
Tesis Doctoral: Pandeo lateral de estructuras metálicas en arco

Presentada por: Ignacio Hinojosa Sánchez-Barbudo

Dirigida por: José Luis Manzanares Japón

Universidad de Sevilla

Departamento de Mecánica de Medios Continuos

Julio 2009

A mi hijo Ignacio

1. EL ARCO: GENERALIDADES.....	1.1
1.1. INTRODUCCIÓN.....	1.1
1.2. MATERIALES	1.8
1.3. TIPOLOGÍAS.....	1.10
1.4. UN POCO DE HISTORIA. LOS GRANDES PUENTES METÁLICOS EN ARCO	1.13
1.5. INESTABILIDAD EN ARCOS METÁLICOS	1.22
1.5.1. Tipos de inestabilidad	1.22
1.5.2. Factores que influyen en la inestabilidad	1.22
1.6. DIFICULTAD PARA EL PROYECTISTA DE PUENTES DE ARCOS METÁLICOS.....	1.24
2. OBJETO DE LA PRESENTE TESIS	2.1
2.1. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO DEL PANDEO DE PIEZAS EN SU PLANO.....	2.1
2.2. ANTECEDENTES DEL PANDEO DE PIEZAS FUERA DE SU PLANO (PANDEO LATERAL)	2.5
2.2.1. Fundamento Teórico.....	2.5
2.2.2. Eurocódigo	2.10
2.2.3. R.P.M.-95	2.12
2.2.4. Pandeo por flexión y torsión en piezas comprimidas y flectadas	2.15
2.3. EL CASO DE LOS ARCOS	2.17
2.4. OBJETIVO PROPUESTO	2.18
2.5. METODOLOGÍA PROPUESTA.....	2.18
2.6. TRABAJOS SIMILARES	2.19
2.7. ÁMBITO DE LA TESIS.....	2.20
3. ARCOS METÁLICOS. ESTADO DEL ARTE	3.1
3.1. INTRODUCCIÓN	3.1
3.2. ESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL LATERAL.....	3.2
3.2.1. Arcos exentos	3.2
3.2.2. Arcos con tablero.....	3.6
3.3. ESTABILIDAD ELÁSTICA LATERAL NO LINEAL.....	3.11
3.4. LA NO LINEALIDAD DEL MATERIAL	3.12
3.5. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO	3.12
3.5.1. Arcos exentos	3.13
3.5.2. Arcos con tablero y/o arriostrados lateralmente	3.23
3.6. CRITERIOS DE DISEÑO.....	3.31
3.7. CONCLUSIONES.....	3.33

4.	ANÁLISIS DE ARCOS METÁLICOS	4.1
4.1.	OBJETO DEL CAPÍTULO	4.1
4.2.	REFLEXIONES SOBRE LA NATURALEZA DEL PANDEO LATERAL DE ARCOS.....	4.1
4.3.	LA ESTRUCTURA LINEAL	4.2
4.3.1.	Planteamiento de la Resistencia de Materiales.....	4.2
4.3.2.	Análisis matricial	4.5
4.3.3.	La antifunicularidad.....	4.6
4.3.4.	Comportamiento estructural lineal y validez del modelo de barras.....	4.10
4.4.	LA ESTRUCTURA ELÁSTICA NO LINEAL.....	4.11
4.4.1.	Planteamiento de la Resistencia de Materiales.....	4.11
4.4.2.	Comportamiento estructural no lineal y validez del modelo de barras.....	4.12
4.5.	EL MATERIAL NO LINEAL.....	4.14
4.5.1.	Introducción	4.14
4.5.2.	Descripción del acero como material no lineal	4.14
4.5.3.	Formulación de la plasticidad.....	4.18
4.5.4.	Consideraciones plásticas respecto al modelo del arco.....	4.18
4.6.	IMPERFECCIONES ESTRUCTURALES.....	4.18
4.6.1.	Las autotensiones.....	4.19
4.6.1.1.	Tipos de autotensiones	4.19
4.6.1.2.	Las tensiones residuales según la ECCS.....	4.21
4.6.1.3.	Bases de las curvas de la ECCS	4.25
4.6.1.4.	Las actuales normativas y las tensiones residuales.....	4.27
4.6.1.5.	Las tensiones residuales adoptadas en la presente Tesis	4.28
4.6.2.	Variaciones en el límite elástico	4.31
4.7.	IMPERFECCIONES CONSTRUCTIVAS.	4.32
4.7.1.	Introducción	4.32
4.7.2.	Tipos de imperfecciones constructivas según la ECCS.....	4.33
4.7.3.	Bases de las curvas ECCS	4.35
4.7.4.	Las normativas.....	4.36
4.7.5.	Imperfección geométrica adoptada en la presente Tesis	4.37
5.	MODELOS DE CÁLCULO APLICADOS EN EL ESTUDIO. DEFINICIÓN DE LOS VALORES DE REFERENCIA.	5.1
5.1.	SOFTWARE EMPLEADO PARA LA MODELIZACIÓN.	5.1
5.2.	MODELIZACIÓN DEL ARCO CON ELEMENTOS "BEAM"	5.2
5.3.	MODELIZACIÓN DEL ARCO CON ELEMENTOS "SHELL"	5.5

5.4.	CONDICIONES DE CONTORNO DE LOS MODELOS DE ESTUDIO.....	5.8
5.4.1.	Elemento BEAM 4	5.8
5.4.1.1.	Arco biapoyado	5.8
5.4.1.2.	Arco biempotrado.....	5.9
5.4.2.	Elemento SHELL 43.....	5.10
5.4.2.1.	Arco biapoyado	5.10
5.4.2.2.	Arco biempotrado.....	5.12
5.4.3.	Rigidización de los apoyos en el caso del elemento SHELL 43	5.12
5.5.	VALORES DE REFERENCIA	5.13
6.	ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN LOS ARCOS	6.1
6.1.	CONCEPTO GENERAL DE INESTABILIDAD.	6.1
6.2.	TIPOS DE INESTABILIDAD.....	6.2
6.3.	TIPOS DE CÁLCULO DE INESTABILIDAD	6.2
6.4.	LA INESTABILIDAD LATERAL EN ARCOS	6.4
7.	INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS.....	7.1
7.1.	HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS DE UN CÁLCULO DE INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL TANTO EN COMO FUERA DEL PLANO	7.1
7.2.	UN REPASO A LA INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL DE ARCOS EN SU PLANO. VALIDACIÓN DEL MODELO DE CÁLCULO.	7.1
7.3.	INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS ...	7.23
8.	INESTABILIDAD ELÁSTICA NO LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS.....	8.1
8.1.	HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS DE UN CÁLCULO DE INESTABILIDAD ELÁSTICA NO LINEAL GLOBAL	8.1
8.2.	ESTADO DEL ARTE	8.1
8.3.	CÁLCULOS DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	8.3
8.4.	CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO ELÁSTICO NO LINEAL OBTENIDAS EN LA PRESENTE TESIS. COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON EL CÁLCULO CLÁSICO.	8.8
8.4.1.	Cargas críticas de pandeo elástico no lineal en el plano	8.8
8.4.2.	Cargas críticas de pandeo elástico no lineal fuera del plano	8.18
9.	CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE LOS ARCOS FUERA DEL PLANO	9.1
9.1.	MODELOS DE DETERMINACIÓN DE LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO	9.1

9.2. MODELOS ELASTOPLÁSTICOS DE CARGA ÚLTIMA	9.3
9.2.1. Introducción	9.3
9.2.2. Fundamentos de cálculo del Método de los Elementos Finitos.....	9.4
9.2.2.1. Introducción	9.4
9.2.2.2. Relaciones tensión-deformación	9.4
9.2.2.3. Obtención de las matrices de la estructura	9.8
9.2.2.4. Cálculo de deformaciones y tensiones	9.10
9.2.3. Aplicación del M.E.F. al caso no lineal	9.12
9.2.4. Planteamiento de la no linealidad geométrica.....	9.14
9.2.4.1. Concepto	9.14
9.2.4.2. Formulación matemática	9.15
9.2.4.3. Implementación en Ansys.....	9.17
9.2.5. Planteamiento de la no linealidad del material.....	9.24
9.2.5.1. Concepto	9.24
9.2.5.2. Tipos de no linealidad del material	9.25
9.2.5.3. El modelo elegido: plasticidad independiente del tiempo.....	9.26
9.2.5.4. Implementación en ANSYS	9.29
9.2.6. Elección del elemento de discretización	9.39
9.2.6.1. Introducción	9.39
9.2.6.2. El elemento SHELL 43 en Ansys.....	9.40
9.2.6.3. Relaciones tensión-deformación	9.46
9.2.7. Elección del algoritmo de cálculo.....	9.47
9.2.7.1. Procedimiento de Newton-Raphson	9.47
9.2.7.2. Convergencia del Método de Newton-Raphson	9.48
9.3. ESTADO DEL ARTE	9.48
9.4. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DEL ARCO MODELIZADO.....	9.49
9.5. CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL ACERO. PARÁMETROS ADOPTADOS EN EL MODELO DE CÁLCULO	9.54
9.6. MODELIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO	9.55
9.7. MODELIZACIÓN DEL ESTADO DE AUTOTENSIONES.....	9.56
9.8. IMPERFECCIÓN GEOMÉTRICA CONSTRUCTIVA EMPLEADA.....	9.58
9.9. DEFINICIÓN DE LAS CARGAS ACTUANTES	9.59
9.10. ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DEL MODELO. CRITERIO DE VALIDACIÓN	9.65
9.11. ALGUNOS DETALLES MÁS A TENER EN CUENTA EN EL CÁLCULO	9.68
9.12. CÁLCULOS REALIZADOS	9.79
9.12.1. En el plano	9.80
9.12.2. Fuera del plano	9.80

9.13. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS. COMPARACIÓN CON LOS OBTENIDOS POR OTROS AUTORES.	9.83
9.13.1. Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco en su plano	9.83
9.13.2. Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco fuera de su plano	9.90
9.14. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.....	9.101
9.15. INFLUENCIA DEL ESPESOR DE LAS CHAPAS QUE CONFIGURAN LA SECCIÓN CAJÓN EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO.....	9.115
9.16. INFLUENCIA DE LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO. COEFICIENTE DE FORMA	9.118
9.17. CURVAS DE PANDEO LATERAL DE ARCOS PARABÓLICOS CON SECCIÓN TRANSVERSAL CAJÓN DE 1 M DE CANTO Y RELACIÓN FLECHA-LUZ 0,10 SOMETIDOS A UNA CARGA LINEAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN PLANTA.....	9.120
9.18. INFLUENCIA DE LA RELACIÓN FLECHA-LUZ EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO.....	9.124
9.19. INFLUENCIA DEL CANTO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO	9.134
10. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE ARCOS CON TABLERO FUERA DEL PLANO.....	10.1
10.1. PUENTES ARCO.....	10.1
10.2. MODELIZACIÓN DE ARCOS CON TABLERO SUPERIOR.....	10.1
10.3. CÁLCULOS REALIZADOS	10.5
10.4. RESULTADOS OBTENIDOS.....	10.5
10.5. INFLUENCIA DEL TABLERO EN LA CARGA ÚLTIMA	10.7
11. CONCLUSIONES	11.1
11.1. CONCLUSIONES.....	11.1
11.2. FUTUROS TRABAJOS	11.7

AGRADECIMIENTOS

BIBLIOGRAFÍA

1. EL ARCO: GENERALIDADES

1. EL ARCO: GENERALIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la humanidad, el arco ha sido quizás el elemento estructural singular más utilizado por el hombre en todo tipo de construcciones, desde las puramente arquitectónicas de gran importancia social (circos, catedrales, palacios), hasta las necesarias para salvar los problemas de adaptación a la naturaleza resueltos por la ingeniería (puentes, acueductos, etc.). El arco desapareció de las tipologías estructurales a partir del siglo XIX con la aparición de nuevos materiales que provocaron su sustitución progresiva por elementos rectos como vigas y estructuras porticadas.

El arco siempre aparece para salvar una distancia entre dos puntos, bien como cubierta, bien para sostener un forjado o formando parte de un puente. Funciona fundamentalmente sometido a cargas en su plano que, frecuentemente, se distribuyen sobre él de manera uniforme. Los esfuerzos predominantes que van a marcar las reglas del juego en el dimensionamiento de su sección son, por lo tanto, el esfuerzo axil y el esfuerzo flector, en adelante axil y flector toda vez que su directriz suele eludir hábilmente los esfuerzos cortantes, en adelante cortantes.

Si el proyectista pudiera elegir cuál de estos dos esfuerzos debería dominar en su estructura, sin ningún género de dudas optaría por el esfuerzo axil. Es evidentemente más económico, ya que da lugar a una distribución de tensiones constante sobre la sección, en la que todas las fibras trabajan por igual. El flector, por el contrario, sobrecarga las fibras extremas de la sección, dejando prácticamente inactivas las centrales. Además resulta menos confortable para los elementos secundarios porque sus deformaciones son mucho mayores que las provocadas por el axil.

Las tensiones provocadas por el axil son inversamente proporcionales al área de la sección mientras que las provocadas por el momento flector lo son al momento resistente, es decir, a una potencia del canto.

Si el primitivo constructor pretendía minimizar las tensiones provocadas por el esfuerzo axial, debía maximizar el área de la sección fuera cual fuera su forma geométrica. Sin embargo, las tensiones derivadas de la flexión debían acotarse mediante la inercia, es decir, a través del canto. Por ello, las piezas sometidas a flexión exigen siempre mayores dimensiones que las sometidas sólo a axial.

Es lógico que los primeros constructores optasen por diseñar estructuras que soportasen predominantemente axiales y que, en la actualidad, la optimización del material para salvar grandes luces conduzca a igual criterio. Así que, una vez adoptado como predilecto el esfuerzo axial, hay que elegir entre tracción y compresión. Aunque la compresión presenta el aspecto negativo de la inestabilidad, la tracción es una tensión difícilmente soportable por los materiales pétreos, los más abundantes en la construcción, y que sólo se comportan bien cuando están comprimidos. No es de extrañar, por tanto, que la construcción tradicional buscara formas que introdujeran básicamente esfuerzos axiales de compresión supliendo con la robustez su debilidad a las tracciones.

Sin embargo, una circunstancia viene a romper este esquema tan simplista: la posibilidad de pandeo de la pieza comprimida está íntimamente relacionada con su esbeltez, y por lo tanto, con su inercia. Lo que lleva a que, ante un esfuerzo axial de compresión, haya que volver a dimensionar la pieza bajo la óptica de limitar la esbeltez y construirla con rigidez a flexión. No es posible diseñar estructuras sólo comprimidas ya que resulta inevitable admitir en ellas la aparición de las flexiones.

Si se optara por la tracción, esfuerzo ideal desde el punto de vista de dimensionamiento si se cuenta con el material adecuado, la única tipología estructural que trabaja a tracción pura por excelencia es el cable sometido a cargas cualesquiera. Inteligentemente, gracias a su nula rigidez a flexión, cambia de geometría y adopta la forma de funicular de dichas cargas.

Se puede decir que la naturaleza es sabia y modifica automáticamente la forma estructural buscando el paradigma de la tracción.

Pero esta ventaja se torna en inconveniente cuando las cargas varían con el tiempo, lo que provoca que el cable sea una estructura voluble que cambia de

forma cuando lo hace su solicitación, lo cual no deja de ser incómodo para el usuario que busca la solidez en las estructuras que utiliza. Para salvar este escollo, el arco aparece como la alternativa simétrica al cable, trabajando a compresión. La forma que intuitivamente se le da al arco es aquella que consiga la compresión pura en toda su directriz, el antifunicular, y, por tanto, dependerá de la tipología de la carga. Arcos parabólicos lo serán de cargas uniformes en planta, los catenarios de su propio peso y los circulares serán antifuniculares de cargas radiales.

Por otra parte, una vez definida la geometría, la compresión en el arco depende del peralte: los arcos más peraltados sufren menores axiles que los muy rebajados, y también menores empujes sobre el estribo. Por el contrario, disminuir el rebajamiento sin reducir la luz del arco, aumenta la flexión transversal por empujes laterales de viento. Normalmente se eligen relaciones flecha-luz comprendidas entre $1/5$ y $1/7$. Al llegarse al décimo los efectos tensionales de retracción (en los de hormigón) y térmicos aumentan mucho sobre todo en los arcos empotrados y rígidos.

El rebajamiento no puede forzarse mucho, no sólo por los empujes horizontales, sino porque el acortamiento debido al axil provoca cambios de geometría no despreciables. No sólo pueden inducir un fenómeno de flexión excesiva sino que aproxima al arco a un evidente riesgo de pandeo.

Por el contrario, al aumentar el peralte más allá del cuarto, el empuje va disminuyendo más lentamente que la relación luz/flecha, y pierde interés el peraltado frente a los inconvenientes que lleva consigo de pandeo lateral. Por eso no se adoptan normalmente proporciones muy apuntadas.

La necesaria rigidez del arco para obviar la inestabilidad le proporciona ventajas e inconvenientes: entre las primeras hay que destacar que lo hace invariante de forma ante las cargas variables, al contrario que el cable, lo que posibilita su uso en edificación; entre las segundas, la variación de posición de las cargas induce la aparición de flexiones porque su directriz se separa del antifunicular de las mismas; otra desventaja viene del hecho de que no puede acortarse sin la aparición de flexiones, aún con cargas que en teoría sólo darían axil. Puede afirmarse que el inconveniente mayor que proporciona esa rigidez es que el modelo de antifunicularidad queda convertido en una entelequia, aunque en

muchos casos valga desde un punto de vista práctico para simular la realidad: a pesar de que la directriz inicial siga la forma del antifunicular de las cargas, si la luz es grande y las tensiones elevadas, el acortamiento de la directriz por efecto de la compresión obliga al arco a cambiar de forma; entonces aparecen giros de las secciones y, por lo tanto, flexiones. Es decir, el arco es una estructura que trabaja siempre a flexo-compresión, incluso con cargas para las que su directriz sea el antifunicular perfecto. Por consiguiente, no cabe hablar estrictamente de antifunicularidad y hay que disponer siempre una importante resistencia a flexión.

Los arcos dan empujes horizontales sobre los apoyos. Si la directriz siguiese exactamente el antifunicular de las cargas y el arco fuera prácticamente inelongable, la resultante sobre el arranque del arco seguiría la tangente al eje. Por lo tanto, en el arranque resulta más tendida y mayor cuanto más rebajado es el arco. El empuje horizontal en los arcos biapoyados es del orden de $\frac{qL^2}{8F}$

siendo q la carga repartida, L la cuerda del arco y f la flecha. En los arcos empotrados es menor porque la flexión ayuda al trabajo resistente. Pero ni la diferencia es muy grande ni interesa disminuirla aumentando la rigidez, ya que en general el trabajo de flexión resulta más caro que el de compresión.

El acortamiento por deformación de los arcos lleva implícito un cambio en la directriz que rebaja el peralte y provoca un aumento de los axiles: el arco favorece la inestabilidad. Sin embargo, dicha inestabilidad es menos grave que la que se presenta en columnas, ya que al estar fijos los apoyos, el arco tiende a tomar una forma de pandeo más resistente que en el caso de un soporte, cuyos extremos pueden aproximarse al pandear. En consecuencia, la esbeltez admisible del arco puede ser superior a la de la columna.

El hecho de que los axiles dependan de la deformada hace del arco una estructura no lineal por excelencia. Esta no linealidad se ve aumentada por la temperatura, la cual no sólo tensiona el arco por su propio efecto, sino que, además, los cambios térmicos inducen variaciones en la directriz que aumentan o disminuyen dichos esfuerzos.

Como resumen de esta reflexión cabe decir que, a la hora de diseñar un arco, hay que tener en cuenta que el intento de disminuir las flexiones realizan-

do arcos poco rígidos se ve limitado por el aumento de esbeltez que conduce a la inestabilidad.

La inestabilidad en arcos se manifiesta de tres maneras:

a) Pandeo en el plano del arco

En las Figuras 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 se muestran tres posibles modos de pandeo en arcos en su plano ante cargas que hacen al arco trabajar a compresión pura. Como se ve, el modo de pandeo puede ser simétrico o antisimétrico según su geometría.

Tanto los arcos biempotrados como los biarticulados, si son peraltados, pandean de modo antisimétrico ante un estado de compresión pura, y los triarticulados tienen un modo de pandeo simétrico para relaciones flecha-luz bajas y antisimétrico cuando dichas relaciones son altas.

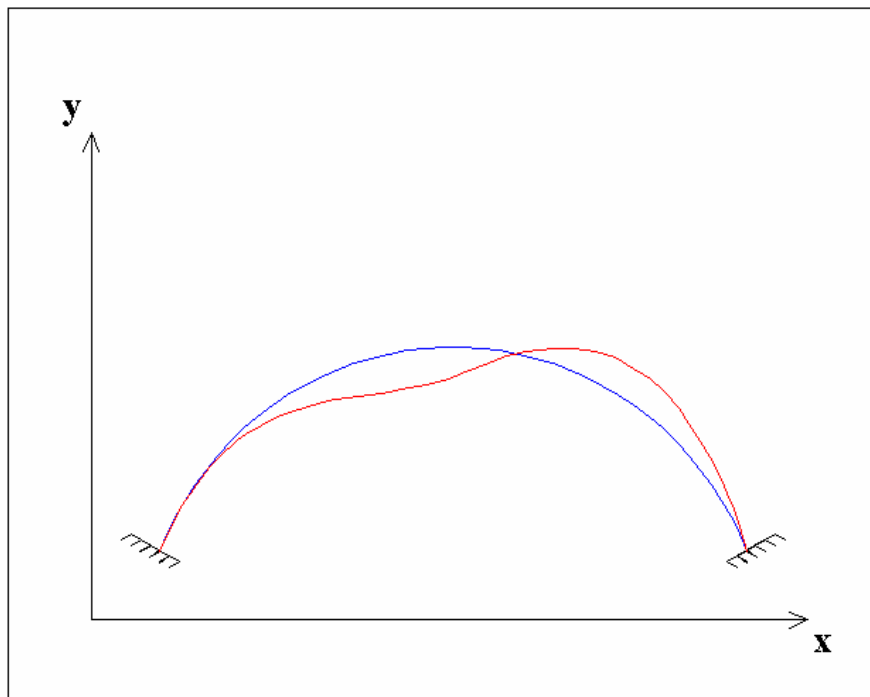


Figura 1.1.1. "Pandeo asimétrico en el plano (arco biempotrado)."

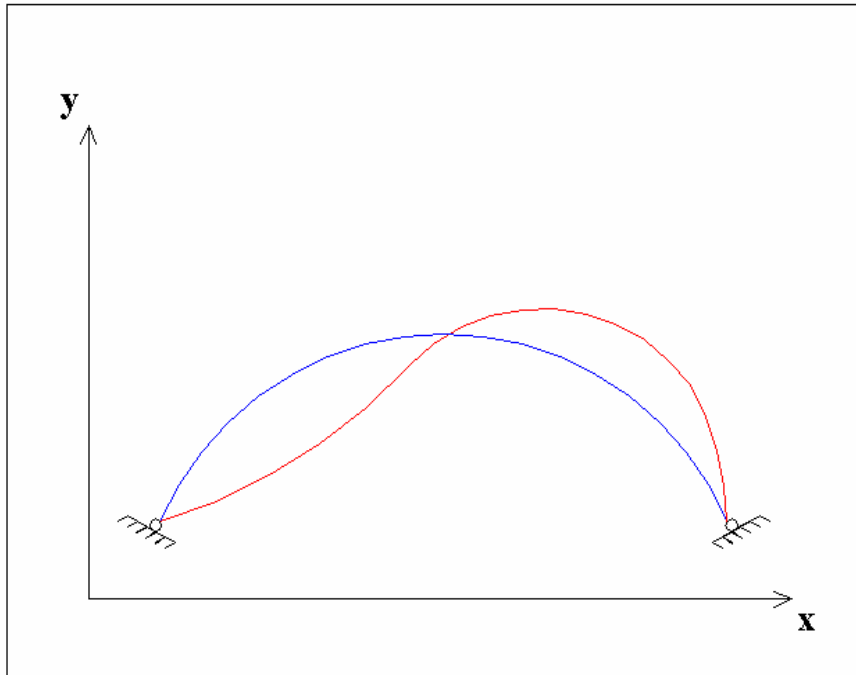


Figura 1.1.2. "Pandeo antisimétrico en el plano (arco biapoyado)."

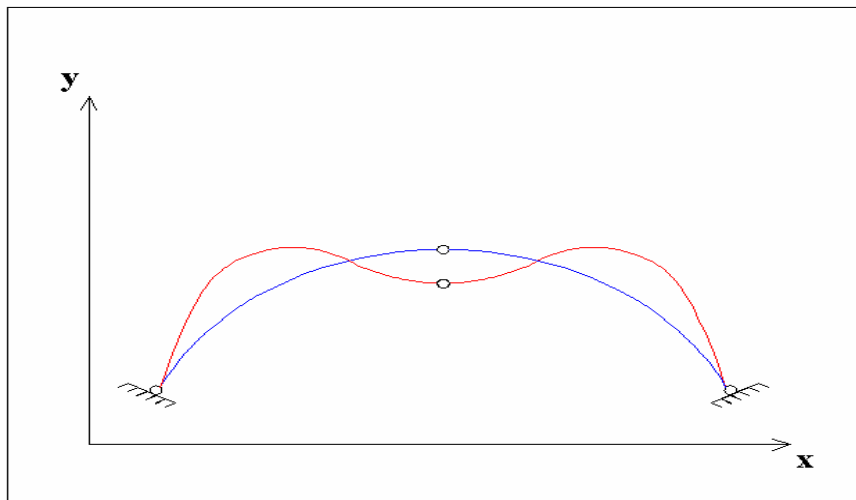


Figura 1.1.3. "Pandeo simétrico en el plano (arco triarticulado)."

b) Snap-through

Cuando los arcos son muy rebajados, los corrimientos verticales de la directriz son del mismo orden de magnitud que sus ordenadas. El cambio de geometría induce tal aumento de los axiles que puede provocar la inversión del arco, alcanzando éste una nueva configuración en equilibrio adoptando una geometría radicalmente distinta a la original para, con esa nueva posición de equilibrio, continuar con su labor resistente (Figura 1.1.4). Evidentemente, al alcanzar esa nueva configuración se da por agotado el arco porque no cumple las condiciones de servicio. Es una forma de pandeo simétrica de los arcos aunque se encuentren biarticulados o biempotrados.

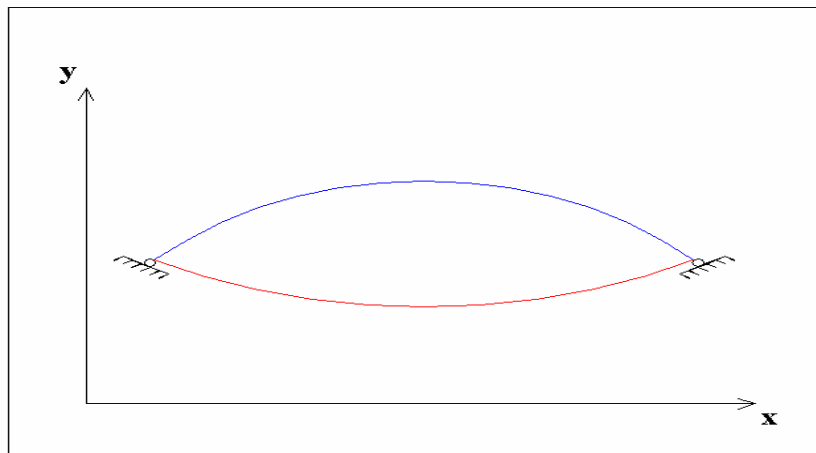


Figura 1.1.4. "Snap-through de un arco rebajado."

c) Pandeo lateral

Si el arco es estrecho aparece el riesgo de pandeo saliéndose del plano, con flexión lateral de las secciones y la aparición de torsión. Desde un punto de vista teórico, caben tres causas de pandeo lateral: por torsión, por flexión en el plano y por flexión lateral.

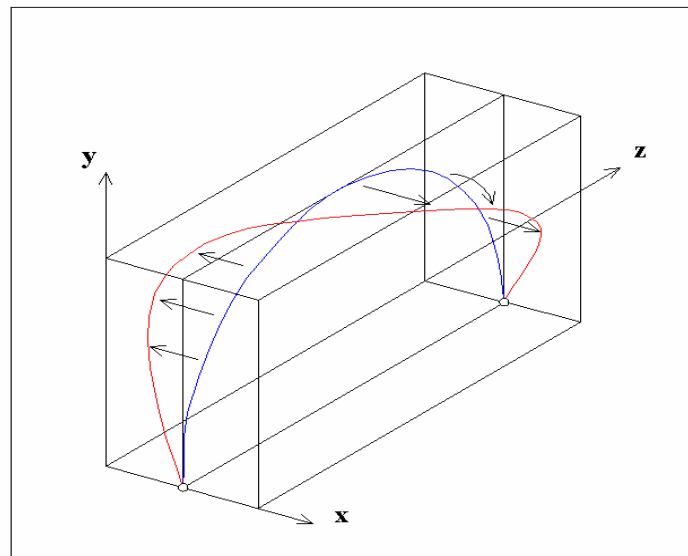


Figura 1.1.5. "Pandeo lateral del arco."

1.2. MATERIALES

Tal y como se ha descrito en el apartado anterior, el arco es una estructura básicamente comprimida, que resulta ideal para los materiales pétreos que soportan muy bien la compresión y tienen mínima resistencia a tracción. Esta ha sido la razón fundamental por la que su uso se ha extendido tanto a lo largo de la historia. Hasta el siglo XVIII no se utilizó la fundición para construir puentes y en el siglo XIX se conocieron el acero y el hormigón armado. Antes sólo se contaba con piedra, madera y ladrillo para la construcción. Su resistencia a compresión sólo podía ser aprovechada por tipologías de arcos en las que la flexión asociada era menos importante que el axil y por tanto no introducía tracciones, sólo compresiones. Cuando lo hacía, era palpable porque siempre se veía reflejada en la fisuración de las piedras o la apertura de las juntas.

Además, la economía del esfuerzo axil siempre ha hecho del arco de piedra la solución más indicada para salvar grandes luces; por eso ha sido la opción tradicional de puentes. Cabe citar bellísimos puentes de mampostería históricos: Alcántara, Martorell, Avignon, Valentré, Trinité (Florencia), Rialto (Venecia), Adolphe (Luxemburgo) y Austerlitz.

En 1879 se construyó el primer puente arco de fundición. Se trataba de una estructura sobre el Severn River en Inglaterra que permanece actualmente en servicio para peatones. A partir de entonces se construyeron notables puentes de acero entre los que destaca el Eads'Bridge sobre el Mississipi, con tres vanos del orden de 140 m, erigido en 1874 y soportando hoy un importante tráfico pesado. En esa época aparece el hormigón armado como elemento estructural. Su facilidad de puesta en obra y su capacidad para resistir flexiones importantes, permitiendo el aumento de las luces, induce a su empleo. Y aunque presentaba inconvenientes tales como la retracción que altera la geometría, la fluencia, que implica acortamientos importantes con el tiempo, elevado peso propio, que se traduce en un importante incremento de los empujes en los cimientos y dificultades constructivas, se recurrió a su empleo por economía. Durante décadas los arcos de hormigón eclipsaron a los metálicos.

Posteriormente, en el siglo XX, y a partir de los años 60, las cualidades de los arcos de acero permitieron a los proyectistas su reutilización, al encontrar en ellos muchas ventajas:

- No sufren el fenómeno de fluencia.
- Se reducen mucho los pesos propios. Por ello, su utilización resulta muy ventajosa cuando la luz alcanza límites para los que el hormigón armado requiere secciones y pesos demasiado fuertes. Este punto es muy interesante porque las grandes luces producen siempre grandes esfuerzos. El material más resistente los soporta con menos peso, y como éste puede llegar a ser más importante que la sobrecarga, resulta que la economía del material más resistente está duplicada en cierto modo.
- Se colocan en obra fácilmente. Bien en avance desde los estribos, bien con desplazamiento global de la estructura construída en seco: Puente de la Barqueta, Puente de la Cartuja (Sevilla).
- Soportan las flexiones más eficazmente que el hormigón.

Presentan, en cambio, como inconveniente fundamental, además de su mayor sensibilidad a las acciones, que el incremento de esbeltez de la solución metálica respecto a la de hormigón implica mayores riesgos de inestabilidad.

1.3. TIPOLOGÍAS

Los arcos se pueden clasificar:

a) Según la directriz

Las tipologías más frecuentemente estudiadas han sido las que buscaban un arco sometido a compresión pura, lo cual ha implicado una geometría antifunicular de la carga a la que estaba sometido. En este sentido, los diseñadores han trabajado siempre sobre los siguientes esquemas:

- Arcos circulares sometidos a presión radial.
- Arcos parabólicos sometidos a cargas uniformes en proyección horizontal
- Arcos catenaria sometidos a una carga uniforme a lo largo del eje del arco.

No hay que olvidar que cuando la sobrecarga móvil es fuerte respecto al peso propio, la forma de la directriz pierde importancia. Se tantean las funiculares y se consideran leyes de tensiones máximas para elegir una directriz apropiada. En la práctica, la escasa diferencia geométrica de los tipos parabólicos y catenarios con los primeros ha inducido a elegir la forma circular como la más frecuente.

También se han estudiado, aunque mucho más puntualmente debido a su escaso interés desde el punto de vista de la ingeniería, tipologías que hacen que el arco esté sometido a flexión fundamentalmente:

- Arcos circulares sometidos a carga puntual en corona.
- Arcos circulares sometidos a carga uniforme constante en proyección horizontal.

Todas estas tipologías se han analizado para arcos con distintos tipos de vínculos a lo largo de la historia del cálculo estructural.

b) Según las coacciones

Los tipos de arcos más usuales según sus condiciones de contorno son:

- Biempotrados
- Biarticulados
- Triarticulados
- Monoarticulados
- Atirantados

El más sencillo es el triarticulado, porque es isostático y no produce esfuerzos térmicos. Pero la realización de las rótulas es complicada. Además, aunque los esfuerzos de flexión desaparecen de las articulaciones, se concentran entre ellas. La ventaja de este tipo de arcos en el caso de los asientos es evidente, pero el inconveniente de su gran deformabilidad también.

Tanto el biarticulado como el monoarticulado son tipos intermedios que presentan parte de las ventajas del anterior. Son más deformables que el empotrado, y, a igualdad de tensiones admisibles, pueden servir para rebajar las térmicas y de movimiento de apoyos dentro de límites aceptables. El arco con sus dos extremos articulados es el más frecuentemente utilizado y, en el caso de los de piedra, la apertura de las juntas extremas los genera de forma automática.

c) Por la sección transversal

Aquí puede distinguirse entre los arcos de sección constante y los de sección variable. La tipificación de la ley de variación de la sección ha dado lugar a arcos específicos: (v.g. STRASSNER). Por la tipología de la sección se distingue entre arcos de alma llena y arcos triangulados.

Como resumen, cabe hablar de:

- Sección constante o variable
- Sección maciza o conformada con chapas
- Sección en cajón o abierta
- Alma llena o triangulada
- Arco aislado o arcos gemelos
- Arcos arriostrados o no

d) Por la posición del tablero

De igual manera, y para terminar con la breve descripción tipológica, cabe hablar de arcos:

- Con tablero superior
- Con tablero inferior
- Con tablero intermedio

Los elementos más importantes a considerar a la hora de diseñar un arco son:

- **Cimentación.** Si un puente debe atravesar un valle profundo con estribos abruptos, el arco es probablemente la mejor solución. La posición del nivel del agua en el valle condiciona que el tablero pueda ser superior, intermedio o inferior. También las características del terreno de cimentación inducen a considerar una posición u otra del arco respecto al tablero. Estribos incapaces de soportar empujes horizontales conducen a arcos atirantados con el tablero inferior.
- **Luz.** Los puentes en arco cubren un amplio abanico de luces entre 60 m y 550 m. Con los actuales aceros de alta resistencia cabe pensar en llegar a los 600 metros con soluciones viables y económicas.
- **Tipología.** Se ha de considerar el papel del coste a la hora de elegir entre secciones de alma llena y el empleo de cerchas. Estas últimas son las preferidas para luces por encima de los 300 m, aunque se utilizan para puentes más cortos si las dificultades de acceso exigen transportar piezas cortas. También en luces menores cabe elegir la cercha para puentes de ferrocarril y otros con cargas vivas muy elevadas.
- **Coacciones.** Aunque parece que los arcos biempotrados pueden ser más económicos, en la realidad la inmensa mayoría de puentes que se han construido últimamente han optado por la solución biarticulada. Con cierta frecuencia se ha optado por construir el arco triarticulado y, una vez erigido y sustentada la carga muerta, se ha cerrado la articulación central para soportar la sobrecarga como biarticulado.
- **Relación flecha-luz.** Los valores normales oscilan entre $1/5$ y $1/7$. Sin embargo, los arcos más planos, llegando a $1/10$, resultan mucho más estéticos y, con buenas condiciones de cimentación, no más costosos.

- **Relación canto-luz.** Los arcos de tablero superior y sección armada suelen tener cantos comprendidos entre $1/50$ a $1/80$ de la luz. Si el tablero está suspendido y atiranta el arco, las relaciones descienden a valores comprendidos entre $1/140$ y $1/190$. Si la tipología adoptada es la de cercha los cantos aumentan a valores entre $1/25$ y $1/40$.
- **Tipo de sección transversal.** Prácticamente todos los arcos de sección de alma llena están formados por vigas cajón. Sólo los de muy corta luz (por debajo de 50 m) utilizan perfiles abiertos. De ahí que la presente Tesis se centre en las secciones en cajón. Incluso los arcos de celosía han adoptado para sus barras las secciones cerradas, bien cajones armados, bien tubos.

1.4. UN POCO DE HISTORIA. LOS GRANDES PUENTES METÁLICOS EN ARCO

Ya se ha comentado anteriormente que en 1.879 un puente de fundición en el suroeste de Inglaterra había abierto la vía de las construcciones metálicas para puentes, campo donde la ligereza de la estructura repercute de modo directo en la luz que es posible salvar en cada caso. Los materiales férreos han dado lugar a lo largo del siglo XIX a un gran desarrollo de tipos estructurales: tramos rectos, puentes colgantes (Menai y Clifton) y arcos (Telford y Garabit).

En la primera mitad del siglo XX los arcos de acero alcanzan un desarrollo considerable ante la necesidad de cubrir luces importantes, superando la problemática generada por los puentes colgantes en lo que se refiere a la deformabilidad del tablero bajo grandes cargas concentradas y a sus oscilaciones bajo viento lateral. La luz límite está en torno a los 800 m, limitación generada por el posible pandeo del arco en el sentido transversal al plano del puente (pandeo lateral), a lo que se hace frente con suficiente rigidez transversal (canto transversal). Asimismo, el proceso constructivo del arco encarece su coste con respecto al de otros tipos estructurales, tales como los colgantes, rectos, etc.

En 1.900, los diez puentes metálicos en arco de mayor luz hasta entonces construidos eran:

Año	Puente	Luz (m)	Flecha (m)	Función
1.898	Niágara (EE.UU)	256	45,7	Carretera
1.898	Rin (cerca de Bonn)	188	29,6	Carretera
1.898	Rin (Dusseldorf)	181	27,7	Carretera
1.885	Luis I (Oporto)	172	44,5	Carretera
1.897	Wuper (Müngsten)	170	66,8	FC
1.897	Niágara (EE.UU)	168	34,7	Carretera+FC
1.884	Garabit (Francia)	165	56,9	FC
1.894	Levensan	163	21,1	Carretera+FC
1.877	María Pía (Oporto)	160	42,5	FC
1.874	Mississippi (San Luis)	159	14,3	Carretera+FC

Cabe destacar la técnica alemana con dos puentes sobre el Rin, la genialidad de Eiffel con sus puentes de Garabit y María Pía y el liderazgo de los americanos con sus 256 m en el puente sobre el río Niágara.

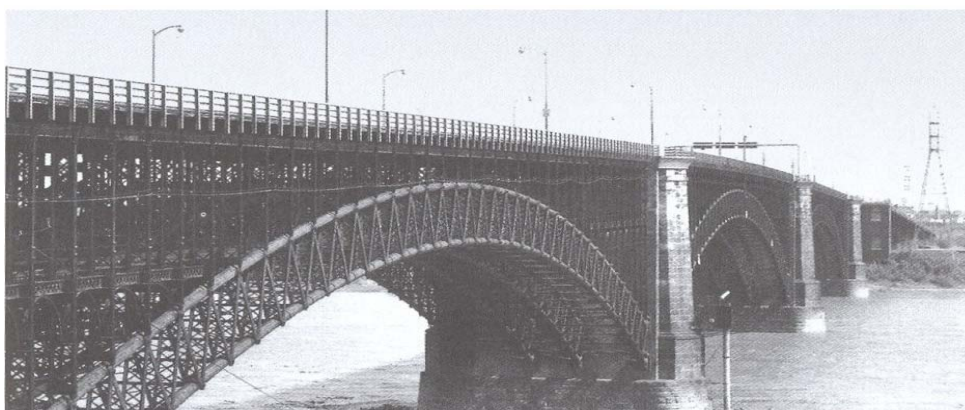


Puente de Garabit

A continuación se incluyen unas pinceladas sobre algunos puentes dignos de mención especial.

El Puente de San Luis. Construido por el Capitán James Eads sobre el Mississippi en el año 1.874 con objeto de potenciar el desarrollo económico de la ciudad de San Luis. Es un puente compuesto por tres arcos, con una luz central

de 520 pies (unos 159 m), dos estribos finales y sendas pilas en el cauce del río. Plantea arcos, basándose en que se trata de estructuras rígidas, capaces de soportar las cargas de tráfico con muy pequeños movimientos. Los arcos son rebajados (con flechas del orden del décimo de la luz -14,30 frente a 159 m-) y están situados bajo los dos tableros de que consta el viaducto: uno superior para el tráfico de vehículos (carros y galeras) y otro inferior para alojar las vías férreas. El tablero es de 16 m de ancho.



Puente de San Luis

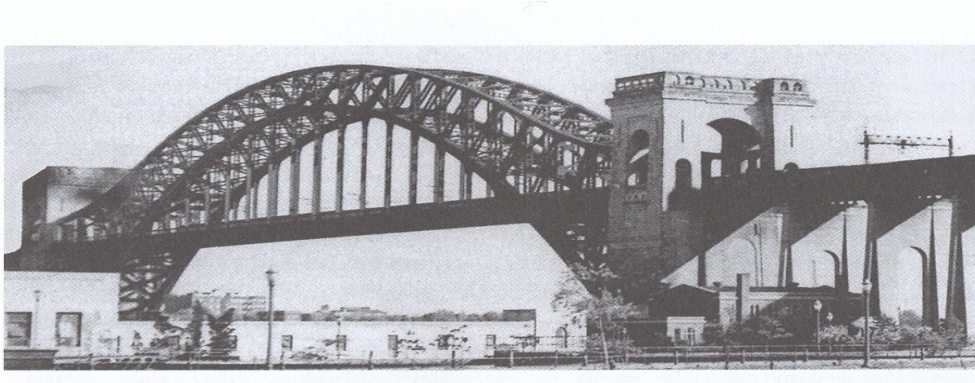
El material empleado en la construcción era acero, sin antecedente previo en la construcción de puentes en América. Por primera vez se habla del "límite elástico" del acero como frontera tensional dentro de la que se garantiza la recuperación de las deformaciones del metal cuando desaparece la carga que las provoca.

El Puente Arco de Hell Gate en New York. Es un arco de acero con tablero intermedio situado a media altura destinado al tráfico ferroviario. Diseñado por el ingeniero Linderthal en 1.916, consta de una imponente estructura en celosía con doble cordón curvo de 304 m de luz. Denominando canto del arco a la distancia existente entre los ejes de los cordones curvos, la celosía ofrece una ley de variación de los mismos curiosa, siendo éste mínimo en la clave y máximo en apoyos, acorde con la tipología de arco biempotrado. No obstante, de los dos cordones tan sólo el inferior actúa, fijo a zapatas de apoyo, como verdadero

arco, mientras que el cordón superior, que en ningún caso dispone de apoyos fijos en sus extremos, ve su papel de arco comprimido muy devaluado. El arco inferior trabaja a compresión en todo su desarrollo y el superior, enlazado al otro mediante montantes verticales y diagonales oblicuas, colabora con él en el trabajo de compresión en la zona central y le ayuda a resistir las flexiones engendradas por las cargas concentradas del tráfico.

Los arcos compuestos por barras en celosía buscan a través de un ancho y canto global importantes alcanzar seguridad suficiente frente al pandeo general del arco comprimido.

Las torres de hormigón y sillería ubicadas en los apoyos son innecesarias desde el punto de vista resistente. Presentan únicamente un valor visual, aportando sensación de estabilidad y firmeza estructural con la "ilusión" del empostramiento en ellas del cordón superior.



Puente de Hell Gate en New York

El Puente Arco de Bayonne sobre el Río Hill van Kull en New York. Es un arco de acero con tablero intermedio a media altura destinado al tráfico carretero. Diseñado por el ingeniero Amman en 1.931, une New Jersey con la península de Bayonne salvando una luz de 503 m con una flecha de 81 m (relación flecha-luz $f/L \leq 1/6$, valor realmente razonable). Análogamente al puente de Hell Gate, los dos cordones curvos que componen los pares del arco en celosía aumentan su separación desde la clave hacia los arranques. El cordón inferior funciona como arco biarticulado en sus arranques, mientras que el superior, al terminar unido a un montante vertical de acero que lo enlaza al arranque del cordón infe-

rior, devalúa su colaboración como arco en el esquema global del puente. Se trata pues de una obra ligera, pura y elegante.



Puente de Bayonne sobre el Río Hill van Kull en New York

El Puente Arco del Puerto de Sydney. Se trata de un puente arco en celosía con tablero intermedio situado a media altura con una luz entre ejes de rótulas de arranque de 495 m. Los cables curvos se abren, separándose progresivamente desde la clave hacia los arranques, de tal forma que el cordón inferior es el verdadero arco comprimido mientras que el superior no cae bajo el tablero en los extremos, apoyando en un poderoso montante vertical que nace de la articulación de arranque del par inferior.

Dos torres egipcias flanquean el tablero con una misión eminentemente estética y de aumentar la "sensación" de estabilidad global.



Puente arco del Puerto de Sydney

El ancho del tablero es de casi 50 m, albergando cuatro vías férreas, seis carriles para tráfico de automóviles, vías de tranvías y amplias aceras de peatones a ambos lados.

Los grandes monstruos de Bayonne o de Sydney no han tenido continuidad dada la dificultad constructiva de una tipología que precisa tirantes provisionales para avanzar en voladizo frente a los puentes atirantados que utilizan sus propios cables para avanzar. Asimismo, se utilizan secciones celulares compuestas por chapas planas sustituyendo las piezasafiligranadas compuestas por numerosos perfiles delgados.

En España en la primera década del siglo XX, dada la tardía introducción del hormigón armado, se recurre a las soluciones metálicas para el cruce de los ríos. Ejemplo de ello se encuentra en el Puente de Enrique Esteban en Salamanca, obra que en 1.903 proyecta sobre el río Tormes el ingeniero Saturnino Zufiaurre, consistente en una sucesión de seis elegantes arcos de 33 m de luz entre ejes de pilas con un tablero de 10 m de ancho.



Puente de Enrique Esteban en Salamanca

Los puentes de acero debido a la carencia de perfiles y chapas laminadas a partir de la Guerra Civil sufren un abandono casi total en España a lo largo de décadas. A partir de los acontecimientos del año 1.992 dicha tipología vive una verdadera floración, tal y como se pone de manifiesto en los abundantes puentes de arcos metálicos existentes hoy en día, entre los que se destacan:

- Barqueta y Chapina sobre el río Guadalquivir (Sevilla capital)
- Plencia (Vizcaya)

- Mérida sobre el río Guadiana (Badajoz)
- Ricobayo sobre el embalse del río Esla (Zamora)
- Tablate (Granada)



Puente de la Barqueta en Sevilla



Puente de Chapina en Sevilla



Puente Ricobayo en Zamora



Puente Tablate en Granada



Puente Tablate en Granada

1.5. INESTABILIDAD EN ARCOS METÁLICOS

1.5.1. Tipos de inestabilidad

Como se ha venido comentando, el principal inconveniente que tienen los arcos de acero es la inestabilidad derivada de su esbeltez. El fenómeno de la inestabilidad tiene tres posibles dimensiones:

- Inestabilidad global de la estructura

Dada una geometría estructural y unas cargas, existen ciertos valores de las mismas que llevan al colapso de la estructura en su conjunto.

- Inestabilidad global de la pieza

Dentro del conjunto estructural definido anteriormente, aparecen otros valores de las cargas que hacen inestable la pieza aisladamente dentro de la estructura.

- Inestabilidad local de la chapa (abolladura)

Puede ocurrir que los esfuerzos absorbidos por la pieza produzcan una inestabilidad local de alguno de sus elementos. En estos casos se habla de abolladura de chapas. Ello implica que algún elemento de la pieza puede abollar antes de que se produzca el fenómeno global de pandeo. El comportamiento postcrítico de las chapas suele ser bueno, es decir, que siguen resistiendo aunque se hayan salido de su directriz. Sin embargo, el ingeniero prefiere rigidizarlas para que su carga crítica sea igual o superior a la de las piezas y evitar de esta forma desperdiciar las características mecánicas de la chapa (en el cálculo hay que cambiar el área y la inercia reales por otras eficaces, lo que implica un desaprovechamiento de los materiales).

1.5.2. Factores que influyen en la inestabilidad

En el estudio de la inestabilidad, tanto global como de abolladura, es necesario tener en cuenta la influencia de una serie de fenómenos a la hora de considerar el comportamiento real de la pieza metálica.

- Imperfecciones mecánicas

Las imperfecciones mecánicas pueden venir dadas por la presencia de tensiones residuales y por la variación del límite elástico.

Las piezas metálicas tienen un estado de autotensiones provocado por los fenómenos térmicos implícitos en su fabricación que influyen en su diagrama esfuerzo-curvatura y por tanto en la carga última de agotamiento.

Las tensiones residuales dependen de la forma y dimensión del perfil así como del proceso de fabricación. Alcanzan valores tan elevados que superan el valor del límite elástico en diversos puntos de la sección.

Por otra parte, el límite elástico depende del grosor de las paredes de las piezas en la parte comprimida. Utilizar un límite elástico general para toda la sección en lugar del real por cada punto, tiene su influencia sobre la carga última de pandeo.

- Imperfecciones geométricas

Las tolerancias constructivas introducen imperfecciones geométricas que influyen en el estado tensional. Las imperfecciones geométricas pueden ser debidas a: la variación de las dimensiones de la pieza respecto a las nominales, la variación de la directriz de la pieza respecto a la nominal y el descentramiento de las cargas.

- No linealidad del material

El acero es un material elastoplástico y, por tanto, tiene un comportamiento no lineal. La presencia de las autotensiones provoca que ese comportamiento se presente incluso con estados de carga moderados.

Todas estas circunstancias han sido muy bien estudiadas en piezas rectas a partir de los trabajos de DUTHEIL, la Comisión Norteamericana (SSRC) y la Comisión Europea (ECCS), y han cristalizado sucesivamente en el coeficiente ω de la antigua Normativa española MV-103, en las curvas norteamericanas y en el actual coeficiente χ del Eurocódigo.

En cambio, poco se ha hecho a nivel de códigos para piezas curvas (a pesar de los trabajos de la escuela de KURANISHI, YABUKI, VINNAKOTA, KOMATSU, SHINKE y SAKIMOTO en Japón y la de PI y TRAHAIR en Sidney). Las normativas internacionales apenas tratan la inestabilidad de arcos y aún menos teniendo en cuenta todos los parámetros anteriormente descritos.

1.6. DIFICULTAD PARA EL PROYECTISTA DE PUENTES DE ARCOS METÁLICOS

Después de todo lo expuesto cabe concluir que, a la hora de realizar un planteamiento riguroso del funcionamiento del arco metálico como estructura, con el fin de calcular su carga última, el diseñador se encuentra ante:

- Una estructura no lineal desde el punto de vista geométrico.
- Un material con comportamiento elasto-plástico y, por lo tanto, no lineal.
- Unas secciones autotensionadas por su proceso de fabricación.
- Una geometría real que difiere de la nominal.
- Un límite elástico estimado cuando en realidad varía a lo largo de la sección.
- Riesgos de inestabilidad local en las chapas que componen el arco.
- Un comportamiento postplástico de secciones poco conocido desde el punto de vista cinemático.
- Una ausencia de normativa en la mayoría de los casos, escasa justificación de la existente y una carencia de herramientas simplificativas de cálculo del tipo de las propuestas para columnas en los trabajos que cristalizan en el Eurocódigo.
- Una ausencia de textos orientativos concretos.

Todo esto supone que calcular este tipo de estructuras no sólo no es obvio sino que requiere un profundo conocimiento estructural, mucho tiempo y un enorme esfuerzo computacional.

2. OBJETO DE LA PRESENTE TESIS

2. OBJETO DE LA PRESENTE TESIS

La presente Tesis tiene por objeto establecer un método que evalúe el riesgo que presenta una estructura metálica en arco de pandear lateralmente considerando todos los factores que realmente influyen en el problema. Se trata de determinar de una manera sencilla y rápida si el pandeo lateral va a ser un fenómeno crítico en un arco metálico concreto.

2.1. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO DEL PANDEO DE PIEZAS EN SU PLANO

Prácticamente la mayoría del esfuerzo investigador de los especialistas en estructuras metálicas ha estado enfocado hacia el comportamiento de las piezas rectas. La resistencia de las columnas ha sido estudiada profunda y extensamente a lo largo de varios siglos y ha llenado la mayor parte de la literatura científica.

Los primeros trabajos se centraron en la determinación de las cargas que provocaban la inestabilidad de las piezas ideales con materiales de comportamiento elástico y geometría perfecta. Según se contrastaban los resultados teóricos con los experimentales se concluía la divergencia de los mismos. Esto originó la aparición de la teoría de "columnas imperfectas", que no considera el fenómeno de la bifurcación definiendo una carga de colapso inferior a la que se denomina crítica.

Determinar la resistencia de las columnas metálicas es un problema complejo que depende de imperfecciones iniciales desconocidas (aunque acotadas), de un estado de tensiones residuales, de la no linealidad del material y de un comportamiento inestable. Por ello la normativa internacional ha intentado proporcionar fórmulas sencillas que aproximen el problema al proyectista.

Principalmente se han utilizado cuatro criterios para obtener fórmulas de diseño para columnas de acero:

- 1.- Fórmulas empíricas basadas en ensayos de columnas reales. Entre los numerosos trabajos de investigación cabe destacar el recientemente realizado

por HALL (1.981) y FUKUMOTO et al (1.983), los cuales han recopilado, en una inmensa base de datos, los resultados históricos de roturas de piezas reales. Sus resultados son difícilmente adaptables a nuevos casos de secciones o coacciones. La experimentación sirve para confirmar los modelos teóricos, con los que se pueden obtener nuevos resultados y conclusiones.

2.- Fórmulas basadas en el límite elástico. Reproducen la carga última de colapso si se utilizan parámetros de imperfección adecuados. La más popular de ellas es la fórmula de Perry Robertson.

3.- Fórmulas basadas en la teoría del módulo tangente. Se basan en el concepto de carga crítica de bifurcación introduciendo correcciones por la presencia de imperfecciones.

4. Fórmulas basadas en la máxima resistencia. Tras la modelización numérica de columnas imperfectas se obtienen diferentes conjuntos de curvas aplicables a determinadas secciones de piezas que relacionan la esbeltez con la carga última. Este es el tipo de formulación adoptado recientemente por la normativa internacional, considerando cada normativa diferentes tipos de curvas:

4.1.- Las deducidas de la Teoría de Dutheil y la Norma DIN 4114, que inspiraron la española MV-103.

4.2.- Las curvas americanas del Structural Stability Research Council SSRC de 1.985, adoptadas en parte por la AISC y las canadienses CSA.

4.3.- Las recomendaciones de la European Convention for Constructional Steelwork, en adelante ECCS (1.978) que han servido de base al Eurocódigo 3, consistente en tres curvas de pandeo para diferentes tipos de secciones que relacionan la carga última de la pieza con la esbeltez.

Se define la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$ como

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} \quad (2.1.1.)$$

donde

λ es la esbeltez mecánica de la pieza ($\lambda = L/i$)

λ_E es la esbeltez mecánica correspondiente a una tensión crítica igual al límite elástico. También se denomina esbeltez crítica de Euler.

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (2.1.2.)$$

Si N^* es el axil de compresión en una columna, la condición de seguridad será:

$$\frac{N^*}{A} \leq \sigma_K \quad (2.1.3.)$$

donde σ_K es la tensión de agotamiento.

Se define el coeficiente de pandeo $\chi = \frac{\sigma_K}{\sigma_y}$ (2.1.4.)

Combinando (2.1.3.) y (2.1.4.) la condición de seguridad resulta:

$$\frac{N^*}{\chi N_{PL}} \leq 1 \quad (2.1.5.)$$

siendo N_{PL} el axil plástico de la sección.

El valor de χ se ha determinado considerando las imperfecciones geométricas y mecánicas de las columnas. La carga de agotamiento de un soporte se calcula eligiendo la curva correspondiente a su sección transversal (a,b,c ó d), se entra con la esbeltez reducida y se obtiene χ , el cual se ha calculado basándose en los numerosos experimentos que llevan a rotura piezas reales.

En la Figura 2.1.6. se muestran las curvas de pandeo del Eurocódigo, así como la de Dutheil y la de Euler (correspondientes al pandeo elástico de la pieza ideal).

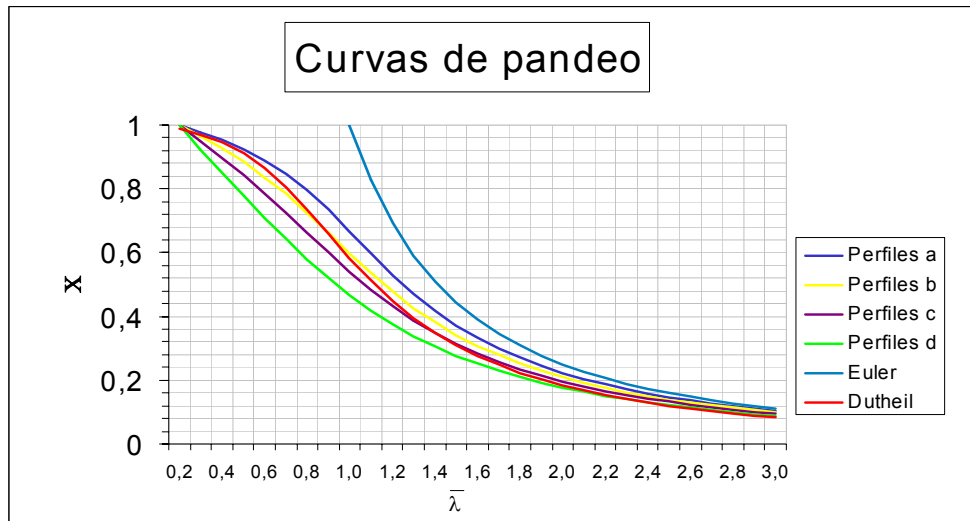


Figura 2.1.6. "Curvas de pandeo del Eurocódigo, Dutheil y Euler."

4.4.- Las resultantes de utilizar una fórmula con sentido aparentemente físico, la de flexocompresión, habitualmente modificada para ajustarse a las curvas reales. Esta fórmula es la de "Perry Robertson", que amplifica los esfuerzos de primer orden por efectos de no linealidad geométrica.

$$\frac{N^*}{A} + \frac{\mu^*}{\mu^* - 1} \frac{N_K^* \cdot e^*}{w} \leq \sigma_y \quad (2.1.7.)$$

donde

$$\mu^* = \frac{\sigma_{CR}}{\sigma_K}$$

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{Tensión crítica de Euler})$$

$$\sigma_K = \frac{N_K^*}{A}$$

y e^* es un parámetro de imperfección que recoge, por excentricidad del axil, la flexión de 2º orden.

Si en la expresión (2.1.7.) se iguala σ_k a σ_u , despejando e^* se obtiene:

$$e^* = (\sigma_y - \sigma_u) \frac{\mu^* - 1}{\mu^*} \frac{w}{A\sigma_u} \quad (2.1.8.)$$

que permite comprobar con la fórmula (2.1.7.) anteriormente definida el estado tensional de la pieza recta solicitada.

2.2. ANTECEDENTES DEL PANDEO DE PIEZAS FUERA DE SU PLANO (PANDEO LATERAL)

2.2.1. Fundamento Teórico

Toda la normativa existente al respecto se basa en la teoría general relativa al vuelco lateral de vigas. Si se considera una viga de sección rectangular estrecha, biapoyada con apoyos de horquilla (los cuales impiden el desplazamiento y el giro en el plano de la sección), sometida a una flexión constante a lo largo de toda la longitud de valor M , se dice que sufre un fenómeno de inestabilidad llamado "vuelco lateral" (lo que se manifiesta con deformaciones y giros transversales) si M supera un valor crítico M_{CR} definido por:

$$M_{CR} = \frac{\pi}{L_{e,v}} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_T} \quad (2.2.1.1.)$$

donde

$L_{e,v}$ es la longitud eficaz a vuelco lateral de la viga, que depende de las condiciones de contorno

I_y es el momento de inercia de la sección respecto al eje principal débil de la sección

I_T es el módulo de torsión, que en el caso de una sección rectangular vale $\frac{hb^3}{3}$

E es el módulo de elasticidad longitudinal

G es el módulo de elasticidad transversal, que para el acero toma el valor $G = E/2.6$

Los apoyos de horquilla y la sección rectangular estrecha aseguran una inercia al alabeo I_A prácticamente despreciable. En el caso de que ésta no lo sea el valor del momento crítico resulta incrementado debido a la restricción que a la variación del momento torsor impone la rigidez al alabeo:

$$M_{CR} = \frac{\pi}{L_{e,v}} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_T} \cdot \sqrt{1 + \pi^2 \frac{EI_A}{GI_T}} \quad (2.2.1.2.)$$

donde

I_A es la inercia al alabeo.

Si la ley de distribución de momentos flectores no es uniforme, el valor de M_{CR} se calcula multiplicando (2.2.1.2.) por un coeficiente c_1 definido en la Tabla 2.2.1.3., el cual depende del tipo de carga aplicada.

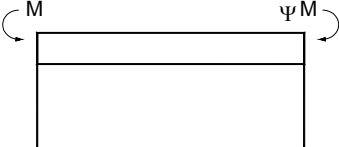
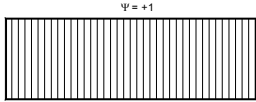







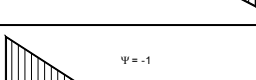
	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES	c_1
		1.0
		1.14
		1.32
		1.56
		1.88
		2.28
		2.70
		2.93
		2.73

Tabla 2.2.1.3. "Coeficiente c_1 ."

En conclusión, si suponemos un material lineal y una sección **doble T** simétrica respecto al eje horizontal **sin imperfecciones geométricas**, el valor de la carga crítica viene dado por:

$$M_{CR} = c_1 \cdot \frac{\pi}{L_{e,v}} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_T} \cdot \left[\left[\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{k^2} \cdot (1 + c_2^2)} \right] \pm c_2 \cdot \frac{\pi}{K} \right] \quad (2.2.1.4.)$$

donde

$L_{e,v}$ es la distancia entre secciones inmovilizadas frente a la torsión. En el caso de vigas biapoyadas sin arriostramientos intermedios, $L_{e,v} = \beta_v \cdot L$ con

$\beta_v = 1$ para apoyos horquillados que impiden el giro torsor y liberan el alabeo de las secciones extremas

$\beta_v = 0,50$ para apoyos horquillados que impiden el giro torsor y el alabeo de las secciones extremas

k es un coeficiente definido por la expresión

$$k = L_{e,v} \cdot \sqrt{\frac{GI_T}{EI_A}} = L_{e,v} \cdot \sqrt{\frac{I_T}{2,6 \cdot I_A}} \quad (2.2.1.5.)$$

en la que

I_A es el módulo de alabeo e I_T el módulo de torsión

c_1 es un coeficiente basado en los resultados de Clark y Hill, y depende del tipo de carga y de las condiciones de sustentación de los extremos de la viga. En la Tabla 2.2.1.3. se incluye el valor del mismo. Si los momentos extremos M_A y M_B de la viga son desiguales, el valor de c_1 se calcula así:

$$c_1 = 1,88 - 1,40 (M_B/M_A) + 0,52 (M_B/M_A)^2$$

y

$$c_1 \geq 2,70 \text{ si } M_A > M_B$$

c_2 es un coeficiente relacionado con la posición de la carga en el eje y-y de la sección. En la Tabla 2.2.1.3. se incluye el valor del mismo. El signo + se utiliza si la carga se sitúa en el ala inferior de la viga y el signo - en la superior.

TIPO DE CARGA	DIAGRAMA DE M. FLECTORES	RESTRICCIONES DE LOS APOYOS A LA TORSION			
		β_v	c_1	c_2	
VIGAS BIAPOYADAS / EMPOTRADAS (EJE y-y)					
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,0 1,0	0 0
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,310 1,514	0 0
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,880 2,150	0 0
		horquillado empotrado	1,0 0,5	2,700 3,093	0 0
		horquillado empotrado	1,0 0,5	2,700 3,149	0 0
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,565 0,938	1,267 0,715
		horquillado empotrado	1,0 0,5	1,046 1,010	0,430 0,410
VOLADIZOS					
		empotramiento	1,0	1,3	0,64
		empotramiento	1,0	2,1	

Tabla 2.2.1.6. "Valores de los coeficientes β_v , c_1 y c_2 ."

2.2.2. Eurocódigo

El Eurocódigo aborda el problema del pandeo lateral adoptando las hipótesis siguientes:

- En las piezas flectadas existe una deformación transversal latente en la que están presentes desplazamientos transversales y giros.
- Las fibras pueden plastificar debido bien a la propia flexión, bien al efecto de las tensiones residuales de laminación o soldadura.

Por tanto, las ecuaciones de equilibrio se plantean en la geometría deformada de la pieza flectada con preflecha lateral, obteniéndose una ecuación diferencial no homogénea.

Los resultados se representan en función de la esbeltez reducida de la pieza, que se define por:

$$\overline{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_u}{M_{cr}}} \quad (2.2.2.1.)$$

donde

M_u es el momento de agotamiento de la sección

M_{cr} es el momento crítico de pandeo lateral

La comprobación a pandeo lateral consiste en verificar que el momento ponderado M^* es menor que el momento último minorado:

$$M^* \leq \chi_{LT} * M_u \quad (2.2.2.2.)$$

donde χ_{LT} es el coeficiente reductor del pandeo lateral, que se obtiene mediante la expresión:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \overline{\lambda}_{LT}^2}} \quad (2.2.2.3.)$$

en la que

$$\phi = 0,50 * \left[1 + \alpha_{LT} * \left(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2 \right) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (2.2.2.4.)$$

α_{LT} es el coeficiente de imperfección para el pandeo lateral, y vale 0,21 para el caso de perfiles laminados y 0,49 para secciones armadas.

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_u}{M_{cr}}}$$

γ_M es el coeficiente de seguridad parcial de una pieza solicitada a vuelco lateral de valor 1,10

Si $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,40$ no es necesario efectuar la comprobación a vuelco lateral.

O según la Figura 2.2.2.5.

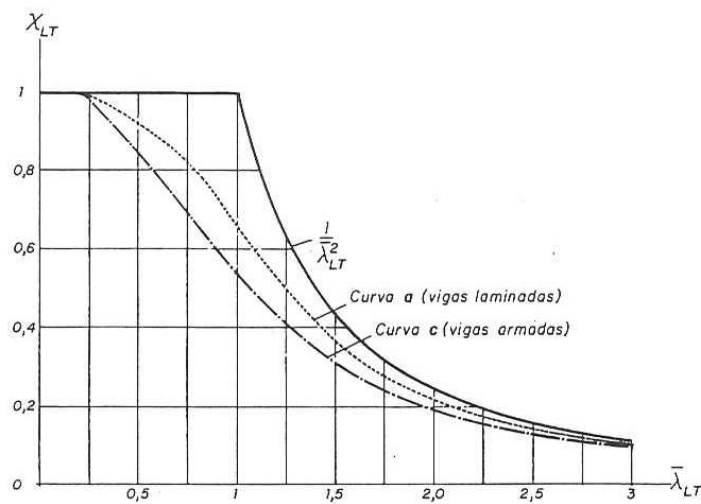


Figura 2.2.2.5. "Valor de X_{LT} en función de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}_{LT}$."

2.2.3. R.P.M.-95

Las recomendaciones sobre puentes metálicos determinan que existe la posibilidad de que una viga pandee lateralmente si el momento último de cálculo de pandeo lateral tiene el valor:

$$M_{LT,Rd} = \chi_{LT} * M_{Rd} \quad (2.2.3.1.)$$

donde

χ_{LT} tiene el mismo valor que en el Eurocódigo (Fórmula 2.2.2.3.) y M_{Rd} es el momento flector último de cálculo de la sección.

El valor de M_{CR} (momento crítico elástico de pandeo lateral) necesario para el cálculo de la esbeltez relativa al pandeo lateral $\bar{\lambda}_{LT} = \left[\frac{\gamma_M * M_{Rd}}{M_{CR}} \right]^{1/2}$ en el caso de una viga con sección compacta, constante y simétrica es la suma vectorial de los momentos correspondientes a la torsión uniforme y no uniforme.

$$M_{CR} = \sqrt{M_{CR,t}^2 + M_{CR,w}^2} \quad (2.2.3.2.)$$

$$M_{CR,t} (\text{Torsión uniforme}) = c_1 \frac{\pi \sqrt{EI_z GI_t}}{a} \quad (2.2.3.3.)$$

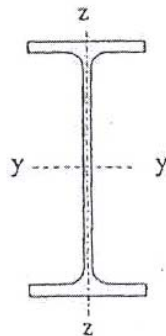


Figura 2.2.3.4. "Ejes de simetría y-y y z-z de la sección doble T."

donde:

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de elasticidad transversal del acero

I_z es la inercia de la sección con relación al eje z-z según Figura 2.2.3.4.

I_t es el módulo de torsión

c_1 es un factor que depende de las condiciones de apoyo y del diagrama de momentos flectores; si el giro torsional está totalmente coaccionado en los extremos del tramo considerado de la viga y el diagrama de momentos flectores es lineal, se aplican los valores de la Tabla 2.2.3.5.

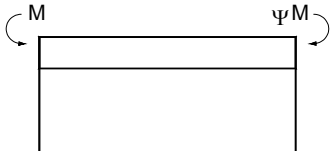
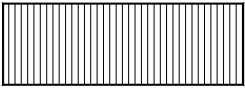
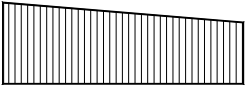

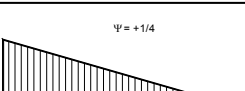
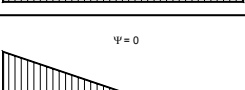
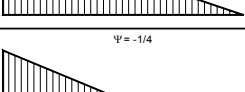
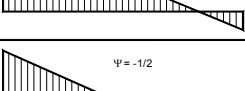
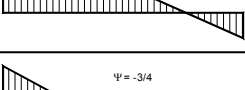

	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES	c_1
	 $\psi = +1$	1.0
	 $\psi = +3/4$	1.14
	 $\psi = +1/2$	1.32
	 $\psi = +1/4$	1.56
	 $\psi = 0$	1.88
	 $\psi = -1/4$	2.28
	 $\psi = -1/2$	2.70
	 $\psi = -3/4$	2.93
	 $\psi = -1$	2.73

Tabla 2.2.3.5. "Valores del factor c_1 para M_{cr1el} para pandeo lateral."

$$M_{CR,w}(Torsión\ no\ uniforme) = w_{y,c} \frac{\pi^2 E i_c^2 c_1}{l_p^2} \quad (2.2.3.6.)$$

donde:

$w_{y,c}$ es el módulo resistente elástico de la sección correspondiente a la fibra más comprimida

i_c es el radio de giro, con relación al plano del alma, del soporte formado por el ala y la tercera parte de la zona comprimida del alma

c_1 es un factor cuyo valor se indica en la Tabla 2.2.3.5.

l_p es la longitud equivalente de pandeo del soporte anteriormente definido, que toma el valor:

l_p es la distancia entre apoyos si estos son rígidos

$l_p = \pi \sqrt[4]{0,25 E I_c a \delta} \leq a$ si los apoyos laterales no tienen el carácter de rígidos,

donde

I_c es la inercia del soporte comprimido anteriormente definido con relación al plano del alma

a es la distancia entre apoyos laterales

δ es el desplazamiento del apoyo lateral debido a una carga unitaria actuando en la dirección de dicho apoyo

2.2.4. Pandeo por flexión y torsión en piezas comprimidas y flectadas

El Eurocódigo analiza en su Artículo 5.5.4. el pandeo por flexión y torsión en piezas comprimidas y flectadas respecto al eje fuerte y que están libres de pandear en la dirección del eje débil.

a) Piezas con secciones de clases 1, 2 y 3:

$$\frac{N^*}{X_{lat} \cdot A \cdot f_y / \gamma_{m1}} + \frac{k_y \cdot M_y^*}{M_{uy}} + \frac{k_{LT} \cdot M_x^*}{X_{LT} \cdot M_{ux}} \leq 1 \quad (2.2.4.1)$$

siendo:

X_{lat} factor de reducción que generalmente es igual a X_y . Sin embargo, si el pandeo es por flexión o por flexo-torsión es previsible que X_{lat} sea el menor valor entre X_y y X_z .

M_{ux} y M_{uy} momentos de agotamiento con relación a los ejes x-x e y-y, respectivamente.

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} \cdot N^*}{X_y \cdot A \cdot f_y} \quad (2.2.4.2)$$

$$\mu_{it} = 0,15 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \beta_{M,LT} - 0,15 < 0,90 \quad (2.2.4.3)$$

β_{MLT} coeficiente relativo al momento equivalente correspondiente al pandeo lateral.

X_{LT} coeficiente reductor del pandeo lateral según la ecuación (2.2.2.3.)

Obsérvese que el coeficiente X_{LT} sólo afecta a las flexiones respecto al eje fuerte y no a las flexiones respecto al eje débil. Se admite, pues, que una pieza flectada respecto al eje débil no pande transversalmente flectando respecto al eje fuerte.

b) Piezas con secciones de clase 4:

$$\frac{N^*}{X_{lat} \cdot A_{eff} \cdot f_y / \gamma_{m1}} + \frac{k_y \cdot (M_y^* + N^* \cdot e_{N,x})}{W_{eff,y} \cdot f_y / \gamma_{M1}} + \frac{k_{LT} \cdot (M_x^* + N^* \cdot e_{N,y})}{X_{LT} \cdot W_{eff,x} \cdot f_y / \gamma_{M1}} \leq 1 \quad (2.2.4.4)$$

e_N desplazamiento de la fibra neutra cuando la sección eficaz está sometida a compresión pura ($e_{N,x}$ desplazamiento en la dirección x; $e_{N,y}$ desplazamiento en la dirección y).

k_{LT} obtenido de la ecuación (2.2.4.2.) reemplazando A por A_{eff} .

μ_{LT} obtenido de la ecuación (2.2.4.3.) pero añadiendo a los momentos flectores

$$M_x \cdot N^* \cdot e_{N,y}$$

2.3. EL CASO DE LOS ARCOS

Todo el procedimiento descrito en el apartado anterior para columnas y vigas no es aplicable a los arcos, ya que los métodos descritos se basan en numerosos resultados experimentales donde se rompían físicamente las columnas, obteniendo curvas complementadas con expresiones analíticas de cálculo. Sin embargo, no resulta sencillo ensayar piezas curvas, y aún menos si son de grandes dimensiones. Asimismo, las leyes de esfuerzos en un gran arco, sometido a cargas de muy diversos tipos, son complejas y no propician la aplicación de otro coeficiente χ .

De entre todos los códigos de los diferentes países, sólo una norma (DIN 18 800), incluye un método de análisis específico para arcos, tratando el fenómeno de la inestabilidad de forma análoga a las piezas rectas. Dependiendo de las condiciones de contorno y del tipo de carga que actúa, se determina un valor de esbeltez relativa ($\bar{\lambda}_k$), y se calcula con la metodología correspondiente a piezas rectas. Asimismo, el análisis del estado límite último se realiza en régimen elástico considerando unas imperfecciones geométricas equivalentes en la dirección horizontal de tipo senoidal o parabólico con una amplitud que es función de la luz del arco y de la curva de pandeo correspondiente a la sección transversal considerada.

2.4. OBJETIVO PROPUESTO

A la vista de lo anteriormente expuesto, se inicia un trabajo de investigación en el que se establecen las siguientes fases:

a) Determinar la carga última real lateral de una serie de arcos, variando la relación luz-flecha, las coacciones y la forma de la sección.

b) Comparar los resultados obtenidos con los aportados por la bibliografía existente, analizando las posibles desviaciones y justificando el origen de las mismas.

c) Proponer unas curvas o diagramas de interacción que relacionen el cociente flecha-luz o la esbeltez fuera del plano con la carga o tensión crítica real de rotura, introduciendo factores variables tales como las condiciones de sustentación, sección, etc.

2.5. METODOLOGÍA PROPUESTA

En el presente trabajo de investigación no se dispone de los medios necesarios para calcular la carga última de arcos de manera experimental, es decir, ensayándolos en el laboratorio hasta rotura. Para obviar esta circunstancia se recurre a modelos aproximados con validez contrastada, entre los que destaca el "Método de los Elementos Finitos", considerando un material NO LINEAL y la variación de la geometría con la carga (no linealidad geométrica). Asimismo, será necesario incluir las imperfecciones constructivas y mecánicas de la pieza (autotensiones).

Para profundizar en el conocimiento de los arcos metálicos se opta por utilizar un programa de cálculo de estructuras de ámbito mundial y reconocido prestigio: ANSYS. Con el fin de obtener resultados lo más fiables posible se calculará con un elemento lámina que posea capacidades no lineales: el elemento SHELL 43, se aplicará a casos conocidos y se verificarán los resultados obtenidos.

En la línea marcada con anterioridad se ha calculado la carga última crítica de pandeo en el plano de varios arcos metálicos con imperfecciones, autotensio-

nes y material no lineal y se ha comparado con la proporcionada por la bibliografía existente relativa a la materia que más adelante se expondrá con todo detalle. Los resultados obtenidos son excelentes, lo cual valida el método, el elemento y el programa elegidos.

Una vez validado el procedimiento, se ha realizado el cálculo del pandeo de arcos fuera del plano y se ha cotejado con la poca bibliografía existente en la materia, obteniéndose las cargas últimas para diferentes tipos de arcos y la bondad de los resultados obtenidos. Los análisis se han realizado sólo con sobrecargas, sin cambios de temperatura.

Finalmente estos resultados se recogen de forma ordenada en un gráfico que permite en una primera aproximación determinar la posibilidad que tienen de pandear lateralmente arcos exentos con diferentes características de apoyo, flecha, longitud y sección. La existencia de tablero superior, medio o inferior reduce el riesgo de pandeo, presentando cargas críticas superiores a las del caso de arco exento.

2.6. TRABAJOS SIMILARES

Otros autores han emprendido caminos similares con el fin de caracterizar el fenómeno del pandeo lateral de arcos.

STUSSI resolvió el problema de determinar la carga crítica de pandeo lateral en cálculo lineal de arcos parabólicos elásticos biempotrados con sección transversal en cajón bajo carga vertical constante uniforme en planta, recogiendo los resultados en una gráfica que relaciona el cociente flecha-luz con la carga crítica de pandeo lateral para diferentes valores de GI_y/ EI_x .

TOKARZ y **SANDHÚ** estudiaron el fenómeno del pandeo lateral-torsional de arcos parabólicos con carga uniforme en planta. Las hipótesis adoptadas son las de material homogéneo y elástico lineal con pequeñas deformaciones. Los resultados se presentan en tablas que determinan el parámetro crítico de pandeo (que es función de la carga crítica de pandeo, de la longitud y de la rigidez a flexión según el eje y) en función de los parámetros f/L y la relación entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión según el eje y , para los casos de arco biapoyado y arco biempotrado.

SAKIMOTO y **KOMATSU** estudiaron la carga última de arcos exentos cuando el colapso se debe a la inestabilidad lateral inelástica producida por deformaciones laterales torsionales para el caso particular de un arco de sección cajón cuadrada de un metro de canto y dos centímetros de espesor con imperfecciones geométricas laterales y tensiones residuales iniciales producidas como consecuencia del proceso de fabricación y soldadura.

GALAMBÓS realizó un análisis elastoplástico de desplazamientos finitos para diferentes casos de arcos con tablero inferior, intermedio y superior, obteniendo la tensión normal última de agotamiento de cada uno de los casos.

2.7. ÁMBITO DE LA TESIS

Sería imposible concentrar en una tesis toda la casuística de los arcos metálicos. La gran cantidad de casos que se presentan en la tipología estructural y el tiempo de computación de los modelos no lineales desbordan un trabajo personal.

Es preferible reducir su ámbito, poner de manifiesto la validez del método y dejar abierto el camino para otros doctorandos que ayuden a completar el espectro de arcos.

Esta tesis se centra en las siguientes tipologías:

- Arcos parabólicos
- Arcos de acero de límite elástico 235 MPa
- Arcos de sección cajón, que es la más frecuentemente utilizada en puentes
- Arcos biapoyados y biempotrados
- Arcos con relaciones flecha-luz 0,1 y 0,2
- Arcos de tablero superior, con el fin de determinar la influencia del mismo en la carga última calculada.

3. ARCOS METÁLICOS. ESTADO DEL ARTE

3. ARCOS METÁLICOS. ESTADO DEL ARTE

3.1. INTRODUCCIÓN

El arco metálico no constituye un elemento estructural que haya despertado el interés masivo de los investigadores. Por ello, y con objeto de ordenar la información recopilada, se van a agrupar los artículos y libros estudiados en tres grandes grupos conceptuales que, como cabe esperar, constituyen también tres etapas cronológicas del avance del conocimiento.

La primera época de los estudios de arcos metálicos se ha caracterizado por el exclusivo interés hacia el análisis de la **estabilidad elástica lineal**. Una vez asentado el conocimiento de la misma, el afán investigador dio un paso más para centrarse en la **estabilidad elástica no lineal**. El tercer grupo de trabajos aparece cuando los estructuralistas se preocupan por incluir los efectos en la inestabilidad del **comportamiento no lineal del acero**, que junto con la potencia de cálculo del ordenador, permite tener en cuenta hipótesis antes obviadas, abordando el problema de la determinación de la **carga última de colapso** de los arcos.

Desde el punto de vista de la presente Tesis, es el último grupo de trabajo el que debe centrar la atención, toda vez que su objetivo se integra en el ámbito de los mismos. La estabilidad elástica, lineal o no lineal, tiene un exclusivo interés académico toda vez que las cargas críticas que proporciona constituyen siempre una cota superior de la capacidad resistente de los arcos. Durante muchos años ha centrado el interés de muchos investigadores, porque sus hipótesis simplificadoras permitían el estudio analítico y no requerían el empleo de una herramienta de la que entonces se carecía: el ordenador. Por esta razón, el tratamiento que se va a dar en este capítulo a la documentación recopilada va a ser heterogéneo: para los primeros dos grupos se realizará una mera relación de citas y temas tratados, mientras que en el último se entrará en la descripción usual en un estado del arte, ya que constituyen la herramienta fundamental para los proyectistas de arcos metálicos.

