EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE INFANTIL DESDE EL AULA DE MATEMÁTICAS

EARLY CHILDHOOD TEACHERS' MATHEMATICS SPECIALIZED KNOWLEDGE FROM PROFESSIONAL PRACTICE

Muñoz-Catalán, M.C.[1], Joglar, N.[2], Ramírez, M.[2, 3],
Escudero, A.M.[1], Aguilar, Á.[4], Ribeiro, M.[5]

[1]*Universidad de Sevilla,* [2]*Universidad Complutense de Madrid,*
[3]*La Salle Centro Universitario,* [4]*Universidad de Oviedo,*
[5]*Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (Brasil)*

RESUMEN

Con el objetivo de avanzar en la comprensión de la naturaleza y contenido del conocimiento del profesor de Educación Infantil en lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, en este capítulo describimos e interpretamos las acciones de dos profesores a lo largo de una sesión. Así, con foco en la práctica de aula, considerando el modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) y adoptando un paradigma interpretativo, analizamos un vídeo de cada profesor para comprender qué conocimiento especializado sustenta sus prácticas en lo que respecta a la enseñanza de Aritmética y Geometría. Los resultados ponen de relieve la sólida formación matemática en contenidos específicos de la etapa que estos profesionales necesitan y la importante relación de estos con elementos de conocimiento didáctico del contenido.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Palabras clave: *profesor de Educación Infantil, MTSK, descomposición numérica, composición geométrica, enfoque geométrico proyectivo.*

ABSTRACT

With the aim of advancing in the understanding of the nature and content of Early Childhood teachers' knowledge with respect to the teaching of Mathematics, in this chapter we describe and interpret the actions of two Early Childhood teachers throughout a session. Thus, putting the focus on classroom practice, considering the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) model and adopting an interpretive paradigm, we analyze one video from two teachers to understand what specialized knowledge supports their practices in regard to the teaching of Arithmetic and Geometry. The results highlight the depth of the mathematical content knowledge that these professionals in this stage need, and the important relation between some aspects of this knowledge and some elements of pedagogical content knowledge.

Keywords: *Early childhood teacher, Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK), number decomposition, geometric composition, projective geometric approach.*

INTRODUCCIÓN

La atención a la etapa de Educación Infantil es relativamente reciente en nuestra comunidad de investigación. Asociaciones profesionales como el National Council of Teachers of Mathematics o la National Association for the Education of Young Children (NAEYC y NCTM, 2013) han articulado la necesidad de proporcionar una formación matemática sólida en esta etapa sobre la base del importante papel que la formación matemática temprana juega en el desarrollo de los alumnos. Esta formación matemática temprana contribuye, por un lado, a minimizar la brecha entre alumnos debido a diferencias socioeconómicas y, por otro, actúa de predictor del éxito escolar posterior, pues las competencias de razonamiento que desarrolla se constituyen como fundamento cognitivo para pensar y aprender en todas las materias (Clements, Baroody y Sarama, 2013).

El currículo oficial español (Orden ECI/3960/2007), orientado al desarrollo integral del alumno, aparece estructurado en tres áreas: *conocimiento de sí mismo y autonomía personal*, *conocimiento del entorno* y *lenguajes: comunicación y representación*. Las matemáticas aparecen explícitamente asociadas a la segunda área y se deja la responsabilidad al profesor de plantearse la relación de las matemáticas con las demás, de establecer cuáles son los contenidos matemáticos, cómo secuenciarlos por ciclos y cursos y con qué enfoque debe trabajarlos. Así, no se puede hablar específicamente del profesor de matemáticas en Educación Infantil, pero, quizás en mayor medida que el profesor de otras etapas educativas, este profesional necesita disponer de un sólido conocimiento para identificar con rigor los cimientos del edificio matemático, promover un aprendizaje profundo de los mismos y revestirlos de un aparataje lúdico y funcional.

Poco se sabe todavía de la naturaleza y del contenido de este conocimiento. En una revisión que Parks y Wager (2015) realizaron de los artículos de los últimos 20 años pertenecientes a las cuatro revistas más relevantes sobre esta etapa, constataron que en las dos específicas del área (*The Journal of Research in Mathematics Education y The Journal of Mathematics Teacher Education*) se daba, de manera general, una escasa atención a la etapa de Educación Infantil, y, en particular, a la investigación sobre la formación matemática de los profesores de esta etapa educativa. Lamentaban que los cursos orientados a estos profesionales solían estar centrados en la memorización de hechos, definiciones y procedimientos, en lugar de ayudarlos a comprender la esencia de los conceptos y procedimientos.

Los escasos estudios que hay sobre el conocimiento de este profesional para enseñar matemáticas se han centrado principalmente en aspectos relacionados con el subdominio del *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) propuesto por Shulman (1986) (e.g., Lee, 2010; McGray yChen, 2012), tratando de evidenciar su influencia en la calidad instruccional. Comienzan a emerger estudios que abogan por atender también al conocimiento de la propia matemática como elemento necesario para construir un adecuado PCK matemático (e.g. Opperman, Anders y Hachfeld, 2016). En esta línea, en Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro (2017), presentamos una propuesta articulada de conocimiento especializado sobre la resta para el profesor de Infantil. La reflexión sobre dicha propuesta nos permitió concluir que este conocimiento era denso conceptualmente, altamente cohesionado y con un fuerte peso en el dominio matemático.

En este capítulo presentamos nuestros avances en la identificación de elementos de conocimiento que este profesional necesita para enseñar matemáticas, haciéndolo desde la práctica como lugar privilegiado para comprender cómo este conocimiento sustenta las acciones del profesor. Así, ampliando el trabajo realizado con foco en la resta, en este capítulo nos centramos en dos de los núcleos matemáticos más relevantes en esta etapa: Número y operaciones y Geometría (Clements, 2004), lo que además nos permitirá avanzar en la comprensión de la naturaleza y contenido del conocimiento especializado del profesor de Infantil para enseñar matemáticas.

MARCO TEÓRICO

La mayoría de los modelos de conocimiento del profesor parten del trabajo de Shulman (1986), quien planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando, enfocando el conocimiento necesario para enseñar a través de la lente de la propia disciplina. Introdujo la distinción entre *conocimiento del contenido* y *conocimiento didáctico del contenido*, entendiendo esta última categoría como la combinación entre contenido y pedagogía (general) y considerándola como la que podía distinguir la comprensión del especialista en contenido de la del pedagogo.

