiento que hasta ahora parecía ser externo: *Conocimiento de las prácticas matemáticas.* El carácter informal de las prácticas docentes utilizadas en la etapa infantil, y su relación con el uso de recursos, posiblemente haya resultado en una consideración menor de este subdominio del conocimiento respecto a los profesores de infantil. No obstante, en nuestro análisis de la lección, la comparación de los resultados emerge como una práctica potente para establecer relaciones entre elementos matemáticos (pensamiento relacional) y debería considerarse el germen de otros procesos matemáticos tales como la clasificación o la definición. La comprobación de los resultados como vía para que los alumnos puedan validar las repuestas y el uso riguroso del lenguaje para potenciar la formalización y abstracción progresivas de los conceptos matemáticos emergen como otras prácticas características de esta etapa que pueden estimular el razonamiento algebraico.

Los resultados discutidos en este artículo podrían ser útiles para mejorar la calidad de las clases de matemáticas en esta etapa educativa. De hecho, han servido como instrumento para análisis posteriores de la lección, realizados conjuntamente por la profesora y los investigadores-formadores en el entorno colaborativo que se describe en la sección 5 anterior. La estrecha colaboración entre ellos ha permitido a los docentes proponer e implementar diseños perfeccionados de la actividad, basados en aspectos del conocimiento especializado identificado en nuestro trabajo para facilitar el desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos.

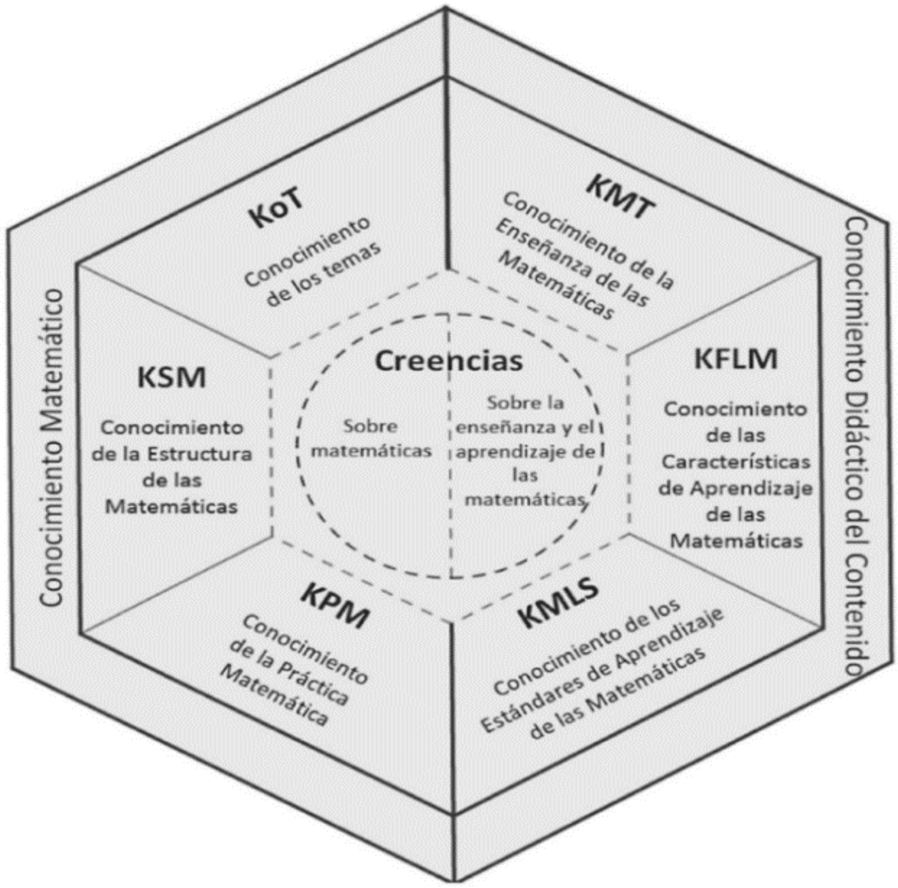

Figure 1. *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK) (Traducido de Carrillo et al., 2018).