3.2. ESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL LATERAL

Aunque el objeto de la presente Tesis se centra en arcos con directriz parabólica sometidos a carga uniforme en planta, se comenta a continuación la relación de trabajos publicados sobre la materia incluyendo referencias a otras directrices y tipos de carga aplicadas. La evolución investigadora de la estabilidad lateral (o espacial) de los arcos es análoga a la experimentada para la estabilidad en el plano. Al alcanzar las cargas que actúan en el plano del arco un cierto valor "crítico", una combinación entre el giro del arco con respecto a su eje y el pandeo lateral causa una deformación fuera del plano. Las referencias recogidas a continuación corresponden tanto a arcos exentos como a arcos con tablero.

3.2.1. Arcos exentos

En 1943 **STUSSI** determina la carga crítica a pandeo lateral de un arco parabólico biempotrado sometido a una carga uniforme en planta. Los resultados se presentan para dos relaciones diferentes entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión y para los casos de sección constante y sección variable.

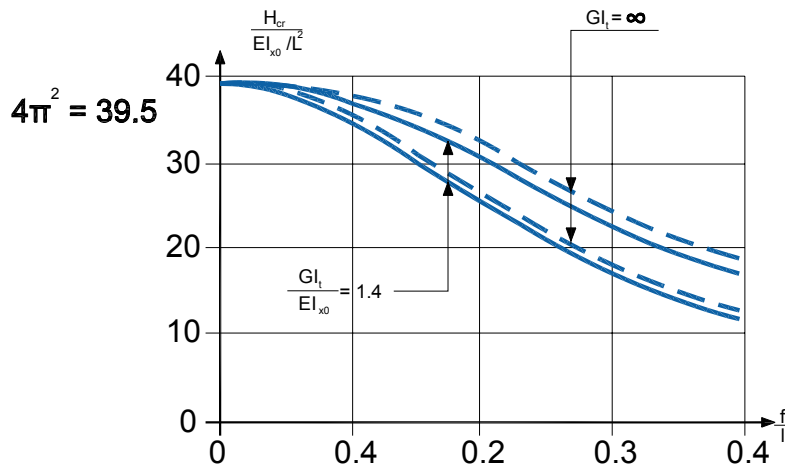


Figura 3.2.1.1. "Carga crítica horizontal a pandeo lateral de un arco parabólico biempotrado sometido a una carga uniforme en planta y sección transversal constante."

De la Figura se deduce que el valor de la carga horizontal crítica a pandeo lateral relativa al parámetro EI_x/L^2 (en donde EI_x representa la rigidez a la flexión fuera del plano del arco y L la longitud de la cuerda) disminuye con el aumento de la relación flecha-luz. Asimismo, para el caso de rigidez torsional infinita, los valores de $\frac{H_{cr}}{EI_x/L^2}$ son mayores que para la relación entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión lateral de 1,40, lo cual es lógico ya que al hacer la sección transversal completamente rígida a torsión se mejora el comportamiento a pandeo lateral del arco.

En 1.961 **TIMOSHENKO Y GERE**, en su libro "THEORY OF ELASTIC STABILITY", determinan el valor de la carga crítica de pandeo lateral para el caso de un arco biapoyado con directriz **circular** sometido a una carga uniforme **radial** y a dos **momentos puntuales** aplicados en los extremos del mismo. Para ello formulan las ecuaciones diferenciales de equilibrio correspondientes a los tres ejes coordenados x , y , z , y las resuelven teniendo en cuenta las condiciones de contorno que caracterizan el problema.

En 1.966 **KOLLÁR** e **IVÁNYI** resolvieron los casos anteriores para un arco biempotrado aplicando métodos energéticos que aportan una ecuación cuadrática para la fuerza crítica.

En 1.969 **DEMUTS** determina el valor de la carga crítica para arcos **circulares** con el giro con respecto al eje del arco impedido en sus extremos para el caso de carga vertical uniforme en planta.

En 1.972 **TOKARZ** y **SANDHU** calculan la carga última de **PANDEO LATERAL TORSIONAL** para arcos parabólicos biapoyados y biempotrados. Para ello plantean las ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan el fenómeno. Los resultados se recogen en tablas y de forma gráfica determinando el parámetro crítico de pandeo $\left(\lambda = \frac{qL^3}{A}\right)$ en función de varios factores entre los que se destacan la relación flecha-luz, la relación entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión, las condiciones de contorno y las posibles restricciones al movimiento en puntos del arco excluyendo los dos extremos. En la expresión de λ "L" es la longitud de la cuerda del arco y "A" la rigidez a flexión lateral de la sección transversal del arco ($A = EI_x$).

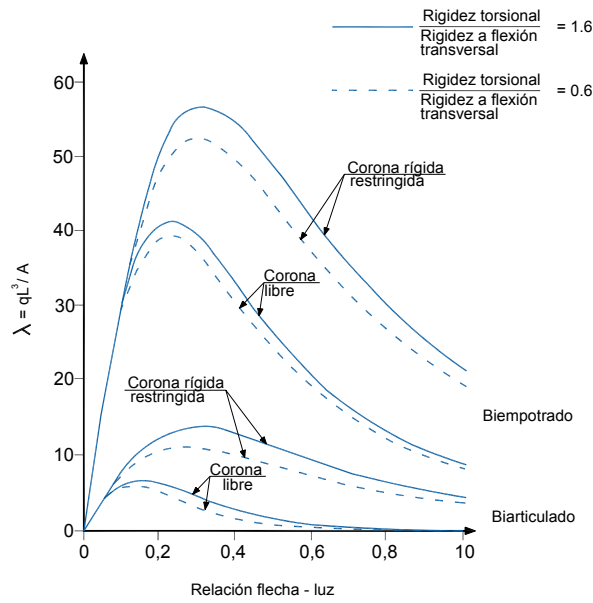


Figura 3.2.1.2.a. "Parámetro crítico de pandeo frente a "f/L" para diferentes condiciones de contorno de la corona con relaciones rigidez a torsión-rigidez a flexión transversal de 0,60 y 1,60."

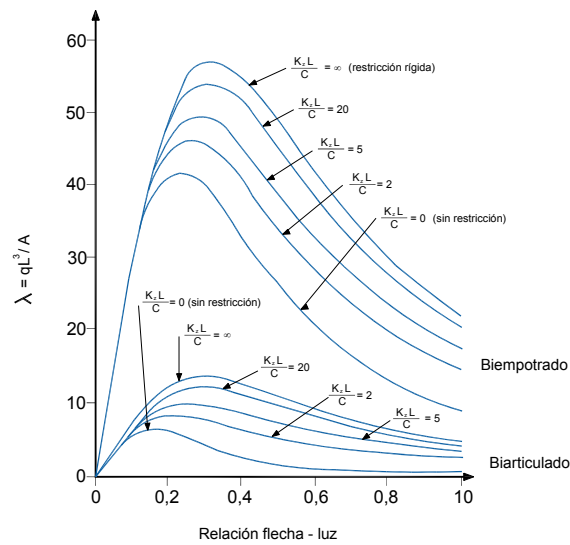


Figura 3.2.1.2.b. "Parámetro crítico de pandeo frente a "f/L" para diferentes restricciones del arco en coronación (determinado por el parámetro $\frac{k_z \cdot L}{C}$) con una relación rigidez a torsión-rigidez a flexión transversal de 1,60 (C es la rigidez torsional del arco)."

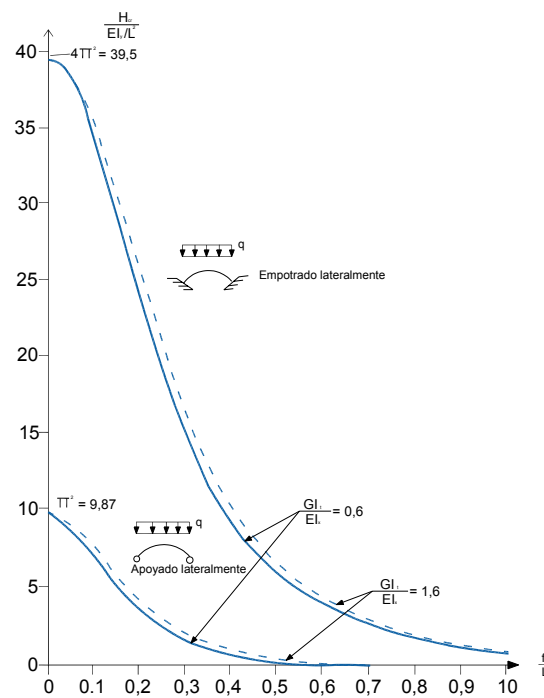


Figura 3.2.1.2.c. "Carga crítica horizontal a pandeo lateral de un arco parabólico sometido a una carga uniforme en planta."

De la Figuras se deduce que el valor de la carga crítica de pandeo lateral crece con el aumento de la relación flecha-luz hasta un máximo que oscila entre 0,10 y 0,20 para arco biapoyados y entre 0,20 y 0,30 para arcos biempotrados y luego decrece hasta alcanzar su valor asintótico. Asimismo, cuanto mayor es la relación entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión transversal, mayor es la carga crítica tal y como había deducido Stussi.

En lo que respecta a la carga crítica horizontal frente al pandeo lateral, su valor decrece con el aumento de la relación flecha-luz desde un "máximo teórico" correspondiente al caso de viga recta hasta 0 para $f/L = 0,60$ en el caso de arcos biapoyados y $f/L = 1,10$ en el caso de arcos biempotrados.

3.2.2. Arcos con tablero

En el caso de los arcos con tablero, las cargas actúan sobre este último, el cual se soporta con la ayuda de elementos verticales (tirantes o montantes según que el tablero sea superior, inferior o intermedio) por medio del arco.

En 1954 **GODDEN** calculó la fuerza crítica horizontal H_{cr} para arcos parabólicos de tablero inferior con carga uniforme en planta, sección transversal constante y despreciando la rigidez de alabeo, en el intervalo $f/L = (0-0,24)$, para una relación entre la rigidez torsional y la rigidez a flexión comprendida entre 0,1 e infinito.

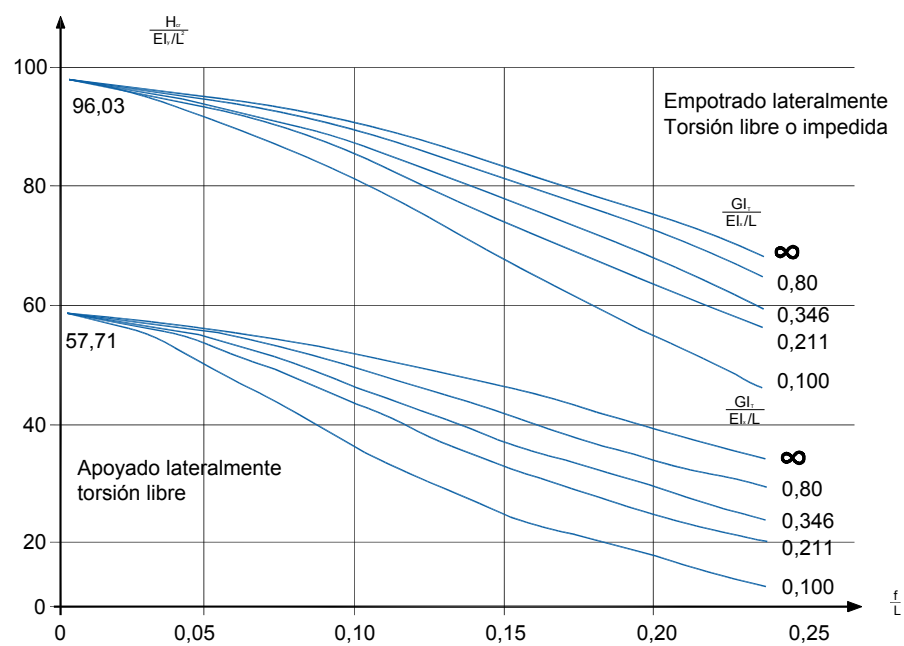


Figura 3.2.2.1.: "Valor de la fuerza crítica horizontal de pandeo lateral en arcos parabólicos de tablero inferior."

La carga crítica horizontal de pandeo lateral de arcos con tablero inferior relativa a EI_x/L^2 decrece con el aumento de f/L , al igual que determinó Stussi para arcos exentos. No obstante, observando los valores deducidos por Godden se observa que el arriostramiento del tablero incrementa las cargas críticas del

arco exento del orden de dos veces y media. Asimismo, a mayor relación rigidez torsional-rigidez a flexión transversal, mayor valor de $\frac{H_{cr}}{\frac{EI_x}{L^2}}$

Ese mismo año **ÖSTLUND** en su libro "**LATERAL STABILITY OF BRIDGE ARCHES WITH TRANSVERSE BARS**" investiga los efectos de varios factores, entre los que se destacan la rigidez a flexión de las barras transversales y el tablero, en la estabilidad lateral y en el comportamiento del doble arco sometido a cargas laterales.

En 1.959 **GODDEN** y **THOMPSON** fabricaron un modelo de puente arco con tablero inferior, barras transversales en el tablero y tirantes con el fin de validar los resultados teóricos obtenidos sobre el comportamiento lateral en la tesis de pandeo lineal elástico.

No existen diagonales transversales que conectan los dos arcos. La estabilidad transversal del arco depende de los siguientes factores:

- a) Rigidez a flexión transversal del arco $B_2 = EI_y$
- b) Relación entre la rigidez a flexión transversal y la rigidez torsional
- c) Rigidez transversal del sistema formado por el tablero y los tirantes
- d) Condiciones de contorno del arco, impidiendo los desplazamientos y/o giros y torsiones de los puntos extremos de la estructura

En la Figura 3.2.2.2. se muestra el valor de la carga horizontal crítica del arco (H_{cr}) en función de la relación flecha-luz para diferentes relaciones entre la rigidez a flexión transversal y la rigidez torsional empleados en el análisis del modelo fabricado. H_{cr} es directamente proporcional a la rigidez a flexión transversal del arco e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud del arco y a la relación entre la rigidez transversal y la rigidez torsional.

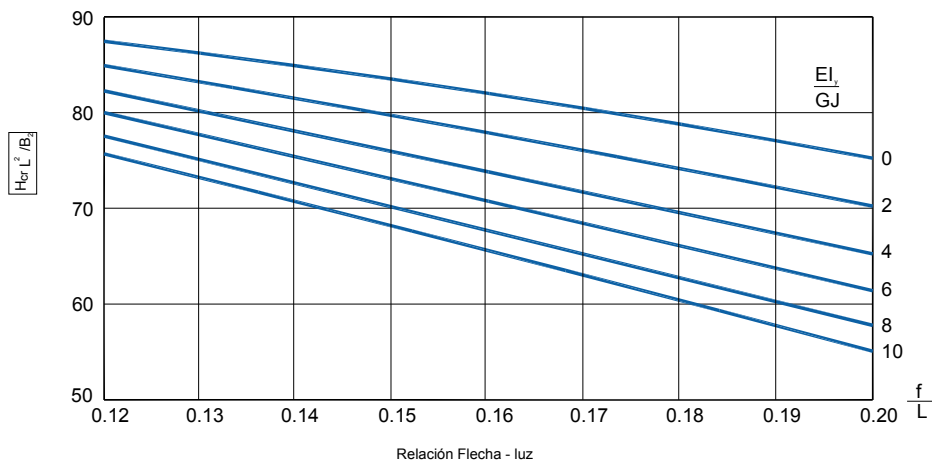
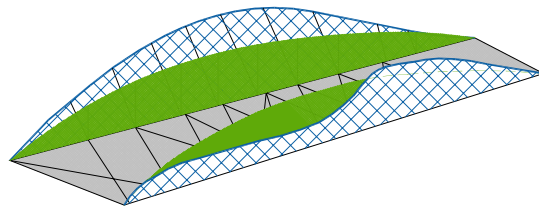


Figura 3.2.2.2. "Valor de la carga crítica horizontal en función de f/L. Criterio de verificación del modelo."

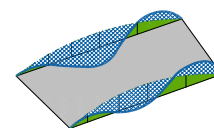
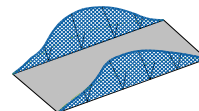
En lo que respecta a la deformada bajo la carga máxima, se obtiene:



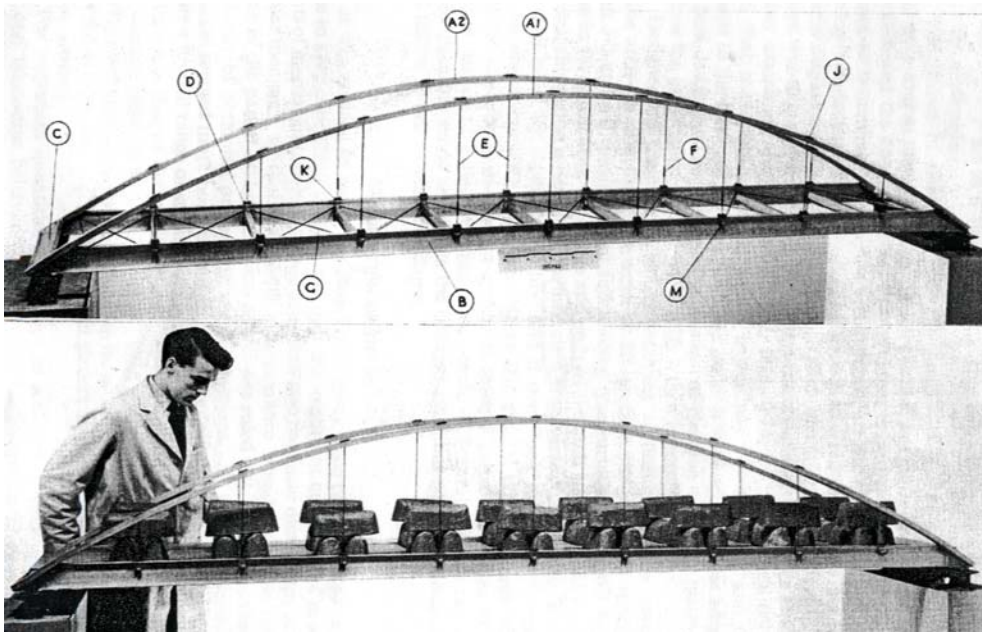
Los dos primeros modos de pandeo son:

Modo de pandeo I: $H_{cr} = \frac{76,1EI_y}{L^2}$

Modo de pandeo II: $H_{cr} = \frac{79EI_y}{L^2}$



Con lo que uno de los arcos pandea de forma cercana al modo II y el otro de una forma intermedia entre el modo I y el modo II.



En 1.961 **STEIN** resolvió el problema planteado por Godden en 1954 por otro método obteniendo resultados coherentes.

En 1.971 **ALMEIDA, TOKARZ, SAKIMOTO, NAMITA, SHUKLA Y OJALVO** estudiaron el pandeo lateral elástico de dos arcos nervados arriostrados con barras transversales de arriostramiento normales al plano de los arcos. El pandeo lateral se suprime:

- a. con la localización y el espaciamiento de las barras transversales de arriostramiento
- b. regulando la distancia entre los arcos principales
- c. con la rigidez a flexión de las barras con respecto al eje perpendicular al arco y contenido en el plano del mismo
- d. con la rigidez a flexión de las barras con respecto al eje de la directriz del arco

Asimismo, también determinaron la carga crítica horizontal de un arco bi-empotrado para un determinado intervalo de f/L , asumiendo las hipótesis y los resultados obtenidos por Godden. En la línea de los resultados obtenidos por

Godden y Thompson, el valor de la carga crítica horizontal decrece con el incremento de f/L y aumenta con la relación entre la rigidez torsional y la rigidez transversal.

En 1.974 **KOVÁCS** determinó el valor de la fuerza crítica para el caso de un arco parabólico biempotrado con tablero inferior, considerando la **rigidez al alabeo** y modo de pandeo con media onda. En las secciones extremas el alabeo es libre. Igualmente se asumen las hipótesis y los resultados de Godden.

El valor de H_{cr} viene dado por:

$$\frac{1}{H_{cr}} = \frac{(L/2)^2}{EI_x k_b} + \frac{(L/2)^2}{GI_t K_t + \frac{4EI_w k_w}{L^2}} \tag{3.2.2.3.}$$

donde

L es la longitud de la cuerda del arco

EI_x es la rigidez a flexión transversal del arco

GI_t es la rigidez torsional del arco

EI_w es la rigidez al **alabeo**

K_b, K_t y K_w son parámetros que dependen de f/L , cuyo valor se obtiene de la Figura 3.2.2.4.

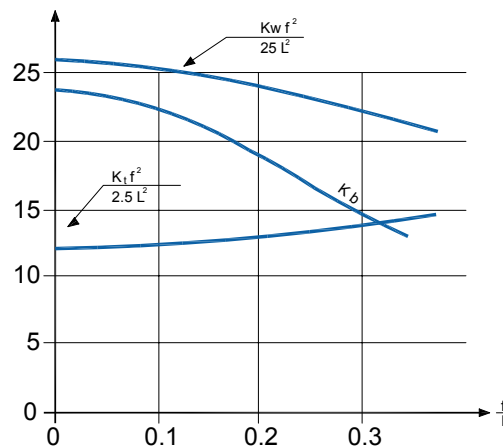
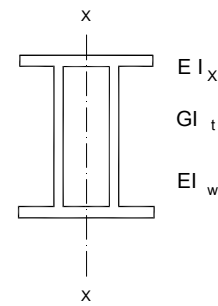


Figura 3.2.2.4. "Valor de los parámetros K_b , K_t y K_w utilizados en la expresión (3.2.2.3.)."

Se verifica, tal y como se ha puesto de manifiesto con los autores anteriores en lo que respecta a arcos de tablero inferior, que el valor de H_{cr} se incrementa con el aumento de las rigideces **a flexión transversal, torsión y alabeo.**

En 1.977 **SAKIMOTO** y **KOMATSU** estudiaron la rigidez de las diagonales de arriostramiento necesaria para la estabilidad lateral de los arcos. Un análisis del mismo parámetro fue realizado posteriormente por **KURANISHI** y **YABUKI** en **1981**, obteniendo resultados similares.

En 1.986 **KETTER** y **JIA** examinaron el pandeo lateral-torsional de dos arcos interconectados con barras transversales utilizando un método tridimensional de elementos finitos sin considerar imperfecciones geométricas y con cargas contenidas dentro del rango elástico del material. Los resultados obtenidos coinciden con los primeros ensayos de Ostlund.

En 1.990 **SAKIMOTO** y **SAKATA** compararon los resultados numéricos obtenidos relativos al pandeo lateral de puentes arco con tablero inferior con lo indicado en varias normas (DIN 4114, JSHB, DIN 18800).

3.3. ESTABILIDAD ELÁSTICA LATERAL NO LINEAL

La "no linealidad geométrica" se debe evaluar para las deformaciones en y fuera del plano y la torsión del arco.

En 1981 **WEN** y **LANGE** desarrollaron un modelo de elementos finitos para calcular las cargas elásticas de bifurcación de pandeo en y fuera del plano para arcos de diferente geometría. En el problema numérico, las deformaciones previas al pandeo se consideran directamente proporcionales a la carga. De los resultados numéricos obtenidos en los cuatro casos estudiados (uno de ellos fuera del plano) para arcos simétricos cargados simétricamente, se concluye que las cargas "críticas" obtenidas para el caso "no lineal" difieren mínimamente de las del caso lineal.

3.4. LA NO LINEALIDAD DEL MATERIAL

Complementando el trabajo realizado previamente por Godden en 1954, **KEE** desarrolló en 1961 estudios relativos al pandeo inelástico lateral de arcos de aluminio parabólicos con sección tubular cargados uniformemente.

La carga de pandeo se calcula por el método de aproximaciones sucesivas con la teoría del módulo tangente y la del módulo reducido. La reducción de la rigidez torsional se supone igual a la de la rigidez a flexión. La carga de pandeo inelástico obtenida por la teoría del módulo tangente es menor que la obtenida por la teoría del doble módulo y cercana al valor experimental.

3.5. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO

La determinación de la carga real de colapso "fuera del plano" de un arco metálico debe considerar, entre otros, el comportamiento no lineal geométrico de la estructura, el carácter elastoplástico del acero, la presencia de autotensiones, las imperfecciones geométricas constructivas y la propagación de zonas plastificadas a lo largo de la directriz, que no pueden ser asimiladas a rótulas plásticas. La única herramienta válida para su cálculo es el método de los elementos finitos. Al tratarse de una técnica analítica que ha sufrido un fuerte desarrollo en los últimos treinta años, el grado de definición de los resultados obtenidos a lo largo de los mismos ha venido dado por la exactitud de la formulación empleada: la resolución del problema NO LINEAL se realiza de forma incremental, linealizando cada pequeño escalón de carga y ajustándolo iterativamente.

Casi todos los trabajos de análisis han comenzado por la elaboración de su propia herramienta numérica, hecho que ha restado eficacia a los resultados obtenidos, ya que el desarrollo del programa se convertía en el objetivo principal del trabajo de investigación en lugar de serlo sus resultados. Hoy en día la "tarea programadora" ha remitido debido a la aparición de "software" especializado en el cálculo de estructuras, lo que permite a los investigadores centrar sus esfuerzos en el estudio "estructural".

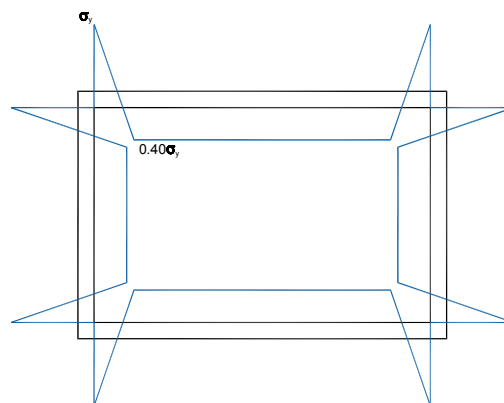
3.5.1. Arcos exentos

En 1.977 **SAKIMOTO** y **KOMATSU** investigaron la carga última de colapso de arcos parabólicos exentos debido a una inestabilidad inelástica lateral producida por deformación flexo-torsional fuera del plano. Adoptaron las siguientes hipótesis de cálculo:

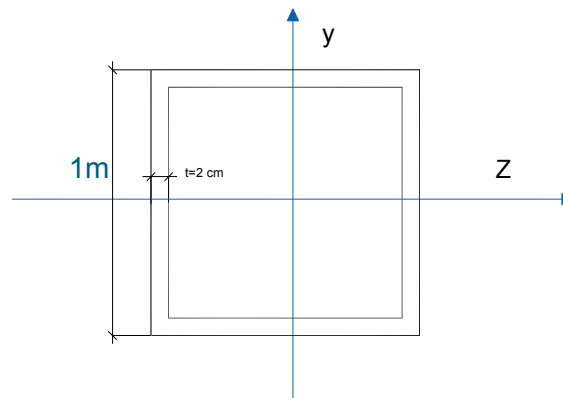
- Sección transversal cajón
- Material elastoplástico bilineal
- Torsión uniforme
- Criterio de plastificación de Von Mises
- Hipótesis de Bernoulli-Navier
- **Pequeñas deformaciones**
- Inexistencia de pandeo local
- Sección transversal sin distorsión
- La solución de las ecuaciones no lineales que gobiernan el problema se obtiene por el Método de Newton-Raphson.

La geometría del problema venía definida por los siguientes parámetros:

- Arco biapoyado parabólico
- Imperfección geométrica lateral inicial de valor $w_0 = \frac{L}{1.000} \text{sen} \frac{\pi x}{L}$
- Tensiones residuales iniciales



- Sección transversal cajón cuadrado de 1 m de lado y 2 cm de espesor



- Carga uniformemente distribuida en planta

- Material acero de límite elástico $235 \frac{N}{mm^2}$

Se define la esbeltez relativa al movimiento fuera del plano, $\bar{\lambda}_y$

$$\bar{\lambda}_y = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \cdot \frac{L}{2 r_y}$$

donde

σ_y es el límite elástico del acero, en el caso que nos ocupa 235 MPa

E es el módulo de elasticidad del acero, 210.000 MPa

L es la longitud de la cuerda del arco

r_y es el radio de giro de la sección transversal con respecto al eje "y"

La tensión crítica σ_{cr} se define como la relación entre el axil crítico N_{cr} y el área A de la sección transversal.

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad (3.5.1.2.)$$

El axil crítico N_{cr} se define como

$$N_{cr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{L}{f} \right)^2 + 1} \cdot q_{cr} \cdot L \quad (3.5.1.3.)$$

donde "f" es la flecha del arco y "q_{cr}" la carga crítica uniformemente distribuida.

Se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- a) La reducción de la carga última debida a la existencia de tensiones residuales tiene un valor máximo de un 25 %.

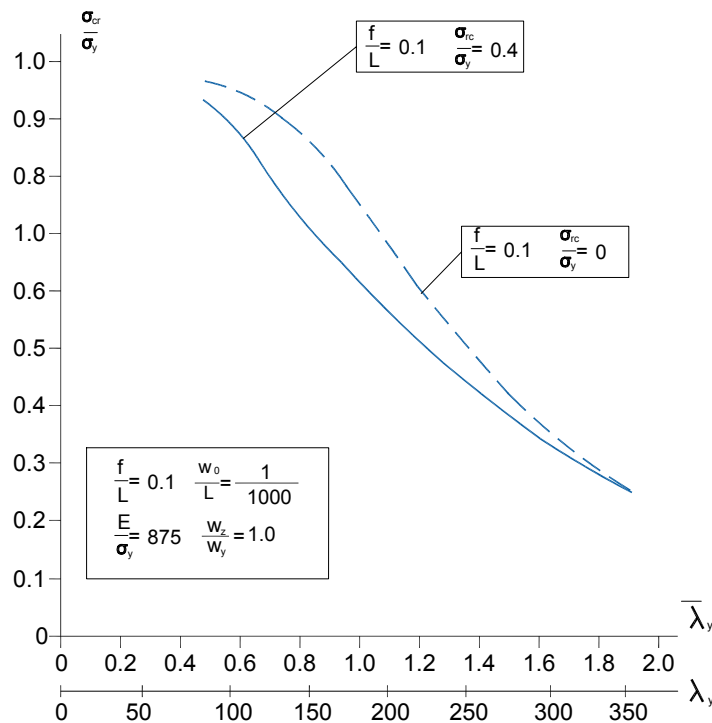


Figura 3.5.1.4.: "Efecto de las tensiones residuales en la carga última de arcos parabólicos."

- b) La relación flecha-luz tiene poca influencia en el valor de σ_{CR}/σ_y (en el caso de arcos circulares la influencia es considerable).

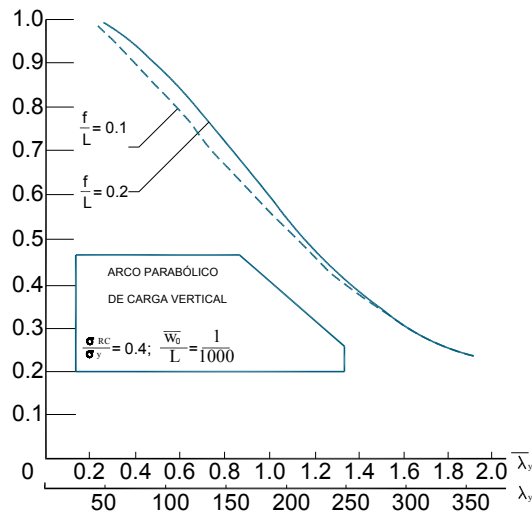


Figura 3.5.1.5.: "Comparativa entre la carga última de arcos parabólicos con relaciones flecha-luz 0,10 y 0,20."

- c) Los efectos de la configuración del arco en la carga última son considerables para el caso $f/L = 0,2$.

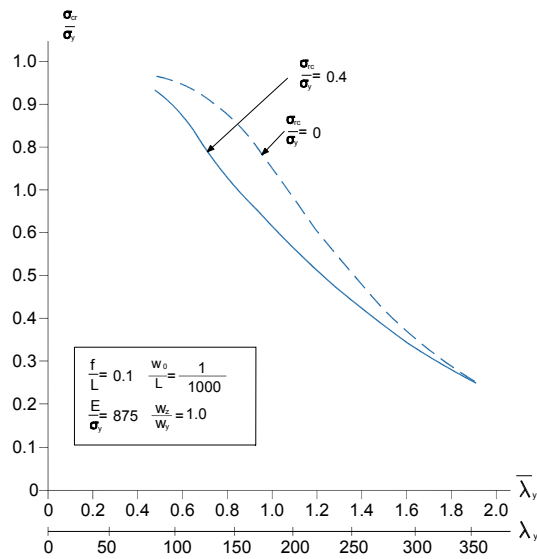


Figura 3.5.1.6.: "Efectos de la configuración de un arco parabólico con relación $f/L = 0,20$."

- d) Un incremento del módulo resistente W_z con respecto al eje "z" genera un incremento de la carga última fuera del plano del orden de un 10% para esbelteces $\lambda_y = 150, 200$.

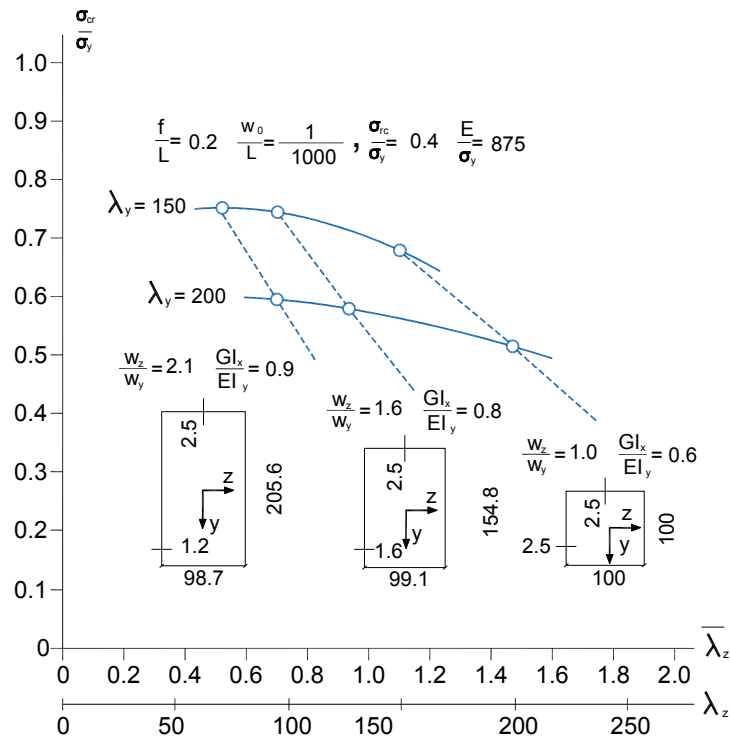
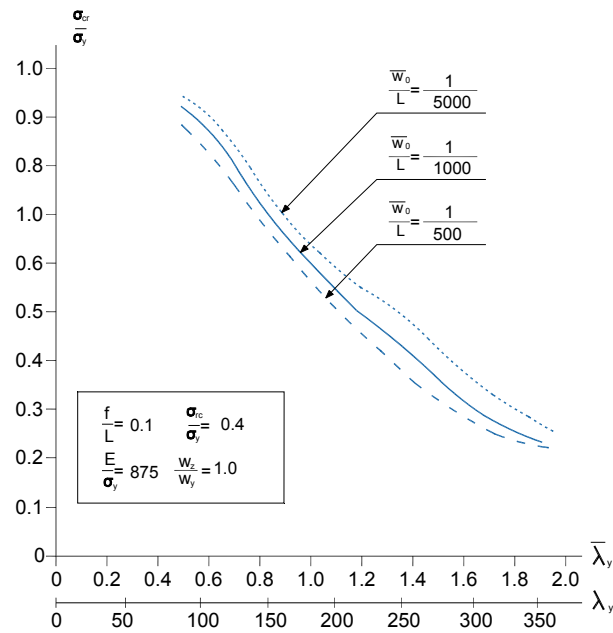


Figura 3.5.1.7.: "Influencia del módulo resistente con respecto al eje z en la carga última fuera del plano."

- e) La existencia de imperfecciones geométricas laterales iniciales de valor $w_0 = \frac{L}{1.000}$ puede reducir entre un 10 y un 15% la carga última fuera del plano para esbelteces relativas λ_y superiores a 1,20.



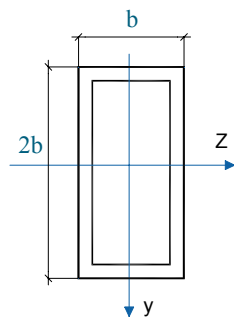
- f) Los resultados obtenidos se comparan con las curvas europeas, obteniéndose resultados similares y cercanos a las curvas europeas b y c.

En 1.979 **SAKIMOTO** y **KOMATSU** estudiaron las características espaciales elastoplásticas y la carga última de dos arcos conectados sujetos a la combinación de cargas verticales y horizontales laterales.

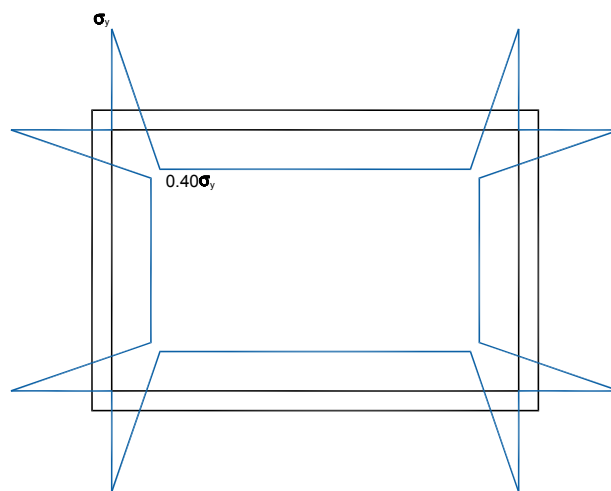
Los parámetros que rigen el problema analizado son:

- Arco parabólico
- Longitud de la cuerda $L = 100$ m
- Relación $f/L=0,10$
- Condiciones de contorno en el plano del arco: biapoyado
- Sección cajón

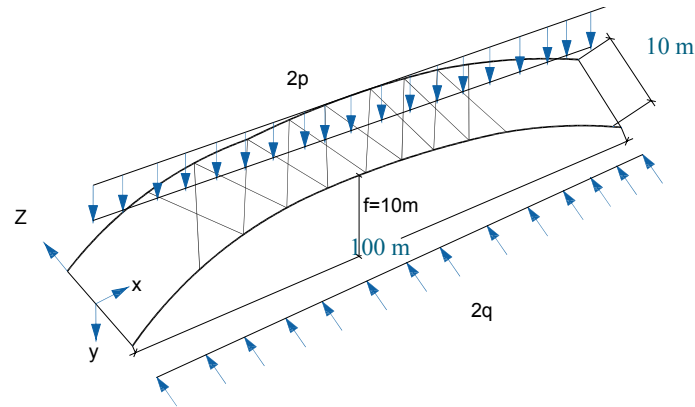
$$\frac{w_z}{w_y} = 2$$



- Distancia entre los arcos = 10 m
- Sistema de arriostramiento entre arcos = Viga doble Warren
- Esbeltez con respecto al eje y (lateral) = $\lambda_y = 200, 300, 400$
- $E/\sigma_y = 875$
- Tensiones residuales iniciales



- Sin imperfecciones geométricas iniciales



Se consideran arcos con esbelteces comprendidas entre 180 y 300.

$$180 \leq \lambda_y \leq 300$$

Sakimoto y Komatsu determinaron la relación existente entre la carga última lateral \bar{q} y la tensión adimensional σ_s en el arranque de los arcos.

La carga última lateral \bar{q} se expresa como la relación entre la carga última lateral q_u y una carga específica de viento correspondiente a una velocidad de 50 m/s.

$$\bar{q} = \frac{q_u}{q_0} \quad (3.5.1.8.)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho C_d V_w^2 h \quad (3.5.1.9.)$$

En la expresión (3.5.1.9.) los coeficientes ρ , C_d y h corresponden al peso específico, coeficiente eólico y altura a considerar en la presión ejercida por el viento; $V_w = 50$ m/s.

El valor $\bar{\sigma}_s$ es la relación entre la tensión adimensional σ_s correspondiente a un estado de carga horizontal $q = q_0$ y la tensión de plastificación σ_y .

La relación resultante viene dada por:

$$\bar{q} = \frac{1,4}{\bar{\sigma}_s - 0,15} - 0,46 \quad (3.5.1.10.)$$

donde

$\bar{\sigma}_s = \sigma_n + \sigma_i + \sigma_b$, siendo

σ_n la tensión normal media calculada para el arco sujeto a una carga vertical uniforme "p" en la hipótesis de cálculo lineal.

σ_i la tensión de pandeo lateral del arco calculada en la hipótesis de cálculo lineal como una viga curva cargada lateralmente con la sección transversal correspondiente a los dos arcos.

σ_b la tensión lateral debida al pandeo individual de cada arco.

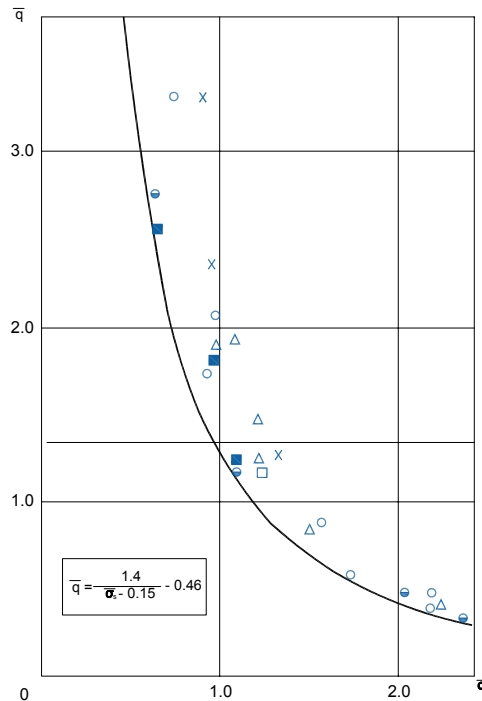


Figura 3.5.1.11.: "Relación existente entre la carga última lateral \bar{q} y la tensión adimensional relativa $\bar{\sigma}_s$."

El resultado obtenido es totalmente lógico: el valor de la carga última lateral será mayor cuanto menor sea la sollicitación tensional del arco “en” y “fuera” del plano. Para valores pequeños de $\bar{\sigma}_s$ el valor de \bar{q} viene limitado por la resistencia lateral del arco frente a cargas horizontales.

Asimismo, Sakimoto y Komatsu determinaron la relación existente entre la carga última lateral \bar{q} y la esbeltez del arco con respecto al eje “y”. En la Figura 3.5.1.12. se muestra esta relación para una esbeltez de los elementos de arriostamiento de $\lambda_t = 70$ y diferentes valores de \bar{p} , en donde $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$, siendo p la carga uniformemente repartida en el plano correspondiente a uno de los dos arcos conectados y p_0 la carga de plastificación del arco

$$p_0 = \frac{\bar{2} A \sigma_y}{L \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{L}{f}\right)^2 + 1}}$$

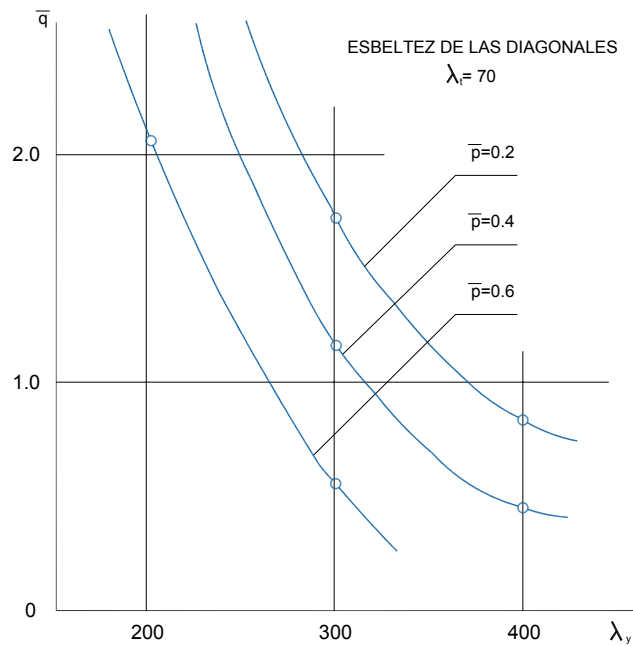


Figura 3.5.1.12.: “Relación entre la esbeltez del arco y la carga última lateral.”

La carga última lateral crece con la reducción de la esbeltez λ_y y de la carga en el plano del arco (\bar{p}), tal y como indica la lógica y los resultados anteriormente expuestos.

Para un rango de λ_y comprendido entre 200 y 350 puede ocurrir que la carga última del arco esté controlada por el pandeo del arriostamiento lateral.

3.5.2. Arcos con tablero y/o arriostrados lateralmente

Entre los años 1.977 y 1.979 **SAKIMOTO Y KOMATSU** estudiaron el efecto de las diagonales en los puentes arco de tablero inferior.

Para ello emplean un arco parabólico de tablero inferior biapoyado, con la sección transversal indicada en la Figura 3.5.2.1., es decir, dos secciones cajón soldadas unidas con diagonales (que no presentan fenómeno de abolladura). Las características geométricas y mecánicas son las que se muestran en la Figura 3.5.2.1.

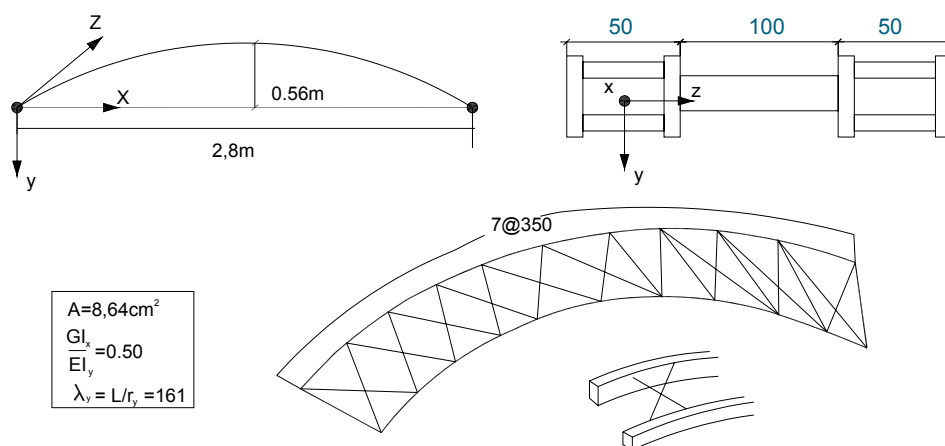


Figura 3.5.2.1.: "Características geométricas y mecánicas del arco modelo empleado por Sakimoto y Komatsu en su estudio del efecto de las diagonales en puentes arco de tablero inferior."

Las diagonales están constituidas por dos vigas cruzadas tipo Warren soldadas a los dos arcos extremos.

En lo que se refiere a las cargas actuantes, se considera una carga vertical uniformemente distribuida en planta con la posible alternancia de una carga horizontal uniforme.

Se tienen en cuenta las tensiones residuales e imperfecciones geométricas iniciales.

Se ha calculado la carga última del arco "modelo" en las hipótesis de cálculo elastoplástico no lineal espacial.

El uso de las diagonales de arriostramiento entre arcos genera un incremento de la carga última del orden del 120%. Asimismo, será necesario dimensionar las diagonales con suficiente rigidez para evitar la aparición del pandeo local en alguna de las vigas-barras de arriostramiento.

En 1.981 **KURANISHI y YABUKI** analizaron el efecto de las diagonales en los arcos de tablero superior en la carga última espacial de colapso, obteniendo conclusiones similares a las deducidas por Sakimoto y Komatsu.

En 1.982 **SAKIMOTO y KOMATSU** trataron de establecer parámetros que determinasen la carga última de fallo por inestabilidad lateral de arcos de acero arriostrados lateralmente (arcos apoyados paralelos conectados por vigas y/o diagonales) con cargas uniformemente distribuidas en planta. La función principal de las vigas es la de resistir la distorsión de la sección transversal y dar al arco suficiente rigidez torsional; la de las diagonales resistir las deformaciones de cortante fuera del plano.

Continuando con ese mismo trabajo, determinaron la carga última lateral de arcos de tablero inferior con sección cajón utilizando una analogía entre un arco y una columna a través de una función de esbeltez equivalente λ_a . El modelo de arco utilizado corresponde a dos arcos simples de sección cajón arriostrados lateralmente a través de diagonales que los unen, de geometría parabólica con un intervalo de relación flecha-luz comprendido entre 0,1 y 0,2. Asimismo, se consideran imperfecciones geométricas y tensiones residuales iniciales.

El punto de partida son las fórmulas que permiten calcular la tensión última de las columnas cargadas axialmente incluidas en las "Especificaciones japonesas para los puentes en autopistas".

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = 1 - 0,136 \lambda - 0,3 \lambda^2 \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = 1,276 - 0,888 \lambda + 0,176 \lambda^2 \quad \text{para } 1 \leq \lambda \leq 2,52 \quad (3.5.2.2.)$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{para } \lambda > 2,52$$

siendo

σ_u la tensión última de una columna

σ_y la tensión de plastificación

$\lambda = \frac{KL}{\pi r} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$ la esbeltez adimensional de una columna, con K parámetro de longitud efectiva de la columna, L longitud de la columna entre extremos, r radio de giro de la columna y E módulo de elasticidad.

Se busca emplear la fórmula (3.5.2.2.) para predecir la carga última de pandeo lateral de arcos arriostrados redefiniendo los valores de σ_u y λ .

Para arcos

$$\sigma_u = \frac{N_u}{A} \quad (3.5.2.3.)$$

$$\lambda = \frac{k_e k_t k_\beta L}{\pi \cdot r_y} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (3.5.2.4.)$$

N_u es el axil último calculado bajo la hipótesis de cálculo lineal

A es el área media total

r_y es el radio de giro del arco con respecto al eje "y", en su movimiento en el plano fuera del arco.

K_e es un coeficiente relativo a la fijación rotacional de los arcos en sus extremos con respecto al eje "y". Para arcos biempotrados $K_e = 0,50$ y para biapoyados $K_e = 1,00$

K_t es un coeficiente relativo a los tirantes y a la rigidez lateral del tablero. Si existe rigidez transversal, $K_t = 0,65$; en caso contrario, $K_t = 1$.

K_β es un coeficiente relativo a la longitud arriostrada del arco. En la Figura 3.5.2.5. se muestran los parámetros necesarios para definir el coeficiente K_β .

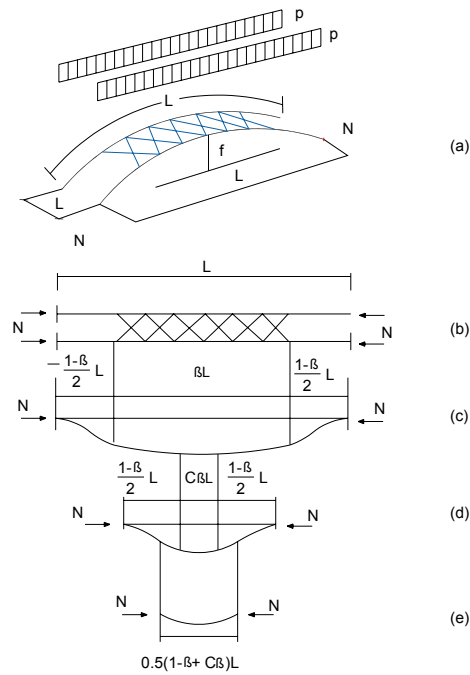


Figura 3.5.2.5.: "Longitud efectiva del arco arriostrado: (a) y (b) Arco original; (c) Columna empotrada con restricción al movimiento lateral; (d) Columna empotrada; (e) Columna apoyada."

βL es la longitud del arco con doble arriostramiento lateral. Estudios han demostrado que los desplazamientos laterales son "dominantes" en los movimientos que caracterizan el pandeo lateral de arcos; por el contrario, los giros son "insignificantes". Asimismo, la parte del arco con doble arriostramiento apenas tiene distorsión. Por todo ello, se asimila el pandeo del arco al de una columna biapoyada de longitud $K_e (1-\beta+C\beta) L$ y con un radio de giro " r_y ".

La esbeltez relativa $K_e C \beta L / r_y$ refleja la contribución a la esbeltez total de la columna equivalente de la longitud con doble arriostramiento βL . Esta longitud corresponde a una columna consistente en dos áreas separadas una distancia " a ".

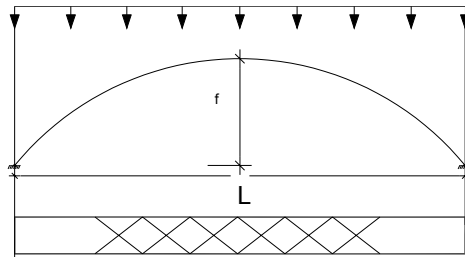
Si se procede del lado de la seguridad, la esbeltez relativa de la columna biempotrada es $\frac{\beta L}{a/2}$; el radio de giro aproximado es " $a/2$ ". Si $\frac{K_e C \beta L}{r_y} = \frac{\beta L}{a/2}$, $C = \frac{2r_y}{k_e \cdot a}$. Así pues, resulta que $K\beta = 1-\beta+(2 r_y \beta/K_e a)$; Si no existe arriostramiento lateral, $\beta=0$ y $K\beta=1$.

Además de las especificaciones japonesas indicadas en (3.5.2.2.) se puede utilizar lo dispuesto por la SSRC y la ECCS.

La aplicación de la fórmula (3.5.2.4.) propuesta por Sakimoto y Komatsu se evalúa comparando los análisis obtenidos tras varios cálculos computacionales. En ellos se modeliza un arco con las siguientes características:

- 1.- Comportamiento del acero elastoplástico ($E/\sigma_y = 875$).
- 2.- Criterio de Von Mises.
- 3.- La rigidez torsional no incluye la resistencia al alabeo, casi despreciable en secciones cerradas.
- 4.- Sección cajón uniforme y arco parabólico con extremos con giro coaccionado con respecto a "y" y libre con respecto a "z".
- 5.- Imperfecciones geométricas iniciales de valor máximo $L/1.000$.

- 6.- Se aplican "cargas puntuales" equivalentes a la carga distribuida en los puntos de intersección de los arcos con las diagonales.
- 7.- La sección transversal de cada arco arriostrado es rectangular con una relación alto-ancho de 2.
- 8.- Tensiones residuales iniciales.
- 9.- Varias configuraciones geométricas del tipo.



10.- Arco de tablero inferior

Se obtienen las siguientes conclusiones de los análisis computacionales realizados:

- a) Para el caso de los arcos exentos, en la Figura 3.5.2.6. se muestra el buen ajuste obtenido con la fórmula propuesta para los arcos de $f/L = 0,1$ y $0,2$.

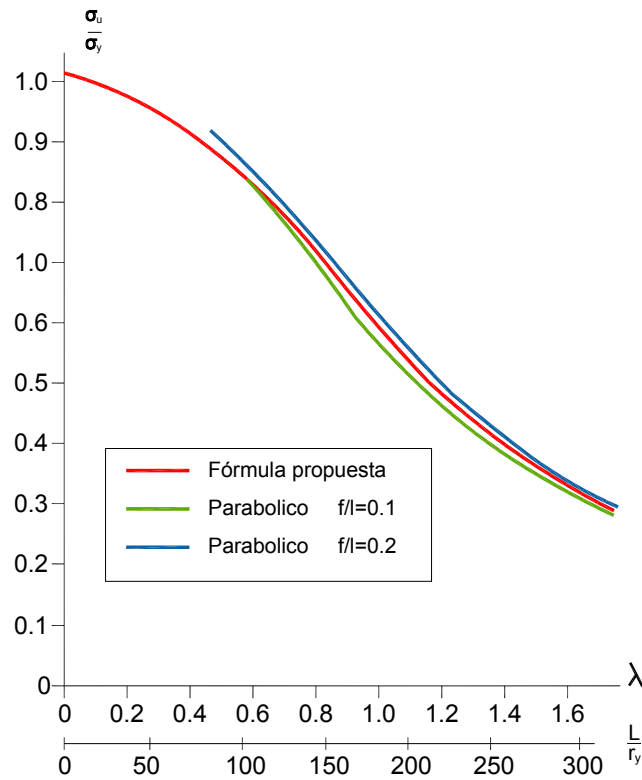


Figura 3.5.2.6.: "Relación entre la esbeltez y el cociente σ_u/σ_y para arcos parabólicos exentos con relación flecha-luz 0,1 y 0,2 y ajuste de la fórmula propuesta."

- b) Para el caso de los arcos arriostrados lateralmente, también se obtiene un ajuste óptimo con respecto a la fórmula propuesta.

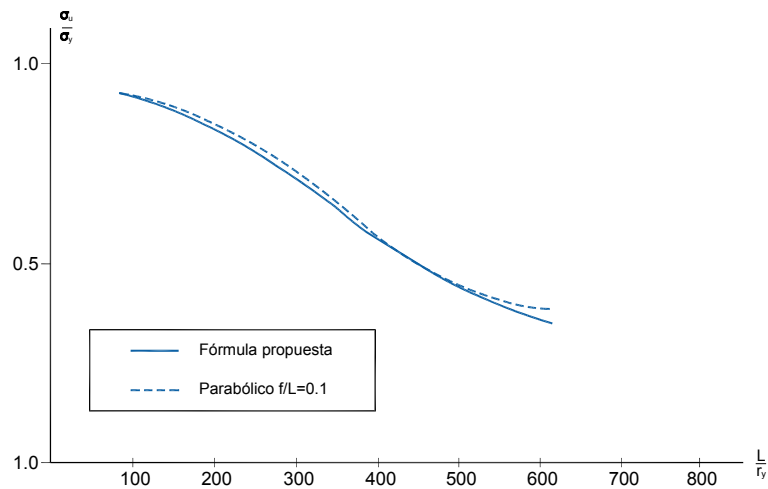


Figura 3.5.2.7.: "Relación entre la esbeltez y el cociente σ_u/σ_y para arcos arriostrados lateralmente."

- c) Para el caso de los arcos arriostrados lateralmente con TIRANTES, la fórmula también proporciona muy buenos resultados.

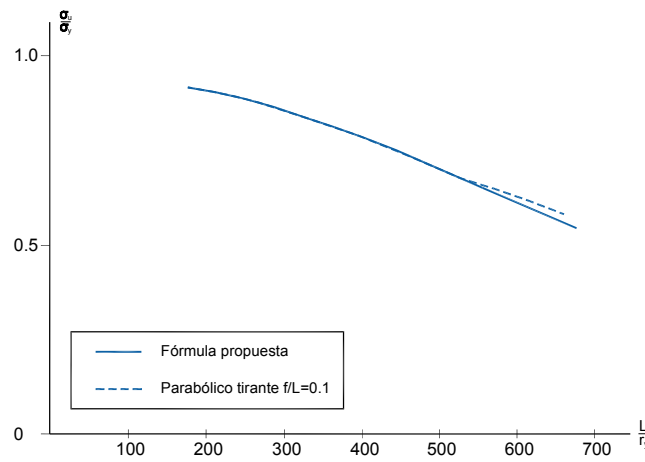


Figura 3.5.2.8.: "Relación entre la esbeltez y el cociente σ_u/σ_y para arcos arriostrados lateralmente con tirantes y tablero inferior con relación flecha-luz 0,10. Ajuste de la fórmula propuesta."

En los tres casos de arcos antes mencionados se concluye la total fiabilidad de la fórmula planteada.

Todo lo indicado anteriormente se refiere a cargas verticales uniformemente repartidas en planta.

También se ha investigado recientemente de forma pormenorizada el efecto de las cargas laterales en la carga última de colapso de arcos con o sin tablero. Se citan a continuación los tres trabajos de investigación más relevantes, a pesar de no ser las cargas laterales objeto de la presente Tesis Doctoral.

STUSSI en 1943 y **OSTLUND** y **WÄSTLUND** en 1960 propusieron un factor de amplificación que permitía determinar las deformaciones y tensiones "mayoradas" en el caso de acciones perpendiculares (normales) al plano del arco debido a la contribución de la carga axial que interactúa con los desplazamientos laterales.

En 1977 **KURANISHI** y **YABUKI** estudiaron el efecto de la fuerza horizontal lateral en la carga última de puentes arco.

En 1984 **KURANUSHI** y **YABUKI** definieron la rigidez necesaria en los arriostamientos laterales para asegurar que arcos biapoyados sometidos a cargas laterales se comportan básicamente como estructuras en su plano.

3.6. CRITERIOS DE DISEÑO

Las tabulaciones de la carga última de colapso sirven para orientar al proyectista, pero no son herramientas útiles para el dimensionamiento de los arcos. Hay que tener en cuenta que las circunstancias que rodean un proyecto concreto, con un material determinado, unos tipos de secciones, áreas e inercias normalmente variables, y la presencia de un tablero, hacen muy difícil la extrapolación de unas tablas obtenidas para casos más simples. Por ello, el proyectista de arcos metálicos posee poca herramienta de apoyo en su actividad cotidiana y los investigadores tienen por delante la tarea de ofrecer criterios de diseño que, aplicados de forma sencilla, ofrezcan los niveles de seguridad razonables que se debe exigir a estas estructuras.

La mayoría de las recomendaciones y especificaciones existentes relativas al diseño de puentes arco están basadas en el concepto de pandeo lineal y la filosofía de dimensionamiento por tensión admisible. Sin embargo, en los últimos años, el criterio de diseño ha cambiado, siendo determinante el de "estados límites".

Existen muy pocas especificaciones de diseño relativas a la carga última frente a la inestabilidad espacial de estructuras en arco. Aunque un arco es una estructura bastante estable en su plano, no es tan resistente frente a cargas laterales debido a sus propiedades espaciales.

Si no se asegura una suficiente resistencia fuera del plano, la capacidad resistente frente a cargas verticales se verá significativamente afectada por las cargas laterales y se deberá considerar la compleja interacción del comportamiento en y fuera del plano.

El arriostramiento lateral del arco aumenta la rigidez y la resistencia de la estructura fuera del plano. En este caso, la resistencia espacial del arco sometido a una combinación de cargas verticales y laterales se puede evaluar utilizando un modelo plano en vez de uno espacial.

En 1981 **KURANISHI y YABUKI** propusieron una fórmula práctica que permitía determinar la rigidez lateral requerida en un arco compuesto por dos arcos principales conectados con intervalos regulares mediante piezas de arriostramiento para el caso de comportamiento inelástico:

$$\mu_s = \frac{GA_{b,eq}}{24EA_a} \left(\frac{L_s^2}{b} \right) > \frac{1}{15} \quad (3.6.1.)$$

donde

G es el módulo de elasticidad transversal

$A_{b,eq}$ es el área de las chapas horizontales, las almas del pandeo lateral

A_a es la sección transversal del arco

L_s es la longitud del eje del arco

b es la distancia entre los ejes de los dos arcos

En lo que se refiere a la rigidez frente a la distorsión o alabeo

$$\mu_T = \frac{EI_{bx}}{GI_T} \cdot \frac{L^2}{b \cdot c} \quad (3.6.2.)$$

donde

GI_T es la rigidez a torsión del arco

EI_{bx} es la rigidez a flexión transversal con respecto a un eje paralelo a la dirección longitudinal del arco

c es el intervalo entre los arriostramientos laterales

La distancia requerida entre los arcos principales que permite calcular la resistencia del arco analizándola como una estructura plana viene dada por:

$$\frac{L}{b} < \frac{3,5 \times 10^4}{(\lambda_{IN-100}) \left(44,2 \frac{h}{L} + 7,84 \right) + 9,05(300 - \lambda_{IN})} \quad (3.6.3.)$$

En resumen, si el arco tiene las rigideces requeridas en las ecuaciones (3.6.1) y (3.6.2.) y la separación entre arcos principales requerida en la ecuación (3.6.3.), la influencia de las cargas de viento en la carga última del arco se podría determinar calculando la tensión plana del arco principal bajo cargas verticales adicionales equivalentes.

3.7. CONCLUSIONES

El análisis de los arcos no ha producido el trabajo de investigación ni las publicaciones generadas por otros tipos estructurales. Bien conocido el pandeo como fenómeno lineal y no lineal, sus valores críticos y las formas de inestabilidad, el interés de la clase científica se ha centrado en la determinación de la carga última de colapso, debida tanto a factores de inestabilidad como de agotamiento plástico, y sus repercusiones en los criterios de diseño de estructuras reales.

En el presente capítulo se ha realizado una revisión del estado del arte de los arcos metálicos. Si presentan dimensiones y proporciones lógicas, la teoría clásica del pandeo lineal elástico arroja mayores valores de la fuerza crítica que en el caso de cargas últimas. Por ello, el criterio de diseño de arcos atendiendo a la estabilidad se debe regir por la "CARGA ÚLTIMA".

Por otro lado, la investigación en el campo de la "CARGA ÚLTIMA ESPACIAL" acaba de comenzar y existen numerosos problemas todavía pendientes de resolver. La presente Tesis trata de arrojar algo de luz sobre este campo y facilitar la labor de los técnicos que trabajan en el diseño y proyecto de arcos.

4. ANALISIS DE ARCOS METÁLICOS

4. ANÁLISIS DE ARCOS METÁLICOS

4.1. OBJETO DEL CAPÍTULO

En este capítulo se realiza un recorrido por el arco metálico, tanto desde el punto de vista de la estructura como desde la óptica del comportamiento del acero.

De esta forma, en primer lugar se efectúa un análisis del arco elástico en servicio, tanto desde el punto de vista lineal como no lineal, con objeto de conocer la incidencia de sus dimensiones geométricas, coacciones y patrón de carga en su comportamiento.

En segundo lugar se hace un recorrido por las características del acero en tanto en cuanto influyen en la modelización de la carga última que será la que se calculará en el Capítulo 9. Dichas características son las bases plásticas del acero, su comportamiento como material no lineal y las imperfecciones estructurales que pueden acompañarle (autotensiones).

Por último se analizan las imperfecciones geométricas del conjunto.

4.2. REFLEXIONES SOBRE LA NATURALEZA DEL PANDEO LATERAL DE ARCOS

Si se realiza un análisis de la inestabilidad lateral de un arco sometido a cargas dentro de su plano se deduce lo siguiente:

- a) En lo que respecta a su comportamiento como viga, la parte de ésta que queda comprimida puede (si se supera un cierto valor umbral) provocar el "vuelco a pandeo lateral", que consiste en que las diferentes secciones de la viga sufren, además de los desplazamientos verticales debidos a la flexión, deformaciones transversales acompañadas de giros torsores.

- b) En lo que respecta a su comportamiento como arco, si éste es muy estrecho, se puede salir del plano, con flexión lateral de las secciones y aparición de torsión.

4.3. LA ESTRUCTURA LINEAL

4.3.1. Planteamiento de la Resistencia de Materiales

El análisis lineal supone un material perfectamente elástico, no tiene en cuenta la existencia de autotensiones, no incluye los esfuerzos de segundo orden, no detecta los fenómenos de inestabilidad ni determina la carga última de colapso. Pero, para la mayor parte de los arcos, da una idea sencilla y suficientemente correcta del comportamiento de la estructura en servicio.

El análisis del comportamiento lineal de un arco en su plano obedece a las leyes de la Resistencia de Materiales para piezas de directriz curva y puede encontrarse, entre otros lugares, en la monografía de TORROJA (1957) o en el libro de FERNANDEZ CASADO (1964).

No se incluye su desarrollo en el presente apartado por considerar que está fuera del alcance de la presente Tesis.

En lo que se refiere al comportamiento lineal fuera del plano, TIMOSHENKO y GERE (1961) plantean las ecuaciones de resolución del problema para el caso de un arco de directriz circular. Se exponen a continuación las mismas, a pesar de no coincidir con la directriz objeto del presente estudio, con el fin de aclarar algunos conceptos básicos para el desarrollo de la investigación.

Sea una barra circular AB de sección rectangular estrecha contenida en el plano DAB y solicitada por una carga distribuida a lo largo del eje AB, tal y como se muestra en la Figura 4.3.1.1.

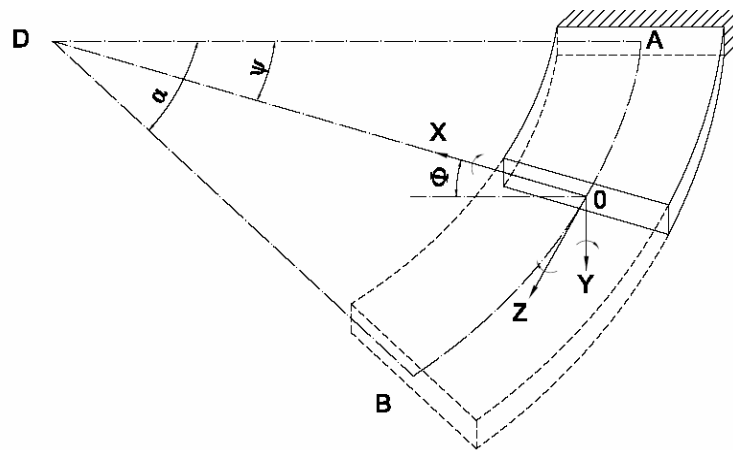


Figura 4.3.1.1. "Arco Circular AB."

Para pequeñas deformaciones, la deformada de la barra queda determinada por el desplazamiento del centroide de cada sección transversal y el giro de cada sección con respecto a la tangente de la directriz. Para cualquier sección transversal del arco definida por el ángulo Ψ , se considera un sistema rectangular de coordenadas con origen en el centroide O y unos ejes tales que "x" e "y" coinciden con los ejes principales de la sección transversal, mientras que "z" coincide con la tangente a la directriz. El plano xz coincide con el plano del arco, con la dirección positiva del eje "x" hacia el centro de curvatura y la del eje "z" correspondiente a un incremento del ángulo Ψ .

El desplazamiento del centroide O tiene tres componentes: u, v y w según las direcciones de los ejes x,y,z respectivamente. El ángulo de rotación de la sección con respecto al eje z es ϕ .

La deformación de un elemento del arco comprendido entre dos secciones transversales consiste en las flexiones dentro de los planos principales "xz" e "yz" y el giro con respecto al eje z.

Sean $\frac{1}{\rho_1}$ y $\frac{1}{\rho_2}$ las curvaturas de la directriz en O tras la deformación en los planos principales yz y xz respectivamente y θ el ángulo de giro por unidad en el mismo punto. Si $\frac{1}{R}$ es la curvatura inicial de la directriz del arco, las ecuaciones de cálculo de las curvaturas y el giro son:

$$\frac{EI_x}{\rho_1} = M_x \quad EI_y \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{R} \right) = M_y \quad C\theta = M_z \quad (4.3.1.2.)$$

Donde M_x , M_y y M_z son los momentos en O con respecto a los ejes x, y, z respectivamente; EI_x y EI_y son las rigideces principales a flexión, y C es la rigidez a torsión del arco.

Las ecuaciones diferenciales para calcular los desplazamientos u , v y w se obtienen estableciendo las expresiones de la curvatura y el giro unitario θ en función de u , v , w y ϕ . Asumiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos, se puede considerar separadamente cada componente del movimiento y obtener la curvatura y el giro final como suma de los efectos producidos por cada componente.

Las componentes "u" y "w" representan los desplazamientos en el plano del arco, y sólo producen cambio de curvatura en el plano xz , con lo que:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{u}{R^2} + \frac{d^2u}{ds^2} \quad (4.3.1.3.)$$

Por otra parte,

$$\theta = \frac{d\phi}{ds} \quad (4.3.1.4.)$$

Esto también produce flexión en el plano principal yz . Debido al giro ϕ , la superficie del arco se transforma en una superficie cónica, con una curvatura $\frac{\text{sen}\phi}{R} \approx \frac{\phi}{R}$.

El desplazamiento v produce una curvatura en el plano yz de valor $\frac{-d^2v}{ds^2}$, análogo al de una barra recta; asimismo, también se produce un giro por unidad de longitud con respecto al eje z de $\frac{1}{R} \frac{dv}{ds}$.

Resumiendo, las curvaturas y el giro de un arco tras la deformación vienen dados, en un caso general, por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\phi}{R} - \frac{d^2v}{ds^2}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{u}{R^2} + \frac{d^2u}{ds^2} \quad (4.3.1.5.)$$

$$\theta = \frac{d\phi}{ds} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{ds}$$

Si se sustituyen estas ecuaciones en (4.3.1.2.), se obtienen tres ecuaciones que determinan los desplazamientos u , v , w y ϕ y resuelven el problema planteado.

TIMOSCHENKO y GERE calcularon dichos desplazamientos para los casos de dos momentos iguales contenidos en el plano del arco aplicado en los extremos y una carga uniformemente distribuida radial aplicada a lo largo de la directriz del arco.

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales para el caso de un arco circular y cargas aplicadas tal y como se describe en el párrafo anterior es exacta y permite obtener fórmulas explícitas, tablas o diagramas. Sin embargo, para otras curvas con expresiones analíticas más complejas, la tarea se complica, y la solución pasa por utilizar unos métodos numéricos de cálculo muy tedioso y de difícil manejo.

4.3.2. Análisis matricial

Afortunadamente, en la década de los 60 aparece el ordenador. El cálculo matricial y el método del equilibrio o el de los elementos finitos permiten el estudio del arco en ordenador. Es necesario realizar una discretización del mismo: puede ser efectuada mediante su asimilación a un polígono de barras rectas o mediante el empleo de barras curvas con una matriz de rigidez de barra especialmente desarrollada a tal efecto. La primera opción introduce errores en los flectores de las barras, lo cual es admisible si la imperfección geométrica que provoca es inferior a las tolerancias constructivas (falsa flecha $< \frac{L}{1.000}$; ello obliga a tupir la discretización).

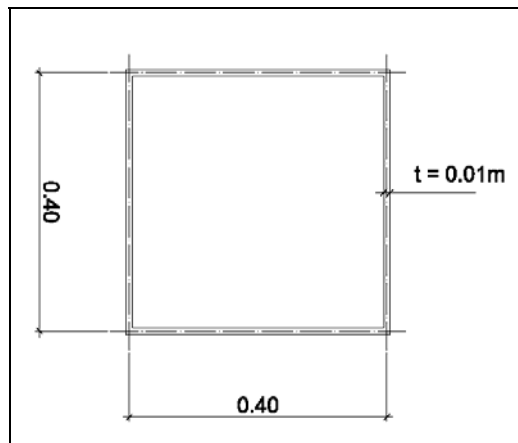
Durante las décadas de los años 70 y 80 se trató de obtener matrices de rigidez de elementos curvos que permitieran discretizaciones groseras. Este esfuerzo fue en vano ya que el progreso exponencial de la capacidad de los ordenadores permite hoy en día ir a mallas tan tupidas que el error cometido con la asimilación de piezas curvas a rectas es ínfimo. ARANCHA MANZANARES (2.001) en su Tesis Doctoral "Cálculo de parámetros de imperfección en arcos metálicos de sección cajón" determina que el error se puede despreciar si la división es superior a ocho barras en arcos muy rebajados o a quince barras en los arcos peraltados. La facilidad hoy en día de dividir el arco en cientos de barras justifica la asimilación a pórticos de barras rectas.

El análisis por elementos finitos puede ser realizado con elementos viga o descomponiendo la sección en elementos laminares. En un cálculo elástico no tiene mucho sentido esta desagregación, salvo que se busque determinar las concentraciones de tensiones en apoyos y puntos singulares de la estructura.

4.3.3. La antifunicularidad

El análisis matricial pone de manifiesto las limitaciones de la hipótesis de antifunicular que acompaña al arco. El acortamiento del arco por compresión induce el giro de las secciones y la consecuente aparición de momentos flectores, pequeños para rigideces normales y no tan despreciables en arcos poco esbeltos.

ARANCHA MANZANARES (2001) analizó este fenómeno para el caso de arcos parabólicos biapoyados de directriz $y(x) = -\frac{4f}{L^2}x^2 + f$ con una sección de las características indicadas en la Figura 4.3.3.1.

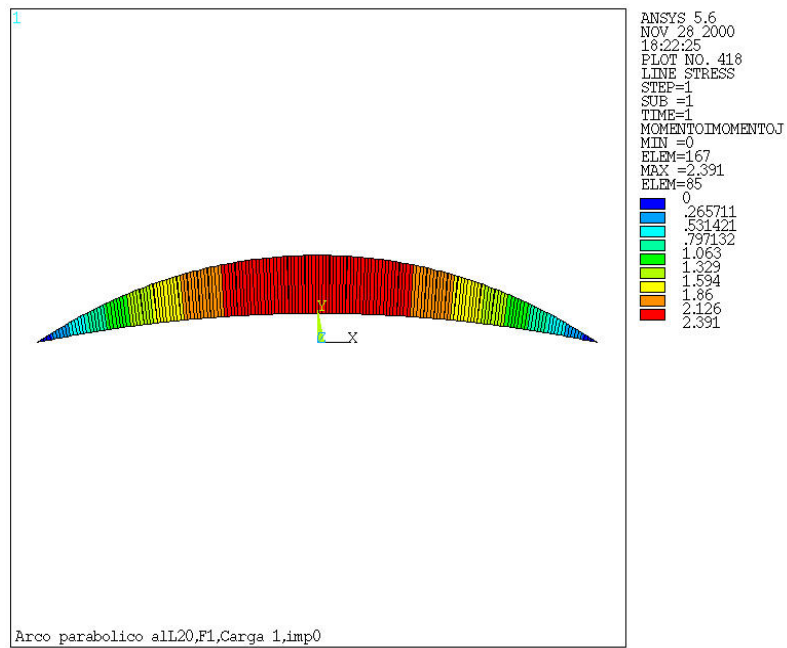


Cajón con chapa soldada de espesor constante 1 cm de acero S235JR ($\sigma_y = 23.500\text{ t/m}^2$).

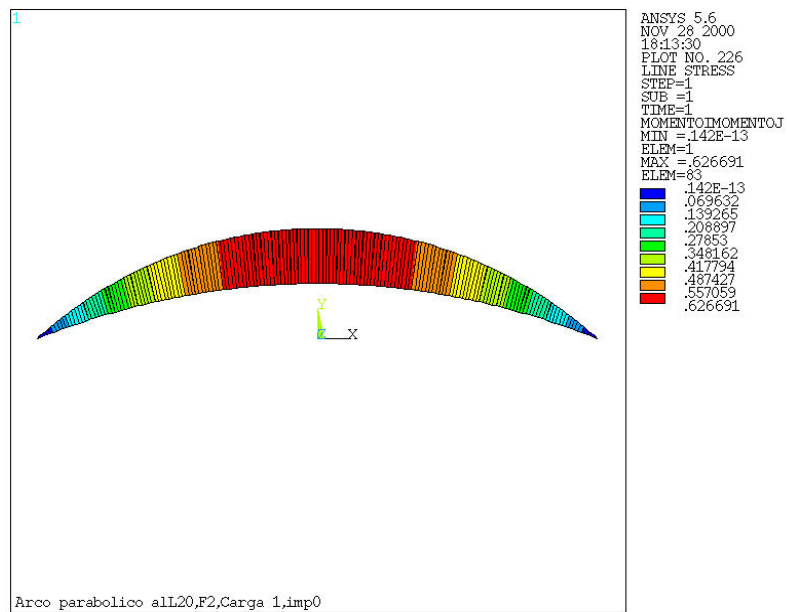
Figura 4.3.3.1: "Características de la sección transversal del arco parabólico para comprobar la hipótesis de antifunicularidad del mismo. Arancha Manzanares (2001)."

Los arcos se presentaron mediante 40 puntos unidos por una curva tipo Spline, que posteriormente se introdujeron en un programa de elementos finitos (ANSYS) mallando mediante elementos BEAM3 (barra) con un número igual a $n = \text{entero}\left(\frac{L}{12t}\right)$, donde L es la longitud de la cuerda del arco y t el espesor de la chapa.

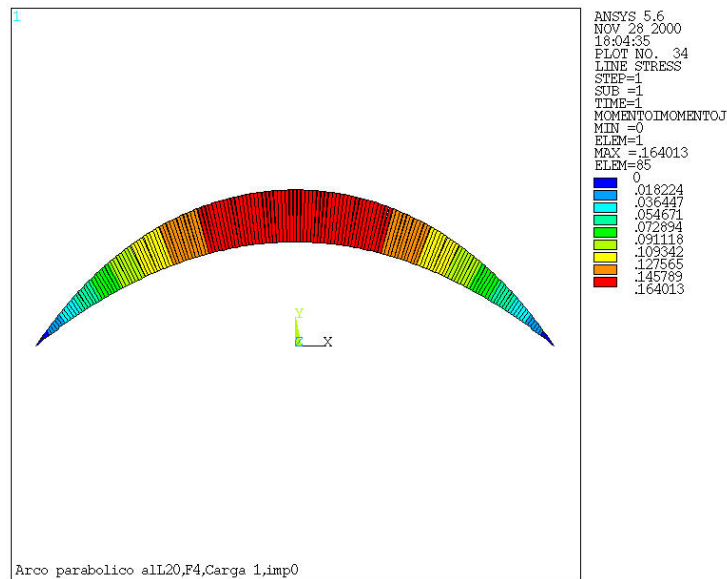
Las leyes de flectores correspondientes a arcos de 20 m de luz con carga uniforme en planta de 1 t/ml y relaciones flecha-luz 0,05, 0,1, 0,15 y 0,20 arrojan valores diferentes de cero, lo que pone de manifiesto la invalidez de la hipótesis de antifunicularidad del arco.



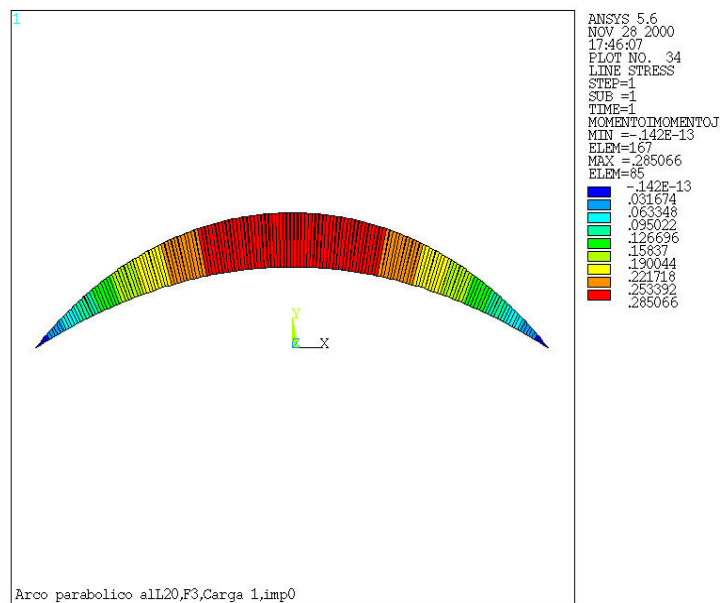
a) Relación flecha luz = 0,05



b) Relación flecha luz = 0,1



c) Relación flecha luz = 0,15



d) Relación flecha luz = 0,2

Figura 4.3.3.2. "Diagramas de momentos flectores de un arco parabólico sometido a carga uniforme en proyección horizontal de valor 1 t/ml para diferentes relaciones flecha-luz. ARANCHA MANZANARES (2001)."

La antifunicularidad se alcanza de forma óptima para arcos muy esbeltos y mejora al aumentar el peralte (mayor relación flecha-luz).

4.3.4. Comportamiento estructural lineal y validez del modelo de barras

ARANCHA MANZANARES (2.001) realizó en su Tesis Doctoral una serie de cálculos con el fin de validar el modelo de barras como reflejo del comportamiento estructural lineal del arco. Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, la modelización se realizó con elementos finitos tipo BEAM3 en el programa ANSYS y con las características geométricas de la sección y directriz antes señaladas.

Se realizaron los siguientes cálculos:

- Relaciones flecha-luz: 0,05, 0,1, 0,15, 0,20
- Arcos biapoyados y biempotrados
- Carga uniforme en planta en todo el vano o sólo la mitad del mismo.

De los resultados obtenidos cabe destacar:

- En el caso de arcos biapoyados sometidos a carga uniforme, se demuestra la limitación de la hipótesis de antifunicularidad: arcos muy rebajados ($f / L \leq 0,1$) se apartan mucho del antifunicular y dan momentos mientras que los menos rebajados se aproximan al antifunicular.
- En el caso de arcos biempotrados sometidos a carga uniforme, estos presentan fuertes momentos negativos (invalidez del concepto de antifunicular) y mayores momentos positivos que el biarticulado. El axil disminuye ligeramente por la colaboración resistente del mecanismo de flexión.

