



FACULTAD DE FÍSICA
TRABAJO FIN DE MÁSTER

**ESTUDIO DE LAS INCERTIDUMBRES
ASOCIADAS A LA ESTRUCTURA HADRÓNICA
Y LA DINÁMICA NUCLEAR EN REACCIONES
DE NEUTRINOS CON NÚCLEOS Y NUCLEONES
A ENERGÍAS INTERMEDIAS**

Autora:

Marta Sayago Rodríguez

Tutores:

Dr. Juan Antonio Caballero Carretero

Dr. Guillermo Daniel Megías Vázquez

Noviembre 2023

Índice general

Resumen/Abstract	1
I Introducción y motivación del trabajo	2
1. Introducción	3
2. El neutrino	4
2.1. Postulado y descubrimiento	4
2.2. Sabor	5
2.3. Helicidad	8
2.4. Masa	9
2.4.1. El fenómeno de las oscilaciones de neutrinos	9
2.4.1.1. ¿Cómo se estudian las oscilaciones?	10
II Dispersión elástica neutrino-nucleón	12
3. Formalismo general	13
3.1. Cinemática del proceso	13
3.2. Sección eficaz	15
3.2.1. Corrientes leptónica y hadrónica	16
3.2.2. Hamiltoniano débil	19
3.2.3. Cálculo de la amplitud de la transición	20
3.2.4. Sección eficaz diferencial doble	26
3.2.5. Sección eficaz diferencial simple	27
3.3. Factores cinemáticos leptónicos y funciones de respuesta hadrónica	29

4. Estructura débil del nucleón	34
4.1. Estructura vector	34
4.1.1. Parametrización de los factores de forma EM	36
4.2. Estructura axial	39
4.2.1. Parametrización del factor de forma axial	40
5. Análisis del proceso	43
5.1. Cinemática	43
5.2. Asimetría neutrino-antineutrino	45
6. Comparación con datos experimentales	48
6.1. Cámaras de burbuja	48
6.2. Fermilab	50
III Dispersión cuasielástica neutrino-núcleo	56
7. Introducción	57
8. Formalismo general	60
8.1. Modelo nuclear	60
8.2. Cinemática el proceso	63
8.3. Corriente nuclear y sección eficaz	65
9. Análisis del proceso	67
9.1. Sección eficaz diferencial doble	67
9.2. Límite elástico	69
10. Comparación con datos experimentales	71
10.1. Cámaras de burbuja	71
10.2. T2K	73
10.2.1. Mediciones combinadas de dispersión de neutrinos y antineutrinos en ^{12}C y ^1H	74
10.2.2. Mediciones simultáneas de dispersión de neutrinos en ^{12}C y ^{16}O . .	78

IV	Conclusiones	82
11.	Resumen y conclusiones	83
V	Apéndices	86
A.	Partículas de espín 1/2	87
A.1.	Ecuación de Dirac	87
A.2.	Soluciones libres de la ecuación de Dirac	89
A.3.	Proyectores de energía y espín	90
A.4.	Covariantes bilineales	90
B.	Delta de Dirac	92
B.1.	Integración de la delta de Dirac δ^4 en \mathcal{S}_{fi}	92
B.2.	Módulo al cuadrado de la delta de Dirac δ^4	93
B.3.	Integración de la delta de Dirac δ^4 en $d\sigma$	93
C.	Tensores leptónico y hadrónico	95
C.1.	La amplitud invariante	95
C.2.	Teorema de trazas	97
C.3.	Tensor leptónico $\eta^{\alpha\beta}$	100
C.4.	Tensor hadrónico $W_{\alpha\beta}$	101
C.5.	Contracción $\eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$	106
	Bibliografía	112

Resumen

En este trabajo, se realiza una descripción teórica de los procesos de dispersión elástica neutrino-nucleón y de dispersión cuasielástica neutrino-núcleo con el propósito de analizar las incertidumbres asociadas a la estructura hadrónica y la dinámica nuclear. Ambos procesos son relevantes para el estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, ya que son dos de los mecanismos de interacción de los neutrinos con el material activo de los detectores y que permiten su detección.

Abstract

In this work, a theoretical description of the elastic neutrino-nucleon scattering and quasielastic neutrino-nucleus scattering processes are performed to analyze the uncertainties associated to hadronic structure and nuclear dynamics. Both processes are relevant for the study of the phenomenon of neutrino oscillations, as they are two of the neutrino-interaction mechanisms with the active material of detectors that allow their detection.

Parte I

Introducción y motivación del trabajo

Capítulo 1

Introducción

El neutrino es una partícula elemental que ha planteado diversas incógnitas referentes a su naturaleza desde su descubrimiento. Se trata de un leptón eléctricamente neutro y de masa despreciable que originó la introducción de una nueva fuerza fundamental en la naturaleza, la interacción débil. Por otro lado, la masa del neutrino sigue siendo una incógnita. No obstante, sabemos de su existencia debido a las observaciones que corroboran las oscilaciones de neutrinos, dado que las transiciones de sabor solo se explican en un contexto en el que los neutrinos presentan masa.

Estas partículas ligeras se detectan de manera indirecta mediante los productos que genera al interactuar con la materia. Por lo tanto, es necesario tener un conocimiento profundo sobre cómo interactúan los neutrinos con el material activo de los detectores. Esto es aplicable al estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, donde la mayor dificultad de estos experimentos reside en saber interpretar las señales de los detectores de manera que se asocien a su correspondiente proceso. Asimismo, el estudio de la interacción neutrino-núcleo aporta información sobre la estructura nuclear y hadrónica.

En este trabajo se estudian dos de los principales mecanismos de interacción de los neutrinos con el material activo de los detectores: los procesos de dispersión elástica en nucleones y de dispersión cuasielástica en núcleos. El trabajo se divide en cuatro partes. En la Parte I, se introducen las propiedades fundamentales del neutrino. En las Partes II y III, se describen teóricamente los procesos anteriormente mencionados con el propósito de obtener las secciones eficaces y compararlas con resultados experimentales. Esto nos permitirá evaluar las incertidumbres asociadas a la estructura hadrónica y la dinámica nuclear en ambos procesos. Por último, en la Parte IV, se muestran las conclusiones.

Capítulo 2

El neutrino

En este capítulo, se hace un breve repaso de la historia del neutrino; desde su postulado y posterior descubrimiento hasta sus extrañas propiedades cuya descripción aún supone un desafío para los físicos.

2.1. Postulado y descubrimiento

El neutrino se postuló en un intento de explicar el espectro energético continuo del decaimiento β . En este proceso, un núcleo inestable decae a otro distinto más estable junto con la emisión de una partícula β (electrón o positrón). Conforme a esta descripción, la partícula β debería tener una energía cinética bien definida según la ley de conservación de la energía y el momento. No obstante, la determinación experimental del espectro energético del decaimiento β resultó en un continuo de energía (ver Figura 2.1).

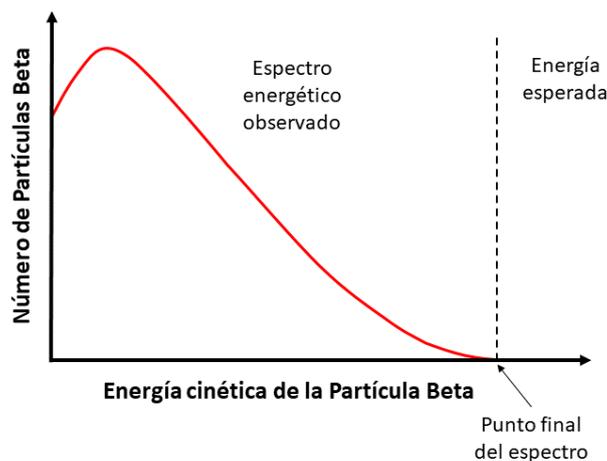


Figura 2.1: Espectro de energía del decaimiento beta. El continuo muestra que la partícula β puede emitirse en un rango de energías inferior a la energía disponible en el proceso.

En 1930, Wolfgang Pauli postuló que, junto a la partícula β , debía emitirse otra partícula aún no detectada de manera que ambas compartieran la energía disponible en el proceso. Este planteamiento permitía explicar el espectro continuo del decaimiento β y, al mismo tiempo, preservar la ley de conservación de la energía y el momento. La nueva partícula sería un fermión con carga eléctrica y masa nulas, al que se le denominó neutrino.

Partiendo de este postulado, en 1933, Enrico Fermi desarrolló una teoría del decaimiento β [1]. Podemos distinguir entre el decaimiento β^- o el decaimiento β^+ dependiendo de si la partícula emitida es un electrón o un positrón, respectivamente.

$$\begin{aligned}\beta^- : \quad n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \beta^+ : \quad p &\rightarrow n + e^+ + \nu_e.\end{aligned}$$

En este contexto, la presencia del neutrino también es necesaria para la conservación del momento angular total. Debido a que en el estado inicial tenemos un fermión de espín semientero, es necesario que el estado final contenga un número impar de fermiones.

Una vez postulado el neutrino, era necesario confirmarse su existencia de manera experimental. Dado que se trata de una partícula sin carga eléctrica, su detección debe llevarse a cabo de forma indirecta, observando los productos generados durante su interacción con la materia. En 1956, Frederick Reines y Clyde L. Cowan estudiaron el proceso de desintegración beta inversa ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$) empleando un reactor nuclear de fisión como fuente artificial de antineutrinos ⁽¹⁾. Diseñaron un experimento con el que lograron poner de manifiesto la presencia del positrón y del neutrón producidos en dicho proceso, proporcionando así una confirmación de la existencia del antineutrino.

2.2. Sabor

En las décadas de 1930 y 1940, el estudio de los rayos cósmicos reveló una nueva propiedad del neutrino denominada sabor. Los rayos cósmicos son radiaciones de alta energía, compuestos principalmente por protones. Cuando estos interactúan con los átomos de la atmósfera terrestre, generan una cascada de partículas secundarias, lo que condujo al descubrimiento de nuevas partículas, como el pión y el muón [1].

(1) Anteriormente se había intentado demostrar la existencia del neutrino usando uno de estos reactores sin obtener ningún resultado [1], esto evidencia que existen diferencias entre neutrinos y antineutrinos.

El pión π resultó ser el bosón mediador de la interacción fuerte, que mantiene unidos a los nucleones en el núcleo atómico. Es considerablemente más masivo que el electrón y tiene una vida media finita, decayendo principalmente en un muón y un neutrino. Por otro lado, el muón μ^- , una partícula con carga eléctrica negativa, es más pesado que el electrón y se descompone principalmente en un electrón. A diferencia del pión, el muón no parece verse afectado por la interacción fuerte, carece de estructura interna y tiene espín semientero, por lo tanto, se trata de un fermión, al igual que el electrón.

Atendiendo al decaimiento principal del muón, se postuló que junto al electrón se emitían otras dos partículas. Estas podrían ser neutrinos, ya que su carga nula y su baja probabilidad de interacción explicarían por qué no habían sido detectados. Asimismo, debían ser fermiones para que se conservara el momento angular total en el proceso.

En 1953 se introdujo el número leptónico, un número cuántico aditivo asociado a las partículas leptónicas [1]. Mientras a la partícula se le asocia un número leptónico 1, a su respectiva antipartícula le corresponde un número leptónico -1. Esta cantidad se conserva en todos los procesos de interacción observados. Al aplicar esta conservación al decaimiento del muón, se deduce que en el estado final deberían aparecer un neutrino y un antineutrino. Sin embargo, esto posibilitaría que el muón se desintegre en un electrón y radiación electromagnética, un proceso que nunca se había observado.

En 1959, Bruno Pontecorvo postuló que los neutrinos que aparecen ligados a electrones y muones eran distintos, al igual que lo son los electrones y los muones [2]. Introdujo una nueva propiedad para clasificar a los leptones, denominada sabor, y se restringió la conservación del número leptónico por sabores (ver Tabla 2.1). De esta manera, los neutrinos con sabor electrónico aparecerán ligados a electrones, mientras que los de sabor muónico están asociados a muones.

	e^- ν_e	e^+ $\bar{\nu}_e$	μ^- ν_μ	μ^+ $\bar{\nu}_\mu$
L_e	1	-1	0	0
L_μ	0	0	1	-1

Tabla 2.1: Número leptónico por sabor.

Al imponer la conservación del número leptónico por familia de sabor en el decaimiento del muón, se concluye que el neutrino presenta sabor muónico, mientras que el antineutrino posee sabor electrónico: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Esto explicaría por qué el neutrino y el antineutrino no se aniquilan, ya que una no es la antipartícula de la otra.

Una vez postulado el sabor de los neutrinos, debía confirmarse experimentalmente. Pontecorvo determinó que del mismo modo que un neutrino ligado a un leptón cargado tenía un sabor leptónico determinado, cuando ese neutrino interactuase con la materia daría lugar a un leptón cargado del mismo sabor [2]. Es decir, el sabor del neutrino interaccionante determina unívocamente el leptón cargado producido.

En 1962, L. M. Lederman, M. Schwartz y J. Steinberg llevaron a cabo un experimento en el que detectaron los leptones cargados generados por la interacción de neutrinos con la materia [3]. Estos neutrinos provenían del decaimiento de piones, lo que implicaba que tendrían un sabor muónico. En consecuencia, se esperaba que la interacción originara la aparición de muones si la hipótesis de Pontecorvo era correcta. De lo contrario, se debía observar un número similar de leptones cargados con distinto sabor. El experimento concluyó que casi todas las señales detectadas correspondían a muones, corroborando así la hipótesis de Pontecorvo sobre el sabor de los neutrinos.

En 1975, se anunció el descubrimiento de un nuevo leptón denominado tau (τ). Esto permitió la introducción de un tercer sabor en la familia de leptones (ver Tabla 2.2).

	Leptones cargados				Leptones neutros			
	Nombre	Símb.	Carga	Masa (MeV)	Nombre	Símb.	Carga	Masa (MeV)
1ª gen.	Electrón	e^-	-1	0.511	Neutrino electrónico	ν_e	0	$< 0.8 \cdot 10^{-3}$
	Positrón	e^+	+1		Antineutrino electrónico	$\bar{\nu}_e$	0	
2ª gen.	Muon	μ^-	-1	105.658	Neutrino muónico	ν_μ	0	< 0.19
	Antimuon	μ^+	+1		Antineutrino muónico	$\bar{\nu}_\mu$	0	
3ª gen.	Tau	τ^-	-1	1776.86	Neutrino tauónico	ν_τ	0	< 18.2
	Antitau	τ^+	+1		Antineutrino tauónico	$\bar{\nu}_\tau$	0	

Tabla 2.2: Leptones y sus principales propiedades. Los datos de las masas se han extraído de [4], a excepción de la masa del neutrino electrónico que ha sido extraída de [5].

2.3. Helicidad

Otra propiedad interesante de los neutrinos es su helicidad, que está estrechamente ligada con cómo interaccionan estas partículas. La helicidad nos indica el sentido de la proyección del espín a lo largo de la dirección de movimiento. Una helicidad positiva implica que la proyección comparte sentido con la dirección de movimiento, mientras que una helicidad negativa está asociada a proyecciones en sentido contrario al de movimiento.

Antes del descubrimiento del neutrino, se conocían tres fuerzas fundamentales de la naturaleza: la electromagnética, la fuerte y la gravitatoria. No obstante, la fuerza gravitatoria no es relevante a escala microscópica, y los neutrinos no pueden interaccionar mediante las fuerzas fuerte y electromagnética, ya que son partículas sin estructura interna y de carga eléctrica nula. Por ese motivo, fue necesario introducir una nueva interacción fundamental en la naturaleza que fuera responsable de los procesos en los que intervienen los neutrinos. Esta interacción es de corto alcance y de baja intensidad en comparación con las demás fuerzas fundamentales, por lo que se denominó interacción débil.

En el marco de la Teoría Cuántica de Campos (TCC), la interacción débil se describe mediante unas partículas mediadoras que son los bosones vectoriales cargados W^\pm y neutro Z^0 [6]. Esto permite diferenciar dos tipos de procesos débiles: las corrientes cargadas, mediadas por los bosones cargados W^\pm , y las corrientes neutras, mediadas por el bosón neutro Z^0 . Las masas de los bosones vectoriales oscilan en torno a 80-90 GeV, explicando por qué el rango de alcance de la interacción débil es tan pequeño⁽²⁾.

Los leptones y antileptones que participan en procesos débiles presentan una quiralidad bien definida [7]. La quiralidad, al igual que la helicidad, puede ser positiva o negativa. Concretamente, los leptones presentan quiralidad negativa, mientras que los antileptones tienen quiralidad positiva. La quiralidad es una propiedad fundamental de las partículas, a diferencia de la helicidad, que es un observable. No obstante, la helicidad y la quiralidad coinciden para partículas sin masa. El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos demostró que los neutrinos tienen masa, aunque al ser tan pequeñas, podemos considerar que se desplazan a velocidades cercanas a la de la luz en el vacío. Por esa razón, suele hablarse indistintamente de la helicidad o la quiralidad de los neutrinos.

(2) Las vidas medias de los bosones vectoriales es del orden de 10^{-27} segundos, en virtud del principio de incertidumbre de Heisenberg

El cambio de sabor en los neutrinos fue confirmado tanto para los neutrinos atmosféricos por el experimento Kamiokande [10] como para los neutrinos solares por la colaboración SNO [11]. Esta transformación que sufren los neutrinos en su trayectoria se denomina *el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos*.

2.4.1.1. ¿Cómo se estudian las oscilaciones?

El estudio de las oscilaciones busca determinar experimentalmente los parámetros característicos de las mismas, tales como el ángulo de mezcla θ y la diferencia de masas al cuadrado Δm^2 , así como el parámetro δ_{CP} , relacionado con una posible asimetría en la forma en que oscilan neutrinos y antineutrinos.

En estos experimentos se determina el cambio en el flujo de neutrinos de un determinado sabor procedentes de fuentes naturales o artificiales, para posteriormente compararlo con los modelos teóricos. El estudio de las oscilaciones de neutrinos con fuentes artificiales, como los reactores nucleares de fisión o los aceleradores de partículas, requiere de un dispositivo experimental específico. Este dispositivo consta de un detector situado junto a la fuente artificial que mide el espectro energético de los neutrinos antes de que experimenten alguna oscilación. Este detector se denomina detector cercano. A cierta distancia se coloca otro detector, conocido como detector lejano, que mide el espectro energético de los neutrinos una vez han experimentado cambios de sabor.

Un esquema de este tipo de dispositivos experimentales se ilustra en la Figura 2.3 para el experimento T2K. En este experimento, el haz de neutrinos se genera en el laboratorio J-PARC y se dirige hacia los detectores cercano (ND280) y lejano (Super-Kamiokande). Este último está situado aproximadamente a 295 kilómetros de distancia del primero.

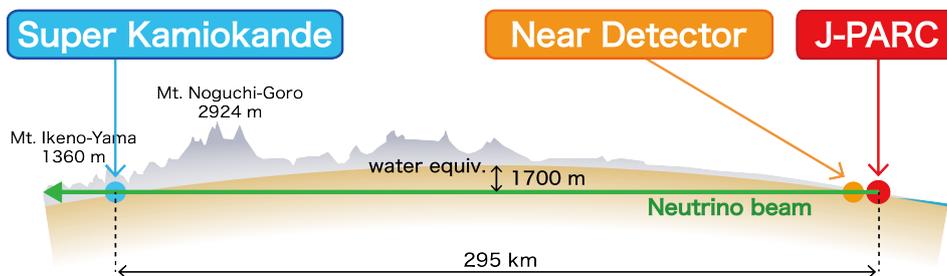


Figura 2.3: Esquema del experimento T2K (Tokai to Kamioka) donde un haz de neutrinos es originado en el acelerador de protones del laboratorio J-PARC y enviado en dirección al detector Super-Kamiokande. La figura ha sido extraída de [12].

La dificultad de estos experimentos reside en saber interpretar las señales de los detectores de manera que se asocien a su correspondiente proceso. Esto requiere un estudio cuidadoso de las señales y un conocimiento extenso de como pueden interaccionar los neutrinos con el material activo de los detectores. En este estudio son relevantes las interacciones neutrino-núcleo debido a que los efectos nucleares son significativos a las energías propias de estos experimentos.

A diferencia de los experimentos con electrones, el flujo de neutrinos no es monocromático, ya que proviene del decaimiento de mesones o de la desintegración β . La probabilidad de oscilación se encuentra ligada a la energía del neutrino, la cual es necesario reconstruir mediante las partículas detectadas en el estado final. Para llevar a cabo esta reconstrucción, se emplean modelos que describen los procesos de interacción posibles.

La identificación de los procesos es igualmente compleja debido a la influencia de efectos nucleares como las interacciones de estados finales (FSI), las corrientes de intercambio de mesones (MEC) o las correlaciones entre nucleones, sin mencionar las incertidumbres asociadas al propio dispositivo experimental. Por lo tanto, estas mediciones requieren un análisis estadístico que incluye la realización de simulaciones MonteCarlo.

Como se puede observar, las incertidumbres en las medidas de los procesos de interacción neutrino-núcleo tienen un gran impacto en el estudio de las oscilaciones de neutrinos. Por lo tanto, en este trabajo analizamos las incertidumbres asociadas a la estructura hadrónica y la dinámica nuclear presentes en los modelos que describen dichos procesos. La reducción de estas incertidumbres es fundamental en los experimentos que investigan las oscilaciones de neutrinos, en particular para determinar si existe una verdadera asimetría en el comportamiento de neutrinos y antineutrinos.

El trabajo se divide en dos partes principales. En la primera parte, se estudia el proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón. En este caso, el nucleón interaccionante se encuentra libre, por lo que las incertidumbres en el proceso solo están asociadas a la estructura hadrónica. En la segunda parte, se extiende el estudio a los procesos de dispersión neutrino-núcleo, en los que, además de la estructura hadrónica, se manifiesta la estructura nuclear. Nos centraremos en el proceso de dispersión cuasielástica, en el que únicamente se libera un nucleón del núcleo. En ambos casos, se comparan las predicciones teóricas con datos experimentales, lo que nos permitirá determinar la relevancia de estas incertidumbres en el estudio de las oscilaciones de neutrinos.

Parte II

Dispersión elástica neutrino-nucleón

Capítulo 3

Formalismo general

En este capítulo, se aborda el análisis teórico del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón ($\nu - N$). Se establece el formalismo general necesario para describir este proceso débil y se lleva a cabo el cálculo de su sección eficaz⁽¹⁾. Nos restringiremos al caso particular de dispersión $\nu_l - N$ mediada por corrientes cargadas, donde el subíndice l denota el sabor leptónico. Las expresiones que obtendremos son aplicables a cualquier sabor, simplemente es necesario considerar la masa del leptón cargado correspondiente. El proceso mediado por corrientes neutras no será objeto de nuestro estudio. No obstante, puede encontrarse una descripción detallada del mismo en [13].

3.1. Cinemática del proceso

Consideremos el proceso de dispersión elástica $\nu_l - N$ mediada por corrientes cargadas. La descripción del proceso en primer orden en teoría de perturbaciones está representada en la Figura 8.2. Obsérvese que el diagrama consta de dos vértices, uno leptónico y otro hadrónico, entre los cuales se produce un intercambio de carga debido al intercambio del bosón vectorial cargado W^\pm , que es mediador de la interacción débil.

Asimismo, cabe destacar que el plano de reacción está contenido en el plano XZ, debido a nuestra elección de ejes cartesianos, en la cual el momento transferido solo tiene componente en la dirección z. Esta elección es importante, ya que simplifica considerablemente el desarrollo matemático que se presenta a continuación.

(1) En lo sucesivo, se trabaja en el sistema natural de unidades de manera que $\hbar = c = 1$.

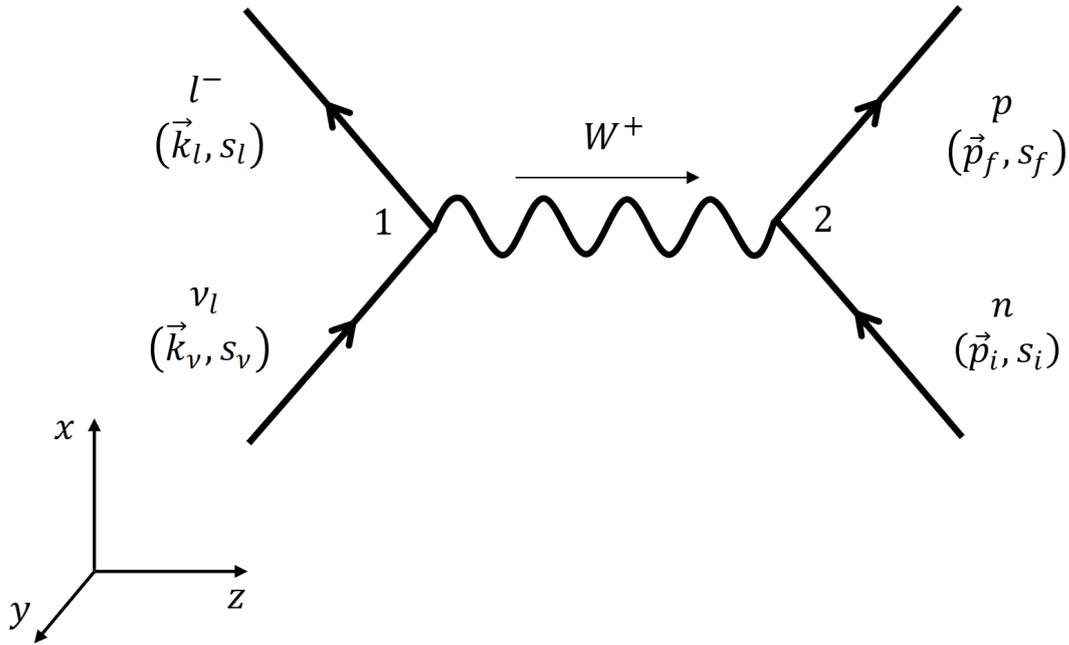


Figura 3.1: Diagrama de Feynman del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón. Se indica el momento y el espín de las partículas implicadas en el proceso.

Escogemos trabajar en el sistema laboratorio de manera que el neutrino incidente colisiona con el nucleón inicial que supondremos que se encuentra libre y en reposo. En ese caso, el momento transferido se corresponde con el momento del protón saliente. Adicionalmente, consideraremos la aproximación del neutrino ultrarelativista de manera que su masa no será relevante en la descripción del proceso.

A continuación, se introduce la notación de los cuadri-momentos de las partículas implicadas en el proceso.

■ **Neutrino incidente ν_l**

- Cuadri-momento: $K_\nu^\mu = (\varepsilon_\nu, \vec{k}_\nu)$
- Energía: $\varepsilon_\nu = |\vec{k}_\nu|$

■ **Nucleón inicial n**

- Cuadri-momento: $P_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i = 0)$
- Energía: $E_i = M_N$

■ **Leptón saliente l^-**

- Cuadri-momento: $K_l^\mu = (\varepsilon_l, \vec{k}_l)$
- Energía: $\varepsilon_l = \sqrt{m_l^2 + |\vec{k}_l|^2}$
- Ángulo de salida respecto al neutrino incidente: θ_l

- **Nucleón final p**

- Cuadri-momento: $P_f^\mu = (E_f, \vec{p}_f)$
- Energía: $E_f = \sqrt{M_N^2 + |\vec{p}_f|^2}$

- **Bosón intercambiado W^+**

- Cuadri-momento: $Q^\mu = (\omega, \vec{q})$
- Energía: $\omega = \sqrt{M_W^2 + |\vec{q}|^2}$

Las relaciones que definen la cinemática del proceso se obtienen aplicando la ley de conservación de la energía y el momento en cada uno de los vértices del diagrama de Feynman que describe el proceso.

Vértice 1

- Conservación de la energía: $\omega = \varepsilon_\nu - \varepsilon_l$
- Conservación del momento: $\vec{q} = \vec{k}_\nu - \vec{k}_l \rightarrow |\vec{q}|^2 = \varepsilon_\nu^2 + |\vec{k}_l|^2 - 2\varepsilon_\nu |\vec{k}_l| \cos \theta_l$

Vértice 2

- Conservación de la energía: $M_N + \omega = E_f$
 - Conservación del momento: $\vec{q} = \vec{p}_f$
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Conservación de la energía} \\ \text{Conservación del momento} \end{matrix}} \right\} \omega^2 + 2M\omega = |\vec{q}|^2 \rightarrow 2M\omega = -Q^2 = |Q^2|$$

Las conservaciones impuestas nos muestran que la cinemática del proceso está completamente descrita por las variables ε_ν , ε_l y θ_l . Es más, relaciona dichas variables, de manera que fijada dos de las mismas, la tercera está unívocamente determinada. Asimismo, las relaciones previas conducen a que el cuadri-momento transferido es un cuadri-vector de tipo espacial dado que $Q^2 = \omega^2 - |\vec{q}|^2 < 0$.

3.2. Sección eficaz

La sección eficaz está asociada a la probabilidad de ocurrencia de un cierto proceso. Es un observable que se mide experimentalmente. De ahí, que gran parte de este capítulo se centre en el cálculo y análisis de la sección eficaz de nuestro proceso en estudio.

La sección eficaz diferencial [6, 14] viene dada por

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2}{T \cdot \phi_{inc}} dN_f, \quad (3.1)$$

siendo \mathcal{S}_{fi} la amplitud de la transición, T el tiempo, ϕ_{inc} el flujo de partículas incidentes y dN_f la densidad de estados finales.

La densidad de estados finales se define como

$$dN_f = \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p}_j = \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3\vec{k}_l d^3\vec{p}_f, \quad (3.2)$$

donde \vec{p}_j son los momentos de las partículas en el estado final. Recuérdese que nuestro proceso en estudio presenta dos partículas salientes, el leptón cargado y el protón con momentos \vec{k}_l y \vec{p}_f , respectivamente.

El flujo de partículas incidentes se corresponde con el módulo de la velocidad relativa de las partículas en el estado inicial dividido por el volumen, es decir,

$$\phi_{inc} = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V} \approx \frac{1}{V}, \quad (3.3)$$

donde \vec{v}_1 y \vec{v}_2 representan las velocidades referidas a las dos partículas iniciales. Debe tenerse en cuenta que, en nuestro proceso, el nucleón inicial se encuentra en reposo. Por consiguiente, la velocidad relativa se corresponde con la del neutrino incidente que se supone que se desplaza a una velocidad próxima a la de la luz.

3.2.1. Corrientes leptónica y hadrónica

Antes de abordar el cálculo de la amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} , el cual se detalla en la sección 3.2.3, es fundamental introducir ciertas definiciones que se emplean durante el proceso de cálculo. En primer lugar, definimos las corrientes leptónica y hadrónica asociadas a cada uno de los vértices del diagrama de Feynman del proceso.

- **Corriente leptónica.** Es la corriente asociada al vértice 1 de nuestro proceso (ver Figura 8.2). Permite describir la destrucción de un neutrino y la creación de un leptón de carga eléctrica negativa en el vértice, disminuyendo la carga en una unidad en el mismo. La expresión de esta corriente es

$$J_{(l)}^{\alpha\dagger}(X_1) = \bar{\Psi}_l(X_1) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_\nu(X_1). \quad (3.4)$$

Si la partícula incidente fuera un antineutrino, la corriente leptónica sufre un cambio de signo en el término asociado a γ^5 , como consecuencia de la quiralidad definida que

presentan los leptones y antileptones en procesos débiles. Esto permite describir la destrucción de un antineutrino y la creación de un leptón de carga eléctrica positiva en el vértice, aumentando la carga en una unidad en el mismo. Obsérvese que, en tal caso, el nucleón inicial debe ser un protón para que se conserve la carga eléctrica en los vértices del diagrama de Feynman.

- **Corriente hadrónica.** Se trata de la corriente asociada en el vértice 2 de nuestro proceso (ver Figura 8.2). Permite describir la destrucción de un nucleón y la creación otro distinto en el vértice, apreciándose un cambio de la carga eléctrica en una unidad o, equivalentemente, un cambio de la tercera componente de isospín en una unidad. La expresión de esta corriente es

$$J_{(N)}^\beta(X_2) = \bar{\Psi}_p(X_2) \gamma^\beta (C_V + C_A \gamma^5) \Psi_n(X_2), \quad (3.5)$$

donde se incluyen los términos C_V y C_A que están relacionados con la estructura interna del nucleón, concretamente con su parte vector y axial, respectivamente.

En las corrientes (3.4) y (3.5), aparecen la función de onda de Dirac Ψ y su adjunta $\bar{\Psi}$, donde los subíndices indican la partícula a la que describen. Cabe destacar que ambas corrientes incluyen un término γ^μ y un término $\gamma^\mu \gamma^5$. Ambos términos junto a las funciones de onda de Dirac forman covariantes bilineales cuya modificación, bajo transformaciones de Lorentz, es conocida. Esta construcción de las corrientes lleva implícito la violación de la paridad en la interacción débil y también está asociado a la violación de la conjugación de carga en dicha interacción (consultar el Apéndice A.4 para más información).