Esta atención a la especificidad del contenido que se enseña es igualmente pertinente para el profesor de Educación Infantil. La naturaleza abstracta de las matemáticas confiere también una especificidad particular a los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados a ella en esta etapa educativa. Así, consideramos que su conocimiento ha de ser especializado puesto que supone una manera particular de conocer las matemáticas para un fin docente y para un público particular que, a la vez, es diferente al del profesor de Primaria o Secundaria (Ribeiro et al, 2015). Adoptamos el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Montes et al., 2018; Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017) y, por ende, su conceptualización del conocimiento como aquel que el profesor necesita, utiliza y tiene a su disposición (Schoenfeld, 2010) y, por tanto, sustenta sus acciones.

El modelo MTSK distingue 6 subdominios de conocimiento, organizados atendiendo a la distinción planteada por Shulman, entre dominio matemático (MK) y dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK), dentro del cual se ha integrado el conocimiento curricular de Shulman. También se ha incluido el dominio de las creencias y concepciones sobre la Matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como elemento que permea todo el conocimiento (el cual no va a ser objeto de estudio en este trabajo) (ver Figura 1).

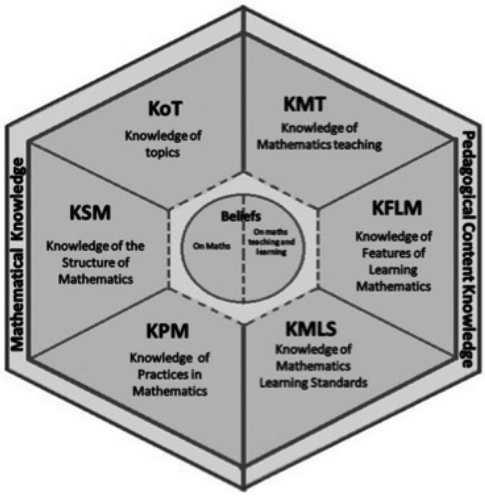


Figura 1. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)
(extraído de Carrillo, Climent, et al., 2018).

En el dominio del *Mathematical Knowledge (MK)* se encuentran los siguientes tres subdominios:

Knowledge of Topics (*KoT*) contiene el conocimiento disciplinar, que incluye los procedimientos (desde el cómo se hace hasta el cuándo puede hacerse pasando por el porqué), las definiciones, propiedades y sus fundamentos, la fenomenología y aplicaciones de un contenido y los diferentes registros de representación. Se incluyen aquí las conexiones intraconceptuales, es decir, aquellas que relacionan conceptos o procesos de un mismo tema. Serían elementos del *KoT* conocer: las propiedades del esquema parte-todo y su papel en la comprensión del número; los atributos relevantes e irrelevantes de las figuras geométricas, así como sus definiciones, o los registros que se pueden utilizar para representar la descomposición del número o las figuras, las especificidades de cada uno de ellos y la complementariedad entre ellos.

Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) está formado por el conocimiento del profesor de conexiones que permite disponer de una visión global del conocimiento matemático. Para la etapa de Infantil, se identifican, por un lado, las *conexiones transversales,* que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos; podrían asociarse al conocimiento de las *grandes ideas* en matemáticas (Clements, 2004). Los tres enfoques geométricos topológicos, proyectivos y métricos podrían considerarse como una *gran idea* porque articulan el conocimiento geométrico en todos los niveles educativos.

También se incluyen las *conexiones de complejización o simplificación*, que permiten ver tanto el contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como el conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental. Un ejemplo podría ser saber que, en función de cómo se trabajen determinados contenidos aritméticos (como la descomposición numérica), se puede potenciar la construcción de conocimientos sobre algunos aspectos de diferentes estructuras algebraicas en los conjuntos numéricos incidiendo en propiedades (como la conmutativa de la suma de números naturales) y relaciones, lo que tiene repercusiones en cómo abordar esos contenidos en el aula y otorga a la aritmética actual un enfoque potencial. Habrá que explorar las *conexiones auxiliares* en esta etapa educativa, que son las que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido.

Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) abarca el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas. Ejemplos de este subdominio sería saber que la comparación de elementos matemáticos es un proceso matemático válido para identificar relaciones y propiedades numéricas.

En el dominio del *Pedagogical Content Knowledge (PCK)* se consideran los siguientes tres subdominios:

Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) integra el conocimiento del profesor de teorías personales o formales de enseñanza asociadas a un contenido matemático; de las limitaciones y potencialidades de los recursos materiales o virtuales para su enseñanza; así como de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos útiles para ello. Serían ejemplos de este subdominio conocer el potencial del uso de fotografías de composiciones de figuras desde distintas perspectivas para el desarrollo de la capacidad de visualización de los alumnos o de la conversión entre distintos registros de representación para favorecer la comprensión de un concepto.

Knowledge of Features of Learning Mathematics (*KFLM*) se refiere al conocimiento de cómo los alumnos aprehenden el contenido procedente de la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento sobre teorías personales o formales de aprendizaje tanto asociadas a la matemática general como a contenidos particulares. Junto a ellas, se sitúa el conocimiento sobre las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de contenidos concretos, sobre las formas de interacción de los estudiantes con estos, y sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas. Un ejemplo de este subdominio es saber que muchos alumnos de Educación Infantil no son capaces de comprender mensajes matemáticos sin apoyo visual.

Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) considera el conocimiento tanto del currículo oficial vigente en cada país en cada momento, como de estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se incluye el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, así como el conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores. Así, por ejemplo, conocer que la descomposición del seis se puede abordar en el último curso de Educación Infantil y puede facilitar la construcción de conocimiento de propiedades de estructuras algebraicas (grupo conmutativo de los enteros con la suma), son elementos de este subdominio de conocimiento.

METODOLOGÍA

Este capítulo responde a nuestra preocupación por comprender la naturaleza y contenido del conocimiento del profesor de Educación Infantil en lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, con el fin de organizar procesos formativos para estos profesionales sustentados en elementos de conocimiento procedentes de la investigación. En trabajos anteriores (Ribeiro, Muñoz-Catalán y Liñán, 2015; Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro, 2017) abordamos este interés desde una reflexión teórica en torno a la operación resta, lo que nos permitió realizar una propuesta de elementos de conocimientos especializados interconectados útiles para la formación de estos profesionales. En esta ocasión queremos hacerlo desde la práctica de dos profesores, cada uno de ellos enseñando contenidos relativos a dos de los principales núcleos de esta etapa educativa: *Números y operaciones* y *Geometría*. En particular, pretendemos comprender qué conocimiento especializado sustenta la práctica de dos profesores de Educación Infantil, en lo que respecta a la enseñanza de Aritmética y Geometría.