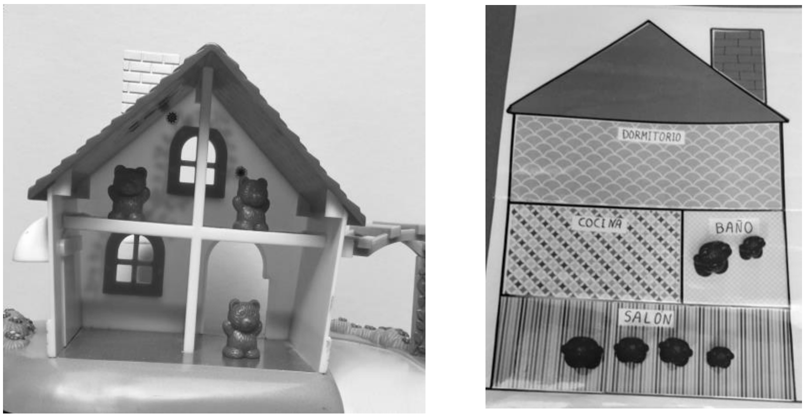

Figura 2. La casa de muñecos y su correspondiente representación en una lámina (2a y 2b, respectivamente).

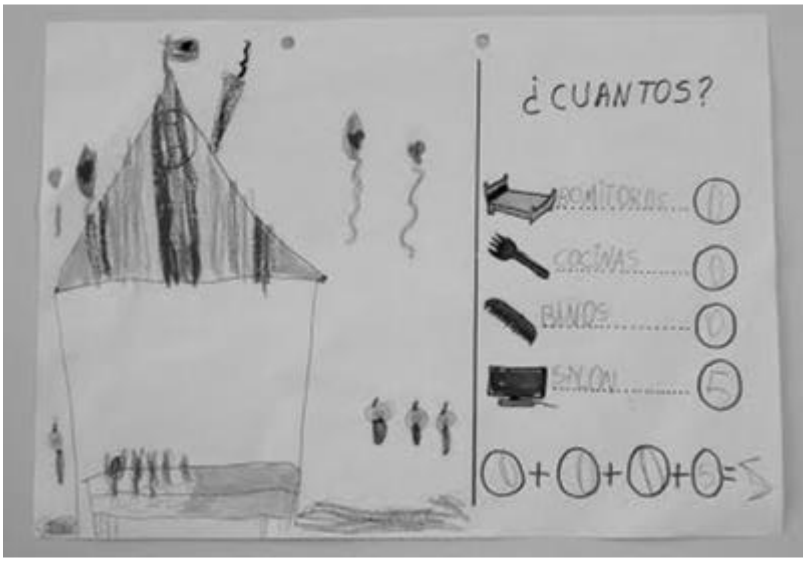

Figura 3. Hoja de actividades combinando la representación icónico-gráfica y la representación simbólico-numérica.

Figura 4. Representación de las descomposiciones binarias del 6 con el material Numicon®.

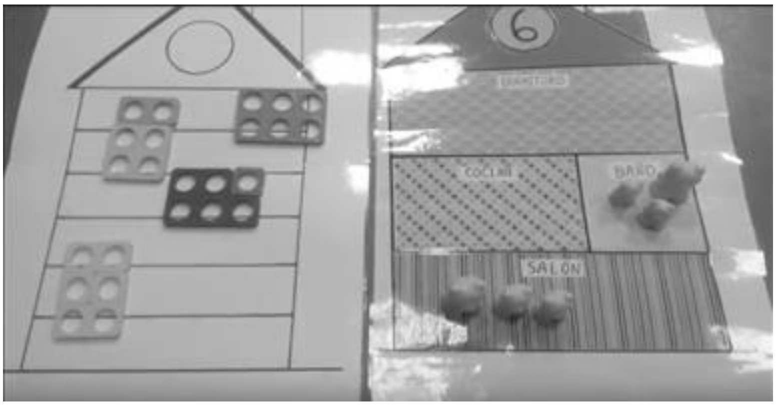

Figura 5. Descomposiciones del 6 en dos sumandos con el material Numicon®.