No se deben construir arcos biempotrados de sección constante, sino que se deben reforzar los arranques para que la plastificación sea simultánea con el centro y riñones.

En conclusión, se admite la validez del modelo de barras para analizar el comportamiento lineal del arco bajo las hipótesis de linealidad geométrica y mecánica.

ca. No obstante, éste método es poco adecuado para determinar las cargas de colapso, al no tener en cuenta muchos fenómenos que influyen en dicha carga.

4.4. LA ESTRUCTURA ELÁSTICA NO LINEAL

4.4.1. Planteamiento de la Resistencia de Materiales

El comportamiento del arco presenta una componente no lineal geométrica, ya que los acortamientos por el axil aumentan el rebajamiento, modifican la directriz y acentúan los axiles y flectores.

La no linealidad geométrica implica un planteamiento espacial de las ecuaciones de equilibrio y de las de compatibilidad para considerar las grandes deformaciones. WASHIZU (1.975) lleva a cabo una formulación de la elasticidad no lineal.

Las ecuaciones de compatibilidad, que relacionan deformaciones con desplazamientos, ya no se consideran dependiendo de términos de primer orden, sino que también incluyen los de segundo orden, que habitualmente se desprecian en Resistencia de Materiales:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.4.1.1.)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.4.1.2.)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.4.1.3.)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (4.4.1.4.)$$

$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4.4.1.5.)$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4.4.1.6.)$$

Las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\left[(\delta u^\lambda + u_{,u}^\lambda) \sigma^{x\mu} \right]_x + P^{-\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3) \quad (4.4.1.7.)$$

donde

$P^{-\lambda}$ representa las fuerzas exteriores en las direcciones respectivas

$u_{,u}^\lambda$ representa las derivadas de los desplazamientos u, v, w respecto a x, y, z de forma compacta.

δ_{uu}^λ es la delta de Kronecker

$\sigma^{x\mu}$ representa las tensiones del paralelepípedo tridimensional

El análisis del comportamiento no lineal se puede realizar utilizando modelos elásticos de elementos finitos no lineales geométricos, bien con elementos barra, bien con elementos lámina. Son preferibles los primeros, ya que los segundos sólo interesan para conocer los estados tensionales en las hipótesis de plastificación y autotensiones, supuestos eludidos en el caso de comportamiento elástico.

Los modelos elásticos son muy utilizados porque ahorran un gran esfuerzo computacional y determinan el incremento de esfuerzos provocado por el acortamiento de la directriz, aunque no consideran temas tan importantes como la elastoplasticidad del acero y las autotensiones.

4.4.2. Comportamiento estructural no lineal y validez del modelo de barras

Tal y como se comentó para el caso de comportamiento estructural lineal, ARANCHA MANZANARES (2.001) realizó en su Tesis Doctoral una serie de cálculos para validar el modelo de barras como reflejo del comportamiento estructural no lineal del arco. El análisis utilizaba los elementos finitos con grandes deformaciones empleando como algoritmo de convergencia el método de Newton-Raphson y una imperfección estructural inicial de valor máximo L/1.000 (admiti-

da por el Eurocódigo), manteniendo las características geométricas de la sección y directriz empleadas en el supuesto de comportamiento lineal, realizando los cálculos con elementos finitos tipo BEAM3 en el programa ANSYS.

Se consideraron los siguientes cálculos:

- Relaciones flecha-luz: 0,05 y 0,2
- Arcos biapoyados y biempotrados
- Carga uniforme en planta en todo el vano o sólo la mitad del mismo

De los resultados obtenidos cabe destacar:

- En el caso de arcos biapoyados sometidos a carga uniforme, la no linealidad genera una alternancia en las flexiones, concentrando el máximo en los riñones y aumentando la flexión, más en los arcos peraltados que en los rebajados. La ley de axiles permanece prácticamente inalterada.
- En el caso de arcos biempotrados sometidos a carga uniforme, los flectores se incrementan, más en los arcos peraltados que en los rebajados. Al igual que ocurre para arcos biapoyados, los axiles apenas sufren variación (despreciable para arcos peraltados e inferior al 2 % para arcos rebajados).
- Si se consideran despreciables los efectos no lineales cuando no superan un 10% de los lineales, es posible proporcionar una sencilla fórmula (sólo válida para arcos biapoyados de sección cajón) que permite calcular la esbeltez máxima reducida para admitir el análisis lineal en función del peralte del arco:

$$\bar{\lambda} = 8 \frac{f}{L} + 0,2 \quad (4.4.2.1.)$$

- En los arcos biempotrados de sección constante el fenómeno no lineal sólo se aprecia para esbelteces reducidas tan próximas a 2 que por inusuales no tienen valor práctico. Luego los esfuerzos de segundo orden no necesitan ser analizados en arcos biempotrados con esbelteces reducidas inferiores a 1,75 con independencia de su peralte.

En conclusión, se admite la validez del modelo de barras para analizar el comportamiento no lineal del arco. No obstante, se continúa sin obtener la carga última, al no considerarse las autotensiones y la no linealidad del material.

4.5. EL MATERIAL NO LINEAL

4.5.1. Introducción

La laminación en caliente y la soldadura introducen estados tensionales con valores puntuales que superan el límite elástico. Es normal encontrar zonas plastificadas en estructuras descargadas o en la fase de servicio. Determinadas normativas prescriben en estado de servicio tensiones de cálculo inferiores al límite elástico. En esas circunstancias el acero puede ser tratado como un material lineal. Sin embargo, la presencia de zonas plastificadas iniciales que evolucionan a lo largo del proceso de carga influye en la carga de pandeo así como en la carga de agotamiento. Si se quieren determinar los fenómenos de inestabilidad o la carga última no hay otra alternativa que modelizar la estructura teniendo en cuenta esta no linealidad del material.

4.5.2. Descripción del acero como material no lineal

El acero es un material elastoplástico con comportamiento dúctil, salvo en situaciones excepcionales (las situaciones frágiles se deben salvar con diseños adecuados). Contando con el comportamiento dúctil, el diagrama tensión-deformación del acero puede asimilarse a la ley de la Figura 4.5.2.1.

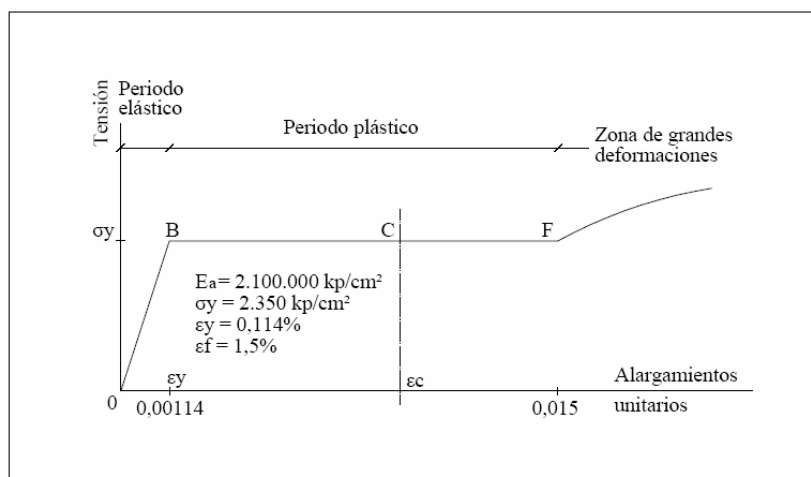


Figura 4.5.2.1. "Diagrama tensión-deformación del acero."

En dicha figura se muestra el diagrama simplificado tensión-deformación de una probeta de acero S235. En él, el punto B corresponde al límite elástico característico o límite de fluencia con un alargamiento unitario de $\varepsilon_y=0.00114$. Al final del período plástico, el alargamiento unitario ε_f alcanza valores comprendidos entre 0.01 y 0.025, es decir, de 10 a 25 veces ε_y . Como valor medio de ε_f se elige 0.015.

En el período plástico, la deformación aumenta a tensión casi constante. A partir del punto F es preciso incrementar la carga axial P para provocar nuevos alargamientos en la probeta; estos alargamientos corresponden a las zonas de grandes deformaciones (denominada también zona de endurecimiento por deformación).

Durante el período plástico, no existe una deformación uniforme en la sección de acero, sino que parte de la probeta se encuentra todavía en el final de la fase elástica (punto B), mientras que el resto ha adquirido una deformación ε_f que corresponde al final de la etapa plástica. Si se denomina k a la porción de superficie cuyo alargamiento unitario es ε_f y ε_m al alargamiento unitario medio de la probeta ha de verificarse:

$$kL\varepsilon_f + (1-k)L\varepsilon_y = L\varepsilon_m$$

$$k = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_y}{\varepsilon_f - \varepsilon_y} \quad (4.5.2.2)$$

donde L es la longitud de la probeta.

El módulo de elasticidad tangente no es nulo durante el período elasto-plástico, sino que disminuye según una determinada ley que se deduce sustituyendo en (4.5.2.2.) los alargamientos ε por σ/E .

$$\frac{1}{E_m} = \frac{k}{E_f} + \frac{1-k}{E_a} \quad (4.5.2.3.)$$

siendo E_a y E_f los módulos de elasticidad al iniciar y terminar el período plástico, de valores aproximados:

$$E_a \approx 2.100.000 \text{ Kp/cm}^2$$

$$E_f \approx 56.000 \text{ Kp/cm}^2$$

En una barra de área A solicitada por un esfuerzo axial N aplicado en su eje se presenta su agotamiento por plastificación cuando N es de tal intensidad que todas las fibras alcanzan su capacidad límite de resistencia σ_y , es decir, cumple que:

$$N_{PL} = A\sigma_y \quad (4.5.2.4.)$$

Cuando la ecuación (4.5.2.4.) se aplica al cálculo de piezas, adopta la forma:

$$N_{PL} = A\sigma_u \quad (4.5.2.5.)$$

donde σ_u es la resistencia de cálculo del acero, que para el Eurocódigo vale:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_y}{\gamma_M} \quad (4.5.2.6.)$$

donde γ_M es el coeficiente de seguridad del acero que vale 1,1.

A efectos de cálculo, el diagrama representado en la Figura 4.5.2.1. se puede simplificar mediante uno bilineal (Figura 4.5.2.7.).

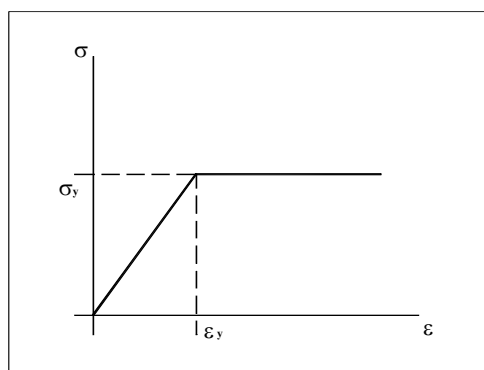


Figura 4.5.2.7. "Comportamiento del material bilineal."

A efectos de simulación elastoplástica resulta interesante analizar el proceso de carga y descarga de la probeta. Si se considera el comportamiento del acero en una sola dirección tal y como se muestra en la Figura 4.5.2.8. se ob-

serva que, fijándose en el proceso de carga, es imposible conocer si el material se comporta de una manera elástica no lineal o plástica. Al descargarlo, se apreciará inmediatamente la diferencia entre el material elástico, que seguirá la misma curva, y el plástico, que seguirá una curva distinta dependiente de la historia del material.

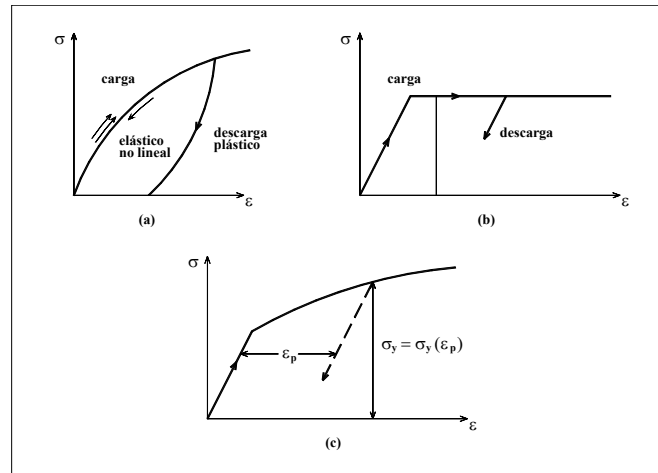


Figura 4.5.2.8: "Comportamiento uniaxial (a) Elástico no lineal y plástico (b) Plasticidad pura (c) Plasticidad con endurecimiento por deformación."

Existen otros modelos en los cuales el comportamiento plástico del material implica la variación de su límite elástico, es decir, modelos en los que la tensión de fluencia es función de un cierto parámetro k (Figura 4.5.2.8.c).

El tipo de acero que se va a considerar en la presente Tesis se ha supuesto del tipo b tal y como se mostró en el diagrama bilineal: a partir del límite elástico σ_y las deformaciones están indeterminadas.

Los procesos de carga y descarga se supondrán con comportamiento elástico con igual módulo de Young que la rama noval (Figura 4.5.2.8.b)

Se demuestra experimentalmente que la tensión límite sólo se alcanza si las tensiones satisfacen la condición límite:

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (4.5.2.9.)$$

En la que k representa el parámetro de endurecimiento (efecto de la variación de la tensión de fluencia por plastificación). Esta condición se puede representar como una superficie en un estado de tensiones n -dimensional dependiendo la posición de los puntos de la superficie de los valores instantáneos del parámetro k .

4.5.3. Formulación de la plasticidad

Dada la necesidad de tener en cuenta el comportamiento no lineal del acero, es necesario plantear un modelo matemático que simule el comportamiento plástico del mismo integrado en el método de elementos finitos que se va a utilizar.

El desarrollo del modelo así como su implementación en ANSYS se lleva a cabo en el Capítulo 9.

4.5.4. Consideraciones plásticas respecto al modelo del arco

Desde el punto de vista del análisis hay que utilizar elementos finitos tipo lámina, que desagreguen las secciones, con comportamiento no lineal del material y de la geometría. Existen modelos de barra con diagramas momento-curvatura elastoplásticos que no funcionan bien para los arcos por la dificultad de modelizar el comportamiento postplástico de rótulas plásticas ante la presencia de un axil creciente. Las láminas, por el contrario, tienen la capacidad de representar fielmente la realidad, al poder introducirse estados pretensionados en determinados puntos (autotensiones) y tener implementadas un algoritmo de cálculo que tenga en cuenta la plastificación sucesiva de la pieza. De esta forma se ve como van evolucionando las zonas plásticas (spread of yielding).

4.6. IMPERFECCIONES ESTRUCTURALES

Las imperfecciones estructurales que se deben modelizar para realizar un análisis elastoplástico completo son, según la ECCS, las tensiones residuales y las variaciones en el límite elástico.

4.6.1. Las autotensiones

Las autotensiones son una serie de tensiones residuales que se originan en el perfil de acero durante su proceso de fabricación. Su función de distribución y valor dependen de la forma y dimensiones del perfil y de dicho proceso. Desde un punto de vista riguroso, es imposible conocer el estado tensional real de una pieza metálica, sobre todo tras ser sometida a un proceso de ensamblaje, rigidización, etc. Existen en la actualidad técnicas experimentales para medir las autotensiones (ultrasonidos y punto ciego) pero obviamente no pueden ser usadas en fase de proyecto y sólo se emplean para controlar el envejecimiento de piezas mecánicas o para prescribir un tratamiento térmico en zonas estructurales especialmente comprometidas (apoyos, nudos complejos, etc.).

4.6.1.1. Tipos de autotensiones

Las autotensiones dependen del proceso de fabricación, por lo que se clasificarán en función de éste.

a) Proceso de laminado

Durante la fabricación de los perfiles y chapas, el enfriamiento no es uniforme. Por ejemplo, en secciones doble T se enfrían primero los extremos de las alas y el centro del alma, y de esta forma coartan la libre contracción del resto de la pieza al enfriarse. Por ello, al final, los extremos de las alas y el centro del alma quedan comprimidos y el resto traccionado (Figura 4.6.1.1.1)

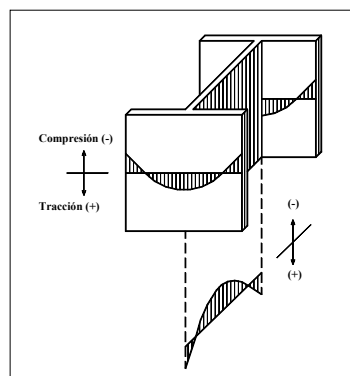


Figura 4.6.1.1.1: "Leyes de distribución de tensiones residuales de perfiles laminados en doble T."

b) Enderezado en frío

La aplicación de fuerzas para el enderezado, curvado, introducción de contraflechas, etc. generan también tensiones residuales.

c) Soldadura

En las zonas próximas a los cordones de soldadura se originan tensiones residuales de tracción al enfriarse y no poder contraerse libremente. Por el contrario, las zonas más alejadas de los cordones quedan comprimidas al oponerse a dicho acortamiento. La Figura 4.6.1.1.2. muestra las leyes de distribución de tensiones residuales en secciones armadas en doble T y cajón soldado.

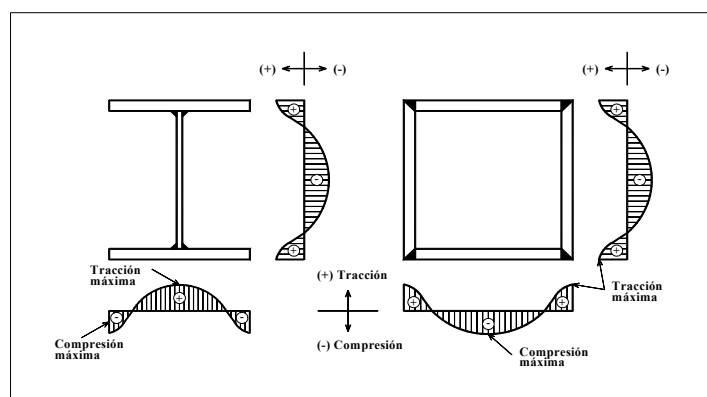


Figura 4.6.1.1.2: "Leyes de distribución de tensiones residuales en secciones armadas."

En los tres casos descritos, el estado de tensiones está autoequilibrado, lo cual implica que en cualquier sección las resultantes de tracción y compresión son iguales y opuestas. Estas tensiones, en algunos casos, pueden alcanzar valores muy altos, incluso el límite elástico del acero. Pero este fenómeno no tiene significado alguno en la capacidad resistente de la sección ante sollicitaciones de tracción y flexión isostáticas y en aquellas que no suelen depender de la rigidez de la pieza. En piezas comprimidas, en las que pueden aparecer fenómenos de pandeo, y los fenómenos de segundo orden sí dependen de la rigidez, llegan a tener importancia. En todas las sollicitaciones, las tensiones residuales aumentan las deformaciones provocando una flexibilización de los elementos estructurales respecto a sus valores nominales.

Una combinación de cargas aplicadas y tensiones residuales inducirá al comportamiento anelástico en una pieza, incluso en niveles en los que la tensión aplicada es menor que la de plastificación. Como el material plástico, que no se deforma elásticamente, no puede contribuir a resistir flexión, es muy importante tener un buen conocimiento de la rigidez efectiva de la sección transversal ante la flexión en los cálculos de pandeo. Cuando no se estudia el pandeo, la capacidad de soportar la carga última de plastificación en piezas isostáticas no se ve afectada, pero las deformaciones serán mayores que si el elemento no hubiera estado autotensionado.

Este fenómeno se debe reflejar de manera clara en el cálculo a pandeo de una pieza. Por eso el Eurocódigo lo recoge en sus curvas de inestabilidad a partir de los estudios realizados por la ECCS.

4.6.1.2. **Las tensiones residuales según la ECCS**

La ECCS realiza un análisis de autotensiones individualizado por componentes basado sobre todo en los trabajos de ALPSTEN y YOUNG:

1) Chapas laminadas

La distribución de autotensiones tiende a ser parabólica, con compresión en los bordes y tracción en el centro, y se muestra en la Figura 4.6.1.2.1.

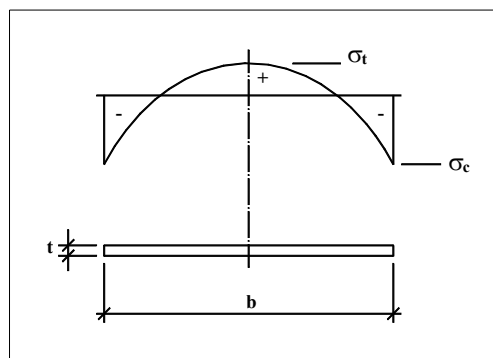


Figura 4.6.1.2.1. "Tensiones residuales en chapas laminadas."

ALPSTEN (1972) obtuvo una relación para el valor de σ_c dependiente de la relación b/t y la relación entre el perímetro y el área de la sección.

$$\sigma_c = \frac{0.18}{\alpha^{3/2}} \left[\frac{b}{t} \right] MN m^{-2} \quad (4.6.1.2.2.)$$

$$\alpha = 2(b+t)/bt$$

donde b y t están en mm. Si el valor de σ_c excede del límite elástico, σ_c se limitará a σ_y .

2) Chapas cortadas con soplete

La acción del soplete es introducir un intenso calor en las proximidades del filo de corte. Como resultado, el material en esta región adquiere propiedades que son muy diferentes a las del metal base, y las tensiones residuales que aparecen suelen ser muy superiores al límite elástico del material de base (MCFALLS y TALL (1970), ALPSTEN y TALL (1970), BJORHOVDE et al. (1972)).

La ECCS propone tensiones iguales al límite elástico en una franja cerca del borde. En la Figura 4.6.1.2.3. se muestra la distribución de tensiones en una chapa con un borde cortado o con dos.

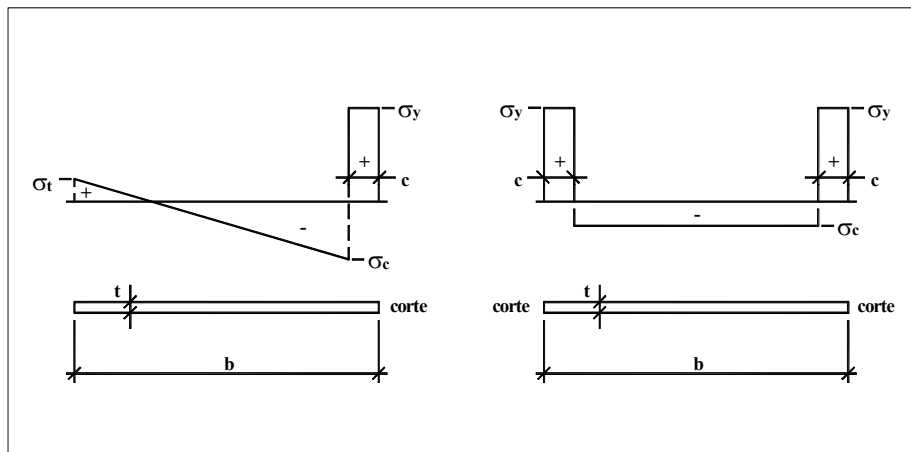


Figura 4.6.1.2.3. "Distribución de tensiones residuales en chapas cortadas con soplete."

En la ECCS se muestran los valores de σ_t y σ_c para:

- Chapas cortadas por un solo lado

$$\sigma_t = \sigma_y \cdot \frac{c(2b+c)}{(b-c)^2} \quad (4.6.1.2.4.)$$

$$\sigma_c = \sigma_y \cdot \frac{c(4b-c)}{(b-c)^2} \quad (4.6.1.2.5.)$$

- Chapas cortadas por los dos lados

$$\sigma_c = \sigma_y \cdot \frac{2c}{(b-2c)} \quad (4.6.1.2.6.)$$

$$c = \frac{1100\sqrt{t}}{\sigma_y} \text{ mm} \quad (4.6.1.2.7.)$$

donde c se determinó por YOUNG y DWIGHT (1971), t es el espesor de la chapa y σ_y es el límite elástico en MN m^{-2} .

3) Chapas soldadas

Para estudiar la influencia de la soldadura basta con estudiar una chapa e imaginarse que está formada por una serie de bandas ensambladas longitudinalmente. Durante la soldadura, se produce un aumento local de temperatura de la misma forma que en el cortado por soplete. La distribución de tensiones de una chapa soldada en el centro se muestra en la Figura 4.6.1.2.8.

Las secciones en cajón soldadas muestran tensiones residuales en las proximidades de la soldadura debido al enfriamiento del metal soldado. Estas son iguales al punto de plastificación del metal de soldadura, que será normalmente un poco superior al del metal base (TALL (1966), ALPSTEN y TALL (1970), BJORHOVDE et al. (1972)).

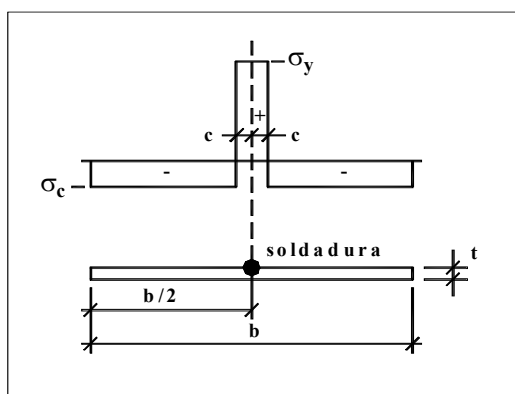


Figura 4.6.1.2.8. "Autotensiones en chapas soldadas."

En la ECCS se incluyen los valores de c y σ_c para distintos casos: un borde soldado, dos bordes soldados o el centro soldado. Aunque estos valores suponen que la placa es muy fina y que las tensiones residuales no varían con el espesor, ALPSTEN y TALL (1970) demostraron que las tensiones tienden a decrecer al incrementarse el tamaño de la pieza.

4) Perfiles laminados en caliente

La magnitud y la distribución de las tensiones residuales de formas laminadas en caliente dependen de su geometría. Su forma se muestra en la Figura 4.6.1.2.9.

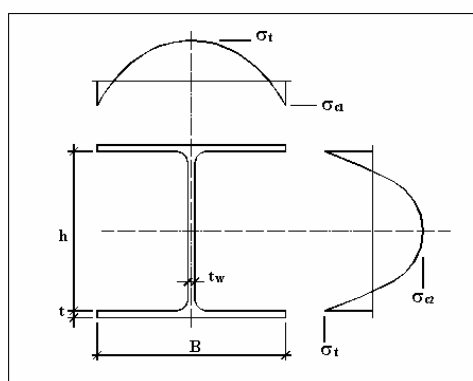


Figura 4.6.1.2.9. "Autotensiones en perfiles laminados."

YOUNG (1972) propuso las siguientes expresiones:

$$\sigma_{c1} = 165 \left[1 - \frac{ht_w}{2.4Bt} \right] MN m^{-2}$$

$$\sigma_{c2} = 100 \left[1.5 + \frac{ht_w}{2.4Bt} \right] MN m^{-2} \quad (4.6.1.2.10.)$$

$$\sigma_t = 100 \left[0.7 + \frac{ht_w}{2Bt} \right] MN m^{-2}$$

5) Piezas laminadas en frío

Introducen tensiones residuales, especialmente en las zonas donde las flexiones son más severas (esquinas). (FREY (1969), ALPSTEN (1972), SHERMAN (1976), YU (1992)).

4.6.1.3. Bases de las curvas de la ECCS

Para obtener la distribución representativa de las tensiones residuales de los perfiles más usados habitualmente, se recopilaron todos los trabajos de tensiones residuales y se analizaron. Los resultados experimentales se suplieron con teorías matemáticas. Finalmente, la ECCS propuso recoger estos resultados para columnas en una serie de curvas (bases de las curvas de pandeo del Euro-código).

Se comprobó que las tensiones residuales podían dividirse en tres tipos que posteriormente se aplicaron a las curvas de pandeo diferentes designadas con las letras a, b y c a las que más tarde se asimilaron otro tipo de perfiles cuyas tensiones residuales dieron efectos similares sobre su propia curva de pandeo.

a) Tubos

En la Figura 4.6.1.3.1 se muestra la distribución experimental de tensiones residuales para tubos redondos y cuadrados.

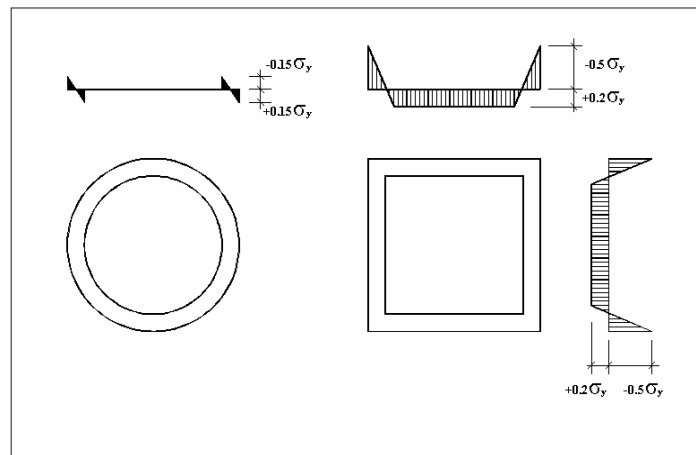


Figura 4.6.1.3.1. "Autotensiones en tubos."

Esta distribución puede considerarse válida para secciones laminadas o soldadas terminadas en caliente. Esta configuración de tensiones residuales definen la curva de pandeo a.

b) Secciones en cajón soldadas.

Para asegurar los límites superiores e inferiores de las tensiones en este tipo de secciones, la ECCS utilizó tanto distribuciones de tensiones residuales técnicas como experimentales (Figura 4.6.1.3.2).

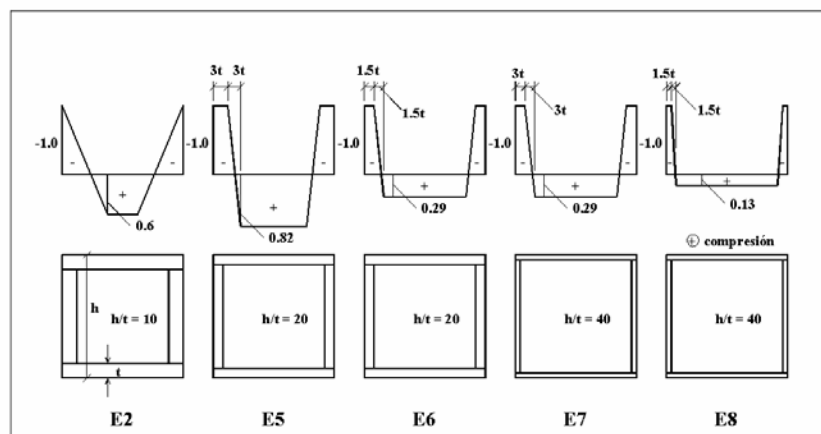


Figura 4.6.1.3.2. "Autotensiones en cajones diversos."

c) Perfiles en I laminados.

La sección representativa se muestra en la Figura 4.6.1.3.3. De esta configuración se obtiene la curva de pandeo c.

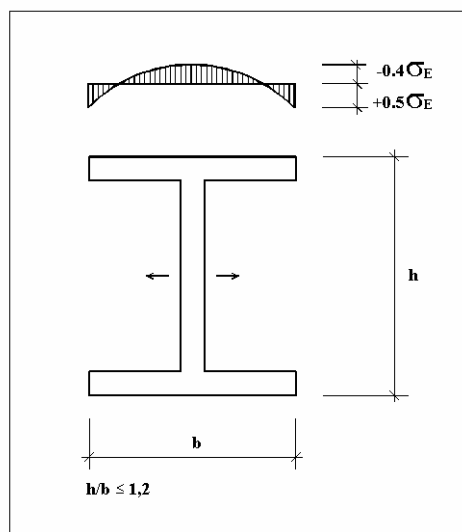


Figura 4.6.1.3.3. "Autotensiones en perfiles I laminados."

Las tensiones residuales dependen fundamentalmente de la relación h/b , siendo especialmente fuertes para $\frac{h}{b} \leq 1,2$, donde alcanzan como valor máximo de tracción la mitad del límite elástico. Como en la presente Tesis no se va a trabajar con perfiles en I, no se va a profundizar en su tratamiento.

4.6.1.4. Las actuales normativas y las tensiones residuales

La Norma alemana DIN 18 800 al referirse a la estabilidad de las estructuras de acero no especifica nada respecto a tensiones residuales porque las incluye en los parámetros de imperfección general que propone para distintas metodologías de cálculo.

La Norma española RPM-95 hace lo mismo que la DIN 18 800, pero determina que si se realiza un análisis no lineal de cálculo en material y geometría, es preciso modelizar las tensiones residuales existentes en las secciones (aunque no concreta su valor).

El Eurocódigo 3 incluye el valor de las tensiones residuales en sus curvas de pandeo para columnas, pero no propone ningún modelo de tensiones para arcos si se quieren modelizar elastoplásticamente.

Tanto las:

- a) Normativas del Este de Europa

CSN 73 1401 84

MSZ 15024/1 85

TGL 13503/01 82

- b) Normativa Japón

JRA 89

- c) Normativa EE.UU.

AASHTO 98

no mencionan nada respecto a las tensiones residuales

Por tanto, para modelizar arcos metálicos en esta Tesis en busca de su carga última, se introducirán en las secciones unas tensiones iniciales que respondan a la distribución propuesta por la ECCS para la sección elegida.

4.6.1.5. Las tensiones residuales adoptadas en la presente Tesis

En la presente Tesis se parametrizan arcos metálicos en cajón con una relación de espesores de chapa en alas no superior a 40. Para modelizar los arcos a nivel elastoplástico se adopta la distribución de autotensiones que recomienda la ECCS para secciones en cajón soldadas de relación $h/t = 40$ que se muestra en la Figura 4.6.1.5.1.

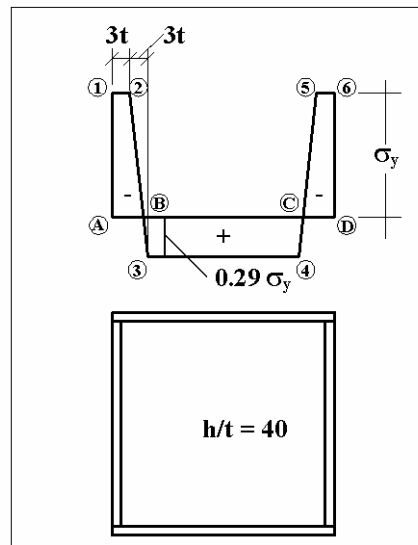


Figura 4.6.1.5.1. "Distribución de autotensiones adoptada en el modelo de la Tesis."

La distribución de autotensiones se ha simulado, para ser tratada por elementos finitos, mediante un estado térmico que simule la soldadura. Hay que tener en cuenta que la hipótesis de que las secciones permanecen planas arroja un estado tensional proporcional a las temperaturas de cada uno de sus puntos en régimen elástico, o limitada a σ_y si la deformación térmica supera a ϵ_y .

De la Figura 4.6.1.5.1. se obtiene, llamando σ_A a la tensión que tendría el punto A si no hubiese plastificado.

$$\frac{\sigma_A + 0.29\sigma_y}{1} = \frac{1.29\sigma_y}{0.5} \quad \Rightarrow \sigma_A = 2.29 \sigma_y \quad (4.6.1.5.2.)$$

Por otra parte:

$$\epsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} \quad (4.6.1.5.3.)$$

También se observa en la Figura 4.6.1.5.1. que la tensión del punto B es:

$$\sigma_B = 0.29 \sigma_y \quad (4.6.1.5.4.)$$

cumpléndose además que:

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} \quad (4.6.1.5.5.)$$

Si expresamos las deformaciones en función de la temperatura, se cumple que:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T \quad (4.6.1.5.6.)$$

Combinando (4.6.1.5.6.) con (4.6.1.5.2.) y (4.6.1.5.4.) se obtiene que:

$$\Delta T_A = \frac{\varepsilon_A}{\alpha} = \frac{\sigma_A}{E\alpha} = \frac{2.29\sigma_y}{E\alpha} \quad (4.6.1.5.7.)$$

$$\Delta T_B = \frac{\varepsilon_B}{\alpha} = \frac{\sigma_B}{E\alpha} = \frac{0.29\sigma_y}{E\alpha} \quad (4.6.1.5.8.)$$

Por lo tanto, el modelo de autotensiones queda definido dándole a cada nodo de la directriz del arco que pasa por el punto A la temperatura ΔT_A ; a los de los puntos B, C e intermedios ΔT_B y a los nodos que quedan entre los puntos (2) y (3) y (4) y (5) una temperatura lineal entre ambos que responde a:

$$\Delta T(x) = \left(\frac{\Delta T_A + \Delta T_B}{6t} \right) x - \Delta T_B \quad (4.6.1.5.9.)$$

donde $x=0$ en el punto B.

Para demostrar la validez del modelo se han calculado con esta distribución térmica una serie de arcos:

- Biapoyados y biempotrados
- Longitud: 20, 30 y 40 m
- Relación flecha-luz: 0.1 y 0.2
- Con sección de 40x40 cm y espesor 1 cm
- Acero de límite elástico 235 MPa
- $\alpha=1.2E-5$ 1/°C
- Sometidos a la distribución de temperaturas descrita

Y se ha obtenido que, para todos los casos, la distribución de tensiones es la que se muestra en la Figura 4.6.1.5.10.

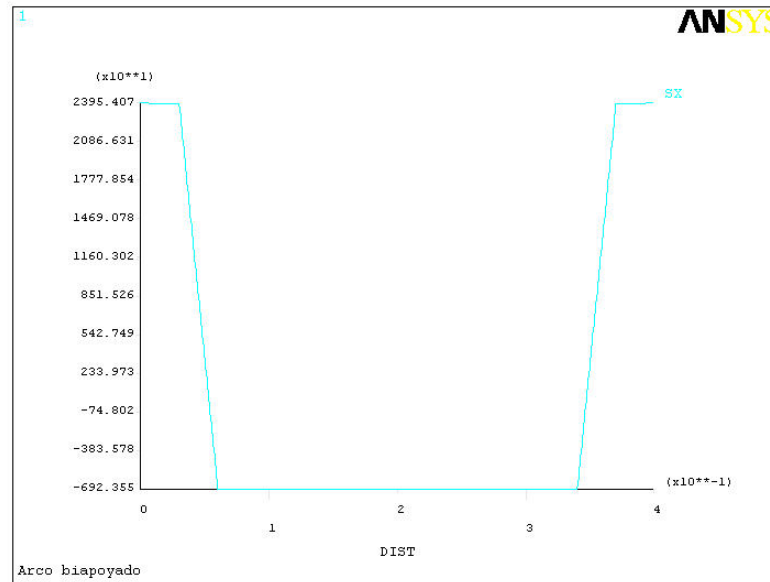


Figura 4.6.1.5.10. "Diagrama de autotensiones utilizado en la presente Tesis."

Esta distribución es equivalente a la que se pretende simular. Luego se da por validado el modelo de autotensiones en ANSYS.

4.6.2. Variaciones en el límite elástico

En el ámbito de las columnas se han realizado experiencias para investigar los efectos que influyen en el límite elástico. Estas experiencias se han realizado sobre probetas comprimidas de muy poca esbeltez.

Los resultados experimentales demuestran claramente la dependencia del límite elástico del grosor de las paredes de las piezas en la parte comprimida.

Como el límite elástico tiende a disminuir a medida que aumenta el espesor de la chapa y en los perfiles las alas son de espesor mayor que las almas, se

adoptó como límite elástico de la sección el del ala. Además, la contribución de las alas a la carga última es superior a la contribución del alma.

La ECCS propone unos valores del límite elástico para distintos aceros en función del espesor.

4.7. IMPERFECCIONES CONSTRUCTIVAS

4.7.1. Introducción

Se denominan imperfecciones geométricas a las desviaciones que sufre la estructura respecto a su forma ideal, tanto de la pieza completa como de sus componentes.

Las estructuras metálicas se construyen con tolerancias, ya que es imposible conseguir directrices reales idénticas a las teóricas. Estas pequeñas imperfecciones, que apenas suelen tener incidencia tensional en estructuras de hormigón (con grandes secciones y bajas tensiones), alteran notablemente la forma de trabajo de las estructuras metálicas (elementos delgados muy tensionados). De hecho una imperfección geométrica puede transformar la tipología de un problema de estabilidad, de uno de bifurcación en otro de flexiones de segundo orden.

¿Por qué? Dos chapas comprimidas, unidas a tope, se transmitirían grandes tensiones de compresión si fueran perfectamente coplanarias. Al no serlo, aparecen unas componentes normales a la unión, de valor medio dado por el producto de fuertes tensiones y un seno muy pequeño. Las chapas comprimidas comienzan a trabajar a flexión, a la que ofrecen una resistencia muy baja porque son piezas de débil espesor e inercia. Muchas veces esta falta inevitable de coplanariedad obliga a disponer rigidizadores transversales que aparecen en el diseño sólo por la existencia de una construcción imperfecta.

De igual manera, una pieza metálica esbelta y comprimida, de directriz desplazada de la teórica por una imperfección constructiva, sufre unos esfuerzos de flexión, no recogidos en el modelo teórico, que pueden influir tanto en su estabilidad como en su carga última.

Un proyectista de estructuras metálicas debe tener presente las tolerancias de fabricación a la hora de diseñar. De igual manera, debe incluir en sus cálculos la geometría modificada por las tolerancias siempre que se trate de una estructura con riesgos de inestabilidad, con claro comportamiento no lineal o en la que pretenda determinar la carga última de colapso.

Por eso se van a estudiar las imperfecciones constructivas en tanto en cuanto afectan a la carga última de las estructuras y sus componentes.

4.7.2. Tipos de imperfecciones constructivas según la ECCS

- **Variaciones de los datos de las secciones**

El proceso de laminación modifica los valores nominales del área, la inercia, el módulo resistente elástico W_{el} y el módulo plástico W_{pl} . Sin embargo, dicha variación es muy pequeña comparada con la eventual variación del límite elástico.

Dentro de que la variación de las propiedades de las secciones sobre la carga última es pequeña, su influencia oscila con la esbeltez considerada. Por ejemplo, el efecto de la variación de áreas para pequeñas esbelteces es insignificante comparado con la influencia de otros parámetros, particularmente el límite elástico. El efecto de la variación del área es comparativamente mayor para esbelteces medias y altas.

En cualquier caso se puede concluir que este tipo de imperfecciones tiene poca influencia en la determinación de la tensión crítica de una pieza, resultando insignificante respecto a otros parámetros.

- **Imperfección geométrica en las barras.**

La fabricación de columnas introduce variaciones en la dirección longitudinal del eje ideal, además de las alteraciones en la sección transversal. De igual manera ocurre en los arcos.

El efecto de estas imperfecciones en la resistencia de la columna se puede representar por dos parámetros: la excentricidad de las cargas en los extremos

de la pieza "e" y una flecha de valor e_0 que sea la amplitud de una curva senooidal que se adapte a la forma real. (Figura 4.7.2.1)

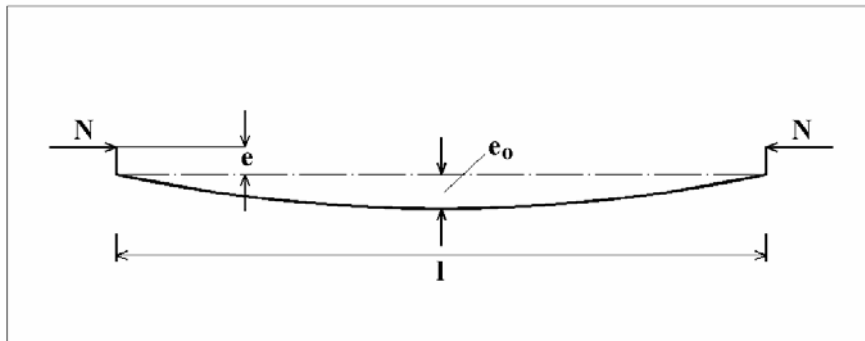


Figura 4.7.2.1: "Imperfección de barras."

a) Excentricidad de la carga

La carga excéntrica transferida puede ser causada por las variaciones de la sección real respecto a la de la pieza ideal. Debido a estas variaciones, las cargas no se aplican necesariamente en el centroide de la sección.

Con objeto de conocer si la flecha senooidal:

$$y(x) = \frac{L}{1000} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.7.2.2.)$$

podría absorber las excentricidades normales de las cargas se realizaron una serie de investigaciones utilizando la flecha central y haciendo variar la excentricidad de las cargas dentro de los límites que la experimentación daba como normales. Se demostró que la curva de pandeo $e=0$ y una forma senooidal de la directriz cubre la mayor parte de excentricidades normales que suelen estar entre:

$$\frac{i}{20} \leq e \leq \frac{i}{40} \quad (4.7.2.3.)$$

siendo:

i = radio de giro de la sección.

especialmente para el campo de las esbelteces más utilizadas.

b) Falta de rectitud inicial

La ECCS midió varios tipos de curvatura inicial en columnas laminadas y soldadas. Algunas columnas tenían su máxima falta de rectitud a un cuarto de la longitud en lugar de en el centro. Parece ser que esa falta de curvatura se podría aproximar muy bien por series de Fourier. Para una curvatura con una desviación de $L/650$ cerca del cuarto, se puede simular una curva de amplitud $L/1000$ en el centro. Las curvas calculadas para ambas curvaturas dan igual buen resultado. Comparando las curvas flecha-carga con la imperfección real y la senoidal propuesta, se obtienen resultados muy similares.

Basándose en esta aproximación, la ECCS realizó un programa experimental donde obtuvo el valor de e_0 para una serie de columnas en función de su longitud. Los valores más desfavorables para cada columna variaron de $L/530$ a $L/3.360$ (las columnas probadas no fueron laminadas en frío).

- **Imperfecciones en pórticos**

Aunque no forman parte del ámbito de la presente Tesis, cabe mencionarlos. Existen dos tipos de imperfecciones: desplazamientos de las uniones y giros entre ellas. Las segundas son prácticamente iguales en la realidad y en los experimentos (aunque se han hecho pocos). Las primeras se demuestran experimentalmente que se absorben con un desplazamiento horizontal de ± 5 mm.

4.7.3. Bases de las curvas ECCS

La imperfección geométrica representativa elegida por la ECCS para el análisis de carga última en su plano de una pieza recta cargada, sometida a compresión, es una curvatura inicial con forma de una semionda senoidal y flecha central de valor $L/1000$. Este valor es una recopilación de límites de excentricidades que se recoge en las Recomendaciones de la ECCS R9 "Tolerancias" y está de acuerdo con los valores reales medidos.

Cubre conservadoramente todas las excentricidades en el rango de esbelteces de interés práctico.

4.7.4. Las normativas

La Norma alemana DIN 18800, cuando se refiere a la estabilidad, no especifica nada respecto a tolerancias, ya que habla de imperfecciones geométricas globales en las que están incluidos las tensiones residuales y los efectos de segundo orden.

La Norma española RPM-95 especifica que si se realiza un análisis no lineal de cálculo en material y geometría, es preciso dar unos valores de imperfección geométrica constructiva que denomina tolerancias, y que, en el caso de arcos en su plano, es una curva de amplitud máxima $L/1000$, siendo L la cuerda del arco.

El Eurocódigo 3 incluye el valor de las imperfecciones geométricas en sus curvas de pandeo para columnas, pero no propone ningún modelo de imperfección geométrica para arcos si estos se quieren representar por un modelo completo.

No se ha encontrado nada respecto a una imperfección geométrica inicial en arcos en las:

a) Normativas del Este de Europa

CSN 73 1401 84

MSZ 15024/1 85

TGL 13503/01 82

b) Normativa Japón

JRA 89

c) Normativa EE.UU.

AASHTO 98

Y sin embargo, es evidente que para modelizar arcos metálicos con objeto de determinar de su carga última hay que introducir en las secciones una imperfección geométrica inicial.

4.7.5. Imperfección geométrica adoptada en la presente Tesis

Como el modelo de arco que se presenta en el Capítulo 9 incluye todas las variables que afectan a la carga última, se ha tomado un modelo de deformada inicial para cotejar los cálculos del arco en su plano, tal y como indica la RPM 95, de valor senoidal con los máximos en los cuartos del arco, como se propone en la Figura 4.7.5.1.

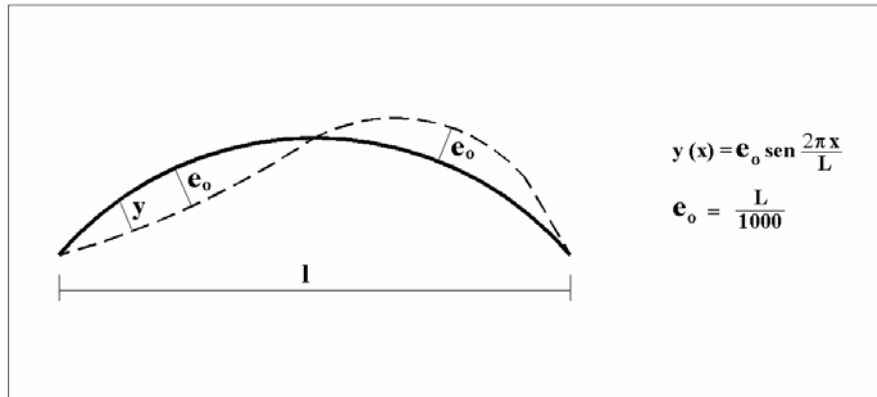


Figura 4.7.5.1. "Imperfección geométrica adoptada para el estudio de arcos en su plano en la presente Tesis."

En lo que respecta al estudio del arco fuera de su plano (objeto primero de la presente Tesis) se adopta una deformada inicial de valor cosenoidal con el máximo en el punto medio del arco, tal y como se muestra en la Figura 4.7.5.2.

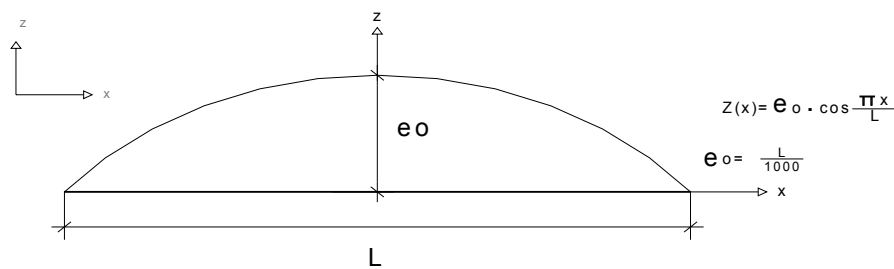


Figura 4.7.5.2. "Imperfección geométrica adoptada para el estudio de arcos fuera de su plano en la presente Tesis."

5. MODELOS DE CÁLCULO APLICADOS EN EL ESTUDIO. DEFINICIÓN DE LOS VALORES DE REFERENCIA

5. MODELOS DE CÁLCULO APLICADOS EN EL ESTUDIO. DEFINICIÓN DE LOS VALORES DE REFERENCIA

5.1. SOFTWARE EMPLEADO PARA LA MODELIZACIÓN

Tal y como se ha comentado con anterioridad, se ha utilizado el programa ANSYS versión 10.0 para realizar los cálculos objeto de la presente Tesis. El Ansys es un programa de aplicación general para el cálculo con elementos finitos que permite resolver problemas estructurales, térmicos, eléctricos, magnéticos y de fluídos.

El Método de los Elementos Finitos comprende dos aproximaciones:

- a) Aproximación física del dominio a través de los nodos (puntos donde se ubican las variables de cálculo) y elementos (representan el dominio y conectan los nodos) imponiendo una serie de condiciones de contorno.
- b) Aproximación de la solución (desplazamientos en este caso) a través de los desplazamientos nodales y las funciones de forma.

En la Figura 5.1.1. se esquematiza la organización del programa Ansys en la que se destacan tres módulos:

- a. Preprocesador: permite la construcción del modelo definiendo la geometría, materiales, tipos y características de los elementos.
- b. Solución: aplica las cargas y permite obtener la solución.
- c. Postprocesador: interpreta los resultados permitiendo obtener tablas, gráficos, etc.

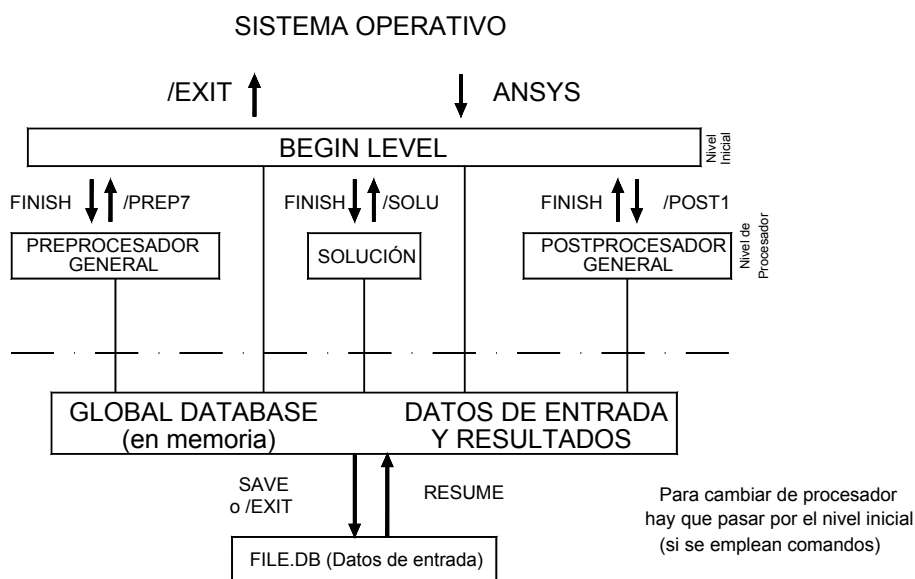


Figura 5.1.1. "Esquema organizativo del programa Ansys."

5.2. MODELIZACIÓN DEL ARCO CON ELEMENTOS "BEAM"

Para realizar los cálculos "lineales" y los "no lineales" correspondientes a la hipótesis de material elástico se utiliza un modelo de arco constituido por elementos BEAM 4.

El elemento BEAM 4 es una viga elástica de tres dimensiones; es un elemento uniaxial sometido a compresión, tensión, torsión y flexión, con seis grados de libertad en cada nodo: traslaciones según las direcciones nodales "x", "y" y "z", y rotaciones con respecto a los ejes nodales "x", "y" y "z". Admite grandes deformaciones (es decir, la no linealidad geométrica).

En la Figura 5.2.1. se muestra la geometría, la posición de los nodos y los sistemas de coordenadas del elemento BEAM 4.

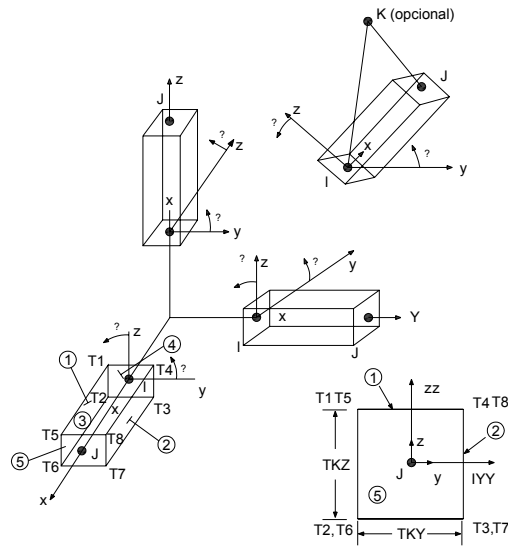


Figura 5.2.1. "Geometría del elemento BEAM 4."

El BEAM 4 se define por dos o tres nodos, el área de la sección transversal, los momentos de inercia con respecto a los ejes "y" y "z", las dimensiones de la sección, un ángulo de orientación con respecto al eje "x", el momento torsional y las propiedades del material.

Todos los cálculos realizados con el elemento BEAM 4 tratan de verificar los resultados y conclusiones contenidos en la bibliografía obtenidos por otros autores en los supuestos de cálculo "lineal" y con "no linealidad geométrica" tanto en como fuera del plano.

La directriz del arco es parabólica y se rige por la ecuación $y = -4.f \left(\frac{X}{L} \right)^2 + f$. En la Figura 5.2.2. se indica el significado de los parámetros incluidos en la definición de la parábola.

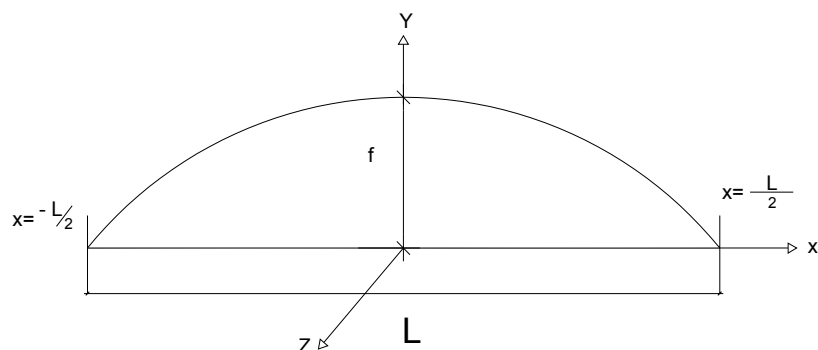


Figura 5.2.2. "Definición de los parámetros incluidos en la ecuación de la parábola "directriz" del arco."

La sección transversal empleada coincide con la referida en el Capítulo 4, Figura 4.3.3.1., un cajón cuadrado de 40 cm de lado y 1 cm de espesor.

Las características mecánicas de la sección adoptadas son las indicadas en la Figura 5.2.3.

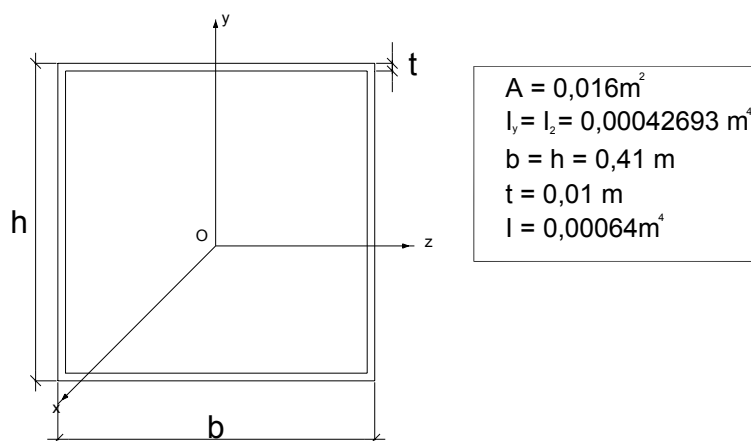


Figura 5.2.3. "Características mecánicas de la sección adoptada."

En lo que respecta a las características del acero, se considera un límite elástico σ_y de 235 MPa.

Para los cálculos correspondientes al supuesto de material elástico con no linealidad geométrica se introducen las imperfecciones geométricas iniciales tanto dentro como fuera del plano tal y como se indica en el apartado 4.7.5. "Imperfección geométrica adoptada en la presente Tesis" del capítulo anterior.

5.3. MODELIZACIÓN DEL ARCO CON ELEMENTOS "SHELL"

Para determinar la **carga última** de un arco parabólico sometido a una carga uniformemente distribuida en planta bajo la hipótesis de cálculo plástico no lineal con imperfecciones geométricas y tensiones residuales iniciales se utiliza un modelo de arco constituido por elementos SHELL 43.

El elemento SHELL 43 es una placa de cuatro nodos con comportamiento plástico que admite un cálculo con grandes deformaciones (no linealidad geométrica); tiene seis grados de libertad en cada nodo, al igual que ocurre con el BEAM 4: traslaciones según las direcciones nodales "x", "y" y "z", y rotaciones con respecto a los ejes nodales "x", "y" y "z".

En la Figura 5.3.1. se muestra la geometría, la posición de los nodos y los sistemas de coordenadas del elemento SHELL 43.

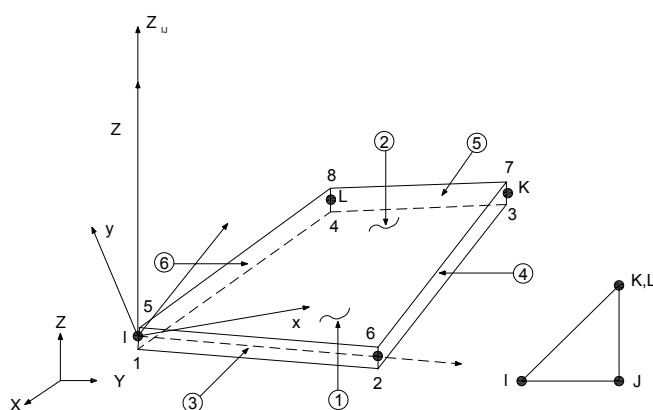

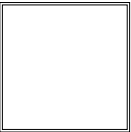




Figura 5.3.1. "Geometría de SHELL."

El elemento se define por cuatro nodos, cuatro espesores y las propiedades ortótropas del material. En el caso particular del presente estudio se ha utilizado un espesor constante en los cuatros lados de la placa.

Las secciones transversales empleadas y los espesores dispuestos en los diferentes casos utilizados para validar los cálculos relativos a la carga última de un arco en su plano se resumen en la siguiente tabla:

ESQUEMA	DIMENSIONES PERÍMETRO INTERMEDIO (m)	ESPESOR (cm)
	0,40 X 0,40	1
	1,00 X 1,00	2
	0,20 X 1,00	1
	0,40 X 1,00	1

En lo que respecta a las características del material "acero", se mantiene lo dispuesto en el apartado anterior, añadiendo lo relativo al comportamiento

plástico. Se utiliza la opción de "Bilinear Kinematic Hardening", un material kinemático bilineal.

El material bilineal kinemático presenta un diagrama tensión-deformación con dos tramos lineales y el escalón de descarga se realiza con una amplitud de tensión $2\sigma_y$.

En la Figura 5.3.2. se muestra el diagrama $\sigma - \epsilon$ de este tipo de material.

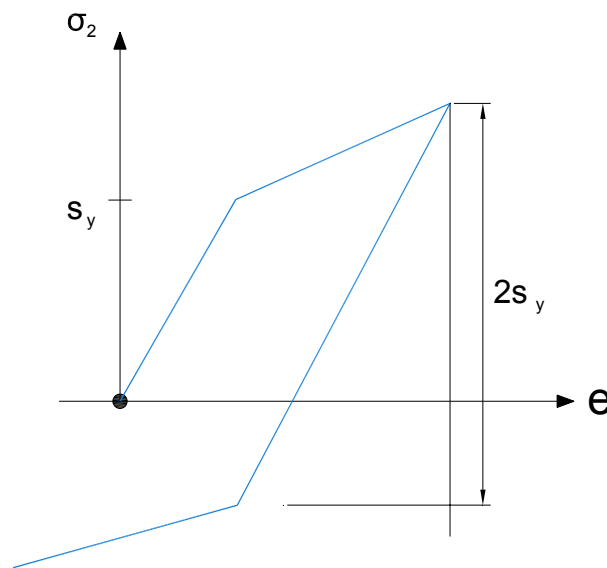


Figura 5.3.2. "Diagrama tensión-deformación $\sigma - \epsilon$ de un material bilineal kinemático."

En lo que respecta al endurecimiento kinemático se supone que la superficie plastificada permanece constante en tamaño y se desplaza en el diagrama tensional con la plastificación progresiva, tal y como se muestra en la Figura 5.3.3.

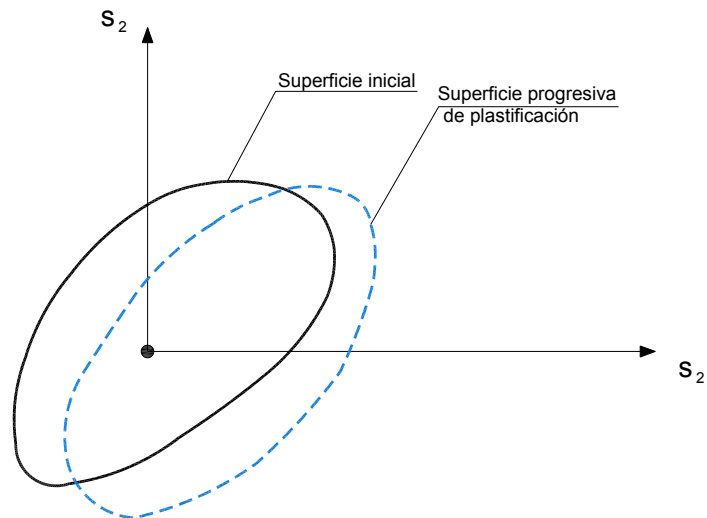


Figura 5.3.3. "Comportamiento de un material kinemático con endurecimiento."

El criterio de plastificación que se emplea es el de Von Mises.

5.4. CONDICIONES DE CONTORNO DE LOS MODELOS DE ESTUDIO

Todos los modelos de estudio utilizados en los cálculos analizan dos condiciones de contorno diferentes: arcos biapoyados y arcos biempotrados.

Dependiendo del tipo de elemento empleado las condiciones de apoyo se simulan de diferente manera:

5.4.1. Elemento BEAM 4

5.4.1.1. Arco biapoyado

En los dos nodos situados en los dos extremos del arco se impone que los desplazamientos según los ejes globales "x", "y" y "z" y el giro según el eje x sean nulos. Asimismo, es necesario realizar previamente en cada nodo un cambio de coordenadas globales a locales con el fin de definir con exactitud las con-

diciones de contorno "reales". En la Figura 5.4.1.1.1. se indican de forma gráfica los vínculos impuestos en los extremos del arco.

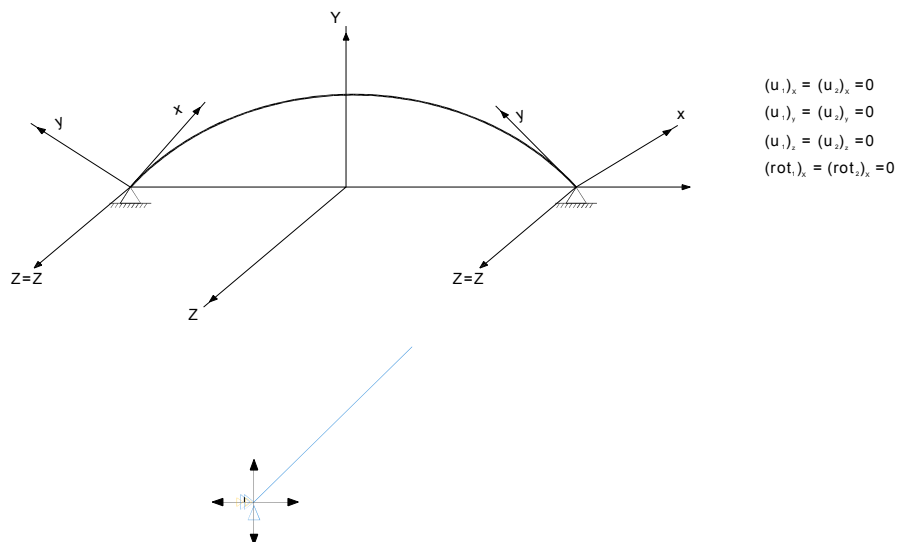


Figura 5.4.1.1.1. "Condiciones de contorno impuestas para el caso de arco biapoyado modelizado con elementos BEAM 4."

5.4.1.2. Arco biempotrado

En los nodos situados en los dos extremos del arco se impone que los desplazamientos y los giros según los ejes globales "x", "y" y "z" sean nulos.

En la Figura 5.4.1.2.1. se indican de forma gráfica los vínculos impuestos en los extremos del arco.

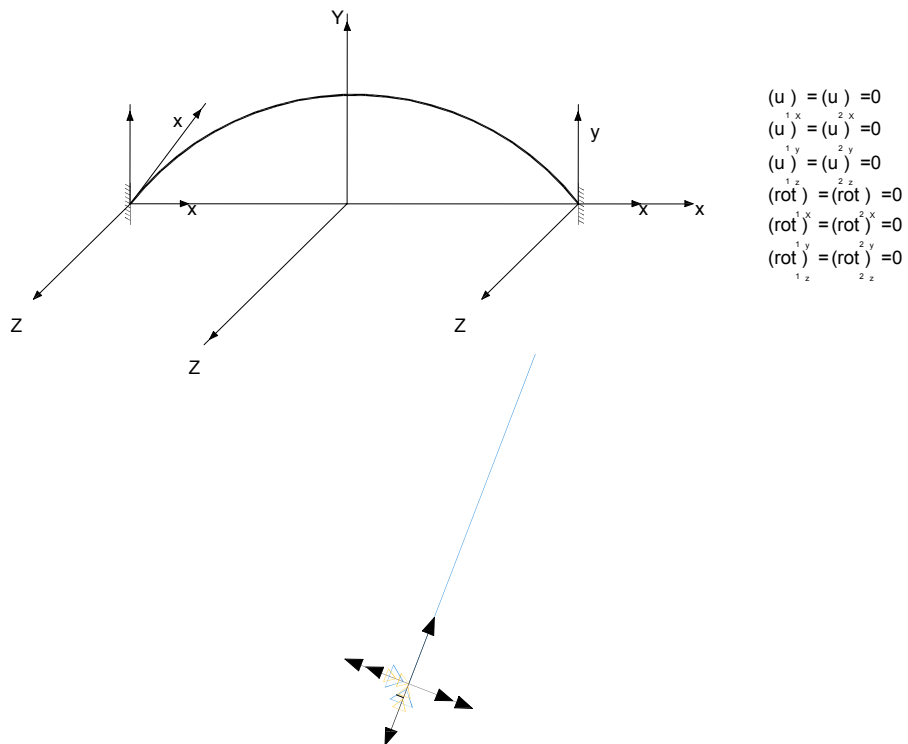


Figura 5.4.1.2.1. "Condiciones de contorno impuestas para el caso de arco biempotrado modelizado con elementos BEAM 4."

5.4.2. Elemento SHELL 43

5.4.2.1. Arco biapoyado

La modelización de las condiciones de contorno para el caso de utilizar elementos SHELL 43 es más compleja que para el caso de elementos BEAM 4. Además, es necesario realizar una serie de puntualizaciones en lo que se refiere al estudio en el plano o fuera del plano.

Si atendemos al comportamiento del arco en su plano, la vinculación de cada apoyo al terreno se realiza colocando un apoyo simple en todos los nodos situados en la arista intermedia de cada extremo del arco paralela a la sección transversal. De esta forma se asegura que en los apoyos no existe desplazamiento alguno y que es posible el giro con respecto al eje "z".

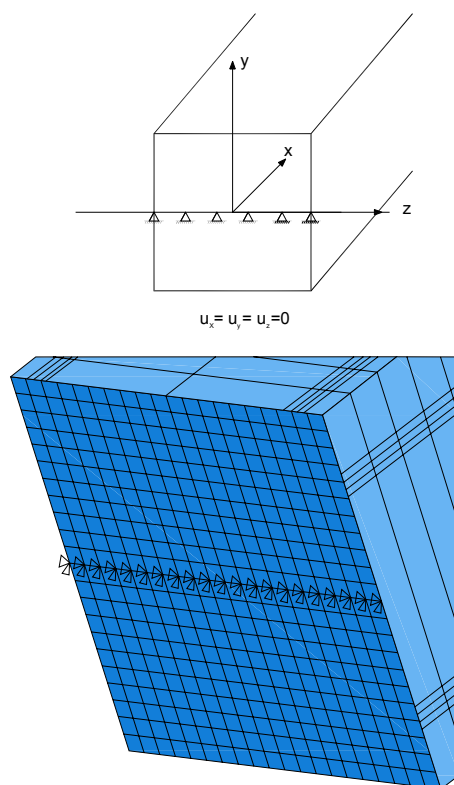


Figura 5.4.2.1.1. "Condiciones de contorno impuestas para el caso de arco biarticulado modelizado con elementos SHELL 43."

En lo que respecta al comportamiento fuera del plano, la teoría define un vínculo en cada apoyo con el nodo central de cada extremo sin desplazamientos según los 3 ejes coordenados y con todos los nodos de la arista intermedia paralela a la sección transversal sin desplazamiento según el eje "y". De esta forma se permitiría el giro en los apoyos con respecto al eje "y". No obstante, la realidad no coincide con lo que define la teoría. En la práctica los apoyos de las estructuras metálicas se ejecutan tal y como se indica en la Figura 5.4.2.1.1., por lo que los cálculos fuera del plano en el caso de arco biapoyado se realizarán conforme a lo reseñado anteriormente.

5.4.2.2. Arco biempotrado

La modelización del apoyo para el caso de arco biempotrado se realiza imponiendo en todos los nodos que componen el contorno unos desplazamientos con respecto a los ejes coordenados globales "x", "y" y "z" nulos.

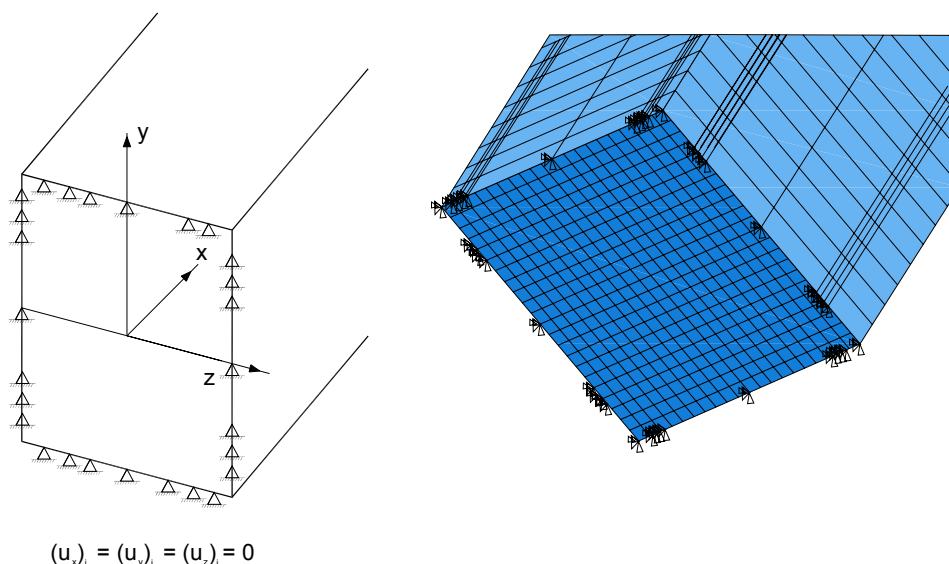


Figura 5.4.2.2.1. "Condiciones de contorno impuestas para el caso de arco biempotrado modelizado con elementos SHELL 43."

De esta forma se asegura la no existencia de movimientos y giros en los apoyos.

En la Figura 5.4.2.2.1. se esquematizan gráficamente las condiciones de contorno impuestas para el arco biempotrado.

5.4.3. Rigidización de los apoyos en el caso del elemento SHELL 43

La modelización del arco con elementos SHELL 43 hace necesario la rigidización de los apoyos con chapas de grosor elevado que simulen la realidad: los arcos de sección cajón jamás se apoyan sin rigidizar para evitar la rotura por

plastificación local de las chapas en los arranques. Es necesario diseñar un refuerzo con los espesores adecuados para que la tensión sea inferior al límite elástico.

En la Figura 5.4.3.1. se muestra el esquema de rigidización propuesto.

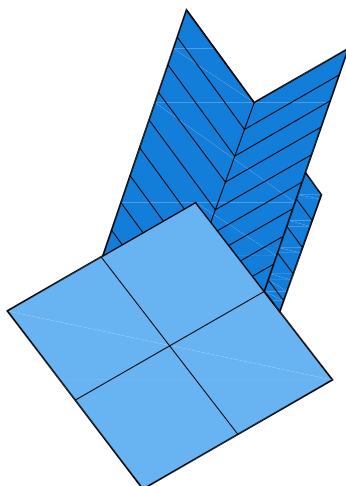


Figura 5.4.3.1. "Detalle de rigidización del apoyo."

Los arcos reales tienen una sustentación similar. Este refuerzo no altera la carga de colapso real, ya que las secciones pésimas están en riñones o en clave y la zona reforzada es tan corta que apenas afecta a la rigidez global de la estructura.

5.5. VALORES DE REFERENCIA

Toda la bibliografía existente relativa a la materia objeto de la presente Tesis utiliza en sus exposiciones algunos valores y parámetros de referencia, cada uno de los cuales tiene su utilidad.

Suelen utilizarse para definir y comparar los resultados obtenidos. Los más utilizados son los siguientes:

- **Carga de referencia q_p** : es la carga uniformemente distribuida en planta que produce la plastificación por axil en los arranques cuando se realiza un estudio de primer orden elástico. Su valor viene definido por:

$$q_p = \frac{2A\sigma_y}{L\sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{L}{f}\right)^2 + 1}} \quad (5.5.1.)$$

Este valor no es realmente exacto, ya que no tiene en cuenta que el acortamiento del arco provoca el giro en las secciones, generando momentos a lo largo de la directriz. Estos momentos dan lugar a que el valor de la carga que hace plastificar los apoyos varía por el efecto del momento. A pesar de esto, la facilidad de cálculo en régimen elástico convierte a q_p en uno de los más utilizados valores de referencia.

- **Esbeltez del arco**: se define como

$$\lambda = \frac{S}{i} \quad (5.5.2.)$$

donde:

S es la longitud de desarrollo del arco

i es el radio de giro de la sección $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

- **Esbeltez reducida del arco**: se define como

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}}} = \frac{1}{2} \frac{l}{i} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}} \quad (5.5.3.)$$

con el fin de independizarla del valor de las características mecánicas del material.

6. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN LOS ARCOS

6. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN LOS ARCOS

6.1. CONCEPTO GENERAL DE INESTABILIDAD

Cuando se estudia el comportamiento de cualquier estructura es necesario analizar su capacidad de volverse inestable. Antes de hacerlo con el arco se analizan los conceptos básicos que fundamentan la teoría de la estabilidad en el cálculo general de estructuras.

La "estabilidad" es la capacidad de una estructura de mantener sensiblemente inalterada su deformada y su estado tensional ante la presencia de pequeñas perturbaciones. La "inestabilidad" es lo contrario y su incapacidad se manifiesta de dos maneras:

- La bifurcación, en la que una estructura, tras un pequeño incremento de carga, cambia bruscamente su geometría y comienza a trabajar como un mecanismo resistente sustancialmente diferente al que tenía en el instante anterior.

- El agotamiento por pandeo, en el que la estructura, tras un pequeño incremento de carga, se deforma incontroladamente hasta arruinarse. La carga que marca el punto de bifurcación se denomina carga crítica (P_c); la que provoca el agotamiento es la carga última de colapso (P_u).

Si mediante una coacción se impide la bifurcación, la estructura admitirá incrementos adicionales de carga hasta un nuevo valor crítico que provocará una nueva bifurcación con una forma geométrica diferente de la primera. Si se vuelve a impedir con otra coacción aparecerán posteriormente otra carga crítica y una bifurcación diferente a las anteriores. Cada forma geométrica distinta se denomina modo de pandeo y se ordenan de menos a más (primer modo, segundo, tercero, etc) según el valor de sus correspondientes cargas críticas.

El primer modo es el de menor carga crítica y coincide con la forma natural de pandear la pieza si no existe coacción alguna al movimiento. Si se coarta el primero, la pieza pandeará por el segundo y así sucesivamente.

El comportamiento postcrítico de una estructura se refiere a las situaciones en las que tras la bifurcación es capaz de soportar nuevos incrementos de carga. Si el comportamiento postcrítico es bueno se admiten fuertes incrementos de carga previos a alcanzar la carga última ($P_u > P_c$); en otras el agotamiento se produce sin bifurcación ($P_u < P_c$).

6.2. TIPOS DE INESTABILIDAD

La inestabilidad de una estructura puede afectarla en su conjunto (inestabilidad global) o a elementos parciales de la misma, ya sea por medio de pandeo local de elementos estructurales aislados, ya sea a través de la abolladura en el caso de inestabilidad de chapas.

6.3. TIPOS DE CÁLCULO DE INESTABILIDAD

La estabilidad de la estructura depende de la ley de comportamiento del material con el que está construida y del tipo estructural en el que se encuadra. Aunque el fenómeno de la inestabilidad es único, su cálculo puede realizarse de forma más o menos simplista, según las hipótesis consideradas, arrojando resultados diferentes. Cabe así hablar de diferentes análisis de estabilidad, más o menos precisos en cuanto a la simulación de la realidad.

El arco, cuando se diseña como antifunicular de las acciones a las que va a estar sometido, trabaja fundamentalmente a compresión, con lo que se puede asemejar a una columna cargada a compresión pura. Y, como tal, el estudio de su estabilidad se puede abordar, de forma simplista, desde el punto de vista de la estabilidad lineal, donde se obvia la no linealidad del material y se supone que la geometría no cambia antes de la bifurcación. Este modelo ideal de comportamiento proporciona un valor teórico para la carga crítica, y su determinación se denomina **cálculo de estabilidad elástica lineal**. Corresponde a estructuras teóricas, no existentes en el mundo real y tiene tan sólo un valor académico. Su metodología de análisis ha sido desarrollada a lo largo del tiempo por diversos autores y se puede decir que está prácticamente cerrada y formulada, siendo sencilla su implementación tanto en programas de cálculos de estructuras de uso cotidiano como en tablas, fórmulas, ábacos, etc.

Las hipótesis anteriores suponen que los arcos se consideran inextensibles ante los efectos del axil. Sin embargo, en la realidad, se acortan y flectan. No existen arcos sometidos a compresión pura por muy adecuada que intente ser la geometría del arco a su antifunicular porque son elongables. La razón es evidente: la hipótesis de inextensibilidad no es más que una simplificación, válida sólo desde el punto de vista práctico para arcos muy esbeltos. Al acortarse los arcos más rígidos, las secciones giran y aparecen momentos. A este efecto hay que sumarle el hecho de que normalmente los arcos están sometidos a cargas para las que no son antifuniculares, por lo que aparecen esfuerzos de flexión que hacen que el arco cambie de forma respecto a la original antes de que aparezca el fenómeno de pandeo. Estas consideraciones hacen que el problema se convierta en no lineal desde el punto de vista geométrico. Si se consideran estas deformaciones previas, pero se continúa obviando la no linealidad del material para obtener la carga crítica, se trata de un **cálculo de estabilidad elástica no lineal**. Los arcos que se calculan por este método son los que se deforman sustancialmente antes de alcanzar la carga de agotamiento por pandeo. Este cálculo sólo es útil para piezas muy esbeltas trabajando a flexocompresión, y tiene un valor indicativo, porque la carga última real siempre implica un comportamiento no elástico. Tiene interés académico porque constituye una mejor aproximación a la realidad que la anterior. También es más fácil de modelizar que si se pretende simular la pieza física y por ello se utiliza para determinar un umbral superior de la carga real de pandeo.

Este problema también está descrito y abordado en múltiples publicaciones, aunque su solución no está cerrada por formulación alguna. Sí existen, sin embargo, tablas que resuelven diferentes casos, así como algoritmos de solución implementados en programas de cálculo de uso más especializado.

En los métodos de cálculo descritos se supone que las relaciones entre tensión y deformación del acero son lineales, es decir, no se contempla la plasticación de las secciones del arco y su propagación a lo largo de amplias zonas del mismo. Además, si no se tiene en cuenta la curva de comportamiento real del acero, es imposible introducir el fenómeno de las autotensiones de la pieza, ya que frecuentemente éstas superan el límite elástico del material. Para considerar estas circunstancias en el modelo de cálculo es necesario contar con la ecuación constitutiva del material, así como las tensiones residuales e imperfecciones geométricas de la pieza. Cuando el cálculo incluye todos estos paráme-

tros se habla de un **cálculo de estabilidad inelástica no lineal**, y aparece el concepto de carga de agotamiento de la estructura. En este caso el análisis se centra en la determinación de la **carga última de colapso**.

