

28.780.

Biblioteca
653828



TESIS

ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL DE PLACAS Y APILADOS ORTOTROPOS

JOHAN WIDEBERG

Ingeniero Industrial por LTH de Lund (Suecia)

presentada en la

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

DE LA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

T. 130

PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

SEVILLA, SEPTIEMBRE DE 1995

22 de junio de 1995

Fonts used are: LucidaBright + LucidaNewMath

Lucida[®] is registered trademark of Bigelow & Holmes Inc.

A Inma y Marina

Agradecimientos

Esta tesis doctoral es el resultado de muchas horas de trabajo, esfuerzo y constancia. Pero, afortunadamente, no me he encontrado solo. Así pues, quiero expresar mi gratitud al Profesor Francisco García Benítez, por haber dirigido el trabajo. También quiero darle las gracias por haber puesto todo su saber y experiencia a mi alcance.

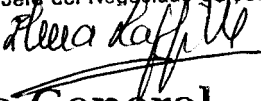
Así mismo, quiero dar las gracias a el Profesor Publio Pintado Sanjuán por su colaboración y ayuda.

También quiero agradecer a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología a través del proyecto MAT91-1014, y por la beca de formación de personal investigador (C-93) del Ministerio de Educación y Ciencia.

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 244 número 3 del libro
correspondiente.

Sevilla, _____

El Jefe del Negociado de Tesis,



Índice General

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | Definición de ortotropía | 1 |
| 1.1.1 | Antecedentes históricos de materiales ortótropos | 1 |
| 1.1.2 | Materiales compuestos | 1 |
| 1.1.3 | Hormigón armado | 2 |
| 1.2 | Soluciones fundamentales | 2 |
| 2 | Teoría básica y formulación | 7 |
| 2.1 | Ecuaciones de equilibrio y comportamiento | 7 |
| 2.1.1 | Caso general de orientación arbitraria | 9 |
| 2.2 | Definición del problema: Capa infinita ortótropa | 14 |
| 2.2.1 | Transformación de las ecuaciones diferenciales usando la transformada de Fourier | 15 |
| 2.3 | Ecuación matricial diferencial | 19 |
| 2.3.1 | Matriz de autovalores | 20 |
| 2.3.2 | Matriz de autovectores | 21 |
| 2.3.3 | Autovalores para una orientación arbitraria ϕ | 23 |
| 2.3.4 | Autovectores para una orientación arbitraria ϕ | 24 |
| 2.3.5 | Matriz de transferencia | 24 |
| 2.3.6 | Matrices de flexibilidad | 27 |
| 2.3.7 | Vector de estado para un punto interior | 27 |
| 2.4 | Sistema no homogéneo: capa con carga concentrada | 28 |
| 2.4.1 | Vector de estado para un punto interno | 29 |
| 2.5 | Cálculos numéricos de tensiones y desplazamientos | 30 |
| 2.6 | Resultados numéricos | 31 |
| 3 | Sistema multi-capas ortótropa | 35 |
| 3.1 | Ecuación matricial para un sistema multicapa ortótropa | 35 |
| 3.2 | Cálculo numérico de tensiones y desplazamientos en un medio multicapa | 36 |
| 3.3 | Resultados numéricos | 37 |
| 4 | Incorporación de la solución fundamental al método de los elementos de contorno | 41 |
| 4.1 | Discusión del método de los elementos de contorno | 41 |
| 4.2 | Teoría del método de los elementos de contorno | 41 |
| 4.3 | Implementación de la ecuación integral de contorno en el programa BEM | 43 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3.1 | Definición de la malla BEM | 43 |
| 4.3.2 | Procedimiento seguido para calcular la solución del BEM | 44 |
| 4.3.3 | Subdivisión de elementos | 48 |
| 5 | Ejemplos numéricos utilizando el método de elementos de contorno | 49 |
| 5.1 | Agujero circular sometido a presión interna | 49 |
| 5.1.1 | Modelado de la superficie circular y la malla del contorno | 49 |
| 5.1.2 | Resultados y análisis del error | 50 |
| 5.2 | Agujero elíptico sometido a presión interna uniforme | 56 |
| 5.2.1 | Modelado de la superficie del agujero elíptico y la malla de elementos de contorno | 56 |
| 5.2.2 | Resultados y análisis del error | 57 |
| 5.3 | Agujero circular con material ortótropo sometido a presión interna uniforme | 69 |
| 5.3.1 | Resultados y análisis de error de la placa ortótropa | 69 |
| 5.4 | Placa circular con bordes exteriores empotrados | 88 |
| 5.4.1 | Soluciones isótropas teóricas | 88 |
| 5.4.2 | Modelado de la malla | 90 |
| 5.4.3 | Soluciones ortótropas | 97 |
| 6 | Resumen y conclusiones | 105 |
| 6.1 | Resumen | 105 |
| 6.2 | Conclusiones | 105 |
| A | Resultados numéricos de la solución fundamental | 107 |
| B | Resultados numéricos de la solución fundamental de una multi-capa | 123 |

Índice de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Ángulo entre la dirección principal del material y la dirección local de una lámina individual. | 9 |
| 2.2 | Capa con carga unitaria aplicada en un punto interno x arbitrario | 30 |
| 2.3 | Diagrama de flujo del método de computación, (una capa). | 32 |
| 3.1 | Multicapa con una carga aplicada en un punto arbitrario x en una capa arbitraria. | 37 |
| 3.2 | Diagrama de flujo del método de cálculo, (multi-capas). | 38 |
| 4.1 | Ejemplo de una malla de BEM. Los diferentes tonos de gris indican diferentes materiales. Todos los elementos en una capa tienen que tener el mismo grosor pero pueden tener diferente ancho. | 44 |
| 4.2 | Ejemplo de una malla de BEM cuyas líneas continuas indican el contorno del elemento y las discontinuas indican las sub-capas. En la figura se representa la carga concentrada aplicada en un nodo de coordenada vertical H y la solución fundamental se calcula en el centro de un sub-elemento de coordenada vertical z | 45 |
| 4.3 | Diagrama de flujo del algoritmo usado para hallar la solución de los elementos de contorno. Los rectángulos indican importantes pasos en el programa y las flechas indican diferentes clases de bucles. | 46 |
| 4.4 | Ejemplo de una malla donde la carga concentrada aplicada en un nodo de coordenada vertical H y la solución fundamental se calcula en el centro de un sub-elemento de coordenada vertical z | 47 |
| 4.5 | Definición de las variables usadas en el proceso de sub-división de un elemento. | 48 |
| 5.1 | Agujero en una placa infinita sometido a presión interna. | 49 |
| 5.2 | Malla de elementos de contorno. La malla está formada por 160 elementos todos con igual anchura y espesor. Los elementos son constantes. | 50 |
| 5.3 | Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 51 |
| 5.4 | Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 52 |
| 5.5 | Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 52 |
| 5.6 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 53 |
| 5.7 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 53 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.8 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 54 |
| 5.9 | Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos para una distancia de $1.4h$ desde el centro del agujero. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 54 |
| 5.10 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos para una distancia de $1.4h$ desde el centro del agujero. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material. | 55 |
| 5.11 | Geometría de un agujero elíptico en una placa infinita con grosor uniforme. El agujero está sometido a presión interna. | 56 |
| 5.12 | Malla de BEM con 160 elementos. Los elementos están divididos en cinco capas, todas con el mismo espesor. Los elementos tienen todos igual anchura. | 57 |
| 5.13 | Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior. | 58 |
| 5.14 | Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior. | 58 |
| 5.15 | Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior. | 59 |
| 5.16 | Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior. | 59 |
| 5.17 | Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior. | 60 |
| 5.18 | Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior. | 60 |
| 5.19 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior. | 61 |
| 5.20 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior. | 61 |
| 5.21 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior. | 62 |
| 5.22 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior. | 63 |
| 5.23 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior. | 63 |
| 5.24 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior. | 64 |
| 5.25 | Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.35, y = 0$. | 64 |
| 5.26 | Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.70, y = 0$. | 65 |
| 5.27 | Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 0.70$. | 65 |
| 5.28 | Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$. | 66 |
| 5.29 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.35, y = 0$. | 66 |
| 5.30 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.70, y = 0$. | 67 |
| 5.31 | Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 0.70$. | 67 |

5.32 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$ 68

5.33 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa. 70

5.34 Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa. 71

5.35 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa. 72

5.36 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa. 72

5.37 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 1.4h, y = 0$. Una capa. 73

5.38 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Una capa. 74

5.39 Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$. Una capa. 74

5.40 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Una capa. 75

5.41 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas. 76

5.42 Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas. 76

5.43 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas. 77

5.44 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas. 77

5.45 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Tres capas. 78

5.46 Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Tres capas. 78

5.47 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 1.4, y = 0$ 79

5.48 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$ 79

5.49 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas. 80

5.50 Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas. 80

5.51 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas. 81

5.52 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas. 81

5.53 Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Cinco capas. 82

5.54 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Cinco capas. 82

5.55 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Cinco capas. 83

5.56 Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Cinco capas. 83

| | |
|---|----|
| 5.57 Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para una capa con orientación $/0/$. $z = 0.5h$ | 84 |
| 5.58 Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para tres capas con orientaciones $/0/90/0/$. $z = 0.5h$ | 84 |
| 5.59 Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para cinco capas con orientaciones $/0/90/0/90/0/$. $z = 0.5h$ | 85 |
| 5.60 Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para una capa con orientación $/0/$. $z = 0.5h$ | 86 |
| 5.61 Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para tres capas con orientaciones $/0/90/0/$. $z = 0.5h$ | 87 |
| 5.62 Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para cinco capas con orientaciones $/0/90/0/90/0/$. $z = 0.5h$ | 87 |
| 5.63 Geometría y carga en una placa circular empotrada. La línea gruesa simboliza las condiciones de contorno (todos los desplazamientos nulos). | 88 |
| 5.64 Placa circular empotrada con una carga concentrada en el centro. | 89 |
| 5.65 Placa circular empotrada con una carga concentrada en el centro. El desplazamiento está en función de la posición radial r , a es el radio de la placa. | 89 |
| 5.66 Placa circular empotrada con una carga concentrada situada asimétricamente. El desplazamiento se tiene para una distancia b de la carga. | 90 |
| 5.67 Mallas de elementos de contorno. Todos los elementos son constantes y tienen un punto de Gauss en el centro de gravedad. La malla m1 (5.67 a) está compuesta de $16+16+1$ elementos. La malla m2 (5.67 b) de $3 \times 16+1$ elementos. La malla (5.67 c) usa de $5 \times 32+1$ elementos. | 91 |
| 5.68 Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 0, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas. | 92 |
| 5.69 Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de un punto en $x = 2, y = 0$. La carga se aplicó en el centro de la placa. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas. | 93 |
| 5.70 Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de un punto en $x = 2, y = 0$. La carga se aplicó en el centro de la placa. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_x está normalizado con la solución teórica de placas delgadas. | 94 |
| 5.71 Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 2, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas. | 95 |
| 5.72 Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 2, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_x está normalizado con la solución teórica de placas delgadas. | 96 |
| 5.73 Definición de la dirección principal de un material ortótropo. La dirección está indicada con dos líneas paralelas en la figura. | 97 |
| 5.74 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 0$. Coordenadas normalizadas frente al desplazamiento (normalizado) u_z . Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. | 98 |

5.75 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 0$. Coordenadas normalizadas frente al desplazamiento (normalizado) u_z . Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 99

5.76 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 100

5.77 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 0$. Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 100

5.78 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 101

5.79 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h$, $\varphi = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 102

5.80 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h$, $\varphi = 90$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 103

5.81 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h$, $\varphi = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 0$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 103

5.82 Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h$, $\varphi = 90$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo. 104

A.1 Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^x, \sigma_{yy}^x, \sigma_{zz}^x$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 108

A.2 Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^x, \sigma_{yy}^x, \sigma_{yy}^x$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 109

A.3 Tensiones normalizadas u_x^x, u_y^x, u_z^x frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 110

A.4 Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^z, \sigma_{yy}^z, \sigma_{zz}^z$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 111

A.5 Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^z, \sigma_{yy}^z, \sigma_{yy}^z$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 112

A.6 Desplazamiento normalizado u_z^z frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 112

A.7 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^x, \sigma_{yy}^x, \sigma_{zz}^x$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. 113

| | |
|---|-----|
| A.8 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^x, \sigma_{xy}^x, \sigma_{yy}^x$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 114 |
| A.9 Desplazamientos normalizados, u_x^x, u_y^x, u_z^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 115 |
| A.10 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^y, \sigma_{yz}^y, \sigma_{zz}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 116 |
| A.11 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^y, \sigma_{xy}^y, \sigma_{yy}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 117 |
| A.12 Desplazamientos normalizados, u_x^y, u_y^y, u_z^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 118 |
| A.13 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^z, \sigma_{yz}^z, \sigma_{zz}^z$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 119 |
| A.14 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^z, \sigma_{xy}^z, \sigma_{yy}^z$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 120 |
| A.15 Tensiones normalizadas, u_x^z, u_y^z, u_z^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo. | 121 |
| B.1 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^x, \sigma_{xy}^x, \sigma_{yy}^x$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 124 |
| B.2 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^x, \sigma_{yz}^x, \sigma_{zz}^x$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 125 |
| B.3 Desplazamientos normalizados, u_x^x, u_y^x, u_z^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 126 |
| B.4 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^y, \sigma_{xy}^y, \sigma_{yy}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 127 |
| B.5 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^y, \sigma_{yz}^y, \sigma_{zz}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 128 |
| B.6 Desplazamientos normalizados, u_x^y, u_y^y, u_z^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 129 |
| B.7 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^z, \sigma_{xy}^z, \sigma_{yy}^z$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. | 130 |

-
- B.8 Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^z, \sigma_{yy}^z, \sigma_{zz}^z$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. 131
- B.9 Desplazamientos normalizados, u_x^z, u_y^z, u_z^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas. 132

Índice de Tablas

| | |
|--|---|
| 1.1 Soluciones fundamentales para una material isótropa | 4 |
| 1.2 Soluciones fundamentales para una material no-isótropa | 5 |

Capítulo 1

Introducción

1.1 Definición de ortotropía

Los materiales convencionales de ingeniería, como el acero y otros metales, comúnmente se definen como isotropos y homogéneos, es decir, las propiedades del material son constantes en todas las direcciones para un punto en un cuerpo y, además, las propiedades no son función de la posición en el cuerpo. La isotropía es muy conveniente porque es fácil medir las propiedades de un material haciendo un único ensayo. Las expresiones matemáticas que relacionan tensión y deformación son relativamente simples. Sin embargo, no todos los materiales son isotropos, especialmente en la tecnología de hoy donde se usan más y más compuestos para formar complicadas estructuras. Los materiales compuestos pertenecen al grupo de materiales que normalmente son anisotropos, o sea, las propiedades del material son diferentes en cualquier dirección. Sin embargo, muchas clases de compuestos se pueden considerar ortotropos debido a la orientación de las fibras.

Un material se considera ortótropo si existen tres planos de simetría y si el comportamiento se describe en ejes de coordenadas paralelos a éstos. Hay varios ejemplos importantes de materiales ortotropos: madera, algunos materiales compuestos reforzados con fibra y hormigón armado. Es importante comprender que un material ortótropo se comporta de manera diferente que un material isotropo. Para materiales isotropos existe una relación entre el módulo de Young E , el módulo de Poisson ν y el módulo de cortadura G . Sin embargo, no existe una tal relación para las constantes que determinan las propiedades del material ortótropo, siendo necesario medir todas las constantes de manera independiente.

1.1.1 Antecedentes históricos de materiales ortotropos

Muchos materiales pueden considerarse ortotropos. Esencialmente todos los materiales reforzados con fibras pueden considerarse como ortotropos. La madera, por ejemplo, es ortótropo debido a las fibras de celulosa paralelas al núcleo del árbol. Estas fibras hacen la madera muy resistente en tensión y en flexión a lo largo de la dirección de la fibra pero apreciablemente más débil en la dirección perpendicular a las fibras. Los materiales compuestos, especialmente placas y laminas reforzadas con fibras, conforman un grupo muy importante que puede considerarse ortótropo. El hormigón armado, se puede considerar como un compuesto con fibras muy ralas, también ortótropo. El hormigón, aunque parecido a un material compuesto se analiza de una manera totalmente diferente y puede, por lo tanto, no analizarse usando el método propuesto en esta tesis.

1.1.2 Materiales compuestos

Los materiales compuestos son muy antiguos. Ya los Egipcios reforzaron ladrillos poniendo paja cortada en ellos, esto no lo hicieron para reforzar la estructura, sino para evitar el crecimiento de grietas en los ladrillos cuando se secaban. De una forma similar los Incas y los Mayas pusieron fibras de plantas en su alfarería. Otro tipo muy antiguo de compuestos es el papel marché que es una estructura constituida de muchas capas de papel o paños empapados en resina. El papel

marché fue inventado también por los Egipcios, quienes hicieron ataúdes para momias de este material. Durante la segunda guerra mundial se usó para producir los tanques de combustible y otros componentes para aviones. Los materiales compuestos también se usaron para hacer arcos ya al final del cuarto milenio A.C por los Sumerios. El arco compuesto es una estructura laminada hecha de una combinación de materiales convenientes con propiedades diferentes. Un arco compuesto típico podría hacerse de madera, hueso, cuerno y tendón en capas diferentes. El arco compuesto tiene la ventaja de ser ligero y corto pero con la misma resistencia que un arco de madera.

1.1.3 Hormigón armado

Ya en el año 470 A.C los colonos griegos de Agrigentum usaron vigas de hormigón armado de cinco metros de largo y doce por treinta centímetros de sección. También, para construir la gran entrada a la Acrópolis, en Propylaea 437 A.C, usaron varillas de hierro que escondieron y cementaron dentro de ranuras en el mármol. Esto se hizo para hacer el mármol resistente a cargas de tracción.

El hormigón armado moderno fue inventado por tres personas más o menos simultáneamente: un jardinero Francés, Joseph Morier, hizo floreros empotrando una malla de varillas finas de hierro en hormigón en 1849. Un Inglés, W.B. Wilkinson, buscando uso para sogas mineras viejas, fabricó vigas reforzadas para el uso en la construcción poniendo las sogas en la zona de tensión de las vigas. Finalmente, un ingeniero Francés, J.L Lambert construyó un bote de remos de homigón con barras de hierro expuesto en 1855. Unos años más tarde, en 1890, la técnica se refinó aún más por armar el hormigón con barras de acero sometidas a tracción.

Para más antecedentes ver Gordon [22], [23] o Warren [58].

1.2 Soluciones fundamentales

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de la elasticidad es la solución de Kelvin [48] para una fuerza aplicada en un punto en un sólido elástico, lineal, isótropo y homogéneo de dimensión infinita (2D y 3D). Con esta solución se puede obtener la distribución de tensiones para un número grande de problemas de importancia práctica por métodos de síntesis y superposición, entre otros. Por lo tanto, esta solución abrió en 1848 un campo amplio para muchas soluciones fundamentales que iban a aparecer en el futuro.

Estas soluciones fundamentales pueden clasificarse, atendido a la geometría del sólido, en: espacio tri-dimensional indefinido (F-S), semi-espacio infinito (H-S), lámina infinita (L), espacio laminado tri-dimensional infinito (L-F-S) y semi-espacio infinito laminado (L-H-S); atendiendo al comportamiento del material en: isótropo, no-isótropo (transversalmente isótropo (t-i), ortótropo (o) y anisótropo (a) esencialmente); y atendiendo a la naturaleza de las solicitaciones, en: estática o dinámica (temporal - armónica/respuesta permanente o transitoria).

Hay trabajos que tratan geometrías menos usuales tales como cuerpos de cuarto-de-plano, viscoelásticos o materiales no homogéneos, pero estos casos son menos comunes y tienen un interés reducido entre la comunidad científica.

Una tabla esquemática de las soluciones fundamentales más conocidas, referenciadas bajo el nombre del autor (según el más pionero o el trabajo más explícito), se muestra en las tablas (1.1) y (1.2). Las casillas vacías sobre esta tabla indican la carencia de soluciones disponibles, atendiendo a la literatura publicada hasta la actualidad.

De la revisión de la literatura existente se deduce que los estudios relacionados con ortotropía están muy limitados. Es evidente que resulta difícil encontrar una solución explícita y cerrada de una capa ortótropa, por no decir imposible. Algunos de los artículos revisados utilizan algunos tipos de simplificaciones (se supone que el problema es bidimensional, se hace una aproximación lineal en una de las dimensiones, se obtienen constantes isótropas a partir de valores medios de constantes anisótropas, etc.).

En esta tesis se presenta la técnica de cálculo de desplazamientos y tensiones de una sola capa infinita ortótropa sujeta a una fuerza interior que actúa sobre un punto arbitrario y de un laminado ortótropo infinito sujeto a una carga idéntica. La idea básica del método presentado aquí está basada en el artículo de Benitez y Rosakis ([4]) donde han hallado la solución fundamental

para estas en un material isotrópico.

El aplicación del método a un medio ortótropo implica grandes dificultades. Como veremos posteriormente es imposible, con las herramientas matemáticas que tenemos disponibles hasta ahora, calcular analíticamente una función de Green, ni siquiera la función de Green en el espacio de la transformada Fourier para este problema. Estas funciones de Green se evaluarán numéricamente para un punto arbitrario que resulta en la transformada de Fourier de los desplazamientos y tensiones. Posteriormente la aplicación de la transformada inversa de Fourier permitirá obtener las tensiones y desplazamientos por medio de integraciones numéricas aplicando el método FFT.

| Soluciones fundamentales para una material isotrópica | | | | |
|---|-----------------------|--|-------------------------------|-------------------|
| | elastostático | temporal-armónica/ respuesta permanente | elastodinámico transitoria | |
| 2-D | F-S | Kelvin(48) | Kupradze(30) Doyle(13) | Stokes(44) |
| | H-S | Melan(33) | | |
| | L | | | |
| | L-F-S | Fares-It(16) | | |
| | L-H-S | Chan-Karasudhi-Lee (11) | | |
| | 2-H-S | Carvalho-Curran(10) | | |
| | F-S | Kelvin(48) | Kupradze(30) Doyle(13) | Stokes(44) |
| | H-S | Minidiri(34) | | Johnson(26) |
| | L | Benitez-Rosakis(4, 5) | Benitez-Rosakis(6) | |
| | 3-D | Ling(31) | Piniado-Benitez(38) | |
| L-F-S | | Benitez-Rosakis(4, 5) | Benitez-Rosakis(6) | |
| L-H-S | | Singh(43) | Singh(43) | |
| 2-H-S | | Chan-Karasudhi-Lee(11) | Luco-Apse(32, 1) | |
| | | Kongved(42) | | |
| | | Dundurs-Hieteny(15) | | |
| F-S | | Kermandis(28) | Dominguez-Abascal(12) | Wang-Banerjee(53) |
| H-S | | Hasegawa(20) | | |
| L | | | | |
| L-F-S | | | | |
| L-H-S | | | | |
| 2-H-S | Hasegawa-Lee-Mura(21) | | | |
| Axismétrico | | | | |

TABLA 1.1: Soluciones fundamentales para una material isotrópica

| Soluciones fundamentales para una material no-isótropa | | | |
|--|-------------------------------------|---|---|
| | elastostático | elastodinámico | |
| | | temporal-armónica/ respuesta permanente | transitoria |
| 2-D | F-S | a: Green(181) o: Green(181) | Wang-Achenbach (511) |
| | H-S | o: Green-Zerna (119) o: Durnir-Mehra(141) o: Jhang-Lee(251) | t-i: Wang-Rajapakse (541) |
| | L | | |
| | L-F-S L-H-S 2-H-S | a: Tewary-Yahoner-Hirth(146) | o: Wang-Rajapakse(551) |
| 3-D | F-S | a: } Fredholm(17) Synge(45) Kroner(29) t-i: Pan-Chou(36) t-i: Pan-Chou(35) | t-i: Payton(37) a: } Wang-Achenbach (52) t-i: Wang-Rajapakse(54) |
| | H-S | | |
| | L | | |
| | L-F-S L-H-S 2-H-S | | |
| Axisimétrico | F-S | t-i: Wang-Rajapakse(56) | t-i: Wang-Rajapakse(54) |
| | H-S L L-F-S L-H-S 2-H-S | | |

TABLA 1.2: Soluciones fundamentales para una material no-isótropa

Capítulo 2

Teoría básica y formulación

2.1 Ecuaciones de equilibrio y comportamiento

La expresión, por componentes de la ley de equilibrio y las ecuaciones constitutivas de un sólido elástico lineal, homogéneo y ortótropo son

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + F_x = 0, \quad (2.1a)$$

$$\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + F_y = 0, \quad (2.1b)$$

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + F_z = 0, \quad (2.1c)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_{16} & c_{18} & 0 & 0 & 0 \\ c_6 & c_{18} & c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde las constantes c_1 hasta c_{21} se definen como :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta}, & c_4 &= \frac{\nu_{xy} + \nu_{zy}\nu_{xz}}{L_x E_x \Delta}, & c_6 &= \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta}, \\ c_7 &= G_{xy}, & c_{12} &= G_{zx}, & c_{16} &= \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{L_x L_z \Delta}, \\ c_{18} &= \frac{\nu_{yz} + \nu_{yx}\nu_{xz}}{E_x E_y \Delta}, & c_{19} &= G_{yz}, & c_{21} &= \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}{L_x L_y \Delta}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - 2\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}{E_x E_y E_z}, \quad \text{and } \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j},$$

y donde x, y, z son coordenadas espaciales cartesianas en un espacio tridimensional Euclideo; los subíndices indican componentes y una coma indica un derivada parcial con respecto a la variable en forma de subíndice; F_x, F_y, F_z son las componentes de la fuerza aplicada. Combinaciones convenientes de las expresiones anteriores, (2.1a) y (2.2), resultan en la ecuación siguiente:

$$\sigma_{zx,z} = -\frac{c_6}{c_{21}}\sigma_{zz,x} + \left(\frac{c_6^2}{c_{21}} - c_1\right)u_{x,xx} - c_7u_{x,y,y} + \left(\frac{c_6c_{18}}{c_{21}} - c_4 - c_7\right)u_{y,y,x} - F_x, \quad (2.4a)$$

$$\sigma_{zy,z} = -\frac{c_{18}}{c_{21}}\sigma_{zz,x} + \left(\frac{c_6c_{18}}{c_{21}} - c_4 - c_7\right)u_{x,xy} - c_7u_{y,xx} + \left(\frac{c_{18}}{c_{21}} - c_{16}\right)u_{y,y,y} - F_y, \quad (2.4b)$$

$$\sigma_{zz,z} = -\sigma_{zx,x} - \sigma_{zy,y} - F_z, \quad (2.4c)$$

$$u_{x,z} = \frac{1}{c_{12}}\sigma_{zx} - u_{z,x}, \quad (2.4d)$$

$$u_{y,z} = \frac{1}{c_{19}}\sigma_{zy} - u_{z,y}, \quad (2.4e)$$

$$u_{z,z} = \frac{1}{c_{21}}\sigma_{zz} - \frac{c_6}{c_{21}}u_{x,x} - \frac{c_{18}}{c_{21}}u_{y,y}, \quad (2.4f)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{c_6}{c_{21}}\sigma_{zz} + \left(c_1 - \frac{c_6^2}{c_{21}}\right)u_{x,x} + \left(c_4 - \frac{c_6c_{18}}{c_{21}}\right)u_{y,y}, \quad (2.4g)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{c_{18}}{c_{21}}\sigma_{zz} + \left(c_4 - \frac{c_6c_{18}}{c_{21}}\right)u_{x,x} + \left(c_{16} - \frac{c_{18}^2}{c_{21}}\right)u_{y,y}, \quad (2.4h)$$

$$\sigma_{xy} = c_7u_{x,y} + c_7u_{y,x}. \quad (2.4i)$$

Las expresiones anteriores pueden ser representadas en forma matricial como:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \mathbf{Aa} + \mathbf{C}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ba}, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son los vectores columna:

$$\mathbf{a} = (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}, u_x, u_y, u_z)^T, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{b} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T, \quad (2.8)$$

donde $(\)^T$ indica vector transpuesto, y donde las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se definen mediante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c_6}{c_{21}} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_7 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\frac{c_6^2}{c_{21}} - c_1) & (-c_4 - c_7 + \frac{c_{18} c_6}{c_{21}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{18}}{c_{21}} \frac{\partial}{\partial x} & (-c_4 - c_7 + \frac{c_{18} c_6}{c_{21}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & (-c_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (-c_{16} + \frac{c_{18}^2}{c_{21}}) \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{c_{13}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_{21}} & -\frac{\partial}{\partial x} \frac{c_6}{c_{21}} & -\frac{\partial}{\partial y} \frac{c_{18}}{c_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c_6}{c_{21}} & (c_1 - \frac{c_6^2}{c_{21}}) \frac{\partial}{\partial x} & (c_4 - \frac{c_6 c_{18}}{c_{21}}) \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{18}}{c_{21}} & (c_4 - \frac{c_6 c_{18}}{c_{21}}) \frac{\partial}{\partial x} & (c_{16} - \frac{c_{18}}{c_{21}}) \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_7 \frac{\partial}{\partial y} & c_7 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

El vector columna C viene dado por $C = (-F_x, -F_y, -F_z, 0, 0, 0)^T$.

2.1.1 Caso general de orientación arbitraria

En la sección anterior la relación entre tensiones y deformaciones son definidas a lo largo de la dirección principal del material. Sin embargo, si queremos calcular un laminado con una o varias laminas giradas un ángulo distinto de cero o noventa grados, entonces hay que modificar las expresiones. Para hacer esto se introduce un sistema de coordenadas local (x^ϕ, y^ϕ) en donde el eje x^ϕ está orientado en la dirección principal del material. El eje y^ϕ es normal al eje x^ϕ y la rotación se define por el ángulo ϕ .

Las ecuaciones para el sólido elástico, homogéneo y ortótropo son:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^\phi = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_{16} & c_{18} & 0 & 0 & 0 \\ c_6 & c_{18} & c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El superíndice ϕ denota el ángulo entre el sistema de coordenadas "local" de la lámina y el sistema de coordenadas "global" de la placa, figura 2.1.

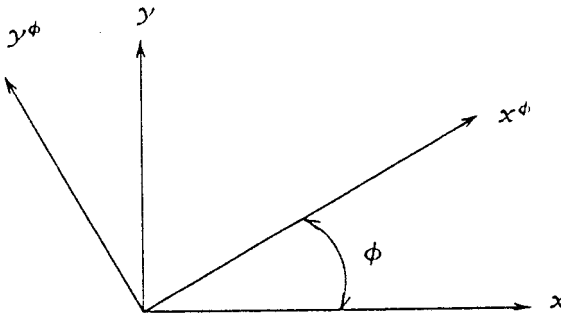


FIGURA 2.1: Ángulo entre la dirección principal del material y la dirección local de una lámina individual.

A fin de hallar las expresiones de las tensiones y deformaciones relativas al sistema principal de coordenadas de la placa, tenemos que transformar estas usando las expresiones:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^{\phi} = (T) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix}^{\phi} = (T) \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Donde la matriz de transformación T se define como ([27] and [49]):

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & 2\cos(\phi)\sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -2\cos(\phi)\sin(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ -\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & (\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \end{pmatrix},$$

siendo T independiente de las propiedades del material.

Introduciendo las relaciones 2.10 en la ecuación matricial 2.9 se obtienen las siguientes expresiones que relacionan las tensiones y las deformaciones en coordenadas globales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = (T)^{-1} (K) (T) \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_{16} & c_{18} & 0 & 0 & 0 \\ c_6 & c_{18} & c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix}.$$

De aquí en adelante se va a usar la matriz Q (2.12) en lugar de la matriz K para todos los cálculos. Se debe también observar que Q ya no es ortótropa. Un material ortótropo necesita de nueve constantes para definir su matriz de rigidez cuando el sistema de coordenadas coincide con las direcciones principales del material. Estas direcciones principales son las correspondientes a las intersecciones de los tres planos de simetría elástica. Sin embargo, en cualquier otro sistema de coordenadas se necesitarán trece constantes, y el comportamiento dejará de ser ortótropo.

La matriz Q viene dada por:

$$(T)^{-1} (K) (T) = Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 & 0 & 2q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & 0 & 0 & 2q_{26} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & 0 & 0 & 2q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{45} & q_{55} & 0 \\ q_{16} & q_{26} & q_{36} & 0 & 0 & q_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

donde

$$q_{11} = c_1 \cos^4(\phi) + c_{16} \sin^4(\phi) + 2(c_4 + c_7) \sin^2(\phi) \cos^2(\phi), \quad (2.13a)$$

$$q_{12} = (c_1 + c_{16} - 2c_7) \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + c_4(\cos^4(\phi) + \sin^4(\phi)), \quad (2.13b)$$

$$q_{13} = c_6 \cos^2(\phi) + c_{18} \sin^2(\phi), \quad (2.13c)$$

$$q_{16} = -\sin(\phi) \cos(\phi) \left(-c_1 \cos^2(\phi) + (c_4 + c_7)(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) + c_{16} \sin^2(\phi) \right), \quad (2.13d)$$

$$q_{22} = c_1 \sin^4(\phi) + 2(c_4 + c_7) \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + c_{16} \cos^4(\phi), \quad (2.13e)$$

$$q_{23} = c_6 \sin^2(\phi) + c_{18} \cos^2(\phi), \quad (2.13f)$$

$$q_{26} = \sin(\phi) \cos(\phi) \left(c_1 \sin^2(\phi) - c_{16} \cos^2(\phi) + (c_4 + c_7)(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \right), \quad (2.13g)$$

$$q_{33} = c_{21}, \quad (2.13h)$$

$$q_{36} = \sin(\phi) \cos(\phi) (c_6 - c_{18}), \quad (2.13i)$$

$$q_{44} = c_{19} \cos^2(\phi) + c_{12} \sin^2(\phi), \quad (2.13j)$$

$$q_{45} = -\sin(\phi) \cos(\phi) (c_{19} - c_{12}), \quad (2.13k)$$

$$q_{55} = c_{19} \sin^2(\phi) + c_{12} \cos^2(\phi), \quad (2.13l)$$

$$q_{66} = 2(c_1 + c_{16} - 2c_4) \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + c_7(\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi))^2. \quad (2.13m)$$

Ahora la expresión (2.9) se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = (Q) \begin{pmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{pmatrix},$$

o en forma extendida:

$$\sigma_{xx} = q_{11}u_{x,x} + q_{12}u_{y,y} + q_{13}u_{z,z} + 2q_{16}(u_{x,y} + u_{y,x}), \quad (2.14a)$$

$$\sigma_{yy} = q_{12}u_{x,x} + q_{22}u_{y,y} + q_{23}u_{z,z} + 2q_{26}(u_{x,y} + u_{y,x}), \quad (2.14b)$$

$$\sigma_{zz} = q_{13}u_{x,x} + q_{23}u_{y,y} + q_{33}u_{z,z} + 2q_{36}(u_{x,y} + u_{y,x}), \quad (2.14c)$$

$$\sigma_{yz} = q_{44}(u_{y,z} + u_{z,y}) + q_{45}(u_{x,z} + u_{z,x}), \quad (2.14d)$$

$$\sigma_{xz} = q_{45}(u_{y,z} + u_{z,y}) + q_{55}(u_{x,z} + u_{z,x}), \quad (2.14e)$$

$$\sigma_{xy} = q_{16}u_{x,x} + q_{26}u_{y,y} + q_{36}u_{z,z} + q_{66}(u_{x,y} + u_{y,x}). \quad (2.14f)$$

Combinaciones convenientes de las expresiones anteriores resultan en las siguientes expresiones:

De (2.1a),(2.14a),(2.14f) y (2.14c):

$$\begin{aligned} \sigma_{xz,z} = & -\frac{q_{36}\sigma_{zz,y}}{q_{33}} - \frac{q_{13}\sigma_{zz,x}}{q_{33}} - \frac{(q_{26}q_{33} - q_{36}q_{23})u_{y,y,y}}{q_{33}} - \frac{(q_{12}q_{33} - q_{13}q_{23})u_{y,y,x}}{q_{33}} \\ & - \frac{(q_{66}q_{33} - 2q_{36}^2)u_{y,x,y}}{q_{33}} - \frac{(2q_{16}q_{33} - 2q_{36}q_{13})u_{y,x,x}}{q_{33}} - \frac{(q_{66}q_{33} - 2q_{36}^2)u_{x,y,y}}{q_{33}} \\ & - \frac{(2q_{16}q_{33} - 2q_{36}q_{13})u_{x,y,x}}{q_{33}} - \frac{(q_{16}q_{33} - q_{36}q_{13})u_{x,x,y}}{q_{33}} - \frac{(q_{11}q_{33} - q_{13}^2)u_{x,x,x}}{q_{33}} - F_x; \end{aligned} \quad (2.15a)$$

de (2.1b),(2.14f),(2.14b) y (2.14c):

$$\begin{aligned} \sigma_{yz,z} = & -\frac{q_{23}\sigma_{zz,y}}{q_{33}} - \frac{q_{36}\sigma_{zz,x}}{q_{33}} + \frac{(q_{23}^2 - q_{22}q_{33})u_{y,y,y}}{q_{33}} + \frac{(q_{36}q_{23} - q_{26}q_{33})u_{y,y,x}}{q_{33}} \\ & + \frac{(2q_{36}q_{23} - 2q_{26}q_{33})u_{y,x,y}}{q_{33}} + \frac{(2q_{36}^2 - q_{66}q_{33})u_{y,x,x}}{q_{33}} + \frac{(2q_{36}q_{23} - 2q_{26}q_{33})u_{x,y,y}}{q_{33}} \\ & + \frac{(2q_{36}^2 - q_{66}q_{33})u_{x,y,x}}{q_{33}} + \frac{(q_{13}q_{23} - q_{12}q_{33})u_{x,x,y}}{q_{33}} + \frac{(q_{36}q_{13} - q_{16}q_{33})u_{x,x,x}}{q_{33}} - F_y; \end{aligned} \quad (2.15b)$$

de (2.1c):

$$\sigma_{zz,z} = -\sigma_{xz,x} - \sigma_{yz,y} - F_z; \quad (2.15c)$$

de (2.14d) y (2.14e):

$$u_{x,z} = \sigma_{xz} \frac{q_{44} - q_{45}^2 + q_{44}q_{55}}{-} \sigma_{yz} \frac{q_{45}}{-q_{45}^2 + q_{44}q_{55}} - u_{z,x}; \quad (2.15d)$$

$$u_{y,z} = \sigma_{xz} \frac{q_{45}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} - \sigma_{yz} \frac{q_{55}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} - u_{z,y}; \quad (2.15e)$$

de (2.14c):

$$u_{z,z} = \frac{\sigma_{zz}}{q_{33}} - \frac{q_{13}}{q_{33}} u_{x,x} - \frac{q_{23}}{q_{33}} u_{y,y} - \frac{2q_{36}}{q_{33}} (u_{x,y} + u_{y,x}); \quad (2.15f)$$

de (2.14a) y (2.14c):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{q_{13}\sigma_{zz}}{q_{33}} + \frac{(q_{11}q_{33} - q_{13}^2)u_{x,x}}{q_{33}} + \frac{(-2q_{13}q_{36} + 2q_{16}q_{33})u_{x,y}}{q_{33}} \\ & + \frac{(-2q_{13}q_{36} + 2q_{16}q_{33})u_{y,x}}{q_{33}} + \frac{(q_{12}q_{33} - q_{13}q_{23})u_{y,y}}{q_{33}}; \end{aligned} \quad (2.16a)$$

de (2.14b) y (2.14c):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{q_{23}\sigma_{zz}}{q_{33}} + \frac{(q_{12}q_{33} - q_{13}q_{23})u_{x,x}}{q_{33}} + \frac{(-2q_{23}q_{36} + 2q_{26}q_{33})u_{x,y}}{q_{33}} \\ & + \frac{(-2q_{23}q_{36} + 2q_{26}q_{33})u_{y,x}}{q_{33}} + \frac{(q_{22}q_{33} - q_{23}^2)u_{y,y}}{q_{33}}; \end{aligned} \quad (2.16b)$$

de (2.14f) y (2.14c):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{q_{36}\sigma_{zz}}{q_{33}} + \frac{(-q_{13}q_{36} + q_{16}q_{33})u_{x,x}}{q_{33}} + \frac{(q_{33}q_{66} - 2q_{36}^2)u_{x,y}}{q_{33}} \\ & + \frac{(q_{33}q_{66} - 2q_{36}^2)u_{y,x}}{q_{33}} + \frac{(-q_{23}q_{36} + q_{26}q_{33})u_{y,y}}{q_{33}}. \end{aligned} \quad (2.16c)$$

Cambiando la notación para diferenciación parcial y reagrupando los términos u_x , u_y and σ_{zz} , las expresiones (2.15a) hasta (2.15f) dan lugar a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = & \left(-\frac{(q_{11}q_{33} - q_{13}^2)}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(-3q_{13}q_{36} + 3q_{16}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{(-2q_{36}^2 + q_{66}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x \\
& + \left(-\frac{(2q_{16}q_{33} - 2q_{13}q_{36})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(-2q_{36}^2 - q_{13}q_{23} + q_{12}q_{33} + q_{66}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. - \frac{(q_{26}q_{33} - q_{36}q_{23})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y \\
& + \left(-\frac{q_{13}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_{36}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \sigma_{zz} - F_x,
\end{aligned} \tag{2.17a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = & \left(-\frac{(q_{16}q_{33} - q_{13}q_{36})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(-2q_{36}^2 - q_{13}q_{23} + q_{12}q_{33} + q_{66}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. - \frac{(2q_{26}q_{33} - 2q_{36}q_{23})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x \\
& + \left(-\frac{(-2q_{36}^2 + q_{66}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(-3q_{36}q_{23} + 3q_{26}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{(-q_{23}^2 + q_{22}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y \\
& + \left(-\frac{q_{36}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_{23}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \sigma_{zz} - F_y,
\end{aligned} \tag{2.17b}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zx} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{zy} - F_z, \tag{2.17c}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \sigma_{xz} \frac{q_{44}}{-q_{45}^2 + q_{44}q_{55}} - \sigma_{yz} \frac{q_{45}}{-q_{45}^2 + q_{44}q_{55}} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \tag{2.17d}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \sigma_{xz} \frac{q_{45}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} - \sigma_{yz} \frac{q_{55}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} - \frac{\partial u_z}{\partial y}, \tag{2.17e}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} \frac{1}{q_{33}} + u_x \left(-\frac{q_{13}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{q_{36}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) + u_y \left(-2\frac{q_{36}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_{23}}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right). \tag{2.17f}$$

Aplicando la misma notación para las expresiones (2.16a) y (2.16c) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} = & \frac{q_{36}\sigma_{zz}}{q_{33}} - \left(\frac{(q_{13}q_{36} - q_{16}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x \\
& - \left(\frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(q_{23}q_{36} - q_{26}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y,
\end{aligned} \tag{2.18a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} = & \frac{q_{23}\sigma_{zz}}{q_{33}} - \left(\frac{(q_{13}q_{23} - q_{12}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2q_{23}q_{36} - 2q_{26}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x \\
& - \left(\frac{(2q_{23}q_{36} - 2q_{26}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(q_{23}^2 - q_{22}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y,
\end{aligned} \tag{2.18b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = & \frac{q_{36}\sigma_{zz}}{q_{33}} - \left(\frac{(q_{13}q_{36} - q_{16}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x \\
& - \left(\frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(q_{23}q_{36} - q_{26}q_{33})}{q_{33}} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y.
\end{aligned} \tag{2.18c}$$

Las relaciones (2.17) y (2.18) pueden ser presentadas en forma matricial como:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{C}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{a}, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{C} son los vectores

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} vienen dadas en las páginas 17 y 18 respectivamente.

2.2 Definición del problema: Capa infinita ortótropa

La ecuación matricial diferencial (2.19) relaciona la derivada parcial con respecto a la coordenada en la dirección z del vector \mathbf{a} con el mismo vector \mathbf{a} . El vector \mathbf{a} está formado por las componentes de tracción y desplazamiento actuando en un plano constante z . Si x y y son las coordenadas en el plano de una capa y z es la coordenada perpendicular a las caras, entonces la ecuación matricial diferencial en derivadas parciales (2.19) puede convertirse en una ecuación matricial diferencial ordinaria mediante el uso de transformadas integrales de Fourier respecto a las coordenadas x , y .