La función de onda de Dirac para partículas libres viene dada por

$$\Psi(X) = \sqrt{\frac{M}{VE_p}} u(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}, \quad (3.6)$$

donde $u(\vec{p}, s)$ es el espinor de Dirac. Mientras la función de onda adjunta de Dirac resulta

$$\bar{\Psi}(X) = \Psi^\dagger(X) \gamma^0 = \sqrt{\frac{M}{VE_p}} \bar{u}(\vec{p}, s) e^{iP_\mu X^\mu}, \quad (3.7)$$

siendo $\bar{u}(\vec{p}, s)$ el espinor adjunto de Dirac. El Apéndice A.2 contiene una descripción más detallada sobre las soluciones libres de la ecuación de Dirac.

Teniendo en cuenta las definiciones introducidas previamente, las corrientes leptónica y hadrónica pueden expresarse como se muestra a continuación.

■ **Corriente leptónica:**

$$J_{(l)}^{\alpha\dagger}(X_1) = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m_\nu m_l}{\varepsilon_\nu \varepsilon_l}} \bar{u}(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u(\vec{k}_\nu, s_\nu) e^{iX_1 \cdot (K_l - K_\nu)}, \quad (3.8)$$

donde el término $X_1 \cdot (K_l - K_\nu)$ indica la contracción de los correspondientes cuadvectores. Además, se ha introducido el operador de Dirac Γ^α que viene dado por

$$\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha (1 - \gamma^5). \quad (3.9)$$

■ **Corriente hadrónica:**

$$J_\beta^{(N)}(X_2) = \frac{1}{V} \frac{M_N}{\sqrt{E_i E_f}} \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\beta u(\vec{p}_i, s_i) e^{iX_2 \cdot (P_f - P_i)}, \quad (3.10)$$

donde el operador de Dirac $\tilde{\Gamma}_\beta$ es

$$\tilde{\Gamma}_\beta = \underbrace{F_1^V \gamma_\beta + \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\beta\mu} Q^\mu}_{\tilde{\Gamma}_\beta^V} + \underbrace{G_A \gamma_\beta \gamma^5 + \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta \gamma^5}_{\tilde{\Gamma}_\beta^A}. \quad (3.11)$$

Obsérvese que el operador $\tilde{\Gamma}_\beta$ tiene una expresión más compleja que la del operador Γ^α , como consecuencia de que los nucleones poseen una estructura interna de la cual los leptones carecen. En concreto, el operador $\tilde{\Gamma}_\beta$ está compuesto por las componentes vector $\tilde{\Gamma}_\beta^V$ y axial $\tilde{\Gamma}_\beta^A$ que, a su vez, dependen de los siguientes factores de forma del nucleón: F_1^V , F_2^V , G_A y G_P . Los términos F_1^V y F_2^V están relacionados con la estructura vector del nucleón, mientras G_A y G_P están asociados a la estructura pseudovector y pseudoescalar del nucleón, respectivamente. Una descripción más detallada de estos factores de forma puede encontrarse en el capítulo 4. Por último, es relevante destacar que hemos considerado una masa genérica M_N para el nucleón, independientemente de si estamos considerando el protón o el neutrón. Esto es posible dado que $M_n \approx M_p$, de manera que definimos M_N como el promedio de las masas del protón y el neutrón.

3.2.2. Hamiltoniano débil

Una vez introducidas las corrientes leptónica y hadrónica, se define el hamiltoniano débil para procesos mediados por corrientes cargadas [6, 14]. Este viene dado por

$$\mathcal{H}(X_1) = \left(\frac{g_W}{2\sqrt{2}} \right)^2 J_{(l)}^{\alpha\dagger}(X_1) A_\alpha^{(N)}(X_1), \quad (3.12)$$

donde g_W es la constante de acoplamiento débil, análoga a la constante de estructura fina en la interacción electromagnética, mientras $A_\alpha^{(N)}(X_1)$ es el cuadri-potencial que representa el campo que genera el nucleón en su interacción con el neutrino. Este último depende tanto de la corriente hadrónica como del propagador del mediador de la interacción tal y como sigue

$$A_\alpha^{(N)}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 D_{\alpha\beta}^W(X_1 - X_2) J_{(N)}^\beta(X_2), \quad (3.13)$$

donde el propagador del bosón W en coordenadas espacio-temporales es

$$D_{\alpha\beta}^W(X_1 - X_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 Q D_{\alpha\beta}^W(Q) e^{-iQ \cdot (X_1 - X_2)} \quad (3.14)$$

que, a su vez, depende del propagador en el espacio de momentos

$$D_{\alpha\beta}^W(Q) = \frac{-g_{\alpha\beta} + Q_\alpha Q_\beta / M_W^2}{Q^2 - M_W^2 + i\epsilon}. \quad (3.15)$$

En el rango de energías de nuestro interés podemos aplicar la aproximación estática dado que $|Q^2| \ll M_W^2$ debido al elevado valor de la masa del bosón cargado W . Recuérdese que el momento transferido se corresponde con el momento del protón saliente mientras la masa del bosón W es 80.40 GeV [6]. En esta aproximación, el propagador en el espacio de momentos se reduce a

$$D_{\alpha\beta}^W(Q) \approx \frac{g_{\alpha\beta}}{M_W^2}. \quad (3.16)$$

De la misma manera, la aproximación estática nos permite relacionar la constante de Fermi G_F , que caracteriza la intensidad de la interacción débil, con la constante de acoplamiento débil g_W como sigue

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2}. \quad (3.17)$$

3.2.3. Cálculo de la amplitud de la transición

La amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} se corresponde con el elemento de matriz de la matriz de colisión \mathcal{S} entre los estados final e inicial. La matriz de colisión \mathcal{S} conecta el estado inicial de un sistema $|\phi(-\infty)\rangle$ con una combinación lineal de los posibles estados finales del mismo $|\phi(+\infty)\rangle$ de manera que $|\phi(+\infty)\rangle = \mathcal{S}|\phi(-\infty)\rangle$ [6, 14]. Por consiguiente, el elemento de matriz $\mathcal{S}_{fi} = \langle f|\mathcal{S}|i\rangle$ indica la amplitud de probabilidad de que el sistema en el estado inicial $|i\rangle$ alcance el estado final $|f\rangle$ tras la colisión.

La amplitud de transición para nuestro proceso en estudio viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{fi} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 \mathcal{H}(X_1) \\ &= -i \left(\frac{g_W}{2\sqrt{2}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 J_{(l)}^{\alpha\dagger}(X_1) A_{\alpha}^{(N)}(X_1) \\ &= -i \left(\frac{g_W}{2\sqrt{2}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 J_{(l)}^{\alpha\dagger}(X_1) D_{\alpha\beta}^W(X_1 - X_2) J_{(N)}^{\beta}(X_2). \quad (3.18)\end{aligned}$$

Introduciendo las corrientes leptónica (3.8) y hadrónica (3.10) y el propagador del bosón W en la aproximación estática (3.16) resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{fi} &= \frac{-i}{V^2} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu} M_N^2}{\varepsilon_l \varepsilon_{\nu} E_f E_i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 e^{i(K_l - K_{\nu} - Q) \cdot X_1} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 e^{i(P_f - P_i - Q) \cdot X_2} \\ &\quad \cdot \frac{g_W^2}{8M_W^2} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^{\alpha} u_{\nu}(\vec{k}_{\nu}, s_{\nu}) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_{\alpha} u_n(\vec{p}_i, s_i) \right]. \quad (3.19)\end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en (3.19) se encuentran desarrolladas en el Apéndice B.1 resultando $(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_{\nu} - P_i)$ donde la δ^4 está relacionada con la conservación del cuadri-momento en el proceso. Sustituyendo este resultado en (3.19) e introduciendo la constante de Fermi G_F definida en (3.17), la amplitud de la transición queda

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{fi} &= \frac{-i}{V^2} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu} M_N^2}{\varepsilon_l \varepsilon_{\nu} E_f E_i}} (2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_{\nu} - P_i) \\ &\quad \cdot \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^{\alpha} u_{\nu}(\vec{k}_{\nu}, s_{\nu}) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_{\alpha} u_n(\vec{p}_i, s_i) \right], \quad (3.20)\end{aligned}$$

cuyo módulo al cuadrado es

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{m_l m_{\nu} M_N^2}{\varepsilon_l \varepsilon_{\nu} E_f E_i} |(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_{\nu} - P_i)|^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (3.21)$$

donde se ha introducido la amplitud invariante \mathcal{M}_{fi} que contiene toda la información física de la interacción, a diferencia de los restantes términos que únicamente describen la cinemática del proceso, y que está definida como

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right]. \quad (3.22)$$

Además, teniendo en cuenta el desarrollo realizado en el Apéndice B.2, se obtiene que

$$|(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)|^2 = (2\pi)^4 VT \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i). \quad (3.23)$$

Por consiguiente, el módulo de la amplitud de la transición resulta

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{m_l m_\nu M_N^2}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu E_f E_i} (2\pi)^4 VT \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.24)$$

Cálculo del módulo al cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

En principio, los espines de las partículas son desconocidos de manera que para determinar $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ sumamos sobre los estados de espín finales y promediamos sobre los estados de espín iniciales de las partículas implicadas en el proceso.

Tras un desarrollo extenso que puede verse en el Apéndice C.1 resulta,

$$\frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = G_F^2 \eta^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$

donde aparece la contracción de los tensores leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$. Estos tensores se determinan mediante el método de trazas (ver Apéndice C.2). El cálculo exhaustivo de los tensores leptónico y hadrónico se puede encontrar en los Apéndices C.3 y C.4, respectivamente. No obstante, en lo que sigue se muestran los resultados más relevantes.

Tensor leptónico $\eta^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{s_l, s_\nu} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \bar{\Gamma}^\beta u_l(\vec{k}_l, s_l) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right] \\ &= \frac{1}{m_l m_\nu} \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha - i \epsilon^{\alpha\beta\delta\phi} K_{l\delta} K_{\nu\phi} \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde el operador $\bar{\Gamma}^\beta = \gamma^0 \Gamma^{\beta\dagger} \gamma^0 = \gamma^\beta (1 - \gamma_5) = \Gamma^\beta$ como se demuestra en el Apéndice C.3.

Tensor hadrónico $W_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right] \left[\bar{u}_n(\vec{p}_i, s_i) \bar{\Gamma}_\beta u_p(\vec{p}_f, s_f) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \bar{\Gamma}_\beta \right] \\ &= W_{\alpha\beta}^{VV} + W_{\alpha\beta}^{AA} + W_{\alpha\beta}^{VA}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde el operador de Dirac $\bar{\Gamma}_\beta = \bar{\Gamma}_\beta^V + \bar{\Gamma}_\beta^A$ con

$$\bar{\Gamma}_\beta^V = \gamma^0 (\tilde{\Gamma}_\beta^V)^\dagger \gamma^0 = F_1^V \gamma_\beta - \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\beta\mu} Q^\mu \neq \tilde{\Gamma}_\beta^V, \quad (3.28)$$

$$\bar{\Gamma}_\beta^A = \gamma^0 (\tilde{\Gamma}_\beta^A)^\dagger \gamma^0 = G_A \gamma_\beta \gamma^5 - \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta \gamma^5 \neq \tilde{\Gamma}_\beta^A, \quad (3.29)$$

tal y como se muestra en el Apéndice C.4. Debido a la separación de la corriente hadrónica en una parte vector y otra axial, el tensor hadrónico puede descomponerse en tres términos: vector-vector ($W_{\alpha\beta}^{VV}$), axial-axial ($W_{\alpha\beta}^{AA}$) y vector-axial ($W_{\alpha\beta}^{VA}$).

■ **Término vector-vector** $W_{\alpha\beta}^{VV}$

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{VV} &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \tilde{\Gamma}_\alpha^V (\not{P}_i + M_N) \bar{\Gamma}_\beta^V \right] \\ &= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{VV} (F_1^V)^2 - f_{\alpha\beta}^{VM} \frac{iF_1^V F_2^V}{2M_N} + f_{\alpha\beta}^{MM} \frac{(F_2^V)^2}{4M_N^2} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde las componentes $f_{\alpha\beta}^{VV}$, $f_{\alpha\beta}^{VM}$ y $f_{\alpha\beta}^{MM}$ vienen dadas como sigue

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{VV} &= \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \gamma_\alpha (\not{P}_i + M_N) \gamma_\beta \right] \\ &= 4 \left[P_{f_\alpha} P_{i_\beta} - (P_f \cdot P_i - M_N^2) g_{\alpha\beta} + P_{f_\beta} P_{i_\alpha} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{VM} &= \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \gamma_\alpha (\not{P}_i + M_N) \sigma_{\beta\xi} Q^\xi \right. \\ &\quad \left. - (\not{P}_f + M_N) \sigma_{\alpha\nu} Q^\nu (\not{P}_i + M_N) \gamma_\beta \right] \\ &= 4iM_N \left[Q_\alpha (P_{i_\beta} - P_{f_\beta}) + Q_\beta (P_{i_\alpha} - P_{f_\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + 2g_{\alpha\beta} (P_f \cdot Q - P_i \cdot Q) \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MM} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= 4\left\{(P_f \cdot Q)(P_{i_\alpha}Q_\beta + P_{i_\beta}Q_\alpha) + (P_i \cdot Q)(P_{f_\alpha}Q_\beta + P_{f_\beta}Q_\alpha) \right. \\
&\quad - Q^2(P_{f_\alpha}P_{i_\beta} + P_{f_\beta}P_{i_\alpha}) - Q_\alpha Q_\beta(P_f \cdot P_i + M_N^2) \\
&\quad \left. + g_{\alpha\beta} [Q^2(P_f \cdot P_i + M_N^2) - 2(P_f \cdot Q)(P_i \cdot Q)]\right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

■ **Término axial-axial** $W_{\alpha\beta}^{AA}$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}^A &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^A(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^A] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{AA}(G_A)^2 - f_{\alpha\beta}^{AP} \frac{G_A G_P}{2M_N} - f_{\alpha\beta}^{PP} \frac{(G_P)^2}{4M_N^2} \right], \tag{3.34}
\end{aligned}$$

donde las componentes $f_{\alpha\beta}^{AA}$, $f_{\alpha\beta}^{AP}$ y $f_{\alpha\beta}^{PP}$ son

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{AA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5] \\
&= 4 [P_{f_\alpha}P_{i_\beta} - (P_f \cdot P_i + M_N^2)g_{\alpha\beta} + P_{f_\beta}P_{i_\alpha}], \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{AP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 \\
&\quad - (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5] \\
&= 4M_N [(P_{f_\alpha} - P_{i_\alpha})Q_\beta + (P_{f_\beta} - P_{i_\beta})Q_\alpha], \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{PP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5] \\
&= 4 [M_N^2 - P_f \cdot P_i] Q_\alpha Q_\beta. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

■ **Término vector-axial** $W_{\alpha\beta}^{VA}$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}^{VA} &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^V(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^A + (\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^A(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^V] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{VA} F_1^V G_A - f_{\alpha\beta}^{VP} \frac{F_1^V G_P}{2M_N} + f_{\alpha\beta}^{MA} \frac{iF_2^V G_A}{2M_N} - f_{\alpha\beta}^{MP} \frac{iF_2^V G_P}{4M_N^2} \right], \tag{3.38}
\end{aligned}$$

donde las componente $f_{\alpha\beta}^{VA}$, $f_{\alpha\beta}^{VP}$, $f_{\alpha\beta}^{MA}$ y $f_{\alpha\beta}^{MP}$ se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5 \\
&\quad + (\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta] \\
&= -8i\epsilon_{\lambda\alpha\rho\beta}P_f^\lambda P_i^\rho,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 \\
&\quad - (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta] = 0,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5 \\
&\quad - (\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= 8M_N [\epsilon_{\sigma\alpha\mu\beta}P_f^\sigma Q^\mu + \epsilon_{\eta\alpha\mu\beta}P_i^\eta Q^\mu],
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 \\
&\quad + (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] = 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Finalmente, sumando los resultados anteriores y reagrupándolos de manera conveniente se obtiene que el tensor hadrónico viene dado por

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta} &= -W_1(Q^2)g_{\alpha\beta} + W_2(Q^2)\frac{P_{i\alpha}P_{i\beta}}{M_N^2} + i\frac{W_3(Q^2)}{2M_N^2}\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho \\
&\quad + \frac{W_4(Q^2)}{M_N^2}Q_\alpha Q_\beta + W_5(Q^2)\frac{P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha}{2M_N^2},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde los coeficientes $W_i(Q^2)$ se denominan funciones de estructura hadrónica dado que dependen de los factores de forma del nucleón. Estas vienen dadas,

$$W_1(Q^2) = \frac{|Q^2|}{4M_N^2} \left[(F_1^V + F_2^V)^2 + (G_A)^2 \right] + (G_A)^2, \tag{3.44}$$

$$W_2(Q^2) = (F_1^V)^2 + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (F_2^V)^2 + (G_A)^2, \tag{3.45}$$

$$W_3(Q^2) = 2(F_1^V + F_2^V)G_A, \tag{3.46}$$

$$W_4(Q^2) = \frac{|Q^2| - 4M_N^2}{16M_N^2} (F_2^V)^2 - \frac{F_1^V F_2^V}{2} + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (G_P)^2 - \frac{G_A G_P}{2}, \tag{3.47}$$

$$W_5(Q^2) = W_2(Q^2). \tag{3.48}$$

Contracción del tensor leptónico y hadrónico $\eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$

Una vez calculados los tensores leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$ procedemos a determinar su contracción. En ese sentido, resulta útil introducir el tensor leptónico reducido $\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = m_l m_\nu \eta^{\alpha\beta}$ debido a que permite prescindir de las constantes:

$$\eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_l m_\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}. \quad (3.49)$$

Además, se puede separar las partes simétrica y antisimétrica de cada tensor acorde con el carácter vector y vector-axial de las corrientes leptónica y hadrónica.

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} = K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \\ \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = -i\epsilon^{\alpha\beta\delta\phi} K_{l_\delta} K_{\nu_\phi} \end{array} \right\}. \quad (3.50)$$

$$W_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta}^S + W_{\alpha\beta}^A \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_{\alpha\beta}^S = -W_1(Q^2)g_{\alpha\beta} + W_2(Q^2)\frac{P_{i\alpha}P_{i\beta}}{M_N^2} \\ \quad + \frac{W_4(Q^2)}{M_N^2}Q_\alpha Q_\beta + W_5(Q^2)\frac{P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha}{2M_N^2} \\ W_{\alpha\beta}^A = i\frac{W_3(Q^2)}{2M_N^2}\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho \end{array} \right\}. \quad (3.51)$$

Al contraer los tensores leptónico reducido $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$ queda la contracción de las partes simétricas más la contracción de las partes antisimétricas dado que los términos cruzados son nulos por definición. El desarrollo se encuentra en el Apéndice C.5 aunque el resultado se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= (\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta})(W_{\alpha\beta}^S + W_{\alpha\beta}^A) = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^A \\ &= 2W_1(Q^2)\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right) \\ &\quad + W_2(Q^2)\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l + |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right) \\ &\quad + \frac{W_3(Q^2)}{M_N} \varepsilon_\nu \left[(\varepsilon_\nu + \varepsilon_l) \left(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right) - M_l^2 \right] \\ &\quad + \frac{m_l^2}{M_N^2} W_4(Q^2)\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right) \\ &\quad - \frac{m_l^2}{M_N} W_5(Q^2)\varepsilon_\nu. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por consiguiente, el módulo al cuadrado de la amplitud invariante queda

$$\frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = G_F^2 \eta^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{m_l m_\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}, \quad (3.53)$$

resultando el módulo al cuadrado de la amplitud de la transición en

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2 M_N^2}{V^4 \varepsilon_l \varepsilon_\nu E_i E_f} VT (2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}. \quad (3.54)$$

3.2.4. Sección eficaz diferencial doble

Calculado el módulo al cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{S}_{fi}|^2$ (3.54), la densidad de estados finales dN_f (3.2) y el flujo incidente ϕ_{inc} (3.3) para el proceso en estudio, podemos concluir que la sección eficaz diferencial (3.1) viene dada por

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{\delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu E_i E_f} M_N^2 \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} d^3 \vec{k}_l d^3 \vec{p}_f. \quad (3.55)$$

Nuestro objetivo es determinar la sección eficaz diferencial doble en función de las variables asociadas al leptón cargado saliente, como son la energía ε_l y el ángulo de dispersión θ_l . Para que la sección eficaz diferencial únicamente dependa de las variables asociadas al leptón saliente y de la energía del neutrino incidente, se realiza la integral tridimensional en el momento del nucleon final \vec{p}_f resultando

$$\int d^3 \vec{p}_f \frac{\delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)}{2E_f} = \delta(Q^2 + 2M_N \omega) = \frac{1}{2M_N} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right). \quad (3.56)$$

La expresión anterior nos muestra que el proceso elástico solo tiene lugar cuando $\omega = \frac{|Q^2|}{2M_N}$, este resultado es una consecuencia directa de la ley de conservación de la energía y el momento. El desarrollo detallado de la integral anterior puede encontrarse en el Apéndice B.3. Esto reduce la sección eficaz diferencial a

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} d^3 \vec{k}_l, \quad (3.57)$$

donde se ha tenido en cuenta que $E_i = M_N$.

Aplicando una transformación a coordenadas esféricas, se obtiene la sección eficaz doble en función de las variables que describen la cinemática del leptón cargado saliente:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_l d\Omega_l} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}, \quad (3.58)$$

donde se ha tenido en cuenta que $d^3\vec{k}_l = \varepsilon_l |\vec{k}_l| d\varepsilon_l d\Omega_l$.

Introduciendo (3.52) en (3.58), la sección eficaz diferencial doble se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l d\Omega_l} &= \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} |\vec{k}_l| \varepsilon_l \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \\ &\cdot \left\{ 4W_1(Q^2) \sin^2 \frac{\theta_l}{2} + 2W_2(Q^2) \cos^2 \frac{\theta_l}{2} \pm 2 \frac{W_3(Q^2)}{M_N} (\varepsilon_\nu + \varepsilon_l) \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \right. \\ &+ \frac{m_l^2}{\varepsilon_l (\varepsilon_l + |\vec{k}_l|)} \left[2W_1(Q^2) \cos^2 \theta_l - W_2(Q^2) \cos \theta_l \right. \\ &\pm W_3(Q^2) \left(\frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_l}{M_N} \cos \theta_l + \frac{\varepsilon_l + |\vec{k}_l|}{M_N} \right) + W_4(Q^2) \left(\frac{m_l^2}{M_N^2} \cos \theta_l \right. \\ &\left. \left. + 2 \frac{\varepsilon_l (\varepsilon_l + |\vec{k}_l|)}{M_N^2} \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \right) - W_5(Q^2) \frac{\varepsilon_l + |\vec{k}_l|}{M_N} \right] \left. \right\}, \quad (3.59) \end{aligned}$$

donde el signo \pm que acompaña a los términos proporcionales a $W_3(Q^2)$ distingue entre el caso neutrino (+) y antineutrino (-) y surge del término $1 \pm \gamma^5$ de la corriente leptónica (3.4). La ventaja de este ordenamiento es que, en el caso de que el leptón cargado saliente sea ultrarelativista, permite reducir la sección eficaz diferencial doble a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l d\Omega_l} &= \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} |\vec{k}_l| \varepsilon_l \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \\ &\cdot \left\{ 4W_1(Q^2) \sin^2 \frac{\theta_l}{2} + 2W_2(Q^2) \cos^2 \frac{\theta_l}{2} \pm 2 \frac{W_3(Q^2)}{M_N} (\varepsilon_\nu + \varepsilon_l) \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \right\} \quad (3.60) \end{aligned}$$

3.2.5. Sección eficaz diferencial simple

La sección eficaz diferencial simple en función de la energía del leptón saliente ε_l se obtiene integrando la sección eficaz (3.58) respecto del ángulo sólido $d\Omega_l$:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_l} = \int d\Omega_l \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l d\Omega_l} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} \int d\Omega_l \delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}. \quad (3.61)$$

Para realizar la integral, es conveniente expresar la función δ de Dirac de manera apropiada. Haciendo uso de las propiedades de dicha función se obtiene que

$$\delta\left(\omega - \frac{|Q^2|}{2M_N}\right) = 2M_N\delta(2M_N\omega - |Q^2|). \quad (3.62)$$

A su vez, la función δ resultante puede reescribirse como sigue haciendo uso de las relaciones obtenidas al aplicar la ley de conservación de la energía y el momento:

$$\delta(2M_N\omega - |Q^2|) = \frac{1}{2\varepsilon_\nu|\vec{k}_l|}\delta\left(\cos\theta_l - \underbrace{\frac{2(\varepsilon_\nu\varepsilon_l + M_N\varepsilon_l - M_N\varepsilon_\nu) - m_l^2}{2\varepsilon_\nu|\vec{k}_l|}}_{\cos\theta_0}\right). \quad (3.63)$$

El desarrollo preciso para llegar a esta expresión puede encontrarse en el Apéndice B.3. Esto simplifica el cálculo de la sección eficaz diferencial simple:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l} &= \int d\Omega_l \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l d\Omega_l} = \frac{G_F^2 M_N}{4\pi^2 \varepsilon_\nu^2} \int d\Omega_l \delta(\cos\theta_l - \cos\theta_0) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \\ &= \frac{G_F^2 M_N}{4\pi^2 \varepsilon_\nu^2} 2\pi \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \Big|_{\cos\theta_l=\cos\theta_0} = \frac{G_F^2 M_N}{2\pi \varepsilon_\nu^2} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \Big|_{\cos\theta_l=\cos\theta_0}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

A partir de este resultado, podemos obtener la sección eficaz diferencial simple respecto al coseno del ángulo de dispersión del leptón saliente, usando la relación cinemática entre la energía y el ángulo de dispersión del leptón saliente:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_l} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l} \frac{d\varepsilon_l}{d\cos\theta_l} = \frac{G_F^2 M_N}{2\pi \varepsilon_\nu^2} \frac{|\vec{k}_l|}{1 + \frac{M_N}{\varepsilon_\nu} - \frac{\varepsilon_l \cos\theta_l}{|\vec{k}_l|}} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \Big|_{\cos\theta_l=\cos\theta_0}, \quad (3.65)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\cos\theta_l = \frac{-m_l^2 - 2\varepsilon_\nu M_N + 2\varepsilon_l(\varepsilon_\nu + M_N)}{2\varepsilon_\nu|\vec{k}_l|} \rightarrow \frac{d\varepsilon_l}{d\cos\theta_l} = \frac{|\vec{k}_l|}{1 + \frac{M_N}{\varepsilon_\nu} - \frac{\varepsilon_l \cos\theta_l}{|\vec{k}_l|}}. \quad (3.66)$$

Por último, podemos determinar la sección eficaz simple respecto al ángulo sólido del leptón saliente como sigue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_l} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_l} \frac{d\varepsilon_l}{d\cos\theta_l} = \frac{G_F^2 M_N}{2\pi \varepsilon_\nu^2} \frac{|\vec{k}_l|}{1 + \frac{M_N}{\varepsilon_\nu} - \frac{\varepsilon_l \cos\theta_l}{|\vec{k}_l|}} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \Big|_{\cos\theta_l=\cos\theta_0}, \quad (3.67)$$

la cual puede reescribirse como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_l} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d\cos\theta_l} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} f_{rec}^{-1} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \Big|_{\cos\theta_l = \cos\theta_0}, \quad (3.68)$$

donde se ha introducido el factor de retroceso f_{rec} :

$$f_{rec} = 1 + \frac{\varepsilon_\nu (|\vec{k}_l| - \varepsilon_l \cos\theta_l)}{M_N |\vec{k}_l|}. \quad (3.69)$$

3.3. Factores cinemáticos leptónicos y funciones de respuesta hadrónica

La contracción de los tensores leptónico reducido y hadrónico $\tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}$ puede descomponerse en las distintas componentes de los tensores implicados en la contracción [15], permitiendo expresar la sección eficaz simple (3.68) como ⁽²⁾:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_l} \Big|_\chi = \sigma_0 \mathcal{F}_\chi^2, \quad (3.70)$$

donde χ hace referencia a los casos neutrino ($\chi = +$) y antineutrino ($\chi = -$), mientras la amplitud σ_0 viene dada por

$$\sigma_0 = \frac{G_F^2}{2\pi^2} \varepsilon_l |\vec{k}_l| \cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} f_{rec}^{-1}, \quad (3.71)$$

siendo

$$\tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{|Q^2|}{v_0} \quad \text{y} \quad v_0 = (\varepsilon_\nu + \varepsilon_l)^2 - |\vec{q}|^2 = 4\varepsilon_\nu \varepsilon_l - |Q^2|. \quad (3.72)$$

Por último, el término \mathcal{F}_χ^2 contiene toda la información de la estructura nuclear:

$$\mathcal{F}_\chi^2 = \hat{V}_{CC} R_{CC} + 2\hat{V}_{CL} R_{CC} + \hat{V}_{LL} R_{LL} + \hat{V}_T R_T + \chi \hat{V}_{T'} R_{T'}, \quad (3.73)$$

donde \hat{V}_K y R_K representan los factores cinemáticos leptónicos y las funciones de respuesta hadrónica, respectivamente. Estos se corresponden con las distintas componentes de los tensores leptónico reducido y hadrónico, respectivamente.

(2) La relación entre (3.68) y (3.70) reside en que $\tilde{\eta}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = \frac{v_0}{2} \mathcal{F}_\chi^2$.

La descomposición (3.73) incluye términos de tipo carga-carga (CC), carga-longitudinal (CL), longitudinal-longitudinal (LL) y dos tipos de términos transversales (T y T'). Los términos de tipo carga están asociados a la componente 0 de las corrientes implicadas en el proceso, mientras que los de tipo longitudinal se refieren a la componente 3 de las mismas que, a su vez, se corresponde con la componente longitudinal del momento transferido. Por su parte, los términos transversales se relacionan con las componentes transversales del momento transferido, es decir, las componentes 1 y 2 de las corrientes.

Recuérdese que la contracción $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$ puede descomponerse en suma de una parte simétrica y una antisimétrica: $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^A$, donde $W_{\alpha\beta}^S = W_{\alpha\beta}^{VV} + W_{\alpha\beta}^{AA}$ y $W_{\alpha\beta}^A = W_{\alpha\beta}^{VA}$. También podemos separar las componentes de las funciones de respuesta hadrónica en sus contribuciones vector y axial:

$$\begin{aligned}
R_{CC} &= R_{CC}^{VV} + R_{CC}^{AA} \\
R_{CL} &= R_{CL}^{VV} + R_{CL}^{AA} \\
R_{LL} &= R_{LL}^{VV} + R_{LL}^{AA} \\
R_T &= R_T^{VV} + R_T^{AA} \\
R_{T'} &= R_{T'}^{VA}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Además, la parte simétrica vector de las corrientes implicadas en la contracción tensorial satisface la propiedad de conservación de la corriente: $Q^\mu J_\mu^V = 0$. Por consiguiente, las componentes temporal y longitudinal de estas corrientes están relacionadas por la energía y el momento transferidos, dado que $\omega J_0^V + q J_3^V = 0$, por ende, $J_3^V = -\frac{\omega}{q} J_0^V$. Téngase en cuenta que $W_{\alpha\beta} \propto J_\alpha^{(N)} J_\beta^{(N)\dagger}$, de manera que:

$$W_{03}^{VV} = W_{30}^{VV} = -\frac{\omega}{q} W_{00}^{VV} \longrightarrow R_{CL}^{VV} = -\frac{\omega}{q} R_{CC}^{VV}, \tag{3.75}$$

$$W_{33}^{VV} = \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 W_{00}^{VV} \longrightarrow R_{LL}^{VV} = \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 R_{CC}^{VV}. \tag{3.76}$$

Esto permite reescribir (3.73) de una forma más compacta ya que la suma de las contribuciones vector $(\alpha, \beta) = (0, 0), (0, 3), (3, 0)$ y $(3, 3)$ se agrupan en un único término:

$$\hat{V}_{CC} R_{CC}^{VV} + 2\hat{V}_{CL} R_{CL}^{VV} + \hat{V}_{LL} R_{LL}^{VV} = \hat{V}_L R_L^{VV} \equiv X_L^{VV}, \tag{3.77}$$

donde

$$R_L^{VV} = R_{CC}^{VV}, \quad (3.78)$$

$$\hat{V}_L = \hat{V}_{CC} - 2\frac{\omega}{q}\hat{V}_{CL} + \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 \hat{V}_{LL}. \quad (3.79)$$

Esto no se produce en las contribuciones axiales correspondientes, puesto que la parte simétrica axial de las corrientes no satisface la propiedad de conservación anteriormente mencionada: $Q^\mu J_\mu^A \neq 0$. En su lugar, se tiene que

$$\hat{V}_{CC}R_{CC}^{AA} + 2\hat{V}_{CL}R_{CL}^{AA} + \hat{V}_{LL}R_{LL}^{AA} \equiv X_{C/L}^{AA}. \quad (3.80)$$

Respecto a las componentes transversales, por un lado, tenemos las contribuciones simétricas correspondientes a $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ y $(2, 2)$:

$$\hat{V}_T [R_T^{VV} + R_T^{AA}] \equiv X_T, \quad (3.81)$$

mientras que las contribuciones $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ y $(2, 1)$ están asociadas al término de interferencia vector-axial y se engloban en:

$$2\hat{V}_{T'}R_{T'}^{VA} \equiv X_{T'}. \quad (3.82)$$

Finalmente, la respuesta completa queda recogida en la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}_\chi^2 = X_L^{VV} + X_{C/L}^{AA} + X_T + \chi X_{T'}. \quad (3.83)$$

Para desarrollar las funciones de respuesta hadrónica y los factores cinemáticos leptónicos, es común introducir las siguientes variables adimensionales:

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{2M_N}, \quad \kappa \equiv \frac{q}{2M_N}, \quad \tau \equiv \frac{|Q^2|}{4M_N^2} = \kappa^2 - \lambda^2, \quad (3.84)$$

donde la condición de proceso elástico, $\omega = \frac{|Q^2|}{2M_N}$, implica que $\lambda = \tau$. La definición de las funciones de respuesta hadrónica y de los factores cinemáticos leptónicos en función de las componentes del tensor hadrónico y leptónico, respectivamente, así como sus resultados se muestran a continuación.