Afrontamos este objetivo desde el paradigma interpretativo (Bassey, 1999), y mediante un estudio exploratorio centrado en el análisis de vídeos de clase de dos profesores de Educación Infantil. Los pseudónimos de los informantes son Javier e Irene, dos profesores de Educación Infantil comprometidos con mejorar su práctica, especialmente en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas. Javier es un profesor con más de 10 años de experiencia, que ha realizado diversas formaciones específicas de Didáctica de las Matemáticas, cuyas orientaciones trata de integrar después en su práctica. En el vídeo seleccionado, cuya duración es de aproximadamente 30 minutos, Javier trabaja en un centro de titularidad pública con un grupo de 25 alumnos de 4 años sobre dos fotografías que contienen una misma composición de cuerpos geométricos desde dos perspectivas diferentes, composición que los alumnos han de reconstruir con piezas manipulables. Irene tiene más de 25 años de experiencia en la etapa, trabajando en diferentes centros de titularidad pública y ha sido muy activa en asistencia a actividades formativas, entre las que hay que destacar un Máster de Didáctica de las Matemáticas. Desde el curso 2016-2017 participa en un taller colaborativo con otras profesoras de Infantil y formadoras-investigadoras del área. En el vídeo seleccionado, cuya duración también es de 30 minutos, trabaja la descomposición aditiva del número seis con contadores, y los alumnos, 24 niños de 5 años, han de representar cada una con el Numicon®[1]. Los alumnos de ambos grupos pertenecen familias de clase media.

El análisis se realiza sobre la base de la transcripción de ambas sesiones y comienza con la identificación de episodios relevantes para los fines de esta investigación, siguiendo a Schoenfeld (2000). A continuación, aplicamos un *enfoque interpretativo* (Kvale, 1996) en el que los datos son recontextualizados a la luz del modelo analítico MTSK. El conocimiento movilizado por el profesor se sustenta en indicios y evidencias (Carrillo, Montes, et al., 2017), que son dos grados de certeza asignados por el investigador sobre las manifestaciones orales o gestuales del profesor.

ANÁLISIS DE LOS VÍDEOS DE JAVIER Y DE IRENE

En este apartado analizamos la práctica de los profesores con foco en el conocimiento especializado que movilizan en sus respectivas sesiones. Primero mostramos

[1] Numicon® es un material multisensorial comercializado actualmente por Oxford, basado en las placas por puntos de Herbeniere-Lebert.

una descripción de cada sesión y, a continuación, el análisis donde destacamos aquellos elementos de conocimiento que consideramos más significativos para comprender las prácticas de estos profesores.

Descripción del fragmento de vídeo de Javier: «Composiciones desde distintas perspectivas»

En la sesión considerada, Javier pretende que los alumnos construyan imágenes mentales más completas de los cuerpos geométricos trabajados. Javier presenta en asamblea una serie de tarjetas de elaboración propia, que contienen una fotografía (representación gráfica en 2d) de una composición formada por tres cuerpos geométricos distintos de madera. El problema consiste en que los alumnos reproduzcan el contenido de la fotografía con los bloques de una caja de construcciones, respetando la selección de las figuras, su posición respecto de la base sobre la que se sustentan y su ubicación en la composición. En el proceso, se les pide que identifiquen el nombre de cada cuerpo geométrico involucrado y alguna de sus propiedades.

Antes de comenzar les recuerda que: «*El año pasado no sabíamos lo que era un prisma, ni qué era un cubo, ni sabíamos que los rectángulos salían de los prismas, ni que los cuadrados salían de los cubos, ni que los círculos salían de las esferas*» y les explica en qué va a consistir el problema en el que se tienen que fijar en lo que ven: «*qué está arriba, qué hay abajo en todo lo que veamos en la tarjetita para después poderlo hacer nosotros*». En el primer episodio se desarrolla el trabajo con la primera tarjeta (Figura 2), donde Javier les pide que identifiquen los cuerpos involucrados en la composición y valida la respuesta: «*pirámide, prisma y cilindro*». Después, pide a un alumno que salga a reproducir la imagen sobre una silla ubicada debajo de la tarjeta, aclarando que: «*Manuel, la tienes que poner igual que está puesta ésta* –señalando el prisma–. *Fíjate bien*». Y, por último, vuelve a dirigirse al grupo para pedirles que comprueben si lo construido por el compañero es igual a lo que se encuentra representado en la tarjeta: «*¿es igual el dibujo que teníamos en la tarjeta a lo que ha construido Manuel?*».

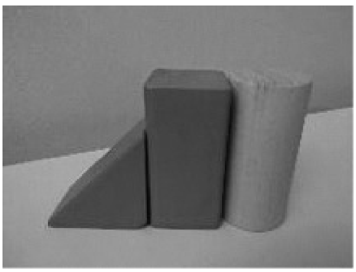


Figura 2. Primera tarjeta

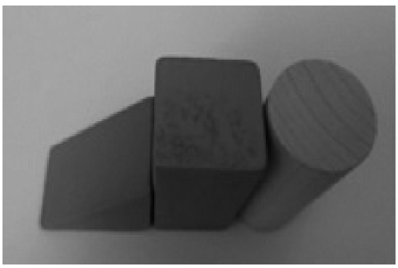


Figura 3. Segunda tarjeta

En el segundo episodio, dejando la primera tarjeta en la pizarra, muestra la foto de la misma composición desde otra perspectiva (Figura 3), y pregunta: «*¿es igual?*». Al comprobar las dificultades de los alumnos para identificar la igualdad de ambas composiciones coge en peso a varios alumnos para que observen la composición desde distintas perspectivas, pero sigue prevaleciendo la imagen habitual que contiene la Figura 2. A continuación, saca a varios alumnos para que miren a otro compañero desde distintos puntos de vista (por ejemplo, tumbándose en el suelo o subiéndose a una silla), preguntándoles en cada ocasión: «*¿lo ves igual que antes o distinto*?» Como los alumnos responden que lo ven igual, Javier reinterpreta lo ocurrido: «*Cuando estabas antes tumbado en el suelo ¿le veías el pelo como ahora (que está subido en una silla)? […] Lucía siempre ha visto a Ricardo igual, pero lo ha visto desde sitios diferentes*».

A continuación, pega las dos fotografías en paralelo en la pizarra, reproduce la composición en una silla debajo de ellas y les invita a que respondan si lo ven como en la tarjeta 1 (Figura 2) o la 2 (Figura 3) estando sentados en asamblea, aunque también les hace salir, por grupos de tres, para que vean la composición desde distintos puntos de vista.

