

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

**ANÁLISIS, CÁLCULO Y TÉCNICAS DE  
MITIGACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS  
CREADOS POR LÍNEAS ELÉCTRICAS DE  
ALTA TENSIÓN**

**TESIS DOCTORAL**

**Pedro Luis Cruz Romero**  
Ingeniero Industrial  
Escuela de Ingenieros de Sevilla

Sevilla, Septiembre de 2000



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

**ANÁLISIS, CÁLCULO Y TÉCNICAS DE  
MITIGACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS  
CREADOS POR LÍNEAS ELÉCTRICAS DE  
ALTA TENSIÓN**

**TESIS DOCTORAL**

**Autor: D. Pedro Luis Cruz Romero**  
**Director: D. Carlos Izquierdo Mitchell**

TRIBUNAL CALIFICADOR

**Presidente: D. Rafael Álvarez Isasi**  
**Vocales: D. Miguel J. Martínez Melgarejo**  
**D. Antonio Gómez Expósito**  
**D. Manés Fernández Cabanas**  
**Secretario: D. Manuel Burgos Payán**

Obtuvo la calificación de Sobresaliente "Cum Laude" por unanimidad

Sevilla, 3 de Noviembre de 2000

A mi esposa y padres

A aquellas Tres Cosas que los Antiguos consideraban imposibles debería sumársele esta cuarta:  
hallar un libro impreso sin erratas.

ALONSO DE CARTAGENA (1384-1456)

## Agradecimientos

Quisiera dedicar unas palabras a aquellas personas que de un modo u otro han colaborado para que este trabajo haya llegado a buen fin.

En primer lugar, al profesor Dr. Carlos Izquierdo Mitchell, por sus sabios consejos y su constante apoyo y confianza demostrada desde mi incorporación al Departamento de Ingeniería Eléctrica.

En segundo lugar, a Red Eléctrica S.A., por su aportación logística en las tareas experimentales desarrolladas.

Asimismo, agradecer el apoyo de mis compañeros del Departamento, siempre dispuestos a colaborar con sugerencias y comentarios muy provechosos.

Por último quisiera tener un cariñoso recuerdo para mi familia, especialmente mi esposa Belén, que nunca dejó de creer en mí.

Sevilla, septiembre de 2000

El autor

# Índice General

<b>1</b>	<b>Resumen y objetivos de la tesis</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mitigación de campos magnéticos en líneas eléctricas</b>	<b>5</b>
2.1	Reducción del campo magnético creado por líneas eléctricas . . . . .	6
2.1.1	Modificación del diseño de la línea . . . . .	7
2.1.2	Empleo de bucles de compensación . . . . .	10
2.1.3	Compensación mediante un material de alta permeabilidad magnética y/o conductividad eléctrica . . . . .	12
2.1.4	Empleo simultáneo de varios métodos . . . . .	13
2.2	Mitigación del CM generado por otras instalaciones eléctricas . . . . .	13
2.3	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Cálculo de campos magnéticos creados por líneas aéreas</b>	<b>15</b>
3.1	Introducción . . . . .	15
3.2	Cálculo del CM a partir de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	16
3.3	Efecto de la tierra en el CM creado por una línea eléctrica aérea . . . . .	19
3.4	Cálculo del CM a partir del modelo de la catenaria . . . . .	20
3.5	Modelo de conductor rectilíneo indefinido (RI) . . . . .	24
3.6	Método del desarrollo en serie . . . . .	31
3.6.1	Término de primer orden . . . . .	32
3.6.2	Término de segundo orden . . . . .	32
3.6.3	Término de tercer orden . . . . .	34
3.6.4	Término de cuarto orden . . . . .	35
3.6.5	Aplicación a líneas trifásicas de simple circuito . . . . .	36
3.6.6	Aplicación a líneas trifásicas de doble circuito . . . . .	42
3.7	Descomposición en dipolos de corriente . . . . .	48
3.7.1	Campo magnético creado por un dipolo . . . . .	49
3.7.2	Aplicación al campo magnético creado por líneas trifásicas equi- bradas . . . . .	59

## Índice general

---

3.8	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Configuración de conductores y campos magnéticos</b>	<b>89</b>
4.1	Introducción . . . . .	89
4.2	Conceptos previos . . . . .	90
4.3	Diseño de líneas aéreas de simple circuito . . . . .	92
4.3.1	Configuraciones horizontal, delta y delta invertida . . . . .	101
4.3.2	Configuración triangular. Variación del campo con la distancia entre conductores . . . . .	103
4.4	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Mitigación mediante la división de fases</b>	<b>107</b>
5.1	Introducción . . . . .	107
5.2	Campo magnético creado por un cuadripolo . . . . .	109
5.3	Cuadripolo óptimo . . . . .	110
5.4	Línea trifásica equilibrada con una fase dividida . . . . .	116
5.5	Línea trifásica equilibrada con dos fases divididas . . . . .	121
5.6	Línea trifásica equilibrada con tres fases divididas . . . . .	126
5.6.1	Diseño de líneas aéreas de doble circuito . . . . .	128
5.7	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Mitigación de CM mediante lazos</b>	<b>133</b>
6.1	Introducción . . . . .	133
6.2	Mitigación con lazos pasivos . . . . .	133
6.2.1	Corrientes inducidas en los lazos . . . . .	134
6.2.2	Reducción del campo creado por un dipolo . . . . .	139
6.2.3	Línea trifásica. Corriente inducida en dos lazos . . . . .	144
6.2.4	Línea con configuración horizontal de conductores . . . . .	146
6.2.5	Línea vertical . . . . .	155
6.2.6	Línea con disposición triangular (delta) de conductores . . . . .	160
6.2.7	Líneas doble circuito . . . . .	168
6.3	Compensación serie . . . . .	171
6.3.1	Componentes de secuencia inversa y homopolar . . . . .	175
6.4	Mitigación con lazos activos . . . . .	177
6.4.1	Línea horizontal . . . . .	179
6.4.2	Línea vertical . . . . .	182
6.4.3	Línea triangular (configuración delta) . . . . .	184
6.4.4	Línea con disposición doble circuito vertical . . . . .	187
6.4.5	Componentes de secuencia inversa y homopolar . . . . .	193



6.5	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	195
<b>7</b>	<b>Diseño del vano de prueba</b>	<b>197</b>
7.1	Introducción . . . . .	197
7.2	Circuito principal . . . . .	198
7.2.1	Parámetros geométricos y eléctricos del vano . . . . .	199
7.2.2	Equipo de alimentación . . . . .	202
7.3	Circuito de lazos . . . . .	204
7.3.1	Parámetros geométricos y eléctricos de los lazos . . . . .	205
7.3.2	Equipo de alimentación del lazo activo . . . . .	207
7.4	Diseño final del circuito de alimentación . . . . .	209
7.5	Equipo de medida . . . . .	213
7.6	Montaje del vano de prueba . . . . .	216
7.7	Campos externos . . . . .	219
7.8	Ensayos realizados. Procedimiento . . . . .	222
7.8.1	Ajuste de la alimentación al lazo activo . . . . .	224
7.9	Ensayos realizados. Resultados . . . . .	226
7.9.1	Disposición horizontal de conductores . . . . .	227
7.9.2	Disposición triangular de conductores . . . . .	232
7.9.3	Disposición vertical de conductores . . . . .	232
7.9.4	Disposición doble circuito vertical . . . . .	235
7.10	Resumen y conclusiones del capítulo . . . . .	239
<b>8</b>	<b>Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	<b>241</b>
8.1	Conclusiones principales . . . . .	241
8.1.1	Modelos de cálculo . . . . .	241
8.1.2	Diseño de líneas aéreas de simple circuito . . . . .	242
8.1.3	Mitigación mediante la división de fases . . . . .	242
8.1.4	Mitigación mediante la inserción de lazos pasivos . . . . .	242
8.1.5	Mitigación mediante la inserción de lazos activos . . . . .	243
8.1.6	Validación experimental . . . . .	244
8.2	Propuestas de líneas futuras de investigación . . . . .	244
<b>A</b>	<b>Campos electromagnéticos y salud</b>	<b>247</b>
A.1	Investigaciones realizadas . . . . .	247
A.2	Niveles típicos de exposición a campos electromagnéticos de baja frecuencia	249
A.3	Límites y recomendaciones de los niveles de exposición a campos electro- magnéticos de baja frecuencia . . . . .	250

## Índice general

---

<b>B</b>	<b>División de fases. Determinación de configuraciones óptimas</b>	<b>251</b>
B.1	Determinación del cuadripolo óptimo . . . . .	251
B.2	Determinación de la línea óptima con una fase partida . . . . .	254
B.3	Determinación de la línea óptima con dos fases partidas . . . . .	256
B.4	Determinación de la línea óptima con tres fases partidas . . . . .	257
<b>C</b>	<b>Inductancias propia y mutua de lazos</b>	<b>261</b>
C.1	Lazos largos y próximos entre sí . . . . .	261
C.2	Lazos cortos y/o distantes entre sí . . . . .	265
C.2.1	Cálculo de la inductancia propia . . . . .	266
C.2.2	Cálculo de la inductancia mutua . . . . .	267
	<b>Bibliografía</b>	<b>271</b>

# Capítulo 1

## Resumen y objetivos de la tesis

Como consecuencia de la creciente sensibilización social, de las recomendaciones emitidas por diferentes organismos, y de la progresiva normalización de los niveles de campo electromagnético (CEM) creado por líneas eléctricas, las compañías eléctricas que tienen a su cargo la planificación y explotación de las redes de transporte, reparto y distribución, están empezando a considerar como un factor clave en el diseño de nuevas líneas los niveles de CEM generados. Por otra parte, es de sumo interés desarrollar técnicas fiables a bajo coste que mitiguen parte del campo generado por líneas ya existentes, en tramos en los que puede existir una especial incidencia sobre ambientes domésticos o laborales (vg. explotaciones ganaderas).

Enmarcada en esta problemática, vienen desarrollándose en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla, en colaboración con Red Eléctrica de España, una serie de actividades de divulgación e investigación, relacionadas con el análisis y mitigación de los CEM. Una de ellas tiene como objetivo analizar la posibilidad de emplear lazos de conductor cerrados para reducir los niveles de campo magnético (CM) generados por líneas de alta tensión (AT), y en particular la red de 400 kV. Esta tesis recoge el fundamento de los trabajos realizados en el marco de dicho proyecto de investigación, habiéndose profundizado en algunos aspectos teóricos y de diseño de las líneas.

El objetivo principal de la tesis es, por tanto, desarrollar y validar experimentalmente una formulación que permita, por un lado, analizar el CM creado por líneas de AT, especialmente la red de transporte a 400 kV, y por otro, evaluar la eficacia de dos técnicas de mitigación, división de fases e inserción de lazos activos y pasivos. Este análisis se realiza, no sólo lejos de la línea (distancias del orden de 100 m), como se ha venido haciendo tradicionalmente, sino en puntos cercanos a la línea e incluso bajo la misma. Adicionalmente, se han obtenido nuevos hallazgos en relación a la formalización matemática empleada en

el cálculo de CM, y se han comparado entre sí los niveles de CM creados por las principales configuraciones empleadas en líneas de AT.

La tesis se ha estructurado como se expone a continuación.

El capítulo 2 revisa las principales técnicas propuestas para la mitigación de campos magnéticos creados por líneas eléctricas de transporte y distribución, así como por otras instalaciones eléctricas.

En el capítulo 3 se analizan los métodos de cálculo de CM existentes, estudiando su rango de validez en líneas de AT.

En el capítulo 4 se introducen unos conceptos relacionados con la mitigación de campo y se analizan, a partir de las aproximaciones presentadas en el capítulo 3, las configuraciones de conductores óptimas desde el punto de vista de bajos niveles de CM.

El capítulo 5 analiza el método de mitigación de fase partida, obteniendo las configuraciones que minimizan el campo si la división se aplica a una fase, a dos, o a tres.

El capítulo 6 presenta los fundamentos teóricos de la mitigación del CM mediante lazos de compensación activos y pasivos, y aplica dicho análisis al caso de líneas de AT, especialmente las configuraciones existentes en la red de transporte española.

El capítulo 7 presenta el diseño e implantación de un vano experimental de prueba desarrollado para validar el modelo matemático empleado en el análisis de la mitigación del campo con lazo. Asimismo, se muestran los resultados obtenidos de las medidas de campo realizadas en el vano de prueba, comparándose con el modelo desarrollado.

El capítulo 8 presenta las principales conclusiones del trabajo desarrollado, exponiendo asimismo futuras líneas de investigación.

Por último se incluye la bibliografía utilizada y los siguientes apéndices.

El apéndice A constituye una breve revisión de las investigaciones desarrolladas para relacionar los CEM con la salud, así como de las recomendaciones y normas que afectan a las líneas aéreas.

El apéndice B presenta la formulación teórica para obtener las configuraciones óptimas

que minimizan el campo cuando se divide una, dos, o tres fases.

Por último, en el apéndice C se obtienen las expresiones que determinan las inductancias propia y mutua entre lazos.



## Capítulo 2

# Mitigación de campos magnéticos en líneas eléctricas

Se está viviendo en la última década un mayor esfuerzo investigador relacionado con la búsqueda de métodos de mitigación de campos magnéticos generados por instalaciones eléctricas (transporte y distribución, generación, transformación), para reducir la exposición a los mismos. A nivel industrial, la reducción de CM viene siendo una práctica habitual para evitar las interferencias electromagnéticas entre equipos.

Se pueden distinguir dos estrategias de reducción del campo magnético:

- Aquellas que buscan reducir el CM generado por una fuente concreta (subestación, línea, equipo, etc.). Con ello se pretende que una zona amplia alrededor de la fuente se beneficie.
- Aquellas que buscan proteger un espacio concreto, en general pequeño (habitación, sala, equipo), frente a campos externos. En este caso las fuentes de campo externas pueden ser varias.

Para ambas estrategias existen dos técnicas de mitigación: activa y pasiva. La pasiva consiste en modificar algunos de los parámetros de la fuente, o en disponer apropiadamente una pantalla de material con elevada permeabilidad magnética relativa (de modo que se desvíen las líneas de campo) o conductividad eléctrica (se inducen corrientes parásitas cuyo campo se opone al original) , o ambas a la vez. La activa consiste en introducir unas corrientes de amplitud y fase apropiadas, cuyo campo contrarresta el original. Un resumen de los principales estudios relacionados con la mitigación del campo creado por instalaciones eléctricas puede verse en [13].

Se analizan a continuación las técnicas propuestas para reducir el CM generado por

líneas eléctricas aéreas y enterradas.

## 2.1 Reducción del campo magnético creado por líneas eléctricas

Las principales técnicas que pretenden reducir el CM creado por instalaciones eléctricas y, en particular, líneas eléctricas aéreas y subterráneas, son las siguientes:

- Técnicas que buscan la modificación del diseño de la línea:
  - Configuración de conductores [42, 31, 17, 59]
  - Distancia entre fases [42, 10]
  - Altura de conductores [42, 31]
  - División de fases [40, 44, 58]
- Técnicas que introducen una pantalla compuesta por conductores de compensación, pasivos o activos [80, 36, 58, 48, 10, 63, 54].
- Empleo de pantallas realizadas a base de chapa de material con alta permeabilidad magnética y/o conductividad eléctrica [15, 35, 14, 81, 31].
- Sistemas híbridos a base de planchas y lazos activos [29].

Otras sugerencias han sido propuestas. Stewart y otros [71] proponen el empleo de líneas hexafásicas y dodecafásicas para, además de mejorar otros aspectos de la transmisión (vg. efecto corona), reducir el CM. Sin embargo, la pequeña reducción que se consigue (un 10%) frente a la línea trifásica, y el coste que implica no justifica el empleo de más fases con la finalidad principal de reducir el campo, por lo que hoy día no se apuesta por su aplicación. Por otra parte, Adams y Trivette [3] plantean la posibilidad de incluir en la planificación y gestión de una red de transporte la incidencia en el CM generado.

Siguiendo la recomendación de los principales organismos, *mitigar a bajo coste*, la evaluación económica de las soluciones propuestas es un análisis previo a cualquier decisión. Cabe destacar el desarrollo simplificado que proponen Rashkes y Lordan [62], en el que se analiza el coste relativo de la variación de los distintos parámetros que definen una línea eléctrica, así como el coste que supone la inserción de conductores de compensación. Se concluye de dicho estudio que la solución que permite conseguir altos niveles de reducción a un coste moderado es la división de fases.



### 2.1.1 Modificación del diseño de la línea

Se analiza a continuación el efecto que tienen diversos parámetros (configuración de conductores, distancia entre fases, altura de conductores, división de una o varias fases en varios conductores) sobre el CM creado por líneas aéreas.

Conviene aclarar previamente que la modificación del diseño de las líneas para reducir el nivel de campo magnético generado puede afectar a otras características de funcionamiento. Tradicionalmente se ha analizado el impacto del diseño en aspectos tales como pérdidas por efecto corona, ruido electromagnético, ruido audible, desequilibrio eléctrico, pérdidas en la transmisión, tensiones inducidas en líneas paralelas u otro tipo de estructuras metálicas (tuberías, vallas metálicas), campo eléctrico, etc. [76, 73, 51, 16]. Con la introducción de la restricción del campo magnético en el diseño, es necesario revisar las afecciones de los nuevos diseños en las restricciones tradicionales. Conti [10] resume los principales efectos beneficiosos de la división de fases (ligera reducción del campo eléctrico, reducción significativa de la impedancia característica de la línea), así como los negativos (incremento del ruido electromagnético y acústico). En [62] se analizan las limitaciones a la reducción de la distancia entre fases (compactación): existencia de viento, rigidez dieléctrica del aire, ruido audible.

#### Disposición de los conductores en líneas de simple circuito

A igualdad de distancia mínima entre fases e intensidad, es posible reducir el CM creado por una línea modificando la disposición de los conductores. En numerosas referencias se pueden encontrar las curvas de campo generadas por las configuraciones más empleadas en líneas de AT (horizontal, vertical, y triangular). Latorre y otros [42] muestran unos perfiles de campo en los que se observa que las configuraciones horizontal y vertical generan un campo similar, siendo menor el generado por la configuración delta. Sin embargo, no se citan claramente las condiciones de comparación (igual intensidad por fase, igual altura de conductores). Horton y Goldberg [31] muestran los perfiles de campo de diversas configuraciones típicas en 115 kV, 230 kV, 345 kV, y 500 kV.

Un criterio de comparación entre configuraciones que, a juicio del autor de la presente tesis, es el más apropiado, consiste en suponer que la altura mínima al terreno es constante. Este criterio es el que se empleará en el capítulo 4, donde se comparará el campo generado por las diversas disposiciones de simple circuito, tanto bajo la línea como a una distancia representativa (v.g. el límite de la servidumbre de paso).

### Disposición de las fases en líneas de doble circuito

En las líneas de doble circuito se obtiene una reducción importante del campo (de dos a tres veces en el límite de la servidumbre de paso) si se emplea la configuración de baja reactancia ( $abc-cba$ ) frente a la superhaz ( $abc-abc$ ) [17]. Aunque bajo la línea el nivel de campo es similar, en el primer caso el campo es proporcional a la distancia al cubo, y en el segundo a la distancia al cuadrado, tal como se deduce de la formulación propuesta por Kaune y Zaffanella [40], basada en la expansión en serie de potencias. Además de la ventaja anterior, la configuración de baja reactancia presenta otras ventajas, como la menor impedancia de la línea (como indica su nombre), mayor potencia natural, menores niveles de campo eléctrico, menor desequilibrio entre fases [17] y menores corrientes inducidas en el conductor de tierra [51], lo que implica menores pérdidas resistivas y menor intensidad de retorno por tierra, lo cual reduce la corrosión en tuberías enterradas bajo la línea.

Un aspecto negativo de la configuración de baja reactancia es la mayor sensibilidad del campo a desequilibrios de la línea (presencia de componente homopolar). Olsen y Wong [53] muestran que el campo magnético puede ser más del 100% mayor del esperado cuando existe una fluctuación de corriente por las fases del 2% de la corriente total. Asimismo, muestra que el reparto no equitativo de carga en ambos circuitos causa una degradación en la reducción teórica del campo, aunque no tan seria como el desequilibrio. Este último es más importante en líneas de distribución (el desequilibrio puede alcanzar el 20% [32]) que en transmisión. Otra desventaja de la configuración de baja reactancia es la mayor importancia del efecto corona.

### Reconfiguración de las fases en líneas subterráneas

En sistemas de transmisión subterráneos con varios circuitos, un diseño adecuado de la configuración de las fases permite reducir el nivel de CM considerablemente. Karady [38] presenta un método práctico para encontrar la configuración óptima de fases en un sistema de transmisión subterráneo, suponiendo corrientes equilibradas. Aplicándolo se obtienen factores de reducción (relación entre el campo original y el reducido) de 20. Karady y otros [39] desarrollan un método para optimizar la disposición de las fases cuando existe desequilibrio. Se observa que el desequilibrio incrementa el campo, pero la reducción del campo es aún significativa. Habiballah y otros [26] presentan nuevas configuraciones para uno, dos, tres y cuatro cables por fase. Se obtiene con cuatro cables por fase una reducción casi completa del campo.

Una técnica sencilla, aunque poco empleada con fines de reducción de campo, es el arrollamiento helicoidal de los cables. En [44, 59] se analiza esta posibilidad, obteniéndose una caída de CM exponencial con la distancia.

### Separación entre fases

El CM generado por una línea disminuye conforme se reduce la separación entre conductores de distinta fase. Además, conforme crece la distancia a la línea la relación entre el CM y la separación entre fases tiende a ser lineal. Ambos resultados se deducen de la expresión simplificada del campo obtenida en [40]. El diseño de líneas compactas ha sido objeto de estudio, no sólo por este efecto beneficioso, sino por otras ventajas, como la reducción de la servidumbre de paso, reducción de la impedancia de la línea, incremento de la potencia natural, reducción de la compensación serie y paralela, etc. [16]. Sin embargo, el incremento del efecto corona ha dificultado la compactación en líneas con tensiones superiores a 132 kV.

El diseño de líneas compactas no alude solamente a la reducción de la distancia entre fases para una configuración determinada, sino a la configuración de conductores que minimiza la distancia geométrica media entre fases (configuración triangular).

La variación del campo con la distancia entre fases es similar en las configuraciones más empleadas (horizontal, vertical, triangular), como se muestra en [10].

### Altura de conductores

De la expresión matemática del CM creado por líneas (se verá en el capítulo 3) se deduce que éste disminuye al incrementarse la altura de los conductores. Además, esta variación no es constante en todos los puntos. Bajo la línea la variación del campo es función de la altura elevada a un exponente cuyo valor oscila entre 1,3 y 1,6 [42]. Conforme la distancia a la línea crece la variación con la altura es menor, hasta hacerse despreciable. La distancia para la cual ocurre esto depende de la altura inicial de la línea. En [31] se muestran unas gráficas de las que se puede deducir que en líneas de 500 kV la distancia a partir de la cual el CM creado por la línea es independiente de la altura está alrededor de los 50 m. Para líneas de 345 kV se reduce a 35 m. Por último, para líneas de 230 y 132 kV dicha distancia está alrededor de los 20 m.

Incluso para una misma línea la disminución del CM con la altura puede observarse midiendo el campo bajo la línea longitudinalmente. Debido a la catenaria que describe el conductor, en el centro de un vano el campo será mayor que en los extremos.

### División de fases (fase partida)

Si una, dos, o las tres fases que componen una línea se dividen en dos o más conductores convenientemente separados se observa una reducción del CM. En [40] se obtienen expre-

siones simplificadas del CM creado por configuraciones de conductores con división en dos de las fases (dos conductores por fase), donde se observa una reducción del campo con la distancia al cubo. Si la división es en tres fases se obtiene una reducción con la distancia elevada a la cuarta. Pettersson [58] provee una expresión similar del campo resultante, válida para cualquier número de fases partidas, y cualquier número de conductores en cada fase.

Los análisis anteriores se basan en formulaciones aproximadas del campo, no válidas en puntos próximos a la misma. Además se han centrado los estudios en la división de dos o tres fases. En el capítulo 5 se deducen las configuraciones que permiten una máxima reducción del campo en diferentes puntos a lo largo de la trayectoria transversal de la línea, e incluso bajo la línea. Además se analizan las posibilidades de la división de sólo una de las fases.

### 2.1.2 Empleo de bucles de compensación

Este método consiste en insertar un circuito auxiliar de compensación formado por uno o más lazos o bucles en una posición cercana a la línea, o próxima a la zona a proteger. El propio CM creado por la línea induce una corriente en dicho circuito, cuyo campo se opone al original (compensación pasiva). Una alternativa consiste en inyectar en el circuito una corriente de amplitud y fase tales que el CM generado compense el CM original (compensación activa).

El uso de bucles de compensación viene empleándose en aplicaciones biomédicas y físicas, preferentemente para reducir campos magnéticos continuos [41]. Sin embargo, no ha sido hasta la última década cuando se ha empezado a considerar la posibilidad de aplicar la misma técnica a fuentes de campos electromagnéticos de frecuencias extremadamente bajas, en concreto las líneas aéreas. Se resumen a continuación las principales investigaciones.

Walling y otros [80] analizan la mitigación que se consigue en una línea trifásica horizontal con la inserción de un bucle horizontal situado bajo la línea. Para aumentar la corriente inducida se inserta un condensador en serie en el bucle. De este modo se consigue una reducción no homogénea del campo, siendo máxima (reducción del campo unas 6 veces) a unos 20 m de la línea. Se analiza también el efecto sobre la impedancia de la línea de la inserción de dicho circuito en la línea, observándose una ligera influencia en la impedancia de secuencia directa y la componente de secuencia negativa, y una influencia

despreciable en la homopolar.

Jonsson y otros [36] analizan un esquema de compensación pasivo y activo aplicado a una configuración triangular o delta. El circuito de compensación consiste en tres conductores formando una configuración delta invertida. En este caso la corriente que circula por los conductores se genera por una fuente de alimentación independiente trifásica (compensación activa). Se observa una reducción a 100 m de la línea del 45% con la compensación pasiva con condensador, del 60% con la compensación activa suponiendo alimentación equilibrada, y una compensación total suponiendo alimentación independiente a cada fase. El valor de la intensidad por el circuito de compensación activo se obtiene mediante un cálculo iterativo. Se hace también un estudio económico de la implantación de las diversas alternativas, obteniéndose para el método más eficiente (compensación activa independiente) un incremento del coste del tramo de línea protegido del 20%.

Memari y Janischewskyj [48] muestran con un ejemplo similar al de Walling los cálculos necesarios para obtener la intensidad inducida en el lazo de mitigación pasivo. Para ello calculan el flujo que atraviesa el lazo, y aplican la Ley de Inducción de Faraday para obtener la fuerza electromotriz inducida. Dividiendo por la impedancia del lazo se obtiene la intensidad. Demuestran también que con un lazo se puede reducir el CM, no sólo sobre el suelo, sino en posiciones más elevadas.

Olsen y otros [54] obtienen la intensidad inducida a partir de la expresión de la fuerza electromotriz inducida en los conductores del lazo, teniendo además en cuenta el efecto de la tierra.

En el capítulo 6 se obtendrán expresiones simplificadas de la intensidad inducida en uno o varios lazos de mitigación, donde el efecto de la tierra se despreciará (se justificará convenientemente). Además se deducirán criterios generales para seleccionar el número, características y emplazamiento de los lazos de mitigación pasivos y activos para las principales disposiciones de conductores de fase en líneas de transporte. La intensidad a inyectar a los lazos activos se obtendrá analíticamente una vez fijada la posición de los mismos. Por último se estudiará la influencia de la componente homopolar en la efectividad de la pantalla.

Configuraciones de apantallado más complejas se han propuesto también. Reta y otros [63] analizan teóricamente un diseño de pantalla activa con el objeto de proteger un espacio reducido (unos 50 m<sup>2</sup>) frente al campo generado por una línea horizontal situada encima. Para ello se dispone una serie de lazos (entre 5 y 10) rodeando, a modo de jaula, el espacio a proteger. Se han obtenido atenuaciones de hasta el 95% en algunos puntos

del interior. Una objeción importante a este esquema es la dificultad y coste implícito para alimentar de forma independiente un número tan elevado de lazos (en total entre 15 y 30).

### 2.1.3 Compensación mediante un material de alta permeabilidad magnética y/o conductividad eléctrica

Si se intercala entre la fuente de CM y la zona a proteger una pantalla compuesta por una o varias capas de material ferromagnético y/o conductor se observa una reducción del campo magnético detrás de la pantalla. La eficiencia del apantallado depende del tipo de fuente, material (permeabilidad magnética, conductividad eléctrica), espesor y dimensiones de la pantalla, y su localización relativa al espacio a reducir. En función del material a emplear la compensación se efectúa por mecanismos distintos. Si el material es de alta permeabilidad magnética (Permalloy,  $\mu$ metal) la reducción se consigue mediante la desviación y encaminamiento de las líneas de flujo por el interior de la pantalla, cuya reluctancia es mucho menor que en el exterior (Véase [31] para un análisis más detallado). Si el material es buen conductor (aluminio, cobre), aunque su permeabilidad sea pequeña, se inducen en su interior corrientes parásitas que tienden a oponerse al campo magnético externo (Rikitake [64] provee discusión detallada para distintas configuraciones). Las pantallas de material ferromagnético presentan la ventaja de necesitar menor espesor de chapa, pero son mucho más caras. Por ello una opción que se está estudiando es el empleo de pantallas compuestas por capas alternas de material ferromagnético y conductor [13].

Para líneas aéreas existen pocas experiencias o estudios realizados. En [31] se obtiene un factor de reducción de 11 para un apantallamiento ferromagnético de 5 mm de espesor con una permeabilidad relativa de 10000, siendo la fuente un conductor aéreo. Se puede conseguir la misma eficacia con una pantalla conductora de cobre de 1,7 cm, o de aluminio de 2,9 cm. Wassef y otros [81] aplican el método de elementos finitos para analizar la atenuación conseguida por una pantalla cilíndrica concéntrica con el conductor. Si el cilindro es cerrado se obtiene poca atenuación. Si se abre por encima del cable un ángulo de unos 5° se obtienen reducciones bajo la línea del 50%. El estudio no indica qué reducción se consigue en puntos alejados de la línea.

Se pueden encontrar un buen número de referencias que estudian la mitigación en líneas subterráneas [30, 15, 18, 35, 14]. Se resumen a continuación las principales conclusiones.

Las pantallas para cables subterráneos pueden ser cilíndricas [30, 64] o planas [15, 18]. Horton y Goldberg [30] obtienen, a partir de simulaciones efectuadas, un factor de reducción de 200 para corrientes equilibradas. En [64] se obtiene una solución analítica

para pantallas cilíndricas de material ferromagnético, donde se observa que la reducción crece con el espesor del cilindro. Durkin y otros [15] recogen experiencias de empleo de planchas de acero, colocadas encima de los cables, lo cual permite una reducción de dos a cuatro veces. En [18] se emplea una pantalla compuesta por dos planchas de materiales de alta y media permeabilidad, obteniéndose reducciones de hasta el 98%. Un análisis matemático en detalle del efecto de las pantallas planas de mitigación en el CM generado por conductores puede verse en [35, 14].

#### 2.1.4 Empleo simultáneo de varios métodos

Los métodos analizados anteriormente pueden emplearse simultáneamente, con lo que se consiguen reducciones mayores de CM. Además, esto es más aconsejable desde el punto de vista de reducción de costes.

Hiles y otros [29] proponen una solución basada en el empleo simultáneo de chapas de material de alta permeabilidad y/o conductividad, junto con un lazo de mitigación activo. Esta solución puede aplicarse a todo tipo de fuentes de CM. En particular, la aplican a la mitigación del CM en el interior de una oficina contigua a un cuadro de protecciones por el que circula una intensidad de 1000 A. Se ensayaron diversas soluciones, obteniéndose un factor de reducción máximo de 6, con el empleo de chapa de aluminio o de acero. Empleando simultáneamente ambos materiales se obtuvo un factor de reducción de 9. Por último se añadió un lazo activo, con lo que se consiguió una reducción casi completa en algunos puntos de medida.

## 2.2 Mitigación del CM generado por otras instalaciones eléctricas

Se ha propuesto el empleo de planchas para reducir el CM generado por centros de transformación de BT [15, 28], baterías de condensadores [15], cuadros de protecciones (visto en el apartado 2.1.4), y cables en edificios de oficinas [13].

En [15] se recoge una experiencia relacionada con el empleo de pantallas de  $\mu$ metal para reducir el CM creado por celdas de protección de centros de transformación de BT. Se consigue un campo 25 veces menor que el original con una pantalla de 1,59 mm de espesor. Con la misma pantalla se consiguió igual atenuación cuando la fuente era una batería de condensadores de 200 kVAr.

Hasselgren y otros [28] presentan un ejemplo de apantallamiento de un centro de

transformación de BT. Para ello se emplean planchas de aluminio de 5 mm de espesor, colocadas en el techo y paredes. Se consigue un campo 30 veces menor que el original.

Un caso de reducción de CM creado por cables de distribución situados tras una pared de una gran oficina se presenta en [13]. Colocando varias planchas de acero de transformador en la pared se consiguen reducciones del 50 al 90 %.

## 2.3 Resumen y conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se han revisado las principales técnicas propuestas para reducir el campo magnético en líneas eléctricas aéreas y subterráneas (apartado 2.1), y otras instalaciones eléctricas (apartado 2.2). En concreto, para las líneas eléctricas se han analizando las técnicas que modifican algún parámetro de la línea, las que introducen bucles de compensación y las que insertan una pantalla de material ferromagnético y/o conductor. Las primeras son más apropiadas para líneas de nueva creación. Las segundas pueden emplearse para reducir el campo en una sección determinada de la línea, consiguiéndose factores de reducción entre 1,75 y 2,5 (lazo pasivo), y la compensación completa localmente (lazo activo). Con las terceras se obtienen mayores reducciones, a costa de un incremento del coste de la pantalla, con lo que habitualmente se emplean para reducir el campo en espacios reducidos. Una solución intermedia es el empleo simultáneo de pantallas a base de chapa y lazos de mitigación activos, obteniéndose reducciones locales de casi el 100%.



# Capítulo 3

## Cálculo de campos magnéticos creados por líneas aéreas

### 3.1 Introducción

El cálculo exacto del campo electromagnético generado por líneas de transmisión requiere el empleo de las ecuaciones de Maxwell. En líneas de transmisión de potencia, debido a la baja frecuencia de la corriente, las ecuaciones de Maxwell se simplifican de manera que puede aplicarse la ley de Biot-Savart a la curva catenaria que compone el conductor de un vano, o a modelos del conductor más simples. Uno de ellos es la división de la curva en elementos lineales a trozos, como aplican Pappa y Ben-Yaacov [56]. Otro considera los conductores rectilíneos e indefinidos (RI). Este modelo puede encontrarse en algunas aplicaciones informáticas [21, 43, 54].

La ley de Biot-Savart considera los conductores reducidos a hilos de sección nula, hipótesis válida para distancias alejadas de los mismos, incluso cuando existe más de un conductor por fase [42]. Este es el caso habitual, ya que el interés se centra en determinar el campo cercano al suelo, donde existe una mayor exposición. Si se desea calcular el campo cerca de los conductores es más exacto aplicar el método de los elementos finitos [6]. Hameyer y otros [34] prueban que su aplicación en puntos alejados de la superficie de los conductores reduce el error de cálculo frente a la ley de Biot-Savart. Un método alternativo para el cálculo del CM cerca de los conductores es el propuesto por Abdel-Salam y otros [1]. Consiste en dividir cada subconductor de cada fase en hilos cuyas

intensidades se calculan de manera que satisfagan unas ecuaciones de contorno conocidas.

Se han propuesto diversas simplificaciones al modelo rectilíneo indefinido, como la expansión en series [40] o la descomposición en dipolos (propuesta por Pettersson, [57]), que presentan algunas ventajas:

- Permiten conocer los principales parámetros que influyen en el CM generado por líneas aéreas.
- Permiten conocer cómo varía el campo magnético con la distancia transversal a la línea.
- Permiten analizar de una manera sencilla nuevos diseños de configuraciones que reducen el CM generado.
- Facilitan el análisis de técnicas de mitigación: división de fase, lazo pasivo y activo.
- Son útiles para estimar los niveles de exposición a CM, necesarios en estudios epidemiológicos.

En el presente capítulo se analizarán las simplificaciones enunciadas anteriormente, y se caracterizará el campo creado por las principales configuraciones empleadas en líneas eléctricas de AT. Asimismo se revisarán las formulaciones propuestas en [40, 57], así como los errores cometidos, respecto al modelo RI, al obtener el CM a partir de las mismas.