■ **Funciones de respuesta hadrónica:**

$$R_{CC}^{VV} = W_{00}^{VV} = \frac{\kappa^2}{\tau} \left[G_E^{(1)} \right]^2, \quad (3.85)$$

$$R_{CC}^{AA} = W_{00}^{AA} = \frac{\kappa^2}{\tau} \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 \left[G_A^{\prime(1)} \right]^2, \quad (3.86)$$

$$R_{CL}^{AA} = -\frac{1}{2} (W_{03}^{AA} + W_{30}^{AA}) = -\frac{\kappa^2}{\tau} \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right) \left[G_A^{\prime(1)} \right]^2, \quad (3.87)$$

$$R_{LL}^{AA} = W_{33}^{AA} = \frac{\kappa^2}{\tau} \left[G_A^{\prime(1)} \right]^2, \quad (3.88)$$

$$R_T^{VV} = W_{11}^{VV} + W_{22}^{VV} = 2\tau \left[G_M^{(1)} \right]^2, \quad (3.89)$$

$$R_T^{AA} = W_{11}^{AA} + W_{22}^{AA} = 2\tau (1 + \tau) \left[G_A^{(1)} \right]^2, \quad (3.90)$$

$$R_{T'}^{VA} = -\frac{i}{2} (W_{12}^{VA} - W_{21}^{VA}) = -2\sqrt{\tau(1+\tau)} G_M^{(1)} G_A^{(1)}, \quad (3.91)$$

siendo

$$G_E^{(1)} = F_1^V(Q^2) - \tau F_2^V(Q^2), \quad (3.92)$$

$$G_M^{(1)} = F_1^V(Q^2) + F_2^V(Q^2), \quad (3.93)$$

$$G_A^{(1)} = G_A(Q^2), \quad (3.94)$$

$$G_A^{\prime(1)} = G_A(Q^2) - \tau G_P(Q^2). \quad (3.95)$$

En el Capítulo 4 se muestra que $G_E^{(1)}$ y $G_M^{(1)}$ se corresponden con los factores de forma de Sachs débiles eléctrico y magnético, respectivamente. Mientras G_A y G_P se corresponden con los factores de forma axial y pseudoescalar, tal y como se comentó previamente. Obsérvese que las funciones de respuesta hadrónica recogen la información relativa a la estructura interna del nucleón.

■ Factores cinemáticos leptónicos:

$$\hat{V}_{CC} = \frac{2}{v_0} \tilde{\eta}^{00} = 1 - \delta^2 \tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \quad (3.96)$$

$$\hat{V}_{CL} = \frac{2}{v_0} \tilde{\eta}^{03} = \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\delta^2}{\rho'} \tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \quad (3.97)$$

$$\hat{V}_{LL} = \frac{2}{v_0} \tilde{\eta}^{33} = \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2 + \left(1 + \frac{2\lambda}{\kappa\rho'} + \rho\delta^2\right) \delta^2 \tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}, \quad (3.98)$$

$$\hat{V}_T = \frac{1}{v_0} [\tilde{\eta}^{11} + \tilde{\eta}^{22}] = \frac{\rho}{2} + \tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - \frac{\delta^2}{\rho'} \tan^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \left[\frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\rho\rho'\delta^2}{2} \right], \quad (3.99)$$

$$\hat{V}_{T'} = \frac{i}{v_0} [\tilde{\eta}^{12} - \tilde{\eta}^{21}] = \frac{1}{\rho'} \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(1 - \frac{\lambda\rho'\delta^2}{\kappa} \right), \quad (3.100)$$

donde se han introducido las siguientes variables adimensionales adicionales:

$$\delta = \frac{m_l}{\sqrt{|Q^2|}}, \quad (3.101)$$

$$\rho = \frac{|Q^2|}{q^2} = \frac{\tau}{\kappa^2}, \quad (3.102)$$

$$\rho' = \frac{q}{\varepsilon_\nu + \varepsilon_l} = \frac{\tan \tilde{\theta}/2}{\sqrt{\rho + \tan^2 \tilde{\theta}/2}} \in (0, 1). \quad (3.103)$$

Cabe señalar que los factores cinemáticos leptónicos se expresan en términos de variables puramente cinemáticas, que describen la energía y el momento transferidos en el proceso así como la energía o masa de los leptones involucrados. Por consiguiente, estos factores están únicamente ligados a la cinemática específica del proceso y no contienen información sobre la estructura interna del nucleón.

Capítulo 4

Estructura débil del nucleón

Para describir teóricamente el proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón, es esencial conocer la forma de la corriente hadrónica, la cual depende de los factores de forma débiles del nucleón. Estos factores de forma son funciones matemáticas que se introducen para describir propiedades específicas de los nucleones y que nos proporcionan información de su estructura interna.

En este capítulo, se presentan los factores de forma débiles del nucleón, junto con distintas parametrizaciones que se utilizan en la actualidad para su descripción. En la construcción de estos factores de forma, es importante destacar las hipótesis de conservación de la corriente vector (CVC) y de la corriente axial parcialmente conservada (PCAC), pues establecen relaciones fundamentales entre los distintos factores de forma del nucleón. Para obtener información más detallada, puede consultarse [16].

4.1. Estructura vector

La parte vector de la corriente hadrónica (3.10) depende de los factores de forma débiles $F_1^V(Q^2)$ y $F_2^V(Q^2)$, que son conocidos como factores de forma isovectores. No obstante, resulta más conveniente definir las siguientes combinaciones lineales de los mismos:

$$G_E^V(Q^2) = F_1^V(Q^2) - \tau F_2^V(Q^2), \quad (4.1)$$

$$G_M^V(Q^2) = F_1^V(Q^2) + F_2^V(Q^2), \quad (4.2)$$

donde $G_E^V(Q^2)$ y $G_M^V(Q^2)$ se denominan factores de forma débiles de Sachs eléctrico y magnético, respectivamente. La ventaja de estas construcciones es que aparecen directamente en las funciones de respuesta hadrónica (véase las ecuaciones 3.92 y 3.93), y, por lo tanto, en la sección eficaz de nuestro proceso en estudio.

Recurriendo a la hipótesis CVC, podemos expresar los factores de forma de Sachs débiles en función de los electromagnéticos. Dicha hipótesis establece que la conservación de la corriente electromagnética implica la conservación de la parte vector de la corriente débil, lo que permite relacionar la estructura vector débil del nucleón con la electromagnética. En consecuencia, puede escribirse que

$$G_E^V(Q^2) = G_E^p(Q^2) - G_E^n(Q^2), \quad (4.3)$$

$$G_M^V(Q^2) = G_M^p(Q^2) - G_M^n(Q^2), \quad (4.4)$$

donde $G_E^{n,p}(Q^2)$ y $G_M^{n,p}(Q^2)$ representan los factores de forma de Sachs eléctrico y magnético, respectivamente, para el neutrón y el protón. Estos se construyen, a su vez, mediante los factores de forma de Pauli $F_1^{n,p}(Q^2)$ y Dirac $F_2^{n,p}(Q^2)$ para el neutrón y el protón, de la siguiente manera:

$$G_E^{n,p}(Q^2) = F_1^{n,p}(Q^2) - \tau F_2^{n,p}(Q^2), \quad (4.5)$$

$$G_M^{n,p}(Q^2) = F_1^{n,p}(Q^2) + F_2^{n,p}(Q^2). \quad (4.6)$$

La información experimental de los factores de forma electromagnéticos se extrae principalmente del estudio de procesos de dispersión de electrones por protones o blancos ligeros, debido a la dificultad de conseguir un blanco de neutrones aislados. Estas medidas se emplean para formular distintas parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos, que se aplican en el estudio de procesos de interacción de neutrinos con nucleones y núcleos.

Las parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos deben reproducir un comportamiento específico en los límites extremos, donde su respuesta es conocida [17]. En el límite estático, cuando $|Q^2| = 0$, los factores de forma electromagnéticos de Sachs se corresponden con la carga eléctrica y el momento magnético del nucleón:

$$G_E^p(0) = 1, \quad G_M^p(0) = \mu_p = 2.793, \quad (4.7)$$

$$G_E^n(0) = 0, \quad G_M^n(0) = \mu_n = -1.913. \quad (4.8)$$

Para valores elevados de $|Q^2|$, la Cromodinámica Cuántica perturbativa (pQCD) predice que estos factores de forma son función de Q^{-4} . Nuestra falta de conocimiento en la región intermedia se subsana mediante los datos experimentales obtenidos en procesos de dispersión de electrones, los cuales se emplean para ajustar las distintas parametrizaciones.

4.1.1. Parametrización de los factores de forma EM

A continuación, se presentan distintas parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos del nucleón que permiten caracterizar su estructura vector débil.

- **Parametrización dipolar [18]:** Esta parametrización se basa en una forma funcional dipolar, describiendo los factores de forma electromagnéticos del nucleón como

$$G_E^p(Q^2) = G_D(Q^2), \quad (4.9)$$

$$G_E^n(Q^2) = -\mu_n \tau \xi_n G_D(Q^2), \quad (4.10)$$

$$G_M^p(Q^2) = \mu_p G_D(Q^2), \quad (4.11)$$

$$G_M^n(Q^2) = \mu_n G_D(Q^2), \quad (4.12)$$

donde el factor dipolar $G_D(Q^2)$ viene dado por

$$G_D(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|Q^2|}{\Lambda^2}\right)^2}, \quad (4.13)$$

siendo $\Lambda^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$. Mientras que $\xi_n = (1 + \tau \lambda_n)^{-1}$ con $\lambda_n = 5.6$.

- **Parametrización BBBA05 [19]:** Esta parametrización también considera una única forma funcional para describir los cuatro factores de forma electromagnéticos del nucleón. En este caso, la forma funcional general viene dada por

$$G(Q^2) \propto \frac{\sum_{k=0}^2 a_k \tau^k}{1 + \sum_{k=1}^4 b_k \tau^k}, \quad (4.14)$$

donde los parámetros a_k y b_k para los distintos factores de forma de Sachs se recogen en la Tabla 4.1.

	\mathbf{a}_0	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2	\mathbf{b}_3	\mathbf{b}_4
$\mathbf{G}_E^p(Q^2)$	1	-0.0578	-	11.1	13.6	33.0	-
$\mathbf{G}_M^p(Q^2)/\mu_p$	1	0.150	-	11.1	19.6	7.54	-
$\mathbf{G}_E^n(Q^2)$	0	1.25	1.30	-9.86	305	-758	802
$\mathbf{G}_M^n(Q^2)/\mu_n$	1	1.81	-	14.1	20.7	68.7	-

Tabla 4.1: Parámetros de ajuste de la parametrización BBBA05 para los distintos factores de forma electromagnéticos de Sachs. Estos valores han sido extraídos de [19].

- Parametrizaciones basadas en los modelos VMD:** Los modelos de mesones vectoriales dominantes (VMD) consideran que, en primer orden en teoría de perturbaciones, el fotón intercambiado en la interacción electrón-nucleón se transforma en un mesón vectorial que posteriormente se acopla al nucleón. En consecuencia, las parametrizaciones basadas en los modelos VMD expresan los factores de forma electromagnéticos del nucleón en términos de los propagadores mesónicos y de los factores de forma mesón-nucleón, siendo su descripción compleja. En este trabajo se consideran dos parametrizaciones basadas en los mencionados modelos: GKeX [20] y *two-component model* [21].

Una vez establecidas las parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos de interés, se procede a analizar sus comportamientos. En la Figura 4.1, se representan los factores de forma de Sachs electromagnéticos correspondientes a las distintas parametrizaciones previamente introducidas. También se incluyen datos experimentales obtenidos en experimentos de dispersión de electrones.

Observamos que, a valores bajos de $|Q^2|$, todas las parametrizaciones muestran respuestas similares. Sin embargo, a medida que $|Q^2|$ aumenta, comienzan a surgir diferencias significativas. Las mayores desviaciones con respecto a los datos experimentales se observan para la parametrización dipolar, mostrando que la forma funcional dipolar no tiene la capacidad de reproducir los datos experimentales.

Por otro lado, la parametrización BBBA05, que también se basa en una forma funcional general, demuestra ser capaz de reproducir el comportamiento de los datos experimentales. De hecho, en todos los casos, excepto en el de $G_E^n(Q^2)$, su respuesta es bastante similar a la de las parametrizaciones basadas en los modelos VMD, que presentan una mayor complejidad descriptiva de los factores de forma. Asimismo, es importante destacar que todas las parametrizaciones difieren en el comportamiento del factor $G_E^n(Q^2)$ para valores elevados de $|Q^2|$ debido a la escasez de datos experimentales en esa región.

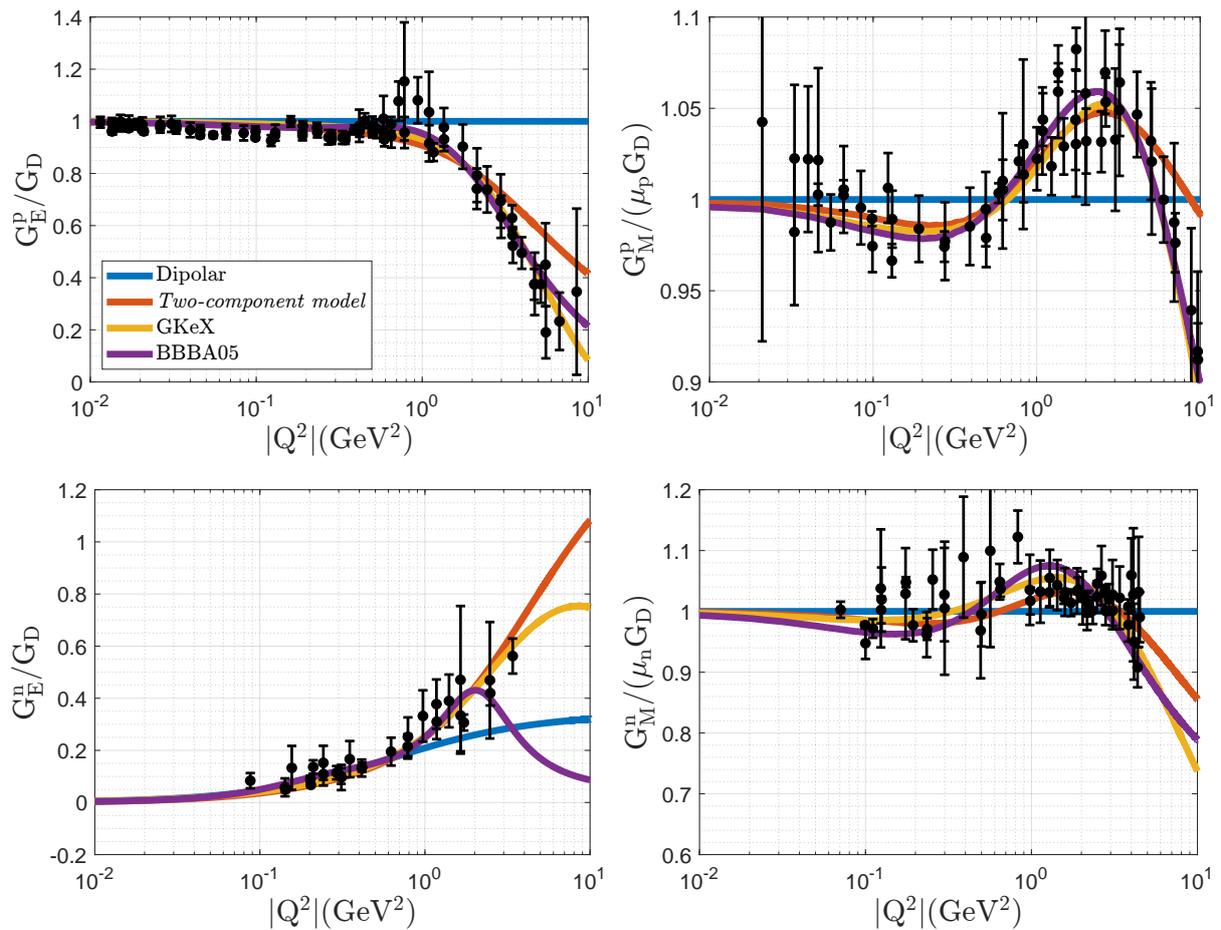


Figura 4.1: Factores de forma de Sachs electromagnéticos para las parametrizaciones indicadas en la leyenda. Los datos experimentales han sido extraídos de [17].

Para completar el estudio, en la Figura 4.2, se representan los factores de forma de Sachs débiles correspondientes a las diversas parametrizaciones consideradas. A excepción de la parametrización dipolar, que no logra reproducir los datos experimentales, se observa que las discrepancias más notables entre las restantes parametrizaciones radican en el factor eléctrico $G_E^V(Q^2)$. Mientras que las parametrizaciones basadas en los modelo VMD exhiben respuestas similares, la parametrización BBBA05 se desvía de esta tendencia

en los valores más elevados de $|Q^2|$. Esto es una consecuencia de la escasez de datos experimentales del factor $G_E^n(Q^2)$ en dicha región. En lo que respecta al factor magnético $G_M^V(Q^2)$, se aprecia una respuesta similar en las tres parametrizaciones. Sin embargo, las diferencias entre ellas comienzan a ser notables a valores más bajos de $|Q^2|$, siendo más significativas entre los modelos VMD en comparación con el caso anterior.

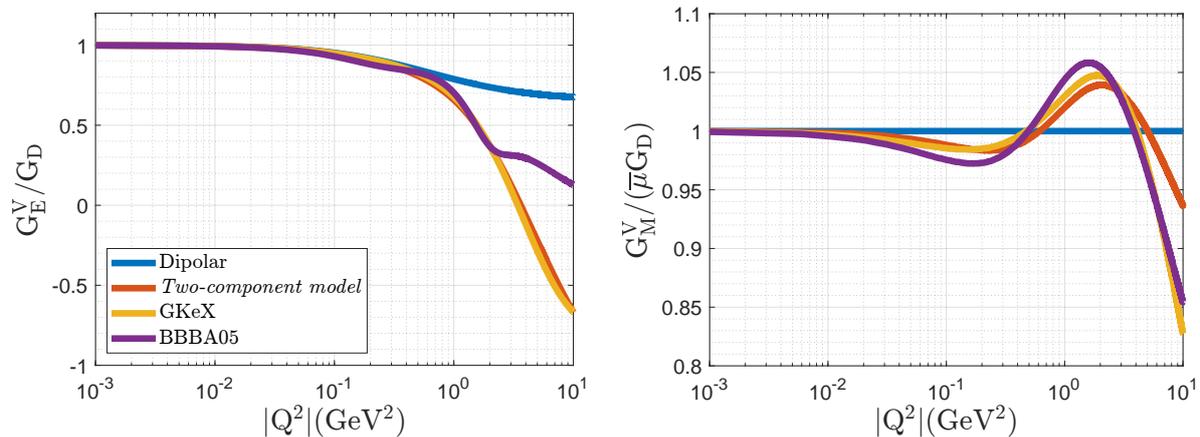


Figura 4.2: Factores de forma de Sachs débiles para las parametrizaciones indicadas en la leyenda, donde $\bar{\mu} = \mu_p - \mu_n$.

4.2. Estructura axial

La parte axial de la corriente hadrónica (3.10) depende de los factores de forma axial $G_A(Q^2)$ y pseudoescalar $G_P(Q^2)$. Estos factores de forma, que caracterizan la estructura axial del nucleón, se estudian fundamentalmente mediante experimentos de dispersión de neutrinos con nucleones y núcleos.

Recurriendo a la hipótesis PCAC, podemos expresar el factor de forma pseudoescalar $G_P(Q^2)$ en función del axial $G_A(Q^2)$ mediante la relación de Goldberger-Treiman [16]:

$$G_P(Q^2) = \frac{2M_N^2}{m_\pi^2 + |Q^2|} G_A(Q^2), \quad (4.15)$$

donde m_π es la masa del pión cargado. En consecuencia, la estructura axial del nucleón se describe en términos del factor de forma axial, el cual se ajusta mediante distintas parametrizaciones con el objetivo de reproducir las mediciones obtenidas en experimentos de dispersión de neutrinos. Estas parametrizaciones deben reproducir un cierto comportamiento en los límites extremos. En el límite estático, cuando $|Q^2| = 0$, su valor

se obtiene de los datos experimentales de decaimiento β del neutrón, lo que resulta en $G_A(0) = 1.2754 \pm 0.0013$ [22]. Mientras que, para valores muy elevados de $|Q^2|$, la pQCD establece que el factor de forma axial se comporta como una función inversamente proporcional a Q^4 [23].

4.2.1. Parametrización del factor de forma axial

En esta sección, se introducen distintas parametrizaciones del factor de forma axial del nucleón que permiten caracterizar su estructura axial débil.

- **Parametrización dipolar:** Esta parametrización describe el factor de forma axial mediante una forma funcional dipolar de la siguiente manera:

$$G_A(Q^2) = \frac{G_A(0)}{\left(1 + \frac{|Q^2|}{M_A^2}\right)^2}, \quad (4.16)$$

donde la masa axial $M_A = (1.03 \pm 0.02)$ GeV. Este valor constituye un promedio mundial obtenido a través del ajuste de numerosos datos experimentales, fundamentalmente de estudios realizados en cámaras de burbuja [24].

- **Parametrización z-expansion:** Esta parametrización establece que el factor de forma axial viene dado por una serie convergente

$$G_A(Q^2) = - \sum_{k=0}^{k_{max}} a_k z(Q^2)^k, \quad (4.17)$$

donde los coeficientes a_k son números adimensionales que contienen la información de la estructura del nucleón. Mientras la variable $z(Q^2)^k$ se define como

$$z(Q^2) = \frac{\sqrt{t_{cut} + |Q^2|} - \sqrt{t_{cut} + t_0}}{\sqrt{t_{cut} + |Q^2|} + \sqrt{t_{cut} + t_0}}, \quad (4.18)$$

siendo $t_{cut} = 9m_\pi^2$ y t_0 un número arbitrario que es elegido por conveniencia y que satisface que $-\infty < t_0 < t_{cut}$.

Para esta parametrización, se consideran dos conjuntos de parámetros de ajuste, detallados en la Tabla 4.2. El primer conjunto de parámetros se obtuvo mediante el ajuste de mediciones de dispersión de neutrinos en deuterio realizadas en cámaras

de burbuja en las décadas de 1970 y 1980. En este caso, se tuvieron en cuenta correcciones nucleares debido a que el neutrón y el protón en el deuterio están ligados, aunque muy débilmente. Para ajustar el segundo conjunto de parámetros, se emplearon mediciones recientes de dispersión de antineutrinos en hidrógeno. Los datos experimentales utilizados en ambos ajustes se presentarán en el Capítulo 6.

En ambos casos, se utilizó la parametrización BBBA05 para los factores de forma electromagnéticos. Por lo tanto, cuando se utilice esta parametrización del factor de forma axial, se empleará la mencionada parametrización para los factores de forma electromagnéticos, a menos que se indique lo contrario.

	t_0 (GeV ²)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
² H	≈ -0.28	-0.759	2.30	-0.6	-3.8	2.3	2.16	-0.896	-1.58	0.823
¹ H	-0.75	-0.50	1.50	-1.2	-0.1	0.2	0.46	-0.40	0.15	-0.044

Tabla 4.2: Parámetros de ajuste de la parametrización *z-expansion* para el factor de forma axial mediante el ajuste con mediciones de dispersión de neutrinos en deuterio (²H) y de antineutrinos en hidrógeno (¹H). Los valores han sido extraídos de [23] y [25], respectivamente.

- **Parametrización *two-component model***[21]: Esta parametrización extiende la aplicación de los modelos VMD al factor de forma axial, que se describe como

$$G_A(Q^2) = G_A(0)g(Q^2) \left[1 - \alpha + \alpha \frac{m_A^2}{m_A^2 + |Q^2|} \right], \quad (4.19)$$

donde el factor

$$g(Q^2) = \frac{1}{(1 + \gamma|Q^2|)^2}, \quad (4.20)$$

con $\gamma = 0.54$, $m_A = 1.230$ GeV y $\alpha = 1.01$. En este caso, para el ajuste de los parámetros, se utilizó la parametrización *two-component model* para los factores de forma electromagnéticos.

Introducidas las parametrizaciones de interés del factor de forma axial, se procede a estudiar sus comportamientos. En la Figura 4.3a, se muestra el factor de forma axial correspondiente a las parametrizaciones anteriormente mencionadas. Se observa que, para valores bajos de $|Q^2|$, todas las parametrizaciones muestran el mismo comportamiento. No obstante, a medida que aumenta el valor de $|Q^2|$, comienzan a aparecer diferencias notables. Con el propósito de apreciar mejor las discrepancias entre las distintas parametrizaciones, se representan las respuestas de cada una dividida por la respuesta dipolar. Esto nos permite notar que la parametrización *z-expansion* (^1H) exhibe un comportamiento significativamente diferente al resto. Dicha parametrización es la más reciente y la única que se ha ajustado empleando medidas de dispersión *elástica* de neutrinos.

Para completar el estudio, en la Figura 4.3b, se representa el factor de forma pseudoescalar con las distintas parametrizaciones consideradas, así como el cociente entre las respuestas de cada una de ellas y la parametrización dipolar. Se observa que la disminución a cero del factor de forma pseudoescalar es más rápida que la del axial. Asimismo, se puede apreciar que los comportamientos de los cocientes entre las distintas respuestas y la dipolar son consistentes con los observados en el factor de forma axial, ya que ambos factores de forma están directamente relacionados por la hipótesis PCAC.

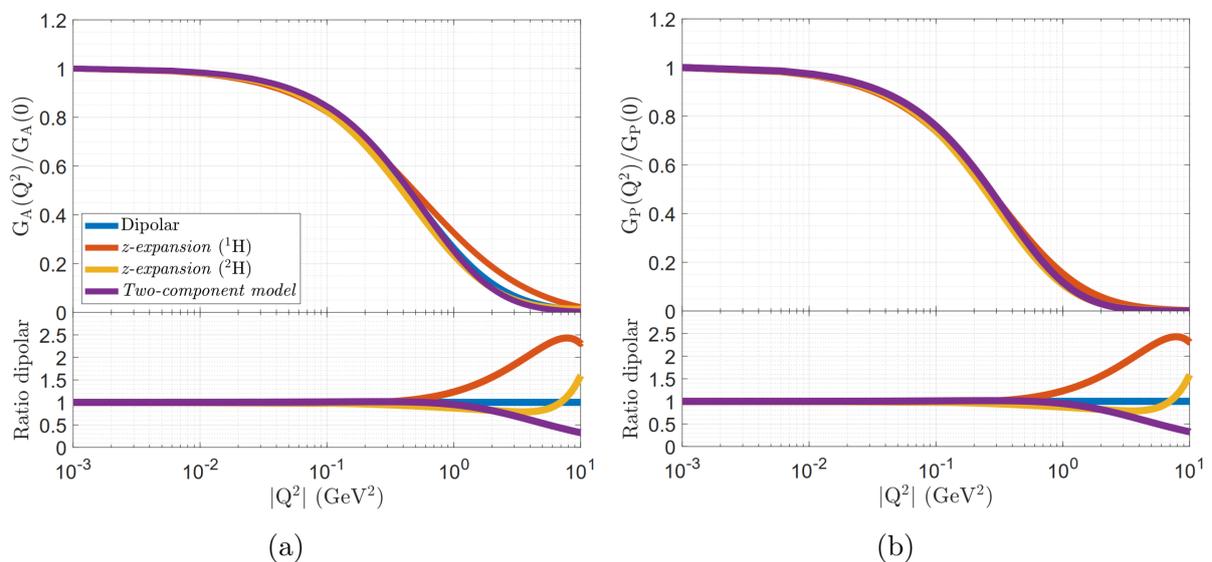


Figura 4.3: Factores de forma axial (a) y pseudoescalar (b) para las parametrizaciones indicadas en la leyenda.

Capítulo 5

Análisis del proceso

Este capítulo se dedica al estudio de varios aspectos del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón, utilizando como punto de partida la sección eficaz diferencial simple previamente obtenida:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\chi} = \sigma_0 \mathcal{F}_{\chi}^2 = \sigma_0 [X_L^{VV} + X_{C/L}^{AA} + X_T + \chi X_{T'}]. \quad (5.1)$$

Analizaremos la cinemática del proceso, la contribución de las distintas componentes en la sección eficaz y las diferencias entre los casos de neutrino y antineutrino. En este análisis, consideraremos el sabor muónico para el neutrino, debido a que es el proceso típicamente estudiado en los experimentos actuales. Además, en todas las representaciones que presentaremos en este capítulo, utilizaremos las parametrizaciones GKeX y dipolar para los factores de forma electromagnéticos y axial, respectivamente.

5.1. Cinemática

Anteriormente, se ha mencionado que la cinemática del proceso está completamente descrita por tres variables cinemáticas que están relacionadas por la ley de conservación de la energía y el momento. De esta manera, al fijar dos de ellas, la tercera queda unívocamente determinada. En este análisis, vamos a fijar la energía del neutrino incidente y a representar la sección eficaz (5.1) en función de distintas variables cinemáticas.

Los valores de la energía del neutrino incidente considerados se encuentran en torno a 1 GeV, lo que incluye la energía promedio del flujo de neutrinos en experimentos actuales, como T2K. Además, este rango de energías coincide con el régimen de operación del

proceso cuasielástico, el cual será objeto de estudio en capítulos posteriores.

Las variables cinemáticas que vamos a considerar son: el cuadri-momento transferido $|Q^2|$, el ángulo de dispersión θ_μ , la energía ω y el momento q transferidos. En la Figura 5.1, se representa la sección eficaz simple (5.1) en función de las variables cinemáticas anteriormente mencionadas, para distintos valores de la energía del neutrino incidente. En cada caso, el rango de valores de las distintas variables en el que la sección eficaz está definida viene determinado por las propiedades de conservación de energía y momento en el proceso.