Elementos de conocimiento especializado sobre geometría movilizado por Javier

Javier formula un problema de construcción geométrica con el que pretende que los alumnos enriquezcan su imagen mental de los cuerpos geométricos, abordando de manera interrelacionada dos aspectos clave del trabajo geométrico: la forma de las figuras, su posición y sus transformaciones[2] (KoT – definiciones, propiedades y sus fundamentos). Parece sabedor de la importancia de que en esta etapa desarrollen imágenes mentales ricas de las figuras y reproduzcan composiciones geométricas (KMLS – expectativas de aprendizaje), y lo hace mediante los cuerpos que sus alumnos ya conocen por haberlos trabajado desde el curso pasado (KMLS – secuenciación con temas anteriores y posteriores). Para tal fin, promueve la visualización como proceso geométrico que potencia el conocimiento de los cuerpos geométricos (KPM – visualización como proceso matemático), asociando esta visualización a la perspectiva, elemento caracterizador del enfoque geométrico proyectivo (KSM –gran idea).

Javier comienza la sesión recordando los cuerpos geométricos que conocen (esfera, cubo, prisma) y sus caras más representativas, desde el enfoque geométrico con el que se ha abordado el conocimiento de dichas figuras (KoT – propiedades).

[2] Entendemos la transformación de una manera amplia, integrando las que trabajan relaciones proyectivas.

En su momento utilizó la estampación de estas (en el caso de la esfera, previo corte en dos mitades) en una actividad (KMT – estrategia, tarea, técnica, ejemplo), sabedor de que tanto la estampación como el corte de los objetos son dos procedimientos para pasar de las 3D a las 2D (KoT – procedimientos). El modo en que valida el nombre de las figuras de la fotografía, pone de relieve que su concepto de prisma excluye la primera figura de la composición y el cubo, lo que evidencia que su definición de prismas y pirámides no descansa en atributos relevantes, sino en la imagen de prismas habituales y en una posición determinada (KoT – definiciones, propiedades).

El tipo de tarea que aquí implementa refleja su conocimiento acerca de distintos sistemas de representación en el ámbito de la Geometría (gráfico, lenguaje verbal y manipulativo) (Lesh, Post y Behr, 1987), y la complementariedad entre ellos (KoT – registros de representación). Usa dichos sistemas como vehículo para el desarrollo de la sesión, promoviendo la conversión entre distintos sistemas de representación (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y para el diseño de las tarjetas y la selección del material utilizado (KMT – recursos materiales y virtuales).

Javier utiliza elementos de distintos sistemas de representación (fotografías, material manipulativo y lenguaje oral) para describir distintas características de una composición geométrica vista desde distintos puntos de vista (KoT – registros de representación). Además, trabaja la conversión del registro gráfico al manipulativo y viceversa, ayudándose del lenguaje natural oral, para que los alumnos expliciten las propiedades de los cuerpos (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y como ayuda para solventar las posibles dificultades en esas conversiones (Lesh, Post y Behr, 1987) (KFLM – fortalezas y dificultades). Conocedor de que los alumnos necesitan acercarse a los conceptos matemáticos con un lenguaje próximo (KFLM – formas de interacción), Javier utiliza los términos del lenguaje cotidiano que transmiten la idea asociada a un concepto (KMT – lenguaje como herramienta de enseñanza); así, por ejemplo, utiliza la palabra «*pico*» como sinónimo de vértice y «*caminito*» como sinónimo de arista al comienzo del vídeo. No obstante, en el curso de la sesión sustituye esa terminología por un vocabulario geométrico más formal, es decir, los términos son institucionalizados, sabedor del papel que juega en la construcción y comunicación matemática (KPM – papel del lenguaje formal; KMT – teorías de enseñanza): *«lo que la semana pasada llamamos caminito, verdaderamente, se llama arista».*

En el primer episodio, Javier conoce las características relevantes del problema geométrico planteado (tipo de figura y posición respecto de la base y de las demás figuras) y lo utiliza para explicar la consigna del mismo. Les proporciona estrategias concretas para su resolución, animándoles a que visualicen atentamente la fotografía (KPM – heurísticos) y a que sean ordenados al realizar la composición (KPM – heurísticos), siguiendo el orden de izquierda a derecha, como se hace en la lectoescritura (lo que podría considerarse como un elemento de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia). El profesor plantea la validación del problema, preguntándoles si «*¿es igual el dibujo que teníamos en la tarjeta a lo que ha construido Manuel?*», con lo que está promoviendo la comparación entre la tarjeta (Figura 2) y la composición realizada por el alumno como una estrategia de validación (KPM – formas de validación). El profesor contempla la validación como fase relevante en la resolución de problemas (KPM – resolución de problemas).

En el segundo episodio, anticipando las dificultades que sus alumnos pueden presentar para identificar como iguales representaciones gráficas en dos dimensiones desde diferentes puntos de vista o perspectivas del mismo objeto tridimensional (KFLM – dificultades), parte de la vista frontal de una composición pero a continuación utiliza otra tarjeta con la misma composición, pero fotografiada desde una vista cenital (Figura 3) y la pone en paralelo a la anterior, sabiendo el papel que la comparación posee en el establecimiento de relaciones entre objetos (KPM – forma de génesis epistemológica) y lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT – estrategia). Les pregunta uno a uno: «*¿chicos, es igual*? Y después al grupo entero: «*¿Hay alguien que piense que esto es igual a esto (señalando cada tarjeta)*?» Ante la respuesta unánime de que no son iguales, comienza a precisar la pegunta, señalando cada una de las fotos: *¿Aquí hay las mismas figuras geométricas que aquí?* Los alumnos dicen que sí y uno, en particular, indica que en una tarjeta las figuras están tumbadas y en la otra están de pie, que le sirve a Javier para matizar: «*Aquí se ven de una forma y aquí se ven de otra, pero ¿son las mismas?*». En el diálogo que mantiene con sus alumnos, su discurso se va mostrando cada vez más preciso tanto a la hora de preguntar por la igualdad, como cuando parafrasea los descubrimientos de sus alumnos (KMT – lenguaje como estrategia de enseñanza). Percibiendo las dificultades de los alumnos y sabedor de la importancia de que los alumnos de estas edades actúen directamente sobre objetos (se podría considerar como un elemento de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia) y, en particular, sobre recursos específicos para un contenido (KFLM – formas de interacción), plantea las dos situaciones descritas anteriormente para que experimenten cómo se ve un objeto desde distintas perspectivas (KMT – tarea). Con ello trata de hacer emerger aspectos proyectivos de la situación: que el niño que es observado no cambia y que lo que cambia es el foco (el punto de mira), y, por lo tanto, la forma de la imagen resultante de dicha proyección – vista del niño observado (KPM – gran idea). A continuación, debajo de ambas tarjetas, realiza la composición con el material y les pregunta, desde sus puestos, con qué tarjeta la identifican y, por tríos, se van acercando a la composición para visualizarla desde arriba y Javier descubre que, a pesar de la experimentación, la mayoría sigue asociándola con la figura 1, que se corresponde con la imagen mental que los alumnos tienen de las figuras (KFLM – formas de interacción con un contenido).

