



Universidad de Sevilla

MÁSTER INTERUNIVERSITARIO EN FÍSICA NUCLEAR

APLICACIÓN DEL MODELO DE
ICHIMURA-AUSTERN-VINCENT A LA
INTERPRETACIÓN DE MEDIDAS
INCLUSIVAS DE $^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$

Trabajo de Fin de Máster

Guadalupe Villanueva Cosme

Tutores:

Antonio M. Moro Muñoz

Jesús Casal Berbel

3 de noviembre de 2023

Resumen

El estudio de reacciones nucleares de ruptura de un núcleo débilmente ligado en dos o más fragmentos es un proceso de gran interés en la rama de la Física Nuclear. En este trabajo, consideraremos una reacción nuclear que puede describirse como: $a(b+x) + A \rightarrow b + B^*$, donde B^* representa todos los canales de salida posibles que puede formar el sistema $x + A$. En un experimento, cuando los estados finales no están completamente determinados, es decir, no se detectan todas las partículas salientes, se dice que la reacción es inclusiva. La interpretación teórica de este tipo de reacciones es complicada, puesto que existen muchos procesos que pueden contribuir a la producción del fragmento b . Los procesos de ruptura inclusiva los separaremos en tres contribuciones: la ruptura elástica (EBU), la ruptura no elástica (NEB) (que incluye los procesos de INBU, Transferencia y ICF) y la fusión completa (CF).

Para el estudio teórico de reacciones nucleares de este tipo, nos valemos del formalismo de Ichimura-Austern-Vincent (IAV) [Phys. Rev. C 32, 431 (1985)] en su versión *prior*. Dicho formalismo está implementado en el código computacional “Smoothie”, desarrollado por el Dr. Jin Lei junto con el tutor de este trabajo D. Antonio M. Moro, que por lo tanto, utilizaremos para encontrar la sección eficaz total de transferencia para la reacción objeto de estudio. La motivación para la realización de este trabajo reside en extender el método de IAV a situaciones en las que el eyectil b es un sistema no ligado, que por lo tanto puede formarse en varias configuraciones de energía y momento relativos, y además decaerá tras la colisión en sus constituyentes.

Precisamente por esto y porque disponemos de datos experimentales [Phys. Rev. C 104, 024609 (2021)] con los que comparar los datos teóricos que obtengamos, escogemos la reacción $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$ en las que el proyectil a es el ^9Be , que es un núcleo borromeo formado por dos partículas alfa y un neutrón, y el eyectil b es el ^8Be ($\alpha + \alpha$), que efectivamente es un núcleo que no forma estados ligados. Incluiremos esto en nuestros cálculos teóricos mediante los solapamientos de ^9Be en su estado fundamental, con ^8Be en cada uno de sus estados representativos. Estos solapamientos se calculan dentro del formalismo de armónicos hiperesféricos, que permite construir la función de onda de tres cuerpos para el núcleo de ^9Be . De esta forma, se incorpora la estructura del proyectil de tres cuerpos dentro del formalismo IAV, desarrollo que resulta novedoso. El cálculo de los solapamientos ha sido realizado por el tutor D. Jesús Casal.

El objetivo final del trabajo será comparar los cálculos de sección eficaz total de transferencia obtenidos para diferentes valores de energía incidente de ^9Be cercanas a la barrera de Coulomb, con los datos experimentales que disponemos, además de con los cálculos teóricos siguiendo el método CRC desarrollados por F. Gollan *et al.* para la reacción nuclear $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})^{198}\text{Au}$ [Phys. Rev. C 104, 024609 (2021)].

Abstract

Nuclear reactions, in which a weakly bound nucleus breaks into two or more fragments, are relevant process to study in nuclear physics. In this work, we will consider a nuclear reaction that can be described as: $a(b + x) + A \rightarrow b + B^*$, where B^* is any possible configuration of the $x + A$ system. In an experiment, if the final states are not completely determined, that is, not all outgoing particles are detected, the reaction is called inclusive. The theoretical interpretation of these reactions is complicated due to the fact that there are many processes that can contribute to the production of the fragment b . Inclusive breakup processes are divided into three contributions: elastic breakup (EBU), non-elastic breakup (NEB) (the INBU, transfer, and ICF processes are included) and complete fusion (CF).

For the theoretical study of this type of nuclear reactions, we use the Ichimura-Austern-Vincent (IAV) formalism [Phys. Rev. C 32, 431 (1985)] in its *prior* version. This formalism is implemented in the computational code “Smoothie”, developed by Dr. Jin Lei in collaboration with the supervisor Antonio M. Moro. We use this code to determine the total transfer cross section for the reaction we are working on. The aim of this work is to extend the IAV method to situations where the projectile b is an unbound system that can be formed in different energy and relative momentum configurations, and decays into its constituent parts after the collision.

To do this, and because experimental data are available [Phys. Rev. C 104, 024609 (2021)] to compare with the theoretical calculations, we choose the reaction $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$ where the projectile a is ^9Be , which is a borromean nucleus composed of two alpha particles and one neutron, and the ejectile b is $^8\text{Be}(\alpha + \alpha)$, which is indeed a system that does not form bound states. We will account for this in our theoretical calculations by means of the overlaps of ^9Be in its ground state with ^8Be in each of its representative states. These the overlaps are computed in the hyperspherical harmonics framework, which allows us to construct the three-body wave function for the ^9Be nucleus. In this way, the three-body projectile structure is integrated into the IAV formalism, which is the innovative approach of this work. The calculation of the overlaps was carried out by the supervisor D. Jesús Casal.

The ultimate goal of this work is to compare the calculated total transfer cross sections for different incident energies of ^9Be near the Coulomb barrier, with the experimental data available, and with theoretical calculations using the CRC method, both acquired from Gollan *et al.* for the nuclear reaction $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})^{198}\text{Au}$ [Phys. Rev. C 104, 024609 (2021)].

Índice general

1. Introducción	1
2. Formalismo Teórico	10
2.1. Modelo de Ichimura-Austern-Vincent	10
2.2. Relación entre la forma <i>post</i> y <i>prior</i>	17
2.2.1. Modelo de Udagawa y Tamura	17
2.2.2. Modelo de Hussein y McVoy	18
2.2.3. Relación entre teorías	18
2.3. Modelo de tres cuerpos para ${}^9\text{Be}$	19
2.4. Modelo de dos cuerpos para ${}^8\text{Be}$	22
2.5. Solapamiento entre ${}^9\text{Be}$ y ${}^8\text{Be}$	24
3. Estudio de la reacción nuclear inclusiva ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$	26
3.1. Cálculos de estructura	28
3.2. Cálculos de reacción	33
4. Conclusiones	41
Apéndices	44
A. Potencial Double Folding São Paulo	44
B. Potencial Koning-Delaroche	46
C. Métodos de interpolación para el cálculo de la sección eficaz total de transferencia inclusiva	48
Bibliografía	57

Índice de figuras

1.1.	Esquema de niveles de ${}^9\text{Be}$. Las líneas punteadas marcan la energía umbral de ruptura para las diferentes fragmentaciones posibles [9].	3
1.2.	Espectro energético del protón resultante en la reacción nuclear $A(d, p)X$	5
1.3.	Mecanismos de dispersión de la reacción nuclear ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$	6
1.4.	Esquema de niveles energéticos para el ${}^8\text{Be}$ [9].	9
2.1.	Coordenadas utilizadas en la reacción de ruptura.	11
2.2.	Los tres conjuntos de coordenadas de Jacobi escaladas.	20
2.3.	Coordenadas de Jacobi tipo T del sistema a tres cuerpos para el ${}^9\text{Be}$	21
2.4.	Coordenadas utilizadas para describir el ${}^8\text{Be}$	23
3.1.	Esquema de la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$	26
3.2.	Esquema de desintegración del ${}^{198}\text{Au}$ [6].	27
3.3.	Representación de los solapamientos en función de r_{bx} . Entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con el estado fundamental 0^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV) y entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ y el estado excitado 2^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E \approx 3$ MeV).	30
3.4.	Intensidad de cada pseudoestado para el ${}^8\text{Be}$. Los valores redondeados representan los pseudoestados para los cuales hemos realizado los cálculos de la sección eficaz de transferencia.	31
3.5.	Comparación entre los solapamientos radiales de ${}^9\text{Be}$ con el ${}^8\text{Be}$, ambos en su estado fundamental, con la función radial solución de un potencial de WS fenomenológico.	32
3.6.	Sección eficaz elástica relativa a la sección eficaz de Rutherford para diferentes valores de E_{lab} del proyectil ${}^9\text{Be}$ cuando el blanco es ${}^{197}\text{Au}$. Comparación de los datos experimentales de la Ref. [69] con lo obtenido mediante el código de canales acoplados FRESCO utilizando el potencial SPP.	34
3.7.	Secciones eficaces diferenciales de transferencia inclusiva en función de la energía cinética final total, con el ${}^8\text{Be}$ en diferentes configuraciones, para las energías incidentes de ${}^9\text{Be}$ $E_{cm}^i({}^9\text{Be}) = 36$ y 48 MeV.	36
3.8.	Representación esquemática de las energías relevantes para la reacción nuclear inclusiva ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$	37
3.9.	Sección eficaz de transferencia inclusiva en función de la energía del sistema α - α para una energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$ igual a 36 MeV.	38

3.10.	Representación gráfica de la sección eficaz diferencial de transferencia, en función de la energía del sistema α - α para una energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$ igual a 36 MeV. Obtenido mediante el Método 2. El área sombreada en gris bajo la curva 2^+ representa de forma aproximada la anchura de la resonancia de ${}^8\text{Be}$ en el estado $J^\pi = 2^+$	39
3.11.	Representación de la sección eficaz de transferencia para la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be}){}^{198}\text{Au}$, para diferentes valores de energía incidente de ${}^9\text{Be}$. Comparamos los datos teóricos obtenidos con los datos experimentales del artículo de la Ref. [4].	40
3.12.	Representación de la sección eficaz de transferencia para la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be}){}^{198}\text{Au}$, para diferentes valores de energía incidente de ${}^9\text{Be}$ escalando por los factores espectroscópicos del cálculo VMC de la Ref. [72]. Comparamos los cálculos teóricos obtenidos mediante el modelo de IAV, con los datos experimentales y los cálculos teóricos obtenidos mediante el método CRC de la Ref. [4]	40
A.1.	Coordenadas necesarias para definir la interacción entre dos núcleos mediante un potencial de tipo “Double Folding” [73].	44
C.1.	Representación esquemática de $\Delta\varepsilon_i$	49
C.2.	Divisiones en intervalos para llevar a cabo el Método 2 para $E_{c.m.}^i({}^9\text{Be}) = 36$ MeV para $J^\pi = 2^+$	49
C.3.	Representación gráfica de la las secciones eficaces de transferencia (Método 1) y secciones eficaces diferenciales de transferencia (Método 2) para la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$, en función de la energía $E_{\alpha\alpha}$ para diferentes valores de energía incidente de ${}^9\text{Be}$	51

Índice de tablas

1.1. Energía de enlace por nucleón, energía de separación de un protón y un neutrón, posibles formas de ruptura del núcleo y valores de Q correspondientes para diferentes tipos de núcleos. (d representa al deuterón, núcleo del átomo de deuterio, que está formado por un protón y un neutrón. t representa al tritón, núcleo del átomo de tritio, que está formado por un protón y dos neutrones.) [6, 7].	2
3.1. Características relevantes del canal de reacción (${}^9\text{Be}, {}^8\text{Be}$) que surge de la reacción de transferencia de un neutrón del sistema ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$. [4, 6] . . .	27
3.2. Norma de los solapamientos entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con cada pseudoestado de ${}^8\text{Be}$ seleccionado para calcular la sección eficaz de transferencia. Los valores resaltados son los relativos a los solapamientos radiales representativos que se muestran en la figura 3.3.	32
3.3. Potenciales utilizados para el cálculo de la sección eficaz diferencial de transferencia inclusiva siguiendo el formalismo de IAV en su forma <i>prior</i> para la reacción nuclear inclusiva ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$. (SPP representa el potencial tipo “Double Folding: São Paulo” y KD representa el potencial tipo “Koning-Delaroche”). [66, 67, 68]	35

Capítulo 1

Introducción

El núcleo atómico es un sistema compacto formado por protones y neutrones, conocidos genéricamente como nucleones, ya que se comportan de forma similar bajo la acción de la fuerza nuclear fuerte. El estudio de reacciones nucleares de ruptura de un núcleo en dos o más fragmentos es un proceso de gran interés en la rama de la Física Nuclear. En concreto, una reacción de este tipo de especial interés es aquella en la que alguno de los núcleos que interviene es un núcleo débilmente ligado, ya sean núcleos débilmente ligados estables (${}^6,{}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$), como inestables (${}^6,{}^8\text{He}$, ${}^{7,10,11}\text{Be}$) [1, 2, 3]. Son de especial interés ya que presentan propiedades particulares que permiten utilizarlos como núcleos “prueba” para desarrollar modelos teóricos capaces de describir su estructura singular y sus mecanismos de reacción complejos. Además, juegan un papel importante en la rama de la astrofísica nuclear debido a que intervienen en la nucleosíntesis primordial, en las cadenas de reacciones de captura en estrellas masivas y en la síntesis de elementos pesados [4].

Núcleos de tipo ligeros, estables y débilmente ligados son los que nos interesa estudiar en este trabajo, y se definen como aquellos que no sufren ningún tipo de decaimiento radiactivo, su número másico es relativamente pequeño (del orden de la decena), su energía de ligadura por nucleón es menor que la de sus vecinos en la tabla periódica, por lo que presentan un umbral de ruptura bajo, y poseen una estructura de racimo (en inglés, de *cluster*) [5].

Una de las propiedades distintivas que hace que este tipo de núcleos sean objeto de estudio es la alta probabilidad de ruptura que presentan al interactuar con otros núcleos. Esto es debido a que poseen un primer umbral de ruptura a una energía relativamente pequeña. La influencia de este proceso en otros canales de reacción como la dispersión elástica, la transferencia o la fusión, modifica la dinámica general de la reacción en comparación con proyectiles fuertemente ligados [4].

Ya que existe una alta probabilidad de que se produzca una reacción nuclear de ruptura cuando un núcleo débilmente ligado interactúe con otro, podremos obtener información acerca de la estructura de los núcleos que se han fragmentado, así como su energía de enlace, factores espectroscópicos y momentos angulares, entre otras propiedades, lo que nos permitirá entender mejor la dinámica de las reacciones entre sistemas compuestos [5]. Es precisamente por esto, por lo que anteriormente dijimos que suelen escogerse como núcleos “prueba” en desarrollos teóricos en este ámbito científico. Ejemplos de este tipo de núcleos son, como ya apuntamos anteriormente, el ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ y ${}^9\text{Be}$, entre otros. Algunas de sus propiedades se muestran en la tabla 1.1.

En este contexto, nos centraremos concretamente en el núcleo ${}^9\text{Be}$, ya que es el pro-

Núcleo	BE/A (MeV)	S_p (MeV)	S_n (MeV)	Clúster	Q (MeV)
${}^6\text{Li}$	5.33	4.43	5.66	$\alpha + d$	-1.47
${}^7\text{Li}$	5.61	9.97	7.25	$\alpha + t$	-2.47
${}^9\text{Be}$	6.46	16.89	1.66	$\alpha + \alpha + n$	-1.57

Tabla 1.1: Energía de enlace por nucleón, energía de separación de un protón y un neutrón, posibles formas de ruptura del núcleo y valores de Q correspondientes para diferentes tipos de núcleos. (d representa al deuterón, núcleo del átomo de deuterio, que está formado por un protón y un neutrón. t representa al tritón, núcleo del átomo de tritio, que está formado por un protón y dos neutrones.) [6, 7].

yectil utilizado en la reacción nuclear que estudiaremos en este trabajo. La estructura de este núcleo se puede representar mediante una estructura tipo borromeo de tres cuerpos, compuesto por dos partículas α y un neutrón débilmente ligado, tal y como podemos observar en la tabla 1.1. Si atendemos a dicha tabla nuevamente vemos que, aunque se trata de un núcleo estable, la energía de separación es muy pequeña y, por lo tanto, como ya advertimos anteriormente, cuando colisione con un núcleo blanco podemos esperar que los efectos de ruptura sean muy relevantes [4, 5, 2]. En el caso concreto de nuestro trabajo el núcleo blanco será el ${}^{197}\text{Au}$.

A diferencia de otros casos como el ${}^6\text{Li}$ y el ${}^7\text{Li}$, que se fragmentan en dos cuerpos predominantemente⁽¹⁾ (tabla 1.1), en el caso de ${}^9\text{Be}$, al ser un modelo de tres cuerpos, hay diversos procesos de ruptura que pueden darse simultáneamente durante la reacción. Hay tres opciones más probables en las que el núcleo ${}^9\text{Be}$ puede dividirse en fragmentos diferentes [8, 9, 7]:

1. Fragmentación rápida (“prompt”) en $\alpha + n + n$. Este mecanismo presenta una energía umbral de ruptura $E_{BU} = 1.57$ MeV.
2. Ruptura resonante en ${}^8\text{Be} + n$. $E_{BU} = 1.66$ MeV.
3. Ruptura resonante en ${}^5\text{He} + \alpha$. $E_{BU} = 2.47$ MeV.

Los núcleos ${}^8\text{Be}$ y ${}^5\text{He}$ son núcleos no ligados con tiempo de vida media de $\approx 10^{-17}$ s y $\approx 10^{-21}$ s, respectivamente. En ambos casos, debido a que se trata de núcleos que no llegan a formar estados ligados, se ha observado que resultan igualmente en la emisión de dos partículas α y un neutrón [8]. En reacciones en las que está presente el ${}^9\text{Be}$, a energías alrededor de la barrera de Coulomb, se ha observado que la configuración del cluster ${}^8\text{Be} + n$ es predominante en comparación con la configuración ${}^5\text{He} + \alpha$ [10, 4]. Podemos observar el esquema de niveles de ${}^9\text{Be}$, así como el valor de las distintas energías umbrales para cada posible fragmentación en la figura 1.1.

Los diferentes mecanismos genéricos en los que un núcleo de este tipo puede fragmentarse cuando interacciona con otro núcleo son varios. El caso más simple es aquel en el que uno de los fragmentos interactuantes se rompe en otros dos, permaneciendo el núcleo blanco en su estado original. Podemos verlo de una forma más intuitiva como

(1) El ${}^6\text{Li}$ realmente también presenta una estructura de tres cuerpos, pero generalmente se rompen en $\alpha + d$, tal y como apuntamos en la tabla 1.1.

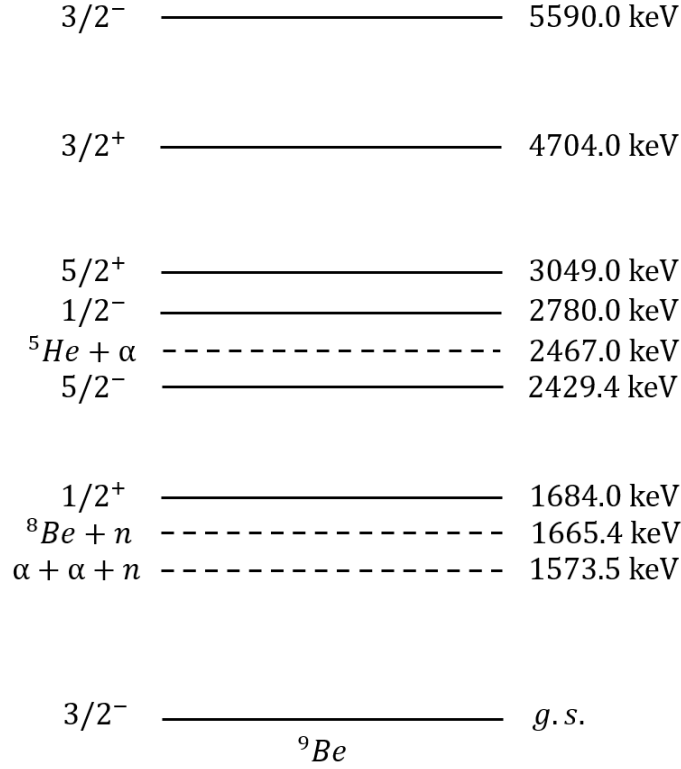


Figura 1.1: Esquema de niveles de ${}^9\text{Be}$. Las líneas punteadas marcan la energía umbral de ruptura para las diferentes fragmentaciones posibles [9].

$a + A \rightarrow b + x + A$, donde a representa el proyectil, A el blanco y $a = b + x$, por lo que el proyectil estará formado por dos cuerpos. Incluso en este caso más simple, veremos que la descripción teórica de este proceso no es trivial, ya que en el estado final tendremos que lidiar con la presencia de tres partículas, lo que dificulta en gran medida su estudio.

Cuando la reacción ha tenido lugar y los fragmentos finales, es decir, b, x y A (estado final del blanco) son conocidos por completo, se dice que la reacción es *exclusiva*. Si, por el contrario, los estados finales no están completamente determinados, es decir, no se detectan todas las partículas salientes una vez se produzca la reacción, nos referimos a ésta como reacción nuclear *inclusiva* [1, 11, 12]. Si nos encontramos en el primer caso, y además se cumple que las partículas finales son emitidas en el estado fundamental, nos encontramos en el caso de *ruptura elástica* o EBU debido a sus iniciales en inglés (*Elastic Break up*). En cualquier otro caso, la reacción se puede describir como $a + A \rightarrow b + B^*$, donde B^* representa cualquier configuración posible que pueda presentar el sistema $x + A$ en la expresión general descrita anteriormente.

Por lo tanto, la sección eficaz inclusiva total de ruptura para detectar la partícula b se obtendrá, si suponemos que únicamente dicha partícula es observada, sumando cada una de las secciones eficaces resultado de todas las posibles configuraciones que pueda presentar la partícula b una vez se dé la reacción. Estas posibles configuraciones son, en general, las siguientes:

- Procesos de ruptura elástica (EBU), en los cuales las tres partículas resultantes se emiten en el estado fundamental. Se cumple $a + A \rightarrow b + x + A_{gs}$. El subíndice en A_{gs} representa que el blanco, A , se encuentra en el estado fundamental o *ground state* en inglés [1].

- Procesos de ruptura inelástica (INBU), siglas en inglés de *Inelastic Breakup*. En estos procesos, la reacción va acompañada de la excitación de uno de los fragmentos resultantes. Si por ejemplo se excita el núcleo blanco, se cumplirá $a + A \rightarrow b + x + A^*$, mientras que si lo que se excita es b , se cumplirá $a + A \rightarrow b^* + x + A_{gs}$ [1].
- Procesos de transferencia de partículas. En este tipo de reacciones, como su propio nombre indica, ocurre una transferencia de partículas (normalmente nucleones) entre el núcleo proyectil y el núcleo blanco ⁽²⁾. [4]. Estos procesos resultan en estados ligados del sistema $A+x$. Podemos expresar este tipo de reacción como $a + A \rightarrow b + B$ donde $B \equiv A + x$ [1].
- Procesos de fusión incompleta (ICF), siglas en inglés de *Incomplete Fusion*. En estos procesos el fragmento x se absorbe por el blanco dando lugar a un nuevo núcleo compuesto C en un estado muy excitado, que podrá decaer mediante emisión gamma o evaporación de partículas. $a + A \rightarrow b + C$ [1].
- Procesos de fusión completa (CF), siglas en inglés de *Complete Fusion*. En estos procesos se produce la fusión del proyectil y del blanco para dar lugar a un núcleo compuesto, seguida de la evaporación de alguno de sus componentes. Si ocurre que b es uno de los elementos que se evapora entonces contribuye en los procesos inclusivos. También incluimos en esta categoría los procesos de pre-equilibrio [1].

En procesos tipo EBU, la reacción nuclear puede entenderse como un problema de dispersión efectiva a tres cuerpos con algunas interacciones efectivas a dos cuerpos. Este tipo de problemas se resuelven de forma rigurosa mediante el formalismo de Faddeev [13, 14], pero, dado que dicho formalismo presenta ecuaciones de difícil resolución, se han desarrollado enfoques más simples para resolverlos. Entre otros, se utiliza el método de la aproximación de Born de onda distorsionada (DWBA), del inglés *Distorted wave Born approximation* [15, 16, 17], así como el método de canales acoplados con discretización del continuo (CDCC), del inglés *Continuum-discretized coupled channels* [18, 17, 16], además de una variedad de enfoques semiclásicos [19, 20, 21].

Los procesos tipo INBU no han sido estudiados tan a fondo como los procesos tipo EBU. Existen algunos grupos de trabajo que los han estudiado para los casos en los que se excita el blanco. Un ejemplo es el grupo de Kyushu, que se centró en el estudio de la dispersión de deuterones [22]. Con algunas excepciones [23, 24], el problema no ha sido objeto de estudio en los últimos años. El caso de excitaciones del fragmento b también ha sido objeto de estudio en los últimos años, en los que se han desarrollado extensiones del método CDCC para incorporar dichos efectos [25, 26].

Para estudiar teóricamente procesos de transferencia de la partícula x a estados ligados del núcleo blanco, A , el método utilizado tradicionalmente es el DWBA. No obstante, debemos tener en cuenta que, como ya se comentó anteriormente, para reacciones nucleares en las que los proyectiles son núcleos débilmente ligados, el acoplamiento al canal de ruptura es importante, y este hecho afectará considerablemente a la sección eficaz de transferencia. Para incluir este efecto en la descripción del problema, utilizamos lo que se conoce como la aproximación de onda distorsionada adiabática (ADWA), del inglés *Adiabatic distorted wave approximation*, desarrollado inicialmente por Johnson y Soper [27, 28, 17, 16].

(2) Cuando la transferencia ocurre del proyectil al blanco, la reacción se conoce como reacción de transferencia tipo *Stripping*, mientras que, cuando la transferencia de partículas ocurre del blanco al proyectil se conoce como reacción de transferencia de tipo *Pick-up*.