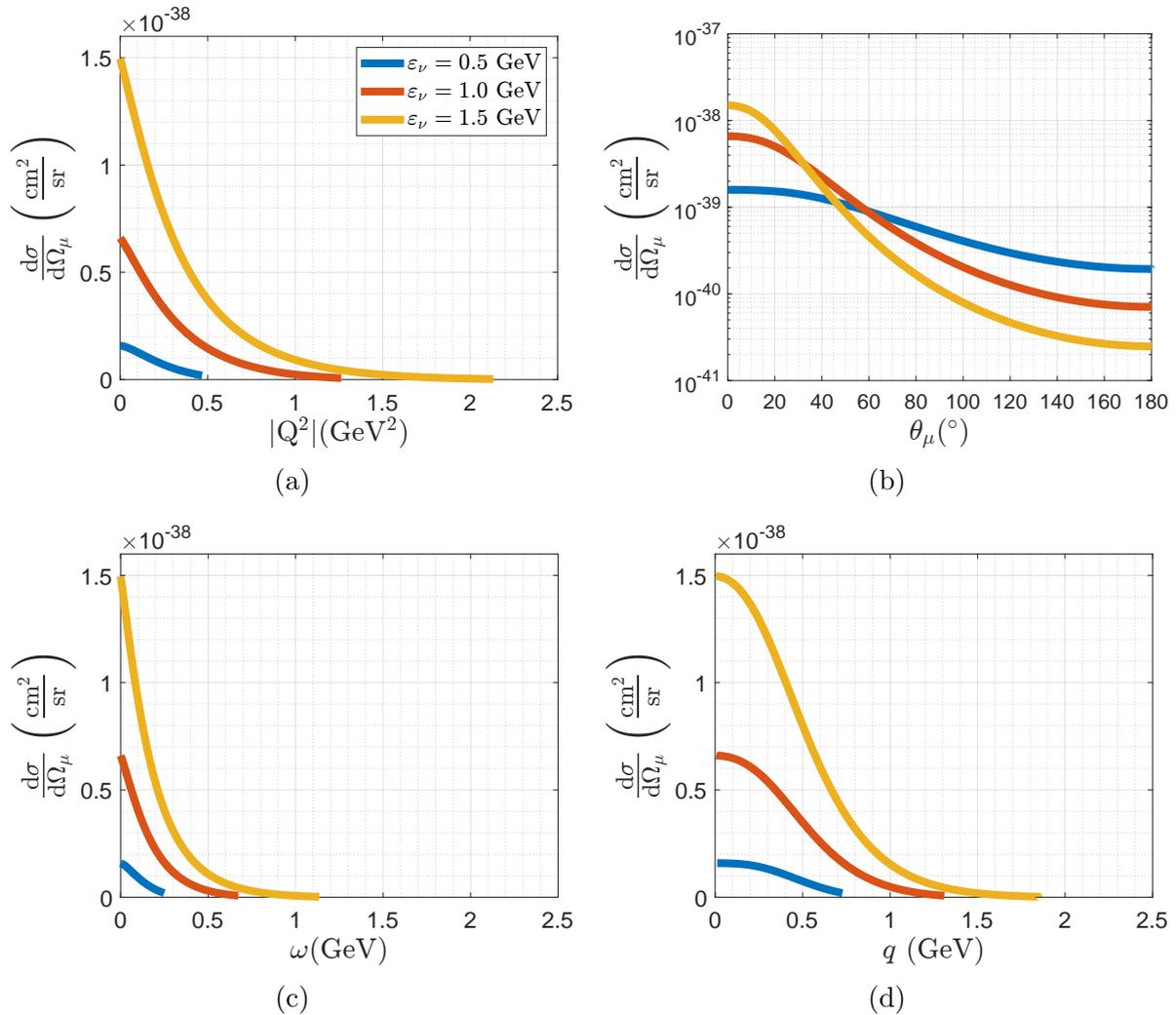


Figura 5.1: Sección eficaz diferencial elástica frente a $|Q^2|$ (a), θ_μ (b), ω (c) y q (d). Se consideran distintos valores para la energía del neutrino incidente ε_ν .

En la Figura 5.1a, se representa la sección eficaz en función de $|Q^2|$. Se observa que, a medida que aumenta la energía del neutrino incidente, el rango de valores accesibles para $|Q^2|$ se amplía. Esta tendencia es lógica, ya que a mayor energía del neutrino incidente,

hay más energía disponible para transferir al nucleón con el que interacciona. Además, se aprecia que la sección eficaz disminuye a medida que $|Q^2|$ aumenta. Este decrecimiento es más pronunciado a medida que la energía del neutrino incidente se incrementa, lo que sugiere que la transferencia de valores bajos de $|Q^2|$ es más probable en el proceso.

En tales casos, el leptón saliente apenas modifica su trayectoria respecto a la del neutrino incidente, es decir, el ángulo de dispersión θ_μ es pequeño. Esto concuerda con lo que se muestra en la Figura 5.1b, donde se representa la sección eficaz en función de θ_μ . Se puede notar que la sección eficaz disminuye a medida que el ángulo θ_μ se incrementa. Además, esta disminución es más acentuada a medida que la energía del neutrino incidente crece, lo que coincide con la tendencia observada en la Figura 5.1a. Por lo tanto, a medida que la energía del neutrino incidente aumenta, es menos probable que ocurra una dispersión hacia valores elevados del ángulo θ_μ , lo que está asociado a una transferencia de valores altos de $|Q^2|$.

Asimismo, recuérdese que $|Q^2| = |\vec{q}|^2 - \omega^2 > 0$. Por lo tanto, valores bajos de $|Q^2|$ corresponden con valores pequeños y/o similares de q y ω . Sin embargo, es importante tener en cuenta la condición de régimen elástico, que establece que $\omega = \frac{|Q^2|}{2M_N}$. Esto implica que q y ω tienen valores pequeños cuando $|Q^2|$ toma valores bajos. Es decir, la cinemática más probable es aquella en la que tanto q como ω tienen valores pequeños. Esto se refleja en las Figuras 5.1d y 5.1c, donde se representa la sección eficaz en función de q y ω , respectivamente.

5.2. Asimetría neutrino-antineutrino

La diferencia entre los casos neutrino y antineutrino radica en el cambio de signo asociado a la parte axial de la corriente leptónica (3.4). Este cambio es una consecuencia directa de la quiralidad bien definida que presentan los leptones y antileptones en procesos débiles, y se manifiesta en un cambio de signo en el término $X_{T'}$ de la sección eficaz (5.1).

En la Figura 5.2, se muestra la contribución de las distintas componentes presentes en la sección eficaz (5.1) en el caso neutrino. El propósito de esta representación es analizar la contribución de cada una de estas componentes a la sección eficaz completa.

Se observa que la componente X_L^{VV} solo es relevante para valores pequeños de $|Q^2|$ o, equivalentemente, para ángulos θ_l pequeños, como se mencionó anteriormente. Además,

cabe destacar que las componentes más significativas son las transversales, es decir, X_T y $X_{T'}$. En particular, X_T disminuye a medida que el valor de $|Q^2|$ aumenta. Esta disminución se compensa con un aumento de $X_{T'}$ en los valores más bajos de $|Q^2|$. En última instancia, ambas componentes disminuyen hasta converger, proporcionando una respuesta similar para los valores más altos de $|Q^2|$. Finalmente, la componente $X_{C/L}^{AA}$ presenta un aporte mínimo a la sección eficaz. Es importante tener en cuenta que este término está directamente relacionado con $G_A^{(1)}$, el cual se reduce a:

$$G_A^{(1)} = \left(1 - \frac{|Q^2|}{m_\pi^2 + |Q^2|}\right) G_A(Q^2) \approx \frac{m_\pi^2}{|Q^2|} G_A(Q^2), \quad (5.2)$$

para la cinemática que estamos considerando, ya que $|Q^2| \gg m_\pi^2$. Por ese motivo, este término tiene una contribución prácticamente insignificante.

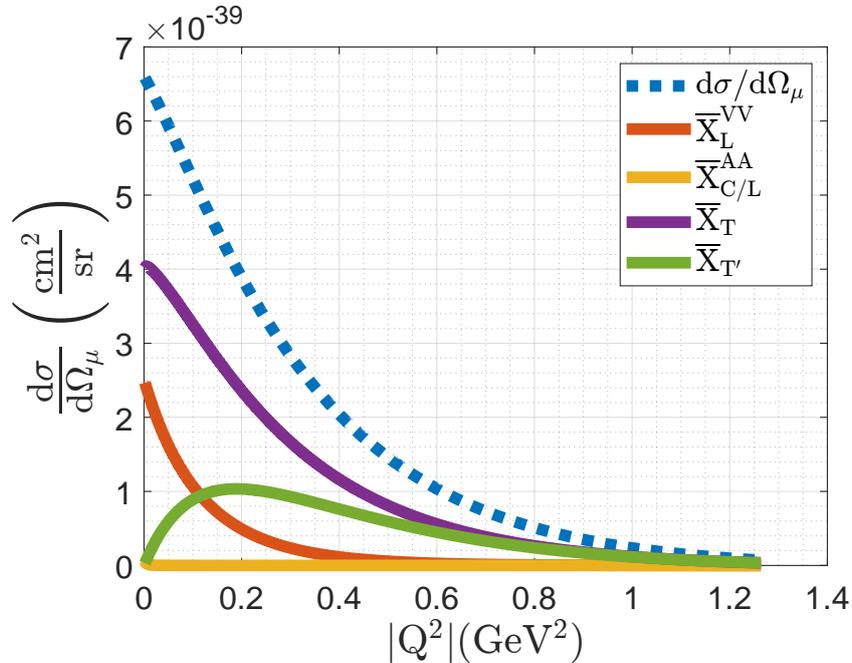


Figura 5.2: Sección eficaz diferencial elástica y la contribución de sus componentes que están definidas como $\bar{X}_K = \sigma_0 X_K$. Se ha considerado $\varepsilon_\nu = 1$ GeV.

En la Figura 5.3, se presenta la sección eficaz (5.1) para los casos neutrino y antineutrino. Como se mencionó previamente, la diferencia fundamental entre ambos casos radica en un cambio de signo en el término $X_{T'}$, cuya respuesta se muestra en la Figura 5.2. Esto resulta en que la sección eficaz para neutrinos siempre es mayor que la correspondiente a antineutrinos por una cantidad de $2\sigma_0 X_{T'}$.

Es interesante notar que $X_{T'} \propto G_A(Q^2)$ y que $G_A(Q^2)$ se anula para valores elevados de $|Q^2|$, como se aprecia en la Figura 4.3a. Esto implica que la sección eficaz para neutrinos tiende a acercarse a la de antineutrinos a medida que $|Q^2|$ aumenta. En el límite de valores muy altos de $|Q^2|$, ambas secciones eficaces serían iguales.

No obstante, para alcanzar valores elevados de $|Q^2|$, es necesario que la energía del neutrino incidente sea significativamente alta. Asimismo, es importante tener en cuenta que a medida que esta energía aumenta, otros mecanismos de reacción comienzan a cobrar relevancia. Por ejemplo, las resonancias nucleónicas, la producción de piones y la dispersión profundamente inelástica desempeñan un papel más significativo en esa región energética. Por lo tanto, no podemos afirmar la existencia de una simetría real entre las respuestas de neutrinos y antineutrinos, ya que estamos considerando solo uno de los múltiples procesos que pueden tener lugar.

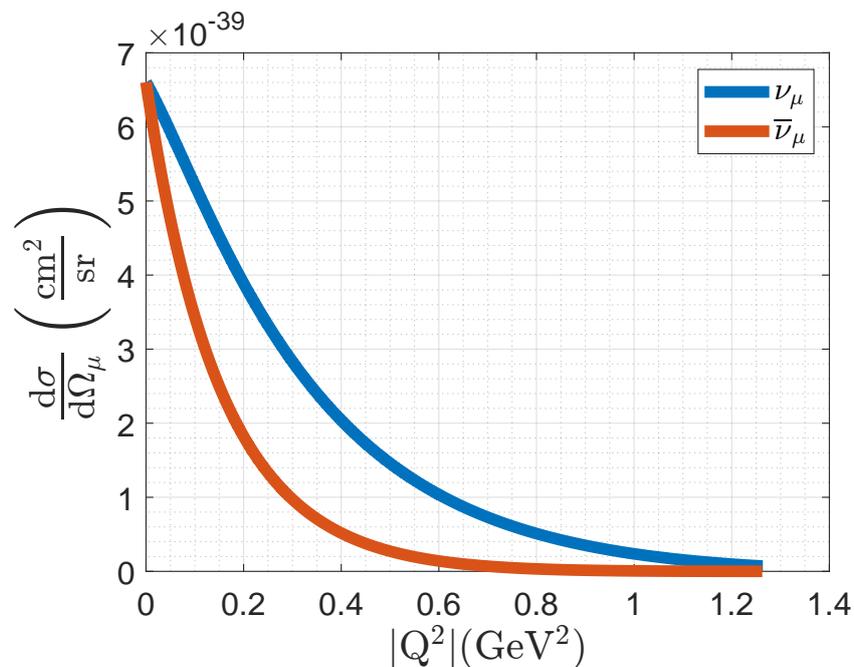


Figura 5.3: Sección eficaz diferencial elástica para los casos neutrino y antineutrino. Se ha considerado $\varepsilon_\nu = 1$ GeV.

Capítulo 6

Comparación con datos experimentales

En este capítulo, utilizaremos la sección eficaz elástica calculada para tratar de reproducir datos experimentales. Nuestra descripción es aplicable tanto a los procesos de dispersión de neutrinos con nucleones libres como a aquellos en los que los nucleones forman parte de núcleos muy ligeros, donde los efectos de ligadura entre nucleones son menos notorios. En esta última situación, suponemos que el neutrino interactúa con un único nucleón, mientras que los restantes nucleones actúan como meros espectadores.

Los datos experimentales que consideraremos provienen de mediciones realizadas en cámaras de burbuja por diversos laboratorios durante las décadas de 1970 y 1980, así como de mediciones publicadas por el laboratorio Fermilab este mismo año. Estas últimas son especialmente relevantes, ya que se ha empleado un método innovador para medir la dispersión elástica de antineutrinos en protones.

6.1. Cámaras de burbuja

Durante las décadas de 1970 y 1980, se realizaron las primeras medidas de procesos de dispersión de neutrinos mediados por corrientes cargadas en blancos ligeros, empleando cámaras de burbuja. Los datos experimentales más destacados provienen de experimentos llevados a cabo en el Laboratorio Nacional Argonne (ANL, Chicago), el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL, Nueva York) y el Centro Europeo de Investigación Nuclear (CERN, Ginebra) en el marco del experimento Gargamelle (GGM).

Las mediciones se corresponden con secciones eficaces totales, las cuales se obtienen mediante la integración de la sección eficaz simple (5.1) en el ángulo sólido $d\Omega_l$. En cuanto a los blancos empleados por estos experimentos, se incluyen tanto núcleos ligeros como moléculas.

En la Figura 6.1, se presentan los resultados de dispersión de neutrinos en deuterio (^2H) y en distintas moléculas (CF_3Br y C_3H_8), junto con la sección eficaz total elástica. Se observa que el mejor acuerdo con la predicción teórica se obtiene para los datos de dispersión en deuterio (^2H), lo cual es coherente, dado que el deuterio es un sistema protón-neutrón muy débilmente ligado. En contraste, las moléculas consideradas incluyen núcleos más pesados, donde los efectos nucleares tienen un impacto más significativo, lo que resulta en un peor acuerdo.

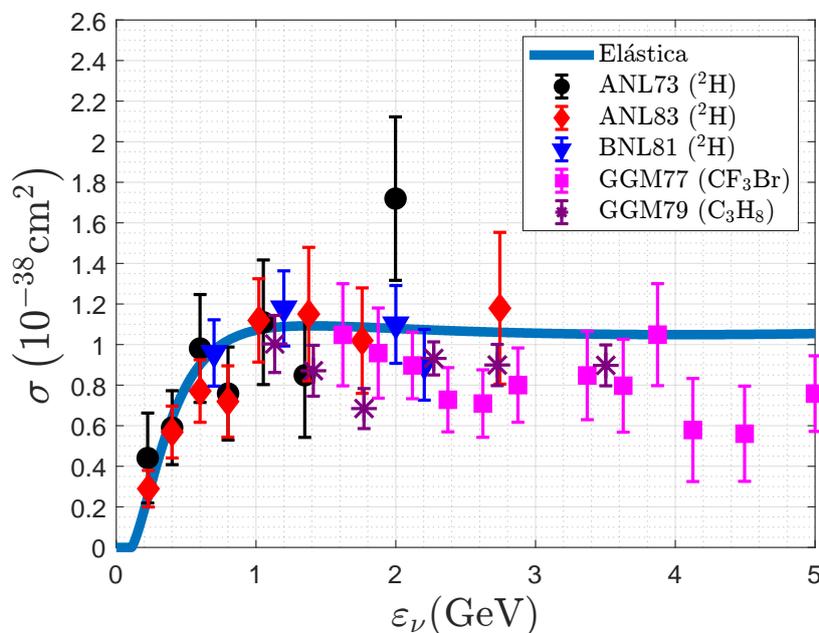


Figura 6.1: Sección eficaz total elástica para neutrinos comparada con distintos datos experimentales. Estos últimos han sido extraídos de los experimentos ANL73 [26], ANL83 [27], BNL81 [28], GGM77 [29] y GGM79 [30].

Adicionalmente, en la Figura 6.2, se presentan los datos de dispersión de antineutrinos en hidrógeno (^1H) y en diversas moléculas, como CF_3Br y C_3H_8 , junto con la correspondiente sección eficaz elástica. En este caso, se dispone de una medida de dispersión en nucleones libres, específicamente en hidrógeno, aunque con una estadística muy limitada, ya que solo se registraron 13 eventos. No obstante, este dato concuerda completamente con la predicción teórica. En contraposición, en la dispersión en moléculas, una vez más, se hacen evidentes los efectos nucleares que dificultan alcanzar un acuerdo satisfactorio.

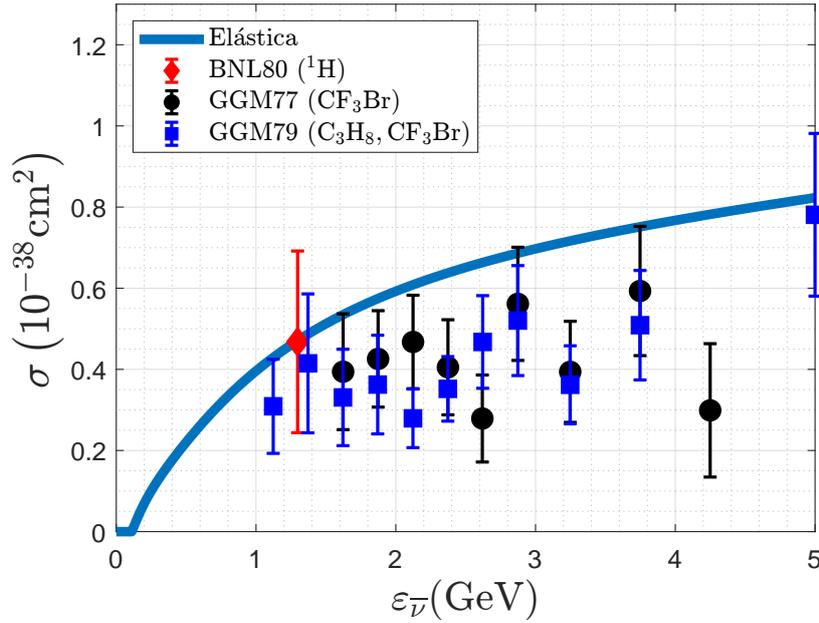


Figura 6.2: Sección eficaz total elástica para antineutrinos comparada con distintos datos experimentales. Estos últimos han sido extraídos de los experimentos BNL80 [31], GGM77 [29] y GGM79 [32].

6.2. Fermilab

A principios de este año, Fermilab publicó las primeras medidas experimentales con suficiente estadística de dispersión elástica de antineutrinos muónicos en protones [25]. Para identificar el proceso mediado por corrientes cargadas, es esencial la detección tanto del muón μ^+ como del neutrón n que se generan en dicho proceso (véase la Figura 6.3). La innovación de este experimento radica en la detección del neutrón saliente mediante los productos que se originan cuando interacciona con la materia.

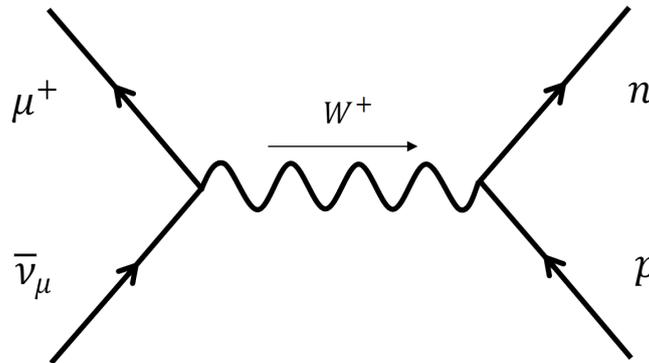


Figura 6.3: Diagrama de Feynman del proceso de dispersión elástica antineutrino-protón en primer orden en teoría de perturbaciones.

Sin embargo, la detección individual de un muón μ^+ y un neutrón n no asegura necesariamente que provengan de un proceso elástico. Existen otros procesos, como puede ser la dispersión cuasielástica, que tienen esas mismas partículas presentes tras la interacción. Cabe destacar que los detectores actuales están compuestos por núcleos de distinta naturaleza en proporción variable, de manera que el método utilizado por Fermilab lo que trata es de determinar si el núcleo blanco, en un evento dado, es hidrógeno.

La identificación del proceso se basa en el hecho de que la dispersión elástica depende exclusivamente de dos variables cinemáticas independientes. En consecuencia, si se conocen dos de estas variables, como la energía y el ángulo de dispersión del muón saliente, la cinemática de las restantes partículas implicadas en el proceso queda completamente determinada. En particular, se obtiene información sobre la energía y la dirección de movimiento del neutrón saliente. De esta manera, al comparar las cinemáticas del muón μ^+ y del neutrón n detectados, es factible determinar si el evento observado es coherente con un proceso elástico o no.

Respecto al dispositivo experimental utilizado por el experimento de Fermilab, el flujo de antineutrinos muónicos empleado provenía de la línea de haces de neutrinos NuMI de Fermilab, con una energía promedio de 5.4 GeV. Mientras que la región activa del detector MINERvA [33], compuesta principalmente por ^{12}C (92.2%) e ^1H (7.6%), fue utilizada como blanco. Cuando tenía lugar el proceso elástico, el neutrón saliente interactuaba con los núcleos presentes en la misma región activa de MINERvA, mientras que el muón era detectado en el detector cercano del experimento MINOS, ubicado inmediatamente después de MINERvA.

El neutrón saliente, podía interactuar elásticamente con el hidrógeno ($n + ^1\text{H} \rightarrow n + p$) o inelásticamente con el carbono ($n + ^{12}\text{C} \rightarrow n + p + ^{11}\text{B}$). En ambos procesos, se producen protones p con una energía que permite ser detectados. Reconstruyendo la cinemática de estos procesos hacia atrás, se determina la cinemática del neutrón ⁽¹⁾.

La configuración del dispositivo experimental solo permite la detección de muones con energías en el rango de $1.5 \text{ GeV} < \varepsilon_\mu < 20 \text{ GeV}$ y ángulos de dispersión $\theta_\mu < 20^\circ$ con respecto a la dirección del neutrino incidente. Asimismo, es importante tener en cuenta que los eventos debidos a la interacción de los antineutrinos con el ^{12}C son mayoritarios, lo que constituye un fondo significativo.

(1) Para reconstruir la cinemática del proceso $n + ^{12}\text{C} \rightarrow n + p + ^{11}\text{B}$, es necesario considerar un modelo nuclear que describa la dinámica de los nucleones dentro de los núcleos.

Las mediciones publicadas por Fermilab corresponden a la sección eficaz simple $\frac{d\sigma}{dQ^2}$, integrada con respecto al flujo de antineutrinos. Para derivar esta sección eficaz, recurrimos a la sección eficaz $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_l}$, definida en la ecuación (3.66), debido a que ambas están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta_l} \left| \frac{d\cos\theta_l}{dQ^2} \right| \quad (6.1)$$

siendo

$$\frac{dQ^2}{d\cos\theta_l} = 2\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu \left[1 + \frac{\varepsilon_\mu}{M_N} (1 - \cos\theta_l) \right]. \quad (6.2)$$

La expresión previa se deriva a través de las relaciones de conservación de energía y momento en el proceso. Por último, la sección eficaz integrada con respecto al flujo de antineutrinos viene dada por

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{\Phi_{total}} \int \frac{d\sigma}{dQ^2} \Big|_{\varepsilon_{\bar{\nu}}} \Phi(\varepsilon_{\bar{\nu}}) d\varepsilon_{\bar{\nu}}, \quad (6.3)$$

donde $\Phi(\varepsilon_{\bar{\nu}})$ es el flujo de antineutrinos en función de la energía $\varepsilon_{\bar{\nu}}$, $\Phi_{total} = \int \Phi(\varepsilon_{\bar{\nu}}) d\varepsilon_{\bar{\nu}}$ es el flujo incidente total y $\frac{d\sigma}{dQ^2} \Big|_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}$ es la sección eficaz diferencial simple para una energía dada $\varepsilon_{\bar{\nu}}$, cuyo comportamiento puede verse en la Figura 6.4, donde se representa dicha sección eficaz para varias energías $\varepsilon_{\bar{\nu}}$ respecto al ángulo de dispersión θ_μ .

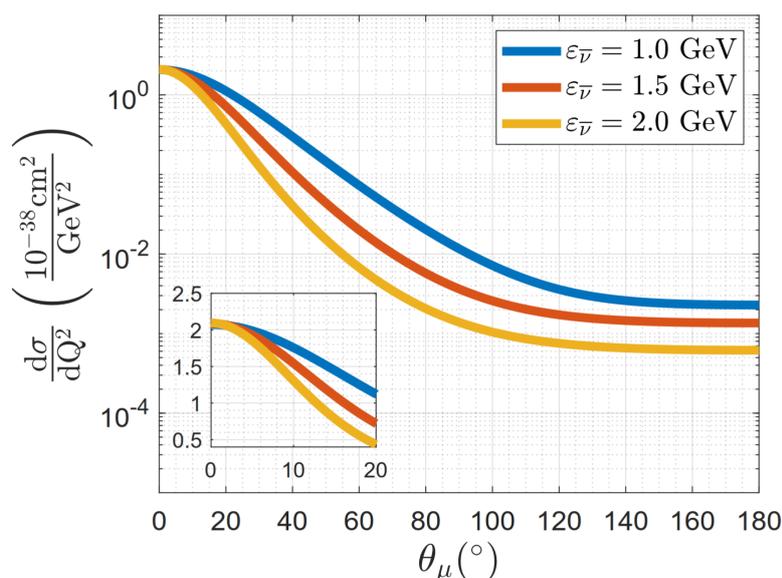


Figura 6.4: Sección eficaz simple del proceso de dispersión elástica antineutrino-protón para distintas energías del antineutrino incidente $\varepsilon_{\bar{\nu}}$.

El comportamiento observado concuerda con lo expuesto en el Capítulo 5. La sección eficaz disminuye a medida que se consideran valores más elevados de θ_μ , o, lo que es equivalente, valores más altos de $|Q^2|$. Esta disminución se acentúa a medida que la energía $\varepsilon_{\bar{\nu}}$ aumenta. Además, la representación incluye un aumento que abarca los ángulos de dispersión entre 0 y 20 grados. Los eventos con estos ángulos de dispersión son los que realmente contribuyen a las medidas de Fermilab, como se mencionó anteriormente. Por lo tanto, el experimento se enfoca en la detección de los eventos elásticos que presentan la cinemática más probable.

En la Figura 6.5, se muestran las mediciones experimentales publicadas por Fermilab, junto con varios resultados teóricos obtenidos mediante diferentes combinaciones de las parametrizaciones de los factores de forma, detalladas en la Tabla 6.1. Dado que estos datos experimentales representan la primera medición de dispersión de antineutrinos en protones con un número estadísticamente significativo de eventos, se llevará a cabo una evaluación de la capacidad de las diferentes parametrizaciones de los factores de forma del nucleón para reproducir estas mediciones.

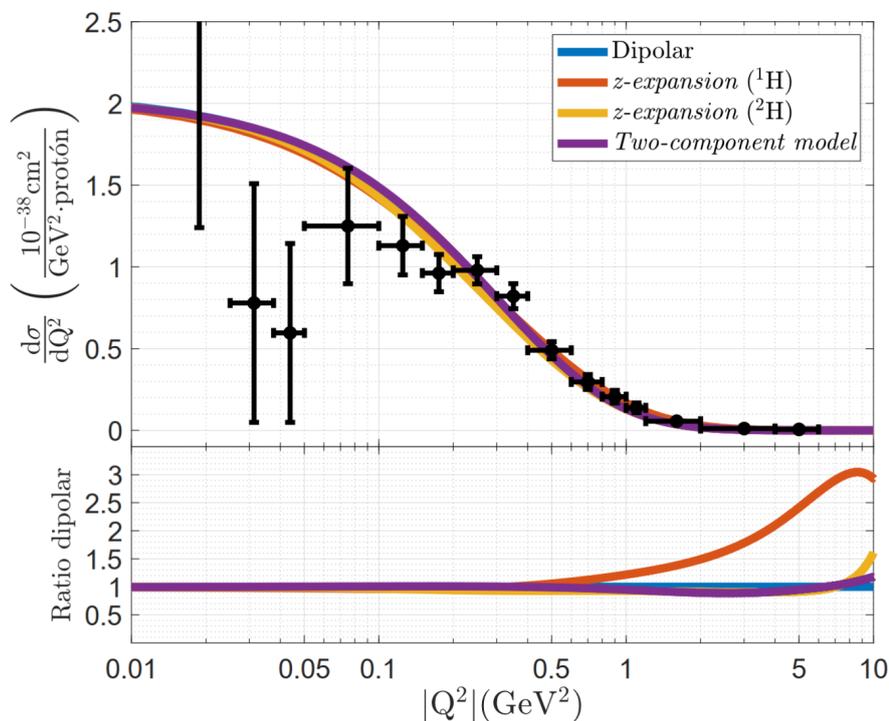


Figura 6.5: Sección eficaz diferencial simple del proceso de dispersión elástica antineutrino-protón. Se compara los datos experimentales de Fermilab, los cuales han sido extraídos de [25], con la predicción teórica empleando distintas combinaciones de las parametrizaciones de los factores de forma del nucleón, indicadas en la Tabla 6.1. En la leyenda se especifica la parametrización del factor de forma axial.

Parametrizaciones	
Factor de forma axial	Factores de forma electromagnéticos
Dipolar	GKeX
<i>z-expansion</i> (¹ H)	BBBA05
<i>z-expansion</i> (² H)	BBBA05
<i>Two-component model</i>	<i>Two-component model</i>

Tabla 6.1: Combinaciones de las parametrizaciones de los factores de forma axial y electromagnéticos empleados para reproducir las medidas de Fermilab.

A simple vista, se aprecia una similitud en la respuesta de todas las combinaciones de las parametrizaciones consideradas. Sin embargo, para un análisis más profundo, hemos calculado el cociente entre las distintas respuestas y la respuesta dipolar. Esto nos permite constatar que, para valores bajos de $|Q^2|$, todas las parametrizaciones muestran un comportamiento similar. No obstante, a medida que consideramos valores más altos de $|Q^2|$, comienzan a surgir diferencias. Las discrepancias más destacadas se observan al emplear la parametrización *z-expansion* (¹H), que precisamente se obtuvo mediante el ajuste de estos resultados experimentales.

Para cuantificar el acuerdo entre los datos experimentales, representados en un histograma, y la predicción teórica, se introduce el acuerdo general χ^2 que viene dado por

$$\chi^2 = \sum_{ij}^N \left(\frac{d\sigma^{exp}}{dX_i} - \frac{d\sigma^{teo}}{dX_i} \right) V_{ij}^{-1} \left(\frac{d\sigma^{teo}}{dX_j} - \frac{d\sigma^{exp}}{dX_j} \right) \quad (6.4)$$

donde N representa el número de intervalos en los cuales se ha dividido la sección eficaz, $\frac{d\sigma^{exp}}{dX_i}$ y $\frac{d\sigma^{teo}}{dX_i}$ son la sección eficaz experimental y teórica, respectivamente, correspondiente al i -ésimo intervalo, mientras que V es la matriz de covarianza que describe las correlaciones entre las incertidumbres asociadas a los datos experimentales.

Para determinar si existen diferencias significativas como resultado de elegir una u otra parametrización de los factores de forma del nucleón, se han considerado todas las posibles combinaciones de las parametrizaciones introducidas en el Capítulo 4. La Tabla 6.2 muestra los valores de χ^2 correspondientes a todas estas combinaciones. Se destaca que las parametrizaciones que mejor concuerdan con los datos experimentales son la *z-expansion* (1H) para el factor de forma axial y BBBA05 para los factores de forma electromagnéticos.

Además, al mantener constante la parametrización *z-expansion* (1H), se observan pocas diferencias al considerar distintas parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos. Sin embargo, al fijar la parametrización BBBA05 para los factores de forma electromagnéticos, se aprecian variaciones más notables al elegir una u otra parametrización del factor de forma axial. Esto sugiere que, en la descripción del proceso de dispersión neutrino-nucleón, las mayores fuentes de incertidumbre en la estructura hadrónica están asociadas al factor de forma axial.