Se define la transformada geométrica de Fourier como:

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \quad (2.21)$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

Las transformadas inversas son

$$f(x, y) = (\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(x, y)]) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (2.22)$$

y las transformadas de las derivadas se definen como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = -i\alpha \tilde{f} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = -i\beta \tilde{f} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} = -\alpha^2 \tilde{f} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} = -\beta^2 \tilde{f} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} = -\alpha\beta \tilde{f} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Aquí la función f es tal que se cumplen las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \text{ and } |y| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ as } |y| \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

Aplicando los operadores matriciales

$$F = \begin{pmatrix} f & & & & & \\ & f & & & & \\ & & f & & & \\ & & & f & & \\ & & & & f & \\ & & & & & f \end{pmatrix} \text{ y } \dot{F} = \begin{pmatrix} \dot{f} & & & & & \\ & \dot{f} & & & & \\ & & \dot{f} & & & \\ & & & \dot{f} & & \\ & & & & \dot{f} & \\ & & & & & \dot{f} \end{pmatrix}$$

a (2.19), (2.20) y usando (2.23), se tienen las expresiones:

$$\frac{d\bar{a}}{dz} = \bar{A}\bar{a} + \bar{C}, \quad (2.24)$$

$$\bar{b} = \bar{B}\bar{a}, \quad (2.25)$$

donde

$$\bar{a} = Fa = (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)^T, \quad (2.26)$$

$$\bar{b} = \dot{F}b = (\dot{\sigma}_{xx}, \dot{\sigma}_{yy}, \dot{\sigma}_{xy})^T, \quad (2.27)$$

$$\bar{C} = FC = (-\dot{F}_x, -\dot{F}_y, -\dot{F}_z, 0, 0, 0)^T. \quad (2.28)$$

2.2.1 Transformación de las ecuaciones diferenciales usando la transformada de Fourier.

Aplicando la transformada de Fourier (2.21) a las expresiones (2.17) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = & \left(-\frac{(2q_{36}^2 - q_{66}q_{33})\beta^2}{q_{33}} - \frac{(q_{13}^2 - q_{11}q_{33})\alpha^2}{q_{33}} - \frac{3(q_{36}q_{13} - q_{16}q_{33})\alpha\beta}{q_{33}} \right) u_x \\ & + \left(\frac{(q_{36}q_{23} - q_{26}q_{33})\beta^2}{q_{33}} - \frac{(2q_{36}^2 + q_{13}q_{23} - q_{12}q_{33} - q_{66}q_{33})\alpha\beta}{q_{33}} - \frac{2(q_{36}q_{13} - q_{16}q_{33})\alpha^2}{q_{33}} \right) u_y \\ & + i\left(\frac{q_{36}\beta}{q_{33}} + \frac{q_{13}\alpha}{q_{33}}\right)\sigma_{zz} - F_x, \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = & \left(\frac{2(q_{26}q_{33} - q_{36}q_{23})\beta^2}{q_{33}} + \frac{(q_{16}q_{33} - q_{36}q_{13})\alpha^2}{q_{33}} + \frac{(q_{12}q_{33} - 2q_{36}^2 + q_{66}q_{33} - q_{13}q_{23})\alpha\beta}{q_{33}} \right) u_x \\ & + \left(\frac{(q_{22}q_{33} - q_{23}^2)\beta^2}{q_{33}} + \frac{3(q_{26}q_{33} - q_{36}q_{23})\alpha\beta}{q_{33}} + \frac{(q_{66}q_{33} - 2q_{36}^2)\alpha^2}{q_{33}} \right) u_y \\ & + i\left(\frac{q_{23}\beta}{q_{33}} + \frac{q_{36}\alpha}{q_{33}}\right)\sigma_{zz} - F_y, \end{aligned} \quad (2.29b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = i\alpha\sigma_{zx} + i\beta\sigma_{zy} - F_z, \quad (2.29c)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \sigma_{xz} \frac{q_{44}}{-q_{45}^2 + q_{44}q_{55}} - \sigma_{yz} \frac{q_{45}}{-q_{45}^2 + q_{44}q_{55}} + i\alpha u_z, \quad (2.29d)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \sigma_{xz} \frac{q_{45}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} - \sigma_{yz} \frac{q_{55}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}} + i\beta u_z, \quad (2.29e)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} \frac{1}{q_{33}} + u_x \left(i\alpha \frac{q_{13}}{q_{33}} + 2i\beta \frac{q_{36}}{q_{33}} \right) + u_y \left(2i\alpha \frac{q_{36}}{q_{33}} + i\beta \frac{q_{23}}{q_{33}} \right). \quad (2.29f)$$

Estas expresiones se pueden poner en forma matricial y definen la transformada de Fourier de la matriz \mathbf{A} . Esta matriz está dada en la página 17.

Las expresiones (2.18) se transforman de manera semejante y su forma matricial viene dada por \mathbf{B} , también dada en la página 18.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} = & \frac{q_{36}\sigma_{zz}}{q_{33}} - \left(\frac{(q_{13}q_{36} - q_{16}q_{33})\alpha}{q_{33}} + \frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})\beta}{q_{33}} \right) u_x \\ & + i \left(\frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})\alpha}{q_{33}} + \frac{(q_{23}q_{36} - q_{26}q_{33})\beta}{q_{33}} \right) u_y, \end{aligned} \quad (2.30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} = & \frac{q_{23}\sigma_{zz}}{q_{33}} - \left(\frac{(q_{13}q_{23} - q_{12}q_{33})\alpha}{q_{33}} + \frac{(2q_{23}q_{36} - 2q_{26}q_{33})\beta}{q_{33}} \right) u_x \\ & + i \left(\frac{(2q_{23}q_{36} - 2q_{26}q_{33})\alpha}{q_{33}} + \frac{(q_{23}^2 - q_{22}q_{33})\beta}{q_{33}} \right) u_y, \end{aligned} \quad (2.30b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = & \frac{q_{36}\sigma_{zz}}{q_{33}} + i \left(\frac{(q_{13}q_{36} - q_{16}q_{33})\alpha}{q_{33}} + \frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})\beta}{q_{33}} \right) u_x \\ & + i \left(\frac{(2q_{36}^2 - q_{33}q_{66})\alpha}{q_{33}} + \frac{(q_{23}q_{36} - q_{26}q_{33})\beta}{q_{33}} \right) u_y. \end{aligned} \quad (2.30c)$$

$$(2.30d)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{(q_{13}q_{36}-q_{16}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & -\left(\frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & q_{36} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{(q_{13}q_{23}-q_{12}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(2q_{23}q_{36}-2q_{28}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & -\left(\frac{(2q_{23}q_{36}-2q_{28}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(q_{13}^2-q_{22}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & q_{22} & 0 \\ -\left(\frac{(q_{13}q_{36}-q_{16}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & 0 & 0 & -\left(\frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\frac{\beta}{\gamma}\right) & q_{36} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\left(\frac{(q_{13}q_{36}-q_{16}q_{33})}{q_{33}}\alpha + \frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\beta\right) & i\left(\frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\alpha + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & q_{36} & 0 \\ 0 & 0 & i\left(\frac{(q_{13}q_{23}-q_{12}q_{33})}{q_{33}}\alpha + \frac{(2q_{23}q_{36}-2q_{28}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & i\left(\frac{(2q_{23}q_{36}-2q_{28}q_{33})}{q_{33}}\alpha + \frac{(q_{13}^2-q_{22}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & i\left(\frac{(2q_{23}q_{36}-2q_{28}q_{33})}{q_{33}}\alpha + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & q_{22} & 0 \\ i\left(\frac{(q_{13}q_{36}-q_{16}q_{33})}{q_{33}}\alpha + \frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\beta\right) & 0 & 0 & i\left(\frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\alpha + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & i\left(\frac{(2q_{16}^2-q_{33}q_{66})}{q_{33}}\alpha + \frac{(q_{33}q_{36}-q_{28}q_{33})}{q_{33}}\beta\right) & q_{36} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Una manera mas conveniente de expresar la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ a fin de poderla procesar con el programa de matematica simbolica, para evitar expresiones demasiado voluminosas, se presenta a continuación:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & 0 \\ i\alpha & i\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_7 & \theta_8 & 0 & 0 & 0 & i\alpha \\ \theta_8 & \theta_9 & 0 & 0 & 0 & i\beta \\ 0 & 0 & \theta_{10} & i\theta_{11} & i\theta_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

donde:

$$\theta_1 = \frac{q_{13}}{q_{33}}\alpha + \frac{q_{36}}{q_{33}}\beta, \quad (2.36a)$$

$$\theta_2 = -(-q_{11} + \frac{q_{13}^2}{q_{33}})\alpha^2 - 3(-q_{16} + \frac{q_{13}q_{36}}{q_{33}})\alpha\beta - (\frac{2q_{36}^2}{q_{33}} - q_{66})\beta^2, \quad (2.36b)$$

$$\theta_3 = -(-2q_{16} + \frac{2q_{13}q_{36}}{q_{33}})\alpha^2 - (-q_{12} + \frac{q_{13}q_{23}}{q_{33}} + \frac{2q_{36}^2}{q_{33}} - q_{66})\alpha\beta - (-q_{26} + \frac{q_{23}q_{36}}{q_{33}})\beta^2, \quad (2.36c)$$

$$\theta_4 = \frac{q_{36}}{q_{33}}\alpha + \frac{q_{23}}{q_{33}}\beta, \quad (2.36d)$$

$$\theta_5 = -(-q_{16} + \frac{q_{13}q_{36}}{q_{33}})\alpha^2 - (-q_{12} + \frac{q_{13}q_{23}}{q_{33}} + \frac{2q_{36}^2}{q_{33}} - q_{66})\alpha\beta + 2(-q_{26} + \frac{q_{23}q_{36}}{q_{33}})\beta^2, \quad (2.36e)$$

$$\theta_6 = -(\frac{2q_{36}^2}{q_{33}} - q_{66})\alpha^2 - 3(-q_{26} + \frac{q_{23}q_{36}}{q_{33}})\alpha\beta - (-q_{22} + \frac{q_{23}^2}{q_{33}})\beta^2, \quad (2.36f)$$

$$\theta_7 = -\frac{q_{44}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}}, \quad (2.36g)$$

$$\theta_8 = \frac{q_{45}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}}, \quad (2.36h)$$

$$\theta_9 = -\frac{q_{55}}{q_{45}^2 - q_{44}q_{55}}, \quad (2.36i)$$

$$\theta_{10} = \frac{1}{q_{33}}, \quad (2.36j)$$

$$\theta_{11} = \frac{q_{13}}{q_{33}}\alpha + \frac{2q_{36}}{q_{33}}\beta, \quad (2.36k)$$

$$\theta_{12} = \frac{2q_{36}}{q_{33}}\alpha + \frac{q_{23}}{q_{33}}\beta. \quad (2.36l)$$

2.3 Ecuación matricial diferencial

La ecuación (2.24) es una ecuación matricial diferencial ordinaria que puede ser resuelta mediante el teorema de Cayley-Hamilton [8]. Para un punto cualquiera a una distancia z de la cara inferior de la placa el vector de estado viene dado por

$$\tilde{\mathbf{a}}(z) = \mathbf{X}(z)\mathbf{X}^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0) + \mathbf{X}(z) \int_0^z \mathbf{X}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{C}}(s)ds = \mathbf{T}(z)\tilde{\mathbf{a}}(0) + \tilde{\mathbf{R}}(z), \quad (2.37)$$

donde $\bar{a}(0)$ representa el valor inicial de \bar{a} con $z = 0$, $X(z)$ es la matriz fundamental definida por la matriz de los autovectores de $\bar{\mathbf{A}}$ postmultiplicado por la matriz de los autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$X(z) = VE(z),$$

en donde el vector de autovalores E se define en la siguiente sección y la matriz de los autovectores V viene dada por la ecuación (2.42).

2.3.1 Matriz de autovalores

Para obtener los autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ tenemos que resolver la ecuación característica definida por:

$$\det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda I) = 0.$$

Resulta imposible resolver las ecuaciones simbólicas de una manera directa porque las expresiones obtenidas son inmanejables. En lugar de esto resolvemos una ecuación mucho más simple:

$$\lambda^6 + k_1 \lambda^4 + k_2 \lambda^2 + k_3 = 0, \quad (2.38)$$

donde k_1 , k_2 y k_3 dependen solo de las constantes del material y de la orientación de la lámina siendo independientes de λ .

La matriz de los autovalores es una matriz diagonal cuyos elementos son los exponentes de los autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$. $\bar{\mathbf{A}}$ tiene seis autovalores genéricos, λ_i y $-\lambda_i$ donde $i=1,2,3$. La matriz de autovalores viene dada por

$$E(z) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} & & & & & \\ & e^{-\lambda_1 z} & & & & \\ & & e^{\lambda_2 z} & & & \\ & & & e^{-\lambda_2 z} & & \\ & & & & e^{\lambda_3 z} & \\ & & & & & e^{-\lambda_3 z} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3^6 c a n^3 - 2^3 3^3 c a m^2 k_1 + 2^3 \sqrt{3} (k_1^2 - 3k_2)}}{2^6 3^3 c a n^6}, \quad (2.40a)$$

$$\lambda_2 = -i \frac{\sqrt{(-3^6 + 3^3) c a n^3 - 2^3 3^3 c a n^2 k_1 + 2^3 ((-3 - \sqrt{3}) k_1^2 + (9 + 3\sqrt{3}) k_2)}}{2^6 3^6 \sqrt{6} c a n^6}, \quad (2.40b)$$

$$\lambda_3 = -i \frac{\sqrt{(-3^6 - 3^3) c a n^3 - 2^3 3^3 c a n^2 k_1 + 2^3 ((3 - \sqrt{3}) k_1^2 + (-9 + 3\sqrt{3}) k_2)}}{2^6 3^6 \sqrt{6} c a n^6}, \quad (2.40c)$$

y donde,

$$eqn = \sqrt{3}(-2k_1^3 + 9k_1k_2 - 27k_3) + 9\sqrt{-(k_1^2k_2^2) - 18k_1k_2k_3 + 27k_3^2 + 4(k_2^3 + k_1^3k_3)}, \quad (2.41a)$$

$$k1 = -\left(\alpha^2(c_1c_{19}c_{21} - 2c_{12}c_{19}c_6 - c_{19}c_6^2 + c_{12}c_{21}c_7) + \beta^2(-c_{12}c_{18}^2 - 2c_{12}c_{18}c_{19} + c_{12}c_{16}c_{21} + c_{19}c_{21}c_7)\right) \frac{1}{(c_{12}c_{19}c_{21})}, \quad (2.41b)$$

$$k2 = -\left(\beta^4(-c_{12}c_{16}c_{19} + c_{18}^2c_7 + 2c_{18}c_{19}c_7 - c_{16}c_{21}c_7) + \alpha^2\beta^2(c_1c_{18}^2 + 2c_1c_{18}c_{19} - c_1c_{16}c_{21} - 2c_{12}c_{18}c_4 - 2c_{12}c_{19}c_4 + c_{21}c_4^2 + 2c_{12}c_{16}c_6 - 2c_{18}c_4c_6 - 2c_{19}c_4c_6 + c_{16}c_6^2 - 2c_{12}c_{18}c_7 - 4c_{12}c_{19}c_7 + 2c_{21}c_4c_7 - 2c_{18}c_6c_7 - 2c_{19}c_6c_7) + \alpha^4(-(c_1c_{12}c_{19}) - c_1c_{21}c_7 + 2c_{12}c_6c_7 + c_6^2c_7)\right) \frac{1}{(c_{12}c_{19}c_{21})}, \quad (2.41c)$$

$$k3 = \frac{\alpha^2c_{12} + \beta^2c_{19}}{c_{12}c_{19}c_{21}} \left(-\alpha^4c_1c_7 - \beta^4c_{16}c_7 + \alpha^2\beta^2(-c_1c_{16} + c_4^2 + 2c_4c_7)\right). \quad (2.41d)$$

2.3.2 Matriz de autovectores

Hallar los autovalores de una matriz $n \times n$ genérica involucra la solución de un polinomio de grado n . No pudiéndose encontrar una solución explícita algebraica para grados superiores a cuatro. De aquí que sea imposible hallar los resultados explícitos de los autovalores y autovectores salvo para las matrices más simples y dispersas.

El método estándar para calcular los autovalores es resolver un sistema lineal $(\hat{A} - \lambda)g = 0$ donde λ es el autovalor de la matriz \hat{A} . Debido a los problemas mencionados anteriormente y debido a la complicación de los autovalores, es imposible hacer esto analíticamente, ni siquiera con un ordenador muy poderoso. Pero como nos interesa obtener la solución analítica de los autovalores hemos modificado la manera de calcular estos. En lugar de usar el valor analítico de los autovalores vamos a usar un valor genérico λ . También se sabe que todo los componentes de un autovector pueden ser multiplicados o divididos por cualquier otra expresión. Entonces, si decidimos que valor de uno de los autovalores es igual a uno tenemos un sistema lineal que se puede resolver simbólicamente. Un ejemplo sencillo se indica a continuación:

Con un matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y con el autovector $g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tenemos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & -4 \\ 0 & 5 - \lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} g = 0.$$

Eligiendo el componente $c = 1$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & -4 \\ 0 & 5 - \lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0;$$

usando, por ejemplo, las dos primeras ecuaciones para calcular los autovalores ausentes tenemos:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)a - 4 &= 0 \\ (5 - \lambda)b + 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{con solución } \left. \begin{aligned} a &= \frac{4}{1 - \lambda} \\ b &= \frac{4}{5 - \lambda} \end{aligned} \right\}.$$

Insertando los autovalores en las dos ecuaciones de arriba se va a llegar a los tres autovectores linealmente independiente que queríamos obtener.

Usando este método hemos obtenido la matriz de autovectores V (2.42) que consiste en los autovectores de \hat{A} que contienen seis polinomios $a(\lambda_i)-f(\lambda_i)$ (2.43a-2.43f), ordenados por columna. Estos polinomios son funciones de los autovalores genéricos λ_i , las constantes del material k_4-k_{18} y de la orientación en el plano α - β .

La matriz de V es:

$$V = \begin{pmatrix} ia(\lambda_1) & -ia(-\lambda_1) & ia(\lambda_2) & -ia(-\lambda_2) & ia(\lambda_3) & -ia(-\lambda_3) \\ ib(\lambda_1) & -ib(-\lambda_1) & ib(\lambda_2) & -ib(-\lambda_2) & ib(\lambda_3) & -ib(-\lambda_3) \\ c(\lambda_1) & -c(-\lambda_1) & c(\lambda_2) & -c(-\lambda_2) & c(\lambda_3) & -c(-\lambda_3) \\ id(\lambda_1) & -id(-\lambda_1) & id(\lambda_2) & -id(-\lambda_2) & id(\lambda_3) & -id(-\lambda_3) \\ ie(\lambda_1) & -ie(-\lambda_1) & ie(\lambda_2) & -ie(-\lambda_2) & ie(\lambda_3) & -ie(-\lambda_3) \\ f(\lambda_1) & -f(-\lambda_1) & f(\lambda_2) & -f(-\lambda_2) & f(\lambda_3) & -f(-\lambda_3) \end{pmatrix},$$

que puede ser expresada, usando (2.43a) hasta (2.43f), como:

$$V = \begin{pmatrix} ia(\lambda_1) & ia(\lambda_1) & ia(\lambda_2) & ia(\lambda_2) & ia(\lambda_3) & ia(\lambda_3) \\ ib(\lambda_1) & ib(\lambda_1) & ib(\lambda_2) & ib(\lambda_2) & ib(\lambda_3) & ib(\lambda_3) \\ c(\lambda_1) & -c(\lambda_1) & c(\lambda_2) & -c(\lambda_2) & c(\lambda_3) & -c(\lambda_3) \\ id(\lambda_1) & -id(\lambda_1) & id(\lambda_2) & -id(\lambda_2) & id(\lambda_3) & -id(\lambda_3) \\ ie(\lambda_1) & -ie(\lambda_1) & ie(\lambda_2) & -ie(\lambda_2) & ie(\lambda_3) & -ie(\lambda_3) \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & f(\lambda_2) & f(\lambda_3) & f(\lambda_3) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

donde

$$a(\lambda_i) = k_4 \lambda_i + k_5 \lambda_i^3, \quad (2.43a)$$

$$b(\lambda_i) = k_6 \lambda_i + k_7 \lambda_i^3, \quad (2.43b)$$

$$c(\lambda_i) = k_8 \lambda_i^2 + k_9, \quad (2.43c)$$

$$d(\lambda_i) = k_{10} + k_{11} \lambda_i^2 + k_{12} \lambda_i^4, \quad (2.43d)$$

$$e(\lambda_i) = k_{13} + k_{14} \lambda_i^2 + k_{15} \lambda_i^4, \quad (2.43e)$$

$$f(\lambda_i) = k_{16} \lambda_i + k_{17} \lambda_i^3 + k_{18} \lambda_i^5, \quad (2.43f)$$

y

$$k_4 = \alpha c_{12} (\alpha^2 \beta^2 (-2 c_{19} c_6 c_7 - 2 c_{18} c_6 c_7 + 2 c_{21} c_4 c_7 + c_{16} c_6^2 - c_{19} c_4 c_6 - 2 c_{18} c_4 c_6 + c_{21} c_4^2 - c_1 c_{16} c_{21} + c_1 c_{18} c_{19} + c_1 c_{18}^2) + \beta^4 (-c_{16} c_{21} c_7 + 2 c_{18} c_{19} c_7 + c_{18}^2 c_7 - c_{16} c_{19} c_6 + c_{18} c_{19} c_4) + \alpha^4 (c_6^2 - c_1 c_{21}) c_7), \quad (2.44a)$$

$$k_5 = \alpha c_{12} c_{19} (\beta^2 (2 c_{21} c_7 - c_{18} c_6 + c_{21} c_4) + \alpha^2 (c_1 c_{21} - c_6^2)), \quad (2.44b)$$

$$k_6 = \beta c_{19} (\alpha^4 (c_6^2 c_7 + 2 c_{12} c_6 c_7 - c_1 c_{21} c_7 + c_{12} c_4 c_6 - c_1 c_{12} c_{18}) + \alpha^2 \beta^2 (-2 c_{18} c_6 c_7 + 2 c_{21} c_4 c_7 - 2 c_{12} c_{18} c_7 + c_{16} c_6^2 - 2 c_{18} c_4 c_6 + c_{12} c_{16} c_6 + c_{21} c_4^2 - c_{12} c_{18} c_4 - c_1 c_{16} c_{21} + c_1 c_{18}^2) + \beta^4 (c_{18}^2 - c_{16} c_{21}) c_7), \quad (2.44c)$$

$$k_7 = \beta c_{12} c_{19} (\alpha^2 (2 c_{21} c_7 - c_{18} c_6 + c_{21} c_4) + \beta^2 (c_{16} c_{21} - c_{18}^2)), \quad (2.44d)$$

$$k_8 = -c_{12} c_{19} (2 \alpha^2 \beta^2 (2 c_{21} c_7 - c_{18} c_6 + c_{21} c_4) + \alpha^4 (c_1 c_{21} - c_6^2) + \beta^4 (c_{16} c_{21} - c_{18}^2)), \quad (2.44e)$$

$$k_9 = -(\beta^2 c_{19} + \alpha^2 c_{12}) (\alpha^2 \beta^2 (-2 c_{18} c_6 c_7 + 2 c_{21} c_4 c_7 + c_{16} c_6^2 - 2 c_{18} c_4 c_6 + c_{21} c_4^2 - c_1 c_{16} c_{21} + c_1 c_{18}^2) + \alpha^4 (c_6^2 - c_1 c_{21}) c_7 + \beta^4 (c_{18}^2 - c_{16} c_{21}) c_7), \quad (2.44f)$$

$$k_{10} = -\alpha (\beta^2 c_{19} + \alpha^2 c_{12}) (\beta^2 (-c_{18} c_7 + c_{16} c_6 - c_{18} c_4) + \alpha^2 c_6 c_7), \quad (2.44g)$$

$$k_{11} = \alpha (\beta^2 (c_{19} c_{21} c_7 - c_{18} c_{19} c_6 + c_{19} c_{21} c_4 - c_{12} c_{16} c_{21} + c_{12} c_{18} c_{19} + c_{12} c_{18}^2) - \alpha^2 c_{12} (c_{21} c_7 - c_{19} c_6)), \quad (2.44h)$$

$$k_{12} = \alpha c_{12} c_{19} c_{21}, \quad (2.44i)$$

$$k_{13} = \beta (\beta^2 c_{19} + \alpha^2 c_{12}) (\alpha^2 (c_6 c_7 + c_4 c_6 - c_1 c_{18}) - \beta^2 c_{18} c_7), \quad (2.44j)$$

$$k_{14} = -\beta (\alpha^2 (-c_{12} c_{21} c_7 - c_{19} c_6^2 - c_{12} c_{19} c_6 + c_{12} c_{18} c_6 - c_{12} c_{21} c_4 + c_1 c_{19} c_{21}) + \beta^2 c_{19} (c_{21} c_7 - c_{12} c_{18})), \quad (2.44k)$$

$$k_{15} = \beta c_{12} c_{19} c_{21}, \quad (2.44l)$$

$$k_{16} = -\alpha^2 \beta^2 (-c_{19} c_6 c_7 - 2 c_{18} c_6 c_7 + 2 c_{21} c_4 c_7 - c_{12} c_{18} c_7 + c_{16} c_6^2 - c_{19} c_4 c_6 - 2 c_{18} c_4 c_6 + c_{12} c_{16} c_6 + c_{21} c_4^2 - c_{12} c_{18} c_4 - c_1 c_{16} c_{21} + c_1 c_{18} c_{19} + c_1 c_{18}^2) - \alpha^4 (c_6^2 + c_{12} c_6 - c_1 c_{21}) c_7 - \beta^4 (-c_{16} c_{21} + c_{18} c_{19} + c_{18}^2) c_7, \quad (2.44m)$$

$$k_{17} = -\beta^2 (c_{19} c_{21} c_7 + c_{12} c_{16} c_{21} - c_{12} c_{18} c_{19} - c_{12} c_{18}^2) - \alpha^2 (c_{12} c_{21} c_7 - c_{19} c_6^2 - c_{12} c_{19} c_6 + c_1 c_{19} c_{21}), \quad (2.44n)$$

$$k_{18} = c_{12} c_{19} c_{21}. \quad (2.44o)$$

2.3.3 Autovalores para una orientación arbitraria ϕ

Si la orientación de la dirección principal del material (de una o varias capas) no coincide con la dirección global hay que incluir el ángulo ϕ en los cálculos de los autovalores y autovectores. Resolviendo las ecuaciones características vamos a obtener el mismo polinomio definido por (2.38) cuyas constantes k_1 - k_3 vienen dadas abajo. Estas constantes van a incluir el ángulo (ϕ) de rotación y pueden ser insertadas en las ecuaciones (2.40a-2.40c) para la obtención del autovalor.

$$k_1 = -g_2 g_7 - g_3 g_8 - g_5 g_8 - g_6 g_9 + (g_1 + g_{11}) \alpha + (g_4 + g_{12}) \beta, \quad (2.45a)$$

$$k_2 = (g_1 g_{11} + g_2 g_{10}) \alpha^2 + (g_4 g_{12} + g_6 g_{10}) \beta^2 + (g_7 g_9 - g_8^2) g_2 g_6 + (g_8^2 - g_7 g_9) g_3 g_5 + (g_5 g_9 g_{12} - g_6 g_9 g_{11} + (g_1 g_{12} + g_3 g_{10} + g_4 g_{11} + g_5 g_{10}) \beta + (-g_5 g_8 - g_6 g_9) g_1 + (g_4 g_8 + g_8 g_{12}) g_2 + (g_4 g_9 - g_8 g_{11}) g_3) \alpha + (g_6 g_8 g_{11} - g_5 g_8 g_{12} + (g_5 g_7 + g_6 g_8) g_1 + (-g_4 g_7 - g_7 g_{12}) g_2 + (g_7 g_{11} - g_4 g_8) g_3) \beta, \quad (2.45b)$$

$$k_3 = ((g_5 g_9 g_{12} - g_6 g_9 g_{11}) g_1 + (-g_4 g_9 g_{12} - g_6 g_9 g_{10}) g_2 + (g_4 g_9 g_{11} + g_5 g_9 g_{10}) g_3) \alpha^2 + ((2 g_6 g_8 g_{11} - 2 g_5 g_8 g_{12}) g_1 + (2 g_4 g_8 g_{12} + 2 g_6 g_8 g_{10}) g_2 + (-2 g_4 g_8 g_{11} - 2 g_5 g_8 g_{10}) g_3) \alpha \beta + ((g_5 g_7 g_{12} - g_6 g_7 g_{11}) g_1 + (-g_4 g_7 g_{12} - g_6 g_7 g_{10}) g_2 + (g_4 g_7 g_{11} + g_5 g_7 g_{10}) g_3) \beta^2. \quad (2.45c)$$

2.3.4 Autovectores para una orientación arbitraria ϕ

Calculando los autovectores tal como se describe en la sección 2.3.2 se va a obtener una matriz de autovectores similar a (2.42) donde los polinomios $a(\lambda_i) - f(\lambda_i)$ son idénticos a los de (2.43) pero con las constantes definidas como:

$$k_4 = \left((\theta_5\theta_1 - \theta_2\theta_4)\beta + \theta_9\theta_6\theta_2 - \theta_9\theta_3\theta_5 \right) \alpha + (\theta_6\theta_1 - \theta_3\theta_4)\beta^2 + (\theta_8\theta_5\theta_3 - \theta_8\theta_6\theta_2)\beta, \quad (2.46a)$$

$$k_5 = -\theta_2\alpha - \theta_3\beta, \quad (2.46b)$$

$$k_6 = (\theta_2\theta_4 - \theta_5\theta_1)\alpha^2 + \left((\theta_3\theta_4 - \theta_6\theta_1)\beta - \theta_8\theta_6\theta_2 + \theta_8\theta_5\theta_3 \right) \alpha + (\theta_7\theta_6\theta_2 - \theta_7\theta_5\theta_3)\beta, \quad (2.46c)$$

$$k_7 = -\theta_5\alpha - \theta_6\beta, \quad (2.46d)$$

$$k_8 = \theta_2\alpha^2 + (\theta_3 + \theta_5)\beta\alpha + \theta_6\beta^2, \quad (2.46e)$$

$$k_9 = (\theta_9\theta_3\theta_5 - \theta_9\theta_2\theta_6)\alpha^2 + (2\theta_2\theta_8\theta_6 - 2\theta_3\theta_8\theta_5)\beta\alpha + (\theta_3\theta_5\theta_7 - \theta_2\theta_7\theta_6)\beta^2, \quad (2.46f)$$

$$k_{10} = (\theta_9\theta_6\theta_1 - \theta_3\theta_4\theta_9)\alpha^2 + (\theta_7\theta_6\theta_1 - \theta_7\theta_3\theta_4)\beta^2 + (2\theta_8\theta_4\theta_3 - 2\theta_6\theta_8\theta_1)\beta\alpha, \quad (2.46g)$$

$$k_{11} = (\theta_8\theta_3 - \theta_4\beta + \theta_9\theta_6)\alpha - \theta_1\alpha^2 + (-\theta_7\theta_3 - \theta_6\theta_8)\beta, \quad (2.46h)$$

$$k_{12} = -\alpha, \quad (2.46i)$$

$$k_{13} = (\theta_9\theta_2\theta_4 - \theta_9\theta_5\theta_1)\alpha^2 + (2\theta_8\theta_5\theta_1 - 2\theta_2\theta_8\theta_4)\beta\alpha + (\theta_7\theta_4\theta_2 - \theta_5\theta_7\theta_1)\beta^2, \quad (2.46j)$$

$$k_{14} = (-\theta_1\beta - \theta_8\theta_2 - \theta_9\theta_5)\alpha - \theta_4\beta^2 + (\theta_7\theta_2 + \theta_8\theta_5)\beta, \quad (2.46k)$$

$$k_{15} = -\beta, \quad (2.46l)$$

$$k_{16} = \left((\theta_5\theta_8 + \theta_9\theta_6)\theta_1 - \theta_2\theta_8\theta_4 - \theta_3\theta_4\theta_9 \right) \alpha \\ + \left((-\theta_5\theta_7 - \theta_6\theta_8)\theta_1 + \theta_2\theta_7\theta_4 + \theta_3\theta_8\theta_4 \right) \beta + (\theta_8^2 - \theta_7\theta_9)\theta_6\theta_2 + (\theta_7\theta_9 - \theta_8^2)\theta_5\theta_3, \quad (2.46m)$$

$$k_{17} = -\theta_1\alpha - \theta_4\beta + \theta_2\theta_7 + \theta_3\theta_8 + \theta_5\theta_8 + \theta_9\theta_6, \quad (2.46n)$$

$$k_{18} = -1. \quad (2.46o)$$

2.3.5 Matriz de transferencia

La matriz de transferencia se define por $X(z)X^{-1}(0)$, y relaciona el vector de estado $\tilde{a}(z)$ de cualquier punto arbitrario a una distancia z de la superficie inferior de la capa con el vector inicial $\tilde{a}(0)$. Vamos a denotarlo por

$$T(z) = X(z)X^{-1}(0) = [t_{i,j}], \quad (2.47)$$

donde

$$t_{1,1} = \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 a_n (b_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} b_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 a_n (a_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{1,3} = i \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 a_n (d_{n+1} c_{n+2} - c_{n+1} d_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{1,4} = \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 a_n (c_{n+1} e_{n+2} - c_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{1,5} = \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 a_n (c_{n+1} d_{n+2} - d_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{1,6} = i \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 a_n (a_{n+1} b_{n+2} - b_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,1} = \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 b_n (b_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} b_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,2} = -\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 b_n (a_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,3} = i \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 b_n (d_{n+1} c_{n+2} - c_{n+1} d_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,4} = \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 b_n (c_{n+1} e_{n+2} - c_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,5} = -\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 b_n (c_{n+1} d_{n+2} - d_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{2,6} = i \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 b_n (a_{n+1} b_{n+2} - b_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,1} = -i \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 c_n (b_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} b_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,2} = i \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 c_n (a_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,3} = \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 c_n (d_{n+1} c_{n+2} - c_{n+1} d_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,4} = i \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 c_n (c_{n+1} e_{n+2} - c_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,5} = -i \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 c_n (c_{n+1} d_{n+2} - d_{n+1} c_{n+2}) (e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),$$

$$t_{3,6} = \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 c_n (a_{n+1} b_{n+2} - b_{n+1} a_{n+2}) (e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),$$

$$\begin{aligned}
 l_{4,1} &= \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 d_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{4,2} &= -\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 d_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{4,3} &= i\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 d_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{4,4} &= -\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 d_n(c_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{4,5} &= \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 d_n(c_{n+1}d_{n+2} - d_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{4,6} &= i\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 d_n(a_{n+1}b_{n+2} - b_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{5,1} &= \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 e_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{5,2} &= -\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 e_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{5,3} &= i\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 e_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{5,4} &= -\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 e_n(c_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{5,5} &= \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 e_n(c_{n+1}d_{n+2} - d_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{5,6} &= i\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 e_n(a_{n+1}b_{n+2} - b_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{6,1} &= -i\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 f_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{6,2} &= i\frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 f_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{6,3} &= \frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 f_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{6,4} &= i\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 f_n(c_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{6,5} &= -i\frac{1}{2\Delta_2} \sum_{n=1}^3 f_n(c_{n+1}d_{n+2} - d_{n+1}c_{n+2})(e^{z\lambda_n} - e^{-z\lambda_n}), \\
 l_{6,6} &= \frac{1}{2\Delta_1} \sum_{n=1}^3 f_n(a_{n+1}b_{n+2} - b_{n+1}a_{n+2})(e^{z\lambda_n} + e^{-z\lambda_n}),
 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}, \text{ donde } a_i \cdots f_i \text{ significan } a(\lambda_i) \cdots f(\lambda_i).$$

2.3.6 Matrices de flexibilidad

La expresión (2.37), con la ayuda de (2.47), se puede poner como

$$\bar{\mathbf{a}}(z) = \mathbf{T}(z)\bar{\mathbf{a}}(0) + \bar{\mathbf{R}}(z), \quad (2.48)$$

donde

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \mathbf{X}(z) \int_0^z \mathbf{X}^{-1}(s) \dot{\mathbf{C}}(s) ds. \quad (2.49)$$

El vector de estado $\bar{\mathbf{a}}$ está compuesto por tensiones y desplazamientos de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(z) \\ \bar{\mathbf{u}}(z) \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(z) = (\bar{\sigma}_{zx}, \bar{\sigma}_{zy}, \bar{\sigma}_{zz})^T$, $\bar{\mathbf{u}}(z) = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)^T$.

La expresión (2.48) podrá ser reescrita de la forma:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(z) \\ \bar{\mathbf{u}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(z) & \mathbf{T}_{12}(z) \\ \mathbf{T}_{21}(z) & \mathbf{T}_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) \\ \bar{\mathbf{u}}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1(z) \\ \bar{\mathbf{R}}_2(z) \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{T}_{ij}(z)$ ($\forall i, j = 1, 2$) son las submatrices de $\mathbf{T}(z)$ definidas en (2.47) y $\bar{\mathbf{R}}_i(z)$ son dos vectores columna conteniendo las tres primeras y las tres últimas componentes de $\bar{\mathbf{R}}(z)$ respectivamente. De la expresión anterior se tiene,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(0) \\ \bar{\mathbf{u}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{12}^{-1}(z)\mathbf{T}_{11}(z) & \mathbf{T}_{12}^{-1}(z) \\ \mathbf{T}_{21}(z) - \mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(z)\mathbf{T}_{11}(z) & \mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{12}^{-1}(z) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(z) & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1(z) \\ \bar{\mathbf{R}}_2(z) \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

2.3.7 Vector de estado para un punto interior

Para un punto arbitrario, dentro de la capa, la ecuación (2.48) es:

$$\bar{\mathbf{a}}(z) = \mathbf{T}(z)\bar{\mathbf{a}}(0) + \bar{\mathbf{R}}(z). \quad (2.52)$$

También, para $z = h$, de (2.51) obtenemos

$$\bar{\mathbf{u}}(0) = -\mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\mathbf{T}_{11}(h)\bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) + \mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) - \mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\bar{\mathbf{R}}_1(h). \quad (2.53)$$

Sustituyendo $\bar{\mathbf{u}}(0)$ de la ecuación de arriba, en (2.51), se obtiene

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(z) \\ \bar{\mathbf{u}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(z) - \mathbf{T}_{12}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\mathbf{T}_{11}(h) & \mathbf{T}_{12}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h) \\ \mathbf{T}_{21}(z) - \mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\mathbf{T}_{11}(h) & \mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{12}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\bar{\mathbf{R}}_1(h) + \bar{\mathbf{R}}_1(z) \\ -\mathbf{T}_{22}(z)\mathbf{T}_{12}^{-1}(h)\bar{\mathbf{R}}_1(h) + \bar{\mathbf{R}}_2(z) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

que representa las transformadas de las tensiones y desplazamientos de cualquier punto arbitrario con respecto a la transformada de las tracciones superficiales y la transformada de las cargas aplicadas.

2.4 Sistema no homogéneo: capa con carga concentrada

En esta sección vamos a considerar la solución de una capa sujeta a una carga concentrada de magnitud unitaria actuando en una dirección arbitraria y aplicada en cualquier punto interno.

El punto donde se aplica la fuerza es $\xi(0, 0, H)$ y $x(x, y, z)$ es el punto de observación, como está representado en la figura 2.2. Además $\delta(x, y, z)$ representa la función de delta Dirac para un dominio geométrico. Las fuerzas arbitrarias en los tres direcciones van a ser expresadas como

$$F^x = \begin{pmatrix} \delta(x, y, z - H)e_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F^y = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(x, y, z - H)e_y \\ 0 \end{pmatrix}, F^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(x, y, z - H)e_z \end{pmatrix}.$$

Las expresiones transformadas para las fuerzas se definen por

$$\tilde{F}^x = \frac{i}{2\pi} \delta(z - H)e_x, \quad (2.55a)$$

$$\tilde{F}^y = \frac{i}{2\pi} \delta(z - H)e_y, \quad (2.55b)$$

$$\tilde{F}^z = \frac{1}{2\pi} \delta(z - H)e_z, \quad (2.55c)$$

donde e_i es el vector unitario en la dirección i .

Aplicando, consecutivamente, las expresiones (2.55) al segundo término del lado derecho de (2.37) ó (2.48), se tiene

$$\tilde{R}^x(z) = X(z)X^{-1}(H) \left(-\frac{i}{2\pi}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T,$$

$$\tilde{R}^y(z) = X(z)X^{-1}(H) \left(0, -\frac{i}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right)^T,$$

$$\tilde{R}^z(z) = X(z)X^{-1}(H) \left(0, 0, -\frac{i}{2\pi}, 0, 0, 0 \right)^T,$$

(ver expresiones (2.56a)-(2.56c) donde el superíndice (x, y, z) denota la dirección de la carga unitaria.

$$\tilde{R}^x(z) = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^3 a_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 b_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 c_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 d_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 e_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 f_n(b_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}b_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \end{Bmatrix} \quad (2.56a)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^y(z) = \frac{1}{4\pi \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}} \begin{cases} \sum_{n=1}^3 a_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 a_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 c_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 d_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 e_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 f_n(a_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}a_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \end{cases} \quad (2.56b)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^z(z) = \frac{1}{4\pi \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}} \begin{cases} i \sum_{n=1}^3 a_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 d_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 c_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 d_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ i \sum_{n=1}^3 e_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} + e^{\lambda_n(H-z)}) \\ \sum_{n=1}^3 f_n(d_{n+1}e_{n+2} - e_{n+1}d_{n+2})(e^{\lambda_n(z-H)} - e^{\lambda_n(H-z)}) \end{cases} \quad (2.56c)$$

En (2.56a)-(2.56c) el índice n es cíclico (i.e. $2 + 2 = 1$, $3 + 1 = 1$ y $3 + 2 = 2$).

2.4.1 Vector de estado para un punto interno

En el caso particular de una fuerza concentrada en el cuerpo con la superficie inferior y la superior libre de tracciones, se tiene:

$$\bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}(h) = 0.$$

De (2.54) se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}(z) \\ \bar{u}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{12}(z)T_{12}^{-1}(h)\bar{R}_1(h) + \bar{R}_1(z) \\ -T_{22}(z)T_{12}^{-1}(h)\bar{R}_2(h) + \bar{R}_2(z) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

para cualquier punto z encima del nivel de la carga ($z \geq H$), en caso contrario se deben eliminar los términos $\bar{R}_1(z)$ y $\bar{R}_2(z)$.

Entonces, en la expresión, para cualquier punto distante z de la superficie inferior de la capa, se tiene

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}(z) \\ \bar{u}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{12}(z)T_{12}^{-1}(h)\bar{R}_1(h) + \bar{R}_1(z)\mathcal{H}(z-H) \\ -T_{22}(z)T_{12}^{-1}(h)\bar{R}_2(h) + \bar{R}_2(z)\mathcal{H}(z-H) \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\text{con } \mathcal{H}(z-H) = \begin{cases} 1, & \forall z \geq H, \\ 0, & \forall z < H. \end{cases}$$

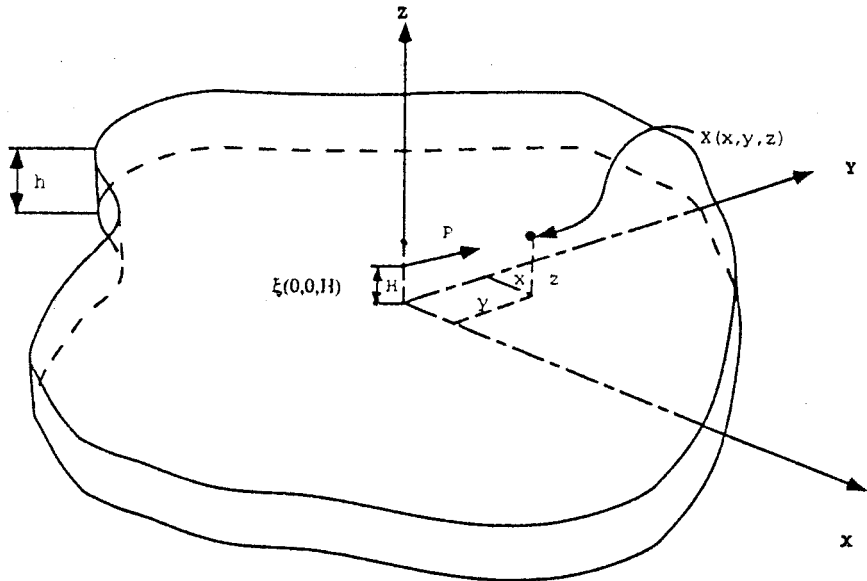


FIGURA 2.2: Capa con carga unitaria aplicada en un punto interno x arbitrario.