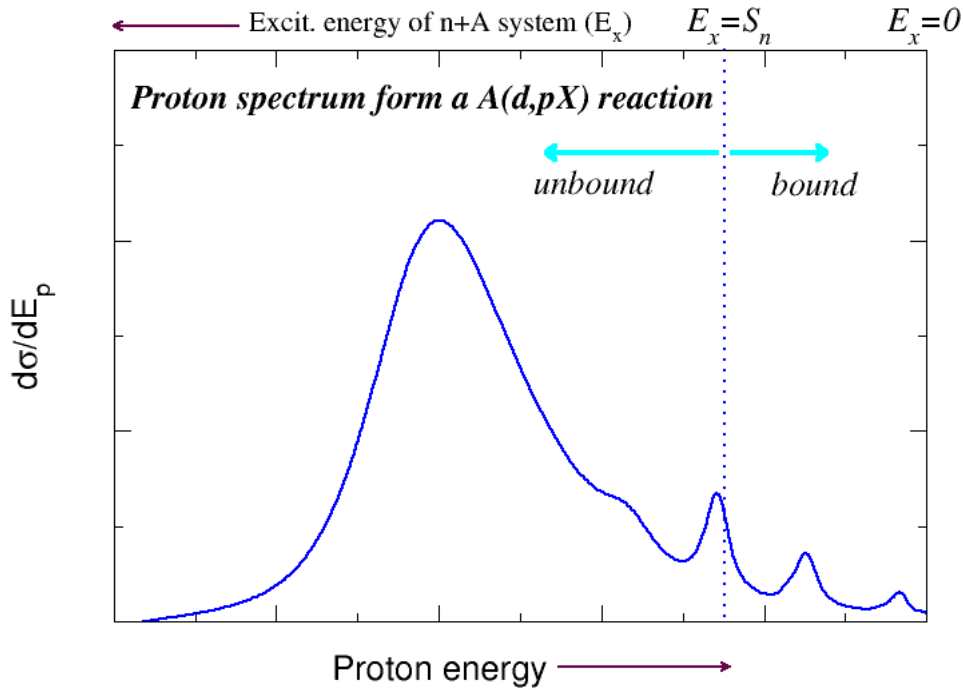


Figura 1.2: Espectro energético del protón resultante en la reacción nuclear $A(d,p)X$.

Los procesos ICF no son fáciles de modelar desde una perspectiva teórica. Si bien es cierto que, hasta hace poco, no existía una teoría completamente mecánico-cuántica que permitía calcular las secciones eficaces de este tipo, recientemente el grupo de trabajo de la Universidad Federal de Río de Janeiro ha desarrollado un formalismo basado en la función de onda CDCC que ha dado resultados prometedores [29, 30, 31]. Puesto que este formalismo es reciente, también existen enfoques alternativos de tipo semiclásico para estos procesos [32, 33]. Además, experimentalmente, la resolución de este tipo de problemas presenta inconvenientes, en la práctica, estos procesos son difíciles de diferenciar de los procesos de transferencia a estados de energía positiva, ya que los productos de reacción obtenidos en ambos casos son los mismos en muchas ocasiones.

Por último, los procesos de tipo CF. Este tipo de proceso es diferente a los anteriores ya que se lleva a cabo mediante la formación de un núcleo compuesto en vez de ocurrir mediante un proceso directo. Para calcular las secciones eficaces de este tipo debemos recurrir a modelos estadísticos [32, 34].

Como ejemplo ilustrativo, estudiamos una reacción nuclear sencilla en la que el proyectil es el deuterón ($p + n$) y $b = p$, es decir, $A(d,p)X$. En este caso, obtendremos un espectro energético para el protón resultante del tipo mostrado en la figura 1.2. Podemos observar la correspondencia que hay entre la energía del protón y la energía de excitación (E_x) del sistema $n + A$, de forma que, por conservación de la energía, a medida que aumenta la energía del sistema $n + A$, la energía cinética del protón saliente disminuirá. Si observamos nuevamente la figura 1.2, podemos ver que los estados ligados del sistema $n + A$ aparecen a partir de una cierta energía del protón (escala inferior del gráfico) o bien por debajo de una cierta energía de excitación de $n + A$, igual a la energía de separación de $1n$, $E_x = S_n$ (escala superior del gráfico). Para el sistema $n + A$, encontramos valores

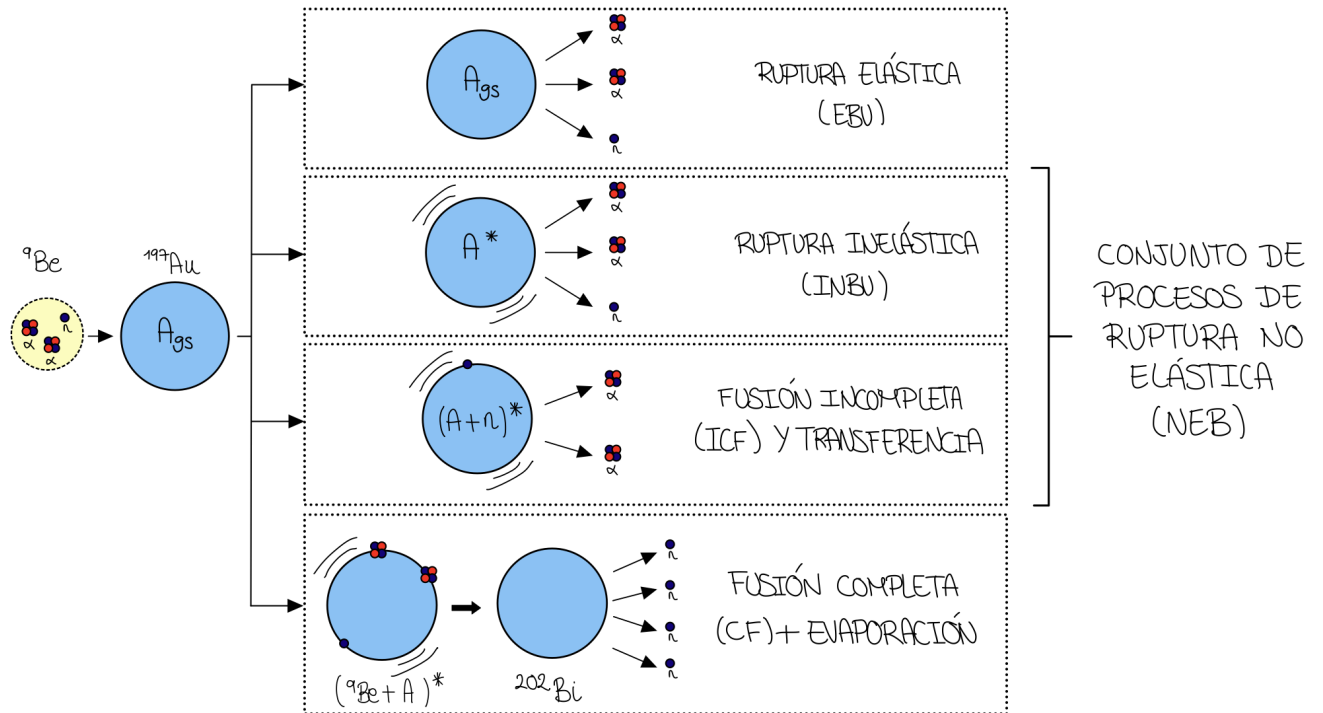


Figura 1.3: Mecanismos de dispersión de la reacción nuclear ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$.

de energía tanto positivos como negativos, de forma que, el estado fundamental de dicho sistema se encontrará a una energía negativa, igual a la energía de separación de $1n$, con signo menos.

En este trabajo, tal y como hemos apuntado anteriormente, el núcleo proyectil será el ${}^9\text{Be}$ y el núcleo blanco el ${}^{197}\text{Au}$. Podemos observar de forma esquemática en la figura 1.3, los diferentes mecanismos de reacción que hemos explicados anteriormente. Cabe destacar que en dicha figura, para los procesos de ICF, Transferencia y CF + evaporación están solo representados los casos más favorables a la hora de medir los productos resultantes en el laboratorio, pero que pueden producirse este tipo de canales de reacción con la transferencia o fusión de otros de los componentes. Por ejemplo, para el caso de ICF, podría ocurrir que en vez de absorberse un neutrón como es el caso de lo representado en la figura 1.3, lo que se absorbiese fuese una partícula α , aunque es mucho menos probable.

Tal y como se puede apreciar en la figura 1.3, al conjunto de las reacciones de Transferencia, INBU e ICF las llamamos reacciones de ruptura no-elástica (NEB), del inglés *Nonelastic Breakup*. Por lo tanto, la reacción total de ruptura (TBU) del inglés *Total Breakup* será la suma de las reacciones EBU + NEB.

El cálculo de las secciones eficaces de NEB es esencial, por ejemplo, para obtener la sección eficaz de fusión total en reacciones en las que los proyectiles son núcleos débilmente ligados, como es el caso de ${}^9\text{Be}$ que nos ocupa. En casos de este tipo, una porción muy significativa de la sección eficaz total de fusión proviene de la ICF [11]. Como ya apuntamos anteriormente, el desarrollo de modelos teóricos adecuados para calcular secciones eficaces de ICF dentro de un modelo mecánico-cuántico es bastante reciente. Otra forma de obtener información acerca de las secciones eficaces de este tipo es estudiando las reacciones de ruptura inclusiva de forma general, ya que la sección eficaz de ICF forma parte de la sección eficaz de TBU. [1, 11].

Es fácil llegar a la conclusión de que el cálculo de secciones eficaces de tipo exclusivo es en general más sencillo que el de reacciones nucleares de tipo inclusivo. Esto es debido a que para el segundo caso tenemos que tener en cuenta todos los posibles procesos a través de los cuales la partícula que no observamos, x , puede interactuar con el blanco A y, dado que hay una gran número de estados accesibles, el procedimiento a seguir resulta no solo tedioso, sino impracticable en muchos casos. Como alternativa, un posible procedimiento es reemplazar los estados físicos finales por un conjunto representativo de ellos, conocidos como *doorway states* (traducido al español, *estados de entrada*).

Para encontrar dichos estados representativos podemos utilizar, por ejemplo, los autoestados del Hamiltoniano del sistema $x + A$ para un potencial de campo medio (este procedimiento tiene sentido siempre y cuando la base utilizada para describir los estados finales sea una base completa). Cabe esperar que la suma sobre estos estados representativos, nos proporcionarán resultados similares a los obtenidos si hubiésemos tenido en cuenta todos los estados físicos finales accesibles. Este procedimiento se conoce como método de *Transferencia al continuo* [11, 1] y se ha utilizado con éxito para describir algunas reacciones nucleares inclusivas de ruptura cuando el proyectil es un núcleo débilmente ligado a energía próximas a las de la barrera de Coulomb, por ejemplo, para la reacción $^{208}\text{Pb}(^8\text{Li}, ^7\text{Li})$ [35]. El problema de este método reside en el hecho de que realmente no representa un formalismo teórico riguroso, sino que se basa en un enfoque heurístico ya que no está claro cómo debemos escoger los *estados de entrada* ni en qué medida las secciones eficaces que obtendremos dependerán de esta elección. Por lo tanto, buscamos un enfoque diferente.

La búsqueda de un enfoque teórico que pueda describir de forma precisa los procesos de NEB no es reciente. De hecho, ha sido un área de investigación en desarrollo desde finales de la década de los años 70 - principio de la década de los años 80, con varios grupos de investigación dedicándose a su estudio. El objetivo de estos era desarrollar fórmulas sin parámetros libres en las cuales la suma sobre todos los estados finales posibles del sistema $x-A$ se pudiesen reducir formalmente a algún valor esperado de la parte imaginaria del potencial óptico que describe el sistema $x-A$ (U_x).⁽³⁾ [11].

Los primeros en acercarse a un formalismo satisfactorio de este tipo fueron Baur y sus colaboradores en 1978 [36, 37, 38]. Este grupo de trabajo describió la amplitud de la reacción de EBU mediante el formalismo de DWBA en la forma *post*. Para ver qué valores incorporar en la suma sobre los posibles estados finales tuvieron en cuenta el hecho de que la matriz S es unitaria, además de incluir una aproximación de superficie de los factores de forma de los estados excitados del núcleo residual.

Más adelante, otros dos grupos de investigación abordaron este problema sin considerar las dos aproximaciones realizadas por el grupo de Baur nombradas anteriormente. A pesar de que ambos trabajaron con un enfoque formalmente similar, presentaban una diferencia significativa a la hora de tratar el problema. Por un lado, se encontraba el grupo de trabajo de Udagawa y Tamura (UT), quienes utilizaron el formalismo de DWBA en la forma *prior* [39, 40, 41, 42] para resolver el problema y, por otro, el grupo de trabajo de Austern y Vincent (AV), quienes se valieron del formalismo de DWBA en la forma *post* [43]. Este último enfoque fue perfeccionado más adelante por Kasano e Ichimura, que encontraron una manera de separar formalmente las contribuciones dadas por la EBU y la NEB, y así poder estudiar concretamente las secciones eficaces tipo NEB que no habían sido tan estudiadas hasta la fecha [44].

(3) Se tiene en cuenta que los procesos $x-A$ no elásticos se incluyen únicamente en la parte imaginaria del potencial óptico U_x

Cuando se resolvió el problema de las dos formas que desarrollaron ambos grupos de trabajo por separado, recordemos, el grupo de investigación de UT (con el formalismo DWBA en la forma *prior*) y el de AV (con el formalismo DWBA en la forma *post*), se obtuvieron resultados diferentes en los cálculos de la parte de NEB. Este hecho desencadenó en una larga disputa con el fin de determinar cuál de los dos métodos obtenía los resultados correctos. Cabe destacar que la discrepancia entre los resultados obtenidos para las secciones eficaces en los modelos IAV y UT solo existe a la hora de encontrar las secciones eficaces diferenciales de NEB, para secciones eficaces diferenciales de EBU obtienen resultados idénticos puesto que siguen un desarrollo teórico similar.

Ichimura, Austern y Vincent defendieron en el artículo de la Ref. [45], que UT no estaba teniendo en cuenta ciertas consideraciones necesarias a la hora de derivar la fórmula en forma *prior* para obtener la sección eficaz de NEB, lo que provocaba que IAV incluyesen términos adicionales para el desarrollo en dicha forma. Estos términos adicionales, surgen del término que se obtiene mediante el modelo de Hussein y McVoy (HM) [46, 47], en el que desarrollan una fórmula para evaluar la contribución de la ruptura de NEB en reacciones de ruptura inclusiva. Estos términos eran precisamente los responsables de la falta de concordancia entre los resultados obtenidos por un grupo y otro, por lo tanto, son esenciales para mantener la equivalencia *post-prior*.

El grupo de trabajo UT no considera el término de HM (también conocido como término de no ortogonalidad), como físico, mientras que el grupo de trabajo de IAV, sí. Aunque estos dos grupos no llegaron a un acuerdo públicamente, los cálculos más recientes parecen dar la razón a IAV, ya que sus resultados concuerdan mejor con los datos experimentales con los que se han cotejado ambos modelos. Por ello, en este trabajo realizaremos los cálculos teóricos siguiendo el modelo de IAV. Es más, presentaremos una derivación alternativa desarrollada por el D. Jin Lei en sus tesis doctoral [1], mediante la cual llegamos también al resultado de IAV.

El modelo publicado en el artículo de la Ref. [45] por Ichimura, Austern y Vincent que hemos mencionado anteriormente, dio lugar a lo que se conoce como el formalismo de IAV [45]. Más adelante, dicho modelo fue reformulado por Austern *et al.* [48] empleando un formalismo de tres cuerpos para describir la función de onda inicial del sistema, y que va más allá de la aproximación DWBA empleada en tratamientos previos. Este trabajo fue publicado en 1987 y en ese momento no se disponía de las capacidades computacionales que existen hoy en día. Resulta por tanto probable que ese sea el motivo por el que no hay constancia de trabajos en los años posteriores en los que se validase el modelo de tres cuerpos de Austern *et al.* Por el contrario, experimentalmente, las mediciones de secciones eficaces de ruptura inclusiva se han utilizado en muchas aplicaciones para proyectiles tanto estables como inestables [1, 11].

Desde hace unos años, el problema ha suscitado un renovado interés, debido a las potenciales aplicaciones del método IAV a diversos problemas de interés actual, como lo son su aplicación al cálculo de secciones eficaces de fusión incompleta, así como su aplicación a reacciones “*subrogadas*” (en inglés, *surrogate*) [49], un método indirecto para la obtención de secciones eficaces de procesos que no se pueden medir de forma directa, como es el caso de reacciones de neutrones con núcleos inestables. Experimentalmente, hay una gran cantidad de trabajos con medidas de ruptura inclusivas inducidas por núcleos débilmente ligados [3, 10, 4, 8]. Teóricamente también hay una gran cantidad de artículos publicados [50, 51], además de los siguientes artículos de las Ref. [11, 1, 52] en los que se basa este trabajo. De hecho, para realizar los cálculos necesarios para obtener la sección eficaz para la reacción que nos ocupa, utilizaremos el código computacional “Smoothie”,

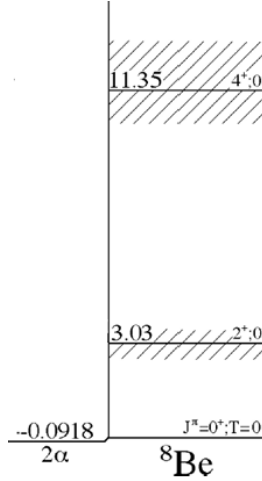


Figura 1.4: Esquema de niveles energéticos para el ${}^8\text{Be}$ [9].

desarrollado por el Dr. Jin Lei junto con el tutor de este trabajo D. Antonio M. Moro [53]. Este código está basado en el código desarrollado por el Dr. Jin Lei en su tesis doctoral [1], en la que utiliza el formalismo IAV para describir diferentes reacciones nucleares de NEB en las que intervienen núcleos débilmente ligados. Además, compararemos los cálculos teóricos que obtengamos para la reacción nuclear objeto de estudio en este trabajo, con los datos experimentales que obtuvieron F. Gollan *et al.* en el artículo de la Ref. [4] para dicha reacción.

La motivación de este trabajo reside en extender el método de IAV a situaciones en las que el sistema b es no ligado. Precisamente por esto, y porque disponemos de datos experimentales [4] con los que comparar los datos teóricos que obtengamos, escogemos la reacción ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$, en la que $b = {}^8\text{Be}$, que efectivamente es un núcleo que no forma estados ligados. Podemos describir su estructura interna (figura 1.4) mediante un conjunto de estados representativos para cada $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$, de forma que, dependiendo de en qué estado se encuentre el ${}^8\text{Be}$ una vez ocurra la reacción, obtendremos un valor de sección eficaz diferente. Incluiremos esto en nuestros cálculos teóricos mediante los solapamientos de ${}^9\text{Be}$ en su estado fundamental, con el ${}^8\text{Be}$ en cada estado concreto. Estos solapamientos se calculan dentro del formalismo de armónicos hiperesféricos [54, 55], que permite construir la función de onda de tres cuerpos para el núcleo de ${}^9\text{Be}$. De esta forma, se incorpora la estructura del proyectil de tres cuerpos dentro del formalismo IAV, desarrollo que resulta novedoso. El cálculo de los solapamientos ha sido realizado por el tutor D. Jesús Casal.

En el capítulo 2 desarrollaremos el formalismo de IAV, y mostraremos brevemente los resultados principales de los modelos de UT y HM necesarios para encontrar la relación entre el formalismo DWBA en forma *prior* y el formalismo DWBA en forma *post*, puesto que para realizar los cálculos de la sección eficaz de NEB, utilizaremos el formalismo de IAV en la forma *prior* equivalente. También desarrollaremos el formalismo teórico seguido para encontrar los solapamientos entre el ${}^9\text{Be}$ y el ${}^8\text{Be}$. En el capítulo 3 nos centramos en la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$, desarrollando la metodología seguida para obtener la sección eficaz de transferencia (que representa una porción de la sección eficaz de NEB), centrándonos tanto en los cálculos de estructura, como en los cálculos de reacción. Finalmente, compararemos los resultados obtenidos con los datos experimentales y los cálculos teóricos (método CRC) presentados en la Ref. [4] para la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$.

Capítulo 2

Formalismo Teórico

Antes de proseguir con el análisis de los datos obtenidos mediante el código computacional “Smoothie” [53] para la reacción nuclear inclusiva $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$, es importante entender el formalismo de IAV de forma general, ya que es el que utiliza dicho código para calcular la sección eficaz de NEB. También, describiremos brevemente los formalismos de UT y de HM para encontrar la relación existente entre la forma *post* y *prior* del formalismo DWBA, puesto que realmente los cálculos se realizarán con el modelo de IAV en su forma *prior* equivalente. Para poder obtener la sección eficaz de NEB para esta reacción, necesitaremos las funciones de solapamiento entre el estado fundamental de ^9Be y los estados de ^8Be considerados en los cálculos de reacción. Para ello, describiremos la estructura interna de ^9Be siguiendo el modelo de tres cuerpos en coordenadas hiperesféricas y de ^8Be en el modelo de dos cuerpos. Este último paso es la parte novedosa de este trabajo.

2.1. Modelo de Ichimura-Austern-Vincent

Pasamos ahora a desarrollar el modelo propuesto por Ichimura, Austern y Vincent [45]. Estos autores consideran una reacción nuclear que puede describirse de la forma,

$$a + A \rightarrow b + B^*, \quad (2.1)$$

donde $a = b + x$, siendo b un fragmento bien definido del proyectil incidente, que en nuestro caso, no será una partícula como ocurre en el desarrollo original del modelo de IAV [43, 45, 48], sino que es un núcleo que presenta una estructura interna. Por otro lado, B^* representa todos los canales de salida posibles que puede formar el sistema $x + A$ (EBU, INBU, Transferencia o ICF).

En este modelo, el proceso se puede describir mediante el Hamiltoniano,

$$H = K_b + K_x + V_{bx}(\xi_b, \vec{r}_{bx}) + H_A(\xi_A) + H_b(\xi_b) + V_{xA}(\xi_A, \vec{r}_x) + U_{bA}(\xi_b, \vec{r}_{bA}), \quad (2.2)$$

donde, K_b y K_x representan los operadores de energía cinética entre b y B y entre x y A , respectivamente, $V_{bx}(\xi_b, \vec{r}_{bx})$ representa la interacción que une los fragmentos b y x en el proyectil a (con ξ_b las coordenadas internas del núcleo b), $H_A(\xi_A)$ es el Hamiltoniano

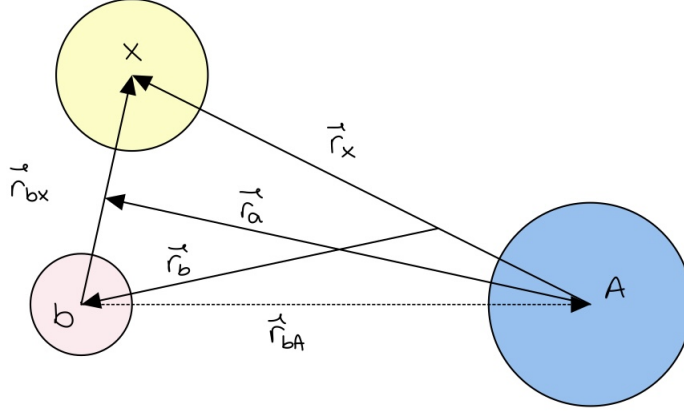


Figura 2.1: Coordenadas utilizadas en la reacción de ruptura. Nótese que la coordenada \vec{r}_b conecta a b con el centro de masas del sistema $x + A$.

representativo del núcleo blanco cuyas coordenadas internas vienen dadas por ξ_A , $H_b(\xi_b)$ es el Hamiltoniano representativo del núcleo b cuyas coordenadas internas vienen dadas por ξ_b , $V_{xA}(\xi_A, \vec{r}_x)$ es la interacción entre el fragmento x y el blanco A que, como podemos observar, conserva la dependencia con los grados de libertad internos, ξ_A , y por último, $U_{bA}(\xi_b, \vec{r}_{bA})$ es el potencial óptico que describe la interacción entre el núcleo b , y el blanco, A , que conserva la dependencia con las coordenadas internas del núcleo b , ξ_b . Las coordenadas relevantes se encuentran en la figura 2.1.

Tal y como se ha descrito el Hamiltoniano del sistema en la ecuación (2.2), se puede apreciar una clara distinción entre los dos fragmentos que constituyen a a . Se considerará al núcleo b como un espectador respecto al sistema $x + A$, lo que significa que el proceso de ruptura se producirá debido a cualquier dispersión no elástica de la partícula x con el blanco A , y por lo tanto, b no participará en dicho proceso directamente. Las interacciones de b con el núcleo blanco que provocan excitaciones de este último, se contemplarán en la parte imaginaria del potencial óptico U_{bA} . Teniendo esto en cuenta, asumimos que un experimento de este tipo será inclusivo respecto a la partícula x , de forma que, solo se detectará a b . Además, se considera el núcleo blanco lo suficientemente masivo como para de que sea posible ignorar efectos de retroceso o *recoil* y así suponer que la coordenada r_b conecta simplemente b con A [45, 1].

Asumiendo un modelo de tres cuerpos en el que la función de onda total deberá satisfacer la ecuación de Lippman-Schwinger, y utilizando la representación del formalismo en su forma *post*, se puede escribir dicha función de onda como

$$\Psi(\xi_A, \xi_b, \vec{r}_x, \vec{r}_b) = [E^+ - K_b - U_{bB} - H_b - H_B]^{-1} V_{post} \Psi(\xi_A, \xi_b, \vec{r}_x, \vec{r}_b), \quad (2.3)$$

donde $E^+ = E + i\eta$ con $\eta \rightarrow 0$, siendo E la energía total del sistema [43], y U_{bB} es un potencial óptico auxiliar, y en principio arbitrario, entre b y el sistema compuesto B ($x + A$). Incluir este potencial óptico en el desarrollo provoca una reducción de los grados de libertad, es decir, pasamos de describir la interacción entre estos dos sistemas como $V_{bB}(\vec{r}_b, \vec{r}_x, \xi_A, \xi_b)$ a describirla como $U_{bB}(\vec{r}_b)$. Se incluye como

$$V_{Final} = \underbrace{U_{bB}}_{\text{Potencial Auxiliar}} + \underbrace{[V_{bx} + U_{bA} - U_{bB}]}_{V_{post}} = U_{bB} + V_{post}, \quad (2.4)$$

con H_B el Hamiltoniano del par formado por $x + A$, que se describe como

$$H_B(\xi_A, \vec{r}_x) \equiv H_A(\xi_A) + K_x + V_{xA}(\xi_A, \vec{r}_x). \quad (2.5)$$

Los autoestados del Hamiltoniano del núcleo blanco se denotarán como $\phi_A^c(\xi_A)$, de forma que, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para este caso puede describirse como

$$H_A \phi_A^c = E_A^c \phi_A^c, \quad (2.6)$$

donde $c = 0$ representa el estado fundamental del núcleo blanco, para el cual se asume una energía $E_A^c = 0$.