Si no se indica lo contrario, los valores de CM que se muestran en el presente trabajo se han obtenido a 1 m del suelo, valor comúnmente empleado tanto para cálculo como medida [8]. Asimismo, los puntos donde se mide el campo corresponden a una trayectoria transversal perpendicular a la dirección de los conductores.

Es conveniente aclarar por último que en los ejemplos que se van a mostrar las alturas y distancias entre fases corresponden a valores típicos en líneas de AT, en concreto de 400 kV.

## 3.2 Cálculo del CM a partir de las ecuaciones de Maxwell

De las ecuaciones de Maxwell se observa que la presencia de cargas en movimiento genera simultáneamente campos eléctricos y magnéticos acoplados, con lo cual el problema del

cálculo de los campos eléctrico y magnético requiere la resolución de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden en las coordenadas espaciales y en el tiempo (ecuación de ondas electromagnéticas).

Una formulación más sencilla se obtiene teniendo en cuenta que la frecuencia de la corriente es pequeña en líneas de transmisión de potencia. Es posible entonces desacoplar los cálculos del campo eléctrico y magnético creados por la línea (campos cuasiestacionarios), siendo el primero función exclusiva del potencial del conductor, y el segundo de la corriente que circula por el mismo. Matemáticamente, esto significa despreciar, en la tercera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.1)$$

el término correspondiente a la corriente de desplazamiento  $\vec{D}$ . En (3.1),  $\vec{H}$  representa la intensidad de campo magnético,  $\vec{J}$  la densidad de corriente eléctrica, y  $t$  el tiempo.

Cabe aclarar, a efectos de notación, que las magnitudes fasoriales se escribirán en negrita, y las magnitudes vectoriales con un vector.

Se calcula a continuación con un ejemplo el error cometido con esta aproximación. Para ello se seguirá a Olsen y Wong [52].

Considérese una corriente uniforme  $i(t)$  que circula por un hilo rectilíneo de longitud infinita en el vacío (figura 3.1). Supóngase además que el hilo está fijo en el espacio, pero la corriente varía senoidalmente con pulsación  $\omega = 2\pi f$ , siendo  $f$  la frecuencia. La tercera ecuación de Maxwell en forma integral y fasorial viene dada por

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + j\omega\epsilon_0\vec{E}) \cdot d\vec{s} \quad (3.2)$$

siendo

S: superficie de control

C: contorno de la superficie de control

$\vec{B}$ : vector densidad de campo magnético

$\vec{E}$ : vector campo eléctrico

$\epsilon_0$ : permitividad dieléctrica del vacío ( $8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m)

$\mu_0$ : permeabilidad magnética del vacío ( $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m)

Teniendo en cuenta la simetría axial y radial, el primer miembro de (3.2) puede ponerse como

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\phi \quad (3.3)$$

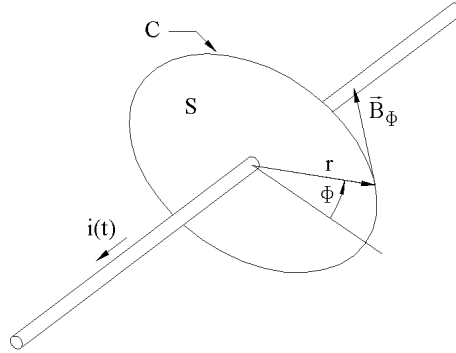


Figura 3.1: Campo magnético creado por la corriente  $i(t)$

La solución exacta de (3.2) viene dada por

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I k}{4} (J_1(kr) \text{sen } \omega t - Y_1(kr) \text{cos } \omega t) \quad (3.4)$$

siendo  $k = \omega/c$ ,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, e  $I$  la amplitud de la corriente. Por otra parte  $J_1(x)$  e  $Y_1(x)$  son respectivamente las funciones de Bessel de orden 1, primera y segunda clase respectivamente

$$J_p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(p+1+i)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2i} \quad (3.5)$$

$$Y_1(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{J_p(x) \text{cos } px - J_{-p}(x)}{\text{sen } px} \quad (3.6)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \quad (3.7)$$

Para  $kr \ll 1$  (3.5) y (3.6) se simplifican

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \quad (3.8)$$

$$Y_1(x) = \frac{-2}{\pi x} + \frac{1}{\pi} x \ln \frac{x}{2} \quad (3.9)$$

Sustituyendo en (3.4) resulta

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I \text{cos}(\omega t)}{2\pi r} \quad (3.10)$$

que coincide con la expresión del campo creado por una corriente rectilínea indefinida, obtenido de (3.1) cuando se anula  $\vec{D}$ .

Si  $f = 50$  Hz y  $r = 1000$  m se obtiene un error del 0,0004% al emplear (3.10) en lugar

de (3.4). A distancias menores el error es aún más pequeño. Se concluye entonces que puede despreciarse la corriente de desplazamiento en (3.1).

### 3.3 Efecto de la tierra en el CM creado por una línea eléctrica aérea

Un hilo conductor situado sobre un medio continuo también conductor induce corrientes en el interior del medio. Esto es lo que ocurre al circular una corriente por los conductores de las líneas eléctricas aéreas situadas a cierta altura sobre la tierra. Este problema fue abordado por vez primera por Carson [9], quien consideró la tierra de resistividad uniforme e infinita en extensión. A partir de las ecuaciones de Maxwell, de la teoría de circuitos, y de resultados experimentales, Carson obtuvo unas expresiones de las impedancias propia y mutua entre dos conductores. Dada la complejidad de las expresiones, posteriormente se han desarrollado formulaciones alternativas más simples y con suficiente exactitud. Una de ellas es la debida a Wait [79]. Considérese para ello un conductor situado en  $(x_1, y_1)$  (figura 3.2). Wait considera el efecto de la tierra equivalente al de un conductor imagen, de igual radio, por el que circula la misma intensidad que el real, y situado en  $(x, -y - \alpha)$ , siendo

$$\alpha = \sqrt{2}\delta e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (3.11)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}} \quad (3.12)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad de la tierra en S/m.

En otra formulación se considera la tierra compuesta por un conjunto de capas conductoras con distribución uniforme de corriente en cada una [27]. Una última considera sólo el primer término de la serie de Carson [17]. Esta aproximación es válida para distancias a la línea menores de 150 m, y resistividad del terreno superior a 3  $\Omega\text{m}$ .

Debido a que a la frecuencia de 50 Hz la profundidad del conductor imagen es mucho mayor que la altura del conductor real, el efecto del conductor imagen puede despreciarse cuando se mide el campo magnético a distancias inferiores a un cierto valor.

Se determina a continuación, para el caso concreto de la línea de la figura 3.2 el error cometido a diferentes distancias de la línea, cuando no se consideran los conductores imágenes. Suponiendo conductores de longitud infinita el campo debido a cada conductor viene dado por (3.10). El campo total se obtendrá sumando vectorialmente el debido a cada conductor. La figura 3.3 muestra las curvas de error, para dos valores distintos de

$\sigma$  en función de la distancia a la línea. La altura de la línea es 10 m y la distancia entre fases 8 m, valores típicos de líneas de transporte. Los valores de  $|\alpha|$  son 318 m ( $\sigma = 0,1$  S/m) y 1007 m ( $\sigma = 0,01$  S/m), muy superiores a la altura de la línea.

De la figura 3.3 se puede observar que el error cometido depende sensiblemente de la resistividad del terreno. Para una resistividad típica de  $100 \Omega\text{m}$  se observa un error pequeño (menor del 3%) cuando se calcula el campo para distancias inferiores a unos 400 m. Para una resistividad elevada del terreno ( $10 \Omega\text{m}$ ) la distancia para la cual el error es menor del 3% se reduce a 150 m. A esta distancia el CM creado por líneas aéreas de AT presenta unos valores mucho menores que a distancias más cercanas, por lo que el cálculo exacto del campo presenta un interés secundario. En la presente tesis se calculará el campo a distancias inferiores a 100 m, por lo que no se considerará la presencia de los conductores imagen.

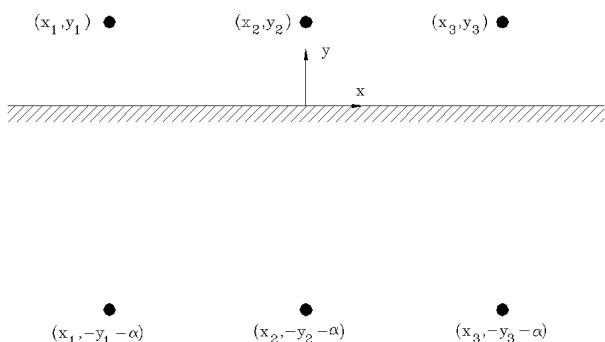


Figura 3.2: Línea trifásica de ejemplo para el cálculo del error del CM al no considerar el efecto de la tierra.

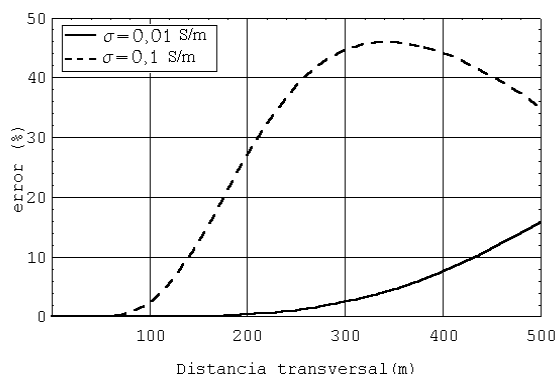


Figura 3.3: Curvas de error en el cálculo del CM al no considerar el efecto de la tierra.

### 3.4 Cálculo del CM a partir del modelo de la catenaria

Hasta ahora se ha considerado que los conductores son rectilíneos. Sin embargo, los conductores describen una catenaria entre dos puntos de suspensión. La línea se compondrá por tanto de sucesivas catenarias. Se analiza a continuación el error cometido al sustituir la catenaria por una recta.

Para obtener el campo creado por un vano finito en el que los conductores describen una catenaria, es necesario integrar el campo creado por un diferencial de longitud a

lo largo de todo el vano. Para ello se empleará la ley de Biot-Savart [60]. El campo magnético en  $(x, y, z)$ , creado por la intensidad  $i_i(t)$  en el conductor  $i$ , viene dado por (figura 3.4)

$$\vec{B}_i(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{r}_{ia}}^{\vec{r}_{ib}} \frac{i_i(t) d\vec{r}_i \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.13)$$

siendo  $\vec{r} = (x, y, z)$  el vector posición del punto donde se calcula el campo, y  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  el vector posición de cada punto del conductor.

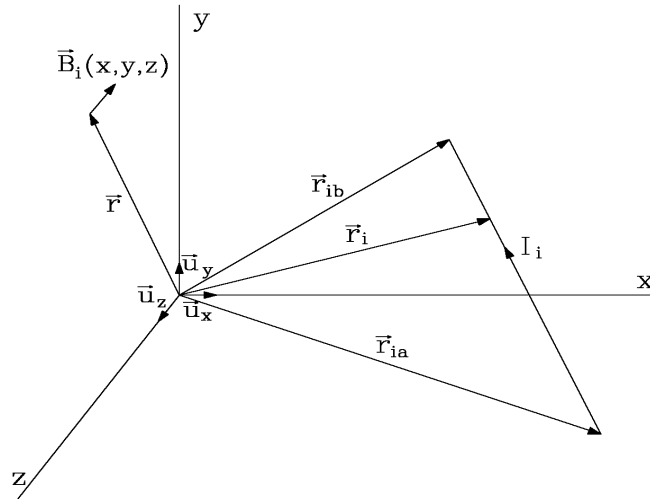


Figura 3.4: Campo magnético en  $(x, y, z)$  debido a la intensidad  $i_i(t)$

Si se considera la catenaria contenida en el plano  $x = 0$  (figura 3.5) la ecuación de la curva será

$$y_i(z) = L \cosh \frac{z}{L} \quad (3.14)$$

donde  $L$  es la constante de la catenaria. Integrando (3.13) entre  $\vec{r}_{ia} = (0, y_i(-v/2), -v/2)$  y  $\vec{r}_{ib} = (0, y_i(v/2), v/2)$  se obtiene el campo  $\vec{B}_i$  creado por el conductor  $i$ . Sumando el campo creado por cada uno de los conductores de la línea se obtiene el campo total.

Considérese para la configuración de la figura 3.2, una línea compuesta por vanos de distancia  $v = 400$  m y flechas  $f = 12$  m. La distancia entre fases es 8 m y la altura mínima al suelo 10 m. Los valores anteriores son típicos en líneas de transporte a 400 kV. De (3.14) se obtiene  $L = 1669$  m. La figura 3.6 muestra las curvas de error en el campo obtenidas al sustituir la catenaria por una recta cuya altura es 10 m. Las curvas se han obtenido a lo largo de una trayectoria transversal (eje  $x$ ), en medio ( $z = 0$ ) y en un extremo ( $z = -v/2$ ) del vano central, teniendo 2 vanos a cada lado. Este número de vanos

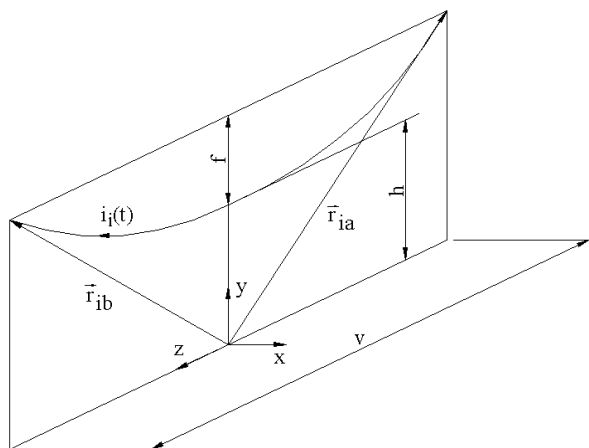


Figura 3.5: Vano y dimensiones principales

adyacentes es suficiente para obtener un campo con un error menor del 0,5% respecto a la línea con un número mucho mayor de vanos (caso más realista), cuando se calcula el campo a menos de 100 m de la línea. Se observa de la figura que el error cometido al considerar la línea formada por conductores rectilíneos de altura 10 m es menor del 10% a distancias inferiores a 100 m, a lo largo de la trayectoria transversal  $z = 0$  a 1 m sobre el suelo. Sin embargo, para la trayectoria  $z = -v/2$  (extremo del vano) el error es mayor bajo la línea (hasta un 250%), siendo menor a mayores distancias.

Una manera de reducir el error en  $z \neq 0$  es la propuesta por Mamishev y otros [47]. Para ello se emplea el modelo de conductor rectilíneo de longitud infinita, pero cuya altura coincide con la de la catenaria en la coordenada  $z$  donde se desea calcular el campo. Por ejemplo, para el caso anterior ( $z = -v/2$ ), la altura de cálculo será  $h + f = 22$  m. Con dicho valor resulta el error de la figura 3.7. Se muestra también el error para la distancia intermedia  $z = -v/4$ . El máximo de error se obtiene para  $z = -v/2$  bajo la línea, siendo inferior al 12%. Este error varía para otras longitudes de vano, configuraciones de conductores o dimensiones geométricas de la línea, aunque se obtienen resultados similares.

Una última alternativa que se ha probado es la sustitución de la catenaria por dos tramos rectilíneos cuyos extremos son los puntos de suspensión y el centro del conductor en el vano. Se puede obtener una expresión explícita del campo creado por un vano, con lo que el cálculo se simplifica notablemente respecto a la catenaria. La figura 3.8 muestra las curvas de error cuando se aplica este procedimiento de cálculo. Se observa que el error ha aumentado para  $z = 0$ , pero ha disminuido en  $z = -v/2$ . Puede ser una opción válida si se desea reducir el error máximo.



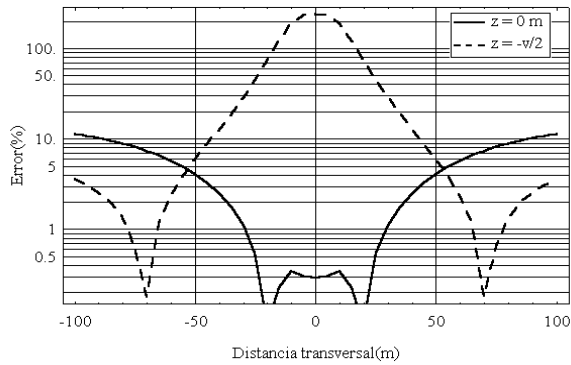


Figura 3.6: Curvas de error en el CM al considerar modelo rectilíneo.

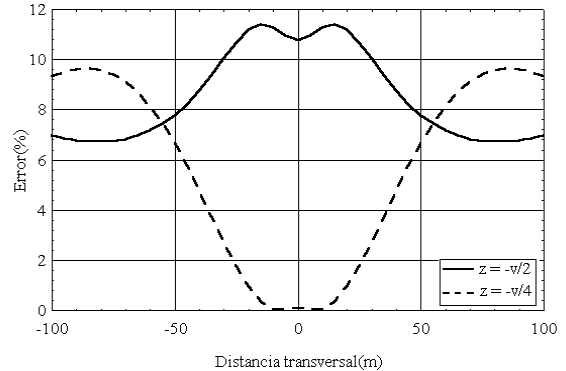


Figura 3.7: Curvas de error en el CM al considerar modelo rectilíneo con altura variable.

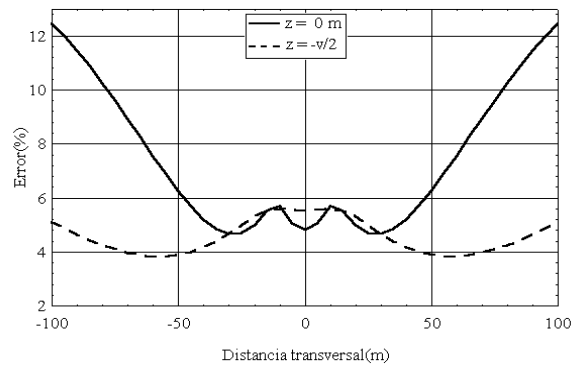


Figura 3.8: Curvas de error en el CM al considerar modelo con dos tramos rectilíneos.

En los apartados que siguen se empleará el modelo rectilíneo indefinido, e incluso, modelos aún más simples, ya que no se pretenderá determinar con precisión el campo generado por las líneas, sino profundizar en el conocimiento de sus características (simetría, distribución vectorial, etc.), lo cual permitirá abordar con mayor probabilidad de éxito la problemática de la mitigación del CM.

### 3.5 Modelo de conductor rectilíneo indefinido (RI)

Si el conductor es rectilíneo y está dirigido según la dirección  $z$ , (3.13) resulta

$$\begin{aligned}\vec{B}_i(x, y, z, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_a}^{z_b} \frac{i_i(t) \vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} dz_i = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \left( \frac{z_b - z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_b - z)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_a - z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_a - z)^2}} \right) [(y_i - y)\vec{u}_x - (x_i - x)\vec{u}_y]\end{aligned}\quad (3.15)$$

Si se considera el conductor indefinido ( $z_a \rightarrow -\infty, z_b \rightarrow \infty$ ) (3.15) se simplifica teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z_a \rightarrow -\infty \\ z_b \rightarrow \infty}} \left( \frac{z_b - z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_b - z)^2}} - \frac{z_a - z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_a - z)^2}} \right) = \\ = \frac{2}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}\end{aligned}\quad (3.16)$$

La expresión final, que no depende de la coordenada  $z$ , queda

$$\vec{B}_i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 i_i(t) \vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_i|^2}\quad (3.17)$$

donde ahora  $\vec{r} = (x, y)$ . De ahora en adelante  $\vec{r}$  vendrá así definido.

Para una línea compuesta por  $n$  conductores indefinidos, dirigidos según el eje  $z$ , el campo total será

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{1 \leq k \leq n} \vec{B}_k(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{i_k(t) \vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2}\quad (3.18)$$

En caso de corriente senoidal de pulsación  $\omega$  se tiene que

$$i_k(t) = \sqrt{2} I_k \cos(\omega t + \varphi_k)\quad (3.19)$$

y el vector densidad de campo magnético puede ponerse como

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= b_x(\vec{r}, t)\vec{u}_x + b_y(\vec{r}, t)\vec{u}_y = \\ &= \sqrt{2} B_x(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_x)\vec{u}_x + \sqrt{2} B_y(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_y)\vec{u}_y\end{aligned}\quad (3.20)$$

En aras de la simplicidad, en el resto de este apartado se omitirá la dependencia de  $\vec{B}$  respecto de la posición.

Obsérvese de (3.20) que las componentes se pueden poner en forma fasorial, quedando

$$\vec{B}(t) = \text{Re}[\sqrt{2}\mathbf{B}_x e^{j\omega t}] \vec{u}_x + \text{Re}[\sqrt{2}\mathbf{B}_y e^{j\omega t}] \vec{u}_y \quad (3.21)$$

donde

$$\mathbf{B}_x = B_x e^{j\varphi_x} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{B}_y = B_y e^{j\varphi_y} \quad (3.23)$$

Se define el fador, en valor eficaz, correspondiente a la inducción  $\vec{B}(t)$  como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\mathbf{I}_k \vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} = \mathbf{B}_x \vec{u}_x + \mathbf{B}_y \vec{u}_y \quad (3.24)$$

siendo  $\mathbf{I}_k$  el fador, en valor eficaz, de la intensidad.

A veces conviene expresar  $\vec{B}$  en sus componentes real e imaginaria:

$$\vec{B} = \vec{\text{Re}}[\vec{B}] + j \vec{\text{Im}}[\vec{B}] \quad (3.25)$$

A diferencia de  $\vec{B}$  los vectores  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}]$  sí pueden representarse en el espacio, ya que son vectores de números reales.

Si  $\varphi_x = \varphi_y$  ( $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_y$  tienen igual desfase) ó  $\varphi_x = \varphi_y \pm \pi$  ( $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_y$  tienen desfase opuesto), el máximo de la componente  $x$  de  $\vec{B}(t)$  coincidirá en el tiempo con el máximo de la componente  $y$ , por lo que el extremo del vector campo recorre una recta. Esto ocurre con el campo creado por un único conductor, por dos conductores con intensidades iguales y opuestas (dipolo de corriente), o por un número cualquiera de conductores con las corrientes en fase. Se dice entonces que el campo está linealmente polarizado. Se demuestra a continuación para los casos mencionados. Previamente se definen  $B_{kx0}$  y  $B_{ky0}$  como las componentes en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente del campo generado por la corriente de valor unidad en el conductor  $k$ .

El campo creado por un conductor  $k$  por el que circula la intensidad  $\mathbf{I}_k = I_k e^{j\varphi_k}$  viene dado por (3.24):

$$\vec{B}_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I}_k \vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} = I_k e^{j\varphi_k} (B_{kx0} \vec{u}_x + B_{ky0} \vec{u}_y) = \mathbf{B}_{kx} \vec{u}_x + \mathbf{B}_{ky} \vec{u}_y \quad (3.26)$$

Es inmediato comprobar que  $\mathbf{B}_{kx}$  y  $\mathbf{B}_{ky}$  tienen el mismo desfase ( $B_{kx0}B_{ky0} > 0$ ) u opuesto ( $B_{kx0}B_{ky0} < 0$ ).

Considérense ahora  $n$  conductores cuyas corrientes  $\mathbf{I}_k$  tienen el mismo desfase  $\varphi$ . Entonces de (3.26) queda

$$\vec{\mathbf{B}} = e^{j\varphi} \sum_{1 \leq k \leq n} I_k (B_{kx0} \vec{u}_x + B_{ky0} \vec{u}_y) = \mathbf{B}_x \vec{u}_x + \mathbf{B}_y \vec{u}_y \quad (3.27)$$

Se puede observar que el sumatorio lo componen términos reales, por lo que  $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_y$  tienen el mismo u opuesto desfase.

Considérense por último dos conductores por los que circulan las intensidades  $\mathbf{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}$  e  $\mathbf{I}_2 = -I_1 e^{j\varphi_1}$  (dipolo de corriente). Sustituyendo en (3.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{I}_1 \left( \frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} - \frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \right) = \\ &= \mathbf{I}_1 ((B_{1x0} - B_{2x0}) \vec{u}_x + (B_{1y0} - B_{2y0}) \vec{u}_y) = \mathbf{B}_x \vec{u}_x + \mathbf{B}_y \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.28)$$

Es obvio que el desfase de  $B_x$  es el mismo u opuesto al del  $B_y$ .

Se demuestra a continuación que si existe polarización lineal los vectores  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}]$  son paralelos (aunque el sentido puede ser opuesto), y viceversa. Además ambos son paralelos a  $\vec{B}(t)$ . Matemáticamente hay que demostrar que

$$\varphi_x - \varphi_y = \{0, \pm\pi\} \Leftrightarrow \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}] // \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}] // \vec{B}(t) \quad (3.29)$$

donde  $//$  indica paralelismo entre vectores. En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi_x - \varphi_y = \{0, \pm\pi\} &\Leftrightarrow \vec{\mathbf{B}} = e^{j\varphi_x} (B_x \vec{u}_x \pm B_y \vec{u}_y) \Leftrightarrow \vec{\mathbf{B}} = \\ &= \cos \varphi_x (B_x \vec{u}_x \pm B_y \vec{u}_y) + j \text{sen } \varphi_x (B_x \vec{u}_x \pm B_y \vec{u}_y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}] // \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para demostrar el paralelismo con  $\vec{B}(t)$ , pongamos (3.20) en la forma

$$\begin{aligned} \vec{B}(t) &= \sqrt{2} B_x \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{u}_x + \sqrt{2} B_y \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{u}_y = \\ &= \sqrt{2} (\text{Re}[\mathbf{B}_x] \cos \omega t - \text{Im}[\mathbf{B}_x] \text{sen } \omega t) \vec{u}_x + \\ &+ \sqrt{2} (\text{Re}[\mathbf{B}_y] \cos \omega t - \text{Im}[\mathbf{B}_y] \text{sen } \omega t) \vec{u}_y = \\ &= \sqrt{2} \cos \omega t (\text{Re}[\mathbf{B}_x] \vec{u}_x + \text{Re}[\mathbf{B}_y] \vec{u}_y) + \sqrt{2} \text{sen } \omega t (\text{Im}[\mathbf{B}_x] \vec{u}_x + \text{Im}[\mathbf{B}_y] \vec{u}_y) = \\ &= \sqrt{2} \cos \omega t \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}] + \sqrt{2} \text{sen } \omega t \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Obsérvese que  $\vec{B}(t)$  se puede poner como combinación lineal de  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}]$ . Dado que ambos son paralelos entre sí, cualquier combinación lineal también lo será, por lo que  $\vec{B}(t)$  es paralelo a  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}]$ .

En caso de que  $\varphi_x - \varphi_y \neq \{0, \pm\pi\}$ , el máximo de la componente  $x$  no coincidirá en el tiempo con el máximo de la componente  $y$ , por lo que el extremo de  $\vec{B}(t)$  recorre una elipse (elipse de inducción o de campo). Siguiendo a Adler [4], se dice entonces que el campo está elípticamente polarizado. Esto es equivalente a  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}] \setminus \vec{\text{Im}}[\vec{B}]$ , donde  $\setminus$  indica que ambos vectores no son paralelos.

Es interesante analizar bajo qué condiciones dos elipses de campo  $\vec{B}_1(t)$  y  $\vec{B}_2(t)$  son semejantes, es decir, cuando se cumple que  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , siendo  $a_1, a_2$  los semiejes mayores de las elipses y  $b_1, b_2$  los menores. Se sabe que si a una figura geométrica se le aplica un giro o una simetría no cambia su forma. Asimismo, si se modifica la escala de la representación tampoco cambiará. Además, en el caso concreto del campo  $\vec{B}(t)$ , definido en (3.20), un cierto retraso en el tiempo no modifica la ecuación de la elipse, como puede verse en (3.20) sustituyendo  $\omega t$  por  $\omega(t - t_1)$ , siendo  $t_1$  el retraso. Supóngase que al vector  $\vec{B}_1(t)$  se le somete a un giro de ángulo  $\xi$ , una simetría respecto a la recta de pendiente  $\gamma$ , un retraso en el tiempo  $t_1$ , y por último se multiplica por un factor  $K$ . Las componentes transformadas  $B_{2x}$  y  $B_{2y}$  serán

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{2x}(t) \\ B_{2y}(t) \end{bmatrix} &= K T_s T_g \begin{bmatrix} B_{1x}(t - t_1) \\ B_{1y}(t - t_1) \end{bmatrix} = \\ &= K \begin{bmatrix} -\text{sen}(2\gamma - \pi/2) & \cos(2\gamma - \pi/2) \\ \cos(2\gamma - \pi/2) & \text{sen}(2\gamma - \pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi & -\text{sen} \xi \\ \text{sen} \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1x}(t - t_1) \\ B_{1y}(t - t_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

siendo  $T_g$  y  $T_s$  las matrices de transformación del giro y simetría respectivamente.

Es inmediato comprobar que el retraso en el tiempo es equivalente a multiplicar los fasores  $\mathbf{B}_{1x}$  y  $\mathbf{B}_{1y}$  por  $e^{-j\omega t_1}$ . Esto se puede interpretar también como si a  $\varphi_x$  y  $\varphi_y$  se le añadiera un término constante  $-\omega t_1$ . Se concluye entonces que la ecuación de la elipse de inducción no depende de los valores concretos de  $\varphi_x$  y  $\varphi_y$ , sino de la diferencia  $\varphi_x - \varphi_y$ .

Por otro lado, el giro  $\xi$  y la simetría  $\gamma$  de  $\vec{B}_1(t)$  son equivalentes al mismo giro y simetría de  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_1]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_1]$ . Se demuestra en primer lugar para el caso de giro.

De (3.24) y (3.25) se cumple, aplicado a  $\vec{B}_1(t)$ , que

$$\vec{\text{Re}}[\vec{B}_1] = \text{Re}[\vec{B}_1]_x \vec{u}_x + \text{Re}[\vec{B}_1]_y \vec{u}_y = B_{1x} \cos \varphi_{1x} \vec{u}_x + B_{1y} \cos \varphi_{1y} \vec{u}_y \quad (3.33)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{B}_1] = \text{Im}[\vec{B}_1]_x \vec{u}_x + \text{Im}[\vec{B}_1]_y \vec{u}_y = B_{1x} \text{sen} \varphi_{1x} \vec{u}_x + B_{1y} \text{sen} \varphi_{1y} \vec{u}_y \quad (3.34)$$

Si se definen  $R_{1x} = \text{Re}[\vec{B}_1]_x$ ,  $R_{1y} = \text{Re}[\vec{B}_1]_y$ ,  $I_{1x} = \text{Im}[\vec{B}_1]_x$ , e  $I_{1y} = \text{Im}[\vec{B}_1]_y$ , se cumple, teniendo en cuenta (3.31), que

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(t) &= \sqrt{2}B_{1x} \cos(\omega t + \varphi_{1x})\vec{u}_x + \sqrt{2}B_{1y} \cos(\omega t + \varphi_{1y})\vec{u}_y \\ &= \sqrt{2}(R_{1x} \cos \omega t - I_{1x} \text{sen } \omega t)\vec{u}_x + \sqrt{2}(R_{1y} \cos \omega t - I_{1y} \text{sen } \omega t)\vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.35)$$

Supóngase ahora que el vector  $\vec{B}_2(t)$  se ha obtenido mediante un giro  $\xi$  de  $\vec{B}_1(t)$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \xi & -\text{sen } \xi \\ \text{sen } \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \sqrt{2}(R_{2x} \cos \omega t - I_{2x} \text{sen } \omega t) \\ \sqrt{2}(R_{2y} \cos \omega t - I_{2y} \text{sen } \omega t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \xi & -\text{sen } \xi \\ \text{sen } \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(R_{1x} \cos \omega t - I_{1x} \text{sen } \omega t) \\ \sqrt{2}(R_{1y} \cos \omega t - I_{1y} \text{sen } \omega t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \xi & -\text{sen } \xi \\ \text{sen } \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_{2x} \\ I_{2y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \xi & -\text{sen } \xi \\ \text{sen } \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1x} \\ I_{1y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

que es lo que se quería demostrar. Para la simetría la demostración es la misma, sustituyendo la matriz de giro por la de simetría. Se concluye por tanto que si dos vectores  $\vec{B}_1(t)$  y  $\vec{B}_2(t)$  verifican (3.32), también lo verificarán sus componentes real e imaginaria, y viceversa. Teniendo en cuenta que

$$B_{1x} = \text{Re}[\vec{B}_1]_x + j \text{Im}[\vec{B}_1]_x \quad (3.37)$$

$$B_{1y} = \text{Re}[\vec{B}_1]_y + j \text{Im}[\vec{B}_1]_y \quad (3.38)$$

$$B_{2x} = \text{Re}[\vec{B}_2]_x + j \text{Im}[\vec{B}_2]_x \quad (3.39)$$

$$B_{2y} = \text{Re}[\vec{B}_2]_y + j \text{Im}[\vec{B}_2]_y \quad (3.40)$$

es fácil deducir que (3.32) también la verificarán las componentes fasoriales

$$\begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \end{bmatrix} = KT_s T_g \begin{bmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Se determinan a continuación los semiejes mayor y menor de la elipse. Volviendo a (3.20), el instante en que el módulo del vector campo es máximo o mínimo se obtiene, derivando  $|\vec{B}(t)|^2$  respecto a  $\omega t$ , e igualando a cero

$$\frac{d|\vec{B}(t)|^2}{d\omega t} = B_x^2 \text{sen}(2\omega t + 2\varphi_x) + B_y^2 \text{sen}(2\omega t + 2\varphi_y) = 0 \quad (3.42)$$

Resolviendo se obtiene:

$$\omega t_k = -\frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{B_x^2 \operatorname{sen}(2\varphi_x) + B_y^2 \operatorname{sen}(2\varphi_y)}{B_x^2 \cos(2\varphi_x) + B_y^2 \cos(2\varphi_y)} + (k-1) \frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.43)$$

Los cuatro valores de  $k$  corresponden a los cuatro vértices de la elipse. Los semiejes mayor y menor vendrán dados por:

$$B_M = |\vec{B}_M| = \max_{k=1\dots 2} |\vec{B}(t_k)| \quad B_m = |\vec{B}_m| = \min_{k=1\dots 2} |\vec{B}(t_k)| \quad (3.44)$$

o también se pueden obtener explícitamente sustituyendo en (3.20)  $\omega t$  por (3.43) para  $k = 1$ . Después de operar se obtiene:

$$B_M^2 = \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2) + \frac{1}{2} \sqrt{B_x^4 + B_y^4 + 2B_x^2 B_y^2 \cos(2\varphi_x - 2\varphi_y)} \quad (3.45)$$

$$B_m^2 = \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2) - \frac{1}{2} \sqrt{B_x^4 + B_y^4 + 2B_x^2 B_y^2 \cos(2\varphi_x - 2\varphi_y)} \quad (3.46)$$

Obsérvese que para  $\varphi_x = \varphi_y$ ,  $|\vec{B}_m| = 0$  (polarización lineal).

Teniendo en cuenta (3.25), (3.33) y (3.34)  $B_M^2$  y  $B_m^2$  se pueden expresar también como

$$B_M^2 = \frac{1}{2}(|\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 + |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(|\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 - |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2)^2 + 4(\operatorname{Re}[\vec{B}] \cdot \operatorname{Im}[\vec{B}])^2} \quad (3.47)$$

$$B_m^2 = \frac{1}{2}(|\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 + |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(|\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 - |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2)^2 + 4(\operatorname{Re}[\vec{B}] \cdot \operatorname{Im}[\vec{B}])^2} \quad (3.48)$$

Es inmediato comprobar que  $B_M^2 + B_m^2 = B_x^2 + B_y^2 = |\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 + |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2$ .