Descripción del fragmento de vídeo de Irene: «El juego de la familia de los ositos»

En esta sección se analiza una sesión de clase de unos 30 minutos gestionada por Irene en la que se trabajan las descomposiciones aditivas del número 6. Irene comienza planteando en asamblea una actividad con la que los niños están familiarizados (ella ha sido su profesora los dos años anteriores). Se presenta, en una lámina grande plastificada (Figura 5c) una representación icónico-gráfica de una casa de muñecos con una distribución específica de estancias realizada por la profesora (un salón, una cocina, un baño y un dormitorio), en la que se muestra el símbolo del número 6 en el tejado. Se sacan seis contadores con forma de oso, que constituyen una familia, los cuales se van moviendo por la casa siguiendo la historia narrada por la profesora. La profesora presenta los miembros de la familia mientras los coloca uno a uno en el salón. A continuación, desplaza el oso abuelo al cuarto de baño y plantea las preguntas siguientes: «*¿Cuántos ositos hay ahora en el salón*? *¿Y en el baño*? *¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño*? *¿Cuántos hay ahora en el dormitorio*? *¿Y en la cocina*?». La maestra continúa con la historia, realizando movimientos de los miembros de la familia de una estancia a otra. Así, desde la acción, la maestra generaba cada descomposición quitando un oso del salón y lo añadía al baño de manera ordenada y sucesiva representando las descomposiciones binarias del 6 siguientes: 6+0, 5+1, 4+2, 3+3 y 2+4.

En paralelo, la profesora ha sacado el material Numicon® (Figura 4, Manipulativa), conocido ya por los alumnos por tareas desarrolladas anteriormente, que presenta una configuración puntual binaria de los 10 primeros números. Irene les pide que representen con el material cada descomposición que aparece en la casa, y que comprueben su respuesta mediante la superposición de las fichas escogidas con la correspondiente del 6 (Figura 5a Manipulativa). Irene incorpora nuevas preguntas (e.g., «*¿Cuántos ositos hay ahora en el salón? ¿Y en el baño? ¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño? ¿Cuántos hay ahora en el dormitorio? ¿Y en la cocina?*») para hacer que los alumnos comparen una situación con la anterior y así se den cuenta de que siempre hay 6 osos en total en la casa, independientemente de cómo estén distribuidos.

Finalmente, tras unos 10 minutos en los que la maestra va variando la colocación de los muñecos en la casa y haciendo las mismas preguntas, cada niño pasa a su mesa. Allí individualmente tienen que completar una ficha que, en la parte izquierda, (Figura 4, Gráfica) contiene un espacio para dibujar una de las situaciones que han aparecido previamente en la sesión, y en la parte derecha, proporciona huecos para que escriban los símbolos numéricos de las cantidades que corresponden con el número de osos que han dibujado en la parte izquierda de cada estancia indicada a través de un icono (dormitorio con una cama, cocina con un tenedor, baño con un peine, salón con una TV, Figura 4, Simbólica).

Elementos de conocimiento especializado sobre aritmética movilizados por Irene

En la actividad descrita, Irene utiliza el lenguaje natural oralmente para ayudar a los niños a construir enlaces entre sus experiencias matemáticas informales, «la situación real» planteada en la casa a través del juego simbólico, los materiales estructurados (fichas Numicon®), los dibujos en papel generados por los niños de la situación planteada y los símbolos formales usados en la ficha escrita (Figura 4) (KoT – registros de representación).

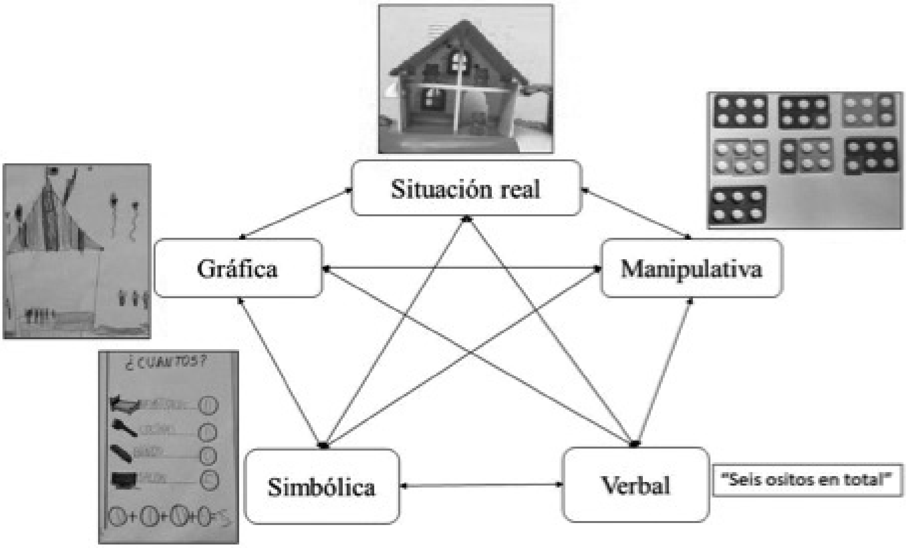


Figura 4. Representaciones facilitadas por Irene
(Modelo adaptado de Lesh; Lesh, Post yBehr, 1987)

Irene es consciente de que la composición-descomposición de números hasta 10 es un contenido central en el aprendizaje del número en Infantil (KMLS – expectativas de aprendizaje). Sus acciones en el fragmento descrito muestran la importancia que ella da al uso de diferentes sistemas de representación para trabajar con sus alumnos las relaciones numéricas y a presentar en paralelo, y delante del grupo, las distintas representaciones de la situación trabajadas en cada momento, para facilitar la comparación (KMT – estrategias). Usa como punto de partida una situación muy cercana a los niños y el juego simbólico, lo que hace que la implicación de estos en la actividad sea alta (mostrando su conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia como sustento de esta elección), pero también sabedora de las dificultades de los niños de manejar cantidades numéricas sin apoyo visual (KFLM – formas de interacción con un contenido matemático). Utiliza el lenguaje para facilitar las conversiones entre representaciones como técnica de enseñanza (KMT – estrategias) y realiza las conversiones entre sistemas de representación en general en el sentido de la más concreta a la más abstracta, pero ante dificultades de los alumnos vuelve a lo concreto – como veremos más abajo en el caso de la descomposición 3+3 (KMT – ejemplos).