	Dipolar	<i>z-expansion</i> (1H)	<i>z-expansion</i> (2H)	<i>Two-component model</i>
Galster	12.19	9.65	13.91	12.87
BBBA05	11.65	9.64	13.40	12.17
GKeX	11.94	9.70	13.64	12.53
<i>Two-component model</i>	12.21	9.84	14.02	12.81

Tabla 6.2: El acuerdo general χ^2 entre los datos experimentales de Fermilab y la predicción teórica para distintas combinaciones de las parametrizaciones de los factores de forma axial (columnas) y electromagnéticos (filas).

Parte III

Dispersión cuasielástica neutrino-núcleo

Capítulo 7

Introducción

Una vez que hemos analizado la dispersión elástica de neutrinos por nucleones, procedemos a extender nuestro estudio a los procesos de interacción de neutrinos con núcleos. En este contexto, es importante destacar que los nucleones ya no se encuentran libres, sino que están ligados dentro del núcleo e interactúan entre sí. La dispersión de leptones por núcleos permite obtener información sobre la estructura nuclear.

A diferencia de la dispersión elástica, en este caso, el cuadri-momento transferido $|Q^2|$ y la energía transferida ω , no están relacionados. Esta falta de correlación permite el acceso a diferentes regiones cinemáticas, donde los mecanismos de reacción pueden variar significativamente, dando lugar a una respuesta nuclear diversa. En la Figura 7.1, se muestra una respuesta nuclear típica en función de la energía transferida ω , para q fijo.

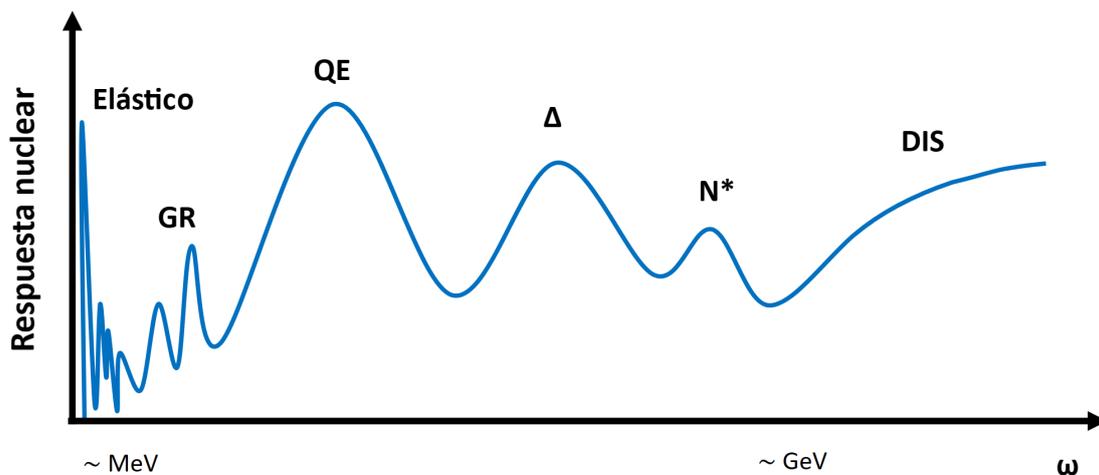


Figura 7.1: Respuesta nuclear en función de la energía transferida (ω), para un valor constante del momento transferido (q).

Se ilustra el comportamiento de la respuesta nuclear en distintas regiones, que incluyen la dispersión elástica, las resonancias gigantes (GR), la dispersión cuasielástica (QE), la producción de la resonancia Δ y otras resonancias nucleónicas (N^*) y la dispersión profundamente inelástica (DIS). Es importante destacar que en los procesos en los cuales se producen resonancias, se acaban generando piones.

La respuesta nuclear débil obtenida en experimentos de dispersión de neutrinos por núcleos sigue una tendencia similar a la mostrada en la Figura 7.1, aunque presenta diferencias notables en comparación con la obtenida mediante la dispersión de electrones. Por un lado, las secciones eficaces débiles son considerablemente más pequeñas, varios órdenes de magnitud inferiores, que las secciones eficaces electromagnéticas. Esto plantea un desafío considerable en su medición. Por otro lado, debido a la falta de conocimiento preciso de la energía del neutrino interaccionante, no es posible fijar con precisión el momento transferido q , como se logra en experimentos de dispersión de electrones. Esta limitación propicia que la separación de la respuesta nuclear débil en las diversas regiones cinemáticas sea considerablemente más compleja.

En este trabajo, nos centraremos en el régimen cuasielástico (QE), que comprende los procesos en los que el neutrino es dispersado elásticamente por los nucleones ligados dentro del núcleo. De todos los procesos posibles, el más probable es aquel en el que se extrae un único nucleón ligado del núcleo. Dicho proceso será objeto de nuestro estudio.

Existen dos diferencias fundamentales entre los procesos elásticos y cuasielásticos. En el caso cuasielástico, la energía transferida al nucleón debe ser lo suficientemente alta como para liberarlo de su ligadura en el núcleo, una restricción que no aparece en el caso elástico. Además, en el proceso cuasielástico, los nucleones no están en reposo, es más se encuentran fuera de la capa de masas (off-shell). Esto explica por qué se denomina *cuasielástico*, ya que, a pesar de que la energía y el momento se conservan en el proceso global, no se mantienen constantes durante la interacción a nivel local. Como resultado, la respuesta cuasielástica presenta una cierta anchura, cuyo máximo se encuentra cuando la energía transferida ω es aproximadamente igual a $\frac{|Q^2|}{2M_N}$.

El flujo de neutrinos utilizado en experimentos actuales, como T2K y MINERvA, se caracteriza por un espectro energético que se concentra principalmente en el rango de 0.1 a 10 GeV. En esta región energética, los mecanismos principales de reacción son la dispersión cuasielástica, la excitación de resonancias nucleónicas y la producción de

piones. No obstante, se deben considerar efectos nucleares adicionales que pueden tener un impacto notable, como las corrientes de intercambio de mesones (MEC), las correlaciones entre nucleones y las interacciones de estados finales (FSI).

Para simular estas posibles interacciones y los efectos adicionales que puedan contribuir, se realizan simulaciones Monte Carlo. En ciertos casos, estas simulaciones emplean el modelo del Gas de Fermi Relativista (RFG) para describir la dinámica nuclear de los nucleones en el núcleo, principalmente en aquellas situaciones donde los cálculos con modelos más sofisticados son demasiado complejos. Por esta razón, en este trabajo emplearemos el modelo RFG para describir el proceso cuasielástico en el cual un solo nucleón es liberado del núcleo.

Capítulo 8

Formalismo general

En este capítulo, se aborda el análisis teórico del proceso de dispersión cuasielástica neutrino-núcleo. Se presenta y desarrolla el marco teórico fundamental para su descripción. El núcleo blanco se describirá mediante el modelo del Gas de Fermi Relativista (RFG). Esto nos permitirá definir la corriente nuclear asociada al vértice hadrónico de manera precisa y calcular la correspondiente sección eficaz.

Nos centraremos en la dispersión cuasielástica mediada por corrientes cargadas (CCQE) donde solo un nucleón es liberado del núcleo, los procesos para neutrinos y antineutrinos se ilustran a continuación:

$$\begin{aligned}\nu_l + \frac{A}{Z}\mathcal{A} &\rightarrow l^- + p + \frac{A-1}{Z}\mathcal{B}, \\ \bar{\nu}_l + \frac{A}{Z}\mathcal{A} &\rightarrow l^+ + n + \frac{A-1}{Z-1}\mathcal{C}.\end{aligned}$$

donde l denota el sabor leptónico. Consideraremos la Aproximación de Impulso (IA) de manera que el neutrino solo interacciona con uno de los nucleones del núcleo el cual es liberado, mientras que los restantes nucleones permanecen como observadores pasivos ⁽¹⁾.

8.1. Modelo nuclear

En los procesos de dispersión neutrino-núcleo, se pone de manifiesto la estructura interna del núcleo, lo que requiere la utilización de un modelo nuclear para su descripción. Dada la energía de los neutrinos que estamos considerando (0.1-10 GeV), resulta

(1) La Aproximación de Impulso es adecuada para describir interacciones de neutrinos de energías intermedias/altas con núcleos ligeros. Para obtener más información, se puede consultar [34].

fundamental adoptar una descripción relativista tanto para la cinemática como para la dinámica de los nucleones.

Existen varios modelos nucleares relativistas, el más básico de ellos es el modelo del Gas de Fermi Relativista (RFG), que representa el núcleo como un conjunto de nucleones no interactuantes. Sin embargo, existen otros modelos más sofisticados que ofrecen una descripción más realista de la dinámica nuclear, como los modelos de campo medio. En estos últimos, se considera que cada nucleón se mueve en respuesta a un campo de interacción promedio creado por los otros nucleones presentes en el núcleo.

Modelo del Gas de Fermi Relativista (RFG)

El modelo RFG describe el núcleo como un sistema de nucleones que no interactúan entre sí. En este caso, los nucleones están dentro de la capa de masas (on-shell). Asimismo, dado que los nucleones son fermiones, siguen la estadística de Fermi-Dirac y están sujetos al principio de exclusión de Pauli.

La distribución de momentos de los nucleones en el núcleo viene dada por una función escalón, cuyo máximo se corresponden con el momento de Fermi k_F (ver Figura 8.1). Por consiguiente, los nucleones llenan los niveles de energía de menor a mayor, obedeciendo rigurosamente el principio de exclusión de Pauli, que impide que dos fermiones ocupen el mismo estado cuántico. El efecto asociado al principio de exclusión de Pauli se conoce como *Pauli Blocking* (PB) y afecta únicamente a la región de bajo momento transferido, concretamente cuando $q \leq 2k_F$.

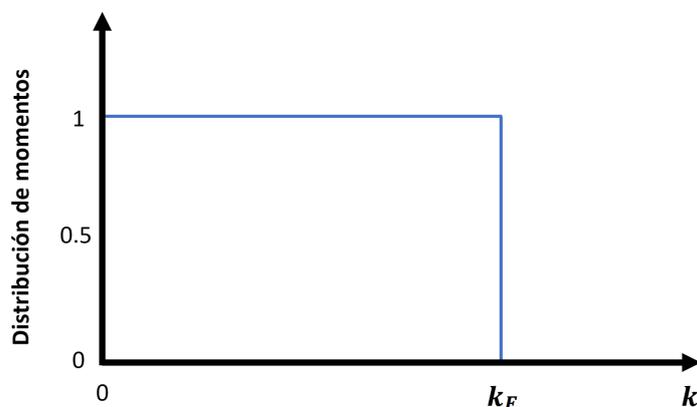


Figura 8.1: Distribución de momentos de los nucleones en el núcleo en el marco del modelo RFG.

El modelo incluye dos parámetros efectivos, los cuales se ajustan con datos experimentales: el momento de Fermi (k_F) y la energía de ligadura (E_{shift}). Por un lado, el momento de Fermi k_F se corresponde con el momento máximo de la distribución de momentos de los nucleones en el núcleo. Esto significa que los nucleones ligados en el núcleo tienen un momento $k \leq k_F$, mientras que el nucleón libre tiene un momento $k > k_F$. Por lo tanto, establece una transición entre los estados nucleares ocupados y los estados del continuo.

Por otro lado, la energía de ligadura E_{shift} se corresponde con la energía promedio de separación de un nucleón, que es la energía necesaria para separar a un nucleón del núcleo. Se introduce modificando la energía transferida como sigue: $\omega \rightarrow \omega' = \omega - E_{shift}$. Esta modificación impone que la energía transferida debe ser como mínimo igual a la energía de ligadura para que el proceso tenga lugar. Ambos parámetros dependen del núcleo considerado dado que la densidad y el número de nucleones se modifica, un ajuste de los mismos para diversos núcleos se muestra en la Tabla 8.1.

Núcleo	k_F (MeV/c)	E_{shift} (MeV)
Litio	165	15
Carbono	228	20
Magnesio	230	25
Aluminio	236	18
Calcio	241	28
Hierro	241	23
Niquel	245	30
Estaño	245	28
Oro	245	25
Plomo	248	31

Tabla 8.1: Momento de Fermi k_F y energía de ligadura E_{shift} para distintos núcleos [35].

A pesar de su simplicidad, el modelo RFG posibilita una descripción totalmente relativista del proceso. Además, es el único modelo nuclear que permite obtener la sección eficaz de manera analítica, sin necesidad de aplicar aproximaciones adicionales.

8.2. Cinemática el proceso

Consideremos la dispersión cuasielástica neutrino-nucleón mediada por corrientes cargadas. La descripción del proceso, en primer orden en teoría de perturbaciones, está representada en la Figura 8.2. Obsérvese que estamos considerando la Aproximación de Impulso, lo que significa que el neutrino interactúa únicamente con un nucleón del núcleo. En este sentido, el diagrama de Feynman guarda una gran similitud con el diagrama del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón mostrado en la Figura 8.2, ya que ambos constan de dos vértices, uno leptónico y otro hadrónico, entre los cuales se produce un intercambio de carga debido a la transferencia del bosón vectorial cargado W^\pm , que actúa como mediador de la interacción débil.

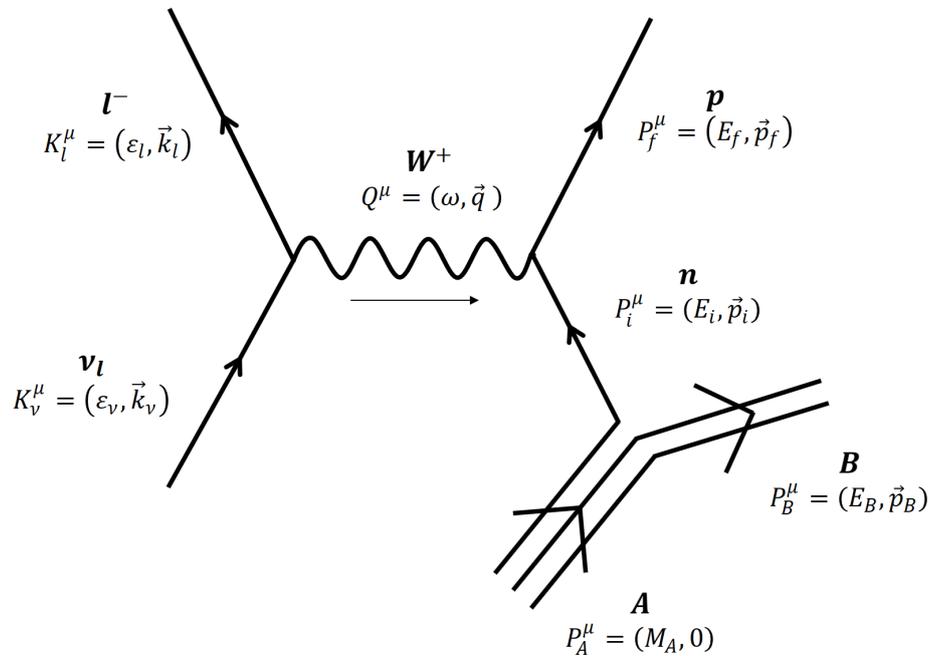


Figura 8.2: Diagrama de Feynman del proceso de dispersión cuasielástica neutrino-nucleón mediado por corrientes cargadas, en la Aproximación de Impulso. Se indica el cuadrimomento de las partículas implicadas en el proceso.

En el sistema laboratorio, el núcleo blanco se encuentra en reposo. Por su parte, el nucleón ligado que interactúa con el neutrino presenta un cuadrimomento inicial $P_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i)$ con $|\vec{p}_i| \leq k_F$, mientras que en el estado final, una vez ha sido liberado, está caracterizado por un cuadrimomento $P_f^\mu = (E_f, \vec{p}_f)$ siendo $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i + \vec{q}| > k_F$. En ambos casos, el nucleón está dentro de la capa de masas (on-shell) de manera que $E_i = \sqrt{M_N^2 + |\vec{p}_i|^2}$ y $E_f = \sqrt{M_N^2 + |\vec{p}_f|^2}$.

Asimismo, hemos seleccionado el conjunto de ejes cartesianos que se muestra en la Figura 8.3. El plano de dispersión, que contiene los momentos del neutrino y del leptón saliente, está contenido en el plano XZ. Siguiendo la convención del proceso elástico, hemos fijado el eje z de tal manera que se alinee con la dirección del momento transferido. El momento del nucleón final forma un ángulo θ_N con el momento transferido. Por último, el plano de reacción, que incluye el momento transferido y el del nucleón emitido, forma un ángulo ϕ_N con el plano de dispersión.

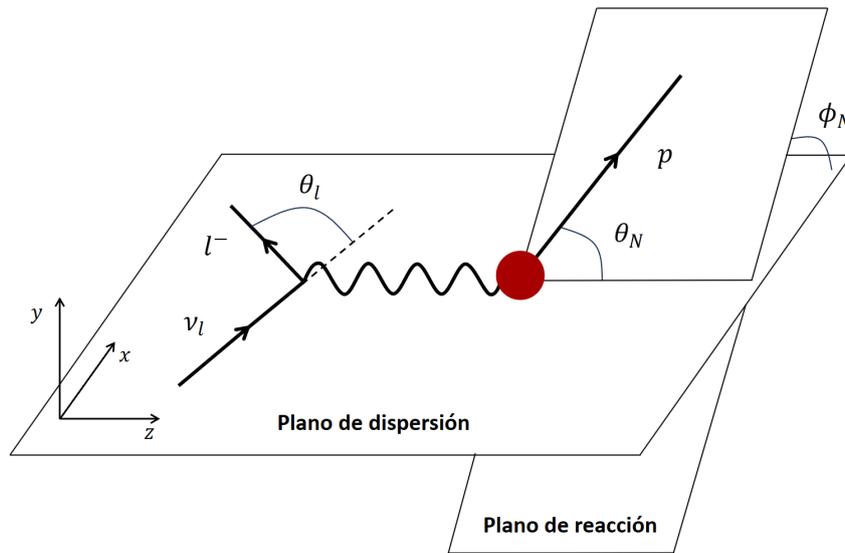


Figura 8.3: Sistema de ejes cartesianos elegido para describir la cinemática del proceso de dispersión cuasielástica neutrino-nucleón mediado por corrientes cargadas.

Las relaciones que describen la cinemática del proceso se derivan mediante la aplicación de la ley de conservación de la energía y el momento en cada uno de los vértices del diagrama de Feynman que representa el proceso. En particular, el vértice leptónico es idéntico al del proceso elástico, por lo que nos centraremos exclusivamente en el vértice hadrónico.

Vértice hadrónico

- Conservación de la energía: $E_i = E_f - \omega = M_A - E_B$
- Conservación del momento: $\vec{p}_i = \vec{p}_f - \vec{q} = -\vec{p}_B$

Obsérvese que el momento del nucleón ligado tiene la misma dirección, pero sentido opuesto que el momento del núcleo residual.

8.3. Corriente nuclear y sección eficaz

Conocida la cinemática del proceso cuasielástico neutrino-nucleón, continuamos centrando nuestro interés en la determinación de la sección eficaz. Es importante tener en cuenta que, en el modelo RFG, las funciones de onda que describen al nucleón antes y después de la interacción son soluciones libres de la ecuación de Dirac, al igual que ocurre en el proceso elástico. La determinación de la sección eficaz implica obtener el tensor nuclear $W_{\alpha\beta}$. Este tensor es más complejo que el tensor hadrónico del proceso elástico debido a que el nucleón que participa en el proceso no es libre ni está en reposo, sino que se encuentra ligado y presenta una distribución de momentos posibles.

En el modelo RFG, el tensor nuclear viene determinado integrando el tensor hadrónico del proceso elástico, respecto a la distribución de momentos posibles que puede tener el nucleón ligado en el núcleo. El resultado es como sigue:

$$W_{\alpha\beta} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 P_i \frac{2M_N^2}{E_i E_f} W_{\alpha\beta}^{s.n.}(\vec{p}_i, \vec{p}_f) \delta(E_f - E_i - \omega) \Theta(k_F - p_i) \Theta(p_f - k_F), \quad (8.1)$$

donde el volumen del sistema $V = 3\pi^2 \mathcal{N} / k_F^3$ está relacionado con el momento de Fermi (k_F) y es proporcional al número \mathcal{N} de protones o neutrones participantes en el proceso. El término $W_{\alpha\beta}^{s.n.}$ es el tensor hadrónico *single-nucleon* que viene dado por (3.43), en el cual hay que tener en cuenta la cinemática del proceso CCQE. Asimismo, el integrando incluye una función δ de Dirac que asegura la conservación de la energía en el vértice hadrónico, además de dos funciones de Heaviside que garantizan que el nucleón antes y después de la interacción tenga un momento adecuado.

Al desarrollar la integral (8.1) y agrupar sus componentes siguiendo el mismo procedimiento ilustrado en la sección 3.3, se obtienen las siguientes funciones de respuesta para el régimen cuasielástico ⁽²⁾:

$$R_K = \frac{\mathcal{N}}{2\kappa k_F} f_{RFG}(\psi) R_K^{s.n.}, \quad (8.2)$$

donde $R_K^{s.n.}$ hace referencia a las funciones de respuesta hadrónica *single-nucleon*, mientras

(2) Estos resultados contienen efectos del movimiento de los nucleones en el núcleo hasta primer orden en k_F , dado que se han despreciado términos de orden k_F^2 y superior. Esto está en acuerdo con los datos de dispersión de electrones.

que la función $f_{RFG}(\psi)$ se denomina función de *scaling*:

$$f_{RFG}(\psi) = \frac{3}{4}(1 - \psi)\Theta(1 - \psi^2). \quad (8.3)$$

La variable cinemática ψ representa la variable de *scaling* que depende de q y ω :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\xi_F}} \frac{\lambda - \tau}{\sqrt{\tau(1 + \lambda)} + \kappa\sqrt{\tau(1 + \tau)}}, \quad (8.4)$$

y que se relaciona con los siguientes parámetros adimensionales asociados a k_F :

$$\xi_F \equiv \sqrt{1 + \eta_F^2} - 1 \quad \text{siendo} \quad \eta_F \equiv \frac{k_F}{M_N}. \quad (8.5)$$

Las restantes variables cinemáticas que aparecen en (8.4) fueron introducidas en (3.84). Para más información sobre el procedimiento de cálculo, puede consultarse [36]. Estos resultados permiten obtener la sección eficaz del proceso CCQE.

- Sección eficaz diferencial doble:

$$\frac{d^2\sigma}{dE_l d\Omega_l} = \frac{|\vec{k}_l|}{\varepsilon_\nu} \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{v_0}{2} \mathcal{F}_\chi^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\sigma}{dk_l d\Omega_l} = \frac{|\vec{k}_l|^2}{\varepsilon_\nu \varepsilon_l} \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{v_0}{2} \mathcal{F}_\chi^2. \quad (8.6)$$

- Sección eficaz diferencial simple:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_l} = \sigma_0 \mathcal{F}_\chi^2, \quad (8.7)$$

donde el término \mathcal{F}_χ^2 contiene toda la información de la estructura nuclear y se expresa en término de las funciones de respuesta nucleares como sigue:

$$\mathcal{F}_\chi^2 = \hat{V}_{CC} R_{CC} + 2\hat{V}_{CL} R_{CC} + \hat{V}_{LL} R_{LL} + \hat{V}_T R_T + \chi \hat{V}_{T'} R_{T'}, \quad (8.8)$$

donde \hat{V}_K y R_K representan los factores cinemáticos leptónicos y las funciones de respuesta nucleares, respectivamente. Los términos v_0 y σ_0 están definidos en la sección 3.3.

Capítulo 9

Análisis del proceso

En este capítulo, analizamos la sección eficaz cuasielástica en el contexto del modelo RFG y evaluamos cómo los parámetros de dicho modelo influyen en esta sección eficaz. Nos centraremos en el estudio de la sección eficaz diferencial doble, ya que en el Capítulo 10 se mostrarán datos experimentales de esta naturaleza. Asimismo, verificaremos que la sección eficaz simple del proceso cuasielástico se reduce a la del proceso elástico cuando los parámetros del modelo RFG tienden a anularse.

Para este estudio, consideraremos las parametrizaciones GKeX y dipolar para los factores de forma electromagnéticos y axial, respectivamente. Asimismo, supondremos que el neutrino tiene sabor muónico y que el núcleo blanco es ^{12}C , el cual estará caracterizado por los siguientes parámetros en el modelo RFG: $k_F = 228 \text{ MeV}$ y $E_{shift} = 20 \text{ MeV}$.

9.1. Sección eficaz diferencial doble

En el régimen cuasielástico, a diferencia del elástico, no hay una relación directa entre el cuadri-momento transferido $|Q^2|$ y la energía transferida ω . Por lo tanto, la sección eficaz diferencial doble se define para una amplia distribución de valores de la energía transferida, cuyo máximo tiende a ubicarse alrededor de $\omega = \frac{|Q^2|}{2M_N}$.

La cinemática del proceso cuasielástico está caracterizada por tres variables cinemáticas independientes. Para estudiar la cinemática, nos interesa representar la sección eficaz en función del momento del muón final k_μ , dado que es una medida directa de los experimentos de dispersión de neutrinos. Representaremos resultados correspondientes a valores diversos de la energía del neutrino incidente ε_ν y del ángulo de dispersión θ_μ , con

el objetivo de analizar en detalle los efectos asociados a dichas variables.

En la Figura 9.1, se representa la sección eficaz cuasielástica (8.6) en función de k_μ para diferentes valores de la energía ε_ν , mientras se mantiene constante el ángulo θ_μ . Se puede observar que a medida que la energía ε_ν aumenta, la respuesta es cada vez más ancha. Además, la sección eficaz se desplaza hacia valores más altos de momento k_μ y su máximo disminuye a medida que se incrementa esta energía.

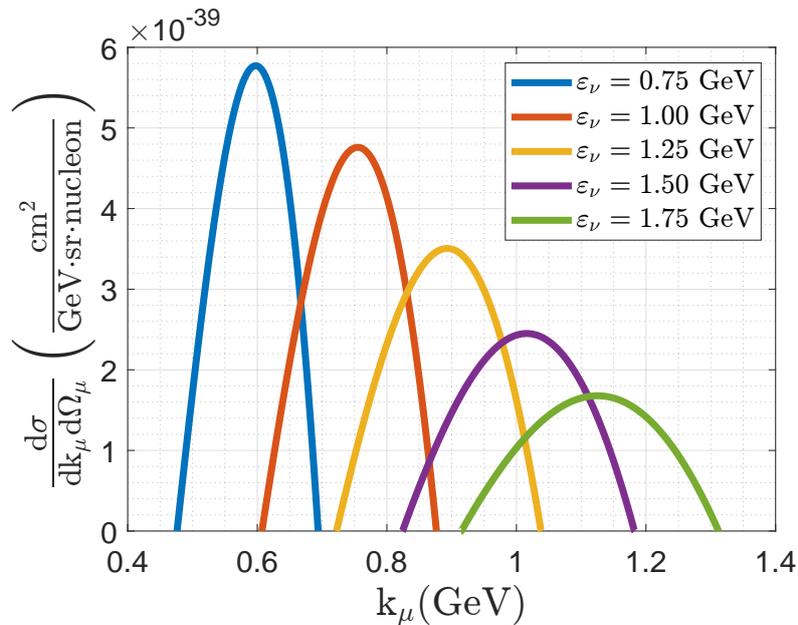


Figura 9.1: Sección eficaz diferencial doble respecto al momento del muón k_μ para el ^{12}C . Se han considerado distintos valores de la energía incidente ε_ν , mientras que se ha fijado el ángulo de dispersión $\theta_\mu = 45^\circ$.

Por otra parte, en la Figura 9.2, se representa la sección eficaz cuasielástica (8.6) en función de k_μ para distintos valores del ángulo θ_μ , manteniendo constante la energía ε_ν . En este caso, se observa que la sección eficaz se desplaza hacia valores más pequeños del momento k_μ conforme aumenta el ángulo θ_μ , apreciándose además una reducción progresiva del máximo de la sección eficaz. Esto es consistente con lo que se expuso previamente para el proceso elástico: a medida que el ángulo de dispersión aumenta, se produce una mayor transferencia de energía y, por lo tanto, el momento del muón saliente es menor. Del mismo modo, la dispersión a ángulos cada vez mayores se vuelve menos probable para una energía del neutrino incidente dada.

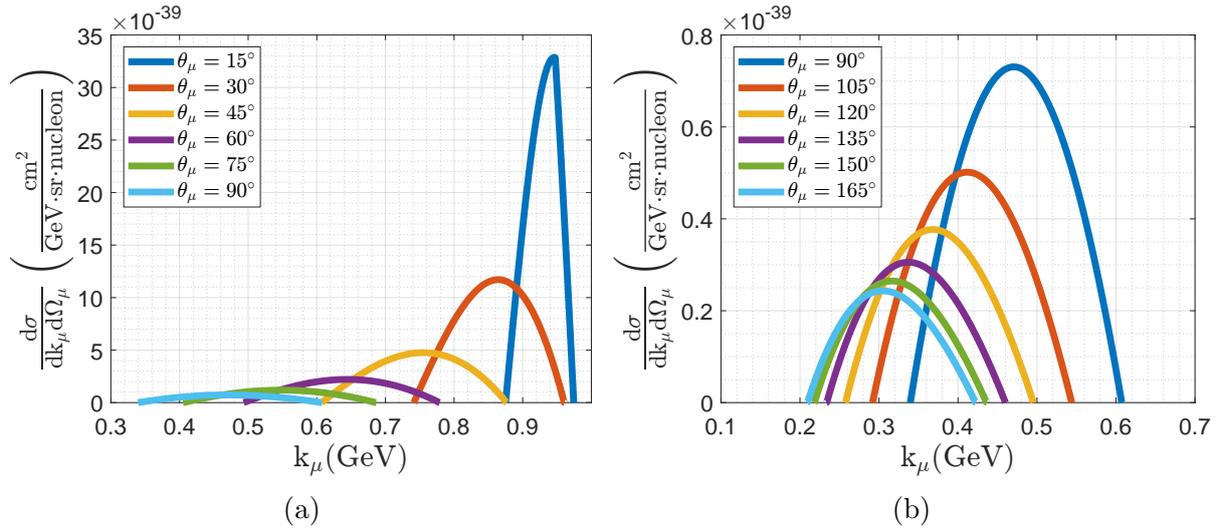


Figura 9.2: Sección eficaz diferencial doble respecto al momento del muón k_μ para el ^{12}C . Se han considerado distintos valores del ángulo de dispersión θ_μ , mientras que se mantiene constante la energía incidente $\varepsilon_\nu = 1$ GeV. En (a), se representan diversos ángulos θ_μ en el rango de 0 a 90 grados, mientras que, en (b), se ilustran ángulos en el rango de 90 a 180 grados.

9.2. Límite elástico

Los resultados obtenidos para el proceso cuasielástico deben reducirse a los del proceso elástico en el límite en el que los nucleones dejan de estar ligados. En el marco del modelo RFG, esto equivale a anular el efecto de los parámetros k_F y E_{shift} . Para comprobarlo, en la Figura 9.3, se representa la sección eficaz cuasielástica (8.7) para valores cada vez más reducidos de los parámetros del modelo RFG, junto con la sección eficaz elástica (5.1).

Se observa un incremento en la sección eficaz al eliminar el efecto de E_{shift} , mientras se mantiene constante el valor de k_F . Esto es coherente, pues hemos quitado una restricción cinemática. Recuérdese que la introducción de la energía de ligadura E_{shift} implica que el proceso no puede tener lugar a menos que $\omega \geq E_{shift}$.

Por otro lado, al reducir gradualmente el valor de k_F , se observa un marcado aumento en la sección eficaz. Téngase en cuenta que el momento de Fermi k_F determina la transición de los nucleones ligados al estado continuo, por lo que a medida que su valor disminuye, los nucleones ligados en el núcleo requerirán menos energía para alcanzar estados del continuo. En el límite $k_F \rightarrow 0$, la respuesta cuasielástica se reduce a la elástica, demostrando la equivalencia entre ambas descripciones.