El ángulo del semieje mayor respecto a la horizontal se puede obtener a partir de las componentes de  $\vec{B}_M$ :

$$\theta_M = \operatorname{atan} \frac{B_{My}}{B_{Mx}} \quad (3.49)$$

Como puede observarse, el campo generado por  $n$  conductores en un punto se caracteriza por una elipse. Sin embargo, a la hora de realizar medidas de campo o comparar el campo creado por diversas líneas eléctricas, es deseable obtener un valor numérico que represente dicha elipse. Se emplean principalmente dos valores: el valor del semieje mayor, en valor eficaz (recomendado por [8]), y la inducción resultante o valor escalar de la densidad de flujo, que es el valor empleado por la mayoría de los medidores de campo [69, 33], y que se define como

$$\begin{aligned} B_{rM} &= \sqrt{2} |\vec{B}| = \sqrt{2} \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}^*} = \sqrt{2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{|\operatorname{Re}[\vec{B}]|^2 + |\operatorname{Im}[\vec{B}]|^2} = \sqrt{2} \sqrt{|\vec{B}_M|^2 + |\vec{B}_m|^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

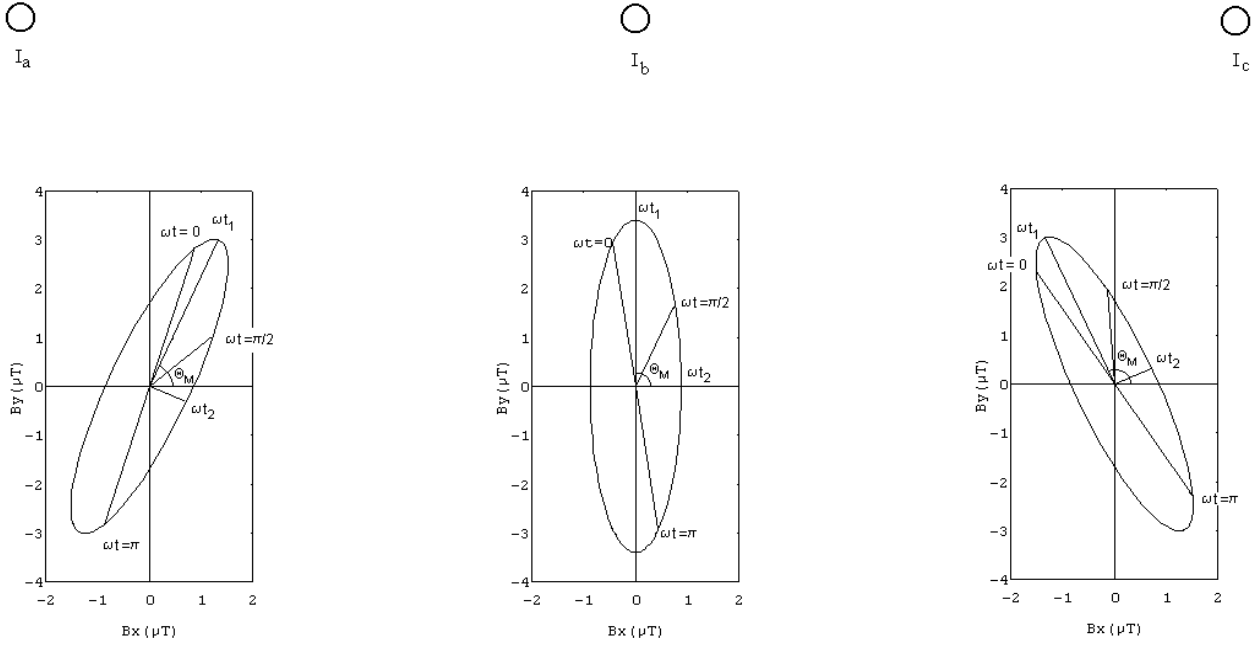


Figura 3.9: Elipses de inducción en tres puntos generadas por una línea trifásica con disposición horizontal de conductores (valor eficaz).

La inducción resultante, en valor eficaz, será

$$B_r = B_{rM}/\sqrt{2} = \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}^*} \quad (3.51)$$

Esta es la definición que se empleará en la presente tesis.

Se demuestra a continuación que si  $\vec{B}_a$  y  $\vec{B}_b$  son semejantes, con factor K de escala, se cumple que

$$B_{ar} = KB_{br} \quad (3.52)$$

En efecto, por ser semejantes se cumplirá (3.41). El campo resultante  $B_{ar}$  vendrá entonces dado por

$$B_{ar}^2 = |\mathbf{B}_{ax}|^2 + |\mathbf{B}_{ay}|^2 = \left| KT_s T_g \begin{bmatrix} B_{bx} \\ B_{by} \end{bmatrix} \right|^2 = K^2 (|\mathbf{B}_{ax}|^2 + |\mathbf{B}_{ay}|^2) \quad (3.53)$$

En el caso general de que exista componente z del campo se tiene:

$$B_r = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (3.54)$$



En la figura 3.9 se muestran las elipses de inducción (valor eficaz) en tres puntos para una distribución horizontal trifásica y alimentación equilibrada.

Es interesante indicar que el sentido de giro del vector  $\vec{B}(t)$  con el tiempo puede ser el de las agujas del reloj o el contrario. En la figura 3.9 resulta en el sentido de las agujas del reloj.

Se observa también en la figura 3.9 que el ángulo espacial entre dos vectores no tiene por qué coincidir con el desfase temporal en radianes ( $\omega t$ ), excepto en los semiejes. En efecto, obsérvese de las tres elipses que la diferencia de ángulo espacial entre dos vectores cualesquiera, por ejemplo  $\vec{B}(\omega t = 0)$  y  $\vec{B}(\omega t = \pi/2)$ , no es  $\pi/2$ . Sin embargo, el desfase temporal entre dos semiejes coincide con el espacial, teniendo en cuenta (3.43).

### 3.6 Método del desarrollo en serie

El método del desarrollo en serie (DS) consiste en la descomposición de (3.24) en serie de potencias [40]. Teniendo en cuenta que

$$|\vec{r} - \vec{r}_k|^2 = (\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k) = |r|^2 + |r_k|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_k \quad (3.55)$$

y que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (3.56)$$

se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} &= \frac{1}{r^2(1 - 2\frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_k}{r} + \frac{r_k^2}{r^2})} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ 1 + 2\frac{\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u}{r} + \frac{4(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^2 - r_k^2}{r^2} + \frac{8(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^3 - 4r_k^2(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)}{r^3} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde  $\vec{r}_u = \vec{r}/|\vec{r}|$ ,  $r = |\vec{r}|$ , y  $r_k = |\vec{r}_k|$ .

Sustituyendo (3.57) en (3.24) se tiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{I}_k \vec{u}_z \wedge \left( \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_k}{r} \right) \left[ 1 + 2\frac{\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u}{r} + \frac{4(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^2 - r_k^2}{r^2} + \dots \right] \quad (3.58)$$

Como puede verse, el campo  $\vec{B}(\vec{r})$  se puede descomponer en suma de términos proporcionales a  $1/r$ ,  $1/r^2$ , etc.:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}) + \vec{B}_3(\vec{r}) + \vec{B}_4(\vec{r}) + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \quad (3.59)$$

Obsérvese de (3.57), que cuanto más pequeño sea el cociente  $r_k/r$ , el error será menor al despreciar los términos superiores. Para ello el punto de cálculo ha de estar suficientemente alejado de los conductores, y el origen de coordenadas ha de estar lo más cercano posible a ellos. Se ha podido comprobar mediante simulaciones que si el origen de coordenadas se sitúa en el centro geométrico de la configuración, el error obtenido es el mínimo.

En lo que sigue se supondrá que la intensidad está dada en valor eficaz.

### 3.6.1 Término de primer orden

A partir de (3.58) y (3.59) se obtiene el término proporcional a  $1/r$ :

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (\vec{u}_z \wedge \vec{r}_u) \sum_{k=1}^n I_k \quad (3.60)$$

Obsérvese que la expresión es equivalente al campo creado por un único conductor por el que circula la suma de corrientes. Por tanto  $\vec{B}_1(t)$  está linealmente polarizado. Se deduce también que si la suma de intensidades es nula (ausencia de componente homopolar)  $\vec{B}_1(t) = 0$ .

### 3.6.2 Término de segundo orden

Tiene por expresión

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} [2(\vec{r}_u \cdot \vec{M}_2) \vec{u}_z \wedge \vec{r}_u - \vec{u}_z \wedge \vec{M}_2] \quad (3.61)$$

donde

$$\vec{M}_2 = \sum_{k=1}^n I_k \vec{r}_k \quad (3.62)$$

se define como el vector momento de segundo orden. Se cumple que  $\vec{M}_2$  no depende del origen de coordenadas, en ausencia de componente homopolar.

Obsérvese que  $\vec{M}_2$  está formado por la suma de fasores multiplicados por vectores, de manera análoga al campo  $\vec{B}$  en (3.24). Por tanto se le puede asociar una elipse descrita por el vector  $\vec{M}_2(t)$ , y un momento resultante  $M_{2r}$  dado por (3.51)

$$M_{2r} = \sqrt{\vec{M}_2 \cdot \vec{M}_2^*} \quad (3.63)$$

Si se sustituyen  $\vec{r}_u$  y  $\vec{M}_2$  por sus componentes

$$\vec{r}_u = \cos \theta \vec{u}_x + \text{sen } \theta \vec{u}_y \quad (3.64)$$

$$\vec{M}_2 = M_{2x} \vec{u}_x + M_{2y} \vec{u}_y \quad (3.65)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{r}_u$  y el eje  $x$ , se tiene:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} [(M_{2y} \cos 2\theta - M_{2x} \text{sen } 2\theta) \vec{u}_x + (M_{2x} \cos 2\theta + M_{2y} \text{sen } 2\theta) \vec{u}_y] \quad (3.66)$$

que se puede expresar también en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \begin{bmatrix} -\text{sen } 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{2x} \\ M_{2y} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Si se compara (3.67) con (3.41) se deduce que  $\vec{B}_2(t)$  y  $\vec{M}_2(t)$  son semejantes. El primero se obtiene a partir del segundo mediante una simetría  $T_s$  respecto a una recta de ángulo  $\gamma = \theta + \frac{\pi}{4}$  y un factor  $K = \frac{\mu_0}{2\pi r^2}$ . Dado que  $\vec{M}_2(t)$  no depende de  $\vec{r}$ , la elipse definida por  $\vec{M}_2(t)$  tampoco dependerá de  $\vec{r}$ . Por la semejanza demostrada se cumplirá que la elipse de  $\vec{B}_2(\vec{r}, t)$  varía de un punto a otro en tamaño (debido a  $K$ ) y posición relativa (debido a  $T_s$ ), pero la relación entre los semiejes mayores y menores es constante para cualquier punto.

Consecuencia inmediata de lo anterior es que

$$B_{2r} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} M_{2r} \quad (3.68)$$

según se vio en (3.52). Obsérvese que  $B_{2r}$  no depende de la orientación  $\theta$  del punto de medida, sino de la distancia  $r$ . Se deduce inmediatamente que  $B_{2r}$  no depende tampoco de la orientación de los conductores (vg. disposición horizontal y vertical), si se mantienen las distancias entre los mismos, y el mismo valor de  $r$ .

Se analiza a continuación la relación entre los campos  ${}^1\vec{B}_2(t)$  y  ${}^2\vec{B}_2(t)$ , correspondientes a dos puntos definidos por  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$ , respectivamente. Considerando  $r_1 = r_2$ , si se expresan  ${}^2\mathbf{B}_{2x}$  y  ${}^2\mathbf{B}_{2y}$  en función de  $M_{2x}$  y  $M_{2y}$ , tal como en (3.67), y se sustituyen las componentes del momento por  ${}^1\mathbf{B}_{2x}$  y  ${}^1\mathbf{B}_{2y}$ , se obtiene

$$\begin{bmatrix} {}^2\mathbf{B}_{2x} \\ {}^2\mathbf{B}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) & -\text{sen}(2\theta_2 - 2\theta_1) \\ \text{sen}(2\theta_2 - 2\theta_1) & \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{B}_{2x} \\ {}^1\mathbf{B}_{2y} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

que representa un giro de ángulo  $2(\theta_2 - \theta_1)$  de la elipse de inducción.

En la figura 3.10 se muestran la elipse de  $\vec{M}_2(t)$  y las elipses de  $\vec{B}_2(t)$  para la misma distancia  $r$  y diferentes valores de  $\theta$ . Se representan también los vectores  $\vec{M}_{2M}$  y  $\vec{B}_{2M}$

correspondientes al semieje mayor de las elipses  $\vec{M}_2(t)$  y  $\vec{B}_2(t)$  respectivamente. Obsérvese que el campo en un  $\theta$  cualquiera se obtiene al girar un ángulo  $2(\theta - \alpha)$  el campo en  $\theta = \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo del vector  $\vec{M}_{2M}$ . El campo en  $\theta = \alpha$  se ha obtenido como una simetría del campo  $\vec{M}_2(t)$  respecto a la recta de ángulo  $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{4}$ . Debido a la simetría de la propia elipse, se puede obtener también con un giro  $\frac{\pi}{2}$  de  $\vec{M}_2(t)$ .

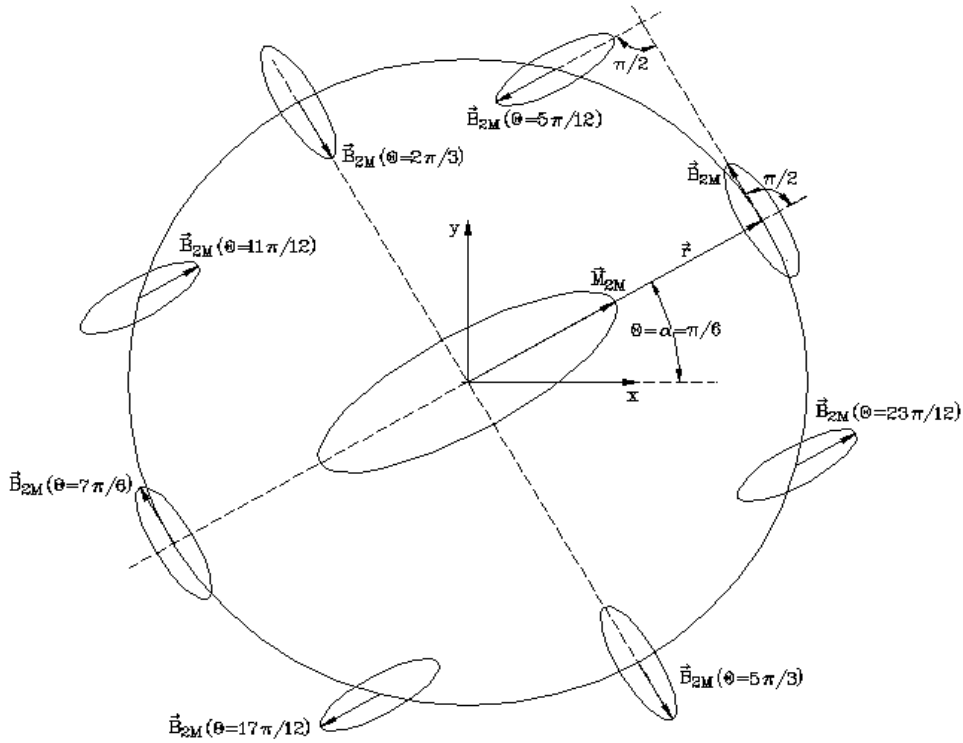


Figura 3.10: Elipses de inducción para igual  $r$  y diferentes valores de  $\theta$ , creadas por el momento magnético  $\vec{M}_2(t)$ , cuya elipse es la mostrada en el centro de la figura.

### 3.6.3 Término de tercer orden

Tiene por expresión

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \left[ \vec{u}_z \times \vec{r}_u \left( 4 \sum_{k=1}^n I_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^2 - \sum_{k=1}^n I_k r_k^2 \right) - 2\vec{u}_z \times \sum_{k=1}^n I_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_k \right] \quad (3.70)$$

Sustituyendo  $\vec{r}_u$  por (3.64) y  $\vec{r}_k$  por

$$\vec{r}_k = r_{kx} \vec{u}_x + r_{ky} \vec{u}_y \quad (3.71)$$

(3.70) queda

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} [(\mathbf{M}_{3y} \cos 3\theta - \mathbf{M}_{3x} \sin 3\theta) \vec{u}_x + (\mathbf{M}_{3x} \cos 3\theta + \mathbf{M}_{3y} \sin 3\theta) \vec{u}_y] \quad (3.72)$$

donde

$$\mathbf{M}_{3x} = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k (r_{kx}^2 - r_{ky}^2) \quad (3.73)$$

$$\mathbf{M}_{3y} = 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k r_{kx} r_{ky} \quad (3.74)$$

Se define el vector momento de tercer orden como

$$\vec{M}_3 = \mathbf{M}_{3x} \vec{u}_x + \mathbf{M}_{3y} \vec{u}_y \quad (3.75)$$

A diferencia de  $\vec{M}_2$ , el vector momento  $\vec{M}_3$  depende del origen de coordenadas.

Se observa que (3.72) y (3.67) son análogas, con lo cual la semejanza entre  $\vec{B}_2(t)$  y  $\vec{M}_2(t)$  puede aplicarse a  $\vec{B}_3(t)$  y  $\vec{M}_3(t)$ , y por tanto la ecuación (3.68) es aplicable a  $B_{3r}$  y  $M_{3r}$ .

### 3.6.4 Término de cuarto orden

Tiene por expresión:

$$\begin{aligned} \vec{B}_4(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r^4} & \left[ \vec{u}_z \times \vec{r}_u \left( 8 \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^3 - 4 \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u) r_k^2 \right) \right. \\ & \left. - \vec{u}_z \times \left( 4 \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k \vec{r}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_u)^2 - \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k r_k^2 \vec{r}_k \right) \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Procediendo de igual manera que en los términos anteriores se obtiene

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0}{2\pi r^4} [(\mathbf{M}_{4y} \cos 4\theta - \mathbf{M}_{4x} \sin 4\theta) \vec{u}_x + (\mathbf{M}_{4x} \cos 4\theta + \mathbf{M}_{4y} \sin 4\theta) \vec{u}_y] \quad (3.77)$$

donde

$$\mathbf{M}_{4x} = - \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k (3 r_{kx} r_{ky}^2 - r_{kx}^3) \quad (3.78)$$

$$\mathbf{M}_{4y} = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k (3 r_{kx}^2 r_{ky} - r_{ky}^3) \quad (3.79)$$

Se define el vector momento de cuarto orden como

$$\vec{M}_4 = M_{4x}\vec{u}_x + M_{4y}\vec{u}_y \quad (3.80)$$

Se observa que la ecuación (3.77) es semejante a (3.72), con lo que se pueden aplicar las mismas conclusiones a  $\vec{B}_4(t)$  respecto a  $\vec{M}_4(t)$  que a  $\vec{B}_3(t)$  respecto a  $\vec{M}_3(t)$ .

### 3.6.5 Aplicación a líneas trifásicas de simple circuito

Considérese una línea formada por tres conductores cuyas posiciones vienen definidas por  $\vec{r}_a$ ,  $\vec{r}_b$  y  $\vec{r}_c$ , siendo las intensidades correspondientes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ . De ahora en adelante se supondrá que no existe componente homopolar, por lo que se cumple que el momento de segundo orden no depende del origen, como se vio en 3.6.2. Por comodidad el origen se sitúa en el conductor  $c$ , por lo que  $\vec{r}_c = 0$ . Si se considera que el punto donde se calcula el campo está suficientemente alejado de la línea se pueden eliminar los términos de tercer orden y sucesivos. Entonces se tiene:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (3.81)$$

En ausencia de componente homopolar se cumple que  $\vec{B}_1 = 0$ .

En cuanto al término de segundo orden, el interés se centra en conocer  $B_{2r}$ , el campo resultante. Dado que según (3.68)  $B_{2r}$  depende de  $M_{2r}$ , basta calcular dicho valor. De (3.62) aplicado a la línea descrita se tiene:

$$\vec{M}_2 = I_a\vec{r}_a + I_b\vec{r}_b \quad (3.82)$$

De (3.63) se tiene:

$$\begin{aligned} M_{2r}^2 &= \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_2^* = (I_a\vec{r}_a + I_b\vec{r}_b) \cdot (I_a^*\vec{r}_a + I_b^*\vec{r}_b) = I_a^2 r_a^2 + I_b^2 r_b^2 + (I_a I_b^* + (I_a I_b^*)^*) \vec{r}_a \cdot \vec{r}_b \\ &= I_a^2 r_a^2 + I_b^2 r_b^2 + 2 \operatorname{Re}[I_a I_b^*] \vec{r}_a \cdot \vec{r}_b \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dado que  $I_a + I_b + I_c = 0$  se puede expresar  $\operatorname{Re}[I_a I_b^*]$  de otro modo más sencillo. En efecto, se cumple entonces que

$$-I_a^2 = \operatorname{Re}[I_a I_b^*] + \operatorname{Re}[I_a I_c^*] \quad (3.84)$$

$$-I_b^2 = \operatorname{Re}[I_b I_a^*] + \operatorname{Re}[I_b I_c^*] \quad (3.85)$$

$$-I_c^2 = \operatorname{Re}[I_c I_b^*] + \operatorname{Re}[I_c I_a^*] \quad (3.86)$$

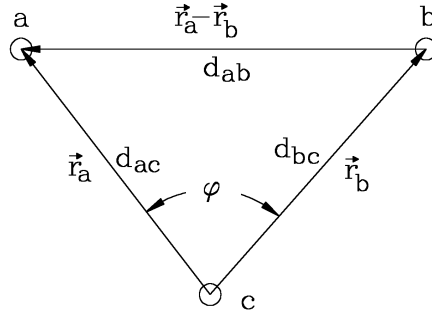


Figura 3.11: Posiciones de los conductores  $a$  y  $b$  tomando como origen el  $c$

Sumando (3.84) y (3.85), y teniendo en cuenta (3.86), se tiene que

$$-I_a^2 - I_b^2 = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{I}_a \mathbf{I}_b^*] + \operatorname{Re}[\mathbf{I}_a \mathbf{I}_c^*] + \operatorname{Re}[\mathbf{I}_b \mathbf{I}_c^*] = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{I}_a \mathbf{I}_b^*] - I_c^2 \quad (3.87)$$

de donde

$$\operatorname{Re}[\mathbf{I}_a \mathbf{I}_b^*] = \frac{1}{2}(I_c^2 - I_a^2 - I_b^2) \quad (3.88)$$

Por otro lado se cumple también que (figura 3.11)

$$|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^2 = d_{ab}^2 = r_a^2 + r_b^2 - 2 r_a r_b \cos(\varphi) = d_{ac}^2 + d_{bc}^2 - 2 \vec{r}_a \cdot \vec{r}_b \quad (3.89)$$

con lo que

$$\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b = \frac{1}{2}(d_{ac}^2 + d_{bc}^2 - d_{ab}^2) \quad (3.90)$$

Sustituyendo (3.88) y (3.90) en (3.83) se tiene:

$$M_{2r}^2 = \frac{1}{2} [I_a^2(d_{ab}^2 + d_{ac}^2 - d_{bc}^2) + I_b^2(d_{ab}^2 + d_{bc}^2 - d_{ac}^2) + I_c^2(d_{ac}^2 + d_{bc}^2 - d_{ab}^2)] \quad (3.91)$$

Nótese que (3.91) sólo es válida si la suma de intensidades es nula (ausencia de componente homopolar). Si además tampoco existe componente de secuencia inversa ( $I_a = I_b = I_c$ ) se tiene:

$$M_{2r}^2 = \frac{1}{2} I_a^2 (d_{ab}^2 + d_{bc}^2 + d_{ac}^2) \quad (3.92)$$

Obsérvese que  $M_{2r}$  no depende de la orientación de los conductores respecto a una referencia externa, sino de la posición relativa entre ellos (ya se obtuvo esta conclusión en el apartado 3.6.2). Obsérvese también que, suponiendo una distancia mínima entre conductores, el momento mínimo se consigue cuando las tres distancias son iguales (configuración

triangular). Suponiendo que la distancia entre dos conductores adyacentes es  $d$ , el campo resultante vendrá dado, sustituyendo (3.92) en (3.68), por

$$B_{2r} = \frac{\sqrt{6} C d \mu_0}{4\pi r^2} I_a \quad (3.93)$$

siendo  $C$  una constante que depende del tipo de configuración (triangular:  $C = 1$ , horizontal o vertical:  $C = \sqrt{2}$ ).

Los semiejes mayor ( $M_{2M}$ ) y menor ( $M_{2m}$ ) de la elipse de  $\vec{M}_2(t)$  pueden obtenerse a partir de (3.45) y (3.46) o (3.47) y (3.48). Después de operar resulta

$$M_{2M}^2 = \frac{1}{2}(M_{2r}^2 + M_p^2) \quad (3.94)$$

$$M_{2m}^2 = \frac{1}{2}(M_{2r}^2 - M_p^2) \quad (3.95)$$

donde

$$M_p^2 = \sqrt{\frac{I_a^4 d_{ab}^2 d_{ac}^2 + I_b^4 d_{ab}^2 d_{bc}^2 + I_c^4 d_{ac}^2 d_{bc}^2 + I_a^2 I_b^2 d_{ab}^2 (d_{ab}^2 - d_{ac}^2 - d_{bc}^2) + I_a^2 I_c^2 d_{ac}^2 (d_{ac}^2 - d_{ab}^2 - d_{bc}^2) + I_b^2 I_c^2 d_{bc}^2 (d_{bc}^2 - d_{ab}^2 - d_{ac}^2)}{2}} \quad (3.96)$$

Si el sistema es equilibrado, la expresión (3.96) queda

$$M_p^2 = I_a^2 \sqrt{\frac{1}{2} [(d_{ab}^2 - d_{ac}^2)^2 + (d_{ab}^2 - d_{bc}^2)^2 + (d_{ac}^2 - d_{bc}^2)^2]} \quad (3.97)$$

Es interesante deducir bajo qué condiciones se cumple que  $\vec{B}_2(t)$  presenta polarización lineal. Dada la semejanza vista en el apartado 3.6.2 entre  $\vec{B}_2(t)$  y  $\vec{M}_2(t)$  basta estudiar si el momento de segundo orden presenta una polarización lineal. Para ello se ha de cumplir que (apartado 3.5)  $\text{Re}[\vec{M}_2] // \text{Im}[\vec{M}_2]$ . Esto es equivalente a  $\text{Re}[\vec{M}_2] \wedge \text{Im}[\vec{M}_2] = 0$ . Teniendo en cuenta (3.82), debería cumplirse que

$$\begin{aligned} \text{Re}[\vec{M}_2] \wedge \text{Im}[\vec{M}_2] &= \text{Re}[\mathbf{I}_a] \text{Im}[\mathbf{I}_a] \vec{r}_a \wedge \vec{r}_a + \text{Re}[\mathbf{I}_b] \text{Im}[\mathbf{I}_b] \vec{r}_b \wedge \vec{r}_b + \\ &+ (\text{Re}[\mathbf{I}_a] \text{Im}[\mathbf{I}_b] - \text{Re}[\mathbf{I}_b] \text{Im}[\mathbf{I}_a]) \vec{r}_a \wedge \vec{r}_b = \\ &= (\text{Re}[\mathbf{I}_a] \text{Im}[\mathbf{I}_b] - \text{Re}[\mathbf{I}_b] \text{Im}[\mathbf{I}_a]) \vec{r}_a \wedge \vec{r}_b = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Para que (3.98) sea nulo se ha de cumplir que  $\vec{r}_a // \vec{r}_b$ , o que el paréntesis sea nulo. Esto último se cumple cuando  $\arg(\mathbf{I}_b) = \frac{\pi}{2} - \arg(\mathbf{I}_a)$ , lo cual no sucede en líneas trifásicas. Se concluye por tanto que la condición para que  $\vec{B}_2(t)$  presente polarización lineal es que los tres conductores estén alineados.

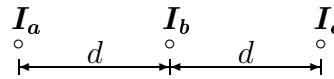
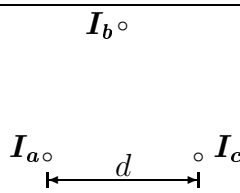
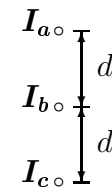
Otro sencillo resultado que se puede obtener a partir de (3.94) y (3.95), es que si y sólo si  $M_p = 0$ ,  $\vec{M}_2(t)$  presenta polarización circular (la elipse de inducción es en realidad



una circunferencia). Para un sistema equilibrado se observa, de (3.97), que la polarización circular se consigue si y sólo si  $d_{ab} = d_{ac} = d_{bc}$ .

Como ejemplo la tabla 3.1 muestra la expresión del campo resultante  $B_{2r}$  y los semiejes mayor y menor para diversas configuraciones simples empleadas frecuentemente en líneas aéreas.

Tabla 3.1: Expresiones del campo para diversas configuraciones de conductores, suponiendo que sólo existe componente de secuencia directa ( $|\mathbf{I}_a| = |\mathbf{I}_b| = |\mathbf{I}_c| = I_a$ ).

Disposición de conductores	$B_{2r}$	$B_{2M}$	$B_{2m}$
	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{2\pi r^2}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{2\pi r^2}$	0
	$\frac{\mu_0 \sqrt{6} d I_a}{4\pi r^2}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{4\pi r^2}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{4\pi r^2}$
	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{2\pi r^2}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d I_a}{2\pi r^2}$	0

Obsérvese que  $\vec{B}_2(t)$  tiene polarización lineal en las configuraciones horizontal y vertical, siendo circular en la delta. Para otras configuraciones triangulares, como la delta invertida o tresbolillo, se obtienen expresiones idénticas por las razones expuestas previamente.

Como ejemplo de la exactitud de este modelo en líneas de transporte, las figuras 3.12, 3.13 y 3.14 muestran, para líneas con disposición horizontal, vertical y delta respectivamente (altura mínima al suelo 10 m,  $d = 8,5$  m), el error cometido respecto al modelo RI, al calcular el campo a 1 m del suelo con la aproximación de segundo orden  $\vec{B}_2$ :

$$\text{error} = \frac{|B_r - B_{2r}|}{B_r} \quad (3.99)$$

así como incluyendo el término de tercer orden:

$$\text{error} = \frac{|B_r - |\vec{B}_2 + \vec{B}_3||}{B_r} \quad (3.100)$$

donde  $B_r$  es el campo resultante obtenido a partir del modelo RI. Se observa el mayor error en la configuración horizontal. Sin embargo para distancias superiores a 40 m el error es inferior al 5% en cualquier configuración. Para alturas sobre el suelo mayores o distancias menores entre fases el error será menor, y viceversa. Obsérvese que la reducción del error cuando se incluye el término de tercer orden no es significativa en ningún caso, siendo incluso mayor el error en algunos tramos que si no se incluyera dicho término. Sería necesario, si se desea mayor precisión, añadir términos de orden superior, lo cual complica el modelo, dejando de tener interés.

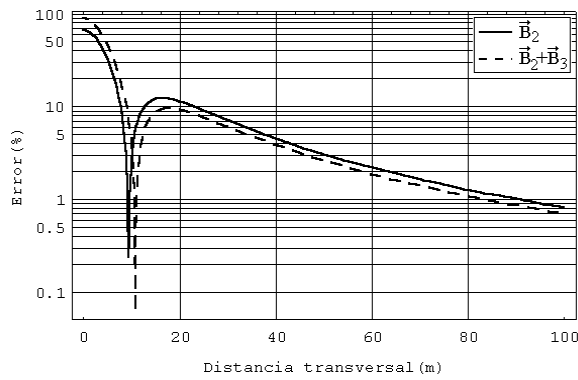


Figura 3.12: Configuración horizontal. Errores de campo resultante de  $\vec{B}_2$  y  $\vec{B}_2 + \vec{B}_3$ .

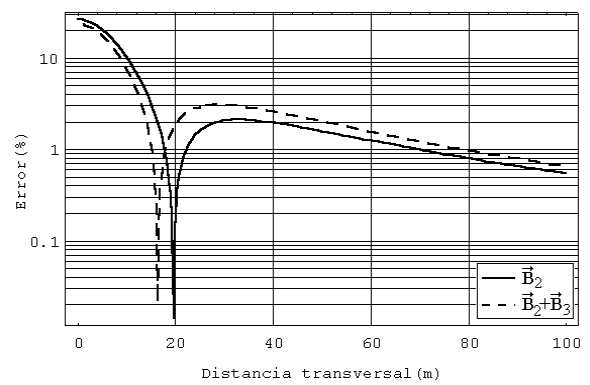


Figura 3.13: Configuración vertical. Errores de campo resultante de  $\vec{B}_2$  y  $\vec{B}_2 + \vec{B}_3$ .

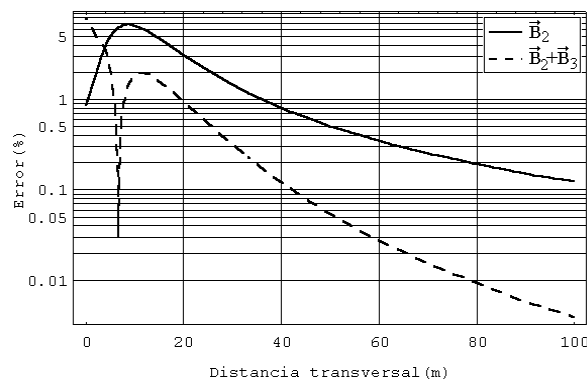


Figura 3.14: Configuración delta. Errores de campo resultante de  $\vec{B}_2$  y  $\vec{B}_2 + \vec{B}_3$

### 3.6.6 Aplicación a líneas trifásicas de doble circuito

Se analiza a en este apartado el CM generado por líneas de doble circuito verticales. Conviene previamente obtener un resultado que se deduce de las propiedades del vector momento de segundo orden  $\vec{M}_2$ . Supóngase un conjunto formado por  $n$  conductores con corriente neta nula, donde se cumple que existen dos subconjuntos, formados por  $n_1$  y  $n_2$  ( $n_1 + n_2 = n$ ) conductores, que tienen respectivamente corriente neta también nula:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.101)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} I_j = 0 \quad (3.102)$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} I_k = 0 \quad (3.103)$$

El momento de segundo orden de todo el conjunto puede ponerse como

$$\vec{M}_2 = \sum_{i=1}^n I_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n_1} I_i \vec{r}_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} I_i \vec{r}_i = \vec{M}_{21} + \vec{M}_{22} \quad (3.104)$$

El primer sumatorio de (3.104) corresponde al momento de segundo orden de los  $n_1$  conductores, y el segundo sumatorio el de los  $n_2$  restantes. Ambos momentos se han obtenido con un origen común. Se vio en el apartado 3.6.2 que cuando la intensidad neta es nula, el momento de segundo orden no depende del origen, por lo que  $\vec{M}_{21}$  y  $\vec{M}_{22}$  pueden obtenerse con orígenes de coordenadas independientes y a conveniencia.

Considérese a continuación una línea de doble circuito. Sean  $I_a, I_b,$  e  $I_c$  las intensidades de un circuito, e  $I'_a, I'_b,$  e  $I'_c$  las del otro. Se supondrá que  $I_a, I_b, I_c$  están en fase con  $I'_a, I'_b, I'_c$  respectivamente. Se supondrá también que cada circuito está equilibrado. Entonces  $\vec{M}_2$  se puede descomponer en dos momentos  $\vec{M}$  y  $\vec{M}'$ , calculados de forma independiente, y cuyos orígenes no tienen por qué coincidir. Por comodidad, se fijan en los conductores  $c$  y  $c'$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} M_{2r}^2 &= \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_2^* = (\vec{M} + \vec{M}') \cdot (\vec{M}^* + (\vec{M}')^*) \\ &= \vec{M} \cdot \vec{M}^* + \vec{M}' \cdot (\vec{M}')^* + 2 \operatorname{Re}[\vec{M} \cdot (\vec{M}')^*] \end{aligned} \quad (3.105)$$

Obsérvese que  $M_r^2 = \vec{M} \cdot \vec{M}^*$  y  $(M'_r)^2 = \vec{M}' \cdot (\vec{M}')^*$  son los momentos de segundo orden

de los circuitos simples. Por otro lado

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\vec{M} \cdot (\vec{M}')^*] &= \operatorname{Re}[\mathbf{I}_a(\mathbf{I}'_a)^* \vec{r}_a \cdot \vec{r}'_a + \mathbf{I}_b(\mathbf{I}'_b)^* \vec{r}_b \cdot \vec{r}'_b + \mathbf{I}_a(\mathbf{I}'_b)^* \vec{r}_a \cdot \vec{r}'_b + \mathbf{I}_b(\mathbf{I}'_a)^* \vec{r}_b \cdot \vec{r}'_a] \\ &= I_a I'_a \vec{r}_a \cdot \vec{r}'_a + I_a I'_b \vec{r}_b \cdot \vec{r}'_b - \frac{1}{2} I_a I'_a (\vec{r}_a \cdot \vec{r}'_b + \vec{r}_b \cdot \vec{r}'_a) \end{aligned} \quad (3.106)$$

En concreto, para la configuración doble circuito vertical, teniendo en cuenta (3.68) y (3.93), se tiene:

$$M_r = \sqrt{3} d I_a \quad (3.107)$$

$$M'_r = \sqrt{3} d I'_a \quad (3.108)$$

La tabla 3.2 muestra, para la configuración vertical, el campo resultante  $B_{2r}$ , así como las expresiones de las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse de  $\vec{B}_2(t)$ , para las distintas posiciones relativas de los conductores de fase (para configuraciones horizontal doble se obtienen las mismas expresiones). Obsérvese que  $B_{2m}$  es nulo, con lo que la elipse es realmente una recta, y  $\vec{B}_2(t)$  presenta polarización lineal. Obsérvese también que la configuración que genera mayor nivel de CM es la 1 (superhaz), seguidas por la 2,4, que tienen la misma expresión. Campos menores se consiguen con la 3,5. Por último la 6 (baja reactancia) es la genera un campo menor. Incluso en esta última configuración  $B_{2r}$  llega a ser nulo para  $I_a = I'_a$ . Para este caso el primer término no nulo de la serie de potencias es  $\vec{B}_3$ . De (3.73) y (3.74) se obtiene  $\vec{M}_3$ , tomando como origen el centro geométrico de los conductores:

$$\vec{M}_3 = M_{3x} \vec{u}_x + M_{3y} \vec{u}_y \quad (3.109)$$

donde

$$M_{3x} = \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi}{3}j} \mathbf{I}_a s^2 + 2e^{\frac{\pi}{3}j} \mathbf{I}_a \left( \frac{s^2}{4} - d^2 \right) \quad (3.110)$$

$$M_{3y} = 2\sqrt{3} e^{-\frac{\pi}{6}j} \mathbf{I}_a d s \quad (3.111)$$

siendo  $s$  es la distancias entre ambos circuitos.  $M_{3r}$  será entonces

$$M_{3r} = \sqrt{\vec{M}_3 \cdot \vec{M}_3^*} = 2d I_a \sqrt{(d^2 + 3s^2)} \quad (3.112)$$

$B_{3r}$  se calcula de la misma manera que  $B_{2r}$ :

$$B_{3r} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} M_{3r} = \frac{\mu_0 d I_a}{\pi r^3} \sqrt{d^2 + 3s^2} \quad (3.113)$$

Tabla 3.2: Expresiones del campo para diversas posiciones relativas de los conductores de fase en la configuración doble circuito vertical, considerando sólo componente de secuencia directa ( $|\mathbf{I}_a| = |\mathbf{I}_b| = |\mathbf{I}_c| = I_a$ ,  $|\mathbf{I}'_a| = |\mathbf{I}'_b| = |\mathbf{I}'_c| = I'_a$ ).