También, denominaremos a los autoestados del Hamiltoniano del sistema compuesto B como $\phi_B(\xi_A, \vec{r}_x)$. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para los autoestados del Hamiltoniano H_B puede describirse como

$$H_B \phi_B = E_B \phi_B. \quad (2.7)$$

De manera análoga, llamaremos $\phi_b(\xi_b)$ a los autoestados del Hamiltoniano de b . En este caso, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se puede describir como

$$H_b \phi_b = E_{\alpha\alpha} \phi_b. \quad (2.8)$$

En este punto, se considera un estado concreto para el núcleo b de todos los posibles, que estará caracterizado por un momento final \vec{k}_b y un cierto estado interno. El movimiento de b relativo a B se podrá describir mediante una onda distorsionada con momento igual a \vec{k}_b , obtenida como solución a la ecuación monocanal

$$[K_b + U_{bB}^\dagger - E_b] \chi_b^{(-)}(\vec{k}_b, \vec{r}_b) = 0, \quad (2.9)$$

donde $E_b = E - E_B - E_{\alpha\alpha}$.

La proyección de la función de onda total, dada en la ecuación (2.3), sobre el estado concreto de la partícula b , da como resultado la función de onda que describe el movimiento de x una vez se produzca la ruptura de a ⁽¹⁾

$$Z_x(\vec{k}_b, \xi_A, \vec{r}_x) \equiv (\chi_b^{(-)} \phi_b | \Psi \rangle = [E^+ - H_B - E_b]^{-1} (\chi_b^{(-)} \phi_b | V_{post} | \Psi \rangle, \quad (2.10)$$

El paréntesis ($| \rangle$) en la ecuación representa que la integración se da únicamente sobre la coordenada \vec{r}_b y los grados internos de b , ξ_b .

(1) Nótese que esta función también dependerá de \vec{k}_a , que indica la dirección del haz incidente. Pero, puesto que dicha dirección es fija, esta dependencia se ha omitido por simplicidad en la notación.

La ecuación anterior se puede reescribir a su forma diferencial,

$$[E^+ - H_B - E_b]Z_x(\vec{k}_b, \xi_A, \vec{r}_x) = (\chi_b^{(-)}\phi_b|V_{post}|\Psi). \quad (2.11)$$

El término fuente de esta ecuación involucra la función de onda exacta, $\Psi(\xi_A, \xi_b, \vec{r}_x, \vec{r}_b)$, la cual es desconocida. Por lo tanto, para avanzar con el desarrollo, necesitamos encontrar una forma de describirla. Una manera de lograrlo es a través del formalismo DWBA, donde se aproxima la función de onda total como el producto de las funciones de onda de los canales de entrada. Es decir,

$$\Psi(\xi_A, \xi_b, \vec{r}_x, \vec{r}_b) \approx \phi_A^0(\xi_A)\varphi_a(\vec{r}_{bx}, \xi_b)\chi_a^+(\vec{k}_a, \vec{r}_a), \quad (2.12)$$

donde $\varphi_a(\vec{r}_{bx}, \xi_b)$ representa la función de onda del estado fundamental del proyectil a ,⁽²⁾ y $\chi_a^+(\vec{k}_a, \vec{r}_a)$ representa una onda distorsionada que describe el movimiento del sistema inicial formado por $a + A$ en el canal incidente y se describe como [43]

$$[K_a + U_a(\vec{r}_a) - E + E_A + E_a]\chi_a^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_a) = 0, \quad (2.13)$$

donde U_a representa el potencial óptico que describe la dispersión elástica del sistema $a + A$. Además, puesto que en nuestro caso inicialmente a y A se encuentran en su estado fundamental, suponemos que $E_a = 0$ y $E_A = 0$.

Una posible forma de proceder a resolver la ecuación (2.11) es desarrollar la función Z_x en un conjunto completo que incluya todos los estados en los que se puede encontrar el sistema $x + A$, es decir

$$Z_x(\vec{k}_b, \xi_A, \vec{r}_x) = \sum_c \psi_x^c(\vec{k}_b, \vec{r}_x)\phi_A^c(\xi_A), \quad (2.14)$$

donde $\psi_x^c(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$ describe el movimiento relativo entre x y A cuando el núcleo blanco está en el estado c . De forma que, incluyendo el desarrollo (2.14) en la ecuación (2.11), se obtendrán una serie de ecuaciones acopladas para las funciones desconocidas $\psi_x^c(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$. Este procedimiento, aparte de tedioso, es impracticable en general ya que el desarrollo (2.14) incluye una gran cantidad de estados finales. Puesto que lo que se busca es la contribución total de todos los estados en los que puede encontrarse el sistema $x + A$, y no interesa la descripción específica de cada uno de ellos, otra opción a seguir para resolver la ecuación (2.11) es descomponer $Z_x(\vec{k}_b, \xi_A, \vec{r}_x)$ mediante el formalismo de Feshbach [56, 57], como

$$Z_x(\vec{k}_b, \xi_A, \vec{r}_x) = \mathcal{P}Z_x + \mathcal{Q}Z_x, \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{P} = |\phi_A^0\rangle\langle\phi_A^0|$, es el operador de proyección sobre el estado fundamental del núcleo blanco y $\mathcal{Q} = 1 - \mathcal{P}$, es decir, $\mathcal{P}Z_x$ incluye los procesos elásticos, mientras que $\mathcal{Q}Z_x$ incluye los no elásticos. Atendiendo a la ecuación (2.14) y a la ecuación (2.15) se cumplirá que $\mathcal{P}Z_x = \psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$, donde $\psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$, representa el movimiento relativo entre el sistema $x + A$ cuando el núcleo blanco se encuentra en el estado fundamental y verifica la ecuación

(2) Podemos observar qué representa \vec{r}_{bx} en la figura 2.1, es decir, se cumplirá que $\vec{r}_{bx} = \vec{r}_b - \vec{r}_x$.

$$(E_x^+ - K_x - \mathcal{U}_x)\psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x) = \rho(\vec{k}_b, \vec{r}_x), \quad (2.16)$$

con $E_x = E - E_b$, $\rho(\vec{k}_b, \vec{r}_x) \equiv (\chi_b^{(-)}\phi_b|V_{bx}|\chi_a^+\varphi_a\rangle$ es el conocido como término fuente, y \mathcal{U}_x es el potencial formal del modelo óptico que describe la dispersión elástica del sistema $x + A$. Explícitamente se define como

$$\mathcal{U}_x = \langle\phi_A^0|V_{xA} + V_{xA}\mathcal{Q}[E^+ - E_b - H_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}}]^{-1}V_{xA}|\phi_A^0\rangle, \quad (2.17)$$

donde $H_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \equiv \mathcal{Q}H_B\mathcal{Q}$. El potencial formal descrito en la ecuación (2.17) es un potencial no local dependiente de la energía y del momento angular que, por lo tanto, es complicado de tratar. Sin embargo, tal y como se trabaja en los problemas de dispersión de dos cuerpos, puede ser aproximado a potenciales promediados en energía o mediante potenciales fenomenológicos (se denotará como U_x de ahora en adelante) con parámetros que pueden ajustarse para describir correctamente la dispersión elástica de $x + A$.

Una vez descrito esto, para encontrar la sección eficaz total inclusiva, seguiremos el desarrollo realizado por el Dr. Jin Lei en su tesis doctoral [1]. En dicha tesis, se presenta una derivación alternativa a la propuesta por Kasano e Ichimura [44] para separar la sección eficaz correspondiente a la ruptura elástica (EBU) y a la correspondiente a la ruptura no elástica (NEB), en la que aprovecha la analogía existente entre la ecuación (2.16) y la ecuación inhomogénea que surge al desarrollar los formalismos DWBA y CCBA entre estados ligados.

Para resolver la ecuación (2.16), el primer paso a seguir es incluir en dicha ecuación las condiciones de contorno de la onda saliente (ya que el canal $x - A$ no presenta ondas incidentes),

$$\psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x) \rightarrow f(\vec{k}_b, \hat{r}_x) \frac{e^{ik_x r_x}}{r_x}, \quad (2.18)$$

donde $f(\vec{k}_b, \hat{r}_x)$ depende, de la dirección de \vec{k}_b y de la parte angular de \vec{r}_x . Asintóticamente, cuando r_x es grande, el vector de posición \vec{r}_x y el momento \vec{k}_x se vuelven paralelos y, por lo tanto, se cumple que $f(\vec{k}_b, \hat{r}_x) \rightarrow f(\vec{k}_b, \vec{k}_x)$. Por consiguiente, podemos identificar a $f(\vec{k}_b, \vec{k}_x)$ como la amplitud de dispersión para los procesos de ruptura elástica, de forma que su cuadrado será proporcional a la sección eficaz diferencial para la detección de la partícula x en la dirección de \vec{k}_x , y de b en la dirección \vec{k}_b . Para encontrar la sección eficaz diferencial, por lo tanto, primero necesitamos obtener esta amplitud.

Para encontrar el valor de $f(\vec{k}_b, \vec{k}_x)$, se puede proceder de dos formas diferentes. Por un lado, integrando la ecuación diferencial (2.16) e igualando la solución a la forma asintótica, ecuación (2.18). Esto puede hacerse siempre y cuando se haga a una distancia lo suficientemente grande, más allá del rango de los potenciales de corto alcance. Por otro lado, también se puede resolver la ecuación (2.16) usando métodos integrales, como por ejemplo, el método de las funciones de Green. Mediante este último procedimiento se obtiene la expresión siguiente para la amplitud de dispersión

$$f(\vec{k}_b, \vec{k}_x) = -\frac{\mu_x}{2\pi\hbar^2} \langle\chi_x^{(-)}\chi_b^{(-)}\phi_b|V_{post}|\Psi\rangle, \quad (2.19)$$

donde μ_x es la masa reducida del sistema $x+A$ y $\chi_x^{(-)}$ es la onda distorsionada, $\chi_x^{(-)}(\vec{k}_x, \vec{r}_x)$, que es solución de la parte homogénea de la ecuación (2.16),

$$[K_x + U_x^\dagger - E_x] \chi_x^{(-)}(\vec{k}_x, \vec{r}_x) = 0, \quad (2.20)$$

cuya solución consiste en una onda plana de momento \vec{k}_x más una onda esférica entrante.

La sección eficaz diferencial correspondiente, para un volumen diferencial final dado en el espacio de momentos, se define como (ecuación (5.36) de Ref. [58])

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-5}}{\hbar v_a} \int d\vec{k}_x d\vec{k}_b d\vec{k}_A \delta(E_f - E_i) \delta(\vec{P}_f - \vec{P}_i) |T_{fi}|^2, \quad (2.21)$$

donde v_a es la velocidad relativa entre el proyectil y el blanco y T_{fi} es la amplitud de transición, también conocida como matriz T , que está relacionada con la amplitud de dispersión como $f = -(\mu_x/2\pi\hbar^2)T_{fi}$ ⁽³⁾. En el sistema de referencia del centro de masas se cumple que $\vec{P}_i = 0$. Además, el momento del núcleo blanco, \vec{k}_A , no se ha medido, por lo tanto, se puede integrar respecto a él haciendo uso del hecho de que la función delta se conserva sobre el momento,

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-5}}{\hbar v_a} \int d\vec{k}_x d\vec{k}_b \delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2. \quad (2.22)$$

El elemento $d\vec{k}_b$ se puede expresar en términos de energía y ángulo sólido como $d\vec{k}_b = (2\pi)^3 \rho_b(E_b) d\Omega_b dE_b$, donde $\rho_b(E_b) = k_b \mu_b / ((2\pi)^3 \hbar^2)$, es la densidad de estados. ⁽⁴⁾ Si incluimos esto en la ecuación (2.22), se obtiene

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{\hbar v_a} \int \delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2 \rho_b(E_b) d\Omega_b dE_b d\vec{k}_x. \quad (2.23)$$

La sección eficaz diferencial con respecto a la energía y el ángulo de dispersión de b se define, por lo tanto, como

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{EBU} = \frac{(2\pi)^{-2}}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \int \delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2 d\vec{k}_x, \quad (2.24)$$

que coincide con el resultado obtenido por Austern *et al.* (ecuación (8.15) de Ref. [18]), si tenemos en cuenta que $\int d\vec{k}_x \rightarrow (2\pi)^3 \sum_{\vec{k}_x}$.

Se observa, además, que la expresión anterior puede utilizarse para calcular la sección eficaz de EBU con respecto a los ángulos y energías de b y x . Para ello, se tiene en cuenta

-
- (3) Nótese que si comparamos la ecuación (5.36) de la Ref [58] con la ecuación (2.21) del desarrollo seguido, no concuerdan, se ha sustituido un factor $(2\pi)^4$ por $(2\pi)^{-5}$. Esto se ha hecho para que haya consistencia con la definición de amplitud para las ondas planas utilizada, $e^{i\vec{k}\vec{r}}$.
- (4) Estas expresiones son resultado de $N(k)d\vec{k}_b = \rho_b(E_b)d\Omega_b dE_b$, donde $N(k)$ representa el número de estados en el volumen diferencial $d\vec{k}_b$, que se define como $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') / N(k)$. En este caso, $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$, por lo tanto $N(k) = (2\pi)^3$.

nuevamente que se puede expresar $d\vec{k}_x = (2\pi)^3 \rho_x(E_x) d\Omega_x dE_x$, y que la función delta asegura la conservación de la energía. Se obtiene ⁽⁵⁾

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b d\Omega_x} \right|_{EBU} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \rho_x(E_b) |T_{fi}|^2, \quad (2.25)$$

Por otro lado, para obtener la expresión de la sección eficaz diferencial de NEB, se utiliza el Teorema óptico de canales acoplados (*coupled-channels optical theorem*) formulado por Cotanch [59], generalizándolo al caso multicanal. Si llamamos χ_i a la función de onda del canal y W_i a la parte diagonal imaginaria de dicho canal, la contribución a la absorción en este canal particular vendrá dada por [59]

$$\sigma_{abs}^i = -\frac{2}{\hbar v_{el}} \langle \chi_i | W_i | \chi_i \rangle, \quad (2.26)$$

donde v_{el} es la velocidad relativa entre el proyectil y el blanco en el canal incidente, que en este caso, es el canal elástico.

Se puede utilizar este resultado para calcular la contribución de NEB a la sección eficaz, ya que no representa otra cosa que la absorción que se da en el canal $x + A$. La función de onda del canal es $\psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$, que es una solución de la ecuación (2.16). Recordemos que la ecuación (2.16) estaba dada para una energía y dirección concretas del núcleo b , por lo tanto, se considerará la ecuación (2.26) para una sección eficaz diferencial correspondiente a un rango de \vec{k}_b , es decir,

$$d^2\sigma = -\frac{2}{\hbar v_a} \langle \psi_x^0 | W_x | \psi_x^0 \rangle N(k_b) d\vec{k}_b, \quad (2.27)$$

donde W_x representa la parte imaginaria del potencial U_x . Transformando el elemento de momento a elementos de energías y ángulo sólido, obtenemos la sección eficaz diferencial doble de NEB

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{NEB} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \langle \psi_x^0 | W_x | \psi_x^0 \rangle. \quad (2.28)$$

Esta última expresión constituye el resultado central del modelo de IAV. Este mismo resultado se obtiene siguiendo un desarrollo diferente por Ichimura-Austern-Vincent en [45, 43, 48] y por Kasano e Ichimura [44]. Se obtiene, también, un resultado similar por Hussein y McVoy [46]. El desarrollo seguido en este trabajo, tal y como ya apuntamos, fue realizado por el Dr. Jin Lei en su tesis doctoral [1] y nos proporciona una interpretación muy intuitiva de la obtención de la sección eficaz de NEB, entendiendo los canales de NEB como parte del flujo que abandona los canales de EBU hacia configuraciones más complejas del sistema $x + A$.

Podemos escribir la ecuación (2.30) para que concuerde exactamente con la notación empleada en el modelo de IAV (ecuación (2.21) Ref. [45]). Para ello, debemos tener en cuenta la definición de la función de Green de onda distorsionada,

(5) El desarrollo en ondas parciales que se ha realizado para obtener este resultado se puede encontrar en el Apéndice B de la Tesis del Dr. Jin Lei (Ref. [1]).

$$G_x \equiv (\phi_A^0 | (E^+ - H_B - E_b)^{-1} | \phi_A^0) = (E_x^+ - K_x - U_x)^{-1}, \quad (2.29)$$

de forma que se obtiene,

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{NEB}^{IAV} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \langle \psi_x^{IAV} | W_x | \psi_x^{IAV} \rangle, \quad (2.30)$$

con

$$\psi_x^{IAV}(\vec{k}_b, \vec{r}_x) = G_x (\chi_b^{(-)} \phi_b | V_{post} | \chi_a^{(+)} \varphi_a). \quad (2.31)$$

En los trabajos previos a este suponen que b puede ser una partícula (un protón o un neutrón, por ejemplo) o un núcleo (una partícula α , por ejemplo), entendiéndolo como un sistema ligado que no decae tras la colisión, mientras que en este trabajo b es un sistema no ligado, que por tanto podrá formarse en varias configuraciones de energía y momento relativos, y además decaerá tras la colisión en sus constituyentes. Por esta razón, en nuestro desarrollo, a diferencia de en los desarrollos seguidos por IAV [43, 45] y el Dr. Jin Lei en su tesis doctoral [1], aparece la función de onda de b , ϕ_b , en la ecuación que describe la función de onda de la partícula x (ecuación (2.31)). Teniendo esto presente, para encontrar el valor de la sección eficaz de NEB (ecuación (2.30)) necesitaremos la función de solapamiento entre la función de onda del proyectil a y del eyectil b , que vienen dada por

$$f_{E_{\alpha\alpha}}(\vec{r}_{bx}) \equiv \int d\xi_b \phi_b(\xi_b) \varphi_a(\vec{r}_{bx}, \xi_b). \quad (2.32)$$

Volveremos a estos solapamientos una vez hayamos descrito los modelos de estructura empleados en este trabajo.

2.2. Relación entre la forma *post* y *prior*

Debido a que para poder calcular la sección eficaz de NEB vamos a necesitar trabajar con el formalismo de IAV en su forma *prior* equivalente, es importante encontrar la relación entre la sección eficaz de NEB en formalismo DWBA en su forma *post* y en su forma *prior*. Explicaremos más a fondo el motivo de esta elección en este capítulo 3.2. Para encontrar dicha relación procederemos a describir muy brevemente los resultados obtenidos por Udagawa y Tamura [39, 40] y por Hussein y McVoy [47] en sus modelos.

2.2.1. Modelo de Udagawa y Tamura

En este modelo, Udagawa y Tamura encontraron la expresión para la sección eficaz diferencial doble no elástica de forma similar a como fue desarrollada en el formalismo de IAV, pero en este caso valiéndose de la descripción DWBA en su forma *prior*.

En este contexto, la expresión para la sección eficaz de NEB se describe como

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{NEB}^{UT} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \langle \Psi_x^{UT} | W_x | \Psi_x^{UT} \rangle, \quad (2.33)$$

donde Ψ_x^{UT} es la solución de la ecuación inhomogénea para el sistema $x - A$ similar a la ecuación (2.31), pero reemplazando en el desarrollo, V_{post} por V_{prior} , es decir

$$\psi_x^{UT}(\vec{k}_b, \vec{r}_x) = G_x(\chi_b^{(-)} \phi_b | V_{prior} | \chi_a^{(+)} \varphi_a). \quad (2.34)$$

con

$$V_{prior} = U_x + U_{bA} - U_a. \quad (2.35)$$

Recordemos que en esta descripción, U_a representa el potencial óptico que describe la dispersión elástica del sistema $a + A$ y U_{bA} representa el potencial óptico del sistema $b + A$. Además, si observamos la ecuación (2.34) podemos ver que también necesitamos obtener los solapamientos descritos en la ecuación (2.32) para encontrar el valor de la sección eficaz de NEB siguiendo este formalismo.

2.2.2. Modelo de Hussein y McVoy

En el modelo desarrollado por Hussein y McVoy, se hace uso de la hipótesis del espectador para la partícula detectada b . Es decir, consideran que dicha partícula no participa directamente en la ruptura y, por lo tanto, la ruptura se produce debido a cualquier dispersión no elástica de la partícula x con el blanco A , de forma que los estados del sistema $x + A$ que se incluyen en la suma serán aquellos que dejen a A en un estado excitado. Obtienen la siguiente expresión para la sección eficaz de NEB:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{NEB}^{HM} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \langle \Psi_x^{HM} | W_x | \Psi_x^{HM} \rangle, \quad (2.36)$$

donde Ψ_x^{HM} se conocen como los solapamientos de no ortogonalidad, que se definen como

$$\Psi_x^{HM}(\vec{k}_b, \vec{r}_x) = (\chi_b^{(-)} \phi_b | \chi_a^{(+)} \varphi_a). \quad (2.37)$$

Podemos observar que nuevamente necesitaremos obtener los solapamientos descritos en la ecuación (2.32) para encontrar el valor de la sección eficaz de NEB siguiendo este formalismo.

2.2.3. Relación entre teorías

Una vez hemos definido estos formalismos, pasamos a relacionar el modelo UT con el de IAV, es decir, la descripción en forma *prior* con la *post*. Como ya apuntamos en el capítulo introductorio, aunque en ambos casos se trabaja siguiendo la misma estructura formal, no se obtiene el mismo resultado para la sección eficaz de NEB en la ecuación (2.30) y en la ecuación (2.33). Para encontrar la relación entre la forma *prior* y la forma *post* del formalismo DWBA debemos transformar la ecuación (2.28) en su forma *prior*

equivalente. Esto puede hacerse utilizando la siguiente relación deducida por Li, Udagawa y Tamura [60]

$$\Psi_x^{IAV}(\vec{r}_x) = \Psi_x^{UT}(\vec{r}_x) + \Psi_x^{HM}(\vec{r}_x). \quad (2.38)$$

Reemplazando la ecuación (2.38) en la ecuación (2.30) obtenemos la relación entre las secciones eficaces de NEB de cada formalismo

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \Big|_{NEB}^{IAV, prior} = \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \Big|_{NEB}^{UT} + \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \Big|_{NEB}^{HM} + \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \Big|_{NEB}^{IN}, \quad (2.39)$$

donde el último término que aparece en esta expresión se define como

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \Big|_{NEB}^{IN} = -\frac{4}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Re} \langle \Psi_x^{UT} | W_x | \Psi_x^{HM} \rangle. \quad (2.40)$$

La ecuación (2.39) representa la sección eficaz diferencial de NEB del modelo IAV en su forma *prior* equivalente, donde, el primer término a la derecha del igual corresponde con la sección eficaz diferencial de NEB en el modelo de UT, ecuación (2.33), y los dos términos adicionales siguientes son la sección eficaz diferencial de NEB en el modelo de HM, ecuación (2.37), también conocido como término de no ortogonalidad debido a que surge debido al carácter no ortogonal de los solapamientos, y el término “IN”, ecuación (2.40), que es el término de interferencia entre los términos de UT y HM. Estos dos términos adicionales, son los responsables de la discrepancia entre los resultados de IAV y UT, y provienen del solapamiento de no ortogonalidad que se ha incluido mediante el término de HM. [47, 1].

Como mencionamos previamente, para encontrar el valor de la sección eficaz de NEB, en nuestro caso siguiendo el formalismo de IAV en su forma *prior*, necesitaremos los solapamientos entre el la función de onda del proyectil a y la del eyectil b (ecuación 2.32), por lo tanto necesitamos describir dichas funciones de onda. En este trabajo, la reacción nuclear que estudiamos es $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$, por lo tanto, tendremos que $a = ^9\text{Be}$, que es un núcleo borromeo formado por $\alpha + \alpha + n$ que puede estudiarse con un modelo de tres cuerpos en el formalismo de armónicos hipersféricos [54, 55], y $b = ^8\text{Be}(\alpha + \alpha)$, que se estudiará con un modelo de dos cuerpos.

2.3. Modelo de tres cuerpos para ^9Be

Como ya hemos apuntado, el ^9Be es un núcleo borromeo que puede describirse como $\alpha + \alpha + n$, por lo que nos valemos de un modelo de tres cuerpos para describir la función de onda representativa de dicho núcleo. Para representar el sistema, utilizaremos coordenadas hipersféricas, $\{\rho, \alpha_k, \hat{x}_k, \hat{y}_k\}$, que se obtienen de las coordenadas de Jacobi $\{\vec{x}_k, \vec{y}_k\}$. Aquí k representa los tres posibles sistemas de Jacobi, $k = 1, 2, 3$. La variable \vec{x}_k se define proporcional a la coordenada relativa entre dos de las tres partículas que constituyen el sistema a tres cuerpos y la variable \vec{y}_k se define proporcional a la coordenada desde el

centro de masas de estas dos partículas hasta la tercera, ambas con un factor de escala que depende de las masas. Podemos observar la elección de coordenadas en la figura 2.2.

El hiperradio ρ y el hiperángulo α_k están relacionados con las coordenadas de Jacobi como

$$\rho = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \quad (2.41)$$

$$\alpha_k = \tan\left(\frac{x_k}{y_k}\right). \quad (2.42)$$

Mientras que el hiperángulo depende del sistema de Jacobi- k en el que nos encontramos, el hiperradio no depende de dicho sistema [54]. Más detalles sobre las coordenadas y los distintos sistemas de Jacobi se pueden encontrar en la Ref. [61].