2.5 Cálculos numéricos de tensiones y desplazamientos

Resulta imposible obtener una solución analítica explícita para la ecuación (2.58) debido al problema de encontrar los autovalores de la matriz \tilde{A} .

Hallar los autovalores de una matriz $n \times n$ genérica involucra la solución de un polinomio de grado n . No pudiéndose encontrar una solución explícita algebraica para grados superiores a cuatro. De aquí que sea imposible hallar los resultados explícitos de los autovalores y autovectores salvo para las matrices más simples y dispersas. De aquí que haya que calcular las tensiones y desplazamientos numéricamente.

A fin de computar las tensiones y desplazamientos para una sola capa se sigue el diagrama de flujo de la figura (2.3). Este diagrama de flujo muestran los pasos para obtener el resultado numérico de la solución fundamental. Este procedimiento es bastante fácil pero algunos pasos hay que explicarlos con más detalle de los que están indicados en el diagram de flujo.

Las entradas a la rutina son: las constantes del material para la capa, las coordenadas de la fuerza puntual y la distancia vertical hasta el plano que se calcula. En el siguiente paso de calcular las constantes $c_1 \dots c_{21}$. Luego se mandan las constantes al doble bucle para evaluar los vectores \tilde{a} y \tilde{b} o sea la transformada de las tensiones y desplazamientos.

Para hacer esto es necesario discretizar el plano $\alpha - \beta$. El número de puntos en cada dirección tiene que ser un producto de las potencias de dos, tres y cinco: $i = j = 2^p 3^q 5^r$, $p, q, r > 0$. Este doble bucle consiste en varios pasos: las constantes $k_1 \dots k_{18}$, los autovalores $\lambda_1 \dots \lambda_3$ y las funciones $a_i \dots f_i$. Todas se calculan fácilmente siguiendo el diagrama de flujo. Después del doble bucle se calcula la matriz de transferencia \tilde{T}_{12} . Se pueden presentar algunos problemas numéricos en la evaluación de la submatriz \tilde{T}_{12} . La razón de esto es que, para algunos valores de α y β el determinante de \tilde{T}_{12} es cero o próximo a cero es decir, en el primer caso no está definido la inversa y en segundo caso se obtienen valores arbitrarios debido a errores de redondeo. Los errores, debido a que el determinante es cero, se pueden eliminar fácilmente poniendo todos los valores en \tilde{a} y \tilde{b} a cero. El segundo tipo de error es más difícil de evitar porque no hay ninguna diferencia entre un determinante correcto y uno incorrecto. La solución que hay que dar a este problema consiste en usar un filtro para extraer todos los resultados que son demasiado grandes en comparación con los valores de su entorno. Los valores erróneos son muy diferentes a los

valores en su alrededor, típicamente varios órdenes de magnitud más grande. El siguiente paso es calcular el vector \hat{R} . El último paso, antes de proceder con la rutina de FFT, es el de calcular las matrices transformadas de las tensiones y desplazamientos, \hat{a} y \hat{b} . La salida final puede ser preparada para cálculos adicionales ó para imprimir.

2.6 Resultados numéricos

Para comprobar el algoritmo presentado en esta tesis se han usado dos ejemplos diferentes de material. El primer ejemplo se evaluó para comparar la solución ortótropa con la solución isotrópica presentado en el artículo de Benítez y Rosakis ([4]). Para hacer eso fue estudiado un material *quasi-isótropo* con valores según la tabla de abajo, donde E_{ij} , G_{ij} y ν_{ij} $i, j = x, y, z$ son los módulos de Young, modulo cortante y coeficientes de Poisson respectivamente.

$$\begin{array}{lll} E_x = 1.0 \cdot 10^{10} & \nu_{xy} = 0.2 & G_{xy} = 0.35 \cdot 10^9 \\ E_y = 1.04 \cdot 10^9 & \nu_{xz} = 0.28 & G_{xz} = 0.37 \cdot 10^9 \\ E_z = 0.98 \cdot 10^9 & \nu_{yz} = 0.3 & G_{yz} = 0.38 \cdot 10^9 \end{array}$$

En el cálculo una carga puntual fue aplicada a una distancia de $0.75h$ de la superficie inferior de la placa. Posteriormente se evaluó un plano a una distancia de $0.25h$ de la superficie inferior. Todos los cálculos se hicieron para una discretización de 256×256 puntos del plano $\alpha - \beta$. Las soluciones fueron halladas solo para cargas en las direcciones x y z . Debido a la simetría en materiales isotrópos no se presentan las curvas correspondientes a cargas en la dirección y porque son idénticas para el caso en el que la carga esté en dirección x usando la substitución conveniente de los índices. Por ejemplo, se podría evaluar la tensión σ_{xz}^y usando los valores para σ_{yz}^x .

Los resultados numéricos han sido escalados para hacer los dos ejes adimensionales. Los factores de escala son $\sigma \frac{h^2}{p}$ y $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h}$ para los ejes vertical y horizontal respectivamente, donde h es el grosor de la capa y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia en el plano a la carga aplicada. La fuerza interior esta definida por p . Todos los gráficos estan dibujandos para el caso $x - y = 0$. Se hizo así para poder comparar todas las tensiones y desplazamientos porque algunas de las componentes son iguales a cero en los planos $x = 0$ e $y = 0$. Algunas de las tensiones, por ejemplo, σ_{xz}^x , σ_{zz}^x y σ_{zz}^z en la figura (A.1) muestran una conformidad muy buena entre la solución isotrópica y la quasi-isótropa para todos los valores de r/h . Otras tensiones, por ejemplo σ_{xx}^x , σ_{yy}^x en la figura (A.2), se ajustan bien para valores bajos de r/h pero cuando el valor r/h es más grande divergen ligeramente. Hay dos razones para este comportamiento: primero la solución quasi-isótropa no proporcionan exactamente el mismo resultado que la solución isotrópica y segundo no se obtiene el mismo resultado debido al número de puntos usados para el calculo de FFT. Un numero más grande de puntos en el plano $\alpha - \beta$ da lugar en resultados mejores para valores grandes de r/h . Esta última consideración hay que tenerla en cuenta porque hay que llegara un compromiso entre la cantidad de memoria del ordenador y el tiempo de CPU disponible para el calculo.

En el segundo ejemplo se usan estos valores para el material T300/914, un tipico compuesto de carbón epoxy [24]:

$$\begin{array}{lll} E_x = 1.33 \cdot 10^{11} & \nu_{xy} = 0.33 & G_{xy} = 4.37 \cdot 10^9 \\ E_y = 8.44 \cdot 10^9 & \nu_{xz} = 0.33 & G_{xz} = 4.37 \cdot 10^9 \\ E_z = 8.44 \cdot 10^9 & \nu_{yz} = 0.45 & G_{yz} = 2.18 \cdot 10^9 \end{array}$$

En este ejemplo hemos aplicado las mismas solicitaciones que en el ejemplo anterior. Las curvas son suaves lo que indican que hemos obtenido una solución buena sin inestabilidades numericas. Sin embargo se pueden observar unas pequeñas oscilaciones cuando el valor de la tensión está cerca de cero y cuando el valor de r/h es grande. Este comportamiento es debido a inestabilidades numericas en la solución fundamental cuando los valores de α y β son grandes. Pero como el valor de la función está muy cerca de cero, estos efecto no tienen importancia. Además se comprueba

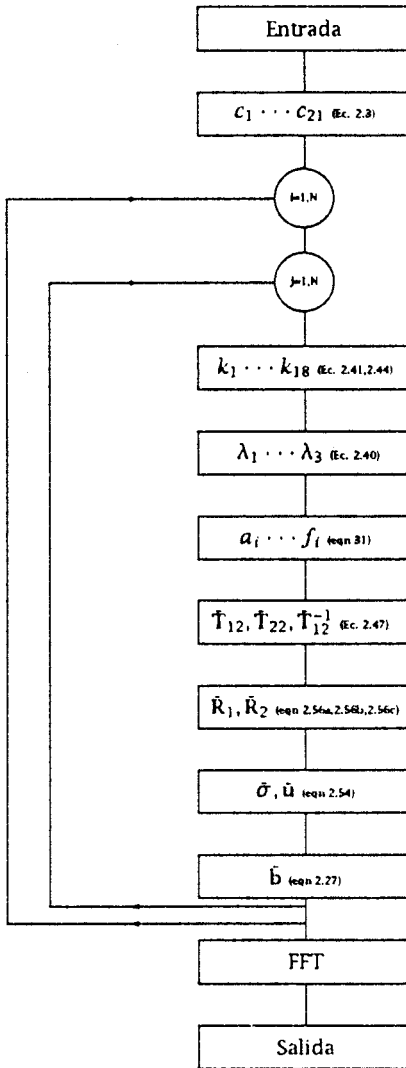


FIGURA 2.3: Diagrama de flujo del método de computación, (una capa).

que la forma de las curvas es semejante al caso isótropo pero con la significativa diferencia que los resultados obtenidos por fuerzas aplicadas en las direcciones x y y ya no son iguales. Por ejemplo, σ_{xz}^x ya no es igual a σ_{yz}^y , etc. Las curvas aparecen más comprimidas o sea, las tensiones llegan más rápido al cero. Eso es debido a los valores mucho más altos del módulo de Young y módulo cortante.

Capítulo 3

Sistema multi-capa ortótropa

3.1 Ecuación matricial para un sistema multicapa ortótropa

En un sistema multicapa con N capas, tal como en la figura 3.1, se puede expresar la capa k como:

$$\tilde{\mathbf{a}}_k(z_k) = \mathbf{T}_k(z_k)\tilde{\mathbf{a}}_k(0) + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k), \quad (3.1)$$

donde la matriz \mathbf{T} y el vector $\tilde{\mathbf{R}}$ están definidas en el Apéndice 1.

La condición de continuidad entre las capas da lugar a la siguiente relación:

$$\tilde{\mathbf{a}}_k(0) = \tilde{\mathbf{a}}_{k-1}(h_{k-1}). \quad (3.2)$$

Usando expresión (3.1) recursivamente se llega a la relación entre la capa k -ésima y la capa inferior

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_k(z_k) &= \mathbf{T}_k(z_k)\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}(h_{k-1}) + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k) = \\ &= \mathbf{T}_k(z_k) (\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1})\tilde{\mathbf{a}}_{k-2}(h_{k-2}) + \tilde{\mathbf{R}}_{k-1}(h_{k-1})) + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k) = \\ &= \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1})\tilde{\mathbf{a}}_{k-2}(h_{k-2}) + \mathbf{T}_k(z_k)\tilde{\mathbf{R}}_{k-1}(h_{k-1}) + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k) = \dots = \\ &= \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_1(h_1)\tilde{\mathbf{a}}_1(0) + \\ &\quad + \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_2(h_2)\tilde{\mathbf{R}}_1(h_1) + \dots + \\ &\quad + \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_{l+1}(h_{l+1})\tilde{\mathbf{R}}_l(h_l) + \dots + \\ &\quad + \mathbf{T}_k(z_k)\tilde{\mathbf{R}}_{k-1}(h_k) + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

La expresión (3.3) se puede poner en forma matricial como

$$\tilde{\mathbf{a}}_k(z_k) = \tilde{\mathbf{T}}(z_k)\tilde{\mathbf{a}}_1(0) + \tilde{\mathbf{R}}(z_k), \quad (3.4)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{T}}(z_k) = \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_1(h_1), \quad (3.5)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(z_k) &= \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_2(h_2)\tilde{\mathbf{R}}_1(h_1) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \mathbf{T}_k(z_k)\mathbf{T}_{k-1}(h_{k-1}) \dots \mathbf{T}_{l+1}(h_{l+1})\tilde{\mathbf{R}}_l(h_l) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \mathbf{T}_k(z_k)\tilde{\mathbf{R}}_{k-1}(h_{k-1}) + \\ &\quad + \tilde{\mathbf{R}}_k(z_k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

En particular, para $z_k = h_N$ obtenemos:

$$\tilde{\mathbf{a}}_N(h_N) = \hat{\mathbf{T}}(h_N)\tilde{\mathbf{a}}_0 + \hat{\mathbf{R}}(h_N). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.1) se puede poner como:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_k(z_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}_k(z_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{11}(z_k) & \hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k) \\ \hat{\mathbf{T}}_{21}(z_k) & \hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1(0) \\ \tilde{\mathbf{u}}_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1(z_k) \\ \hat{\mathbf{R}}_2(z_k) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde, para $z_k = h_N$, se obtiene,

$$\tilde{\sigma}_N(h_N) = \hat{\mathbf{T}}_{11}(h_N)\sigma_1(0) + \hat{\mathbf{T}}_{12}(h_N)\tilde{\mathbf{u}}_1(0) + \hat{\mathbf{R}}_1(h_N), \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(0) = \hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\tilde{\sigma}_N(h_N) - \hat{\mathbf{T}}_{11}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{T}}_{11}(h_N)\sigma_1(0) - \hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_2(h_N). \quad (3.10)$$

Introduciendo (3.10) en la ecuación (3.9) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(z_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(z_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{11}(z_k) - \hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{T}}_{11}(h_N) & \hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N) \\ \hat{\mathbf{T}}_{21}(z_k) - \hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{T}}_{11}(h_N) & \hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(0) \\ \tilde{\sigma}(h_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_1(z_k) \\ -\hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_2(z_k) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

En el caso de caras libres a cargas aplicadas, se tiene $\tilde{\sigma}_1(0) = \tilde{\sigma}_N(h_N) = 0$. De (3.11) se tiene

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(z_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(z_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_1(z_k) \\ -\hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_2(z_k) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

para cualquier punto z_k por encima del nivel de la carga H_l , donde l es la capa que contiene la carga puntual aplicada y $k < l$ o $k = l$ con $z_k \geq H_k$, en cualquier otro caso se debe de eliminar $\hat{\mathbf{R}}_1(z_k)$ y $\hat{\mathbf{R}}_2(z_k)$.

Entonces, el expresión anterior, para un punto arbitrario será:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(z_k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(z_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{T}}_{12}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_1(z_k)\mathcal{H}(z_k - H_l) \\ -\hat{\mathbf{T}}_{22}(z_k)\hat{\mathbf{T}}_{12}^{-1}(h_N)\hat{\mathbf{R}}_1(h_N) + \hat{\mathbf{R}}_2(z_k)\mathcal{H}(z_k - H_l) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

con

$$\mathcal{H}(z_k - H_l) = \begin{cases} 1, & \forall k > l, \\ 1, & \text{para } k = l \text{ y } z_k \geq H_l, \\ 0, & \text{para } k = l \text{ y } z_k < H_l, \\ 0, & \forall k < l. \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2 Cálculo numérico de tensiones y desplazamientos en un medio multicapa

Para calcular las tensiones y desplazamientos de una placa multicapa se siguió el diagrama de flujo de la figura (3.2). Este diagrama muestra los pasos seguidos para obtener los resultados numéricos para la solución fundamental. El procedimiento es directo, pero algunos pasos necesitan de una explicación más detallada.

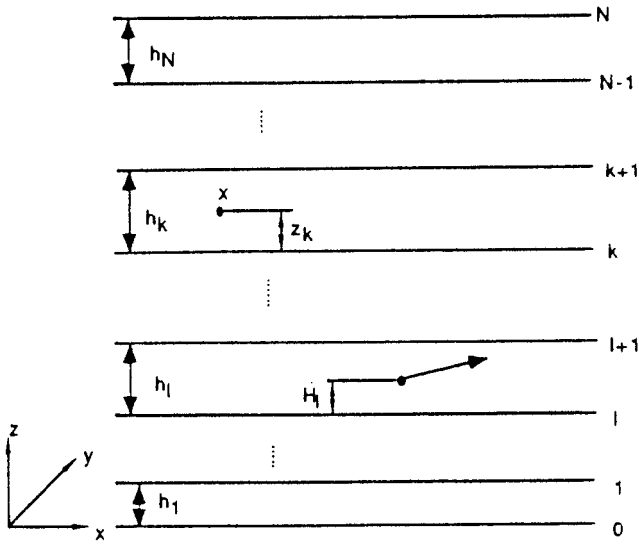


FIGURA 3.1: Multicapa con una carga aplicada en un punto arbitrario x en una capa arbitraria.

Las entradas de datos son: las constantes del material para todas las capas, la posición de la fuerza puntual y la situación en el plano (paralelo a las capas) que contiene el punto observado donde las tensiones y desplazamientos van a ser calculados. En el siguiente paso las constantes $q_{11} \dots q_{66}$ tienen que calcularse para todas las capas usando los valores de cada capa. Las constantes son entonces remitidas al doble bucle para calcular los vectores \hat{a} y \hat{b} , o sea los desplazamientos y las tensiones transformadas. Para hacer esto, es necesario discretizar el plano transformado $\alpha - \beta$ (α y β son las coordenadas transformadas de x e y respectivamente). El número de puntos en cada dirección debe ser el producto de las potencias de dos, tres y cinco: $i = j = 2^p 3^q 5^r$, $p, q, r > 0$. Este doble bucle consta de varios pasos, las constantes $k_1 \dots k_{18}$, los autovalores $\lambda_1 \dots \lambda_3$ y las funciones $a_i \dots f_i$ tienen que evaluarse para todas las capas. Entonces la matriz de transferencia \hat{T} se computa como producto de T_i para todas las capas. Pueden aparecer algunos problemas para obtener la inversa de la submatriz \hat{T}_{12} . La razón de estos problemas estriba en que para algunos valores de α y β el determinante de \hat{T}_{12} es cero o muy cercano a cero; o sea que la inversa no se define en el primer caso y el determinante es muy pequeño en el segundo lo cual conduce a valores aleatorios de la inversa debidos a errores de redondeo. Los errores, debidos al determinante cero, se pueden corregir fácilmente poniendo a cero todos los valores de \hat{a} y \hat{b} . El segundo tipo de errores es más difícil de evitar ya que no hay una clara diferencia entre un determinante que da una inversa correcta y uno que da resultados incorrectos. La solución que se da a este problema consiste en usar un filtro que extraiga todos los valores que son grandes en comparación con aquellos que están alrededor. Los valores erróneos tienen muy diferente magnitud si se comparan con los otros números; típicamente varios órdenes magnitud más altos. El siguiente paso consiste en calcular el vector \hat{R} , que es el producto de la matriz T_i multiplicada por el vector \hat{R} de la capa sometida a la fuerza interna. Todas las demás \hat{R}_i son iguales a cero. El último paso antes de proceder a la computación de la FFT es calcular los desplazamientos y tensiones transformadas, \hat{a} y \hat{b} . Finalmente la salida puede prepararse para un cálculo adicional o para la impresión.

3.3 Resultados numéricos

Para examinar el procedimiento y el algoritmo presentado en este trabajo, se computaron tres ejemplos. Todos ellos corresponden a una placa laminada infinita, tomando las mismas propiedades materiales (un típico compuesto de carbón epoxy T300/914 [59]):

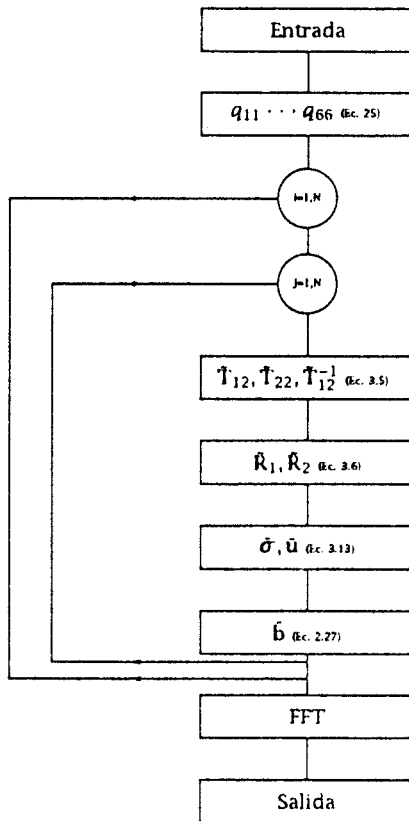


FIGURA 3.2: Diagrama de flujo del método de cálculo, (multi-capas).

$$\begin{array}{lll}
 E_x = 1.33E11 & \nu_{xy} = 0.33 & G_{xy} = 4.37E9 \\
 E_y = 8.44E9 & \nu_{xz} = 0.33 & G_{xz} = 4.37E9 \\
 E_z = 8.44E9 & \nu_{yz} = 0.45 & G_{yz} = 2.18E9
 \end{array}$$

El primer grupo de datos corresponde a una placa infinita de espesor uniforme $h = 1$; el segundo ejemplo es una pila de tres placas infinitas de espesor $h = \frac{1}{3}$ cada una; el tercer grupo es una pila de diez placas de espesor $h = \frac{1}{10}$ cada una. Las condiciones del contorno de la placa son tracción cero en las superficies inferior y superior. La única fuerza aplicada es una carga concentrada que actúa en la dirección x , y o z , en un punto interno perteneciente a un plano paralelo a las capas (y superficies de la placa) y situado a una distancia H_1 respecto a la superficie inferior de la placa.

Los tres grupos de datos corresponden al mismo problema físico, aunque se ha calculado para el caso de estar compuesto de una, tres y diez capas respectivamente. Esto se hace así para comprobar la divergencia (incrementándose el error con el aumento del número de capas).

Los resultados numéricos han sido escalados con el fin de que ambos ejes no tengan dimensiones.

Los factores de escala son $\sigma \frac{h^2}{p}$ y $\frac{\tau}{h} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h}$ para los ejes verticales y horizontales respectivamente, donde h es el espesor de la capa y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia sobre-plano a la carga aplicada. El módulo de la fuerza interior está definido por p . Todas las gráficas están ploteadas para el caso de $x - y = 0$. Esto se hizo con el fin de comparar todas las tensiones y desplazamientos ya que algunas componentes son cero en los planos $x = 0$ e $y = 0$. Por motivo de brevedad solamente se han plotado un pequeño número de tensiones y desplazamientos.

Como se ve en las figuras (B.1 a B.9b), en algunos cálculos la placa con diez capas produce mayor inexactitud cuando r/h es grande, en otros la placa con una o tres capas muestra la mayor inexactitud. Esto es debido al hecho, como se estableció en la sección (3.1), de que ocurren errores numéricos en el proceso de computar la inversa de la matriz \bar{T}_{12} , es decir después de todos los cálculos referentes a las capas. Desde los diagramas es fácil ver que los resultados son muy exactos localmente, por ejemplo cuando r/h es pequeño. Cuando r/h aumenta y el valor de la solución se aproxima a cero entonces la diferencia entre las soluciones es de un orden más alto. Esto no afecta demasiado a los resultados finales del BEM, ya que los valores son cercanos a cero.

Capítulo 4

Incorporación de la solución fundamental al método de los elementos de contorno

4.1 Discusión del método de los elementos de contorno

El método de los elementos de contorno ofrece una alternativa al método de elementos finitos. El método está bien adaptado para manejar problemas de que derivan de la teoría del potencial. La gran ventaja del BEM es que una integral del volumen puede reducirse a una integral de superficie, y mediante el cálculo del contorno del volumen, el comportamiento del interior puede predecirse. Bajo el método de los elementos de contorno, sólo el contorno del dominio del problema se discretiza, lo cual reduce la dimensionalidad del problema en uno. De esta manera problemas de volumen en tres dimensiones se solucionan como problemas de superficie en dos dimensiones, y problemas de áreas se modelan como bordes en una dimensión. La reducción de la dimensionalidad de un problema se manifiesta en que se tienen que resolver menos ecuaciones usando el BEM en comparación con el FEM. Sin embargo, cada ecuación de BEM tendrá un número mayor de funciones algebraicas que las que corresponderían a un problema con el FEM. De este modo resolver formulaciones con el BEM requiere más potencia de proceso. En las ecuaciones integrales resueltas con el BEM, cada punto nodal se computan haciendo uso de los demás puntos nodales del modelo, produciendo matrices asimétricas plenamente pobladas. En contraste, el FEM es una técnica diferencial en la que cada punto se calcula solamente desde los elementos vecinos, produciendo matrices simétricas en banda.

4.2 Teoría del método de los elementos de contorno

El método de los elementos de contorno se basa en una ecuación conocida como la identidad de Somigliana ([2] o [9]):

$$c_{ij}u_i(x) + \int_{\Gamma} T_i^j(x, y)u_i(y)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_i^j(x, y)t_i(y)d\Gamma + \int_{\Omega} U_i^j(x, y)\chi_i(y)d\Omega \quad (4.1)$$

donde Γ denota el contorno y Ω denota el dominio.

Para resolver problemas mecánicos es deseable discretizar el contorno sólido y las condiciones del contorno para resolver el problema de forma numérica. La discretización implica sustituir el contorno del sólido por elementos del contorno. Si existen fuerzas de volumen, el volumen integral tiene que discretizarse en el interior de la región considerada. Eso implicaría un proceso similar para el FEM y las ventajas del BEM se perderían. Sin embargo las fuerzas de volumen que corresponden a la gravedad, aceleración angular y otras integrales de volumen del campo potencial pueden transformarse en integrales de superficie. La ecuación discretizada (4.2) produce un

sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Una vez que las condiciones del contorno se imponen, el sistema puede resolverse para obtener los valores desconocidos. En la realización propuesta, todas las fuerzas del cuerpo son ignoradas, por lo tanto el último término de la ecuación (4.2) se puede eliminar. Se utilizarían elementos constantes planos, donde los datos del contorno se toman en el centroide del elemento, o sea que se usan elementos constantes.

Es más conveniente trabajar con condiciones de matriz que usar notación indicial. Para hacer esto, nosotros podemos empezar definiendo el desplazamiento y el vector de tracción que se aplica sobre el elemento j mediante los valores en su centroide, o sea

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \mathbf{u}^j \\ t(x) &= t^j \end{aligned} \right\} = \forall x \in \text{element } j \quad (4.2)$$

donde el superíndice j denota el elemento, y \mathbf{u}^j y t^j indican el desplazamiento y los vectores de tracción en el centroide del elemento, respectivamente.

Si la carga concentrada unidad está actuando en el centroide γ^i del elemento i -ésimo, sustituyendo las funciones \mathbf{u}^j y t^j en la ecuación (4.2) y discretizando el contorno, entonces la correspondiente ecuación para el vector de desplazamiento en el nodo i puede ser escrito como:

$$[C] \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} [T_i^j(x, \gamma)] d\Gamma_j \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} [U_i^j(x, \gamma)] d\Gamma_j t^j \quad (4.3)$$

donde Γ_j es la superficie del j -ésimo elemento, NE indican el número de elementos usados y donde $[C]$ tiene dado por:

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Como \mathbf{u}^j y t^j son constantes sobre el elemento, pueden ser extraídos del integral.

Entonces,

$$[C] \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [T_i^j(x, \gamma)] d\Gamma_j \right) \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [U_i^j(x, \gamma)] d\Gamma_j \right) t^j \quad (4.5)$$

Para evaluar la ecuación integral numericamente es conveniente reescribir la expresión anterior como:

$$[C] \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} [\hat{H}^{ij}] \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} [G^{ij}] t^j \quad (4.6)$$

donde

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} T_i^j(x, \gamma) d\Gamma_j \quad \text{and} \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} U_i^j(x, \gamma) d\Gamma_j, \quad (4.7)$$

estos integrales son resueltos por cuadratura de Gauss como se explica en ([2] o [9]).

De (4.6) se tiene:

$$[H^{ij}] = [\hat{H}^{ij}] \quad \text{if } i \neq j \tag{4.8}$$

$$[H^{ij}] = [\hat{H}^{ij}] + [C] \quad \text{if } i = j \tag{4.9}$$

entonces la ecuación (4.2) se convierte en

$$\sum_{j=1}^{NE} [H^{ij}] u^j = \sum_{j=1}^{NE} [G^{ij}] t^j. \tag{4.10}$$

Las ecuaciones para todos los nodos pueden ser ensambladas en un sistema global de ecuaciones:

$$[H] u = [G] t \tag{4.11}$$

Las matrices $[H]$ y $[G]$ son matrices $3NE \times 3NE$, u y t son vectores $3NE \times 1$.

Para resolver la ecuación (4.11) en el programa BEM, reordenamos la ecuación para que tengamos todas las tensiones y desplazamientos desconocidos en el lado izquierdo, y todas las condiciones de contorno conocidas multiplicadas por sus correspondientes valores de $[H]$ y $[G]$. La ecuación resultante es:

$$[A^*] x = b \tag{4.12}$$

donde $[A^*]$ es una matriz $3NE \times 3NE$, x es un vector de incógnitas $3NE \times 1$ y b es un vector de las condiciones de contorno conocidas, también $3NE \times 1$. La ecuación (4.12) se resuelve usando eliminación de Gauss.

4.3 Implementación de la ecuación integral de contorno en el programa BEM

En capítulos anteriores hemos discutido la teoría y solución de la solución fundamental tridimensional. Observamos que es necesario resolver la solución fundamental numericamente debido a la complejidad de las expresiones. La solución numérica del problema implica el uso del método FFT. El cómputo de la solución fundamental en el dominio transformado, debido al método FFT, proporcionarán la solución en un plano $\alpha\text{-}\beta$, en vez de un simple punto. Aprovechando esto, nosotros podemos evaluar la solución fundamental dentro de un programa que tendrá las siguientes restricciones:

- Todo los elementos de una capa tienen que tener la misma altura vertical.
- Todas las capas deben ser paralelas al plano $x\text{-}y$.
- Una capa de elementos debe coincidir con una capa de material.
- Las fuerzas externas deben estar en equilibrio.

El programa BEM desarrollado usa elementos constantes con el nodo en el centro de gravedad de cada elemento.

4.3.1 Definición de la malla BEM

Un ejemplo de malla BEM se muestra en la figura (4.1). La malla se muestra en dos dimensiones por claridad; pero en un problema real la malla será naturalmente tridimensional. En un modelo

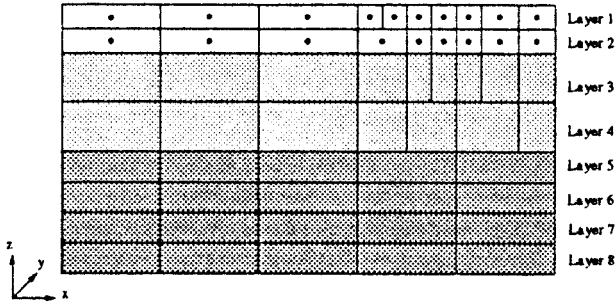


FIGURA 4.1: Ejemplo de una malla de BEM. Los diferentes tonos de gris indican diferentes materiales. Todos los elementos en una capa tienen que tener el mismo grosor pero pueden tener diferente ancho.

capas diferentes pueden estar definidos por materiales diferentes. Una capa material debe consistir de una o más capas de elementos y una capa de elementos debe estar dentro de los contornos de una capa material. En la figura (4.1) estas capas de material están señaladas con diferentes tonos de gris, o sea blanco, gris claro y gris oscuro. En el código del BEM el apareamiento entre elementos y materiales se lleva a cabo mediante la asignación de un valor a cada elemento en la tabla de elementos que lo relaciona a cierto material. Todos los elementos en una capa deben tener la misma altura (en la dirección z) pero pueden tener diferentes anchuras. Esto está ilustrado en la figura, en las capas 1 a 4. El elemento puede tener también cualquier inclinación con tal que aquél sea plano. Esto es, dos de los nodos de un elemento deben tener la misma coordenada z y el otro par de nodos debe también tener idénticas coordenadas z . Los cuatro nodos en un elemento pueden todos tener diferentes coordenadas x e y con tal que formen un elemento plano.

4.3.2 Procedimiento seguido para calcular la solución del BEM

Para obtener la solución del elemento de contorno de cualquier problema dado, tenemos que evaluar las matrices G y H . Cuando estas matrices han sido plenamente evaluadas con influencia desde todos los elementos, entonces lo que tiene que hacerse es reordenaremos generando la ecuación (4.12). Esta ecuación matricial será entonces resuelta por medio del método de eliminación de Gauss.

Como se mencionó antes, es conveniente usar toda la solución obtenida mediante la subrutina de la solución fundamental. El procedimiento FFT, que se usa para obtener la solución fundamental, evalúa la solución de todo un plano $x - y$ en puntos discretos. La solución se usa del siguiente modo (ver figura 4.2): para cada fuerza concentrada unidad aplicada en un nodo de un elemento a la distancia vertical H , se necesita la solución para puntos de Gauss localizados en una distancia vertical z . Después de calcular la solución fundamental usando H y z , obtendremos la solución para cualquier punto en la distancia vertical z . Las tensiones y desplazamientos serán ahora encontradas simplemente "trasladando" la solución mediante una interpolación, usando las coordenadas x e y desde el elemento al que nosotros estamos aplicando la carga hasta las coordenadas x e y del punto de Gauss que nosotros estamos integrando.

La figura (4.2) muestra un malla de ejemplo donde una fuerza de unidad es aplicada en un nodo de un elemento y donde la solución fundamental es calculada para un punto de Gauss en otro elemento.

Las líneas punteadas de la figura representan las subdivisiones de la capa de elemento y serán llamadas subcapas a través de la tesis. Estas subcapas están después divididas, dentro de cada elemento, en elementos. El algoritmo usando para dividir los elementos se explicará en la siguiente sección.

Evaluar las matrices G^U y H^U con contribuciones de todos los elementos implica integrar la solución fundamental sobre el área del elemento como se definió en la ecuación (4.2). Esto no puede hacerse analíticamente ya que la solución fundamental es numérica. Para evaluar los componentes de la matriz, se usa una esquema de cuadratura de Gauss, tal como es descrito en el trabajo de

Benitez, Lu y Rosakis [2].

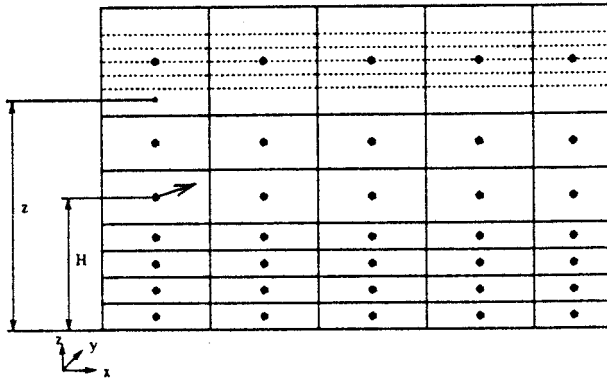


FIGURA 4.2: Ejemplo de una malla de BEM cuyas líneas continuas indican el contorno del elemento y las discontinuas indican las sub-capas. En la figura se representa la carga concentrada vertical H y la solución fundamental se calcula en el centro de un sub-elemento de coordenada vertical z .

Las matrices G^{ij} y H^{ij} tienen que ser evaluadas para todos los elementos. Los problemas aparecen cuando un elemento cercano a la fuerza concentrada unitaria es evaluado. La solución fundamental en ese elemento producirá entonces valores numéricos altos y la variación de la solución fundamental sobre el elemento integrado sería muy alta. Esto es debido a la naturaleza singular de la solución fundamental. Para tomar esto en cuenta, es necesario introducir más puntos de Gauss con el fin de confeccionar una efectiva cuadratura de Gauss. Para hacer esto, todas las capas de elemento tienen que estar divididas en subcapas, así ellas pueden ser dividida además en subelementos. Los subelementos escogidos tienen un punto de Gauss cada uno. Tener solamente un punto de Gauss en cada subelemento lleva a un conveniente aprovechamiento de la solución fundamental ya que se calcula para todo un plano, o sea, que la solución está en el plano $x - y$ con la coordenada constante z .

Para ilustrar la necesidad de situar todos los subelementos en el mismo plano, se hace una comparación entre el tiempo de CPU para el método desarrollado en Benitez, Lu y Rosakis [2] y el método desarrollado en esta tesis. En el trabajo de Benitez et.al, el tiempo de CPU es proporcional al producto de: el cuadrado del número de elementos, el número de puntos de Gauss, el número promedio de subdivisiones y el tiempo de CPU de la solución fundamental isotrópica. Mientras que en esta tesis el tiempo de CPU para el programa BEM es proporcional al producto de: el número de subcapas, el número de capas y el tiempo de CPU para la solución fundamental ortótropa. El tiempo de CPU requerido para la solución ortótropa es mucho más alto que el tiempo consumido por la solución fundamental isotrópica, la primera es típicamente dos o tres órdenes de magnitud más alta que la segunda. Esto significa que si uno evalúa la solución ortótropa en el esquema BEM propuesto en el trabajo [2] entonces el tiempo de CPU sería intolerable, mientras que evaluando en el programa BEM usado en esta tesis, resultará un tiempo de CPU de un par de horas. El tiempo de CPU depende del número de subcapas que se escojan para el problema. Nótese que el total del tiempo de CPU depende muchísimo del número de capas de elemento y subcapas, pero no tanto del número de elementos de cada capa de elementos y del número de subelementos.

En la figura (4.3) está dibujando el diagrama de flujo esquemático del algoritmo de BE propuesto. Siguiendo este diagrama de flujo explicaremos a continuación el algoritmo. En el primero y principal bucle, la coordenada z del centro de cada subcapa es asignada a la variable z (que se usa en la subrutina que calcula la solución fundamental). En el siguiente bucle, a la coordenada z , tomada en el centro de gravedad del primer elemento en la capa de elemento, se le asigna la variable H . Usando estas dos variables y las constantes del material se puede calcular ahora la solución fundamental. Tendremos pues la solución fundamental para todos los puntos en el plano, un plano $x - y$ en la altura z para la carga concentrada unitaria a la altura H .

En los próximos dos pasos el traslado de la solución, como se describió antes, se hará de la siguiente manera. La carga concentrada unitaria es aplicada en cualquier elemento a la altura H y entonces las tracciones y desplazamientos serán interpolados desde el resultado de la solución fundamental hasta obtener la solución para todos los puntos de Gauss sobre la altura z . Estos

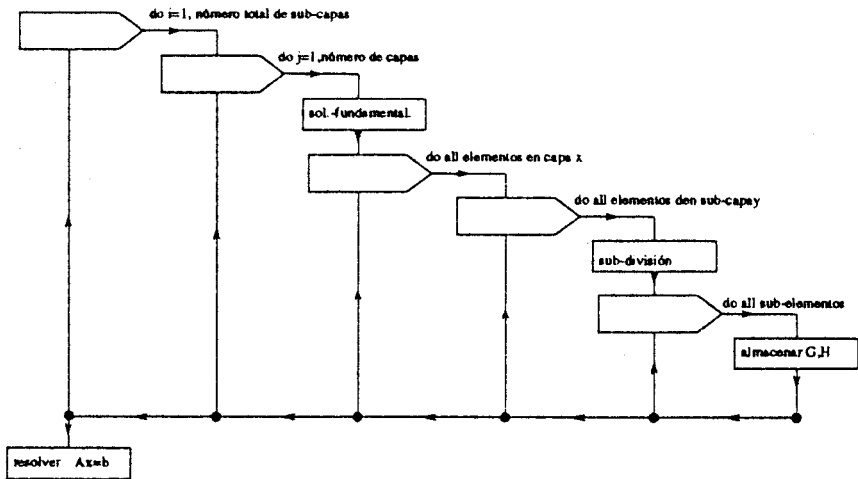


FIGURA 4.3: Diagrama de flujo del algoritmo usado para hallar la solución de los elementos de contorno. Los rectángulos indican importantes pasos en el programa y las flechas indican diferentes clases de bucles.

dos puntos tienen idénticas coordenadas x e y . Para computar las tensiones y desplazamientos en cualquier punto de Gauss, todo lo que tenemos que hacer es; tomar las coordenadas x e y del nodo donde la carga se aplica en el origen, después tomar las coordenadas x e y para el punto de Gauss, entonces, los valores que requieren la subrutina de interpolación son $x_{\text{carga}} - x_{\text{Gauss}}$ e $y_{\text{carga}} - y_{\text{Gauss}}$. Los resultados se interpolan de los cuatro puntos de alrededor de la solución fundamental obtenida anteriormente. El punto de Gauss se localiza en un subelemento. El proceso de subdivisión se explicará en la próxima sección. El resultado es después almacenado en su correspondiente posición en la matriz $[A^*]$ y vector $[b]$. Cuando este procedimiento ha sido repetido para todas las subcapas y capas, entonces la ecuación (4.12) se resolverá y obteniéndose la solución de elemento de contorno del problema.

La figura (4.4) presenta un ejemplo del esquema del algoritmo; aquí la solución fundamental ya está calculada y la interpolación del resultado se hace para encontrar los valores que corresponden a la integración desde uno de los elementos en la capa de elementos, donde la carga se ha aplicado, hasta el punto de Gauss en los subelementos.

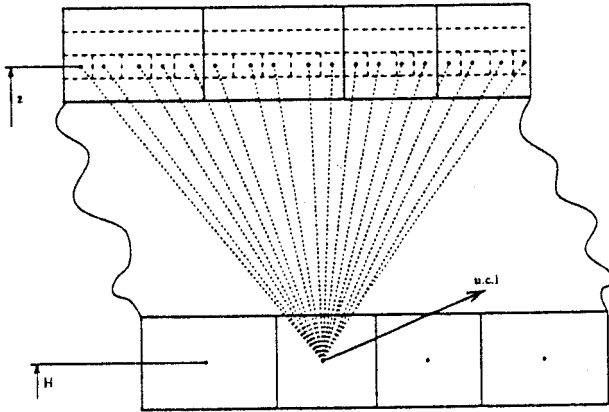


FIGURA 4.4: Ejemplo de una malla donde la carga concentrada aplicada en un nodo de coordenada vertical H y la solución fundamental se calcula en el centro de un sub-elemento de coordenada vertical z .

4.3.3 Subdivisión de elementos

Cuando se aplica la carga concentrada unitaria en un elemento cercano a, o dentro de, otro elemento donde se localizan puntos de Gauss, es necesario hacer una subdivisión de ese elemento para conseguir una mejor aproximación de la integral. Como el elemento está ya dividido en subcapas, sólo se necesita hacer una división adicional del elemento en estas subcapas.

El modo en que funciona esta rutina es como sigue. Divide la subcapa, dentro del elemento, en dos subelementos iguales. Después calcula la distancia mayor entre dos nodos en el primero de los dos subelementos. Esta distancia se denota d_{max} (ver figura (4.3.3) donde se definen las diferentes variables). Si esta distancia, d_{max} , es mayor que la altura de la subcapa, z_{sub} , el procedimiento continúa hacia el siguiente paso de la rutina, pero si la distancia es menor, entonces continúa con el siguiente sub-elemento.

El siguiente paso, si d_{max} es mayor que z_{sub} , consiste en calcular la distancia mayor entre el punto de carga y los diferentes nodos del sub-elemento. Esta distancia se denota por d_{min} . Si d_{min} es menor que dos veces d_{max} entonces se divide el sub-elemento en dos nuevos sub-elementos y el procedimiento de arriba se aplica recursivamente a los nuevos sub-elementos. En caso contrario, el programa continúa con el siguiente sub-elemento usando el mismo procedimiento. Esto continúa hasta que todos los subelementos verifican estos criterios.

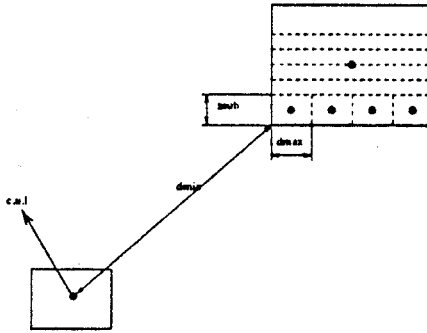


FIGURA 4.5: Definición de las variables usadas en el proceso de sub-división de un elemento.

Capítulo 5

Ejemplos numéricos utilizando el método de elementos de contorno

5.1 Agujero circular sometido a presión interna

El problema calculado corresponde a una placa infinita de espesor uniforme sometida a una presión interna en la superficie interna del agujero. Se aplica la presión uniformemente en dirección radial. Las superficies superior e inferior de la placa están libres de tracción. Se compara la solución de elementos de contorno que utiliza la solución fundamental ortótropa [59] con la solución isótropa presentada en el documento [3] de Lu, Benítez y Rosakis. Se hace la comparación entre la solución ortótropa, utilizando constantes materiales quasi-isótropas, y la solución isótropa que como sabemos por [3] coincide con la solución analítica 2-D. Se evidencia una buena concordancia entre los resultados al comparar las dos soluciones.