Este problema se encuentra muy poco estudiado, y apenas existe bibliografía al respecto. La única manera de afrontarlo es mediante programas que tengan en cuenta la no linealidad geométrica de la estructura y la no linealidad del material. Diversos autores han desarrollado formulaciones a medida para casos muy concretos, pero la realidad es que el ingeniero de hoy sólo dispone como herramientas de cálculo a su alcance de los programas comerciales de elementos finitos. Y, aún así, el uso de éstos es frecuentemente engorroso para un profano.

6.4. LA INESTABILIDAD LATERAL EN ARCOS

La inestabilidad lateral para un arco se define, al igual que para el resto de la estructuras, como la capacidad de permanecer en su posición y soportar cargas, aunque se perturbe ligeramente por un incremento de las acciones, lateralmente. En el caso de arcos elásticos sometidos a cargas conservativas, la carga crítica siempre se corresponde con un punto de bifurcación o con un punto límite. En la Figura 6.4.1. se muestran dos curvas carga-deformación posibles en el pandeo lateral de arcos. Cada punto representa una configuración de la estructura en equilibrio.

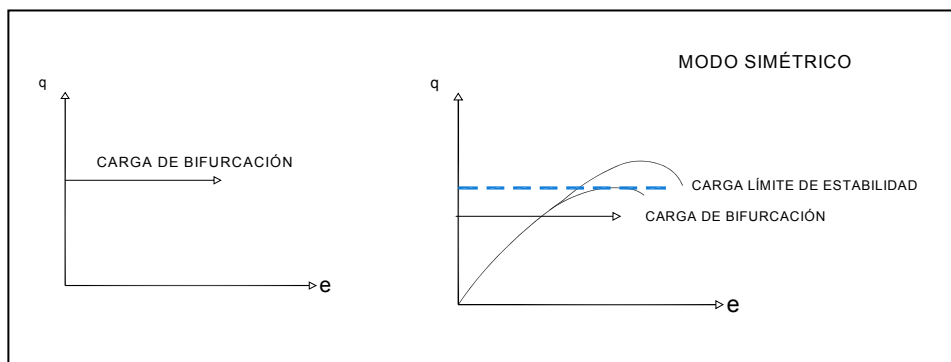


Figura 6.4.1. "Camino de deformación-carga posibles para la inestabilidad lateral de arco."

La Figura 6.4.1.a. muestra la relación entre la carga y la deformación para el caso de cálculo LINEAL. Hasta que no se alcanza un valor de la carga denominado "carga de bifurcación", la deformación es nula. A partir de esta carga la deformación aumenta irremediabilmente hasta rotura.

La Figura 6.4.1.b. muestra la relación entre la carga y la deformación para el caso de cálculo NO LINEAL. Al alcanzar la carga el valor de la carga de bifurcación, puede incrementarse suavemente a partir de la misma hasta alcanzar el punto límite tras grandes movimientos fuera del plano del arco.

7. INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS

7. INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS

7.1. HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS DE UN CÁLCULO DE INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL TANTO EN COMO FUERA DEL PLANO

Para realizar un cálculo de inestabilidad (también denominado "pandeo") elástica lineal es necesario adoptar las siguientes hipótesis simplificativas de partida:

- El material es elástico
- El arco es inelongable, con lo que no aparecen momentos debidos al acortamiento por axil
- Se tienen en cuenta los momentos de primer orden y no la influencia de la flexión provocada por el axil en la deformada
- Se desprecian las deformaciones producidas por el cortante

Este cálculo es muy simplificado y aporta una información poco relevante: el material dista mucho de ser lineal en su comportamiento y no tiene en cuenta el cambio de geometría por la flexión y la correspondiente aportación del axil a la misma. No obstante, ha sido el único modelo utilizado antes de la aparición de los ordenadores por su simplicidad de cálculo.

No tiene mucho interés en la práctica, aunque aporta muchas conclusiones interesantes sobre el comportamiento de los arcos.

7.2. UN REPASO A LA INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL DE ARCOS EN SU PLANO. VALIDACIÓN DEL MODELO DE CÁLCULO

Tal y como se describe en la Tesis de Arancha Manzanares (2001) en el cálculo clásico la inestabilidad de un arco se basa en la fórmula de la Resistencia de Materiales

$$M = EIy'' \tag{7.2.1.}$$

que relaciona el momento flector en un punto con su curvatura correspondiente a través de la rigidez a flexión. Si el arco está sometido a compresión pura, no debe existir curvatura debida al momento. No obstante, la inestabilidad se define como la amplificación de la flecha provocada por una perturbación por la influencia del axil. Así pues, la estructura se define independientemente de las cargas a las que a priori se encontraba sometida. La ecuación de una barra sometida a compresión pura con un carga P viene definida por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Py}{EI} \tag{7.2.2.}$$

Existe un valor de la carga de compresión P para el cual la amplitud de la deformada tiende a infinito: la "carga crítica de pandeo elástico lineal".

La determinación de dicha carga crítica para arcos no es sencilla debido a la posible dificultad que presenta la ecuación diferencial. Algunos autores han resuelto una serie de casos sencillos que nos sirven de referencia para validar el modelo empleado en la presente Tesis. De todos ellos nos centramos en los valores recogidos por THEODORE V. GALAMBÓS en 1.998 en su "Guía de criterios de diseño de estabilidad de estructuras metálicas", los cuales se muestran en la Tabla 7.2.3.

f/L	Arco triarticulado		Arco biapoyado		Arco biempotrado	
	qL ³ /EI	HL ² /EI	qL ³ /EI	HL ² /EI	qL ³ /EI	HL ² /EI
a) Arcos parabólicos sometidos a carga vertical uniformemente distribuido en proyección horizontal.						
0,10	22,5	28,1	29,1	36,3	60,9	76,2
0,15			39,5	32,9	85,1	70,9
0,20	39,6	24,8	46,1	28,8	103,1	64,5
0,25			49,2	24,6	114,6	57,3
0,30	49,5	20,6	49,5	20,6	120,1	50,0
0,35			47,8	17,1	120,6	43,1
0,40	45,0	14,1	45,0	14,1	117,5	36,7
0,50	38,2	9,6	38,2	9,6	105,3	26,3
b) Arcos catenaria sujetos a carga vertical uniformemente distribuida a lo largo del eje del arco.						
0,10			28,7	36,3	60,1	76,2
0,15			38,3	32,8	82,7	70,9
0,20			43,5	28,5	98,0	64,3
0,25			44,8	24,1	105,9	56,9
0,30			43,2	19,8	107,4	49,4
0,35			39,7	16,1	104,0	42,1
0,40			35,3	12,9	97,2	35,4
0,50			26,5	8,2	79,3	24,5
c) Arcos circulares sometidos a carga hidrostática uniformemente distribuido a la larga del eje del arco.						
0,10	22,2	26,7	28,4	34,1	58,9	70,7
0,20	33,5	17,6	39,3	20,6	90,4	47,5
0,30	34,9	9,3	40,9	10,9	93,4	24,9
0,40	30,2	3,4	32,8	3,7	80,7	9,1
0,50	24,0	0	24,0	0	64,0	0

Tabla 7.2.3.: "Parámetros de carga crítica y de reacción horizontal crítica para arcos en compresión pura."

Los cálculos relativos a los arcos parabólicos sometidos a carga vertical uniformemente distribuida en proyección horizontal para los arcos triarticulados, biapoyados y biempotrados fueron realizados por AUSTIN y ROSS en 1.976. De los parámetros que figuran en la tabla, "f" es la flecha del arco, "L" la longitud de la cuerda del arco, "q" la carga uniformemente distribuida en planta y EI la rigidez a flexión en el plano del arco.

Los modos fundamentales de pandeo para los arcos biapoyados y biempotrados son asimétricos, en los que el arco se mueve hacia la derecha, desplazándose la corona y convirtiéndose en un punto de inflexión.

La Figura 7.2.4. muestra el modo principal de pandeo de los arcos biapoyados y biempotrados

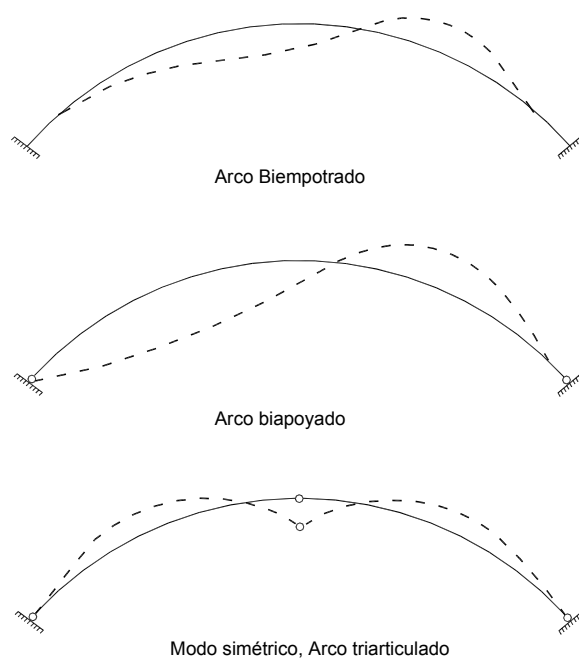


Figura 7.2.4: "Modo principal de pandeo de los arcos biapoyado y biempotrado."

Hoy en día, el desarrollo de los ordenadores permite resolver los problemas estructurales de manera muy rápida utilizando el método matricial. Partiendo del método de los elementos finitos se ha desarrollado un procedimiento para

calcular la estabilidad elástica lineal basado en el clásico problema matemático de los autovalores.

Sea una estructura sometida a unas cargas P_0 . Considerando un comportamiento lineal, se producirán unos desplazamientos u_0 que dependerán de la matriz de rigidez K_e con una relación lineal del tipo

$$\{P_0\} = [K_e]\{u_0\} \quad (7.2.5.)$$

Si se incrementa la carga cumple

$$\{\Delta P\} = [K_e] + [K\sigma(\sigma)]\{\Delta u\} \quad (7.2.6.)$$

donde $K\sigma$ es una matriz que considera el efecto de los axiles del estado inicial sobre la rigidez de la estructura (se tienen en cuenta los efectos de segundo orden).

Si en el momento antes de pandear el comportamiento de la estructura es lineal, se cumple:

$$\begin{aligned} P &= \lambda P_0 \\ u &= \lambda u_0 \\ \sigma &= \lambda \sigma_0 \end{aligned} \quad (7.2.7.)$$

y la ecuación (7.2.6.) queda de la forma:

$$\{\Delta P\} = [[K_e] + \lambda[K\sigma(\sigma_0)]]\{\Delta u\} \quad (7.2.8.)$$

En el momento de la inestabilidad, la estructura tiene desplazamiento aunque el incremento de P sea nulo, por lo que se hace singular la matriz de rigidez tangente. Se cumple que

$$0 = [[K_e] + \lambda[K\sigma(\sigma_0)]]\{\Delta u\} \quad (7.2.9.)$$

lo que implica que

$$0 = \det[[K_e] + \lambda[K\sigma(\sigma_0)]] \quad (7.2.10.)$$

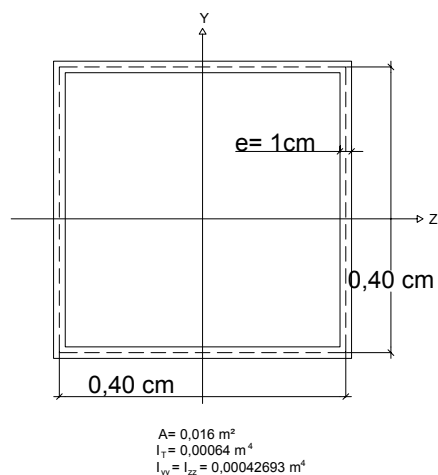
Los autovectores de este problema proporcionan los modos de pandeo; los autovalores las carga críticas.

Con el fin de validar los modelos que se van a utilizar en la presente Tesis para el estudio del pandeo lateral de arcos se ha calculado para diferentes casos de luz y flecha el valor de la carga crítica de pandeo elástico lineal en el plano del arco utilizando los modelos de BEAM y SHELL.

Estos resultados se comparan con los obtenidos por Austin y Ross para comprobar su validez.

Las luces empleadas son 20, 25, 30, 35 y 40 m para relaciones flecha-luz de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. La sección transversal es un cajón cuadrado de 40 x 40 cm con un espesor uniforme de 1 cm.

En primer lugar se va a hacer referencia a la modelización realizada con elementos BEAM. Tal y como se define en el apartado 5.2. "Modelización del arco con elementos BEAM", la directriz parabólica del arco se rige por la ecuación $y = -4f\left(\frac{x}{L}\right)^2 + f$, adoptando la sección transversal las siguientes características mecánicas:



donde I_{yy} e I_{zz} son los momentos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes "y" y "z" respectivamente e I_T es la inercia a torsión de la sección transversal definida por la expresión

$$I_T = \frac{4\Omega^2}{\int_0^L \frac{ds}{e}} \quad (7.2.11.)$$

donde

“ Ω ” es la sección media encerrada por el perímetro medio de la sección cajón y “ e ” es el espesor de la sección cajón.

S es la longitud según el perímetro medio de la sección cajón.

Las características del material acero en lo que a cálculo lineal se refiere se abordan en el apartado 4.5.2. “Descripción del acero como material no lineal” de la presente Tesis.

En la Figura 7.2.12. se muestran los valores del módulo de deformación longitudinal (E) y el límite elástico (σ_y), necesarios para las tareas de comprobación.

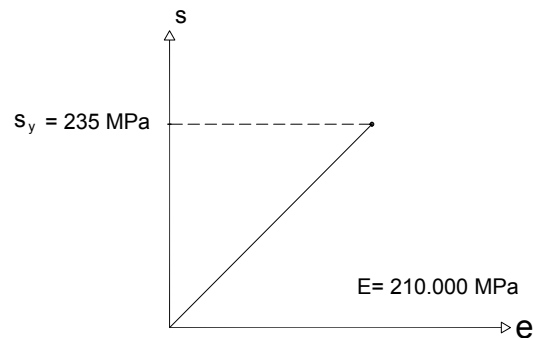


Figura 7.2.12. “Diagrama tensión-deformación del arco en la hipótesis de cálculo elástico lineal.”

No se considera imperfección geométrica alguna, con el fin de poder comparar con la bibliografía existente. Asimismo, los cálculos se realizan para los casos de arco biapoyado y arco biempotrado, tal y como se describe en el subapartado 5.4.1. “Condiciones de contorno de los modelos de estudio. Elemento BEAM 4”.

En las Figuras 7.2.13. y 7.2.14. se muestra el valor que la carga crítica en función del parámetro f/L para arcos biapoyados y biempotrados de diferentes longitudes. De aquí hasta el final de la Tesis, salvo que se disponga lo contrario, las cargas lineales se dan en t/ml y los axiles en toneladas.

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	32,9720	16,81	9,70556	6,1	4,0850
0,2	51,802	26,498	15,3266	9,649	6,463
0,3	55,477	28,395	16,4292	10,345	6,93
0,4	50,457	25,8309	14,9476	9,4127	6,306
0,5	42,81	21,9186	12,6843	7,9877	5,351

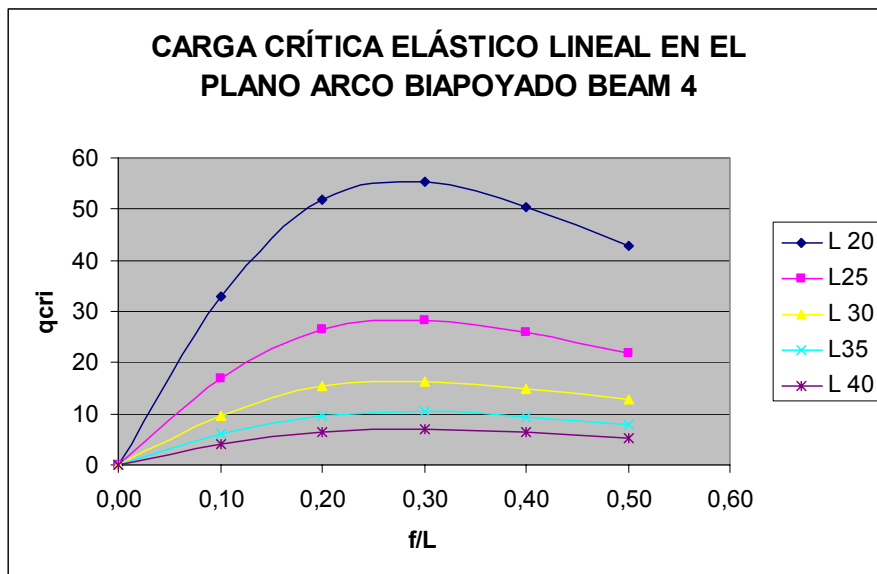


Figura 7.2.13.: "Valor de la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biapoyado modelizado con elementos BEAM 4."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	73,172	36,562	20,875	13,038	8,6880
0,2	117,356	59,753	34,475	21,67	14,5
0,3	135,295	69,13	39,961	25,148	16,84
0,4	132,028	67,537	39,065	24,593	16,472
0,5	118,151	60,466	34,984	22,027	14,755

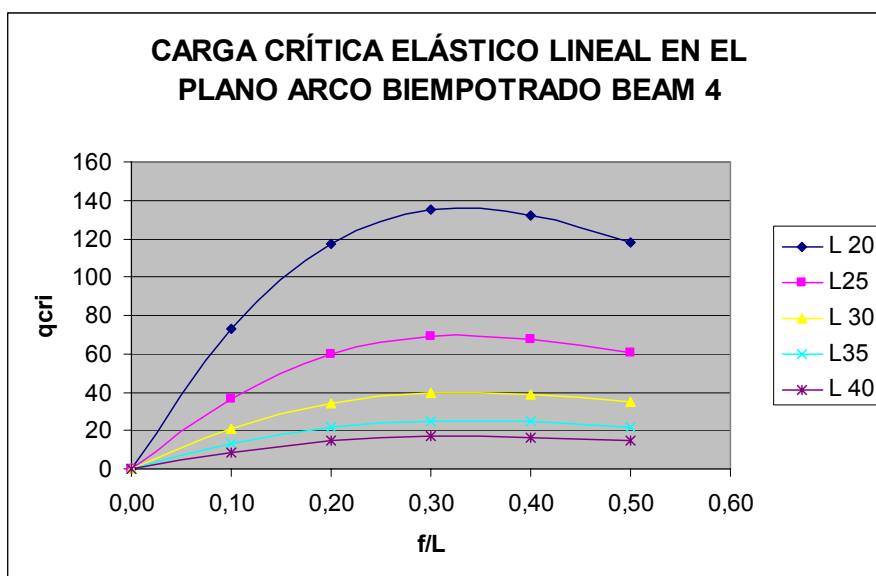


Figura 7.2.14: "Valor de la carga crítica elástico lineal en el plano del arco biempotrado modelizado con elementos BEAM 4."

La investigación realizada por AUSTIN Y ROSS en 1.976 recogida en la Tabla 7.2.3. arroja los siguientes valores de carga crítica para arcos tanto biapoyados como biempotrados (Figuras 7.2.15. y 7.2.16.):

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	32,6121	16,6974	9,6628	6,0851	4,0765
0,2	51,6639	26,4519	15,3078	9,6399	6,4580
0,3	55,4742	28,4028	16,4368	10,3509	6,9343
0,4	50,4311	25,8207	14,9426	9,4099	6,3039
0,5	42,8104	21,9189	12,6846	7,9879	5,3513

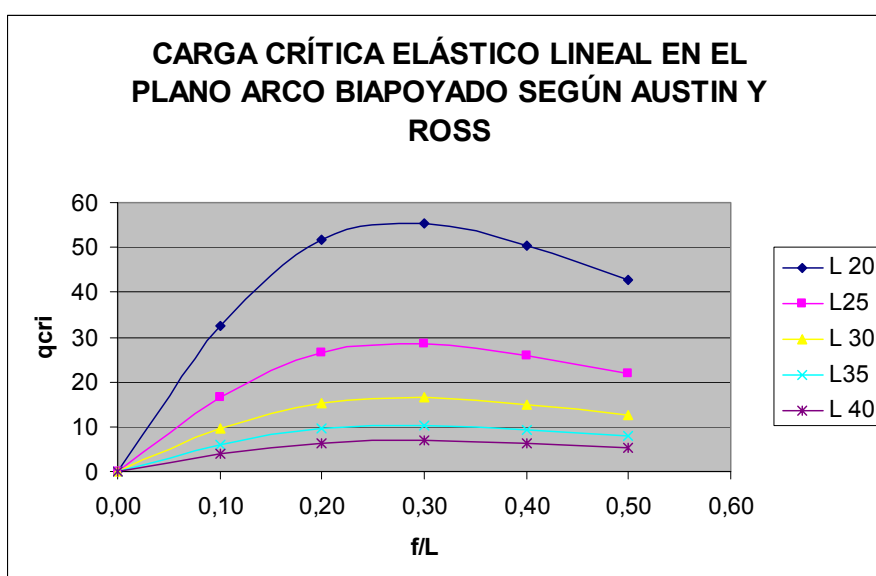


Figura 7.2.15.: "Valor de la carga crítica elástico lineal en el plano del arco biapoyado según Austin y Ross (1.976)."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	68,2501	34,9440	20,2223	12,7347	8,5313
0,2	115,5433	59,1582	34,2350	21,5591	14,4429
0,3	134,5950	68,9126	39,88	25,1139	16,8244
0,4	131,6812	67,4208	39,0167	24,5703	16,4602
0,5	118,0088	60,4205	34,9656	22,0191	14,7511

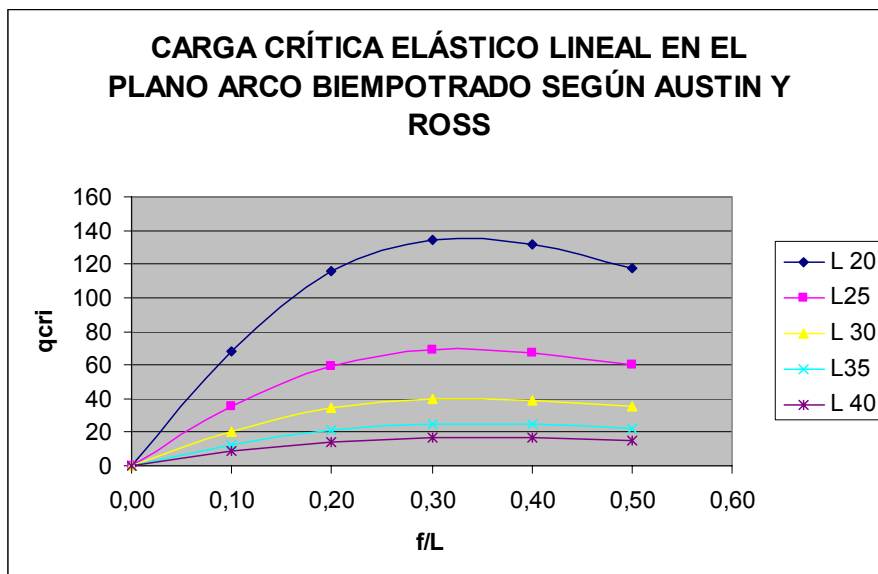


Figura 7.2.16. "Valor de la carga crítica elástico lineal en el plano del arco biempotrado según Austin y Ross (1.976)."

Si se analizan las diferencias existentes entre los valores calculados en la presente Tesis y aquellos obtenidos por Austin y Ross en 1.976 se observa que son mínimas y se encuentran dentro de los límites admisibles. Se lleva a cabo a continuación una valoración más exhaustiva de la no coincidencia de los resultados cotejados. Para el caso de arcos biapoyados, se calcula la diferencia existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo BEAM y los obtenidos por Austin y Ross en 1.976 relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación.

$$\% = \frac{\text{valorANSYS} - \text{valorAUSTINYROSS}}{\text{valorANSYS}}$$

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	1,09%	0,67%	0,44%	0,24%	0,21%
0,2	0,27%	0,17%	0,12%	0,09%	0,08%
0,3	0,01%	-0,03%	-0,05%	-0,06%	-0,06%
0,4	0,05%	0,04%	0,03%	0,03%	0,03%
0,5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%

ARCOS BIAPOYADOS

En la Figura 7.2.17. se representa la comparativa entre la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biapoyado obtenido por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.

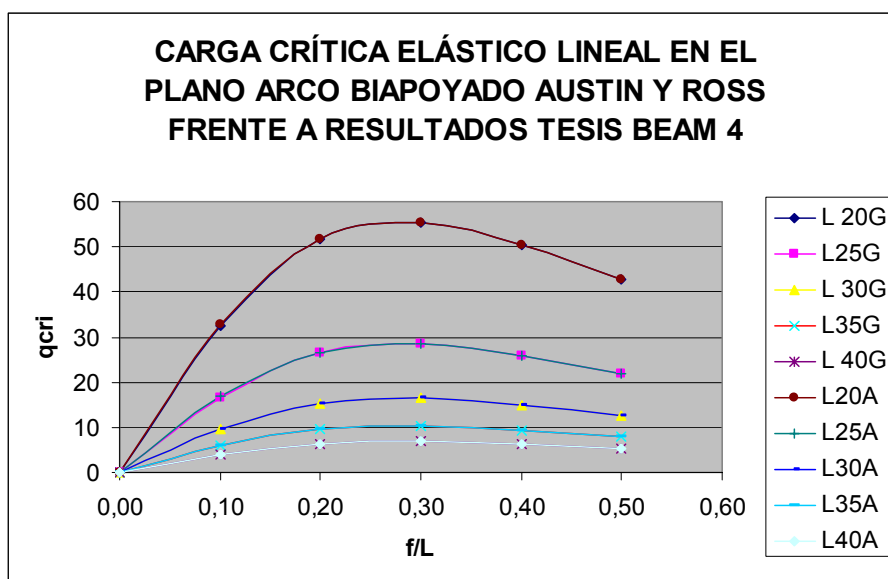


Figura 7.2.17.: "Comparativa entre la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biapoyado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys."

Se obtienen las siguientes conclusiones para los arcos biapoyados:

- El porcentaje diferencial entre los resultados de ANSYS y los de AUSTIN y ROSS es muy reducido para todas las longitudes y relaciones flecha-luz, siendo el mayor valor 1,09 para una longitud de 20 m y una relación flecha-luz 0,10.
- Las diferencias existentes entre los valores de carga crítica calculados por Austin y Ross con el cálculo clásico y los determinados en la presente Tesis con el Método de los Elementos Finitos se deben a que en el primer caso se desprecia el acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo y en el segundo no. Por ello, los resultados obtenidos en Ansys son más exactos, y coinciden con los propuestos por Austin y Ross en arcos muy esbeltos (donde las flexiones provocadas por los acortamientos por axil son muy pequeñas) y no coinciden en arcos poco esbeltos. Todo esto se pone de manifiesto en la comparativa realizada: el porcentaje diferencial decrece con el aumento de la luz del arco y de la relación flecha-luz.

Para el caso de los arcos biempotrados, el porcentaje diferencial existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos BEAM y los obtenidos por Austin y Ross en 1.976 relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación se determina en la tabla que se incluye a continuación.

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	6,73%	4,43%	3,13%	2,33%	1,80%
0,2	1,54%	1,00%	0,70%	0,51%	0,39%
0,3	0,52%	0,31%	0,20%	0,14%	0,09%
0,4	0,26%	0,17%	0,12%	0,09%	0,07%
0,5	0,12%	0,08%	0,05%	0,04%	0,03%

En la Figura 7.2.18. se representa la comparativa entre la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biempotrado obtenido por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.

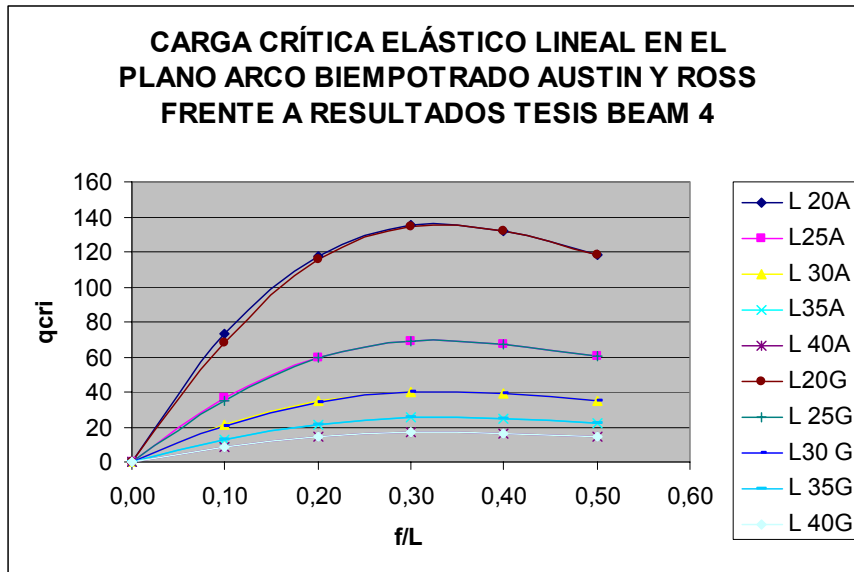


Figura 7.2.18. "Comparativa entre la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biempotrado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys."

Se obtienen las siguientes conclusiones para los arcos biempotrados, análogos a las reflejadas con anterioridad para los arcos biapoyados:

- El porcentaje diferencial es reducido y se encuentra dentro de los límites admisibles. Sólo para el arco de 20 m de longitud y relación flecha-luz 0,10 la diferencia es ligeramente superior al 5% (6,73%).
- Al igual que en el caso de los arcos biapoyados, las diferencias existentes entre los valores de carga crítica calculados por Austin y Ross con el cálculo clásico y los determinados en la presente Tesis con el Método de los Elementos Finitos se deben a que en el primer caso se desprecia el acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo y en el segundo no: cuanto más esbelto es el arco, las flexiones provocadas por los acortamientos por axil son menores y las diferencias se hacen casi nulas. Por ello, el porcentaje diferencial decrece con el aumento de la luz del arco y de la relación flecha-luz.

- Los porcentajes diferenciales correspondientes al arco biempotrado son superiores que en el caso del arco biapoyado, debido al mayor valor de los axiles en el primer caso.

Se hace ahora referencia a la modelización realizada con elementos SHELL. Es de aplicación todo lo indicado anteriormente en la modelización con elementos BEAM relativo a la directriz del arco, sección transversal, características mecánicas de la sección transversal, propiedades del material acero e inexistencia de imperfecciones geométricas. Los cálculos se realizan para los casos de arco biapoyado y biempotrado, tal y como se describe en el subapartado 5.4.2. "Condiciones de contorno de los modelos de estudio. Elemento SHELL 43".

Los resultados obtenidos se presentan a continuación agrupados por longitud del arco y condición de contorno y se resumen en las Figuras 7.2.19. y 7.2.20.

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	30,794	16,425	9,274	6,022	4,0410
0,2	48,688	25,481	14,893	9,436	6,347
0,3	55,339	29,051	15,876	10,072	6,781
0,4	51,111	26,073	14,763	9,161	6,168
0,5	42,479	21	12,282	7,786	5,240

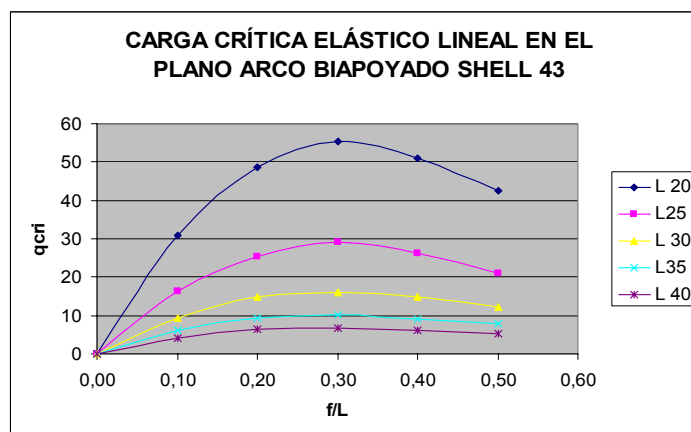


Figura 7.2.19.: "Valor de la carga crítica elástica lineal en el plano del arco biapoyado modelizado con elementos SHELL 43."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	68,4420	33,819	19,451	12,785	8,555
0,2	116,645	58,489	33,075	21,884	14,72
0,3	123,282	64,472	38,295	24,332	16,399
0,4	120,441	63,397	38,513	23,768	16,022
0,5	108,746	57,092	33,567	21,933	14,367

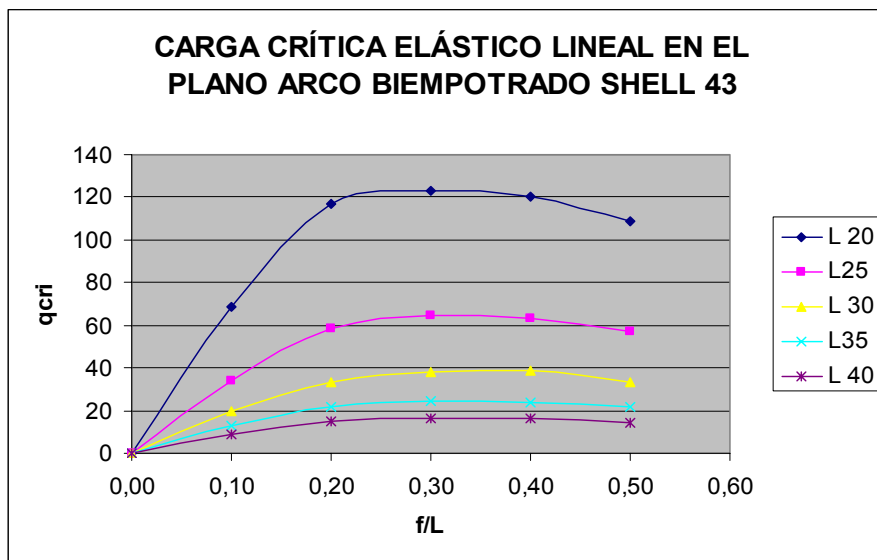


Figura 7.2.20.: "Valor de la carga crítica elástico lineal en el plano del arco biempotrado modelizado con elementos SHELL 43."

Para el caso de arcos biapoyados, la diferencia existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo SHELL y los obtenidos por Austin y Ross en 1.976 (Figuras 7.2.15. y 7.2.16.) relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación se indica en la siguiente tabla:

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	-5,90%	-1,66%	-4,19%	-1,05%	-0,88%
0,2	-6,11%	-3,81%	-2,79%	-2,16%	-1,75%
0,3	-0,24%	2,23%	-3,53%	-2,77%	-2,26%
0,4	1,33%	0,97%	-1,22%	-2,72%	-2,20%
0,5	-0,78%	-4,38%	-3,28%	-2,59%	-2,12%

Si se trata de arcos biempotrados, el porcentaje diferencial es:

ARCOS BIEMPOTRADOS

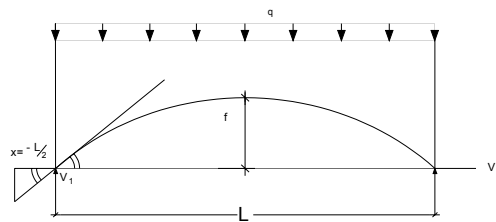
	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	0,28%	-3,33%	-3,97%	0,39%	0,28%
0,2	0,94%	-1,14%	-3,51%	1,48%	1,88%
0,3	-9,18%	-6,89%	-4,14%	-3,21%	-2,59%
0,4	-9,33%	-6,35%	-1,31%	-3,38%	-2,73%
0,5	-8,52%	-5,83%	-4,17%	-0,39%	-2,67%

De todo ello se concluye:

- Los porcentajes diferenciales son reducidos y admisibles, sin superar en ningún caso el 10%. Los valores máximos corresponden al caso de arco biempotrado para L=20 m y relaciones flecha-luz comprendidas entre 0,30 y 0,50 (9,33% para L=20 m y f/L=0,40).
- Los porcentajes diferenciales son superiores en el caso de modelización con SHELL 43 que en el de BEAM 4, tanto para el caso de arco biapoyado como para el de biempotrado. Estos resultados son completamente lógicos, ya que la modelización con SHELL 43 se acerca más a la realidad que aquella realizada con BEAM 4, por tratarse de un elemento tipo lámina (espacial) frente a un tipo viga (lineal). A rasgos genera-

les, se puede determinar que los mayores porcentajes diferenciales se obtienen para longitudes más pequeñas ($L=20$ m) y que este valor decrece con el aumento de la luz.

Con el fin de manejar datos más intuitivos que verifiquen la validez de los modelos empleados, para el caso de arcos biapoyados se calcula el valor del axil en apoyos en función de la carga uniforme en planta aplicada. Para ello se considera un arco con las características geométricas que se indican en la siguiente figura.



α es el ángulo que forma la tangente en los apoyos con la horizontal; V_1 y V_2 las reacciones verticales en los apoyos y N el axil en los arranques.

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$V_1 = V_2 = \frac{qL}{2} \quad (7.2.21.)$$

Por relaciones geométricas

$$\text{sen} \alpha = \frac{L/2}{R} \quad (7.2.22.)$$

$$N \cdot \text{sen} \alpha = V_1 \quad (7.2.23.)$$

Sustituyendo (7.2.21.) y (7.2.22.) en (7.2.23.) se obtiene

$$N \cdot \text{sen} \alpha = N \cdot \frac{L/2}{R} = qL/2$$

$$N = q \cdot R$$

Por lo tanto, el valor del axil crítico se calcula multiplicando la carga crítica uniformemente distribuida en planta por un parámetro R de valor:

$$R = \frac{L/2}{\text{sen} \alpha} \quad (7.2.24.)$$

donde L es la longitud del arco y α un ángulo de valor:

La ecuación de la directriz de la parábola viene dada por:

$$y(x) = -\frac{4f}{L^2}x^2 + f$$

El valor de la tangente en un punto se obtiene sustituyendo la coordenada x del mismo en la función derivada, con lo que:

$$y'(x) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot x$$

$$y'(x = -L/2) = -\frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot (-L/2) = 4 \cdot f / L = \operatorname{tg} \cdot \alpha$$

con lo que α es el arco cuya tangente vale $\frac{4f}{L}$

$$\alpha = \operatorname{arc.tg} \frac{4f}{L} \quad (7.2.25.)$$

Con todo ello se calculan los valores de los axiles para las diferentes hipótesis de cálculo y relaciones geométricas, cuyos resultados se indican a continuación.

Los valores calculados de los axiles determinan que su valor decrece con el aumento de la longitud y de la relación f/L , lo que pone de manifiesto la fiabilidad de los cálculos realizados.

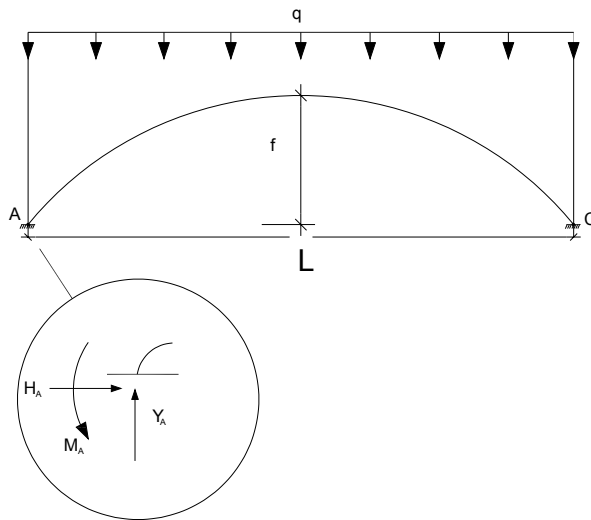
Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos BEAM 4

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	887,79827	565,778878	391,995301	287,433172	219,983982
0,2	829,236604	530,218706	368,017965	270,303888	206,91696
0,3	722,148702	462,025082	320,790385	235,658013	180,416768
0,4	595,012982	380,762849	264,403831	194,248325	148,726713
0,5	478,630351	306,321747	212,722178	156,284102	119,651997

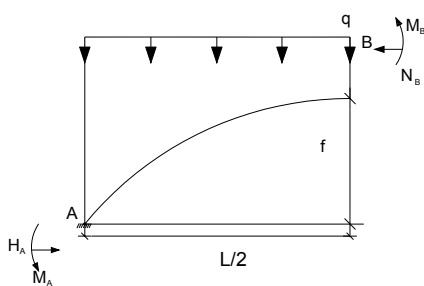
Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos SHELL 43

f/L	$L= 20\text{ m}$	$L= 25\text{ m}$	$L= 30\text{ m}$	$L= 35\text{ m}$	$L= 40\text{ m}$
0,1	829,153825	552,820825	374,565138	283,757797	217,61451
0,2	779,388282	509,868777	357,606485	264,336976	203,203148
0,3	720,352345	472,69909	309,98881	229,439101	176,537677
0,4	602,725262	384,331547	261,138494	189,054034	145,471989
0,5	474,929658	293,483922	205,975402	152,337721	117,169962

Para el caso de los arcos biempotrados, el valor del axil en el apoyo se determina de la siguiente forma:



Por simetría tanto de geometría como de cargas y aplicando equilibrio de fuerzas y momentos:



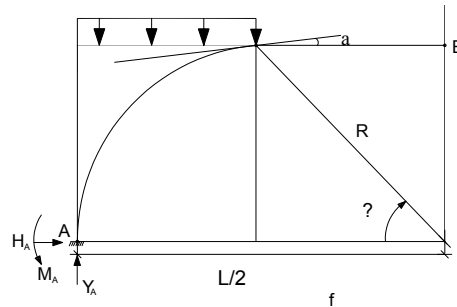
$$\left\{ \begin{array}{l} q \cdot L/2 = Y_A \quad (7.2.26.) \\ H_A = N_B \quad (7.2.27.) \\ M_A + M_B = qL/2 \cdot L/4 = \frac{qL^2}{8} \quad (7.2.28.) \end{array} \right.$$

El desplazamiento horizontal y el giro del punto B son nulos. Aplicando la teoría de resistencia de materiales relativa a los teoremas de Mohr se obtienen las siguientes expresiones.

$$M_B = \int_A^B \frac{Mds}{EI} (y_B - y) + \int_A^B \frac{Nds}{EA} \cos \alpha = 0 \quad (7.2.29.)$$

$$\theta_B = \int_A^B -\frac{Mds}{EI} \quad (7.2.30.)$$

El valor de M Y N en cualquier sección comprendida entre A y B cuya posición viene definida por un ángulo θ con respecto al centro de coordenadas viene dado por:



$$M = M_A - Y_A \left\{ \frac{L}{2} - R \cdot \cos \theta \right\} + H_A \cdot R \cdot \text{sen} \theta + \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - R \cos \theta \right)^2 \quad (7.2.31.)$$

$$N = Y_A \cdot \text{sen} \alpha + H_A \cdot \cos \alpha - q \left(\frac{L}{2} - R \cdot \cos \theta \right) \text{sen} \alpha \quad (7.2.32.)$$

donde α es el ángulo que forma la tangente en ese punto con respecto a la horizontal.

Considerando la ecuación de la parábola en ejes coordenados $y = -4f \left(\frac{x}{L} \right)^2 + f$,

derivando $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-8fx}{L^2} = \text{tg} \alpha$ y teniendo en cuenta las igualdades trigonométricas

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y $1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ se obtiene:

$$N = Y_A \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{64f^2 R^2 \cos^2 \theta}{L^4}}} + H_A \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64f^2 R^2 \cos^2 \theta}{L^4}}} - q \cdot R \cdot \cos \theta \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{64f^2 R^2 \cos^2 \theta}{L^4}} \right)} \quad (7.2.33.)$$

Así pues, dada una configuración de un arco de parámetros L y f conocidos con una carga q aplicada se puede determinar el valor del axil en el arranque resolviendo un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

Y_A , H_A , M_A , M_B y N_C

$$(1) \quad q \cdot \frac{L}{2} = Y_A$$

$$(2) \quad H_A = N_B$$

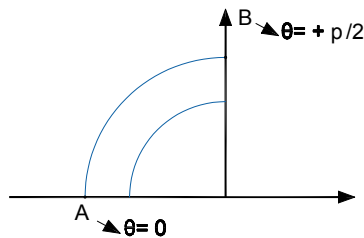
$$(3) \quad M_A + M_B = q \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$(4) \quad \int_A^B \frac{M \cdot ds}{EI} (y_B - y) + \int_A^B \frac{N \cdot ds}{EA} \cos \alpha = 0$$

$$(5) \quad \int_A^B -\frac{M \cdot ds}{EI} = 0$$

La resolución del sistema de ecuaciones arriba indicado se lleva a cabo con la ayuda de una hoja de cálculo que permite discretizar el arco en " n " partes iguales desde la sección extrema (para $\theta = 0$) hasta la sección central B del arco

(para $\theta = +\frac{\pi}{2}$).Z



DATOS		$v = -4*f*(x/L)^2 + f$								
L	40	m								
F	20	m								
Q	3,262	t/ml								
A	0,016									
E	21000000									
I	0,0004269									
X	-20	-19,5	-19	-18,5	-18	-17,5	-17	-16,5	-16	
R = f(x)	0	19,524988	19,09980366	18,72398612	18,39673884	18,1169163	17,88302268	17,69322346	17,5453698	
Teta	0	0,050597802	0,102273492	0,154831844	0,208056137	0,2617135	0,31556142	0,369354911	0,42285393	
costeta	1	0,998720204	0,994774624	0,988037477	0,978434284	0,96594805	0,950622292	0,932560426	0,91192151	
(L/2 - R*costeta)*										
(f - Rsenoteta)	0	9,50625	18,05	25,66875	32,4	38,28125	43,35	47,64375	51,2	
Rsenoteta	0	0,9875	1,95	2,8875	3,8	4,6875	5,55	6,3875	7,2	
Rsenoteta*(f - Rsenoteta)	0	18,77484375	35,1975	49,41234375	61,56	71,7773438	80,1975	86,94984375	92,16	
(L/2 - R*costeta)										
[2 * (f - Rsenoteta)	0	4,753125	18,05	38,503125	64,8	95,703125	130,05	166,753125	204,8	
f - Rsenoteta	20	19,0125	18,05	17,1125	16,2	15,3125	14,45	13,6125	12,8	
(L/2 - R*costeta)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	
(L/2 - R*costeta)[2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	
N1	0,8944272	0,889450247	0,8842645	0,878731969	0,872827802	0,86652546	0,85979644	0,852609877	0,84493217	
N2	0,4472136	0,456316648	0,465746433	0,475517034	0,485642931	0,49613894	0,507020127	0,518301716	0,52999894	
N3	17,888544	17,34427982	16,8010255	16,25654142	15,71090044	15,1641956	14,61653947	14,06806298	13,5189148	
coseno alfa	0,4472136	0,456316648	0,465746433	0,475517034	0,485642931	0,49613894	0,507020127	0,518301716	0,52999894	
N1coseno alfa	0,4	0,405870955	0,411843037	0,41785202	0,423882652	0,42991702	0,4359341	0,441909163	0,44781316	
N2cosenoalfa	0,2	0,208224883	0,21691974	0,22611645	0,235849057	0,24615385	0,257069409	0,268636669	0,28089888	
N3cosenoalfa	8	7,914483625	7,825017694	7,730262366	7,629887743	7,52354792	7,410879694	7,291501184	7,1650105	

Ecuaciones	
1	YA 32,62
4	648232,73 MA 648232,7314 MA
	-2,04E+08 YA 4994434,008 HA
	4993012,6 HA -162844159
	40749834
	64703,391 YA
	1421,3942 HA
	-36790,84
5	1 MA 1 MA -648232,73
	-26748,4 YA 543,25 HA -352152431
	543,25 HA -17720,815 1,1487E+10
	9027,585
	HA -347157997
	1,1324E+10
seno alfa	0,8944272 HA 32,620214
	YA 32,62
	N 43,7644181 toneladas

La correspondencia entre las coordenadas cartesianas x e y y las polares R y θ viene dada por las expresiones:

$$R = \sqrt{x^2 + \left(f - 4f \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{x}{R}$$

Así pues, los valores de los axiles en los apoyos para los diferentes casos son los siguientes:

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos BEAM 4

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	1970,2164	1230,57747	843,114865	614,353064	467,863118
0,2	1878,61262	1195,64338	827,803905	607,056197	464,226507
0,3	1761,14622	1124,83867	780,263468	572,868797	438,415348
0,4	1556,93708	995,5356	691,009637	507,521652	388,491343
0,5	1320,96834	845,03804	586,699516	430,971357	329,93183

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos SHELL 43

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	1842,85725	1138,25555	785,601305	602,431656	460,700849
0,2	1867,23107	1170,35104	794,187503	613,051122	471,269944
0,3	1604,772	1049,0467	747,733778	554,280402	426,934281
0,4	1420,29765	934,509534	681,245466	490,496264	377,878114
0,5	1215,81724	797,884956	562,935704	429,132191	321,255886

Al igual que se indica para el caso de arcos biapoyados, los axiles decrecen con el aumento de la longitud y de la relación f/L, confirmándose la validez de los cálculos realizados.

Así pues, tanto para la modelización con elementos BEAM como para la modelización con elementos SHELL se pone de manifiesto la validez de los modelos de cálculo empleados y la veracidad de los resultados que arroja.

7.3. INESTABILIDAD ELÁSTICA LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS

En 1.972 Frank J. **TOKARZ** y Raghbir S. **SANDHÚ** estudiaron de forma detallada el pandeo "lateral-torsional" de los arcos parabólicos sometidos a una

carga uniformemente distribuida en planta. El criterio de pandeo que utilizan se basa en la posibilidad de que para un cierto valor de carga crítica la bifurcación de equilibrio ocurre de tal forma que el “pandeo fuera del plano” se inicia con una flecha lateral y un giro del arco.

Las hipótesis adoptadas son:

- El material del arco es homogéneo y elástico lineal
- Pequeños desplazamientos
- El eje del arco es inextensible
- El radio de curvatura es grande en comparación con las dimensiones la sección transversal
- Coinciden el centroide y el centro de cortante de la sección transversal
- Todas las cargas externas se encuentran en el plano del arco

Previo al planteamiento de las ecuaciones diferenciales, TOKARZ Y SANDHU consideran un segmento de un arco parabólico que padea tal y como se representa en la Figura 7.3.1.

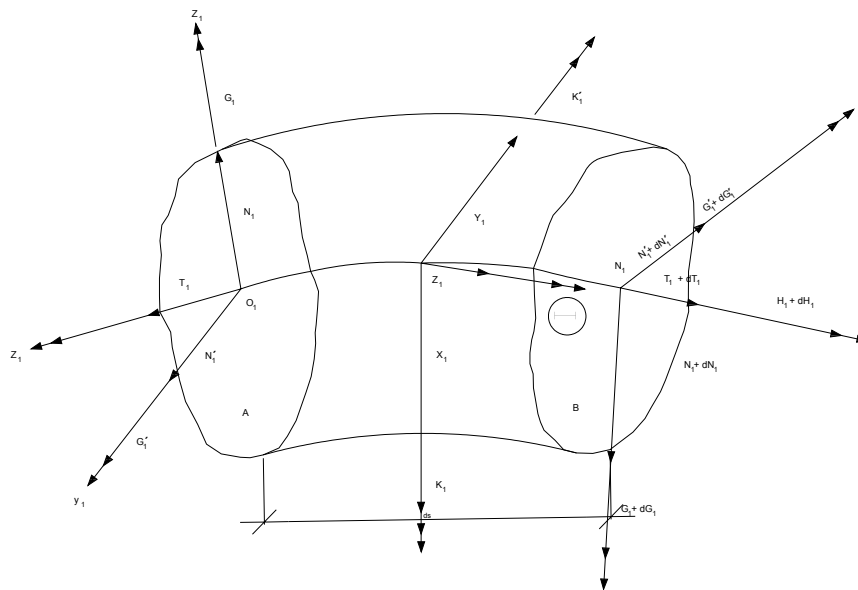


Figura 7.3.1.: “Fuerzas y momentos de un segmento de arco tras la deformación por pandeo.”

O_1X_1 y O_1Y_1 son los ejes principales de inercia de la sección transversal y O_1Z_1 es tangente al eje del arco en O_1 . El arco se mantiene en su plano formado por los ejes O_1X_1 y O_1Z_1 ; El eje O_1Y_1 se considera como la dirección lateral o fuera del plano. N , N^∇ y T son las fuerzas internas proyectadas según O_1X_1 , O_1Y_1 y O_1Z_1 ; G , G^∇ y H son los momentos internos según los ejes O_1X_1 , O_1Y_1 y O_1Z_1 .

Las fuerzas y momentos aplicados por unidad de longitud de barra son X , Y y Z y K , K_T^∇ y θ ; K y K^∇ son los componentes de la curvatura y T el giro del eje del arco.

Las tres (3) ecuaciones no lineales que gobiernan el fenómeno de la deformación lateral son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN^\nabla}{ds} - T_K + NT + Y &= 0 \\ \frac{dG}{ds} - G_T^\nabla + H_{K^\nabla} - N^\nabla + K &= 0 \\ \frac{dH}{ds} - G_K^\nabla + H_{K^\nabla} + \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2.)$$

El estado de pandeo y el de prepandeo son contiguos y si el desplazamiento es de orden infinitesimal, se puede asumir que las fuerzas internas y los momentos externos y las curvaturas y giros que aparecen en las ecuaciones (7.3.2.) se pueden expresar:

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 + \Delta N & K &= K_0 + \Delta K_0 \\ N_1 &= N_0^\nabla + \Delta N_T^\nabla & K^\nabla &= K_0^\nabla + \Delta K^\nabla \\ T &= T_0 + \Delta T & T &= T_0 + \Delta T \\ G &= G_0 + \Delta G & K &= K_0 + \Delta K \\ G^\nabla &= G_0^\nabla + \Delta G^\nabla & \theta &= \theta_0 + \Delta \theta \\ H &= H_0 + \Delta H & Y &= Y_0 + \Delta Y \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3.)$$

donde el subíndice 0 indica el equilibrio " prepandeo" y Δ representa el incremento desde el pandeo.

Para el caso particular de un arco parabólico contenido en el plano X_1-Z_1 sometido a una carga uniformemente distribuida en planta, las cantidades K_0 , T_0 , N_0 , N_0^∇ , G_0 , G_0^∇ , H_0 , K_0 y θ_0 son cero.

Si se sustituyen las igualdades de la expresión (7.3.3.) en las de la expresión (7.3.2.) considerando que $K_0=T_0=N_0=N_0^\nabla = G_0=G_0^\nabla =H_0=K_0=\theta_0=0$ y despreciando los términos de orden superior a Δ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones "lineales":

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta N^\nabla)}{ds} - T_0(\Delta k) + \Delta Y &= 0 \\ \frac{d(\Delta G)}{ds} + \Delta H(K_0^\nabla) - \Delta N^\nabla + \Delta K &= 0 \\ \frac{d(\Delta H)}{ds} - (\Delta G)K_0^\nabla + \Delta \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4.)$$

Los cambios en las curvaturas y en los giros se relacionan con los momentos a través de las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \Delta G &= A \cdot (\Delta K) \\ \Delta H &= C \cdot (\Delta T) \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5.)$$

en las que **A** es la rigidez a flexión de la sección transversal con respecto al eje O_1X_1 y **C** es la rigidez a torsión.

Sean "u", "v" y "w" los componentes del desplazamiento de un punto genérico **P** perteneciente al arco según los ejes "x₀", "y₀" y "z₀" tal y como se muestra en la Figura 7.3.6.

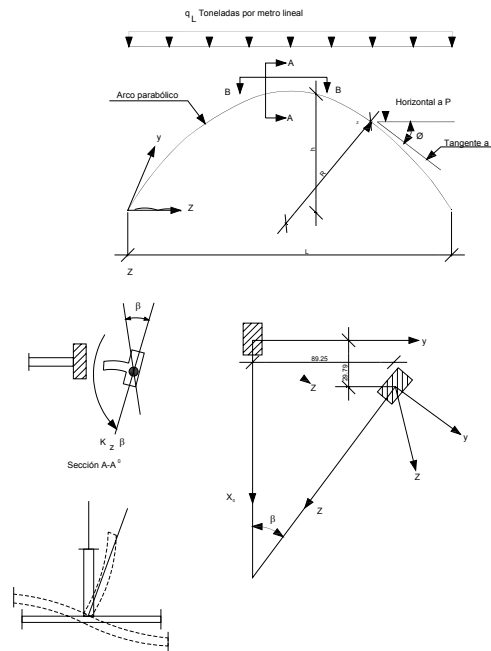


Figura 7.3.6.: "Definición de los parámetros que intervienen en el planteamiento de las ecuaciones diferenciales del pandeo fuera del plano."

El ángulo β es el giro de la sección transversal en el punto P con respecto al eje tangencial; u , v y w son los desplazamientos que definen los estados previos al pandeo y el propio pandeo. Si se suponen desplazamientos infinitesimales, los cambios de curvatura y giro se pueden expresar:

$$\left. \begin{aligned} \Delta K^\nabla &= \beta \cdot K_o^\nabla - \frac{d^2 v}{ds^2} \\ \Delta_T &= \frac{d\beta}{ds} + K_o^\nabla \cdot \frac{dv}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (7.3.7.)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (7.3.5.) y (7.3.7.) en (7.3.4.) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d(\Delta N^\nabla)}{ds} - T_o \left(\beta K_o^\nabla - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) + \Delta Y = 0 \quad (7.3.8.)$$

$$A \cdot \frac{d}{ds} \left(\beta K_o^\nabla - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) + CK_o^\nabla \left(\frac{d\beta}{ds} + K_o^\nabla \cdot \frac{dv}{ds} \right) - \Delta N^\nabla + \Delta K = 0 \quad (7.3.9.)$$

$$C \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{d\beta}{ds} + K_o^\nabla \frac{dv}{ds} \right) - A \cdot K_o^\nabla \left(\beta \cdot K_o^\nabla - \frac{d^2v}{ds^2} \right) + \Delta\theta = 0 \quad (7.3.10.)$$

Si se elimina ΔN^∇ de las ecuaciones (7.3.8.) y (7.3.9.), se obtiene la siguiente pareja de ecuaciones lineales:

$$\left[\left(1 + \frac{C}{A} \right) K_o^\nabla \right] \frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{C}{A} \cdot \frac{dK_o^\nabla}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + \left(\frac{C}{A} \right) \frac{d^2\beta}{ds^2} - \left[\left(K_o^\nabla \right)^2 \right] \beta + \left(\frac{1}{A} \right) \Delta\theta = 0 \quad (7.3.11.)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^4v}{ds^4} - \left[\frac{T_o}{A} + \frac{C}{A} \left(K_o^\nabla \right)^2 \right] \frac{d^2v}{ds^2} - \left[\frac{C}{A} \cdot \frac{d}{ds} \left(K_o^\nabla \right) \right] \frac{dv}{ds} - \left[\left(1 + \frac{C}{A} \right) K_o^\nabla \right] \frac{d^2\beta}{ds^2} - \left[\frac{1}{A} \right] \Delta Y - \left[\frac{1}{A} \right] \frac{d(\Delta K)}{ds} - \\ & \left[\left(2 + \frac{C}{A} \right) \frac{dK_o^\nabla}{ds} \right] \frac{d\beta}{ds} - \left[\frac{d^2K_o^\nabla}{ds^2} - \frac{T_o}{A} K_o^\nabla \right] \beta = 0 \end{aligned} \quad (7.3.12.)$$

Las ecuaciones 7.3.11. y 7.3.12. junto a las correspondientes condiciones de contorno definen el pandeo lateral-torsional de un arco parabólico con carga uniforme en planta.

El valor de T_o se obtiene de un análisis ordinario lineal de tensiones que no considera la posibilidad de pandeo. Para el caso de arco parabólicos con carga uniforme en planta en el que la carga permanece vertical durante el pandeo y se aplica a lo largo del eje del arco se verifica:

$$\begin{aligned} T_o &= \frac{qL^2}{8h} \sec \phi \\ \Delta Y &= q(\cos \phi)\beta - q(\sin \phi \cos \phi) \cdot \frac{dv}{ds} \\ \Delta K &= \Delta\theta = 0 \end{aligned} \quad (7.3.13.)$$

en donde ϕ queda definido, tal y como se muestra en la Figura 7.3.6.: "Definición de los parámetros que intervienen en el planteamiento de las ecuaciones diferenciales del pandeo fuera del plano", por:

$$tg \phi = \frac{4h}{L^2} \left(\frac{2z}{L} - 1 \right) \quad (7.3.14.)$$

En lo que respecta a las condiciones de contorno, se aplican en el extremo y en la corona del arco.

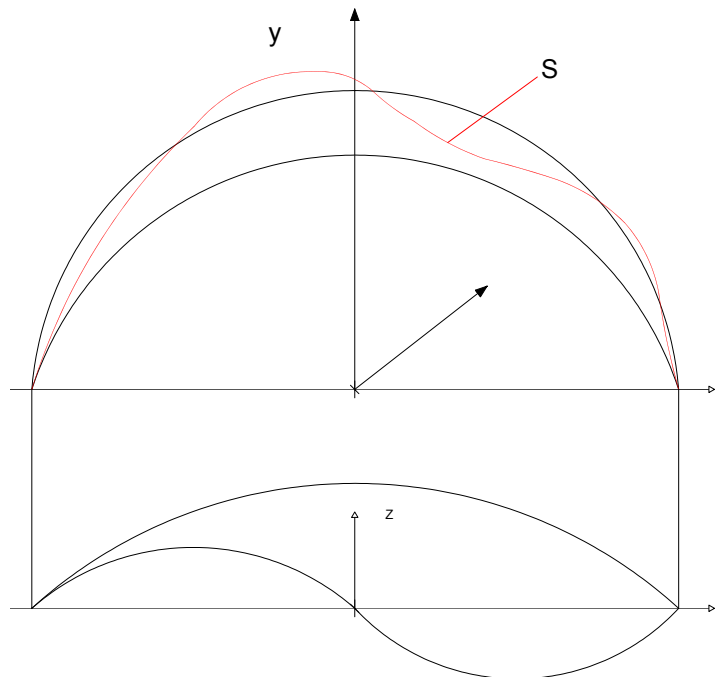
En los apoyos de un arco biempotrado,

$$\beta = v = \frac{dv}{ds} = 0 \tag{7.3.15.}$$

En los apoyos de un arco biapoyado,

$$\beta = v = \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \tag{7.3.16.}$$

En lo que respecta a la corona del arco, las condiciones de contorno dependen de que la forma de pandeo considerada sea simétrica o antisimétrica con respecto a la corona. En la Figura 7.3.17. se representan las formas de pandeo lateral simétrico y antisimétrico del arco con respecto a la corona.



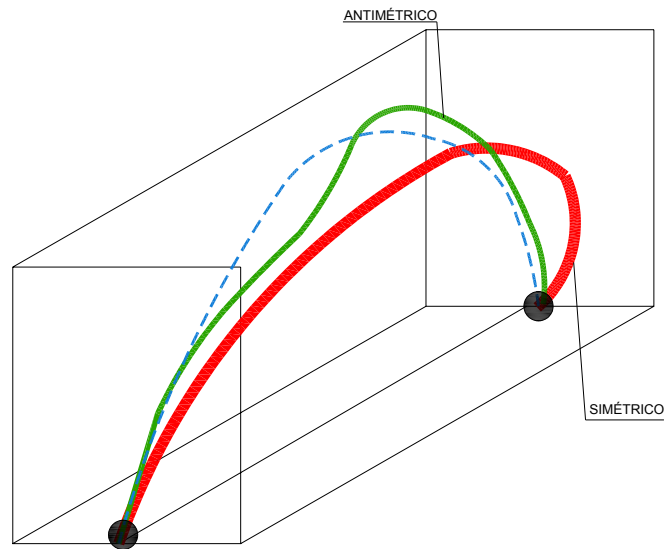


Figura 7.3.17. "Formas de pandeo lateral simétrico y antisimétrico del arco con respecto a la corona."

En el modo de pandeo simétrico con respecto a la corona, se verifica que:

$$\frac{dv}{ds} = 0$$

$$N_o^\nabla = \Delta N_o^\nabla = A \left(K_o^\nabla \frac{d\beta}{ds} + \beta \frac{dK_o^\nabla}{ds} - \frac{d^2v}{ds^2} \right) + CK_o^\nabla \left(\frac{d\beta}{ds} + K^\nabla \frac{dv}{ds} \right) = 0$$

Como $\frac{dK_o^\nabla}{ds} = 0$ (7.3.18.)

$$\left(1 + \frac{C}{A} \right) K_o^\nabla \frac{d\beta}{ds} - \frac{C}{A} \frac{d^3v}{ds^3} = 0$$

$$\frac{1}{2} K_z \beta + C \frac{d\beta}{ds} = 0$$

En el modo antisimétrico se cumple que:

$$\begin{aligned}
 v &= 0 \\
 \beta &= 0 \\
 \frac{1}{2} K_x \frac{dv}{ds} + A \frac{d^2v}{ds^2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.3.19}$$

El estudio del fenómeno de pandeo lateral de arcos parabólicos cargados con carga uniforme en planta se reduce a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (7.3.11.) y (7.3.12.) sometido a unas condiciones de contorno. No existe solución única. La resolución se lleva a cabo aplicando una técnica de "diferencias finitas", de tal forma que la longitud \bar{s} del eje del arco a un punto P que dista \bar{z} de la corona tal y como se muestra en la Figura 7.3.6. viene dada por:

$$\bar{s} = \frac{4h}{L^2} \left\{ z \sqrt{z^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2 \log \left[\frac{z + \sqrt{z^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}}{\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \right] \right\}
 \tag{7.3.20.}$$

El eje del arco se divide en "n" segmentos de igual longitud.

Los valores de \bar{z} correspondientes a los de \bar{s} para varios segmentos se obtienen de la ecuación (7.3.20.) utilizando el Método de Newton de aproximaciones sucesivas.

Con el "Método de Diferencias Finitas" los coeficientes diferenciales de la ecuación (7.3.20.) se reemplazan por diferencias finitas centrales en puntos discretos. Estos reducen las dos ecuaciones a la forma

$$([P] - \lambda[Q])\{x\} = 0 \quad ([P] - \lambda[Q])\{x\} = 0
 \tag{7.3.21}$$

ó

$$[P]\{x\} = \lambda[Q]\{x\}
 \tag{7.3.22}$$

en las que [P] y [Q] son matrices cuadradas cuyos elementos son función de la geometría del arco, {x} es el vector desplazamiento y "λ" el autovalor correspondiente a la carga q.

Si se premultiplica la ecuación (7.3.22.) en ambos términos por $[P]^{-1}$, se obtiene

$$\{J\}\{x\} = \frac{1}{\lambda}\{x\} \quad (7.3.23.)$$

donde $[J] = [P^{-1}][Q]$

La solución no trivial de la ecuación (7.3.23.) que interesa es el autovalor de menor cuantía y su correspondiente autovector. Con el fin de obtener los resultados más exactos se determinan los autovalores correspondientes a tres valores diferentes de "n", (donde "n" es el número de divisiones): 17, 34 y 51. Si λ_{n_1} , λ_{n_2} y λ_{n_3} son los autovalores correspondientes a las divisiones n_1 , n_2 y n_3 , el autovalor extrapolado λ es:

$$\lambda = \left(\frac{n_1^4}{(n_1^2 - n_2^2)(n_3^2 - n_2^2)} \right) \lambda_{n_1} - \left(\frac{n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} \right) \lambda_{n_2} + \left(\frac{n_3^4}{(n_3^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} \right) \quad (7.3.24.)$$

Existe una alternativa de cálculo al presente método que expresa las ecuaciones (7.3.11.) y (7.3.12.) como un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden, el cual se integra numéricamente entre los extremos apoyados y la corona del arco utilizando un método de integración de cuarto orden de Runge-Kutta.

Todas las formas de pandeo simétricas se han calculado usando los dos métodos; las asimétricas se han obtenido utilizando el método de integración.

Los resultados se presentan de forma adimensional, en función de los siguientes parámetros:

- Parámetro crítico de pandeo (menor) $\lambda = \frac{qL^3}{A}$
- Relación flecha-luz $= \frac{h}{L}$
- Relación entre la rigidez a torsión y a flexión $= \frac{C}{A}$
- Parámetro de restricción de la corona $\frac{K_z \cdot L}{C}$ y $\frac{K_x \cdot L}{A}$

Los valores de λ se han obtenido para diferentes valores de C/A , h/L , K_zL/C y k_xL/C .

En las Figuras 7.3.25. y 7.3.26. se representan los valores del parámetro de pandeo λ para diferentes relaciones flecha-luz h/L en función de K_zL/C y C/A tanto para arcos biapoyados como biempotrados.

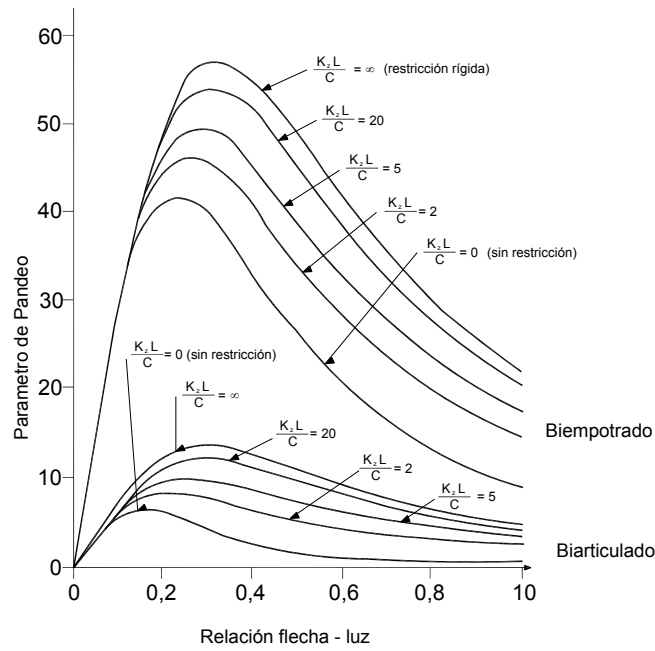


Figura 7.3.25. "Parámetro crítico de pandeo λ frente a la relación flecha-luz para diferentes valores de K_zL/C y con $C/A=1,6$."

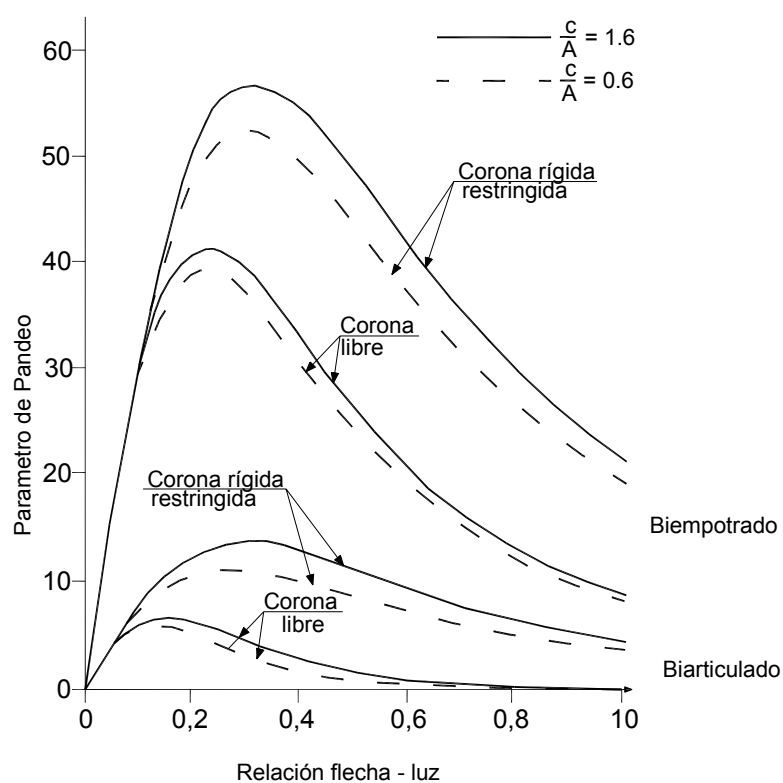


Figura 7.3.26. "Parámetro crítico de pandeo λ frente a la relación flecha-luz para arcos de corona libre o restringida con $C/A=0,6$ Y $1,6$."

En la Figura 7.3.25. se observa el efecto de la rigidez a torsión en el comportamiento a pandeo de los arcos, mientras que en la Figura 7.3.26. se pone de manifiesto el efecto de la restricción de la corona. Asimismo, se concluye que la carga crítica alcanza un valor máximo para relaciones flecha-luz comprendidas entre 0.15 y 0.30 aproximadamente según los ratios C/A , K_2L/C y las condiciones de contorno.

El descenso en la carga crítica de pandeo con los mayores valores de h/L (entre 0.30 y 1.00) parece razonable; el mismo fenómeno con los menores valores de h/L (entre 0 y 0.30) tiene una justificación clara: el valor de T_0 en el arco aumenta muy rápidamente con el decremento de h/L , tal y como se muestra en

la expresión (7.3.13.) $\left(T_0 = \frac{q \cdot L}{8 \cdot h/l} \cdot \text{sen} \phi\right)$, y con ello se precipita el fallo del arco como una columna independiente de los ratios C/A o k_2L/C .

En las tablas 7.3.27. y 7.3.28. se tabulan parte de los resultados mostrados anteriormente en las Figuras 7.3.25. y 7.3.26. reflejando el caso de los arcos con corona libre sin restricciones para arcos tanto biapoyados como biempotrados. Se incluyen los parámetros de pandeo tanto simétrico como antimétrico, resultando en todos los casos el modo simétrico el de menor valor.

h/L (1)	C/A					
	0,6 (2)	0,8 (3)	1,0 (4)	1,2 (5)	1,4 (6)	1,6 (7)
0.1	5.760 (27.58)	5.903 (27.75)	5.992 (27.85)	6.052 (27.92)	6.097 (27.97)	6.130 (28.00)
0.2	5.334 (39.64)	5.754 (40.39)	6.051 (40.86)	6.245 (41.19)	6.401 (41.43)	6.523 (41.62)
0.3	3.183 (39.99)	3.603 (41.23)	3.913 (42.06)	4.151 (42.66)	4.339 (43.14)	4.492 (43.53)
0.4	1.726 (36.17)	2.027 (37.65)	2.263 (38.72)	2.454 (39.55)	2.611 (40.25)	2.743 (40.87)
0.5	0.9494 (31.69)	1.145 (33.28)	1.306 (34.49)	1.441 (35.50)	1.556 (36.40)	1.655 (37.22)
0.6	0.5463 (27.66)	0.6713 (29.26)	0.7781 (30.56)	0.8705 (31.72)	0.9511 (32.76)	1.022 (33.74)
0.7	0.3308 (24.26)	0.4123 (25.87)	0.4838 (27.23)	0.5471 (28.45)	0.6036 (29.59)	0.6539 (30.68)
0.8	0.2114 (21.46)	0.2665 (23.05)	0.3156 (24.43)	0.3589 (25.82)	0.3999 (26.88)	0.4363 (28.00)
0.9	0.1458 (19.15)	0.1851 (20.71)	0.2205 (22.08)	0.2528 (23.34)	0.2823 (24.52)	0.3096 (25.71)
1.0	0.1176 (17.23)	0.1486 (18.74)	0.1765 (20.08)	0.2070 (21.30)	0.2256 (22.44)	0.2476 (23.51)

Tabla 7.3.27. "Parámetro crítico de pandeo λ para valores de h/L comprendidos entre 0,10 y 1,00 con diferentes valores de C/A para arcos libres biarticulados. (El valor entre paréntesis se refiere al modo de pandeo antimétrico)."

h/L (1)	C/A					
	0,6 (2)	0,8 (3)	1,0 (4)	1,2 (5)	1,4 (6)	1,6 (7)
0.1	27.70 (58.68)	27.87 (58.86)	27.97 (58.97)	28.044 (59.05)	28.09 (59.10)	28.13 (59.14)
0.2	39.16 (90.67)	39.84 (91.67)	40.29 (92.29)	40.60 (92.72)	40.84 (93.03)	41.03 (93.27)
0.3	37.17 (96.13)	38.07 (98.06)	38.72 (99.31)	39.20 (100.2)	39.58 (100.9)	39.88 (101.4)
0.4	30.70 (88.57)	31.49 (91.06)	32.08 (92.77)	32.55 (94.06)	32.93 (95.11)	33.24 (95.99)
0.5	24.32 (77.58)	24.90 (80.29)	23.36 (82.27)	25.74 (83.85)	26.05 (85.19)	26.32 (86.38)
0.6	19.20 (67.00)	19.61 (69.80)	19.94 (71.93)	20.21 (73.72)	20.45 (75.30)	20.66 (76.75)
0.7	15.31 (58.00)	15.59 (60.75)	15.82 (62.98)	16.02 (64.92)	16.20 (66.62)	16.36 (68.34)
0.8	12.38 51.56	12.58 (53.28)	12.75 (55.56)	12.90 (57.60)	13.03 (59.49)	13.14 (61.28)
0.9	10.18 (44.49)	10.32 (47.16)	10.45 (49.45)	10.55 (51.55)	10.65 (53.51)	10.74 (55.38)
1.0	8.508 (39.52)	8.616 (42.13)	8.710 (44.42)	8.793 (46.53)	8.869 (48.51)	8.939 (50.40)

Tabla 7.3.28. "Parámetro crítico de pandeo λ para valores de h/L comprendidos entre 0.10 y 1.00 con diferentes valores de C/A para arcos biempotrados (el valor entre paréntesis se refiere al modo de pandeo asimétrico)."

En las dos tablas anteriormente citadas se recogen parte de los resultados obtenidos por **TOKARZ** y **SANDHÚ** en lo que respecta al pandeo elástico lineal lateral de arcos parabólicos. Estos se utilizan para validar los modelos empleados en el desarrollo de la presente Tesis.

Tal y como se describe con detalle en el apartado 7.2.: "Un repaso a la inestabilidad elástica lineal global de arcos en su plano. Validación del modelo de

cálculo”, la determinación en la presente Tesis de la carga crítica elástica lineal global lateral de los arcos se lleva a cabo utilizando el método de los autovalores con ayuda de los ordenadores. Se ha calculado para diferentes casos de luz y flecha el valor de la carga crítica de pandeo elástica lineal global lateral del arco utilizando los modelos de BEAM y SHELL. Estos resultados se comparan con los obtenidos por Tokarz y Sandhú para comprobar su validez.

Las luces empleadas son 20, 25, 30, 35 y 40 m para relaciones flecha-luz de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. La sección transversal, al igual que en los cálculos realizados en el plano, es un cajón cuadrado de 40 x 40 cm con un espesor uniforme de 1 cm.

En primer lugar se va hacer referencia a la modelización realizada con elementos BEAM. Es de aplicación lo indicado en el Apartado 7.2. referente a la directriz parabólica del arco, las características mecánicas de la sección y las características del material de acero. Se incluye en la Figura 7.3.29. un esquema con los datos más relevantes necesarios para el cálculo.

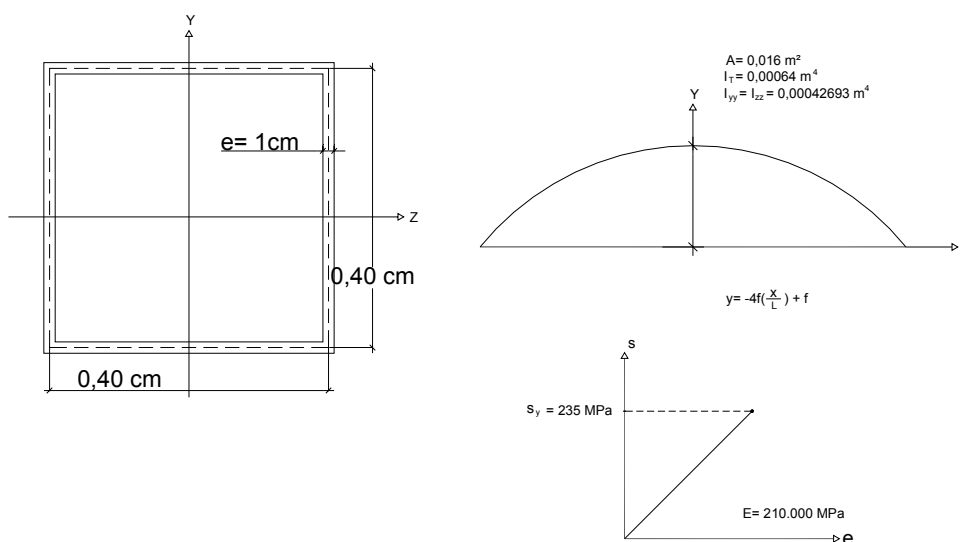


Figura 7.3.29. "Directriz parabólica de arco, características mecánicas de la sección y características del material acero."

A continuación se presentan dos tablas que recogen los resultados obtenidos en la presente Tesis utilizando un modelo con elementos BEAM 4 en función de la longitud del arco y de la relación flecha-luz, las cuales se resumen en las Figuras 7.3.30. y 7.3.31.

ARCO BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	6,4880	3,322	1,922	1,211	0,8110
0,2	6,0690	3,107	1,798	1,132	0,7586
0,3	3,652	1,87	1,082	0,6813	0,4564
0,4	1,991	1,019	0,58	0,3715	0,2489
0,5	1,099	0,5627	0,3256	0,2051	0,1373

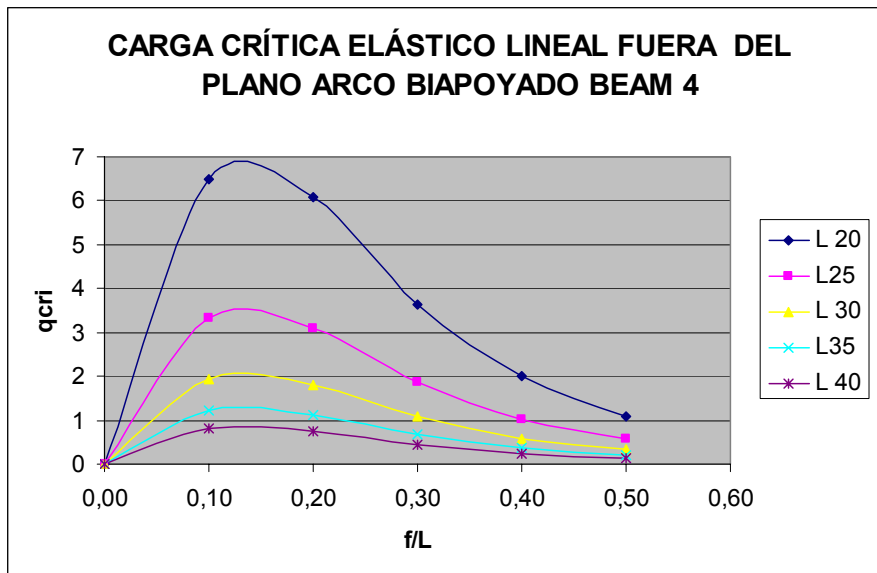


Figura 7.3.30. "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biapoyado modelizado con elementos BEAM 4."