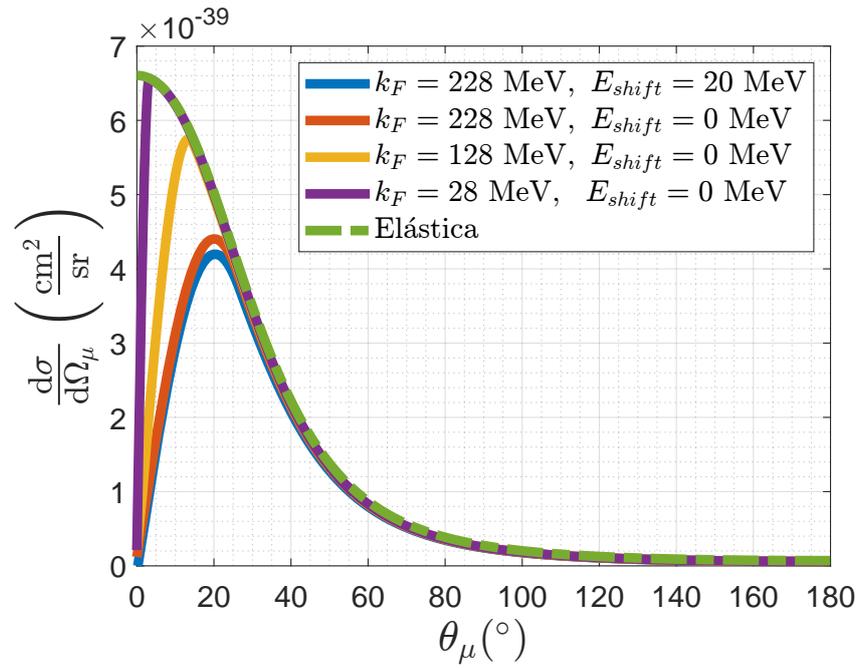


Figura 9.3: Sección eficaz diferencial simple respecto al ángulo de dispersión θ_μ . Se compara la sección eficaz de los procesos cuasielástico y elástico. El proceso cuasielástico se describe en el modelo RFG y está caracterizado por los parámetros k_F y E_{shift} , cuyos valores se van modificando. Se considera una energía del neutrino incidente $\varepsilon_\nu = 1 \text{ GeV}$.

Capítulo 10

Comparación con datos experimentales

Para finalizar, en este capítulo, comparamos nuestra predicción teórica para la sección eficaz cuasielástica con los datos obtenidos en distintos experimentos. Consideraremos de nuevo las mediciones efectuadas en las cámaras de burbuja en las décadas de 1970 y 1980, lo que nos permite evaluar el efecto del medio nuclear en la sección eficaz cuasielástica al compararla con la sección eficaz elástica. Además, analizamos mediciones recientes publicadas por T2K. Estas medidas nos proporcionan información directa sobre el impacto de las diferentes parametrizaciones de los factores de forma del nucleón en la sección eficaz cuasielástica.

10.1. Cámaras de burbuja

En la sección 6.1, se analizaron las mediciones de las cámaras de burbuja realizadas durante las décadas de 1970 y 1980. En estos experimentos, los blancos utilizados consistían principalmente en núcleos ligeros y moléculas. La sección eficaz elástica logró reproducir aproximadamente los resultados de dispersión en el caso del deuterio, pero no alcanzó un ajuste satisfactorio en los demás casos, en los que, los blancos consistían en moléculas formadas por núcleos ligeramente pesados. En esta situación, la descripción del proceso de dispersión, considerando un nucleón libre como blanco, es claramente inconsistente y, consecuentemente, incapaz de reproducir los datos experimentales.

Por el contrario, la sección eficaz del proceso cuasielástico discutido en secciones previas nos permitirá reproducir de manera más precisa los resultados observados en las cámaras de burbuja, ya que tiene en cuenta la presencia de efectos del medio nuclear. No obstante, es importante recordar que el modelo RFG constituye una representación muy simplificada del núcleo.

En la Figura 10.1, se representa la sección eficaz elástica y cuasielástica para el ^{12}C , junto con los resultados experimentales de las cámaras de burbuja para el caso de neutrinos. Los parámetros del modelo RFG empleados para el ^{12}C son $k_F = 228$ MeV y $E_{shift} = 20$ MeV, de acuerdo con la información recogida en la Tabla 8.1. Se observa que la presencia del medio nuclear produce una reducción de la sección eficaz total en comparación con el caso elástico, encontrándose en mayor acuerdo con las medidas de dispersión en moléculas. Todas estas moléculas incluyen núcleos de carbono, por ese motivo se ha considerado la dispersión cuasielástica en carbono.

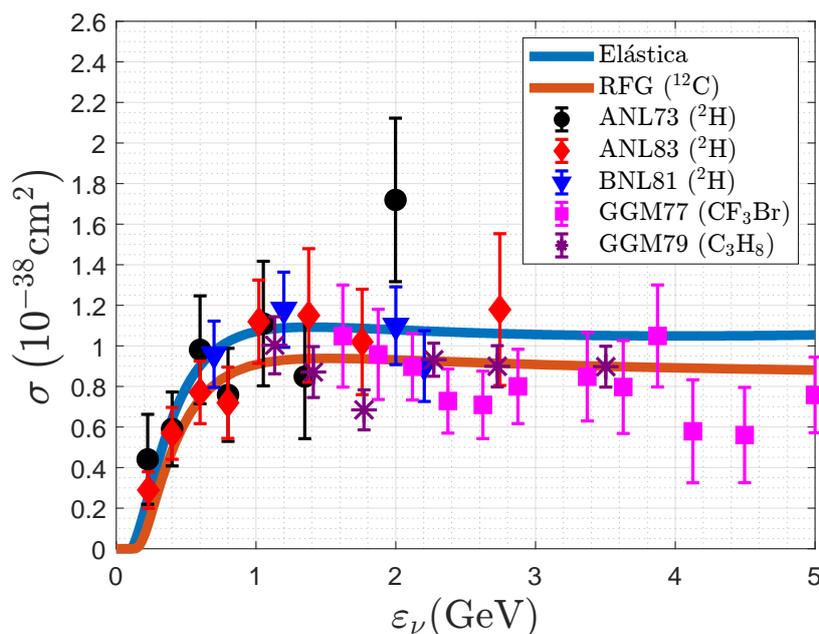


Figura 10.1: Sección eficaz total elástica y cuasielástica para el ^{12}C en el caso de neutrinos, comparada con distintos datos experimentales. Estos últimos han sido extraídos de los experimentos ANL73 [26], ANL83 [27], BNL81 [28], GGM77 [29] y GGM79 [30].

En la Figura 10.2, se representa la sección eficaz elástica y cuasielástica para el ^{12}C , junto con los resultados experimentales de las cámaras de burbuja para el caso antineutrino. En este caso, se observa nuevamente una reducción en la sección eficaz cuasielástica en comparación con la sección elástica, lo cual concuerda mejor con las medidas de dispersión en moléculas.

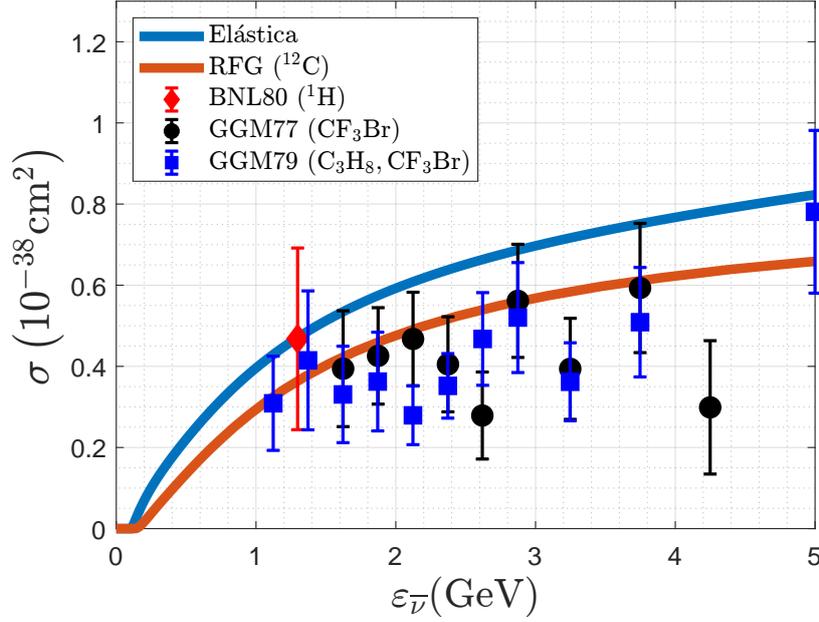


Figura 10.2: Sección eficaz total elástica y cuasielástica para ^{12}C en el caso de antineutrinos, comparada con distintos datos experimentales. Estos últimos han sido extraídos de los experimentos BNL80 [31], GGM77 [29] y GGM79 [32].

10.2. T2K

En esta sección, analizaremos dos conjuntos de medidas publicadas por la colaboración T2K que han sido realizadas en su detector cercano, ND280. El primer conjunto corresponde a medidas combinadas de dispersión de neutrinos y antineutrinos muónicos por un mismo blanco, compuesto por carbono (^{12}C) e hidrógeno (^1H) [37]. Por otro lado, el segundo conjunto comprende medidas simultáneas de dispersión de neutrinos muónicos por blancos de distinta naturaleza, concretamente carbono (^{12}C) y oxígeno (^{16}O) [38].

En ambos casos, los eventos seleccionados son aquellos en los que un muón y ningún pión son observados, los cuales se denotan como *charged-current without pions* ($\text{CC}0\pi$). Esta topología sencilla simplifica la identificación y el análisis de estos eventos, lo que contribuye a la reducción del fondo en las medidas. En consecuencia, esta técnica se emplea para investigar las oscilaciones de neutrinos, validar modelos nucleares teóricos y profundizar en el estudio de las interacciones de los neutrinos con los núcleos.

Los datos experimentales que examinaremos se corresponden con la sección eficaz diferencial doble integrada con respecto al flujo incidente de neutrinos/antineutrinos. Además, la sección eficaz está representada en función de las variables que describen la cinemática del muón saliente, como son el momento k_μ y el ángulo de dispersión θ_l .

De manera complementaria y, simplemente a efectos de comparación, también se van a mostrar los resultados teóricos del proceso de dispersión cuasielástica en el modelo SuSAv2 (*Superscaling Approach version 2*). Este modelo describe al núcleo mediante un modelo de campo medio, por lo que las funciones de onda *single-nucleon* son soluciones de la ecuación de Dirac en presencia de un potencial creado por el resto de nucleones presentes en el núcleo. En ese sentido, el propio modelo tiene en cuenta las interacciones de estados finales entre el nucleón saliente y el núcleo residual. Para más información sobre el modelo SuSAv2, se puede consultar [36, 39].

De acuerdo a lo mencionado previamente, emplearemos estas mediciones para evaluar las parametrizaciones de los factores de forma del nucleón. Con el fin de comparar los resultados entre los modelos RFG y SuSAv2, consideraremos las parametrizaciones GKeX y dipolar para los factores de forma electromagnéticos y axial, respectivamente, en ambas descripciones. Además, exclusivamente para el modelo RFG, obtendremos resultados adicionales para dos combinaciones de parametrizaciones. En ambos casos, consideraremos la parametrización BBBA05 para los factores de forma electromagnéticos, mientras que para el factor de forma axial, supondremos las parametrizaciones *z-expansion* (^1H) y *z-expansion* (^2H). Estas combinaciones son las que mejor y peor se ajustaron a los datos experimentales de dispersión antineutrino-protón publicados por Fermilab, respectivamente.

Asimismo, es importante destacar que nuestro objetivo no es reproducir los datos experimentales en su totalidad, puesto que solo estamos considerando uno de los procesos cuasielásticos que contribuyen a la sección eficaz experimental. Recuérdese que, en la respuesta nuclear, todos los procesos estaban solapados. No obstante, las situaciones cinemáticas analizadas muestran que el proceso cuasielástico es claramente dominante.

10.2.1. Mediciones combinadas de dispersión de neutrinos y antineutrinos en ^{12}C y ^1H

Estas medidas son el resultado de combinar las medidas de dispersión de neutrinos y antineutrinos realizadas en diferentes configuraciones del flujo incidente [38]. En este caso, debemos considerar no solo los procesos de dispersión cuasielástica de neutrinos y antineutrinos en el carbono, sino también los procesos de dispersión elástica de antineutrinos en el hidrógeno.

En la Figura 10.3, se muestran las medidas experimentales más representativas publicadas por la colaboración T2K, junto con las correspondientes predicciones teóricas empleando los modelos y parametrizaciones de los factores de forma del nucleón indicados previamente, para los casos neutrino y antineutrino. Asimismo, en la Figura 10.4, se muestra la asimetría $\mathcal{A} = \frac{d\sigma^\nu - d\sigma^{\bar{\nu}}}{d\sigma^\nu + d\sigma^{\bar{\nu}}}$, donde $d\sigma^\nu$ y $d\sigma^{\bar{\nu}}$ hacen referencia a la sección eficaz de neutrinos y antineutrinos, respectivamente. Esta es una magnitud importante, ya que nos permite comparar las respuestas nucleares en la dispersión de neutrinos y antineutrinos.

En la Figura 10.3, se observa que ninguna de las respuestas teóricas es capaz de reproducir los datos experimentales de dispersión de neutrinos y antineutrinos, tal y como se esperaba. En general, subestiman los datos experimentales, lo que pone de manifiesto la necesidad de incorporar otros mecanismos de reacción que contribuyen en la sección eficaz. Además, se observa que la sección eficaz para neutrinos es mayor que para antineutrinos, excepto en el intervalo $0.94 < \cos \theta_\mu < 0.98$, donde ambas presentan una magnitud similar. Nótese que la sección eficaz para antineutrinos incluye la contribución del proceso elástico en hidrógeno, una contribución que no está presente en el caso de neutrinos. En cuanto a la asimetría, se observa que, en términos generales, esta aumenta a medida que el momento k_μ crece. También es interesante señalar que la respuesta de SuSAv2 supera ligeramente a las demás en el primer intervalo de momentos k_μ .

Para evaluar la concordancia entre los datos experimentales y las predicciones teóricas, debemos calcular el acuerdo general χ^2 introducido en (6.4). Dado que las medidas de neutrinos y antineutrinos están correlacionadas, es necesario calcular el acuerdo χ^2 de manera conjunta para ambas medidas. No obstante, con el propósito de realizar comparaciones entre las distintas predicciones teóricas, también determinaremos el acuerdo χ^2 por separado para las medidas de neutrinos y antineutrinos. Debe tenerse en cuenta que al realizar este último cálculo, estamos omitiendo las correlaciones que existen entre los datos de neutrinos y antineutrinos, lo que implica que estamos eliminando información sobre el conjunto global de resultados.

En la Tabla 10.1, se presenta el valor del χ^2 obtenido en cada caso. Se observa un mejor ajuste entre las distintas respuestas teóricas en la asimetría que en los datos conjuntos de neutrinos y antineutrinos. Esto podría deberse a la manera en que se define la asimetría, ya que al ser un cociente entre secciones eficaces, es posible que algunos efectos significativos en las secciones eficaces tiendan a cancelarse, lo que conduce a un mejor ajuste

a los datos experimentales. Si analizamos el acuerdo entre neutrinos y antineutrinos por separado, observamos que este no parece verse afectado de manera significativa por la parametrización de los factores de forma. Además, la predicción teórica utilizando el modelo SuSAv2 tampoco presenta diferencias significativas en comparación con el modelo RFG.

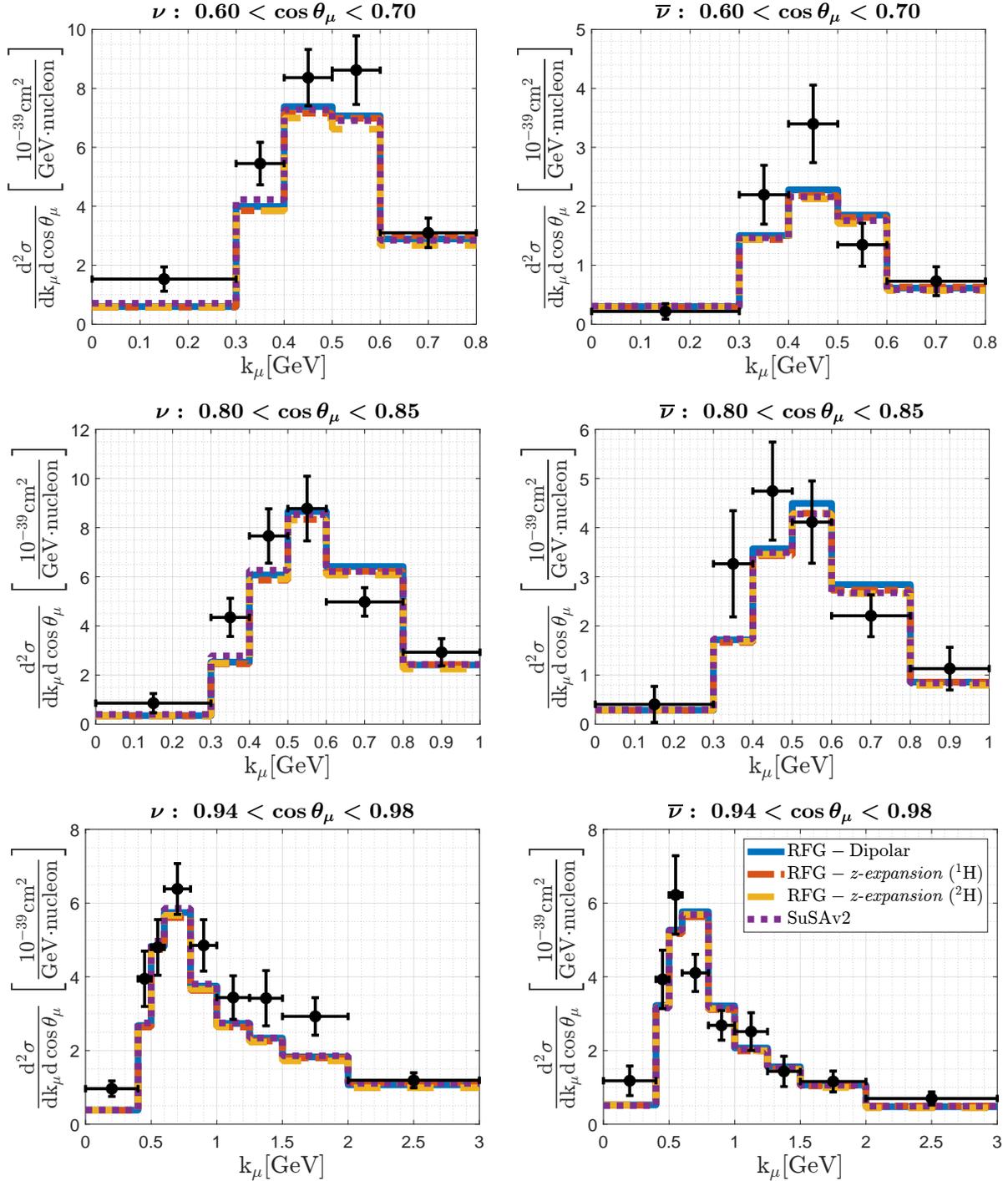


Figura 10.3: Sección eficaz diferencial doble respecto a la cinemática del muón final medida en el experimento T2K. Se compara con distintos resultados teóricos, indicados en la leyenda, donde se señala el modelo nuclear y la parametrización del factor de forma axial empleada. Se muestran las medidas de neutrinos (columna izquierda) y antineutrinos (columna derecha). Los datos experimentales han sido extraídos de [37].

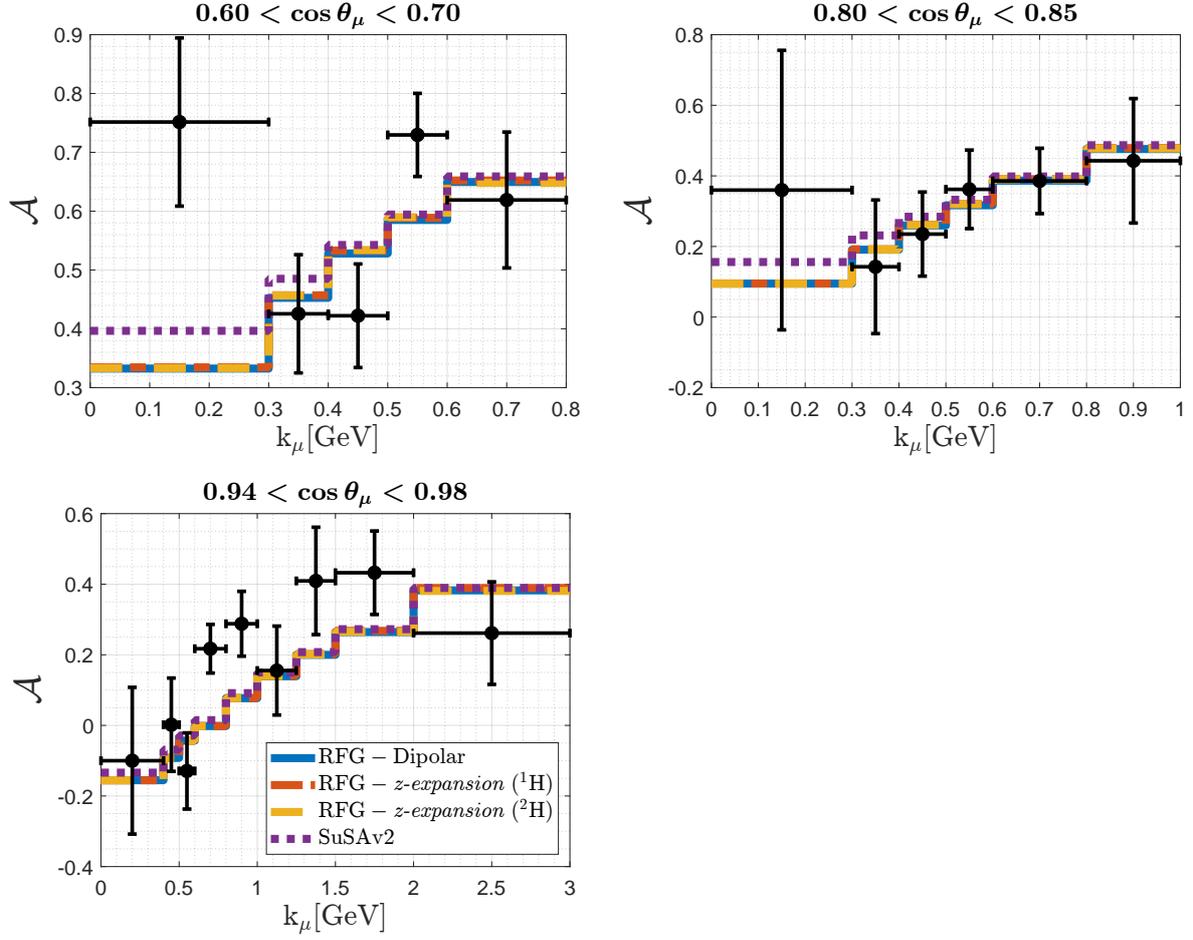


Figura 10.4: Asimetría medida en el experimento T2K respecto a la cinemática del muón final. Se compara con distintos resultados teóricos, indicados en la leyenda. Primero se indica el modelo nuclear y después la parametrización del factor de forma axial empleada. Los datos experimentales han sido extraídos de [37].

	$\nu + \bar{\nu}$ (ndof = 116)	\mathcal{A} (ndof = 58)	ν (ndof=58)	$\bar{\nu}$ (ndof=58)
RFG - Dipolar	464.48	184.85	197.65	119.59
RFG - z-expansion (^1H)	438.65	186.44	193.98	108.95
RFG - z-expansion (^2H)	437.00	184.33	188.22	114.20
SuSAv2	443.11	181.56	188.42	123.55

Tabla 10.1: El acuerdo general χ^2 entre los datos experimentales y las predicciones teóricas, para las medidas simultáneas de dispersión de neutrino y antineutrinos. Se indica el número de grados de libertad (ndof) para cada χ^2 .

10.2.2. Mediciones simultáneas de dispersión de neutrinos en ^{12}C y ^{16}O

En la Figura 10.5, se muestran las medidas experimentales más relevantes publicadas por la colaboración T2K, junto con las correspondientes predicciones teóricas empleando los modelos y parametrizaciones de los factores de forma del nucleón indicadas anteriormente, para los casos de dispersión en carbono y oxígeno. Además, en la Figura 10.6, se muestra el “ratio” entre las medidas para oxígeno y para carbono. Esta cantidad es interesante porque permite apreciar los cambios que sufre la respuesta nuclear al considerar núcleos cada vez más pesados, donde los efectos nucleares van a ser más intensos. En este caso, para el ^{16}O , hemos considerado los parámetros $k_F = 216\text{MeV}$ y $E_{\text{shift}} = 25\text{MeV}$ [39].

En la Figura 10.5, se puede apreciar que las respuestas teóricas reproducen de manera más precisa los resultados de dispersión en carbono en comparación con los de dispersión en oxígeno. En teoría, la sección eficaz del oxígeno debería ser mayor que la del carbono, debido a que el oxígeno es un núcleo más pesado. Sin embargo, para el intervalo de $0.93 < \cos \theta_l < 1.00$, se observa que las predicciones teóricas sobreestiman algunos de los datos experimentales. En estos puntos, el ratio oxígeno/carbono representado en la Figura 10.6 también muestra un comportamiento inusual, ya que las mediciones de carbono son mayores que las de oxígeno. Asimismo, en la Figura 10.6, podemos apreciar las distintas distribuciones de los datos experimentales a lo largo de k_μ , mostrando las variaciones en las respuestas nucleares entre los procesos de dispersión de neutrinos en oxígeno y en carbono.

Para evaluar la concordancia entre los datos experimentales y las predicciones teóricas, nuevamente calculamos el acuerdo general χ^2 . Es importante destacar que las mediciones de dispersión de oxígeno y carbono están relacionadas, por lo que el cálculo de χ^2 se realiza de manera conjunta para ambas medidas. Sin embargo, también realizaremos un cálculo separado de χ^2 . En la Tabla 10.2, se presenta el valor del acuerdo χ^2 obtenido en cada caso. No se observan cambios significativos en el acuerdo al considerar distintas parametrizaciones de los factores de forma. Tampoco entre los modelos RFG y SuSAv2.

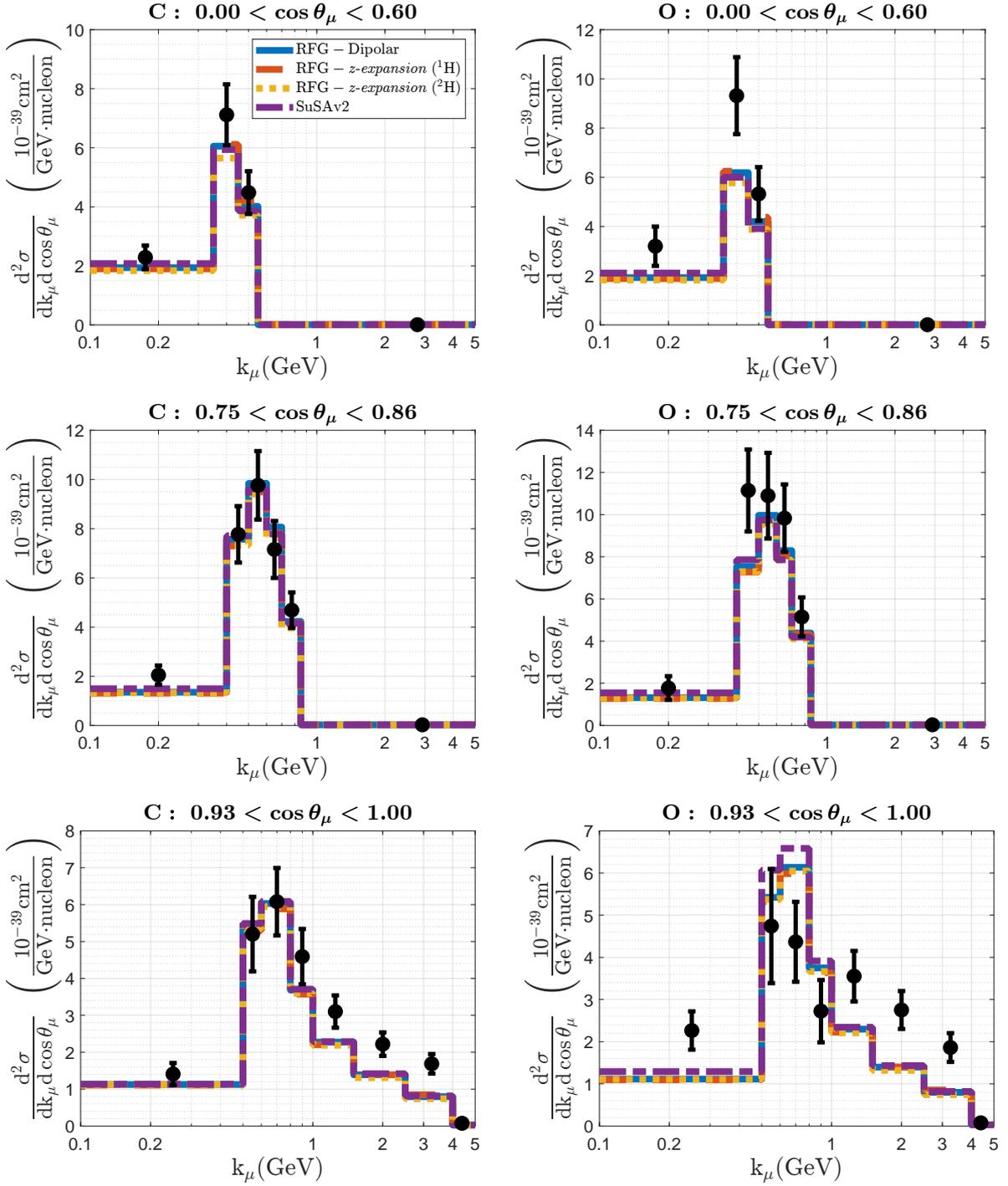


Figura 10.5: Sección eficaz diferencial doble por nucleón respecto a la cinemática del muón final medida en el experimento T2K. Se compara con distintos resultados teóricos, indicados en la leyenda, donde se señala el modelo nuclear y la parametrización del factor de forma axial empleada. Se muestran las medidas de carbono (columna izquierda) y oxígeno (columna derecha). Los datos experimentales han sido extraídos de [38].

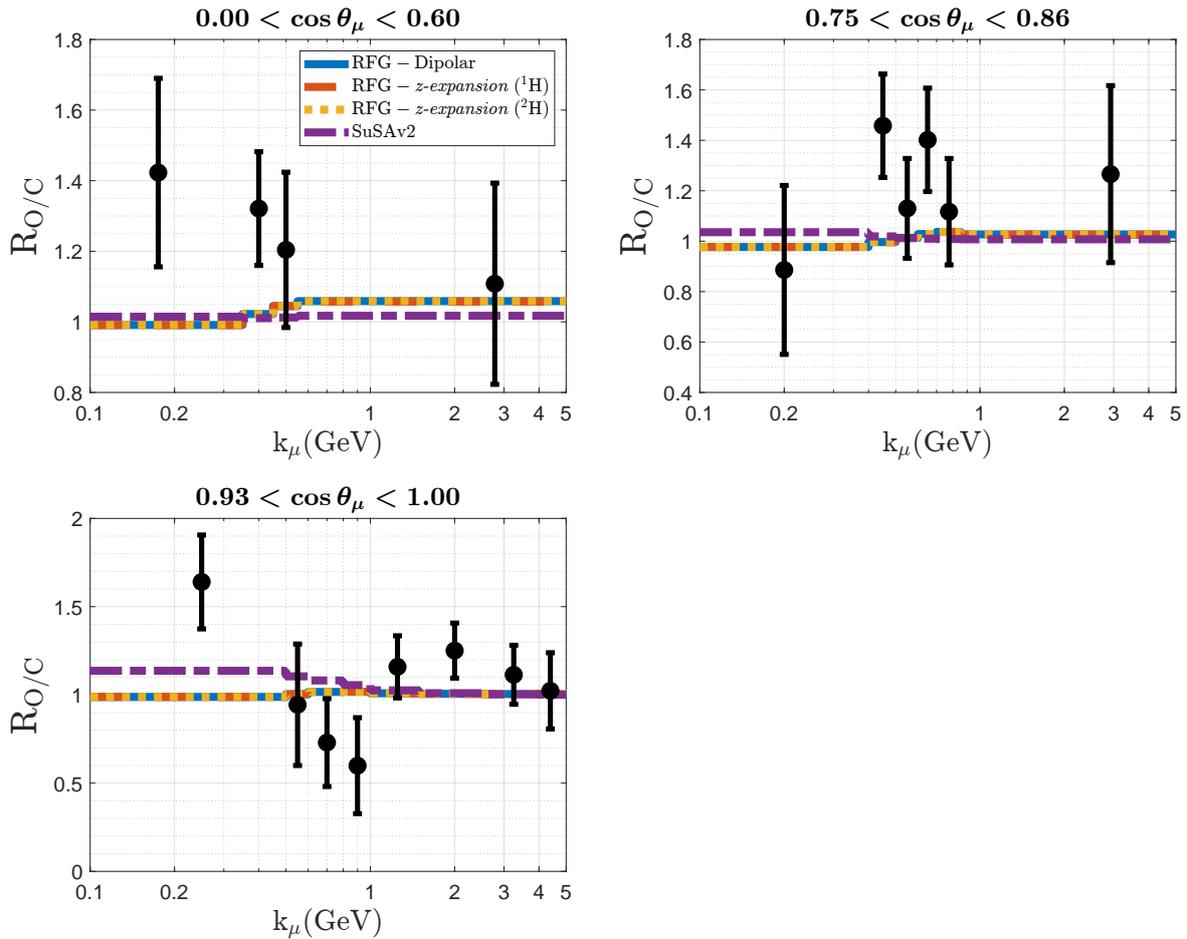


Figura 10.6: Ratio entre la sección eficaz diferencial doble respecto a la cinemática del muón final del oxígeno y el carbono medida en el experimento T2K. Se compara con distintos resultados teóricos, indicados en la leyenda. Primero se indica el modelo nuclear y después la parametrización del factor de forma axial empleada. Los datos experimentales han sido extraídos de [38].