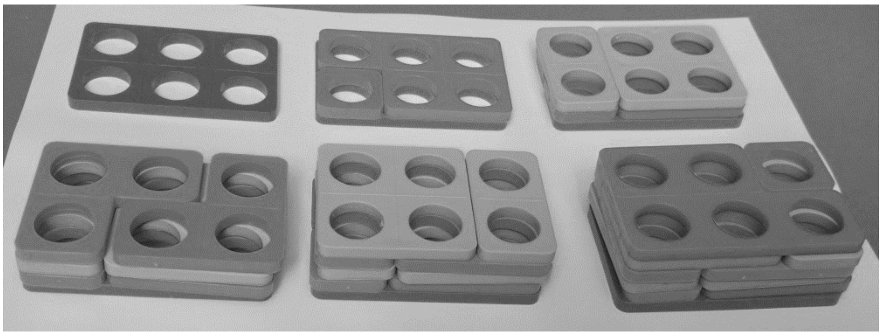

Figura 6. Validación de todas las descomposiciones del 6 mediante la superposición de las piezas.

Tabla 1: Síntesis del conocimiento especializado para fomentar el pensamiento algebraico identificado en la observación de la clase de Irene

Subdominio	Categorías	Conocimiento especializado movilizado	Conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades
KoT	Registros de representación	-Utiliza una representación icónico-gráfica de la casa de muñecos para reforzar el contenido de la descomposición aditiva. -Utiliza un lenguaje específico como registro de representación.	-Conocer la importancia de conectar cada descomposición con distintos recursos manipulativos y sus correspondientes representaciones simbólicas en ambas direcciones.
	Definiciones y propiedades	-Irene dedica tiempo a crear el conjunto y anima a los alumnos a concebirlo como tal. -Plantea problemas de combinación para enfatizar el esquema parte-todo. - Presenta a la familia de osos uno a uno (formando el conjunto por iteración de la unidad). -Utiliza el signo igual en conexión con su interpretación operativa.	-Conocer las propiedades conmutativa y compensativa de la suma. -Saber que la suma no es semánticamente conmutativa. -Concebir el cero como la ausencia de cantidad y su rol en la suma cuando se añade a un número natural (elemento neutro de la suma). -Conocer y enfatizar con distintas representaciones durante la clase el uso del signo igual como signo de equivalencia numérica.
	Procedimientos	- Valora la subitización como estrategia importante de conteo para la composición y descomposición aditiva del número 6. - Para Irene, la base para determinar el cardinal de un conjunto es la descomposición de los números con 1 como unidad iterativa.	-Utilizar la propiedad compensativa de la suma para generar toda la descomposición del número 6.
	Fenomenología	-Cuenta la historia de una familia de osos como contexto relevante para el contenido de la descomposición de la suma.	
KSM	Conexión de complejización		-Saber que el fomento de la identificación de patrones o regularidades numéricas mediante la sistematicidad es la base de las habilidades clave del razonamiento algebraico necesario para la resolución de ecuaciones algebraicas.
KPM	Papel del símbolo y del lenguaje formal	-A través del lenguaje, Irene avanza hacia la simbolización progresiva y la formalización del conocimiento matemático (el número natural como cardinal de un subconjunto).	-Conocer la importancia de trabajar abiertamente en la manipulación de símbolos guiada sintácticamente, introduciendo el registro simbólico de la representación.