ARCO BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	33,2710	16,629	9,496	5,932	3,953
0,2	44,6640	22,745	13,124	8,25	5,521
0,3	42,032	21,479	12,417	7,814	5,233
0,4	34,619	17,709	10,244	6,449	4,319
0,5	27,386	14,015	8,109	5,106	3,42

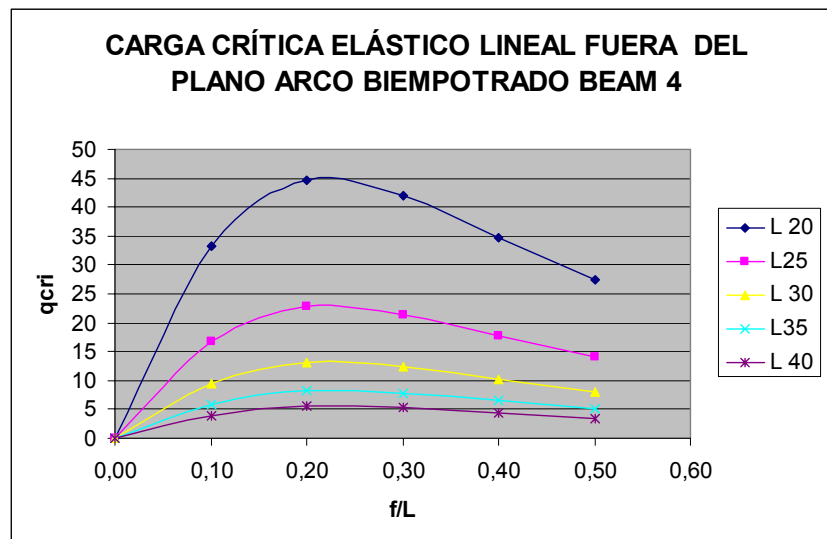


Figura 7.3.31. "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biempotrado modelizado con elementos BEAM 4."

La investigación realizada por TOKARZ y SANDHÚ en 1.972 recogida en las tablas 7.3.27. y 7.3.28. arroja los siguientes valores de carga crítica de pandeo elástico lineal global lateral para arcos tanto biapoyados como biempotrados (Figuras 7.3.32. y 7.3.33.)

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	6,4552	3,3051	1,9126	1,2045	0,8069
0,2	5,9778	3,0606	1,7712	1,1154	0,7472
0,3	3,5672	1,8264	1,0569	0,6656	0,4459
0,4	1,9343	0,9904	0,5731	0,3609	0,2418
0,5	1,0640	0,5448	0,3153	0,1985	0,1330

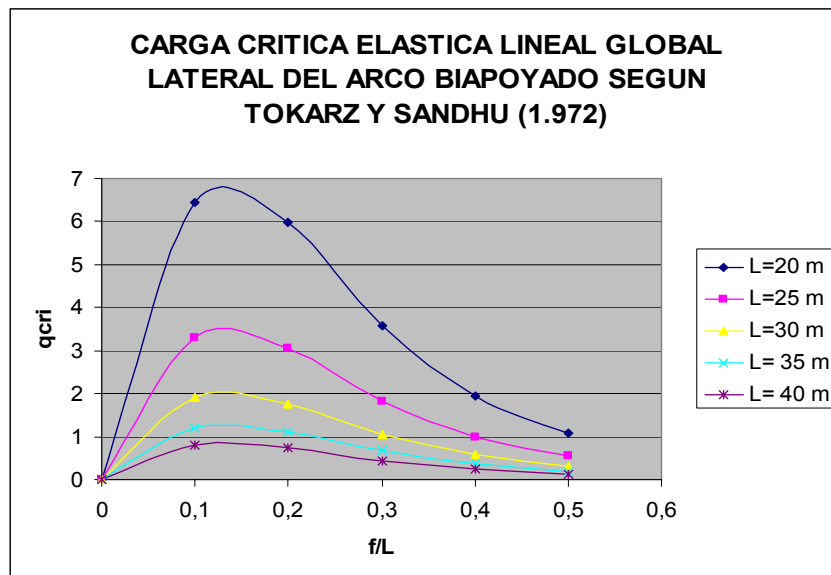


Figura 7.3.32. "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biapoyado según Tokarz y Sandhú (1.972)."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	31,0431	15,8941	9,1980	5,7923	3,8804
0,2	43,8863	22,4698	13,0033	8,1887	5,4858
0,3	41,6561	21,3279	12,3425	7,7726	5,2070
0,4	34,4052	17,6155	10,1941	6,4196	4,3007
0,5	27,2552	13,9547	8,0756	5,0855	3,4069

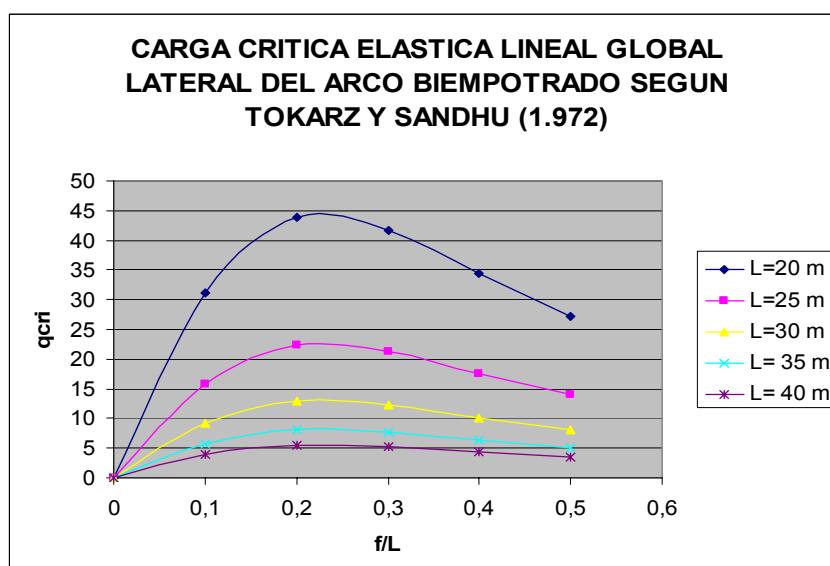


Figura 7.3.33. "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biempotrado según Tokarz y Sandhú (1.972)."

Si se analizan las diferencias existentes entre los valores calculados en la presente Tesis y los obtenidos por Tokarz y Sandhú en 1.972 se observa, al igual que ocurría con la carga crítica elástica lineal en el plano, que son mínimas y se encuentran dentro de los límites admisibles.

Para el caso de los arcos biapoyados, la diferencia existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos BEAM y los obtenidos por Tokarz y Sandhú en 1.972 relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación, se recoge en la siguiente tabla:

ARCO BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	0,51%	0,51%	0,49%	0,54%	0,51%
0,2	1,50%	1,49%	1,49%	1,47%	1,51%
0,3	2,32%	2,33%	2,32%	2,31%	2,31%
0,4	2,85%	2,81%	2,86%	2,86%	2,86%
0,5	3,19%	3,19%	3,19%	3,19%	3,19%

En la Figura 7.3.34. se representa la comparativa entre la carga crítica de pandeo elástico lineal global lateral del arco biapoyado obtenida por Tokarz y Sandhú en 1.972 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM 4 en Ansys.

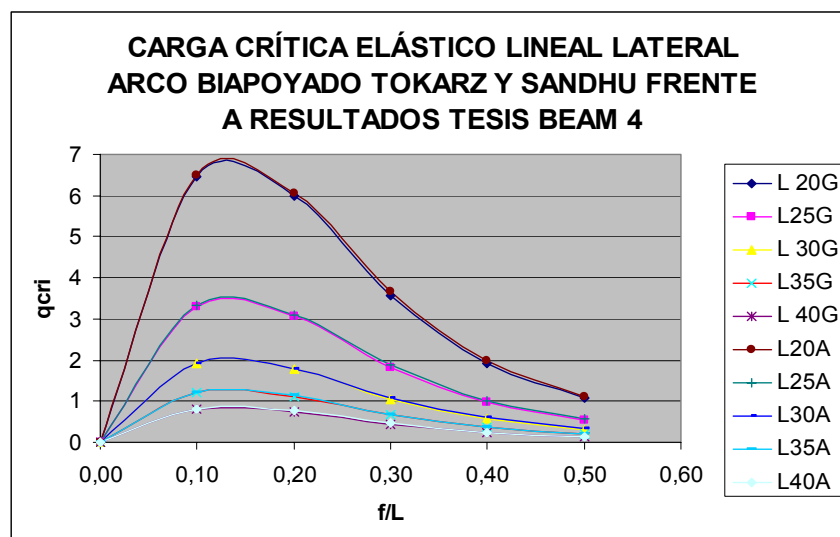


Figura 7.3.34. "Comparativa entre la carga crítica de pandeo elástico lineal global lateral del arco biapoyado obtenida por Tokarz y Sandhú en 1.972 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys."

Se puede concluir lo siguiente:

- Las diferencias porcentuales son muy reducidas para todas las longitudes y relaciones flecha-luz, siendo el mayor valor 3,19%, correspondiente a la relación $f/L=0,5$ para todas las longitudes.
- Las pequeñas diferencias existentes entre los valores de carga crítica calculados por Tokarz y Sandhú en 1.972 y los calculados en la presente Tesis, al igual que ocurría para la carga crítica en el plano, se deben a que en el primer caso se desprecia el acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo, y en el segundo no. Por ello los resultados obtenidos en Ansys son más exactos, y coinciden con los propuestos por Tokarz y Sandhú en arcos con pequeñas relaciones f/L (0,1-0,2) y difieren ligeramente en los de mayor relación f/L (0,3-0,5). Esto se confirma con la comparativa realizada, de la que se deduce que la diferencia entre los valores de la carga decrece con el aumento de la luz y de la relación flecha-luz del arco.

Si se analizan los arcos biempotrados, la diferencia existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo BEAM y los obtenidos por Tokarz y Sandhú en 1.972 relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación se indica en la siguiente tabla:

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	6,70%	4,42%	3,14%	2,35%	1,84%
0,2	1,74%	1,21%	0,92%	0,74%	0,64%
0,3	0,89%	0,70%	0,60%	0,53%	0,50%
0,4	0,62%	0,53%	0,49%	0,46%	0,42%
0,5	0,48%	0,43%	0,41%	0,40%	0,38%

En la Figura 7.3.35. se representa la comparativa entre la carga crítica de pandeo elástico lineal global lateral del arco biempotrado obtenida por Tokarz y Sandhú en 1.972 y calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.

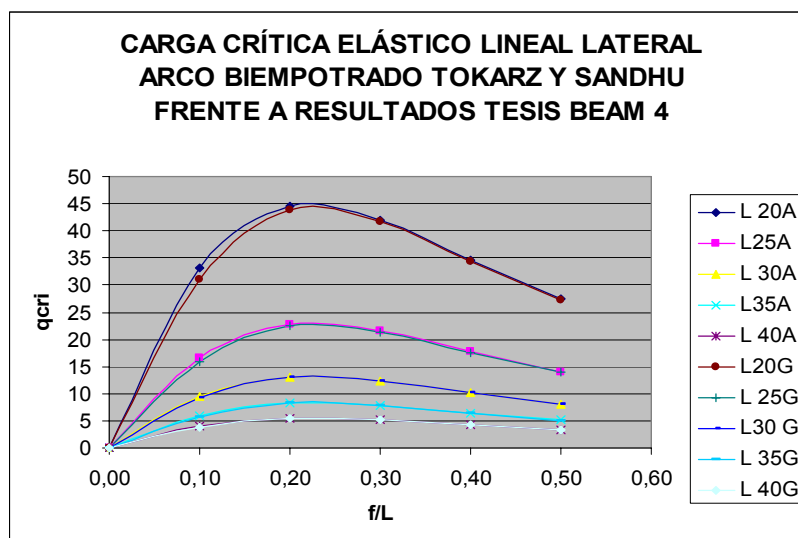


Figura 7.3.35. "Comparativa entre la carga crítica de pandeo elástico lineal global del arco biempotrado obtenida por Tokarz y Sandhú en 1.972 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys."

Se destacan las siguientes conclusiones:

- Las diferencias porcentuales son reducidas y se encuentran dentro de los límites admisibles. Sólo para el arco de 20 m de longitud y relación flecha-luz 0,10 la diferencia es superior al 5% (6.70%).
- Al igual que en el caso de arcos biapoyados, las diferencias existentes se deben a que en los cálculos de Tokarz y Sandhú se desprecia el acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo y en los de la presente Tesis no: cuanto más esbelto es el arco, las flexiones provocadas por los acortamientos por axil son menores y las diferencias se hacen casi nulas. Por ello, el valor absoluto de la diferencia decrece con el aumento de la luz del arco y de la relación flecha-luz.

Una vez comentados los resultados obtenidos con elementos BEAM, se hace a continuación referencia a la modelización realizada con elementos SHELL. Es de aplicación todo lo indicado anteriormente en la modelización con elementos BEAM relativo a la directriz del arco, sección transversal, características mecánicas de la sección transversal, propiedades del material acero e inexistencia de imperfecciones geométricas. Los cálculos se realizan para los casos de arco

biapoyado y biempotrado, tal y como se describe en el subapartado 5.4.2. "Condiciones de contorno de los modelos de estudio. Elemento SHELL 43".

Los resultados obtenidos se presentan a continuación agrupados por la longitud del arco y la condición de contorno y se resumen en la Figuras 7.3.36. y 7.3.37.

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	6,254	3,236	1,857	1,197	0,8050
0,2	5,296	2,848	1,696	1,087	0,7374
0,3	3,344	1,802	0,9967	0,6438	0,4388
0,4	1,80	0,9745	0,5545	0,3491	0,2386
0,5	0,9346	0,4877	0,2963	0,1925	0,1317

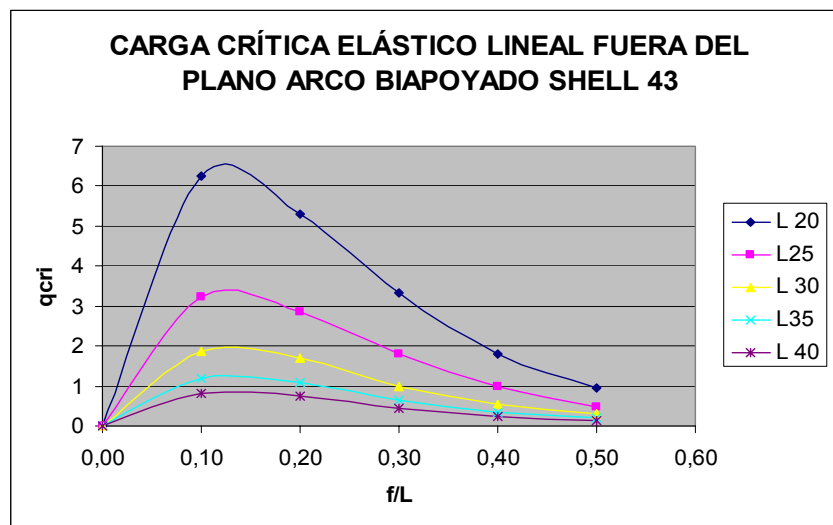


Figura 7.3.36.: "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biapoyado modelizado con elementos SHELL 43."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	31,1250	15,901	8,843	5,789	3,878
0,2	39,3010	20,818	12,295	8,175	5,524
0,3	36,096	19,299	11,462	7,34	4,975
0,4	29,921	15,959	9,926	6,06	4,106
0,5	24,061	12,761	7,547	5,023	3,262

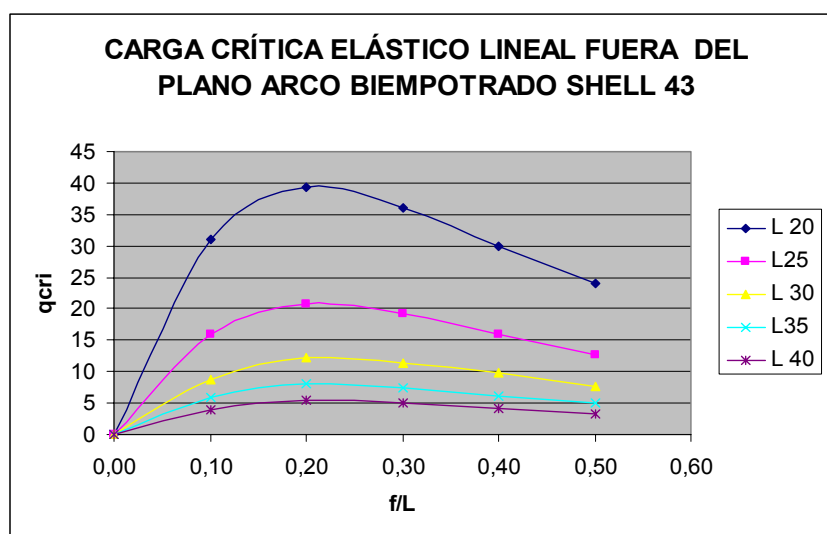


Figura 7.3.37. "Valor de la carga crítica elástica lineal global lateral del arco biempotrado modelizado con elementos SHELL 43."

Si se analizan las diferencias existentes entre los valores calculados con el modelo SHELL y aquellos obtenidos por Tokarz y Sandhú en 1.972 (Figuras 7.3.32. y 7.3.33.) se observa que son pequeñas y que se encuentran dentro de los límites admisibles.

Para el caso de arcos biapoyados, la diferencia existente entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo SHELL y los obtenidos por Tokarz y Sandhú en 1.972 relativa a los valores obtenidos según los cálculos de investigación se indica en la siguiente tabla:

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	-3,22%	-2,13%	-3,00%	-0,62%	-0,24%
0,2	-12,87%	-7,47%	-4,43%	-2,61%	-1,33%
0,3	-6,67%	-1,35%	-6,05%	-3,39%	-1,62%
0,4	-7,46%	-1,63%	-3,36%	-3,39%	-1,35%
0,5	-13,84%	-11,69%	-6,41%	-3,15%	-0,98%

Si se trata de arcos biempotrados, la diferencia en porcentaje viene dada por:

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%
0,1	0,26%	0,04%	-4,01%	-0,06%	-0,06%
0,2	-11,67%	-7,93%	-5,76%	-0,17%	0,69%
0,3	-15,40%	-10,51%	-7,68%	-5,89%	-4,66%
0,4	-14,99%	-10,38%	-2,70%	-5,93%	-4,74%
0,5	-13,28%	-9,35%	-7,00%	-1,24%	-4,44%

De todo ello se concluye:

- Tanto para los arcos biapoyados como para los biempotrados, en general, los valores de las diferencias porcentuales son superiores para la modelización con elementos SHELL que para aquella con elementos BEAM, ya que el modelo con elementos SHELL 43 tipo lámina permite un mayor acercamiento a la realidad que aquel con elementos tipo BEAM 4 (modelo "espacial" frente a modelo "lineal").

- Los mayores valores porcentuales corresponden a los arcos de menor longitud (con L=20 m, 13,84% para el arco biapoyado y 14,99% para el arco biempotrado), lo que se justifica por el hecho anteriormente comentado de que en los cálculos de Tokarz y Sandhú se desprecia el acortamiento por axil del arco y los momento derivados del mismo y en los de la presente Tesis no. Las diferencias porcentuales decrecen con el aumento de la luz.

- Los valores porcentuales son superiores para el caso de arco biempotrado que para el caso de arco biapoyado.

Al igual que se determinó para los cálculos en el plano del arco, se han obtenido para las diferentes longitudes de arco y relaciones flecha-luz los valores de los axiles en los arranques, con el fin de certificar y validar los modelos empleados.

Se incluyen a continuación otras tablas con los axiles obtenidos para los diferentes cálculos del arco fuera del plano.

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos BEAM 4

ARCO BIAPOYADO

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	174,694746	111,809484	77,6271507	57,0625526	43,6762715
0,2	97,1514025	62,1703344	43,1730652	31,7114728	24,2882988
0,3	47,5383864	30,427431	21,1267254	15,5208308	11,8831387
0,4	23,4788205	15,0206668	10,4359525	7,66722347	5,870224
0,5	12,2871935	7,86397157	5,46098112	4,01214044	3,07179838

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos SHELL 43

ARCO BIAPOYADO

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	168,394104	108,914958	75,0018829	56,4028699	43,3491766
0,2	84,7773649	56,9878057	40,7238702	30,4508577	23,6090874
0,3	43,5291249	29,320979	19,4605648	14,6652407	11,4234794
0,4	21,2264575	14,3650494	9,80851608	7,20431865	5,62642635
0,5	10,4491457	6,81647155	4,96856541	3,76565307	2,94503569

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos BEAM 4

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	895,849091	559,68691	383,531438	279,516979	212,875565
0,2	714,972852	455,122065	315,129759	231,112765	176,758245
0,3	547,134024	349,492402	242,449676	178,002099	136,236789
0,4	408,243741	261,041206	181,203193	133,086941	101,863411
0,5	306,184788	195,865579	135,992064	99,9019271	76,4735248

Valor de N_{cri} . Cálculo elástico lineal con elementos SHELL 43**ARCO BIEMPOTRADO**

f/L	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0,1	838,066273	535,18441	357,157593	272,778792	208,836691
0,2	629,122964	416,563251	295,224047	229,01174	176,854291
0,3	469,864621	314,020851	223,802704	167,204428	129,519974
0,4	352,842687	235,245164	175,578181	125,059212	96,8398163
0,5	269,010158	178,340397	126,567038	98,2779827	72,9405374

En todos los casos el valor del axil decrece con el aumento de la longitud y de la relación flecha-luz, lo que confirma la fiabilidad de los cálculos realizados.

Así pues, tanto para la modelización con elementos BEAM como para la modelización con elementos SHELL se pone de manifiesto la validez de los modelos de cálculo empleados y la veracidad de los resultados que arroja.

8. INESTABILIDAD ELÁSTICA NO
LINEAL GLOBAL LATERAL DE
ARCOS

8. INESTABILIDAD ELÁSTICA NO LINEAL GLOBAL LATERAL DE ARCOS

8.1. HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS DE UN CÁLCULO DE INESTABILIDAD ELÁSTICA NO LINEAL GLOBAL

El comportamiento NO LINEAL de una estructura permite la aplicación del sistema de cargas exteriores sobre la deformada real existente en cada estadio de cargas considerado, obteniendo unos resultados más reales que los proporcionados por el cálculo lineal geométrico.

Para realizar un cálculo de inestabilidad elástica no lineal es necesario adoptar las siguientes hipótesis simplificativas de partida:

- El material es elástico
- El arco es extensible: aparecen momentos debidos a los giros generados por el acortamiento por axil
- Se considera el cambio de forma de la geometría por los momentos de primer y segundo orden
- Se desprecian las deformaciones producidas por el cortante

Este análisis supone un paso más hacia la simulación de la realidad, aunque no se considera el comportamiento no lineal del material y las tensiones residuales. Por tanto, sigue siendo un método teórico simplificado.

8.2. ESTADO DEL ARTE

Se incluye a continuación una relación de estudios realizados por diferentes autores en la segunda mitad del siglo XX que tratan algunos aspectos y ejemplos de cálculos elásticos no lineales de arcos.

En 1.969 **WALKER** llevó a cabo el estudio del comportamiento de un arco circular de sección cajón sometido a una carga vertical puntual bajo la hipótesis

de cálculo elástico no lineal con grandes deformaciones utilizando el método de elementos finitos de Rayleigh-Retz. Las ecuaciones algebraicas no lineales se resolvieron por medio de los métodos de Taylor y Newton-Raphson. En 1.972 **EBNER** y **ULCIFERRO** realizaron una comparación teórica y numérica de cinco formulaciones de elementos finitos enfocadas al análisis elástico no lineal de estructuras planas, concluyendo la viabilidad de cada método empleado y sus condiciones de aplicación.

En 1.973 **MAK** y **DER-WANG KAO** desarrollaron un "refinado" método de elementos finitos que permitiese analizar el comportamiento precrítico y postcrítico de pandeo de arcos con imperfecciones geométricas iniciales.

En 1.981 **WEN** y **LANGE** estudiaron un método de elementos finitos que calculase el comportamiento de una viga curva plana deformable en el espacio bajo la hipótesis de no linealidad geométrica.

En 1.982 **CALHOUN** y **DADEPPO** prepararon un método de elementos finitos para analizar el comportamiento elástico no lineal de los arcos biempotrados bajo el supuesto de grandes deformaciones y cargas aplicadas tanto puntuales como uniformemente distribuidas.

En 1.983 **WEN, ASCE** y **RAHIMZADEH** desarrollaron un método de elementos finitos para estructuras espaciales bajo la hipótesis de cálculo elástico no lineal con cargas aplicadas únicamente en los nodos.

En 1.985 **PAPANGELIS** y **TRAHAIR** presentaron una teoría del pandeo flexotorsional de arcos circulares de sección transversal con doble eje de simetría sometidos a dos momentos de igual valor y de sentido contrario en los extremos o a una carga radial uniformemente distribuida. Se desarrolla en el supuesto de no linealidad geométrica.

Por último, en 1.994 **PI** y **TRAHAIR** estudiaron un modelo de elementos finitos "tridimensional" para aplicar a arcos con comportamiento elástico no lineal en las hipótesis de carga puntual centrada en toda la longitud del arco, sección transversal con doble eje de simetría y sin distorsión ni pandeo local y grandes deformaciones y giros.

Así pues, se observa que aunque varios autores han tratado el cálculo de arcos bajo la hipótesis de material elástico y no linealidad geométrica, ninguno de ellos lo hace en las condiciones de arco parabólico con imperfecciones geométricas iniciales, carga uniformemente distribuida y desde el punto de vista del pandeo lateral, lo que no permite cotejar los resultados obtenidos con la modelización realizada en la presente Tesis.

8.3. CÁLCULOS DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El análisis de pandeo lateral no lineal a través del método de los elementos finitos realiza un análisis no lineal geométrico de la estructura, incrementando gradualmente la carga hasta encontrar el valor que hace la estructura inestable.

La no linealidad geométrica rompe con el planteamiento clásico de la resistencia de materiales de admitir que las deformaciones y los desplazamientos producidos en una estructura son pequeños. Considera que la geometría de los elementos varía durante la actuación de las fuerzas exteriores y que las relaciones entre deformaciones y desplazamientos y tensiones y deformaciones no son lineales.

En la práctica en gran número de ocasiones se cumple la no linealidad geométrica. En lo que respecta a la carga de colapso de los arcos, puede ocurrir que aparezca una carga a partir de la cual los desplazamientos aumenten mucho más rápidamente al incrementar la carga de lo que predice la situación lineal (problema de grandes deformaciones); o puede alcanzarse un estado para el que la carga que pueda resistir la estructura disminuya al aumentar la deformación (problema de estabilidad o pandeo). Ambas consideraciones hay que tenerlas en cuenta en el estudio de carga última para determinar su incidencia en el cálculo de la misma.

En la Figura 8.3.1. se muestra el diagrama típico carga-desplazamiento para la solución lineal, con el punto de bifurcación, así como el resultado de hacer el cálculo de manera no lineal. En este último caso es necesario darle al arco una deformada inicial que excite el camino hacia la inestabilidad.

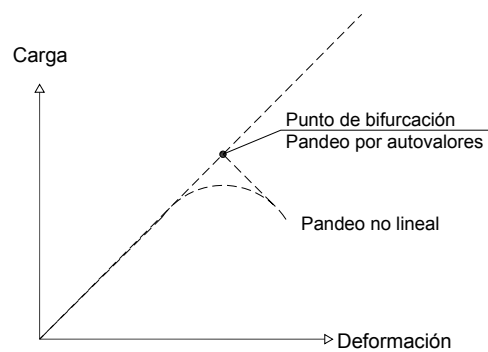


Figura 8.3.1. "Diagrama carga-deformación del pandeo lateral lineal y no lineal."

En un análisis no lineal del pandeo lateral, el objetivo es encontrar el primer punto límite, que es aquel con mayor valor de la carga para el que la solución se vuelve inestable. Así pues, el resultado que se obtiene con este cálculo es más aproximado a la realidad que el proporcionado por el método de los autovalores, aunque se continúa obviando el comportamiento elastoplástico del material acero.

El método de cálculo empleado en la presente Tesis para los análisis no lineales es el de Newton-Raphson, que es un procedimiento iterativo que permite la resolución de un sistema de ecuaciones.

Sea

$$[k]\{a\} = \{F^a\} \quad (8.3.2.)$$

el sistema de ecuaciones que regula el comportamiento de una estructura aplicando el método de los elementos finitos, donde $[k]$ es la matriz de coeficientes, $\{a\}$ el vector de desplazamientos desconocido y $\{F^a\}$ el vector de cargas aplicadas.

Si la matriz $[k]$ es función de los desplazamientos desconocidos, la ecuación (8.3.2.) se convierte en "no lineal" y es necesario un proceso iterativo como el método de Newton-Raphson para su resolución.

La ecuación (8.3.2.) se puede escribir:

$$[k_i^T] \{\Delta a_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (8.3.3.)$$

donde

$[k_i^T]$ es la matriz de rigidez tangente, "i" representa el número de iteración, $\{F_i^{nr}\}$ es el vector de cargas residual correspondiente a las cargas internas del elemento y $\{\Delta a_i\} = \{a_{i+1}\} - \{a_i\}$.

Fijado el valor de $\{a_i\}$ se calculan $[k_i^T]$ y $[F_i^{nr}]$.

Si se realiza una sola iteración para resolver el problema, la solución única se muestra en la Figura 8.3.4.

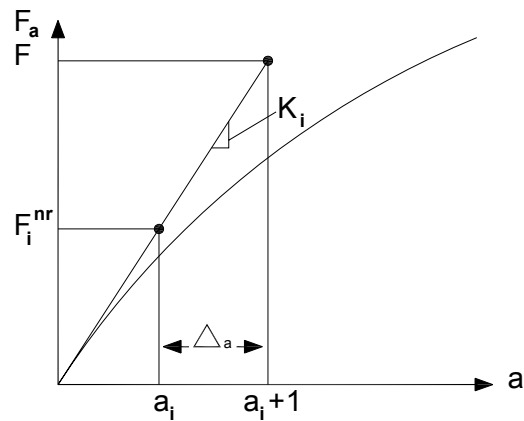


Figura 8.3.4.: "Una iteración del método de Newton-Raphson."

Es obvio que es necesaria más de una iteración de Newton-Raphson para obtener una solución que converja. El algoritmo general consiste en:

- a) Suponer un $\{a_0\}$, que es la solución convergente del paso previo; en el primer paso se toma $\{a_0\} = \{0\}$.
- b) Calcular la matriz tangente $[k_i^T]$ actualizada y la carga actualizada $\{F_i^{nr}\}$ para la configuración $\{a_i\}$.
- c) Calcular $\{\Delta a_i\}$ de la ecuación (8.3.3.)

d) Calcular $\{a_{i+1}\} = \{a_i\} - \{\Delta a_i\}$ (8.3.5.)

e) Repetir los pasos del b) al d) hasta que se produzca la convergencia.

En la Figura 8.3.6. se muestra la solución de la siguiente iteración (i+1)

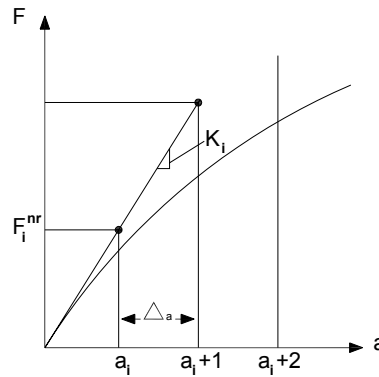


Figura 8.3.6.: "Solución de Newton-Raphson. Siguiete iteración."

La solución obtenida al final del proceso es el nivel de carga $\{F^a\}$ y debe estar en equilibrio, tal que el vector restaurado de cargas $\{F_i^{nr}\}$ sea igual que el vector de cargas $\{F^a\}$ con cierta tolerancia. Ninguna solución intermedia estará en equilibrio.

Este proceso se realiza hasta que se alcanza la convergencia, lo que implica que:

$$\| \{R\} \| < E_R R_{ref} \tag{8.3.7.}$$

y/o

$$\| \{\Delta a_i\} \| < E_n \cdot a_{ref} \tag{8.3.8.}$$

donde $\{R\}$ es el vector residual de valor

$$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\} \tag{8.3.9.}$$

y $\{\Delta ai\}$ el vector de incremento de los grados de libertad, ϵ_R y ϵ_n son tolerancias y R_{ref} y a_{ref} son valores de referencia. $\|\cdot\|$ es un vector de norma. La convergencia se obtiene si el tamaño del residuo es menor que un valor de tolerancia y/o cuando el tamaño de los incrementos de desplazamientos es menor que un valor de referencia.

El ANSYS permite utilizar 3 tipos de normas:

a. Norma infinita

$$\|R\|_{\infty} = \max |R_i| \quad (8.3.10.)$$

b. Norma L1

$$\|\{R\}\|_1 = \sum |R_i| \quad (8.3.11.)$$

c. Norma L2

$$\|\{R\}\|_2 = (\sum R_i^2)^{1/2} \quad (8.3.12.)$$

Para la convergencia de los incrementos de desplazamiento se sustituye Δa por R en las ecuaciones anteriores. La norma infinita es el máximo valor en el vector; la norma L1 es la suma del valor absoluto de los términos; la norma L2 es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los términos.

En la presente Tesis se utiliza la NORMA L2, y para R_{ref} se toma como valor $\|\{F^a\}\|$.

La curva carga-deformación permite determinar si lo que se ha producido es una inestabilidad física o un problema numérico. La falta de convergencia del programa de cálculo no tiene por qué implicar que se haya alcanzado la máxima carga. La matriz de rigidez tangente K_T debe tender a cero cuando la estructura se aproxime a la carga de pandeo; así se puede determinar si la inestabilidad es numérica o física.

En lo que respecta al modelo de cálculo empleado para estudiar el comportamiento no lineal en la hipótesis de material elástico se recurre a la modeli-

zación con elementos lineales tipos "BEAM" definida en el apartado 5.2.: "Modelización del arco con elementos BEAM".

8.4. CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO ELÁSTICO NO LINEAL OBTENIDAS EN LA PRESENTE TESIS. COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON EL CÁLCULO CLÁSICO

Tal y como se ha comentado con anterioridad a lo largo del presente capítulo, pocos autores han estudiado en profundidad el pandeo elástico no lineal fuera del plano de arcos sometidos a una carga uniforme en planta; y menos se han prodigado en la elaboración de tablas con datos que permitan cotejar los resultados obtenidos.

Así pues, en primer lugar se estudian las cargas críticas de pandeo en el plano y se validan con datos obtenidos por autores estudiosos del tema, y a continuación se obtienen los valores correspondientes fuera del plano, realizando un análisis crítico de los mismos.

8.4.1. Cargas críticas de pandeo elástico no lineal en el plano

Se ha calculado para diferentes casos de luz y flecha el valor de la carga crítica de pandeo elástico no lineal en el plano del arco utilizando un modelo lineal con elementos "BEAM". Estos resultados se comparan con los obtenidos por Austin y Ross en 1.976.

Las luces empleadas son 10, 20, 25, 30, 35 y 40 m para relaciones flecha-luz de 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 y 0,5. La sección transversal es la que se ha utilizado para todos los cálculos elástico-lineales: un cajón cuadrado de 40x40 cm con un espesor uniforme de 1 cm.

La modelización realizada con elementos BEAM se realiza conforme a lo indicado en el apartado 7.2. "Un repaso a la inestabilidad elástica lineal global de arcos en su plano. Validación del modelo de cálculo de la presente Tesis" en todo lo relativo a la geometría y características del material.

A todo ello se debe añadir la necesidad de considerar una imperfección geométrica inicial que excite la deformación en el plano y permita que el arco alcance su carga última de pandeo no lineal.

La imperfección geométrica inicial, coincidente con la que se indica en la RPM-95, es la definida en el apartado 4.7.5. "Imperfección geométrica adoptada en la presente Tesis" de la presente Tesis:

$$y(x) = \frac{L}{1.000} \cdot \text{sen} \frac{2\pi x}{L} \tag{8.4.1.1.}$$

Por último, se considera la "no linealidad geométrica", permitiendo un cálculo con grandes deformaciones. Tal y como se describe con detalle en el apartado anterior, el método empleado para resolver el problema matemático es el de Newton-Raphson.

En la Figura 8.4.1.2. se incluye un resumen de las características del arco utilizado en los cálculos de la presente Tesis.

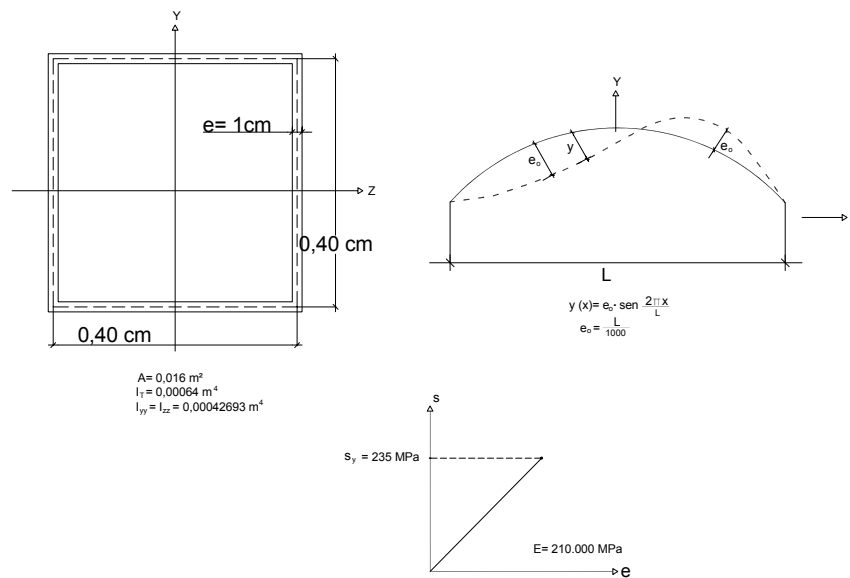


Figura 8.4.1.2. "Características del arco empleado en los cálculo elásticos no lineales relativos a la inestabilidad en el plano."

Los cálculos se realizan para los casos de arco biapoyado y arco biempotrado, tal y como se describe en el subapartado 5.4.1.: "Condiciones de contorno de los modelos de estudio. Elemento BEAM 4".

Los resultados obtenidos se presentan a continuación agrupados por longitud del arco y condición de contorno y se resumen en las Figuras 8.4.1.3. y 8.4.1.4.

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	196,6	28,1	14,6	8,5	5,2	3,6
0,2	367	47,4	24,4	14,2	8,9	6
0,3	409,5	52,1	26,8	15,5	9,8	6,5
0,4	381,3	48	24,6	14,3	9	6
0,5	327,3	41,2	21,1	12,2	7,7	5,1

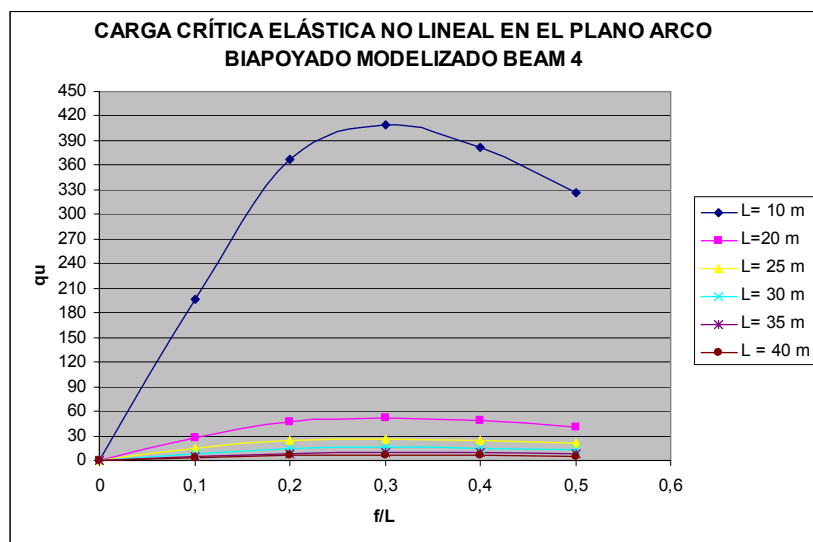


Figura 8.4.1.3.: "Valor de la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biapoyado modelizado con elementos BEAM 4."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q_{cri}	q_{cri}	q_{cri}	q_{cri}	q_{cri}	q_{cri}
0,1	294,5	54,7	29,2	17,3	11	7,4
0,2	762,5	102,7	53,3	31,1	19,6	13,2
0,3	952,2	123,4	63,7	37	23,3	15,7
0,4	958	122,8	63,3	36,7	23,2	15,5
0,5	876,4	111	57,4	33,2	21	14,1

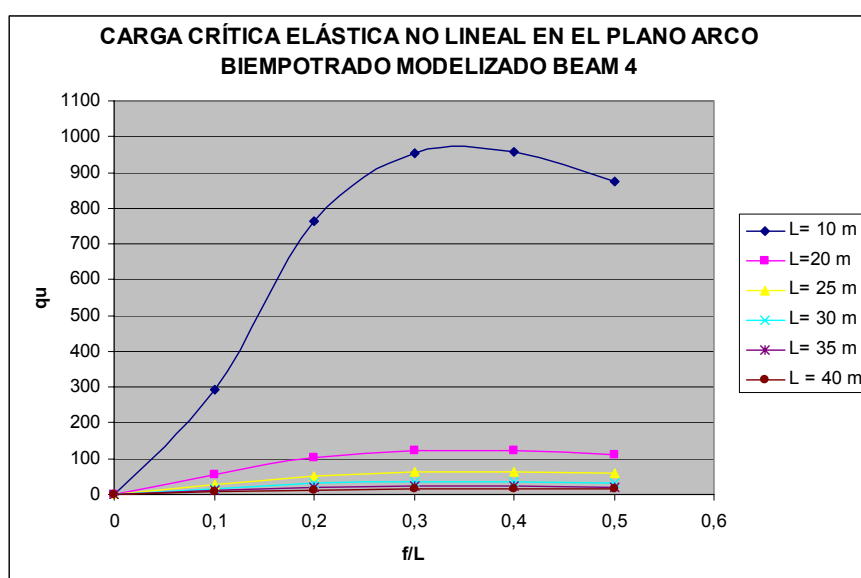


Figura 8.4.1.4.: "Valor de la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biempotrado modelizado con elementos BEAM 4."

En 1.976 Austin y Ross determinaron la carga crítica elástica no lineal de pandeo para arcos parabólicos y circulares biapoyados y biempotrados sometidos a una carga vertical uniformemente distribuida en planta a lo largo del eje del arco.

En la Tabla 8.4.1.5. se incluyen los valores obtenidos por Austin y Ross para el cálculo de la carga crítica elástica no lineal en el plano de arcos circulares

y parabólicos sometidos a una carga uniformemente distribuida en planta a lo largo del eje.

		Arco Biapoyado			Arco Biempotrado		
θ	h_i/L	qL^3/EI	HL^2/EI	h_c / h_i	qL^3/EI	HL^2/EI	h_c / h_i
Arcos parabólicos. Modo antisimétrico							
	0,10	28,6	36,3	1002	60,4	76,1	1003
	0,15	38,2	32,9	1004	83,4	70,8	1006
	0,20	43,4	28,8	1006	99,3	64,3	1010
	0,25	44,9	24,5	1008	107,7	57,0	1013
	0,30	43,5	20,5	1009	109,6	49,5	1015
	0,35	40,4	16,96	1009	106,4	42,5	1017
	0,40	36,5	13,98	1009	100,0	36,2	1017
	0,50	28,5	9,51	1008	83,0	25,9	1017
Arcos circulares. Modo antisimétrico							
50	0,1109	31,2	35,6	0,994	64,8	75,2	0,992
70	0,1577	39,5	39,5	0,989	83,4	70,0	0,983
90	0,2071	44,0	44,0	0,981	95,5	63,3	0,969
106,26	0,2500	44,5	44,5	0,974	99,9	57,0	0,966
120	0,2887	42,8	42,8	0,968	99,8	51,2	0,938
140	0,3501	37,1	37,1	0,959	93,8	42,1	0,910
160	0,4196	28,9	28,9	0,953	81,9	32,6	0,880
180	0,5000	20,0	20,0	0,950	66,0	23,4	0,854
Arcos circulares. Modo simétrico							
50	0,1109	63,0	74,6	0,88	90,9	110,6	0,94
70	0,1577	77,6	66,8	0,81	110,0	98,5	0,91
90	0,2071	85,6	57,9	0,75	119,4	85,7	0,88
106,26	0,2500	87,7	50,5	0,69	120,3	75,2	0,85
120	0,2887	86,7	44,3	0,64	117,2	66,7	0,82
140	0,3501	81,7	35,1	0,57	117,5	54,2	0,78
160	0,4196	73,8	27,1	0,45	93,5	43,1	0,73
180	0,5000	64,4	19,07	0,34	77,2	32,5	0,67

Tabla 8.4.1.5.: "Carga crítica elástica no lineal en el plano de arcos circulares y parabólicos sometidos a una carga uniformemente distribuida en planta a lo largo del eje según Austin y Ross."

Con estos parámetros se obtienen los siguientes valores de carga crítica para arcos tanto biapoyados como biempotrados. (Figuras 8.4.1.6. y 8.4.1.7.):

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	256,4	32,1	16,4	9,5	6	4
0,2	389,1	48,6	24,9	14,4	9,1	6,1
0,3	390	48,7	25	14,5	9,1	6,1
0,4	327,2	40,9	20,9	12,1	7,6	5,1
0,5	255,5	31,9	16,3	9,5	6	4

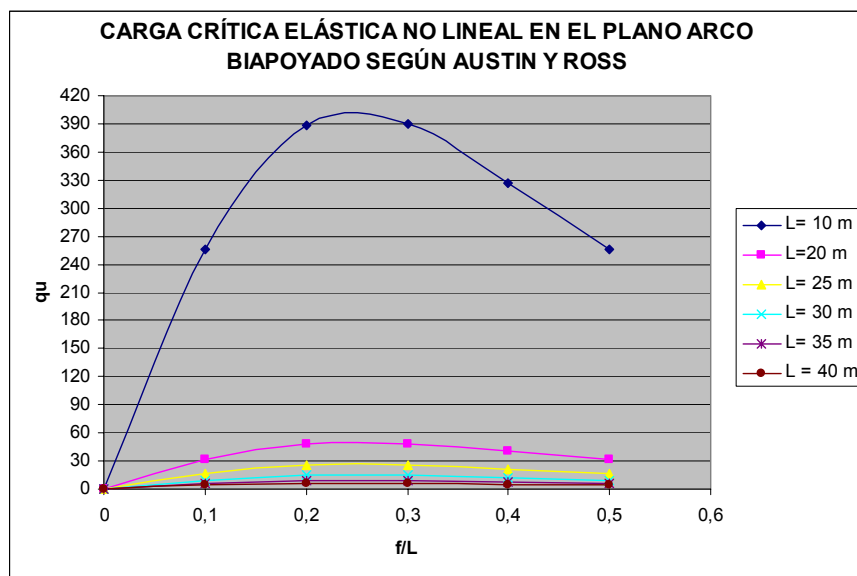


Figura 8.4.1.6.: "Valores de la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biapoyado según Austin y Ross (1.976)."

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	541,5	67,7	34,7	20,1	12,6	8,5
0,2	890,3	111,3	57	33	20,7	13,9
0,3	982,6	122,8	62,9	36,4	22,9	15,4
0,4	896,5	112,1	57,4	33,2	20,9	14
0,5	744,1	93,0	47,6	27,6	17,3	11,6

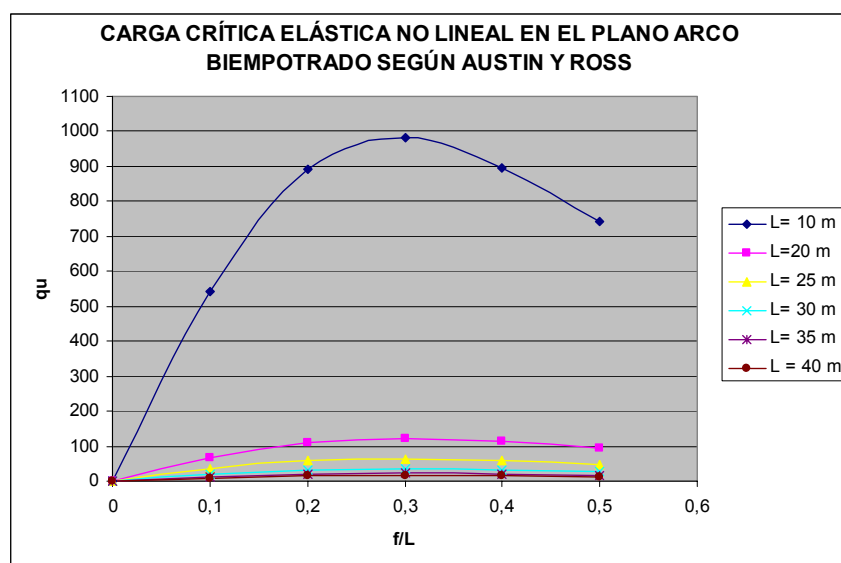


Figura 8.4.1.7.: "Valor de la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biempotrado según Austin y Ross (1.976)."

Si se analizan las diferencias existentes entre los valores calculados en la presente Tesis y aquellos obtenidos por Austin y Ross en 1.976 se observa que son mínimas y se encuentran dentro de los límites admisibles.

Para el caso de arcos biapoyados, las diferencias porcentuales entre los calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo BEAM y los valores obtenidos por Austin y Ross en 1.976 se indican en la siguiente tabla.

Al igual que se ha hecho para el caso de cálculos elástico-lineales, se determina un valor “representativo” porcentual para cada caso particular de longitud de arco y flecha consistente en:

Porcentaje (%)=(Valor de carga crítica elástica no lineal en el plano calculado en Ansys-Valor equivalente según Austin y Ross) / Valor de la carga crítica elástica no lineal en el plano calculada en Ansys

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%	%
0,1	-30.42	-14.06	-12.40	-11.73	-15.01	-11.29
0,2	-6.02	-2.61	-2.06%	-1.49	-1.97	-1.33
0,3	4.76	6.43	6.87	6.81	7.18	6.25
0,4	14.18	14.78	14.86	15.24	15.19	14.78
0,5	21.93	22.48	22.50	22.43	22.60	21.72

En la Figura 8.4.1.8. se representa la comparativa entre la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biapoyado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.

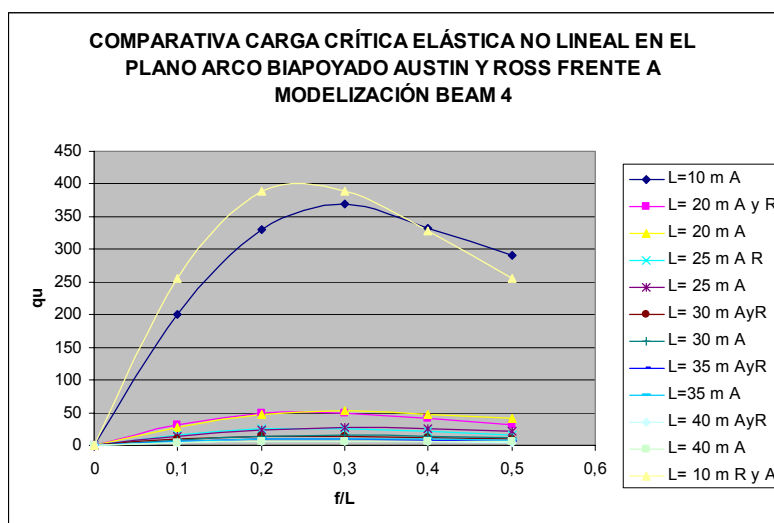


Figura 8.4.1.8. “Comparativa entre la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biapoyado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.”

Se obtienen las siguientes conclusiones para los arcos biapoyados:

- Las diferencias porcentuales son superiores a las obtenidos para el caso de cálculos elástico-lineales, siendo su valor máximo -30,42% para el arco de 10 m de longitud y relación flecha- luz 0,10.

- El mayor valor de las diferencias porcentuales está justificado ya que la no linealidad geométrica "amplifica" la no consideración del acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo presente en los cálculos realizados por Austin y Ross en 1.976. El mayor valor se da tal y como se ha comentado para el arco de L=10m y f/L=0,10 (el de mayor rigidez a axil) y para arcos con relación flecha-luz 0,50.

Para el caso de arcos biempotrados, las diferencias porcentuales entre los valores calculados en la presente Tesis con una modelización con elementos tipo BEAM y los obtenidos por Austin y Ross en 1.976 se indican en la siguiente tabla:

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%	%
0,1	-83.88	-23.75%	-18.69	-15.93	-14.82	-14.34
0,2	-16.76	-8.36	-6.90	-6.02	-5.94	-5.38
0,3	-3.19	0.46	1.28	1.64	1.64	2.21
0,4	6.41	8.74	9.35	9.52	9.87	9.62
0,5	15.09	16.20	17.03	16.99	17.35	17.54

En la Figura 8.4.1.9. se representa la comparativa entre la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biempotrado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys.

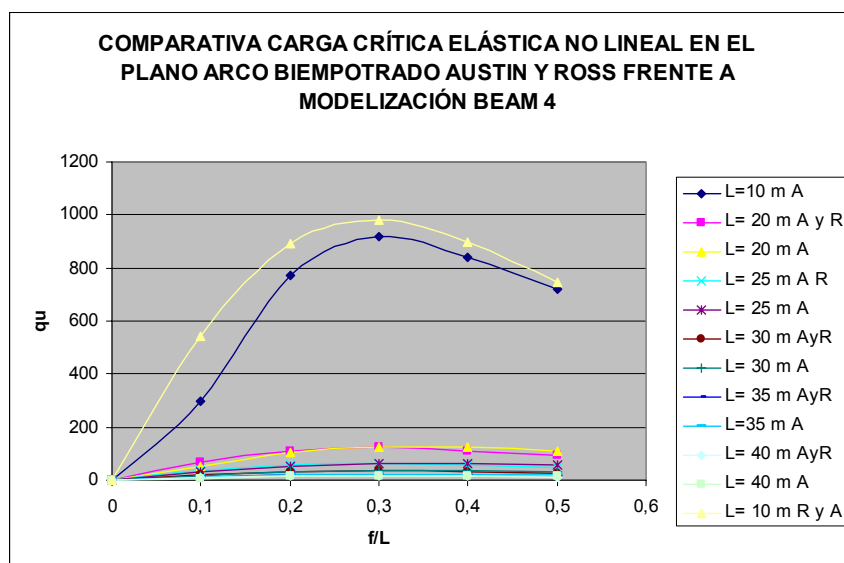


Figura 8.4.1.9. "Comparativa entre la carga crítica elástica no lineal en el plano del arco biempotrado obtenida por Austin y Ross en 1.976 y la calculada en la presente Tesis con un modelo de elementos BEAM en Ansys."

Se obtienen para los arcos biempotrados las siguientes conclusiones:

- Las diferencias porcentuales son superiores a las obtenidas para el caso de cálculos elástico-lineales, siendo su valor máximo -83,88% para el arco de 10 m de longitud y relación flecha-luz 0,10.

- El mayor valor de las diferencias porcentuales está justificado ya que la no linealidad geométrica "amplifica" la no consideración del acortamiento por axil del arco y los momentos derivados del mismo presente en los cálculos realizados por Austin y Ross en 1.976. El mayor valor se da tal y como se ha comentado con anterioridad para el arco de L=10m y f/L=0,10 (el de mayor rigidez a axil) y para arcos con relación flecha-luz 0,10 y 0,50.

De todo lo comentado anteriormente se deduce la validez de los modelos de cálculo empleados y la veracidad de los resultados que arroja.

8.4.2. Cargas críticas de pandeo elástico no lineal fuera del plano

Una vez confirmada la validez del modelo de cálculo para el comportamiento del arco en su plano, se van a realizar los cálculos correspondientes a la repuesta “no lineal” de la estructura “fuera del plano”. Para ello se utilizará una modelización con elementos “BEAM”. Las luces, flechas, sección transversal, geometría del arco y características del material coinciden con lo expuesto en el apartado anterior 8.4.1. para los cálculos relativos al plano. Se adopta una imperfección inicial geométrica coincidente con la definida en el capítulo 4.7.5. “Imperfección geométrica adoptada en la presente Tesis” para comportamientos fuera del plano:

$$z(x) = \frac{L}{1.000} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{8.4.2.1.}$$

En la Figura 8.4.2.2. se incluye un resumen de las características del arco utilizado en los cálculos de la carga crítica elástica no lineal fuera del plano.

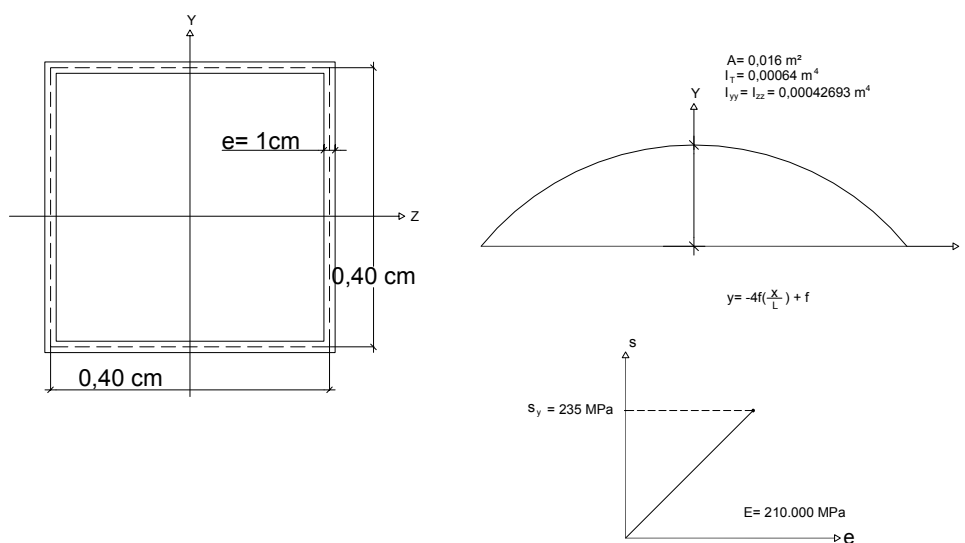


Figura 8.4.2.2. “Características del arco empleado en los cálculos elásticos no lineales relativos a la inestabilidad fuera del plano.”

Se considera la “no linealidad geométrica”, con lo que se permite un cálculo con grandes deformaciones. El método empleado para resolver el problema matemático es el de Newton-Raphson.

Los cálculos se realizan para los casos de arco biapoyado y arco biempotrado de acuerdo a lo descrito en el subapartado 5.4.1.: “Condiciones de contorno de los modelos de estudio. Elemento BEAM 4”.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación agrupados por longitud del arco y condición de contorno y se resumen en las Figuras 8.4.2.3 y 8.4.2.4.

ARCOS BIAPOYADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	46,2	5,9	3	1,7	1,1	0,75
0,2	45,3	5,8	3	1,75	1	0,75
0,3	28,1	3,65	1,9	1,1	0,6	0,45
0,4	15,6	2,1	1,05	0,6	0,35	0,25
0,5	8,8	1,1	0,59	0,34	0,19	0,10

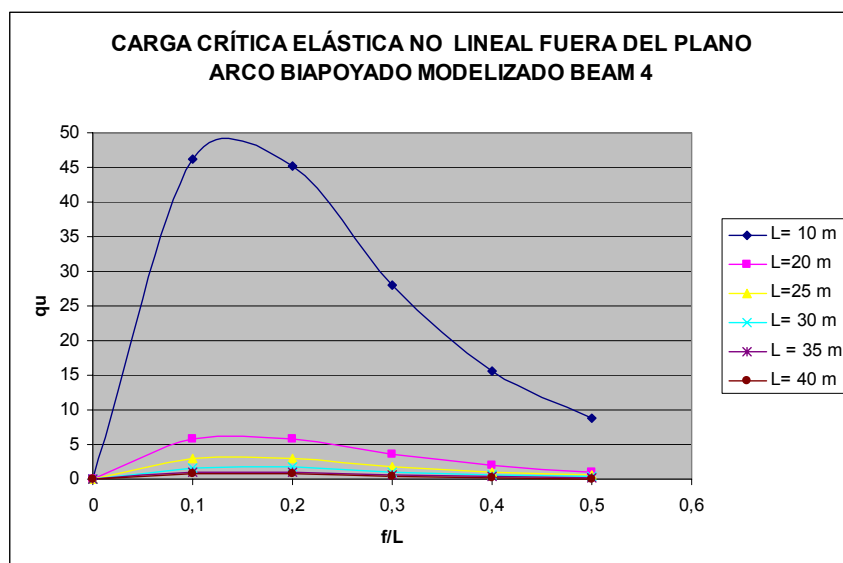


Figura 8.4.2.3. “Valor de la carga crítica elástica no lineal fuera del plano del arco biapoyado modelizado con elementos BEAM 4.”

ARCOS BIEMPOTRADOS

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}	q _{cri}
0,1	244,4	29,3	15	8,7	5,5	3,7
0,2	334,9	41,7	21,4	12,4	7,8	5,25
0,3	317,8	40,1	20,5	11,9	7,5	5,0
0,4	264,6	33,4	17,1	9,9	6,2	4,20
0,5	211,7	26,6	13,7	7,9	4,9	3,30

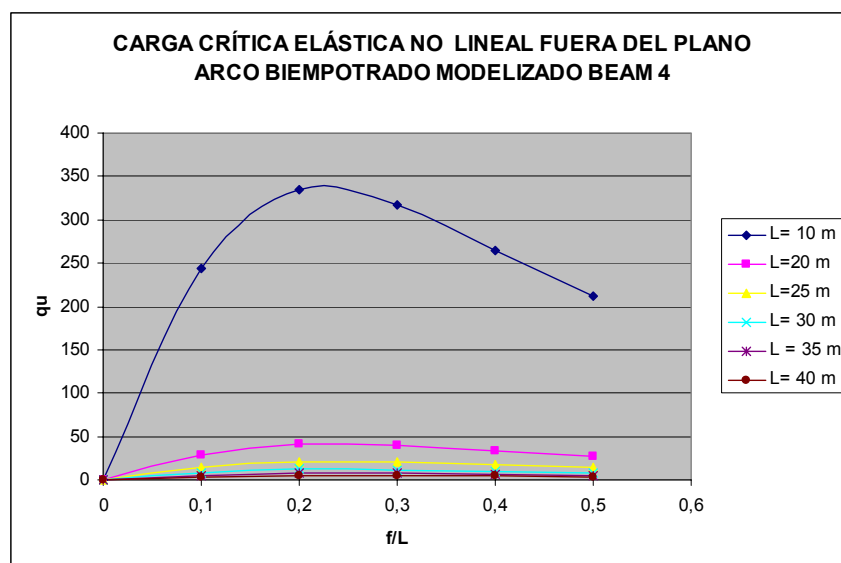


Figura 8.4.2.4. "Valor de la carga crítica elástica no lineal fuera del plano del arco biempotrado modelizado con elementos BEAM 4."

Al no tener datos relativos a estos cálculos proporcionados por autores estudiosos del tema, se comparan los resultados obtenidos con los calculados para las mismas condiciones en la presente Tesis en la hipótesis de comportamiento LINEAL con el fin de cotejar los valores deducidos.

Se utiliza el parámetro "porcentual" relativo al cálculo lineal, que se define como:

$$\text{Porcentaje (\%)} = \frac{\text{Valor de la carga crítica elástica no lineal fuera del plano calculado en Ansys} - \text{Valor de carga crítica elástica lineal fuera del plano calculado en Ansys}}{\text{Valor de carga crítica elástica no lineal fuera del plano calculado en Ansys}}$$

Para el caso de los arcos biapoyados, el valor del parámetro porcentual se define en la Tabla 8.4.2.5.

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%	%
0,1	10.98	9.06	9.69	11.12	9.09	8,13
0,2	7.05	4.43	3.44	1.20	12.05	1,15
0,3	3.81	0.05	-1.60	-4.07	11.94	1,42
0,4	1.87	-5.47	-3.04	-4.69	5.83	0,44
0,5	-0.09	-0.09	-4.85	-7.85	7.34	0,0373

Tabla 8.4.2.5. "Valor del parámetro "porcentual" en los arcos biapoyados relativo al cálculo elástico lineal."

Análogamente, en la Tabla 8.4.2.6. se indica el valor del parámetro porcentual para el caso de los arcos biempotrados.

	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
f/L	%	%	%	%	%	%
0,1	23.39	11.94	9.80	5.41	7.28	6.40
0,2	10.28	6.64	5.91	4.64	5.45	4.91
0,3	7.00	4.60	4.56	3.59	4.02	4,66
0,4	5.16	3.52	3.44	2.89	3.86	2,83
0,5	3.75	2.87	2.25	2.17	4.03	3,63

Tabla 8.4.2.6. "Valor del parámetro "porcentual" en los arcos biempotrados relativo al cálculo elástico lineal."

De los parámetros porcentuales obtenidos tanto para los arcos biapoyados como para los biempotrados se deduce que los resultados obtenidos son correctos. Las mayores diferencias se obtienen a grandes rasgos para el/los arcos de menor longitud, siendo superiores las diferencias en el caso de biempotrados (23,39%) que en el de biapoyados (10.98%).

Si se analizan los resultados obtenidos para los arcos biempotrados representando la gráfica que relaciona el cociente f/L con el parámetro $\lambda = \frac{qL^3}{EI_y}$ (Figura 8.4.2.4.), se observa que el valor de λ es constante independientemente de la luz y ligeramente inferior al caso de cálculo elástico lineal, hipótesis más conservadora y separada de la realidad.

En la Figura 8.4.2.7. se representa la comparativa entre los cálculos elástico lineal y elástico no lineal para el caso de arcos biempotrados. El valor de EI_y (rigidez a flexión transversal) es de $8.965,33 \text{ t} \cdot \text{m}^2$.

Valor de λ para arcos biempotrados

f/L	L= 10 m	L= 20 m	L= 25 m	L= 30 m	L= 35 m	L= 40 m
0	0	0	0	0	0	0
0,1	27.2599612	26.1445782	26.1417897	26.2003473	26.302126	26.4122701
0,2	37.3541776	37.2091778	37.29562	37.3430238	37.3011969	37.4768697
0,3	35.4468726	35.7814875	35.7271126	35.8372567	35.8665355	35.6922569
0,4	29.5130349	29.8030345	29.8016403	29.8141883	29.6496693	29.9814958
0,5	23.6126587	23.7353508	23.8761679	23.79112	23.4328032	23.5568896

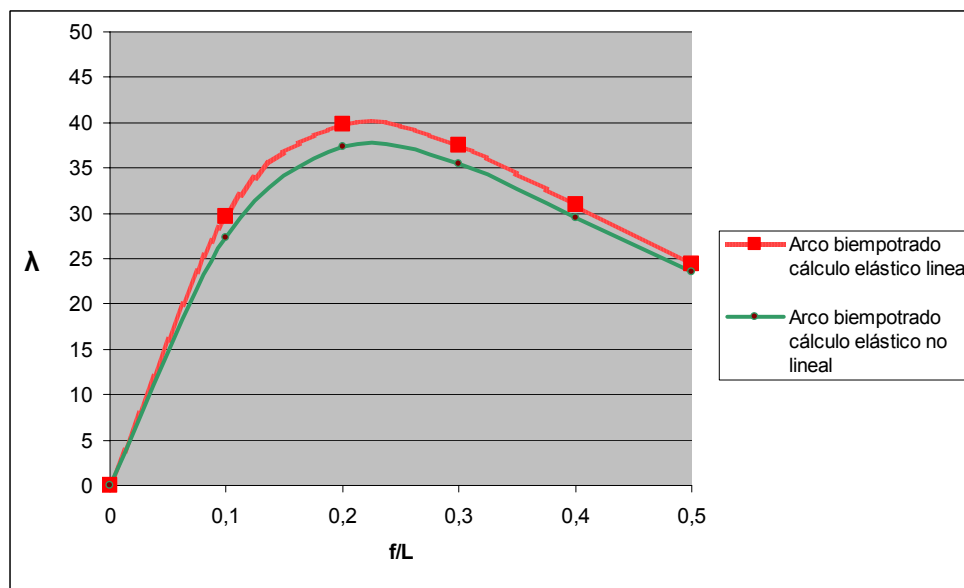


Figura 8.4.2.7.: "Valor del parámetro λ para diferentes relaciones flecha-luz comprendidas entre 0,1 y 0,5 en las hipótesis de cálculo elástico lineal y cálculo elástico no lineal."

9. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE LOS ARCOS FUERA DEL PLANO

9. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE LOS ARCOS FUERA DEL PLANO

9.1. MODELOS DE DETERMINACIÓN DE LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO

El comportamiento último de una estructura y la determinación de la carga de agotamiento de la misma se puede simular con diferentes modelos. Cada uno de ellos tiene distinta complejidad y ha de suplir la ausencia de precisión en sus estimaciones con determinadas simplificaciones conservadoras.

Simular la realidad con todo detalle es muy costoso en tiempo de cálculo y en la preparación del modelo. Por eso, rara vez se intenta. Sólo en trabajos de investigación o de extrema responsabilidad está justificada una reproducción casi fiel del mecanismo de agotamiento.

Hay muchas ocasiones en las que el comportamiento real de una estructura presenta simplificaciones, por lo que resulta inútil escoger una modelización que incluya fenómenos o efectos que no se van a producir en el caso particular que se analiza. Para estos casos es más razonable utilizar modelos más simples pero que alcanzan plena validez porque sus hipótesis simplificativas coinciden plenamente con las del caso real.

En otras ocasiones, el modelo sencillo elude efectos que sí están presentes en la estructura real. Pero, con determinados coeficientes correctores, se puede obtener un resultado bastante próximo al que se obtendría con un modelo más complejo pero infinitamente más costoso.

Por esta razón conviene conocer la gama de posibles modelos existentes, las limitaciones de aplicación de cada caso y los coeficientes de corrección que conviene incluir para superar esas limitaciones.

Los métodos de análisis en el caso de arcos que permiten obtener la carga última de colapso se agrupan en dos grupos:

1. **Métodos elastoplásticos** que reproducen el comportamiento elastoplástico de los materiales.

2 **Métodos elásticos** que simplifican el problema suponiendo que los materiales son siempre elásticos.

Dentro del primer conjunto de métodos cabe destacar los **modelos de resistencia última** (teoría de la zona plástica), que intentan reproducir la realidad de la forma más aproximada posible. Las hipótesis de partida son:

- a) La ley constitutiva del material mediante la relación no lineal $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$
- b) La dispersión de las zonas plásticas a lo largo de la estructura y sobre la sección transversal
- c) La influencia de las deformaciones (incluyendo el efecto de los axiles) en la rigidez de la estructura
- d) La existencia de autotensiones
- e) La presencia de imperfecciones geométricas

Mediante elementos finitos, introduciendo la geometría imperfecta, un estado de autotensiones, la ley tensión-deformación real y un análisis no lineal de movimientos, se calcula, paso a paso, incrementando las cargas, la carga última de colapso de la estructura. Ésta se alcanza cuando se hace singular la matriz de rigidez tangente de la misma. Un cálculo así realizado equivale a un ensayo real de agotamiento, como se pone de manifiesto en los diversos trabajos de comprobación que recoge la literatura científica.

Por lo que respecta al segundo conjunto de métodos cabe hablar de:

a) Modelos de teoría elástica de primer orden:

Corresponden a modelos de barras de cálculo matricial lineal. También emplean una fórmula de interacción para evaluar la carga de colapso. Para corregir la triple simplificación que elude el comportamiento no lineal del material, la no linealidad geométrica de la estructura y la pérdida de rigidez por las autotensiones cabe utilizar los siguientes métodos correctores:

- Utilización de una imperfección ficticia para alterar la geometría.
- La aplicación de criterios de agotamiento corregidos
- Introducción de factores empíricos de mayoración de cargas o de minoración de tensiones admisibles.

b) Modelos de teoría elástica de segundo orden:

Constituyen también modelos de barras de comportamiento elástico que evalúan la carga de colapso mediante el empleo de una fórmula de interacción acotada.

Cuando una determinada relación entre los esfuerzos alcanza el valor unidad se supone que se ha alcanzado la carga que agota la estructura. Como no tienen en cuenta la pérdida de rigidez por la presencia de autotensiones ni la plastificación del material, se recurre a diversos tipos de mecanismos correctores, entre los que se encuentran la imperfección geométrica equivalente, un análisis elástico de segundo orden simplificado usando el efecto $P-\Delta$ y un análisis elástico de segundo orden simplificado para pórticos de traslacionalidad limitada.

Los **modelos de resistencia última** son los únicos que representan fielmente la realidad y, por tanto, los que se han empleado en la presente Tesis para evaluar las cargas de colapso de los arcos.

Los **métodos elásticos** son cómodos de manejar y, por consiguiente, son imprescindibles a la hora de realizar el proyecto de estructuras sencillas o a la de predimensionar y tantear las más complejas. Sólo son útiles si se dispone de un parámetro de imperfección contrastado.

9.2. MODELOS ELASTOPLÁSTICOS DE CARGA ÚLTIMA

9.2.1. Introducción

A la hora de realizar un planteamiento exacto del funcionamiento del arco como estructura con el fin de calcular su carga última, es necesario que dicho planteamiento recoja la no linealidad de comportamiento tanto en lo que respecta al material como a la geometría. Tal y como se analizó en el Capítulo 3, el cálculo de arcos a lo largo de la historia moderna ha sido objeto de numerosos estudios que iban en consonancia con el desarrollo de las tecnologías en sistemas de información. De hecho, hasta la década de los 60, los arcos se estudiaron como modelos de barras elásticos lineales por no disponerse de herramientas rápidas que solucionaran la complejidad asociada a los problemas matemáticos no lineales. A partir de la década de los 70, el desarrollo de los ordenadores

llevó parejo el diseño de algoritmos de cálculo personalizados por cada investigador (existen numerosas referencias al respecto), donde cada uno realizó un modelo acorde con los medios informáticos del momento. Se solucionó en cierto modo la no linealidad, pero se seguía trabajando con modelos de barras.

Con la aparición de los programas de elementos finitos, surgió la posibilidad de simular el arco metálico como un elemento tridimensional con elementos lámina dada la relación espesor/ancho de la sección. Ello junto con la perfección de la biblioteca de elementos con comportamientos no lineales y el incremento de rapidez de los ordenadores, abrió la posibilidad de utilizar un modelo más aproximado a la realidad que el que se había venido utilizando hasta la fecha. La comercialización de dichos programas y su accesibilidad al personal universitario posibilitó el acercamiento al conocimiento en profundidad de respuestas que hasta ahora se habían calculado con numerosas hipótesis simplificadoras para permitir la resolución computacional.

9.2.2. Fundamentos de cálculo del Método de los Elementos Finitos

9.2.2.1. Introducción

Antes de desarrollar los algoritmos de cálculo no lineales que utiliza el programa ANSYS, merece la pena hacer un breve repaso de los fundamentos de estructuras en los que se basa el método de los elementos finitos de manera genérica. Para ello se dará una visión general que resuma las relaciones fundamentales, la formulación de los principios energéticos y la obtención de deformaciones y tensiones.

El material objeto de estudio es el acero que es isótropo, lo cual se tendrá en cuenta en la formulación (iguales propiedades mecánicas en x, y, z).

9.2.2.2. Relaciones tensión-deformación

La relación básica que liga tensiones con deformaciones en el rango lineal del material de forma matricial es la siguiente:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon^{el}\} \quad (9.2.2.2.1.)$$

donde:

$\{\sigma\}$ = vector de tensiones $[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{xz}]^T$ (Figura 9.2.2.2.2.)

$[D]$ = matriz de rigidez elástica que se definirá a continuación

$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz}]^T$ = vector de deformaciones elásticas

$\{\varepsilon^{th}\}$ = vector de deformaciones por temperatura

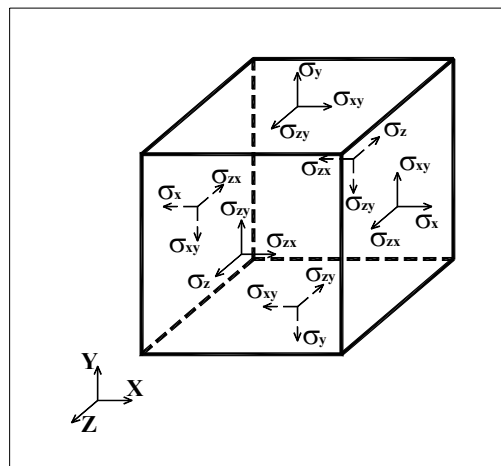


Figura 9.2.2.2.2. "Definición del vector de tensiones."

La deformación que causa tensión es: $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$

La ecuación (9.2.2.2.1.) se puede escribir de la forma:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{th}\} + [D]^{-1}\{\sigma\} \quad (9.2.2.2.3.)$$

Para el caso tridimensional el vector de deformaciones por temperatura es de la forma:

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [\alpha \alpha \alpha 0 0 0]^T \quad (9.2.2.2.4.)$$

donde:

α es el coeficiente de expansión térmica

$$\Delta T = T - T_{REF}$$

T = Temperatura actual en el punto en cuestión

T_{REF} = Temperatura de referencia

La matriz $[D]^{-1}$ normalizada por columnas es de la forma:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (9.2.2.2.5.)$$

donde:

E = Módulo de Young

ν = Módulo de Poisson

G = Módulo de elasticidad transversal

Sustituyendo las ecuaciones (9.2.2.2.4.) y (9.2.2.2.5.) en la (9.2.2.2.1.) se obtiene:

$$\varepsilon_x = \alpha \Delta T + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \quad (9.2.2.2.6.)$$

$$\varepsilon_y = \alpha \Delta T - \frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \quad (9.2.2.2.7.)$$

$$\varepsilon_z = \alpha \Delta T - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (9.2.2.2.8.)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad (9.2.2.2.9.)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad (9.2.2.2.10.)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad (9.2.2.2.11.)$$

donde:

ε_x = deformación en la dirección x

ε_{xy} = deformación angular en xy

σ_x = tensión en la dirección x

σ_{xy} = tensión tangencial en xy

Definiendo las tensiones en función de los desplazamientos invirtiendo la matriz $[D]$, la ecuación (9.2.2.2.1.) se puede escribir así:

$$\sigma_x = \frac{E}{h} (1-\nu^2) (\varepsilon_x - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_y - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_z - \alpha \Delta T) \quad (9.2.2.2.12.)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_x - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (1-\nu^2) (\varepsilon_y - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_z - \alpha \Delta T) \quad (9.2.2.2.13.)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_x - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (\nu + \nu^2) (\varepsilon_y - \alpha \Delta T) + \frac{E}{h} (1-\nu^2) (\varepsilon_z - \alpha \Delta T) \quad (9.2.2.2.14.)$$

$$\sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy} \quad (9.2.2.2.15.)$$

$$\sigma_{yz} = G \varepsilon_{yz} \quad (9.2.2.2.16.)$$

$$\sigma_{xz} = G \varepsilon_{xz} \quad (9.2.2.2.17.)$$

donde:

$$h = 1 - 3\nu^2 - 2\nu^3 \quad (9.2.2.2.18.)$$

9.2.2.3. Obtención de las matrices de la estructura

El principio de los trabajos virtuales afirma que una variación virtual muy pequeña de la energía de deformación interna debe provocar un cambio igual en el trabajo aplicado por las fuerzas exteriores. Ello se traduce en:

$$\delta U = \delta V \quad (9.2.2.3.1.)$$

donde:

U = energía de deformación

V = trabajo exterior

δ = operador virtual

La energía de deformación virtual es:

$$\delta U = \int_{\text{vol}} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d(\text{vol}) \quad (9.2.2.3.2.)$$

Si el material y la geometría son lineales se tiene:

$$\delta U = \int_{\text{vol}} \left(\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon^{\text{th}}\} \right) d(\text{vol}) \quad (9.2.2.3.3.)$$

Las deformaciones vienen referidas a los desplazamientos nodales de la forma:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{a\} \quad (9.2.2.3.4.)$$

donde:

[B] = matriz que relaciona desplazamientos y deformaciones basada en las funciones de forma del elemento.

{a} = vector de desplazamientos nodales.

Combinando las ecuaciones (9.2.2.3.3.) y (9.2.2.3.4.) y teniendo en cuenta que los desplazamientos no varían a lo largo del volumen:

$$\delta U = \{\delta a\}^T \int_{\text{vol}} [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \{a\} - \{\delta a\}^T \int_{\text{vol}} [B]^T [D] \{\varepsilon^{\text{th}}\} d(\text{vol}) \quad (9.2.2.3.5.)$$

Los desplazamientos dentro del elemento se refieren a los desplazamientos nodales mediante la fórmula:

$$\{u\} = [N]\{a\} \quad (9.2.2.3.6.)$$

donde:

$[N]$ es la matriz de funciones de forma

El trabajo de las fuerzas exteriores se puede definir como:

δV_1 trabajo realizado por las fuerzas de presión

δV_2 trabajo realizado por las fuerzas en los nodos

Se tiene que:

$$\delta V_1 = \int_{\text{área}_p} \{\delta w_n\}^T \{P\} d(\text{área}_p) \quad (9.2.2.3.7.)$$

$\{P\}$ = vector de presiones aplicado

área_p = área sobre la que actúa

$\{w_n\}$ = es el movimiento normal a la superficie tal que $\{w_n\} = [N_n]\{a\}$ siendo N_n las funciones de forma para los movimientos normales a la superficie.

Combinando (9.2.2.3.6.) y (9.2.2.3.7.) se obtiene:

$$\delta V_1 = \{\delta a\}^T \int_{\text{área}_p} [N_n]^T \{P\} d(\text{área}_p) \quad (9.2.2.3.8.)$$

Las fuerzas nodales aplicadas sobre el elemento se expresan de la forma:

$$\delta V_2 = \{\delta a\}^T \{F_e^{nd}\} \quad (9.2.2.3.9.)$$

donde $\{F_e^{nd}\}$ son las fuerzas nodales sobre el elemento.

$$\{\delta a\}^T \int_{\text{vol}} [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \{a\} - \{\delta a\}^T \int_{\text{vol}} [B]^T [D] \{\epsilon^{th}\} d(\text{vol}) =$$

$$= \int_{\text{vol}} \{\delta \mathbf{a}\}^T \int_{\text{area}_p} [\mathbf{N}_n]^T \{P\} d(\text{área}_p) + \{\delta \mathbf{a}\}^T \{F_e^{\text{nd}}\} \quad (9.2.2.3.10.)$$

Como $\{\delta \mathbf{a}\}^T$ es un desplazamiento virtual común a todos los términos de la ecuación anterior, la condición queda así:

$$[\mathbf{K}_e] \{\mathbf{a}\} - \{F_e^{\text{th}}\} = \{F_e^{\text{pr}}\} + \{F_e^{\text{nd}}\} \quad (9.2.2.3.11.)$$

donde:

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\text{vol}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d(\text{vol}) = \quad \text{matriz de rigidez del elemento}$$

$$\{F_e^{\text{th}}\} = \int_{\text{vol}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\epsilon^{\text{th}}\} d(\text{vol}) = \quad \text{vector de carga térmica en el elemento}$$

$$\{F_e^{\text{pr}}\} = \int_{\text{área}_p} [\mathbf{N}_n]^T \{P\} d(\text{área}_p) = \quad \text{vector de presión del elemento}$$

La ecuación (9.2.2.3.11.) representa la ecuación de equilibrio en un elemento en coordenadas locales.

9.2.2.4. Cálculo de deformaciones y tensiones

Las tensiones y las deformaciones en los puntos de integración del elemento se calculan combinando las ecuaciones (9.2.2.2.1.) y (9.2.2.3.4.) para obtener:

$$\{\epsilon^{\text{el}}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}\} - \{\epsilon^{\text{th}}\} \quad (9.2.2.4.1.)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}] \{\epsilon^{\text{el}}\} \quad (9.2.2.4.2.)$$

Las deformaciones principales se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \epsilon_{xy} & \frac{1}{2} \epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{xy} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{xz} & \frac{1}{2} \epsilon_{yz} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.2.2.4.3.)$$

donde ϵ_0 son las deformaciones principales, ϵ_1 , ϵ_2 , y ϵ_3 .

Se define la intensidad de las deformaciones como:

$$\epsilon_1 = \text{MAX}(|\epsilon_1 - \epsilon_2|, |\epsilon_2 - \epsilon_3|, |\epsilon_3 - \epsilon_1|) \quad (9.2.2.4.4.)$$

Se define la deformación equivalente de Von Mises como:

$$\epsilon_e = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2.2.4.5.)$$

Las tensiones principales σ_1 , σ_2 , σ_3 se obtienen de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.2.2.4.6.)$$

donde σ_0 son las tensiones principales .