	O + C (ndof=58)	$R_{O/C}$ (ndof=29)	O (ndof=29)	C (ndof=29)
RFG - Dipolar	125.03	32.89	52.51	58.54
RFG - z-expansion 1H	119.30	32.95	50.69	57.20
RFG - z-expansion 2H	122.20	32.89	52.96	55.80
SuSAv2	123.26	32.61	55.39	53.16

Tabla 10.2: El acuerdo general χ^2 entre los datos experimentales y las predicciones teóricas, para las medidas simultáneas de dispersión de neutrino. Se indica el número de grados de libertad (ndof) para cada χ^2 .

Después de analizar las medidas experimentales de T2K, podemos concluir que la elección de la parametrización de los factores de forma del nucleón apenas afecta a la sección eficaz cuasielástica. El efecto de elegir una parametrización u otra podría hacerse más evidente en el estudio de experimentos que operan a energías más altas, como MINERvA o NOvA, donde los valores promedio de $|Q^2|$ serían más elevados. Recordemos que las mayores diferencias entre las parametrizaciones de los factores de forma del nucleón, especialmente en el factor axial, se observan en la región de alto $|Q^2|$.

Asimismo, la incorporación de un modelo de campo medio, que proporciona una representación más realista del núcleo, no ha implicado cambios significativos respecto al modelo RFG. Sin embargo, es evidente que un estudio completo debe tener en cuenta todos los procesos que contribuyen a la sección eficaz.

Parte IV

Conclusiones

Capítulo 11

Resumen y conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido analizar las incertidumbres asociadas a la estructura hadrónica y la dinámica nuclear en interacciones de neutrinos con nucleones y núcleos, dada su relevancia en el estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Para ello, comenzamos nuestro análisis con el estudio del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón, únicamente afectado por las incertidumbres asociadas a la estructura hadrónica. Posteriormente, consideramos el proceso de dispersión cuasielástica neutrino-núcleo, afectado además por las incertidumbres asociadas a la estructura nuclear. En ambos casos, solo hemos considerado los procesos mediados por corrientes cargadas, para los cuales hemos calculado la sección eficaz teórica de forma analítica que hemos comparado con los datos experimentales.

En el proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón, el nucleón se encuentra libre y en reposo. La sección eficaz teórica de este proceso ha sido comparada con diversos resultados experimentales. En primer lugar, hemos considerado las mediciones efectuadas durante las décadas de 1970 y 1980 en cámaras de burbuja, que utilizaban como blancos núcleos ligeros o moléculas con núcleos ligeramente pesados. Estas medidas han sido ampliamente utilizadas para ajustar distintas parametrizaciones del factor de forma axial, fundamentalmente las de dispersión en deuterio, teniendo en cuenta para ello correcciones debidas al medio nuclear.

En segundo lugar, hemos analizado las medidas recientemente publicadas por Fermilab del proceso de dispersión elástica antineutrino-protón. Estas mediciones representan un hito al proporcionar datos estadísticamente significativos sobre la dispersión de neutrinos en nucleones libres. Los resultados se han utilizado para ajustar una nueva parametri-

zación del factor de forma axial. Además, debido a su importancia, los hemos empleado para evaluar las parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos y axial introducidas en el trabajo.

Descubrimos que los mayores cambios en la sección eficaz elástica se producen al variar la parametrización del factor de forma axial, mientras que modificar la parametrización de los factores de forma electromagnéticos tiene poco efecto sobre esta. Esto nos indica que las incertidumbres relacionadas con la estructura hadrónica en este proceso se concentran principalmente en el factor de forma axial, al cual solo se puede acceder a través de procesos débiles, en particular de dispersión de neutrinos, ya que forma parte de la estructura débil del nucleón.

En lo que respecta al proceso de dispersión cuasielástica neutrino-núcleo, nos centramos en el proceso más probable, en el cual un único nucleón es expulsado del núcleo, mientras los demás nucleones actúan como observadores pasivos. En este contexto, el nucleón interaccionante no está libre ni en reposo, sino que está ligado al núcleo y presenta una cierta cinemática debido a la dinámica nuclear. Por lo tanto, es necesario emplear un modelo que describa apropiadamente al núcleo. En nuestro caso, hemos utilizado el modelo del Gas de Fermi Relativista (RFG), el cual caracteriza al núcleo como un sistema de nucleones no interaccionantes e introduce dos parámetros efectivos para representar que los nucleones dentro del núcleo están ligados y en movimiento.

De esta manera, hemos utilizado la sección eficaz cuasielástica teórica en el modelo RFG para compararla con diversos datos experimentales. Inicialmente, la comparamos con las mediciones en cámaras de burbujas y la sección eficaz elástica. Como resultado, observamos que la influencia del medio nuclear provoca una reducción en la sección eficaz cuasielástica en comparación con el caso elástico, lo cual concuerda mejor con las mediciones de dispersión en moléculas compuestas por núcleos ligeramente pesados.

A continuación, evaluamos distintas medidas del experimento T2K. Es esencial tener en cuenta que el proceso cuasielástico es solo uno de los procesos que contribuyen a la respuesta nuclear. No obstante, es el proceso predominante en el rango de energías de 0.1-10 GeV, que coincide con el flujo de neutrinos del experimento T2K. Aún siendo consciente de las limitaciones asociadas a nuestras predicciones teóricas y su comparación con los datos experimentales, hemos evaluado y analizado en detalle el impacto de las diferentes parametrizaciones de los factores de forma del nucleón en la sección eficaz

cuasielástica. Nuestros resultados indican que la elección de las parametrizaciones de los factores de forma del nucleón no influye de manera significativa en dicha sección eficaz, lo cual está asociado a la energía promedio de T2K que es inferior a 1 GeV.

Además, en estas medidas hemos tenido en cuenta la predicción teórica del proceso cuasielástico en el modelo SuSAv2, el cual proporciona una descripción más sofisticada del núcleo utilizando un modelo de campo medio. Los resultados obtenidos no han revelado diferencias significativas entre el uso del modelo RFG y el modelo SuSAv2. Sin embargo, es evidente que es necesario considerar los demás procesos que contribuyen a la sección eficaz para llevar a cabo un análisis completo.

En principio, hemos observado que la parametrización de los factores de forma del nucleón parece tener un impacto limitado en la sección eficaz cuasielástica. No obstante, la parametrización del factor de forma axial influye en la sección eficaz elástica. En este sentido, la metodología presentada por el experimento Fermilab para la medición del proceso de dispersión elástica antineutrino-protón podría abrir la puerta a que otros experimentos realicen mediciones similares con sus detectores actuales. Esto, a su vez, podría contribuir a mejorar significativamente la parametrización del factor de forma axial.

Hay que tener en cuenta que los detectores actuales están compuestos principalmente por núcleos ligeramente pesados, por lo que la comprensión de la interacción neutrino-núcleo es esencial para caracterizar las señales de los detectores. Sin embargo, estas medidas se ven considerablemente afectadas por el amplio rango de energía que presentan los flujos de neutrinos utilizados, lo que dificulta caracterizar la respuesta nuclear de manera precisa. Además, el flujo de neutrinos no se conoce con exactitud. También debemos tener en cuenta que, después de la interacción del neutrino, las partículas resultantes pueden verse afectadas por otros efectos nucleares, como las corrientes de intercambio de mesones (MEC), la interacción de estados finales (FSI) o las correlaciones entre nucleones.

Como vemos el problema es complejo, y su solución requiere una mejora tanto en las técnicas de análisis de los datos experimentales como en los modelos teóricos que describen la dinámica nuclear involucrada en el proceso de interacción neutrino-núcleo. Igualmente esencial es aumentar nuestra comprensión de cómo interactúan los neutrinos con la materia nuclear, en regiones cinemáticas correspondientes a un amplio rango de energías, donde muy distintos mecanismos de reacción están presentes en el proceso de dispersión.

Parte V

Apéndices

Apéndice A

Partículas de espín 1/2

En este apéndice, se recoge el formalismo necesario para describir a las partículas relativistas de espín 1/2. Para más información puede consultarse [7].

A.1. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac describe el comportamiento de partículas elementales relativistas de espín 1/2. Esta ecuación, propuesta por Paul Dirac en 1928, tiene la forma

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta M)\Psi. \quad (\text{A.1})$$

Al exigir que (A.1) sea compatible con la expresión relativista de la energía se obtiene que los coeficientes β y α_i ($i = 1, 2, 3$) deben ser matrices hermíticas que satisfacen:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}, \quad (\text{A.2})$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{I}. \quad (\text{A.4})$$

Estas relaciones constituyen el álgebra de matrices de Dirac e implican que β y α_i deben ser matrices cuadradas de dimensión 4x4 como mínimo.

Una posible elección para las matrices β y α_i es

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde \mathbb{I} representa a la matriz identidad 2x2 y σ_i ($i = x, y, z$) son las matrices de Pauli que se definen como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Esta elección de las matrices de Dirac se denomina representación de Dirac. No obstante, pueden considerarse otras elecciones para representar las matrices de Dirac dado que los observables son independiente de la representación escogida.

La expresión covariante de la ecuación de Dirac es

$$(i\not{\partial} - M)\Psi = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde se ha introducido la notación *slash* que indica la contracción de un cuadri-vector con las matrices de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ siendo $\gamma^0 = \beta$ y $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$. En la ecuación (A.7) aparece $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$ dado que el cuadri-gradiente $\partial_\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$. La relaciones que satisfacen β y α_i implican que $(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ y $(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1} = \gamma^i$.

Las relaciones del álgebra de Dirac para las matrices γ^μ se reducen a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (\text{A.8})$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio de Minkowski.

Asimismo, las matrices γ^μ en la representación de Dirac son

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Por último, la cuadri-corriente J^μ en forma covariante es

$$J^\mu = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (\text{A.10})$$

donde se ha introducido la función de onda adjunta de Dirac $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

A.2. Soluciones libres de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac que describe el comportamiento de una partícula libre de masa M y momento \vec{p} presenta soluciones con energías de distinto signo:

- **Energía positiva** ($\epsilon = E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} > 0$):

$$\Psi^{(+)} = \sqrt{\frac{M}{EV}} u(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{A.11})$$

- **Energía negativa** ($\epsilon = -E = -\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} < 0$):

$$\Psi^{(-)} = \sqrt{\frac{M}{EV}} v(\vec{p}, s) e^{-iP_\mu X^\mu}. \quad (\text{A.12})$$

Donde $u(\vec{p}, s)$ y $v(\vec{p}, s)$ son los espinores de Dirac que están asociados a partículas y antipartículas, respectivamente. También se incluye el cuadri-momento $P^\mu = (E, \vec{p})$ y el cuadri-vector espacio-temporal $X^\mu = (t, \vec{x})$. Los espinores de Dirac son solución de las ecuaciones de Dirac en el espacio de momentos:

$$(\not{P} - M)u(\vec{p}, s) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$(\not{P} + M)v(\vec{p}, s) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Sus expresiones explícitas son

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E + M}{2M}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$v(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E + M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

donde χ_s y ξ_s son espinores de Pauli caracterizados por el estado de espín s .

Por otro lado, los espinores adjuntos de Dirac se definen como

$$\bar{u}(\vec{p}, s) = u^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0, \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s) = v^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0. \quad (\text{A.18})$$

que son solución de las ecuaciones de Dirac en el espacio de momentos:

$$\bar{u}(\vec{p}, s)(\not{P} - M) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s)(\not{P} + M) = 0. \quad (\text{A.20})$$

A.3. Proyectores de energía y espín

Los operadores de proyección de energía seleccionan los estados con energía positiva o negativa, mientras que el operador de proyección de espín hace lo propio con las polarizaciones de espín $+s$ y $-s$.

- **Operador de proyección de energía positiva:**

$$\left[\hat{\Lambda}_+(\vec{p}) \right]_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{P} + M}{2M} \right)_{\alpha\beta} = \sum_{\pm s} u(\vec{p}, s)_\alpha \bar{u}_\beta(\vec{p}, s). \quad (\text{A.21})$$

- **Operador de proyección de energía negativa:**

$$\left[\hat{\Lambda}_-(\vec{p}) \right]_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{P} + M}{2M} \right)_{\alpha\beta} = - \sum_{\pm s} v(\vec{p}, s)_\alpha \bar{v}_\beta(\vec{p}, s). \quad (\text{A.22})$$

- **Operador de proyección de espín:**

$$\hat{P}(\pm s) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{\mathcal{S}}), \quad (\text{A.23})$$

siendo $\not{\mathcal{S}} = (s_0, \vec{s})$, el cuadri-espín.

A.4. Covariantes bilineales

Los covariantes bilineales tienen la forma $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$ donde Ψ y $\bar{\Psi}$ son la función de onda de Dirac y su adjunta, respectivamente. Los observables en el contexto de la ecuación de Dirac presentan esta forma y tienen la ventaja de que se transforman de manera conocida al aplicarle una Transformación de Lorentz (TL).

Existen 16 covariantes bilineales, que son los siguientes:

- **Escalar:** $\bar{\Psi}\mathbb{I}\Psi$
- **Vector:** $\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi$
- **Tensor:** $\bar{\Psi}\sigma_{\alpha\beta}\Psi$ con $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$
- **Pseudoescalar:** $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ con $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
- **Pseudovector:** $\bar{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_5\Psi$

Cabe destacar que el nombre que llevan asociado indican cómo se transforman bajo una TL. Recuerde que las corrientes débiles incluyen un término vector y otro pseudovector (o vector-axial). Este último se transforma como un vector para TL propias (definidas por matrices con determinante +1) mientras que cambia de signo para TL impropias (caracterizadas por matrices con determinante -1). Un ejemplo de TL impropia es la transformación de paridad que invierte el signo de las coordenadas espaciales. Por consiguiente, el carácter vector y vector-axial de las corrientes débiles lleva implícito la violación de la paridad en la interacción débil y también esta asociado a la violación de la conjugación de carga.

Anteriormente hemos introducido la matriz γ_5 que satisface las siguientes propiedades:

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \quad \forall\gamma^\mu. \quad (\text{A.25})$$

Se trata del operador quiral que tiene por autovalores ± 1 correspondientes a los dos posibles estados quirales. Los operadores de proyección quiral son

$$\hat{\Pi}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \gamma_5). \quad (\text{A.26})$$

Estos seleccionan los estados con quiralidades positivas o negativas, respectivamente. Obsérvese que uno de estos proyectores aparece en la corriente leptónica (3.4) y actúa sobre el espinor que tienen a su derecha, seleccionando un estado quiral para el mismo.

Apéndice B

Delta de Dirac

En este apéndice se desarrollan los distintos cálculos que son necesario para determinar la sección eficaz y que involucran la delta de Dirac en 4-dimensiones.

B.1. Integración de la delta de Dirac δ^4 en \mathcal{S}_{fi}

En la expresión (3.18) de la amplitud de la transición \mathcal{S}_{fi} aparecen las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_1 e^{i(K_l - K_\nu - Q) \cdot X_1} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 X_2 e^{(P_f - P_i - Q) \cdot X_2}. \quad (\text{B.1})$$

Estas se resuelven teniendo en cuenta que

$$\int d^4 X_1 e^{i(K_l - K_\nu - Q) \cdot X_1} = (2\pi)^4 \delta^4(K_l - K_\nu - Q), \quad (\text{B.2})$$

$$\int d^4 X_2 e^{-i(P_f - P_i - Q) \cdot X_2} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i - Q), \quad (\text{B.3})$$

de manera que el cálculo de (B.1) se reduce a

$$\begin{aligned} \int d^4 Q (2\pi)^4 \delta^4(K_l - K_\nu - Q) \delta^4(P_f - P_i - Q) \\ = (2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Módulo al cuadrado de la delta de Dirac δ^4

En la expresión (3.21) del módulo de la amplitud de la transición al cuadrado $|\mathcal{S}_{fi}|^2$ aparece el siguiente módulo cuadrado

$$|(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)|^2. \quad (\text{B.5})$$

Para calcularlo, desarrollamos la expresión del siguiente modo

$$\begin{aligned} & [(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)] [(2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)] \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i) \int d^4 X e^{-i(K_l + P_f - K_\nu - P_i) \cdot X} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i) \int d^4 X \\ &= (2\pi)^4 VT \delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde la integral $\int d^4 X$ es igual al producto del tiempo T y volumen V considerados. Obsérvese que $K_l + P_f - K_\nu - P_i = 0$ debido al principio de la conservación de la energía y el momento. Esto es, la suma de los cuadri-momentos finales es igual a la suma de los cuadri-momentos iniciales.

B.3. Integración de la delta de Dirac δ^4 en $d\sigma$

La expresión (3.55) de la sección eficaz diferencial $d\sigma$ incluye la integral

$$\int d^3 \vec{p}_f \frac{\delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)}{2E_f}. \quad (\text{B.7})$$

Para resolverla, introducimos la función escalón de Heaviside:

$$\Theta(E_f) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_f < 0 \\ 1 & \text{si } E_f \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

que nos permitirá hacer uso de la siguiente propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{con} \quad f(x_n) = 0 \quad \text{y} \quad f'(x_n) \neq 0. \quad (\text{B.9})$$

A continuación, se encuentra el desarrollo de la integral (B.7).

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{p}_f \frac{\delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)}{2E_f} &= \int d^3\vec{p}_f \frac{\delta^4(P_f - P_i - Q)}{2E_f} \\
&= \int d^3\vec{p}_f \frac{\delta^4(P_f - P_i - Q)}{2E_f} \int dE_f \left[\delta\left(E_f - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + M_N^2}\right) + \delta\left(E_f + \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + M_N^2}\right) \right] \Theta(E_f) \\
&= \int d^4P_f \delta^4(P_f - P_i - Q) \left[\frac{\delta\left(E_f - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + M_N^2}\right) + \delta\left(E_f + \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + M_N^2}\right)}{2E_f} \right] \Theta(E_f) \\
&= \int d^4P_f \delta^4(P_f - P_i - Q) \delta(P_f^2 - M_N^2) \Theta(E_f) \\
&= \delta[(P_i + Q)^2 - M_N^2] \Theta(M_N + \omega) \\
&= \delta[(P_i + Q)^2 - M_N^2].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Continuamos desarrollando la delta δ . Para eso es necesario tener en cuenta la definición de los cuadri-momentos implicados y atender a relaciones cinemáticas que derivan de la conservación de la energía y el momento en los vértices del diagrama de Feynman del proceso. Toda esta información se encuentra recogida en la Sección 3.1.

$$\begin{aligned}
\delta[(P_i + Q)^2 - M_N^2] &= \delta(Q^2 + 2P_i \cdot Q) = \delta(\omega^2 - |\vec{q}|^2 + 2E_f\omega) \\
&= \delta[(\varepsilon_\nu - \varepsilon_l)^2 - \varepsilon_\nu^2 - \varepsilon_l^2 + m_l^2 + 2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f| \cos\theta_l + 2E_i(\varepsilon_\nu - \varepsilon_l)] \\
&= \delta[m_l^2 - 2\varepsilon_\nu\varepsilon_l + 2E_i\varepsilon_\nu - 2E_i\varepsilon_l + 2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f| \cos\theta_l] \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f|} \delta\left[\cos\theta_l - \frac{2(\varepsilon_\nu\varepsilon_l + E_i\varepsilon_\nu - E_i\varepsilon_l) - m_l^2}{2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f|}\right] \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f|} \delta(\cos\theta_l - \cos\theta_0),
\end{aligned} \tag{B.11}$$

siendo

$$\cos\theta_0 = \frac{2(\varepsilon_\nu\varepsilon_l + E_i\varepsilon_\nu - E_i\varepsilon_l) - m_l^2}{2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f|}. \tag{B.12}$$

Por consiguiente,

$$\int d^3\vec{p}_f \frac{\delta^4(K_l + P_f - K_\nu - P_i)}{2E_f} = \frac{\delta(\cos\theta_l - \cos\theta_0)}{2\varepsilon_\nu|\vec{p}_f|}. \tag{B.13}$$

Apéndice C

Tensores leptónico y hadrónico

En este apéndice, se calcula el módulo al cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ para el proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón. Este se expresa en términos de la contracción de los tensores leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$, cuya determinación se encuentra en el presente apéndice. Asimismo, se introducen algunas de las relaciones del teorema de trazas que son de utilidad para desarrollar la expresión de los tensores.

C.1. La amplitud invariante

La amplitud invariante del proceso de dispersión elástica neutrino-nucleón mediado por corrientes cargadas es

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right], \quad (\text{C.1})$$

donde los operadores de Dirac Γ^α y $\tilde{\Gamma}_\alpha$ vienen dados por

$$\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha (1 - \gamma_5), \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = F_1^V \gamma_\alpha + \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\alpha\mu} Q^\mu + G_A \gamma_\alpha \gamma^5 + \frac{G_P}{2M_N} Q_\alpha \gamma^5. \quad (\text{C.3})$$

Al tomar módulo al cuadrado en (C.1) se suma sobre los espines de las partículas finales y se promedia sobre los de las iniciales debido a que estos, en principio, son desconocidos. Como resultado, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{4} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right] \\ &\quad \cdot \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\beta u_n(\vec{p}_i, s_i) \right]^\dagger \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\beta u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right]^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Haciendo uso de la relación: $[\bar{u}(\vec{p}_2, s_2) \Gamma u(\vec{p}_1, s_1)]^\dagger = \bar{u}(\vec{p}_1, s_1) \bar{\Gamma} u(\vec{p}_2, s_2)$ donde se ha introducido el operador adjunto de Dirac $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, podemos reducir (C.4) a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{4} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right] \\ &\quad \cdot \left[\bar{u}_n(\vec{p}_i, s_i) \tilde{\Gamma}_\beta u_p(\vec{p}_f, s_f) \right] \left[\bar{u}_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \bar{\Gamma}^\beta u_l(\vec{k}_l, s_l) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A continuación, se separan los sumatorios y se utiliza la definición del operador de proyección de energía positiva (A.21). Primero, desarrollamos los sumatorios de s_ν y s_l :

$$\begin{aligned} &\sum_{s_\nu, s_l} \left[\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \left[\bar{u}_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \bar{\Gamma}^\beta u_l(\vec{k}_l, s_l) \right] \\ &= \sum_{s_l} \bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha \left[\sum_{s_\nu} u_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \bar{u}_\nu(\vec{k}_\nu, s_\nu) \right] \bar{\Gamma}^\beta u_l(\vec{k}_l, s_l) \\ &= \sum_{s_l} \bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) \Gamma^\alpha \left(\frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \right) \bar{\Gamma}^\beta u_l(\vec{k}_l, s_l) \\ &= \sum_{s_l} \left(\bar{u}_l(\vec{k}_l, s_l) u_l(\vec{k}_l, s_l) \right)_{\eta\phi} \left(\Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right)_{\phi\eta} \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

A continuación, seguimos el mismo procedimiento con los sumatorios de s_i y s_f :

$$\begin{aligned} &\sum_{s_i, s_f} \left[\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha u_n(\vec{p}_i, s_i) \right] \left[\bar{u}_n(\vec{p}_i, s_i) \tilde{\Gamma}_\beta u_p(\vec{p}_f, s_f) \right] \\ &= \sum_{s_f} \bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha \left[\sum_{s_i} u_n(\vec{p}_i, s_i) \bar{u}_n(\vec{p}_i, s_i) \right] \tilde{\Gamma}_\beta u_p(\vec{p}_f, s_f) \\ &= \sum_{s_f} \bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) \tilde{\Gamma}_\alpha \left(\frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \right) \tilde{\Gamma}_\beta u_p(\vec{p}_f, s_f) \\ &= \sum_{s_f} \left(\bar{u}_p(\vec{p}_f, s_f) u_p(\vec{p}_f, s_f) \right)_{\lambda\delta} \left(\tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\beta \right)_{\delta\lambda} \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, el módulo de la amplitud invariante promediada resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \bar{\tilde{\Gamma}}_\beta \right], \quad (\text{C.8})$$

que puede reescribirse como

$$\frac{1}{2} \sum_{s_\nu, s_l, s_i, s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = G_F^2 \eta^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.9})$$

introduciendo los tensores leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$ como sigue

$$\eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right], \quad (\text{C.10})$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \bar{\tilde{\Gamma}}_\beta \right]. \quad (\text{C.11})$$

C.2. Teorema de trazas

El teorema de trazas permite simplificar la determinación de los tensores leptónico y hadrónico. A continuación, se indican las propiedades del teorema de traza que se usan durante procedimiento de cálculo.

$$\text{La traza de un número impar de matrices } \gamma^\mu \text{ es 0.} \quad (\text{C.12})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4g^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.13})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{C.14})$$

$$\text{Tr}[\not{A}\not{B}] = 4A^\mu B_\mu = 4A \cdot B. \quad (\text{C.15})$$

$$\text{Tr}[\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}] = A \cdot B \text{Tr}[\not{C}\not{D}] - A \cdot C \text{Tr}[\not{B}\not{D}] + A \cdot D \text{Tr}[\not{B}\not{C}]. \quad (\text{C.16})$$

$$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]. \quad (\text{C.17})$$

$$\text{Tr}[\lambda A] = \lambda \text{Tr}[A] \text{ siendo } \lambda = \text{cte.} \quad (\text{C.18})$$

Definimos el tensor antisimétrico $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ según el convenio utilizado en [7]:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ es una permutación par de } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & \text{si } (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases}, \quad (\text{C.19})$$

que presenta las siguiente propiedades que nos serán de utilidad

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{C.20})$$

$$-\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} = 2(\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\nu}^{\tau} - \delta_{\tau}^{\mu}\delta_{\nu}^{\sigma}), \quad (\text{C.21})$$

siendo la delta de Kronecker

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (\text{C.22})$$

El desarrollo de los tensores leptónico y hadrónico implica el cálculo de numerosas trazas. Aplicando las propiedades de las trazas, estas se pueden reducir a (C.13), (C.14) o a trazas del producto de 4 y 6 matrices γ . A continuación, se determinan estas últimas. Se hace esto para mostrar dónde reside la base del cálculo de los tensores leptónico y hadrónico puesto que no se va indicar su desarrollo en profundidad, especialmente el del tensor hadrónico debido a su enorme extensión.

La traza de un número par de matrices γ se obtiene aplicando la propiedad de anticonmutación de dichas matrices: $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$. Además, se tiene en cuenta que la traza de un producto de matrices tiene simetría cíclica. Para determinar la traza del producto de 4 matrices γ comenzamos aplicando la propiedad de anticonmutación hasta desplazar la primera matriz del producto de izquierda a derecha:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d] &= \text{Tr} [(-\gamma^b \gamma^a + 2g^{ab}) \gamma^c \gamma^d] \\ &= -\text{Tr} [\gamma^b \gamma^a \gamma^c \gamma^d] + 2g^{ab} \text{Tr} [\gamma^c \gamma^d] \\ &= -\text{Tr} [\gamma^b (-\gamma^c \gamma^a + 2g^{ac}) \gamma^d] + 2g^{ab} \text{Tr} [\gamma^c \gamma^d] \\ &= \text{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^a \gamma^d] + 2g^{ab} \text{Tr} [\gamma^c \gamma^d] - 2g^{ac} \text{Tr} [\gamma^b \gamma^d] \\ &= \text{Tr} [\gamma^b \gamma^c (-\gamma^d \gamma^a + 2g^{ad})] + 2g^{ab} \text{Tr} [\gamma^c \gamma^d] - 2g^{ac} \text{Tr} [\gamma^b \gamma^d] \\ &= -\text{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^a] + 2g^{ab} \text{Tr} [\gamma^c \gamma^d] - 2g^{ac} \text{Tr} [\gamma^b \gamma^d] \\ &+ 2g^{ad} \text{Tr} [\gamma^b \gamma^c]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Posteriormente, simplemente se debe aplicar la simetría cíclica de la traza y la relación (C.13) para obtener el resultado:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} [\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d] &= g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d] - g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d] + g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c] \\ &= 4 [g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd} + g^{ad} g^{bc}].\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

El mismo procedimiento se sigue para la traza del producto de 6 matrices γ :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} [\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] &= \mathrm{Tr} [(-\gamma^b \gamma^a + 2g^{ab}) \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &= -\mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^a \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &= -\mathrm{Tr} [\gamma^b (-\gamma^c \gamma^a + 2g^{ac}) \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &= \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^a \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &= \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c (-\gamma^d \gamma^a + 2g^{ad}) \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &= -\mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^a \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad + 2g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] \\ &= -\mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d (-\gamma^e \gamma^a + 2g^{ae}) \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] \\ &= \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^a \gamma^f] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad + 2g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ae} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^f] \\ &= \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e (-\gamma^f \gamma^a + 2g^{af})] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ae} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^f] \\ &= -\mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f \gamma^a] + 2g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad - 2g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + 2g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] - 2g^{ae} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^f] \\ &\quad + 2g^{af} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e].\end{aligned}\quad (\text{C.25})$$

De manera que, finalmente, puede expresarse en función de las trazas del producto de 4 matrices γ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} [\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] &= g^{ab} \mathrm{Tr} [\gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f] - g^{ac} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^d \gamma^e \gamma^f] + g^{ad} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^e \gamma^f] \\ &\quad - g^{ae} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^f] + g^{af} \mathrm{Tr} [\gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e].\end{aligned}\quad (\text{C.26})$$

C.3. Tensor leptónico $\eta^{\alpha\beta}$

El tensor leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ viene dado por

$$\eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right], \quad (\text{C.27})$$

donde el operador adjunto de Dirac de $\bar{\Gamma}^\beta$ es

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^\beta &= \gamma^0 \Gamma^{\beta\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 [\gamma^\beta (1 - \gamma_5)]^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (1 - \gamma_5^\dagger) (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 (1 - \gamma_5) (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_5 (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 + \gamma_5 \gamma^0 (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 = (1 + \gamma_5) \gamma^0 (\gamma^\beta)^\dagger \gamma^0 \\ &= (1 + \gamma_5) \gamma^\beta = \gamma^\beta (1 - \gamma_5) = \Gamma^\beta. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Para desarrollar la expresión del tensor leptónico se hará uso de las propiedades del teorema de trazas que fueron introducidas en el Apéndice C.2 junto con las propias propiedades de las matrices γ^μ y γ^5 que se detallan en el Apéndice A.1.

El procedimiento se detalla a continuación.