En nuestro caso concreto, el ${}^9\text{Be}$ ($\alpha + \alpha + n$), dos de los tres cuerpos que forman el sistema son idénticos, por lo tanto, nos valdremos del sistema de Jacobi-3 en el que las partículas 1 y 2 están relacionadas mediante la coordenada x . En este sistema, también conocido como sistema de Jacobi- T , llamaremos $\vec{x} = \vec{x}_3$ y $\vec{y} = \vec{y}_3$. Podemos verlo representado en la figura 2.3.

En el sistema de Jacobi elegido, los estados para un momento angular total, j , se desarrollan como

$$\psi_{3B}^{j\mu}(\rho, \Omega) = \rho^{-5/2} \sum_{\beta} \chi_{\beta}^j(\rho) \mathcal{Y}_{\beta}^{j\mu}(\Omega), \quad (2.43)$$

donde, $\Omega = \{\alpha, \hat{x}, \hat{y}\}$ y $\beta = \{K, l_x, l_y, l, S_x, j_{ab}\}$ representa un conjunto de números cuánticos acoplados a j . En este conjunto, K es el hipermomento, l_x y l_y son los momentos angulares asociados a las coordenadas de Jacobi \vec{x} e \vec{y} , respectivamente (figura 2.3), l es el momento angular orbital total ($\vec{l} = \vec{l}_x + \vec{l}_y$), S_x es el espín de las partículas relacionadas con la coordenada \vec{x} , de forma que se cumple $\vec{S}_x = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, y j_{ab} resulta del acoplamiento $\vec{j}_{ab} = \vec{l} + \vec{S}_x$. Si denotamos \vec{S}_3 como el espín de la tercera partícula, el momento angular total j se definirá como $\vec{j} = \vec{j}_{ab} + \vec{S}_3$ [54]. Para el desarrollo, consideraremos los espines \vec{S}_1 , \vec{S}_2 y \vec{S}_3 como fijos. La función $\mathcal{Y}_{\beta}^{j\mu}(\Omega)$ representa los estados del momento angular total y $\chi_{\beta}^j(\rho)$ representa la función hiperradial.

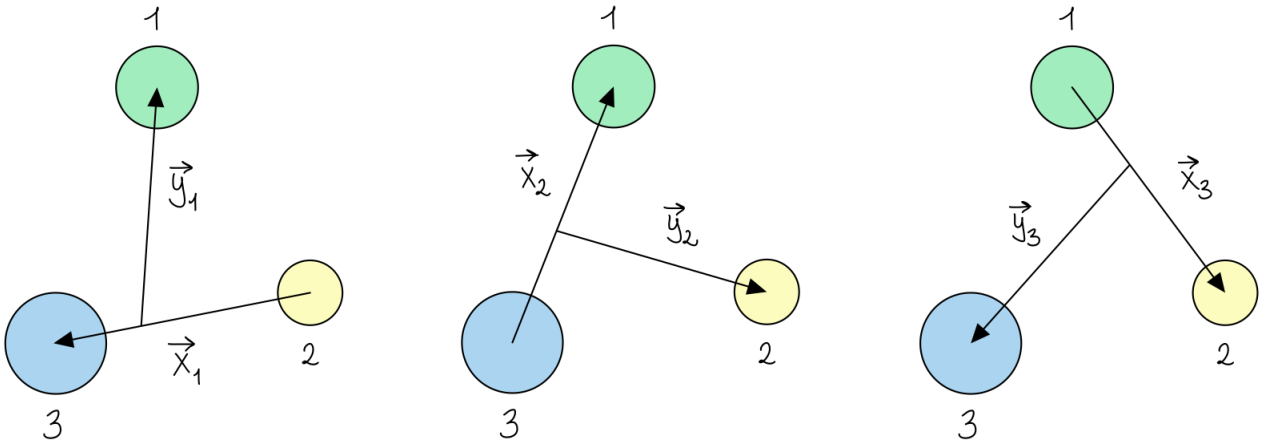


Figura 2.2: Los tres conjuntos de coordenadas de Jacobi escaladas.

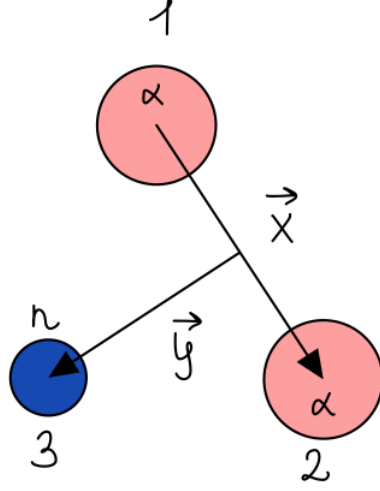


Figura 2.3: Coordenadas de Jacobi tipo T del sistema a tres cuerpos para el ${}^9\text{Be}$.

El esquema de acoplamiento para la función angular, $\mathcal{Y}_\beta^{j\mu}(\Omega)$, se dará en términos de los armónicos hipersféricos, $\Upsilon_{Klm_l}^{l_x l_y}(\Omega)$, que son autoestados del operador hipermomento \hat{K} , como

$$\mathcal{Y}_\beta^{j\mu}(\Omega) = \{[\Upsilon_{Kl}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \kappa_{S_x}]_{jab} \otimes \nu_{S_3}\}_{j\mu}. \quad (2.44)$$

Los harmónicos hipersféricos para la configuración $(l_x, l_y)_l$, vienen dados por

$$\Upsilon_{Klm_l}^{l_x l_y}(\Omega) = \varphi_K^{l_x l_y}(\alpha)[Y_{l_x}(\vec{x}) \otimes Y_{l_y}(\vec{y})]_{lm_l}, \quad (2.45)$$

$$\varphi_K^{l_x l_y}(\alpha) = N_K^{l_x l_y}(\sin \alpha)^{l_x}(\cos \alpha)^{l_y} P_n^{l_x + \frac{1}{2}, l_y + \frac{1}{2}}(\cos 2\alpha), \quad (2.46)$$

donde $P_n^{a,b}$ es un polinomio de Jacobi de orden $n = (K - l_x - l_y)/2$ y $N_K^{l_x l_y}$ es una constante de normalización [55].

Estudiando nuestro caso concreto, el núcleo ${}^9\text{Be}(\alpha + \alpha + n)$, tanto la partícula 1 como la partícula 2 son partículas α , mientras que la partícula 3 es un neutrón. Teniendo en cuenta que las partículas α presentan un espín nulo, se cumplirá que $S_1 = S_2 = S_x = 0$, mientras que $S_3 = 1/2$. Con estas consideraciones, la ecuación (2.44) puede reescribirse para nuestro caso de una forma más simple como

$$\mathcal{Y}_\beta^{j\mu}(\Omega) = \{\Upsilon_{Kl}^{l_x l_y}(\Omega) \otimes \kappa_{S_3}\}_{j\mu}. \quad (2.47)$$

En notación de Dirac podemos denotar estos acoplamientos como $|K(l_x l_y)l, S_3; j\rangle$.

Por otro lado, las funciones hiperradiales en la ecuación (2.43), son soluciones del conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{15/4 + K(K+4)}{\rho^2} \right) - \varepsilon \right] \chi_\beta^j(\rho) + \sum_{\beta'} V_{\beta'\beta}^{j\mu}(\rho) \chi_{\beta'}^j(\rho) = 0, \quad (2.48)$$

donde m es una masa de escala (típicamente la masa del nucleón), K define una barrera

efectiva de tres cuerpos, y $V_{\beta'\beta}^{j\mu}(\rho)$ son los potenciales de acoplamiento, que se definen como

$$V_{\beta'\beta}^{j\mu}(\rho) = \langle \mathcal{Y}_{\beta}^{j\mu}(\Omega) | V_{12} + V_{13} + V_{23} | \mathcal{Y}_{\beta'}^{j\mu}(\Omega) \rangle. \quad (2.49)$$

Aquí, V_{ij} representan los potenciales a dos cuerpos entre cada par de partículas que forman el sistema a tres cuerpos [55]. En el caso de ${}^9\text{Be}$ tenemos $V_{12} = V_{\alpha\alpha}$, $V_{13} = V_{\alpha n}$ y $V_{23} = V_{\alpha n}$.

Para encontrar las soluciones, la función radial puede desarrollarse en una base discreta como

$$\chi_{\beta}^j(\rho) = \sum_i C_{i\beta}^j U_{i\beta}(\rho), \quad (2.50)$$

donde los coeficientes $C_{i\beta}^j$ se obtienen fácilmente diagonalizando el Hamiltoniano de tres cuerpos para las funciones de una cierta base discreta $i = 0, \dots, N$. Los autoestados correspondientes a autovalores de energía negativa describen estados ligados, mientras que los estados de energía positiva proporcionan una representación discreta del continuo. Este enfoque es conocido como el método de pseudoestados [62], que puede ser llevado a cabo utilizando diferentes bases discretas. Un ejemplo es la base analítica del oscilador armónico transformado (THO), obtenida a partir de las funciones del oscilador armónico en coordenadas hiperesféricas, que se desarrolla en las Ref. [54, 55, 63].

Teniendo presente esto, además de la ecuación (2.47), podemos escribir la función de onda para el ${}^9\text{Be}$ como

$$\psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\rho, \Omega) = \rho^{-5/2} \sum_{\beta} \chi_{\beta}^j(\rho) |K(l_x l_y) l, S_3; j\rangle. \quad (2.51)$$

2.4. Modelo de dos cuerpos para ${}^8\text{Be}$

El núcleo ${}^8\text{Be}$ puede describirse mediante un modelo de dos cuerpos formado por dos partículas α . Representamos el sistema en la figura 2.4, siendo \vec{x}' la distancia entre ambas partículas ⁽⁶⁾.

Para el caso genérico de un sistema de dos cuerpos, los estados para un momento angular total, J , se desarrollan como

$$\Phi_{2B}^{JM}(\vec{x}') = \frac{1}{x'} \sum_{\eta} u_{\eta}^J(x') \mathcal{Y}_{\eta}^{JM}(\hat{x}'). \quad (2.52)$$

En este caso, describimos los estados en función de la coordenada x' (relacionada con la coordenada x del sistema de Jacobi- T de la figura 2.3 utilizada para el ${}^9\text{Be}$) y $\eta = \{L, S\}$ representa los números cuánticos acoplados a J . En este conjunto se cumple que $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. La función $\mathcal{Y}_{\eta}^{JM}(\hat{x}')$ representa la combinación de un armónico esférico acoplado a la función de espín para dar el correspondiente momento angular total J y $u_{\eta}^J(x')$ representa la función radial. Por tanto, el esquema de acoplamiento viene dado por [64]:

(6) Usamos x' para distinguir esta coordenada, que representa la distancia física entre las dos partículas, de la coordenada de Jacobi x introducida anteriormente para el modelo de tres cuerpos.

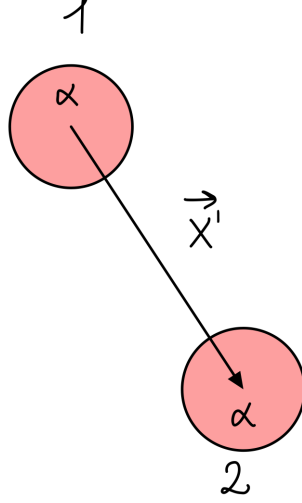


Figura 2.4: Coordenadas utilizadas para describir el ${}^8\text{Be}$.

$$\mathcal{Y}_\eta^{JM}(\vec{x}') = \{Y_L(\hat{x}') \otimes \kappa_S\}_{JM}. \quad (2.53)$$

Por otro lado, las funciones radiales en la ecuación (2.52) son soluciones de las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx'^2} - \frac{L(L+1)}{(x')^2} \right) - E \right] u_\eta^J(x') + \sum_{\eta'} V_{\eta'\eta}^{JM}(x') u_{\eta'}^J(x') = 0, \quad (2.54)$$

donde μ es la masa reducida del sistema de dos cuerpos y $V_{\eta'\eta}^{JM}(x')$ es el potencial de acoplamiento entre las dos partículas, que se define como

$$V_{\eta'\eta}^{J\mu}(x') = \langle \mathcal{Y}_\eta^{JM}(\hat{x}') | V_{12} | \mathcal{Y}_{\eta'}^{JM}(\hat{x}') \rangle. \quad (2.55)$$

Aquí, V_{12} representa el potencial entre las dos partículas que forman el sistema a dos cuerpos [64].

Para describir la función angular para el ${}^8\text{Be}$, tal y como ocurre para el ${}^9\text{Be}$, debemos tener en cuenta que las partículas α tienen un spin igual a cero, por lo tanto $S = 0$. Teniendo esto presente, la función angular puede describirse simplemente como un armónico esférico para cada $L = J$. En este caso, para describir la función radial tendremos una única ecuación monocanal,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx'^2} - \frac{L(L+1)}{(x')^2} \right) - E \right] u_L(x') + V_{12}(x') u_L(x') = 0. \quad (2.56)$$

En el caso del núcleo de ${}^8\text{Be}$ tenemos $V_{12} = V_{\alpha\alpha}$.

Al igual que en el modelo de tres cuerpos, la función radial puede desarrollarse en una base discreta mediante el método de pseudoestados [62]. El ${}^8\text{Be}$ es un núcleo que no forma estados ligados, por lo tanto nos valdremos de dicho método para tener una representación discreta de sus estados del continuo.

Teniendo presente todo esto, la función de onda para el ${}^8\text{Be}$ se escribirá como ⁽⁷⁾

$$\Phi_{8\text{Be}}^L(\vec{x}') = \frac{1}{x'} u_L(x') |L\rangle. \quad (2.57)$$

2.5. Solapamiento entre ${}^9\text{Be}$ y ${}^8\text{Be}$

Buscamos obtener el solapamiento entre la ecuación (2.51) y la ecuación (2.57). Para ello, lo primero que debemos hacer es expresar las funciones de onda para ambos casos en las mismas coordenadas. Conviene recordar que, en el sistema de tres cuerpos desarrollado en la sección 2.3, las coordenadas de Jacobi que definimos $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ no representan directamente distancias físicas, mientras que la coordenada \vec{x}' utilizada en la sección 2.4 para describir el sistema de dos cuerpos sí representa la distancia física entre las dos partículas que lo forman. Para obtener los solapamientos debemos convertir unas coordenadas en otras, de forma que utilizaremos $\{\vec{x}', \vec{y}'\}$. Podemos escribir [55],

$$\psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\vec{x}', \vec{y}') = \frac{1}{x'y'} \sum_{\gamma} w_{\gamma}^j(x', y') |(l_x l_y) l, S_3; j\rangle, \quad (2.58)$$

$$\Phi_{8\text{Be}}^{LE_{\alpha\alpha}}(\vec{x}') = \frac{1}{x'} u_L(x') |L\rangle, \quad (2.59)$$

donde se ha incluido una nueva etiqueta, $E_{\alpha\alpha}$, para considerar estados de distinta energía relativa entre las partículas alfa. Cabe señalar que en la ecuación (2.58), γ representa el conjunto de números cuánticos sin incluir el hipermomento K . Para poder solapar las funciones angulares de cada núcleo, cambiamos el esquema de acoplamiento usado para describir ${}^9\text{Be}$. Pasaremos de

$$|(l_x l_y) l, S_3; j\rangle \rightarrow |l_x, (l_y S_3) j_n; j\rangle, \quad (2.60)$$

donde, $\vec{j}_n = \vec{l}_y + \vec{S}_3$ y, por lo tanto, $\vec{j} = \vec{l}_x + \vec{j}_n$. De forma que, finalmente podremos escribir la función de onda para dicho núcleo como

$$\psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\vec{x}', \vec{y}') = \frac{1}{x'y'} \sum_{\gamma} w_{\gamma}^j(x', y') |l_x, (l_y S_3) j_n; j\rangle, \quad (2.61)$$

Con las definiciones anteriores, podremos solapar las funciones de onda dadas en la ecuación (2.61) y la ecuación (2.59) ya que los momentos angulares l_x y L están definidos respecto a la misma coordenada. Por lo tanto, podemos expresar los solapamientos como

$$\langle \Phi_{8\text{Be}}^{LE_{\alpha\alpha}}(\vec{x}') | \psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\vec{x}', \vec{y}') \rangle = \int dx' \Phi_{8\text{Be}}^{LE_{\alpha\alpha}}(\vec{x}') \psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\vec{x}', \vec{y}') = f_{E_{\alpha\alpha}, L}(\vec{y}'), \quad (2.62)$$

que como podemos observar, dependerán únicamente de la coordenada y' . Estos solapamientos son precisamente los que necesitamos para calcular la sección eficaz de NEB

(7) Es importante apuntar, que tanto en la ecuación (2.51) como en la ecuación (2.57) se están mezclando notaciones. Se expresan ambas ecuaciones de esta forma para que sea más intuitivo realizar los solapamientos entre ambas en el siguiente apartado (Sección 2.5).

dados en la ecuación (2.32), identificando $\psi_{9\text{Be}}^{j\mu}(\vec{x}', \vec{y}') = \varphi_a(\vec{r}_{bx}, \xi_b)$ y a $\Phi_{8\text{Be}}^{LE\alpha\alpha}(\vec{x}') = \phi_b(\xi_b)$.

En la reacción objeto de estudio, $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$, el proyectil ^9Be se encuentra inicialmente en su estado fundamental, mientras que el ^8Be se puede producir en cualquiera de los diferentes estados del continuo accesibles (representados mediante pseudoestados, como ya se ha mencionado anteriormente). Se nos proporcionará, por parte del tutor D. Jesús Casal, la función de solapamiento para cada uno de estos estados, que introduciremos en el formalismo de IAV en su forma *prior* equivalente. Así, determinaremos el valor de la sección eficaz diferencial de NEB para cada escenario, y a partir de estos resultados, calcularemos la sección eficaz de NEB total.

Capítulo 3

Estudio de la reacción nuclear inclusiva $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$

En este trabajo nos centramos en el estudio de la reacción nuclear inclusiva $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$. Si atendemos a la notación utilizada en el capítulo 2, para este caso concreto tenemos, el proyectil $a = ^9\text{Be}$, el núcleo blanco $A = ^{197}\text{Au}$, el eyectil $b = ^8\text{Be}$ y B^* , que representa todas las posibles configuraciones en las que puede encontrarse el sistema formado por la partícula $x = n$ y el núcleo blanco una vez se produzca la reacción. Podemos observar un esquema de dicha reacción en la figura 3.1.

Como apuntamos en la sección introductoria 1, esta reacción se ha estudiado de forma experimental recientemente por F. Gollan *et al.* en la Ref. [4]. Por ende, podemos comparar las secciones eficaces obtenidas experimentalmente presentadas en este artículo, con cálculos teóricos basados en los modelos desarrollados en este trabajo.

En dicho artículo, obtuvieron valores de la sección eficaz de NEB para la transferencia de un neutrón, la CF y la ICF, para el sistema $^{197}\text{Au} + ^9\text{Be}$. El motivo por el cual escogieron el ^{197}Au como núcleo blanco es que presenta características relevantes para el estudio de los mecanismos de transferencia y de fusión, es decir, se cumple que la semivida de los productos de evaporación resultantes son del orden de las horas y presenta un número atómico alto ($Z=79$), lo que restringe los canales de evaporación a la emisión casi exclusiva de neutrones y facilita el análisis de los datos. Estudian dicho sistema en un rango de energía incidente de ^9Be comprendido entre $21.9 \leq E_{lab} \leq 50.6$ MeV, correspondiente a valores entre 0.54 y 1.25 veces la energía de la barrera de Coulomb (V_C), estimada como $V_C^{lab} = 40.5$ MeV ($V_C^{c.m.} = 38.7$ MeV) [4].

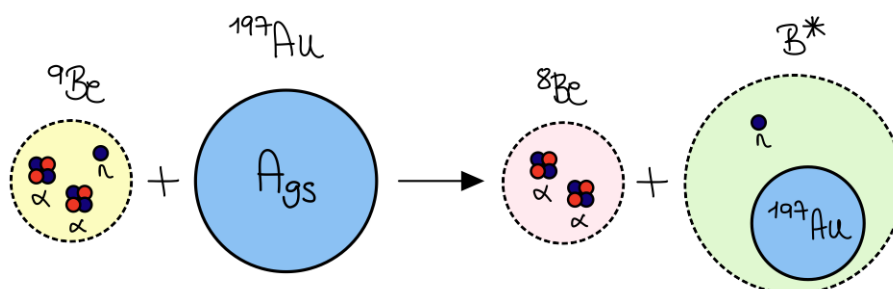


Figura 3.1: Esquema de la reacción nuclear $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$.

De este artículo nos interesan los datos relativos a la reacción de transferencia de un neutrón. Las reacciones de transferencia de un neutrón para el sistema $^{197}\text{Au} + ^9\text{Be}$ puede producir tanto ^{198}Au (*neutron stripping*) como ^{196}Au (*neutron pickup*). Cuando se produce ^{198}Au , éste decae mediante emisiones β^- al ^{198}Hg . Mientras que, por otro lado, cuando se produce ^{196}Au , éste decae mediante emisiones β^- al ^{196}Pt . La reacción de transferencia que nos interesa es la primera, ya que es el proceso que da como resultado la reacción nuclear que estudiamos, $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$, en la que aparece el ^8Be . Es importante destacar que cuando se produce la ruptura del proyectil ^9Be , seguido de la captura de un neutrón por parte del blanco, también se contribuye a la formación de ^{198}Au .

Para el caso que nos atañe en la Ref. [4], realizan mediciones de los rayos γ resultado del decaimiento β^- del ^{198}Au en ^{198}Hg . El esquema de decaimiento del ^{198}Au y las características importantes del canal de reacción que nos interesa los podemos observar en la figura 3.2 y en la tabla 3.1, respectivamente.

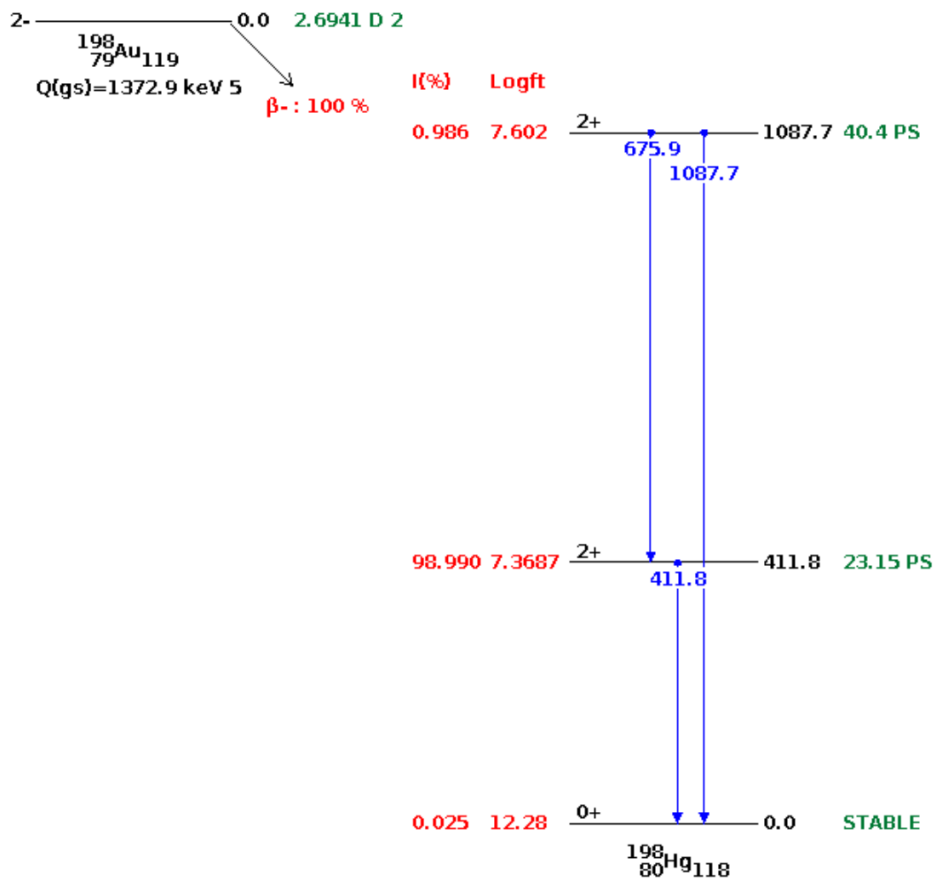


Figura 3.2: Esquema de desintegración del ^{198}Au [6].

Channel	Q (MeV)	Decay	$T_{1/2}$ (d)	E_γ (keV)	I (%)
($^9\text{Be}, ^8\text{Be}$)	4.8	$^{198}\text{Au} \rightarrow ^{198}\text{Hg}$	2.69	411.8	95.6

Tabla 3.1: Características relevantes del canal de reacción ($^9\text{Be}, ^8\text{Be}$) que surge de la reacción de transferencia de un neutrón del sistema $^9\text{Be} + ^{197}\text{Au}$. [4, 6]

Una vez miden los rayos γ , que en nuestro caso es el rayo γ resultado del decaimiento del ^{198}Hg a su estado fundamental, calculan la sección eficaz total mediante la relación ⁽¹⁾

$$\sigma = \frac{N_D}{I \varepsilon_f(\epsilon)} \frac{\sigma_{\text{Ruth}}}{(e^{-\lambda t_i} - e^{-\lambda t_f})} \frac{1}{\int_0^{t_{\text{irr}}} e^{-\lambda t'} N_M(t') dt'}, \quad (3.1)$$

donde σ_{Ruth} agrupa la sección eficaz diferencial de Rutherford, además de una serie de términos tales como el ángulo sólido relevante en el montaje experimental concreto utilizado en la Ref. [4], $\lambda = \ln(2)/T_{1/2}$, N_D es el número de eventos γ en cada fotopico, $N_M(t')$ es el número de núcleos de ^9Be dispersados por unidad de tiempo, I representa la intensidad relativa del γ concreto, $\varepsilon_f(\epsilon)$ es la eficiencia del detector utilizado en el experimento para una energía dada, t_{irr} es el tiempo de irradiación y t_i y t_f son los tiempos iniciales y finales de medida, respectivamente.