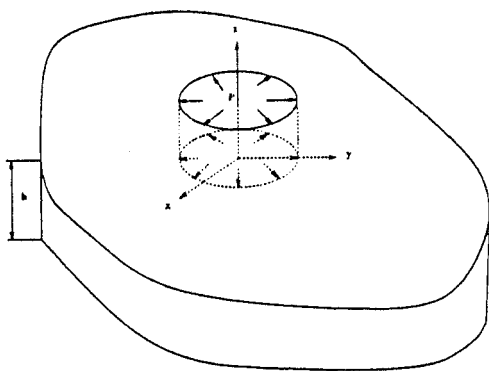


FIGURA 5.1: Agujero en una placa infinita sometido a presión interna.

5.1.1 Modelado de la superficie circular y la malla del contorno

Se utiliza una malla de 160 elementos en todos los cálculos. La dimensión de cualquier elemento en la dirección z se llama espesor y la dimensión en las direcciones circunferenciales (θ) es la anchura. El espesor de la placa se divide en cinco capas de elementos. Todos los elementos, en todas las capas de elementos, son de la misma anchura y espesor. Cada capa se modela utilizando 32 elementos y hay 5 capas en total. Los elementos constantes se usan con el nodo sobre el que se aplican las cargas situado en el centroide. Los resultados de la tracción y el desplazamiento, sólo se calculan en el centroide de cada elemento. Se utilizan dos grupos, A y B, de puntos internos para calcular las tensiones y desplazamientos en el interior de la placa. Se utilizan los puntos en

el grupo A para calcular los desplazamientos en la dirección radial. Los puntos en el grupo B se utilizan para observar el cambio en el desplazamiento a través del espesor.

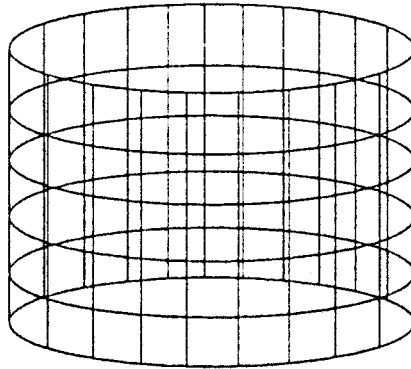


FIGURA 5.2: Malla de elementos de contorno. La malla está formada por 160 elementos todos con igual anchura y espesor. Los elementos son constantes.

Los puntos en el grupo A se colocan, de la misma manera que en el artículo [3] de Lu, Benítez y Rosakis, en tres series radiales a diferentes niveles de profundidad dentro de la placa. Todas las series constan del mismo número de puntos y todos los puntos se colocan en la misma posición radial. La serie de puntos se coloca al 1,25 y 50 por ciento del espesor de la placa empezando desde la superficie superior. Ya que se espera que el campo de desplazamiento presente un gradiente mayor con respecto a la distancia r próximos a la superficie del agujero circular, los puntos se colocan unos cerca de los otros cuando están cerca de la superficie del agujero circular, y más separados cuando están lejos de la superficie. Las posiciones de los puntos en la dirección r son:

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r =$ | 1.01h | 1.05h | 1.10h | 1.20h |
| | 1.30h | 1.40h | 1.50h | 1.60h |
| | 1.70h | 1.80h | 1.90h | 2.00h |
| | 2.10h | 2.20h | 2.30h | 2.40h |
| | 2.50h | | | |

donde h representa el espesor de la placa.

Los puntos en el Grupo B se colocan a lo largo de una línea a través del espesor de la placa. El desplazamiento se evalúa en 10 puntos. La posición de la línea está en $r = 1.4h$. Las posiciones de los puntos a lo largo de la línea son:

$$z = 0.03h, 0.13h, 0.23h, 0.33h, 0.43h, 0.53h, 0.63h, 0.73h, 0.83h, 0.98h$$

5.1.2 Resultados y análisis del error

En esta parte se hace una comparación entre los resultados obtenidos por el método de elementos de contorno con soluciones fundamentales ortótropas y resultados del BEM que utiliza la solución fundamental isotrópica. En todos los cálculos se ha utilizado un material "quasi-isótropo". Puesto que la solución fundamental para el material ortótropo le otorga peculiaridades a las propiedades isotrópicas, se elige una proporción ortótropa de casi 1. Las constantes del material son las siguientes:

$$\text{Isótropo: } \begin{cases} E = 1.0 \\ \nu = 0.3 \end{cases}$$

$$\text{Quasi-Isótropo: } \begin{cases} E_x = 1.0 & E_y = 1.0 & E_z = 0.98 \\ \nu_{x,y} = 0.32 & \nu_{x,z} = 0.28 & \nu_{y,z} = 0.3 \\ G_{x,y} = 0.35 & G_{x,z} = 0.37 & G_{y,z} = 0.38 \end{cases}$$

En las figuras (5.3-5.8), se muestran los componentes del desplazamiento normalizado u_r y u_z en función del radio r para los puntos en el Grupo A, y los mismos componentes del desplazamiento en función de las profundidades normalizadas para los puntos en el Grupo B. La superficie del

agujero está en $r/h = 1$ y $0 < x_z/h < 1.0$.

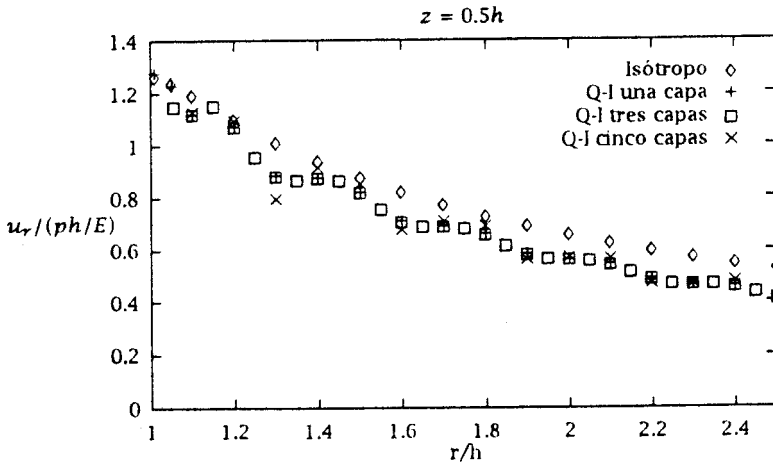


FIGURA 5.3: Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

Las figuras (5.3 - 5.5) muestran el componente del desplazamiento u_r en función de r/h . Cada figura corresponde a un plano-z diferente de la placa. Hay tres curvas en cada figura para el caso del "quasi-isótropo" (indicados en las figuras como Q-I) y se comparan a la curva isotrópica numérica. Los resultados de los cálculos isotrópicos y quasi isotrópicos indican una buena concordancia. Las diferencias que se observan se deben a varios factores: Estamos calculando dos materiales que son similares pero no idénticos, la solución fundamental ortótropa se calcula numéricamente desde el principio y, sin embargo, tienen mayores errores de truncamiento que la solución fundamental isotrópica la cual es parcialmente analítica y puede ser evaluada en su forma final cerrada, además puesto que la solución fundamental ortótropa se deriva para un material completamente ortótropo, se dan mayores errores al calcular materiales que están próximos al isotrópico.

La solución ortótropa se calcula para una placa constituida por una, tres y cinco capas materiales idénticas (no debería haber errores para las capas de elementos) de espesor h , $0.33h$ y $0.2h$ respectivamente. Puesto que las capas de material son idénticas, las soluciones deberían ser idénticas, pero debido a los errores de truncamiento se observa una pequeña diferencia en las curvas.

Las figuras (5.6-5.8) muestran la variación del componente de desplazamiento u_z con la distancia normal con dirección radial, es decir, r/h . Aquí la concordancia con la teórica solución isotrópica es clara. Se puede observar la misma tendencia del ligero incremento de error conforme la distancia desde el agujero disminuye. En todas las cifras el porcentaje de error tiene casi la misma magnitud que en el caso isotrópico. Naturalmente esto tiene la misma explicación que en el caso isotrópico: se debe a la grosera discretización, el mal emparejamiento geométrico puesto que el agujero se modela utilizando elementos planos y la suposición de que la tracción de la superficie y los desplazamientos son constantes sobre los elementos.

Las figuras (5.9) y (5.10) presentan los desplazamientos u_r y u_z en función de la distancia z , es decir, las variaciones de estos componentes a lo largo de una línea a través de la placa. Los gráficos muestran una concordancia excelente entre las soluciones del material quasi-isótropo y del isotrópico teórico. Las diferencias entre las soluciones se deben una vez más al hecho de que los materiales que estamos calculando no son idénticos.

En las figuras (5.3-5.10) $E = 1.0$ y p es la presión interna que actúa en la superficie del agujero.

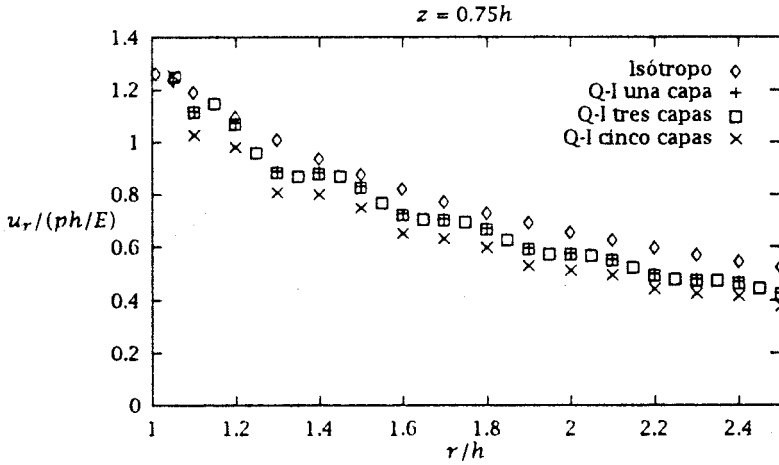


FIGURA 5.4: Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

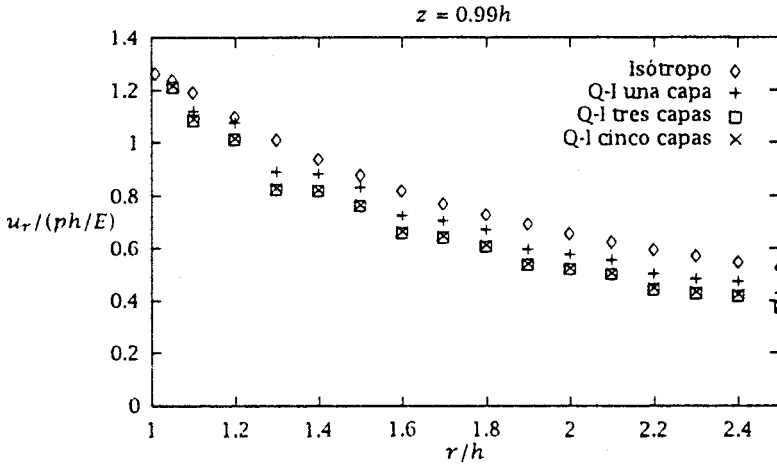


FIGURA 5.5: Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

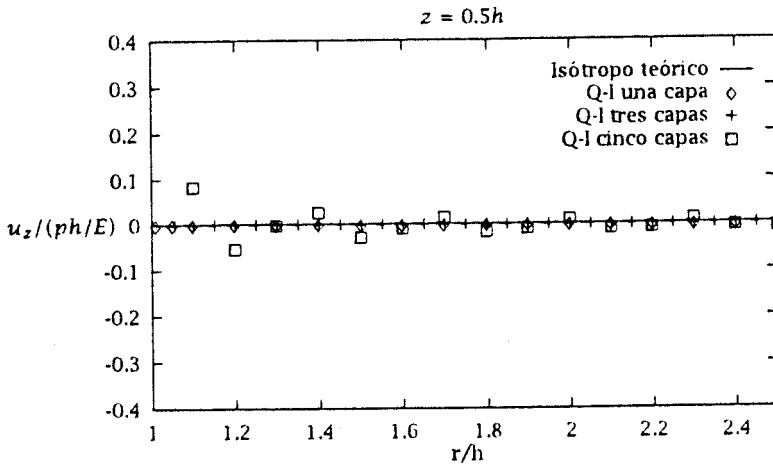


FIGURA 5.6: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

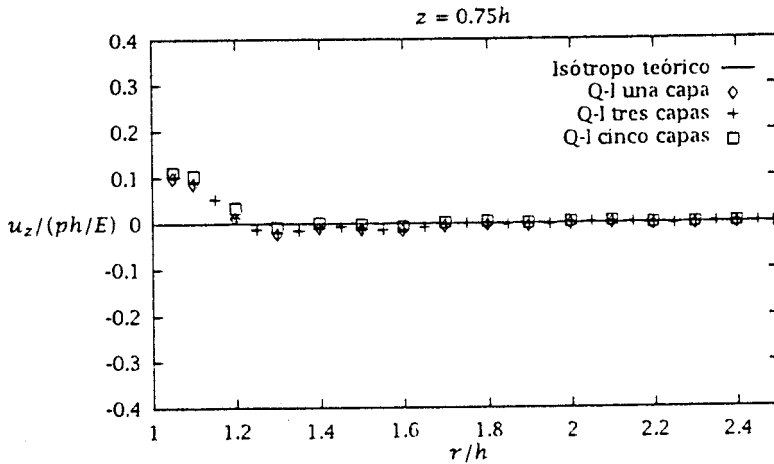


FIGURA 5.7: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

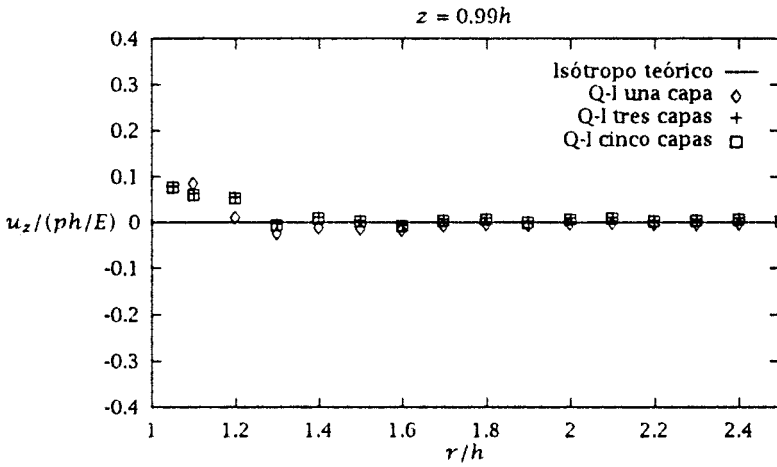


FIGURA 5.8: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) r . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento de la superficie inferior. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

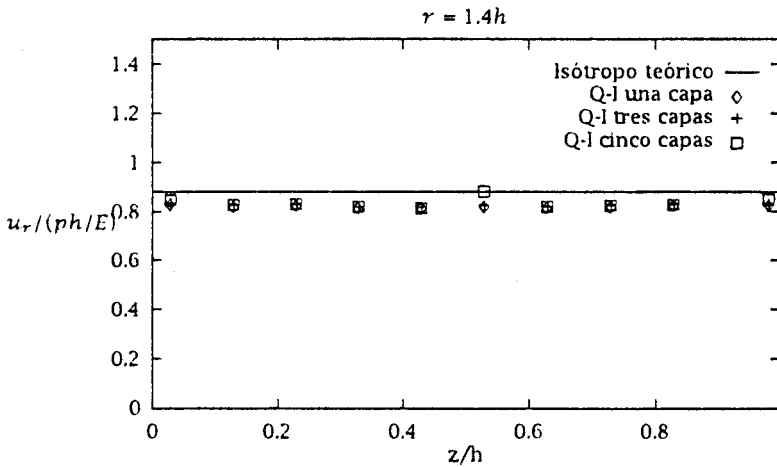


FIGURA 5.9: Desplazamientos normalizados u_r frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos para una distancia de 1.4h desde el centro del agujero. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

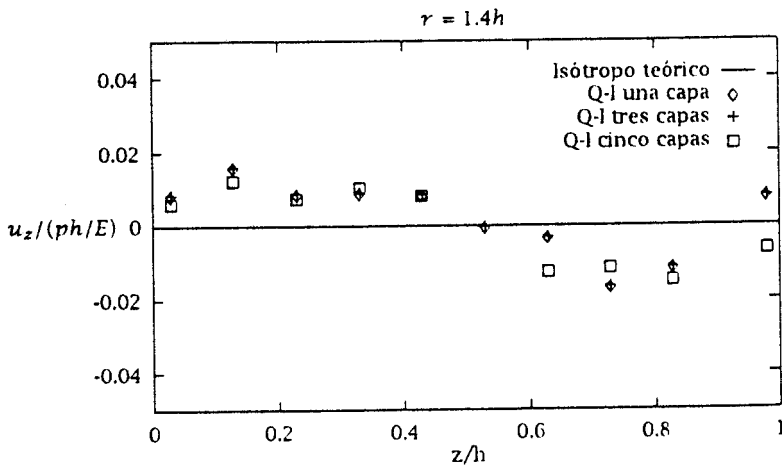


FIGURA 5.10: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos para una distancia de $1.4h$ desde el centro del agujero. Los cálculos se hicieron para una, tres y cinco capas todas con las mismas constantes del material.

5.2 Agujero elíptico sometido a presión interna uniforme

En esta sección se estudian los resultados de una placa infinita de tres dimensiones con un agujero a través del espesor de sección recta elíptica. La placa es de espesor uniforme y las superficies horizontales están ambas libres de tracción. El agujero, con relación de radios mayor a menor es de cuatro, está sometido a una presión interna uniforme. La carga y la geometría se muestran en la figura (5.11).

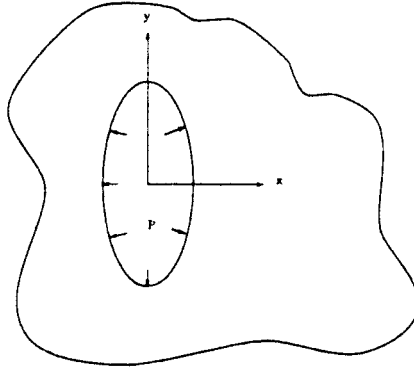


FIGURA 5.11: Geometría de un agujero elíptico en una placa infinita con grosor uniforme. El agujero está sometido a presión interna.

Para verificar el método de elementos de contorno utilizando la solución fundamental ortótropa, se hace una comparación entre los resultados obtenidos al utilizar la solución fundamental ortótropa y la solución fundamental isótropa publicada en el trabajo de Lu, Benítez y Rosakis [3]. En este documento capítulo se comparaba la solución isótropa numérica 3D con las soluciones analíticas 2D, y un análisis realizado mediante el método de elementos finitos.

5.2.1 Modelado de la superficie del agujero elíptico y la malla de elementos de contorno

Se ha escrito y utilizado un código método de los elementos de contorno que hace uso de la solución fundamental ortótropa (desarrollada en Wideberg y Benítez [59]). El enfoque numérico que sigue es similar al problema descrito anteriormente en la sección (5.1). El problema calculado corresponde a una placa infinita con un agujero elíptico sometido a una presión interna uniforme. Puesto que las superficies superior e inferior están libres de tracción, no hay necesidad de discretizarlas. La discretización se limita a la superficie interna del agujero elíptico. En un sistema de coordenadas cartesianas, x representa el eje paralelo al eje menor, y el eje paralelo al eje mayor y z el eje en dirección vertical o espesor. El origen de los ejes está en el centro de la sección recta elíptica sobre la superficie inferior.

Se utiliza una malla de elementos de contorno con 160 elementos. La malla está dividida en cinco capas de elementos, todas con el mismo espesor. Cada capa consta de 32 elementos de igual altura pero de diferente anchura. Los elementos son planos y las tensiones y desplazamientos son constantes dentro del elemento. La malla se muestra en la figura (5.12).

Para investigar la variación del desplazamiento dentro de la placa se crearon cuatro grupos de puntos de evaluación. Dos grupos son paralelos a las superficies de la placa y perpendiculares a los dos extremos de la elipse. Los otros dos grupos son paralelos a los extremos y perpendiculares al plano horizontal.

Llamemos A al primer grupo que es perpendicular al extremo más obtuso, es decir, paralelo al eje menor. Este grupo consta de 24 puntos que se repiten en planos distantes a 1,25 y 50 por ciento del espesor total desde la superficie superior. Las posiciones de los puntos en la dirección x son: $x = 0.2h, 0.3h, \dots, 2.4h, 2.5h$.

El segundo grupo, B, perpendicular al extremo más agudo en la dirección y , también consta de 24

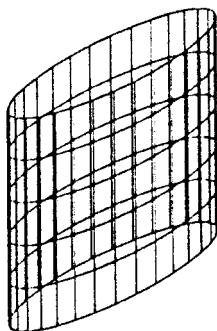


FIGURA 5.12: Malla de BEM con 160 elementos. Los elementos están divididos en cinco capas, todas con el mismo espesor. Los elementos tienen todos igual anchura.

puntos. Las posiciones a lo largo del eje y son: $0.55h, 0.65h, 0.70h, \dots, 0.90h, 1.0h, \dots, 2.5h$.

Los grupos C y D constan de 10 puntos internos que se colocan a lo largo de la dirección del espesor para evaluar la variación de los desplazamientos en esa dirección. Estos grupos están colocados en cuatro posiciones, dos en cada extremo, en las coordenadas $x = 0.35h, y = 0; x = 0.70h, y = 0; x = 0, y = 0.70h; x = 0, y = 1.4$. La posición a lo largo de las direcciones del espesor es $z = 0.03, 0.13, 0.23, 0.33, 0.43, 0.53, 0.63, 0.73, 0.83, 0.97$.

5.2.2 Resultados y análisis del error

Los resultados de la geometría anterior para el material ortótropo, calculado como un material isotrópico (quasi-isótropo), se compara con un modelo isotrópico. Los gráficos presentados comparan la solución "quasi-isótropa", indicada en las figuras como (Q-I), con la solución isotropa.

En las siguientes figuras los componentes normales u_x, u_y y u_z están trazados contra distancias normales del extremo de la elipse. Se representa también la variación a través del espesor de estos componentes. La elipse, como se presenta en la figura (5.11), tiene un eje menor/mayor de valor $0.125h/0.50h$. El espesor de la placa es $1.0h$. Las constantes materiales son las mismas que las del ejemplo del agujero cilíndrico sometido a presión interna.

Los resultados BEM de los desplazamientos normales u_x a lo largo del eje x se presentan en las figuras (5.13-5.15). En todas las figuras los resultados BEM están trazados para los cálculos hechos a una distancia vertical de 50, 75 y 99 por ciento de profundidad de la superficie inferior. Como podemos observar, la diferencia entre las soluciones isotropas y quasi-isótropas es pequeña. Las diferencias que están presentes se deben a los mismos factores del ejemplo del agujero circular.

En las figuras (5.16-5.18) el desplazamiento u_y por el interior del plano está trazado contra la distancia a lo largo del eje mayor y . En estos desplazamientos evaluados para los puntos internos cercanos a la región más aguda del agujero, la diferencia entre los cálculos del isotropo y del quasi-isótropo son de un grado mayor que para los desplazamientos de puntos internos cercanos al extremo más obtuso. Hay varias razones para estas diferencias. La más importante es que el cálculo se hizo para elementos más grandes que en el artículo de Lu, Benitez y Rosakis. En ese documento los autores presentaban que el tamaño de los elementos tiene un efecto considerable en los resultados. Cuanto más pequeño sea el radio del extremo agudo, el factor de concentración de la tensión será mayor, llevando a una tensión mayor y a gradientes del desplazamiento. Por lo tanto, los resultados serán sensibles al tamaño de los elementos de la discretización.

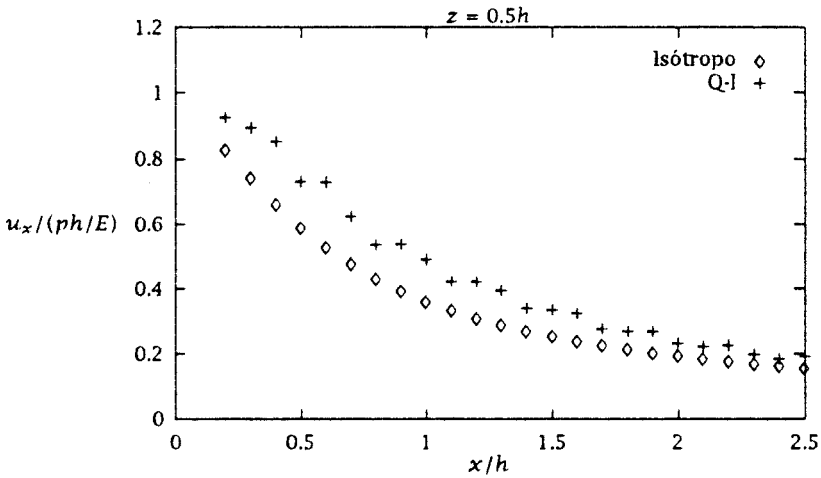


FIGURA 5.13: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior.

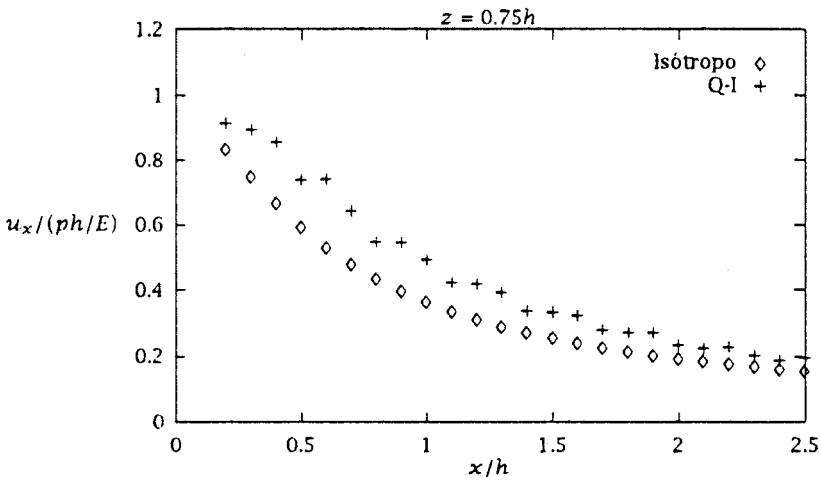


FIGURA 5.14: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior.

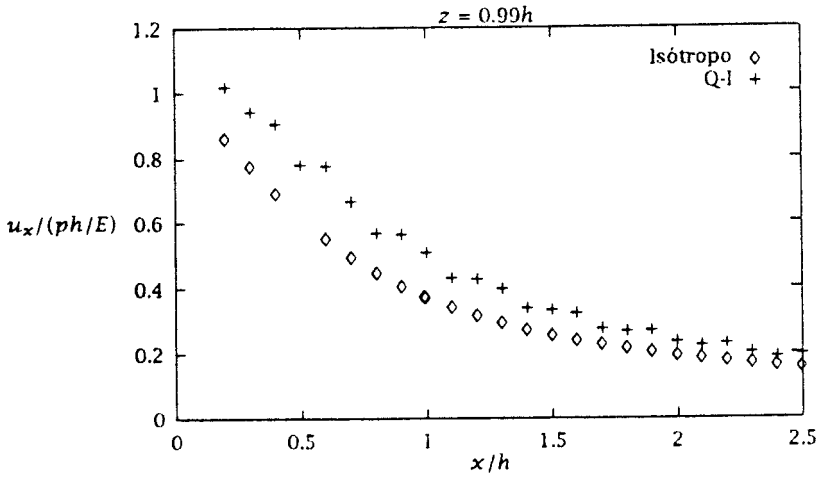


FIGURA 5.15: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior.

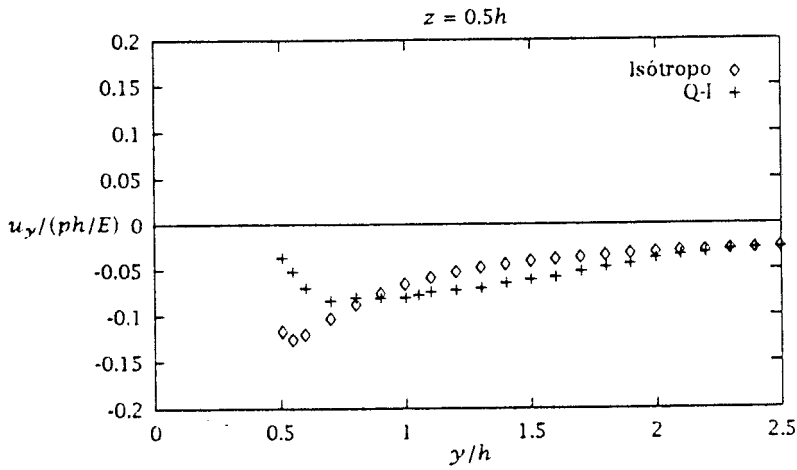


FIGURA 5.16: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior.

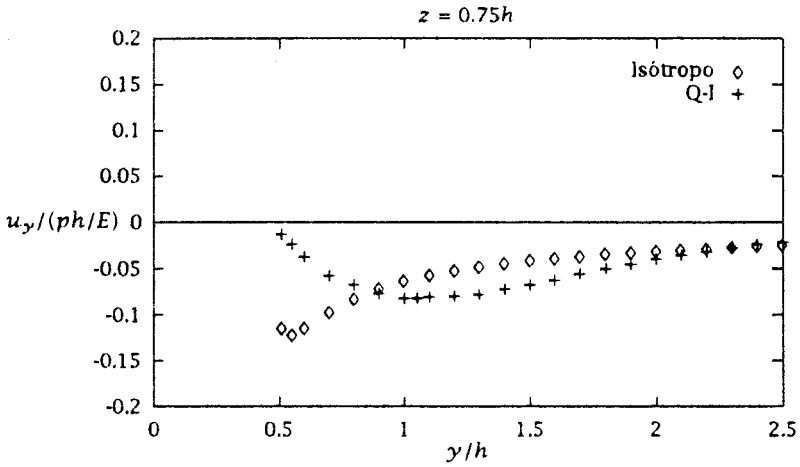


FIGURA 5.17: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior.

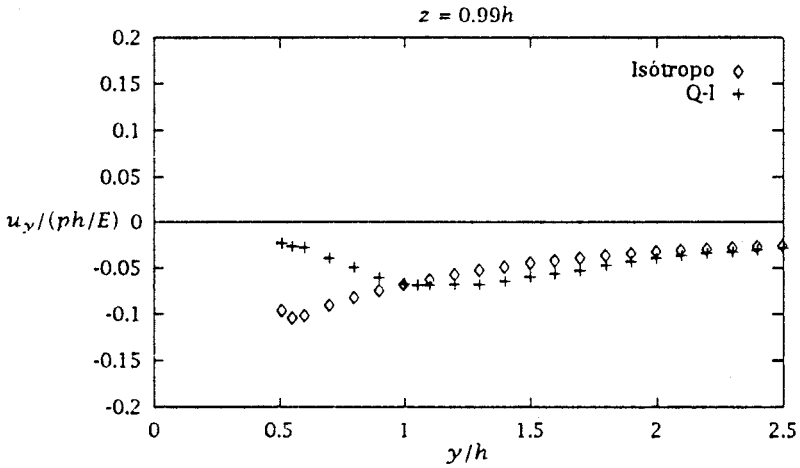


FIGURA 5.18: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior.

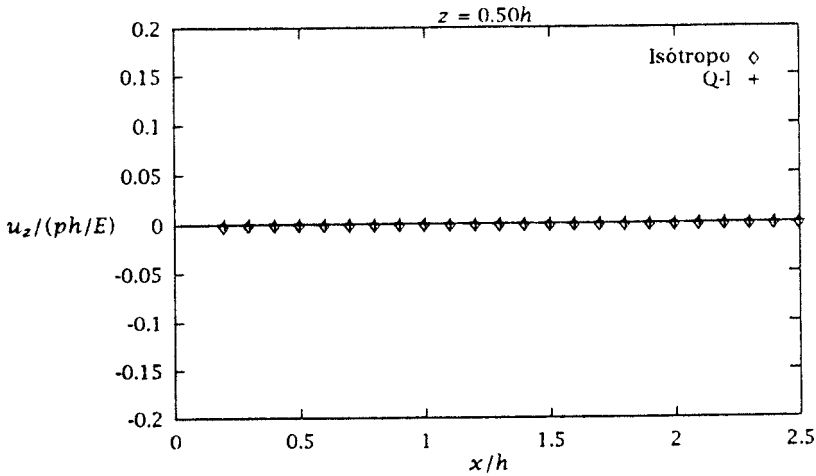


FIGURA 5.19: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior.

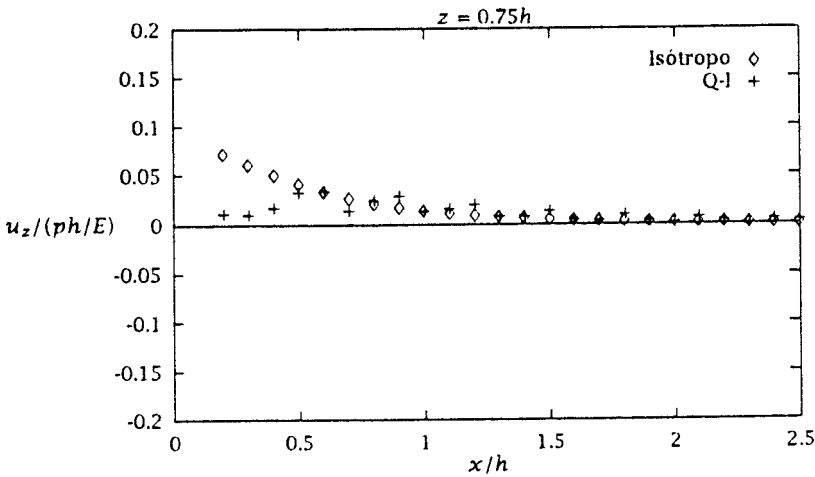


FIGURA 5.20: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior.

En las figuras (5.19-5.24), se dibuja el desplazamiento normal u_x en función de la distancia normal x y el desplazamiento normal u_y en función de la distancia normal y . Para el caso de $z = 0.5h$ los desplazamientos están muy próximos a cero como se esperaba debido a la simetría a mitad del plano. El error para ambos casos, la solución isótropa y ortótropa, está próximo a cero como se puede observar en las figuras (5.19) y (5.22). Al aumentar la distancia al plano medio, como se muestra en las figuras (5.20), (5.23), (5.21) y (5.24), también aumenta la diferencia entre la solución isótropa y ortótropa. Estas discrepancias están representadas en las curvas de u_x en función de x y u_y en función de y , y se deben a los mismos factores, es decir, diferente malla para los dos cálculos combinados con elevados gradientes de tensiones y desplazamientos cercanos al extremo agudo.

Las figuras (5.25-5.28) representan los desplazamientos normales u_x y u_y en función del espesor en las posiciones de los ejes x y y . Todas las figuras muestran una similitud muy buena con la solución isótropa. Cualquier diferencia (en este caso una traslación paralela de las curvas) se debe a las mismas diferencias numéricas sobre las que se ha hablado anteriormente en este capítulo. En

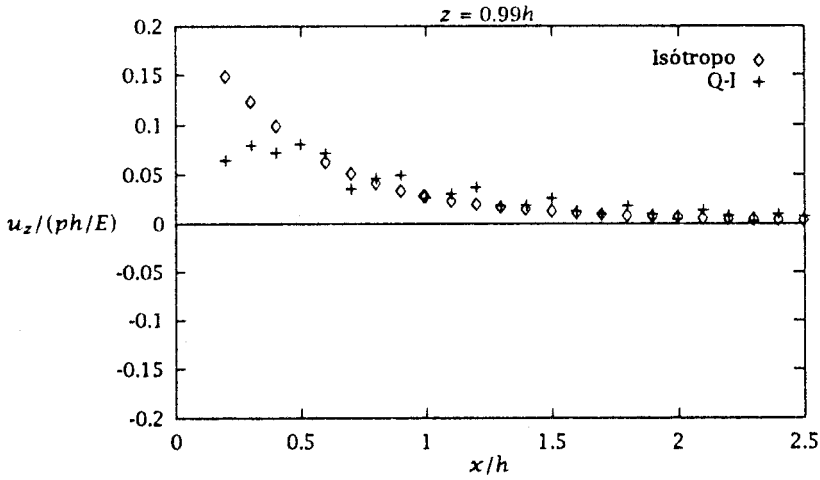


FIGURA 5.21: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior.

cuanto a los gráficos (5.29-5.32) del desplazamiento normal u_z en función de z el parecido también es excelente. Los resultados próximos al agujero se encuentran entre los resultados teóricos proporcionado por las teorías de tensión y deformación planos, como se indica en el artículo de Lu, Benitez y Rosakis [3] y a medida que aumenta la distancia del agujero, la solución tiende a una solución completa bi-dimensional.

En las figuras (5.13 -5.32) E representa $E = 1.0$ y p la presión interna que actúa en la superficie del agujero.

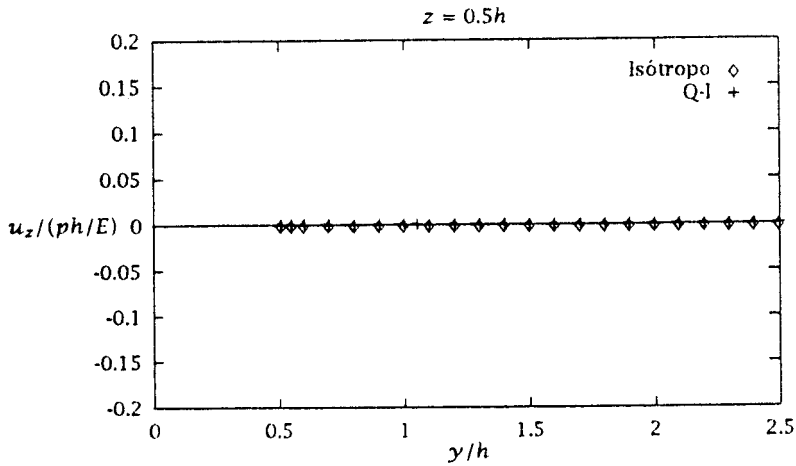


FIGURA 5.22: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 50 por ciento desde la superficie inferior.

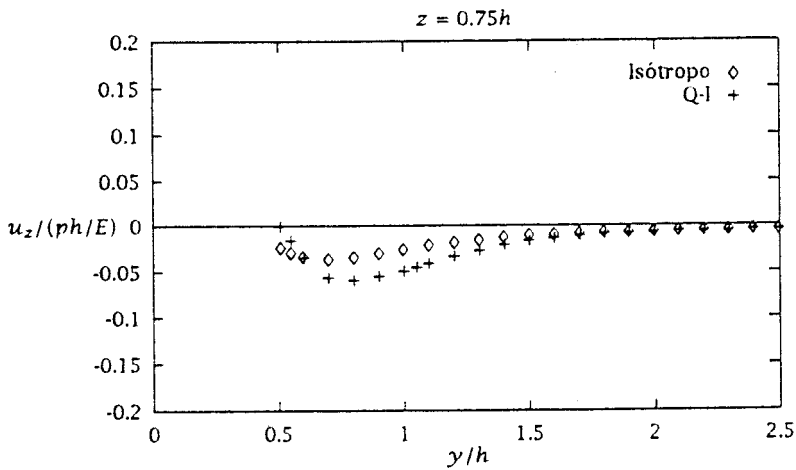


FIGURA 5.23: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 75 por ciento desde la superficie inferior.

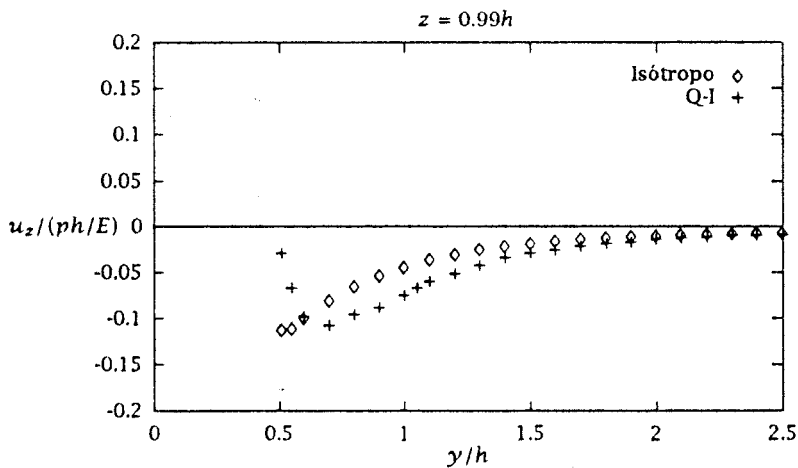


FIGURA 5.24: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para una distancia de 99 por ciento desde la superficie inferior.

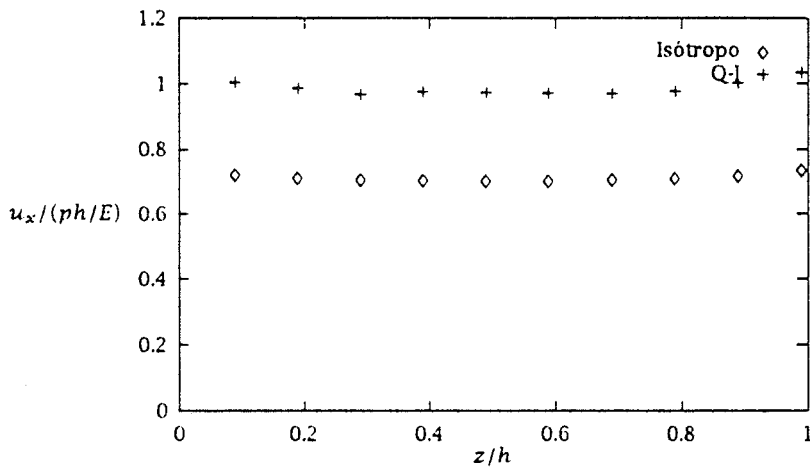


FIGURA 5.25: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.35, y = 0$.

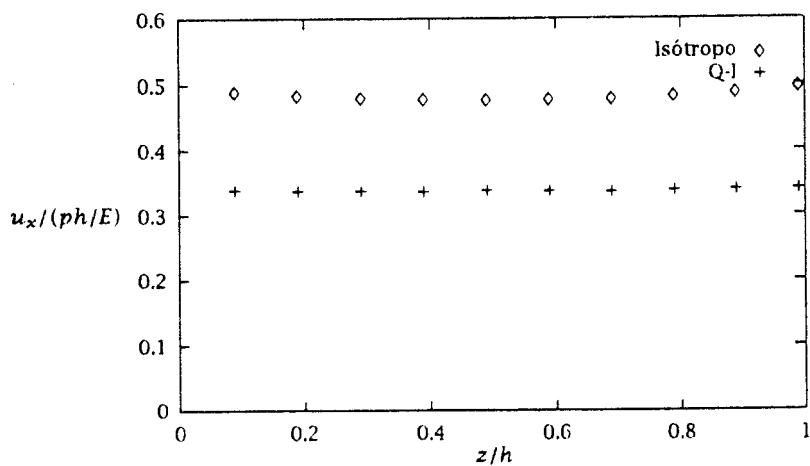


FIGURA 5.26: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.70, y = 0$.

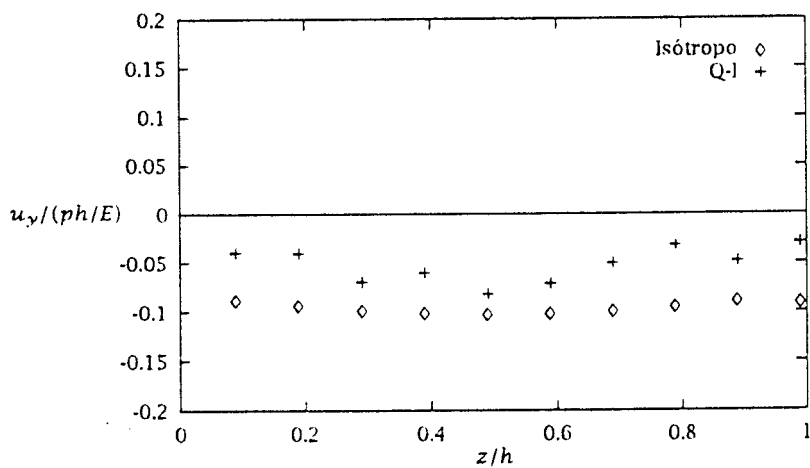


FIGURA 5.27: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 0.70$.