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right] \\ &= \frac{1}{8m_l m_\nu} \text{Tr} \left[(\not{K}_l + m_l) \Gamma^\alpha (\not{K}_\nu + m_\nu) \Gamma^\beta \right] \\ &= \frac{1}{8m_l m_\nu} \left\{ \underbrace{\text{Tr} [\not{K}_l \Gamma^\alpha \not{K}_\nu \Gamma^\beta]}_1 + \underbrace{\text{Tr} [m_l \Gamma^\alpha m_\nu \Gamma^\beta]}_2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \text{ Tr} [\not{K}_l \Gamma^\alpha \not{K}_\nu \Gamma^\beta] &= \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \not{K}_\nu \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\ &= \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \not{K}_\nu \gamma^\beta] + \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \gamma^5 \not{K}_\nu \gamma^\beta \gamma^5] \\ &\quad - \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \gamma^5 \not{K}_\nu \gamma^\beta] - \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \not{K}_\nu \gamma^\beta \gamma^5] \\ &= 2 \{ \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \not{K}_\nu \gamma^\beta] - \text{Tr} [\not{K}_l \gamma^\alpha \not{K}_\nu \gamma^\beta \gamma^5] \}. \\ &= 8 \left\{ K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha - i \epsilon^{\delta\alpha\phi\beta} K_{l\delta} K_{\nu\phi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned}
2. \text{Tr} [m_l \Gamma^\alpha m_\nu \Gamma^\beta] &= m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\
&= m_l m_\nu \{ \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] + \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^5] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \} \\
&= m_l m_\nu \{ \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta (\gamma^5)^2] + \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \} \\
&= m_l m_\nu \{ \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta] + \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] - \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Reagrupando los términos, obtenemos el tensor leptónico:

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{K}_l + m_l}{2m_l} \Gamma^\alpha \frac{\not{K}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \bar{\Gamma}^\beta \right] \\
&= \frac{1}{m_l m_\nu} \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha - i \epsilon^{\alpha\beta\delta\phi} K_{l\delta} K_{\nu\phi} \right].
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Asimismo, se puede introducir el tensor leptónico reducido $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}$ como sigue:

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = m_l m_\nu \eta^{\alpha\beta} = \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha - i \epsilon^{\alpha\beta\delta\phi} K_{l\delta} K_{\nu\phi} \right]. \tag{C.33}$$

C.4. Tensor hadrónico $W_{\alpha\beta}$

El tensor hadrónico $W_{\alpha\beta}$ viene dado por

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \bar{\Gamma}_\beta \right], \tag{C.34}$$

donde el operador adjunto de Dirac $\bar{\Gamma}_\beta = \bar{\Gamma}_\beta^V + \bar{\Gamma}_\beta^A$ con

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_\beta^V &= \gamma^0 (\tilde{\Gamma}_\beta^V)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left[F_1^V \gamma_\beta + \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\beta\mu} Q^\mu \right]^\dagger \gamma^0 \\
&= \gamma^0 \left[F_1^V \gamma_\beta^\dagger - \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\beta\mu}^\dagger Q^\mu \right] \gamma^0 = F_1^V \bar{\gamma}_\beta - \frac{iF_2^V}{2M_N} \bar{\sigma}_{\beta\mu} Q^\mu \\
&= F_1^V \gamma_\beta - \frac{iF_2^V}{2M_N} \sigma_{\beta\mu} Q^\mu \neq \tilde{\Gamma}_\beta^V,
\end{aligned} \tag{C.35}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_\beta^A &= \gamma^0 (\tilde{\Gamma}_\beta^A)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left[G_A \gamma_\beta \gamma^5 + \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta \gamma^5 \right]^\dagger \gamma^0 \\
&= \gamma^0 \left[G_A (\gamma_\beta \gamma^5)^\dagger + \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta (\gamma^5)^\dagger \right] \gamma^0 = G_A \overline{\gamma_\beta \gamma^5} + \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta \overline{\gamma^5} \\
&= G_A \gamma_\beta \gamma^5 - \frac{G_P}{2M_N} Q_\beta \gamma^5 \neq \tilde{\Gamma}_\beta^A,
\end{aligned} \tag{C.36}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\bar{\gamma}_\beta = \gamma_\beta$ y $\bar{\sigma}_{\beta\mu} = \sigma_{\beta\mu}$ acorde con el resultado (C.28). Por otro lado, $\bar{\gamma}^5 = \gamma^0 \gamma^{5\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5 (\gamma^0)^2 = -\gamma^5$ mientras que $\overline{\gamma_\beta \gamma^5} = \bar{\gamma}^5 \bar{\gamma}_\beta = -\gamma^5 \gamma_\beta = \gamma_\beta \gamma^5$.

Para desarrollar la expresión del tensor hadrónico, se sigue el mismo procedimiento que con el tensor leptónico. Del mismo modo, se usarán las relaciones del teorema de trazas introducidas en el Apéndice C.2 junto con las propias propiedades de las matrices γ^μ y γ^5 detalladas en el Apéndice A.1. En este caso, el desarrollo se encuentra menos detallado debido a la elevada extensión de cálculo que requiere este tensor. No obstante, se muestra que las trazas pueden reducirse a trazas del tipo: (C.13), (C.14), (C.24) y (C.26), cuyos resultados fueron introducidos en el Apéndice C.2.

El procedimiento se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_N}{2M_N} \tilde{\Gamma}_\alpha \frac{\not{P}_i + M_N}{2M_N} \bar{\Gamma}_\beta \right] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \tilde{\Gamma}_\alpha (\not{P}_i + M_N) \bar{\Gamma}_\beta \right] \\
&= W_{\alpha\beta}^{VV} + W_{\alpha\beta}^{AA} + W_{\alpha\beta}^{VA}. \tag{C.37}
\end{aligned}$$

■ **Término vector-vector** $W_{\alpha\beta}^{VV}$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}^{VV} &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \tilde{\Gamma}_\alpha^V (\not{P}_i + M_N) \bar{\Gamma}_\beta^V \right] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{VV} (F_1^V)^2 - f_{\alpha\beta}^{VM} \frac{iF_1^V F_2^V}{2M_N} + f_{\alpha\beta}^{MM} \frac{(F_2^V)^2}{4M_N^2} \right], \tag{C.38}
\end{aligned}$$

donde las componentes $f_{\alpha\beta}^{AA}$, $f_{\alpha\beta}^{AP}$ y $f_{\alpha\beta}^{PP}$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VV} &= \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \gamma_\alpha (\not{P}_i + M_N) \gamma_\beta \right] = \text{Tr} \left[\not{P}_f \gamma_\alpha \not{P}_i \gamma_\beta \right] + M_N^2 \text{Tr} \left[\gamma_\alpha \gamma_\beta \right] \\
&= 4 \left[P_{f_\alpha} P_{i_\beta} - (P_f \cdot P_i - M_N^2) g_{\alpha\beta} + P_{f_\beta} P_{i_\alpha} \right], \tag{C.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VM} &= \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M_N) \gamma_\alpha (\not{P}_i + M_N) \sigma_{\beta\xi} Q^\xi - (\not{P}_f + M_N) \sigma_{\alpha\nu} Q^\nu (\not{P}_i + M_N) \gamma_\beta \right] \\
&= M_N \left\{ \text{Tr} \left[\not{P}_f \gamma_\alpha \sigma_{\beta\xi} \right] Q^\xi + \text{Tr} \left[\gamma_\alpha \not{P}_i \sigma_{\beta\xi} \right] Q^\xi - \text{Tr} \left[\not{P}_f \sigma_{\alpha\nu} \gamma_\beta \right] Q^\nu + \text{Tr} \left[\sigma_{\alpha\nu} \not{P}_i \gamma_\beta \right] Q^\nu \right\} \\
&= 4iM_N \left[Q_\alpha (P_{i_\beta} - P_{f_\beta}) + Q_\beta (P_{i_\alpha} - P_{f_\alpha}) + 2g_{\alpha\beta} (P_f \cdot Q - P_i \cdot Q) \right], \tag{C.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MM} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= \left\{ \text{Tr} [\not{P}_f\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu\not{P}_i\sigma_{\beta\xi}] + M_N^2 \text{Tr} [\sigma_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\xi}] \right\} Q^\nu Q^\xi \\
&= 4 \left\{ (P_f \cdot Q)(P_{i_\alpha}Q_\beta + P_{i_\beta}Q_\alpha) + (P_i \cdot Q)(P_{f_\alpha}Q_\beta + P_{f_\beta}Q_\alpha) - Q^2(P_{f_\alpha}P_{i_\beta} + P_{f_\beta}P_{i_\alpha}) \right. \\
&\quad \left. - Q_\alpha Q_\beta(P_f \cdot P_i + M_N^2) + g_{\alpha\beta} [Q^2(P_f \cdot P_i + M_N^2) - 2(P_f \cdot Q)(P_i \cdot Q)] \right\}. \quad (\text{C.41})
\end{aligned}$$

■ **Término axial** $W_{\alpha\beta}^{AA}$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}^{AA} &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^A(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^A] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{AA}(G_A)^2 - f_{\alpha\beta}^{AP} \frac{G_A G_P}{2M_N} - f_{\alpha\beta}^{PP} \frac{(G_P)^2}{4M_N^2} \right], \quad (\text{C.42})
\end{aligned}$$

donde las componentes $f_{\alpha\beta}^{AA}$, $f_{\alpha\beta}^{AP}$ y $f_{\alpha\beta}^{PP}$ se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{AA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5] = \text{Tr} [\not{P}_f\gamma_\alpha\not{P}_i\gamma_\beta] - M_M^2 \text{Tr} [\gamma_\alpha\gamma_\beta] \\
&= 4 [P_{f_\alpha}P_{i_\beta} - (P_f \cdot P_i + M_N^2)g_{\alpha\beta} + P_{f_\beta}P_{i_\alpha}], \quad (\text{C.43})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{AP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 - (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5] \\
&= M_N \left\{ \text{Tr} [\not{P}_f\gamma_\alpha] Q_\beta - \text{Tr} [\gamma_\alpha\not{P}_i] Q_\beta - [\not{P}_f\gamma_\beta] Q_\alpha + \text{Tr} [\not{P}_i\gamma_\beta] Q_\alpha \right\} \\
&= 4M_N [(P_{f_\alpha} - P_{i_\alpha})Q_\beta + (P_{f_\beta} - P_{i_\beta})Q_\alpha], \quad (\text{C.44})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{PP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5] = \left\{ -\text{Tr} [\not{P}_f\not{P}_i] + M_N^2 \text{Tr} [\mathbb{I}] \right\} Q_\alpha Q_\beta \\
&= 4 [M_N^2 - P_f \cdot P_i] Q_\alpha Q_\beta. \quad (\text{C.45})
\end{aligned}$$

■ **Término vector-axial** $W_{\alpha\beta}^{VA}$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}^{VA} &= \frac{1}{8M_N^2} \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^V(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^A + (\not{P}_f + M_N)\tilde{\Gamma}_\alpha^A(\not{P}_i + M_N)\tilde{\Gamma}_\beta^V] \\
&= \frac{1}{8M_N^2} \left[f_{\alpha\beta}^{VA} F_1^V G_A - f_{\alpha\beta}^{VP} \frac{F_1^V G_P}{2M_N} + f_{\alpha\beta}^{MA} \frac{iF_2^V G_A}{2M_N} - f_{\alpha\beta}^{MP} \frac{iF_2^V G_P}{4M_N^2} \right], \quad (\text{C.46})
\end{aligned}$$

donde las componente $f_{\alpha\beta}^{VA}$, $f_{\alpha\beta}^{VP}$, $f_{\alpha\beta}^{MA}$ y $f_{\alpha\beta}^{MP}$ se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5 + (\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta] \\
&= 2\text{Tr} [\gamma^5\not{P}_f\gamma_\alpha\not{P}_i\gamma_\beta] = -8i\epsilon_{\lambda\alpha\rho\beta}P_f^\lambda P_i^\rho, \quad (\text{C.47})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 - (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MA} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)\gamma_\beta\gamma^5 - (\not{P}_f + M_N)\gamma_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= M_N \left\{ \text{Tr} [\not{P}_f\sigma_{\alpha\nu}\gamma_\beta\gamma^5] Q^\nu + \text{Tr} [\sigma_{\alpha\nu}\not{P}_i\gamma_\beta\gamma^5] Q^\nu \right. \\
&\quad \left. - \text{Tr} [\not{P}_f\gamma_\alpha\gamma^5\sigma_{\beta\xi}] Q^\xi - \text{Tr} [\gamma_\alpha\gamma^5\not{P}_i\sigma_{\beta\xi}] Q^\xi \right\} \\
&= 8M_N [\epsilon_{\sigma\alpha\mu\beta}P_f^\sigma Q^\mu + \epsilon_{\eta\alpha\mu\beta}P_i^\eta Q^\mu],
\end{aligned} \tag{C.49}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MP} &= \text{Tr} [(\not{P}_f + M_N)\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu(\not{P}_i + M_N)Q_\beta\gamma^5 + (\not{P}_f + M_N)Q_\alpha\gamma^5(\not{P}_i + M_N)\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= \text{Tr} [\not{P}_f\sigma_{\alpha\nu}Q^\nu\not{P}_iQ_\beta\gamma^5] + \text{Tr} [\not{P}_fQ_\alpha\gamma^5\not{P}_i\sigma_{\beta\xi}Q^\xi] \\
&= 4\epsilon_{\sigma\alpha\rho\phi}P_f^\sigma Q^\rho P_i^\phi Q_\beta - 4\epsilon_{\sigma\beta\rho\phi}P_f^\sigma Q^\rho P_i^\phi Q_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{C.50}$$

Las expresiones anteriores pueden simplificarse teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{array}{l} Q^\mu = P_f^\mu - P_i^\mu \\ P_f^2 = P_i^2 = M_N^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_i \cdot Q = P_i \cdot P_f - M_N^2 \\ |Q^2| = -Q^2 = 2(P_i \cdot P_f - M_N^2) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{P_i \cdot Q}{|Q^2|} = \frac{1}{2}. \tag{C.51}$$

Esto nos permite introducir el cuadri-vector X^μ del siguiente modo:

$$X^\mu = P_i^\mu + \frac{P_i \cdot Q}{|Q^2|} Q^\mu = P_i^\mu + \frac{1}{2} Q^\mu. \tag{C.52}$$

Por consiguiente, podemos reescribir las funciones $\{f_{\alpha\beta}^i\}$ introducidas anteriormente en función de X^μ . Los resultados se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VV} &= 4 [P_{f\alpha}P_{i\beta} - (P_f \cdot P_i - M_N^2)g_{\alpha\beta} + P_{f\beta}P_{i\alpha}] \\
&= 8X_\alpha X_\beta - 2|Q^2| \left(g_{\alpha\beta} + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{|Q^2|} \right),
\end{aligned} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{VM} &= 4iM_N \cdot [Q_\alpha(P_{i\beta} - P_{f\beta}) + Q_\beta(P_{i\alpha} - P_{f\alpha}) \\
&\quad + 2g_{\alpha\beta}(P_f \cdot Q - P_i \cdot Q)] \\
&= -i8M_N|Q^2| \left(g_{\alpha\beta} + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{|Q^2|} \right),
\end{aligned} \tag{C.54}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{MM} &= 4 \left\{ (P_f \cdot Q)(P_{i_\alpha} Q_\beta + P_{i_\beta} Q_\alpha) + (P_i \cdot Q)(P_{f_\alpha} Q_\beta + P_{f_\beta} Q_\alpha) \right. \\
&\quad - Q^2(P_{f_\alpha} P_{i_\beta} + P_{f_\beta} P_{i_\alpha}) - Q_\alpha Q_\beta (P_f \cdot P_i + M_N^2) \\
&\quad \left. + g_{\alpha\beta} [Q^2(P_f \cdot P_i + M_N^2) - 2(P_f \cdot Q)(P_i \cdot Q)] \right\} \\
&= 8|Q^2| \left[X_\alpha X_\beta - M_N^2 \left(g_{\alpha\beta} + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{|Q^2|} \right) \right], \tag{C.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{AA} &= 4 [P_{f_\alpha} P_{i_\beta} + P_{f_\beta} P_{i_\alpha} - g_{\alpha\beta} (P_f \cdot P_i + M_N^2)] \\
&= 8 (X_\alpha X_\beta - M_N^2 g_{\alpha\beta}) - 2|Q^2| \left(g_{\alpha\beta} + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{|Q^2|} \right), \tag{C.56}
\end{aligned}$$

$$f_{\alpha\beta}^{PP} = 4 [M_N^2 - P_f \cdot P_i] Q_\alpha Q_\beta = -2|Q^2| Q_\alpha Q_\beta, \tag{C.57}$$

$$f_{\alpha\beta}^{AP} = 4M_N [(P_{f_\alpha} - P_{i_\alpha})Q_\beta + (P_{f_\beta} - P_{i_\beta})Q_\alpha] = 8M_N Q_\alpha Q_\beta, \tag{C.58}$$

$$f_{\alpha\beta}^{VA} = -8i\epsilon_{\lambda\alpha\rho\beta} P_f^\lambda P_i^\rho = -8i\epsilon_{\lambda\alpha\rho\beta} Q^\lambda X^\rho, \tag{C.59}$$

$$f_{\alpha\beta}^{MA} = 8M_N [\epsilon_{\sigma\alpha\mu\beta} P_f^\sigma Q^\mu + \epsilon_{\eta\alpha\mu\beta} P_i^\eta Q^\mu] = 16M_N \epsilon_{\sigma\alpha\mu\beta} X^\sigma Q^\mu. \tag{C.60}$$

Esto permite expresar el tensor hadrónico de manera compacta, para ello simplemente reagrupamos todos los términos:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta} &= -\bar{W}_1(Q^2) \left(g_{\alpha\beta} + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{|Q^2|} \right) + \bar{W}_2(Q^2) \frac{X_\alpha X_\beta}{M_N^2} \\
&\quad + i \frac{\bar{W}_3(Q^2)}{M_N^2} \epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta} X^\sigma Q^\rho + \frac{\bar{W}_4(Q^2)}{M_N^2} Q_\alpha Q_\beta, \tag{C.61}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes $\bar{W}_i(Q^2)$ se denominan funciones de estructura hadrónica dado que dependen de los factores de forma del nucleón. Estos se definen como sigue

$$\bar{W}_1(Q^2) = \frac{|Q^2|}{4M_N^2} \left[(F_1^V + F_2^V)^2 + (G_A)^2 \right] + (G_A)^2, \tag{C.62}$$

$$\bar{W}_2(Q^2) = (F_1^V)^2 + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (F_2^V)^2 + (G_A)^2, \tag{C.63}$$

$$\bar{W}_3(Q^2) = 2(F_1^V + F_2^V) G_A, \tag{C.64}$$

$$\bar{W}_4(Q^2) = \frac{1}{4} \left[\frac{4M_N^2}{|Q^2|} (G_A)^2 + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (G_P)^2 - 2G_A G_P \right]. \tag{C.65}$$

O equivalentemente, deshaciendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= -W_1(Q^2)g_{\alpha\beta} + W_2(Q^2)\frac{P_{i\alpha}P_{i\beta}}{M_N^2} + i\frac{W_3(Q^2)}{2M_N^2}\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho \\ &+ \frac{W_4(Q^2)}{M_N^2}Q_\alpha Q_\beta + W_5(Q^2)\frac{P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha}{2M_N^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

donde los coeficientes $W_i(Q^2)$ son

$$W_1(Q^2) = \bar{W}_1(Q^2) = \frac{|Q^2|}{4M_N^2} \left[(F_1^V + F_2^V)^2 + (G_A)^2 \right] + (G_A)^2, \quad (\text{C.67})$$

$$W_2(Q^2) = \bar{W}_2(Q^2) = (F_1^V)^2 + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (F_2^V)^2 + (G_A)^2, \quad (\text{C.68})$$

$$W_3(Q^2) = 2\bar{W}_3(Q^2) = 2(F_1^V + F_2^V)G_A, \quad (\text{C.69})$$

$$\begin{aligned} W_4(Q^2) &= -\frac{M_N^2}{|Q^2|}\bar{W}_1(Q^2) + \frac{\bar{W}_2(Q^2)}{4} + \bar{W}_4(Q^2), \\ &= \frac{|Q^2| - 4M_N^2}{16M_N^2} (F_2^V)^2 - \frac{F_1^V F_2^V}{2} + \frac{|Q^2|}{4M_N^2} (G_P)^2 - \frac{G_A G_P}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

$$W_5(Q^2) = \bar{W}_2(Q^2) = W_2(Q^2). \quad (\text{C.71})$$

C.5. Contracción $\eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$

Una vez calculados los tensores leptónico $\eta^{\alpha\beta}$ y hadrónico $W_{\alpha\beta}$ procedemos a determinar su contracción. Para ello, se trabaja con el tensor leptónico reducido $\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = m_l m_\nu \eta^{\alpha\beta}$, de manera que

$$\eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_l m_\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}. \quad (\text{C.72})$$

Asimismo, es ventajoso separar las partes simétrica y antisimétrica de cada tensor acorde con el carácter vector y vector-axial de las corrientes leptónica y hadrónica.

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} = K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \\ \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta} = -i\epsilon^{\alpha\beta\delta\phi} K_{l\delta} K_{\nu\phi} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.73})$$

$$W_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta}^S + W_{\alpha\beta}^A \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_{\alpha\beta}^S = -W_1(Q^2)g_{\alpha\beta} + W_2(Q^2)\frac{P_{i\alpha}P_{i\beta}}{M_N^2} \\ \quad + \frac{W_4(Q^2)}{M_N^2}Q_\alpha Q_\beta + W_5(Q^2)\frac{P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha}{2M_N^2} \\ W_{\alpha\beta}^A = i\frac{W_3(Q^2)}{2M_N^2}\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho \end{array} \right\}. \quad (\text{C.74})$$

Esta división permite centrarnos en las contracciones de las partes simétrica y anti-simétrica por separado dado que los términos cruzados son nulos.

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= \frac{1}{m_l m_\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_l m_\nu} (\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta})(W_{\alpha\beta}^S + W_{\alpha\beta}^A) \\ &= \frac{1}{m_l m_\nu} (\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^A). \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Nos centramos primero en la contracción de las partes simétricas.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^S &= -W_1(Q^2)\underbrace{\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}}_{\text{I.}} + \frac{W_2(Q^2)}{M_N^2}\underbrace{\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}(P_{i\alpha}P_{i\beta})}_{\text{II.}} \\ &\quad + \frac{W_4(Q^2)}{M_N^2}\underbrace{\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}(Q_\alpha Q_\beta)}_{\text{III.}} + \frac{W_5(Q^2)}{2M_N^2}\underbrace{(P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha)}_{\text{IV.}}. \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

$$\begin{aligned} \text{I. } \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} &= \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \right] g_{\alpha\beta} \\ &= -2K_l \cdot K_\nu = -2\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right). \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}P_{i\alpha}P_{i\beta} &= \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \right] P_{i\alpha}P_{i\beta} \\ &= 2(K_l \cdot P_i)(K_\nu \cdot P_i) - (K_l \cdot K_\nu)P_i^2 \\ &= M_N^2\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l + |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right). \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}Q_\alpha Q_\beta &= \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \right] Q_\alpha Q_\beta \\ &= m_l^2(K_l \cdot K_\nu) = m_l^2\varepsilon_\nu \left(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l \right). \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}(P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha) &= \left[K_l^\alpha K_\nu^\beta - (K_l \cdot K_\nu) g^{\alpha\beta} + K_l^\beta K_\nu^\alpha \right] (P_{i\alpha}Q_\beta + P_{i\beta}Q_\alpha) \\ &= 2\left[(P_i \cdot K_l)(K_\nu \cdot Q) + (K_l \cdot Q)(K_\nu \cdot P_i) - (K_l \cdot K_\nu)(P_i \cdot Q) \right] \\ &= -2M_N m_l^2 \varepsilon_\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

En cuanto a la contracción de las partes antisimétricas:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^A &= \frac{W_3(Q^2)}{2M_N^2}(-i\epsilon^{\alpha\beta\delta\phi}K_{l_\delta}K_{\nu_\phi})(i\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho) \\
&\propto (-i\epsilon^{\alpha\beta\delta\phi}K_{l_\delta}K_{\nu_\phi})(i\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}P_i^\sigma Q^\rho) \\
&= 2(\delta_\mu^\delta\delta_\sigma^\phi - \delta_\sigma^\delta\delta_\mu^\phi)K_{l_\delta}K_{\nu_\phi}P_i^\sigma Q^\rho \\
&= 2[(P_i \cdot K_\nu)(Q \cdot K_l) - (P_i \cdot K_l)(Q \cdot K_\nu)] \\
&= 2M_N\varepsilon_\nu [(\varepsilon_\nu + \varepsilon_l)(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l) - m_l^2], \tag{C.81}
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado la propiedad (C.21). Reagrupando los términos se obtiene, finalmente, que

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= (\tilde{\eta}_S^{\alpha\beta} + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta})(W_{\alpha\beta}^S + W_{\alpha\beta}^A) = \tilde{\eta}_S^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^S + \tilde{\eta}_A^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^A \\
&= 2W_1(Q^2)\varepsilon_\nu (\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l) \\
&+ W_2(Q^2)\varepsilon_\nu (\varepsilon_l + |\vec{k}_l| \cos \theta_l) \\
&+ \frac{W_3(Q^2)}{M_N}\varepsilon_\nu [(\varepsilon_\nu + \varepsilon_l)(\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l) - M_l^2] \\
&+ \frac{m_l^2}{M_N^2}W_4(Q^2)\varepsilon_\nu (\varepsilon_l - |\vec{k}_l| \cos \theta_l) \\
&- \frac{m_l^2}{M_N}W_5(Q^2)\varepsilon_\nu. \tag{C.82}
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] J.A. Caballero Carretero. *Los neutrinos : las partículas elementales que todo lo atraviesan*. RBA, 2015. ISBN: 978-84-473-8307-8.
- [2] B. Pontecorvo. “Electron and Muon Neutrinos”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 37 (1959), págs. 1751-1757.
- [3] G. Danby et al. “Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos”. En: *Physical Review Letters* 9 (1962), págs. 36-44. DOI: 10.1103/PhysRevLett.9.36.
- [4] *Particle Data Group*. URL: <https://pdg.lbl.gov/2022/listings/rpp2022-list-neutrino-prop.pdf> (visitado 20-07-2022).
- [5] M. Aker et al. “Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity”. En: *Nature Phys.* 18.2 (2022), págs. 160-166. DOI: 10.1038/s41567-021-01463-1. arXiv: 2105.08533 [hep-ex].
- [6] Franz Mandl y Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. 2.^a ed. John Wiley & Sons, Ltd., 2010. ISBN: 9780471496830.
- [7] Francis Halzen y Alan D. Martin. *Quarks and leptons : an introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, Inc., 1984. ISBN: 9780471887416.
- [8] C. S. Wu et al. “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. En: *Phys. Rev.* 105 (4 1957), págs. 1413-1415. DOI: 10.1103/PhysRev.105.1413.
- [9] S.M. Bilenky y B. Pontecorvo. “Lepton mixing and neutrino oscillations”. En: *Physics Reports* 41 (1978). DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(78\)90095-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90095-9).
- [10] T. Kajita, M. Koshiba y A. Suzuki. “On the origin of the Kamiokande experiment and neutrino astrophysics”. En: *The European Physical Journal H* 37 (jun. de 2012). DOI: 10.1140/epjh/e2012-30007-y.

- [11] A. Bellerive et al. “The Sudbury Neutrino Observatory”. En: *Nuclear Physics B* 908 (2016). DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.04.035.
- [12] *Science and Technology Facilities Council: Particle Physics*. URL: <https://www.ppd.stfc.ac.uk/Pages/T2K.aspx> (visitado 23-08-2022).
- [13] Carlo Giunti y Chung W Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, Incorporated, 2007. ISBN: 9780191523229.
- [14] M.I. Gallardo Fuentes. “Apuntes de Teoría Cuántica de Campos”. Departamento de FAMN. Universidad de Sevilla. 2022.
- [15] J. E. Amaro et al. “Using electron scattering superscaling to predict charge-changing neutrino cross sections in nuclei”. En: *Phys. Rev. C* 71 (2005), pág. 015501. DOI: 10.1103/PhysRevC.71.015501.
- [16] Anthony W. Thomas y Wolfram Weise. *The Structure of the Nucleon*. Wiley, 2001. ISBN: 9783527402977. DOI: 10.1002/352760314X.
- [17] Raúl González Jiménez. “Violación de paridad en dispersión elástica y cuasielástica de electrones por nucleones y núcleos”. Tesis doct. Universidad de Sevilla, 2014.
- [18] S. Galster et al. “Elastic electron-deuteron scattering and the electric neutron form factor at four-momentum transfers $5\text{fm}^{-2} < q^2 < 14\text{fm}^{-2}$ ”. En: *Nuclear Physics B* 32 (1971), págs. 221-237. DOI: 10.1016/0550-3213(71)90068-X.
- [19] R. Bradford, A. Bodek, H. Budd y J. Arrington. *A New Parameterization of the Nucleon Elastic Form Factors*. 2006. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.08.028>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563206005184>.
- [20] C. Crawford et al. “The Role of Mesons in the Electromagnetic Form Factors of the Nucleon”. En: (2010). DOI: 10.1103/PhysRevC.82.045211. URL: <http://arxiv.org/abs/1003.0903><http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.82.045211>.
- [21] G. D. Megias et al. “New evaluation of the axial nucleon form factor from electron- and neutrino-scattering data and impact on neutrino-nucleus cross sections”. En: *Physical Review C* 101 (2020). ISSN: 24699993. DOI: 10.1103/PhysRevC.101.025501.

- [22] Particle Data Group et al. “Review of Particle Physics”. En: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2022 (2022), pág. 083C01. ISSN: 2050-3911. DOI: 10.1093/ptep/ptac097. URL: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>.
- [23] Aaron S. Meyer, Minerba Betancourt, Richard Gran y Richard J. Hill. “Deuterium target data for precision neutrino-nucleus cross sections”. En: *Phys. Rev. D* 93 (2016), pág. 113015. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.113015. URL: <http://arxiv.org/abs/1603.03048>.
- [24] J. Nieves, I. Ruiz Simo y M.J. Vicente Vacas. “The nucleon axial mass and the MiniBooNE quasielastic neutrino–nucleus scattering problem”. En: *Physics Letters B* 707.1 (2012), págs. 72-75. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.11.061. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2011.11.061>.
- [25] T. Cai *et al.* “Measurement of the axial vector form factor from antineutrino–proton scattering”. En: *Nature* 614 (2023), págs. 48-53. DOI: 10.1038/s41586-022-05478-3.
- [26] W. A. Mann *et al.* “Study of the Reaction $\nu + n \rightarrow \mu^- + p$ ”. En: *Phys. Rev. Lett.* 31 (13 1973), págs. 844-847. DOI: 10.1103/PhysRevLett.31.844. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.844>.
- [27] T. Kitagaki *et al.* “High-energy quasielastic $\nu_\mu n \rightarrow \mu^- p$ scattering in deuterium”. En: *Phys. Rev. D* 28 (3 1983), págs. 436-442. DOI: 10.1103/PhysRevD.28.436. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.436>.
- [28] N. J. Baker *et al.* “Quasielastic neutrino scattering: A measurement of the weak nucleon axial-vector form factor”. En: *Phys. Rev. D* 23 (11 1981), págs. 2499-2505. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.2499. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.2499>.
- [29] S. Bonetti *et al.* “Study of quasi-elastic reactions of ν and $\bar{\nu}$ in Gargamelle”. En: *Il Nuovo Cimento A* 38 (3 1977), págs. 260-270. ISSN: 0369-3546. DOI: 10.1007/BF02730023.
- [30] M. Pohl *et al.* “Experimental study of the reaction $\nu n \rightarrow \mu^- + p$ ”. En: *Nuovo Cimento, Lett.* 26 ser.2.11 (1979), págs. 332-6. URL: <http://cds.cern.ch/record/875277>.

- [31] G. Fanourakis *et al.* “Study of low-energy antineutrino interactions on protons”. En: *Phys. Rev. D* 21 (3 1980), págs. 562-568. DOI: 10.1103/PhysRevD.21.562. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.21.562>.
- [32] N. Armenise *et al.* “Charged current elastic antineutrino interactions in propane”. En: *Nuclear Physics B* 152.3 (1979), págs. 365-375. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90087-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90087-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379900877>.
- [33] L. Aliaga *et al.* “Design, Calibration, and Performance of the MINERvA Detector”. En: (2013). DOI: 10.1016/j.nima.2013.12.053. URL: <http://arxiv.org/abs/1305.5199><http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2013.12.053>.
- [34] Geoffrey F. Chew y Gian Carlo Wick. “The Impulse Approximation”. En: *Phys. Rev.* 85 (4 1952), págs. 636-642. DOI: 10.1103/PhysRev.85.636. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.636>.
- [35] C. Maieron, T. W. Donnelly e Ingo Sick. “Extended superscaling of electron scattering from nuclei”. En: *Physical Review C* 65 (2002). DOI: 10.1103/physrevc.65.025502. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.65.025502>.
- [36] J. E. Amaro *et al.* “Electron- versus neutrino-nucleus scattering”. En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 47.12 (2020), pág. 124001. DOI: 10.1088/1361-6471/abb128. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/abb128>.
- [37] K. Abe *et al.* “First combined measurement of the muon neutrino and antineutrino charged-current cross section without pions in the final state at T2K”. En: *Phys. Rev. D* 101 (11 2020), pág. 112001. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.112001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.112001>.
- [38] K. Abe *et al.* “Simultaneous measurement of the muon neutrino charged-current cross section on oxygen and carbon without pions in the final state at T2K”. En: *Phys. Rev. D* 101 (11 2020), pág. 112004. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.112004. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.112004>.
- [39] G.D. Megías Vázquez. “Charged-current neutrino interactions with nucleons and nuclei at intermediate energies”. Tesis doct. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear. Universidad de Sevilla, 2017.