Disposición de conductores	$B_{2r}$	$B_{2M}$	$B_{2m}$
① $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_a \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} (I_a + I'_a)$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} (I_a + I'_a)$	0
② $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_a \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 + I_a I'_a}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 + I_a I'_a}$	0
③ $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_a \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 - I_a I'_a}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 - I_a I'_a}$	0
④ $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_a \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 + I_a I'_a}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 + I_a I'_a}$	0
⑤ $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_a \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 - I_a I'_a}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2} \sqrt{I_a^2 + (I'_a)^2 - I_a I'_a}$	0
⑥ $\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_c \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_b \circ \uparrow & & \circ \mathbf{I}'_b \\   & & \\ d & & \\   & & \\ \mathbf{I}_c \circ \uparrow & \xrightarrow{s} & \circ \mathbf{I}'_a \end{array}$	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2}  I_a - I'_a $	$\frac{\mu_0 \sqrt{3} d}{2\pi r^2}  I_a - I'_a $	0

De (3.45) y (3.46) se obtienen los semiejes mayor y menor  $B_{3M}$  y  $B_{3m}$ :

$$B_{3M} = \frac{\mu_0 d I_a}{\pi r^3} \max(d, \sqrt{3} s) \quad (3.114)$$

$$B_{3m} = \frac{\mu_0 d I_a}{\pi r^3} \min(d, \sqrt{3} s) \quad (3.115)$$

Si se observan las ecuaciones de  $B_{2r}$  en la tabla 3.2, no aparece la distancia  $s$ . Ésta sí aparece en términos de orden superior, lo que permite deducir que  $s$  (distancia entre circuitos) afecta menos que  $d$  (distancia entre fases) en el CM.

Las figuras 3.15 a 3.19 muestran las curvas de campo  $B_r$  y  $B_{2r}$  debidas a las configuraciones 1-5 de la tabla 3.2. La figura 3.20 muestra los campos  $B_r$  y  $B_{3r}$  para la configuración 6. Se ha considerado  $I_a = I'_a = 500$  A,  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m y  $s = 14$  m. Puede verse, como se dedujo anteriormente, que el campo debido a las configuraciones 1,2 es mayor que el generado por las 3,4,5, y el debido a éstas es aún mayor que el debido a la 6.

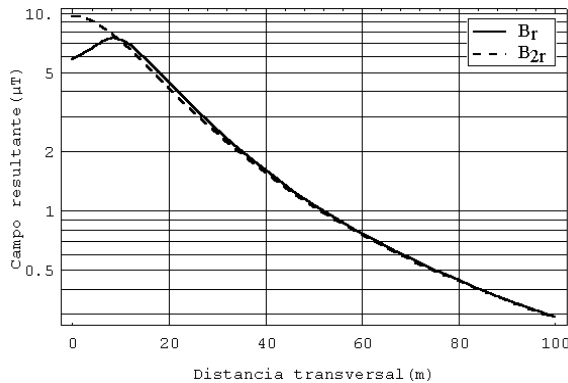


Figura 3.15: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - abc$  (superhaz) (1 en tabla 3.2).

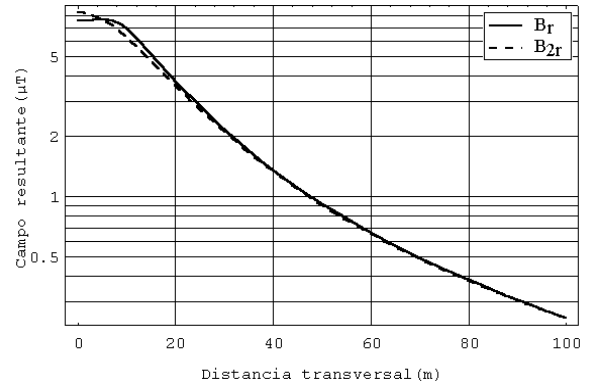


Figura 3.16: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - acb$  (2 en tabla 3.2).

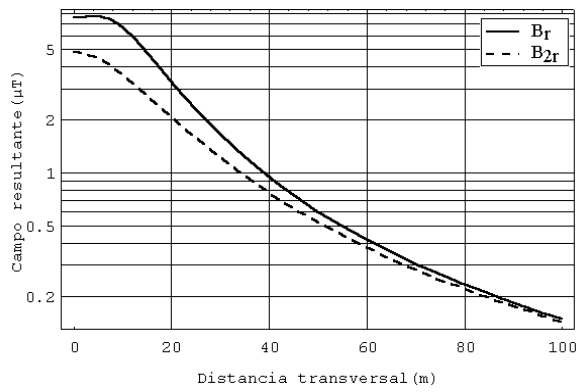


Figura 3.17: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - bca$  (3 en tabla 3.2).

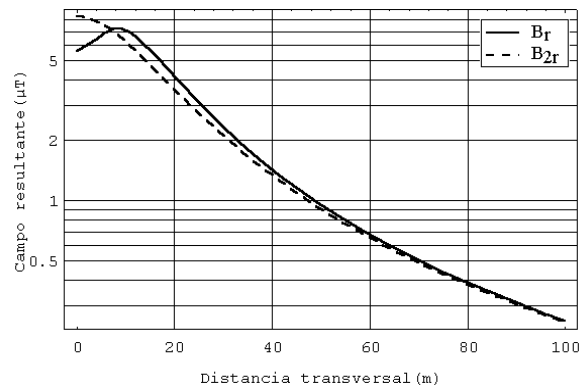


Figura 3.18: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - bac$  (4 en tabla 3.2).

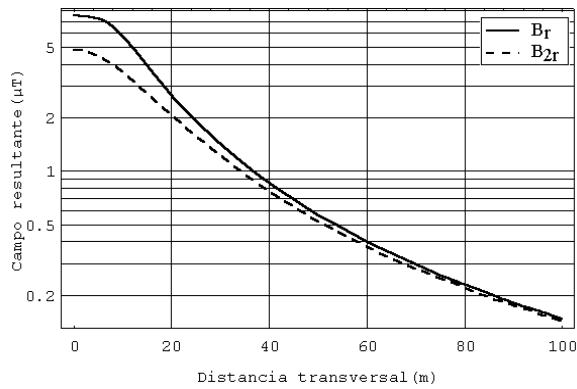


Figura 3.19: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - cab$  (3 en tabla 3.2).

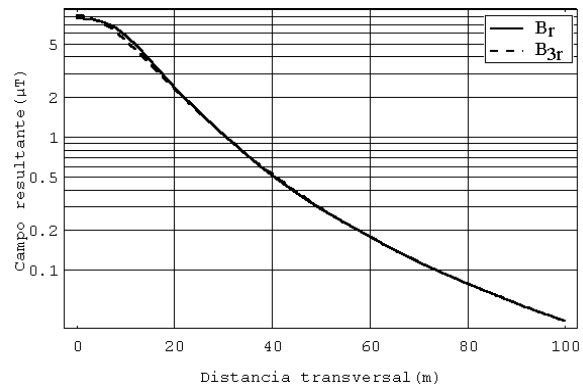


Figura 3.20: Campos  $B_r$  y  $B_{2r}$  para la configuración bandera doble  $abc - cba$  (baja reactancia) (6 en tabla 3.2).



A distancias cercanas a la línea, las conclusiones obtenidas a partir del análisis de  $B_{2r}$  pueden dejar de ser válidas. Esto se observa comparando las figuras 3.15 y 3.20, donde se aprecia, a distancias inferiores a 10 m, un ligero incremento del campo debido a la configuración de baja reactancia frente a la superhaz. Se muestra también en las 6 figuras que la diferencia entre  $B_r$  y  $B_{2r}$  se reduce con la distancia. Esto se observa más claramente en las figuras 3.21 y 3.22, que muestran el error en la aproximación  $B_{2r}$ , tal como se definió en (3.99). Se observan unos errores similares a los vistos en las líneas de simple circuito (figuras 3.12, 3.13 y 3.14), excepto para la configuración 6, donde el error es inferior al 10% en cualquier punto.

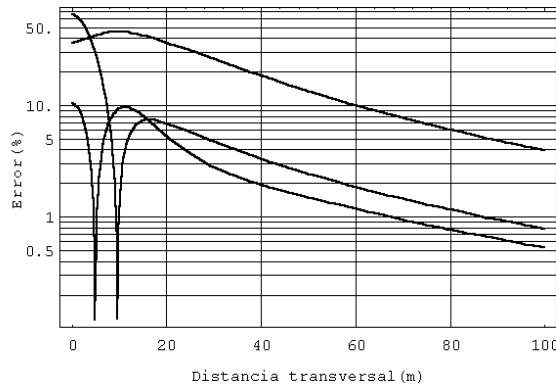


Figura 3.21: Errores obtenidos al calcular el campo resultante con  $B_{2r}$  para las configuraciones 1,2,3 de la tabla 3.2.

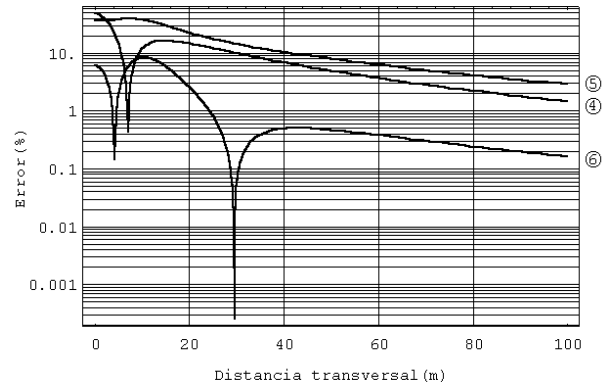


Figura 3.22: Errores obtenidos al calcular el campo resultante con  $B_{2r}$  (4,5) y  $B_{3r}$  (6).

Hasta el momento, se han analizado configuraciones doble circuito verticales. Podría pensarse que, dado que la configuración simple triangular de conductores genera menos campo que la vertical, se obtendrían mejores resultados con la configuración doble circuito triangular. Sin embargo, esto no se cumple, como se demuestra a continuación. Se analizarán dos de las posibles configuraciones, mostradas en las figuras 3.23 y 3.24.

Si la carga en ambos circuitos es la misma ( $I_a = I'_a$ ) las configuraciones superhaz y baja reactancia generan el mismo CM que la A y B respectivamente. Cuando  $I_a \neq I'_a$  la expresión de  $B_{2r}$  para la configuración A viene dada por

$$B_{2r} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \sqrt{3d^2 + s^2} |I_a + I'_a| \quad (3.116)$$

Si se compara con las expresiones de  $B_{2r}$  en la tabla 3.2 se observa que el campo generado por la configuración A es incluso mayor que el debido a la configuración superhaz.

Para la configuración B se tiene que

$$B_{2r} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \sqrt{3d^2 + s^2} |I_a - I'_a| \quad (3.117)$$

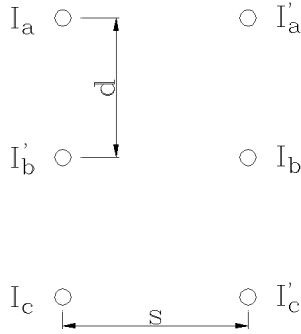


Figura 3.23: Configuración doble circuito triangular (configuración A).

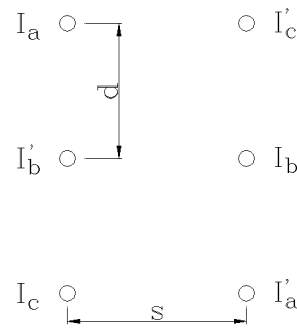


Figura 3.24: Configuración doble circuito triangular (configuración B).

que es también mayor que el campo generado por la configuración de baja reactancia.

Se explican fácilmente estos resultados observando (3.92), la expresión del momento de segundo orden para un circuito trifásico equilibrado. En el caso vertical, para cualquier configuración, la suma de distancias al cuadrado viene dada por

$$d_{ab}^2 + d_{bc}^2 + d_{ac}^2 = 6d^2 \tag{3.118}$$

Sin embargo, para el caso triangular se tiene:

$$d_{ab}^2 + d_{bc}^2 + d_{ac}^2 = 6d^2 + 2s^2 \tag{3.119}$$

De la comparación de (3.118) y (3.119) se observa que la distancia media entre fases es menor en la configuración vertical, y el campo generado será también menor.

### 3.7 Descomposición en dipolos de corriente

Se presenta en este apartado una formulación alternativa para el cálculo del CM creado por líneas aéreas. Este método se basa en la descomposición de la línea en dipolos de corriente, según la idea de Pettersson [57].

En este contexto se entenderá que un dipolo de corriente es un par de conductores paralelos, rectilíneos e indefinidos con intensidad neta nula.

De la definición anterior es fácil probar que  $n$  conductores con corriente neta nula pueden ser descompuestos en  $n - 1$  dipolos. Si se obtiene una formulación aproximada

para el CM creado por un dipolo, se puede aplicar a los  $n - 1$  dipolos, obteniendo una formulación aproximada del CM creado por la línea.

En este apartado se obtendrá también una aproximación basada en la descomposición en dipolos, y se determinará el error cometido respecto al método RI. Asimismo, se comparará con el método DS, expuesto en el apartado anterior.

### 3.7.1 Campo magnético creado por un dipolo

Considérese un dipolo de corriente definido por los vectores  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y la intensidad senoidal  $i(t)$ . Por conveniencia, el origen de coordenadas se toma de modo que  $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ . El fasor en valor eficaz del campo  $\vec{B}$  en  $\vec{r}$  viene dado por (3.24):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi} \left[ \frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} - \frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \right] \quad (3.120)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el fasor en valor eficaz de  $i(t)$ .

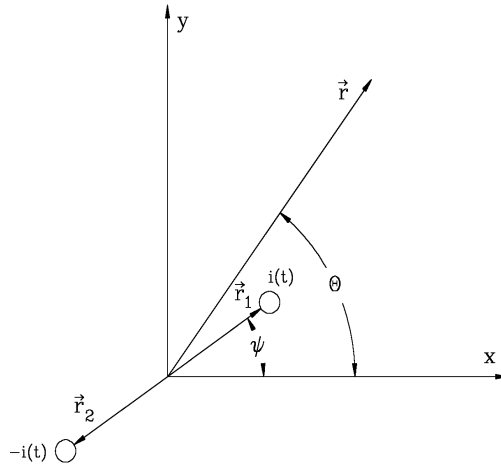


Figura 3.25: Dipolo magnético y punto  $\vec{r}$  donde se desea conocer el campo

Se define el momento magnético de un dipolo como

$$\vec{M} = \mathbf{I}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \mathbf{I}\vec{p} \quad (3.121)$$

Es inmediato observar que

$$\vec{r}[\vec{M}] = \text{Re}[\mathbf{I}\vec{p}] // \vec{r}[\vec{M}] = \text{Im}[\mathbf{I}\vec{p}] \quad (3.122)$$

De la figura 3.25 se deduce que

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{u}_x + r \operatorname{sen} \theta \vec{u}_y \quad (3.123)$$

$$\vec{p} = p \cos \psi \vec{u}_x + p \operatorname{sen} \psi \vec{u}_y \quad (3.124)$$

donde  $r = |\vec{r}|$  y  $p = |\vec{p}|$ .

El módulo del vector  $\vec{M}$  vendrá dado por  $M = Ip$ .

De (3.123) y (3.124) es inmediato que

$$\vec{u}_z \wedge \vec{r} = -r \operatorname{sen} \theta \vec{u}_x + r \cos \theta \vec{u}_y \quad (3.125)$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{p} = -p \operatorname{sen} \psi \vec{u}_x + p \cos \psi \vec{u}_y \quad (3.126)$$

Por otro lado, de la figura 3.25 se deduce fácilmente que

$$|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = r^2 + \frac{p^2}{4} - rp \cos(\theta - \psi) \quad (3.127)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2|^2 = r^2 + \frac{p^2}{4} + rp \cos(\theta - \psi) \quad (3.128)$$

Sustituyendo (3.125), (3.126), (3.127) y (3.128) en (3.120) y operando queda

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(r^2 + \frac{p^2}{4})^2 - r^2 p^2 \cos^2(\theta - \psi)} \left[ \left( r^2 (\operatorname{sen} \psi - 2 \operatorname{sen} \theta \cos(\theta - \psi)) + \frac{p^2}{4} \operatorname{sen} \psi \right) \vec{u}_x \right. \\ &\quad \left. + \left( r^2 (2 \cos \theta \cos(\theta - \psi) - \cos \psi) - \frac{p^2}{4} \cos \psi \right) \vec{u}_y \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(r^2 + \frac{p^2}{4})^2 - r^2 p^2 \cos^2(\theta - \psi)} \left[ \left( -r^2 \operatorname{sen}(2\theta - \psi) + \frac{p^2}{4} \operatorname{sen} \psi \right) \vec{u}_x \right. \\ &\quad \left. + \left( r^2 \cos(2\theta - \psi) - \frac{p^2}{4} \cos \psi \right) \vec{u}_y \right] \end{aligned} \quad (3.129)$$

Las componentes del vector  $\vec{B}$  pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + \frac{p^2}{4})^2 - r^2 p^2 \cos^2(\theta - \psi)} \left( r^2 \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Dado que

$$\mathbf{B}_x = \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]_x + j \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}]_x \quad (3.131)$$

$$\mathbf{B}_y = \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]_y + j \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}]_y \quad (3.132)$$

$$\mathbf{M}_x = \text{Re}[\vec{\mathbf{M}}]_x + j \text{Im}[\vec{\mathbf{M}}]_x \quad (3.133)$$

$$\mathbf{M}_y = \text{Re}[\vec{\mathbf{M}}]_y + j \text{Im}[\vec{\mathbf{M}}]_y \quad (3.134)$$

se deduce fácilmente que  $\vec{\mathbf{B}}$  se obtiene a partir de  $\vec{\mathbf{M}}$  mediante la suma de dos transformaciones: una simetría respecto a una recta de ángulo  $\gamma = \theta + \frac{\pi}{4}$ , junto con su correspondiente factor, y un giro de  $\frac{\pi}{2}$  con su factor. Por tanto  $\vec{\mathbf{B}}$  y  $\vec{\mathbf{M}}$  son equivalentes, y se cumplirá que  $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_y$  son fasores con igual desfase. Se cumple también que el extremo del vector  $\vec{\mathbf{B}}(t)$  recorre una recta ( $\vec{\mathbf{B}}(t)$  está linealmente polarizado).

A la hora de representar vectorialmente el campo, es necesario dividirlo en sus partes real e imaginaria:

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}] = \text{Re}[\mathbf{B}_x] \vec{u}_x + \text{Re}[\mathbf{B}_y] \vec{u}_y \quad (3.135)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}] = \text{Im}[\mathbf{B}_x] \vec{u}_x + \text{Im}[\mathbf{B}_y] \vec{u}_y \quad (3.136)$$

En la figura 3.26 se representa el vector  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  para diversos valores de  $(\theta - \psi)$ . Dado que el campo está linealmente polarizado se cumple (3.29), es decir,  $\vec{\mathbf{B}}(t) // \vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}] // \vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$ .

De (3.130) se deduce fácilmente que para  $\theta - \psi = 0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$  la dirección de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  es perpendicular a la de  $\vec{p}$ , como se observa en la figura 3.26. Sin embargo la dirección de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  para  $\theta - \psi = \pi/4, 3\pi/2, 5\pi/4$  y  $7\pi/4$  no es paralela a  $\vec{p}$ , aunque gráficamente lo parezca.

Es interesante observar que el campo  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  tiene una dirección en cada punto que no depende del desfase de  $\mathbf{I}$ . En efecto, de (3.130) se tiene que

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}] = A \vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{M}}] = A \text{Re}[\mathbf{I}] \vec{p} \quad (3.137)$$

siendo  $A$  la matriz que multiplica a  $\vec{\mathbf{M}}$  en (3.130). Dado que  $\text{Re}[\mathbf{I}]$  multiplica a ambas componentes, la dirección se mantiene, pudiéndose obtener un vector de sentido contrario.

A partir de (3.129) se obtiene el campo resultante:

$$B_r = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{16} \left(\frac{p}{r}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cos(2(\theta - \psi))}} \quad (3.138)$$

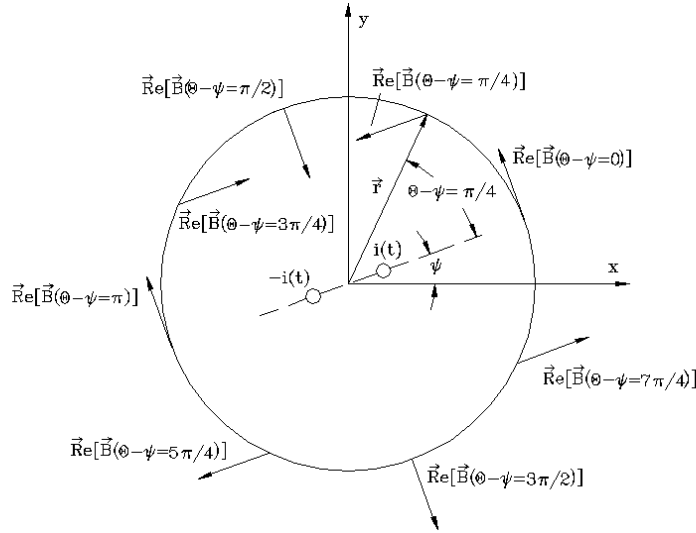


Figura 3.26:  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}]$  para diversos valores de  $(\theta - \psi)$  y  $|\vec{r}|$  constante (ángulos en radianes)

donde  $M = Ip$ . En la figura 3.27 se representa  $B_r$  para  $I = 100$  A,  $p = 2$  m, y  $p/r = 1/1,5$ .

Si el punto de medida está lejos de la línea, de modo que  $r \gg p$ , (3.129) se puede desarrollar en serie de potencias:

$$\vec{B} \approx \vec{B}_a + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{3.139}$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{B}_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi r^2} (-\text{sen}(2\theta - \psi) \vec{u}_x + \text{cos}(2\theta - \psi) \vec{u}_y) \\ &= \frac{\mu_0 M}{2\pi r^2} \left( \text{cos}\left(2\theta - \psi + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta - \psi + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 M}{2\pi r^2} (\text{cos } \varphi \vec{u}_x + \text{sen } \varphi \vec{u}_y) \end{aligned} \tag{3.140}$$

siendo  $\varphi$  el ángulo de los vectores  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_a]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_a]$ . En forma matricial (3.140) resulta

$$\begin{bmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \begin{bmatrix} -\text{sen } 2\theta & \text{cos } 2\theta \\ \text{cos } 2\theta & \text{sen } 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

que representa una simetría respecto a una recta de ángulo  $\gamma = \theta + \frac{\pi}{4}$ . Si se representa gráficamente  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_a]$  se obtiene un resultado similar al de la figura 3.26. En este caso los

vectores  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  en  $\theta - \psi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$  y  $7\pi/4$  sí son paralelos a  $\vec{p}$ .

Es inmediato que la inducción resultante  $B_{ar}$  es

$$B_{ar} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2} \quad (3.142)$$

resultado interesante, que muestra que  $B_{ar}$  en el punto  $\vec{r}$  depende únicamente de la distancia  $r$ , pero no de la orientación del punto (figura 3.27). Visto de otra manera, el campo resultante debido a un dipolo, a suficiente distancia del mismo, no depende de la orientación del dipolo, sino de la distancia.

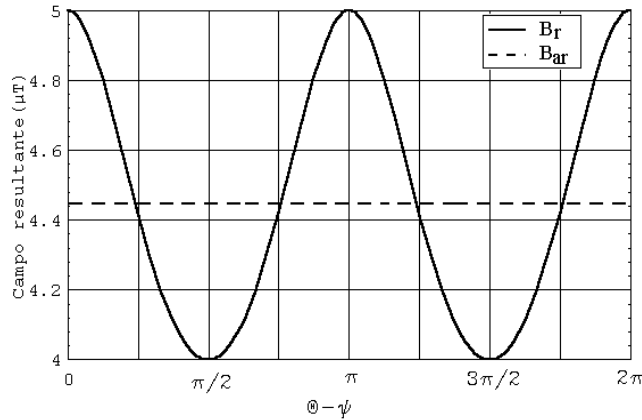


Figura 3.27: Curvas de  $B_r$  y  $B_{ar}$  para  $p/r = 1/1,5$

Comparando (3.138) y (3.142) se obtiene el error al emplear la expresión aproximada del campo resultante:

$$\epsilon = \frac{B_r - B_{ar}}{B_r} = \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{16} \left(\frac{p}{r}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cos(2(\theta - \psi))} \right) \quad (3.143)$$

Se observa que el error sólo depende de  $p/r$  y  $(\theta - \psi)$ . En la tabla 3.3 se muestra el error para algunos valores de  $p/r$  y  $(\theta - \psi)$ . Asimismo, en la figura 3.28 se muestra el error para  $p/r = 1/1,5$  y  $0 < \theta - \psi < 2\pi$ . Se ha incluido en dicha figura la curva correspondiente a una expresión aproximada del error, obtenida mediante el desarrollo en serie de (3.143):

$$\epsilon_a = 0,25 \left(\frac{p}{r}\right)^2 \cos 2(\theta - \psi) \quad (3.144)$$

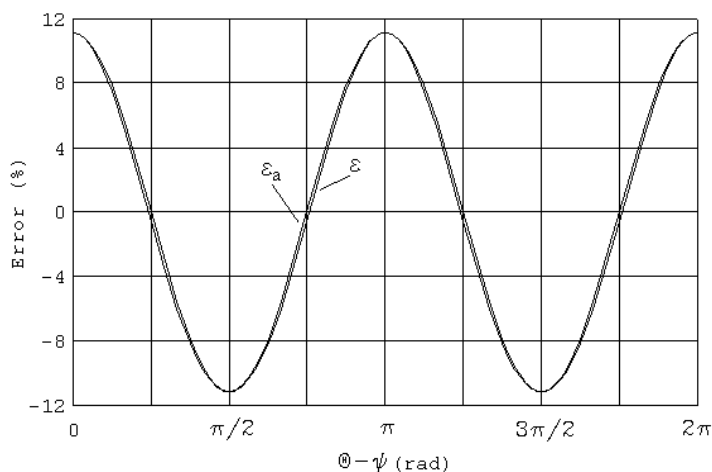


Figura 3.28: Curvas de  $\epsilon(\%)$  y  $\epsilon_a(\%)$  para  $p/r = 1/1,5$

tanto más exacta cuanto más pequeño sea  $p/r$ . Se observa que la diferencia con (3.143) es pequeña, habiéndose tomado para  $p/r$  un valor más bien grande. De (3.144) se deduce que para un mismo dipolo el error se reduce con la distancia al cuadrado.

Si se comparan (3.141) y (3.67) se observa que el término de segundo orden  $\vec{B}_2$  del campo, aplicado a un dipolo, coincide con la aproximación del dipolo. Esto se cumple ya que la aproximación del dipolo no es más que el desarrollo en serie de potencias del campo creado por el dipolo. Podría pensarse entonces que el campo  $\vec{B}_2$  de una línea trifásica es equivalente al campo creado por un dipolo. Sin embargo esto no es cierto por una diferencia fundamental, el campo  $\vec{B}_2$  es en general elíptico, mientras que el creado por un dipolo es lineal.

Tabla 3.3: Error en % producido por la aproximación del campo resultante debido a un dipolo, para diversos valores de  $p/r$  y  $(\theta - \psi)$ .

$p/r$	$\theta - \psi = 0$	$\theta - \psi = \pi/4$	$\theta - \psi = \pi/2$
1	25	-3,1	-25
0,5	6,25	-0,2	-6,25
0,1	0,25	$-3 \cdot 10^{-4}$	-0,25



### Ejemplo de campo magnético creado por un dipolo horizontal

Se analiza a continuación el campo magnético creado por un dipolo horizontal, a lo largo de una trayectoria perpendicular a los conductores, y a 1 m de altura sobre el suelo (figura 3.29).

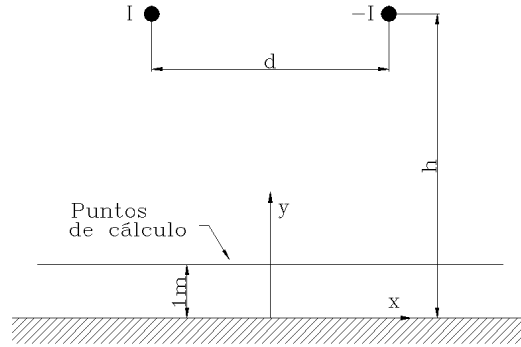


Figura 3.29: Dimensiones del dipolo horizontal

El campo creado por el dipolo horizontal es simétrico respecto al eje vertical  $x = 0$ , como se deduce en (3.138) con  $\psi = 0$ . En la figura 3.30 se muestran los campos  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  creados por una corriente senoidal de valor eficaz  $I = 500^{10}$  A,  $d = 8,5$  m y  $h = 10$  m. Por facilidad en el dibujo se ha representado el extremo de los vectores, habitualmente dibujados como puntas de flecha, por puntos. Nótese que en la figura se muestran los vectores campo para  $\psi = \pi$  y  $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ . De la figura se observa que el campo es máximo en  $x = 0$ , siendo el sentido vertical. En cuanto al campo  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  se observa que es ligeramente superior en módulo, variando también el ángulo. Obsérvese que tanto en  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  como en  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  el ángulo de ambos campos tiende a  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Este resultado se puede obtener de (3.140), de donde resulta que  $\varphi = 2\theta - \psi + \frac{\pi}{2}$ . Dado que  $\theta(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ . Los vectores  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  son nulos en este ejemplo, por serlo el desfase de  $I$ . En el supuesto de haber considerado un desfase distinto de cero, tendrían igual dirección (aunque el sentido pudiera ser opuesto) que los correspondientes reales.

En la figura 3.31 se muestran los campos resultantes  $B_r$  y  $B_{ar}$  para el mismo dipolo, y en la 3.32 se muestra el error, definido en (3.143), que coincide con el error de módulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$ , definido como

$$\epsilon = \frac{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]| - |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|}{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|} \quad (3.145)$$

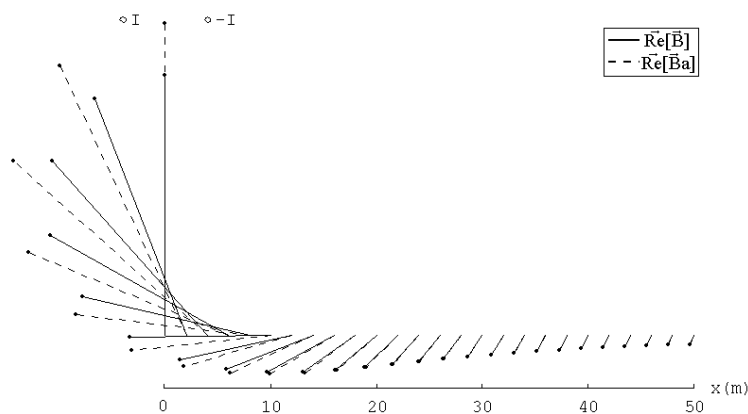


Figura 3.30: Campos  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  creados por un dipolo horizontal (extremo de vectores representados por puntos).

La figura 3.33 muestra por último la diferencia de ángulo entre  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$ . En caso de que hubiese existido  $\text{Im}[\vec{B}]$  el error de módulo (definido como en (3.145)) y diferencia de ángulo de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  serían los mismos que los correspondientes reales.

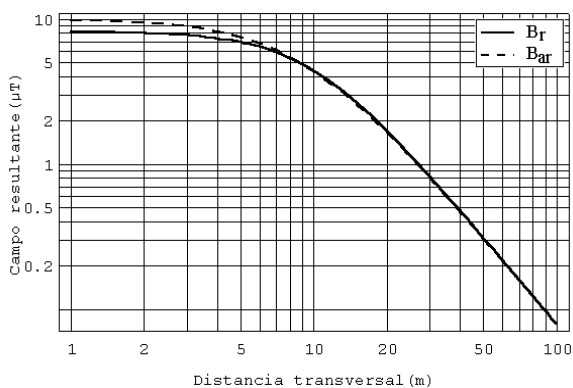


Figura 3.31: Dipolo horizontal. Campos resultantes  $B_r$  y  $B_{ar}$ .

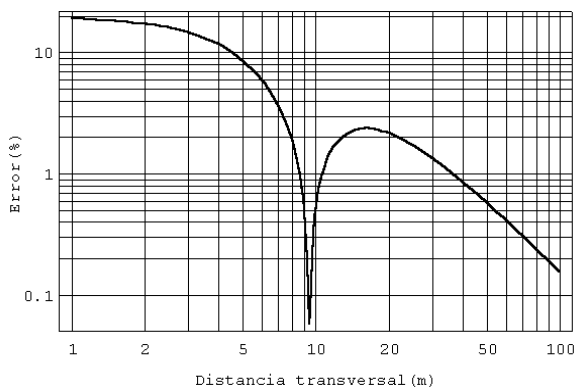


Figura 3.32: Dipolo horizontal. Error de módulo obtenido al calcular el campo resultante con  $B_{ar}$ .

### Ejemplo de campo magnético creado por un dipolo vertical

De modo similar al epígrafe anterior, se analiza el campo creado por un dipolo vertical, cuyas dimensiones se muestran en la figura 3.34.

A diferencia del dipolo horizontal, en el vertical el campo es simétrico respecto a  $y = 0$ . En la figura 3.35 se muestran los campos  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  creados por una

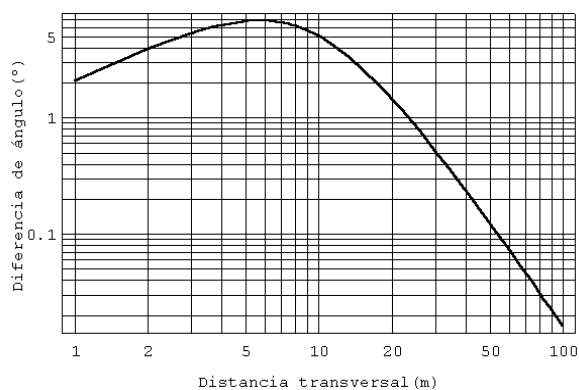


Figura 3.33: Dipolo horizontal. Diferencia de ángulo entre  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$

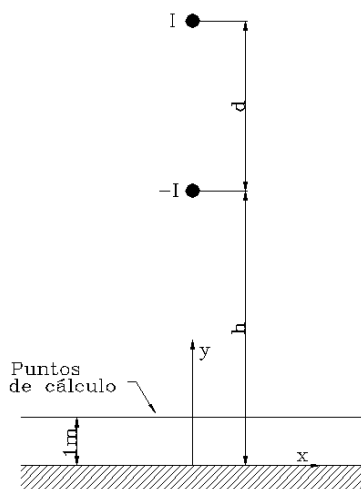


Figura 3.34: Dimensiones del dipolo vertical

corriente senoidal de valor eficaz  $I = 500^{\text{lo}}$  A, con  $d = 8,5$  m y  $h = 10$  m. En este caso  $\psi = \pi/2$ . Conforme crece la coordenada  $x$  el campo tiende a la dirección horizontal, ya que  $\varphi \rightarrow -\psi + \frac{\pi}{2} = 0$ .