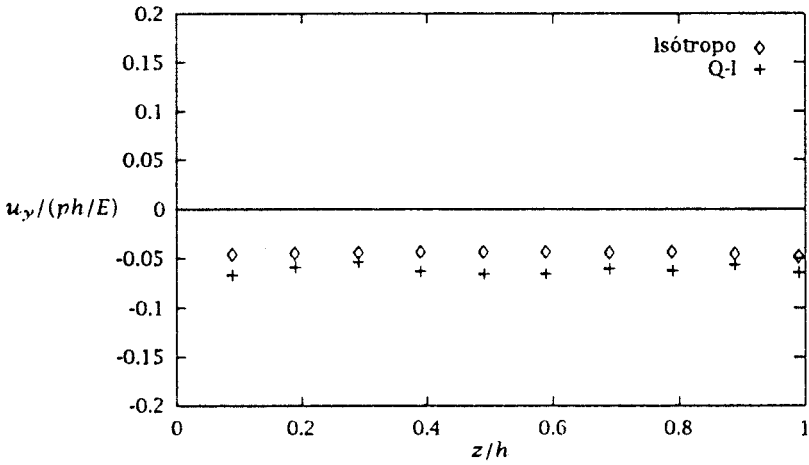


FIGURA 5.28: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$.

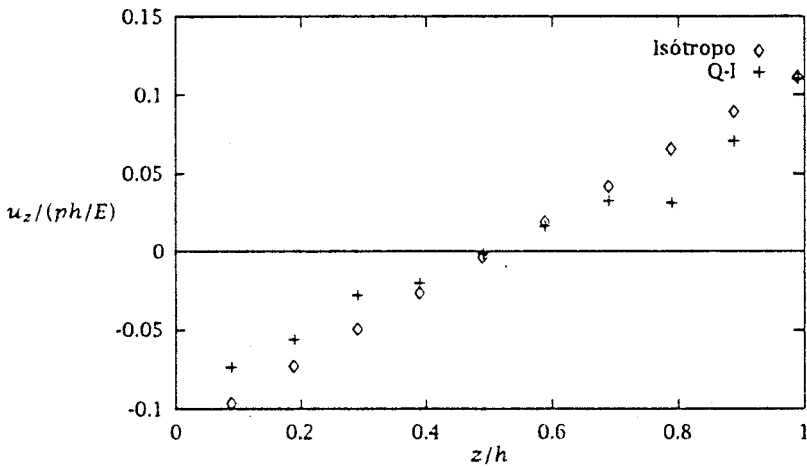


FIGURA 5.29: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.35, y = 0$.

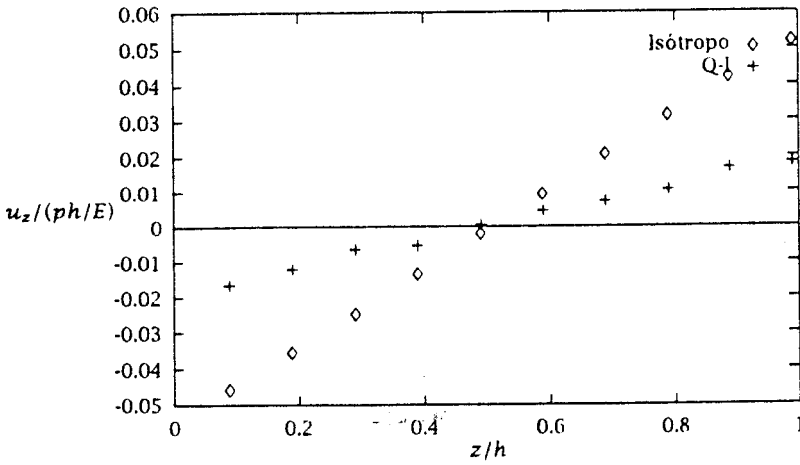


FIGURA 5.30: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0.70, y = 0$.

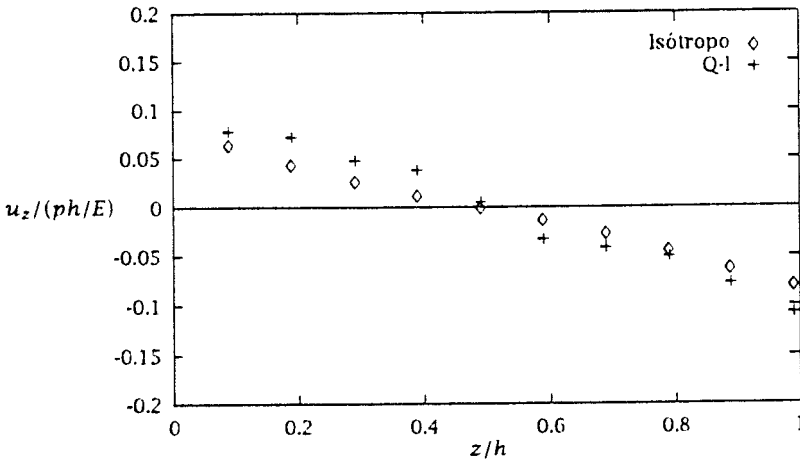


FIGURA 5.31: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 0.70$.

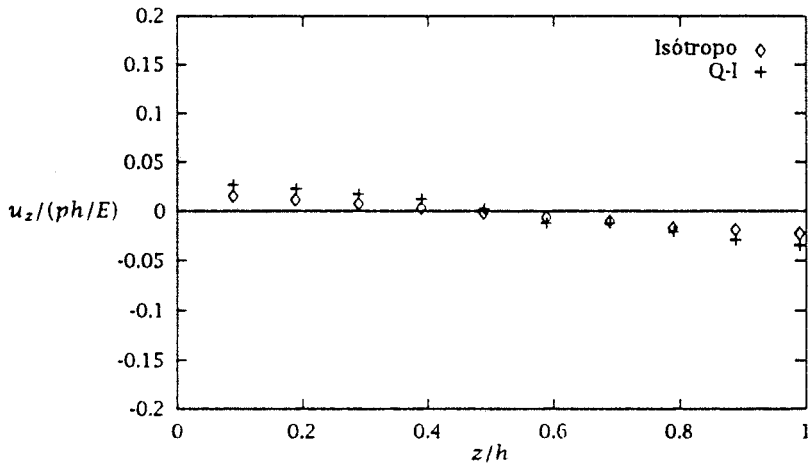


FIGURA 5.32: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$.

5.3 Agujero circular con material ortótropo sometido a presión interna uniforme

En las dos primeras partes de este capítulo hemos mostrado que los resultados de la solución ortótropa coinciden con la solución isótropa para un agujero circular y una elipse en el caso en el que las características del material sean quasi-isótropos. En la última parte de este capítulo evaluaremos la solución de un agujero circular en un material ortótropo sometido a una presión interna uniforme. La geometría y la carga son idénticas a los del agujero en el material isótropo descrito en la sección (5.1). La malla también es la misma. Contrariamente a la solución isótropa se esperan grandes efectos tridimensionales. Puesto que el material es fuertemente ortótropo, el agujero circular tiende hacia una forma elíptica y las tensiones y desplazamientos a lo largo y perpendiculares a las fibras serán muy diferentes. Por lo tanto, se espera que los resultados sean más semejantes al agujero elíptico que al circular. El material elegido es un composite unidireccional con las siguientes constantes del material:

$$\begin{array}{lll} E_x = 1.33 \cdot 10^{11} & \nu_{xy} = 0.33 & G_{xy} = 4.37 \cdot 10^9 \\ E_y = 8.44 \cdot 10^9 & \nu_{xz} = 0.33 & G_{xz} = 4.37 \cdot 10^9 \\ E_z = 8.44 \cdot 10^9 & \nu_{yz} = 0.45 & G_{yz} = 2.18 \cdot 10^9 \end{array}$$

Se evaluarán tres modelos distintos: una capa con fibras a lo largo del eje x con espesor $1.0h$, tres capas con orientación $/0/90/0/$ grados con respecto al eje x con espesores $/0.40h/0.2h/0.4h/$ y cinco capas con orientación $/0/90/0/90/0$ grados y un espesor de $0.2h$ para todas las capas. Veremos como las diferencias entre los desplazamientos dentro del plano a lo largo de los ejes x y y disminuyen con un número creciente de capas. Se grafican resultados similares en el caso del agujero elíptico, es decir, gráficos a lo largo de los ejes x e y y a lo largo de la dirección del espesor en un punto en los ejes x e y .

5.3.1 Resultados y análisis de error de la placa ortótropa

Los resultados del cálculo ortótropo BEM muestran grandes diferencias en los desplazamientos al ser trazados paralelos y perpendiculares a la dirección de la fibra. Esto se puede ver claramente desde la figura (5.33) a la (5.34). Aquí los desplazamientos perpendiculares a las fibras son de una magnitud mucho mayor que cuando son paralelos a las fibras. Las diferencias de desplazamientos dentro del plano a lo largo de los ejes x e y disminuye al aumentar el número de capas. Esto se puede ver al comparar la figura (5.33) con la (5.34), la figura (5.41) con la (5.42), y la (5.49) con la (5.50). Si se hiciese un cálculo con un mayor número de capas, los desplazamientos serían iguales en las dos direcciones. También sería lo mismo calcular una capa con un material isótropo transversal.

Al evaluar los desplazamientos, u_z , a lo largo de los ejes x e y , encontramos que los resultados vuelven a mostrar efectos tridimensionales. Para el cálculo de una sola capa podemos ver efectos similares al agujero isótropo elíptico. Esto se debe a que el agujero cilíndrico tiende hacia una forma elíptica cuando se somete a la presión interna. Al comparar la figura (5.35) con la (5.22-5.24), y la figura (5.36) con la (5.19-5.21), podemos concluir que los resultados son parecidos. Especialmente observamos que los desplazamientos en una dirección son positivos y en la dirección perpendicular son negativos. También vemos que los desplazamientos fuera del plano son de magnitud parecida a lo largo de los ejes x e y .

En el cálculo de las tres capas los desplazamientos, figuras (5.43) y (5.44), son ambos positivos a lo largo de los ejes x e y . En este caso la solución es menos ortótropa y se asemeja a una solución isótropa transversal. Por lo tanto, los resultados muestran una mayor similitud con el agujero cilíndrico que con el elíptico al utilizar el material isótropo. Puesto que solamente utilizamos tres láminas las diferencias en los resultados a lo largo de los ejes x e y son todavía significativos. También la rigidez en la "dirección cero" es mucho mayor que en la dirección perpendicular. Si utilizamos ahora cinco capas, nos damos cuenta de que en las figuras (5.51) y (5.52) los resultados tienen la misma magnitud en ambas direcciones, ambas son también positivas y son similares a las figuras de la placa isótropa con un agujero circular que la atraviesa.

Los efectos expuestos arriba también pueden ser proyectados al trazar el desplazamiento en diferentes direcciones en función de la posición a través del espesor. Se han hecho cálculos para dos posiciones diferentes en el plano $x-y$, $x = 1.4h, y = 0.0h$, y $x = 0h, y = 1.4h$.

En la primera posición observamos que el desplazamiento u_x de tres casos diferentes tienen valores crecientes al aumentar el número de capas (figuras (5.37), (5.45) y (5.53)). Esto se debe a la pérdida de rigidez en la dirección x cuando aumentamos el número de capas perpendiculares a la dirección x . El efecto contrario se consigue naturalmente en la dirección y , como podemos ver en las figuras (5.39), (5.46) y (5.54). En este caso los gráficos están hechos en la dirección vertical a través del espesor con las coordenadas $x = 0$ y $y = 1.4h$. Aquí vemos como los desplazamientos disminuyen debido al efecto de rigidización que las capas con orientación de 90 grados tienen en el conjunto.

Las figuras (5.57), (5.58), (5.59) muestran la deformación de la placa a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. La línea sólida representa el material sin deformar y la línea punteada el material deformado (observar que lo que la línea sólida hace no es el borde del agujero sino un círculo imaginario dentro del material). En la figura (5.57) vemos el fuerte efecto ortótropo que el material tiene en la placa. El desplazamiento en la dirección y es considerablemente mayor que el desplazamiento en la dirección x . Sin embargo, en la figura (5.58) donde la placa consta de 3 capas materiales agrupadas a /0/90/0/, vemos que este efecto es menor y finalmente en la figura (5.59), la placa con cinco capas materiales agrupadas a /0/90/0/90/0/, donde casi no hay diferencia entre las dos direcciones.

El desplazamiento normal u_z está trazado frente a la posición angular (θ) en la circunferencia. Los gráficos corresponden la misma carga y geometría que en el último párrafo. En cada uno de los tres gráficos (5.60, 5.61 y 5.62) hay trazadas tres curvas diferentes, una para la distancia vertical $z = 0.5h$, una para $z = 0.75h$ y la última para $z = 0.99h$. Los resultados para el caso $z = 0.5h$ son cero debido a la simetría. Al comparar las tres figuras es fácil ver el efecto rigidizador que el segundo y tercer conjunto tiene en la placa. El conjunto /0/90/0/90/0/, por ejemplo, es mucho más rígido que el conjunto con sólo una capa material.

En todas las figuras $E = 10^9$ es el factor de escala para el eje vertical.

Una sola capa

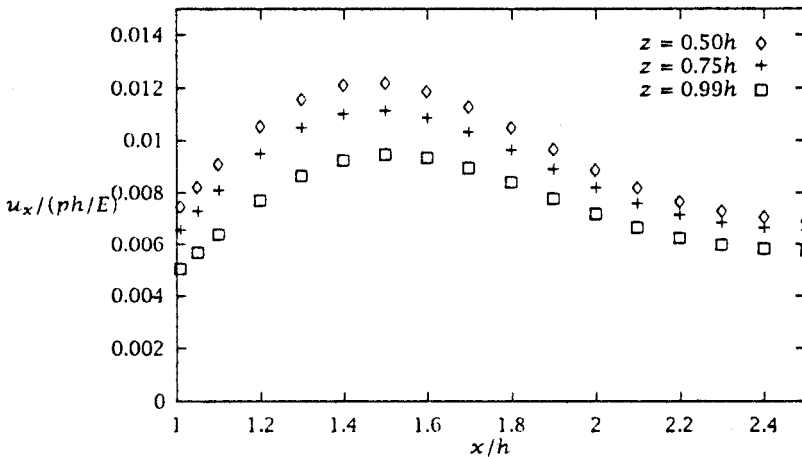


FIGURA 5.33: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa.

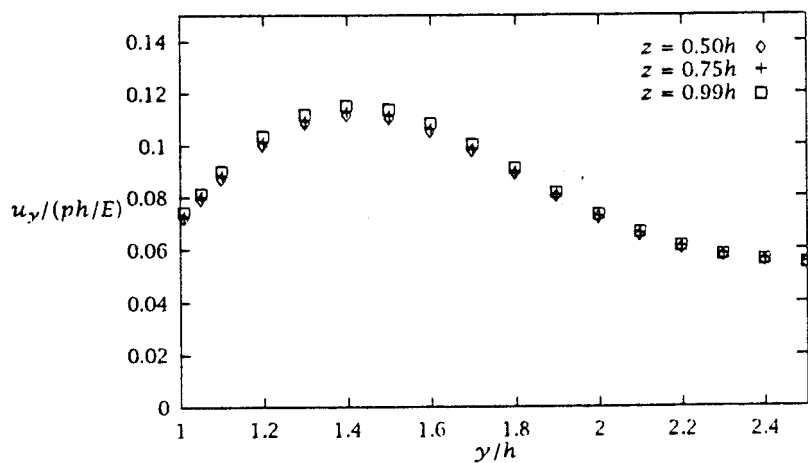


FIGURA 5.34: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa.

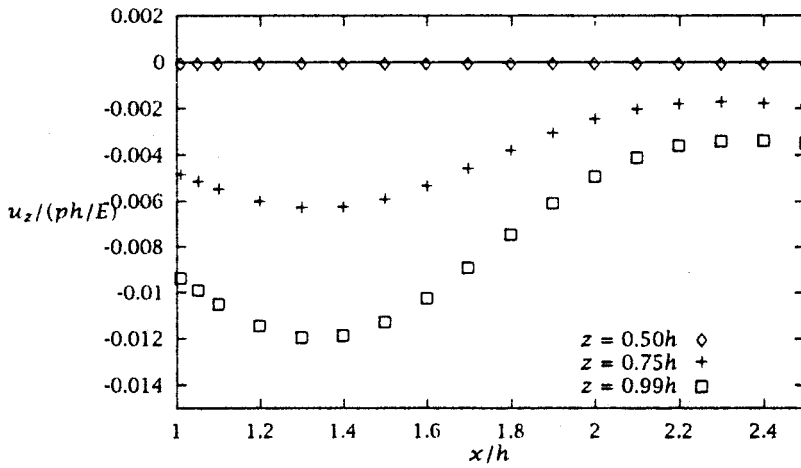


FIGURA 5.35: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa.

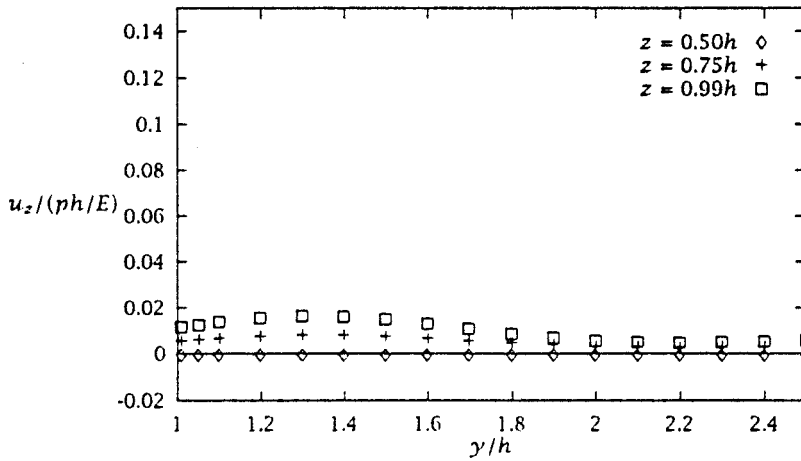


FIGURA 5.36: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Una capa.

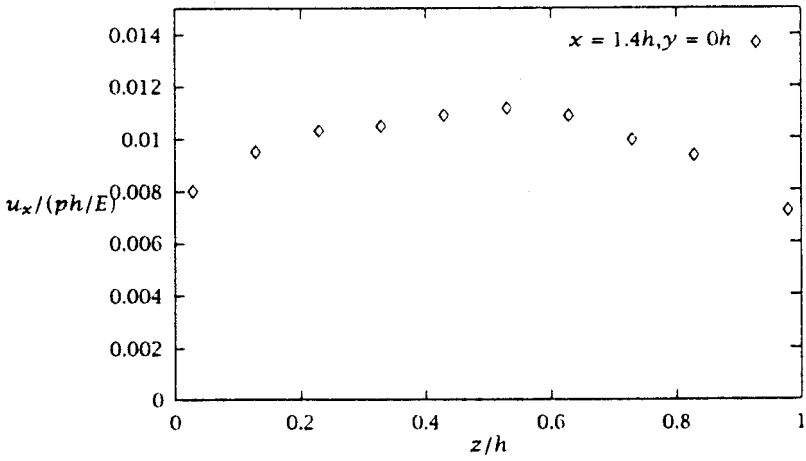


FIGURA 5.37: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 1.4h, y = 0$. Una capa.

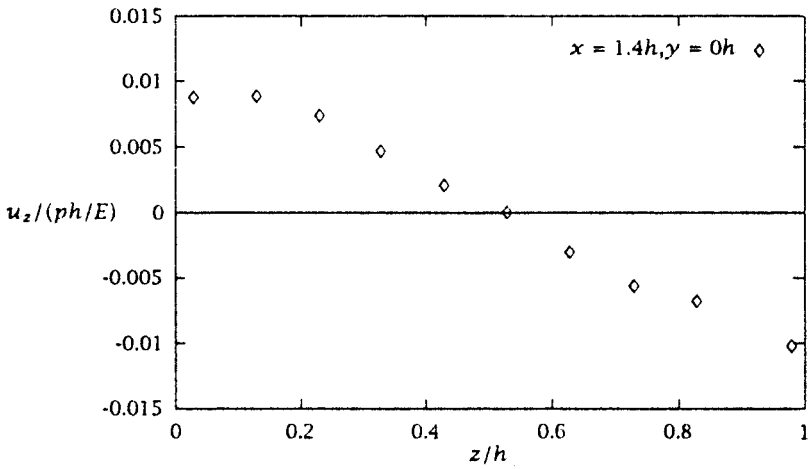


FIGURA 5.38: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Una capa.

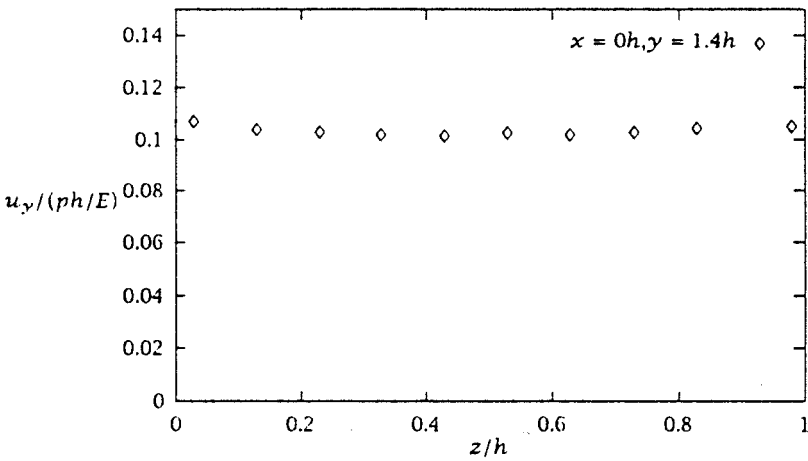


FIGURA 5.39: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$. Una capa.

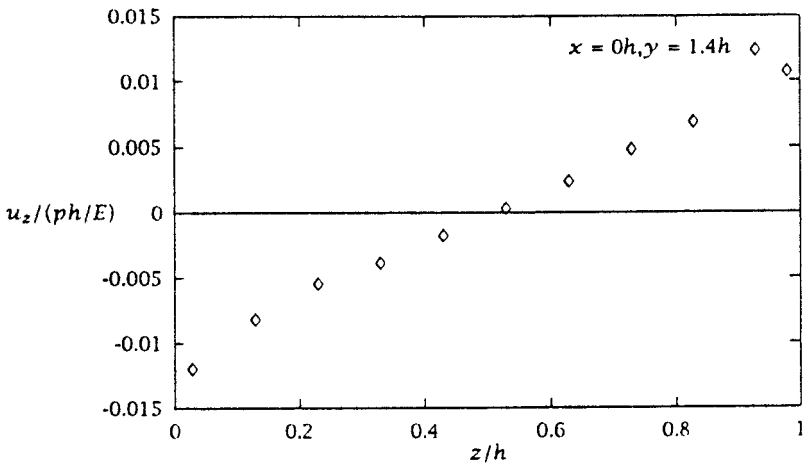


FIGURA 5.40: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Una capa.

Tres capas

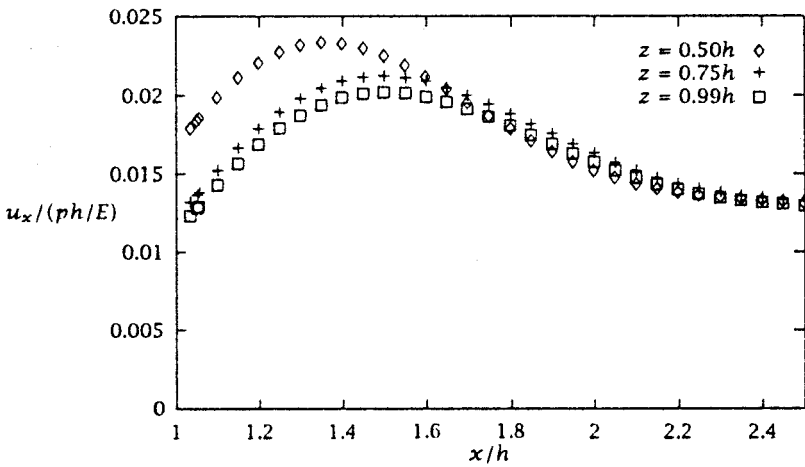


FIGURA 5.41: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas.

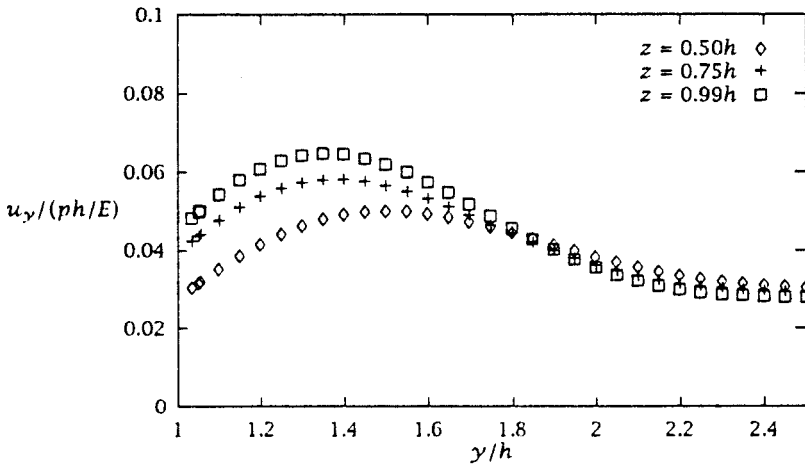


FIGURA 5.42: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas.

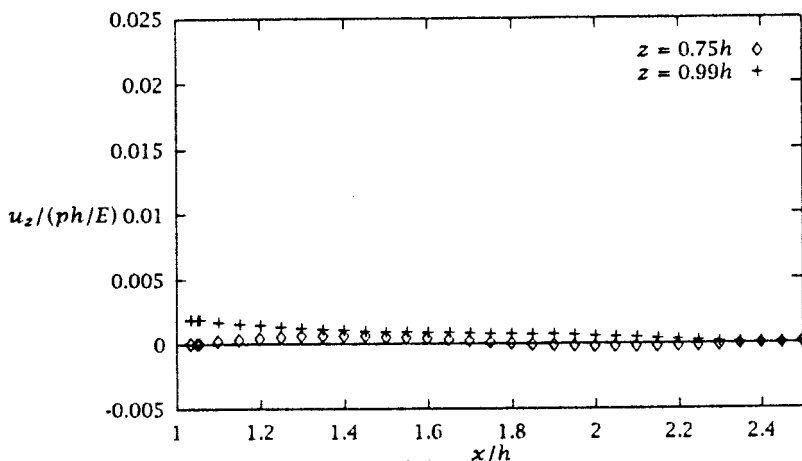


FIGURA 5.43: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas.

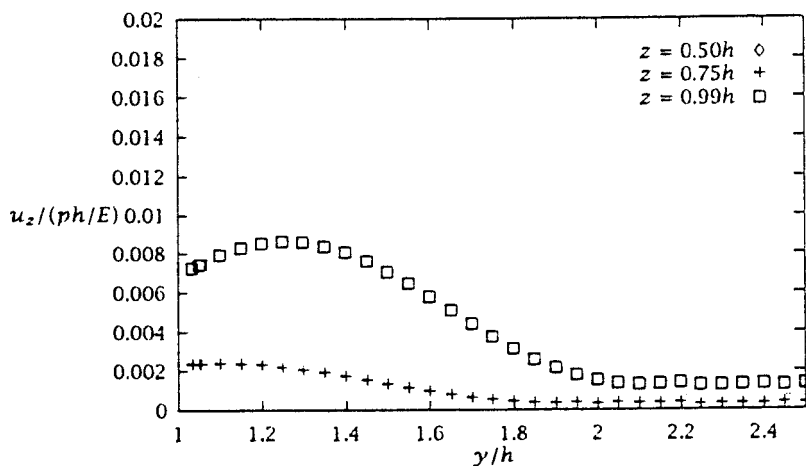


FIGURA 5.44: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Tres capas.

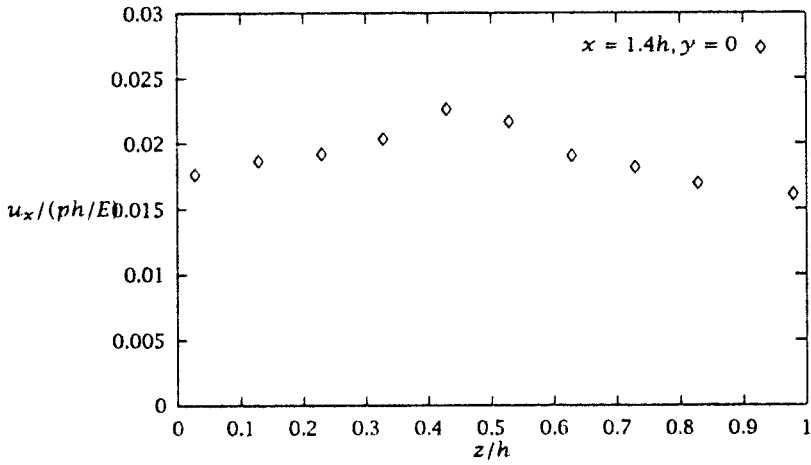


FIGURA 5.45: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Tres capas.

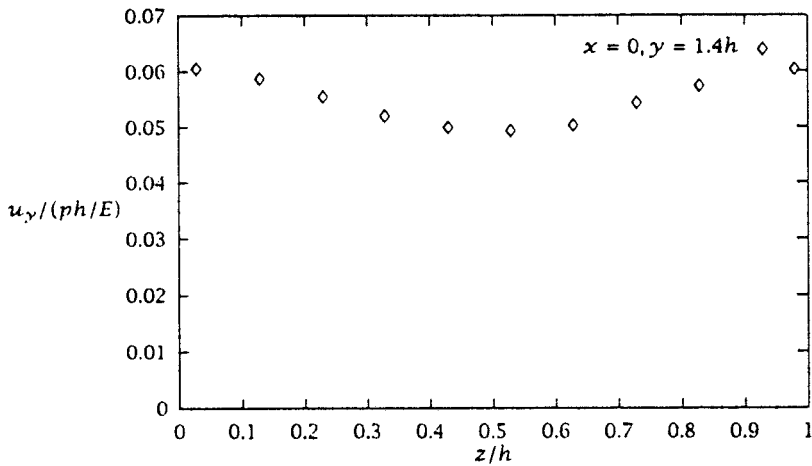


FIGURA 5.46: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4h$. Tres capas.

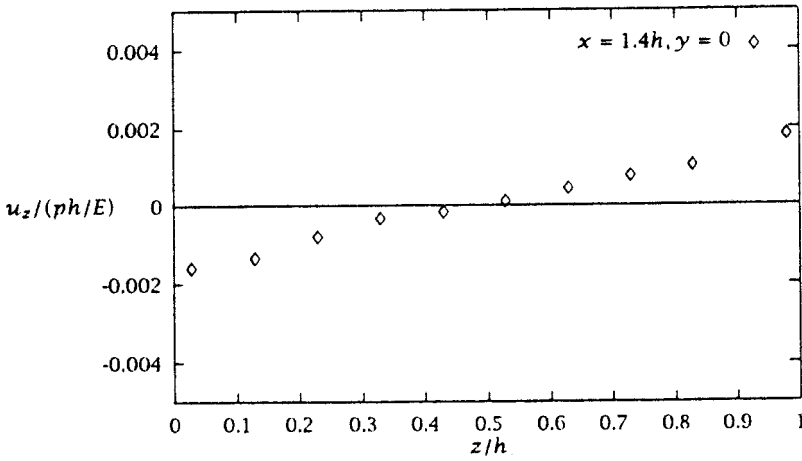


FIGURA 5.47: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 1.4, y = 0$.

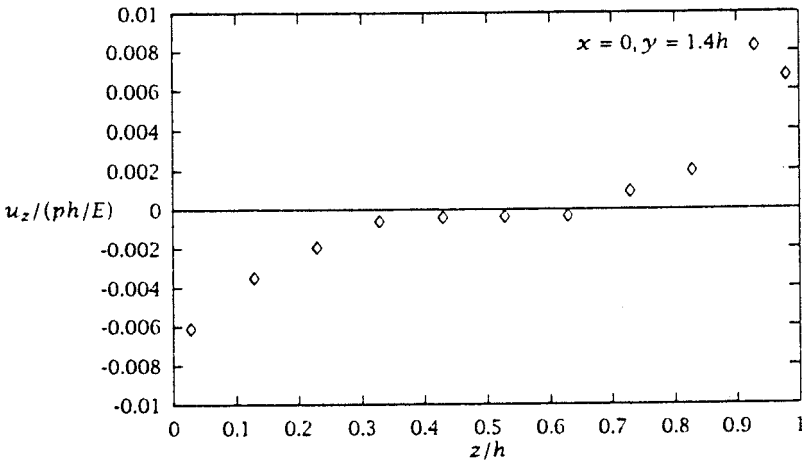


FIGURA 5.48: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a través del espesor en la coordenada $x = 0, y = 1.4$.

Cinco capas

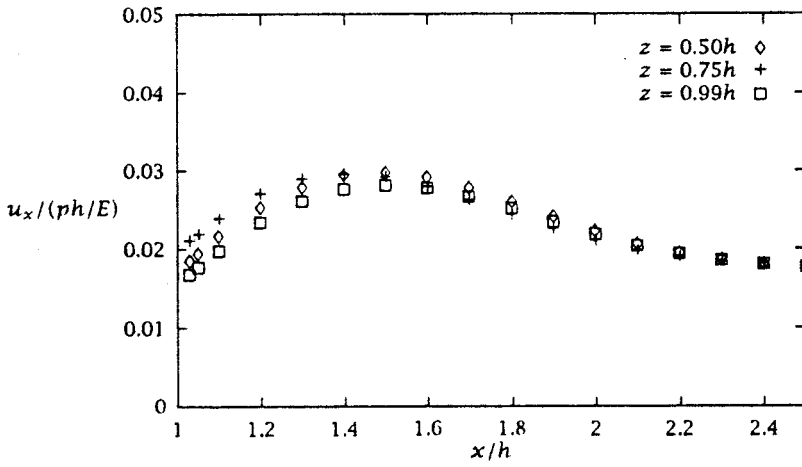


FIGURA 5.49: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas.

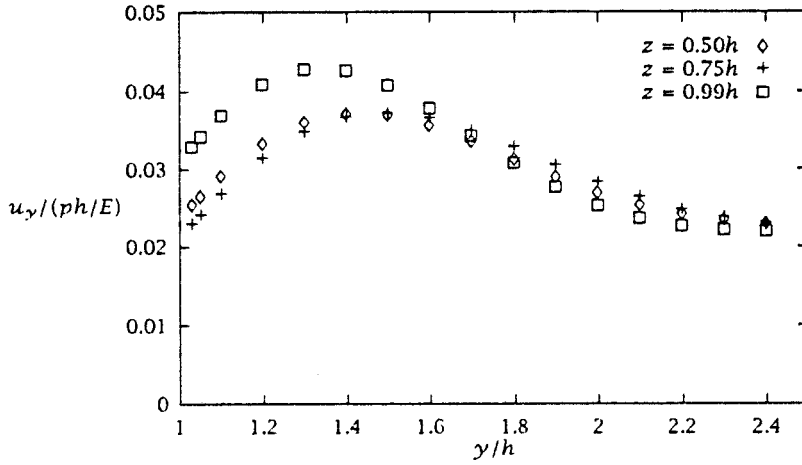


FIGURA 5.50: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas.

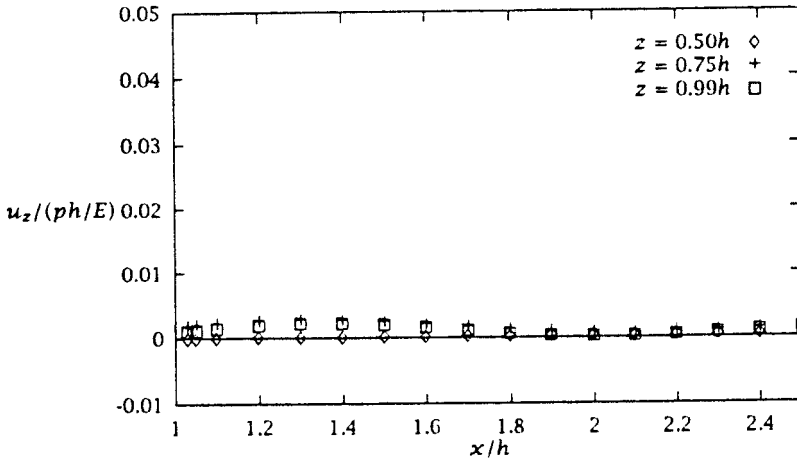


FIGURA 5.51: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) x . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas.

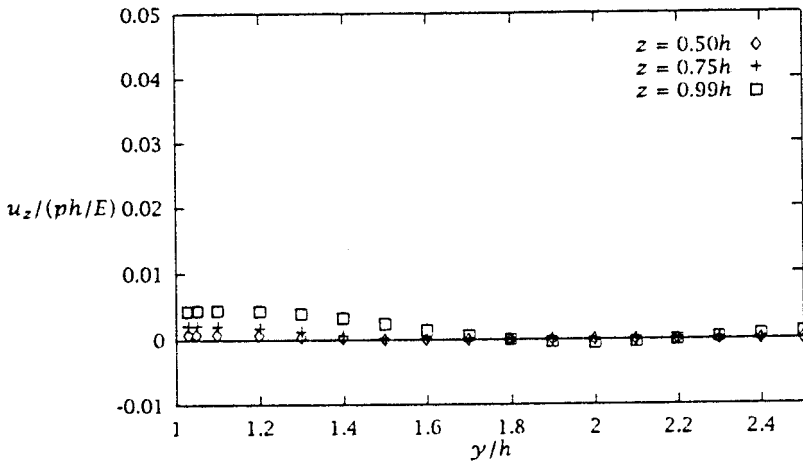


FIGURA 5.52: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) y . Resultados obtenidos para varias distancias de la superficie inferior. Cinco capas.

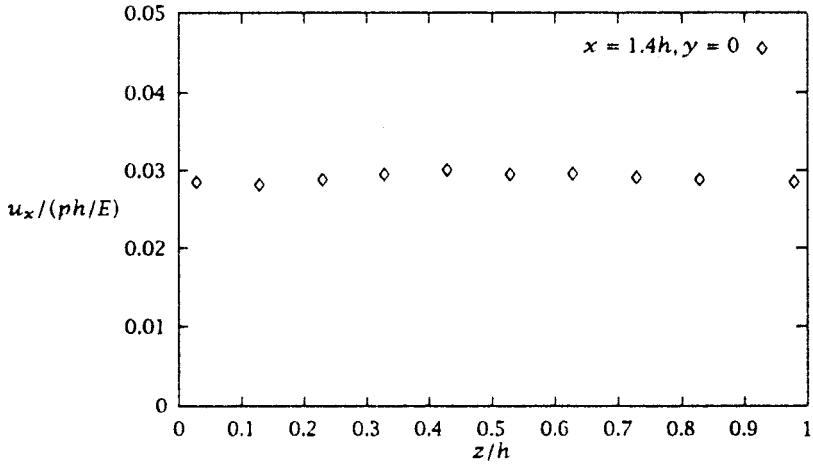


FIGURA 5.53: Desplazamientos normalizados u_x frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Cinco capas.

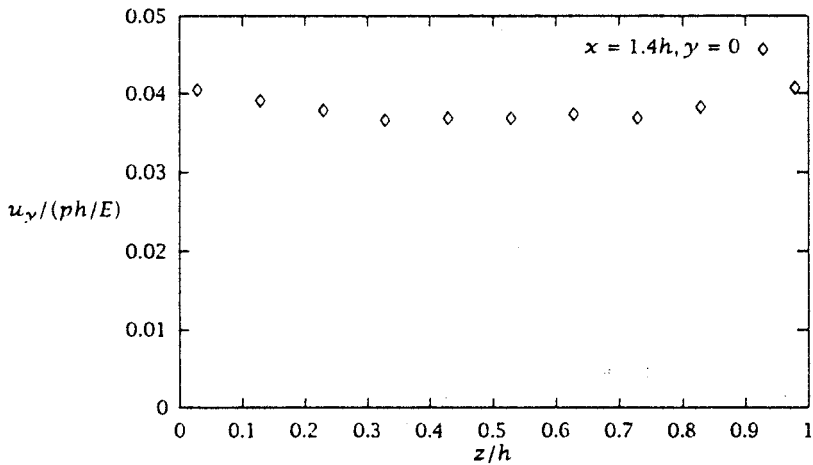


FIGURA 5.54: Desplazamientos normalizados u_y frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Cinco capas.

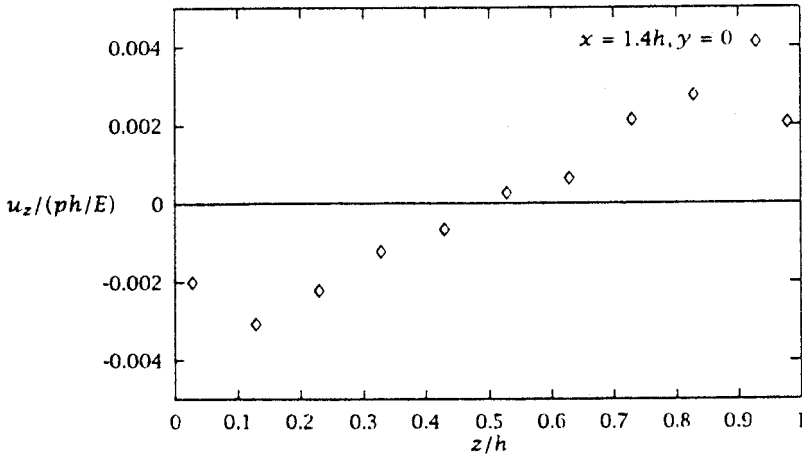


FIGURA 5.55: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 1.4h, y = 0$. Cinco capas.

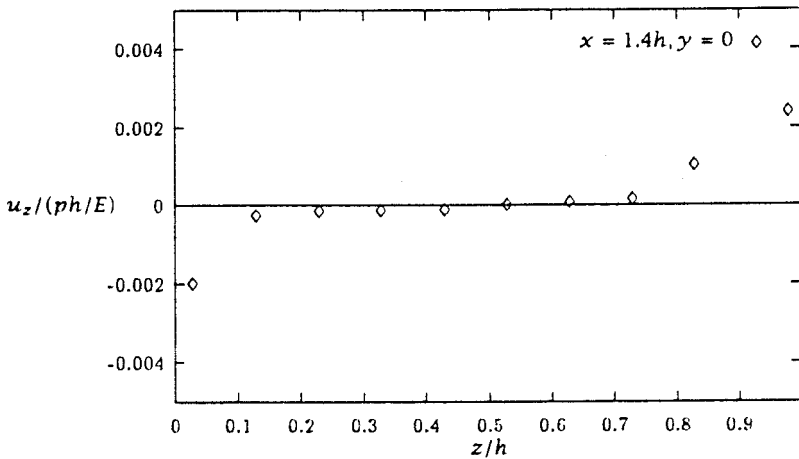


FIGURA 5.56: Desplazamientos normalizados u_z frente a la distancia (normalizada) z . Resultados obtenidos a lo largo del espesor con las coordenadas $x = 0h, y = 1.4$. Cinco capas.