La intensidad de tensiones se define como:

$$\sigma_1 = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (9.2.2.4.7.)$$

La tensión equivalente de Von Mises se obtiene de:

$$\sigma_e = \left(\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2.2.4.8.)$$

La tensión equivalente y la deformación equivalente están relacionadas mediante el módulo de Young E de la forma:

$$\sigma_e = E \epsilon_e \quad (9.2.2.4.9.)$$

Para elementos elásticos tipo lámina las fuerzas y momentos por unidad de volumen se definen como:

$$T_x = \frac{t(\sigma_{x,top} + 4\sigma_{x,mid} + \sigma_{x,bot})}{6} \quad (9.2.2.4.10.)$$

$$T_y = \frac{t(\sigma_{x,top} + 4\sigma_{x,mid} + \sigma_{x,bot})}{6} \quad (9.2.2.4.11.)$$

$$T_{xy} = \frac{t(\sigma_{xy,top} + 4\sigma_{xy,mid} + \sigma_{xy,bot})}{6} \quad (9.2.2.4.12.)$$

$$M_x = \frac{t^2(\sigma_{x,top} - \sigma_{x,bot})}{12} \quad (9.2.2.4.13.)$$

$$M_y = \frac{t^2(\sigma_{y,top} - \sigma_{y,bot})}{12} \quad (9.2.2.4.14.)$$

$$M_{xy} = \frac{t^2(\sigma_{xy,top} - \sigma_{xy,bot})}{12} \quad (9.2.2.4.15.)$$

$$N_y = \frac{t(\sigma_{yz,top} + 4\sigma_{yz,mid} + \sigma_{yz,bot})}{6} \quad (9.2.2.4.16.)$$

$$N_x = \frac{t(\sigma_{xz,top} + 4\sigma_{xz,mid} + \sigma_{xz,bot})}{6} \quad (9.2.2.4.17.)$$

donde:

T_x, T_y, T_{xy} = fuerzas en el plano por unidad de longitud

M_x, M_y, M_{xy} = momentos por unidad de longitud

N_x, N_y = cortantes por unidad de longitud

t = espesor en el punto medio del elemento

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ = tensiones normales

$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ = tensiones tangenciales

9.2.3. Aplicación del M.E.F. al caso no lineal

Como ya se comentado con anterioridad, el modelo lineal de elementos finitos se basa en las siguientes hipótesis:

- a) Las relaciones entre deformaciones $\varepsilon(x,y,z)$ y desplazamientos $n(x,y,z)$ son lineales. Ello implica que en cualquier punto del elemento se cumple:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [L][N]\{a\} \quad (9.2.3.1.)$$

donde $[L]$ y $[N]$ son operadores y funcionan de forma lineal.

Las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (9.2.3.2.)$$

ya que $\{\varepsilon_0\}$ y $\{\sigma_0\}$ son las deformaciones y las tensiones iniciales respectivamente y D es una matriz que depende de E y ν y es constante.

Estas hipótesis dan lugar a que el sistema de ecuaciones resultante en elementos finitos sea del tipo:

$$[K]\{a\} + \{f\} = \{r\} \quad (9.2.3.3.)$$

donde $\{r\}$ representa las fuerzas en los nodos y $\{f\}$ las cargas térmicas y de presión en el elemento.

El sistema de ecuación (9.2.3.3.) es lineal, ya que la matriz $[K]$ se obtiene por la integración de una función del producto de $[B][LN]$ y $[D]$, que son todas lineales. Esta formulación se traduce en un cálculo lineal de estructuras, que es el que se utiliza de forma cotidiana. Su resolución es inmediata mediante el algoritmo de Gauss-Jordan.

Sin embargo, en la realidad, las estructuras no funcionan exactamente así. De hecho, por definición, las hipótesis que hemos descrito nunca son reales, lo que ocurre es que normalmente representan un modelo que suele simular bien la realidad.

Existen problemas de mecánica de sólidos en los que fenómenos tales como la plasticidad, la fluencia o cualquier relación de comportamiento complicada sustituyen a las hipótesis sencillas de elasticidad lineal (no linealidad del material). Estos problemas se pueden formular mediante el método de los elementos finitos sin necesidad de volver a formular los elementos desde el principio. Cuando pueda llegarse a una solución del problema no lineal, siguiendo un proceso lineal iterativo cualquiera y de tal forma que al final del mismo se ajusten las constantes del material de manera que se satisfaga la nueva ley de comportamiento, se habrá solucionado el problema no lineal.

Sin embargo, si la relación entre deformaciones y desplazamientos no es lineal (no linealidad geométrica), es necesario reorganizar toda la formulación

más a fondo. En este caso, al final, es necesario resolver siempre un sistema de ecuaciones no lineales ya que la matriz K es función de los desplazamientos en los nudos ($K=K(a)$).

En el presente capítulo se pretende realizar una exposición sobre cómo se implementa cada una de estas no linealidades en el programa de cálculo ANSYS con un pequeño desarrollo teórico previo que facilite su comprensión. Las no linealidades que se han estudiado e implantado son obviamente las que afectan al problema concreto de los arcos metálicos, que son básicamente la plasticidad en lo referente al material y las grandes deformaciones en lo que respecta a la geometría.

En cualquier caso es necesario recordar tres conceptos implícitos a la no linealidad matemática que se han tenido en cuenta en la presente Tesis:

- La solución puede no ser única.
- No se puede realizar superposición de estados
- La convergencia no está asegurada (estabilidad de la solución)

9.2.4. Planteamiento de la no linealidad geométrica

9.2.4.1. Concepto

En todas las formulaciones clásicas de resistencia de materiales se admite que las deformaciones y los desplazamientos producidos en la estructura son pequeños. Eso se traduce en que la geometría de los elementos no varía durante la actuación de las fuerzas exteriores y que las deformaciones pueden aproximarse de forma lineal y asimilarse a infinitésimos de primer orden.

En la práctica, dichas hipótesis no siempre se cumplen. Existen numerosos ejemplos que van en contra de las mismas en los distintos ámbitos de la ingeniería pero debe centrarse la atención en las que pueden afectar al problema concreto de la carga de colapso en arcos. Puede ocurrir que aparezca una carga a partir de la cual los desplazamientos aumenten mucho más rápidamente al incrementar la carga de lo que predice la situación lineal (problema de grandes deformaciones). O puede alcanzarse un estado para el que la carga que pueda

resistir la estructura disminuya al aumentar la deformación (problema de estabilidad o pandeo).

Ambas consideraciones hay que tenerlas en cuenta en el estudio de la carga última para ver su incidencia en el cálculo de la misma. Por lo tanto es preciso sentar las bases de cálculo sobre las que los elementos finitos formulan el problema.

9.2.4.2. Formulación matemática

Aunque los desplazamientos sean grandes, las condiciones de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores se deben cumplir. Si se escriben de forma resumida las ecuaciones de equilibrio obtenidas al aplicar el principio de los trabajos virtuales, se puede afirmar de forma genérica que:

$$\psi(a) = \int_v [\bar{B}]^T [\sigma] dV - \{l\} = 0 \quad (9.2.4.2.1.)$$

donde ψ representa la suma de fuerzas generalizadas interiores y exteriores y se obtiene a partir de las deformaciones:

$$\{d\varepsilon\} = [\bar{B}] \{a\} \quad (9.2.4.2.2.)$$

$[\bar{B}]$ se distingue con una barra porque, si los desplazamientos son grandes, las deformaciones son una función no lineal de los desplazamientos y la matriz depende entonces de a . Se puede escribir:

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L(a)] \quad (9.2.4.2.3.)$$

donde B_0 es la misma matriz que interviene cuando no se consideran más que las deformaciones lineales y B_L es una matriz que depende de los desplazamientos.

Si no se considera que el material es no lineal se puede escribir:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (9.2.4.2.4.)$$

en la que $[D]$ es la matriz habitual de constantes elásticas. Sin embargo, se podría escribir cualquier tipo de relación no lineal entre tensiones y deformaciones ya que el proceso se reduciría de nuevo a resolver un sistema de ecuaciones no lineales.

Para la solución de la ecuación (9.2.4.2.1.) se puede recurrir al método iterativo de Newton-Raphson. Para ello es necesario tener una relación del tipo $\{\psi\} = [K_T]\{da\}$. Diferenciando se obtiene:

$$\{\psi\} = \int_V [dB^{-T}] \{\sigma\} dV + \int_V [B] \{d\sigma\} dV = [K_T] \{da\} \quad (9.2.4.2.5.)$$

La ecuación anterior se puede poner de la forma:

$$\{\psi\} = [K_0 + K_\sigma + K_L] \{da\} = [K_T] \{da\} \quad (9.2.4.2.6.)$$

donde:

$[K_0]$ representa la matriz de rigidez usual para pequeños desplazamientos.

$[K_\sigma]$ representa la matriz de rigidez que depende del estado tensional de la estructura.

$[K_L]$ representa la matriz de grandes desplazamientos

$[K_T]$ representa la matriz de rigidez tangente total

La forma de resolver el problema es:

a) Se calcula la solución elástica a^0 como primera aproximación

b) Se deduce $\{\psi^0\}$ de la ecuación (9.2.4.2.1.) estando $[B]$ definida por (9.2.4.2.3.) y las tensiones $[\sigma]$ por (9.2.4.2.4.)

c) Se calcula la matriz K_T^0

d) Se calcula la corrección con la relación:

$$\Delta a^0 = -(K_T^0)^{-1} \psi^0 \quad (9.2.4.2.7.)$$

y se repite el proceso desde b) hasta que Ψ^n sea suficientemente pequeño.

9.2.4.3. Implementación en Ansys

9.2.4.3.1. Introducción

Puede parecer fuera de lugar dedicar unas páginas a describir la metodología que emplea el programa elegido para la simulación elastoplástica. Sin embargo, resulta imprescindible analizar el planteamiento matemático de la subrutina del programa para conocer sus hipótesis simplificadoras y los criterios de validez. No hay nada más irresponsable para el calculista de estructuras que aceptar ciegamente los resultados del ordenador sin plantearse cómo son obtenidos.

El programa ANSYS considera tres tipos de no linealidades geométricas:

a) Grandes deformaciones

Asume que las deformaciones no son despreciables. Se tienen en cuenta los cambios de forma. Las flechas y los giros pueden ser arbitrariamente grandes.

b) Grandes giros

Asume que los giros son grandes pero las deformaciones mecánicas (las que causan tensiones) se evalúan con expresiones lineales. La estructura no cambia de forma excepto por el movimiento de sólido rígido. Los elementos de esta clase se mantienen con la configuración original.

c) Rigidez por tensión

Tiene en cuenta la rigidez adquirida por la estructura por el hecho de estar tensionada. Asume que tanto las deformaciones como los giros son pequeños. Los efectos de la no linealidad en los giros se modelizan con una aproximación de los giros de primer orden.

Para la representación de la no linealidad de los arcos se ha escogido el modelo de grandes deformaciones por ser el más genérico. Hay que tener en

cuenta que este modelo incluye además la rigidez por tensión. A continuación se analiza cómo formulan el problema las rutinas del programa ANSYS.

9.2.4.3.2. Base teórica de grandes deformaciones

Cuando las deformaciones en un material superan más de un pequeño porcentaje, no se puede despreciar el cambio de geometría debido a la deformación. Este tipo de análisis se suele llamar de grandes deformaciones o de deformaciones finitas.

Para desarrollar el modelo matemático es preciso definir una serie de cantidades físicas básicas (movimiento y deformación) y sus relaciones.

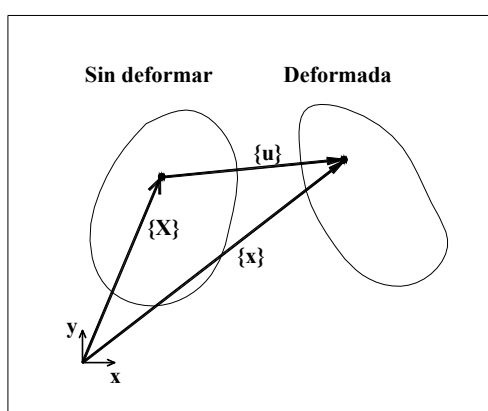


Figura 9.2.4.3.2.1. "Movimiento y vector de posición de un cuerpo deformable."

Las cargas que actúan sobre un cuerpo hacen que éste se desplace. Este movimiento se puede estudiar a partir de la posición del sólido deformado y sin deformar.

Sea $\{x\}$ la posición del punto del sólido deformado y $\{X\}$ la posición del punto del sólido sin deformar. El vector desplazamiento $\{u\}$ se puede escribir como:

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} \quad (9.2.4.3.2.2.)$$

El gradiente de deformaciones se puede expresar de la forma:

$$[F] = \frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} \quad (9.2.4.3.2.3.)$$

que se puede escribir en función de los desplazamientos según la ecuación (9.2.4.3.2.) como:

$$[F] = [I] + \frac{\partial \{u\}}{\partial \{X\}} \quad (9.2.4.3.2.4.)$$

donde [I] representa la matriz identidad.

La información que contiene el gradiente de deformaciones [F] incluye el cambio de volumen, la rotación y el cambio de forma del cuerpo deformado. El cambio de volumen en un punto es:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det[F] \quad (9.2.4.3.2.5.)$$

donde:

V_0 es el volumen original y V el volumen final

El gradiente de deformaciones se puede dividir en una rotación y un cambio de forma mediante el teorema de descomposición polar:

$$[F] = [R][U] \quad (9.2.4.3.2.6.)$$

donde:

[R] = matriz de rotación

[U] = matriz de cambio de forma

Una vez conocida la matriz [U] se define la medida de deformaciones de Hencky como:

$$[\varepsilon] = \ln[U] \quad (9.2.4.3.2.7.)$$

donde $[\varepsilon]$ se encuentra en forma de matriz en lugar de en su forma usual del vector $\{\varepsilon\}$. Como [U] es una matriz de segundo orden, la ecuación anterior se determina por su descomposición espectral:

$$[\varepsilon] = \sum_{i=1}^3 \ell_n(\lambda_i) \{e_i\} \{e_i\}^T \quad (9.2.4.3.2.8.)$$

en la que:

$\lambda_i =$ son los autovalores de [U] (principales alargamientos)

$\{e_i\} =$ son los autovectores de [U] (direcciones principales)

9.2.4.3.3. Implementación

La evaluación de la ecuación (9.2.4.3.2.7.) se realiza mediante una aproximación incremental, que aunque es atemporal, se entiende mejor como pasos consecutivos en el tiempo.

$$[\varepsilon] = \int d[\varepsilon] \approx \sum [\Delta\varepsilon_n] \quad (9.2.4.3.3.1.)$$

con:

$$[\Delta\varepsilon_n] = \ell_n [\Delta U_n] \quad (9.2.4.3.3.2.)$$

donde $[\Delta U_n]$ es el incremento de la matriz de alargamientos calculada para el gradiente de deformaciones incremental:

$$[\Delta F_n] = [\Delta R_n] [\Delta U_n] \quad (9.2.4.3.3.3.)$$

y $[\Delta F_n]$ es

$$[\Delta F_n] = [F_n] [F_{n-1}]^{-1} \quad (9.2.4.3.3.4.)$$

$[F_n]$ es el gradiente de deformaciones en el tiempo actual y $[F_{n-1}]$ en un paso previo. Para resolver la ecuación (9.2.4.3.3.4.) con elementos tipo lámina (con los que se va a modelizar el arco), se emplea el método de HUGHES (1984), un cálculo aproximado de segundo orden.

$$[\Delta\varepsilon_n] = [R_{1/2}]^T [\Delta\tilde{\varepsilon}_n] [R_{1/2}] \quad (9.2.4.3.3.5.)$$

donde $[R_{1/2}]$ es la matriz de rotación calculada de la descomposición polar del gradiente de deformaciones obtenida en la configuración del punto medio.

$$[F_{1/2}] = [R_{1/2}][U_{1/2}] \quad (9.2.4.3.3.6.)$$

que es, usando la ecuación (9.2.4.3.2.4.)

$$[F_{1/2}] = [I] + \frac{\partial \{u_{1/2}\}}{\partial \{X\}} \quad (9.2.4.3.3.7.)$$

y el desplazamiento en el punto medio:

$$\{u_{1/2}\} = \frac{1}{2} (\{u_n\} + \{u_{n-1}\}) \quad (9.2.4.3.3.8.)$$

$\{u_n\}$ es el desplazamiento en el tiempo actual y $\{u_{n-1}\}$ en el tiempo anterior.
 $[\Delta\varepsilon_n]$ es el incremento de deformaciones sin rotación a lo largo del tiempo.
 El incremento de deformaciones $\Delta\tilde{\varepsilon}_n$ también se calcula en la configuración del punto medio:

$$\{\Delta\tilde{\varepsilon}\} = [B_{1/2}]\{\Delta u_n\} \quad (9.2.4.3.3.9.)$$

$\{\Delta u_n\}$ es el incremento de desplazamiento a lo largo de ese paso de tiempo y
 $[B_{1/2}]$ es la relación deformación–desplazamiento calculada en el punto medio de la geometría.

$$\{X_{1/2}\} = \frac{1}{2} (\{X_n\} + \{X_{n-1}\}) \quad (9.2.4.3.3.10.)$$

Este método da una excelente aproximación a la deformación logarítmica si los escalones de deformación son menores del 10%.

El incremento de deformaciones calculado $[\Delta\varepsilon_n]$ (o el equivalente $[\Delta\varepsilon_n]$) se puede añadir al de la deformación previa $\{\varepsilon_{n-1}\}$ para obtener la deformación total de Hencky:

$$\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_{n-1}\} + \{\Delta\varepsilon_n\} \quad (9.2.4.3.3.11.)$$

9.2.4.3.4. Definición de deformaciones por temperatura

Según CALLEN (1985) el coeficiente de expansión térmica se define como el incremento de longitud por unidad de temperatura:

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dT} \quad (9.2.4.3.4.1.)$$

siendo ℓ la longitud y T la temperatura.

De otra forma:

$$\frac{d\ell}{\ell} = \alpha dT \quad (9.2.4.3.4.2.)$$

Por otra parte, la deformación logarítmica se define como:

$$\varepsilon^\ell = \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right) \quad (9.2.4.3.4.3.)$$

siendo ℓ_0 la longitud inicial

Diferenciando la ecuación anterior se obtiene:

$$d\varepsilon^\ell = \frac{d\ell}{\ell} \quad (9.2.4.3.4.4.)$$

Comparando las ecuaciones (9.2.4.3.4.2.) y (9.2.4.3.4.4.) queda:

$$d\varepsilon^\ell = \alpha dT \quad (9.2.4.3.4.5.)$$

Integrando la ecuación (9.2.4.3.4.5.) resulta:

$$\varepsilon^\ell - \varepsilon_0^\ell = \alpha (T - T_0) \quad (9.2.4.3.4.6.)$$

donde:

T_0 temperatura de referencia

ε_0^ℓ deformación inicial (de referencia) a la temperatura T_0

Si no existe deformación inicial ($\varepsilon_0^\ell = 0$) la ecuación anterior queda así:

$$\varepsilon^\ell = \alpha (T - T_0) \quad (9.2.4.3.4.7.)$$

La deformación por temperatura corresponde a la deformación logarítmica. Como ejemplo, puede considerarse un elemento lineal de un material con

un coeficiente de expansión térmica constante α . Si la longitud inicial es ℓ_0 y la temperatura inicial es T_0 entonces la longitud después de que la temperatura pase a tener valor T es:

$$\ell = \ell_0 e^{\varepsilon^l} = \ell_0 e^{\alpha(T-T_0)} \quad (9.2.4.3.4.8.)$$

Si se interpreta la deformación térmica como la deformación nominal la longitud final será diferente.

$$\varepsilon^e = \alpha(T - T_0) \quad (9.2.4.3.4.9.)$$

donde ε^e es la deformación nominal

La longitud final será:

$$\ell = \ell_0 (1 + \varepsilon^e) = \ell_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (9.2.4.3.4.10.)$$

Sin embargo, la diferencia debe ser suficientemente pequeña tal que:

$$\alpha|T - T_0| \ll 1 \quad (9.2.4.3.4.11.)$$

ya que:

$$\exp[\alpha(T - T_0)] \approx 1 + \alpha(T - T_0) \quad (9.2.4.3.4.12.)$$

9.2.4.3.5. Formulación del elemento

Las matrices de los elementos y los vectores se obtienen utilizando una formulación lagrangiana actualizada de la forma:

$$[\bar{K}_i] \Delta \mathbf{a}_i = \{F^{\text{app}}\} - \{F_i^{\text{nr}}\} \quad (9.2.4.3.5.1.)$$

$$[\bar{K}_i] = [K_i] + [S_i] \quad (9.2.4.3.5.2.)$$

la matriz $[K_i]$ es la ya conocida matriz de rigidez:

$$[K_i] = \int [B_i]^T [D_i] [B_i] d(\text{vol}) \quad (9.2.4.3.5.3.)$$

$[B_i]$ es la matriz que relaciona desplazamientos con deformaciones en términos de la geometría actual $\{X_n\}$ y $[D_i]$ es la matriz que relaciona la tensión con la deformación.

$[S_i]$ es la contribución de la matriz de rigidez de tensiones (o rigidez geométrica), que se escribe simbólicamente de la forma:

$$[S_i] = \int [G_i]^T [\tau_i] [G_i] d(\text{vol}) \quad (9.2.4.3.5.4.)$$

donde $[G_i]$ es la matriz de funciones de forma derivativa y $[\tau_i]$ es la matriz de las tensiones actuales de Cauchy $\{\sigma_i\}$ en el sistema de coordenadas globales. La fuerza residual de Newton- Raphson (ver apartado 9.2.7.1) queda de la forma:

$$[F_i^{nr}] = \int [B_i]^T \{\sigma_i\} d(\text{vol}) \quad (9.2.4.3.5.5.)$$

9.2.5. Planteamiento de la no linealidad del material

9.2.5.1. Concepto

Volviendo a la ecuación de equilibrio:

$$\int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{l\} = 0 \quad (9.2.5.1.1.)$$

donde los desplazamientos y las deformaciones están definidos por:

$$\{u\} = \{N\}\{a\} \quad (9.2.5.1.2.)$$

$$\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\} = \{B\}\{a\} \quad (9.2.5.1.3.)$$

se puede decir que la expresión es válida para cualquier tipo de material. Si las tensiones y deformaciones no tienen una relación lineal del tipo de la ley de Hooke:

$$\{\sigma\} = E\{\varepsilon\} \quad (9.2.5.1.4.)$$

entonces el problema se denomina no lineal desde el punto de vista del material. Además, dicha relación puede ser dependiente de la historia de cargas, de ma-

nera que las tensiones dependan tanto de la historia de las deformaciones como de las mismas deformaciones.

9.2.5.2. Tipos de no linealidad del material

La tipología de las no linealidades del material es muy extensa. En el siguiente apartado se realiza una visión somera sobre las más habituales, incidiendo especialmente en la que va a afectar a la presente Tesis.

a) Elasticidad no lineal

Si el material es elástico no lineal, se tendrá una relación entre tensiones y deformaciones de la forma:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (9.2.5.2.1.)$$

La relación (9.2.5.2.1.) es única: a un estado de deformación dado le corresponde un estado de tensión dado. Las ecuaciones (9.2.5.1.1.) a (9.2.5.2.1.) definirán completamente el problema, pudiéndose utilizar para su solución el algoritmo de Newton-Raphson, al igual que se vio en el apartado 9.2.4.3.

La elasticidad no lineal, al contrario de la plasticidad, es conservativa: no se pierde energía en el proceso.

b) Plasticidad

Se caracteriza por la deformación irreversible que ocurre en un material una vez que se alcanza cierto nivel de tensión. Puede ser:

b1) Dependiente del tiempo

En este modelo se permite que las deformaciones plásticas se desarrollen a lo largo del tiempo. Se denomina también viscoplasticidad.

b2) Independiente del tiempo

Se supone que las deformaciones plásticas se desarrollan de manera instantánea de forma independiente del tiempo. Es la que se ha utilizado en el presente estudio.

9.2.5.3. El modelo elegido: plasticidad independiente del tiempo

Para representar el comportamiento del acero se ha optado por formular el modelo de plasticidad independiente del tiempo, tal y como se indicaba en el apartado anterior. Existe una relación lineal entre tensión y deformación que sigue la ley de Hooke pero, a partir de una carga determinada, el material plástica, es decir, ante una disminución de la carga no recupera su estado inicial. El modo de descarga depende de la historia del material. Además, por mucho que se incremente la carga a partir de ese momento, la deformación permanece constante. Se ha utilizado una curva constitutiva como la que aparece en la Figura 4.5.2.7.: "Comportamiento del material bilineal".

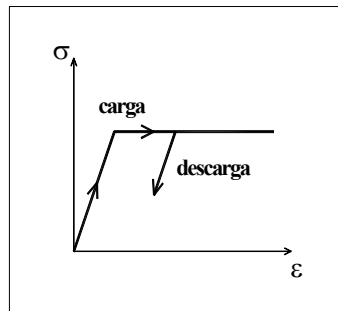


Figura 9.2.5.3.1. "Plasticidad pura."

Se demuestra experimentalmente que la tensión límite sólo se alcanza si las tensiones satisfacen la condición límite:

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (9.2.5.3.2.)$$

en la que k representa el parámetro de endurecimiento (efecto de la variación de la tensión de fluencia por plastificación). Esta condición se puede representar como una superficie en un estado de tensiones n -dimensional dependiendo la posición de los puntos de la superficie de los valores instantáneos del parámetro k (Figura 9.2.5.3.3.).

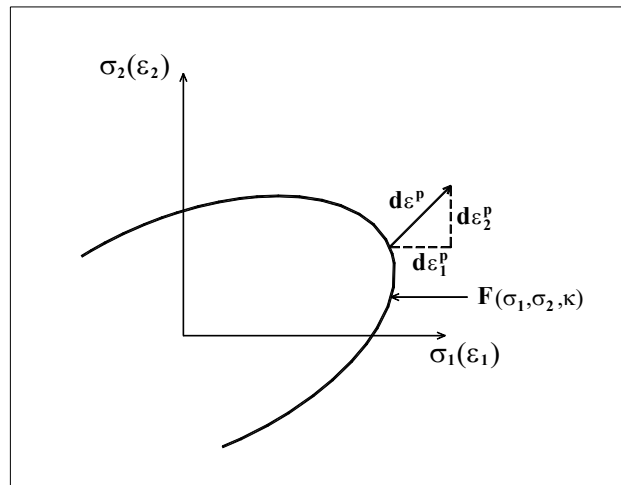


Figura 9.2.5.3.3. "Superficie de fluencia y criterio de ortogonalidad en el espacio bidimensional de tensiones."

Diversos autores como R. VON MISES en 1928, D.C.DRUCKER en 1951 y W.T.KOITER en 1953 demostraron que si $d\varepsilon^{pl}$ es el incremento de deformación plástica, se cumple que:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (9.2.5.3.4.)$$

lo cual implica que el vector de deformación plástica debe ser normal a la superficie de fluencia.

Se puede hacer menos rígida la restricción que impone el criterio anterior definiendo un potencial plástico (función de tensiones en términos de potencia plástica que determina la dirección de las deformaciones plásticas).

$$Q = Q(\sigma, K)$$

que expresa el incremento de deformación plástica de manera similar a la ecuación (9.2.5.3.4.), es decir:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

Si $Q=F$ el problema se denomina de plasticidad asociada. Si $Q \neq F$ la plasticidad no es asociada. En lo que sigue utilizaremos la expresión más general $Q \neq F$.

Durante un incremento infinitesimal de tensión, la deformación se puede descomponer en una elástica y otra plástica:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^{el}\} + \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.3.5.)$$

Pero las deformaciones elásticas están relacionadas con las tensiones por la matriz $[D]$ de forma lineal tal que:

$$\{d\varepsilon\} = [D^{-1}]\{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \lambda \quad (9.2.5.3.6.)$$

Quando se alcanza la fluencia plástica, las tensiones están sobre la superficie de fluencia $F(\sigma, k)$. Si se diferencia esta, queda:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk \frac{1}{\lambda} = 0 \quad (9.2.5.3.7.)$$

Si se llama:

$$A = - \left\{ \frac{\partial F}{\partial k} \right\} dk \frac{1}{\lambda} \quad (9.2.5.3.8.)$$

las ecuaciones anteriores quedan de forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D^{-1}] & \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\sigma\} \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (9.2.5.3.9.)$$

si se elimina la variable λ , se obtiene la variación de tensiones en función de los incrementos de deformaciones. Se consigue así:

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}^*] \{d\varepsilon\} \quad (9.2.5.3.10.)$$

siendo:

$$[D_{ep}^*] = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left[A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \right]^{-1} \quad (9.2.5.3.11.)$$

La matriz elastoplástica $[D_{ep}^*]$ hace las veces de matriz elástica $[D_T]$ empleada en un análisis por incrementos sucesivos.

Si se considera que el cuerpo es plástico ideal, el endurecimiento es 0 y por lo tanto $A=0$.

Una vez planteado el problema, la solución es inmediata por cualquier procedimiento numérico. Para ello se tienen en cuenta dos cosas:

- La matriz tangente es conocida para un valor definido de las tensiones y de la dirección de las fuerzas actuantes:

$$[D_T] = [D_{ep}^*] \quad (9.2.5.3.12.)$$

- Las tensiones pueden integrarse usando la expresión:

$$\{d\sigma\} = [D_T^*] \{d\varepsilon\} \quad (9.2.5.3.13.)$$

9.2.5.4. **Implementación en ANSYS**

9.2.5.4.1. Introducción

Existen una serie de parámetros que hay que establecer a la hora de implementar la metodología de cálculo de un problema de plasticidad en un programa de elementos finitos:

- a) Criterio de plastificación
- b) Velocidad de flujo de plastificación
- c) Criterio para definir el endurecimiento
- d) Incremento de deformación elástica
- e) Método de cálculo
- f) Matriz elastoplástica

9.2.5.4.2. Criterio de plastificación

En un modelo lineal, el criterio de plastificación es inmediato: se produce cuando la máxima tensión de la barra se iguala al límite elástico. Sin embargo, cuando el modelo es tridimensional existen tres tensiones principales en cada punto, lo cual obliga a definir una tensión equivalente σ_e que sea objeto de comparación con el límite de plastificación.

$$\sigma_e = f(\{\sigma\}) \quad (9.2.5.4.2.1.)$$

Siguiendo el mismo criterio que con el modelo lineal, la plastificación ocurre cuando:

$$f(\{\sigma\}) = \sigma_y \quad (9.2.5.4.2.2.)$$

9.2.5.4.3. Regla de flujo

La regla de flujo en general determina la dirección de las deformaciones plásticas y viene dada por:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (9.2.5.4.3.1.)$$

donde λ es el multiplicador plástico (que determina la cantidad de deformación plástica) y Q es una función que determina la dirección de plastificación. Si Q es la función de plastificación, que suele serlo, la dirección de plastificación es normal a la superficie de plastificación.

9.2.5.4.4. Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento describe el cambio de la superficie de plastificación con la progresiva plastificación de manera que se puedan establecer las condiciones para la siguiente plastificación (por ejemplo, el estado tensional). Existen dos posibles modos de endurecimiento:

a) Endurecimiento cinemático

Este modelo asume que la superficie de plastificación inicial se traslada respecto al origen como un sólido rígido mientras dura el flujo plástico. Un material inicialmente isotrópico deja de serlo después de plastificar porque aparece el efecto Bauschinger (Figura 9.2.5.4.4.1.).

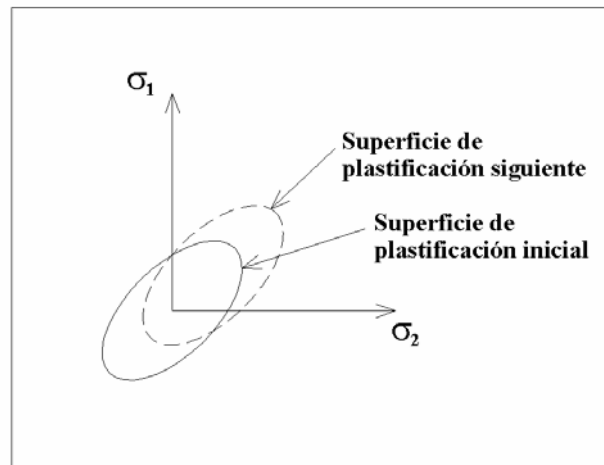


Figura 9.2.5.4.4.1. "Modelo cinemático de endurecimiento en diagrama de tensiones."

El comportamiento para un test uniaxial se muestra en la Figura 9.2.5.4.4.2. Nótese que la consecuyente plastificación en compresión se ve disminuida en la cantidad en la que la plastificación se incrementa, de manera que a $2\sigma_y$ la diferencia entre las plastificaciones se mantiene siempre.

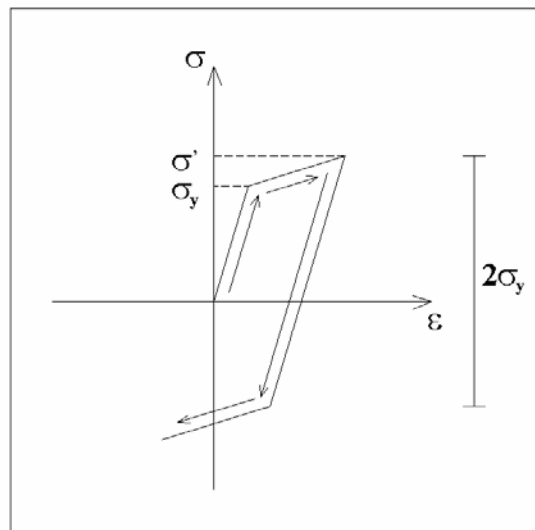


Figura 9.2.5.4.4.2. "Modelo cinemático de endurecimiento en diagrama tensión-deformación."

b) Endurecimiento isotrópico

Se supone que la superficie de plastificación se mantiene centrada respecto al mismo punto y lo que va variando es el radio de la superficie al ir plastificando.

Este modelo asume que el proceso de deformación plástica es isotrópico, ignorando el efecto Bauschinger (Figura 9.2.5.4.4.3.).

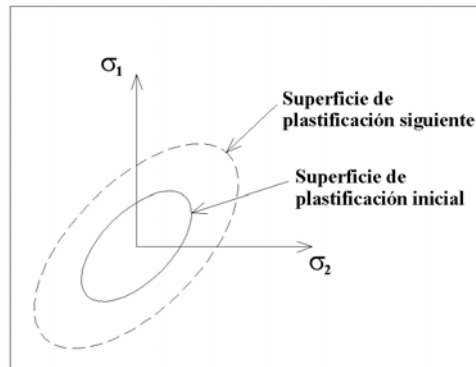


Figura 9.2.5.4.4.3. "Modelo de endurecimiento isotrópico en diagrama de tensiones."

El comportamiento de tensión-deformación para un test uniaxial se muestra en la Figura 9.2.5.4.4.4. La plastificación en compresión es igual a la tensión más alta conseguida durante la fase de tracción.

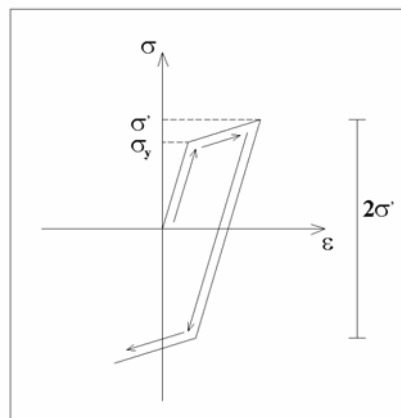


Figura 9.2.5.4.4.4. "Modelo isotrópico de endurecimiento en diagrama tensión-deformación."

9.2.5.4.5. Incremento de deformación plástica

Si la tensión equivalente supera el límite elástico, se produce la plastificación. Las deformaciones plásticas reducen el estado tensional de manera que se satisfaga el criterio de plastificación.

La regla de endurecimiento establece que el criterio de plastificación cambia con el endurecimiento cinemático y/o con el isotrópico. Introduciendo esta dependencia en (9.2.5.4.2.) se puede establecer que:

$$F(\{\sigma\}, k, \{\alpha\}) = 0 \quad (9.2.5.4.5.1.)$$

donde k es el trabajo plástico y $\{\alpha\}$ la traslación de la superficie plástica. El trabajo plástico es la suma de los trabajos plásticos que se hacen a lo largo de la historia de carga:

$$k = \int \{\sigma\}^T [M] \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.5.2.)$$

y la traslación de la superficie de plastificación también depende de la historia:

$$\{\alpha\} = \int C \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.5.3.)$$

donde C es un parámetro del material y $\{\alpha\}$ la localización del centro de la superficie de plastificación.

La ecuación (9.2.5.4.5.1.) se puede diferenciar, de manera que la condición queda:

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M] \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T [M] \{d\alpha\} = 0 \quad (9.2.5.4.5.4.)$$

donde:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.5.4.5.5.)$$

Derivando la ecuación (9.2.5.4.5.2.) se obtiene:

$$d\mathbf{k} = \{\sigma\}^T [\mathbf{M}] \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.5.6.)$$

y derivando la ecuación (9.2.5.4.5.3.):

$$\{d\alpha\} = \mathbf{C} \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.5.7.)$$

La ecuación (9.2.5.4.5.4.) queda:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{M}] \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{k}} \{\sigma\}^T [\mathbf{M}] \{d\varepsilon^{pl}\} + \mathbf{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T [\mathbf{M}] \{d\varepsilon^{pl}\} = 0 \quad (9.2.5.4.5.8.)$$

El incremento de tensión se obtiene de la relación tensión-deformación mediante la matriz $[\mathbf{D}]$:

$$\{d\sigma\} = [\mathbf{D}] \{d\varepsilon^{el}\} \quad (9.2.5.4.5.9.)$$

donde:

$$\{d\varepsilon^{el}\} = \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.5.10.)$$

ya que el incremento total de deformación se puede dividir en uno elástico y otro plástico. Sustituyendo la ecuación (9.2.5.4.3.1.) en la ecuación (9.2.5.4.5.6.) y (9.2.5.4.5.10.) y combinando las ecuaciones (9.2.5.4.5.7.), (9.2.5.4.5.9.) y (9.2.5.4.5.10.) se obtiene:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{M}] [\mathbf{D}] \{d\varepsilon\}}{-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{k}} \{\sigma\}^T [\mathbf{M}] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - \mathbf{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T [\mathbf{M}] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{M}] [\mathbf{D}] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (9.2.5.4.5.11.)$$

El tamaño del incremento de deformación plástica se expresa en función del incremento total de deformación, el estado actual de tensión y las formas específicas de las superficies de plastificación y la potencial. El incremento de deformación plástica se obtiene de la ecuación (9.2.5.4.3.1.).

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}$$

9.2.5.4.6. Implementación

Se utiliza un esquema de EULER para forzar la condición de consistencia (ecuación (9.2.5.4.5.4.)). El algoritmo consiste en:

1) Se determina el parámetro σ_y (ecuación (9.2.5.4.2.2.)) para el paso actual (n)).

2) Se define ε_n^{tr} a partir del paso anterior como:

$$\{\varepsilon_n^{tr}\} = \{\varepsilon_n\} - \{\varepsilon_{n-1}^{pl}\} \quad (9.2.5.4.6.1.)$$

y la tensión como:

$$\{\sigma^{tr}\} = [D]\{\varepsilon^{tr}\} \quad (9.2.5.4.6.2.)$$

3) Se calcula la tensión equivalente con la ecuación (9.2.5.4.1). Si σ_e es menor que σ_y entonces el material no plastifica y no se calcula incremento de tensión plástica.

4) Si se supera el límite elástico se determina el multiplicador plástico λ mediante un Newton-Raphson local (SIMO y TAYLOR (1985)).

5) Se calcula $\Delta\varepsilon^p$ mediante la ecuación

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (9.2.5.4.6.3.)$$

6) Se actualiza la tensión plástica:

$$\{\varepsilon_n^{pl}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{pl}\} + \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.6.4.)$$

donde ε_n^{pl} es la tensión plástica en la iteración actual, y la deformación elástica ε^{el} se calcula como:

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon^{tr}\} - \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.6.5.)$$

El vector de tensiones es:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (9.2.5.4.6.6.)$$

donde $\{\sigma\}$ son las tensiones de salida de ANSYS .

7) El incremento de trabajo plástico $\Delta\kappa$ y el centro de la superficie de plastificación $\{\Delta\alpha\}$ se calculan por las ecuaciones

$$d\kappa = \{\sigma\}[M]\{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.6.7.)$$

$$\{d\alpha\} = C\{d\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.6.8.)$$

y los valores actuales se reemplazan por:

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} + \Delta\kappa \quad (9.2.5.4.6.9.)$$

y

$$\{\alpha_n\} = \{\alpha_{n-1}\} + \{\Delta\alpha\} \quad (9.2.5.4.6.10.)$$

8) Para el postproceso, se definen una serie de valores:

- Deformación plástica equivalente, ε^{pl}
- Incremento de tensión plástica equivalente, $\Delta\varepsilon^{pl}$
- Parámetro de tensión equivalente, σ_e^{pl}
- Relación de tensión, $N = \frac{\sigma_e}{\sigma_y}$

$$\Delta\varepsilon^{pl} = \left(\frac{2}{3} \{\Delta\varepsilon^{pl}\}^T [M] \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2.5.4.6.11.)$$

9.2.5.4.7. Matriz elastoplástica

La matriz tangente o elastoplástica se obtiene del esquema de iteración de Newton-Raphson local utilizado en el paso 4 (SIMO y TAYLOR(1985)). Si la regla de flujo no es asociativa ($F \neq Q$) entonces la matriz tangente es antisimétrica. No es nuestro caso.

9.2.5.4.8. Elección del modelo

En ANSYS existen distintos modelos de material no lineal que surgen de combinar los parámetros anteriores. Cada uno de estos modelos representa un comportamiento físico distinto, y es por lo tanto apropiado o no según el pro-

blema que se esté analizando. El acero se puede asemejar a un material cinemático bilineal (BILINEAR KINEMATIC, en adelante BKIN). (Figura 9.2.5.4.8.1.).

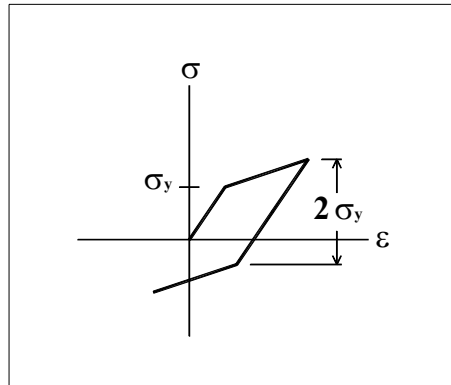


Figura 9.2.5.4.8.1. "Curva tensión-deformación modelo BKIN."

A continuación se exponen los criterios que definen este modelo en cuanto a los parámetros anteriores.

En el caso del material BKIN la tensión equivalente se define según Von Mises como:

$$\sigma_e = \left[\frac{3}{2} (\{s\} - \{\alpha\})^T [M] (\{s\} - \{\alpha\}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.2.5.4.8.2.)$$

donde:

- s es el vector que mide la desviación de las tensiones respecto a la tensión media

$$\{s\} = \{\sigma\} - \sigma_m [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (9.2.5.4.8.3.)$$

- la tensión media se define como:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (9.2.5.4.8.4.)$$

- $\{\alpha\}$ es el vector de traslación de la superficie plástica que se define en la ecuación (9.2.5.4.8.5.).

Aplicando el criterio de plastificación:

$$F = \left[\frac{3}{2} (\{s\} - \{\alpha\})^T [M] (\{s\} - \{\alpha\}) \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_y = 0 \quad (9.2.5.4.8.5.)$$

En el caso de que el material sea BKIN se toma como regla de flujo (ecuación de Prandtl-Reuss):

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3}{2\sigma_e} (\{s\} - \{\alpha\}) \quad (9.2.5.4.8.6.)$$

De manera que el incremento de la deformación plástica es normal a la superficie de plastificación.

La traslación de la superficie de plastificación se define como:

$$\{\alpha\} = 2G \{\varepsilon^{sh}\} \quad (9.2.5.4.8.7.)$$

con:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.2.5.4.8.8.)$$

La deformación de la superficie plastificada se calcula:

$$\{\varepsilon_n^{sh}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{sh}\} + \{\Delta\varepsilon^{sh}\} \quad (9.2.5.4.8.9.)$$

$$\{\Delta\varepsilon^{sh}\} = \frac{C}{2G} \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (9.2.5.4.8.10.)$$

$$C = \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (9.2.5.4.8.11.)$$

donde:

E = módulo de Young

E_T = módulo de Young tangente de la curva uniaxial tensión-deformación

La traslación de la superficie de plastificación $\{\varepsilon^{sh}\}$ es inicialmente cero y cambia con las deformaciones por plastificación.

La deformación plástica equivalente depende de la historia de carga y se define como:

$$\hat{\varepsilon}_n^{pl} = \hat{\varepsilon}_{n-1}^{pl} + \Delta\hat{\varepsilon}^{pl} \quad (9.2.5.4.8.12.)$$

donde:

$\hat{\varepsilon}_n^{pl}$ es la deformación plástica equivalente en el paso n

$\hat{\varepsilon}_{n-1}^{pl}$ es la deformación plástica equivalente en el paso anterior

El parámetro de tensión equivalente se define como:

$$\hat{\sigma}_e^{pl} = \sigma_y + \frac{EE_T}{E - E_T} \hat{\varepsilon}_n^{pl} \quad (9.2.5.4.8.13.)$$

Cuando no hay endurecimiento, como se ha supuesto en este caso, $\hat{\varepsilon}^{pl} = 0$, entonces $\hat{\sigma}_e^{pl}$ es la tensión de plastificación.

9.2.6. Elección del elemento de discretización

9.2.6.1. Introducción

A la hora de elegir el elemento lámina más adecuado se ha optado por un elemento que cumpla los siguientes requisitos en su formulación:

- Capacidad de representar la no linealidad geométrica para grandes deformaciones de manera que se pueda simular el pandeo.
- La matriz de rigidez del mismo debe contener términos que incluyan la rigidez dada por el estado tensional.
- Capacidad de tener en cuenta la no linealidad del material (plasticidad)

Existen tres elementos que cumplen esos tres requisitos: SHELL 43, SHELL 93 y SHELL 181. Tal y como se argumenta en la Tesis Doctoral de Arancha Manzanares "Cálculo de parámetros de imperfección en arcos metálicos de sección cajón" (2.001), el óptimo que permite obtener resultados en la presente investigación es el SHELL 43, ya que el SHELL 93 tiene 8 nodos, lo que incrementa de forma considerable el tiempo de cálculo sin proporcionar una mayor precisión en los resultados, y el SHELL 181 proporciona resultados inadecuados por defecto.

A continuación se detalla la formulación matemática de dicho elemento.

9.2.6.2. El elemento SHELL 43 en Ansys

9.2.6.2.1. Generalidades

Tal y como se ha comentado en el apartado 5.3.: "Modelización del arco con elementos SHELL" de forma breve y concisa, y que aquí se incluye inicialmente a modo de recordatorio, el elemento SHELL 43 sigue un modelo no lineal que se ajusta bien a las estructuras tipo lámina. Puede ser plano o alabeado, fino o moderadamente grueso. El elemento tiene seis grados de libertad en cada nodo: traslación en las direcciones nodales x , y , z y giros alrededor de los ejes nodales x , y , z . Las leyes de las deformadas son lineales en las dos direcciones del plano. Para el movimiento fuera del plano se utiliza una interpolación mixta de componentes tensoriales.

El elemento tiene capacidades de plasticidad (no linealidad del material), rigidez por tensión y grandes deformaciones (no linealidad geométrica), respondiendo así a todos los requisitos necesarios para la representación del arco.

En la Figura 9.2.6.2.1.1. se representa el elemento en su versión de 4 nodos.

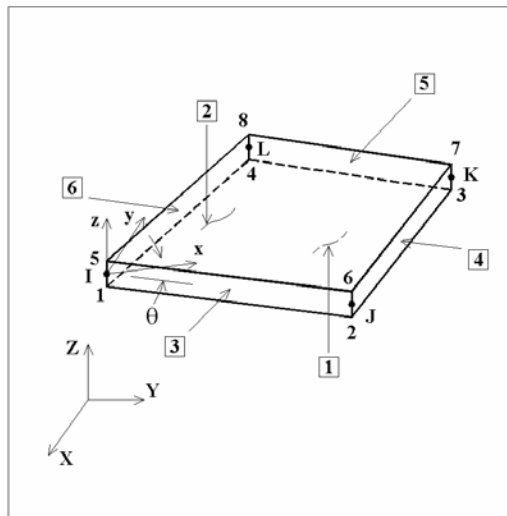


Figura 9.2.6.2.1.1. "Elemento SHELL 43."

9.2.6.2.2. Matrices utilizadas en la formulación del elemento

En este apartado se describen las distintas matrices que se utilizan para la formulación del elemento.

1. Matriz de rigidez

Funciones de forma

La matriz de rigidez del elemento se obtiene a partir de las siguientes funciones de forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^4 N_i \frac{rt_i}{2} \begin{bmatrix} p_{1,i} & b_{1,i} \\ p_{2,i} & b_{2,i} \\ p_{3,i} & b_{3,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \end{Bmatrix} \quad (9.2.6.2.2.1.)$$

Siendo N_i las funciones de forma que incluyen rotaciones como grados de libertad y tienen en cuenta las deformaciones por cortante, expresadas, para u , en la ecuación:

$$u = \frac{1}{4}(u_i(1-s)(1-t) + u_j(1+s)(1-t) + u_k(1+s)(1+t) + u_l(1-s)(1+t)) \quad (9.2.6.2.2.2.)$$

(para v y w son análogos, sustituyendo u por v y w)

donde

u_i, v_i, w_i son los movimientos en el nodo i , componentes de a_i

r es la coordenada del espesor

t_i es el espesor en el nodo i

$\{p\}$ es el vector unitario en la dirección s

$\{b\}$ es el vector unitario en el plano del elemento y normal a $\{p\}$

$\theta_{x,i}$ es el giro del nodo i sobre el vector $\{p\}$

$\theta_{y,i}$ es el giro del nodo i sobre el vector $\{b\}$

Los movimientos de los nodos están expresados en coordenadas globales.
Las deformaciones transversales por cortante son (Figura 9.2.6.2.2.3.):

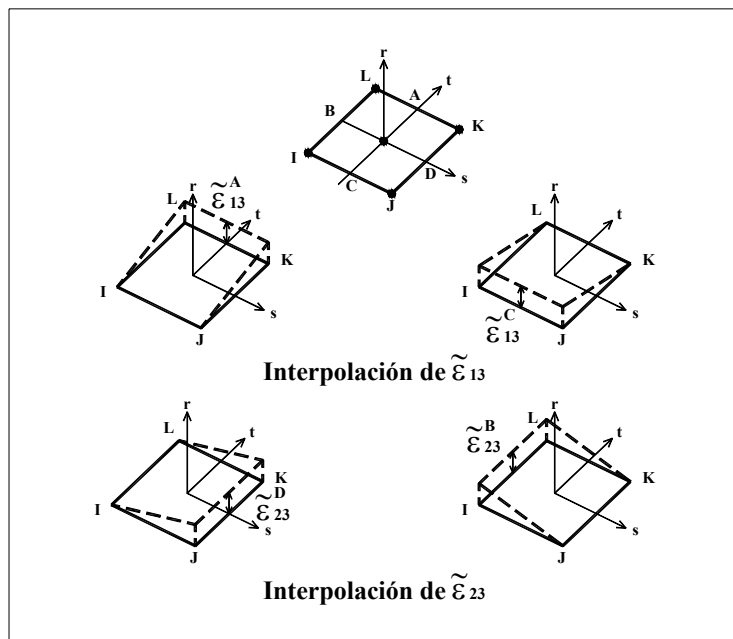


Figura 9.2.6.2.2.3. "Funciones de interpolación para deformaciones transversales."

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2}(1+t)\tilde{\varepsilon}_{13}^A + \frac{1}{2}(1-t)\tilde{\varepsilon}_{13}^C \quad (9.2.6.2.2.4.)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}(1+t)\tilde{\varepsilon}_{23}^D + \frac{1}{2}(1-t)\tilde{\varepsilon}_{23}^B \quad (9.2.6.2.2.5.)$$

donde:

$$\tilde{\varepsilon}_{13}^A = \tilde{\varepsilon}_{13}^{DI} \Big|_{enA} \quad (9.2.6.2.2.6.)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13}^C = \tilde{\varepsilon}_{13}^{DI} \Big|_{enC} \quad (9.2.6.2.2.7.)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23}^D = \tilde{\varepsilon}_{23}^{DI} \Big|_{enD} \quad (9.2.6.2.2.8.)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23}^B = \tilde{\varepsilon}_{23}^{DI} \Big|_{enB} \quad (9.2.6.2.2.9.)$$

Puntos de integración

Existen 2 x 2 puntos de integración en el plano y 5 a lo largo del espesor.

2. Matriz de rigidez por tensión

Funciones de forma

$$u = \frac{1}{4} (u_I(1-s)(1-t) + u_J(1+s)(1-t) + u_K(1+s)(1+t) + u_L(1-s)(1+t)) \quad (9.2.6.2.2.10.)$$

v y w son análogos sustituyendo u por v y w.

Puntos de integración

Son los mismos que para la matriz de rigidez.

3. Matriz de carga térmica

Funciones de forma

Las funciones de forma son las mismas que las de la matriz de rigidez

Puntos de integración

Los puntos de integración son los mismos que los de la matriz de rigidez.

4. Vector de carga de presión transversalFunciones de forma

$$w = \frac{1}{4}(w_I(1-s)(1-t) + w_J(1+s)(1-t) + w_K(1+s)(1+t) + w_L(1-s)(1+t)) \quad (9.2.6.2.2.11.)$$

Puntos de integración

Son dos por dos

5. Vector de carga de presión en los bordesFunciones de forma

$$u = \frac{1}{4}(u_I(1-s)(1-t) + u_J(1+s)(1-t) + u_K(1+s)(1+t) + u_L(1-s)(1+t)) \quad (9.2.6.2.2.12.)$$

$$v = \frac{1}{4}(v_I(1-s)(1-t) + v_J(1+s)(1-t) + v_K(1+s)(1+t) + v_L(1-s)(1+t)) \quad (9.2.6.2.2.13.)$$

Puntos de integración

Tienen dos puntos de integración

6. Tipos de cargasTemperatura del elemento

Bilineal en el plano del elemento, lineal a lo largo del espesor

Temperatura en los nodos

Bilineal en el plano del elemento, constante a lo largo del espesor

Presión

Bilineal en el plano del elemento y lineal a lo largo de cada borde.

7. Localización de los puntos de integración

La integración numérica del elemento viene dada por:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y) dx dy = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\ell} H_j H_i f(x_i, y_j) \quad (9.2.6.2.2.14.)$$

Los puntos de integración se muestran en la Figura 9.2.6.2.2.15.

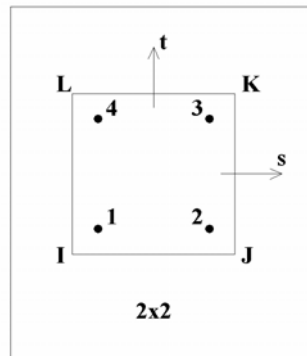


Figura 9.2.6.2.2.15. "Localización de los puntos de integración."

La extrapolación para el cálculo de variables en nodos se realiza mediante la variación:

$$a + bs + ct + dst$$

donde:

s,r,t son las coordenadas naturales del elemento

a,b,c,d son coeficientes

9.2.6.2.3. Restricciones

Las normales al plano medio central permanecen rectas después de la deformación, pero no necesariamente normales al plano medio.

A cada par de puntos de integración (en la dirección r) se le asume la misma orientación del elemento.

9.2.6.2.4. Funciones de forma de desplazamientos asumidas

Las funciones de forma correspondientes a las deformaciones transversales se muestran en la Figura 9.2.6.2.4.1.

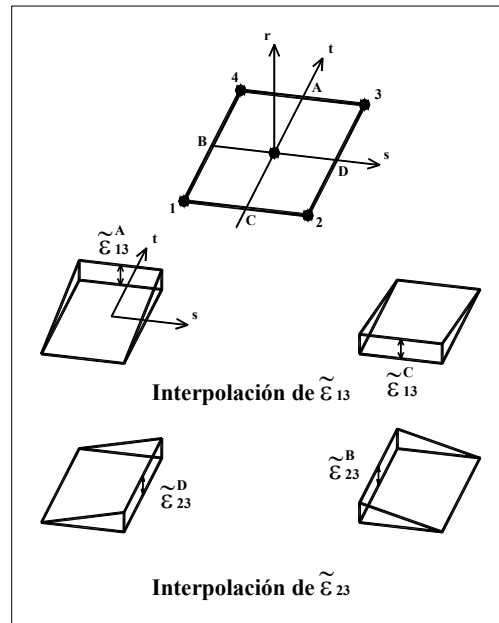


Figura 9.2.6.2.4.1. "Funciones de forma para deformaciones transversales."

Como resultado de estas funciones, los elementos elásticos rectangulares dan lugar a resultados de curvatura constante cuando son muy lisos e incluso, en ausencia de cargas de membrana, en elementos curvos. Por tanto, en estos casos, las tensiones de los nodos son las mismas que las de los centroides.

9.2.6.3. Relaciones tensión-deformación

La matriz del material [D] para este elemento es:

$$[D]=\begin{bmatrix} AE & A\nu E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A\nu E & AE & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{1.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{1.2} \end{bmatrix} \quad (9.2.6.3.1.)$$

donde:

$$A = \frac{E}{E - \nu^2 E} \quad (9.2.6.3.2.)$$

9.2.7. Elección del algoritmo de cálculo

9.2.7.1. Procedimiento de Newton-Raphson

Tal y como se ha comentado en el Capítulo 8, el algoritmo de cálculo elegido es el Método de Newton-Raphson, un procedimiento iterativo para resolver sistemas de ecuaciones. En el apartado 8.3 "Cálculos del comportamiento no lineal por el método de los elementos finitos" se describen los pasos necesarios para aplicar correctamente el algoritmo de cálculo.

Si el análisis incluye plasticidad, el proceso de cálculo de la solución antes referido requiere que algunos pasos intermedios estén en equilibrio, de cara a seguir la historia de carga apropiada. Esto se lleva a cabo mediante un análisis incremental paso a paso. El vector final se alcanza aplicando la carga en incrementos y haciendo un Newton-Raphson en cada paso.

$$[K_{n,i}^T] \{\Delta a_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (9.2.7.1.1.)$$

donde:

$[K_{n,i}]$ es la matriz tangente para el paso n, iteración i

$\{F_n^a\}$ es el vector de fuerzas total aplicado en el paso n

$\{F_{n,i}^{nr}\}$ es el vector de fuerzas restaurado para el paso n y la iteración i

Este proceso se llama de Newton-Raphson incremental y se muestra en la Figura 9.2.7.1.2.

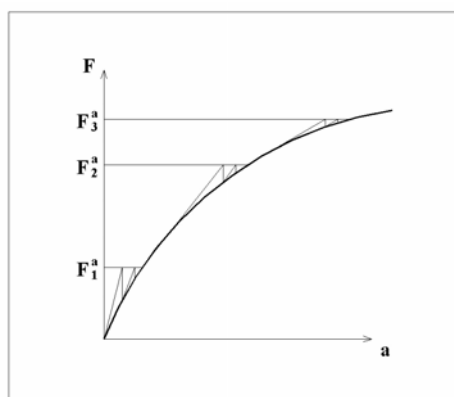


Figura 9.2.7.1.2. "Procedimiento de Newton-Raphson incremental."

Garantiza la convergencia si y sólo si la solución en cada iteración está cerca de la solución real.

Cuando la matriz de rigidez se actualiza en cada iteración el proceso se llama "Newton-Raphson" completo. Por otra parte, la matriz de rigidez se puede cambiar menos frecuentemente mediante el método de Newton-Raphson modificado. Por último, puede ocurrir que sólo se actualice la matriz en la primera iteración. En el presente estudio se ha utilizado el método modificado. Tanto el método inicial como el modificado convergen de manera más lenta que el completo, pero requieren menos reformulación de matrices y por lo tanto, inversión en tiempo.

9.2.7.2. Convergencia del Método de Newton-Raphson

En lo que respecta a que se alcance o no la convergencia se queda a lo indicado en el apartado 8.3 "Cálculos del comportamiento no lineal por el método de los elementos finitos" del Capítulo 8.

9.3. ESTADO DEL ARTE

Tal y como se ha comentado con anterioridad en los apartados previos relativos al estado del arte, existe muy poca bibliografía y labor de investigación en lo referente a la carga última de pandeo lateral de arcos metálicos (bajo los supuestos de comportamiento no lineal del material y no linealidad geométrica). Se incluye a continuación la referencia de artículos relativos a la carga última.

En 1.977 SAKIMOTO y KOMATSU estudiaron la carga última de pandeo lateral (al no ser carga última, bajo las hipótesis de no linealidad geométrica y del material) de arcos exentos con pequeñas deformaciones y lo aplicaron al caso concreto de un arco biapoyado de sección cajón de 1,00x1,00 m y espesor de 2 cm, con tensiones residuales e imperfecciones geométricas iniciales.

En 1.979 SAKIMOTO y KOMATSU determinaron la carga última de arcos metálicos unidos entre ellos transversalmente sometidos a la combinación de cargas verticales y horizontales laterales.

En 1.982 SAKIMOTO y KOMATSU calcularon la carga última de arcos unidos transversalmente utilizando una analogía entre el arco y la columna. A partir de estos cálculos dedujeron una fórmula de aplicación.

Los arcos estudiados son parabólicos o circulares de sección cajón con relaciones flecha-luz dentro del intervalo 0,1-0,2, considerando tensiones residuales e imperfecciones geométricas iniciales.

En 1.983 SAKIMOTO estudió la carga última de arcos unidos transversalmente bajo la acción de cargas verticales y/o transversales utilizando la analogía de las columnas.

1.998 PI y TRAHAIR determinaron el comportamiento transversal de un arco sometido a cargas en su plano utilizando un método de elementos finitos NO ELÁSTICO y NO LINEAL y considerando el efecto de las tensiones residuales e imperfecciones geométricas iniciales.

Existen otras investigaciones relativas a la carga última que no se incluyen en el presente apartado, ya que alguna de las hipótesis asumidas hacen que la carga determinada no se corresponda con la "carga última real" (cálculo lineal, material elástico lineal, etc).

9.4. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DEL ARCO MODELIZADO

El modelo geométrico utilizado simula arcos de directriz parabólica, con sección cajón, formados por chapas soldadas y sometidos a una carga constante uniforme distribuida en planta, tanto biapoyados como biempotrados.

La ecuación de la directriz del arco, tal y como se ha definido en los capítulos anteriores, viene dada por:

$$y(x) = -4 \frac{f}{L} x^2 + f + y_0(x) \quad (9.4.1.)$$

donde f es la flecha, L la longitud e $y_0(x)$ la imperfección geométrica inicial que varía según que el pandeo se estudie en o fuera del plano. El valor exacto de $y_0(x)$ ya se ha definido en capítulos anteriores y se resume más adelante en el apartado 9.8. "Imperfección geométrica constructiva empleada".

Las secciones transversales que se emplean son cajones rectangulares y/o cuadrados de dimensiones variables con espesores tales que pertenecen a secciones con almas compactas, con lo que se asegura la no existencia de abolladura en ninguna de las chapas que conforman la estructura ($t/d \leq 38\varepsilon$, Figura 9.4.2.).

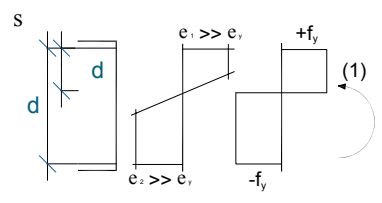
Clasificación del alma	Distribución de tensiones y deformaciones	Condición
Compacta	PLASTICA	
		Para $a \geq 0,5$ $\frac{d}{t_w} \leq \frac{456}{13a-1}$ Para $a < 0,5$ $\frac{d}{t_w} \leq \frac{41,5}{a}$

Figura 9.4.2.: "Relación entre longitud y espesor de una chapa según la RPM-95 para secciones con almas compactas."

El modelo tridimensional se considera de la siguiente forma:

- Se define una sección en el espacio con 40 puntos perpendicular a la directriz en el origen de la misma, tal y como se define en la Figura 9.4.3.

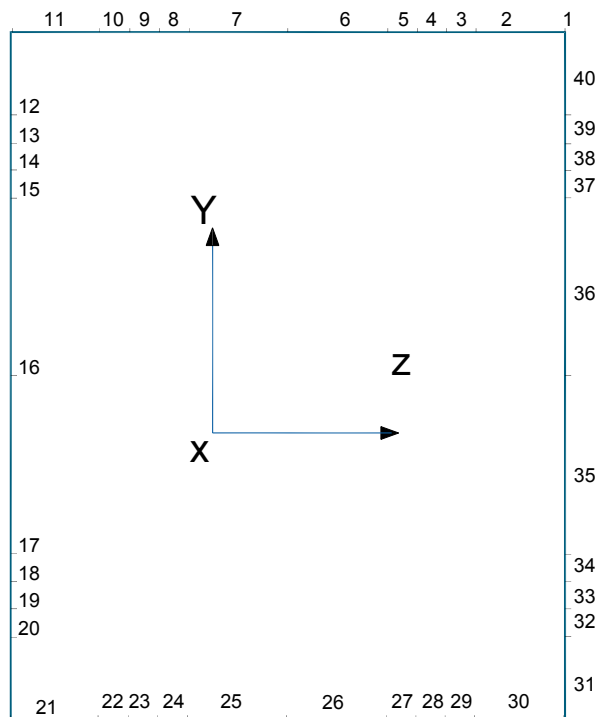


Figura 9.4.3. "Puntos y líneas que definen la sección transversal del arco perpendicular a la directriz."

La posición de los puntos que constituyen la sección viene determinada por la introducción del estado de autotensiones, que se define de forma detallada en el apartado 9.7. "Modelización del estado de autotensiones".

Los puntos se unen por 40 líneas tal y como se observa en la Figura 9.4.3.

Las coordenadas de cada punto de la sección se obtienen a partir del centro de gravedad con el fin de que la sección permanezca siempre perpendicular a la directriz tal y como se muestra en la Figura 9.4.4.

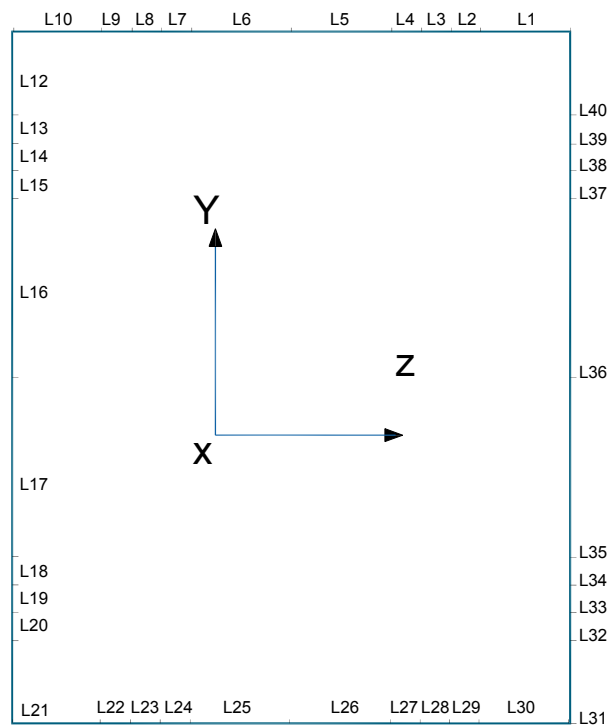


Figura 9.4.4. "Proceso de generación de la sección transversal."

En cualquier punto (x_i, y_i) de la directriz se cumple que:

$$\operatorname{tg} \alpha_i = y'(x_i) = -\frac{8f}{L^2} x_i^2 + y'_0(x_i) \quad (9.4.5.)$$

Las coordenadas del punto 1 de la sección serán

$$x(1) = x_i + \frac{H}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha_i$$

$$y(1) = y_i + \frac{H}{2} \cdot \operatorname{cos} \alpha_i \quad (9.4.6.)$$

$$z(1) = \frac{B}{2}$$

Análogamente se procede a dar coordenadas a todos los puntos de la sección.

La directriz se genera mediante 41 puntos de la ecuación (9.4.1.) con una curva SPLINE que pasa por dichos puntos. En ANSYS esta curva se representa mediante una sola línea.

A continuación se extruye la sección a lo largo de la curva directriz generando en el cálculo tantas áreas como líneas hay en la sección (40 áreas).

En lo que respecta al mallado de las áreas resultantes cabe destacar:

- Se considera un elemento por cada línea generada en la sección transversal inicial perpendicular a la curva directriz.
- Se consideran "n" elementos por cada línea longitudinal existente, siendo $n = \text{entero}(L/12t)$, donde L es la longitud del arco y t el espesor de la sección cajón.

En las siguientes figuras se muestra la génesis del arco por extrusión de la sección transversal inicial a lo largo de la directriz y la densidad de mallado resultante.

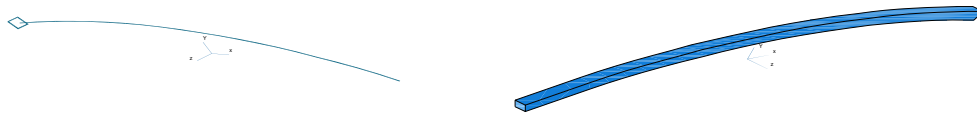


Figura 9.4.7. "Génesis del arco."

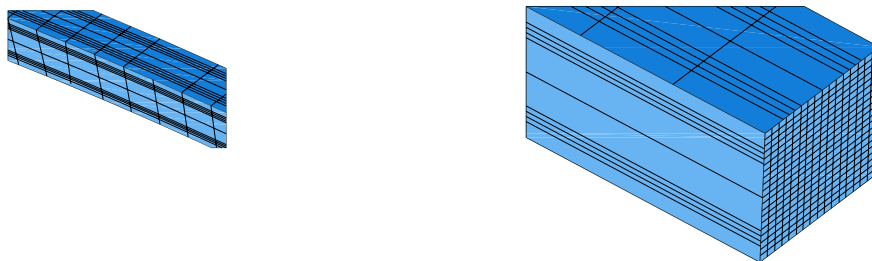


Figura 9.4.8. "Arco resultante y densidad de mallado."

9.5. CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL ACERO. PARÁMETROS ADOPTADOS EN EL MODELO DE CÁLCULO

Si bien ya se han definido con anterioridad y con detalle las características del material empleado tanto en el Capítulo 4 (Apartado 4.5.2.: "Descripción del acero como material no lineal") como en el presente Capítulo 9 (Apartado 9.2.5.: "Planteamiento de la no linealidad del material"), se resume de forma sucinta la adopción de parámetros de cálculo estimada para la presente Tesis Doctoral:

- Acero S235
- Material ISÓTROPO
- Límite elástico del acero $\sigma_y = 235 \text{ MPa}$
- Módulo de elasticidad $E = 210.000 \text{ MPa}$
- Módulo de Poisson $\nu = 0,2$
- La curva de comportamiento del material es la correspondiente a un "BILINEAL KINEMATIC HARDENING" (material bilineal cinemático), tal y como se muestra en la Figura 9.5.1.

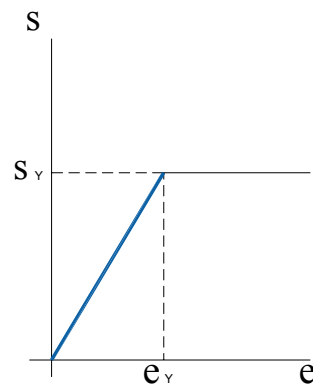


Figura 9.5.1.: "Curva de comportamiento del acero."

9.6. MODELIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Al igual que ocurre con los parámetros de cálculo adoptados para el material acero, la modelización de las condiciones de contorno ya se ha definido para el caso de los arcos discretizados utilizando el elemento lámina SHELL 43 (Capítulo 5 Apartado 5.4.2. "Condiciones de contorno para el elemento SHELL 43").

En primer lugar es necesario recalcar la importancia de simular correctamente las condiciones de contorno del problema: numerosos cálculos estructurales realizados con el método de los elementos finitos conducen a resultados falsos por una incorrecta modelización de las condiciones de contorno.

En el desarrollo de la presente Tesis Doctoral se consideran dos tipos de condiciones de contorno:

- a) Arco BIAPOYADO: En todos los nodos correspondientes a la arista intermedia de cada apoyo se impone que los desplazamientos según los tres ejes son nulos. $u_x=u_y=u_z=0$. En la Figura 9.6.1.a. se muestra la condición de contorno del arco biapoyado.
- b) Arco BIEMPOTRADO: En todos los nodos correspondientes a las cuatro aristas que conforman las secciones extremas de cada apoyo se impone que los desplazamientos según los tres ejes coordenadas son nulos. $u_x=u_y=u_z=0$. En la Figura 9.6.1.b. se muestra la condición de contorno del arco biempotrado.

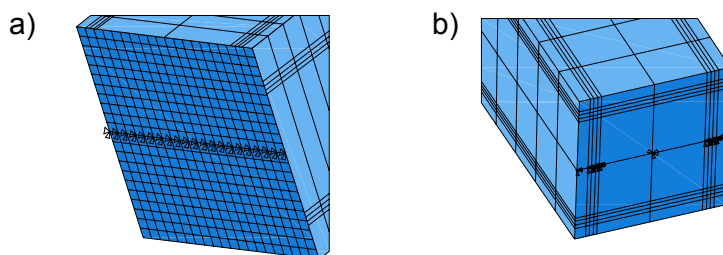


Figura 9.6.1.: "Condiciones de contorno de los arcos. (a)Biapoyado. (b)Biempotrado."

Es imprescindible rigidizar los apoyos con chapas de grosor elevado que simulen la realidad, para evitar la rotura por plastificación local de las chapas en los arranques.

En la Figura 9.6.2. se muestra el esquema de rigidización utilizado.

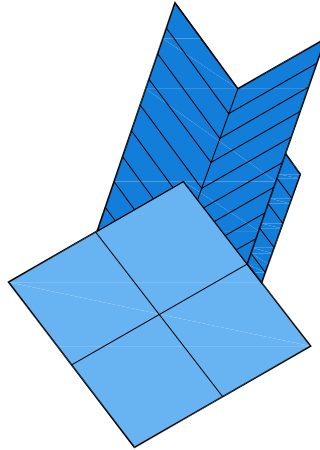


Figura 9.6.2.: "Esquema de rigidización de apoyo utilizado."

Este esquema de rigidización del apoyo hace que la sección extrema gire ante la acción de la carga de forma solidaria. Este refuerzo no altera la carga de colapso real, al representar el apoyo realmente empleado en el diseño de arcos; cabe referir que la zona reforzada es tan corta que no afecta a la rigidez global de la estructura. Por otro lado, las secciones pésimas están en riñones o en clave, lejos de los apoyos.

9.7. MODELIZACIÓN DEL ESTADO DE AUTOTENSIONES

Tal y como se describe en el Apartado 4.6.1.5. "Las tensiones residuales adoptadas en la presente Tesis" del Capítulo 4, se adopta la distribución de autotensiones recomendada por la ECCS para secciones en cajón soldadas de relación $h/t=40$, la cual se muestra en la Figura 9.7.1.

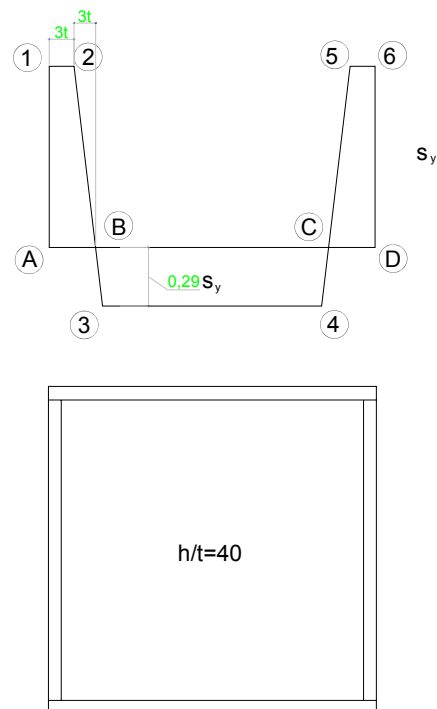


Figura 9.7.1.: "Distribución de autotensiones adoptada en el modelo de la Tesis."

Esta distribución de autotensiones se simula mediante un estado térmico que provoca el mismo efecto que la soldadura. El modelo de autotensiones (tal y como se detalla en el Apartado 4.6.1.5.) se define dando a cada nodo de la directriz del arco que pasa por el punto A la temperatura $\Delta T_A = \frac{2,29\sigma_y}{E\alpha}$, a los de los puntos B, C e intermedios la temperatura $\Delta T_B = \frac{0,29\sigma_y}{E\alpha}$ y a los nodos que quedan entre los puntos (2) y (3) y (4) y (5) una temperatura lineal entre ambos de valor $\Delta T_{(x)} = \left(\frac{\Delta T_A + \Delta T_B}{6t} \right) X - \Delta T_B$, con $X=0$ en el punto B.

La distribución de tensiones que se obtiene para cada arista es la buscada.

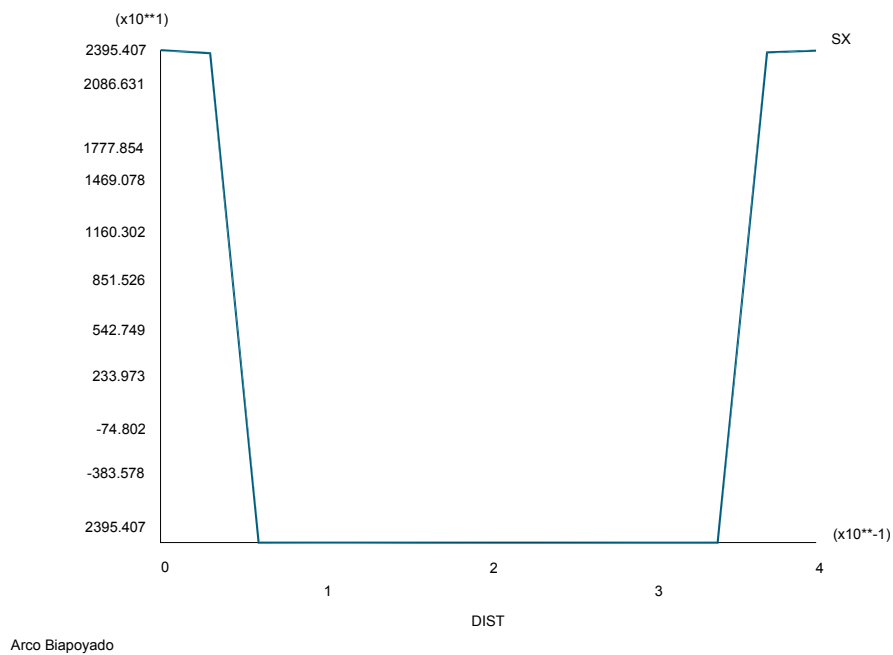


Figura 9.7.2.: "Diagrama de autotensiones utilizado en la presente Tesis."

9.8. IMPERFECCIÓN GEOMÉTRICA CONSTRUCTIVA EMPLEADA

Tal y como se define en el Apartado 4.7.5. "Imperfección geométrica adoptada en el presente Tesis", se adopta una deformada inicial de valor cose-noidal con el máximo en el punto medio del arco, de valor $\alpha(x) = e_0 \cdot \cos \frac{\pi x}{L}$, donde e_0 es el valor máximo de la imperfección $L/1000$ y "z" la coordenada que indica la dirección perpendicular al plano del arco.

En la Figura 9.8.1. se indica el valor utilizado para la misma.

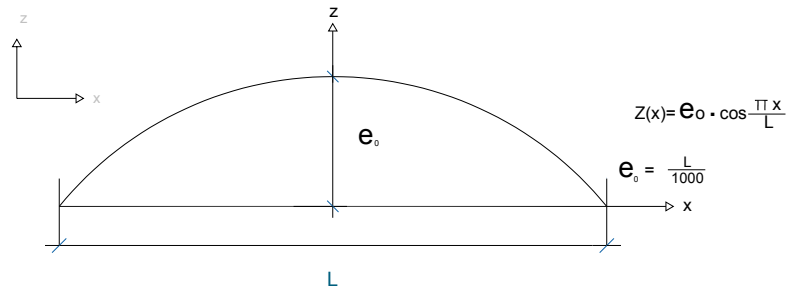


Figura 9.8.1.: "Imperfección geométrica del arco fuera del plano."

Para las pertinentes comprobaciones realizadas del comportamiento del arco en su plano la imperfección geométrica es de valor senoidal con los máximos en los cuartos del arco: $y(x) = \frac{L}{1000} \cdot \text{sen} \frac{2\pi x}{L}$. En la Figura 9.8.2. se define la imperfección geométrica utilizada para los cálculos del arco en el plano.

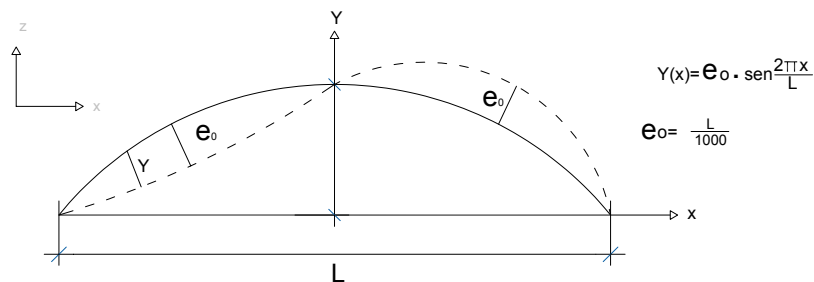


Figura 9.8.2.: "Imperfección geométrica del arco en su plano."

9.9. DEFINICIÓN DE LAS CARGAS ACTUANTES

La determinación de la carga última de colapso fuera del plano se realiza para una carga lineal uniformemente distribuida en planta. En el estudio del comportamiento del arco a pandeo lateral "no se considera el peso propio del arco".

Dado que el arco, al ser una estructura espacial, presenta un determinado espesor según el eje "z", es necesario definir un procedimiento simplificado que regule la introducción de las cargas actuantes.

Si se considera una carga "q" actuante definida en t/ml, la aplicación de la misma se lleva a cabo sobre los nodos pertenecientes a las aristas extremas situadas en la cara superior de la estructura con valores de z iguales a " $-b/2$ " y a " $+b/2$ ", siendo "b" la dimensión horizontal del cajón.

En la Figura 9.9.1. se muestran los nodos objeto de aplicación de las cargas.