Después de una serie de consideraciones relacionadas con el montaje experimental [4], obtienen los datos para la reacción $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})^{198}\text{Au}$, que son los que utilizaremos para comparar con los cálculos teóricos que obtengamos. De forma que, para realizar nuestros cálculos, de cara a comparar satisfactoriamente estos con los datos experimentales, debemos tener en cuenta las consideraciones que han tomado para obtenerlos.

Pasamos ahora a desarrollar las consideraciones llevadas a cabo para el cálculo teórico de la sección eficaz de transferencia (que representa una porción de la sección eficaz de NEB) para la reacción a estudiar. Distinguiremos entre los cálculos de estructura y de reacción y finalmente mostraremos los resultados obtenidos en comparación con los datos experimentales de la Ref. [4].

3.1. Cálculos de estructura

En esta sección profundizamos en los pasos seguidos para obtener los solapamientos entre el ^8Be y el ^9Be que detallamos en la sección 2.5. En primer lugar, describiremos los potenciales necesarios para obtener las funciones de onda de tres y dos cuerpos para el ^9Be y el ^8Be , respectivamente. Después, mostraremos como ejemplo dos de las funciones de solapamiento relevantes, discutiremos acerca de la norma que presenta cada uno de ellos y, por último, compararemos la función radial resultado del solapamiento que se obtiene si describimos el ^9Be como $^8\text{Be}+n$ mediante un potencial de Woods-Saxon fenomenológico.

Para detallar los potenciales necesarios para describir el ^9Be y el ^8Be seguimos el modelo empleado en la Ref. [54]. Para tratar la interacción α - n se utiliza el potencial de la Ref. [65]. Se trata de un potencial de Woods-Saxon (WS) más un término de espín-órbita, cuya dependencia radial se parametriza mediante la derivada de un potencial de WS. Este potencial es:

$$V_{\alpha n} = \frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_{\alpha-n})/a]} + \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{r} \frac{d}{dr} \frac{V_{SO}}{1 + \exp[(r - R_{SO})/a_{SO}]}, \quad (3.2)$$

donde $V_0 = -43.0$ MeV, $V_{SO} = 40.0$ MeV \cdot fm², $R_{\alpha-n} = 2.0$ fm, $R_{SO} = 1.5$ fm, $a = 0.7$ fm, y $a_{SO} = 0.35$ fm. Esta elección particular de valores resulta demasiado atractiva para

(1) No buscamos entrar en detalle acerca de la obtención de las secciones eficaces en la Ref. [4], ya que se aleja del objetivo de este trabajo.

las ondas d , por lo tanto, se utiliza el valor -21.5 MeV para la parte central de las ondas d y cero para las ondas parciales $l \geq 3$. Para describir esta interacción, además, se introduce un término repulsivo para tener en cuenta el principio de exclusión de Pauli [54].

Por otro lado, para tratar la interacción nuclear α - α se incluye el potencial:

$$V_{\alpha\alpha} = (125\widehat{P}_{l=0} + 20\widehat{P}_{l=2})e^{-(r/1.53)^2} - 30e^{-(r/2.85)^2}. \quad (3.3)$$

En esta expresión, al igual que ocurre para la interacción $\alpha - n$, se incluyen términos repulsivos para describir de forma aproximada los estados de Pauli. Este potencial, junto con la interacción coulombiana con $r_{Coul} = 2.94$ fm,

$$V_{\alpha\alpha}^{Coul}(r) = Z^2 e^2 \times \begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_{Coul}^2}\right) \frac{1}{r_{Coul}}, & r \leq r_{Coul}, \\ \frac{1}{r} & r > r_{Coul}, \end{cases} \quad (3.4)$$

reproduce la posición exacta de la resonancia de la onda s y de la onda d del sistema de dos cuerpos ${}^8\text{Be}$, a unas energías $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV y $E_{\alpha\alpha} \approx 3$ MeV, respectivamente [54].

Estas interacciones binarias ($V_{\alpha n}$ y $V_{\alpha\alpha}$) se ajustan para reproducir los comportamientos de los sistemas de dos cuerpos, es decir, reproducen en buena aproximación los estados de baja energía para ${}^8\text{Be} = \alpha + \alpha$ y ${}^5\text{He} = \alpha + n$. Sin embargo, ya que los modelos de tres cuerpos son una aproximación al sistema completo de muchos cuerpos, limitarse a considerar únicamente interacciones de dos cuerpos puede llevar a resultados que se desvían de las energías obtenidas experimentalmente para este tipo de sistemas. Por lo tanto, para describir correctamente el núcleo de ${}^9\text{Be}$ es común incluir un potencial a tres cuerpos hiperradial (V_{3b}) que puede ajustarse para modificar la energía del sistema sin distorsionar su estructura. Su descripción puede encontrarse en las Refs. [54, 63].

Una vez se han descrito los potenciales $V_{\alpha\alpha}$, $V_{\alpha n}$ y V_{3b} , se pueden obtener los solapamientos entre ${}^8\text{Be}$ y ${}^9\text{Be}$. Recordemos que dichos solapamientos entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ y los pseudoestados de ${}^8\text{Be}$ han sido proporcionados por el tutor D. Jesús Casal. Como ejemplo, podemos observar la representación de los solapamientos radiales entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con el estado fundamental 0^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV) y con el estado excitado 2^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 3$ MeV) en la figura 3.3 ⁽²⁾. Si comparamos ambas gráficas, observamos que el solapamiento con el estado 0^+ presenta valores mayores que el solapamiento con el estado 2^+ , indicando que el primero representa un peso mayor dentro de la función de tres cuerpos. Además, el solapamiento con el estado 0^+ es más extenso, es decir, explora distancias mayores. Esto es de esperar ya que la energía relativa entre las dos partículas alfa es menor para el estado 0^+ .

(2) Recordemos que podría haber expresado las gráficas de la figura 3.3 en función de y' en vez de r_{bx} , ya que representan la misma variable.

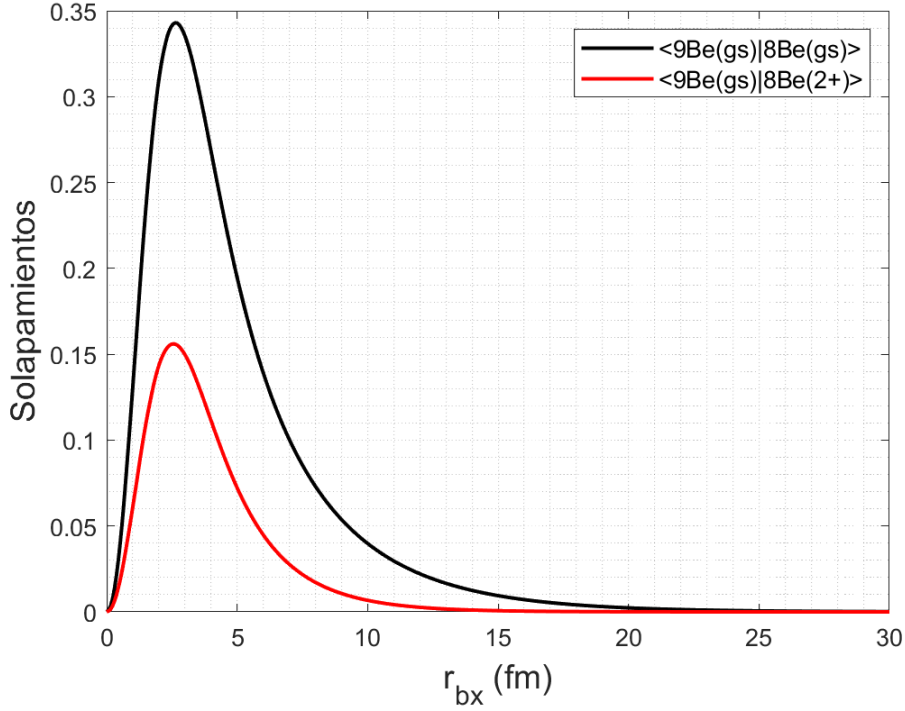


Figura 3.3: Representación de los solapamientos en función de r_{bx} . Entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con el estado fundamental 0^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV) y entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ y el estado excitado 2^+ de ${}^8\text{Be}$ (energía nominal de la resonancia a $E \approx 3$ MeV).

Se nos proporcionan tantos solapamientos como pseudoestados se calculen de ${}^8\text{Be}$ para cada momento angular ($J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$)⁽³⁾, y cada uno de ellos presentará una intensidad (en inglés *strength*) diferente. En este contexto, la intensidad representa la norma del solapamiento radial, es decir, la integral del cuadrado de cada solapamiento. Observamos la norma de estos solapamientos en función de la energía relativa α - α en la figura 3.4. Vemos que concuerda con el esquema de niveles energéticos del núcleo de ${}^8\text{Be}$ dado en la figura 1.4.

En la figura 3.4 los valores señalados con un círculo son los solapamientos que hemos utilizado para calcular las secciones eficaces de transferencia, como veremos en la siguiente sección. Los rodeados con un círculo en azul oscuro representan los solapamientos entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con ${}^8\text{Be}$ en los pseudoestados característicos de las resonancias 0^+ y 2^+ , que son los representados en la figura 3.3.

Atendiendo a la figura 3.4, si nos fijamos en el caso $J^\pi = 0^+$, podemos observar que la distribución de intensidad favorece configuraciones en las que el núcleo de ${}^8\text{Be}$ se encuentra a la energía $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV, y el resto de pseudoestados para este momento angular presentan una norma muy pequeña. Para el caso $J^\pi = 2^+$, sin embargo, se observa que la distribución reparte la intensidad entre varios pseudoestados alrededor de $E_{\alpha\alpha} \approx 3$ MeV. Por último, para el caso $J^\pi = 4^+$ observamos una distribución que presenta un máximo en torno a $E_{\alpha\alpha} \approx 11$ MeV. De manera similar al caso 2^+ , la intensidad se distribuye entre varios pseudoestados cercanos a dicho máximo, aunque en comparación esta intensidad es mucho menor que la obtenida para $J^\pi = 0^+, 2^+$. Las distribuciones obtenidas para cada

(3) La base de pseudoestados que consideramos consta de 40 estados.

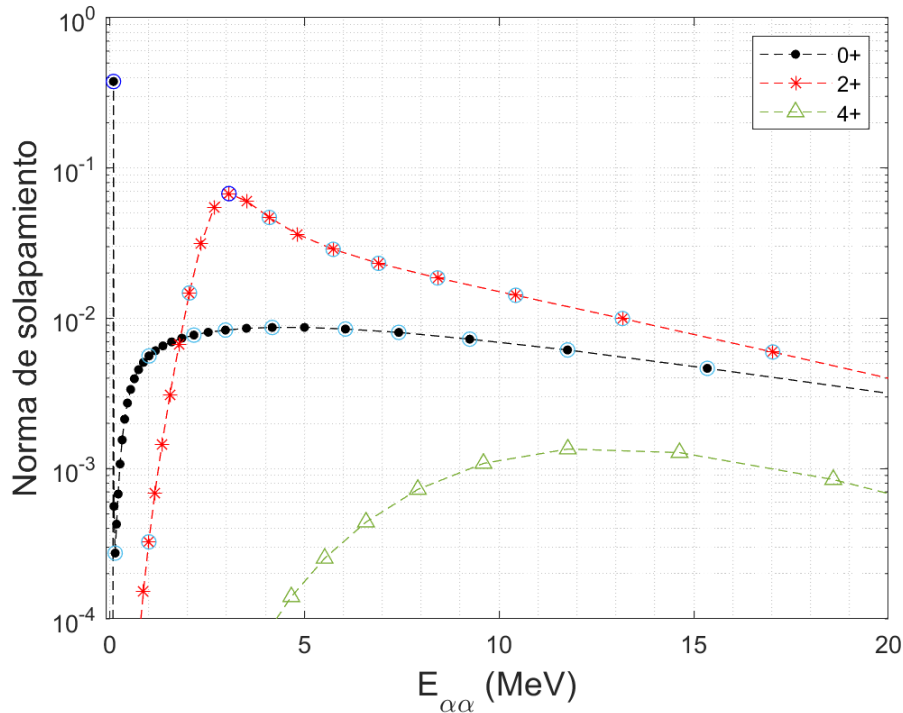


Figura 3.4: Intensidad de cada pseudoestado para el ${}^8\text{Be}$. Los valores redondeados representan los pseudoestados para los cuales hemos realizado los cálculos de la sección eficaz de transferencia.

valor de momento angular reflejan en buena aproximación la anchura de las resonancias de ${}^8\text{Be}$ que se muestran en la figura 1.4.

En este contexto, los solapamientos entre ${}^9\text{Be}$ con ${}^8\text{Be}$ con $J^\pi = 0^+$ representan un 53% de la norma total, para $J^\pi = 2^+$ un 46% y para $J^\pi = 4^+$ un 1%. Si volvemos a observar la figura 3.4, podemos advertir que no vamos a calcular la sección eficaz de transferencia para ningún solapamiento con ${}^8\text{Be}$ con $J^\pi = 4^+$, ya que representa sólo un 1% de la norma total, por lo tanto, su contribución será despreciable. Escogemos los valores seleccionados ya que pensamos que representan adecuadamente la distribución de todo el sistema. Las normas correspondientes al solapamiento con cada pseudoestado escogido se reflejan en la tabla 3.2.⁽⁴⁾

Instructivamente, podemos comparar la función radial dada por el solapamiento entre ${}^9\text{Be}$ con ${}^8\text{Be}$ en su estado 0^+ de resonancia, con la función radial que se obtendrá si generamos esta función con un potencial de WS fenomenológico con parámetros $r_0 = 1.25$ fm y $a = 0.65$ fm⁽⁵⁾ y profundidad ajustada para dar la energía de separación experimental para el estado considerado de ${}^8\text{Be}$. Lo vemos en la figura 3.5. Para poder comparar estas funciones radiales, debemos tener en cuenta la intensidad de cada uno. La función fenomenológica está normalizada a 1, mientras que el solapamiento radial obtenido con el modelo de tres cuerpos tiene una norma menor, ≈ 0.38 (tabla 3.2). Para poder realizar la comparación debemos igualarlos en peso. Si reescalamos la función de solapamiento radial para que represente el total de la norma, vemos que ambas funciones

(4) Estos valores también se reflejan en la figura 3.4.

(5) Escogemos estos valores ya que son los adoptados de forma estándar en muchos cálculos de reacción.

0^+		2^+	
$E_{\alpha\alpha}$ (MeV)	Norma (%)	$E_{\alpha\alpha}$ (MeV)	Norma (%)
0.10	37.68	0.11	≈ 0.00
0.14	0.03	1.01	0.03
1.01	0.56	2.05	1.48
2.17	0.77	3.06	6.76
2.98	0.84	4.10	4.69
4.18	0.87	5.74	2.88
6.06	0.85	6.91	2.32
7.42	0.81	8.42	1.86
9.24	0.73	10.43	1.43
11.76	0.62	13.17	1.00
15.35	0.47	17.03	0.60

Tabla 3.2: Norma de los solapamientos entre el estado fundamental de ${}^9\text{Be}$ con cada pseudoestado de ${}^8\text{Be}$ seleccionado para calcular la sección eficaz de transferencia. Los valores resaltados son los relativos a los solapamientos radiales representativos que se muestran en la figura 3.3.

radiales son razonablemente similares, por lo que nos darían resultados parecidos para la sección eficaz. El interés en realizar los cálculos considerando los estados de ${}^8\text{Be}$ con diferente energía relativa radica en que la fragmentación en intensidad tiene un efecto sobre la sección eficaz de transferencia, tal y como veremos en la siguiente sección.

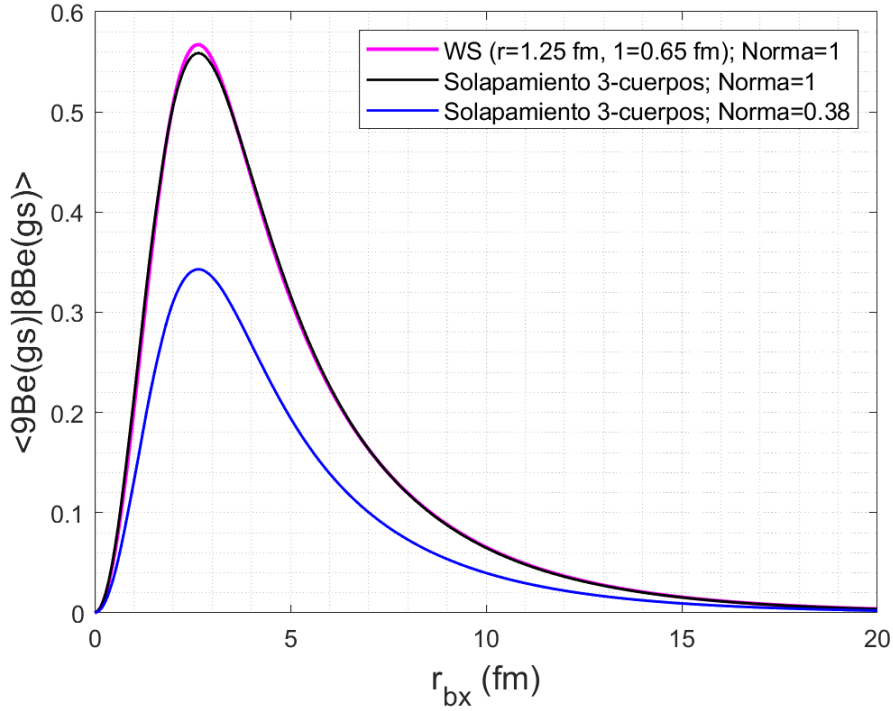


Figura 3.5: Comparación entre los solapamientos radiales de ${}^9\text{Be}$ con el ${}^8\text{Be}$, ambos en su estado fundamental, con la función radial solución de un potencial de WS fenomenológico.

3.2. Cálculos de reacción

En esta sección detallaremos los pasos seguidos para obtener la sección eficaz de transferencia (que representa una porción de la sección eficaz de NEB) a estados ligados de ^{198}Au para la reacción nuclear inclusiva que estudiamos, $^{197}\text{Au}(^9\text{Be},^8\text{Be})$. Una forma de obtener dicha sección eficaz, es considerando todos los estados físicos de ^{198}Au . Para realizar los cálculos de esta forma se debe tener mucha información sobre dichos estados (energías de los estados, factores espectroscópicos, momentos angulares, etc), además, en este caso resulta inviable debido a su gran cantidad. En lugar de proseguir de esta forma, en este trabajo utilizamos el formalismo de IAV, que permite describir dichas contribuciones mediante un potencial óptico que da cuenta de la interacción n - ^{198}Au . Además de este potencial, describiremos el resto de potenciales ópticos necesarios para realizar los cálculos de las secciones eficaces diferenciales de transferencia. Una vez definidos, obtendremos dichas secciones eficaces para cada solapamiento entre el estado fundamental de ^9Be y los estados representativos de ^8Be seleccionados. Para ello, utilizamos del código computacional “Smoothie” [53]. Por último, a partir de las secciones eficaces diferenciales calculadas, podemos obtener la sección eficaz total para cada valor de energía incidente de ^9Be . Compararemos los resultados obtenidos con los datos experimentales de la Ref. [4].

Rara encontrar el valor de la sección eficaz de transferencia trabajaremos en el formalismo IAV en su forma *prior* equivalente. El motivo por el cual realizamos los cálculos en la forma *prior* y no en la forma *post* se puede apreciar claramente si detallamos V_{post} para la reacción que estudiamos. En nuestro caso, la ecuación (2.4) implica:

$$V_{post} = V_{s_{\text{Be}-n}} + U_{s_{\text{Be}-^{197}\text{Au}}} - U_{s_{\text{Be}-^{198}\text{Au}}}. \quad (3.5)$$

El problema es que el término $V_{s_{\text{Be}-n}}$ no lo tenemos. En el modelo teórico de tres cuerpos que utilizamos para describir la estructura de ^9Be , aparecen las interacciones de dos cuerpos α - α y α - n , pero no la interacción n - ^8Be . Esta última interacción es difícil de describir, ya que, recordemos, que el ^8Be es un núcleo que no forma estados ligados y que puede entenderse como dos partículas alfa. ⁽⁶⁾ Este término que nos da problemas no aparece el potencial en la forma *prior* y es por ello por lo que trabajaremos con esta descripción. Podemos definir V_{prior} teniendo presente la ecuación (2.35) como:

$$V_{prior} = V_{n-^{197}\text{Au}} + U_{s_{\text{Be}-^{197}\text{Au}}} - U_{s_{^9\text{Be}-^{197}\text{Au}}}. \quad (3.6)$$

Para trabajar con el código computacional “Smoothie” el primer paso a seguir es, aparte de describir el proyectil, el blanco y los productos resultantes de la reacción, detallar cada potencial descrito en la ecuación (3.6). Para cada interacción se escogerá un tipo de potencial apropiado que nos permitirá describir el problema correctamente. El tipo de potencial que hemos utilizado en cada caso se especifica en la tabla 3.3. Las descripciones detalladas del potencial tipo “Double Folding: São Paulo” y del potencial tipo “Koning-Delaroche” se encuentran en el Apéndice A y el Apéndice B, respectivamente ⁽⁷⁾.

(6) Si estudiásemos esta reacción experimentalmente podríamos medir dichas partículas α y por cinemática reconstruir el momento de ^8Be .

(7) Destacar que el potencial tipo “Double Folding: São Paulo” en sí sólo incluye la parte real del potencial. Para la parte imaginaria hemos tomado la misma geometría de la parte real, escalada por un cierto factor ($N_i = 0.78$). Todo esto está explicado a fondo en el Apéndice A.

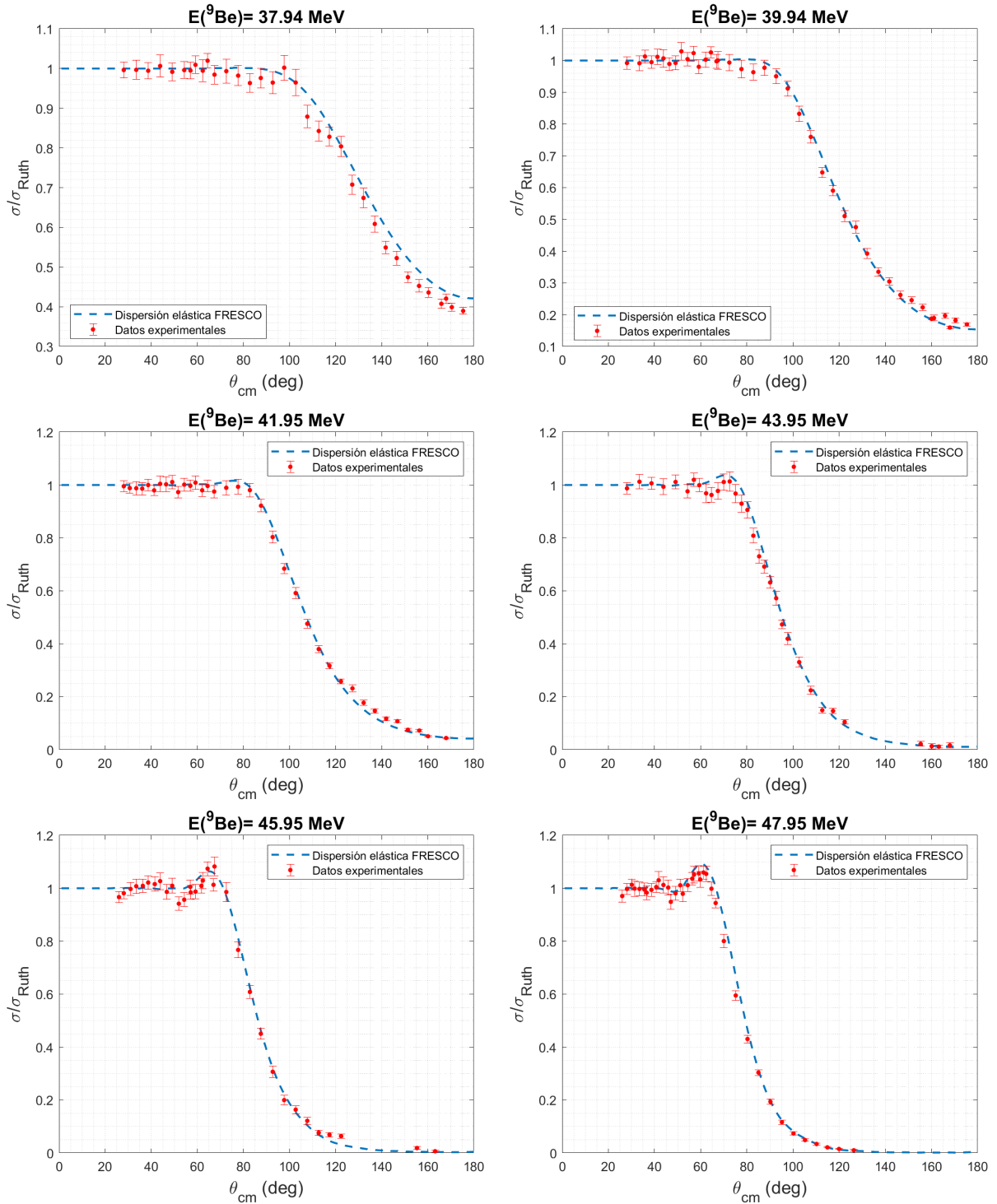


Figura 3.6: Sección eficaz elástica relativa a la sección eficaz de Rutherford para diferentes valores de E_{lab} del proyectil ^9Be cuando el blanco es ^{197}Au . Comparación de los datos experimentales de la Ref. [69] con lo obtenido mediante el código de canales acoplados FRESKO utilizando el potencial SPP.