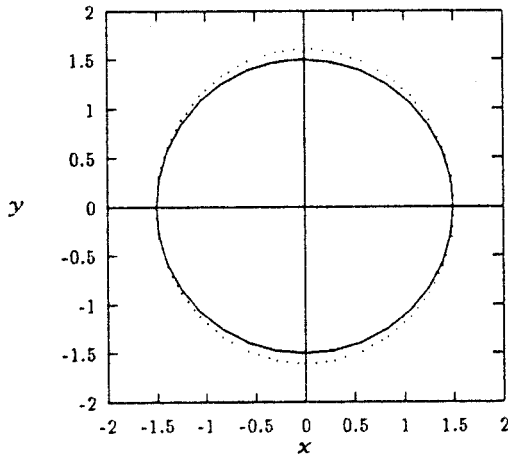


FIGURA 5.57: Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para una capa con orientación $/0/$. $z = 0.5h$

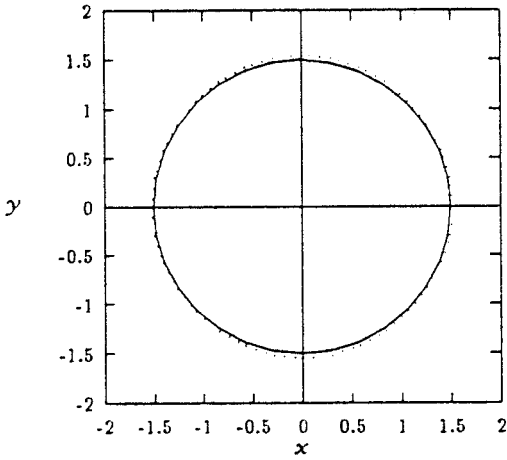


FIGURA 5.58: Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para tres capas con orientaciones $/0/90/0/$. $z = 0.5h$

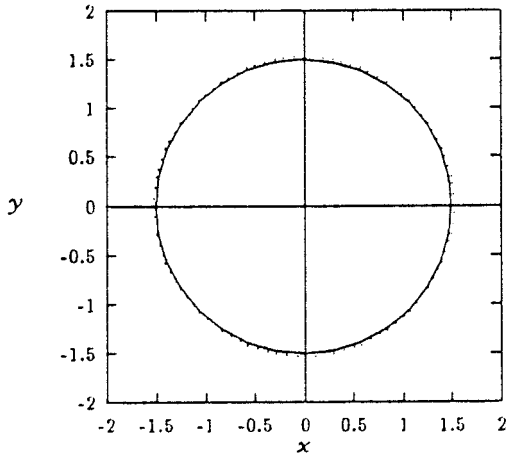


FIGURA 5.59: Deformación a una distancia $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para cinco capas con orientaciones $/0/90/0/90/0/$. $z = 0.5h$

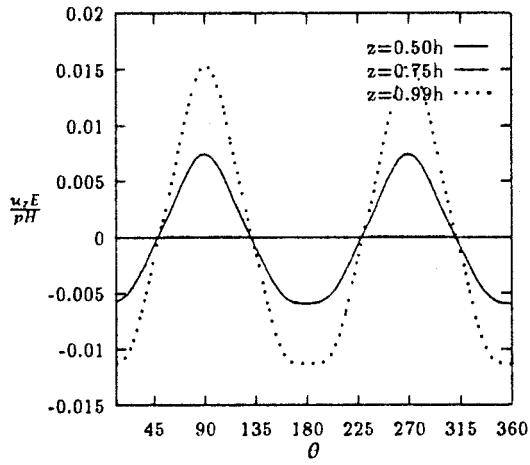


FIGURA 5.60: Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilindrico. Resultados obtenidos para una capa con orientación $/0/$. $z = 0.5h$

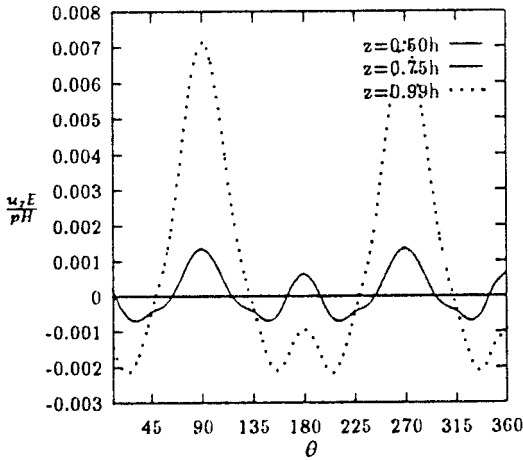


FIGURA 5.61: Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para tres capas con orientaciones $/0/90/0/$. $z = 0.5h$

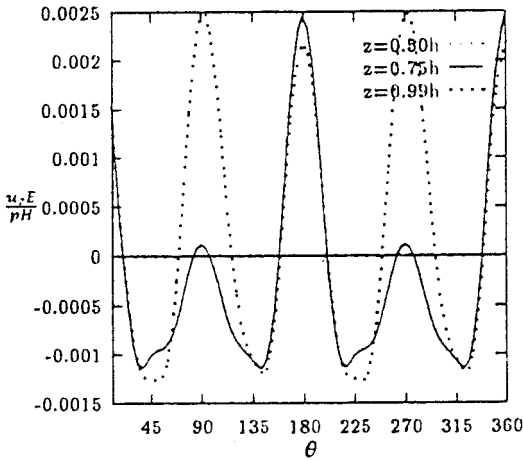


FIGURA 5.62: Desplazamientos normalizados u_z frente a la posición angular θ . La distancia radial es $0.5h$ del borde del agujero cilíndrico. Resultados obtenidos para cinco capas con orientaciones $/0/90/0/90/0/$. $z = 0.5h$

5.4 Placa circular con bordes exteriores empotrados

En esta sección se hará una comparación entre la solución de la teoría de placa delgada para una placa circular con los bordes externos empotrados y varias soluciones numéricas del mismo problema. La figura (5.63) muestra la geometría y carga del problema. En la figura la carga está en el centro de la placa, pero también se han realizado cálculos donde la carga es excéntrica.

En la primera parte de esta sección se presenta una comparación entre la solución teórica de placa delgada, solución obtenida al utilizar la solución isótropa 3D BEM y una solución "quasi-isótropa" 3D BEM. Se utilizan tres mallas diferentes para discretizar el contorno y se estudian las diferencias en las soluciones obtenidas.

La segunda parte de esta sección estudia la misma geometría para un material ortótropo. En este caso sólo se comparan los resultados obtenidas para diferentes discretizaciones.

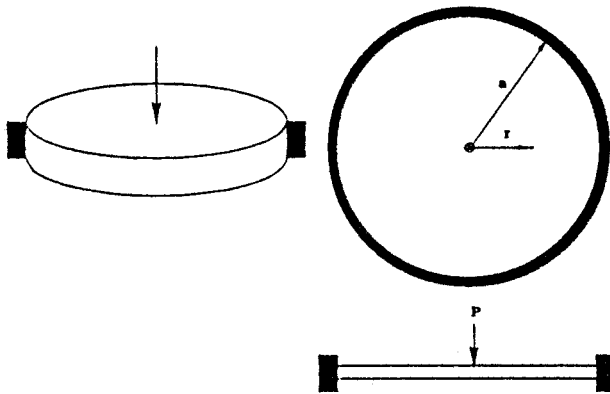


FIGURA 5.63: Geometría y carga en una placa circular empotrada. La línea gruesa simboliza las condiciones de contorno (todos los desplazamientos nulos).

5.4.1 Soluciones isótropas teóricas

Se utiliza la solución de la teoría de placa delgada como referencia para comparar los resultados numéricos del BEM con estos resultados teóricos. Se han estudiado tres casos diferentes: placa empotrada con una fuerza concentrada actuando en el centro de la placa con resultados obtenidos directamente bajo la carga, un segundo caso con la fuerza concentrada que actúa en el centro, y resultados obtenidos para una distancia de $2h$ del centro, y el último caso con la carga concentrada actuando excéntricamente a una distancia de $2h$ del centro y con los resultados para puntos posicionados verticalmente bajo la carga. Las figuras (5.64), (5.65) y (5.66) muestran los diferentes casos. Los ejes de las gráficas son el radio r para la coordenada horizontal y la distancia z a la superficie inferior para la coordenada vertical.

Las siguientes constantes geométricas, de carga y material se han utilizado para todas las soluciones de placa delgada:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$P = 10$$

$$a = 10$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 1$$

La figura(5.64) muestra la geometría de una placa circular con elementos de contorno laterales

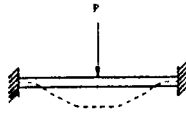


FIGURA 5.64: Placa circular empotrada con una carga concentrada en el centro.

sometida a una carga concentrada en el centro. El desplazamiento vertical bajo la carga, como se puede ver en Timoshenko ([47], ecuación 92, página 69), es:

$$\delta = \frac{Pa^2}{16\pi D}, \quad (5.1)$$

Para esta geometría, la ecuación anterior conduce a:

$$\delta = 217.24 \quad (5.2)$$

Del mismo modo, para la misma geometría y carga pero con la monotización del desplazamiento a una distancia r del centro, de Timoshenko ([47], ecuación 92, página 69), se obtiene:

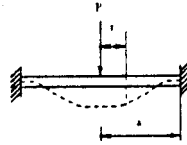


FIGURA 5.65: Placa circular empotrada con una carga concentrada en el centro. El desplazamiento está en función de la posición radial r , a es el radio de la placa.

$$\delta = \frac{Pr^2}{8\pi D} \ln \frac{r}{a} + \frac{Pa^2}{16\pi D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right); \quad (5.3)$$

teniendo en cuenta la fuerza cortante, la solución se puede escribir como:

$$\delta_{shear} = \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2}{3k^2(1-\nu)} \frac{h^2}{a^2} \right) \ln \frac{r}{a} + \frac{Pa^2}{16\pi D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (5.4)$$

con la geometría que se indica en la figura (5.65) y con los valores insertados nos conduce a:

$$\delta = 180.59 \quad (5.5)$$

y

$$\delta_{shear} = 189.59 \quad (5.6)$$

respectivamente.

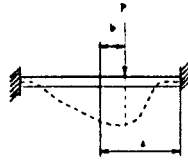


FIGURA 5.66: Placa circular empotrada con una carga concentrada situada asimétricamente. El desplazamiento se tiene para una distancia b de la carga.

Según Timoshenko ([47], ecuación 195, página 290), el desplazamiento bajo la carga concentrada cuando se aplica la carga asimétricamente, se puede expresar como:

$$\delta = \frac{P}{16\pi D} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} \quad (5.7)$$

que proporciona

$$\delta = 200.2. \quad (5.8)$$

Se utilizarán los valores teóricos para escalar los resultados obtenidos con las diferentes soluciones BEM.

5.4.2 Modelado de la malla

Se han utilizado tres mallas de elementos de contorno diferentes para comparar los resultados de estas tres discretizaciones. En la figura (5.67 a, b y c) vemos las diferentes mallas. Los elementos son constantes con un nodo en el centro de cada elemento.

La primera malla (5.67 a) consta de una red de elementos colocados a una distancia radial a y con $z = 0$ y $z = 1$. Las condiciones de contorno impuestas en todos los elementos son $u_x = u_y = u_z = 0$. Las condiciones de contorno en esta malla no son idénticas a las dos siguientes en aquella no hemos restringido el movimiento en la superficie cilíndrica vertical a la distancia radial r . Sin embargo, hay algunas ventajas que modelan el problema de esta forma: se pueden utilizar menos elementos, el número de veces que la solución fundamental necesita ser calculada, es mucho menor que el de las siguientes mallas. Esto se debe a que si una capa de elementos coincide con el plano $x-y$, entonces sólo es necesario calcular la solución fundamental una vez, mientras que si una capa del elemento no coincide con el plano, la solución fundamental se tiene que calcular tantas veces como el número de subcapas.

Las mallas segunda y tercera discretizan el contorno externo a la distancia radial r . La diferencia entre ellas está en el número de capas de elementos y el número de elementos en cada capa. La malla (5.67 b) consta de 3 capas, cada una con dieciséis elementos y un elemento horizontal donde se aplica la carga. La malla (5.67 c) también tiene un elemento horizontal para la carga pero la malla tiene cinco capas de elementos con treinta y dos elementos en cada una.

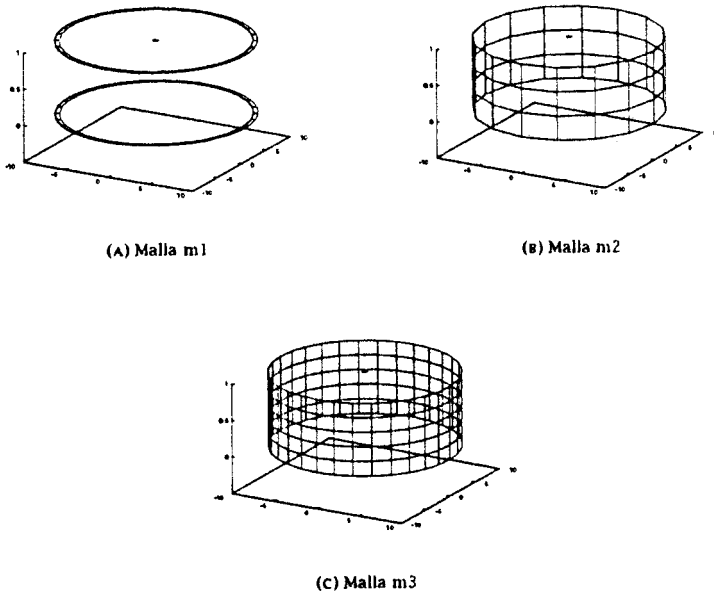
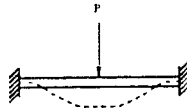


FIGURA 5.67: Mallas de elementos de contorno. Todos los elementos son constantes y tienen un punto de Gauss en el centro de gravedad. La malla m1 (5.67 a) está compuesta de $16+16+1$ elementos. La malla m2 (5.67 b) de $32+16+1$ elementos. La malla (5.67 c) usa de $64+32+1$ elementos.



Los primeros cálculos llevados a cabo con un material "quasi-isótropo" corresponden al caso de la carga en el centro de la placa circular donde se evalúan los resultados para los puntos situados verticalmente bajo la carga. En este caso se traza sólo un desplazamiento, u_z , puesto que los otros dos desplazamientos son cero debido a la simetría. El desplazamiento se normaliza al utilizar la solución dada por la teoría de la placa delgada (5.4.1). La coordenada z se ha escalado con el espesor h de la placa. En la figura hay cinco curvas representadas. Una es la solución de la teoría de placa delgada que naturalmente es constante en la dirección z ya que la teoría de la placa delgada no tiene en cuenta la variación en la dirección del espesor. La segunda curva representa la solución obtenida al utilizar la solución isótropa 3D(4). Las tres últimas curvas representan la solución obtenida con la solución isótropa 3-D. Las constantes materiales se han elegido para que se parezca a un material isótropo. Los valores son idénticos a los utilizados en la sección (5.1.2) en la página 50. Las diferencias entre estas tres soluciones son las mallas que se utilizan. La primera de las tres soluciones "quasi-isótropas" se obtiene al utilizar la malla (5.67 a) denotándose como m1 en la figura (5.68). La segunda, que se obtuvo con la malla (5.67 b), se denota como m2 en la figura. Finalmente, la malla (5.67 c), se indica como m3.

En la figura (5.68) vemos, en las soluciones isótropa y quasi-isótropa, las tres naturalezas dimensionales de la solución. Las soluciones obtenidas para la malla m2 y m3 son muy similares, lo cual es esperable porque la única diferencia entre ellas es el número de elementos utilizados. Los resultados de los cálculos para esas mallas están próximos a ambas soluciones, la del isótropo 3D y la de la teoría de placa delgada. La razón por la que no coinciden con mayor exactitud con los resultados isótropos es la misma que discutimos anteriormente en la sección (5.1.2) donde se hizo una comparación parecida para un agujero circular sometido a una presión interna uniforme.

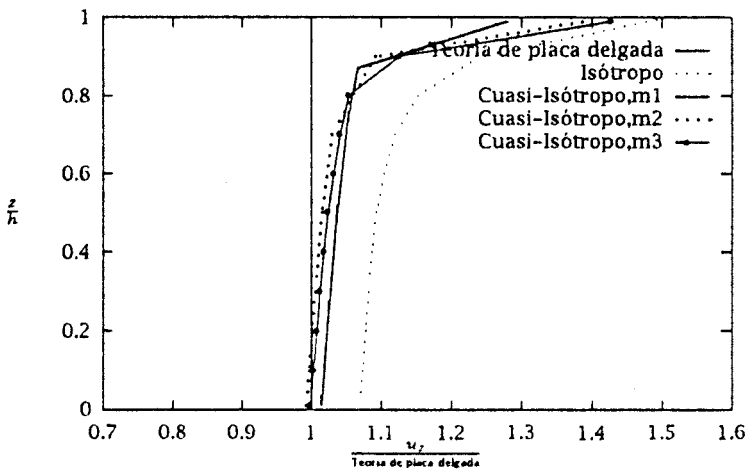


FIGURA 5.68: Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 0, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas.

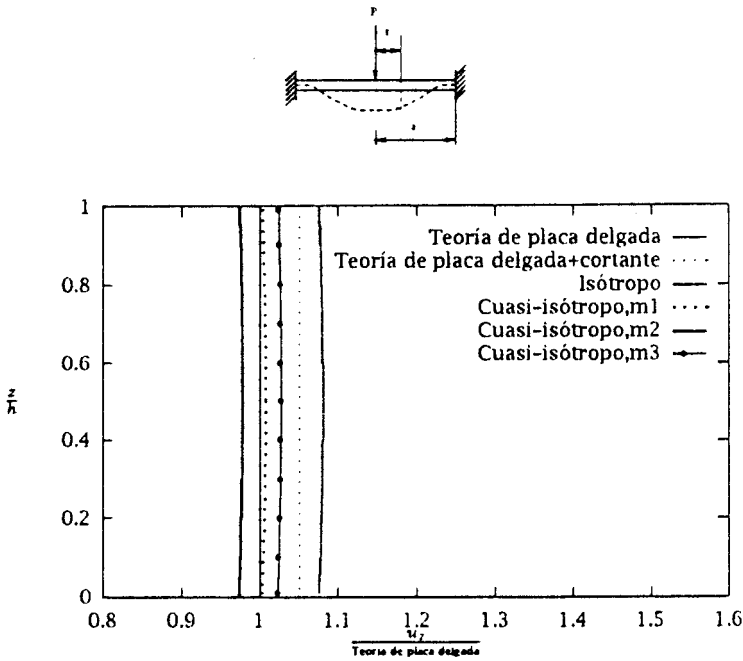


FIGURA 5.69: Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de un punto en $x = 2, y = 0$. La carga se aplicó en el centro de la placa. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas.

Al comparar los resultados de los desplazamientos u_z , se observa que los resultados teóricos y los resultados de los diferentes cálculos BEM coinciden muy bien. Está claro que el efecto del esfuerzo cortante tiene importancia en una placa gruesa. La figura (5.69) muestra los resultados diferentes del desplazamiento fuera del plano u_z . La similitud entre la solución isotrópica y la teoría de placa delgada con efectos de esfuerzo cortante incluido es obvia. La solución "quasi-isótropa" también muestra valores crecientes cuando el número de elementos aumenta. En todo cálculo se puede observar que los valores son un poco más bajos que en la solución isotrópica 3D. Este efecto aparece debido a una pérdida de exactitud en los cálculos numéricos y, por supuesto, debido a la aproximación de las constantes materiales. Ver de nuevo la sección (5.1.2) en la página 50.

En la figura (5.70) la coordenada normalizada z esta trazada frente el desplazamiento normalizado en dirección radial, u_x . En esta figura vemos la buena concordancia entre la solución isótropa 3D y las tres soluciones diferentes "quasi-isótropa" 3D. La concordancia es especialmente buena al comparar los resultados isótropos y quasi-isótropos que utilizan la malla m3. Por el contrario, se puede observar que la solución quasi-ortótropa calculada para la malla m1 es muy poco asimétrica, es decir, la solución limite no está completamente en equilibrio. También hay una diferencia al comparar las soluciones para las mallas m2 y m3. Esto se debe al número de elementos utilizados en los dos modelos. La diferencia de los resultados entre las mallas m2 y m3 se debe al uso de elementos constantes que sólo utiliza un punto Gauss en cada uno de ellos.

Los resultados aumentan cuando utilizamos la malla de elemento m3.

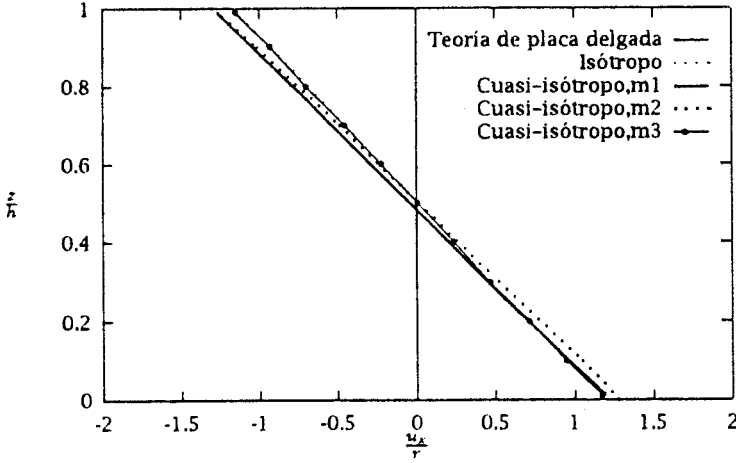
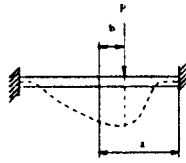


FIGURA 5.70: Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de un punto en $x = 2, y = 0$. La carga se aplicó en el centro de la placa. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_x está normalizado con la solución teórica de placas delgadas.



Cuando se aplica la carga en un punto excéntrico y los puntos internos evaluados están situados bajo la carga, el desplazamiento vertical que resulta, u_z , tiene una forma parecida al cálculo simétrico de la figura (5.68). En la figura (5.68), se puede ver que los resultados del cálculo del elemento de contorno quasi-isótropo concuerdan unos con otros. Está claro que la exactitud del cálculo es buena, ya que todas las discretizaciones proporcionan resultados semejantes.

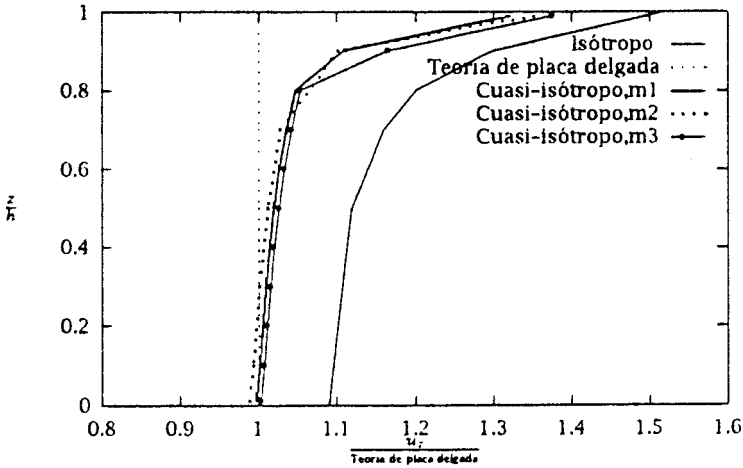


FIGURA 5.71: Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 2, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_z está normalizado con la solución teórica de placas delgadas.

El desplazamiento u_x trazado para los puntos internos directamente bajo la carga está representado en la figura (5.72). En este caso, ya que la carga es asimétrica, tendremos resultados que son similares a los resultados de la figura (5.70). Los valores no pueden ser iguales a cero, puesto que lo son cuando los puntos internos y la carga están en el centro, porque cuando se aplica la carga excéntricamente, aparece un momento de flexión asimétrico.

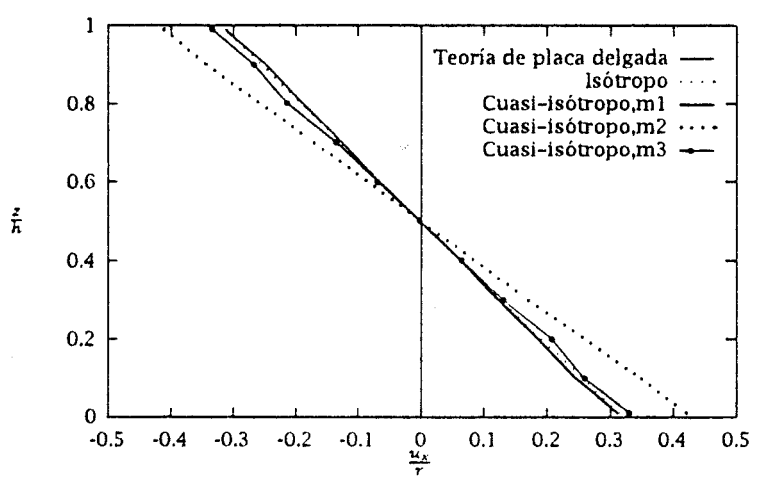


FIGURA 5.72: Resultados de los cálculos BEM para puntos situados en una línea vertical abajo de la carga en $x = 2, y = 0$. Cálculos realizados para las tres mallas de los elementos de contorno. El desplazamiento u_x está normalizado con la solución teórica de placas delgadas.

5.4.3 Soluciones ortótropas

El parecido entre la solución isótropa 3D y la quasi-isótropa se demostró en el apartado anterior. Aquí presentaremos los resultados para una solución puramente ortótropa. La misma malla de elementos, como en el apartado anterior, se utilizó para obtener la solución ortótropa 3D. Las constantes materiales que se utilizaron en los cálculos son idénticas a las utilizadas para la placa con presión interna (ver sección (5.3) en la página 69).

Se hicieron cálculos para los mismos casos de carga que para las soluciones isótropas. Sin embargo, para un material ortótropo tendremos resultados muy diferentes dependiendo del ángulo de rotación observando diferentes puntos en la misma dirección radial (ver figura 5.73)). Por supuesto, este no es el caso para un material isótropo puesto que las constantes materiales son iguales en todas las direcciones. Para demostrar los efectos ortótropos es necesario representar al menos dos evaluaciones (excepto cuando la carga y los puntos internos están en el centro). En cada uno de esos casos se hicieron dos cálculos diferentes, uno en la dirección de la "fibra", es decir, $\varphi = 0$ y otro perpendicular a la dirección de la fibra, es decir, $\varphi = 90$.

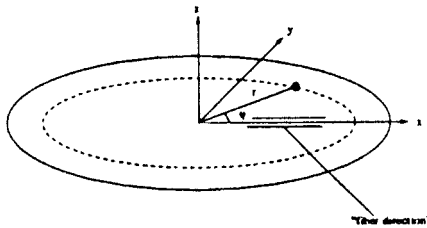
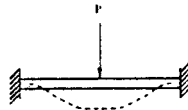


FIGURA 5.73: Definición de la dirección principal de un material ortótropo. La dirección está indicada con dos líneas paralelas en la figura.

En el caso en el que la carga se aplica en el centro y donde los resultados se obtienen para puntos internos en una línea vertical bajo la carga, obtenemos valores para las tres mallas como en la figura (5.74). Aquí el desplazamiento u_z , que se normaliza utilizando el espesor de la placa, está trazado frente a las coordenadas normales z a lo largo de la dirección del espesor. La figura muestra un efecto similar 3D como en el caso del isótropo. La diferencia entre los resultados que corresponden a la malla m2 y m3 se debe al número de elementos utilizados en el modelado. Por la figura podemos ver que los resultados de la malla m1 tienen una forma similar a las otras dos curvas pero los valores son un poco mayores. La razón de esto es que las condiciones de contorno no son idénticas. En la malla m1 no hay limitación cualquiera que sea los desplazamientos de los puntos en la distancia radial $r = 10$. Por otra parte, las mallas m2 y m3 están muy limitadas por cualquier desplazamiento en cualquier punto a la distancia radial $r = 10$. Las ventajas al modelar solamente dos anillos en la superficie superior e inferior son, sin embargo, grandes. El tiempo CPU que se necesita para llevar a cabo todo el cálculo es mucho menor para la malla m1 que para la malla m2 o la m3.



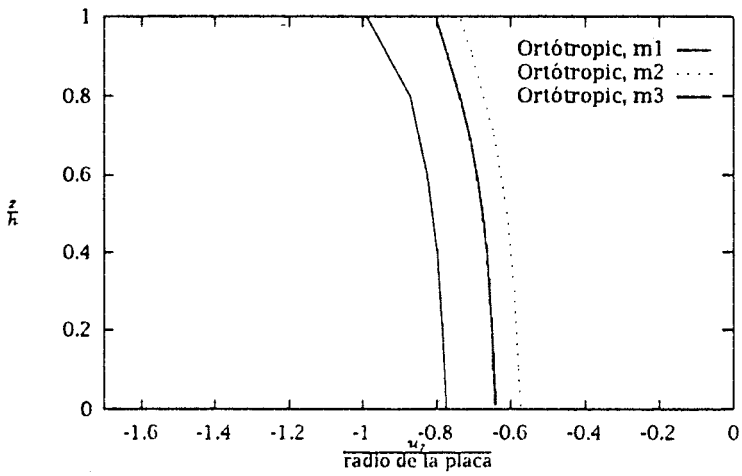
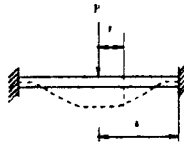


FIGURA 5.74: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 0$. Coordenadas normalizadas frente al desplazamiento (normalizado) u_z . Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.



En los siguientes gráficos se obtienen los resultados para la carga en el centro de la placa y los puntos internos, a una distancia radial de $r = 2h$ con $\varphi = 0$ y $\varphi = 90$, respectivamente. La razón por la que se hacen dos cálculos diferentes a la misma distancia pero perpendicular uno con respecto al otro es demostrar el efecto que el material ortótropo tiene en las soluciones BEM. El desplazamiento u_z en la figura (5.75) tiene valores absolutos mayores al compararlo con los mismos valores de la figura (5.76). Esto es correcto porque los valores del desplazamiento vertical, u_z , deben ser mayores en la "dirección de la fibra" que perpendicular a ésta.

Las figuras (5.77) y (5.78) muestran los resultados para los desplazamientos normales u_x y u_y respectivamente. El desplazamiento en la dirección de la fibra es menor que en la dirección perpendicular a la fibra. Esto es esperable ya que las fibras tienen un efecto de tirantez para los desplazamientos dentro del plano a lo largo de la dirección de la fibra. También podemos observar que la diferencia entre los desplazamientos en las dos direcciones son grandes, mientras que la diferencia entre los dos desplazamientos verticales calculados son mucho menores.

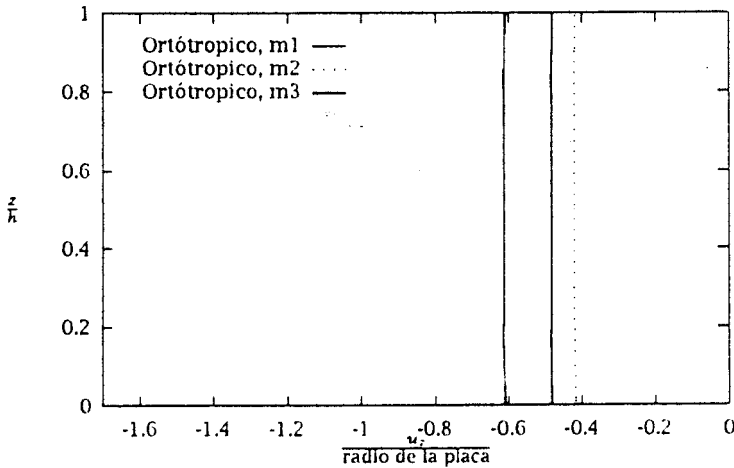


FIGURA 5.75: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 0$. Coordenadas normalizadas frente al desplazamiento (normalizado) u_z . Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

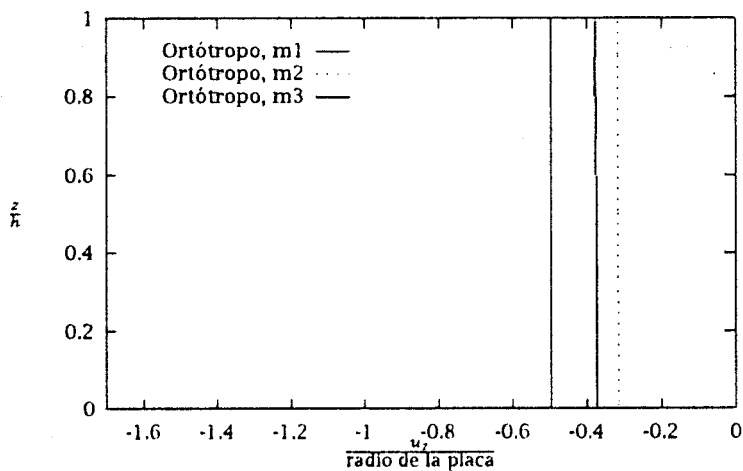


FIGURA 5.76: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 90$. Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

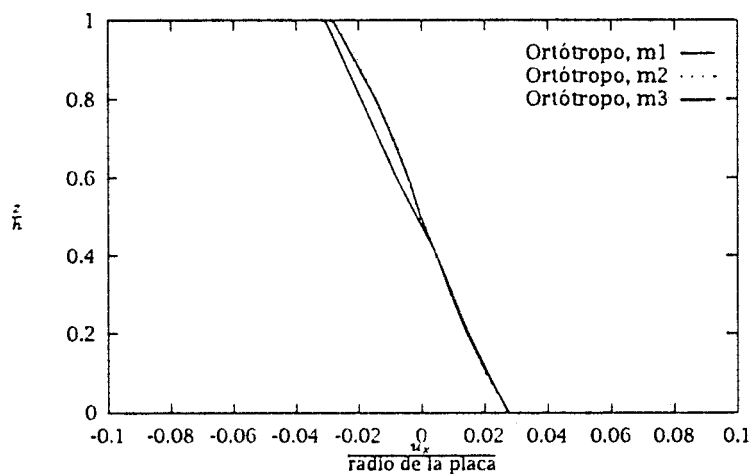


FIGURA 5.77: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 0$. Los cálculos son hechos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

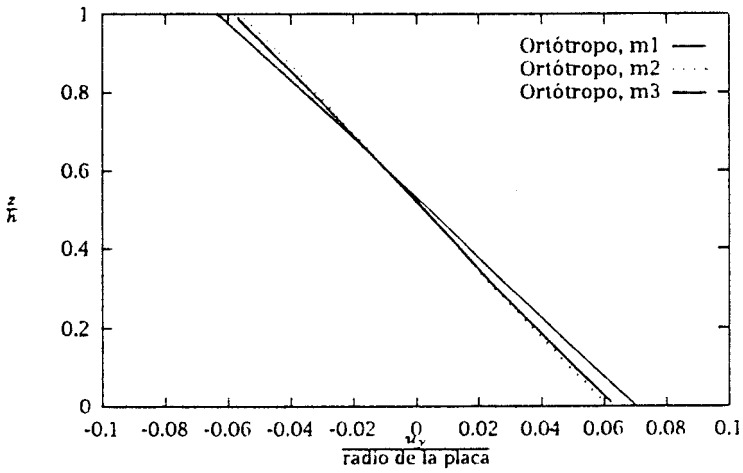


FIGURA 5.78: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

Los cuatro últimos gráficos de este capítulo muestran los desplazamientos radiales y verticales para los puntos internos bajo la carga aplicada a una distancia $r = 2h$ del centro. Se han representado dos cálculos diferentes, uno para $\varphi = 0$ y el otro para $\varphi = 90$.

Los resultados de los desplazamientos en la dirección vertical, u_z (figuras 5.79 y 5.80) son parecidos a los resultados de la figura (5.74), es decir, hay un claro efecto 3D debido al espesor de la placa. En este caso no hay forma intuitiva de predecir que resultados deberían ser los mayores. Para este material particular se puede ver que los resultados son muy parecidos para el desplazamiento vertical.

Los desplazamientos en las direcciones radiales, es decir, u_x para el primer caso y u_y para el segundo, no dependen tanto de la malla utilizada como el desplazamiento vertical. En las figuras (5.81) y (5.82) se puede ver la excelente similitud entre las tres mallas finitas. Al comparar los resultados de los desplazamientos radiales, se puede observar que el desplazamiento radial es más grande cuando la carga se aplica a lo largo de la dirección de la fibra que si la carga se aplica normal a esa dirección. En este caso es fácil ver que la relación entre las dos curvas es correcta, es decir, que los resultados en las (5.81) son mayores que en la (5.82). Esto es válido para todos los materiales ortótropos con sus direcciones principales a lo largo del eje x .

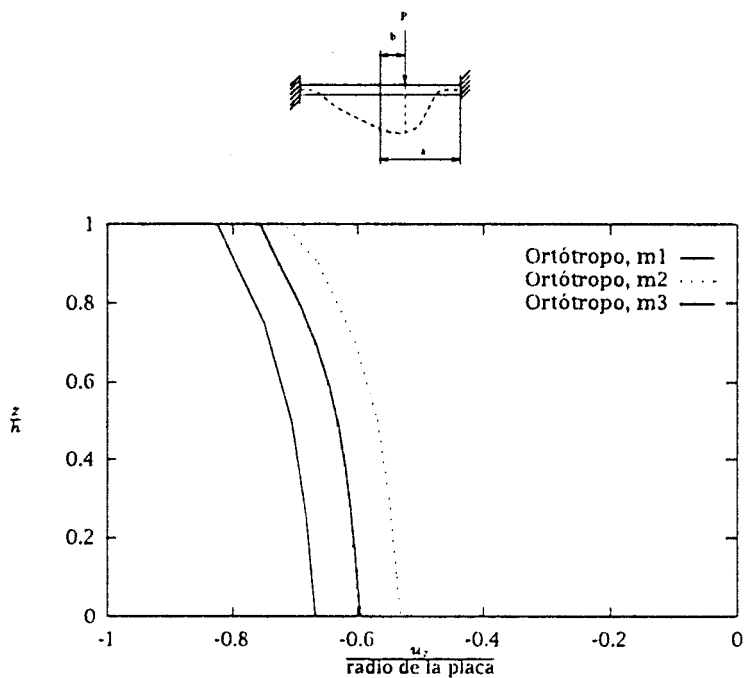


FIGURA 5.79: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 2h$, $\varphi = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

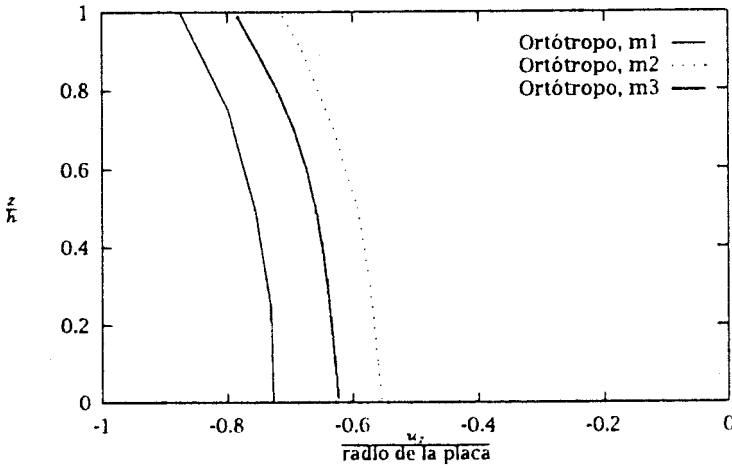


FIGURA 5.80: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h, \varphi = 90$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

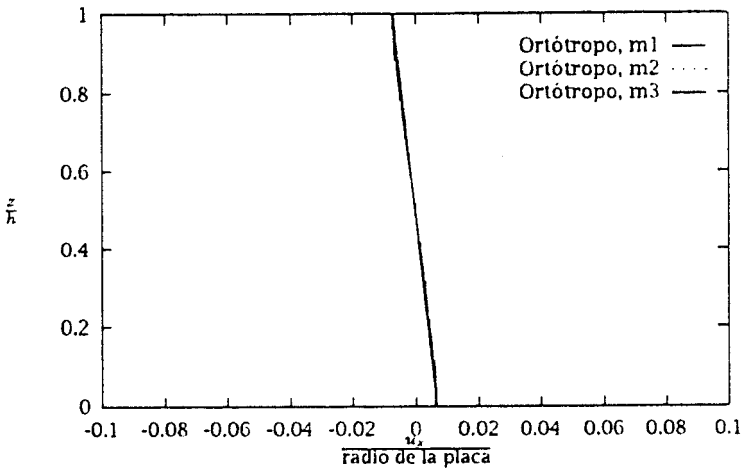


FIGURA 5.81: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $\tau = 2h, \varphi = 0$ y con los puntos internos en una línea vertical en $\tau = 2h$ y $\varphi = 0$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

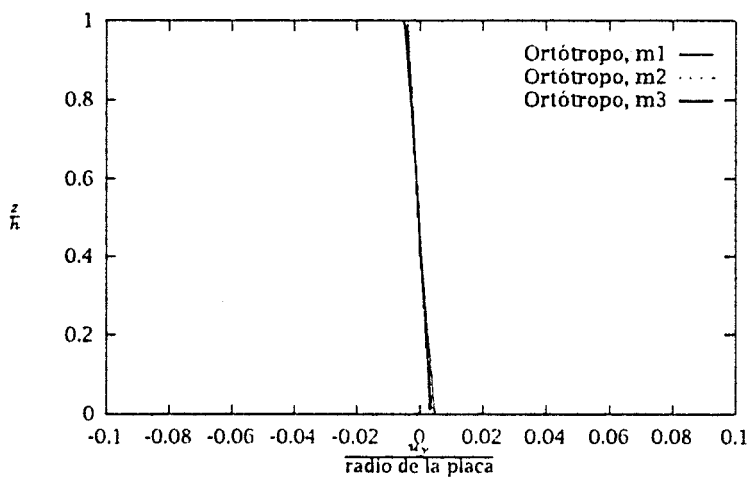


FIGURA 5.82: Resultados del cálculo de BEM con la carga aplicada en $r = 2h$, $\varphi = 90$ y con los puntos internos en una línea vertical en $r = 2h$ y $\varphi = 90$. Cálculos para tres diferentes mallas. El material es ortótropo.

Capítulo 6

Resumen y conclusiones

6.1 Resumen

En la primera parte de esta tesis se deriva y formula la solución fundamental tridimensional de una placa infinita, gruesa, ortótropa sujeta a una carga concentrada aplicada en un punto arbitrario dentro de la placa. Aunque hubiera sido deseable obtener un solución fundamental analítica, ha sido imposible debido a la complejidad de las expresiones. Para solucionar este problema se usó un método seminumérico. El método hace uso del algoritmo FFT. La solución fundamental se compara entonces con una solución isótropa tridimensional para verificar la precisión de los resultados. Los cálculos obtenidos muestran un acuerdo muy bueno entre las dos soluciones.

En la segunda parte de esta tesis se modifica la solución fundamental para calcular una placa compuesta de diferentes capas, todas con diferentes propiedades del material (solución fundamental multicapa). Para verificar la validez de las expresiones obtenidas, se calcularon varias placas. Todas las placas tienen idéntico espesor y propiedades del material y están compuestas de una, tres y diez capas. La solución de las tres placas son en algunos casos idénticas y en otros, debido a inestabilidades numéricas, no muy similares.

La parte final aborda la incorporación de la solución multicapa tridimensional al programa de elementos de contorno. Resulta conveniente y además necesario, modificar el algoritmo BEM para que se haga un pleno aprovechamiento de los resultados proporcionados por la subrutina de la solución fundamental. Se computan varios problemas estructurales para estudiar la precisión del programa BEM. Se hacen evaluaciones para materiales ortótropos e isótropos. Los resultados concuerdan bien con soluciones numéricas y analíticas.

6.2 Conclusiones

- El método presentado para calcular la solución fundamental de una capa infinita ortótropa no puede ser expresada en una manera cerrada analíticamente. Sin embargo se propone un algoritmo seminumérico para obtener la solución fundamental. La solución hace uso de la rutina FFT para ejecutar la transformación de Fourier. La transformación rápida de Fourier es el método más eficiente para hacer la transformación.
- Se presentan soluciones numéricas seleccionadas para tensiones y desplazamientos correspondientes a cargas internas que actúan en varias direcciones para ilustrar la influencia de la ortotropía de material sobre la repuesta. La comparación con soluciones existentes para el problema de la capa isótropa confirma la alta exactitud del esquema numérico usado en este estudio para evaluar la repuesta.
- Se extiende la función de Green para incluir varias capas de material que pueden tener todas diferente orientación y diferentes propiedades del material. Las soluciones obtenidas muestran un buen acuerdo entre las soluciones con diferente número de capas
- La solución fundamental se usa como una función "kernel" para un programa por el método de los elementos de contorno. El programa BEM tiene que modificarse para poder usar la solución fundamental de un modo eficiente. Esta modificación conduce a una considerable

reducción del total de tiempo-CPU necesitado para computar la solución BEM para cualquier problema dado.