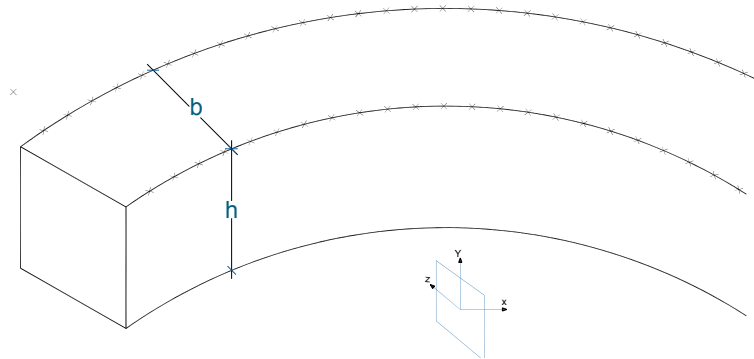
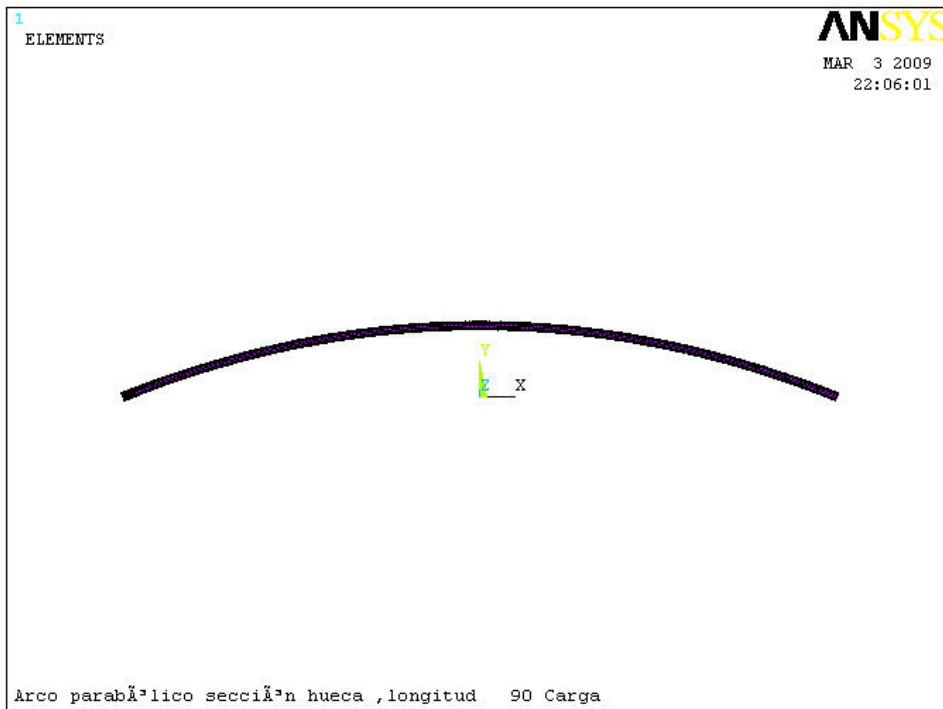
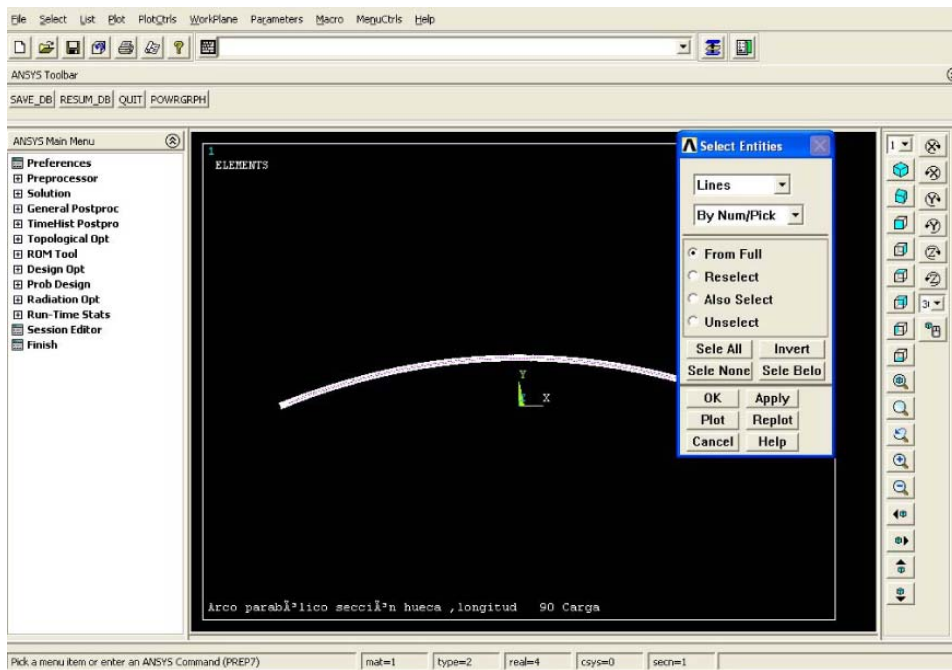
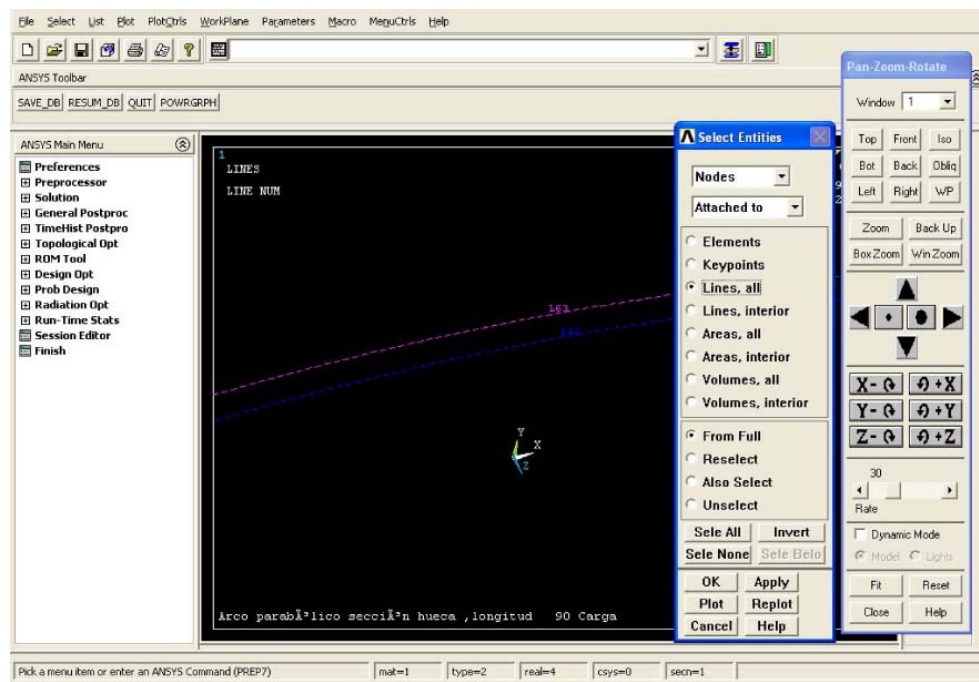
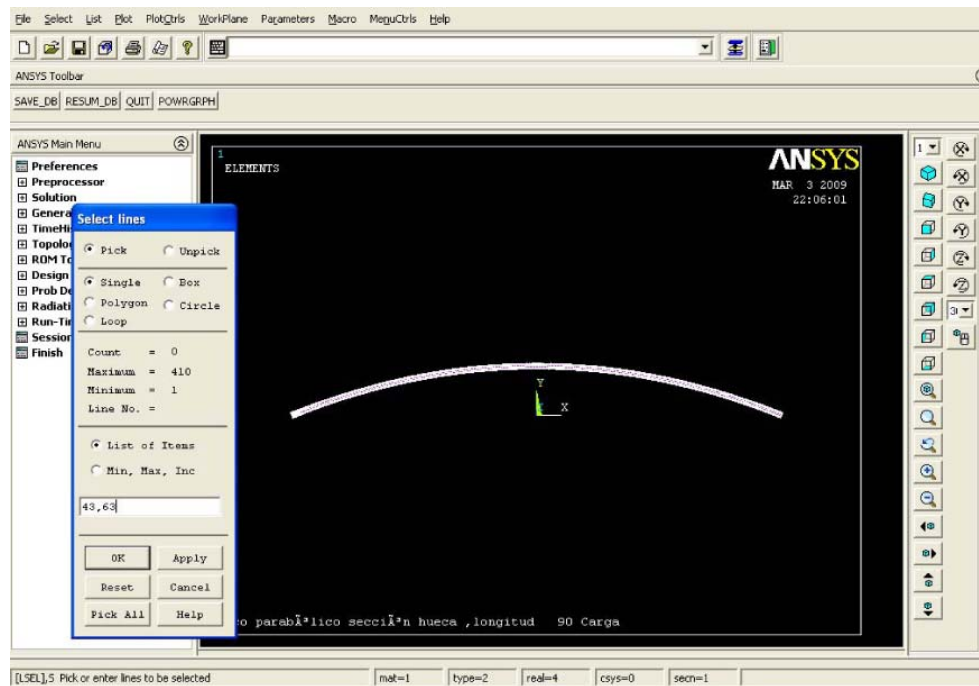


Figura 9.9.1. "Distribución de las cargas actuantes sobre el arco."

El programa ANSYS permite seleccionar los nodos asociados a unas líneas. La modelización del arco objeto de la presente Tesis presenta como líneas extremas superiores la 43 y la 63. En la Figura 9.9.2. se define de forma gráfica el proceso seguido para destacar los puntos de aplicación de las fuerzas.





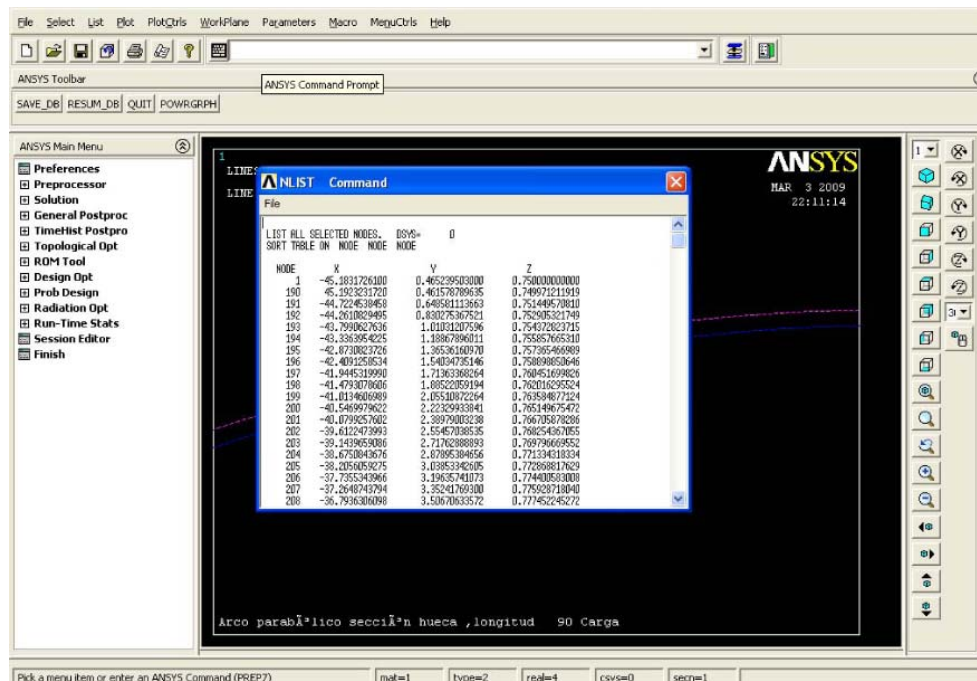


Figura 9.9.2.: "Proceso de determinación de los nodos de posicionamiento de las cargas actuantes."

Una vez definidos los nodos sobre los que se aplican las cargas es necesario calcular el valor de las mismas. Sea "q" el valor de la carga linealmente distribuida. Si se considera el nodo "i", la magnitud de la carga asignada al nodo viene dada por:

$$F_i = \frac{(X_{i+1} - X_{i-1})}{2} \cdot 0,5 \quad (9.9.3.)$$

Donde X_{i+1} y X_{i-1} son las coordenadas x de los nodos i+1 e i-1 respectivamente. El factor 0,50 reparte la carga total entre las dos aristas extremas. En la Figura 9.9.4. se define el esquema de reparto de las fuerzas.

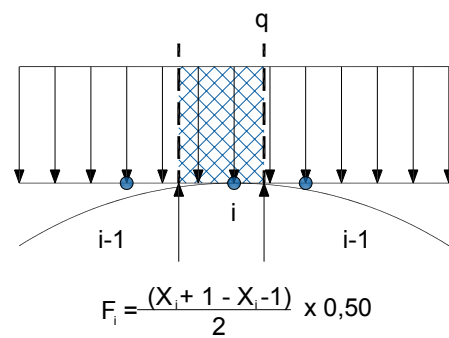


Figura 9.9.4. "Reparto nodal de las cargas actuantes."

Esta asignación de cargas sólo presenta una singularidad, correspondiente al caso de los nodos extremos. En este caso la magnitud de la fuerza viene dada por:

$$F_i^* = \frac{(X_{i+1} - X_i)}{2} \cdot 0,5 \quad (9.9.5.)$$

Donde X_i es el valor de la coordenada x del nodo i . En la Figura 9.9.6. se muestra el esquema de reparto para nodos extremos.

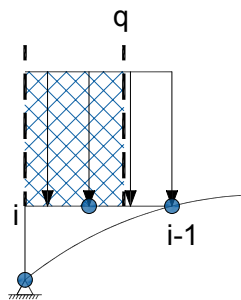


Figura 9.9.6.: "Reparto nodal de las cargas actuantes en el caso de nodos extremo."

9.10. ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DEL MODELO. CRITERIO DE VALIDACIÓN

La aceptación por parte de un proyectista de estructuras de los resultados numéricos obtenidos en un programa de cálculo de estructuras no lineal de elementos finitos es una decisión que se debe analizar con "cautela". Siempre se debe desconfiar de la máquina y valorar de forma rigurosa los resultados obtenidos con el fin de comprobar que el mecanismo que ha llevado al agotamiento es razonable y la falta de convergencia final del proceso no es debida a circunstancias meramente numéricas.

En todos los casos de colapso final de la estructura se debe producir un aumento "desproporcionado" del valor del desplazamiento lateral u_z del centro del arco en los momentos finales de la vida de la estructura, lo que indica que la causa "real" del final del arco es el pandeo lateral. En caso contrario, el colapso del arco se debe a cuestiones meramente tensionales, como consecuencia de la plastificación de numerosas secciones del mismo.

En la Figura 9.10.1. se muestra la forma que debe presentar la gráfica t - u_z en el caso de colapso de un arco por pandeo lateral. u_z representa el valor del desplazamiento máximo según el eje coordenado "z", que se corresponde con el de la sección central.

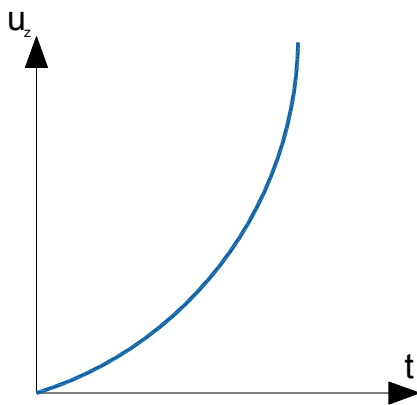


Figura 9.10.1.: "Forma de la gráfica tiempo-desplazamiento máximo según el eje z en el caso de colapso de un arco por pandeo lateral".

Asimismo, a la vez que se analiza la gráfica tiempo-desplazamiento máximo según el eje z , es posible obtener un gráfico del arco en el que se representan las tensiones del plastificación según el criterio del Von Mises, de tal forma que se considera que un punto del arco está plastificado si su tensión equivalente de Von Mises es igual o superior al valor de σ_y , que en este caso es igual a 23.500 t/m^2 . De esta forma se puede observar qué parte del arco se encuentra plastificado en el momento del colapso por pandeo lateral, una especie de porcentaje de aprovechamiento del mismo.

Lógicamente, para una sección y f/L dados, a mayor longitud menor valor de q_u/q_p de colapso y menor cantidad de zonas plastificadas en el momento último del arco, es decir, "menor aprovechamiento de la estructura"; a menor longitud, " q_u/q_p " más se aproxima a la unidad y el aprovechamiento del arco es mayor.

Con el fin de ilustrar el control realizado a nivel de cálculo se va a exponer, a título de ejemplo, la gráfica $t-(u_z)_{\text{máx}}$ obtenida para el caso de un arco de características:

- Sección en cajón 100×100 de espesor $2,50 \text{ cm}$
- Longitud = 120 m
- Flecha = 12 m

Se representa en la Figura 9.10.2. la gráfica $t-u_z$ para un estado de carga inmediatamente anterior al de colapso del arco.

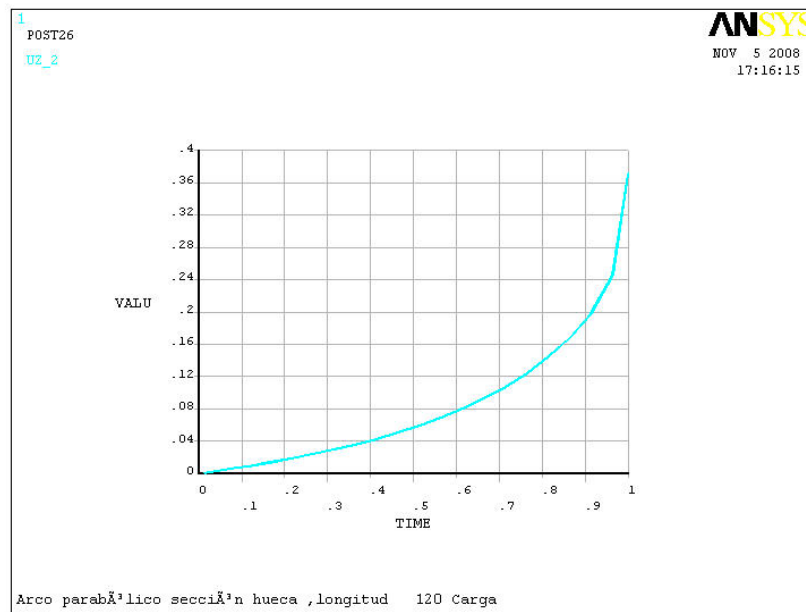


Figura 9.10.2.: "Gráfica tiempo $-u_z$ de un arco parabólico con sección en cajón 100 x 100, longitud 120 m y flecha 12 m."

Se observa un crecimiento progresivo del valor de u_z con el paso del tiempo que aumenta su gradiente de forma considerable en la parte final, lo que pone de manifiesto el carácter no lineal del fenómeno y la existencia de una no convergencia final motivada por la aparición del pandeo lateral.

Asimismo, se ha obtenido una gráfica que representa el valor de la tensión equivalente de Von Mises. Si $\sigma_{\text{VON MISES}} = \sigma_y$, la sección se encuentra plastificada (Figura 9.10.3.).

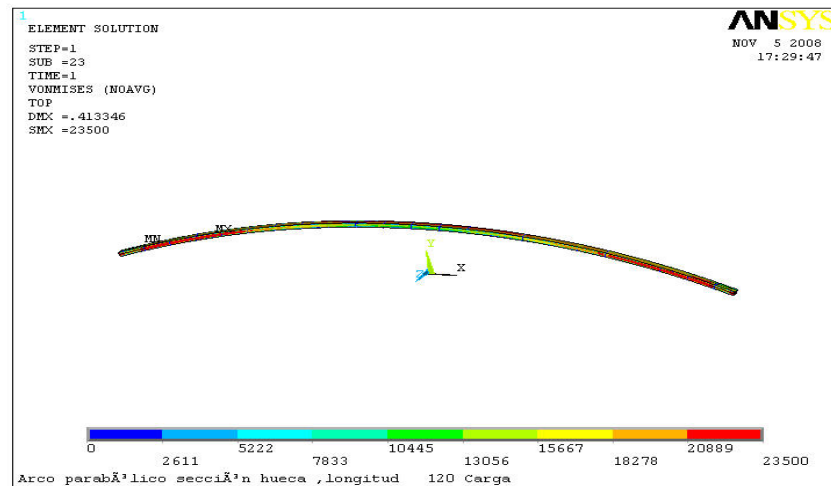


Figura 9.10.3.: "Valor de la tensión equivalente de Von Mises de un arco parabólico con sección en cajón 100 x 100, longitud 120 m y flecha 12 m."

Las zonas de color rojo están plastificadas o cerca de la plastificación, las cuales se ubican cerca de ambos extremos y en la cara superior de la zona central. Al ser el arco de elevada longitud ($L = 120\text{m}$), existen otras muchas zonas sin plastificar y el cociente q_u/q_p está lejos de la unidad.

9.11. ALGUNOS DETALLES MÁS A TENER EN CUENTA EN EL CÁLCULO

Un tema fundamental que hay que considerar a la hora de hacer los cálculos relativos a la presente Tesis Doctoral es el **espesor** de las chapas que conforman la sección transversal del arco.

La **abolladura** es un fenómeno de "inestabilidad local" que puede tener lugar en las chapas que constituyen la sección del arco y que procede de las siguientes tensiones:

- Tensiones tangenciales generadas por los esfuerzos CORTANTES. Ya se sabe que una tensión tangencial se puede descomponer en la suma de una tracción y una compresión de igual intensidad. Las tensiones de compresión pueden producir el pandeo del alma del cajón para valores inferiores al límite elástico del material. Como consecuencia de este

pandeo las paredes del alma quedan como abolsadas en diferentes recuadros en los que, idealmente, se subdivide el arco. La orientación de estas bolsas, inclinadas 45° , es perpendicular a las tensiones principales de compresión.

Para evitar esta clase de inestabilidad se disponen rigidizadores transversales cuya misión es dividir la placa del alma del arco de dimensiones $hw \cdot l$ (largo del arco) en recuadros de $hw \cdot a$, donde a es la distancia entre rigidizadores. En la Figura 9.11.1. se resume brevemente lo anteriormente comentado.

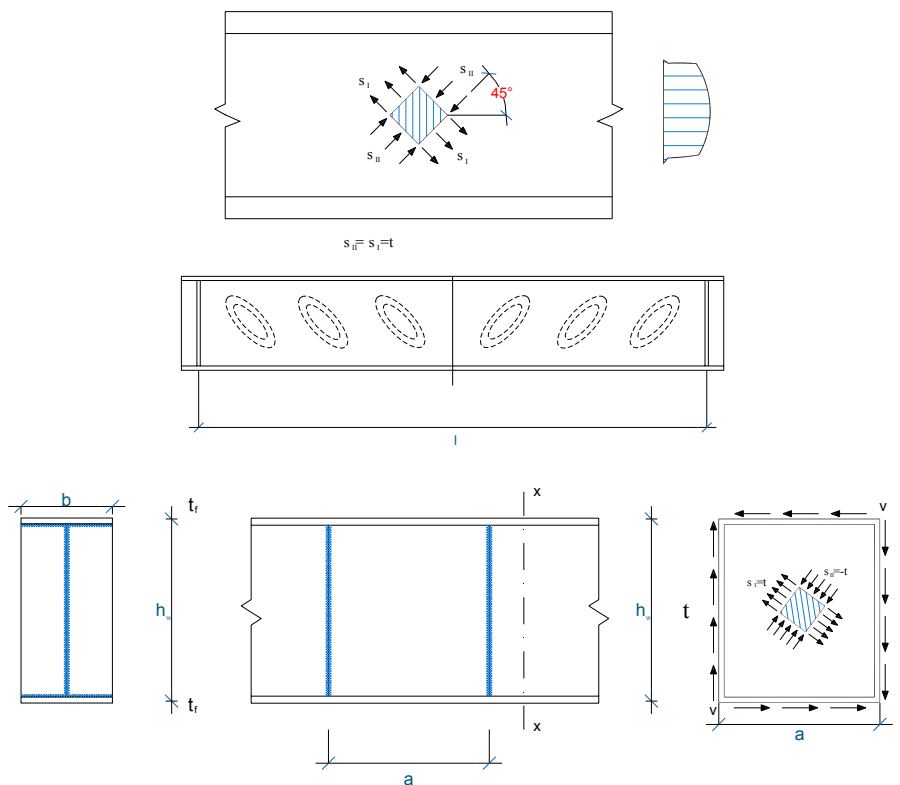


Figura 9.11.1.: "Abolladura del alma debida a las tensiones tangenciales."

- b) Tensiones normales de compresión. Proceden de la flexión simple, compresión simple o flexión compuesta. En el primer caso los abolsamientos que se forman en las paredes se disponen longitudinalmente. En la Figura 9.11.2. se indica la forma de la abolladura para el caso de flexión simple.

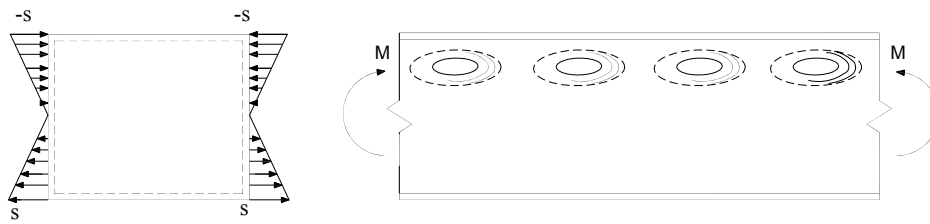


Figura 9.11.2.: "Abolladura del alma debida a tensiones normales."

En general, las esbelteces habituales de las almas no son tan elevadas como para que la flexión provoque por sí misma abolladura.

La combinación con las tensiones tangenciales derivadas del cortante facilita la pérdida de estabilidad, que se evita también con rigidizadores transversales, menos eficaces en este caso que en el anterior.

Para grandes alturas de almas (más de 2 m) se disponen, con el fin de reducir las dimensiones del recuadro en la zona de mayores tensiones normales, además de los rigidizadores transversales, rigidizadores LONGITUDINALES, tal y como se muestra en la Figura 9.11.3.

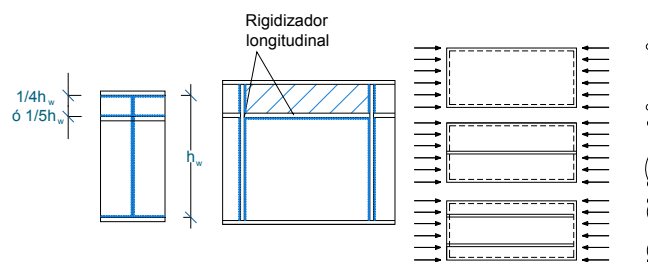


Figura 9.11.3. "Colocación y uso de los rigidizadores longitudinales."

- c) Tensiones normales y tangenciales combinadas. Es el caso más frecuente, ya que es habitual la convivencia de flector y cortante. Se resuelve con el uso de rigidizadores análogos a los dispuestos en los dos casos anteriores.

d) Fallos locales del alma bajo cargas concentradas. Sin relación con las situaciones de pandeo anteriormente comentadas, se pueden presentar en almas de secciones armadas y laminadas solicitadas por cargas concentradas (apoyos, cargas puntuales, etc) en las siguientes modalidades:

- aplastamiento del alma en la zona inmediata a la carga puntual acompañado de una deformación plástica de la pared horizontal del cajón, tal y como se muestra en la Figura 9.11.4.a.
- abolladura del alma concentrada en las proximidades de la carga más aplastamiento del alma en la zona inmediata a la carga puntual acompañado de una deformación plástica de la pared horizontal del cajón, tal y como se recoge en la Figura 9.11.4.b.
- pandeo local del alma en toda o parte de su altura, según la Figura 9.11.4.c.

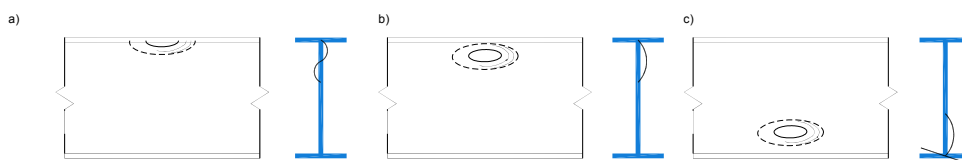


Figura 9.11.4.: "Fallos locales del alma bajo cargas concentradas."

Si se atiende a lo prescrito en la RPM-95 sobre la clasificación de almas parcial o totalmente comprimidas, Figura 6.3.3. b), se deduce que el alma es COMPACTA para el caso de compresión simple si se verifica:

$$\frac{d}{t_w} \leq \frac{456}{12} \epsilon \quad (9.11.5.)$$

donde d es la longitud de la chapa, t_w el espesor de la misma y $\epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ con f_y expresado en N/mm^2 .

En conclusión, $d/t_w \leq 38$. El cumplimiento de esta condición geométrica asegura la presencia de una sección compacta que no sufre abolladura. Por ello

todas las secciones transversales empleadas cumplen la desigualdad antes definida.

Otro aspecto básico en el funcionamiento de la sección del arco es el cálculo a TORSIÓN de la misma. La acción torsora se asocia con tres fenómenos:

- a) Torsión de St. Venant. El cajón se considera indeformable, apareciendo un flujo de tensiones tangenciales constante tal y como se ilustra en la Figura 9.11.6.

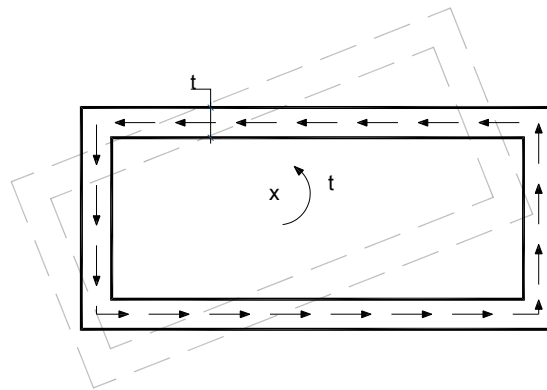


Figura 9.11.6.: "Comportamiento de la sección cajón bajo la torsión de St. Venant."

- b) Alabeo torsional. Al rotar el cajón sobre el eje longitudinal del arco produce unos corrimientos longitudinales, los cuales pueden estar impedidos ya sea por la existencia de coacciones exteriores al movimiento ya sea porque exista una ley de esfuerzos torsores variable. Existen tensiones normales que se suman a las procedentes de la torsión de St. Venant. No obstante, estas tensiones no son muy importantes en las secciones cajón.

En la Figura 9.11.7. se muestran los corrimientos longitudinales de la sección cajón debidos al alabeo torsional.

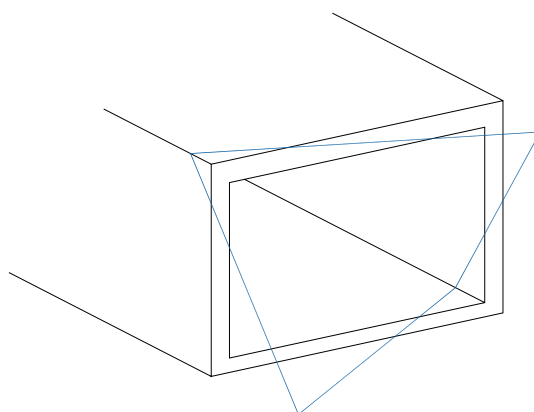


Figura 9.11.7.: "Corrimientos longitudinales de una sección cajón debidos al alabeo torsional."

- c) Distorsión. Tanto la torsión de St. Venant como el alabeo consideran la sección indeformable. No obstante, la acción torsora deforma el cajón, con lo cual surgen tensiones normales (más fuertes que las debidas al alabeo) y tensiones tangenciales que se suman a los estados anteriores.

Además surgen unas flexiones transversales.

En la Figura 9.11.8. se indican la deformación, tensiones normales, tensiones tangenciales y flexiones transversales que aparecen con la distorsión del cajón.

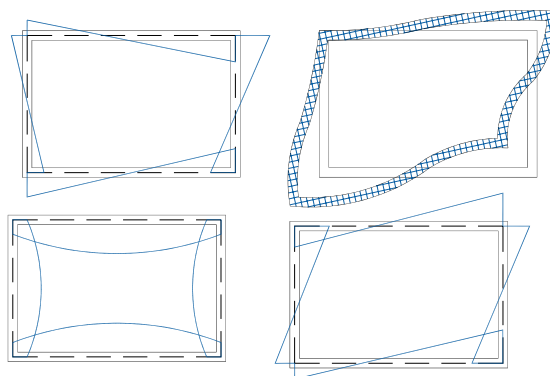


Figura 9.11.8. "Deformación, tensiones normales, tensiones tangenciales y flexiones transversales que aparecen con la distorsión de un cajón."

El fenómeno de la distorsión es tanto mayor cuanto mayor es la relación ANCHO-LUZ del arco; por el contrario, en arcos de grandes luces el efecto desaparece al ser la relación ancho-luz pequeña.

Entre los elementos que constituyen la sección transversal en cajón metálica cabe destacar el arriostramiento transversal a través de los diafragmas, el cual tiene varias misiones:

- controlar y resistir la distorsión del cajón provocada por la sollicitación ex-céntrica.
- controlar el pandeo fuera del plano de las chapas comprimidas.
- ayudar a impedir la inestabilidad de las almas metálicas.

La distorsión provoca que las tensiones longitudinales de la flexión general del arco dejen de ser uniformes, concentrándose en un lateral del cajón. El control de la distorsión se realiza con triangulaciones entre los rigidizadores transversales, creando lo que se llaman DIAFRAGMAS, los cuales soportan la distorsión, sin penalizar el estado de tensiones longitudinales de las chapas del cajón.

En la Figura 9.11.9. se incluye un detalle de diafragma.

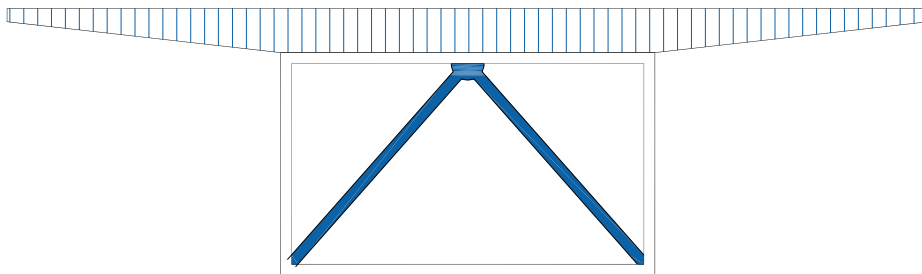


Figura 9.11.9.: "Ejemplo de diafragma."

Los **diafragmas de apoyo** son unos elementos especiales, situados en el caso particular de puentes sobre pilas y estribos, con la misión de transmitir correctamente los esfuerzos del tablero a dichas pilas y estribos.

En la Figura 9.11.10. se observa un diafragma de apoyo de un arco con sección en cajón de gran luz y anchura.

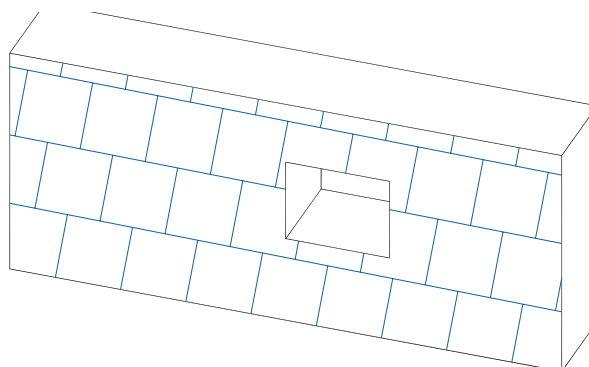


Figura 9.11.10.: "Detalle de un diafragma de apoyo."

Por lo tanto, se pone de manifiesto la necesidad de la colocación de diafragmas a lo largo de la directriz del arco que minimicen el fenómeno de la distorsión.

La **RPM-95**, en su apartado 6.6, define el tratamiento específico de los diafragmas. Se comentan a continuación los aspectos más destacados de su contenido.

Los diafragmas son elementos transversales que se disponen en el interior de las vigas en cajón con el fin de limitar, fundamentalmente, la distorsión de la sección y asegurar una eficaz incorporación de las cargas exteriores a la estructura, así como una eficaz difusión de las reacciones de apoyo.

Se deben disponer diafragmas en las secciones de apoyo y en las intermedias.

Se consideran una serie de condiciones mínimas para que no sea necesario considerar los efectos de la distorsión en el cajón, es decir, que la sección transversal sea indeformable y que las cargas excéntricas solamente produzcan esfuerzos de torsión uniforme con las consecuentes tensiones tangenciales que equilibren la torsión.

a) Distancia entre diafragmas

$$L_D \leq 4 \cdot d \quad (9.11.11.)$$

donde

L_D es la distancia entre diafragmas

d es la altura del alma del cajón

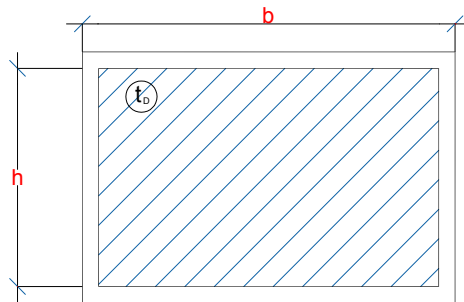
Además de los diafragmas de apoyo se debe disponer un mínimo de 4 diafragmas intermedios en cada vano del puente.

b) Rigidez mínima

$$\frac{K_D}{K_{DW} \cdot L_D} \geq 1500 \quad (9.11.12.)$$

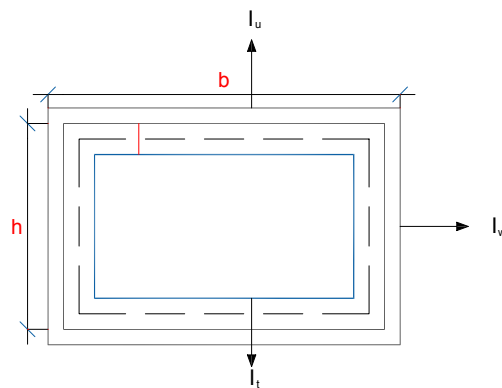
donde K_D es la rigidez del diafragma, la cual se calcula, según el tipo de diafragma utilizado, por la expresión:

- Para una chapa de espesor t_D



$$K_D = E/2 (1+\nu) t_D \cdot b \cdot h$$

- Para un marco

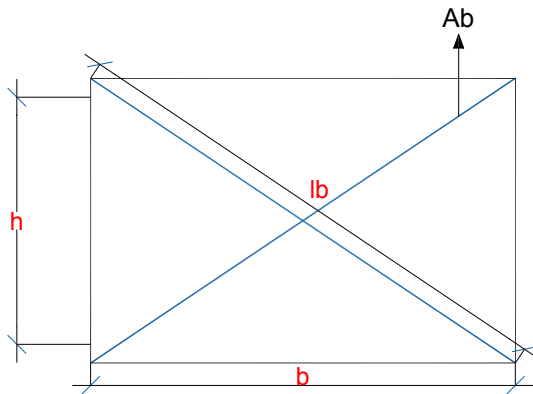


$$K_D = \frac{24EI_w}{\alpha_0 \cdot h}, \text{ donde}$$

$$\alpha_0 = 1 + \frac{2b/h + 3(I_u + I_t)/I_w}{(I_u + I_t)/I_w + (6h/b)(I_u I_t / I_w^2)}$$

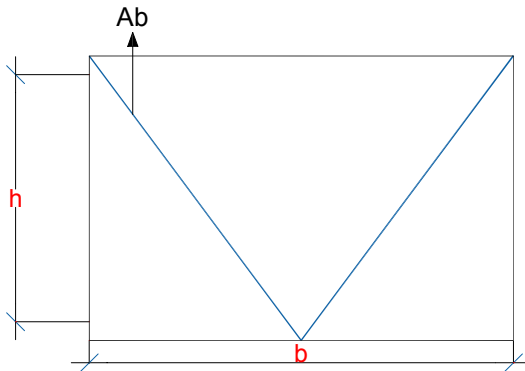
donde I_u , I_t e I_w son las inercias de los perfiles que constituyen el marco, a los que se ha añadido una anchura de chapa igual a $10t\sqrt{\frac{235}{f_y}}$ (con f_y expresado en N/mm^2).

- Para el caso de diagonales cruzadas



$$K_D = \frac{2EA_b b^2 h^2}{l_b^3}$$

- Para el caso de diagonales en K



$$K_D = \frac{2EA_b b^2 h^2}{2l_b^3}$$

K_{Dw} es la rigidez del cajón frente a la distorsión, y se calcula mediante la expresión $\frac{24EI_w}{\alpha_0 \cdot h}$, en donde I_u , I_w e I_t tienen el valor:

$$I_u = \frac{t_n^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$I_w = \frac{t_w^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$I_t = \frac{t_t^3}{12(1-\nu^2)}$$

b) Condiciones de resistencia

Los diafragmas intermedios han de dimensionarse con capacidad para resistir los siguientes esfuerzos:

- Esfuerzos originados por la torsión debida a la excentricidad de las cargas exteriores y a la geometría en puentes curvos.
- Esfuerzos originados por su función de rigidizador transversal
- Esfuerzos originados por las cargas que actúan directamente sobre el diafragma

En el caso de los diafragmas de apoyo se añadirá el dimensionamiento frente a las reacciones de apoyo debidas a las cargas horizontales y verticales.

Con todo lo anteriormente expuesto relativo al fenómeno de la distorsión se pone de manifiesto la necesidad de modelizar el efecto de los diafragmas para obtener unos resultados "no afectados" por la distorsión, que reflejan más fielmente lo que se emplea en la realidad.

Con el fin de no introducir "nuevas variables" en el desarrollo de la presente Tesis que hagan perder de vista el planteamiento general de la misma, se utiliza para un determinado canto el mismo diafragma, independientemente del ancho y el espesor de la sección considerada. Los resultados arrojados son perfectamente válidos, sin perjuicio de obtener un resultado más exacto empleando un diafragma de tipologías y dimensiones más específico atendiendo ya sea a la realidad ya sea a la normativa considerada.

Los diafragmas se modelizan con el tipo "MARCO" empleando elementos tipo "BEAM 4" que unen cuatro Keypoints situados en los extremos de la sección transversal, tal y como se indica en la Figura 9.11.13.

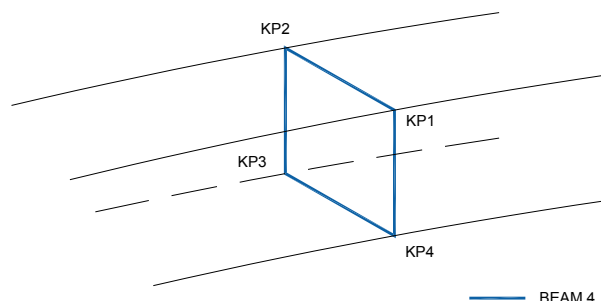


Figura 9.11.13: "Modelización de los diafragmas intermedios."

Las características de los diafragmas empleados son independientes del CANTO de la sección transversal:

Canto de sección Transversal (m)	Distancia entre diafragmas (m)	Sección (m ²)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)	I _t (cm ⁴)
0,50 / 1	5	0,0026	449,50	167,30	9,25

9.12. CÁLCULOS REALIZADOS

Una vez definido el modelo espacial a emplear con todo detalle, se indican a continuación los cálculos a realizar con objeto de alcanzar los resultados buscados por la presente Tesis Doctoral.

En primer lugar se realizan algunos cálculos correspondientes al comportamiento del arco dentro de su plano, con el fin de analizar los resultados obtenidos y cotejarlos con investigaciones existentes. A continuación se realizan los cálculos correspondientes al comportamiento del arco fuera de su plano, obteniendo los resultados que conformarán el "resultado último" de la presente Tesis Doctoral.

9.12.1. En el plano

Se procede a realizar los siguientes cálculos:

- a) Sección transversal: 40 x 40 cm
Espesor chapas: 1 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30
Longitudes: 20 y 60 m
Imperfección geométrica inicial en el plano
Tensiones residuales

- b) Sección transversal: 100 x 100 cm
Espesor chapas: 2 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30
Longitud: 60 m
Imperfección geométrica inicial en el plano
Tensiones residuales

- c) Sección transversal: 20 x 100 cm
Espesor chapas: 1 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30
Longitud: 60 m
Imperfección geométrica inicial en el plano
Tensiones residuales

9.12.2. Fuera del plano

Se procede a realizar los siguientes cálculos:

- a) Canto de la sección= 1 m
 - a.1) Sección transversal: 50 x 100 cm
Espesor chapas: 2,50 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30 / 0,40

Longitudes: 30, 60, 90, 120, 150, y 180 m
Imperfección geométrica inicial fuera del plano
Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondiente al canto de 1 m.

- a.2) Sección Transversal: 75 x 100 cm
Espesor chapas: 2,50 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10
Longitudes: 30, 60, 90 y 120 m
Imperfección geométrica inicial fuera del plano
Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondiente al canto de 1 m.

- a.3) Sección transversal: 100 x 100
Espesor chapas: 2,5 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30 / 0,40 / 0,50
Longitudes: 30, 45, 60, 90, 120, 150 y 180 m
Imperfección geométrica inicial fuera del plano
Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondientes al canto de 1 m.

- a.4) Sección transversal: 125 x 100 cm
Espesor chapas: 4 cm
Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado
Relación flecha-luz: 0,10
Longitudes: 30, 60, 90 y 120 m
Imperfección geométrica inicial fuera del plano
Tensiones residuales

Diafragma intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondientes al canto de 1 m.

a.5) Sección transversal: 150 x 100 cm

Espesor chapas: 4 cm

Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado

Relación flecha-luz: 0,10 / 0,20 / 0,30 / 0,40

Longitudes: 30, 60, 90, 120, 150 y 180 m

Imperfección geométrica inicial fuera del plano

Tensiones residuales

Diafragma intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondientes al canto de 1 m.

a.6) Sección transversal: 200 x 100 cm

Espesor chapas: 5 cm

Condiciones de contorno: biapoyado y biempotrado

Relación flecha-luz: 0,10

Longitudes: 30, 60 y 90 m

Imperfección geométrica inicial fuera del plano

Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados a 5 m con las propiedades mecánicas correspondientes el canto de 1 m.

b) Canto de la sección = 0,50 m

b.1) Sección transversal: 50 x 50

Espesor chapas: 2,50 cm

Condiciones de contorno: biempotrado

Relación flecha-luz: 0,10

Longitudes: 30 y 90m

Imperfección geométrica inicial fuera del plano

Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondientes al canto 0,50 m.

- b.2) Sección transversal: 100 x 50 cm
Espesor chapas: 2,50 cm
Condiciones de contorno: biempotrado

Relación flecha-luz: 0,10
Longitudes: 30 y 90 m
Imperfección geométrica inicial fuera del plano
Tensiones residuales

Diafragmas intermedios situados cada 5 m con las propiedades mecánicas correspondiente al canto de 0,50 m.

9.13. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS. COMPARACIÓN CON LOS OBTENIDOS POR OTROS AUTORES

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para los diferentes cálculos realizados, distinguiendo los correspondientes al plano de los de fuera del plano. Asimismo, se comparan con otros valores aportados por otros autores e investigadores de la materia, incluyendo valoraciones y análisis críticos al respecto.

9.13.1. Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco en su plano

Se presentan a continuación, agrupados por longitud, sección transversal y condición de contorno, los resultados obtenidos de carga última para los cálculos del comportamiento del arco en su plano.

a) Sección transversal 40 x 40 cm

Espesor chapas: 1 cm

a.1) Longitud: 20 m

Arco BIARTICULADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	8,80
0,20	15,0
0,30	17,90

Arco BIEMPOTRADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	10,80
0,20	20,0
0,30	24,30

a.2) Longitud: 60 m

Arco BIARTICULADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	0,82
0,20	1,36
0,30	1,53

Arco BIEMPOTRADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	1,53
0,20	2,70
0,30	3,28

b) Sección transversal 100 x 100 cm

Espesor chapas: 2 cm

Longitud: 60 cm

Arco BIARTICULADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	9,70
0,20	16,30
0,30	20,00

Arco BIEMPOTRADOCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q_u
0,10	15,30
0,20	27,40
0,30	35,40

c) Sección transversal 20 x 100 cm

Espesor chapas: 1 cm

Longitud: 60 m

Arco BIARTICULADOArco BIEMPOTRADOCARGA ÚLTIMA EN t/mlCARGA ÚLTIMA EN t/ml

f/L	q _u
0,10	1,19
0,20	1,94
0,30	5,65

f/L	q _u
0,10	1,76
0,20	2,75
0,30	9,12

Con el fin de analizar los resultados obtenidos y compararlos con los presentados por otros investigadores, se expresan las tablas anteriores en función de unos parámetros adimensionales previamente descritos en el Capítulo 5: "Modelos de cálculo aplicados en el estudio. Definición de los valores de referencia".

Sección transversal= 40 x 40 cm

e= 1 cm

$$\text{Radio de giro con respecto al eje } x = i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 0,16335034$$

$$\text{Esbeltez mecánica con respecto al eje } x = \lambda_x = \frac{ls}{i_x} = \frac{ls}{0,16335034}$$

$$\text{Esbeltez mecánica relativa con respecto al eje } x = \bar{\lambda}_x = 0,50 \cdot \frac{\lambda_x}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}}} = 0,005324 \lambda_x$$

$$\text{Carga de plastificación por axil en arranques} = qp = \frac{2A\sigma_y}{L\sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{L}{f}\right)^2 + 1}}$$

En función de lo anterior, se obtiene:

LONGITUD: 20 m

ARCO BIARTICULADO

f/L	L _s (m)	$\bar{\lambda}$	q _p (t/ml)	q _u /q _p
0,10	20,52	0,677	13,96	0,63
0,20	21,96	0,725	23,49	0,639
0,30	24,09	0,795	28,88	0,62

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	$\bar{\lambda}$	q _u /q _p
0,10	0,677	0,774
0,20	0,725	0,851
0,30	0,795	0,841

LONGITUD: 60 m

ARCO BIARTICULADO

f/L	L _s (m)	$\bar{\lambda}$	q _p (t/ml)	q _u /q _p
0,10	61,56	2,006	4,65	0,176
0,20	65,89	2,147	7,83	0,174
0,30	72,26	2,355	9,63	0,159

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	$\bar{\lambda}$	q _p (t/ml)
0,10	2,006	0,329
0,20	2,147	0,345
0,30	2,355	0,341

Sección transversal = 100 x 100 cm

e = 2 cm

LONGITUD = 60 m

ARCO BIAPOYADO

f/L	L _s (m)	$\bar{\lambda}$	q _p (t/ml)	q _u /q _p
0,10	61,56	0,803	23,27	0,417
0,20	65,89	0,859	39,15	0,416
0,30	72,26	0,942	48,14	0,415

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	$\bar{\lambda}$	q _p (t/ml)
0,10	0,803	0,657
0,20	0,859	0,700
0,30	0,942	0,735

Sección transversal = 20 x 100 cm

e = 1 cm

LONGITUD = 60m

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	L_s (m)	$\bar{\lambda}$	q_p (t/ml)	q_u/q_p
0,10	61,56	1,966	6,98	0,17
0,20	65,89	2,105	11,74	0,165
0,30	72,26	2,308	14,44	0,3912

ARCO BIAPOYADO

f/L	$\bar{\lambda}$	q_p (t/ml)
0,10	1,966	0,252
0,20	2,105	0,234
0,30	3,308	0,631

En primer lugar se van a comparar los resultados obtenidos en la presente Tesis para la sección transversal de 40 x 40 con los reflejados en la Tesis Doctoral "Cálculo de parámetros de imperfección en arcos metálicos de sección cajón" de Arancha Manzanares.

En las Figuras 9.13.1.1. y 9.13.1.2. se muestran las cargas últimas de colapso obtenidas por Arancha Manzanares en 2.001 para arcos biarticulados y biempotrados respectivamente.

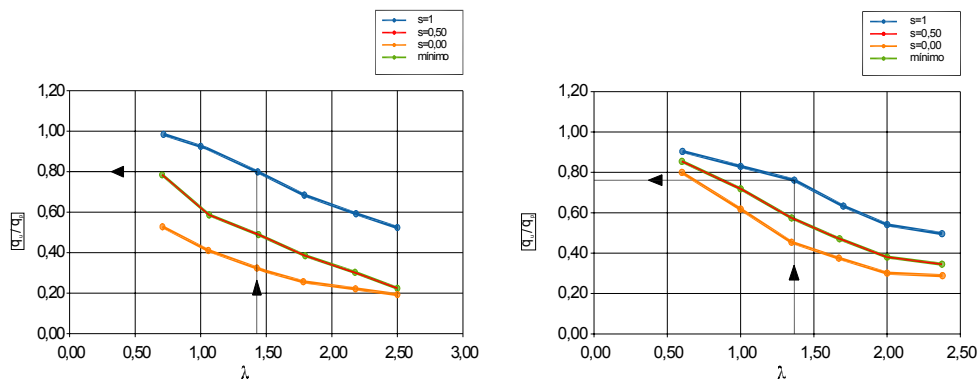


Figura 9.13.1.1. "Cargas pésimas de colapso de arcos biarticulados con relaciones flecha-luz 0,1 y 0,2 según Arancha Manzanares."

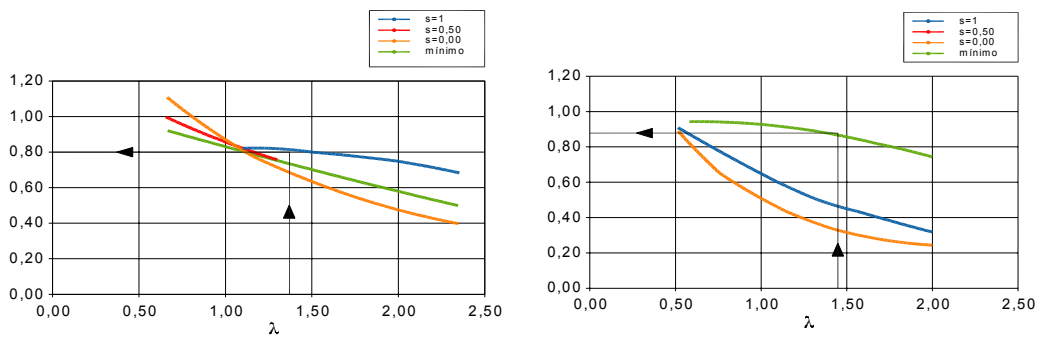


Figura 9.13.1.2. "Cargas pésimas de colapso de arcos biempotrados con relaciones flecha-luz 0,1 y 0,2 según Arancha Manzanares (2001)."

Utilizando los gráficos anteriormente incluidos para $S = 1$ y teniendo en cuenta que en ellos $\bar{\lambda}_x = 0,010648 \lambda_x$, se obtiene

LONGITUD: 20 m

ARCO BIARTICULADO

f/L	$\bar{\lambda}_x$	q_u/q_p	q_p (t/ml)
0,10	1,354	0,72	10,05
0,20	1,45	0,80	18,79

ARCO BIEMPOTRADO

f/L	$\bar{\lambda}_x$	q_u/q_p	q_p (t/ml)
0,10	1,354	0,80	11,16
0,20	1,45	0,87	20,43

LONGITUD: 60 m.

No se puede comparar. Las esbelteces reducidas $\bar{\lambda}_x$ están comprendidas entre 4 y 4,6, no estando calculados este rango de datos.

En la tabla que se adjunta a continuación se muestran las diferencias en los resultados obtenidos entre la Tesis Doctoral y la redactada por Arancha Manzanares en 2001.

Sección 40 x 40

L = 20 m

f/L	ARCO BIARTICULADO			ARCO BIEMPOTRADO		
	Carga última A. Manzanares	Carga última presente Tesis	Diferencia porcentual	Carga última A. Manzanares	Carga última presente Tesis	Diferencia porcentual
0,10	10,05	8,80	14,2 %	11,16	10,80	3,33 %
0,20	18,79	15,00	25,3 %	20,43	20,40	2,15 %

De la comparativa realizada se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- En lo que respecta al arco biempotrado, los resultados son coincidentes, la pequeña diferencia existente corresponde al posible error acumulado cometido al tomar el dato de la gráfica.
- En lo que respecta el arco biarticulado las diferencias son mayores, aunque dentro de un intervalo razonable (menores al 25%). La causa que explica esta mínima diferencia es la no coincidencia de las condiciones de contorno para el caso de arco biarticulado entre la Tesis Doctoral de Arancha Manzanares y la presente Tesis, tal y como se muestra en la Figura 9.13.1.3.

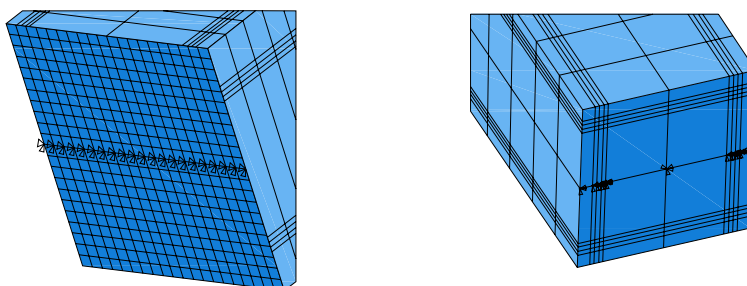


Figura. 9.13.1.3. "Diferencias en las condiciones de contorno del arco biapoyado entre las Tesis Doctorales de Arancha Manzanares y la presente Tesis."

Del resto de los cálculos realizados correspondientes a una longitud de arco de 60 m no es posible realizar comprobación alguna por ausencia de bibliografía o investigaciones al respecto. No obstante, los resultados obtenidos son lógicos, lo que valida por completo el modelo de cálculo empleado en lo que a su variante de inputs en el plano se refiere.

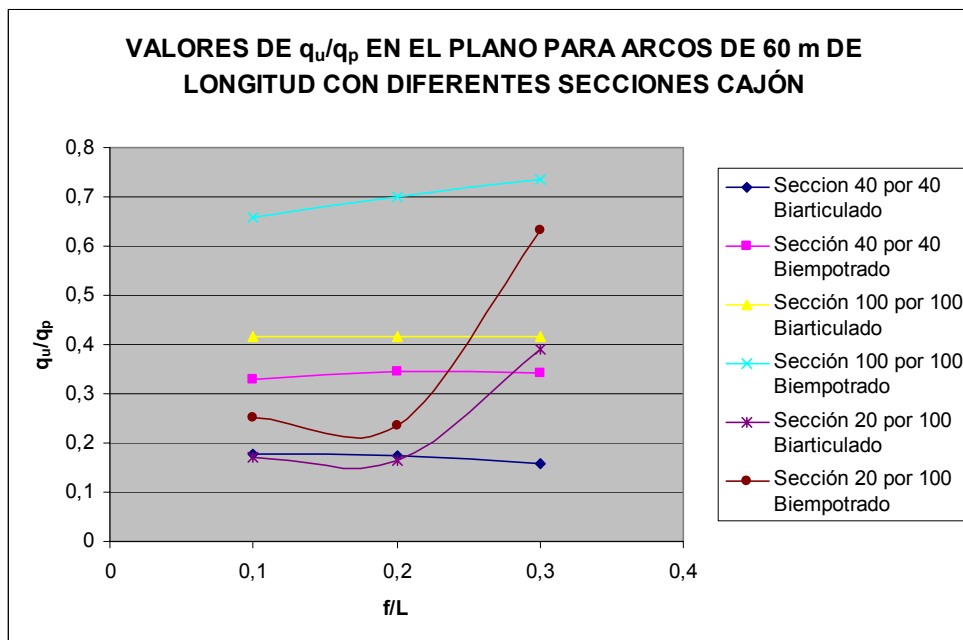


Figura 9.13.1.4.: "Valores de la carga última en el plano para arcos de 60 m de longitud con diferentes secciones transversales cajón."

9.13.2. Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco fuera de su plano

Se recogen a continuación los resultados obtenidos para los cálculos realizados fuera del plano:

Sección transversal 50 por 100

e = 2,50 m f/L = 0,10

	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	35,2	37,6
60	8,6	9,1
90	2,5	2,8
120	1	1,2
150	0,5	0,55
180	0,3	0,30

e = 2,50 cm f/L = 0,20

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	66,8
60	14
90	4,10
120	1,75
150	0,90
180	0,50

e = 2,50 cm f/L = 0,30

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	82,00
60	14,80
90	4,40
120	1,90
150	1,00
180	0,55

e = 2,50 cm f/L = 0,40

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	82,50
60	13,80
90	3,90
120	1,70
150	0,85
180	0,50

Sección transversal 75 por 100

$$e = 2,50 \text{ cmf/L} = 0,10$$

	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	46,8	47,5
60	13,5	14
90	4,8	5,6
120	2,1	2,7

Sección transversal 100 por 100

$$e = 2,50 \text{ cm} \quad f/L = 0,10$$

$$e = 2,50 \text{ cm} \quad f/L = 0,20$$

	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	54,2	56,4
45	-	31,4
60	18,2	19,5
90	8,3	8,8
120	3,7	4,2
150	1,9	2,4
180	1	1,4

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	100,8
45	56,4
60	34,9
90	14,4
120	6,4
150	3,3
180	1,85

$e = 2,50 \text{ cm}$ $f/L = 0,30$

Arco Biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	130,3
45	70,2
60	40,2
90	15,2
120	6,5
150	3,1
180	2

$e = 2,50 \text{ cm}$ $f/L = 0,40$

Arco Biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	145,3
45	73,3
60	39,5
90	14
120	5,6
150	2,7
180	1,8

$e = 2,50 \text{ cm}$ $f/L = 0,50$

Arco Biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	132,30
45	71
60	36,9
90	11,7
120	4,3
150	2,1
180	1,5

Sección transversal 125 por 100

e = 4 cm f/L = 0,10

	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	103,1	103,6
60	41,3	45,1
90	22,8	24
120	11,2	12,8

e = 4 m f/L = 0,2

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	130,3
45	70,2
60	40,2
90	15,2
120	6,5
150	3,1
180	2

Sección transversal 150 por 100

e = 4 cm f/L = 0,10

	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	114,6	115,6
60	46,5	52,1
90	27,2	29,3
120	12,9	17,2
150	6,7	10,1
180	4	6

e = 4 cm f/L = 0,20

	Arco Biempotrado
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	229,50
60	98,00
90	50,90
120	28,00
150	15,40
180	9,20

$e = 4 \text{ cm}$ $f/L = 0,30$

Arco Biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	284,60
60	116,80
90	58,00
120	32,00
150	18,00
180	16,40

$e = 4 \text{ cm}$ $f/L = 0,40$

Arco Biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	304,00
60	115,30
90	56,50
120	30,50
150	16,40
180	9,50

Sección transversal 200 por 100

$e = 5 \text{ cm}$ $f/L = 0,10$

Longitud (m)	Arco Biapoyado	Arco Biempotrado
	q_u (t/ml)	q_u (t/ml)
30	172	173,5
60	69,8	79,1
90	41,3	48,2
120	20,3	31,5

Sección transversal 50 por 50

$e = 2,50 \text{ cm}$ $f/L = 0,10$

Arco biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	23,7
90	3

Sección transversal 100 por 50

$$e = 2,50 \text{ cm} \quad f/L = 0,10$$

Arco biempotrado	
Longitud (m)	q_u (t/ml)
30	35,9
90	5,4

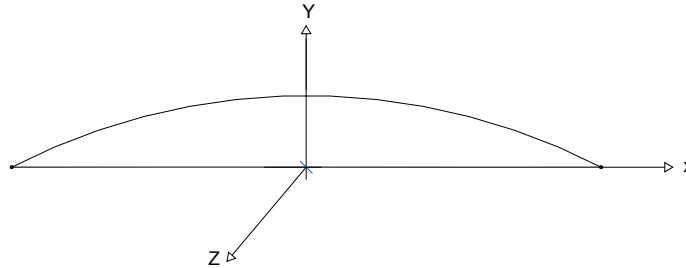
Ya se ha comentado en los capítulos anteriores la casi inexistencia de estudios e investigaciones relativas al cálculo de la carga última de arcos fuera de su plano, debido a la dificultad numérica de obtener diferentes resultados.

En una casi heroica labor de cálculo (debido a la escasez de medios informáticos y tecnológicos), en 1.977 SAKIMOTO y KOMATSU determinaron la carga última fuera del plano de arcos metálicos con imperfecciones iniciales. Adoptaron las siguientes hipótesis de cálculo:

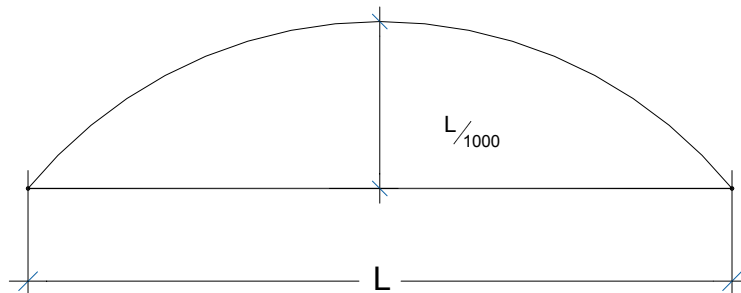
- a) Sección transversal cajón
- b) Material elastoplástico bilineal
- c) **TORSIÓN UNIFORME**
- d) Criterio de plastificación de Von Mises
- e) Hipótesis de Bernoulli – Navier en pandeo
- f) Pequeñas deformaciones
- g) Inexistencia de pandeo local
- h) Sección transversal **SIN DISTORSIÓN**
- i) La solución de las ecuaciones no lineales que gobiernan el problema se obtiene por el Método de Newton – Raphson.

Los parámetros que definen la geometría del problema vienen dados por:

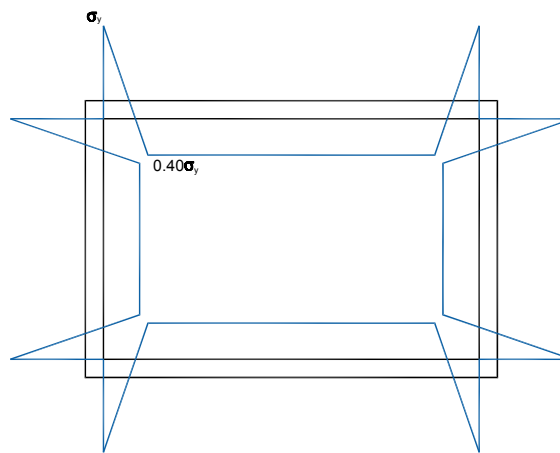
a) Arcos BIAPOYADOS parabólicos



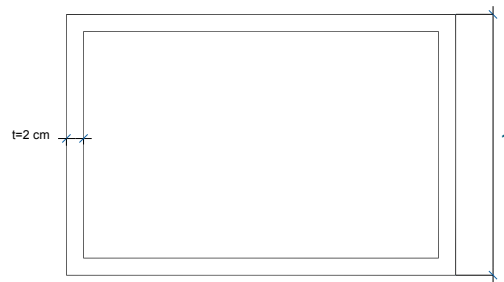
b) Imperfecciones geométricas laterales iniciales de valor $w_0 = \frac{L}{1000} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L}$



c) Tensiones residuales iniciales



d) Sección transversal cajón cuadrado de 1 m de lado y 2 cm de espesor



e) Carga uniformemente distribuida en planta

f) Material acero de límite elástico 235N/mm²

En la Figura 9.13.2.1. se muestran los resultados obtenidos por SAKIMOTO y KOMATSU para los parámetros geométricos antes referidos, relacionando $\bar{\lambda}_y$ (esbeltez mecánica relativa según el eje y) con la proporción tensión crítica de pandeo – límite elástico σ_{cr}/σ_y para las relaciones flecha – luz 0,10 y 0,20.

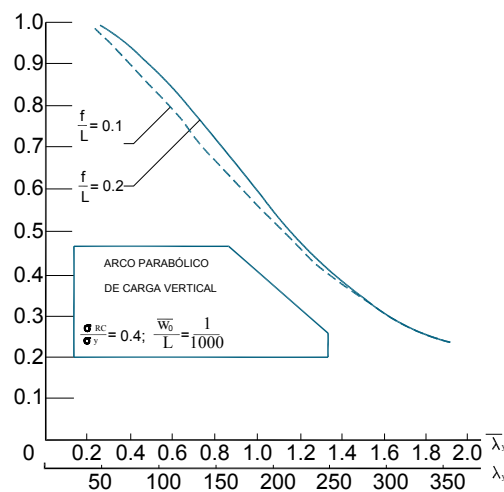


Figura 9.13.2.1.: "Valores de la tensión crítica de pandeo lateral para arcos parabólicos con carga uniformemente distribuida en planta obtenidos por Sakimoto y Komatsu en 1.977."

Con el fin de comparar y validar los resultados obtenidos en la presente Tesis se calcula para diferentes longitudes de arco y relación flecha – luz 0,10 el valor de la carga crítica de pandeo lateral obtenido por Sakimoto y Komatsu para un arco de sección cajón cuadrado de 1 m de lado y 2 cm de espesor.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

L (m)	f (m)	λ_y	σ_{cr}/σ_y	q_u (t/ml)
30	3	0,40130288	0,91	42,40
60	6	0,80260576	0,71	16,50
90	9	1,20390864	0,50	7,80
120	12	1,60521152	0,32	3,70
150	15	2,0065144	0,20	1,90

En la presente Tesis se ha calculado la carga última de colapso fuera del plano para arcos parabólicos de sección transversal cajón 100 x 100 con espesor de chapa 2,50 cm, con los siguientes parámetros geométricos y mecánicos, los cuales se comparan con las investigaciones realizadas por Sakimoto y Komatsu:

	TESIS DOCTORAL	SAKIMOTO Y KOMATSU
Geometría del arco	Parábola	Parábola
Dimensiones sección transversal en cajón (cm x cm)	100 x 100	100 x 100
Espesor de las chapas (cm)	2,50	2,00
Imperfección geométrica inicial	$w = \frac{L}{1000} \text{COS} \frac{\pi x}{L}$	$w = \frac{L}{1000} \text{COS} \frac{\pi x}{L}$
Tensiones residuales σ_{rc}	0,30	0,40

Los resultados obtenidos en la presente Tesis para arcos con las longitudes antes referidas son:

L (m)	f (m)	q_u (t/ml)
30	3	54,20
60	6	18,20
90	9	8,30
120	12	3,70
150	15	1,90

La comparación entre los resultados obtenidos arroja las siguientes conclusiones:

CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO FUERA DEL PLANO

L (m)	f (m)	SAKIMOTO q_u (t/ml)	TESIS q_u (t/ml)
30	3	42,40	54,20
60	6	16,50	18,20
90	9	7,80	8,30
120	12	3,70	3,70
150	15	1,90	1,90

1.- Los resultados correspondientes a la presente Tesis son superiores a los obtenidos por Sakimoto y Komatsu, lo cual es lógico debido al mayor espesor de chapa (2,50 cm frente a 2,00 cm).

2.- Las diferencias existentes entre los resultados obtenidos, a parte de los debidos al incremento de espesor, son mínimas y están justificadas debido a la existencia de diferentes condiciones geométricas y mecánicas, entre las que cabe destacar la modelización de la condición de contorno "apoyado", el cálculo

en la hipótesis de pequeñas deformaciones y las variaciones en las tensiones residuales.

3.- Si se divide la carga de colapso obtenida en ambos estudios por la carga de plastificación q_p , que como ya se definió en el Capítulo 5, es la carga uniformemente distribuida en planta que produce la plastificación por axil en los arranques cuando se realiza un estudio de primer orden elástico de valor $q_p = \frac{2A \sigma_y}{L \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{L}{f}\right)^2 + 1}}$, se obtienen resultados "similares", más que justificados consi-

derando las diferencias en las condiciones de partida.

L (m)	f (m)	SAKIMOTO q_u/q_p	TESIS q_u/q_p
30	3	0,91	0,93
60	6	0,71	0,63
90	9	0,50	0,43
120	12	0,32	0,26
150	15	0,20	0,16

De todo lo anterior se deduce que los resultados obtenidos en la presente Tesis para la sección transversal de 100 x 100 son perfectamente válidos y exactos tras su comparación con los calculados por SAKIMOTO y KOMATSU.

9.14. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Se procede a continuación a representar los resultados obtenidos para cada sección transversal de forma gráfica. Para ello se utilizan los parámetros:

a) En abscisas: Esbeltez reducida del arco con respecto al eje y

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_E} = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}}} = \frac{1}{2} \frac{l_s}{i_y} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}}$$

en donde " l_s " es la longitud del arco según su directriz e " i_y " es el radio de giro de la sección transversal con respecto al eje y.

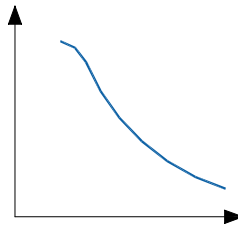
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

b) En ordenadas: Carga de colapso fuera del plano relativa a la carga de plastificación q_p .

$\frac{q_u}{q_p}$, donde q_u es la carga obtenida en el desarrollo de la presente Tesis y q_p la carga de plastificación

$$q_p = \frac{2A\sigma_y}{L\sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{L}{f}\right)^2 + 1}}$$

La gráfica a representar para cada sección transversal y condición de contorno adoptará la forma



con valor máximo para valores pequeños de $\bar{\lambda}_y$ siempre inferiores a 1 y valor mínimo asintótico para mayores valores de $\bar{\lambda}_y$. Para una misma sección transversal, a igual valor de $\bar{\lambda}_y$, q_u/q_p será mayor en el caso de arco biempotrado que en el de arco biapoyado.

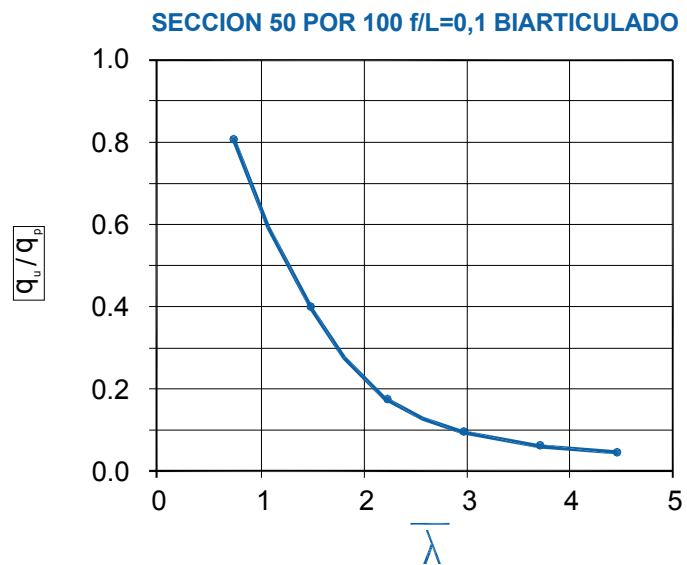
Se incluyen a continuación las tablas con los valores a representar para cada sección transversal y condición de contorno, así como la gráfica correspondiente a cada caso.