Potencial	Constituyentes	Tipo de potencial
U_{aA}	${}^9\text{Be} - {}^{197}\text{Au}$	SPP
U_{bB}	${}^8\text{Be} - {}^{198}\text{Au}^*$	SPP
U_{bA}	${}^8\text{Be} - {}^{197}\text{Au}$	SPP
V_{xA}	$n - {}^{197}\text{Au}$	KD

Tabla 3.3: Potenciales utilizados para el cálculo de la sección eficaz diferencial de transferencia inclusiva siguiendo el formalismo de IAV en su forma *prior* para la reacción nuclear inclusiva ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$. (SPP representa el potencial tipo “Double Folding: São Paulo” y KD representa el potencial tipo “Koning-Delaroche”). [66, 67, 68]

Para cerciorarnos de que los potenciales descritos en la tabla 3.3 de tipo SPP describen el sistema ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$ correctamente, calculamos la sección eficaz diferencial elástica mediante el código de canales acoplados FRESKO [70] incluyendo dicho potencial, y comparamos lo obtenido con los datos experimentales de la Ref. [69]. La comparación se muestra en la figura 3.6. Si observamos dicha figura, podemos apreciar un buen acuerdo entre los cálculos teóricos y los datos experimentales, lo que justifica el uso de estos potenciales para encontrar el valor de la sección eficaz diferencial de transferencia inclusiva.

Una vez hemos elegido el tipo de potencial que utilizaremos para cada sistema, podemos obtener la sección eficaz diferencial de transferencia para cada caso. Recordemos que no se han calculado las secciones eficaces diferenciales correspondientes a todos los solapamientos que se nos proporcionan. Esto es debido a que resulta un trabajo computacionalmente muy exigente, ya que el cálculo implica obtener la sección eficaz diferencial, para cada estado final de ${}^8\text{Be}$ y para cada energía incidente de ${}^9\text{Be}$. Específicamente, calculamos las secciones eficaces de transferencia para valores de energía incidente en el sistema centro de masas comprendidos entre 20 MeV y 50 MeV, equiespaciados en 2 MeV. Realizamos los cálculos en este rango de energías ya que es aproximadamente el rango de energías cubierto por los datos experimentales de la Ref. [4], y ellos consideran este intervalo teniendo presente el valor de la barrera de Coulomb para este sistema que, recordemos, se estima $V_C^{lab} = 40.5$ MeV ($V_C^{c.m.} = 38.7$ MeV).

Como ejemplo, podemos observar en la figura 3.7 las secciones eficaces diferenciales de transferencia inclusiva en función de la energía cinética final del sistema ${}^8\text{Be} + {}^{198}\text{Au}$ cuando el ${}^8\text{Be}$ se encuentra en su estado fundamental 0^+ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV) y cuando se encuentra en el estado excitado 2^+ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 3$ MeV), para los valores de energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$, $E_{cm}^i({}^9\text{Be}) = 36$ y 48 MeV ⁽⁸⁾. Estas figuras son análogas a la figura 1.2 pero para la reacción que estamos estudiando. En estas gráficas, las líneas señaladas como umbral (en inglés, “*Threshold*”) representan el valor de energía cinética final total a partir del cual aparecen los estados ligados del sistema $x + A$ (en nuestro caso $n + {}^{197}\text{Au}$). Observando las gráficas correspondientes a cada configuración, podemos advertir que la contribución de sección eficaz diferencial de transferencia es mayor cuando el núcleo de ${}^8\text{Be}$ se encuentra en su estado fundamental 0^+ (energía nominal de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 0.1$ MeV), que para el escenario en el que el ${}^8\text{Be}$ se encuentra en el estado excitado 2^+ (energía nominal

(8) En nuestro caso, inicialmente el ${}^{197}\text{Au}$ se encuentra en reposo, por lo tanto, podemos equiparar la energía cinética incidente total del sistema (E_{cm}^i) con la energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$ ($E_{cm}^i({}^9\text{Be})$).

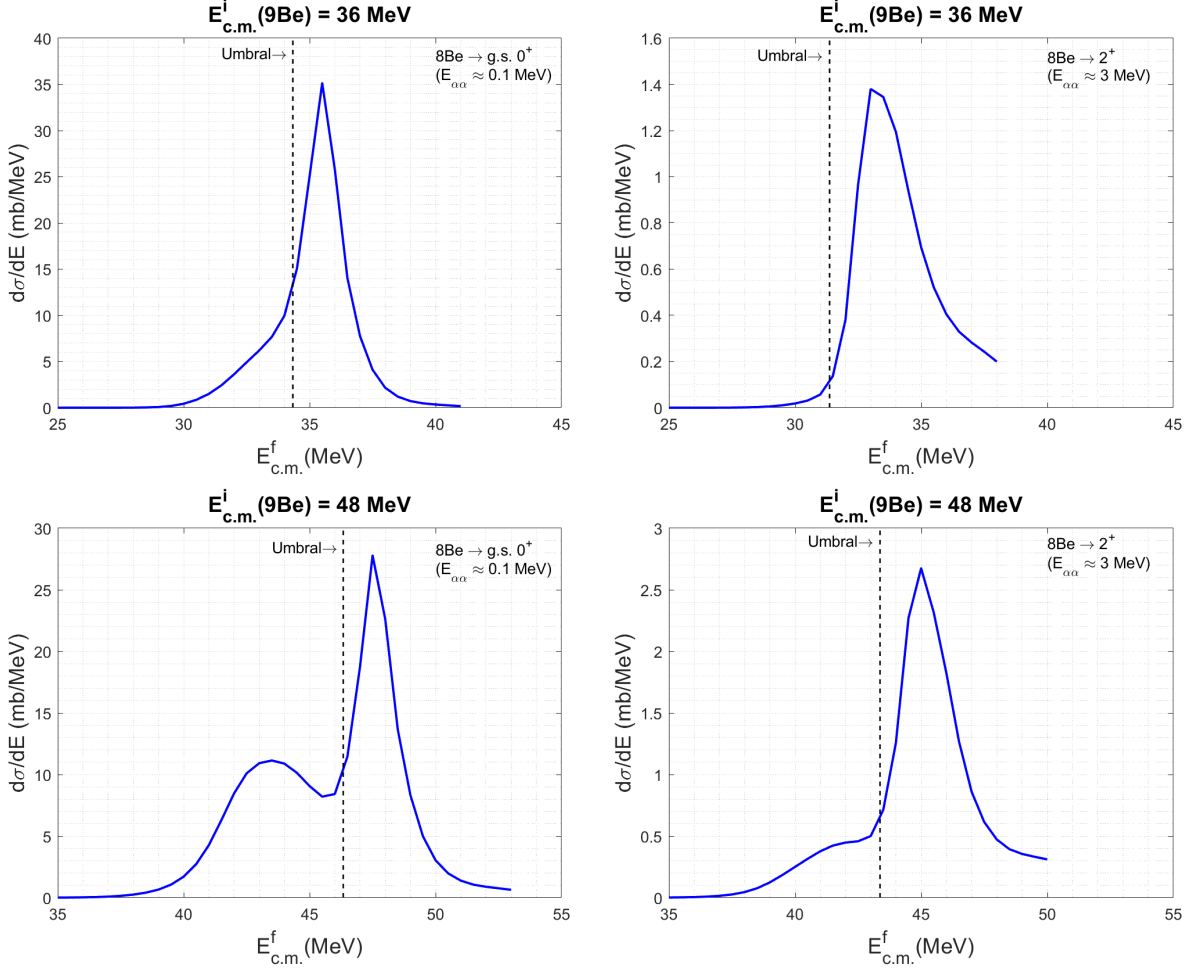


Figura 3.7: Secciones eficaces diferenciales de transferencia inclusiva en función de la energía cinética final total, con el ${}^8\text{Be}$ en diferentes configuraciones, para las energías incidentes de ${}^9\text{Be}$ $E_{cm}^i({}^9\text{Be}) = 36$ y 48 MeV.

de la resonancia a $E_{\alpha\alpha} \approx 3$ MeV), como era de esperar atendiendo a la norma de cada estado (figura 3.4).

Se calculan las secciones eficaces diferenciales de transferencia inclusiva para el solapamiento de ${}^9\text{Be}$ con ${}^8\text{Be}$ (en cada uno de los pseudoestados representativos seleccionados) para las energías incidentes de ${}^9\text{Be}$ escogidas. Para analizar los valores obtenidos debe tenerse en cuenta que en una reacción nuclear se tiene que

$$E_{cm}^f = E_{cm}^i + Q, \quad (3.7)$$

donde, en la reacción nuclear que estudiamos, E_{cm}^i es la energía cinética inicial total del sistema ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$ que se fija a un valor concreto, Q representa la cantidad de energía absorbida o liberada durante la reacción nuclear. El factor Q se define como $Q = Q_0 - E_x$, con E_x la energía de excitación sobre el estado fundamental del sistema ${}^8\text{Be} + {}^{198}\text{Au}$, y Q_0 se describe como $Q_0 = S_n^f - S_n^i$. En esta relación, S_n^f representa la energía de separación de un neutrón para el núcleo final al que se transfiere el neutrón, es decir, el ${}^{198}\text{Au}$ en nuestro caso, y S_n^i representa la energía de separación de un neutrón para el núcleo inicial en el que se encontraba dicho neutrón, ${}^9\text{Be}$ en nuestro caso. Tendremos que $S_n({}^{198}\text{Au}) = 6.512$ MeV

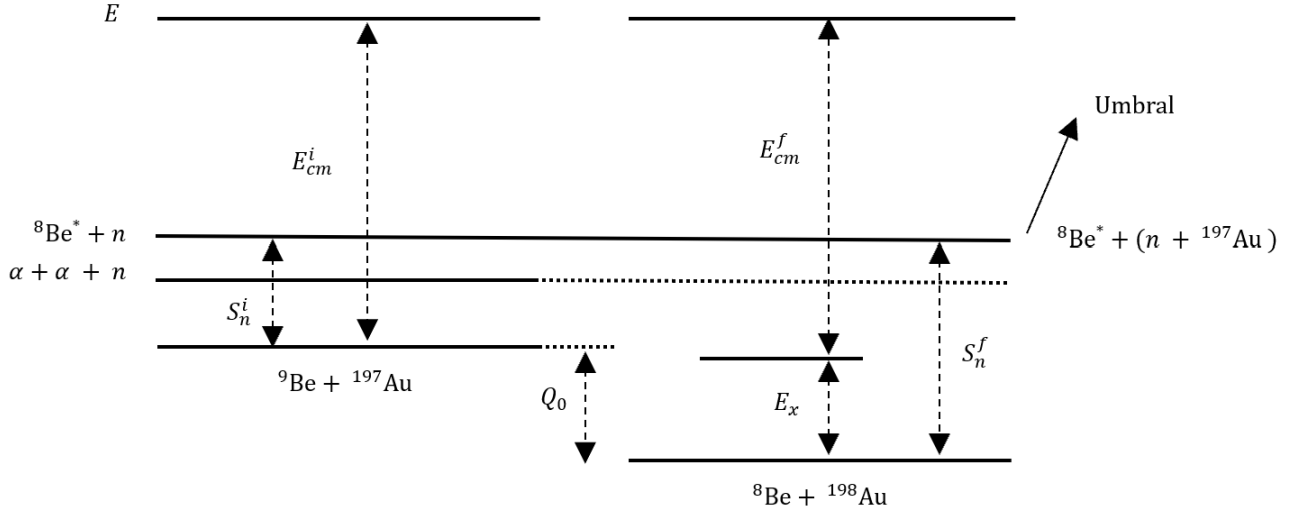


Figura 3.8: Representación esquemática de las energías relevantes para la reacción nuclear inclusiva $^{197}\text{Au}(^9\text{Be},^8\text{Be})$.

y $S_n(^9\text{Be}) = 1.665 \text{ MeV}$ [71], por consiguiente, $Q_0 = 4.847 \text{ MeV}$, y el valor de Q variará según el estado excitado final concreto en el que se encuentre el sistema $^8\text{Be} + ^{198}\text{Au}$. Si tenemos en cuenta la ecuación (3.7), el valor máximo de E_{cm}^f que podemos obtener en esta reacción se dará cuando el sistema $^8\text{Be} + ^{198}\text{Au}$ se encuentre en su estado fundamental, se cumplirá que $E_{cm}^f(max)|_{gs} = E_{cm}^i + 4.847 \text{ MeV}$, atendiendo al valor de Q en este caso. Para cualquier otro caso podemos encontrar el valor de la E_{cm}^f de manera análoga, pero, teniendo en cuenta que ahora se cumple $E_{cm}^f(max) = E_{cm}^i + 4.847 - E_x$. Esto se ilustra mediante el esquema de la figura 3.8.

Recordemos que los datos experimentales de la Ref. [4] que compararemos con nuestros resultados, son para la reacción $^{197}\text{Au}(^9\text{Be},^8\text{Be})^{198}\text{Au}$, por lo tanto, únicamente nos interesan los valores de la sección eficaz diferencial a partir de la energía umbral (figuras 3.7 y 3.8). Esto es debido, a que a partir de esta energía es cuando se forman los estados ligados del sistema $n + ^{197}\text{Au}$ para formar ^{198}Au . Por lo tanto, para analizar los cálculos de las secciones eficaces diferenciales de transferencia debemos omitir los valores obtenidos para energías inferiores a la energía umbral. Además, recordemos que para cada estado de ^8Be la sección eficaz diferencial se extiende hasta un valor máximo de energía físicamente accesible. Una vez hemos establecido el rango de sección eficaz diferencial de transferencia que debemos considerar, integramos la distribución obtenida para cada caso. En la figura 3.9 se ilustra el resultado obtenido para una energía incidente $E_{cm}^i(^9\text{Be}) = 36 \text{ MeV}$. Recordemos que hemos incluido pseudoestados del núcleo de ^8Be hasta una energía $E_{\alpha\alpha} \approx 16 \text{ MeV}$ (ver tabla 3.2).

Los resultados obtenidos en la figura 3.9 para la sección eficaz inclusiva, calculada para el ^8Be en cada uno de los estados representativos escogidos, siguen la distribución esperada teniendo presente la norma de cada uno (ver tabla 3.2 y figura 3.4). En este punto, para determinar el valor de la sección eficaz de transferencia total, debemos tener presente que no hemos considerado el conjunto de todos los pseudoestados de ^8Be en nuestro cálculo, sino que hemos seleccionado un conjunto representativo de ellos. Por consiguiente, para tener en cuenta la norma de todos los solapamientos, debemos emplear algún método de interpolación que tome esto en consideración. En el Apéndice C se detallan dos posibles métodos que llevan a resultados muy similares. Mediante uno de estos métodos (Método

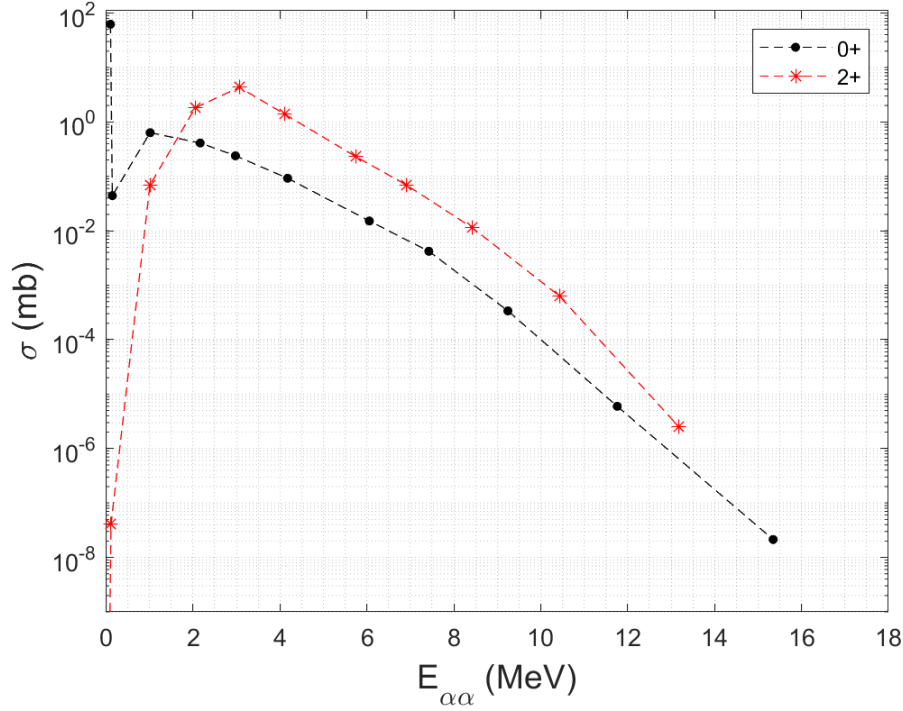


Figura 3.9: Sección eficaz de transferencia inclusiva en función de la energía del sistema α - α para una energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$ igual a 36 MeV.

2) pasamos de una distribución discreta de la sección eficaz (figura 3.9) a una distribución continua, en la que ahora sí tenemos en cuenta la norma de todos los pseudoestados de ${}^8\text{Be}$ y por lo tanto, su suma estará normalizada a 1. A partir de esta distribución podremos obtener la sección eficaz de transferencia total. Lo mostramos en la figura 3.10 para la energía incidente $E_{c.m.}^i = 36$ MeV.

Las secciones eficaces de transferencia totales obtenidas siguiendo el Método 1, para cada energía incidente se muestran en la figura 3.11. Se detalla la contribución de los estados 0^+ y 2^+ de ${}^8\text{Be}$, y los resultados se comparan con los datos experimentales de la Ref. [4] evidenciando un buen acuerdo entre ellos. No obstante, podemos observar que para valores de energía mayores a 40 MeV, es decir, valores por encima de la barrera de Coulomb, los cálculos teóricos que obtenemos subestiman los datos experimentales.

Esta discrepancia puede ser debida a varios motivos. Por un lado, desde el punto de vista de la descripción de la reacción, las secciones eficaces calculadas pueden experimentar variaciones según cual sea la elección de los potenciales ópticos empleados. Además, el potencial $V_{8\text{Be}-197\text{Au}}$ no está bien definido puesto que ${}^8\text{Be}$ es un sistema no ligado. Por otro lado, la elección que hagamos del potencial $V_{n-197\text{Au}}$ es bastante determinante, puesto que es el que da cuenta de la distribución de estados en el núcleo residual final. Los cálculos con el modelo IAV idealmente requerirían de un potencial dispersivo, por lo tanto dependiente de la energía, que debería describir tanto la distribución $n + {}^{197}\text{Au}$ (energías positivas) como la distribución de estados ligados, ${}^{198}\text{Au}$ (energías negativas). Sin embargo, en nuestros cálculos utilizamos un potencial KD, que no es de tipo dispersivo, es decir, no contiene la dependencia con la energía adecuada y, por consiguiente, puede que no describa satisfactoriamente la zona de energías negativas, que es la que nos interesa. Por último, es importante señalar que el modelo estricto de tres cuerpos que utilizamos para

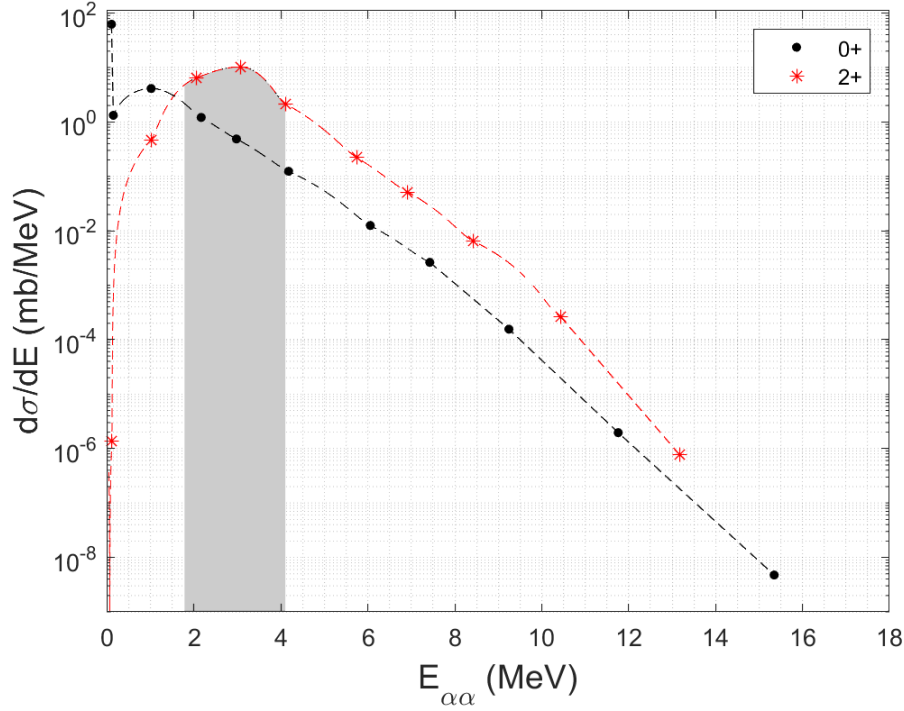


Figura 3.10: Representación gráfica de la sección eficaz diferencial de transferencia, en función de la energía del sistema α - α para una energía cinética incidente de ${}^9\text{Be}$ igual a 36 MeV. Obtenido mediante el Método 2. El área sombreada en gris bajo la curva 2^+ representa de forma aproximada la anchura de la resonancia de ${}^8\text{Be}$ en el estado $J^\pi = 2^+$

describir la función de onda de ${}^9\text{Be}$ no tiene en cuenta efectos de antisimetrización, por lo que realmente puede subestimar la norma de cada solapamiento, es decir, los factores espectroscópicos (SF). Para estimar este efecto, hemos considerado los SF extraídos de un cálculo microscópico, concretamente el método ab-initio denominado Cálculo Variacional de Monte Carlo (VMC) (Ref. [72]). El SF obtenido mediante el método VMC para el solapamiento con el estado 0^+ de ${}^8\text{Be}$ es $\text{SF}=0.595$, mientras que para el estado 2^+ , tenemos $\text{SF}=0.603$. Por lo tanto, reescalamos con estos SF las normas de los solapamientos para cada momento angular ($J^\pi = 0^+, 2^+$) de ${}^8\text{Be}$ y lo obtenido lo mostramos en la figura 3.12.

En este caso, el acuerdo con los datos experimentales mejora notablemente para la zona de energías incidente superiores a la barrera de Coulomb, donde la contribución de los estados 2^+ de ${}^8\text{Be}$ es mayor. Además, en la figura 3.12, también comparamos nuestros resultados con los cálculos teóricos presentados en la Ref. [4] para obtener la sección eficaz de transferencia inclusiva para la reacción ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be}){}^{198}\text{Au}$. Estos cálculos teóricos se obtienen siguiendo el método de canales acoplados de reacción (CRC), siglas en inglés de *coupled reaction channel*, considerando los estados del sistema ${}^{198}\text{Au}$ hasta una energía de excitación $E_x = 703$ keV. Al comparar los resultados del método CRC con nuestros cálculos siguiendo el formalismo IAV, que incluye la descripción de tres cuerpos del proyectil ${}^9\text{Be}$, vemos que en el presente trabajo obtenemos mucho mejor acuerdo con los datos experimentales. En consecuencia, el formalismo teórico empleado en este trabajo nos ofrece un método fiable para estudiar las secciones eficaces de transferencia inclusiva en reacciones nucleares en las cuales el eyectil es un núcleo que no forma estados ligados.

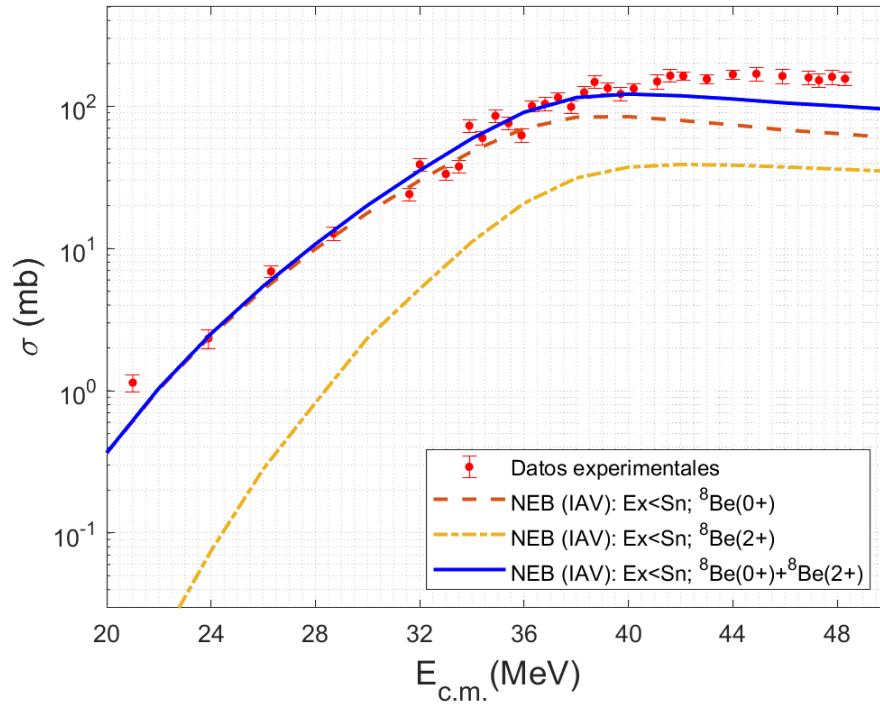


Figura 3.11: Representación de la sección eficaz de transferencia para la reacción nuclear $^{197}\text{Au}(^9\text{Be},^8\text{Be})^{198}\text{Au}$, para diferentes valores de energía incidente de ^9Be . Comparamos los datos teóricos obtenidos con los datos experimentales del artículo de la Ref. [4].