- Varios cálculos, para diferentes problemas estructurales, muestran que los resultados obtenidos desde el programa BEM son buenos y que el método presenta un nuevo y efectivo modo de analizar efectos tridimensionales en cualquier estructura.

Apéndice A

Resultados numéricos de la solución fundamental

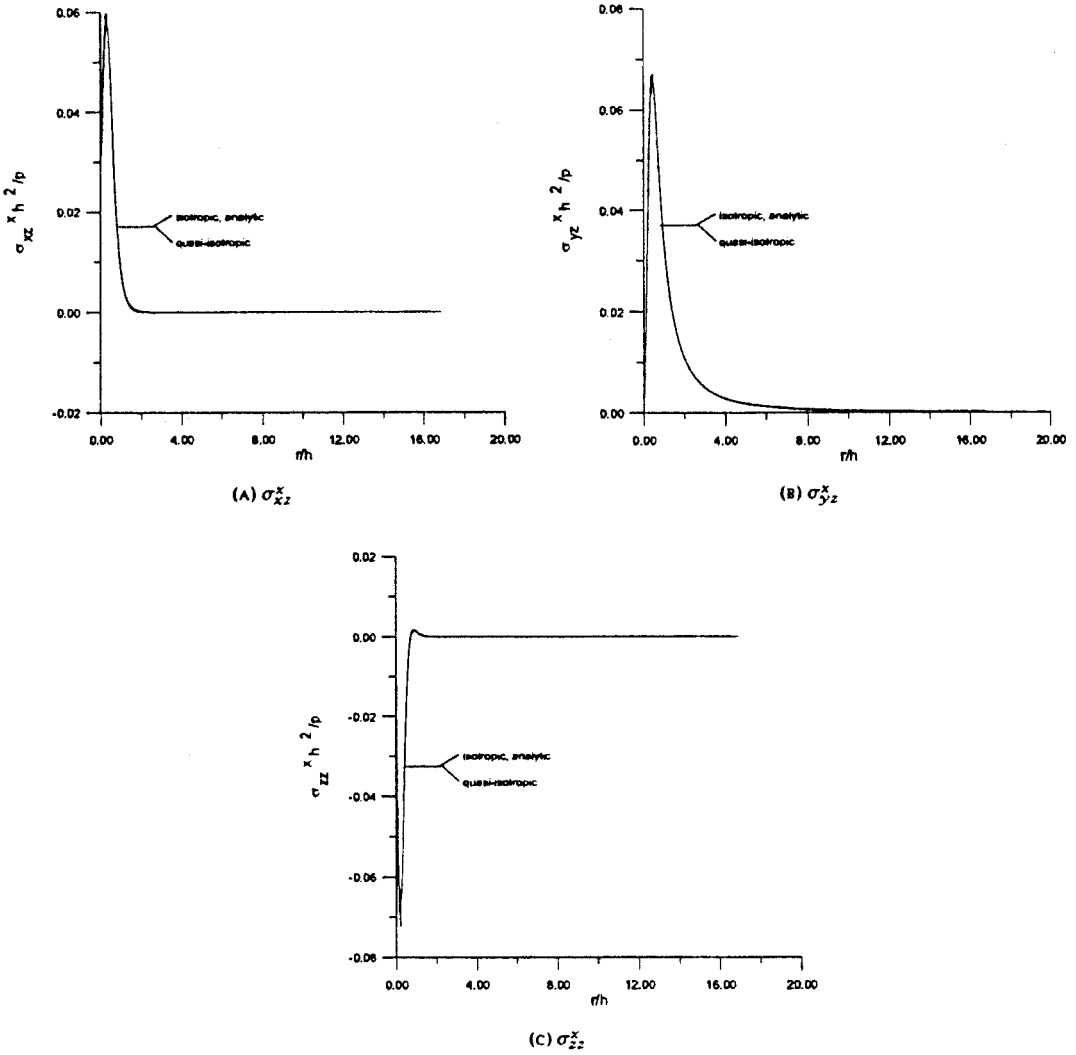


FIGURA A.1: Tensiones normalizadas $\sigma_{xz}^x, \sigma_{yz}^y, \sigma_{zz}^z$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

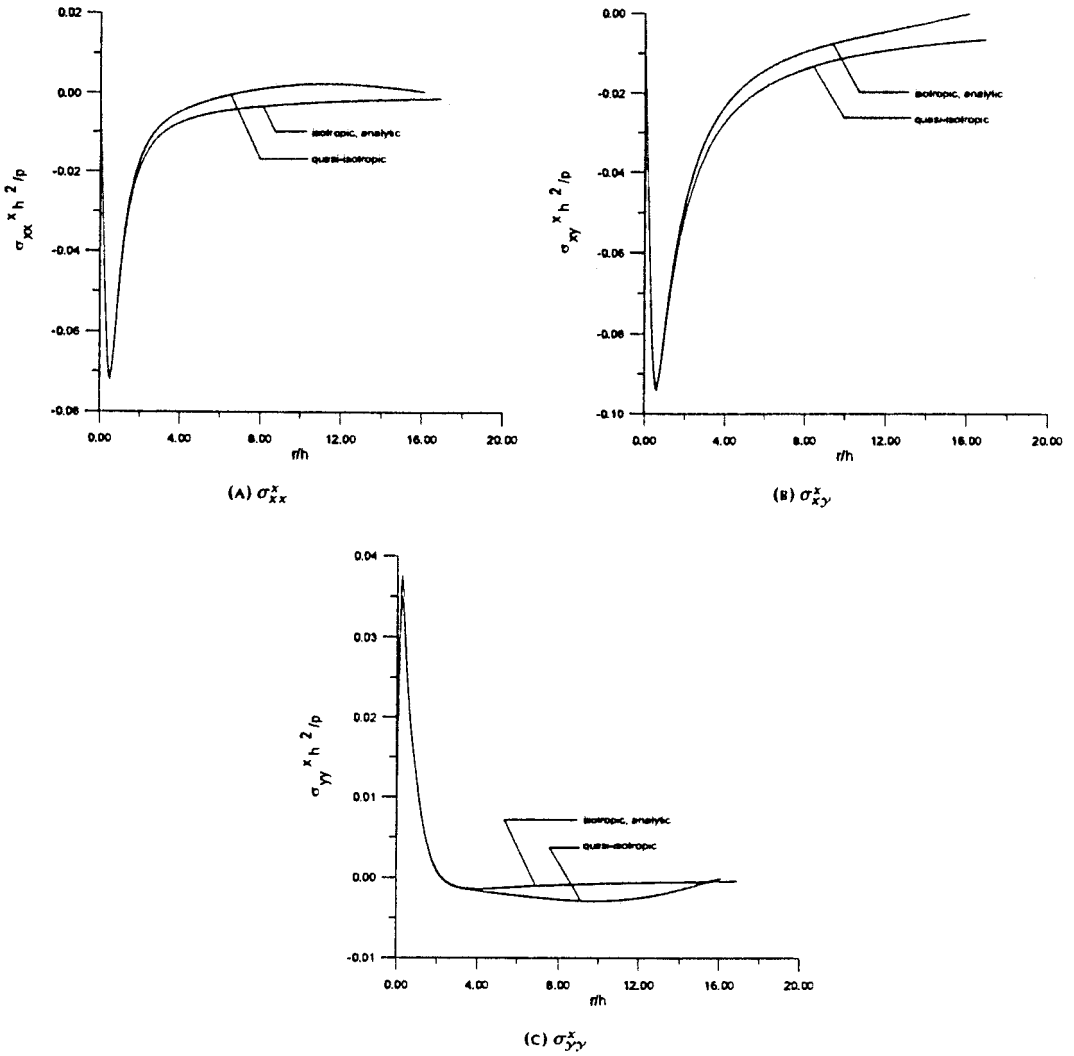


FIGURA A.2: Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^x, \sigma_{xy}^x, \sigma_{yy}^x$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

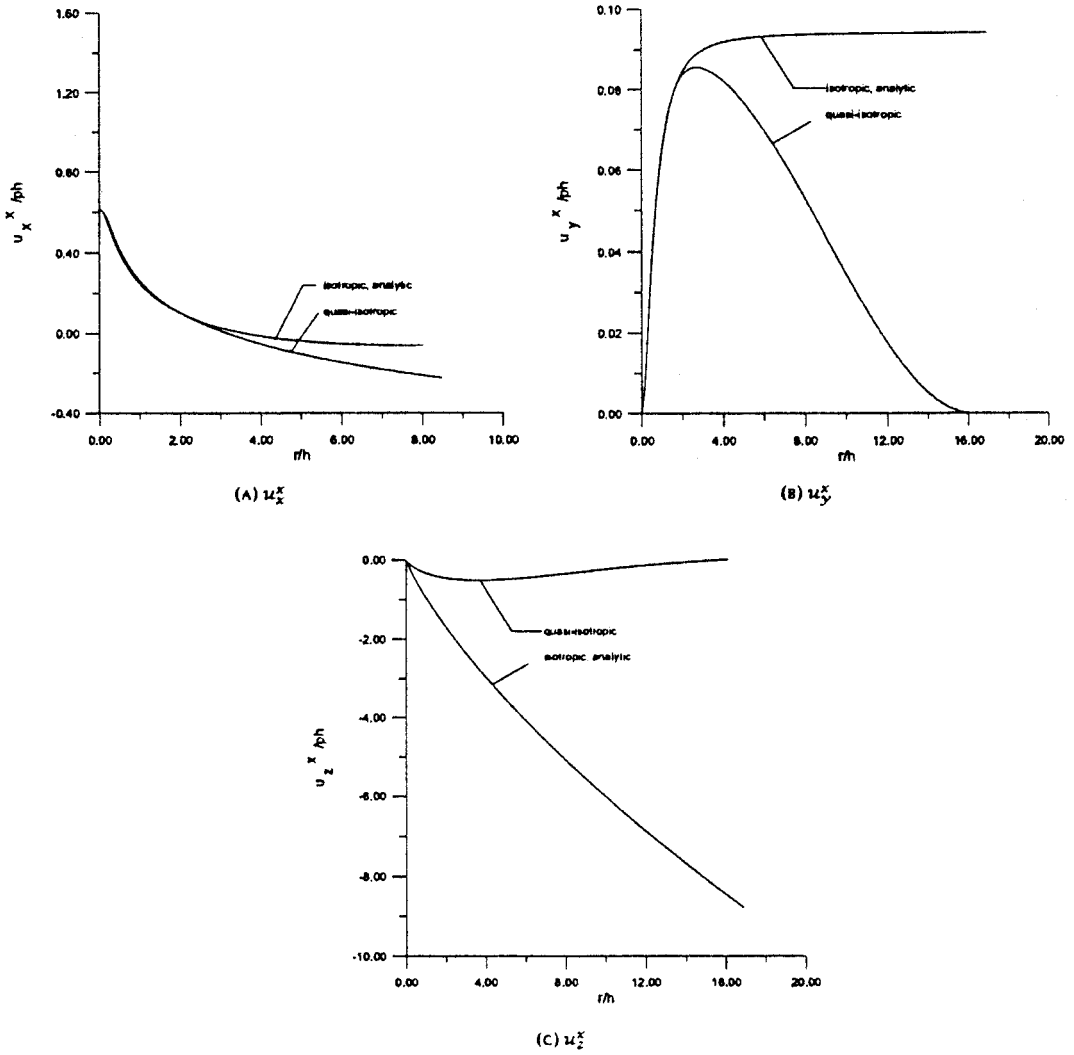


FIGURA A.3: Tensiones normalizadas u_x^x, u_y^x, u_z^x frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

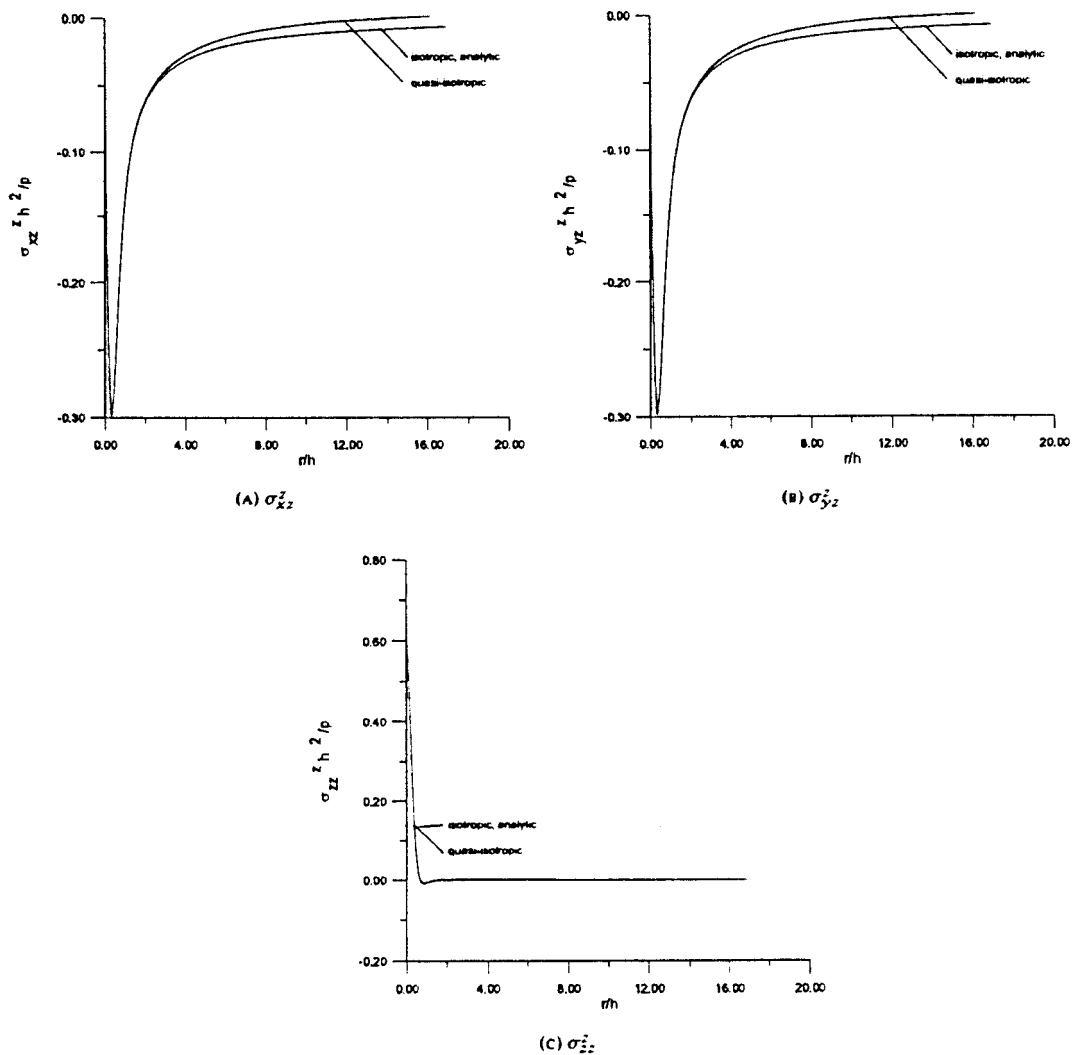


FIGURA A.4: Tensiones normalizadas σ_{xz}^z , σ_{yz}^z , σ_{zz}^z frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

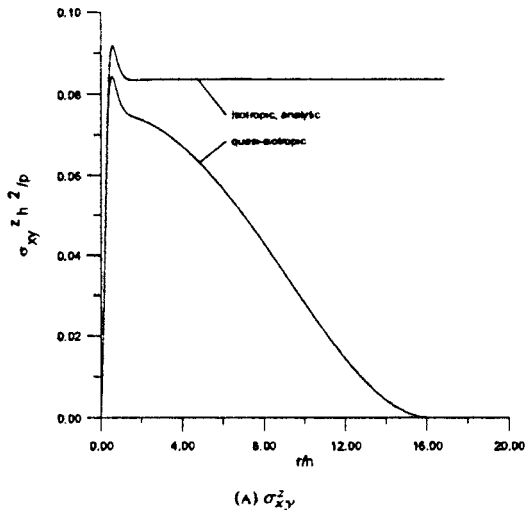


FIGURA A.5: Tensiones normalizadas $\sigma_{xx}^z, \sigma_{xy}^z, \sigma_{yy}^z$ frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

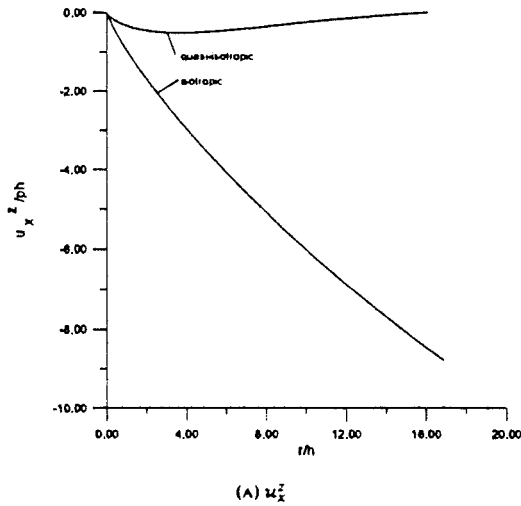


FIGURA A.6: Desplazamiento normalizado u_x^z frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

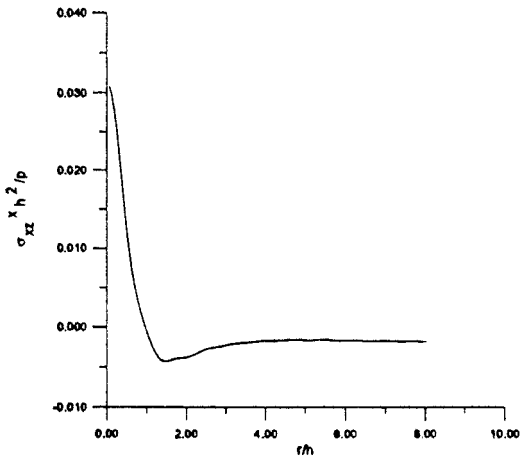
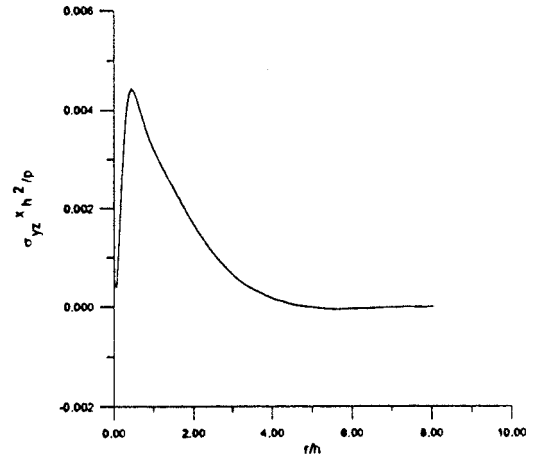
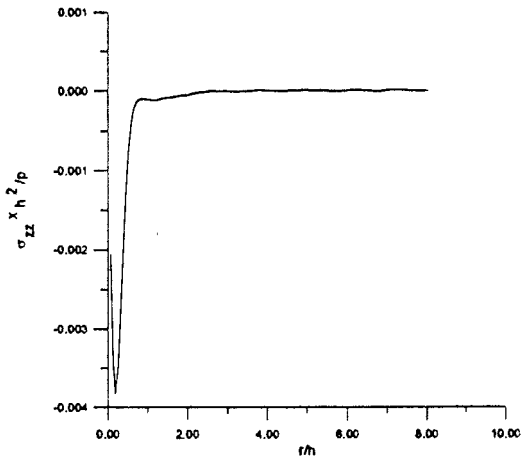
(A) σ_{xx}^x (B) σ_{yz}^x (C) σ_{zz}^x

FIGURA A.7: Tensiones normalizadas, σ_{xx}^x , σ_{yz}^x , σ_{zz}^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

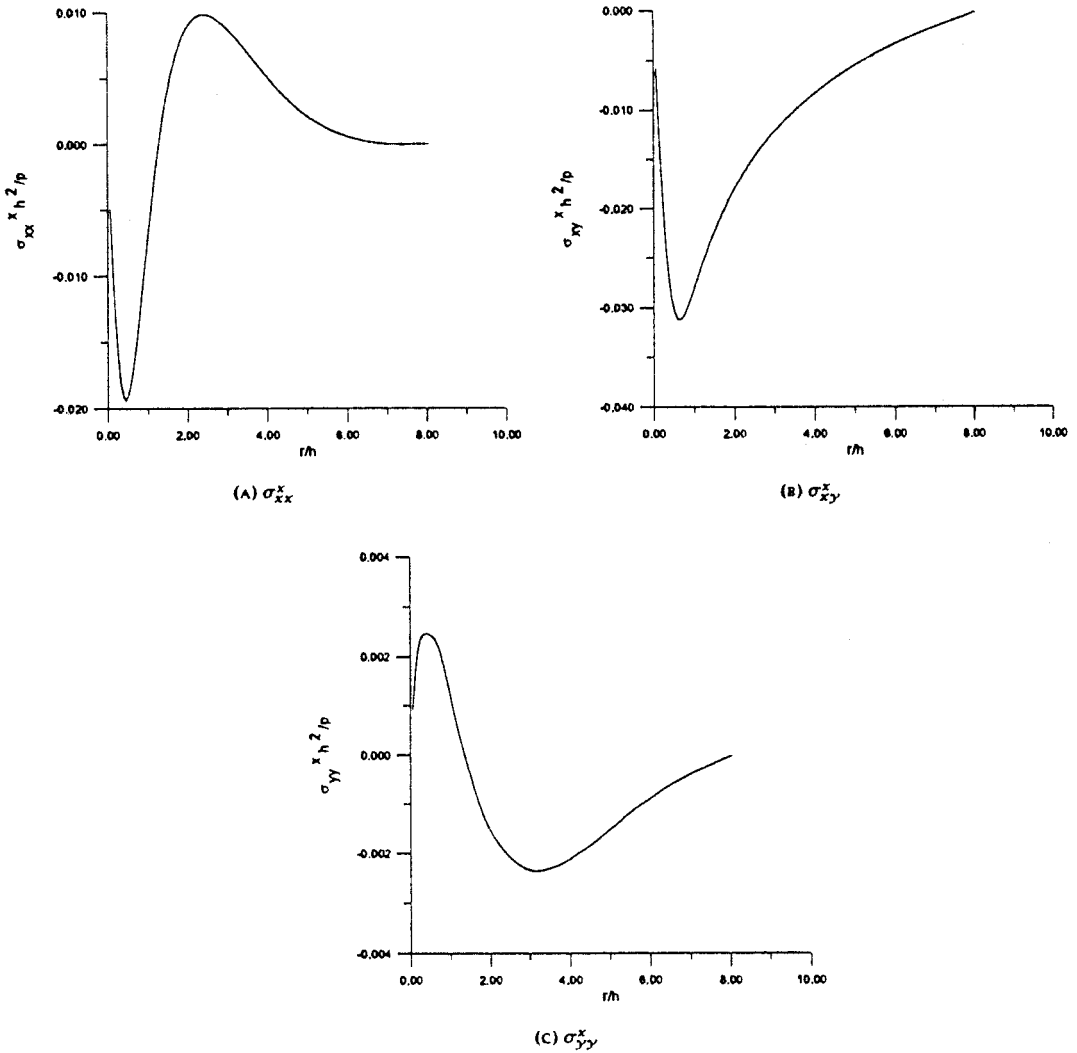


FIGURA A.8: Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^x, \sigma_{xy}^x, \sigma_{yy}^x$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

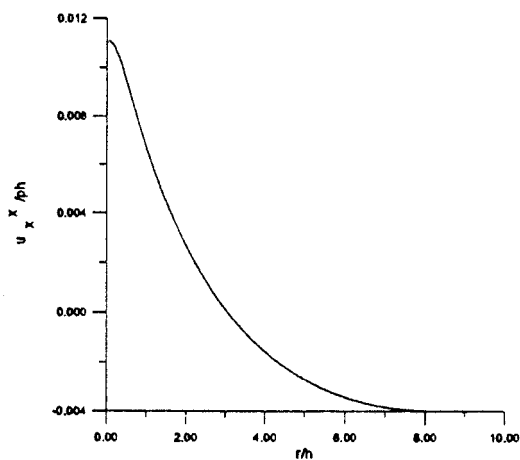
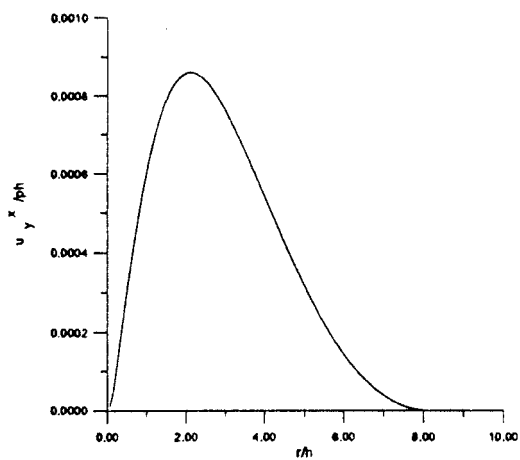
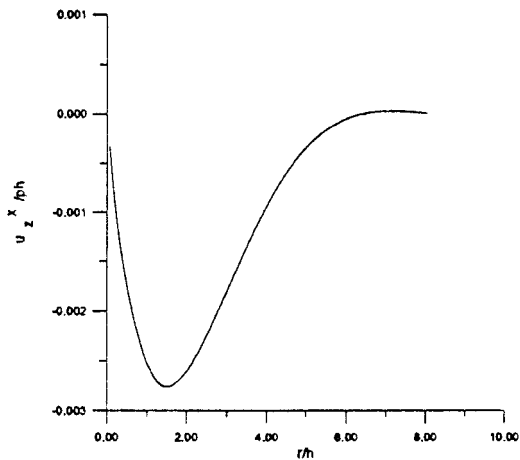
(A) u_x^x (B) u_y^x (C) u_z^x

FIGURA A.9: Desplazamientos normalizados, u_x^x , u_y^x , u_z^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

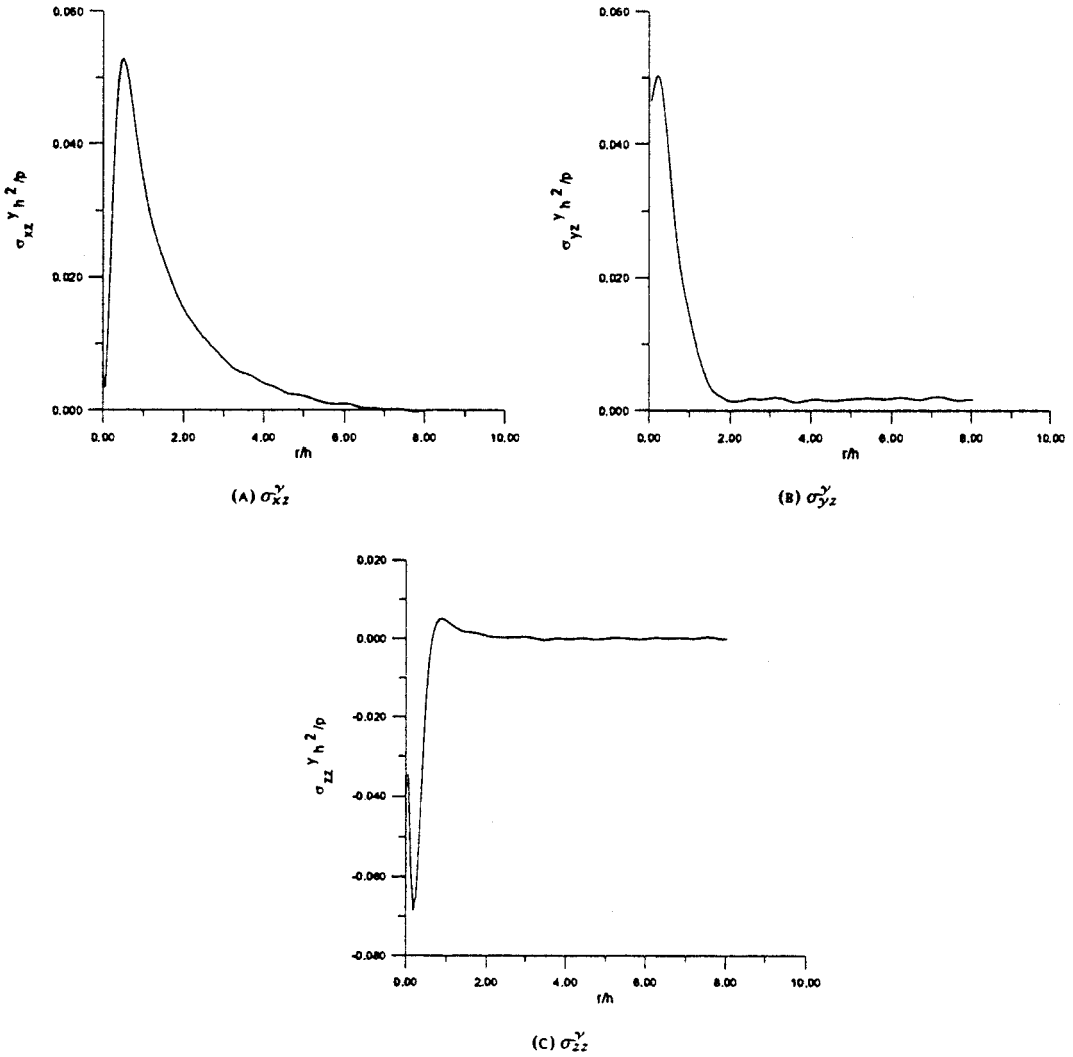


FIGURA A.10: Tensiones normalizadas $\sigma_{xz}^y, \sigma_{yz}^y, \sigma_{zz}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

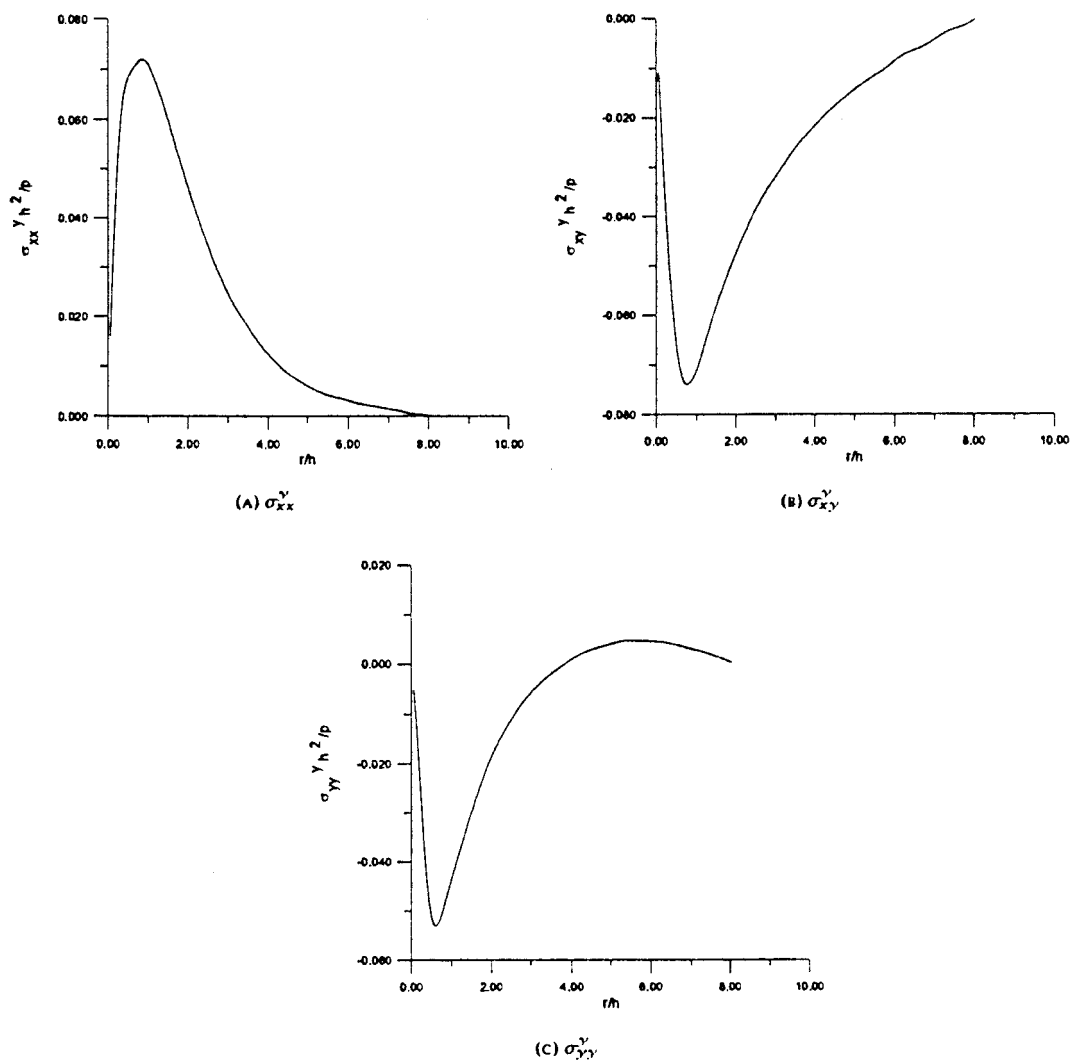


FIGURA A.11: Tensiones normalizadas, $\sigma_{xx}^y, \sigma_{yy}^y, \sigma_{xy}^y$, frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

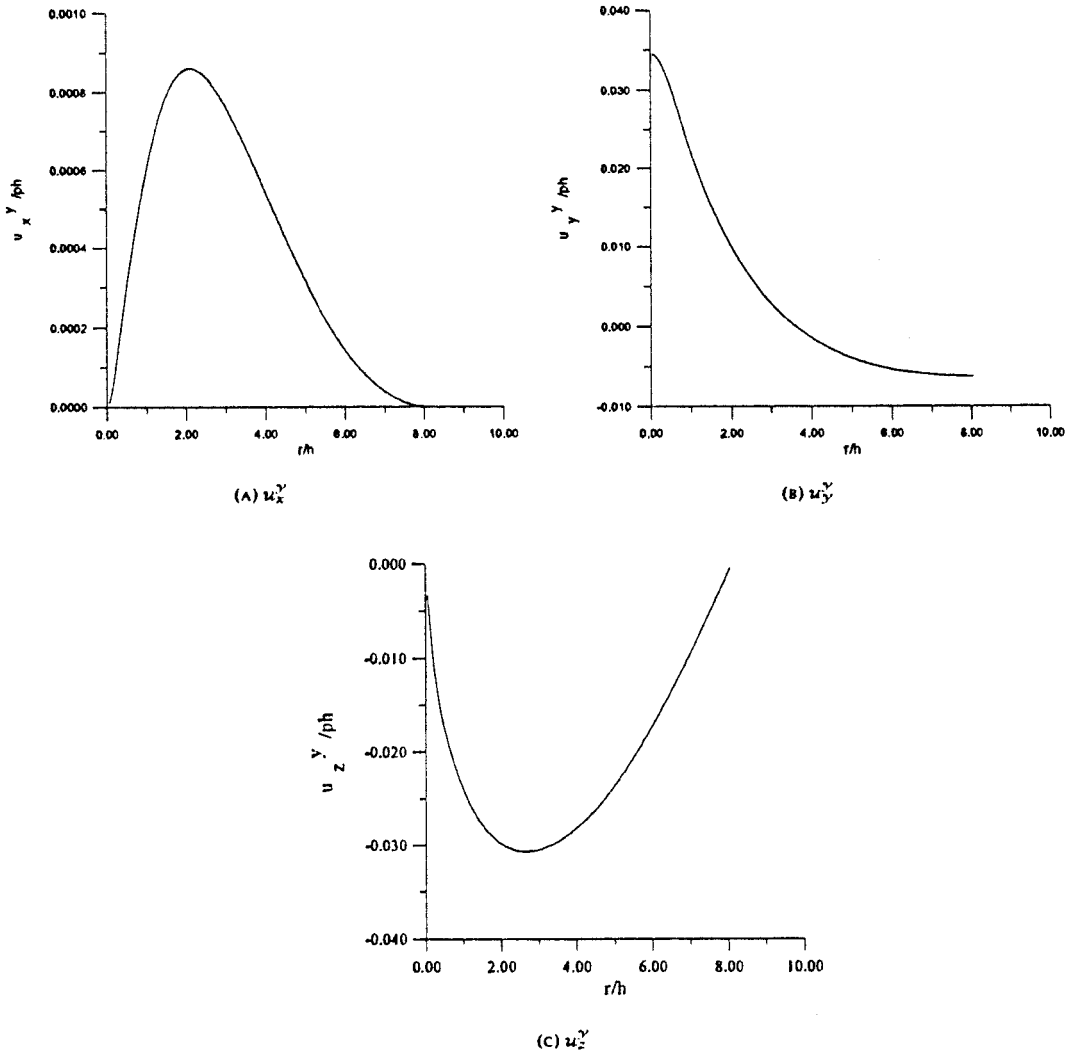


FIGURA A.12: Desplazamientos normalizados, u_x^y , u_y^y , u_z^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

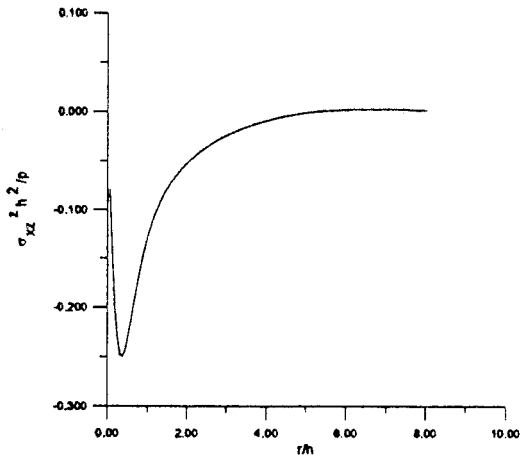
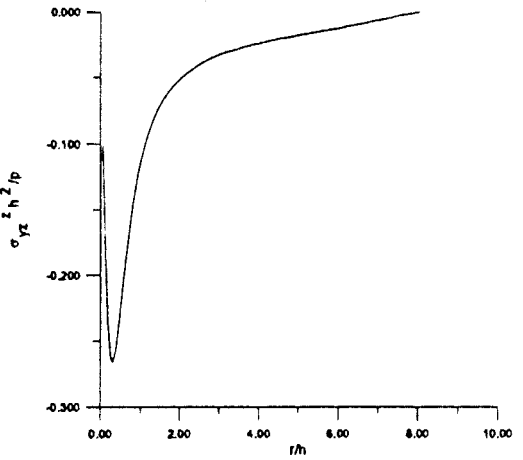
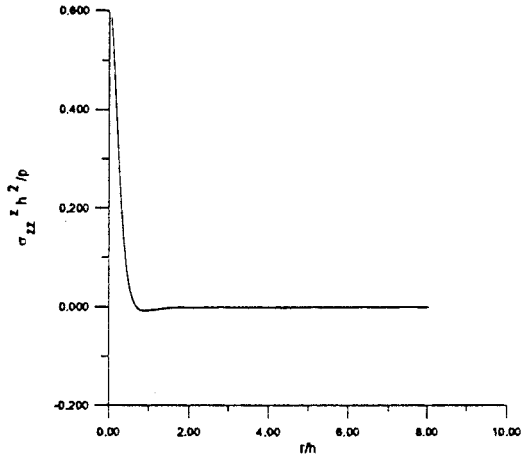
(A) σ_{xz}^z (B) σ_{yz}^z (C) σ_{zz}^z

FIGURA A.13: Tensiones normalizadas, σ_{xz}^z , σ_{yz}^z , σ_{zz}^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

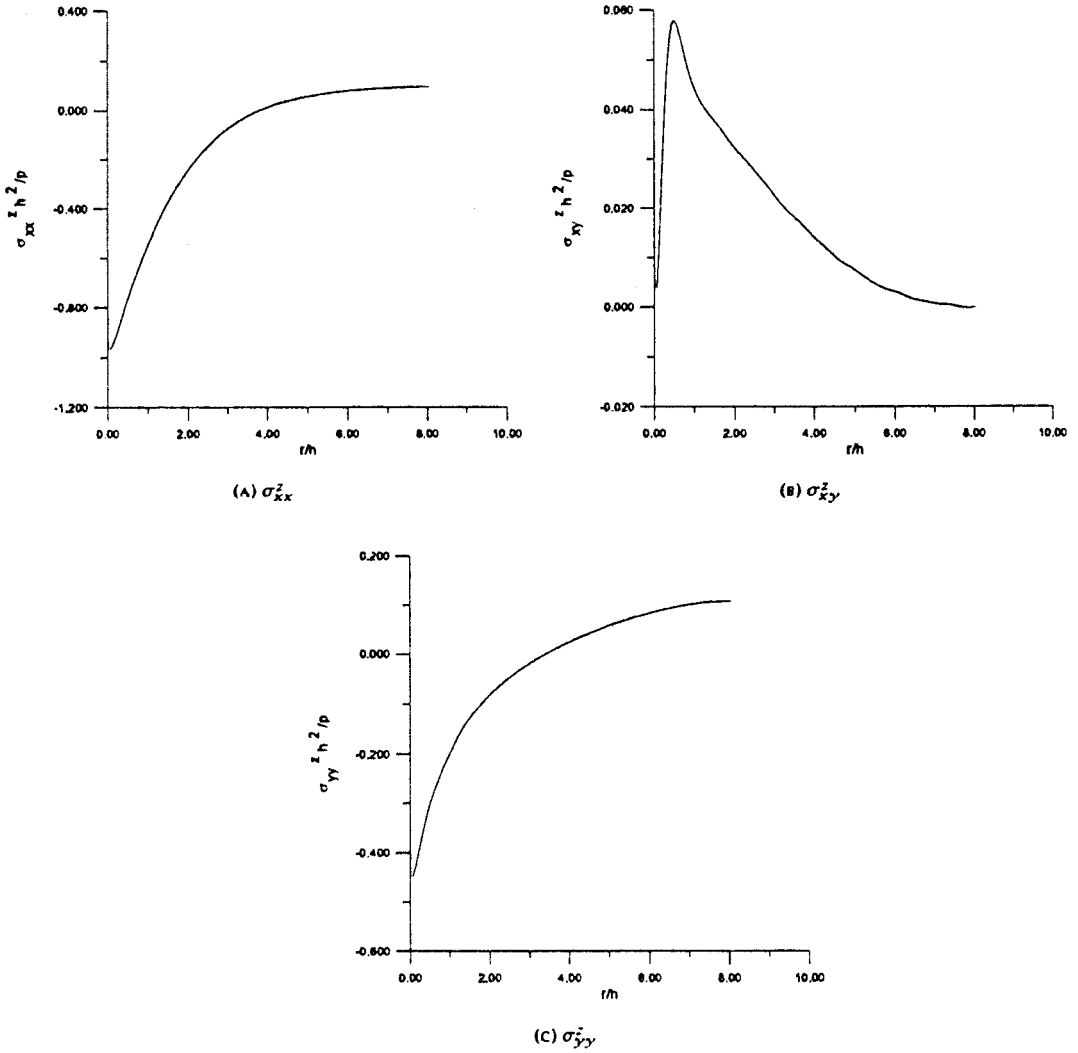


FIGURA A.14: Tensiones normalizadas, σ_{xx}^z , σ_{xy}^z , σ_{yy}^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isótropo, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

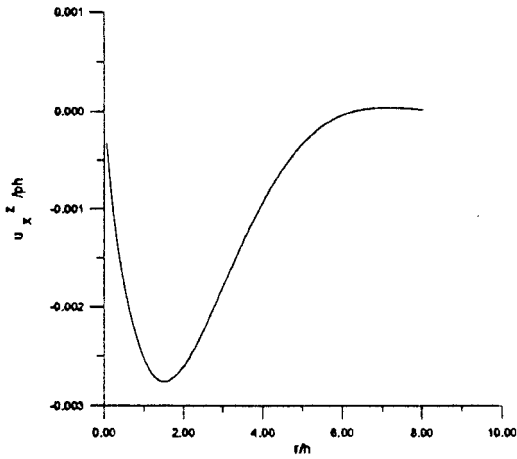
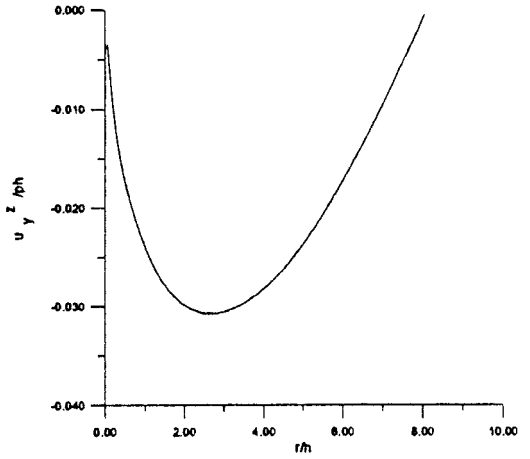
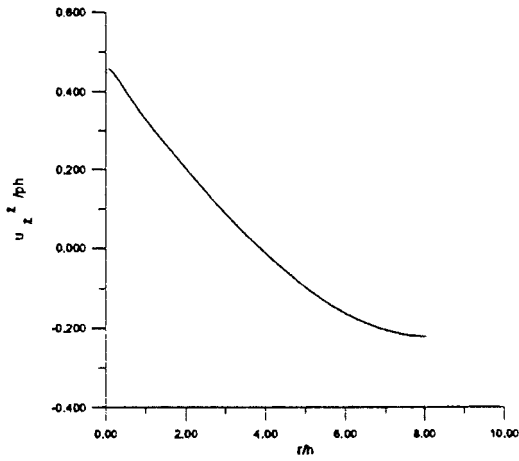
(A) u_x^z (B) u_y^z (C) u_z^z

FIGURA A.15: Tensiones normalizadas, u_x^z , u_y^z , u_z^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados obtenidos para la solución analítica correspondiente al caso isotrópico, y para la solución numérica correspondiente al caso semi-ortótropo.