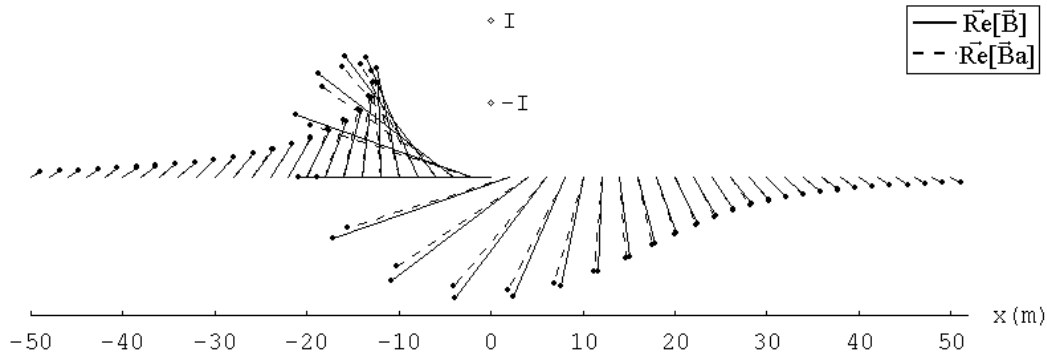


Figura 3.35: Dipolo vertical. Campos  $\vec{Re}[\vec{B}]$  y  $\vec{Re}[\vec{B}_a]$

La figura 3.36 muestra los campos resultantes  $B_r$  y  $B_{ar}$ , y en la 3.37 se muestra el error, definido en (3.143), que coincide con el error de módulo de  $\vec{Re}[\vec{B}_a]$ . La figura 3.38 muestra por último la diferencia de ángulo entre  $\vec{Re}[\vec{B}]$  y  $\vec{Re}[\vec{B}_a]$ . Al igual que en el dipolo horizontal, en caso de que hubiese existido  $\text{Im}[\vec{B}]$ , el error de módulo y diferencia de ángulo de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  serían los mismos que los correspondientes reales.

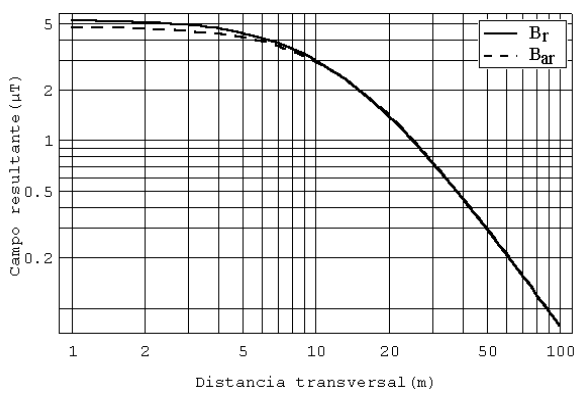


Figura 3.36: Dipolo vertical. Campos resultantes  $B_r$  y  $B_{ar}$ .

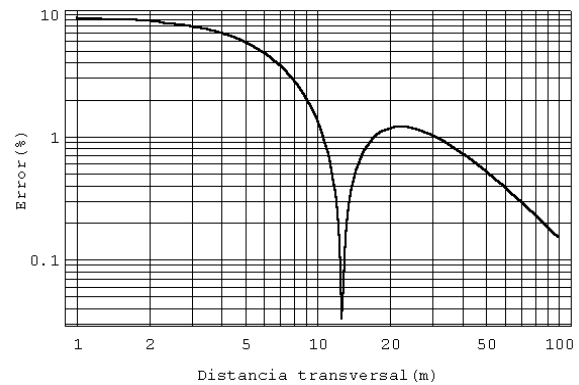


Figura 3.37: Dipolo vertical. Error de módulo obtenido al calcular el campo resultante con  $B_{ar}$ .

Es interesante comparar el campo debido al dipolo horizontal y vertical. Teniendo en cuenta que la carga de la línea y la altura mínima al suelo son las mismas, de la comparación de las figuras 3.31 y 3.36 se deduce que el dipolo horizontal genera un campo considerablemente mayor que el vertical a 1 m del suelo. Para  $x = 0$  resulta ser 1,6 veces mayor. Esto se explica por la mayor altura del centro del dipolo vertical. Para distancias mayores la diferencia se va reduciendo (a 50 m es sólo un 5% superior), como se dedujo previamente en el presente apartado.

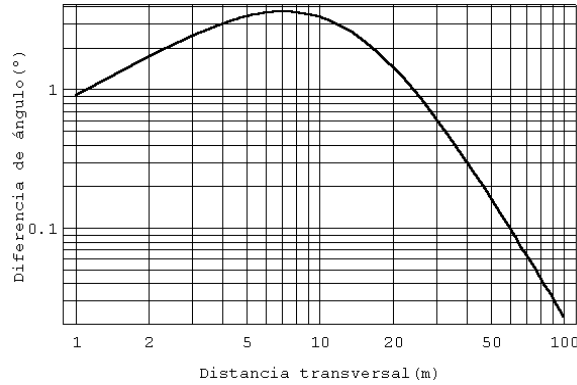


Figura 3.38: Dipolo vertical. Diferencia de ángulo entre  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  y  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_a]$

### 3.7.2 Aplicación al campo magnético creado por líneas trifásicas equilibradas

Como se comentó al principio de esta sección,  $n$  conductores con corriente neta nula se pueden reducir a  $n-1$  dipolos de corriente. Entonces, dado que el medio es lineal, el campo magnético total será la superposición de los campos debidos a cada dipolo. A continuación se aplica dicho resultado al estudio de campos magnéticos creados por líneas eléctricas trifásicas, en las que se supondrá, salvo indicación en contra, que las intensidades por las tres fases forman un sistema equilibrado (sólo existe componente de secuencia directa).

#### Diagrama dipolar de una línea en un punto

Considérese una línea trifásica (figura 3.39(a)). Dado que está formada por tres conductores puede descomponerse en dos dipolos, con un conductor común a ambos. La figura 3.39(b) muestra los dos dipolos en que se ha descompuesto. El CM generado por cada dipolo se puede a su vez descomponer en una parte real y otra imaginaria, como se ha visto en el apartado 3.7.1. Para un punto cualquiera de coordenadas  $(x, y)$  se puede dibujar un diagrama vectorial, en el que se representan los cuatro vectores  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_1](x, y)$ ,  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_1](x, y)$ ,  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2](x, y)$ , e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_2](x, y)$ , así como los vectores suma  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}](x, y)$  e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}](x, y)$ . Este diagrama se definirá como diagrama dipolar de la línea en un punto.

En caso de secuencia directa, las intensidades positivas en cada dipolo se pueden poner como  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_a = I e^{j0}$  e  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_c = I e^{j\frac{2\pi}{3}}$ , por lo que  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_1]=0$ , e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}] = \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ .

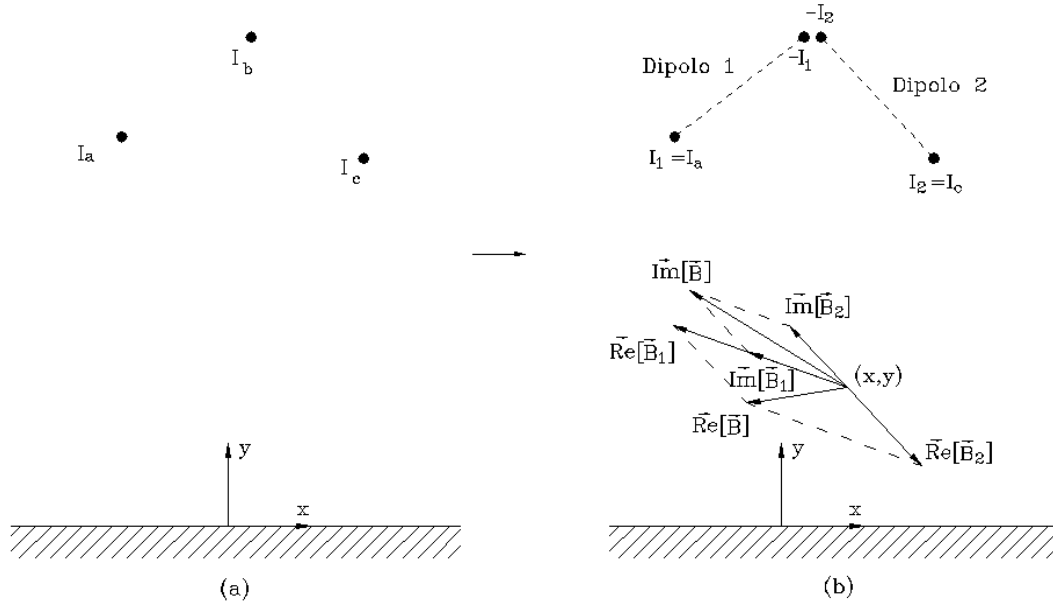


Figura 3.39: Línea aérea trifásica (a) y descomposición en dipolos (b), junto con el diagrama dipolar aproximado en un punto.

### Propiedades del campo magnético creado por líneas trifásicas

La descomposición en dipolos permite analizar, de un modo sencillo, el campo resultante creado por líneas eléctricas, en particular líneas trifásicas.

Se analiza en primer lugar el efecto de un cambio idéntico en el desfase de las tres intensidades. El campo vectorial real e imaginario debido a cada dipolo mantiene en cada punto la misma dirección, como se demostró en el epígrafe 3.7.1. Sin embargo, las componentes real e imaginaria del campo total en cada punto sí varían de dirección. En cuanto al campo resultante  $B_r$ , definido en el apartado 3.5, no varía con el desfase, como se demuestra a continuación. De (3.137) se cumple para los dipolos 1 y 2:

$$\vec{B}_1 = A_1 \vec{M}_1 = A_1 I_1 \vec{p}_1 \tag{3.146}$$

$$\vec{B}_2 = A_2 \vec{M}_2 = A_2 I_2 \vec{p}_2 \tag{3.147}$$

siendo  $A_1$  y  $A_2$  matrices que no dependen del desfase.

El campo suma de ambos vendrá dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = A_1 I_1 \vec{p}_1 + A_2 I_2 \vec{p}_2 \tag{3.148}$$

Si ahora  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$  modifican su desfase un ángulo  $\phi$ , el nuevo valor de  $\vec{\mathbf{B}}$  será

$$\vec{\mathbf{B}}_\phi = \vec{\mathbf{B}}_{\phi 1} + \vec{\mathbf{B}}_{\phi 2} = A_1 \mathbf{I}_1 e^{j\phi} \vec{p}_1 + A_2 \mathbf{I}_2 e^{j\phi} \vec{p}_2 = e^{j\phi} \vec{\mathbf{B}} \quad (3.149)$$

con lo que se cumple que

$$B_x = |\mathbf{B}_x| = |\mathbf{B}_{\phi x}| = B_{\phi x} \quad (3.150)$$

$$B_y = |\mathbf{B}_y| = |\mathbf{B}_{\phi y}| = B_{\phi y} \quad (3.151)$$

y por tanto

$$B_r = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{B_{\phi x}^2 + B_{\phi y}^2} \quad (3.152)$$

Igualmente se demuestra que con secuencia inversa el campo resultante no varía. En efecto, supóngase  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_a = I e^{j0}$ ,  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_c = I e^{j\frac{2\pi}{3}}$  (secuencia directa), con lo que (3.148) queda

$$\vec{\mathbf{B}} = A_1 I \vec{p}_1 + A_2 I e^{j\frac{2\pi}{3}} \vec{p}_2 \quad (3.153)$$

En secuencia inversa  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_c = I e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ , con lo que

$$\vec{\mathbf{B}}_i = A_1 I \vec{p}_1 + A_2 I e^{-j\frac{2\pi}{3}} \vec{p}_2 \quad (3.154)$$

De (3.153) y (3.154) se observa fácilmente que

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]| = |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_i]| \quad (3.155)$$

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]| = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_i]| \quad (3.156)$$

por lo que

$$B_r = \sqrt{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|^2 + |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]|^2} = \sqrt{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_i]|^2 + |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_i]|^2} \quad (3.157)$$

Otra propiedad es que el campo resultante creado por una línea trifásica de secuencia directa, configuración simétrica de conductores, es simétrico respecto a dicho eje. En efecto, supóngase que el eje de simetría es  $x = 0$ . Se desea demostrar por tanto que  $B_r(x, y) = B_r(-x, y)$ . Para simplificar, se expresarán las magnitudes en función sólo de  $x$ . Sean las intensidades por los dipolos  $\mathbf{I}_1 = I e^{j0}$  e  $\mathbf{I}_2 = I e^{j\frac{2\pi}{3}}$ . Si se aplica (3.130) a los dipolos 1 y 2, y teniendo en cuenta que el momento magnético de ambos viene dado por

$$\vec{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{I}_1 \vec{p}_1 = I_1 (p_{1x} \vec{u}_x + p_{1y} \vec{u}_y) \quad (3.158)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{I}_2 \vec{p}_2 = I_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} (-p_{1x} \vec{u}_x + p_{1y} \vec{u}_y) \quad (3.159)$$

las componentes de  $\vec{\mathbf{B}}_1(x)$  y  $\vec{\mathbf{B}}_2(x)$  se pueden poner en la forma

$$\mathbf{B}_{1x}(x) = C_1(x) I_1 \left( r_1^2(x) (-\text{sen}(2\theta_1(x)) p_{1x} + \cos(2\theta_1(x)) p_{1y}) + \frac{p^2}{4} p_{1y} \right) = D_1(x) \quad (3.160)$$

$$\mathbf{B}_{1y}(x) = C_1(x) I_1 \left( r_1^2(x) (\cos(2\theta_1(x)) p_{1x} + \text{sen}(2\theta_1(x)) p_{1y}) - \frac{p^2}{4} p_{1x} \right) = D_2(x) \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2x}(x) &= C_2(x)I_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} \left( r_2^2(x)(\sin(2\theta_2(x))p_{1x} + \cos(2\theta_2(x))p_{1y}) + \frac{p^2}{4}p_{1y} \right) \\ &= D_3(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2y}(x) &= C_2(x)I_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} \left( r_2^2(x)(-\cos(2\theta_2(x))p_{1x} + \sin(2\theta_2(x))p_{1y}) + \frac{p^2}{4}p_{1x} \right) \\ &= D_4(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (3.163)$$

Es fácil demostrar que  $C_1(x) = C_2(-x)$ ,  $r_1(x) = r_2(-x)$  y  $\theta_1(x) = 3\pi - \theta_2(-x)$ , con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1x}(-x) &= C_1(-x)I_1 \left( r_1^2(-x)(-\sin(2\theta_1(-x))p_{1x} + \cos(2\theta_1(-x))p_{1y}) + \frac{p^2}{4}p_{1y} \right) \\ &= D_3(x) \end{aligned} \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1y}(-x) &= C_1(-x)I_1 \left( r_1^2(-x)(\cos(2\theta_1(-x))p_{1x} + \sin(2\theta_1(-x))p_{1y}) - \frac{p^2}{4}p_{1x} \right) \\ &= -D_4(x) \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2x}(-x) &= C_2(-x)I_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} \left( r_2^2(-x)(\sin(2\theta_2(-x))p_{1x} + \cos(2\theta_2(-x))p_{1y}) + \frac{p^2}{4}p_{1y} \right) \\ &= D_1(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2y}(-x) &= C_2(-x)I_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} \left( r_2^2(-x)(-\cos(2\theta_2(-x))p_{1x} + \sin(2\theta_2(-x))p_{1y}) + \frac{p^2}{4}p_{1x} \right) \\ &= -D_2(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (3.167)$$

Las componentes del campo creado por ambos dipolos en  $x$  y  $-x$  vendrán dadas por

$$\mathbf{B}_x(x) = \mathbf{B}_{1x}(x) + \mathbf{B}_{2x}(x) = D_1(x) + D_3(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.168)$$

$$\mathbf{B}_y(x) = \mathbf{B}_{1y}(x) + \mathbf{B}_{2y}(x) = D_2(x) + D_4(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{B}_x(-x) = \mathbf{B}_{1x}(-x) + \mathbf{B}_{2x}(-x) = D_3(x) + D_1(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.170)$$

$$\mathbf{B}_y(-x) = \mathbf{B}_{1y}(-x) + \mathbf{B}_{2y}(-x) = -D_4(x) - D_2(x) e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.171)$$

El módulo de la componente  $\mathbf{B}_x(x)$  del campo resultante vendrá dado, desarrollando (3.168), por

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_x(x)|^2 &= |\mathbf{B}_{1x}(x) + \mathbf{B}_{2x}(x)|^2 = (\mathbf{B}_{1x}(x) + \mathbf{B}_{2x}(x))(\mathbf{B}_{1x}(x) + \mathbf{B}_{2x}(x))^* \\ &= D_1(x)^2 + D_3(x)^2 + D_1(x)D_3(x)e^{j\frac{2\pi}{3}} + D_1(x)D_3(x)e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ &= D_1(x)^2 + D_3(x)^2 - D_1(x)D_3(x) \end{aligned} \quad (3.172)$$



Igualmente para la componente  $\mathbf{B}_y(x)$

$$|\mathbf{B}_y(x)|^2 = |\mathbf{B}_{1y}(x) + \mathbf{B}_{2y}(x)|^2 = D_2(x)^2 + D_4(x)^2 - D_2(x)D_4(x) \quad (3.173)$$

De igual modo en  $-x$  se calculan  $|\mathbf{B}_x(-x)|^2$  y  $|\mathbf{B}_y(-x)|^2$ , obteniendo

$$|B_x(-x)|^2 = |\mathbf{B}_{1x}(-x) + \mathbf{B}_{2x}(-x)|^2 = D_1(x)^2 + D_3(x)^2 - D_1(x)D_3(x) \quad (3.174)$$

$$|B_y(-x)|^2 = |\mathbf{B}_{1y}(-x) + \mathbf{B}_{2y}(-x)|^2 = D_2(x)^2 + D_4(x)^2 - D_2(x)D_4(x) \quad (3.175)$$

Comparando (3.172) y (3.173) con (3.174) y (3.175) respectivamente se comprueba que  $B_r(x) = B_r(-x)$ .

### Expresión aproximada del campo magnético creado por una línea trifásica equilibrada de simple circuito

Una aproximación del campo creado por una línea se deriva directamente de la expresión aproximada del campo creado por un dipolo. Por comodidad se le llamará aproximación DA (Descomposición Aproximada). Para ello considérese la línea dividida en dos dipolos (figura 3.40). Aplicando (3.140) se tiene:

$$\vec{\mathbf{B}}_{1a} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_1}{2\pi r_1^2} (-\sin(2\theta_1 - \psi_1) \vec{u}_x + \cos(2\theta_1 - \psi_1) \vec{u}_y) \quad (3.176)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{2a} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_2}{2\pi r_2^2} (-\sin(2\theta_2 - \psi_2) \vec{u}_x + \cos(2\theta_2 - \psi_2) \vec{u}_y) \quad (3.177)$$

siendo

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_1 p_1 = I p_1 \quad p_1 = d_1 \quad (3.178)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_2 p_2 = I p_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad p_2 = d_2 \quad (3.179)$$

tal como se definió en (3.121).

Sustituyendo  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  por sus expresiones en (3.178) y (3.179) queda, descomponiendo (3.176) y (3.177) en sus partes real e imaginaria:

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{1a}] = \frac{\mu_0 I d_1}{2\pi r_1^2} (\cos \varphi_{1a} \vec{u}_x + \sin \varphi_{1a} \vec{u}_y) \quad (3.180)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{1a}] = 0 \quad (3.181)$$

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{2a}] = \frac{\mu_0 I d_2}{4\pi r_2^2} (\cos \varphi_{2a} \vec{u}_x + \sin \varphi_{2a} \vec{u}_y) \quad (3.182)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{2a}] = -\frac{\mu_0 \sqrt{3} I d_2}{4\pi r_2^2} (\cos \varphi_{2a} \vec{u}_x + \sin \varphi_{2a} \vec{u}_y) \quad (3.183)$$

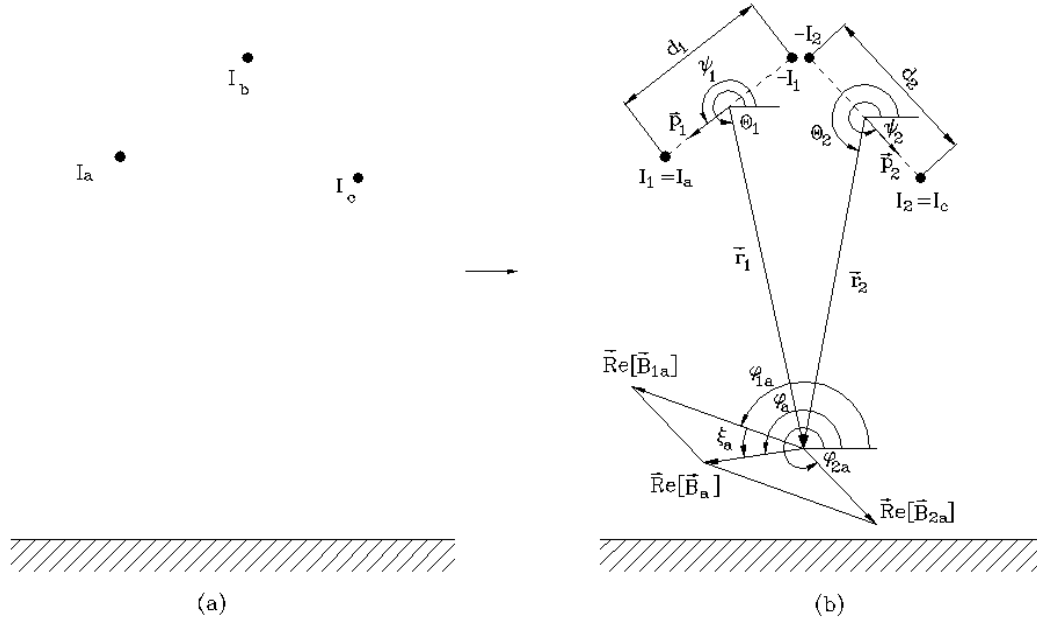


Figura 3.40: Línea aérea trifásica (a) y descomposición en dipolos (b), junto con el diagrama dipolar aproximado en un punto.

donde

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} \tag{3.184}$$

$$\varphi_{2a} = 2\theta_2 - \psi_2 - \frac{\pi}{2} \tag{3.185}$$

El campo  $\vec{B}_a$  obtenido con esta aproximación vendrá dado por

$$\vec{B}_a = \vec{B}_{1a} + \vec{B}_{2a} \tag{3.186}$$

siendo

$$\text{Re}[\vec{B}_a] = |\text{Re}[\vec{B}_a]|(\cos \varphi_a \vec{u}_x + \text{sen} \varphi_a \vec{u}_y) \tag{3.187}$$

$$\text{Im}[\vec{B}_a] = \text{Im}[\vec{B}_{2a}] \tag{3.188}$$

El campo resultante  $B_{ar}$  se puede obtener, según (3.50), calculando los módulos de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_a]$ . Aplicando el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} |\text{Re}[\vec{B}_a]|^2 &= |\text{Re}[\vec{B}_{1a}]|^2 + |\text{Re}[\vec{B}_{2a}]|^2 - 2|\text{Re}[\vec{B}_{1a}]||\text{Re}[\vec{B}_{2a}]|\cos(\pi - (\varphi_{2a} - \varphi_{1a})) \\ &= \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{d_1^2}{r_1^4} + \frac{d_2^2}{4r_2^4} + \frac{d_1 d_2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})\right) \end{aligned} \tag{3.189}$$

Por otro lado

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{2a}]| = \frac{\mu_0 \sqrt{3} I d_2}{4\pi r_2^2} \quad (3.190)$$

La inducción resultante debida a ambos dipolos será

$$B_{ar}^2 = |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 + |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{d_1^2}{r_1^4} + \frac{d_2^2}{r_2^4} + \frac{d_1 d_2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})\right) \quad (3.191)$$

$B_{ar}$  se puede poner también en función de  $B_{1ar}$  y  $B_{2ar}$ . De (3.191) es fácil deducir que

$$B_{ar}^2 = B_{1ar}^2 + B_{2ar}^2 + B_{1ar} B_{2ar} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{1a}) \quad (3.192)$$

El ángulo  $\varphi_a$  de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  (figura 3.40) puede determinarse aplicando los teoremas del seno y coseno al triángulo formado por  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{1a}]$ ,  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{2a}]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$ . Si  $\xi_a = \varphi_a - \varphi_{1a}$  se tiene que

$$\text{sen } \xi_a = c_{2a} \text{sen}(\varphi_{2a} - \varphi_{1a}) \quad (3.193)$$

$$\text{cos } \xi_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_{1a}} (1 - c_{2a}^2) + c_{1a} \right) \quad (3.194)$$

siendo

$$c_{1a} = \frac{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{1a}]|}{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|} \quad (3.195)$$

$$c_{2a} = \frac{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{2a}]|}{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|} \quad (3.196)$$

El ángulo  $\varphi_a$  será entonces

$$\varphi_a = \varphi_{1a} + \xi_a = 2\theta_1 - \psi_1 + \xi_a + \frac{\pi}{2} \quad (3.197)$$

Si la secuencia de fases es  $acb$ , el planteamiento es idéntico, intercambiando las fases  $b$  y  $c$  en la figura (3.39). Las expresiones (3.180), (3.181) y (3.182) son las mismas, y (3.183) se modifica cambiando el signo de la expresión.

Las expresiones anteriores se pueden simplificar si se tiene en cuenta que, a suficiente distancia de la línea, se cumple que

$$\theta_2 \approx \theta_1 \quad (3.198)$$

$$r_2 \approx r_1 \quad (3.199)$$

De (3.184) y (3.185) se tendrá que

$$\varphi_{1a} - \varphi_{2a} \approx \psi_2 - \psi_1 + \pi \quad (3.200)$$

con lo que (3.189) y (3.190) pasan a ser

$$|\operatorname{Re}[\vec{B}_a]|^2 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{d_1^2}{r^4} + \frac{d_2^2}{4r^4} - \frac{d_1 d_2}{r^2 r^2} \cos(\psi_1 - \psi_2)\right) \quad (3.201)$$

$$|\operatorname{Im}[\vec{B}_a]| = \frac{\mu_0 \sqrt{3} I d_2}{4\pi r^2} \quad (3.202)$$

siendo  $r$  una distancia intermedia entre  $r_1$  y  $r_2$ , cuyo valor exacto no es relevante. El campo resultante vendrá dado por

$$B_{ar}^2 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\right)^2 (d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)) \quad (3.203)$$

En cuanto al valor del ángulo  $\varphi_a$  lejos de la línea se puede obtener a partir de (3.197), siendo ahora  $\xi_a$

$$\xi_a = \operatorname{atan} \frac{\operatorname{sen}(\psi_2 - \psi_1)}{2 - \cos(\psi_2 - \psi_1)} \quad -\frac{\pi}{2} < \xi_a < \frac{\pi}{2} \quad (3.204)$$

Para obtener esta expresión se ha considerado que  $d_1 = d_2$ .

La expresión aproximada de  $B_{ar}$ , (3.203), coincide con el campo resultante del término de segundo orden  $B_{2r}$  del desarrollo en serie, (apartado 3.6). En efecto, si  $d_{ab} = d_1$  y  $d_{bc} = d_2$  se tiene que (figura 3.40)

$$d_{ac}^2 = d_{ab}^2 + d_{bc}^2 - 2d_{ab}d_{bc} \cos(\psi_1 - \psi_2) \quad (3.205)$$

Es fácil demostrar entonces que el factor entre paréntesis de (3.203) puede ponerse como

$$d_{ab}^2 + d_{ac}^2 - d_{ab}d_{ac} \cos(\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{2}(d_{ab}^2 + d_{bc}^2 + d_{ac}^2) \quad (3.206)$$

que coincide, previa multiplicación por  $I^2$ , con (3.92), el cuadrado del momento  $M_{2r}$  del término de segundo orden del desarrollo en serie.

A continuación se aplica la aproximación DA a tres configuraciones comúnmente empleadas en líneas de transporte en España (horizontal, vertical, delta), comparándose con la DS. Para otras configuraciones no presentadas (tresbolillo, vertical doble circuito) se ha analizado también el CM debido a las aproximaciones, obteniéndose resultados similares en los valores de error encontrados.

### Campo magnético creado por una línea trifásica horizontal

Considérese una línea trifásica horizontal compuesta por tres conductores por los que circulan las intensidades  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  (figura 3.41).

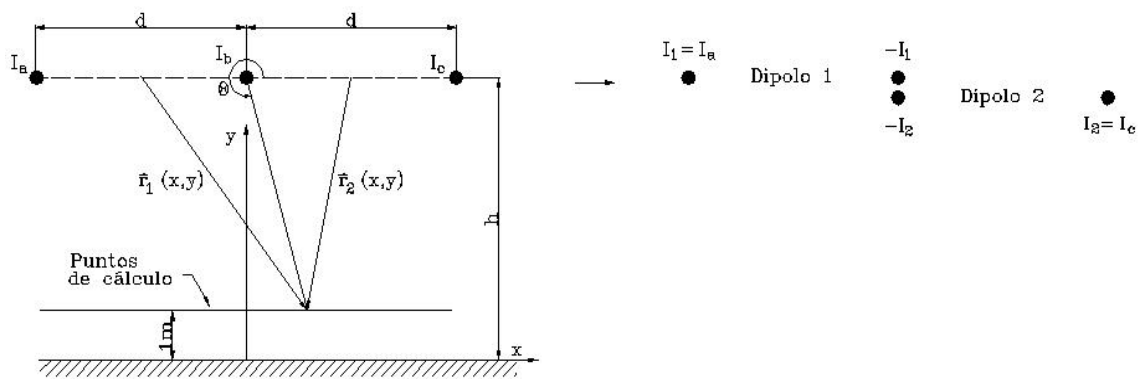


Figura 3.41: Configuración horizontal y descomposición en dipolos

Para  $I_a = 500 e^{j0}$  A,  $I_b = 500 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $I_c = 500 e^{j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $d = 8,5$  m, y  $h = 10$  m, la figura 3.42 muestra los campos  $\text{Re}[\vec{B}_1]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$  debidos a los dipolos 1 y 2 respectivamente, así como el campo resultante  $\text{Re}[\vec{B}] = \text{Re}[\vec{B}_1] + \text{Re}[\vec{B}_2]$ .

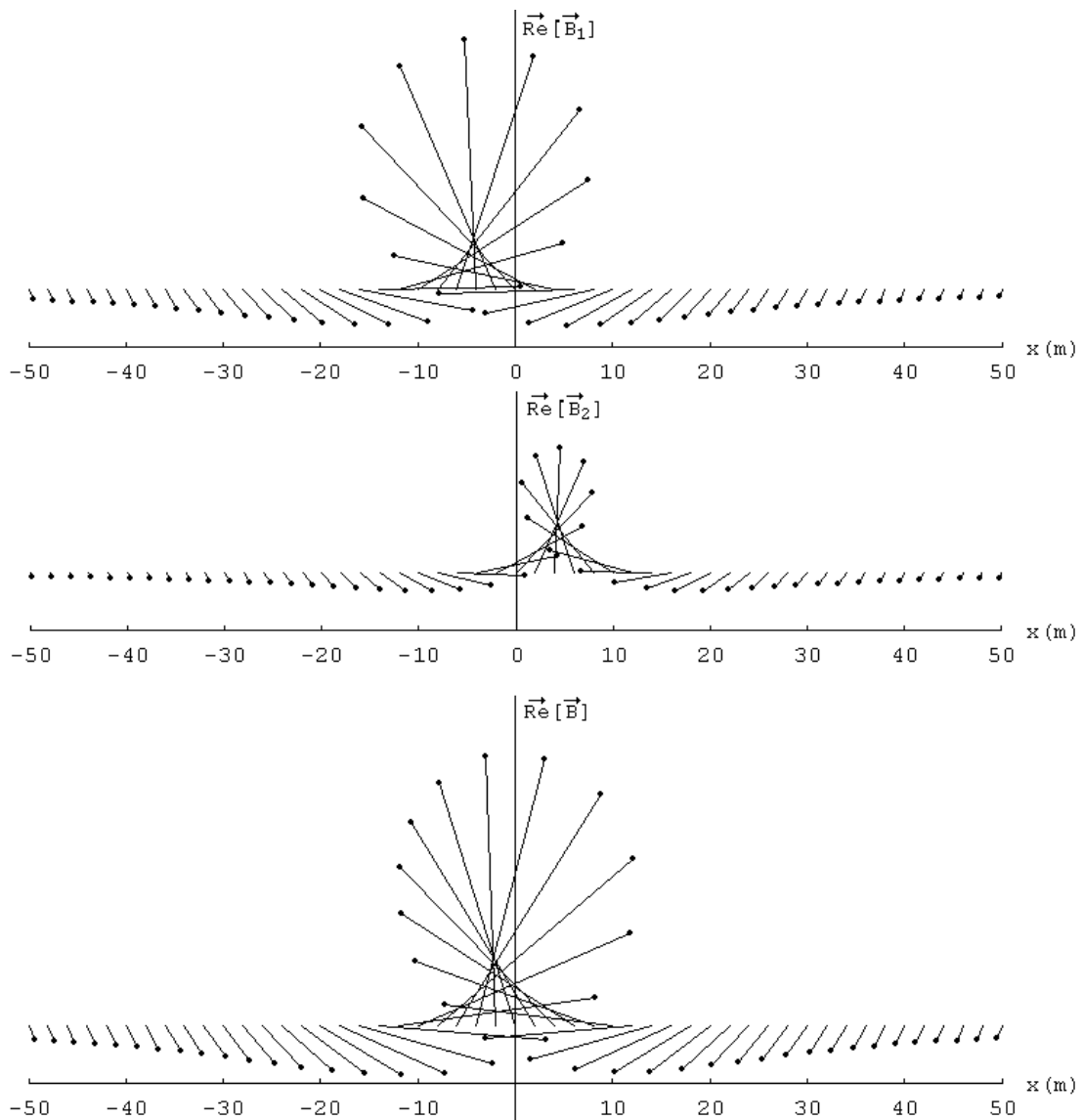


Figura 3.42: Campos debidos a los dipolos 1 ( $\text{Re}[\vec{B}_1]$ ) y 2 ( $\text{Re}[\vec{B}_2]$ ) y campo resultante ( $\text{Re}[\vec{B}]$ ), en una línea trifásica horizontal.

Obsérvese en la figura que el campo creado por cada dipolo es máximo en la coordenada  $x$  correspondiente al centro de dicho dipolo. Nótese también que, dado que son dos dipolos horizontales con igual distancia entre conductores y distinto valor de intensidad, el campo vectorial generado por cada uno presenta el mismo sentido en los puntos a igual distancia relativa de los dipolos, variando el módulo. A medida que nos alejamos del centro de la línea ambos campos tienden al mismo sentido, y por ende el campo resultante. El ángulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  lejos de la línea viene dado por (3.197), siendo  $\pm\frac{\pi}{2}$ . Indicar por último que la evolución de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  con  $x$  es similar a la creada por un dipolo horizontal.

La figura 3.43 muestra el campo  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2] = \vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$ , ya que el desfase de la intensidad por el dipolo 1 es nulo. Como se vio en el apartado 3.7.1 el campo  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  es paralelo a  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  aunque el sentido pueda cambiar, como efectivamente ocurre.