Sección 50 x 100

e=2,5 cm f/L=0,10

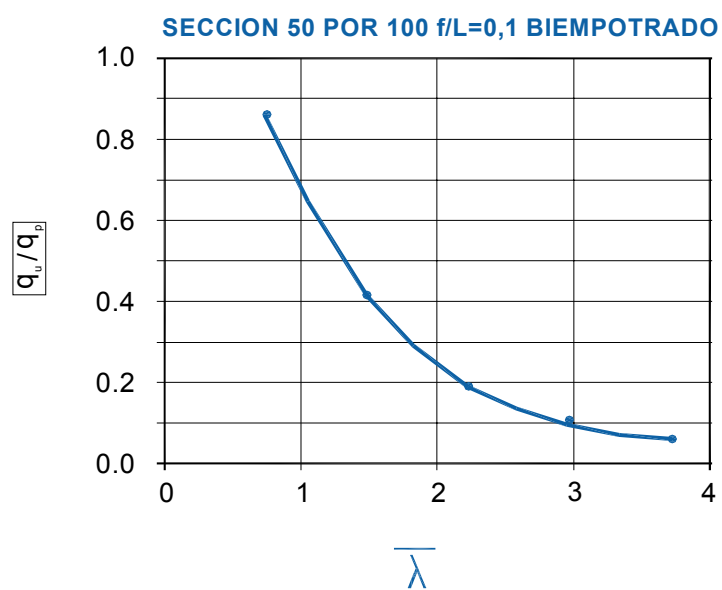
Biarticulado

L (m)	q _u	q _p	$\bar{\lambda}_y$	q _u /q _p
30	35,2	43,6384045	0,742637943	0,806628941
60	8,6	21,8192022	1,485275886	0,394148233
90	2,5	14,5461348	2,22791383	0,171866962
120	1	10,9096011	2,970551773	0,09166238
150	0,5	8,72768089	3,713189716	0,057288987
180	0,3	7,27306741	4,455827659	0,041248071



Biempotrado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda} y$	q_u/q_p
30	37,6	43,6384045	0,74263794	0,86162637
60	9,1	21,8192022	1,48527589	0,41706383
90	2,8	14,5461348	2,22791383	0,192491
120	1,2	10,9096011	2,97055177	0,10999486
150	0,55	8,72768089	3,71318972	0,06301789
180	0,3	7,27306741	4,45582766	0,04124807

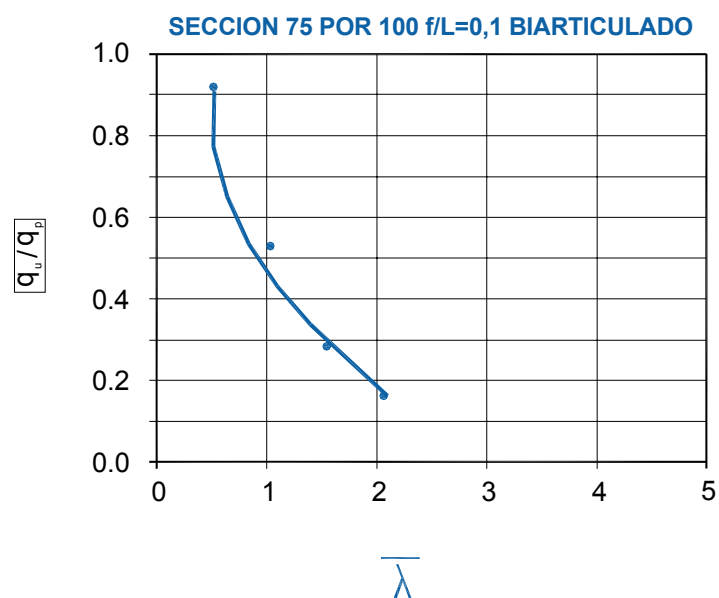


Sección 75 x 100

$e=2,5$ cm $f/L=0,10$

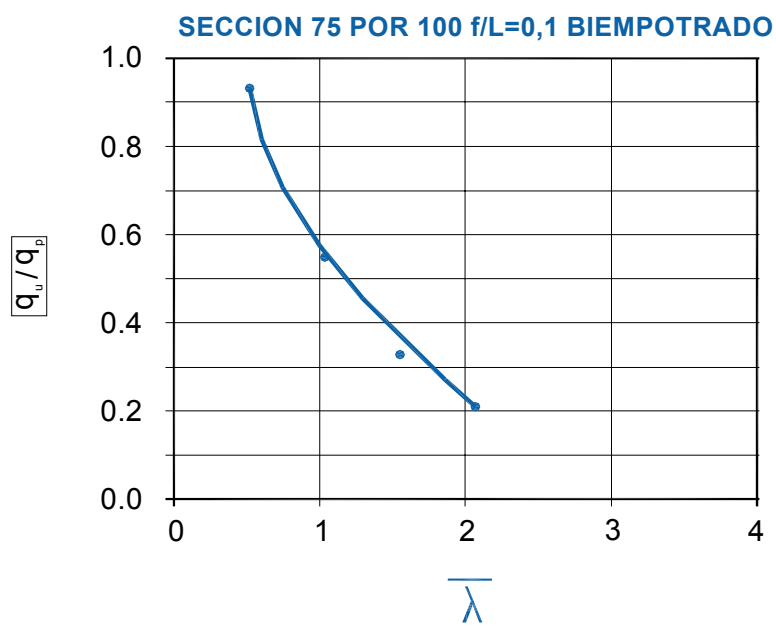
Biarticulado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	46,8	50,9114719	0,516839945	0,919242722
60	13,5	25,4557359	1,03367989	0,53033234
90	4,8	16,9704906	1,550519835	0,282843914
120	2,1	12,727868	2,067359781	0,164992283



Biempotrado

L (m)	Q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	47,5	50,9114719	0,516839945	0,93299208
60	14	25,4557359	1,03367989	0,54997428
90	5,6	16,9704906	1,550519835	0,32998457
120	2,7	12,727868	2,067359781	0,21213294

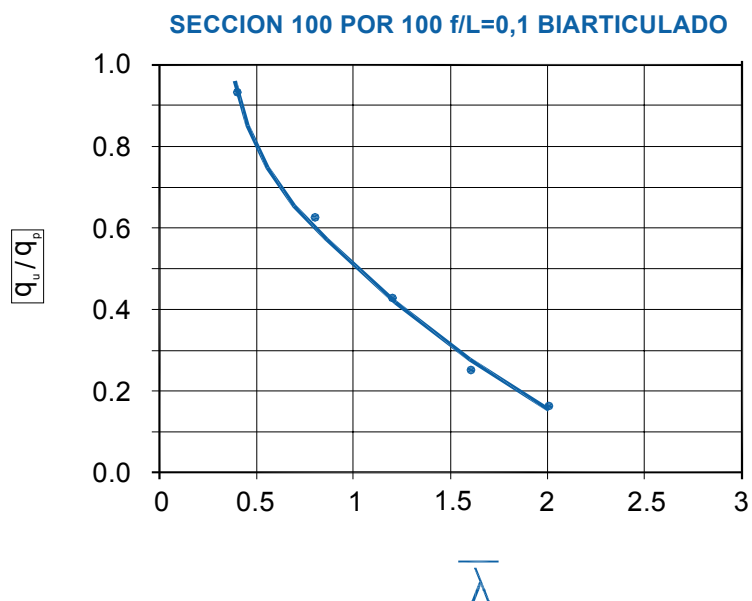


Sección 100 x 100

$e=2,5$ cm $f/L=0,10$

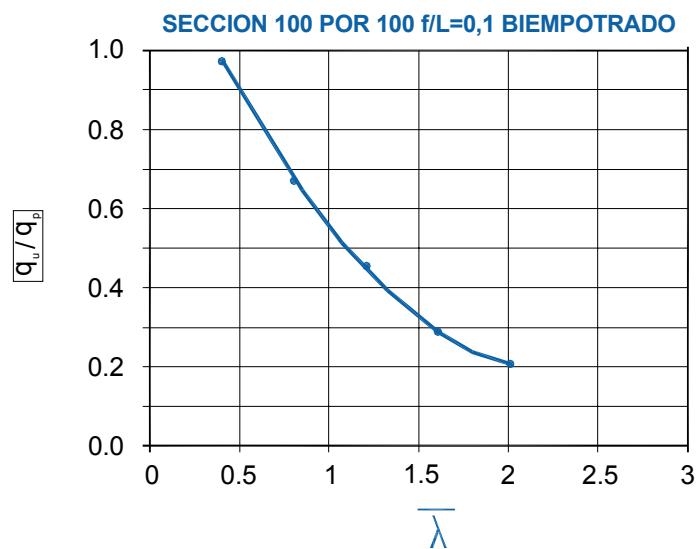
Biarticulado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	54,2	58,1845393	0,40130288	0,931518934
60	18,2	29,0922696	0,80260576	0,625595741
90	8,3	19,3948464	1,203908639	0,427948735
120	3,7	14,5461348	1,605211519	0,254363104
150	1,9	11,6369079	2,006514399	0,163273614
180	1	9,69742322	2,407817279	0,103120177



Biempotrado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	56,4	58,1845393	0,40130288	0,96932967
60	19,5	29,0922696	0,80260576	0,67028115
90	8,8	19,3948464	1,20390864	0,45372878
120	4,2	14,5461348	1,60521152	0,2887365
150	2,4	11,6369079	2,0065144	0,20624035
180	1,4	9,69742322	2,40781728	0,14436825

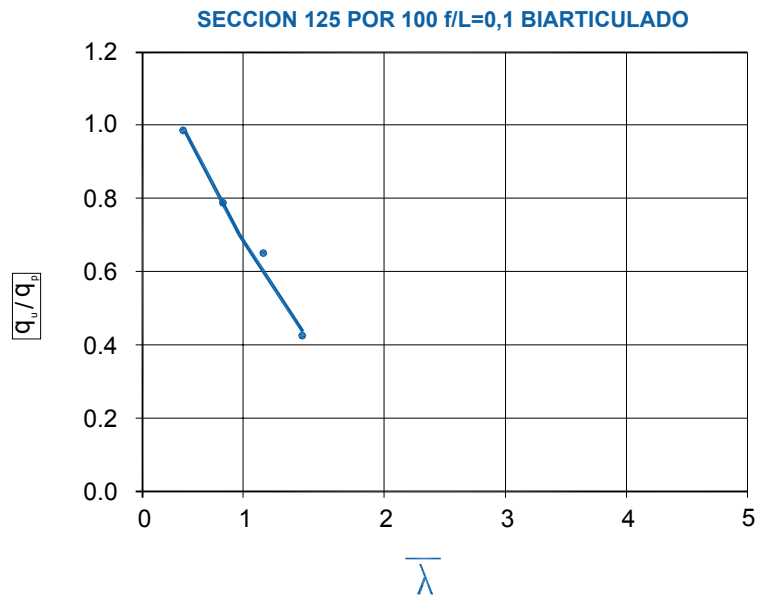


Sección 125 x 100

$e=4$ cm $f/L=0,10$

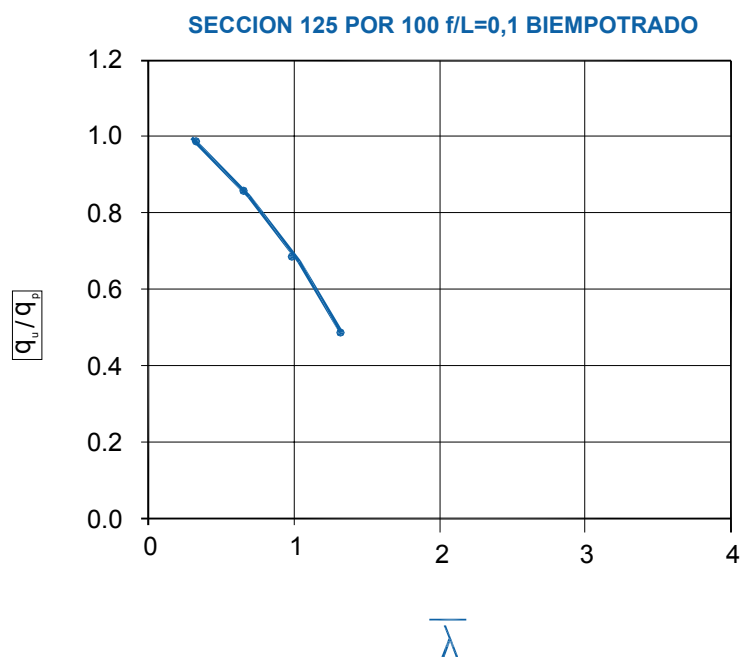
Biarticulado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	103,1	104,732171	0,330157955	0,984415765
60	41,3	52,3660854	0,660315911	0,788678392
90	22,8	34,9107236	0,990473866	0,653094455
120	11,2	26,1830427	1,320631821	0,427757772



Biempotrado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	103,6	104,732171	0,330157955	0,98918985
60	45,1	52,3660854	0,660315911	0,86124444
90	24	34,9107236	0,990473866	0,68746785
120	12,8	26,1830427	1,320631821	0,48886603

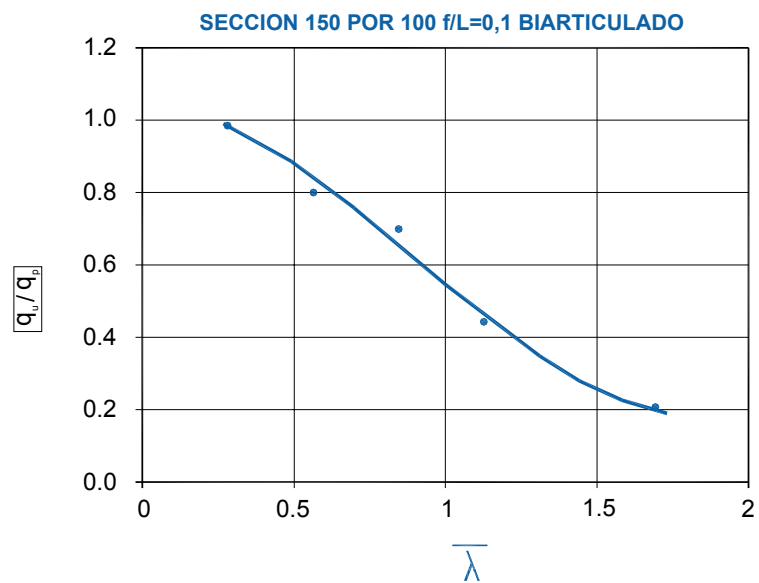


Sección 150 x 100

$e=4$ cm $f/L=0,10$

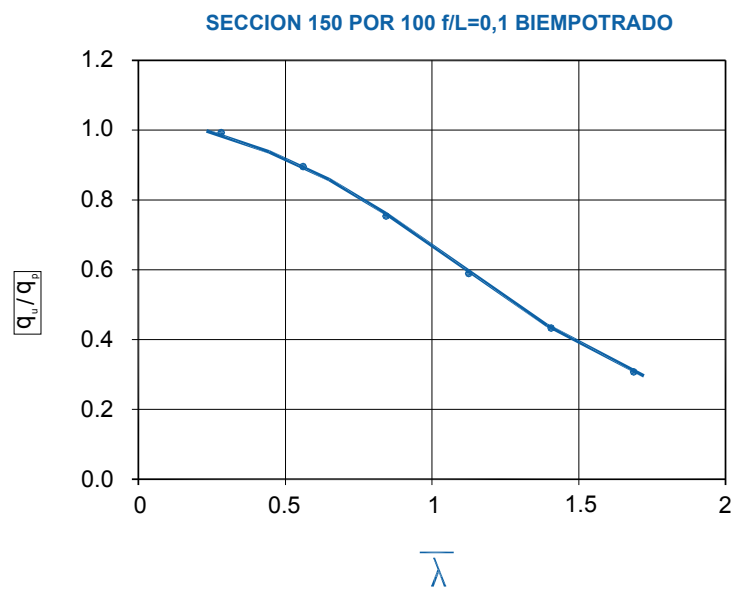
Biarticulado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	114,6	116,369079	0,281972522	0,984797692
60	46,5	58,1845393	0,563945044	0,799181373
90	27,2	38,7896929	0,845917566	0,701217205
120	12,9	29,0922696	1,127890088	0,443416762
150	6,7	23,2738157	1,40986261	0,287877161
180	4	19,3948464	1,691835132	0,206240354



Biempotrado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	115,6	116,369079	0,28197252	0,99339104
60	52,1	58,1845393	0,56394504	0,89542687
90	29,3	38,7896929	0,84591757	0,7553553
120	17,2	29,0922696	1,12789009	0,59122235
150	10,1	23,2738157	1,40986261	0,43396408
180	6	19,3948464	1,69183513	0,30936053



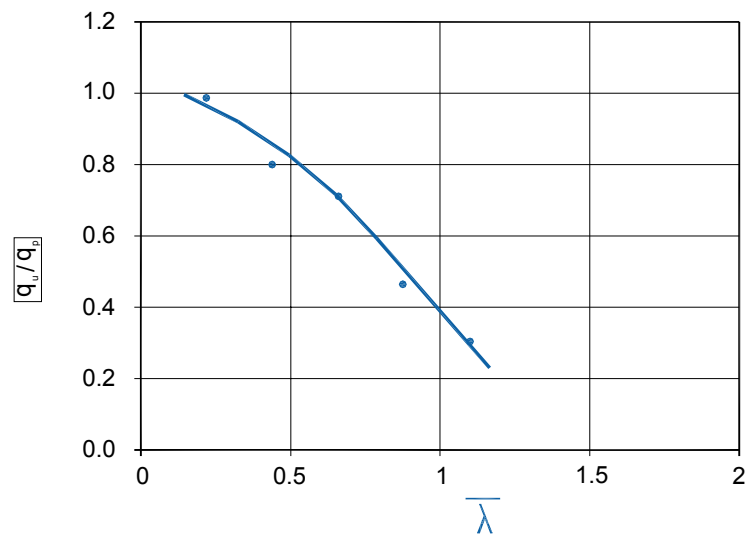
Sección 200 x 100

$e=5$ cm $f/L=0,10$

Biarticulado

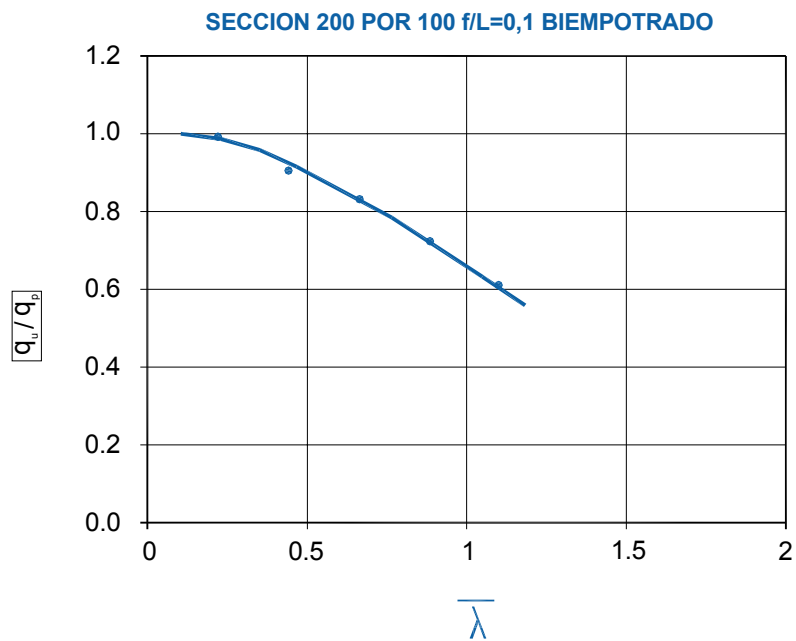
L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	172	174,553618	0,219775187	0,985370582
60	69,8	87,2768089	0,439550373	0,799754263
90	41,3	58,1845393	0,65932556	0,709810553
120	20,3	43,6384045	0,879100747	0,465186577
150	10,5	34,9107236	1,098875933	0,300767183

SECCION 200 POR 100 $f/L=0,1$ BIARTICULADO



Biempotrado

L (m)	q_u	q_p	$\bar{\lambda}_y$	q_u/q_p
30	173,5	174,553618	0,21977519	0,99396393
60	79,1	87,2768089	0,43955037	0,90631178
90	48,2	58,1845393	0,65932556	0,82839876
120	31,5	43,6384045	0,87910075	0,72184124
150	21,2	34,9107236	1,09887593	0,60726327



9.15. INFLUENCIA DEL ESPESOR DE LAS CHAPAS QUE CONFIGURAN LA SECCIÓN CAJÓN EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO

Ya se ha reseñado con anterioridad en el Apartado 9.4.: "Definición geométrica del arco modelizado" que el espesor de las chapas a utilizar en cada sección transversal es tal que se asegura el comportamiento de las mismas como almas "compactas" según la RPM-95, lo que evita la aparición de fenómenos de inestabilidad local tales como la abolladura. Esto implica que para el caso de las secciones transversales con 1 m de canto, con valores del ancho hasta 1 m, el espesor es de 2,50 cm y entre 1 y 1,50, el espesor es de 4 cm.

Con el fin de analizar la influencia del espesor de las chapas que configuran la sección cajón se ha calculado la carga última de colapso fuera del plano de arcos con sección transversal 50 x 100, 75 x 100 y 100 x 100 con espesor de **4 cm**, de tal forma que se asegure la no aparición del fenómeno de abolladura.

A continuación se relacionan los cálculos realizados, así como los resultados obtenidos.

Sección 50 x 100

e = 4 cm

CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO FUERA DEL PLANO (t/ml)

Longitud (m)	30	60	90
Biarticulado	55,5	13,2	4,2
Biempotrado	61,2	14,6	4,8

Sección 75 x 100

$e = 4$ cm

CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO FUERA DEL PLANO (t/ml)

Longitud (m)	30
Biarticulado	75,10
Biempotrado	77

Sección 100 x 100

$e = 4$ cm

CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO FUERA DEL PLANO (t/ml)

Longitud (m)	30	60
Biarticulado	87	28,2
Biempotrado	88,1	31,60

Los valores obtenidos de la carga última de colapso fuera del plano para un espesor de 4 cm son lógicamente superiores a los correspondientes a un espesor de 2,5 cm. Con el fin de poder comparar los valores calculados, se utiliza el parámetro adimensional q_u/q_p .

q_u/q_p

Sección 50 x 100

$e = 4$ cm

Longitud (m)	30	60	90
articulado	0,7948847	0,37810732	0,180460310167
empotrado	0,87652151	0,41820961	0,20624035

Sección 75 x 100

e = 4 cm

Longitud (m)	30
articulado	0,92194349
empotrado	0,94526829

Sección 100 x 100

e = 4 cm

Longitud (m)	30	60
articulado	0,93452661	0,60583104
empotrado	0,94634246	0,6788745

Si se comparan estos resultados con los correspondientes a un espesor de 2,50 cm, los cuales se indican a continuación, se observa que son casi coincidentes.

q_u/q_p

Sección 50 x 100

e = 2,50 cm

Longitud (m)	30	60	90
articulado	0,80662894	0,39414823	0,171866962
empotrado	0,86162637	0,41706383	0,192491

Sección 75 x 100

$e = 2,50$ cm

Longitud (m)	30
articulado	0,91924272
empotrado	0,93299208

Sección 100 x 100

$e = 2,50$ cm

Longitud (m)	30	60
articulado	0,93151893	0,62559574
empotrado	0,96932967	0,67028115

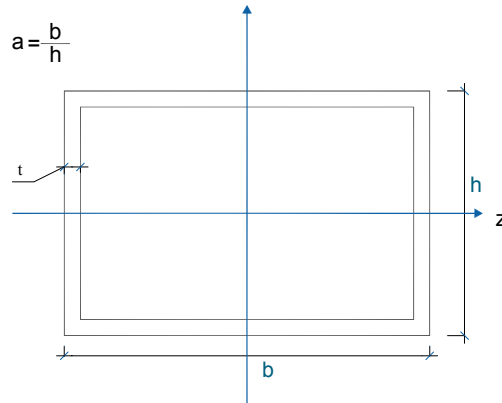
De los cálculos realizados y los resultados obtenidos se desprende que la relación q_u/q_p no depende del espesor de las chapas dentro del entorno de espesores considerados (almas "compactas" según la RPM-95). Esta conclusión coincide con la obtenida por Arancha Manzanares en su Tesis Doctoral en lo que se refiere al comportamiento dentro del plano: "la relación q_u/q_p no depende del espesor de chapas dentro de los espesores de clase 2 y 3". (Capítulo 8. Apartado 8.5.: "Influencia de las dimensiones de la sección").

9.16. INFLUENCIA DE LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO. COEFICIENTE DE FORMA

En los cálculos realizados definidos en el Apartado 9.12.2., para un canto de 1 m, se han considerado anchos de la sección transversal de 50, 75, 100, 125, 150 y 200 cm. Los resultados obtenidos con los diferentes anchos antes referenciados permiten determinar la influencia de la forma de la sección en la carga última de colapso.

Se define el coeficiente de forma de una sección transversal cajón como la relación entre el ancho y el canto de la misma.

$$a = \frac{b}{h} \quad (9.16.1.)$$



Se va a determinar el valor de la esbeltez relativa $\bar{\lambda}_y$ en función del coeficiente de forma "a".

$$\bar{\lambda}_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{ls}{i_y} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}} = n \cdot \frac{ls}{i_y}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot t \cdot b^3 + 2 \cdot h \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^3 t}{6} + \frac{htb^2}{2} = \frac{b^2 t}{6} (b+3h) = \frac{a^2 h^2 t}{6} (ah+3h) = \frac{h^3 t}{6} a^2 (a+3)$$

$$A = 2(b+h)t = 2(ah+h)t = 2ht(a+1)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{h^3 t a^2 (a+3)}{6 \cdot 2 \cdot ht(a+1)}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a^2 (a+3)}{(a+1)}}$$

$$\bar{\lambda}_y = n \cdot \frac{ls}{\frac{h}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a^2 (a+3)}{(a+1)}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot n \cdot ls}{h} \sqrt{\frac{(a+1)}{a^2 (a+3)}} \quad (9.16.2.)$$

Se hace notar que tanto el radio de giro de una sección transversal cajón con respecto al eje y como la esbeltez relativa con respecto al eje y no dependen del valor del espesor t .

La influencia de las dimensiones de la sección transversal en la carga última se hace patente representando en ejes coordenadas cómo varía la relación q_u/q_p en función del coeficiente de forma "a". Esta gráfica $a-q_u/q_p$ se ajusta para diferentes valores de la luz L del arco. El ajuste para diferentes valores de $\bar{\lambda}_y$ proporciona curvas distorsionadas, ya que $\bar{\lambda}_y$ depende del factor a .

9.17. CURVAS DE PANDEO LATERAL DE ARCOS PARABÓLICOS CON SECCIÓN TRANSVERSAL CAJÓN DE 1 M DE CANTO Y RELACIÓN FLECHA-LUZ 0,10 SOMETIDOS A UNA CARGA LINEAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN PLANTA

Con todos los resultados calculados previamente para el análisis del comportamiento del arco fuera del plano, se procede a representar las gráficas "coeficiente de forma - carga última relativa a la carga de plastificación" tanto para arcos biapoyados como para arcos biempotrados. Las curvas se representan para diferentes valores de L : 30, 60, 90, 120, 150 y 180 m y una relación $f/L=0,10$. Estas gráficas se denominan "**CURVAS DE PANDEO LATERAL**", y se representan en las Figuras 9.17.1. y 9.17.2.

Biapoyado

	L=30 m	L=60 m	L=90 m	L=120 m	L=150 m	L=180 m
a	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p
0,5	0,80662894	0,39414823	0,17186696	0,09166238	0,057288987	0,04124807
0,75	0,91924272	0,53033234	0,28284391	0,16499228		
1	0,93151893	0,62559574	0,42794874	0,2543631	0,163273614	0,10312018
1,25	0,98441577	0,78867839	0,65309446	0,42775777		
1,5	0,98479769	0,79918137	0,7012172	0,44341676	0,287877161	0,20624035
2	0,98537058	0,79975426	0,70981055	0,46516957	0,300859599	

Biempotrado

	L=30 m	L=60 m	L=90 m	L=120 m	L=150 m	L=180 m
a	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p	q_u/q_p
0,5	0,86162637	0,41706383	0,192491	0,10999486	0,06301789	0,04124807
0,75	0,93299208	0,54997428	0,32998457	0,21213294		
1	0,96932967	0,67028115	0,45372878	0,2887365	0,18905366	0,14436825
1,25	0,98918985	0,86124444	0,68746785	0,48886603		
1,5	0,99339104	0,89542687	0,7553553	0,59122235	0,43396408	0,30936053
2	0,99396393	0,90631178	0,82839876	0,7218	0,6074	

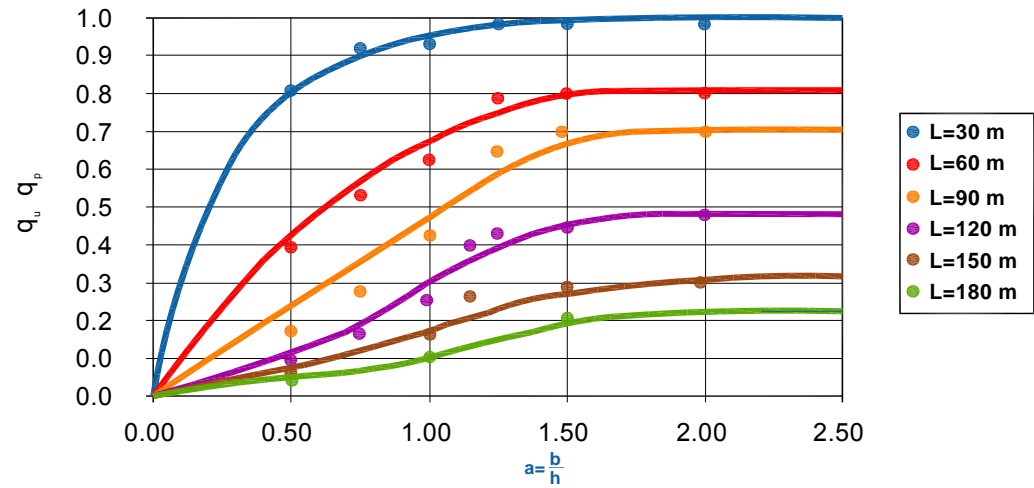


Figura 9.17.1.: "Curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos biapoyados con sección transversal cajón de 1 m de canto sometidos a una carga lineal uniformemente distribuida en planta con relación $f/L=0,10$."

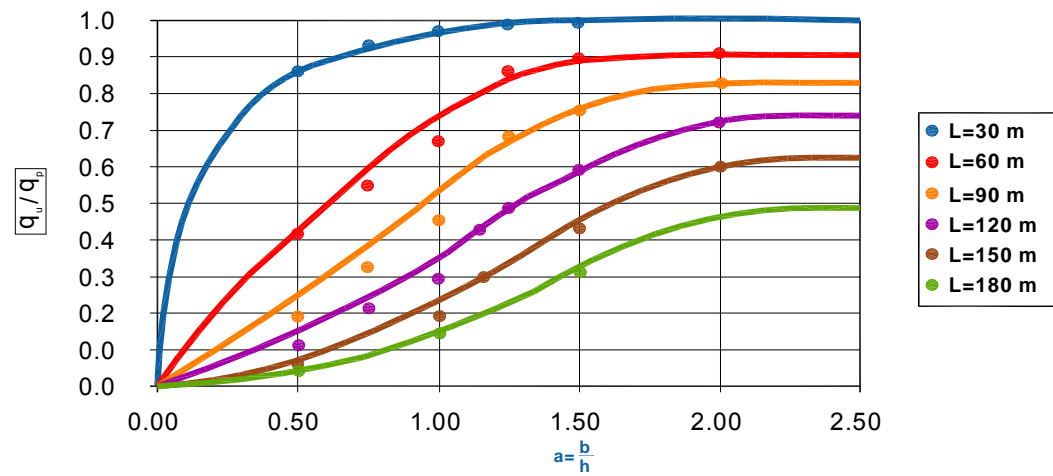


Figura 9.17.2.: "Curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos biempotrados con sección transversal cajón de 1 m de canto sometidos a una carga lineal uniformemente distribuida en planta con relación $f/L=0,10$."

De las gráficas representadas se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- Los valores de q_u/q_p para el caso de arcos biempotrados son superiores a los correspondientes para el caso de arcos biapoyados.
- Para las diferentes longitudes de arco, el valor de q_u/q_p aumenta con el valor del coeficiente de forma "a", alcanzando el máximo para $a=2$, donde las curvas presentan un comportamiento asintótico.
- En el intervalo de "a" comprendido entre 1,00 y 1,25, para longitudes de arco entre 90 y 180 m, la pendiente de las curvas presenta un máximo.

9.18. INFLUENCIA DE LA RELACIÓN FLECHA-LUZ EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO

Las curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos representadas en el apartado anterior corresponden a arcos con relación flecha-luz 0,10. Con el fin de analizar la influencia de f/L en la carga última se han calculado algunos arcos con relación flecha-luz 0,2, tal y como se indica en el apartado 9.12.2. "Cálculos realizados fuera del plano".

Asimismo, para las secciones transversales de ancho 0,50, 1 y 1,50 m y diferentes longitudes de arco biempotrado, se ha calculado la carga última para relaciones flecha-luz comprendidas entre 0,1 y 0,5.

Los resultados obtenidos (indicados en el apartado 9.13.2 "Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco fuera de su plano") se recogen a continuación, expresándose en relación con la carga de plastificación.

Sección 50 x 100

$e = 2,5$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	6	66,8	73,40	0,91
90	18	4,1	24,47	0,17

Sección 100 x 100

$e = 2,5$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	6	100,8	97,90	1,03
90	18	14,40	32,60	0,44

Sección 150 x 100

$e = 4$ cm

Arco biempotrado

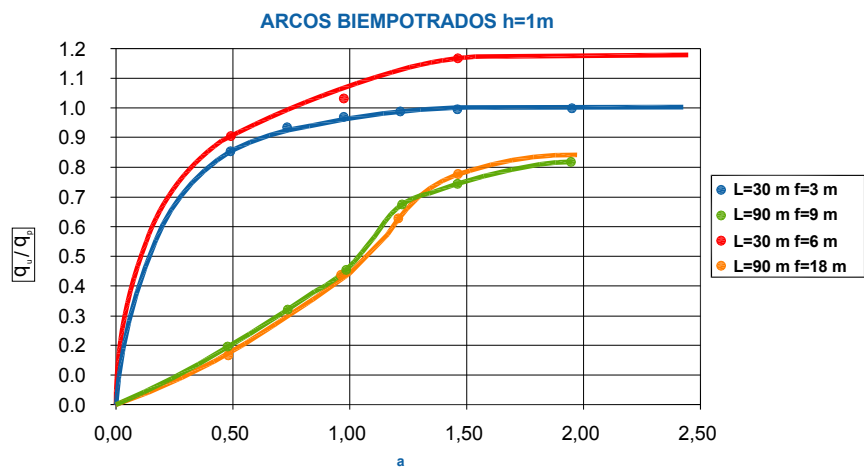
L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	6	229,50	195,74	1,17
90	18	50,90	65,25	0,78

Comparando los resultados obtenidos para $f/L = 0,1$ y $0,2$, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Sección transversal	L (m)	30		90	
	f (m)	3	6	9	18
50 x 100	q_u/q_p	0,86	0,91	0,19	0,17
100 x 100	q_u/q_p	0,97	1,03	0,45	0,44
150 x 100	q_u/q_p	0,99	1,17	0,76	0,78

Se obtienen las siguientes conclusiones:

- 1.- Para valores pequeños de longitud ($L < 45$ m), y por consiguiente pequeñas esbelteces reducidas con respecto al eje y, el valor de q_u/q_p es mayor para $f/L=0,2$ que para $f/L=0,1$, es decir, a mayor valor de f/L , mayor q_u/q_p .
- 2.- Para valores grandes de longitud ($L > 45$ m), y por consiguiente mayores esbelteces reducidas con respecto al eje y, el valor de q_u/q_p es similar para $f/L=0,2$ y para $f/L=0,1$.



En la Figura 9.18.1. se representan los resultados obtenidos, los cuales coinciden con los determinados por SAKIMOTO Y KOMATSU.

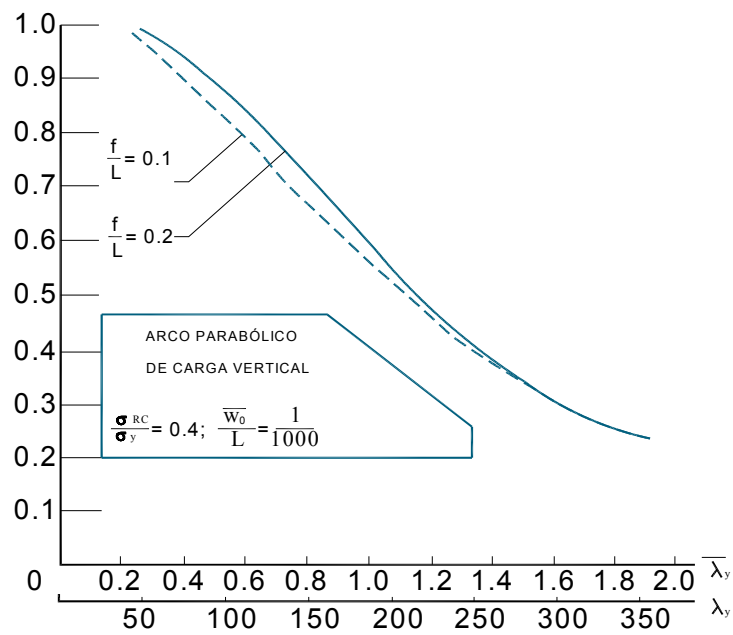


Figura 9.18.1. "Valores de " q_u/q_p " en función de " a " para relaciones f/L 0,1 y 0,2 obtenidos en la presente Tesis. Comparación con los obtenidos por Sakimoto y Komatsu."

En lo que se refiere a los cálculos realizados para las secciones transversales de 0,50, 1 y 1,50 m de ancho en arcos biempotrados, se incluyen en las siguientes tablas las cargas últimas obtenidas, así como las cargas de plastificación y los correspondientes valores del cociente q_u/q_p .

Sección transversal 0,50 x 1,00. Espesor 2,50 cmValores de q_u

f/L	L = 30 m	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	37,60	9,10	2,80	1,20	0,55	0,30
0,2	66,80	14,00	4,10	1,75	0,90	0,50
0,3	82,00	14,80	4,40	1,9	1,00	0,55
0,4	82,50	13,80	3,90	1,7	0,85	0,50

Valores de q_p

0,861626369	0,417063828	0,192490997	0,109994856	0,063017886	0,041248071	0,861626369
0,910061062	0,381462721	0,167571124	0,09536568	0,061306509	0,040871006	0,910061062
0,908426203	0,327919703	0,146234462	0,084195599	0,055391842	0,036558616	0,908426203
0,827982387	0,276997744	0,117422957	0,068245821	0,042653638	0,03010845	0,827982387
0,861626369	0,417063828	0,192490997	0,109994856	0,063017886	0,041248071	0,861626369

Valores de q_u/q_p

f/L	L = 30 m	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	0,861626369	0,417063828	0,192490997	0,109994856	0,063017886	0,041248071
0,2	0,910061062	0,381462721	0,167571124	0,09536568	0,061306509	0,040871006
0,3	0,908426203	0,327919703	0,146234462	0,084195599	0,055391842	0,036558616
0,4	0,827982387	0,276997744	0,117422957	0,068245821	0,042653638	0,03010845

Sección transversal 1,00 x 1,00. Espesor 2,50 cmValores de q_u

f/L	L = 30m	L = 45	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	56.4	31.4	19.5	8.8	4.2	2.4	1.4
0,2	100.8	56.4	34.9	14.4	6.4	3.3	1.85
0,3	130.3	70.2	40.2	15.2	6.5	3.1	2
0,4	145.3	73.3	39.5	14	5.6	2.7	1.8
0,5	132.3	71	36.9	11.7	4.3	2.1	1.5

Valores de q_p

f/L	L = 30 m	L = 45	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	58.1845393	38.7896929	29.0922696	19.3948464	14.5461348	11.6369079	9.69742322
0,2	97.8688908	65.2459272	48.9344454	32.6229636	24.4672227	19.5737782	16.3114818
0,3	120.354667	80.2364448	60.1773336	40.1182224	30.0886668	24.0709334	20.0591112
0,4	132.853068	88.5687118	66.426.5338	44.2843559	33.2132669	26.5706135	22.1421779
0,5	140.126927	93.4179511	70.0634633	46.7089755	35.0317316	28.0253853	23.3544878

Valores de q_u/q_p

f/L	L = 30 m	L = 45	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0.96932967	0.80949339	0.67028115	0.45372878	0.2887365	0.20624035	0.14436825
0,2	1.02994935	0.86442177	0.71319905	0.44140686	0.26157444	0.1685929	0.11341704
0,3	1.08263355	0.87491414	0.66802561	0.3788802	0.21602818	0.12878603	0.09970532
0,4	1.09368946	0.82760603	0.5946419	0.31613873	0.16860732	0.10161602	0.08129282
0,5	0.94414402	0.76002523	0.52666537	0.25048719	0.12274586	0.07493207	0.06422748

Sección transversal 1,50 x 1,00. Espesor 4,00 cmValores de q_u

f/L	L = 30 m	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	115,60	52,10	29,30	17,20	10,10	6,00
0,2	229,50	98,00	50,90	28,00	15,40	9,20
0,3	284,60	116,80	58,00	32	18	10,3
0,4	304,00	115,30	56,50	30,50	16,4	9,5

Valores de q_p

f/L	L = 30 m	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	116,3690786	58,1845393	38,78969286	29,09226965	23,27381572	19,39484643
0,2	195,7377816	97,86889078	65,24592719	48,93444539	39,14755631	32,62296359
0,3	240,7093343	120,3546671	80,23644476	60,17733357	48,14186685	40,11822238
0,4	265,7061353	132,8530676	88,56871175	66,42653381	53,14122705	44,28435588

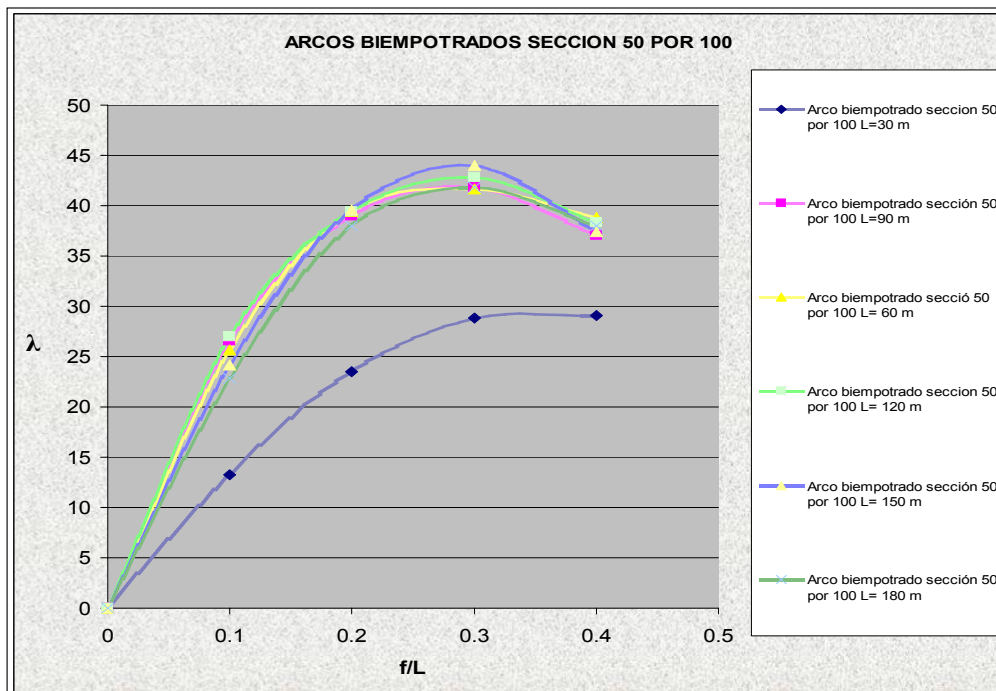
Valores de q_u/q_p

f/L	L = 30 m	L = 60 m	L = 90 m	L = 120 m	L = 150 m	L = 180 m
0,1	0,99339104	0,895426872	0,755355298	0,591222349	0,433964079	0,309360531
0,2	1,172486978	1,001339641	0,780125323	0,572194081	0,393383431	0,28200994
0,3	1,182338861	0,970465066	0,722863534	0,53176168	0,373894931	0,256741186
0,4	1,144121116	0,867876083	0,637922793	0,459153869	0,308611617	0,214522709

Para longitudes de arco inferiores a 90 m, el máximo de q_u/q_p se obtiene para el intervalo 0,20-0,40 de f/L; para longitudes superiores a 90 m, el máximo se obtiene para el intervalo f/L = (0,10-0,20).

Asimismo, se ha calculado y representado para los diferentes valores de f/L el parámetro $\lambda = \frac{qL^3}{EI_y}$, con el fin de analizar y comparar los resultados obtenidos para las diferentes secciones transversales en la hipótesis de cálculo elastoplástico no lineal.

En la Figura 9.18.2. se muestran los resultados obtenidos para las diferentes longitudes de arco en los cálculos correspondientes a carga última.



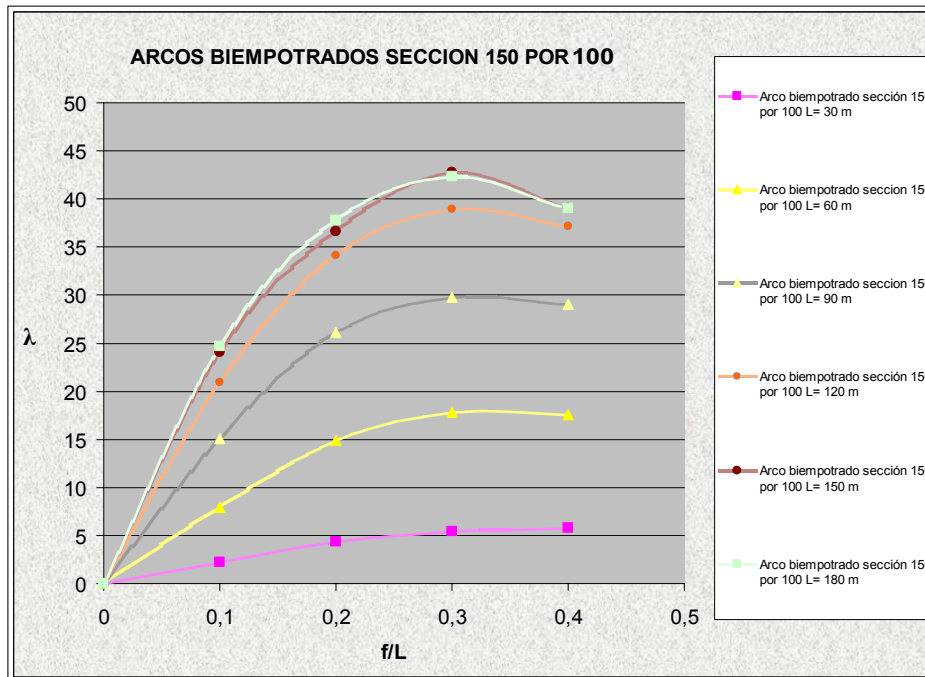
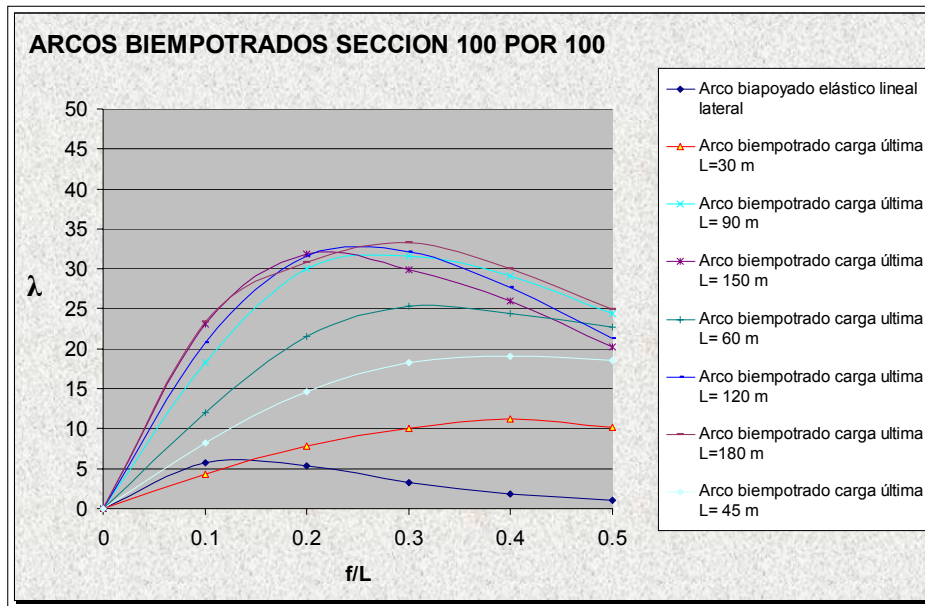


Figura 9.18.2.: "Valor de $\lambda = \frac{qL^3}{EI_y}$ en función de f/L para el caso de varios arcos biempotrados."

En la figura se observa que si bien para arcos con longitudes superiores a un determinado valor según la sección transversal el valor de λ permanece más o menos constante, para longitudes menores la variación es importante, creciendo el valor de λ con el incremento de la longitud. El valor de la longitud del arco por debajo del cual el parámetro λ no es constante coincide para cada sección transversal con el correspondiente a la esbeltez de Euler.

Con todo ello se propone la siguiente expresión para el cálculo de carga última en arcos biempotrados:

$$\text{Si } \bar{\lambda}_y > 1 \quad \longrightarrow \quad \lambda_y > \lambda_{\text{EULER}} \quad \lambda = \frac{qL^3}{EI_y} \quad (9.18.3)$$

$$\text{Si } \bar{\lambda}_y \leq 1 \quad \longrightarrow \quad \lambda_y \leq \lambda_{\text{EULER}} \quad \lambda \text{ no es constante y crece con el aumento de la longitud}$$

Para $\bar{\lambda}_y > 1$, las tensiones críticas son inferiores a σ_y , siendo el fenómeno equiparable a los cálculos elástico lineal y elástico no lineal y resultando un parámetro λ independiente de la longitud.

Para $\bar{\lambda}_y \leq 1$, las tensiones críticas son superiores a σ_y , apareciendo plastificaciones que alejan el cálculo de la carga última de los cálculos elástico lineal y elástico no lineal, con lo que el valor de λ no permanece constante.

En la Figura 9.18.4. se representa la comparativa entre los valores del parámetro λ para diferentes relaciones rigidez torsional-rigidez a flexión transversal para arcos biempotrados bajo el supuesto de carga última.

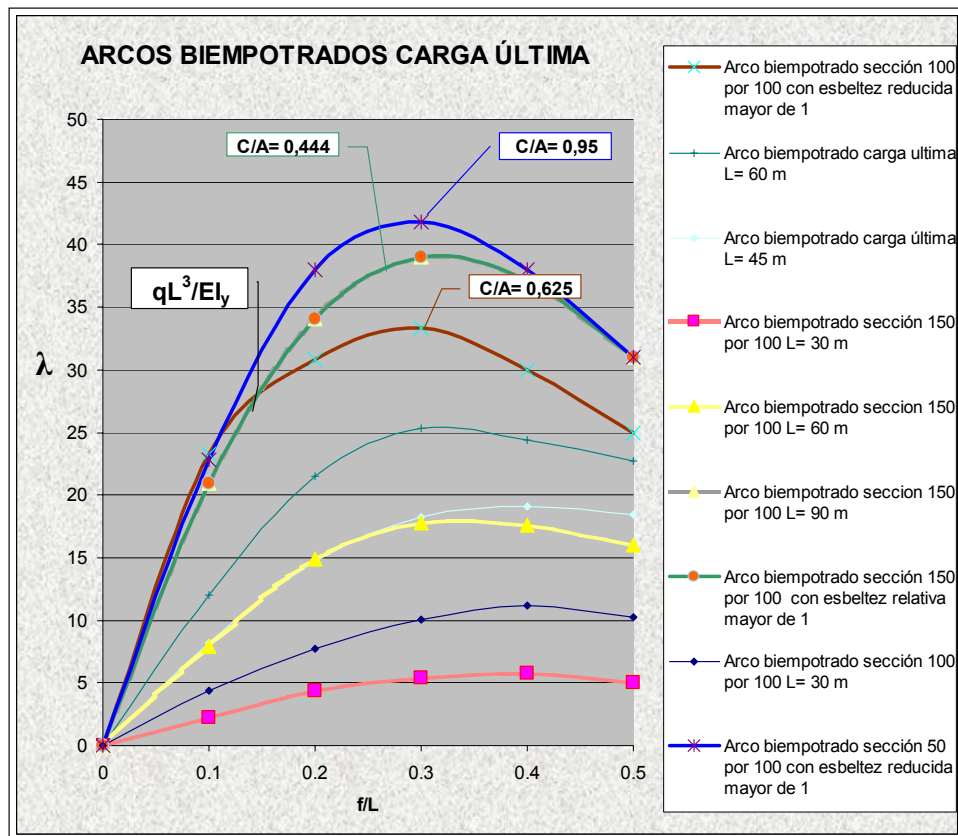


Figura 9.18.4.: "Comparativa entre los valores del parámetro λ para diferentes relaciones rigidez torsional-rigidez a flexión transversal para arcos biempotrados bajo el supuesto de carga última."

9.19. INFLUENCIA DEL CANTO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL EN LA CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO

Las curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos representadas en el apartado 9.17. corresponden a arcos con una sección transversal de 1 m de canto. Con el fin de analizar la influencia del canto de la sección transversal en la carga última se han calculado algunos arcos con sección transversal de canto 0,50 m, tal y como se señala en el apartado 9.12.2. "Cálculos realizados fuera del plano".

Los resultados obtenidos (indicados en el apartado 9.13.2. "Resultados de los cálculos correspondientes al comportamiento del arco fuera de su plano") se recogen a continuación expresándose en relación con la carga de plastificación.

Sección 50 x 50

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	3	23,70	29,09	0,81
90	9	3,0	9,70	0,31

Sección 100 x 50

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	3	35,90	43,64	0,82
90	9	5,4	14,55	0,37

Para determinar la influencia del canto de la sección transversal en la carga última se comparan los resultados obtenidos con los correspondientes a los mismos coeficientes de forma para un canto de 1 m.

Arcos parabólicos biempotrados con $f/L=0,1$

a	h = 0,50 m				h = 1,00 m			
	1		2		1		2	
L (m)	30	90	30	90	30	90	30	90
q_u/q_p	0,81	0,31	0,82	0,37	0,97	0,45	0,99	0,83

Se observa que en arcos parabólicos sometidos a carga uniformemente distribuida en planta, el valor de q_u/q_p aumenta con el incremento del canto de la sección transversal, tal y como se pone de manifiesto en la Figura 9.19.1.

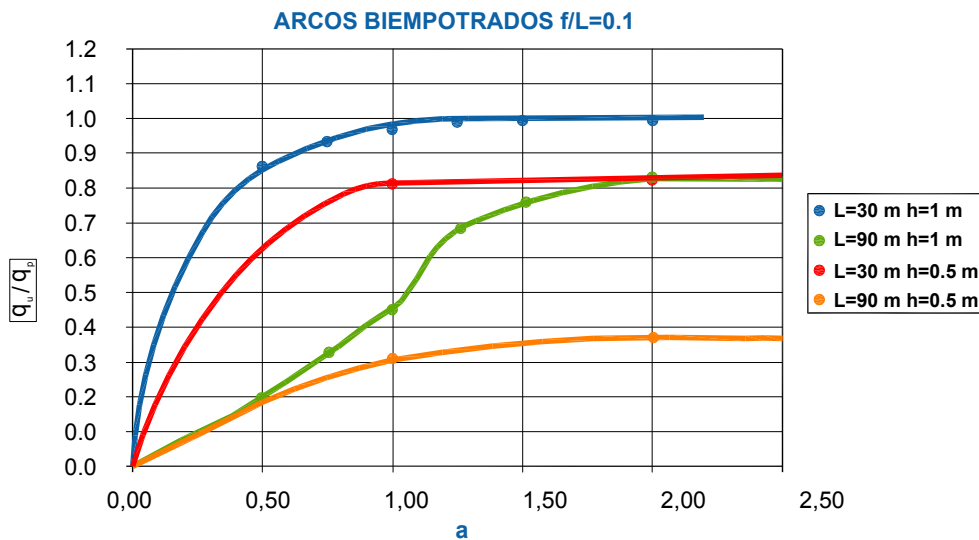


Figura 9.19.1. "Comparativa de q_u/q_p de arcos parabólicos biempotrados con $f/L = 0,10$ para cantos de la sección transversal 0,50 y 1,00 m."

10. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE ARCOS CON TABLERO FUERA DEL PLANO

10. CARGA ÚLTIMA DE COLAPSO DE ARCOS CON TABLERO FUERA DEL PLANO

10.1. PUENTES ARCO

En la actualidad, la casi totalidad de los puentes arco (tal y como se pone de manifiesto en el Apartado 1.4.: “Un poco de historia. Los grandes puentes metálicos en arco” del Capítulo 1) están constituidos por un tablero (el cual puede ser superior, medio o inferior) que permite el paso de vehículos (coches, vehículos pesados, ferrocarriles, etc) a través de los mismos. La existencia del tablero genera un arriostramiento del arco en su comportamiento fuera del plano, lo que provoca un aumento de la carga última de colapso fuera del plano.

En el presente Capítulo se persigue poner de manifiesto el aumento de carga última fuera del plano que provoca la existencia del tablero en los puentes de arcos. Se elige la tipología de arco con tablero **SUPERIOR** para desarrollar la modelización.

10.2. MODELIZACIÓN DE ARCOS CON TABLERO SUPERIOR

La modelización de arcos con tablero superior se realiza a partir de los arcos exentos modelizados con elementos SHELL 43 para caracterizar el comportamiento último de colapso fuera del plano objetivo de la presente Tesis Doctoral. Los detalles de esta discretización se han definido con exactitud en el Capítulo 9 y se resumen en la Figura 10.2.1.: “Modelización del arco exento con elementos SHELL 43”.

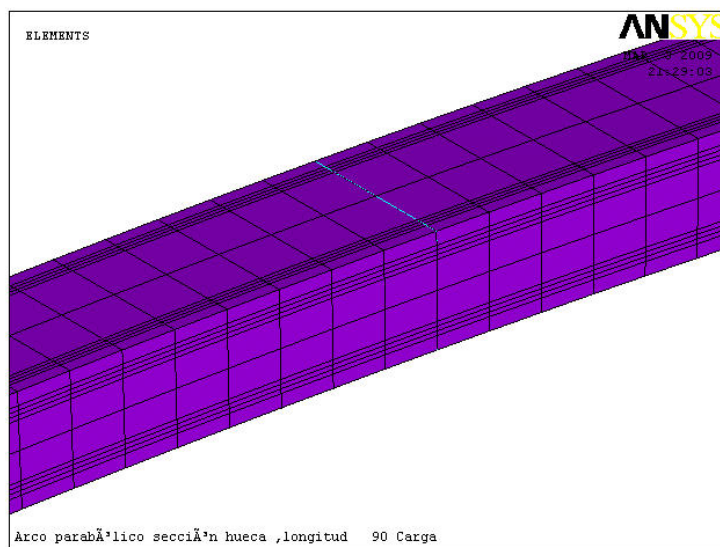


Figura 10.2.1.: "Modelización del arco exento con elementos SHELL 43."

La modelización del tablero se efectúa utilizando dos tipos de elementos lineales: BEAM 4 y Link 8.

Los elementos BEAM 4 representan el tablero y los elementos Link 8 los montantes que se encargan de llevar las cargas del tablero al arco. Estos últimos (Link 8) sólo son capaces de trabajar a esfuerzo axial (en el presente caso a compresión), mientras que el tablero es susceptible de trabajar tanto a axial como a flexión y torsión.

En la Figura 10.2.2. se muestra con detalle la modelización del tablero y montantes. En el caso del tablero las barras diagonales en cruz tratan de unificar el movimiento y deformación de las dos vigas extremas que constituyen el tablero. De esta forma el movimiento del tablero es solidario.

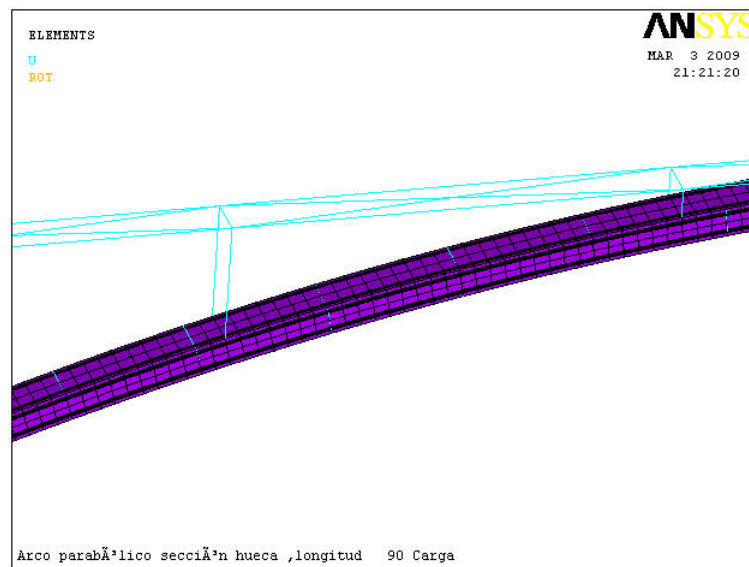


Figura 10.2.2.: "Modelización del tablero y montantes."

Las características geométricas y mecánicas de los elementos que definen el tablero y los montantes se muestran en la Figura 10.2.3.

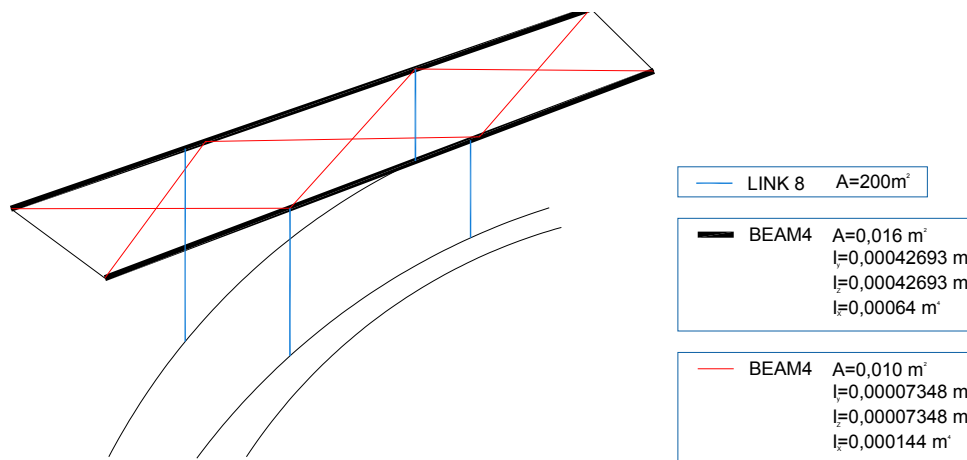


Figura 10.2.3.: "Propiedades geométricas y mecánicas de las secciones transversales que constituyen los elementos del tablero y montantes."

Las condiciones de contorno del tablero se materializan coaccionando el desplazamiento según los tres ejes coordenados de los 4 nodos extremos del mismo tal y como se muestra en la Figura 10.2.4.

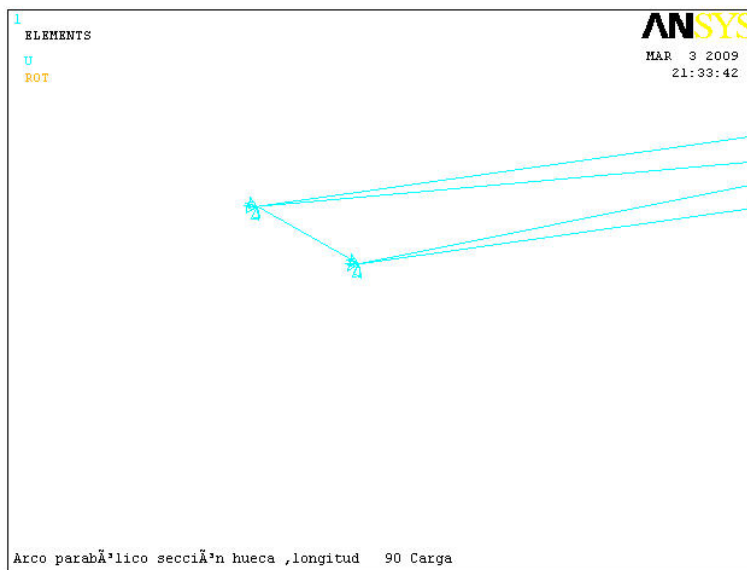
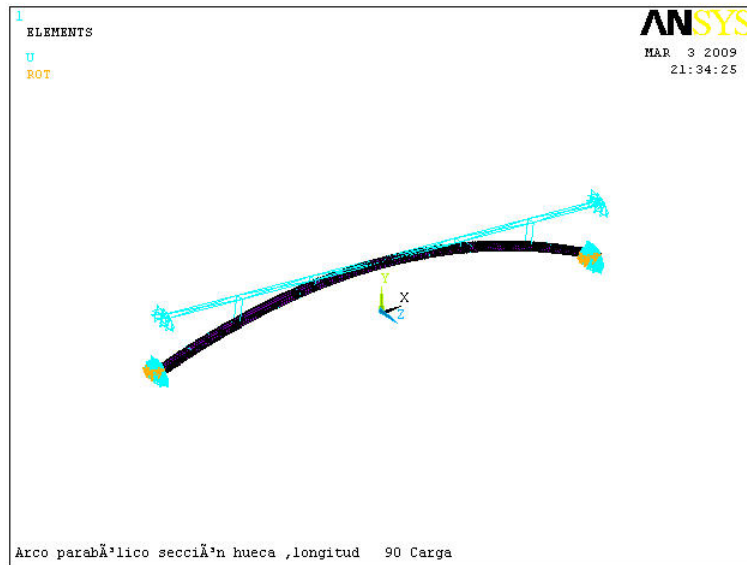


Figura 10.2.4.: "Detalle de las condiciones de contorno del tablero."

10.3. CÁLCULOS REALIZADOS

Se realizan los siguientes cálculos para el caso de arcos biempotrados con relación flecha-luz 0,10.

- 1- Sección transversal 50 x 100

Longitud (m)	Flecha (m)
30	3
90	9

- 2- Sección transversal 100 x 100

Longitud (m)	Flecha (m)
30	3
90	9

- 3- Sección transversal 150 x 100

Longitud (m)	Flecha (m)
30	3
90	9

10.4. RESULTADOS OBTENIDOS

Se muestran a continuación los resultados obtenidos en los cálculos anteriormente reseñados.

Sección transversal 50 x 100

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	3	42,40	43,64	0,97
90	9	6,7	14,55	0,46

Sección transversal 100 x 100

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	3	56,7	58,18	0,98
90	9	13,30	19,40	0,67

Sección transversal 150 x 100

$e = 4$ cm

Arco biempotrado

L(m)	f(m)	q_u (t/ml)	q_p (t/ml)	q_u/q_p
30	3	117,60	116,40	1,01
90	9	32,40	38,80	0,84

La influencia de la existencia de un tablero (en el caso que nos ocupa superior) que arriostra el arco se determina comparando los resultados antes referidos con los obtenidos sin tablero.

Sección transversal 50 x 100

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

$f/L = 0,10$

	SIN TABLERO	CON TABLERO
L(m)	q_u/q_p	q_u/q_p
30	0,86	0,97
90	0,19	0,46

Sección transversal 100 x 100

$e = 2,50$ cm

Arco biempotrado

$f/L = 0,10$

	SIN TABLERO	CON TABLERO
L(m)	q_u/q_p	q_u/q_p
30	0,94	0,98
90	0,45	0,67

Sección transversal 150 x 100

$e = 4$ cm

Arco biempotrado

$f/L = 0,10$

	SIN TABLERO	CON TABLERO
L(m)	q_u/q_p	q_u/q_p
30	0,99	1,01
90	0,75	0,84

10.5. INFLUENCIA DEL TABLERO EN LA CARGA ÚLTIMA

En la Figura 10.5.1. se muestran los resultados obtenidos para los arcos con longitudes de 30 y 90 m con $f/L=0,10$ con y sin tablero.

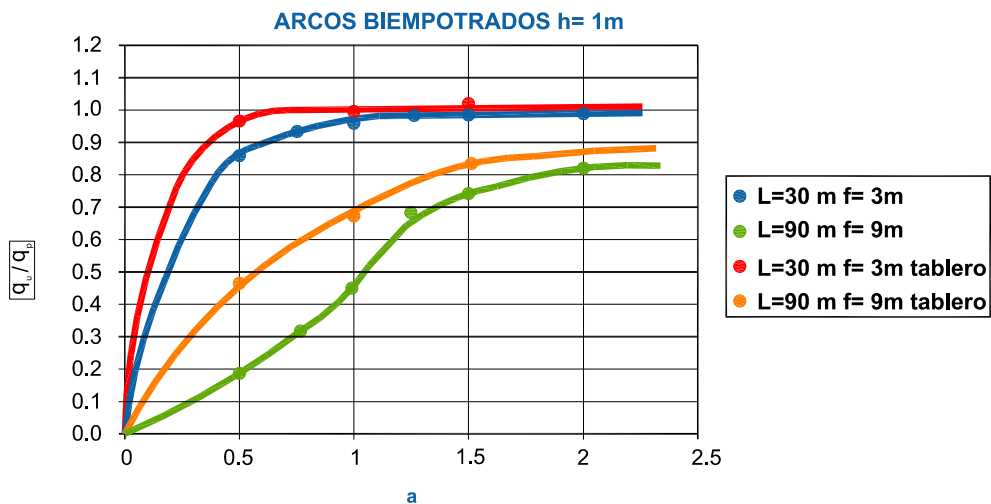


Figura 10.5.1.: "Carga última de arcos con longitudes 30 y 90 m, $f/L=0,10$ y tablero superior. Comparativa con arcos sin tablero."

De la figura se deduce que el tablero, en este caso superior, aumenta la carga última de los arcos. Este aumento es más significativo cuanto menor es el valor de "a" y mayor el de "L".

A igual coeficiente de forma (a), el aumento de q_u es mayor a mayor valor de L, esto es, es más efectivo (desde el punto de vista porcentual). Esto es lógico, ya que a mayor longitud de arco, mayor esbeltez y mayor riesgo de pandeo.

A igual longitud de arco, el aumento de q_u es mayor cuanto menor es el valor de "a". A igual que en el caso anterior, este hecho es razonable, ya que a menor valor de "a" el riesgo de pandeo lateral es mayor, y el efecto del tablero es más significativo.

11. CONCLUSIONES

11. CONCLUSIONES

11.1. CONCLUSIONES

Se presentan a continuación las conclusiones más destacadas que resumen los trabajos realizados en la presente Tesis en los últimos seis años con una intensa labor de investigación en pos de determinar la influencia del pandeo lateral en la carga última de arcos:

1. Se representa el arco parabólico objeto de estudio por medio de un modelo espacial de elementos finitos tipo "lámina" que permite reproducir el comportamiento real elastoplástico con no linealidad geométrica de estructuras de acero con imperfecciones geométricas iniciales y tensiones residuales y sin distorsión de la sección transversal.
2. Se consideran condiciones de contorno para el arco biempotrado y biapoyado. En el caso de arco biapoyado, al impedir el desplazamiento en las tres direcciones x, y, z en la arista intermedia de cada extremo, el comportamiento es similar para el pandeo lateral al de arco biempotrado, muy diferente al teórico de los apoyos de la Resistencia de Materiales.
3. En el caso de la sobrecarga crítica q ELÁSTICA LINEAL global lateral obtenida para los arcos biapoyado y biempotrado, los resultados se ajustan a lo indicado en 1.972 por Tokarz y Sandhú Independientemente de la longitud del arco, dada una relación flecha-luz, el valor de $\frac{q \cdot L^3}{E I_y}$ permanece constante.
4. Lo mismo se puede concluir para el caso de sobrecarga crítica q ELÁSTICA NO LINEAL global lateral obtenida para los arcos biapoyado y biempotrado. Dada una relación flecha-luz, el valor de $\frac{q \cdot L^3}{E I_y}$ permanece constante independientemente de la luz, aunque ligeramente menor que en los correspondientes casos de cálculo elástico lineal, como co-

responde a un cálculo con "no linealidad geométrica" que proporciona un valor de carga crítica inferior.

5. El cálculo de la carga última de colapso (material acero con comportamiento elastoplástico y no linealidad geométrica) fuera del plano arroja las siguientes consideraciones en su análisis de resultados para arcos cajón con almas y alas compactas y diferentes relaciones rigidez torsional – rigidez a flexión transversal:

- Para arcos con esbeltez reducida $\bar{\lambda}_y \geq 1$ y para una relación rigidez torsional – rigidez a flexión transversal dada, el valor de $\frac{q \cdot L^3}{E I_y}$ para un valor de f/L dado es constante e independiente de

L , siendo inferior a los correspondientes valores de los casos elástico lineal y elástico no lineal.

- Para arcos con esbeltez reducida $\bar{\lambda}_y < 1$, situación correspondiente a arcos cortos y poco esbeltos, en el colapso de la estructura entra en juego la plastificación de las secciones y el pandeo en su plano, con lo que no se mantiene la constancia del valor $\frac{q \cdot L^3}{E I_y}$.

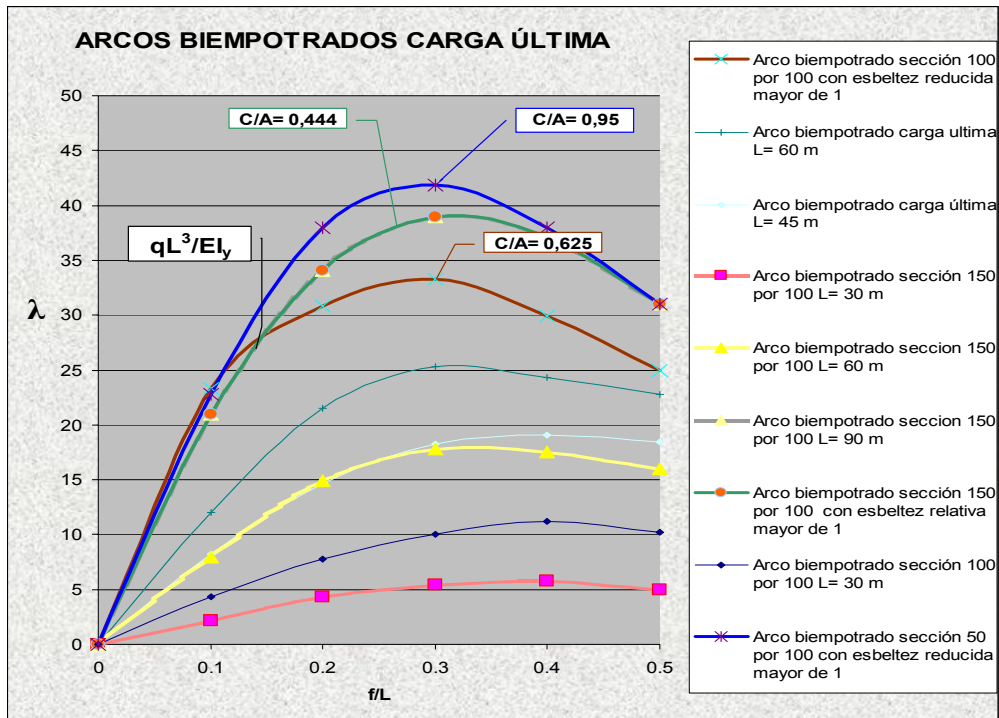


Figura 11.1.1.: "Valores del parámetro $\frac{q \cdot L^3}{E I_y}$ en función de la relación f/L para los cálculos de carga última en arcos con diferentes relaciones rigidez torsional – rigidez a flexión transversal (C/A)."

6. Las gráficas que relacionan la esbeltez reducida $\bar{\lambda}_y$ con el cociente $\frac{q_u}{q_p}$ presentan una forma parabólica, con valores de $\frac{q_u}{q_p}$ comprendidos entre 0 y 1, decrecientes con el aumento de la esbeltez relativa lateral. Si se comparan los resultados obtenidos para la sección transversal en cajón cuadrada de 1 m de lado relativos a la carga última fuera del plano con los equivalentes deducidos por Arancha Manzanera en 2.001 en lo que se refiere al comportamiento en el plano, se deduce que para valores de $\bar{\lambda}_y$ inferiores a 0,50, el colapso del arco se produce por el pandeo en el plano; si $\bar{\lambda}_y > 0,50$, el comportamiento fuera del plano

resulta más crítico. Esto se pone de manifiesto en las Figuras 11.1.2 y 11.1.3.

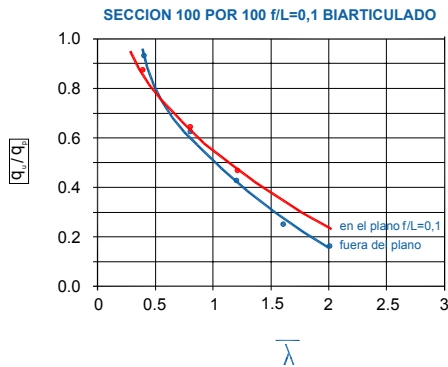


Figura 11.1.2.: "Relación entre $\bar{\lambda}$ y $\frac{q_u}{q_p}$ "en" y "fuera" del plano para arcos biapoyados con sección transversal en cajón de 1 m de lado y 2,5 cm de espesor"

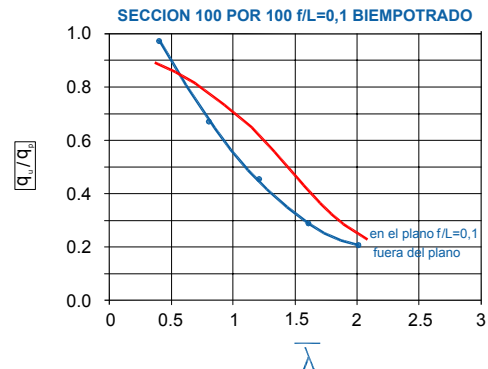


Figura 11.1.3.: "Relación entre $\bar{\lambda}$ y $\frac{q_u}{q_p}$ "en" y "fuera" del plano para arcos biempotrados con sección transversal en cajón de 1 m de lado y 2,5 cm de espesor"

7. Se han determinado para arcos biarticulados y biempotrados con relación flecha-luz 0,1 las gráficas que relacionan el coeficiente de forma $a = \frac{b}{h}$ con los valores de $\frac{q_u}{q_p}$ para diferentes longitudes de arco comprendidas entre 30 y 180 m. Estas muestran un aumento progresivo de $\frac{q_u}{q_p}$ con el incremento de "a", el cual se hace asintótico a partir de un coeficiente de forma igual a 1,50 para el caso de arcos biapoyados y 2 para el caso de arcos biempotrados. Es mayor en este último caso ya que al tener los arcos biempotrados mayor carga crítica de pandeo en el plano, su agotamiento final por pandeo se produce con un mayor valor de la dimensión horizontal de la sección transversal cajón (Figuras 11.1.4 y 11.1.5.)

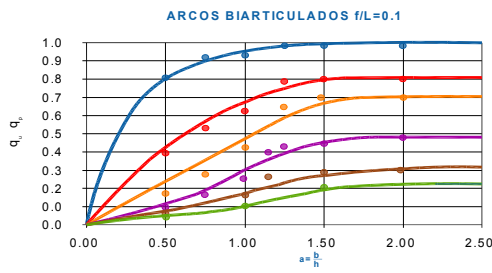


Figura 11.1.4. "Curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos biapoyados con sección transversal cajón de 1 m de canto sometidos a una carga lineal uniformemente distribuida en planta con relación $f/L=0,10$."

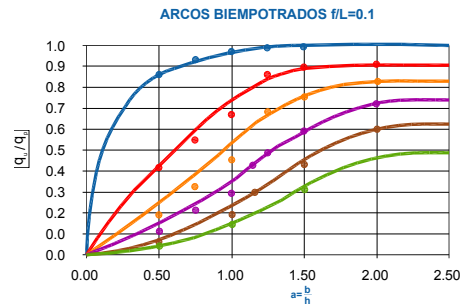


Figura 11.1.5. "Curvas de pandeo lateral de arcos parabólicos biempotrados con sección transversal cajón de 1 m de canto sometidos a una carga lineal uniformemente distribuida en planta con relación $f/L=0,10$."

8. Con el fin de estudiar la influencia de la relación flecha-luz en la carga última de colapso se han calculado algunos arcos con diferentes secciones transversales con relación flecha-luz 0,2, deduciendo que para arcos de pequeña longitud ($L < 45$ m) y pequeño valor de $\bar{\lambda}_y$, el valor de $\frac{q_u}{q_p}$ es mayor para $f/L = 0,2$ que para $f/L = 0,1$; para mayores longitudes y esbelteces relativas con respecto a y ($L > 45$ m), el valor de $\frac{q_u}{q_p}$ es similar para $f/L = 0,2$ y para $f/L = 0,1$. En la Figura 11.1.6. se representa la relación entre $\bar{\lambda}_y$ y $\frac{q_u}{q_p}$ para arcos biarticulados y biempotrados con sección transversal cuadrada de 1 m de lado y 2,5 cm de espesor con relaciones f/L 0,1 y 0,2 y se compara con el resultado obtenido por Sakimoto y Komatsu (el cual arroja valores ligeramente inferiores a los de la presente Tesis al utilizar espesores de chapa que pueden abollar y reducir la carga última de pandeo lateral), confirmando la bondad de los cálculos realizados.

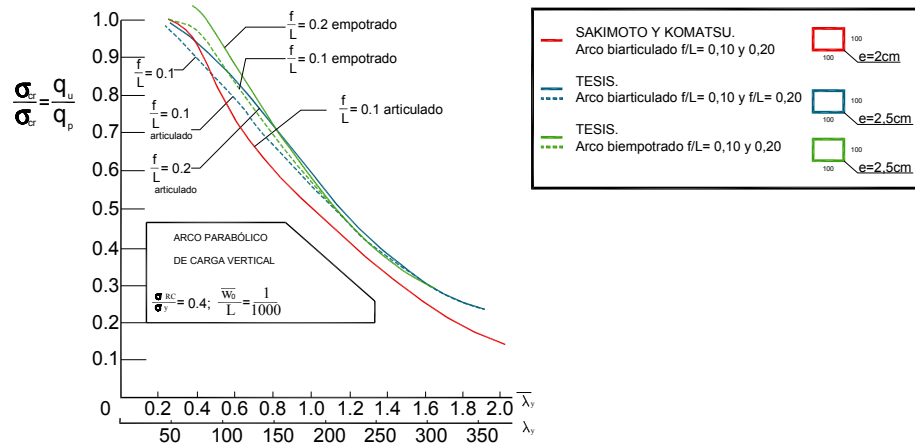


Figura 11.1.6.: "Relación entre λ_y y $\frac{q_u}{q_p}$ para arcos biapoyados y biempotrados con sección transversal cuadrada de 1 m y espesor 2,50 cm para relaciones f/L 0,1 y 0,2. Comparación con los resultados obtenidos por Sakimoto y Komatsu."

Asimismo, para varias secciones transversales, se ha analizado el valor de $\frac{q_u}{q_p}$ para longitudes comprendidas entre 30 y 180 m y para relaciones flecha-luz entre 0,1 y 0,5, correspondiendo el valor máximo de $\frac{q_u}{q_p}$ al intervalo de f/L 0,20-0,40 para longitudes inferiores a 90 m, y a $f/L = (0,10-0,20)$ para longitudes superiores a 90 m.

9. El valor de $\frac{q_u}{q_p}$ aumenta con el incremento del canto de la sección transversal.
10. El valor de $\frac{q_u}{q_p}$ aumenta cuando existe un tablero superior, siendo este incremento más significativo cuanto menor es el valor de $a = b/h$ y mayor el de la longitud.

11.2. FUTUROS TRABAJOS

Esta Tesis podría complementarse llevando a cabo un análisis exhaustivo de las diferentes variables que intervienen en el fenómeno del pandeo lateral de arcos: espesor de las chapas que componen la sección cajón, límite elástico del acero, tensiones residuales, etc. De igual manera se debería profundizar en la modelización elastoplástica del conjunto arco-tablero, considerando la posibilidad de emplear arcos con tablero superior, intermedio e inferior. También queda abierto el trabajo de parametrizar diferentes formas del arco: circular, catenaria, etc.

Queda abierto para futuros doctorandos que quieran tomar el testigo que en este momento cedo, al terminar mi relevo seis años después de que me lo cediera mi compañera Arancha Manzanares.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, y como no puede ser de otra forma, quiero agradecer la santa paciencia que ha demostrado tener mi mujer con mis "fines de semana de Tesis". Dedicar cerca de 6 años a una Tesis Doctoral no hubiera sido posible sin su apoyo incondicional. Silvia, muchas gracias, por apoyar mi esfuerzo.

Asimismo, mis padres, en la distancia, también han mostrado su constante apoyo y cariño, animándome en los momentos de flaqueza y penuria.

En lo que respecta a mi Director de Tesis, poco puedo añadir que no sea conocido de él. Brillantísimo y genial ingeniero, mejor persona, ha sabido dirigir mis pasos de forma correcta hacia una feliz consecución del trabajo de investigación. Atareado como el que más, ha sacado siempre un rato que dedicar a un perdido "doctorando" inundado de dudas. José Luis, muchas gracias de todo corazón.

También debo agradecer la gran ayuda prestada por dos ingenieros especialistas en estructuras. Arancha Manzanares, compañera y amiga, ha sabido transmitirme los conocimientos adquiridos en su Tesis Doctoral, "piedra angular" del presente trabajo de investigación. En los momentos iniciales de mi tarea, los más complicados para el trabajo del doctorando, no ha dudado en apoyarme y dedicar todo el tiempo necesario para encauzar mi tarea. Antonio Molina, uno de los mejores ingenieros en materia de estructuras, ha demostrado su maestría resolviendo los diferentes escollos que he ido encontrando en mi tortuoso camino. Siempre disponible en su oficina de Córdoba, ha resuelto muchos problemas que paralizaban mi trabajo de Tesis. Así pues, muchas gracias a los dos.

Por último, no puedo dejar de mencionar varias personas sin cuya colaboración no hubiera sido posible llevar a buen término la presente Tesis. Los informáticos de Ayesa, resolviendo los problemas derivados de instalación del programa de Ansys, Virginia Rivas y Pepi Barroso, encargadas de manejar el procesador de textos y de dar formato a la edición definitiva, Ramón Rivera, que ha delineado todo los gráficos incluidos en la Tesis, José Luis Manzanares Abásolo, vicepresidente de Ayesa y amigo personal, que ha puesto a mi disposición cualquier recurso material y necesidad de formación, y todos los compañeros de

AGRADECIMIENTOS

reprografía. Y otras personas que han dedicado parte de su tiempo a ilustrarme con sus ideas: Santiago Pérez Fadón, José Emilio Herrero, Juan José Sánchez, Vicente Vicent, Javier Rui-Wamba, Manuel Juliá y Carlos Siegrist.

Y alguno que puedo olvidar por descuido.

A todos, de nuevo, mi eterno agradecimiento.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

- **ALMEIDA, N.F.**, 1.970, "Lateral Buckling of Twin Arch Ribs with Transverse Bars", *Dissertation to the State University of Ohio*.
- **ARENAS, J. J.** "Caminos en el aire: Los puentes". Volúmenes I y II. Colección *ciencias, humanidades e ingeniería*.
- **ARGÜELLES, ALVAREZ, R., ARGÜELLES BUSTILLO, R., ARRIAGA MARTINTEGUI, F.** 2005. "Estructuras de acero 1". 2ª Edición. Ediciones Técnicas y científicas. Madrid.
- **ARIZA, P. y SÁEZ, A.** 1.999, "Método de los elementos finitos. Introducción a Ansys". Publicaciones de la Universidad de Sevilla. Manuales Universitarios.
- **CUDÓS, V. y QUINTERO, F.** 1.988, "Estructuras metálicas. La pieza aislada. Inestabilidad". *Universidad Nacional de Educación a distancia. Escuela de la edificación*. Unidad didáctica I. Tomo II.
- **FERNÁNDEZ CASADO, C.**, "Formulario para Proyectos de Puentes de arco de hormigón armado". Ed. DOSSAT, S.A. Madrid.
- **GALAMBÓS, THEODORE V.**, 1.998, "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 5º Ed. John Wiley and Sons. New York.
- **GODDEN, W.G.**, 1.954, "The Lateral Buckling of Tied Arch", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 93, Nº 3, pp. 496 – 514.
- **GODDEN, W.G. y THOMPSON, J.G.** ,1.959, "An experimental Study of a Model Tied-Arch Bridge", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 14, Nº 3, pp. 383 – 394.
- **KEE, C.F.** , 1.961, "Lateral Inelastic Buckling of Tied Arches", *Journal of the Structural Division* , ASCE, Vol. 87, ST1, pp. 23 – 29.
- **KOMATSU, S. y SAKIMOTO, T.** ,1.977, "Ultimate Load Carrying Capacity of Steel Arches", *Journal of the Structural Division* , ASCE, Vol. 103, ST2, pp. 2323 – 2336.
- **KOMATSU, S. y SAKIMOTO, T.** ,1.977, "A Possibility of Total Break-down of Bridge Arches due to Buckling of the Lateral Bracing", *Final Report of the 2º International Colloquium on Stability of Steel Structures*, pp. 299 – 301.

- **KOMATSU, S. y SAKIMOTO, T.**, 1.979, "Ultimate Strength of Steel Arches under Lateral Loads", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 292, pp. 83 – 94.
- **KOMATSU, S., YAMAO, T. y KOMATSU, S.**, 1.979, " Experimental study on the ultimate strength of steel arches", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 286, pp. 139 – 149.
- **KURANISHI, S. y YABUKI, T.**, 1.981, "Effect of Lateral Bracing Rigidities on the Ultimate Strength of Steel Arch Bridges", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 305, pp. 47 – 58.
- **KURANISHI, S. y YABUKI, T.**, 1.981, "Required Out-of-Plane Rigidities of Steel Arch Bridges with Two Main Arch Ribs Subjected to vertical and lateral Loads", *The Tecnology Reports of Tohoku University*, Vol. 46, pp. 47 – 72.
- **KURANISHI, S.**, 1.961, "The Torsional Buckling Strength of Solid Rib Arch Bridge", *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 75, pp. 59 – 67.
- **MANZANARES ABÁSULO, A.**, 2.001, "Cálculo de parámetros de imperfección en arcos metálicos de sección cajón". Tesis doctoral.
- **OJALVO, M. y NEWMAN, M.**, 1.968, "Buckling of Naturally Curved and Twisted BEAMS," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 94, EM5, pp. 1.067-1087.
- **OJALVO, M., DEMUTS, E. y TOKARZ, F.J.**, 1.969, "Out-of-plane Buckling of Curved Members", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 95, ST10, pp. 2.305 – 2.316.
- **OSTLUND, S.**, 1.954, " Lateral Stability of Bridge Arches Braced with Transverse Bars", *Transactions of Royal Institute of Technology*, Stockholm, Sweden, Nº 84.
- **PI, Y. y BRADFORD, M.**, 2.004, "Elastic flexural-torsional buckling of fixed arches", *School of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney*.
- **PI, Y. y TRAHAI, N.**, 1.996, "Three-dimensional nonlinear analysis of elastic arches", *Engineering Structures*, Vol.18,nº 1,pp. 49-63.
- **PI, Y. y TRAHAI, N.**, 1.998, "Non-linear buckling and postbuckling of elastic arches", *Engineering Structures*, Vol.20,nº 7,pp. 571-579.
- **PI, Y. y TRAHAI, N.**, 2.000, "Inelastic lateral buckling strength and design of steel arches", *Engineering Structures*, Vol.22, pp. 993-1.005.

- **SAKIMOTO, T.**, 1.983, "Ultimate Strength of Steel Arch Bridges", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 3, pp. 613 – 627.
- **SAKIMOTO, T. y KOMATSU, S.**, 1.979, "Ultimate Strength of Steel Arches under Lateral Loads", *Transaction of Japan Society of Civil Engineers*, Vol.11
- **SAKIMOTO, T. y NAMITA, Y.** 1.971, "Out- of-Plane Buckling Solid Rib Arches Braced with Transverse Bars", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 191, pp. 109 – 116.
- **SAKIMOTO, T., YAMAO, T. y KOMATSU, S.**, 1.979, "Experimental Study on the ultimate Strength of Steel Arches", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Nº 286, pp. 139 – 149.
- **SHUKLA, S.N. y OJALVO, M.**, "Lateral Buckling of Parabolic Arches with Tilting Loads", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST6, pp. 1.763 – 1773.
- **STUSSI, F.**, 1.943, "Lateral Buckling and Vibration of Arches", *Proceedings of International Association of Bridge and Structural Engineering*, Vol. 7, pp. 327 – 343.
- **TOKARZ, F.J. y SANDHÚ, R.S.**, 1.972, "Lateral Torsional Buckling of Parabolic Arches", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, ST5, pp. 1.161 – 1179.
- **TOKARZ, F.J.**, 1.971, "Experimental Study of Lateral Buckling of Arches", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST2, pp. 545 – 559.
- **WASTLUND, G.**, 1.960, "Stability Problems of Compressed Steel Members and Arch Bridges", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 86, ST6, pp. 47 – 71.
- **WEN, K.R. y LANGE, J.**, 1.981, "Curved BEAM Element for Arch Buckling Analysis", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 107, ST11, pp. 2.053 – 2.069.

NORMATIVA

- RPM-95. "Recomendaciones para el proyecto de puentes metálicos para carreteras".
- British Standards Institution, BS 5400: Part 3: 1982. "Steel, concrete and composite bridges. Code of practice for design of steel bridges".