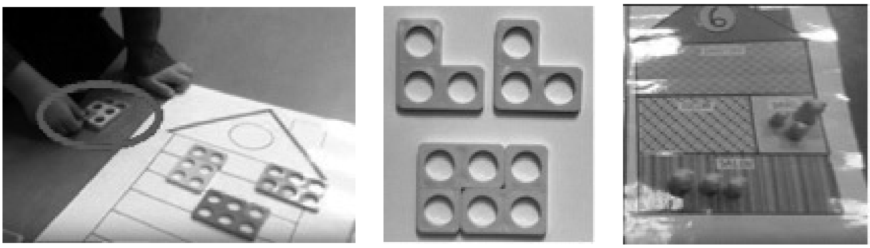
Para facilitar las conversiones entre distintos sistemas de representación, Irene introduce representaciones «mixtas» que tienen características de dos registros diferentes del Modelo de Lesh (Lesh, Post y Behr, 1987) (KoT – registro de representación). En primer lugar, para promover la conversión de la situación real hacia una representación icónico-gráfica, prescinde de la casa de muñecos (de juguete, en 3 dimensiones) que había utilizado en cursos anteriores (Figura 4, Situación real), y la sustituye por una representación icónico-gráfica (Figura 5, c, lámina plastificada) en dos dimensiones, sobre la cual va colocando los osos de plástico. En segundo lugar, utiliza una representación mixta para facilitar el paso de una representación icónico-gráfica a una en lenguaje formal introduciendo símbolos numéricos. Esto queda patente en el diseño que realiza de la ficha que trabaja en la parte final de la sesión (Figura 4, Simbólica) (KMT – estrategias de enseñanza).

Al comenzar la sesión constituye la familia nombrando a cada miembro, «*el abuelo, la abuela, la mamá…*», mientras lo asocia a cada oso del material; parece sabedora de la importancia en la etapa de dedicar un espacio a la construcción de una colección y de favorecer que los alumnos la conciban como tal antes de empezar a identificar el cardinal de la misma (KoT – propiedad). Hace explícito a los alumnos la creación de la colección mediante la enumeración (KMT – estrategias y técnicas de enseñanza), procedimiento de naturaleza pre-numérica y base del conteo (KoT – procedimientos).

Por otra parte, sabedora de la importancia de la resolución de problemas en la actividad matemática (KPM – resolución de problemas), lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT – resolución de problemas como estrategia) al plantear problemas de combinación (Carpenter y Moser, 1983) (KoT – definiciones y propiedades, fenomenología), que describen una relación estática entre dos subconjuntos disjuntos, también llamados partes, que juntos forman el conjunto total o todo, que dan sentido a la relación parte-todo (KoT – definiciones y propiedades). Las preguntas que formula a los alumnos cuando desplaza un oso de una dependencia a otra reflejan su conocimiento de las características relevantes de este tipo de problema (KoT – definiciones y propiedades) y su conocimiento del desarrollo conceptual y procedimental esperado (KMLS), lo que le lleva a ser muy precisa en el tipo de preguntas que formula, en el vocabulario y tiempo verbal utilizado (KoT – registro de representación), basándose en él como recursos para la enseñanza (KMT – lenguaje como recurso de enseñanza): «*¿Cuántos ositos hay ahora en* *el salón?* (parte)… *¿Y en el baño?* (parte)… *¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño?*» (todo).

Cuando introduce una nueva situación en la lámina con los osos, pide a un alumno que represente con el Numicon® esa situación en paralelo, lo que muestra que Irene conoce el potencial del material (KMT – recursos) tanto para representar el cardinal de conjuntos como para la composición y descomposición de los números utilizando la subitización, y decide poner a su disposición solo las piezas de 1 a 6 agujeros para facilitar su tarea («*he sacado estas porque vamos a hacer el 6*») (KoT – definiciones y propiedades).

Irene utiliza la comprobación de la descomposición con el material a través de la superposición como un modo de validar la respuesta que consiste en la comparación de cantidades representadas con ayuda de las fichas (KPM – formas de validación) y lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT, estrategia). En el caso de la descomposición del 3 y 3, el alumno comienza colocando la ficha del Numicon® del 1 sobre la ficha de comprobación (Figura 5, a). Aunque visualmente el alumno tiene la distribución de los osos en las estancias, Irene facilita al alumno la conexión entre los dos sistemas de representación (KMT – estrategia de enseñanza), incidiendo en los elementos del problema que son relevantes para su resolución: «*hay 3 en el baño y 3 en el salón, como ha dicho María*», es decir, el cardinal que corresponde con cada *parte* de la descomposición (KoT – propiedades). El alumno coge la ficha del 3 y la superpone, de manera que los huecos libres suponen la necesidad de seleccionar la ficha del 1 y del 2 (Figura 5, a).



a) b) c)

Figura 5: Dificultades para la descomposición del 6 en 3 más 3 con el Numicon®

Aunque la descomposición 3, 1 y 2 que construye el alumno con las fichas también es 6, no hay una correspondencia entre la descomposición de la modelación con la situación representada en la casita (3 y 3). Irene le corrige así: «*¿Hay un osito solo en una habitación?* (alumno: no). *Hay 3 en el baño y 3 en el salón. Ya tienes 3. ¿Ahora cuál tienes que coger?*». Irene percibe que la dificultad del niño procede, en parte, de la dificultad de encajar la forma geométrica de las dos figuras del 3 (Figura

5, b) de manera que coincida con la forma de la ficha del 6 (KFLM – fortalezas y dificultades) y pide a un compañero que le ayude. Pero dicha dificultad también está condicionada por el interés de la profesora de que los niños validen el resultado siempre mediante la superposición de las fichas (KMT – estrategia condicionada por el recurso), que impone la misma distribución espacial a las distintas descomposiciones, teniendo, de esta manera, siempre presente el número 6 y priorizando la comprobación a la limitación del material (KPM – formas de validación).