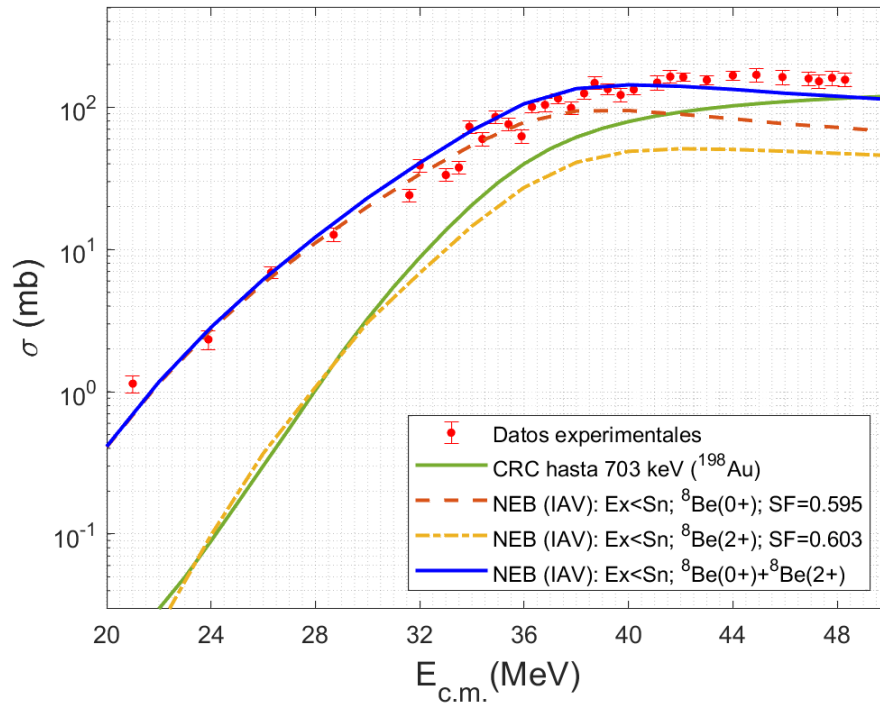


Figura 3.12: Representación de la sección eficaz de transferencia para la reacción nuclear $^{197}\text{Au}(^9\text{Be},^8\text{Be})^{198}\text{Au}$, para diferentes valores de energía incidente de ^9Be escalando por los factores espectroscópicos del cálculo VMC de la Ref. [72]. Comparamos los cálculos teóricos obtenidos mediante el modelo de IAV, con los datos experimentales y los cálculos teóricos obtenidos mediante el método CRC de la Ref. [4].

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo, abordamos el problema del cálculo de secciones eficaces de ruptura inclusiva en reacciones inducidas por proyectiles débilmente ligados, dentro del marco de la teoría propuesta por Ichimura, Austern y Vincent en la década de 1980 [43, 45, 18]. Hemos presentado una derivación alternativa de la fórmula de IAV desarrollada por el Dr. Jin Lei en su tesis doctoral [1], que combina la derivación original de Austern y Vincent [43] con el Teorema óptico de canales acoplados [59]. Dicha derivación alternativa nos ha permitido obtener las contribuciones de EBU y de NEB de la sección eficaz inclusiva total de una manera muy directa, diferente a la propuesta por Kasano e Ichimura [44]. Además, presentamos las expresiones obtenidas para la sección eficaz de NEB siguiendo los modelos de UT y HM para encontrar la equivalencia entre los formalismos desarrollados en forma *post* y en forma *prior*, puesto que los cálculos presentados en este trabajo siguen el formalismo de IAV en su forma *prior* equivalente.

La novedad de este trabajo respecto a los anteriores es que hemos extendido estos desarrollos teóricos a situaciones en las que el eyectil resultante de la reacción es un núcleo que no presenta estados ligados, y por lo tanto puede formarse en varias configuraciones de energía y momento relativos. Al incorporar esto en el formalismo de IAV, aparece en el desarrollo una función de solapamiento entre la función de onda del proyectil y la función de onda del eyectil resultante. Dichos solapamientos han sido, por lo tanto, un ingrediente fundamental para el cálculo de la sección eficaz de NEB.

Aplicamos este formalismo a la reacción nuclear inclusiva $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$ mediante el código computacional “Smoothie” desarrollado por el Dr. Jin Lei [53]. En esta reacción el proyectil es el núcleo de ^9Be y el eyectil es ^8Be , núcleo que efectivamente no forma estados ligados. Para describir la estructura interna de ^9Be , hemos tenido en consideración que es un núcleo de tipo borromeo formado por dos partículas alfa y un neutrón ($\alpha + \alpha + n$) que, por lo tanto, puede estudiarse mediante un modelo de tres cuerpos en el formalismo de armónicos hiperesféricos [54, 63, 55]. Por otro lado, para describir el núcleo de ^8Be ($\alpha + \alpha$) optamos por un modelo de dos cuerpos. Para obtener la sección eficaz de NEB para la reacción objeto de estudio, necesitamos los solapamientos entre el núcleo de ^9Be en su estado fundamental y ^8Be , que se puede producir en cualquiera de los diferentes estados del continuo accesibles (representados mediante pseudoestados). El cálculo de estos solapamientos fue realizado por el tutor D. Jesús Casal.

La reacción considerada ha sido estudiada recientemente en el trabajo experimental de F. Gollan *et al.* [4], por lo que disponemos de datos experimentales con los que comparar nuestros resultados teóricos. Los datos que se presentan en este artículo son para la reacción de transferencia a estados ligados de ^{198}Au , es decir, la reacción $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})^{198}\text{Au}$

(que representa una porción de la sección eficaz de NEB), para energías cinéticas incidentes próximas a la barrera de Coulomb ($V_C^{c.m.} = 38.7$ MeV). En este artículo se presenta un cálculo para la sección eficaz de transferencia utilizando el método CRC considerando todos los estados físicos disponibles del ^{198}Au (hasta una cierta energía de excitación, ya que el rápido aumento en la densidad de estados con la energía de excitación impide incluir todos los estados físicos), que no se ajusta satisfactoriamente con los datos experimentales que obtienen. Este hecho nos motivó a emplear el formalismo de IAV, en el cual el conjunto de estados físicos se sustituye por un potencial complejo promedio y no requiere por tanto de una descripción detallada de dichos estados físicos.

Para encontrar la sección eficaz de transferencia inclusiva para una energía cinética incidente dada, primero obtuvimos la sección eficaz correspondiente al solapamiento con los diferentes estados representativos en los que puede encontrarse el núcleo de ^8Be para $J^\pi = 0^+, 2^+$ y 4^+ . Cada uno de estos estados presenta una norma diferente, de forma que la suma de las contribuciones de todos ellos está normalizada a 1. En este trabajo, no calculamos las secciones eficaces diferenciales correspondientes a todos los solapamientos que se nos proporcionan. Esto es debido a que resulta un trabajo computacionalmente muy exigente, ya que el cálculo implica obtener la sección eficaz diferencial para cada estado final de ^8Be y para cada energía incidente de ^9Be .

Una vez definimos los potenciales ópticos necesarios llevar a cabo el formalismo de IAV en su forma *prior*, obtuvimos las secciones eficaces diferenciales de transferencia correspondientes al solapamiento con cada estado representativo de ^8Be , para diferentes valores de energía cinética incidente comprendidos entre 20 y 50 MeV (en torno a la barrera de Coulomb). Tuvimos presente que, cara a comparar los resultados con los datos experimentales de la Ref. [4], debíamos incluir únicamente la contribución de la sección eficaz a partir del valor de la energía umbral (“*Threshold*”), que representa el valor de energía cinética final total a partir del cual aparecen los estados ligados del sistema $n + ^{197}\text{Au}$. Además, la sección eficaz diferencial se extiende hasta un valor máximo de energía físicamente accesible. Teniendo esto presente, integramos la distribución obtenida para encontrar la contribución de la sección eficaz de transferencia para cada estado representativo de ^8Be . Observamos que la fragmentación en intensidad que presentan los pseudoestados de ^8Be tiene un efecto sobre la sección eficaz de transferencia, de forma que, para encontrar el valor de la sección eficaz de transferencia total correspondiente a cada energía incidente, tuvimos en cuenta que no incluimos las contribuciones de todos los estados representativos de ^8Be . Para ello, utilizamos dos métodos de interpolación que tienen en cuenta la contribución de todos los pseudoestados consideramos en la descripción de ^8Be y que nos devolvieron resultados similares. Obtuvimos dichos valores de sección eficaz y los comparamos con los datos experimentales. Observamos una concordancia bastante buena de nuestros resultados con los datos experimentales para energías cinéticas incidentes por debajo de la barrera de Coulomb, aunque también una subestimación para energías por encima de ese valor. Esto puede ser debido a varios motivos.

Por un lado, a diferencia de en la Ref. [4], donde utilizan el método CRC considerando todos los estados físicos disponibles del ^{198}Au hasta energías de 703 keV para encontrar el valor de la sección eficaz de transferencia, nosotros utilizamos el formalismo de IAV, que permite describir dichas contribuciones mediante un potencial óptico que da cuenta de la interacción $n - ^{198}\text{Au}$. Hemos escogido para este caso un potencial tipo Koning-Dekaroche, que es un potencial no dispersivo y, por tanto, puede que no contenga la dependencia con la energía adecuada, que haría que su parte imaginaria se fuera a cero para valores de la energía relativa $n - ^{198}\text{Au}$ que no sean físicamente accesibles. Este potencial desempeña

un papel crucial en la descripción de nuestro problema, ya que, como hemos señalado, describe la distribución de estados en el núcleo residual. Por lo tanto, si escogemos este tipo de potencial para este sistema, es posible que la distribución de estados ligados que forman el ^{198}Au no esté descrita satisfactoriamente. Por otro lado, para realizar los cálculos necesitamos definir el potencial óptico para el sistema $^8\text{Be} - ^{197}\text{Au}$. Este potencial no se habrá definido correctamente puesto que interviene el ^8Be y, como ya apuntamos, éste es un sistema no ligado. En general, la elección de los potenciales ópticos que hemos hecho puede provocar variaciones en la sección eficaz obtenida.

Otro motivo que puede provocar la discrepancia que obtenemos respecto a los datos experimentales es el hecho de que el formalismo estricto de tres cuerpos que hemos utilizado para describir la función de onda de ^9Be ($\alpha + \alpha + n$) no tiene en cuenta efectos de antisimetrización entre el neutrón considerado de valencia y los neutrones de ^8Be , por lo tanto puede subestimar la norma (en este contexto, análoga a factores espectroscópicos) de cada solapamiento. Esto puede hacerse más notable a medida que la energía incidente aumenta, que es precisamente la región de energías en las que obtenemos discrepancia respecto a los datos experimentales. Para estimar este efecto, hemos considerado los factores espectroscópicos extraídos de un cálculo microscópico, concretamente el método ab-initio denominado Cálculo Variacional de Monte Carlo (VMC) [72].

Escalando con estos factores espectroscópicos, obtuvimos un acuerdo mucho mejor con los datos experimentales [4] para energías incidentes por encima de la barrera de Coulomb. En esta zona es precisamente donde la contribución de los estados 2^+ de ^8Be es más relevante. Además, también comparamos con los resultados teóricos obtenidos en el artículo de la Ref. [4], que recordemos los realizaban mediante el método CRC considerando todos los estados físicos disponibles del ^{198}Au . La comparación entre ambos modelos teóricos con los datos experimentales nos indica que los desarrollos realizados en este trabajo presentan un mejor acuerdo, tanto para energías por encima de la barrera de Coulomb, como para energías por debajo de ésta. Atendiendo a los resultados obtenidos, podemos afirmar que los desarrollos teóricos llevados a cabo en este trabajo (siguiendo el formalismo de IAV, que incluye la descripción de tres cuerpos del proyectil ^9Be) nos ofrecen un método fiable para estudiar las secciones eficaces de transferencia para reacciones nucleares inducidas por un proyectil débilmente ligado cuyo eyectil resultante es un núcleo que no forma estados ligados.

Se pueden implementar posibles mejoras con el fin de perfeccionar los resultados obtenidos de cara a próximos trabajos. Por un lado, una mejora significativa de los resultados podría darse si cambiamos el potencial que describe el sistema $n - ^{197}\text{Au}$ por un potencial dispersivo, dependiente por lo tanto de la energía, que describa adecuadamente la distribución de energía negativa (zona que presenta estados ligados ^{198}Au). Así, esperaremos lograr una mejor coincidencia con los datos experimentales proporcionados para energías incidentes por encima de la barrera de Coulomb. Además, también podemos probar diferentes potenciales para el sistema $^8\text{Be} - ^{197}\text{Au}$, que no está bien definido. Incluso probar con diferentes potenciales ópticos que definan el resto de sistemas para perfeccionar los resultados o, al menos, cuantificar la incertidumbre de los cálculos asociada a la elección de estos potenciales. Por otro lado, es importante destacar que mediante el código computacional “Smoothie” no solo obtenemos los resultados mostrados en este trabajo, sino que también nos devuelve, por ejemplo, las distribuciones angulares de ^8Be , que pueden ser objeto de estudio para próximos trabajos. Además, un posible estudio que podría llevarse a cabo es comparar los cálculos teóricos obtenidos para la energía relativa $E_{\alpha\alpha}$, con datos experimentales resultado de medir estas dos partículas en el laboratorio.

Apéndice A

Potencial Double Folding São Paulo

Para describir la interacción nuclear nos valemos de diferentes tipos de potenciales, entre ellos el potencial tipo: “Double Folding potential: São Paulo”. El término en inglés “Double” se refiere a que son potenciales que presentan doble convolución de las densidades de materia. Dichos potenciales se definen a partir de interacciones microscópicas nucleón-nucleón y poseen mayor sentido físico que los potenciales fenomenológicos.

Para describir este tipo de potencial, antes de nada, es importante definir el concepto de densidad de materia ya que están asociados con la distribución de los nucleones dentro del núcleo atómico. Para un núcleo dado, la distribución de protones para cierto radio multiplicado por el término de volumen $\rho_p(\vec{r}) \times d\vec{r}$, nos da la probabilidad de encontrar a un protón dentro de dicho volumen. Análogamente, podremos encontrar la probabilidad de que un neutrón se encuentre dentro de un cierto volumen, relativo a la distribución del neutrón, $\rho_n(\vec{r})$. De forma que, para encontrar la distribución de nucleones total sumamos ambas contribuciones, $\rho_N(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) + \rho_n(\vec{r})$. Por lo tanto, tal y como se dijo anteriormente, para encontrar la probabilidad de que un nucleón se encuentre dentro de cierto volumen debemos multiplicar la distribución de nucleón, $\rho_N(\vec{r})$, por $d\vec{r}$ [67].

Para describir las densidades de materia podemos asumir una función de Fermi de dos parámetros descrita como

$$\rho_N(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}, \quad (\text{A.1})$$

donde ρ_0 es la densidad central del núcleo, R_0 es el radio de la distribución de densidad de materia y a representa la difusividad de la densidad de materia en el núcleo. La distribución de nucleones se normaliza como

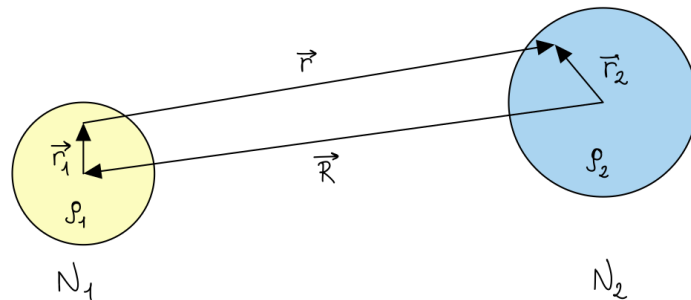


Figura A.1: Coordenadas necesarias para definir la interacción entre dos núcleos mediante un potencial de tipo “Double Folding” [73].

$$\int \rho_N(\vec{r}) d\vec{r} = A, \quad (\text{A.2})$$

siendo A el número másico del núcleo con el que trabajemos.

Teniendo en cuenta esto, podemos describir potenciales de doble convolución

$$V_F(\vec{R}) = \int \int \rho_{N_1}(\vec{r}_1) \rho_{N_2}(\vec{r}_2) v_{NN}(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (\text{A.3})$$

donde las coordenadas se han definido en la figura A.1 y v_{NN} representa la interacción efectiva nucleón-nucleón. Es precisamente debido al hecho de que la integración se realiza sobre dos densidades por lo que este modelo es comúnmente conocido como el modelo de doble convolución (en inglés, *Double Folding model*).

A la hora de elegir la interacción nucleón-nucleón, debemos tener en cuenta el fenómeno de no localidad de Pauli, que consiste en un efecto cuántico no local asociado al intercambio de nucleones entre ambos núcleos debido a la naturaleza fermiónica de los primeros [68]. Para incluir este fenómeno se define lo que se conoce como un potencial local equivalente, que en este caso, es el potencial de São Paulo (SPP) de la forma

$$V_{SPP}(\vec{R}) = V_F(\vec{R}) e^{-4v^4/c^2}, \quad (\text{A.4})$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad relativa local entre los dos núcleos. Por lo tanto, la expresión completa para el potencial tipo SPP es

$$V_{SPP}(\vec{R}) = \int \int \rho_{N_1}(\vec{r}_1) \rho_{N_2}(\vec{r}_2) V_0 \delta(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 e^{-4v^4/c^2}, \quad (\text{A.5})$$

donde $V_0 \delta(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ es la interacción efectiva de rango cero nucleón-nucleón descrita como una interacción de contacto. El valor de V_0 es $V_0 = -456 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^3$, valor que se ha obtenido a través de un amplio estudio sistemático que involucra potenciales de tipo fenomenológicos derivados del análisis de datos de dispersión elástica para muchos sistemas. Para diferenciar el valor de este potencial para un núcleo específico u otro, nos valemos de la densidad de materia concreta de cada uno [7].

Teniendo en cuenta esto, si quisiésemos describir un potencial óptico lo haremos como

$$U_N(\vec{R}) = N_r V_{SPP}(\vec{R}) + i N_i V_{SPP}(\vec{R}), \quad (\text{A.6})$$

donde, N_r y N_i son números reales que desempeñan el papel de coeficientes multiplicativos que determinan la magnitud, tanto de la parte real como de la imaginaria, del potencial óptico. Además, simulan de forma simplificada los efectos del potencial de polarización. Donde, dicha polarización se origina a partir de acoplamientos no elásticos, es dependiente de la energía y es de naturaleza compleja.

Por un lado, la parte imaginaria del potencial proviene de transiciones hacia canales no elásticos disponibles que absorben flujo del canal elástico, mientras que la parte real proviene de transiciones virtuales a estados intermedios como son las excitaciones inelásticas o la transferencia de nucleones entre otros. Los valores estándar de estos parámetros son $N_r = 1.00$ y $N_i = 0.78$ [7]. Este valor para la parte imaginaria proviene de una sistemática realizada por los autores de este potencial sobre muchos sistemas.

Apéndice B

Potencial Koning-Delaroche

Para describir la interacción neutrón-núcleo podemos utilizar un potencial de tipo Koning-Delaroche (KD). Este tipo de potencial es un potencial óptico fenomenológico que es válido para neutrones y para protones para energías entre 1 keV hasta 200 MeV para núcleos cuyo número de protones o de neutrones están muy cerca de capas cerradas, por lo tanto son esféricos, y cuyo número másico se encuentra entre $24 \leq A \leq 209$ [66].

Este potencial está descrito mediante un funcional suave y de carácter único, que representa la dependencia energética de las profundidades del potencial, además de mediante parámetros geométricos físicamente restringidos [66]. Es un potencial de tipo no dispersivo.

A partir de parametrizaciones obtenidas mediante una técnicas computacionales, se han conseguido desarrollar potenciales ópticos globales dependientes de la asimetría para el caso de neutrones y de protones que se consideran superiores a todos los demás modelos fenomenológicos existentes hasta entonces, no solo en lo que respecta a la descripción de observables, sino también porque abarcan un mayor rango de masas y energías. En nuestro caso concreto, necesitamos este tipo de potencial únicamente para el caso de neutrones, es por ello por lo que desarrollaremos brevemente únicamente este caso.

El potencial fenomenológico para la interacción nucleón-núcleo se define genéricamente como

$$\begin{aligned} U(r, E) = & -V_V(E)f(r, R_V, a_V) - iW_V(E)f(r, R_V, a_V) \\ & + i4a_D W_D(E) \frac{d}{dr} f(r, R_D, a_D) + \\ & V_{SO}(E) \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{SO}, a_{SO}) \vec{l} \cdot \sigma + \\ & iW_{SO}(E) \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{SO}, a_{SO}) \vec{l} \cdot \sigma + V_C(r), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donde los términos que contienen $V_{V,SO}$ y $W_{V,D,SO}$ representan las componentes del potencial reales e imaginarias, respectivamente, de los términos de volumen central (V), superficie central (D) y spin-órbita (SO). El último término, V_C representa el término de Coulomb, que se define como

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Zze^2}{2R_C} \left(3 - \frac{r^2}{R_C^2} \right) & \text{para } r \leq R_C \\ \frac{Zze^2}{r} & \text{para } r \geq R_C, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

con Z la carga del blanco, z la carga del proyectil, $R_C = r_C A^{1/3}$. Como en nuestro caso nos centramos en el caso de interacción neutrón-núcleo este término no interviene al presentar el neutrón una carga igual a cero. Además, $f(r, R_i, a_i)$ es el factor de forma que se definimos como

$$f(r, R_i, a_i) = (1 + \exp[r - R_i/a_i])^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

siendo A el número másico, $R_i = r_i A^{1/3}$ y a_i es el parámetro de difusividad.

En este punto, antes de definir la expresión para dicho potencial concretamente necesitamos definir la energía de Fermi, en MeV, para los neutrones incidentes en nuestro caso, es decir, E_f^n .⁽¹⁾ Necesitamos tener en cuenta este término ya que la forma funcional para la profundidad del potencial depende del parámetro $E - E_f^n$ (En general para cualquiera de los dos nucleones $E - E_f$). Por lo que, definimos

$$E_f^n = -\frac{1}{2}[S_n(Z, N) + S_n(Z, N + 1)], \quad (\text{B.4})$$

donde S_n representa la energía de separación de un neutrón del núcleo con un número atómico, Z y número de neutrones igual a N .

El potencial global de este tipo para neutrones se define como

$$\begin{aligned} V_V(E) &= v_1^n [1 - v_2^n (E - E_f^n) + v_3^n (E - E_f^n)^2 - v_4^n (E - E_f^n)^3], \\ W_V(E) &= w_1^n \frac{(E - E_f^n)^2}{(E - E_f^n)^2 + (w_2^n)^2}, \\ r_V &= 1.3039 - 0.4054 A^{-1/3}, \\ a_V &= 0.6778 - 1.487 \times 10^{-4}, \\ W_D(E) &= d_1^n \frac{(E - E_f^n)^2}{(E - E_f^n)^2 + (d_3^n)^2} \exp[-d_2^n (E - E_f^n)], \\ r_D &= 1.3424 - 0.01585 A^{1/3}, \\ a_D &= 0.5446 - 1.656 \times 10^{-4} A, \\ V_{SO}(E) &= v_{SO1}^n \exp[-v_{SO2}^n (E - E_f^n)], \\ W_{SO}(E) &= w_{SO1}^n \frac{(E - E_f^n)^2}{(E - E_f^n)^2 + (w_{SO2}^n)^2}, \\ r_{SO} &= 1.1854 - 0.647 A^{-1/3}, \\ a_{SO} &= 0.59, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde las unidades son MeV y fm y los parámetros no definidos se encuentran en la Ref. [66].

(1) La energía de Fermi se define como la energía que se encuentra a medio camino entre la última capa ocupada y la primera desocupada en un núcleo.

Apéndice C

Métodos de interpolación para el cálculo de la sección eficaz total de transferencia inclusiva

Para encontrar el valor total de la sección eficaz de transferencia inclusiva para la reacción $^{197}\text{Au}(^9\text{Be}, ^8\text{Be})$, para cada energía incidente de ^9Be , debemos tener en cuenta la norma de cada estado representativo del continuo de ^8Be (descrito mediante pseudoestados). Debido a que no realizamos el cálculo para todos los pseudoestados proporcionados, es necesario recurrir a un método de interpolación de la sección eficaz. Aquí presentamos dos posibilidades que devuelven resultados similares.

Por un lado, mediante el Método 1, interpolamos los valores obtenidos de sección eficaz de transferencia correspondiente al solapamiento con cada estado representativo de ^8Be escogido, para una energía incidente específica. No obstante, interpolaremos concretamente en los valores exactos de energía de los estados representativos de ^8Be que nos proporciona el tutor D. Jesús Casal (figura 3.4). De esta forma, estamos teniendo en cuenta la norma total de los solapamientos (que deben sumar 1 resultado de la normalización de la función de onda de tres cuerpos), por lo tanto, si sumamos la contribución de cada pseudoestado de ^8Be , encontraremos el valor de la sección eficaz de transferencia total. Repetiremos los mismos pasos para cada energía incidente de ^9Be .

Por otro lado, el Método 2 consiste en pasar de los valores discretos que obtenemos de la sección eficaz de transferencia para cada pseudoestado representativo de ^8Be a una distribución continua, teniendo en cuenta la relación

$$\frac{d\sigma}{dE} \approx \frac{\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i}. \quad (\text{C.1})$$

Por lo tanto, para obtener la distribución continua, dividimos el valor de la sección eficaz de transferencia que obtenemos para cada caso por los intervalos energéticos $\Delta\varepsilon_i$, que se definen teniendo en cuenta la figura C.1, como:

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{2} + \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{2} = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2}, \quad (\text{C.2})$$

siendo ε_i la energía de cierto pseudoestado representativo i de ^8Be .

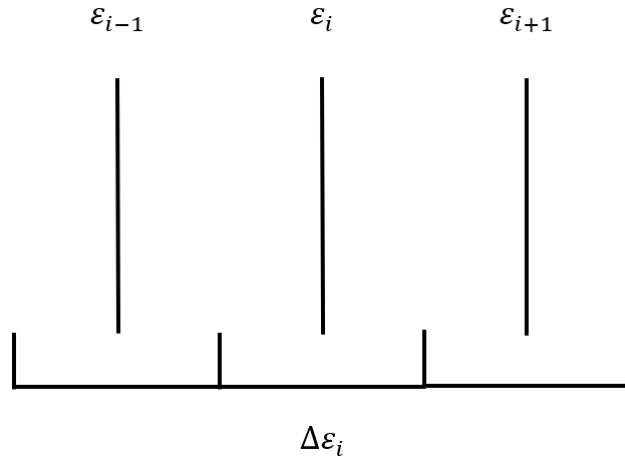


Figura C.1: Representación esquemática de $\Delta\varepsilon_i$.