Apéndice B

Resultados numéricos de la solución fundamental de una multi-capa

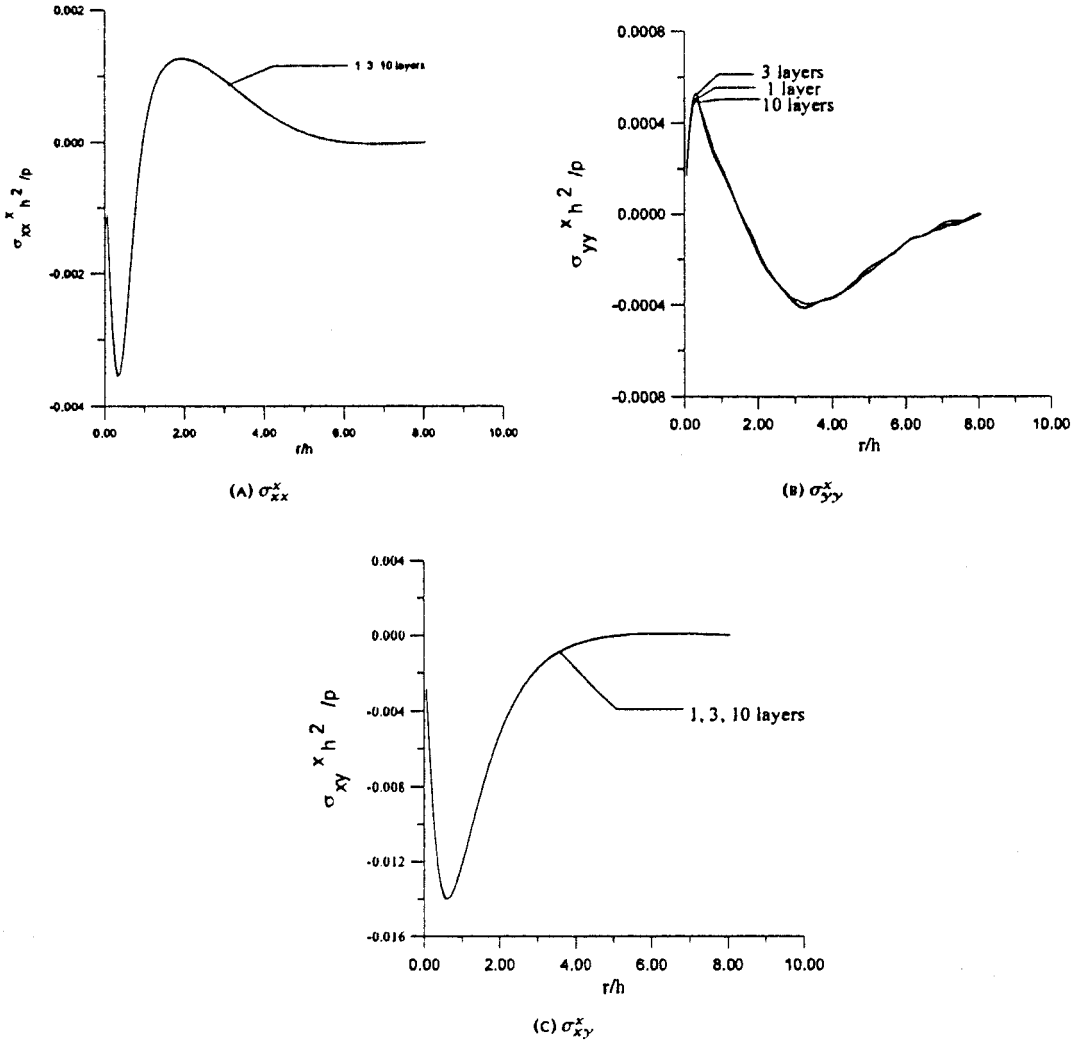


FIGURA B.1: Tensiones normalizadas, σ_{xx}^x , σ_{yy}^x , σ_{xy}^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

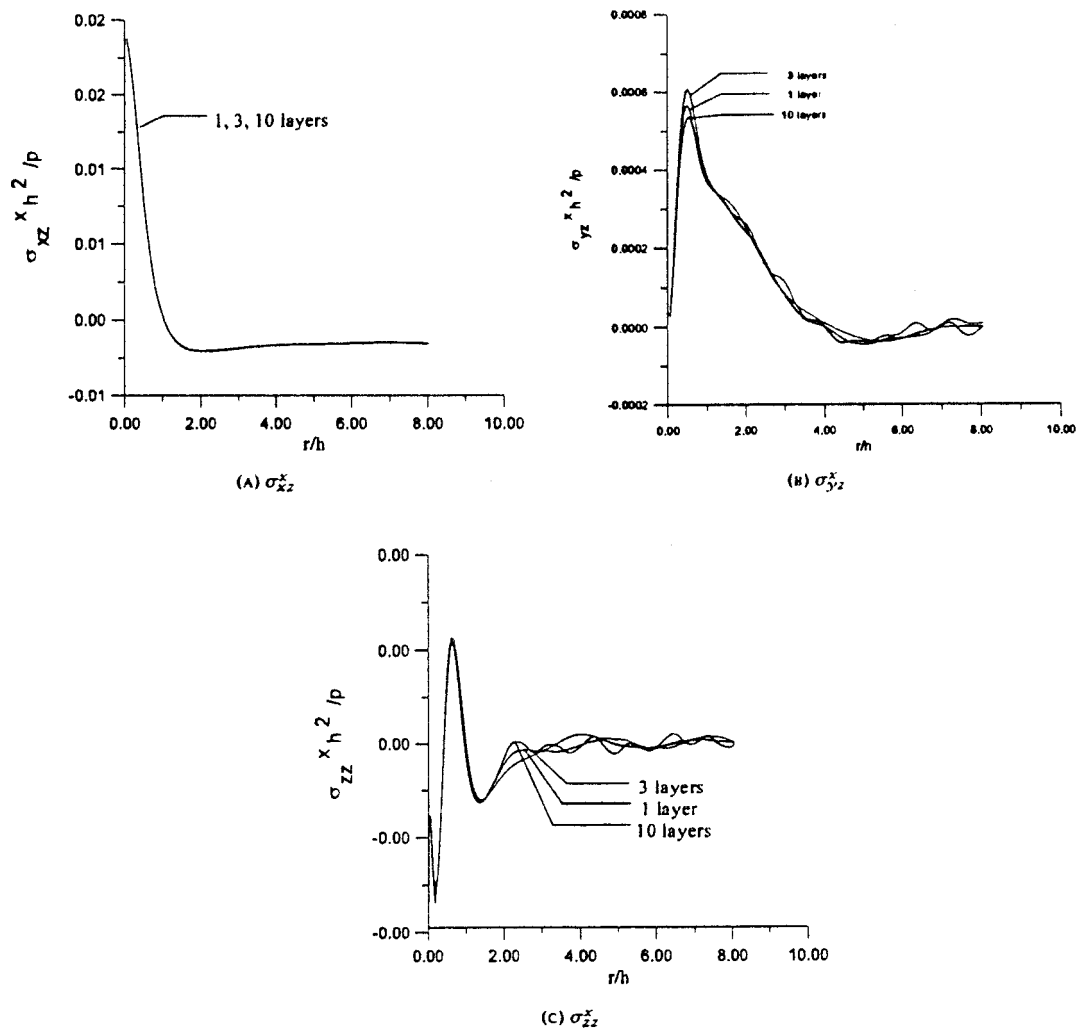


FIGURA B.2: Tensiones normalizadas, σ_{xz}^x , σ_{yz}^x , σ_{zz}^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

APÉNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL DE UNA MULTI-CAPA

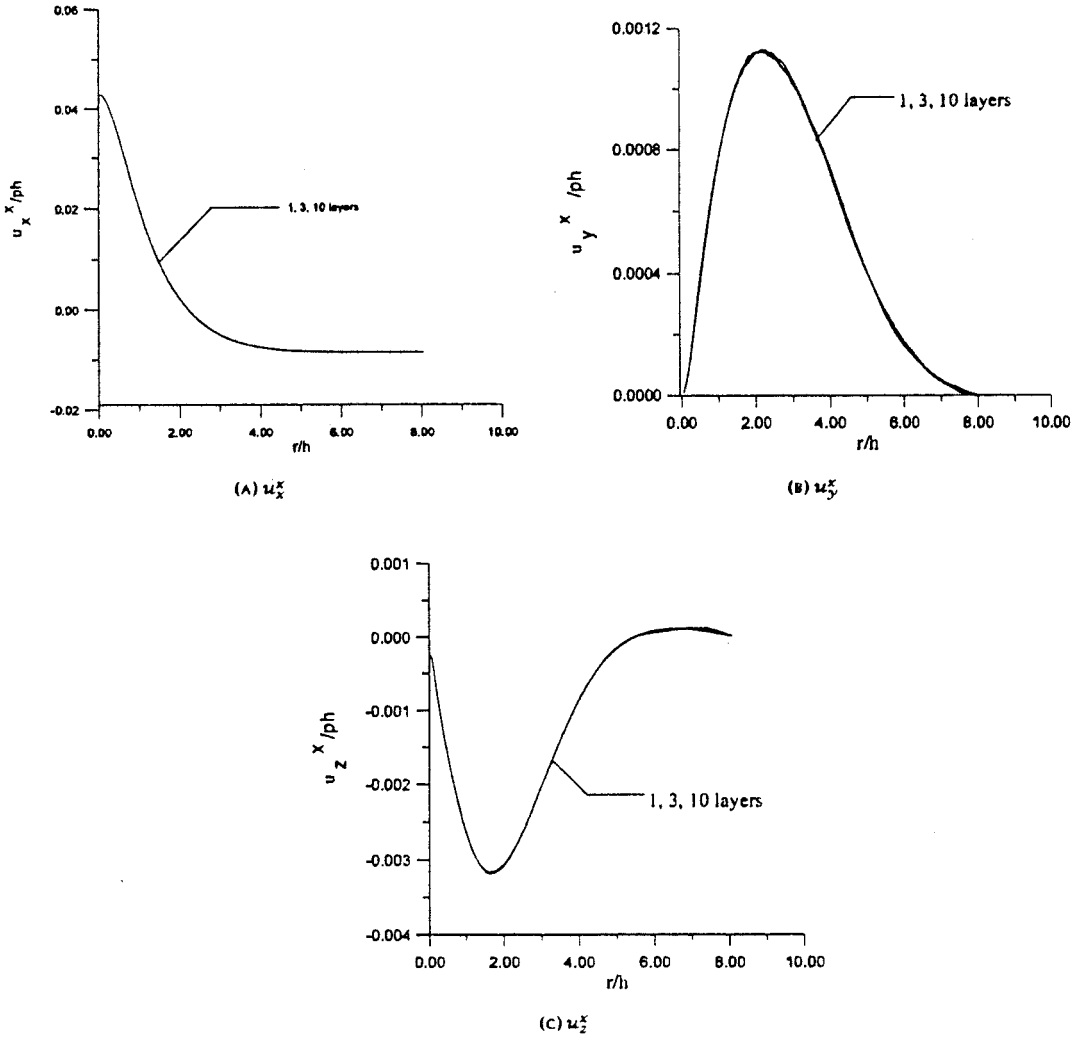


FIGURA B.3: Desplazamientos normalizados, u_x^x , u_y^x , u_z^x , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

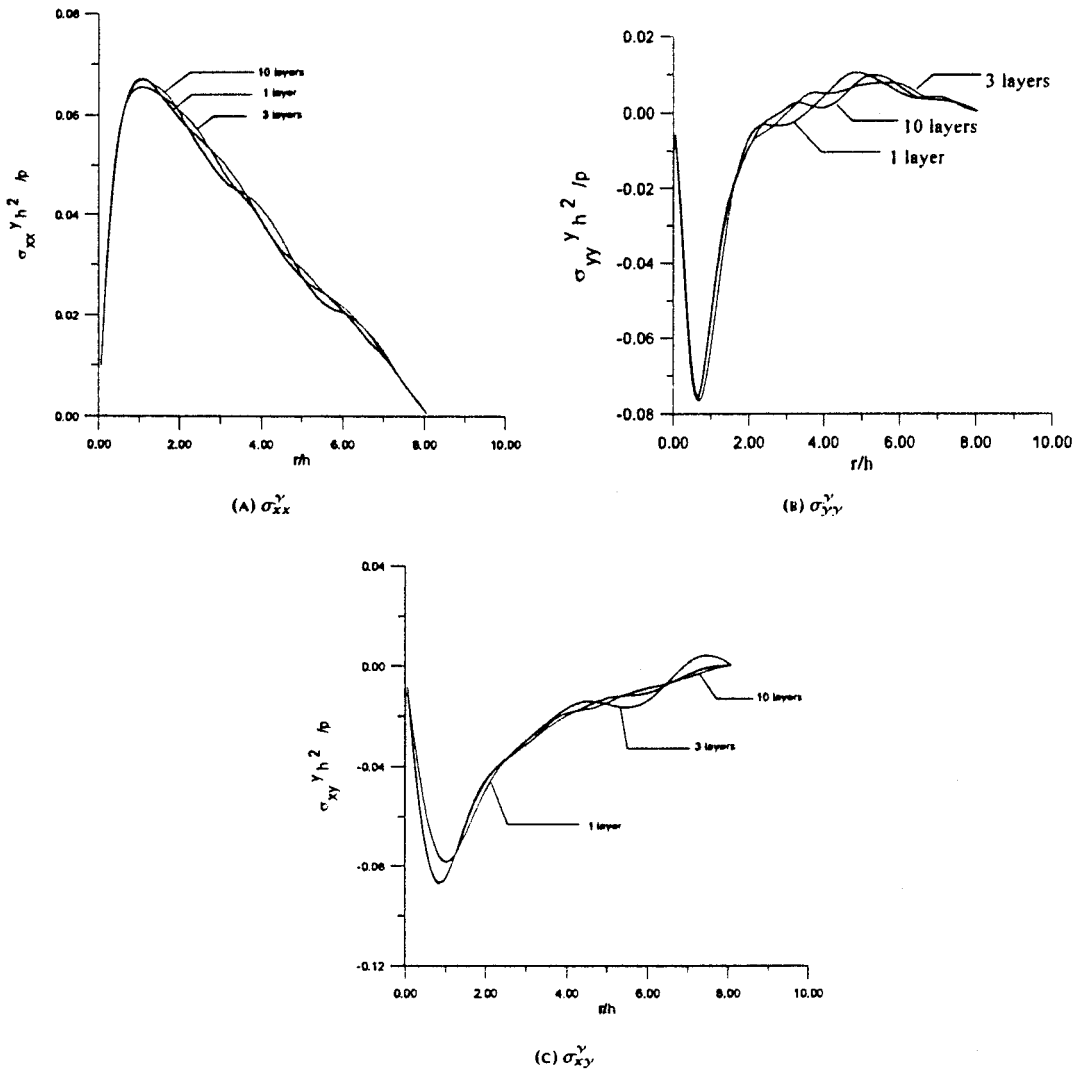


FIGURA B.4: Tensiones normalizadas, σ_{xx}^y , σ_{yy}^y , σ_{xy}^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

APÉNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL DE UNA MULTI-CAPA

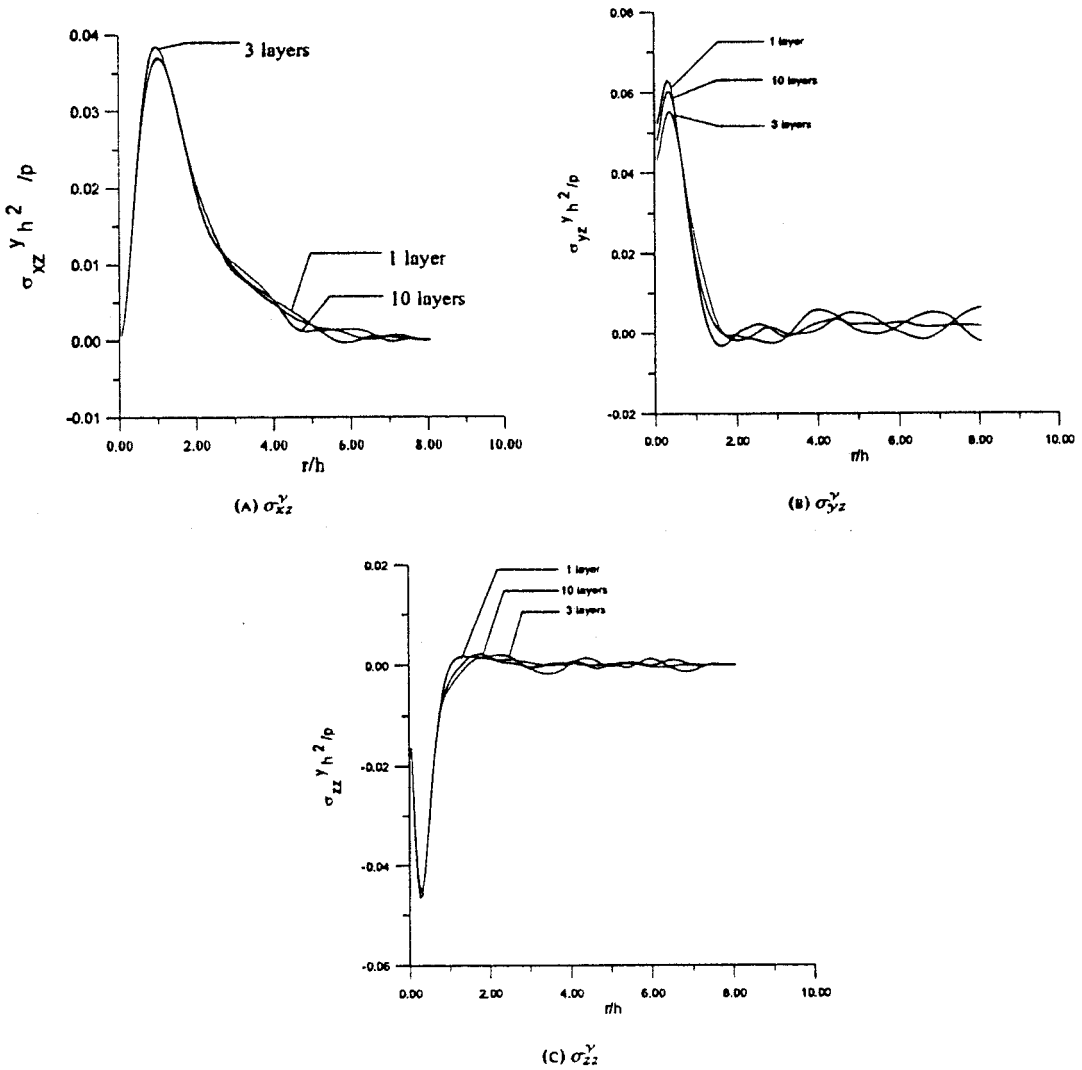


FIGURA B.5: Tensiones normalizadas, σ_{xz}^y , σ_{yz}^y , σ_{zz}^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

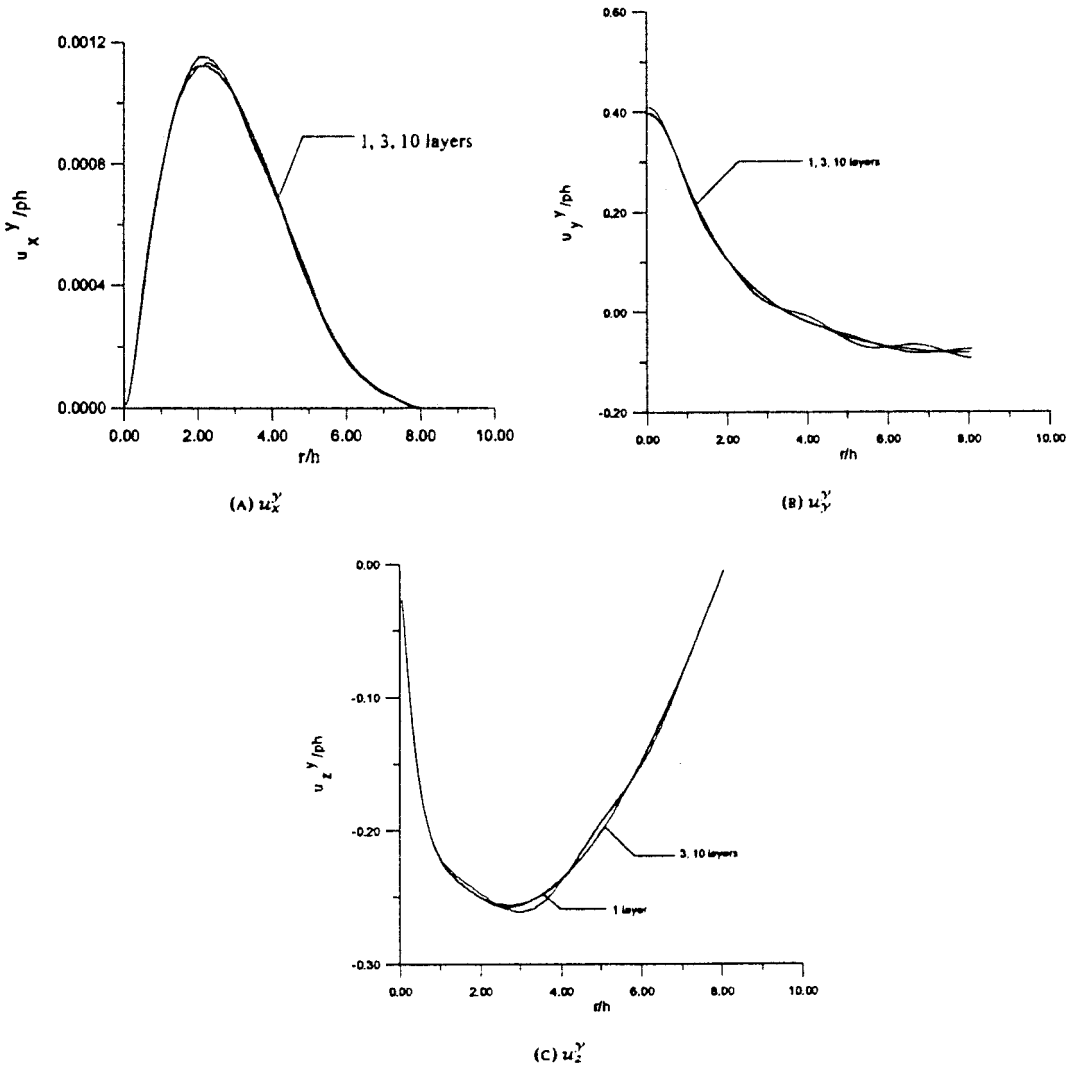


FIGURA B.6: Desplazamientos normalizados, u_x^y , u_y^y , u_z^y , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

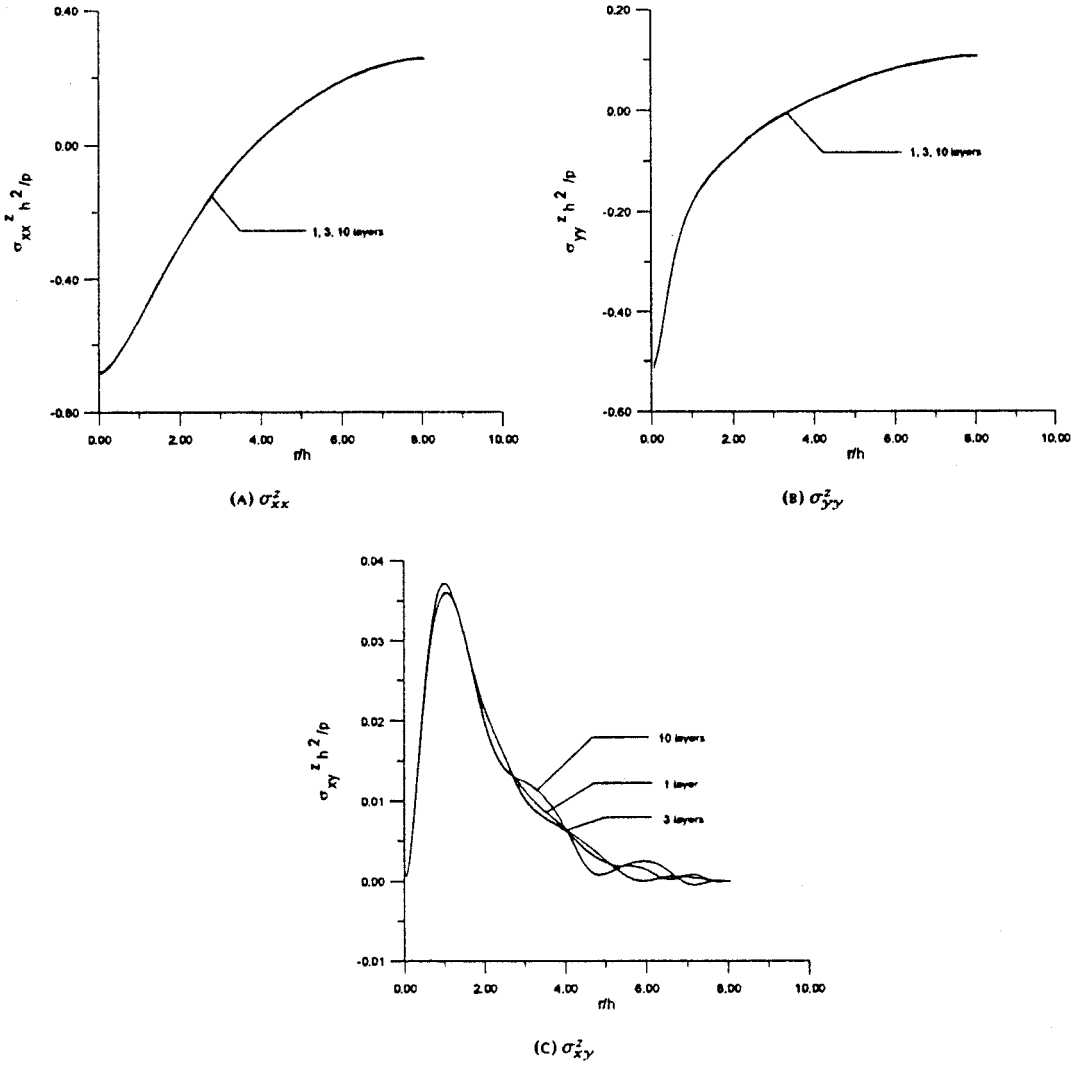


FIGURA B.7: Tensiones normalizadas, σ_{xx}^z , σ_{yy}^z , σ_{xy}^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

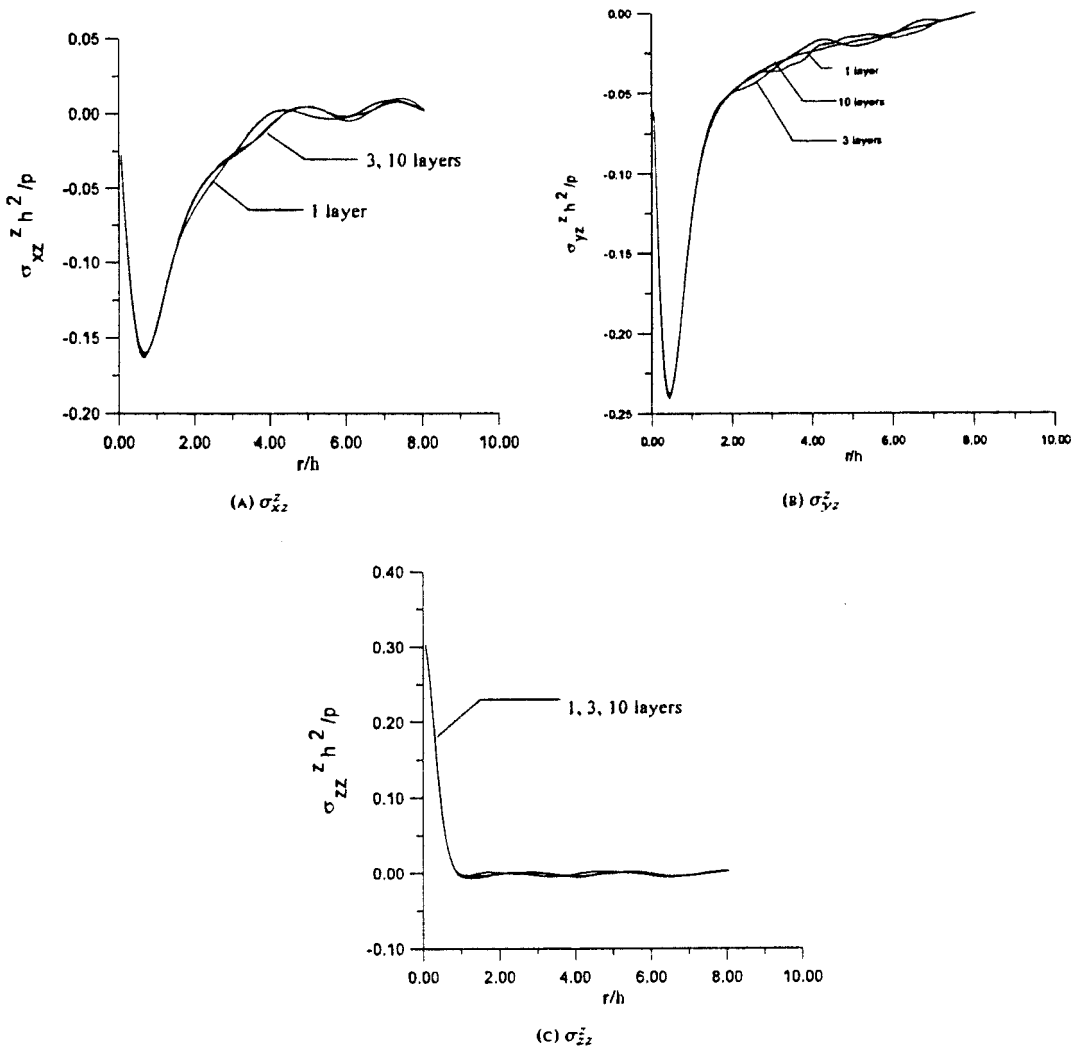


FIGURA B.8: Tensiones normalizadas, σ_{xz}^z , σ_{yz}^z , σ_{zz}^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

APÉNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL DE UNA MULTI-CAPA

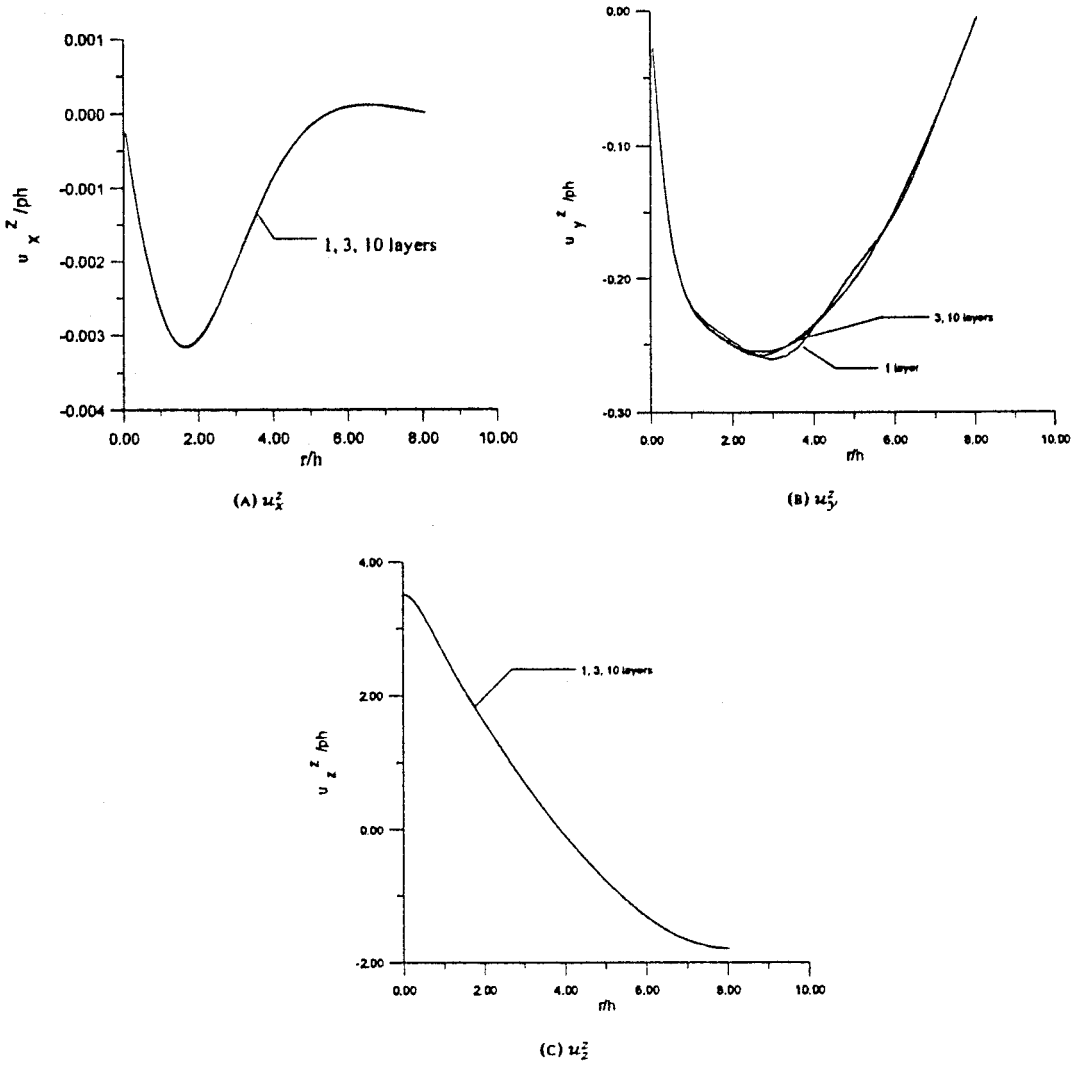


FIGURA B.9: Desplazamientos normalizados, u_x^z , u_y^z , u_z^z , frente a la distancia (normalizada) a la vertical del punto de aplicación de la carga. Resultados numéricos obtenidos para la solución ortótropa de una placa formada por: una, tres y diez capas.

Bibliografía

- [1] R. J. Apsel, J. E. Luco: On the Green's functions for a layered half-space. Part II. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 73,4,931-951,1983.
- [2] F.G. Benitez, L. Lu and A.J. Rosakis: A boundary element formulation based on the three-dimensional elastostatic fundamental solution for the infinite layer: Part I- theoretical and numerical development, *J. Elasticity*,18,3-50,1987.
- [3] L. Lu, F.G. Benitez and A.J. Rosakis: A Boundary element formulation based on the three-dimensional elastostatic fundamental solution for the infinite layer: Part II-Three-Dimensional examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,36,3131-3159, 1993.
- [4] F.G. Benitez and A.J. Rosakis: Three dimensional elastostatics of a layer and a layered medium, *J. Elasticity*,18,3-50,1987.
- [5] F.G. Benitez and A.J. Rosakis: Three Dimensional Elastostatics of a Layer and a Layered Medium, Division of Engineering and Applied Sciences SM85-21, California Inst. of Technology, Pasadena, CA, 1985.
- [6] F.G. Benitez and A.J. Rosakis: Three Dimensional Elastodynamics of a Layered Medium, Division of Engineering and Applied Sciences SM85-22, California Inst. of Technology, Pasadena, CA, 1985.
- [7] A. Ben-Menahem, S.J. Singh: Multipolar elastic fields in a layered half space. *Bull. Seism. Soc. Am.*,58,5,1519-1572,1968.
- [8] M. Braun: Differential Equations and their Applications. Springer-Verlag; New York, 1983.
- [9] C.A. Brebbia, J. Dominguez: Boundary Elements, An Introductory Course. McGraw-Hill; Southampton, 1989.
- [10] J.L. Carvalho, J.H. Curran: Two-dimensional Green's functions for elastic bi-materials. *J. of Appl. Mech.*,59,321-327,1992.
- [11] K.S. Chan, P. Karasudhi, S.L. Lee: Force at a point in the interior of a layered elastic half space. *Int. J. Solids Structures*,10,1179-1199,1974.
- [12] J. Dominguez, R. Abascal: On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity. *Engineering Analysis*, 1, 3, 128-134, 1984.
- [13] J.M. Doyle: Integration of the Laplace transformed equations of classical elastokinetics. *J. of Math. Anal. and Appl.*,13,118-131,1966.
- [14] P.C. Dumir, A.K. Mehta: Boundary element solution for elastic orthotropic half-space problems. *Computer and Structures*,26,3,431-438,1987.
- [15] J. Dundurs, M. Hetényi: Transmission of force between two semi-infinite solids. *ASME Journal of Applied Mechanics*,32,671-674,1965.
- [16] N. Fares, V.C. Li: General image method in a plane-layered elastostatics medium. *J. of Appl. Mech.*,35,781-785,1988.
- [17] I. Fredholm: Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique. *Acta Mathematica*,23,1,1900.

- [18] A.E. Green: A note on stress systems in anisotropic materials. *Philosophical Magazine*,34,416-418,1943.
- [19] A.E. Green, W. Zerna: *Theoretical Elasticity*, 2nd Edn. Clarendon Press, Oxford,1968.
- [20] H. Hasegawa: Green's functions for axisymmetric body force problems of an elastic half space and their application. *Bull. of JSME*,27,231,1829-1835,1984.
- [21] H. Hasegawa, V.G. Lee, T. Mura: Green's functions for axisymmetric problems of dissimilar elastic solids. *J. of Appl. Mech.*,59,312-320,1992.
- [22] J. E. Gordon: *Structures*, Penguin, 1993.
- [23] J. E. Gordon: *The New Science of Strong Materials*, Penguin, 1993.
- [24] G. Hognestad : 2D-Composite structures, Analysis of composite flange connections and determination of interlaminar strength. PhD thesis, Oxford University, Dept. of Engineering Science, 1993.
- [25] L.Z. Jiang, J.S. Lee: Spline boundary element analysis of plane orthotropic elastic layer. In *Boundary Elements XV* (Ed. C.A. Brebbia, J.J. Rencis), Elsevier,1993.
- [26] L.R. Johnson: Green's function for Lamb's problem. *Geophys. J. R. astr. Soc.*,37,99-131,1974.
- [27] R. M. Jones: *Mechanics of composite materials*. Hemisphere Publishing Corp.,1975.
- [28] T. Kermanidis: A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems. *Int. J. Solids Struct.*,11,493-500,1975.
- [29] E. Kröner: Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Physik*,136,402,1953.
- [30] V.D. Kupradze: Dynamical problems in elasticity. In *Progress in Solid Mechanics*. (I.N. Sneddon, R. Hill, eds.), Vol.3, North Holland, Amsterdam, 1963.
- [31] C.B. Ling: A concentrated force inside a thick plate. *Int. J. Engng. Sci.*,30,8,1073-1081,1992.
- [32] J. E. Luco, R. J. Apsel: On the Green's functions for a layered half-space. Part I. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 73,4,909-929,1983.
- [33] E. Melan: Der spannungszustand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten halbscheibe. *Z. Angew. Math. Mech.*,12,343-346,1932.
- [34] R.D. Mindlin: Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*,7,195-202,1936.
- [35] Y.C. Pan, T.W. Chou: Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials. *Int. J. Engng. Sci.*,17,545-551,1979.
- [36] Y.C. Pan, T.W. Chou: Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *J. Appl. Mech.*,43,1,608-612,1976.
- [37] R.G. Payton: *Elastic wave propagation in transversely isotropic media*. Martinus Nijhoff, Hague, The Netherlands, 1983.
- [38] P. Pintado, F.G. Benitez: Three-dimensional elastodynamics of a plate subjected to concentrated internal loads under uniform motion. *Computer and Structures*,36,2,333-353,1990.
- [39] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling: *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [40] R.K.N.D. Rajapakse, Y. Wang: Elastodynamics Green's functions of orthotropic half plane. *J. of Engng. Mech.*,117,3,588-604,1991.
- [41] R.K.N.D. Rajapakse, Y. Wang: Green's functions for transversely isotropic elastic half space. *J. of Engng. Mech. ASCE*,119,9,1724-1746,1993.
- [42] L. Rongved: Force interior to one of two joined semi-infinite solids. *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Solid Mechanics*,1-13,1955.
- [43] S. J. Singh: Deformation of a multilayered half-space by stress dislocation and concentrated forces. *Bull. Seism. Soc. Am*, 61, 6, 1625-1637, 1971.

- [44] G.G. Stokes: On the dynamical theory of diffraction. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*,9,1,1849.
- [45] J.L. Synge: *The Hypercircle in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge,1957.
- [46] V.K. Tewary, R.H. Wagoner, J.P. Hirth: Elastic Green's function for a composite solid with a planar interface. *J. Mater. Res.*,4,1,113-123,1989.
- [47] S. Timoshenko, S Woinowsky-Krieger: *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 2ed, 1987.
- [48] W. Thompson (Lord Kelvin): Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*,3,87-89,1848.
- [49] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski: *The behavior of structures composed of composite materials*. Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [50] C.Y. Wang, J.D. Achenbach: A new look at 2-D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids. *Wave Motion*, 16, 389-405, 1992.
- [51] C.Y. Wang, J.D. Achenbach: A new method to obtain 3-D Green's functions for anisotropic solids. *Wave Motion*,18,273-289, 1993.
- [52] C.Y. Wang, J.D. Achenbach: 3-D Time-harmonic elastodynamic Green's function for anisotropic solids. *Proc. Roy. Soc.*, London, (In press).
- [53] H.C. Wang, P.K. Banerjee: Axisymmetric transient elastodynamic analysis by boundary element method. *Int. J. of Solids and Struct.*,26,401-415,1990.
- [54] Y. Wang, R.K.N.D. Rajapakse: Transient fundamental solutions for a transversely isotropic elastic half space. *Proc. R. Soc. Lond. A*,442,505-531,1993.
- [55] Y. Wang, R.K.N.D. Rajapakse: An exact stiffness method for dynamics of layered orthotropic media. *Proceedings of the 9th Conference on Engineering Mechanics*, ASCE, N.Y., 1008-1012,1992.
- [56] Y. Wang, R.K.N.D. Rajapakse: Asymmetric boundary-value problems for a transversely isotropic elastic medium. *Int. J. Solids Structures*,26,8,833-849,1990.
- [57] Y. Wang, R.K.N.D. Rajapakse: Axisymmetric elastodynamic Green's functions of a layered transversely isotropic half space. *Boundary Elements XIV. Vol.2: Stress Analysis and Computational Aspects*. (C.A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris, Eds.). Computational Mechanics Publications, 1992.
- [58] R. Warren: *Kompendium i Kompositmaterial*, Institutionen för konstruktionsmaterial, Chalmers Tekniska Högskola, 1986/87.
- [59] J. Wideberg, F.G. Benitez: Elastic stress and displacement distribution in an orthotropic multilayered system due to a concentrated load. Submitted for publication, 1994.