Tras la descomposición 3 y 3, se plantea la descomposición 2 y 4, quedando 2 osos en el salón y 4 en el cuarto de baño. Para la validación, una alumna coge las piezas del 2 y del 4, pero antes de que las superponga en la del 6, Irene dice: «*¿Hay alguna también ahí que diga 4 y 2?*». La niña superpone las fichas en la misma descomposición que había del 4 y 2 (situación vista anteriormente, 4 en el salón y 2 en el baño), y la profesora dice: «*Iguales, ¿verdad? Si ya está ahí, es lo mismo. No lo tienes que poner ahí porque ya está puesto ¿no?*». En este fragmento se observa que Irene no aborda la propiedad conmutativa, incluso ordena los sumandos con las fichas sin seguir el orden con el que ha construido la descomposición con los muñecos, desconectando así las dos representaciones por primera vez en la sesión (KSM – conexiones de complejización).

En la última parte de la sesión, Irene introduce explícitamente por primera vez el signo igual, el signo de la suma y numerales escritos (lenguaje formal), consciente de la importancia de no precipitar la aparición del lenguaje simbólico (pudiendo representar esto posibles indicios de KFLM – teorías de aprendizaje; KMLS – nivel de desarrollo conceptual esperado). La representación simbólica no es punto de partida de la actividad, como ocurre generalmente en los libros de texto. Es claro que Irene potencia el desarrollo de la abstracción en sus alumnos a través de la manipulación y de la introducción gradual, en un orden muy preciso, de diferentes sistemas de representación (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y teniendo en cuenta sus expectativas de aprendizaje de los alumnos (KFLM – expectativas de aprendizaje).

CONCLUSIONES

A partir de los análisis de vídeos de la práctica de los dos profesores presentados en la sección anterior, hemos identificado elementos del conocimiento especializado del profesor para enseñar matemáticas en la etapa de Infantil. A pesar de que los temas matemáticos sean distintos, algunos aspectos del conocimiento especializado del profesor son comunes en los dos contextos, como, por ejemplo, el uso del lenguaje matemático adecuado a cada contexto o la resolución de problemas como estrategia de enseñanza de los contenidos matemáticos. Sin embargo, otros han emergido específicamente asociados al contenido matemático concreto tratado en cada vídeo (sólidos y visualización, y descomposición del número 6), poniéndose de relieve la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas incluso en la etapa de Infantil.

En estas sesiones observadas en Infantil, algunos elementos de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia parecen hacerse más presentes (y necesarios) que, en otras etapas educativas, por el desarrollo físico y cognitivo de estos alumnos. Por ejemplo, las sesiones se estructuran partiendo de una organización en asamblea con una tarea grupal y, posteriormente, cada niño completa una ficha de manera individual que permite al profesor la evaluación del aprendizaje logrado; se considera la importancia de la interacción social en situaciones particulares de dificultad; los alumnos han de enfrentarse a situaciones relevantes cuya resolución requiere de la manipulación y experimentación.

No obstante, en las situaciones en que el foco es la discusión matemática estos elementos de conocimiento no ligados a la materia aparecen subsidiarios de otros específicos del quehacer matemático asociado a cada uno de los temas que se discuten con los alumnos. Así, cuando Javier insiste en la sesión en que la composición debía realizarse de izquierda y derecha (para reforzar el sentido de la escritura), desde la perspectiva del contenido matemático, el sentido de la composición es irrelevante pero esta opción pedagógica se encuentra al servicio de la importancia que le concede a la sistematicidad en la resolución de problemas (KPM – heurístico). Así, aunque sin menospreciar los aspectos de índole general, se torna evidente que los elementos del conocimiento especializado del profesor en el ámbito de la Matemática moldean su práctica y, en ese sentido, han resultado clave para comprender la práctica de ambos profesores para enseñar matemáticas.

Hay que destacar que, las tareas matemáticas que ambos profesores proponen en el aula tienen su origen en una situación problemática diseñada por ellos mismos que no se corresponden con tareas al uso trasladadas al aula directamente siguiendo las indicaciones de un libro de texto comercial. En ese sentido, sus respectivas prácticas se sustentan en el conocimiento que poseen sobre lo que los alumnos ya saben al respecto y su nivel de desarrollo, lo que se relaciona, obviamente, con su conocimiento de lo que consideran que deben aprender los alumnos en ese curso (KMLS): Descomposición del número 6 y reproducción de composición geométrica desde un enfoque proyectivo y, por otro lado, de las implicaciones para los aprendizajes futuros en los temas centrales de Números y Geometría.

En ambos casos, las tareas propuestas tienen como punto de partida situaciones/contextos que resultan significativos para los niños y que, simultáneamente se convierten en relevantes para el aprendizaje de las matemáticas (las discusiones que ocurren lo permiten). El caso de la situación de la composición de figuras es un tipo de problema relevante en Geometría (KoT – fenomenología) y se realiza mediante fotografías tomadas desde distintas perspectivas (KMT – recursos). La situación de la casa y los osos se organiza mediante la formulación de problemas de combinación que permiten ampliar la comprensión de los alumnos de las relaciones numéricas implicando el todo y las partes correspondientes, que son la base de la descomposición numérica (KoT – propiedades). El análisis de la sesión pone de relieve la necesidad de un amplio y sólido conocimiento especializado en el dominio del MK. En el caso discutido en el ámbito de la Geometría, se moviliza el conocimiento de Javier sobre el papel relevante que el enfoque geométrico proyectivo posee para el conocimiento de los cuerpos geométricos (KSM – gran idea). También se ha reflejado la necesidad de conocer las propiedades relevantes (e irrelevantes) de los cuerpos geométricos, que, en este caso, se desconocen y se asocian de forma incorrecta a la posición de las mismas y a figuras prototípicas (KoT – propiedades), siendo el motivo por el que designa al prisma de base triangular y de poca altura, apoyado sobre una de sus caras laterales, como pirámide. De su práctica se desprende la importancia de conocer los rasgos relevantes de este tipo de problema (identificación de cada figura y la posición de cada una en la composición, tomando como referente simultáneamente la base de cada una y las demás figuras) (KoT – propiedades), del papel de la visualización como proceso matemático para la construcción de conocimiento geométrico (KPM, prácticas particulares); y de la sistematización para reproducir la composición (KPM, formas de proceder en la resolución de problemas). Asimismo, destaca el papel de la validación de la respuesta mediante la comparación entre la fotografía y la composición realizada por el alumno (KPM – formas de validación) como fase importante de la resolución de estos tipos de problemas (KPM – fases de resolución de problemas).

En el caso del trabajo en el ámbito de la Aritmética sobre el número, el foco en el desarrollo de las bases del conocimiento numérico de los alumnos en esta etapa está sustentado en el conocimiento del profesor de la relación entre el todo y las partes que lo forman (KoT – propiedades); del tipo de problemas que promueven la comprensión de dicha relación (KoT – propiedades); de la enumeración como procedimiento para construir una colección con un criterio cuantitativo (KoT, procedimientos); de la comprobación como práctica matemática para validar que la composición de las partes identificadas forman el todo (KPM – formas de validación); y de la subitización para apoyar la validación y reconstruir el todo (KoT – procedimientos).