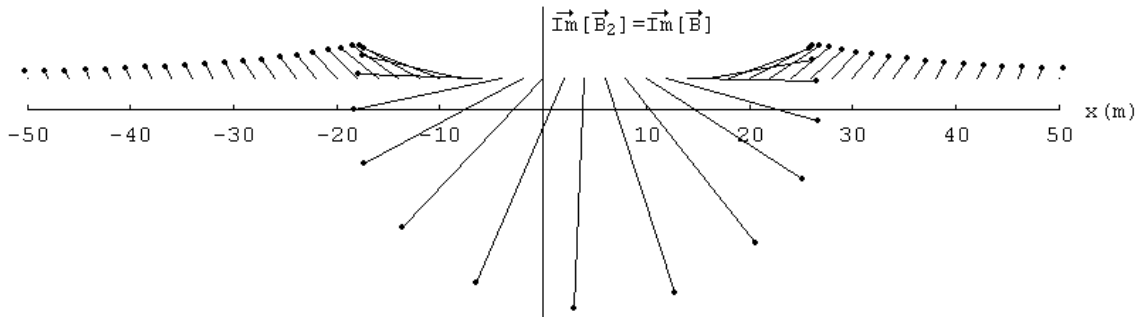


Figura 3.43: Campo  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$  en una línea trifásica horizontal

### Cálculo aproximado del campo magnético creado por la línea horizontal

En este caso (figura 3.41)  $\psi_1 = \pi$ ,  $\psi_2 = 0$ . Según (3.184) y (3.185)

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} = 2\theta_1 - \frac{\pi}{2} \quad (3.207)$$

$$\varphi_{1a} - \varphi_{2a} = 2(\theta_1 - \theta_2) + \psi_2 - \psi_1 + \pi = 2(\theta_1 - \theta_2) \quad (3.208)$$

Las expresiones (3.189), (3.190) y (3.191) quedan

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 = \left(\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{4r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \cos(2(\theta_1 - \theta_2))\right) \quad (3.209)$$

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = \frac{\mu_0 \sqrt{3} Id}{4\pi r_2^2} \quad (3.210)$$

$$B_{ar}^2 = \left(\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \cos(2(\theta_1 - \theta_2))\right) \quad (3.211)$$

Operando, la expresión (3.211) se puede expresar también como

$$B_{ar}^2 = \left(\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\right)^2 \frac{d^4 + 3(r_1^4 + r_2^4) - 2d^2(r_1^2 + r_2^2)}{2r_1^4 r_2^4} \quad (3.212)$$

Según (3.197), el ángulo  $\varphi_a$  será

$$\varphi_a = 2\theta_1 + \xi_a - \frac{\pi}{2} \quad (3.213)$$

Si en lugar de considerar los dipolos de la figura 3.41 se hubiesen tomado los comprendidos por los conductores  $a,c$  y  $b,c$  el error de  $B_{ar}$  hubiese sido mayor, ya que ahora existe uno de los dipolos cuya distancia entre conductores es mayor que en el caso anterior (dipolo 1,3), con lo que el error en el campo aproximado de dicho dipolo es mayor. Por ello deben elegirse los dipolos de menor distancia entre conductores.

A suficiente distancia de la línea pueden aplicarse las simplificaciones (3.198) y (3.199). De (3.201) y (3.202) se obtienen las componentes real e imaginaria del campo resultante debido a la línea, teniendo en cuenta que  $\psi_1 = \pi$ ,  $\psi_2 = 0$ :

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I_a d}{\pi r^2} \quad (3.214)$$

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_0 I_a d}{\pi r^2} \quad (3.215)$$

El ángulo  $\varphi_a$  de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  se obtiene de (3.197), teniendo en cuenta que, según (3.204),  $\xi_a = 0$ , con lo que

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a] = |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|(\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (3.216)$$

En cuanto al ángulo de la componente imaginaria, puede obtenerse a partir de (3.183) y (3.185):

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a] = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|(-\sin 2\theta \vec{u}_x + \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (3.217)$$



con lo que el campo debido a la línea queda

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I_a d}{4\pi r^2} (3 - j\sqrt{3})(\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (3.218)$$

Obsérvese que, a suficiente distancia de la línea,  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  tienen prácticamente igual dirección y sentido contrario. Dado que  $\vec{B} \simeq \vec{B}_a$ , se cumplirá que para dicha distancia  $\text{Re}[\vec{B}]$  e  $\text{Im}[\vec{B}]$  tienen también igual dirección y sentido opuesto. Esto se observa gráficamente en las figuras 3.42 y 3.43. El campo está polarizado linealmente, y se comporta como si fuera el debido a un dipolo horizontal (figura 3.30).

Las tablas 3.4, 3.5 y 3.6 muestran los errores de  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ , obtenidos para diversos valores de  $x$ ,  $d$  y  $h$ . Los valores de  $d$  y  $h$  son típicos en líneas de transporte. Obsérvese que a medida que aumenta la coordenada  $x$ , aumenta  $h$  o se reduce  $d$ , el error es menor.

Tabla 3.4: Línea horizontal. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 0$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	5,93	55,47	4,83	23,76	3,18	13,03
8	3,13	92,49	6,01	40,97	4,71	22,76
10	1,33	134,59	5,67	61,72	5,77	34,80

Tabla 3.5: Línea horizontal. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 20$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	1,65	7,36	0,84	4,62	0,27	2,39
8	3,02	12,7	1,34	7,87	0,30	4,00
10	4,82	19,20	1,73	11,61	0,08	5,73

Tabla 3.6: Línea horizontal. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 50$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	0,35	1,59	0,32	1,47	0,28	1,32
8	0,63	2,82	0,58	2,61	0,50	2,33
10	1,01	4,39	0,92	4,06	0,80	3,63

Dado que el campo magnético es una magnitud vectorial, es conveniente analizar las aproximaciones en relación a las componentes vectoriales del mismo. Se comparan a continuación las aproximaciones DA y DS con la RI, para la línea de  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m y 500 A de corriente por fase. Las figuras 3.44 y 3.45 muestran de nuevo los campos  $\text{Re}[\vec{B}]$  (figura 3.42) e  $\text{Im}[\vec{B}]$  (figura 3.43), junto con los campos  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_a]$ , respectivamente. Se observa una mayor diferencia cerca de la línea.

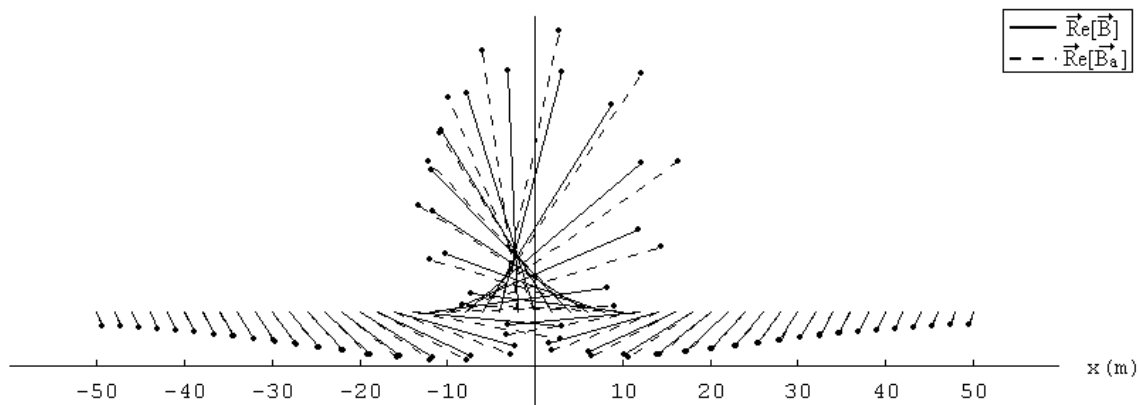


Figura 3.44: Campos  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  en la línea horizontal

La figura 3.46 muestra los errores de módulo de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  y el campo de segundo orden de la serie de potencias  $\text{Re}[\vec{B}_2]$ , dado por (3.67) (el ángulo  $\theta$  de (3.67) es el mostrado en la figura 3.41). La figura 3.47 muestra los errores de módulo de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_2]$ . Obsérvese que el máximo error de la parte real con la aproximación DA es el 20%, siendo del 90% con la DS. Respecto a la parte imaginaria, el máximo error obtenido con DA es el 20%, y el 60% para la DS. Un error menor del 5% se obtiene con la aproximación DA a partir de 10 m de distancia de la línea, siendo de 70 m para la DS, parte real y 170 m para la

imaginaria.

Aunque estos datos corresponden a unos valores de  $h$  y  $d$  concretos, sirven de orientación para otros valores existentes en líneas de transporte.

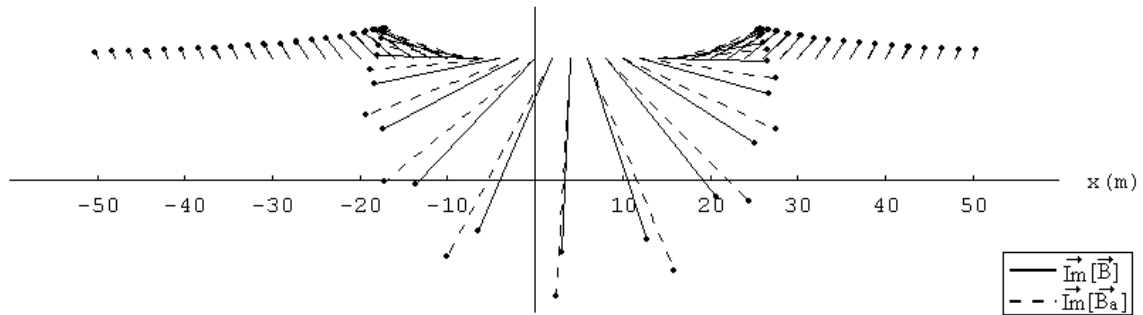


Figura 3.45: Campos  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_a]$  en la línea horizontal

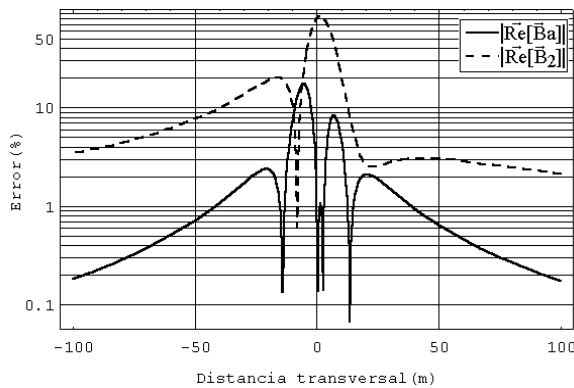


Figura 3.46: Errores de módulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_a]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica horizontal.

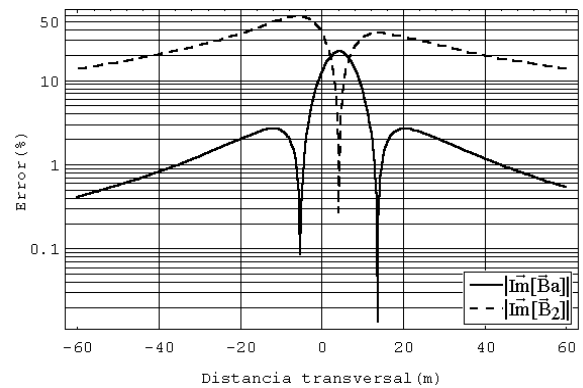


Figura 3.47: Errores de módulo de  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_a]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica horizontal.

En cuanto al error de ángulo, la figura 3.48 muestra las diferencias absolutas entre el ángulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}]$  y los de  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_a]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{B}_2]$ . Asimismo la figura 3.49 muestra las diferencias absolutas entre el ángulo de  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}]$  y los de  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_a]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_2]$ . Obsérvese que con el modelo DA se obtiene una diferencia máxima de  $8^\circ$ , siendo de  $50^\circ$  con el modelo DS.

Por último se compara el campo resultante. La figura 3.50 muestra el campo resultante  $B_r$  (modelo RI), junto con los campo  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ . La figura 3.51 muestra los errores del campo resultante obtenidos con las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ . El error desciende por debajo del 5% para  $x = 11$  m con la aproximación  $B_{ar}$ , y para  $x = 38$  m con la  $B_{2r}$ .

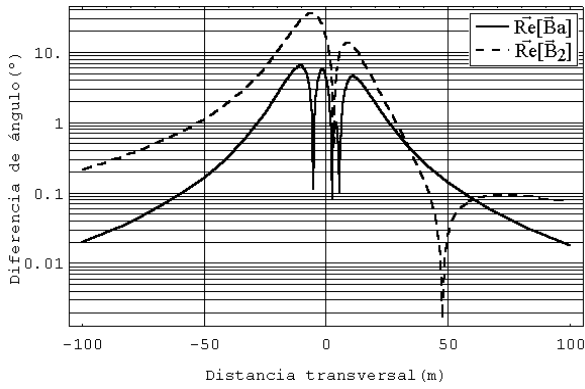


Figura 3.48: Diferencia entre el ángulo de  $\text{Re}[\vec{B}]$  y los de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica horizontal.

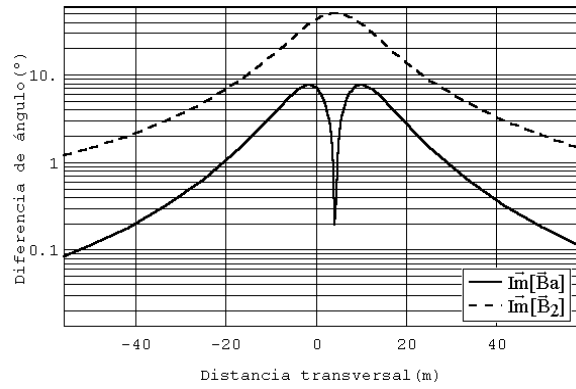


Figura 3.49: Diferencia entre el ángulo de  $\text{Im}[\vec{B}]$  y los de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica horizontal.

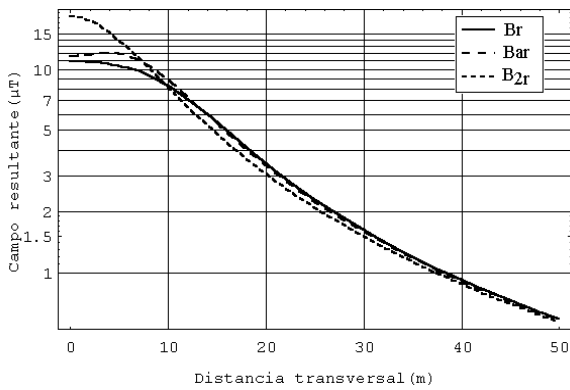


Figura 3.50: Campos resultantes  $B_r$ ,  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  en la línea trifásica horizontal.

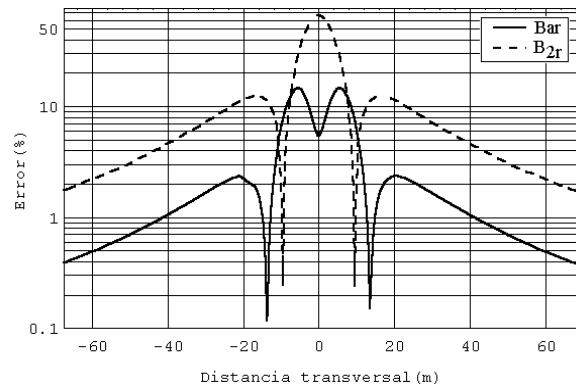


Figura 3.51: Errores de campo resultante  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  en la línea trifásica horizontal.

### Campo magnético creado por una línea trifásica vertical

Considérese a continuación una línea trifásica equilibrada vertical (figura 3.52), en la que se muestra la división en dos dipolos.

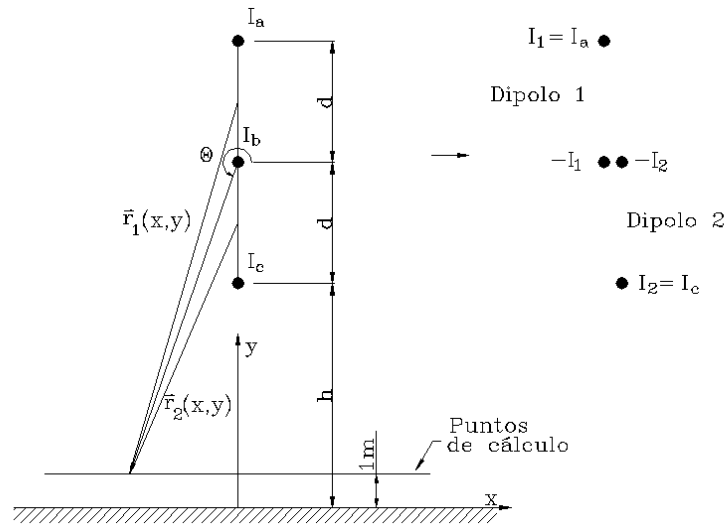


Figura 3.52: Configuración vertical y descomposición en dipolos

En este caso, dado que las intensidades están contenidas en el plano  $x = 0$ , se cumple también que el campo resultante es simétrico respecto a  $x = 0$ .

Para  $\mathbf{I}_a = 500 e^{j0}$  A,  $\mathbf{I}_b = 500 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $\mathbf{I}_c = 500 e^{j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $d = 8,5$  m, y  $h = 10$  m, la figura 3.53 muestra los campos  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_1]$  y  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  debidos a los dipolos 1 y 2 respectivamente, así como el campo resultante  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}] = \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_1] + \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ .

Al igual que en el caso horizontal, el campo creado por cada dipolo es máximo en la coordenada  $x$  correspondiente al centro de dicho dipolo ( $x = 0$  en este caso). A diferencia de los dos dipolos horizontales, los campos  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_1]$  y  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  no poseen la misma dirección en cada punto, dado que las alturas de ambos dipolos son distintas. Otra similitud con el caso horizontal es que a medida que nos alejamos del centro de la línea ambos campos tienden al mismo sentido, y por ende el campo suma  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$ , cuyo ángulo tiende a 0 con  $|x|$ . Destacar por último que la evolución de  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  a lo largo de  $x$  es similar al campo creado por un dipolo vertical.

En cuanto al campo  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}]$ , dado que  $\text{Im}[\mathbf{I}_1] = 0$ , será igual al creado por el dipolo 2, siendo la dirección en cada punto del vector  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  la misma que para  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ .

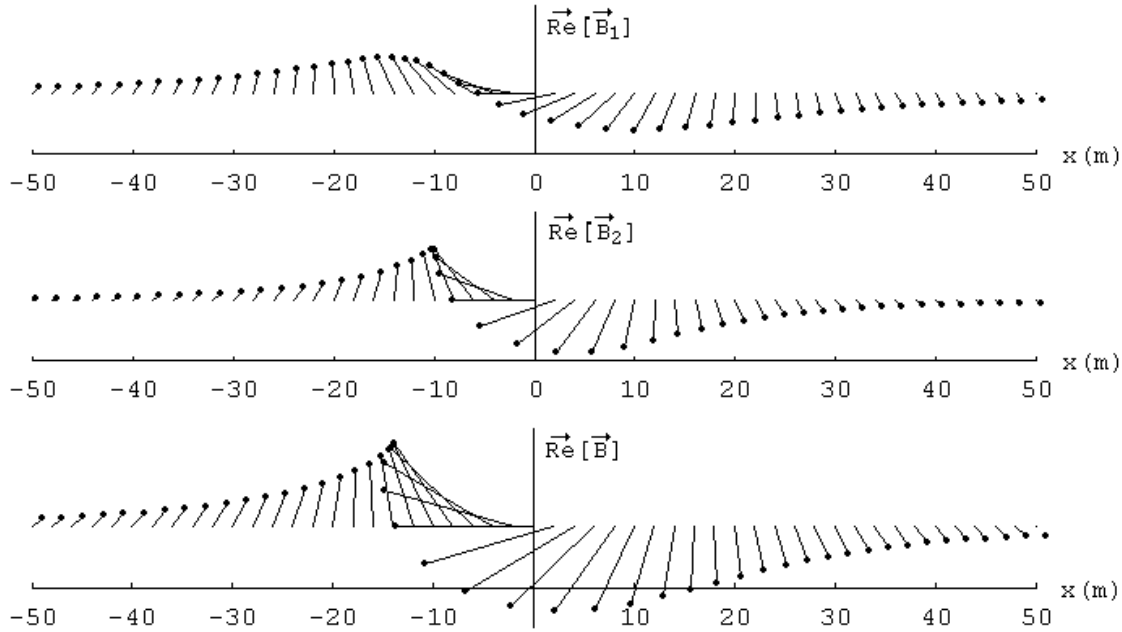


Figura 3.53: Línea trifásica vertical. Campos debidos a los dipolos 1 ( $\vec{Re}[\vec{B}_1]$ ) y 2 ( $\vec{Re}[\vec{B}_2]$ ) y campo resultante ( $\vec{Re}[\vec{B}]$ ).

### Cálculo aproximado del campo magnético creado por la línea vertical

En este caso, teniendo en cuenta la secuencia mostrada en la figura 3.52, se tiene que  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi_2 = -\frac{\pi}{2}$ . Se tiene entonces que

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} = 2\theta_1 \tag{3.219}$$

Es fácil demostrar que las ecuaciones (3.208), (3.209), (3.210), (3.211) y (3.212) son válidas para el caso vertical.

Según (3.197), el ángulo  $\varphi_a$  será

$$\varphi_a = 2\theta_1 + \xi_a \tag{3.220}$$

estando  $\xi_a$  definida en (3.193) y (3.194).

A suficiente distancia de la línea pueden aplicarse las aproximaciones (3.198) y (3.199). Ahora se tiene que  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi_2 = -\frac{\pi}{2}$ . Es fácil ver que, con dichos valores,  $|\vec{Re}[\vec{B}_{2a}]|$  e  $|\vec{Im}[\vec{B}_{2a}]|$ , definidos en (3.189) y (3.190), tienen expresiones idénticas al caso horizontal,

vistas en (3.214) y (3.215). En cuanto al ángulo  $\varphi_a$ , definido en (3.197), será

$$\varphi_a = 2\theta_1 - \psi_1 + \xi_a + \frac{\pi}{2} = 2\theta_1 \quad (3.221)$$

por ser  $\xi_a = 0$  según (3.204). Se tiene por tanto que el campo aproximado debido a la línea viene dado por

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I_a d}{4\pi r^2} (3 - j\sqrt{3})(\cos 2\theta \vec{u}_x + \text{sen } 2\theta \vec{u}_y) \quad (3.222)$$

Conforme nos alejamos de la línea  $\theta \rightarrow \pi$  y la componente  $y$  de los vectores  $\text{Re}[\vec{B}]$  e  $\text{Im}[\vec{B}]$  tiende a cero (figuras 3.54 y 3.55).

Se comparan a continuación los distintos métodos, tal como se hizo en el caso horizontal, empleando los valores de intensidades y distancias indicados en el epígrafe anterior.

Las tablas 3.7, 3.8 y 3.9 muestran los errores obtenidos para diversos valores de  $x$ ,  $d$  y  $h$ . Se observa que el error es en general menor que en el caso horizontal, siendo esta diferencia más notoria con la aproximación de  $B_{2r}$ . Esto se observa más claramente conforme  $d/h$  crece. En la configuración vertical, a medida que aumenta  $d/h$  se compensa el aumento de error debido a que  $d$  crece, con la reducción debido a que los centros de los dos dipolos se alejan del punto de medida, resultando un incremento pequeño. Sin embargo, en el caso horizontal uno o ambos centros de los centros de los dipolos se acercan al punto de medida, incrementando sensiblemente el error.

Tabla 3.7: Línea vertical. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 0$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	7,83	23,96	3,95	14,22	2,39	9,39
8	11,67	31,61	6,15	20,06	3,81	13,82
10	15,53	38,08	8,51	25,44	5,39	18,15

Tabla 3.8: Línea vertical. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 20$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	0,78	1,67	0,33	0,11	0,03	0,82
8	1,13	1,62	0,44	0,60	0,027	1,84
10	1,50	0,92	0,51	1,80	0,13	3,24

Tabla 3.9: Línea vertical. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 50$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	0,29	0,95	0,25	0,81	0,22	0,66
8	0,48	1,57	0,42	1,31	0,35	1,03
10	0,71	2,26	0,60	1,83	0,50	1,41

Las figuras 3.54 y 3.55 muestran los campos  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  (ya representado en la figura 3.53) e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}]$ , junto con los campos respectivos  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_a]$ .

La figura 3.56 muestra los errores de módulo de  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  y  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ . Los correspondientes errores de la parte imaginaria se muestran en la figura 3.57. Se observa de esta figura que con la aproximación DS se obtienen errores en torno al 50% para la parte imaginaria en  $x = 0$ . Dicho error se reduce a poco más del 10% con la aproximación  $\vec{\mathbf{B}}_a$ .



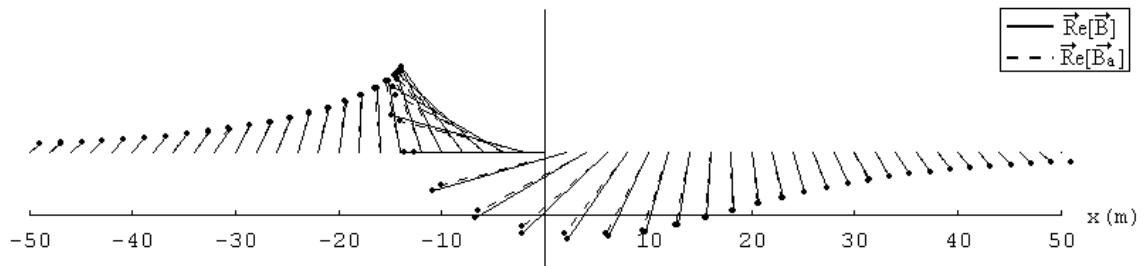


Figura 3.54: Línea trifásica vertical. Campos  $\text{Re}[\vec{B}]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_a]$

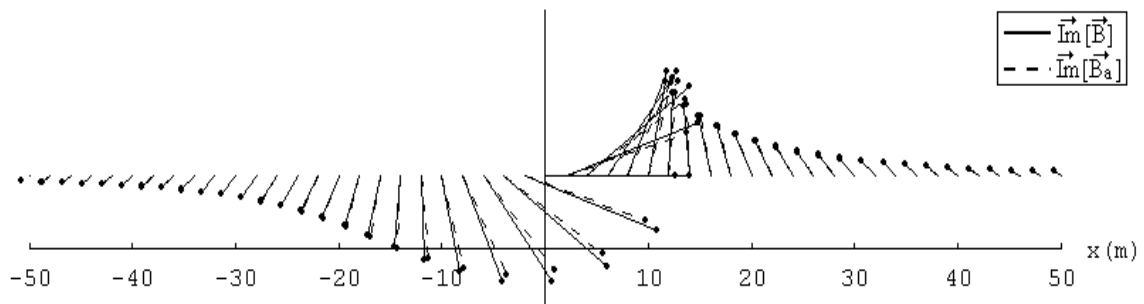


Figura 3.55: Línea trifásica vertical. Campos  $\text{Im}[\vec{B}]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_a]$

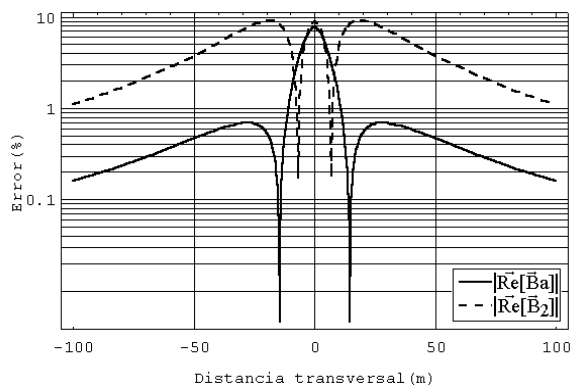


Figura 3.56: Errores de módulo de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica vertical.

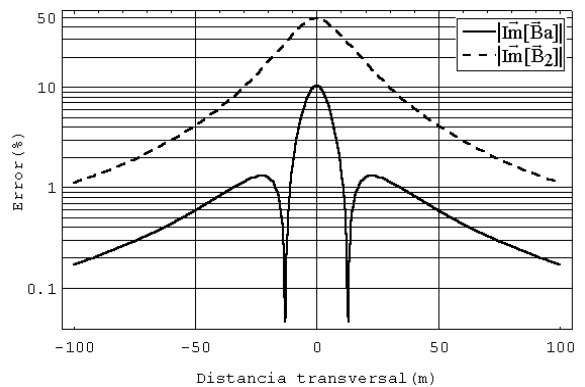


Figura 3.57: Errores de módulo de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_2]$  en la línea trifásica vertical.

En cuanto al error de ángulo, la figura 3.58 muestra las diferencias absolutas entre el ángulo de  $\vec{Re}[\vec{B}]$  y los ángulos de  $\vec{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\vec{Re}[\vec{B}_2]$ . Las diferencias de ángulo de los vectores imaginarios se muestran en la figura 3.59. Obsérvese el significativo valor del error correspondiente a  $\vec{Im}[\vec{B}_2]$  (cercano al 50%).

La figura 3.60 muestra los campos resultantes  $B_r$ ,  $B_{ar}$ , y  $B_{2r}$ , para  $x > 0$ . Los correspondientes errores se muestran en la figura 3.61. Los errores de las dos aproximaciones son similares, excepto para  $x = 0$ , donde con  $B_{2r}$  se obtiene un valor cercano al 30%. Si se compara con la disposición horizontal (figura 3.51) se observa que los errores son menores en las dos aproximaciones. Los dipolos elegidos son los que presentan menor error de  $B_{ar}$ , por la razón ya apuntada para el caso horizontal.

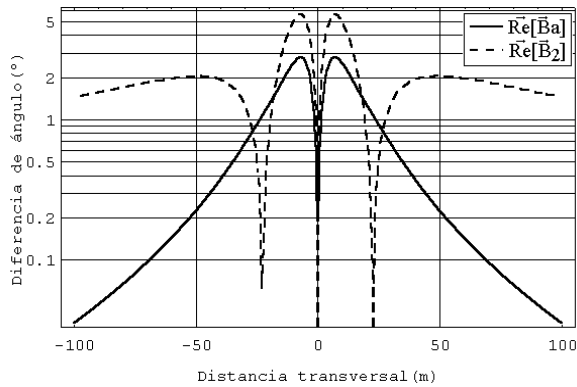


Figura 3.58: Línea trifásica vertical. Diferencia entre el ángulo de  $\vec{Re}[\vec{B}]$  y los de  $\vec{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\vec{Re}[\vec{B}_2]$ .

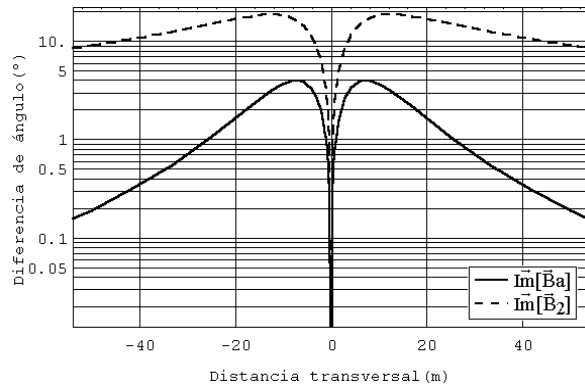


Figura 3.59: Línea trifásica vertical. Diferencia entre el ángulo de  $\vec{Im}[\vec{B}]$  y los de  $\vec{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\vec{Im}[\vec{B}_2]$ .

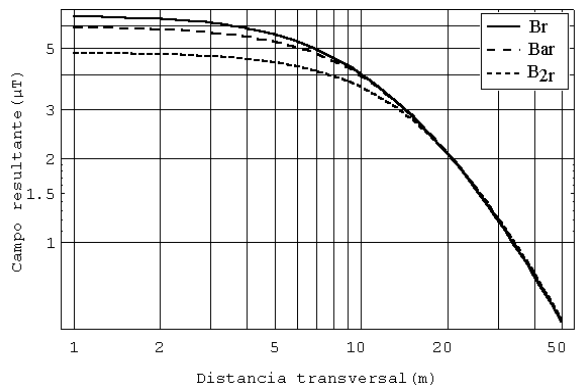


Figura 3.60: Línea trifásica vertical. Campos resultantes  $B_r$ ,  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ .

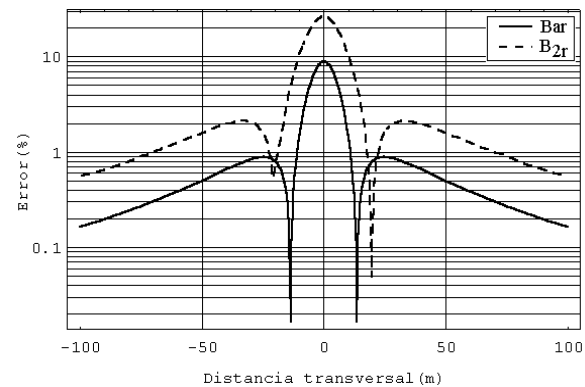


Figura 3.61: Línea trifásica vertical. Errores de campo resultante  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ .

### Campo magnético creado por una línea trifásica triangular o delta

Se analiza por último el caso de la configuración triangular o delta (figura 3.62)

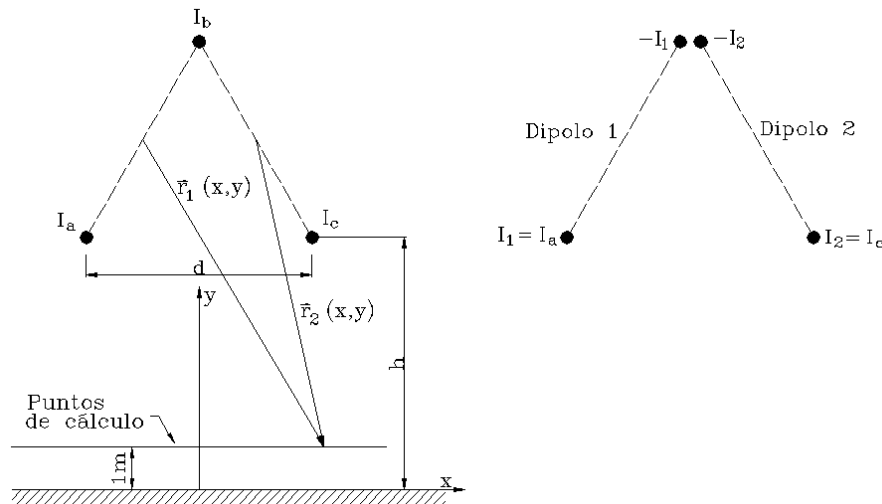


Figura 3.62: Configuración delta y descomposición en dipolos

Para  $I_a = 500 e^{j0}$  A,  $I_b = 500 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $I_c = 500 e^{j\frac{2\pi}{3}}$  A,  $d = 8,5$  m, y  $h = 10$  m, la figura 3.63 muestra los campos  $\text{Re}[\vec{B}_1]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$  debidos a los dipolos 1 y 2 respectivamente, así como el campo resultante  $\text{Re}[\vec{B}] = \text{Re}[\vec{B}_1] + \text{Re}[\vec{B}_2]$ .

De la figura 3.63, y de la correspondiente simulación, se observa que el máximo campo generado por cada dipolo se sitúa en un punto de la línea de medida cuya coordenada  $x$  en valor absoluto es ligeramente superior a la del centro del dipolo correspondiente. Por la simetría geométrica los puntos de máximo campo debido a cada dipolo están simétricamente dispuestos respecto al eje  $x = 0$ . Por la propia simetría respecto a  $x = 0$  se cumple también que los vectores  $\text{Re}[\vec{B}_1(x)]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2(-x)]$  tienen direcciones simétricas respecto a dicho eje. En cuanto al campo  $\text{Re}[\vec{B}]$ , no resulta simétrico, aunque sí lo es el campo resultante  $B_r$ . Por último el campo  $\text{Im}[\vec{B}] = \text{Im}[\vec{B}_2]$ , como en las configuraciones ya vistas.

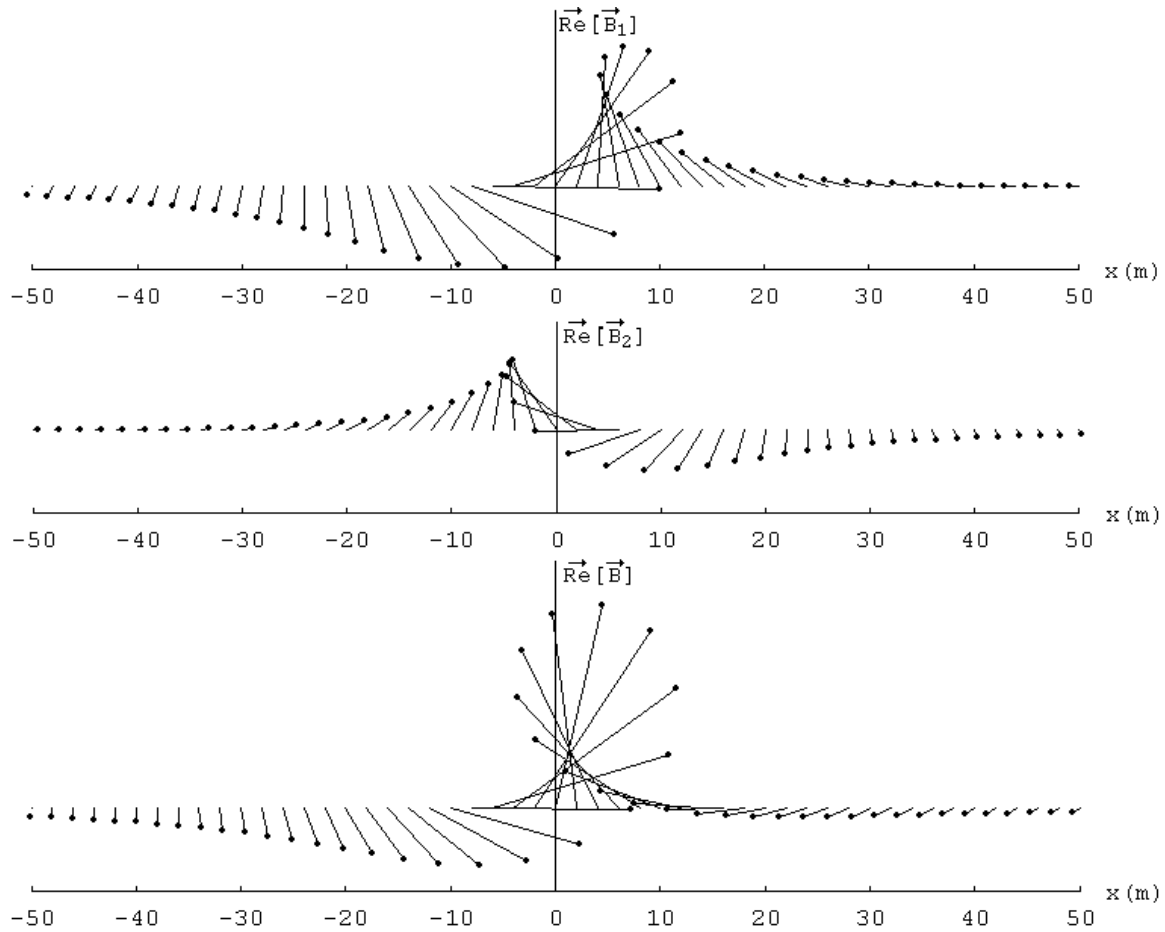


Figura 3.63: Línea trifásica delta. Campos debidos a los dipolos 1 ( $\vec{Re}[\vec{B}_1]$ ) y 2 ( $\vec{Re}[\vec{B}_2]$ ) y campo resultante ( $\vec{Re}[\vec{B}]$ ).