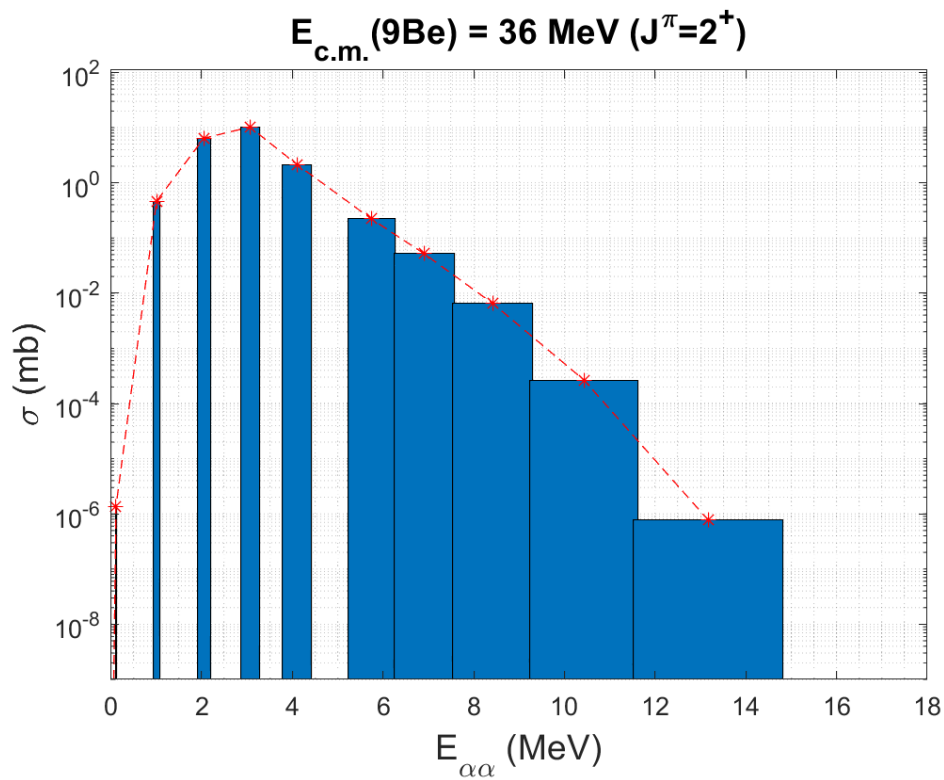


Figura C.2: Divisiones en intervalos para llevar a cabo el Método 2 para $E_{c.m.}^i (^9\text{Be}) = 36 \text{ MeV}$ para $J^\pi = 2^+$.

Como ejemplo, podemos observar en la figura C.2 los intervalos que se generan para la energía incidente de ${}^9\text{Be}$ igual a 36 MeV, cuando el núcleo de ${}^8\text{Be}$ se encuentra en un estado $J^\pi = 2^+$. Una vez dividimos los valores de la sección eficaz entre los intervalos, $\Delta\varepsilon_i$, interpolamos los nuevos valores obtenidos e integramos. De esta forma, al igual que ocurre en el Método 1, también estamos considerando la norma completa.

Podemos comparar lo obtenido mediante ambos métodos en la figura C.3. En dicha figura representamos lo obtenido antes de sumar (Método 1) o integrar (Método 2) las contribuciones de $J^\pi = 0^+$ y $J^\pi = 2^+$, para tres energías incidentes de ${}^9\text{Be}$ representativas. En las gráficas del Método 1 (figura C.3) hemos representado todos los valores discretos que sumamos para encontrar el valor de la sección eficaz total. Para ciertas energías incidentes (sobre todo inferiores a 24 MeV) las curvas para $J^\pi = 0^+$ y $J^\pi = 2^+$ no siguen una distribución decreciente. Este último hecho puede ser debido a deficiencias numéricas en la interpolación, que pueden provocar que ocurran este tipo de comportamientos. Destacar que el área sombreada en gris bajo las curvas para el ${}^8\text{Be}$ en el estado excitado $J^\pi = 2^+$ representa de forma aproximada la anchura de la resonancia de ${}^8\text{Be}$ en $J^\pi = 2^+$, en concordancia con la representación de estas mostrada en la figura 1.4.

Al comparar los valores de sección eficaz de transferencia total que obtenemos llevando ambos métodos, obtenemos resultados muy similares. En la sección 3.2 exponemos los obtenidos mediante el Método 1, aunque es importante destacar que ambos son igual de válidos.

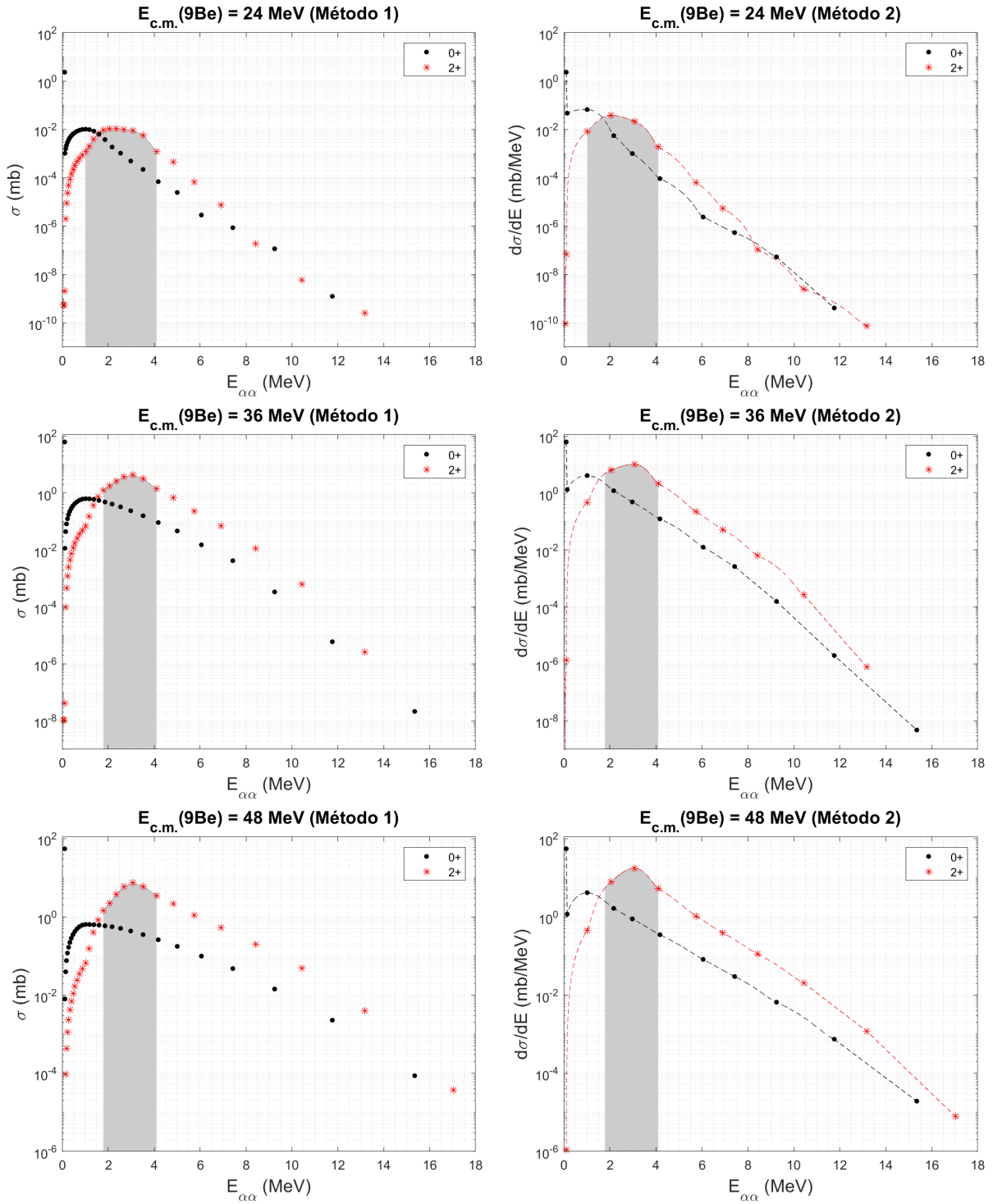


Figura C.3: Representación gráfica de las secciones eficaces de transferencia (Método 1) y secciones eficaces diferenciales de transferencia (Método 2) para la reacción nuclear ${}^{197}\text{Au}({}^9\text{Be}, {}^8\text{Be})$, en función de la energía $E_{\alpha\alpha}$ para diferentes valores de energía incidente de ${}^9\text{Be}$.

Bibliografía

- [1] J. Lei. “Study of inclusive breakup reactions induced by weakly bound nuclei”. Tesis doct. Universidad de Sevilla, 2016.
- [2] A. Arazi et al. “ ${}^9\text{Be} + {}^{120}\text{Sn}$ scattering at near-barrier energies within a four-body model”. En: *Phys. Rev. C* 97 (4 2018), pág. 044609. DOI: 10.1103/PhysRevC.97.044609. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.97.044609>.
- [3] Malika Kaushik et al. “Fusion of the Borromean nucleus ${}^9\text{Be}$ with a ${}^{197}\text{Au}$ target at near-barrier energies”. En: *Phys. Rev. C* 101 (3 2020), pág. 034611. DOI: 10.1103/PhysRevC.101.034611. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.034611>.
- [4] F. Gollan et al. “One-neutron transfer, complete fusion, and incomplete fusion from the ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$ reaction”. En: *Phys. Rev. C* 104 (2 2021), pág. 024609. DOI: 10.1103/PhysRevC.104.024609. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.104.024609>.
- [5] M. A. G. Alvarez et al. “Elastic scattering, inelastic excitation, and $1n$ pick-up transfer cross sections for ${}^{10}\text{B} + {}^{120}\text{Sn}$ at energies near the Coulomb barrier”. En: *Physical Review C* 98.2 (2018). DOI: 10.1103/physrevc.98.024621. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevc.98.024621>.
- [6] *National Nuclear Data Center*. (Visitada 13 de Agosto de 2023). URL: <https://www.nndc.bnl.gov/>.
- [7] M. A. G. Alvarez et al. “Systematic study of optical potential strengths in reactions on ${}^{120}\text{Sn}$ involving strongly bound, weakly bound, and exotic nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 100 (2019), pág. 064602. DOI: 10.1103/PhysRevC.100.064602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.064602>.
- [8] R. J. Woolliscroft et al. “Breakup and transfer processes in the ${}^9\text{Be} + {}^{208}\text{Pb}$ reaction”. En: *Phys. Rev. C* 68 (1 2003), pág. 014611. DOI: 10.1103/PhysRevC.68.014611. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.68.014611>.
- [9] D.R. Tilley et al. “Energy levels of light nuclei A=8,9,10”. En: *Nuclear Physics A* 745.3 (2004), págs. 155-362. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2004.09.059>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947404010267>.
- [10] Malika Kaushik et al. “Investigating neutron transfer in the ${}^9\text{Be} + {}^{197}\text{Au}$ system”. En: *Phys. Rev. C* 104 (2 2021), pág. 024615. DOI: 10.1103/PhysRevC.104.024615. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.104.024615>.
- [11] Jin Lei y Antonio M Moro. “Reexamining closed-form formulae for inclusive breakup: Application to deuteron-and Li 6-induced reactions”. En: *Physical Review C* 92.4 (2015), pág. 044616.

- [12] Kenneth S Krane. *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [13] LD Faddeev. “Scattering theory for a three-particle system”. En: *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.* 39 (1960).
- [14] Walter Glöckle. *The quantum mechanical few-body problem*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] G. Baur, R. Shyam, F. Rösler y D. Trautmann. “Calculation of proton-neutron coincidence cross sections in 56 MeV deuteron-induced breakup reactions by post form distorted-wave Born approximation”. En: *Phys. Rev. C* 28 (2 1983), págs. 946-949. DOI: 10.1103/PhysRevC.28.946. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.28.946>.
- [16] P. Fröbrich, R. Lipperheide y R. Satchler. *Theory of Nuclear Reactions*. 1997.
- [17] Joaquín Gómez Camacho y Antonio M. Moro. “A Pedestrian Approach to the Theory of Transfer Reactions: Application to Weakly-Bound and Unbound Exotic Nuclei”. En: (2014). Ed. por Christoph Scheidenberger y Marek Pfützner, págs. 39-66. DOI: 10.1007/978-3-642-45141-6_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45141-6_2.
- [18] N. Austern, Y. Iseri, M. Kamimura, M. Kawai, G. Rawitscher y M. Yahiro. “Continuum-discretized coupled-channels calculations for three-body models of deuteron-nucleus reactions”. En: *Physics Reports* 154.3 (1987), págs. 125-204. ISSN: 0370-1573. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157387900949>.
- [19] H. Esbensen y G.F. Bertsch. “Effects of E2 transitions in the Coulomb dissociation of 8B ”. En: *Nuclear Physics A* 600.1 (1996), págs. 37-62. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(96\)00006-1](https://doi.org/10.1016/0375-9474(96)00006-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947496000061>.
- [20] T. Kido, K. Yabana e Y. Suzuki. “Coulomb breakup mechanism of neutron drip-line nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 50 (3 1994), R1276-R1279. DOI: 10.1103/PhysRevC.50.R1276. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.50.R1276>.
- [21] P. Capel, G. Goldstein y D. Baye. “Time-dependent analysis of the breakup of ^{11}Be on ^{12}C at 67 MeV/nucleon”. En: *Phys. Rev. C* 70 (6 2004), pág. 064605. DOI: 10.1103/PhysRevC.70.064605. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.064605>.
- [22] Masanobu Yahiro et al. “Chapter III. Effects of Deuteron Virtual Breakup on Deuteron Elastic and Inelastic Scattering”. En: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 89 (abr. de 1986), págs. 32-83. ISSN: 0375-9687. DOI: 10.1143/PTPS.89.32. eprint: <https://academic.oup.com/ptps/article-pdf/doi/10.1143/PTPS.89.32/5377504/89-32.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1143/PTPS.89.32>.
- [23] P Chau Huu-Tai. “A panorama of CDCC calculations for deuteron induced reactions: from elastic cross sections to transfer and inelastic ones”. En: vol. 312. 8. 2011, pág. 082018. DOI: 10.1088/1742-6596/312/8/082018. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/312/8/082018>.
- [24] M. Gómez-Ramos y A. M. Moro. “Interplay of projectile breakup and target excitation in reactions induced by weakly bound nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 95 (3 2017), pág. 034609. DOI: 10.1103/PhysRevC.95.034609. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.034609>.

- [25] N. C. Summers, F. M. Nunes e I. J. Thompson. “Extended continuum discretized coupled channels method: Core excitation in the breakup of exotic nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 74 (1 2006), pág. 014606. DOI: 10.1103/PhysRevC.74.014606. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.74.014606>.
- [26] R de Diego, JM Arias, JA Lay y AM Moro. “Continuum-discretized coupled-channels calculations with core excitation”. En: *Physical Review C* 89.6 (2014), pág. 064609.
- [27] R.C. Johnson y P.C. Tandy. “An approximate three-body theory of deuteron stripping”. En: *Nuclear Physics A* 235.1 (1974), págs. 56-74. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(74\)90178-X](https://doi.org/10.1016/0375-9474(74)90178-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037594747490178X>.
- [28] R. C. Johnson y P. J. R. Soper. “Contribution of Deuteron Breakup Channels to Deuteron Stripping and Elastic Scattering”. En: *Phys. Rev. C* 1 (3 1970), págs. 976-990. DOI: 10.1103/PhysRevC.1.976. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.1.976>.
- [29] J. L. Ferreira, J. Rangel, J. Lubian y L. F. Canto. “Fusion reactions in collisions of neutron halo nuclei with heavy targets”. En: *Phys. Rev. C* 107 (3 2023), pág. 034603. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.034603. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.034603>.
- [30] J. Lubian, J. L. Ferreira, J. Rangel, M. R. Cortes y L. F. Canto. “Fusion processes in collisions of ${}^6\text{Li}$ beams on heavy targets”. En: *Phys. Rev. C* 105 (5 2022), pág. 054601. DOI: 10.1103/PhysRevC.105.054601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.105.054601>.
- [31] M. R. Cortes, J. Rangel, J. L. Ferreira, J. Lubian y L. F. Canto. “Complete and incomplete fusion of ${}^7\text{Li}$ projectiles on heavy targets”. En: *Phys. Rev. C* 102 (6 2020), pág. 064628. DOI: 10.1103/PhysRevC.102.064628. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.064628>.
- [32] HD Marta, LF Canto y R Donangelo. “Complete and incomplete fusion of weakly bound nuclei”. En: *Physical Review C* 89.3 (2014), pág. 034625.
- [33] Alexis Diaz-Torres. “Modelling incomplete fusion dynamics of weakly bound nuclei at near-barrier energies”. En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 37.7 (2010), pág. 075109. DOI: 10.1088/0954-3899/37/7/075109. URL: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/37/7/075109>.
- [34] Ian J Thompson y Filomena M Nunes. *Nuclear reactions for astrophysics: principles, calculation and applications of low-energy reactions*. Cambridge University Press, 2009.
- [35] AM Moro et al. “Reaction mechanisms in the scattering of ${}^8\text{Li}$ on ${}^{208}\text{Pb}$ around the Coulomb barrier”. En: *Physical Review C* 68.3 (2003), pág. 034614.
- [36] G. Baur, R. Shyam, F. Rösler y D. Trautmann. “Importance of the breakup mechanism for composite particle scattering”. En: *Phys. Rev. C* 21 (6 1980), págs. 2668-2671. DOI: 10.1103/PhysRevC.21.2668. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.21.2668>.
- [37] A. Budzanowski et al. “Observation of the α -Particle Breakup Process at $E_\alpha^{\text{lab}} = 172.5$ MeV”. En: *Phys. Rev. Lett.* 41 (9 1978), págs. 635-638. DOI: 10.1103/PhysRevLett.41.635. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.41.635>.

- [38] R. Shyam, G. Baur, F. Rösels y D. Trautmann. “Elastic and inelastic breakup of the ^3He particle”. En: *Phys. Rev. C* 22 (4 1980), págs. 1401-1405. DOI: 10.1103/PhysRevC.22.1401. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.22.1401>.
- [39] T. Udagawa y T. Tamura. “Breakup-Fusion Description of Massive Transfer Reactions with Emission of Fast Light Particles”. En: *Phys. Rev. Lett.* 45 (16 1980), págs. 1311-1314. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.1311. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.1311>.
- [40] T. Udagawa y T. Tamura. “Derivation of breakup-fusion cross sections from the optical theorem”. En: *Phys. Rev. C* 24 (3 1981), págs. 1348-1349. DOI: 10.1103/PhysRevC.24.1348. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.24.1348>.
- [41] T. Udagawa, Y.J. Lee y T. Tamura. “Extension of the breakup-fusion description to stripping reactions to negative energy states”. En: *Physics Letters B* 196.3 (1987), págs. 291-294. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90733-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90733-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387907337>.
- [42] T. Udagawa, T. Tamura y R. C. Mastroleo. “Exact and approximate sum rules for inclusive breakup reactions”. En: *Phys. Rev. C* 37 (5 1988), págs. 2261-2263. DOI: 10.1103/PhysRevC.37.2261. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.37.2261>.
- [43] N. Austern y C. M. Vincent. “Inclusive breakup reactions”. En: *Phys. Rev. C* 23 (5 1981), págs. 1847-1853. DOI: 10.1103/PhysRevC.23.1847. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.23.1847>.
- [44] Akira Kasano y Munetake Ichimura. “A new formalism of inclusive breakup reactions and validity of the surface approximation”. En: *Physics Letters B* 115.2 (1982), págs. 81-85. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90800-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90800-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382908000>.
- [45] M. Ichimura, N. Austern y C. M. Vincent. “Equivalence of post and prior sum rules for inclusive breakup reactions”. En: *Phys. Rev. C* 32 (2 1985), págs. 431-439. DOI: 10.1103/PhysRevC.32.431. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.32.431>.
- [46] Mahir Saleh Hussein y Kirk W McVoy. “Inclusive projectile fragmentation in the spectator model”. En: *Nuclear Physics A* 445.1 (1985), págs. 124-139.
- [47] M Gómez-Ramos, Joaquín Gómez-Camacho, Jin Lei y AM Moro. “The Hussein–McVoy formula for inclusive breakup revisited: A Tribute to Mahir Hussein”. En: *The European Physical Journal A* 57.2 (2021), pág. 57.
- [48] N. Austern et al. “Continuum-discretized coupled-channels calculations for three-body models of deuteron-nucleus reactions”. En: *Physics Reports* 154.3 (1987), págs. 125-204. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(87\)90094-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(87)90094-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157387900949>.

- [49] Jutta E. Escher et al. “Compound-nuclear reaction cross sections from surrogate measurements”. En: 84 (1 2012), págs. 353-397. DOI: 10.1103/RevModPhys.84.353. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.353>.
- [50] B. V. Carlson, R. Capote y M. Sin. “Elastic and inelastic breakup of deuterons with energy below 100 MeV”. En: (2015). arXiv: 1508.01466 [nucl-th].
- [51] G. Potel, F. M. Nunes e I. J. Thompson. “Establishing a theory for deuteron-induced surrogate reactions”. En: *Phys. Rev. C* 92 (3 2015), pág. 034611. DOI: 10.1103/PhysRevC.92.034611. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.92.034611>.
- [52] Jin Lei y Antonio M. Moro. “Numerical assessment of post-prior equivalence for inclusive breakup reactions”. En: *Phys. Rev. C* 92 (6 2015), pág. 061602. DOI: 10.1103/PhysRevC.92.061602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.92.061602>.
- [53] J. Lei y A. M. Moro. “Computer code Smoothie.” Unpublished.
- [54] J. Casal, M. Rodríguez-Gallardo, J. M. Arias e I. J. Thompson. “Astrophysical reaction rate for ${}^9\text{Be}$ formation within a three-body approach”. En: *Phys. Rev. C* 90 (4 2014), pág. 044304. DOI: 10.1103/PhysRevC.90.044304. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.90.044304>.
- [55] J. Casal, Jagjit Singh, L. Fortunato, W. Horiuchi y A. Vitturi. “Electric dipole response of low-lying excitations in the two-neutron halo nucleus ${}^{29}\text{F}$ ”. En: *Phys. Rev. C* 102 (6 2020), pág. 064627. DOI: 10.1103/PhysRevC.102.064627. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.064627>.
- [56] Herman Feshbach. “Unified theory of nuclear reactions”. En: *Annals of Physics* 5.4 (1958), págs. 357-390.
- [57] Herman Feshbach. “A unified theory of nuclear reactions. II”. En: *Annals of Physics* 19.2 (1962), págs. 287-313.
- [58] Marvin L Goldberger y Kenneth M Watson. *Collision theory*. Courier Corporation, 2004.
- [59] Stephen R. Cotanch. “Coupled channels optical theorem and non-elastic cross section sum rule”. En: *Nuclear Physics A* 842.1 (2010), págs. 48-58. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2010.04.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947410004215>.
- [60] X. H. Li, T. Udagawa y T. Tamura. “Assessment of approximations made in breakup-fusion descriptions”. En: *Phys. Rev. C* 30 (6 1984), págs. 1895-1903. DOI: 10.1103/PhysRevC.30.1895. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.30.1895>.
- [61] M.V. Zhukov et al. “Bound state properties of Borromean halo nuclei: ${}^6\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ ”. En: *Physics Reports* 231.4 (1993), págs. 151-199. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(93\)90141-Y](https://doi.org/10.1016/0370-1573(93)90141-Y). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390141Y>.
- [62] En: ().
- [63] J Casal, Manuela Rodríguez-Gallardo y JM Arias. “Analytical transformed harmonic oscillator basis for three-body nuclei of astrophysical interest: Application to ${}^6\text{He}$ ”. En: *Physical Review C* 88.1 (2013), pág. 014327.

- [64] J.A. Lay Valera. “Descripción de la estructura y reacciones de núcleos exóticos en una base de oscilador armónico transformado”. Tesis doct. Universidad de Sevilla, 2012.
- [65] I. J. Thompson et al. “Pauli blocking in three-body models of halo nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 61 (2 2000), pág. 024318. DOI: 10.1103/PhysRevC.61.024318. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.61.024318>.
- [66] A.J. Koning y J.P. Delaroche. “Local and global nucleon optical models from 1 keV to 200 MeV”. En: *Nuclear Physics A* 713.3 (2003), págs. 231-310. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(02\)01321-0](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(02)01321-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947402013210>.
- [67] L.C. Chamon, B.V. Carlson y L.R. Gasques. “São Paulo potential version 2 (SPP2) and Brazilian nuclear potential (BNP)”. En: *Computer Physics Communications* 267 (2021), pág. 108061. ISSN: 0010-4655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108061>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465521001739>.
- [68] Alessia Di Pietro. “Phenomenological optical potentials”. En: *The European Physical Journal Plus* 133.10 (2018), pág. 404.
- [69] F. Gollan et al. “Energy dependence of the optical potential of the weakly bound ^9Be projectile on the ^{197}Au target”. En: *Nuclear Physics A* 1000 (2020), pág. 121789. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121789>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947420300993>.
- [70] Ian J. Thompson. “Coupled reaction channels calculations in nuclear physics”. En: *Computer Physics Reports* 7.4 (1988), págs. 167-212. ISSN: 0167-7977. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-7977\(88\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0167-7977(88)90005-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167797788900056>.
- [71] *Web EXFOR*. (Visitada 03 de Septiembre de 2023). URL: <https://www-nds.iaea.org/exfor/>.
- [72] S. Pastore, R. B. Wiringa, Steven C. Pieper y R. Schiavilla. “Quantum Monte Carlo calculations of electromagnetic transitions in ^8Be with meson-exchange currents derived from chiral effective field theory”. En: *Phys. Rev. C* 90 (2 2014), pág. 024321. DOI: 10.1103/PhysRevC.90.024321. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.90.024321>.
- [73] V. Durant, P. Capel, L. Huth, A.B. Balantekin y A. Schwenk. “Double-folding potentials from chiral effective field theory”. En: *Physics Letters B* 782 (2018), págs. 668-674. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.05.084>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318304556>.