	Formas de validación	-Irene y sus alumnos comprueban la descomposición con el material manipulativo Numicon® a modo de validación de la respuesta.	-Saber que la sistematicidad en la generación de la descomposición del número 6 podría haber garantizado la creación de todas las descomposiciones posibles.
	Forma de génesis epistemológica		-Saber que el proceso matemático de comparación fomenta la búsqueda de relaciones, patrones y generalizaciones.
KMT	Estrategia	-Hace uso de una narración sobre una familia de osos como estrategia didáctica. -Facilita la conversión en ambas direcciones entre las representaciones utilizadas (los ositos, la lámina y el Numicon®).	-Ser consciente de que contar el número de osos en la casa teniendo en cuenta las estancias vacías facilita la comprensión del significado del 0 y su papel en la suma (elemento neutro). -Ser consciente de que mantener el orden de las estancias cuando se pregunta a los alumnos cuántos osos hay en ellas facilita la comprensión del significado de la propiedad conmutativa de la suma. -Ser consciente de que establecer la equivalencia entre las expresiones conmutativas y el resto de las descomposiciones refuerza la interpretación relacional del signo igual.
	Recursos didácticos	-Utiliza las preguntas con palabras determinadas, pausas y vocabulario específico para resaltar los elementos importantes de la tarea. -Es consciente del potencial del Numicon®.	-Saber que la comparación de la representación espacialmente opuesta 4+2 y 2+4 (p. ej.) con Numicon®, puede promover la reflexión sobre la equivalencia de ambas representaciones desde el punto de vista del resultado (propiedad conmutativa).
KFLM	Formas de interacción con el contenido	-Espera que el primer acercamiento de los alumnos a los problemas de combinación ocurra de manera dinámica.	
KMLS	Expectativas de aprendizaje y secuenciación con temas anteriores	-Propone la historia de los osos como una situación que los alumnos pueden comprender porque ya han trabajado con ella con números más pequeños durante los cursos anteriores.	-Valorar la importancia de la iniciación a la designación simbólica en esta etapa educativa.

Acknowledgements / *Agradecimientos*

This work has been partially supported by the project: "Specialized knowledge of mathematics teachers and teacher training" (RTI2018-096547-B-I00, from the Ministry of Science, Innovation and Universities, Spain). It is also linked to the Ibero-american MTSK Network of the *Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado* (AUIP). / *Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: "Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado" (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España). Asimismo, está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).*

References / *Referencias*

Adelman, C. (1999). *Answers in the Toolbox: Academic intensity, attendance patterns, and bachelor's degree attainment*. U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement.

Atkinson, R., Campling, R., & Wing, T. (2015). *Numicon Infantil 5 años, Bases firmes. Cuaderno de Ejercicios* [Numicon 5 years, firm bases. Workbook]. Oxford University Press.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University press.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389-407.

Cañadas, M. C, Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2000). Early-algebra, early-arithmetic: Treating operations as functions. *Plenary Presentation at PME-NA XXII.* PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Ribeiro, C.M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the "Dissecting an equilateral triangle" problem. *RIPEM - International Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia 6*(2), 1-13.

Clements, D. H., Baroody, A. J., & Sarama, J. (2013). *Background research on early mathematics. National Governor's Association, Center Project on Early Mathematics*. http://www.nga.org/files/live/sites/NGA/files/pdf/2013/1311SEME-Background.pdf

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Denzin, N. (1989). *The Research Act* (3rd ed.). Prentice Hall.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). Macmillan & Co.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). National Research Council, National Academy Press.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Sage.

Liñán, M. M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Unpublished Doctoral Dissertation. Universidad de Huelva.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA, 1*(1), 33-46.

Morales, R., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, *11*(4), 233-252.

Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2011). Similar but different – investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. In M. Pytlak, T.

Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1802-1811). PME

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., & Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, *24*, 4-19.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Parks, A. N., & Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education, 36*(2), 124-141.

Ramírez, M., & Rodríguez, P. (2011). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Unión, revista iberoamericana de educación matemática, 26*, 41-55.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31*, 101-112.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 85-104.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17* (1), 153-172.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números, 77,* 5-34.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. In N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Sage.