Podemos destacar otros dos aspectos del MK comunes en la práctica de ambos profesores: el conocimiento de la comparación, como práctica matemática que promueve conocimiento matemático en esta etapa (KPM) y el conocimiento de distintos sistemas de representación y la complementariedad entre ellos (KoT). Ambos elementos de conocimientos están íntimamente relacionados entre sí y, a su vez, con elementos de conocimientos del dominio del PCK, que detallamos a continuación.

La comparación como práctica matemática (KPM) es usada como estrategia de enseñanza (KMT), que se plantea tanto respecto de diferentes estrategias de resolución empleadas por los alumnos, como de distintos modos de representar una estrategia concreta, mostradas en paralelo delante de ellos, facilitando la detección de elementos comunes o diferentes relevantes en cada situación. Así, este conocimiento parece clave para promover el desarrollo del pensamiento flexible o adaptativo de los estudiantes en esta etapa, y está íntimamente relacionado con el conocimiento del papel de distintos sistemas de representación y de la conversión entre ellos (KMT) en los procesos de enseñanza de contenidos aritméticos y geométricos y en la necesidad de los alumnos de esta etapa de partir de representaciones concretas (KFLM – formas de interacción).

El conocimiento de los distintos sistemas de representación (KoT) se muestra decisivo para tomar decisiones sobre los recursos didácticos. El análisis ha revelado la importancia de conocer las bondades y limitaciones del material utilizado para la enseñanza de cada tema (KMT – recursos). Los bloques de construcción y Numicon® representan conceptos abstractos por naturaleza y promueven razonamientos particulares sobre ellos. Javier potencia que los bloques sean observados desde distintos puntos de vista, sobre la base de la visualización, con el fin de observar propiedades de los distintos cuerpos. Irene utiliza el Numicon® como una configuración con puntos para representar colecciones de una situación relevante contextualizada que facilita procesos como la subitización y la correspondencia uno a uno. Puede observarse cómo en ambos casos se promueve la coordinación entre visualización, representación y razonamiento de sus alumnos.

Otro sistema de representación importante se refiere al lenguaje; un elemento clave de la enseñanza de la matemática en Infantil es la selección del vocabulario apropiado, ya sea formal o informal, que transmita el significado de los conceptos abordados (KMT), y de ir introduciendo progresivamente, aunque sin forzar, el registro simbólico (de naturaleza numérica, en el caso de Irene, y geométrica, en el caso de Javier) para favorecer la designación en Infantil (KMT). Javier usa la fotografía, que es una representación icónico-gráfica en 2d de los cuerpos geométricos, como recurso para incluir la perspectiva en el conocimiento de las figuras e Irene utiliza una representación sencilla de una casa con distintas estancias, donde se puede identificar el total de estancias y su distribución como las partes que la componen, para potenciar la idea de la relación parte-todo. Durante los episodios de ambos maestros se les puede observar facilitando conversiones de una representación a otra, evolucionando de las representaciones más contextualizadas a las más simbólicas y recurriendo a las más intuitivas, como las situaciones relevantes y los materiales manipulativos (KMT – recursos, estrategias), en el caso de que los niños presenten dificultades (KFLM – dificultades).

Los elementos de conocimiento especializado que han emergido del análisis de la práctica son un resultado de investigación relevante para el campo que respalda su consideración como contenido de aprendizaje en la formación inicial y continua de profesores. Se observa la especificidad de ese conocimiento para la enseñanza en esta etapa y su enraizamiento en la propia matemática. Así, el dominio del MK, habitualmente excluido de los programas de formación de estos profesionales y de las agendas de investigación, debe ser considerado y abordado con suma seriedad y profundidad. Tres vías trabajo surgen de este estudio: por un lado, profundizar en las relaciones entre elementos de conocimiento especializado que ayuden a comprender mejor el conocimiento que sustenta las prácticas de los profesores. Por otro lado, completar el análisis realizado con el análisis del conocimiento especializado que habría sustentado una gestión alternativa (*Conocimiento Especializado Evocado al Investigador por las Oportunidades*, Liñán, (2017)), que permitiría convertir los vídeos analizados en recursos para la formación del profesor. Por ejemplo, el análisis del vídeo de Irene enfocando la aritmética desde el álgebra como perspectiva avanzada (conexión de complejización, KSM), nos permitiría identificar elementos de conocimiento especializado necesario para, a partir de ciertos ejemplos de las descomposiciones aditivas del número, promover el aprendizaje intuitivo de propiedades de la suma, como la propiedad conmutativa, la asociativa y el elemento neutro, así como la idea de equivalencia entre las distintas descomposiciones. Finalmente, una tercera vía tiene que ver con profundizar en el subdominio *conocimientos de la estructura de la matemática* porque consideramos que debería ser relevante en el conocimiento de este profesional (Klein, 2006; Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro, 2017), al otorgar a las matemáticas en Educación Infantil una entidad que trasciende a la propia etapa (NCTM, 2000).

REFERENCIAS

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University press.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.). *Acquisition for mathematic concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 1-18. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L.C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *22*, 185-205.

Clements, D.H. (2004). Part 1: Major themes and recommendations. En, D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7–76). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Clements, D.H., Baroody, A.J. y Sarama, J. (2013). Background research on early mathematics. Background Research for the National Governor's Association (NGA) Center Project on Early Mathematics. Recuperado de: https://www.nga.org/files/live/sites/NGA/files/pdf/2013/1311SEME-Background.pdf.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 42, 27-41.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En, C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Liñán, M.M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230.

McCray, J. y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, *26*, 291-307.

Muñoz-Catalán, M.C., Liñán-García, M.M. y Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, *24*, 4-19.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23.

Oppermann, E., Anders, Y. y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184.

Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil. MEC (2008, 5 de mayo), *BOE, 5*, 1016-1036.

Parks, A.N. y Wager, A.A. (2015). What Knowledge is Shaping Teacher Preparation in Early Childhood Mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, *36*(2), 124-141.

Klein, F. (2006). Matemática elemental desde un punto de vista superior. Tres Cantos: Nivola.

Ribeiro, C.M., Muñoz-Catalán, M.C. y Liñán, M.M. (2015). Discutiendo el conocimiento matemático Especializado del profesor de infantil como Génesis de aprendizajes futuros. En, I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.), *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium* (p. 575-589). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A. H. (2010). How we think. New York: Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.