**Cálculo aproximado del campo magnético creado por la configuración delta**

En este caso (figura 3.62)  $\psi_1 = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\psi_2 = \frac{5\pi}{3}$ . Según (3.184) y (3.185)

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} = 2\theta_1 - \frac{5\pi}{6} \tag{3.223}$$

$$\varphi_{1a} - \varphi_{2a} = 2(\theta_1 - \theta_2) + \psi_2 - \psi_1 + \pi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{4\pi}{3} \tag{3.224}$$

Las expresiones (3.189), (3.190) y (3.191) quedan

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 = \left(\frac{\mu_0 I d}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{4r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \cos(2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{4\pi}{3})\right) \quad (3.225)$$

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = \frac{\mu_0 \sqrt{3} I d}{4\pi r_2^2} \quad (3.226)$$

$$B_{ar}^2 = \left(\frac{\mu_0 I d}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \cos(2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{4\pi}{3})\right) \quad (3.227)$$

A suficiente distancia de la línea pueden aplicarse las simplificaciones (3.198) y (3.199). Se tiene entonces que

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I_a d}{4 \pi r^2} \quad (3.228)$$

$$\xi_a = \frac{\pi}{6} \quad (3.229)$$

$$\varphi_a = 2\theta - \frac{2\pi}{3} \quad (3.230)$$

$$\varphi_{2a} = 2\theta - \frac{\pi}{6} \quad (3.231)$$

Teniendo en cuenta (3.187) y (3.188) el campo lejos de la línea viene dado por

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a] = |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| \left( \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{u}_y \right) \quad (3.232)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a] = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]| \left( \cos\left(2\theta + \frac{5\pi}{6}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta + \frac{5\pi}{6}\right) \vec{u}_y \right) \quad (3.233)$$

Obsérvese que el vector  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  se obtiene girando  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$   $\pi/2$  radianes en el sentido de las agujas del reloj. Para  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $2\theta \rightarrow 0$ , y  $\varphi_a \rightarrow -2\pi/3$ ,  $\varphi_{2a} \rightarrow 5\pi/6$ . Esto se observa en las figuras 3.64 y 3.65.

Al igual que en los casos anteriores, se comparan a continuación los distintos métodos.

Las tablas 3.10, 3.11 y 3.12 muestran los errores obtenidos para diversos valores de  $x$ ,  $d$  y  $h$ . Se observa que el error es en general menor que en los casos horizontal y vertical. Esta reducción del error se refleja más claramente con la aproximación de  $B_{2r}$ , donde, incluso con  $x = 0$ , se obtienen errores menores del 5%.

Tabla 3.10: Línea delta. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 0$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	5,67	1,24	3,64	1,56	2,40	1,21
8	6,42	0,52	4,97	1,58	3,54	1,54
10	6,13	3,55	5,89	1,03	4,56	1,63

Tabla 3.11: Línea delta. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 20$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	0,60	1,61	0,10	1,36	0,17	1,07
8	0,50	2,99	0,23	2,48	0,56	1,93
10	0,04	4,84	0,92	3,95	1,20	3,03

Tabla 3.12: Línea delta. Error en % en el campo resultante al emplear las aproximaciones  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$  ( $x = 50$  m).

$d(\text{m})$	$h = 8$ m		$h = 12$ m		$h = 16$ m	
	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$	$B_{ar}$	$B_{2r}$
6	0,30	0,25	0,26	0,25	0,22	0,24
8	0,51	0,45	0,43	0,45	0,35	0,43
10	0,74	0,72	0,61	0,71	0,49	0,70

Las figuras 3.64 y 3.65 muestran los campos  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  (ya representado en la figura 3.63) e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$ , junto con los campos respectivos  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$ .

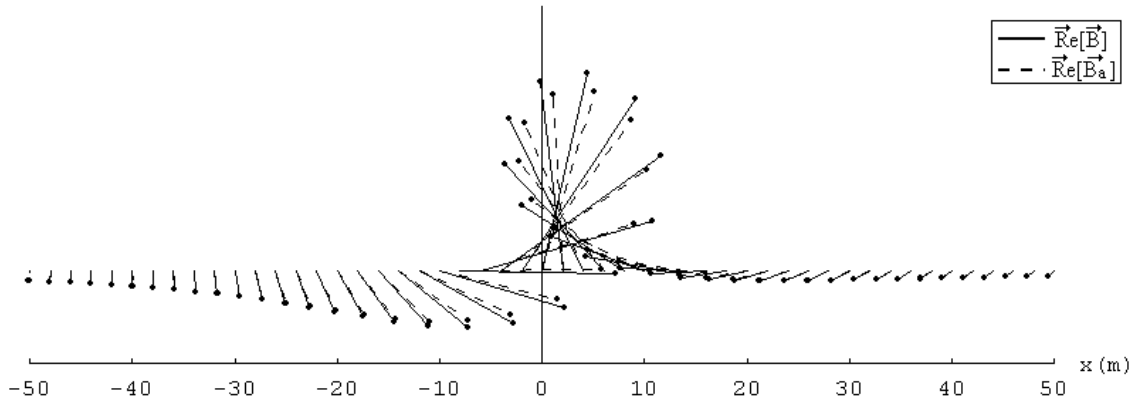


Figura 3.64: Línea delta. Campos  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$

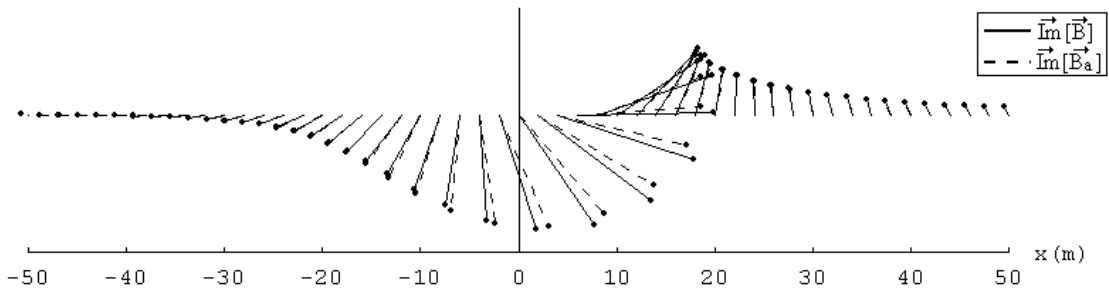


Figura 3.65: Línea delta. Campos  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$

La figura 3.66 muestra los errores de módulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ . Los correspondientes errores de la parte imaginaria se muestran en la figura 3.67. Los valores máximos del error de  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|$  e  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|$  son similares a los casos anteriores, en torno al 10%. En relación a la aproximación DS, se obtienen también valores similares, superiores en todo caso a la DA.

En cuanto al error de ángulo, la figura 3.68 muestra las diferencias absolutas entre el ángulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  y los ángulos de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ . Las diferencias de ángulo de los vectores imaginarios se muestran en la figura 3.69.

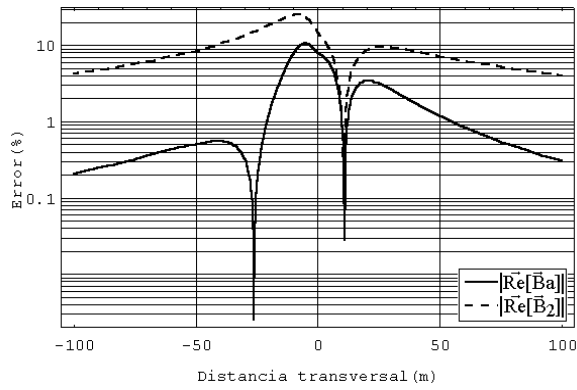


Figura 3.66: Linha delta. Errores de módulo de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$ .

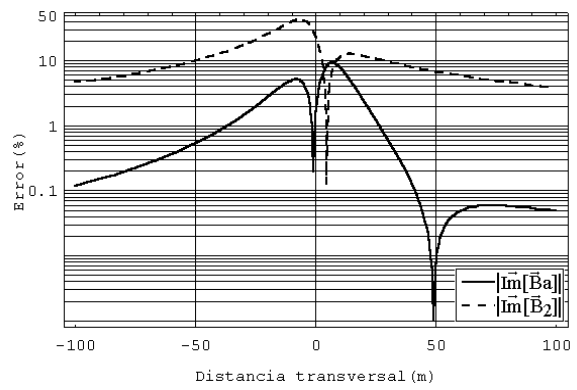


Figura 3.67: Linha delta. Errores de módulo de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_2]$ .

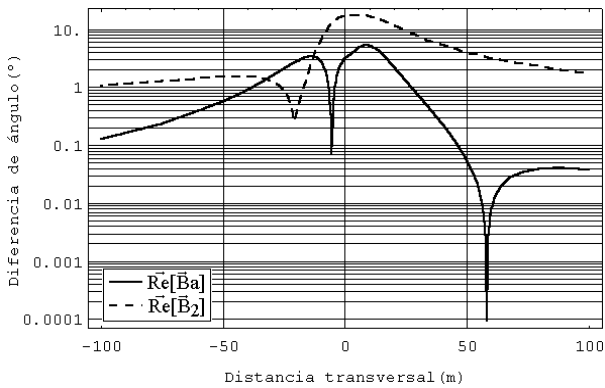


Figura 3.68: Linha delta. Diferencia entre el ángulo de  $\text{Re}[\vec{B}]$  y los de  $\text{Re}[\vec{B}_a]$  y  $\text{Re}[\vec{B}_2]$ .

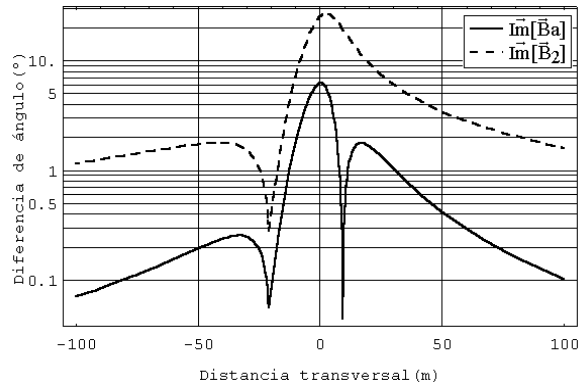


Figura 3.69: Linha delta. Diferencia entre el ángulo de  $\text{Im}[\vec{B}]$  y los de  $\text{Im}[\vec{B}_a]$  e  $\text{Im}[\vec{B}_2]$ .



La figura 3.70 muestra los campos resultantes  $B_r$ ,  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ , para  $x > 0$ . Los correspondientes errores se muestran en la figura 3.71. Es de destacar el pequeño error de  $B_{2r}$ , comparable al de  $B_a$ .

Merece la pena indicar por último que la configuración de dipolos escogida es la que presenta menor error. La otra configuración posible (un dipolo formado por las fases  $a$  y  $c$  y el otro por  $b$  y  $a$  o  $c$ ) presenta un error mayor debido a la menor altura a los puntos de cálculo.

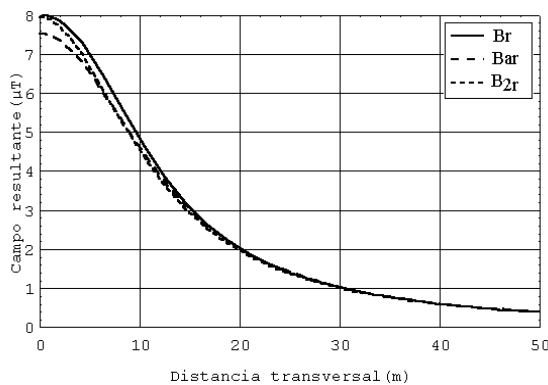


Figura 3.70: Línea delta. Campos resultantes  $B_r$ ,  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ .

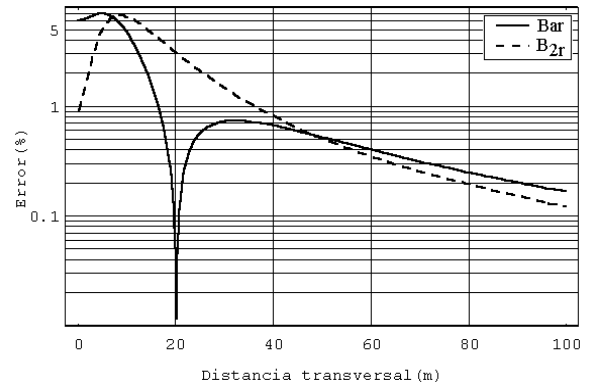


Figura 3.71: Línea delta. Errores de campo resultante  $B_{ar}$  y  $B_{2r}$ .

## 3.8 Resumen y conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se han revisado las principales simplificaciones empleadas habitualmente en el cálculo de campos magnéticos creados por líneas aéreas eléctricas (apartado 3.1), y se ha analizado la formulación basada en considerar conductores rectilíneos e indefinidos (RI) (apartado 3.5), obteniendo algunas aportaciones en la formalización matemática desarrollada. Asimismo, se ha revisado la aproximación en desarrollo en serie (DS) (apartado 3.6). En el apartado 3.7 se ha desarrollado la formulación aproximada basada en la descomposición en dipolos (DA), comparándose con la DS, se ha caracterizado el CM generado por las configuraciones horizontal, vertical y delta (empleadas comúnmente en líneas de transporte), y se han aplicado ambas aproximaciones al cálculo del CM, observándose que, para una altura de 10 m y distancia entre fases 8,5 m (valores típicos en 400 kV), con la aproximación DA se comenten errores máximos del campo resultante del 15% (configuración horizontal) muy cerca de la línea (a menos de 10 m), con lo que puede considerarse un método válido para obtener el CM a cualquier distancia

y a 1 m de altura. Con el método DS se comenten errores que pueden llegar al 70% bajo la línea, siendo además más lenta la caída del error con la distancia. Se han analizado además los errores en el módulo y ángulo de las componentes vectoriales del campo, obteniéndose un error de módulo máximo del 20% (DA) y 80% (DS) bajo la línea, y un error máximo de ángulo de 7° (DA) y 50° (DS) a 10 m de la línea. Para otras configuraciones (tresbolillo, doble circuito) se obtienen resultados similares. Para valores menores de  $d$ , y suponiendo que la altura  $h = 10$  m (lo cual es común en tensiones de 132 kV y 220 kV) se obtienen errores menores. En la tabla 3.13 se indican las distancias mínimas para que el error en el campo resultante y módulo de los componentes sea menor del 10%, y en el ángulo sea menor de 10°. Dada la diversidad de configuraciones, distancias entre fases y alturas, se dan los valores en un rango.

Tabla 3.13: Líneas de transporte. Distancia mínima a la línea en m para que el error de módulo sea menor del 10% y de ángulo menor de 10°.

Magnitud	DA	DS
Campo resultante	0-15	10-40
Módulo componentes	0-15	0-100
Ángulo componentes	0	20-50

# Capítulo 4

## Configuración de conductores y campos magnéticos

### 4.1 Introducción

Habitualmente se han analizado y comparado las configuraciones de conductores desde el punto de vista de emisión de CM lejos de la línea [40], mediante expresiones sencillas, como la formulación DS. También se han analizado a partir de las curvas de perfil de campo [42], sin establecer un criterio claro de comparación cuando se trata de evaluar el CM bajo la línea.

Por otro lado, las normas relativas a emisiones de CM limitan los valores del mismo en el límite de la servidumbre de paso, como se verá en el apéndice A. Además puede ser conveniente, en determinadas ocasiones, reducir el campo bajo la línea.

Lo anterior justifica un análisis comparativo más detallado de las configuraciones más usuales en MAT, analizando aspectos como variación del CM con la altura y distancia entre fases, bajo la línea y en el borde de la servidumbre de paso. Esto es lo que se lleva a cabo en este capítulo, obteniéndose además la configuración que minimiza el campo bajo la línea y en el límite de la servidumbre de paso. En el análisis comparativo se van a emplear los métodos DA y DS, que permiten explicar de un modo cualitativo el comportamiento del campo. Se incluye en los resultados una comparación con el método RI.

## 4.2 Conceptos previos

Es conveniente introducir previamente unos conceptos relacionados con la eficacia de los diferentes métodos y técnicas que se van a analizar, de modo que se facilite la comparación entre los mismos. Para ello se empleará el sistema de coordenadas conocido del capítulo 3 (figura 3.41). Se supondrá en todas las definiciones, de modo similar a como se hizo en el capítulo 3, que el tramo de línea a estudio está situado sobre un terreno horizontal, y que la altura sobre el suelo del punto de cálculo del campo es 1 m. Este criterio se adoptará también cuando se aluda a las diferencias entre el campo generado por las distintas configuraciones.

En primer lugar conviene fijar la posición de un punto en el eje  $x$ , que presente un interés desde el punto de vista de la mitigación del campo. De esta manera se pueden comparar configuraciones distintas en términos de índices cuantitativos. Por las razones expuestas en el apartado 4.1 se situará dicho punto en el límite de la servidumbre de paso. El ancho de la servidumbre de paso depende de la configuración y el nivel de tensión, y oscila entre 20-30 m para líneas de 132 kV y 40-50 m para líneas de 345 kV [3, 51, 67]. En el presente trabajo se adoptará un valor intermedio, 30 m, denotando dicha distancia por  $l_t$ . Para configuraciones simétricas, que generan un perfil de campo también simétrico, si se sitúa el origen en el eje de simetría de la configuración, se cumple que  $x(l_t) = l_t$ . Además  $x(l_t)$  está a la distancia  $l_t$  del punto donde el campo es máximo. Para configuraciones asimétricas la colocación del origen de coordenadas puede ser un tanto arbitraria, por lo que conviene redefinir  $x(l_t)$  con un criterio más genérico que contemple estos casos. Hay que tener en cuenta además la asimetría del campo. Por ello se definirán dos posiciones,  $x_{t1} = x_m + l_t$  y  $x_{t2} = x_m - l_t$ , situadas a distancia  $l_t$  del punto  $x_m$ , definido como aquél cuyo campo es máximo (figura 4.1).

Es interesante introducir un factor que tenga en cuenta la rápida reducción del campo magnético conforme crece la distancia a la misma. Para ello se define el índice de compacidad como

$$IC = \frac{B_r(x_m)}{\max[B_r(x_{t1}), B_r(x_{t2})]} = \frac{B_r(x_m)}{B_r(x_t)} \quad (4.1)$$

definiéndose  $x_t$  como la coordenada ( $x_{t1}$  o  $x_{t2}$ ) que maximiza el campo. Obsérvese que  $IC > 1$ . Cuanto mayor sea  $IC$ , más importante será la reducción con la distancia. Se dirá entonces que el campo es más compacto.

Para analizar el efecto de una pantalla de mitigación, se suelen emplear los siguientes conceptos [18, 15, 81]:

- Eficiencia de la pantalla o factor de apantallado, definido como el cociente entre el

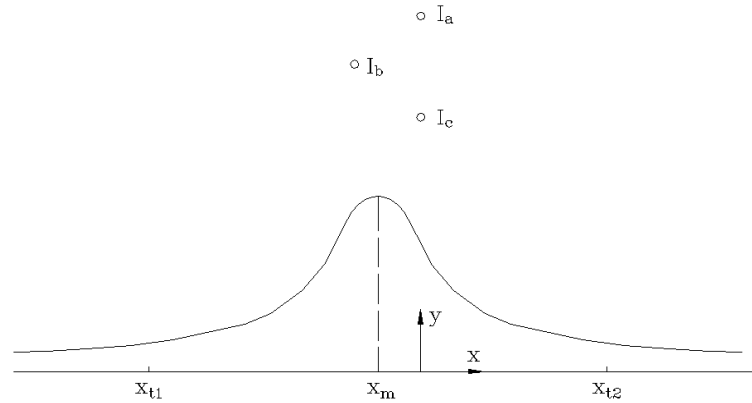


Figura 4.1: Posiciones de  $x_{t1}$  y  $x_{t2}$  en una configuración asimétrica

campo después del apantallado ( $B_{tr}(x)$ ) y el previo ( $B_r(x)$ ):

$$FA(x) = \frac{B_{tr}(x)}{B_r(x)} \quad (4.2)$$

$FA$  puede ser mayor que 1 en algunos puntos. Nótese que cuanto menor sea el valor de  $FA$  correspondiente a una pantalla tanto más eficiente será dicha pantalla.

- Factor de reducción de campo:

$$FR(x) = \frac{1}{FA(x)} \quad (4.3)$$

- Rendimiento del apantallado:

$$RA(x) = 1 - FA(x) \quad (4.4)$$

$RA(x)$  siempre es menor que 1, y, a pesar del nombre, puede tomar valores negativos.

Los conceptos anteriores son los habitualmente empleados cuando se desea analizar la efectividad de una pantalla frente a una fuente cualquiera de campo. Algunas veces se emplea el factor medio de apantallado en un intervalo  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 < x_2$ :

$$FAM(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} FA(x) dx \quad (4.5)$$

Como se verá más adelante pueden existir variaciones importantes del factor de apantallado a lo largo de la coordenada  $x$ . Este factor trata de evaluar la efectividad media de la pantalla en un intervalo.

Si se desean comparar diversas configuraciones de conductores se pueden definir unos conceptos análogos a los introducidos para el caso de pantallas. Para ello es necesario fijar una configuración de referencia. Entonces, para analizar otra configuración, se puede definir su eficiencia  $FA(x)$  como

$$FA(x) = \frac{B_r(x)}{B_{r0}(x)} \quad (4.6)$$

siendo  $B_r(x)$  el campo resultante generado por la configuración a comparar y  $B_{r0}(x)$  el campo resultante generado por la configuración de referencia. De igual manera se pueden definir el factor de reducción y rendimiento de la configuración, de manera análoga al caso con pantalla.

### 4.3 Diseño de líneas aéreas de simple circuito

Se analiza el efecto del diseño en el campo magnético creado por líneas de simple circuito. Las líneas de doble circuito se analizarán en el capítulo 5.

Mediante las aproximaciones RI, DA y DS, se comparan a continuación las configuraciones ya vistas en el capítulo 3 (figuras 3.41, 3.52, 3.62), junto con la configuración de conductores al tresbolillo (figura 4.2). Se considerará una misma altura  $h = 10$  m del conductor más bajo, y  $d = 8,5$  m. La tabla 4.1 muestra el índice de compacidad  $IC$  y la eficiencia  $FA(x_m)$ . Se ha tomado como referencia el campo creado por la configuración horizontal en  $x_m$ .

En la tabla 4.1 puede observarse que el máximo error debido a DA es el 10%. Se puede deducir también que la compacidad del campo decrece en el siguiente orden: delta, horizontal, triangular, vertical. Se observa además de la columna RI que  $FA_H(x_m) > FA_D(x_m) > FA_V(x_m) > FA_T(x_m)$ , lo cual indica que el campo bajo la línea es máximo para la configuración horizontal y mínimo para la tresbolillo. De lo anterior es fácil deducir que  $FA_H(x_t) > FA_D(x_t)$  y  $FA_V(x_t) > FA_T(x_t)$ , es decir, la configuración delta es claramente más eficiente desde el punto de vista de campo magnético que la horizontal, y la tresbolillo más que la vertical, ya que, además de presentar un campo más compacto, el campo bajo la línea es menor. Por otro lado, no es evidente deducir cuál de las configuraciones D o T es más eficiente, ya que D es más compacta, pero T genera un campo menor bajo la línea. Para resolver esta duda se puede emplear la aproximación DS (3.93),

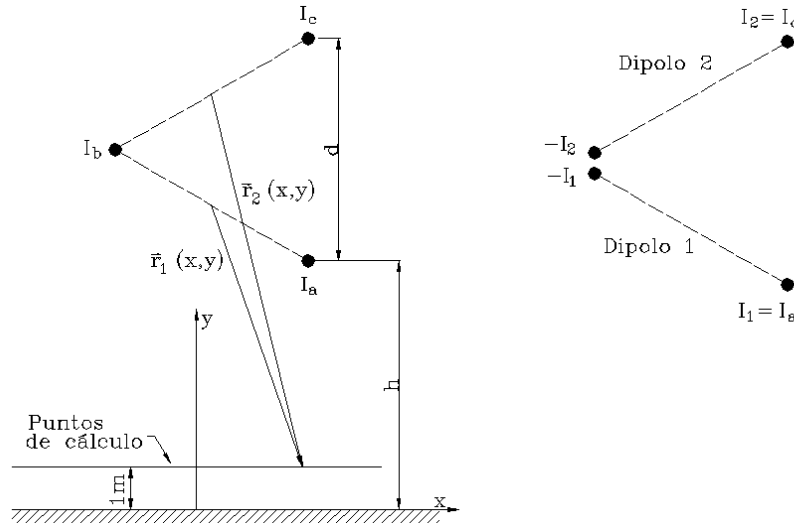


Figura 4.2: Configuración de conductores al tresbolillo (izquierda) y su división en dipolos (derecha).

Tabla 4.1: Valores de  $IC$  y  $FA(x_m)$  obtenidos con los modelos, para diversas configuraciones ( $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m).

Configuración	RI		DA		DS	
	IC	FA	IC	FA	IC	FA
Horizontal (H)	6,8	1,00	7,3	1,05	12,1	1,66
Vertical (V)	5,5	0,60	4,9	0,54	3,9	0,44
Delta (D)	7,8	0,73	7,3	0,69	7,9	0,73
Tresbolillo(T)	6,1	0,58	6,7	0,62	5,8	0,54

suficientemente exacta para puntos alejados de la línea. Dado que el valor de  $r$  es mayor en la configuración T que en la D (a igual altura del conductor más cercano al suelo), el campo generado por T será menor que el debido a D, para todo  $x$ . De igual manera se cumple que el campo debido a V es menor que el debido a H para todo  $x$ . Queda por último comparar D y V. D resulta más compacta que V, pero el campo bajo la línea de D es mayor. Sin embargo  $FA_V(x_t) = \frac{FA_V(x_m)}{IC_V} > FA_D(x_t) = \frac{FA_D(x_m)}{IC_D}$ , por lo que existe un punto  $x = x_l$  para el cual  $FA_V(x_l) = FA_D(x_l)$ . Dicho valor se puede estimar a partir de (3.93):

$$x_l = \sqrt{2,1d^2 + 2,9dh - h^2} \quad (4.7)$$

El orden de las configuraciones, desde el punto de vista de emisión electromagnética creciente, para  $h$  y  $d$  iguales, queda: tresbolillo < vertical < horizontal; delta < horizontal, tresbolillo < delta, para todo  $x$ , vertical < delta, para  $x < x_l$ , y delta < vertical para  $x > x_l$ . El valor de  $x_l \approx \frac{1}{2}x_t = 15$  m para líneas de AT, por lo que, en la mayoría de las situaciones de interés, se cumplirá que delta < vertical. Dado que estas conclusiones se han obtenido a partir del modelo DS, es conveniente validarlas con el modelo RI. En la figura 4.3 se representa el factor de reducción del campo para las configuraciones vertical, delta, y tresbolillo, tomando como referencia el campo debido a la configuración horizontal. El origen del eje  $x$  se ha situado en el punto donde el campo es máximo, por lo que  $x_m = 0$  en cada configuración. Obsérvese que la configuración tresbolillo no presenta el menor campo en todo  $x$ , aunque en los puntos donde no es mínimo está muy cercano a dicho mínimo. Obsérvese también que la máxima reducción del campo que se consigue, manteniendo la distancia y altura mínima al suelo, y variando la disposición de los conductores, es de aproximadamente un 55%, respecto a la configuración horizontal, siendo menor a medida que crece la distancia a la línea.

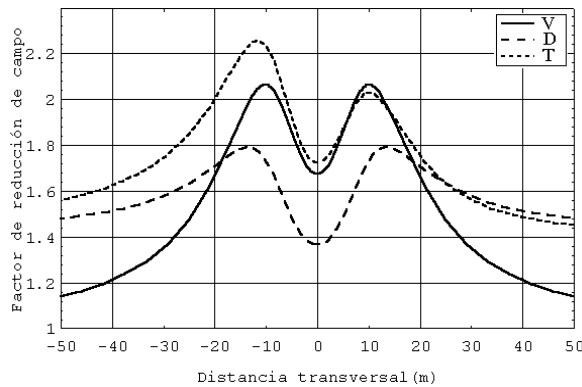


Figura 4.3: Factor de reducción del campo obtenido con el modelo RI para configuraciones vertical (V), delta (D), y al tresbolillo (T),  $d = 8,5$  m y  $h = 10$  m.

Anteriormente se han comparado cuatro configuraciones típicas en líneas de AT. Se determina a continuación la configuración óptima teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles que se pueden obtener considerando una distancia mínima entre conductores ( $d$ ) y una altura mínima al suelo ( $h$ ). Con estas condiciones las variables que resultan son dos, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  (figura 4.4). A partir de la aproximación DA, y omitiendo el factor constante de (3.191), el problema se formaliza como sigue:

Sea

$$g(\alpha, \beta, x) = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{1a}) \tag{4.8}$$



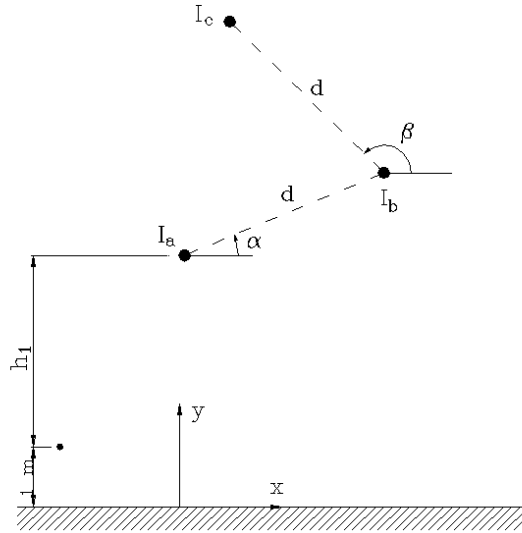


Figura 4.4: Línea trifásica simple y ángulos que la definen

siendo

$$r_1^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{d^2}{4} + d(h_1 \operatorname{sen} \alpha - x \cos \alpha) \quad (4.9)$$

$$r_2^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{5}{4}d^2 + 2d(h_1 \operatorname{sen} \alpha - x \cos \alpha) + d(h_1 \operatorname{sen} \beta - x \cos \beta) + d^2 \cos(\beta - \alpha) \quad (4.10)$$

$$h_1 = h - 1 + \max[0, -d \operatorname{sen} \alpha, -d(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)] \quad (4.11)$$

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} \quad (4.12)$$

$$\varphi_{2a} = 2\theta_2 - \psi_2 - \frac{\pi}{2} \quad (4.13)$$

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{d}{2} \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \operatorname{sen} \alpha + h_1} \quad (4.14)$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{d}{2} \cos \beta + d \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \operatorname{sen} \beta + d \operatorname{sen} \alpha + h_1} \quad (4.15)$$

$$\psi_1 = \pi + \alpha \quad (4.16)$$

$$\psi_2 = \beta \quad (4.17)$$

Se desea minimizar

$$f_1(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta, x_m) \tag{4.18}$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \max(g(\alpha, \beta, x_m - l_t), g(\alpha, \beta, x_m + l_t)) \tag{4.19}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < 2\pi \\ \cos(\alpha - \beta) \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

El valor de  $x_m$ , punto donde se maximiza el campo, depende de cada configuración (para configuraciones simétricas será  $x_m = 0$ ). Para obtenerlo es necesario añadir una nueva ecuación:

$$\frac{dg(\alpha, \beta, x)}{dx} = 0 \tag{4.21}$$

El problema de optimización planteado se ha resuelto con el método del máximo descenso [65]. Este es un método clásico de optimización local, que consiste en seleccionar un punto inicial  $p_0 = (\alpha_0, \beta_0)$  del espacio de soluciones, y seleccionar el siguiente punto  $p_1$  en el entorno de  $p_0$  tal que  $g(p_1) < g(p_0)$ . Así se procede iterativamente hasta encontrar un mínimo local. Para tener seguridad de que el mínimo local es global se aplicará el método del máximo descenso en N puntos distintos (método de multicomienzo).

De la resolución del problema se obtiene que la configuración que minimiza el campo en  $x_m$  y  $x_t$  es la delta invertida (DI) ( $\alpha = 240^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ), cuyo perfil de campo resultante, junto con el de la tresbolillo, se muestra en la figura 4.5. Este resultado era conocido para puntos alejados de la línea, ya que se vio en el capítulo 3.8 que la configuración triangular era la más eficiente y, del conjunto de las triangulares, la que presenta mayor altura del centro geométrico es la DI. Obsérvese, no obstante, que la diferencia con la tresbolillo es mínima, considerándose ambas por tanto como configuraciones eficientes.

La tabla 4.2 muestra  $IC$  para las mismas configuraciones de la tabla 4.1 y diversos valores de la distancia. Asimismo, las tablas 4.3 y 4.4 muestran la eficiencia  $FA(x_m)$  bajo la línea y en  $x_t$  respectivamente, tomando como referencia la horizontal con  $d = 8, 5$  m bajo la línea (tabla 4.3) y en  $x_t$  (tabla 4.4).

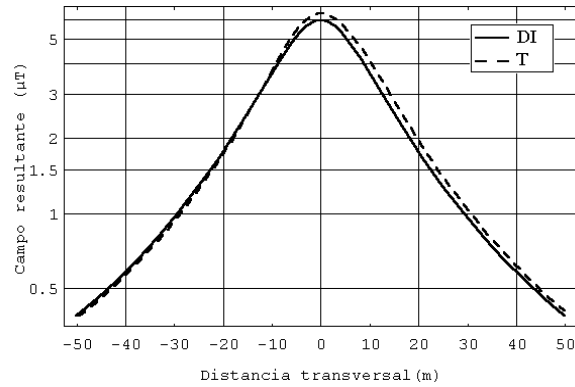


Figura 4.5: Campo magnético creado por las configuraciones delta invertida (DI) y tresbolillo (T).

Tabla 4.2: Valores de  $IC$  para diversas configuraciones y distancias

Disposición	$d = 7$ m			$d = 8$ m			$d = 9$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	7,9	8,4	12,1	7,1	7,6	12,1	6,4	6,9	12,1
V	5,9	5,4	4,5	5,6	5,1	4,1	5,4	4,8	3,8
D	8,4	8,0	8,4	8,0	7,5	8,0	7,6	7,1	7,7
T	7,9	8,5	7,5	7,6	8,2	7,1	7,3	7,9	6,8

Tabla 4.3: Valores de  $FA(x_m)$  para diversas configuraciones y distancias.

Disposición	$d = 7$ m			$d = 8$ m			$d = 9$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	0,93	0,99	1,37	0,98	1,04	1,56	1,02	1,07	1,76
V	0,55	0,51	0,43	0,58	0,54	0,44	0,61	0,55	0,44
D	0,65	0,62	0,65	0,71	0,67	0,70	0,75	0,71	0,75
T	0,52	0,54	0,49	0,56	0,58	0,51	0,59	0,61	0,53

Tabla 4.4: Valores de  $FA(x_t)$  para diversas configuraciones y distancias.

Disposición	$d = 7$ m			$d = 8$ m			$d = 9$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	0,80	0,79	0,76	0,93	0,92	0,87	1,07	1,05	0,98
V	0,64	0,64	0,65	0,71	0,71	0,72	0,77	0,78	0,79
D	0,52	0,53	0,52	0,60	0,60	0,59	0,67	0,68	0,66
T	0,45	0,45	0,45	0,50	0,50	0,50	0,55	0,55	0,55

Algunas conclusiones pueden extraerse de las tablas 4.2, 4.3 y 4.4:

- Con la aproximación DA se obtienen valores de  $IC$  más exactos, excepto en la configuración D, donde la aproximación DS da un resultado mejor. Conforme aumenta  $d$ , los errores son mayores. Estas conclusiones se pueden aplicar también al cálculo de  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$ , siendo en este último caso el error menor del 10% con cualquier procedimiento de cálculo.
- A medida que aumenta la distancia entre conductores disminuye rápidamente  $IC_H$  (aproximadamente un 10% por metro de separación), y más moderadamente  $IC_D$ ,  $IC_T$  e  $IC_V$  (aproximadamente 5% por metro de separación).
- Para las configuraciones analizadas, el incremento del campo bajo la línea ( $FA(x_m)$ ) por cada metro de distancia se sitúa entre el 5% y el 10%. Dado que  $IC$  disminuye con la distancia, la variación porcentual de  $FA(x_t)$  es mayor que la de  $FA(x_m)$ . Se sitúa en torno al  $10 \div 15\%$ . Este es el rango de valores para distancias más alejadas, como se deduce fácilmente de la formulación DS (3.93).
- De las tablas 4.3 y 4.4 se constata lo que se dedujo anteriormente. Bajo la línea la configuración V es más eficiente que la D. Sin embargo, debido a la menor compacidad del campo generado por V, lejos de la línea la configuración D pasa a ser más eficiente.
- La eficiencia relativa entra las diversas configuraciones se mantiene aproximadamente constante al variar la distancia entre conductores. Esto se observa en la figura 4.6, que representa el factor de reducción de T con tres valores de distancia, tomando como referencia H con las mismas distancias. Se nota una diferencia mayor cerca de la línea, reduciéndose con la distancia, y tendiendo a un único valor. Esto último se puede deducir a partir de la expresión del campo según el modelo DS. El factor de

reducción de campo se obtiene dividiendo el campo resultante de la configuración H por el de la T (3.93)

$$FR(x) = \frac{B_H(x)}{B_T(x)} = \frac{\sqrt{2} r_H(x)^2}{r_T(x)^2} \quad (4.22)$$

Esta expresión es válida a distancias alejadas de la línea, donde se cumple que  $r_T \approx r_H$ , y queda como factor reductor  $\sqrt{2}$ , tal como se aprecia en la figura 4.6.

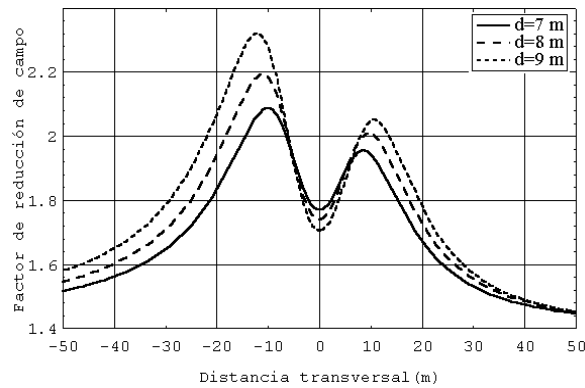


Figura 4.6: Factor de reducción de la configuración tresbolillo para tres distancias entre conductores.

Las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 muestran los valores de  $IC$ ,  $FA(x_m)$ , y  $FA(x_t)$  para  $d = 8, 5$  m y distintas alturas mínimas al suelo  $h$ .

Tabla 4.5: Valores de  $IC$  para diversas configuraciones y alturas mínimas al suelo.

Configuración	$h = 10$ m			$h = 14$ m			$h = 18$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	6,8	7,3	12,1	4,5	4,8	6,3	3,3	3,5	4,1
V	5,5	4,9	3,9	3,6	3,4	2,9	2,7	2,6	2,4
D	7,8	7,3	7,9	4,8	4,6	4,7	3,4	3,3	3,4
T	6,8	7,5	6,4	4,3	4,6	4,2	3,2	3,3	3,1

Tabla 4.6: Valores de  $FA(x_m)$  para diversas configuraciones y alturas mínimas al suelo.

Disposición	$h = 10$ m			$h = 14$ m			$h = 18$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	1,00	1,05	1,66	0,60	0,63	0,80	0,39	0,40	0,47
V	0,60	0,54	0,44	0,35	0,34	0,29	0,24	0,23	0,21
D	0,73	0,69	0,73	0,41	0,39	0,40	0,26	0,25	0,25
T	0,58	0,62	0,54	0,33	0,35	0,32	0,22	0,22	0,21

Tabla 4.7: Valores de  $FA(x_t)$  para diversas configuraciones y alturas mínimas al suelo.

Disposición	$h = 10$ m			$h = 14$ m			$h = 18$ m		
	RI	DA	DS	RI	DA	DS	RI	DA	DS
H	1,00	0,98	0,93	0,90	0,89	0,85	0,80	0,80	0,77
V	0,74	0,75	0,75	0,66	0,67	0,67	0,59	0,59	0,59
D	0,63	0,64	0,62	0,57	0,58	0,57	0,51	0,51	0,50
T	0,53	0,52	0,57	0,48	0,48	0,48	0,43	0,43	0,43

De las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- En las cuatro configuraciones  $IC$  disminuye en una proporción del 5 al 10% por metro de incremento de altura.
- El error en el cálculo de  $IC$  con las aproximaciones disminuye con la altura. Para  $h = 18$  m el error de DA es menor del 6%.
- A medida que aumenta la altura los valores de  $IC_H$ ,  $IC_D$  e  $IC_T$  (i.e. la compacidad del campo) se van igualando, mientras que  $IC_V$  se mantiene por debajo.
- A medida que aumenta la altura los valores de  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  obtenidos por las aproximaciones son más exactos. Para  $h = 18$  m el error con cualquier aproximación es menor del 12%, excepto en el caso horizontal.
- El campo bajo la línea se reduce aproximadamente un 8% por cada metro de incremento de altura. Sin embargo, dado que la compacidad del campo disminuye con la altura, dicha reducción es menor en  $x_t$ , un 2,5%. A distancias aún mayores, la

reducción es aún menor. Esto se explica a partir de la formulación DS. La distancia  $r$  que aparece en (3.93) es la raíz cuadrada de  $x^2 + h^2$ . A medida que  $x$  crece el efecto de la variación de  $h$  en el campo es menor.

- La eficiencia relativa entre las diversas configuraciones se mantiene aproximadamente constante al variar la altura. Esto se observa en la figura 4.7, donde se ha representado el factor de reducción de la configuración triangular (base vertical), tomando como referencia la configuración horizontal. La variación más acusada de  $FR$  con la altura se observa cerca de la línea.

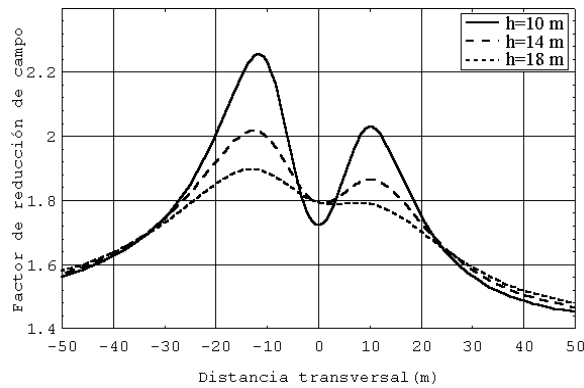


Figura 4.7: Factor de reducción de la configuración T para tres alturas distintas

Hasta ahora se ha analizado el campo resultante creado por las diversas configuraciones, a partir de expresiones analíticas directas. Un análisis de las componentes vectoriales del campo, y su variación al modificar la orientación de los dipolos, es otra alternativa que permite determinar las configuraciones más eficientes. Se muestran a continuación algunos ejemplos, sin pretender ser exhaustivo.

### 4.3.1 Configuraciones horizontal, delta y delta invertida

Supóngase inicialmente la configuración horizontal, dividida en dos dipolos (figura 3.41). Se analiza en primer lugar el campo para un punto bajo la línea. En  $x_m = 0$  se tiene el diagrama dipolar de la figura 4.8, para  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m, donde  $\varphi_{1a}$  y  $\varphi_{2a}$  se han obtenido a partir de (3.184) y (3.185) respectivamente, y los módulos de los vectores a partir de (3.180), (3.182) y (3.183). En aras de la simplicidad se suprimirá el subíndice  $a$  en los ángulos  $\varphi_{1a}$  y  $\varphi_{2a}$ .

Si se mantiene el dipolo 1 en su posición, y se gira el dipolo 2 a izquierdas, alrededor del eje situado en la posición del conductor central, se reducirán tanto el módulo como el

ángulo  $\varphi_2$  de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$ , el ángulo entre  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_1]$  y  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  será mayor, y el módulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  se reducirá. En cuanto a  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$ , se reducirá en la misma proporción que  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$ . El resultado es que el campo resultante bajo la línea se reduce. A partir de  $\psi_2 = \pi/2$  se incrementan de nuevo  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  e  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$ , pero también crece la diferencia entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , lo que hace reducir más  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|$ . Este efecto es más importante, ya que como se sabe el campo resultante se obtiene a partir de

$$B_r = \sqrt{|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|^2 + |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]|^2} \tag{4.23}$$

el término  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|$  es varias veces superior a  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]|$ , por lo que una ligera subida de éste no puede compensar una reducción similar del otro. El máximo ángulo  $\psi_2$  compatible con una distancia mínima  $d$  entre los conductores es  $\psi_2 = 2\pi/3$ , con lo que la configuración que menos campo genera, de todas las comprendidas entre  $\psi_2 = 0$  y  $\psi_2 = 2\pi/3$  es la correspondiente a  $\psi_2 = 2\pi/3$  (delta). La figura 4.9 muestra el diagrama dipolar para dicha configuración.

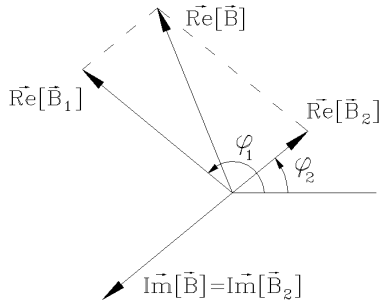


Figura 4.8: Diagrama dipolar en  $x = 0$  para la configuración horizontal.

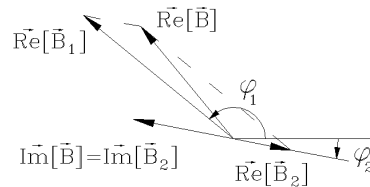


Figura 4.9: Diagrama dipolar en  $x = 0$  para la configuración delta.

Supóngase ahora que, a partir de la configuración horizontal, se gira el dipolo 2 a derechas, entre  $\psi_2 = 0$  y  $\psi_2 = -2\pi/3$ . Se tiene entonces que la fase  $c$  de la figura 3.41 disminuye su altura. Para mantener la distancia mínima al suelo constante, se eleva la altura de todas las fases, de modo que siempre la altura mínima al suelo es 10 m. De (3.184)  $\varphi_1$  se reduce ligeramente, por ser  $\theta_1$  menor. Además  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_1]|$  se reduce al incrementarse  $r_1$  (véase (3.180)). En cuanto a  $\varphi_2$ , se incrementa rápidamente debido a la variación de  $\psi_2$  y  $\theta_2$  (3.185). El valor de  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  se reducirá también debido al incremento de  $r_2$  (véase (3.182)), aunque no será una reducción tan importante como  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_1]|$ . Dado el incremento de  $r_1$  y  $r_2$ , que afecta cuadráticamente al módulo de los vectores, el campo resultante se reducirá conforme  $\psi_2$  se reduce. En  $\psi_2 = -\pi/2$  se tendrá el máximo de  $r_1$  y  $r_2$  (figura 4.10).



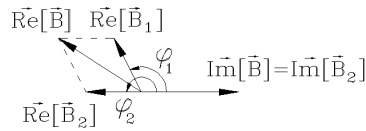


Figura 4.10: Diagrama dipolar en  $x = 0$  para  $\psi_2 = -\pi/2$ .

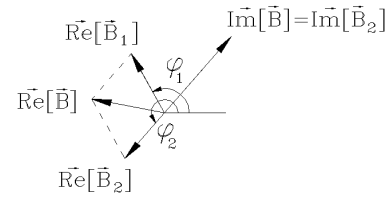


Figura 4.11: Diagrama dipolar en  $x = 0$  para  $\psi_2 = -2\pi/3$  (DI).

Si se reduce  $\psi_2$  por debajo de  $-\pi/2$   $r_1$  y  $r_2$  se reducen ligeramente, por lo que se incrementan los módulos de  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_1]|$ ,  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  e  $|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$ . Podría pensarse que el campo resultante será mayor. Sin embargo, como se observa en la figura 4.11, el ángulo  $\varphi_2 - \varphi_1 > \pi/2$ , y  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|$  se reduce, de modo que el campo resultante es menor que para  $\psi_2 = -\pi/2$ . El máximo de reducción se tendrá para  $\psi_2 = -2\pi/3$  (configuración delta invertida).

A continuación se analiza el campo para otro punto, por ejemplo  $x = -30$  m. Se toma un valor negativo por comodidad, pero con un valor positivo se obtienen los mismos resultados. Para simplificar se aplicará la aproximación (3.198). El diagrama dipolar en  $x_{t2}$  debido a la configuración horizontal (figura 3.41) se representa en la figura 4.12. Si se hace girar a izquierdas el dipolo 2, manteniendo el dipolo 1 en su posición, se incrementa  $\psi_2$ , y se reduce  $\varphi_2$  el mismo ángulo. El campo  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  se reducirá levemente. El campo  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]|$  será menor debido por un lado a la reducción de  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  y por otro a que crece la diferencia entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ :  $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi_2$ . Esto mismo se vio en  $x = 0$ . Para  $\psi_2 = 2\pi/3$  se alcanza la máxima diferencia, obteniéndose un campo resultante mínimo (figura 4.13). Si se aumenta  $d_2$  se puede incrementar aún más dicha diferencia, pero se ve compensada por el incremento de  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$  debido a la mayor anchura del dipolo 2.

De la misma manera se puede razonar para la configuración vertical, obteniéndose que la configuración tresbolillo es la que genera un campo resultante menor.

### 4.3.2 Configuración triangular. Variación del campo con la distancia entre conductores

Se analiza a continuación la variación del campo al variar la distancia  $d_2$  del dipolo 2 en la configuración delta. El diagrama dipolar se obtuvo en el apartado anterior (figura 4.9). Se analiza a continuación el efecto sobre el campo resultante del incremento en la altura del conductor central. Para un punto bajo la línea, el ángulo  $\theta_2$  se incrementará o reducirá

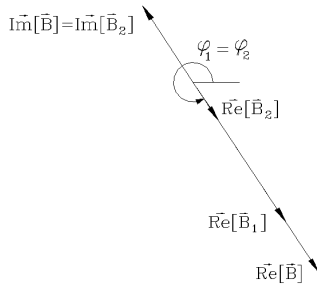


Figura 4.12: Diagrama dipolar en  $x = -30$  para  $\psi_2 = \pi/2$ .

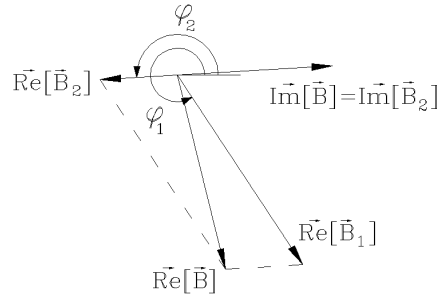


Figura 4.13: Diagrama dipolar en  $x = -30$  para  $\psi_2 = 2\pi/3$ .

en función de la posición del punto, aunque muy ligeramente, y  $\psi_2$  se reduce. Entonces  $\varphi_2$  se incrementará hasta un máximo de  $\varphi_2 = 2\pi$  (conductor central en el infinito), según (3.185). Esto conlleva que el ángulo  $\varphi_1 - \varphi_2$  se reduce. Esta variación es pequeña, por cuanto la variación de  $\varphi_2$  lo es. Por otro lado si se incrementa  $d_2$  se incrementará también  $r_2$ . Según (3.182), ambos efectos son contrarios. Sin embargo, bajo la línea el incremento de  $d_2$  es ligeramente superior al de  $r_2^2$ , por lo que el módulo se incrementa ligeramente. El resultado ha de ser una variación leve del campo bajo la línea conforme aumenta la altura del conductor central. Si en lugar de incrementar la altura, se reduce, el ángulo  $\varphi_2$  también se reduce, crece la diferencia  $\varphi_1 - \varphi_2$  y el efecto de  $\vec{Re}[\vec{B}_2]$  es oponerse con más eficacia al campo  $\vec{Re}[\vec{B}_1]$ . En cuanto al módulo de  $|\vec{Re}[\vec{B}_2]|$ , se reduce debido al mayor peso de la disminución de  $d_2$  que de  $r_2$ . Sin embargo el valor mínimo del campo no se encuentra cuando  $d_2$  se hace mínima, sino alrededor de una altura del conductor central para la cual se cumple que  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$ . Para  $h = 10$  m y  $d_1 = 8,5$  m esta condición se cumple para una altura del conductor central de unos 12 m. La figura 4.14 muestra el diagrama dipolar en  $x = 0$  correspondiente a dicha posición del conductor central.

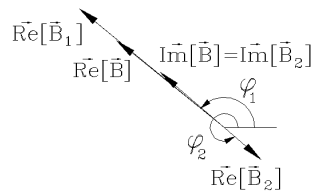


Figura 4.14: Configuración delta. Diagrama dipolar para la altura del conductor central que minimiza el campo bajo la línea.

Para un punto alejado de la línea  $r_2$  varía menos, por lo que el efecto de  $d_2$  es aún más importante. Por ello, partiendo de la configuración delta, un incremento de altura del conductor central se notará más en  $|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]|$ . Si se supone que se analiza el punto  $x = x_{t2}$ , la figura 4.13 muestra el diagrama dipolar para dicha configuración. Al incrementar la altura del conductor central,  $\psi_2$  se reducirá, y el ángulo  $\varphi_2$  aumentará. El módulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  crecerá entonces con mayor rapidez que bajo la línea, y disminuirá el índice de compacidad. Si se reduce la altura del conductor central, ocurrirá lo contrario, el campo se reducirá más rápidamente y aumentará  $IC$ . Al igual que se vio bajo la línea, existirá una altura del conductor central para la cual el campo resultante sea mínimo. Para dicha altura se cumple  $|\varphi_1 - \varphi_2| \approx \pi \rightarrow \psi_1 - \psi_2 = 0$ , es decir, los tres conductores están contenidos en el mismo plano.

## 4.4 Resumen y conclusiones del capítulo

En este capítulo se han introducido unos conceptos que permiten la comparación entre diversas alternativas de mitigación de campo (apartado 4.2). Se han comparado diversas configuraciones empleadas comúnmente en líneas aéreas de AT (horizontal, vertical, delta y tresbolillo), analizando además en cada una de ellas la variación de la compacidad del campo, el campo bajo la línea y el campo a 30 m (localización aproximada del borde de la servidumbre de paso), con la distancia entre fases y altura (apartado 4.3). De la comparación se ha observado una mayor eficiencia de la configuración tresbolillo, seguida por la vertical (cerca de la línea), la delta (lejos de la línea) y la horizontal. Además se ha obtenido la configuración que minimiza el campo bajo la línea y a cualquier distancia, siendo ésta la delta invertida. El campo generado por la tresbolillo es muy similar a esta configuración.

La reducción del campo conseguida al variar la configuración puede alcanzar el 55% bajo la línea, siendo menor a mayores distancias. Se ha observado también que el campo magnético se incrementa bajo la línea un  $5 \div 10\%$  por cada metro de incremento de longitud entre fases, siendo la variación ligeramente mayor lejos de la línea. En cuanto a la variación con la altura, se observa un incremento mayor bajo la línea (8% por metro), reduciéndose conforme nos alejamos de la misma (2, 5% a 30 m). De lo anterior se concluye que el método más eficaz desde el punto de vista de reducción de CM es la modificación de la configuración (aunque esto depende de la configuración inicial), seguido de la reducción de la distancia entre fases (configuración más compacta) y del aumento de la altura de los conductores.

Por último se ha analizado la variación del campo a partir de las componentes vec-

toriales del mismo, representadas en el diagrama dipolar bajo la línea y a 30 m. Se han estudiado dos casos, la transformación configuración H-configuración D y DI (apartado 4.3.1) y la variación de altura del conductor central en la configuración D (apartado 4.3.2).

# Capítulo 5

## Mitigación mediante la división de fases

### 5.1 Introducción

Como se indicó en el capítulo 2, se consigue una configuración de baja emisión magnética cuando se divide una o varias fases en dos o más conductores distintos. En [40] se obtienen expresiones a partir de la aproximación en serie de potencias. Por otro lado [58] obtiene la misma formulación, a partir de la descomposición en dipolos. Ambas son válidas únicamente para puntos alejados de la línea. En este epígrafe se analiza el campo creado por dicha configuración, justificando su comportamiento magnético desde el punto de vista de la descomposición en dipolos, se estudia su efectividad, y se introducen expresiones de cálculo aproximadas, válidas para cualquier punto, cercano o lejano a la línea.

Tal como se procedió en el análisis del dipolo, conviene estudiar primeramente el campo creado por dos dipolos con igual intensidad, y que se conoce como cuadripolo de corriente. La figura 5.1 muestra un dipolo y un cuadripolo por el que circula la misma intensidad, la altura mínima al suelo es la misma, y la distancia mínima entre fases también (cuadripolo equivalente). Del diagrama dipolar se observa que el campo creado por el dipolo 2 se opone en gran medida al campo creado por el dipolo 1, obteniéndose un campo resultante menor. Este resultado se obtiene también con el cuadripolo de tres conductores mostrado en la figura 5.2, donde dos de las corrientes de igual polaridad circulan por el mismo conductor.

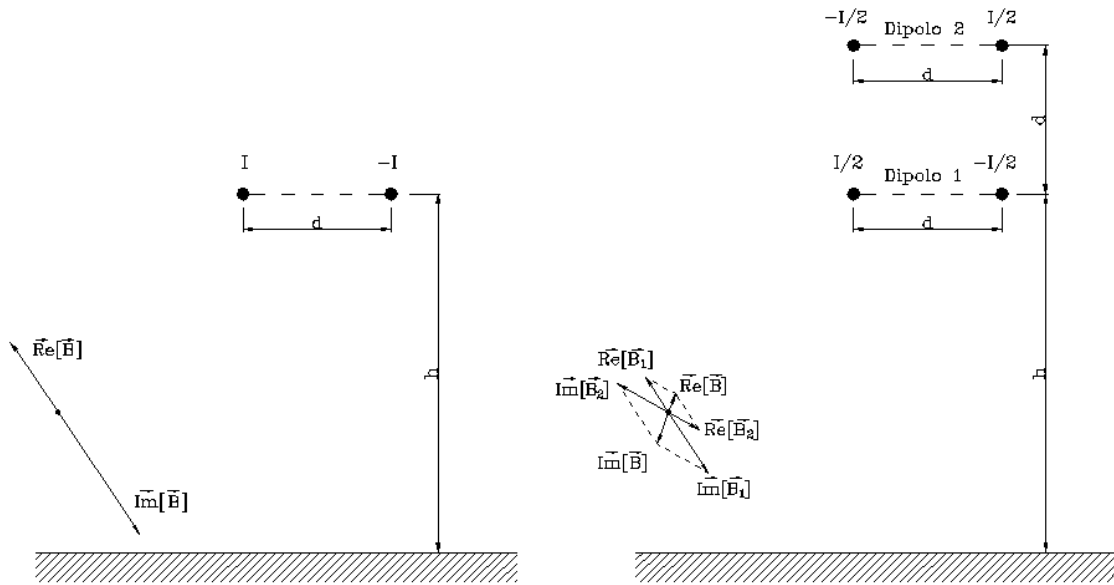


Figura 5.1: Dipolo magnético (izquierda), cuadrupolo de corriente equivalente, y diagrama dipolar de ambos (derecha).

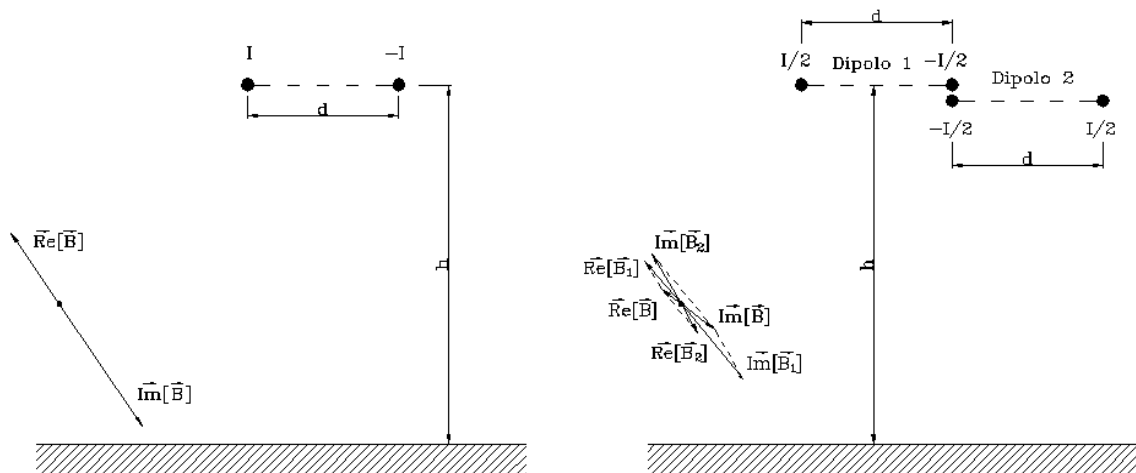


Figura 5.2: Dipolo magnético (izquierda) y cuadrupolo de corriente equivalente (derecha) formado por tres conductores (el conductor central se ha desdoblado en dos para distinguir ambos dipolos).

Para  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m la eficiencia del cuadripolo rectangular en  $x_t$  es de 0,2 (se reduce el campo a 1/5 de su valor), mientras que la correspondiente al cuadripolo plano es 0,25 (se reduce el campo a 1/4 de su valor). Obsérvese también de las figuras 5.1 y 5.2 que con el cuadripolo plano se consigue un ángulo de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_2]$  más en oposición que con el cuadripolo rectangular. Sin embargo la reducción del campo es menor, debido a que el módulo de  $\vec{\mathbf{B}}_1$  es un 30% superior en el caso plano, mientras que el módulo de  $\vec{\mathbf{B}}_2$  es prácticamente el mismo.

Se obtienen a continuación las ecuaciones del campo magnético creado por un cuadripolo de corriente, a partir de la descomposición en dipolos.

## 5.2 Campo magnético creado por un cuadripolo

Considérense dos dipolos formando un cuadripolo (figura 5.3). El campo creado por cada dipolo, teniendo en cuenta la aproximación (3.139), viene dado por

$$\vec{\mathbf{B}}_{1a} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r_1^2} (\cos \varphi_{1a} \vec{u}_x + \text{sen } \varphi_{1a} \vec{u}_y) \quad (5.1)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{2a} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r_2^2} (\cos \varphi_{2a} \vec{u}_x + \text{sen } \varphi_{2a} \vec{u}_y) \quad (5.2)$$

siendo

$$\varphi_{1a} = 2\theta_1 - \psi_1 + \frac{\pi}{2} \quad (5.3)$$

$$\varphi_{2a} = 2\theta_2 - \psi_2 + \frac{\pi}{2} \quad (5.4)$$

De manera análoga a lo visto en el apartado 3.7.2, el campo resultante se calcula aplicando el teorema del coseno:

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 = \left( \frac{\mu_0 \text{Re}[\mathbf{I}d]}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) \right) \quad (5.5)$$

$$|\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]|^2 = \left( \frac{\mu_0 \text{Im}[\mathbf{I}d]}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) \right) \quad (5.6)$$

$$B_{ar}^2 = \left( \frac{\mu_0 Id}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) \right) \quad (5.7)$$

El ángulo aproximado de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$ ,  $\varphi_a = \xi_a + \varphi_{1a}$ , puede obtenerse análogamente a como se vio en el apartado 3.7.2. Es inmediato demostrar que el ángulo de  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_a]$  vendrá dado

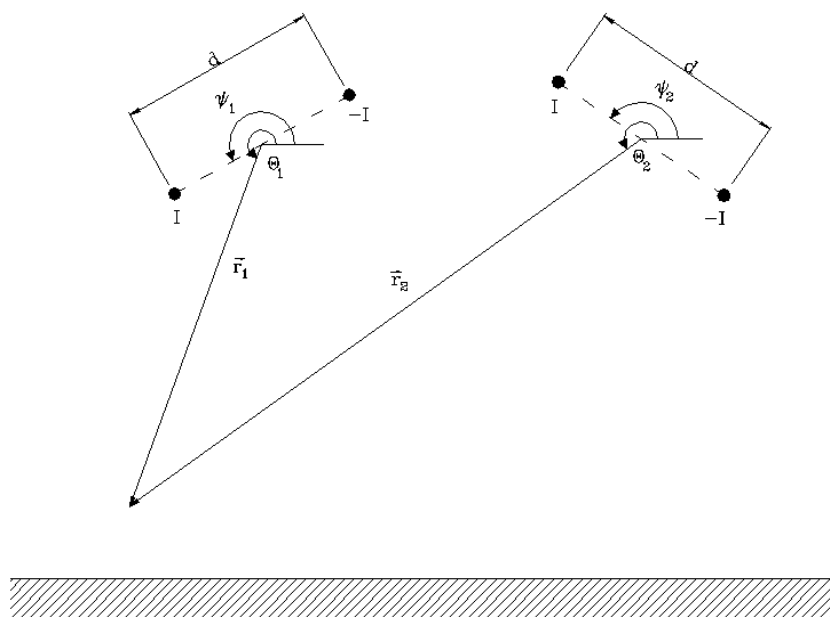


Figura 5.3: Parámetros que definen un cuadripolo de corriente

por  $\varphi_a + \pi$  (polarización lineal).

Es interesante analizar el campo creado por un tipo de cuadripolos, en los que se cumple que  $(\psi_1 = \pi + \psi_2)$ . Para puntos alejados de la línea  $\theta_1 \approx \theta_2$ , con lo que  $\varphi_1 - \varphi_2 \approx -\pi$ . Por otro lado  $r_1 \approx r_2$ , con lo que (5.7) tiende a anularse más rápidamente que en el caso del dipolo. En el siguiente apartado se analizará esto con más detalle.

En los siguientes apartados se obtienen las configuraciones óptimas del cuadripolo y de la línea con 1,2 o 3 fases partidas. Conviene indicar que las soluciones se han obtenido para una altura mínima al suelo de 10 m, y una distancia mínima entre fases de 8,5 m. Se ha observado que para otros valores varía ligeramente la solución. Sin embargo, de la simulación se ha deducido que el campo creado por la solución presentada, a otra altura y distancia entre fases (siempre dentro del rango empleado en líneas de transporte), es muy similar al que generan las configuraciones óptimas a dicha altura o distancia entre fases.

### 5.3 Cuadripolo óptimo

Se determinan a continuación las configuraciones de cuadripolo que optimizan algunas características de interés. En concreto, se ha aplicado la optimización a tres parámetros:



$\max [IC]$ ,  $\min [B(x_m)]$  y  $\min [B(x_t)]$ . El primer caso trata de determinar el cuadripolo que genera un campo más compacto, estando definido el índice de compacidad  $IC$  según (4.1). El segundo caso trata de determinar el cuadripolo cuyo máximo campo es mínimo. Por último el tercer caso determina la configuración que genera un campo mínimo a distancia  $x_m \pm l_t$  (límite de la servidumbre de paso). El problema de optimización, planteado en el Apéndice B, consiste en determinar los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  (figura B.1), que definirán la configuración óptima. Resolviendo el problema para  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m resultan las siguientes soluciones:

- Configuración que maximiza el índice de compacidad (A)
  - $\alpha = 0^\circ$
  - $\beta = 0^\circ$
  - $\gamma = 0^\circ$  (figura 5.4)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B)
  - $\alpha = 30^\circ$
  - $\beta = 30^\circ$
  - $\gamma = 330^\circ$  (figura 5.5)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C)
  - $\alpha = 90^\circ$
  - $\beta = 90^\circ$
  - $\gamma = 90^\circ$  (figura 5.6)

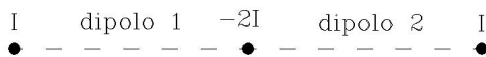


Figura 5.4: Cuadripolo que maximiza el índice de compacidad (A).

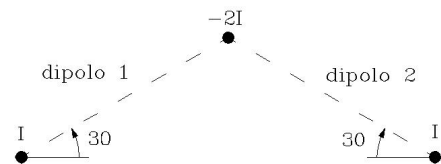


Figura 5.5: Cuadripolo que minimiza el campo en  $x_m$  (B).

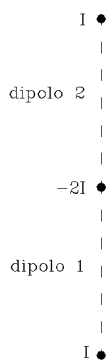


Figura 5.6: Cuadripolo que minimiza el campo en  $x_t$  (C)

Teniendo en cuenta el rango usual de variación de  $h$  y  $d$  en líneas de transporte, se ha comprobado que la solución es independiente de los mismos.

Las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 muestran los valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para las configuraciones indicadas y distintas alturas. Se han obtenido suponiendo conductores rectilíneos e indefinidos (RI) y con la aproximación DA.  $IC_0$  es el índice de compacidad de un dipolo vertical de 10 m de altura y 8,5 m de distancia entre conductores. Para el cálculo de  $FA$  se ha tomado como campo de referencia el generado por dicho dipolo vertical.

Tabla 5.1: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración A (figura 5.4).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	3,03	4,46	0,97	1,37	0,32	0,31
14	1,54	2,07	0,43	0,55	0,28	0,27
18	0,93	1,19	0,22	0,27	0,23	0,23

De las tablas se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El índice de compacidad es superior al del dipolo, excepto en la configuración B.
- En las configuraciones B y C el campo bajo la línea es aproximadamente 3 veces menor que en el caso del dipolo. Aunque no aparece indicado en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a un dipolo de igual altura crece ligeramente con la altura.

Tabla 5.2: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración B (figura 5.5).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	0,80	0,86	0,28	0,29	0,34	0,34
14	0,50	0,56	0,14	0,15	0,27	0,27
18	0,38	0,44	0,09	0,10	0,24	0,23

Tabla 5.3: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración C (figura 5.6).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	1,53	1,46	0,33	0,31	0,22	0,22
14	0,88	0,90	0,16	0,16	0,18	0,18
18	0,60	0,64	0,09	0,10	0,15	0,15

- Igualmente, en ambas configuraciones el campo en  $x_t$  es varias veces menor que en el caso del dipolo. Aunque no aparece indicado en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a un dipolo de igual altura se mantiene sensiblemente constante con la altura.
- El campo se reduce bajo la línea aproximadamente un 10% por cada metro de incremento de altura de los conductores. En  $x_t$  dicho incremento se reduce al 5%.
- Excepto en la configuración A, se cometen errores menores del 10% al emplear la aproximación DA.

Lo anterior puede visualizarse en la figura 5.7, que representa los perfiles transversales de campo del dipolo vertical y las configuraciones A, B y C para una corriente  $I = 250$ <sup>l0</sup> ( $2I$  en el caso del dipolo),  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m.

Se deduce que la configuración óptima es la C, por cuanto presenta un máximo  $x_m$  levemente superior a la B, pero presenta un  $IC$  casi el doble, por lo que lejos de la línea el campo es menor (un 35% inferior en  $x_t$ ).

Es interesante analizar la orientación vectorial de la configuración C. La figura 5.8 muestra el diagrama dipolar en  $x = x_m$  y  $x = x_{t2}$  para la misma intensidad. Obsérvese

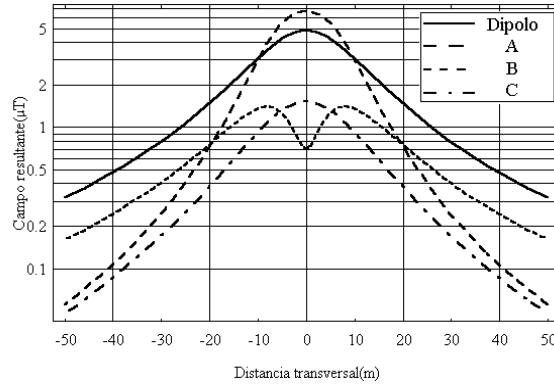


Figura 5.7: Campo resultante para el dipolo vertical y las configuraciones A, B y C, para  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m, y una corriente  $I = 250$  A.

que, a pesar de que en  $x = x_m$   $\vec{Re}[\vec{B}_1]$  y  $\vec{Re}[\vec{B}_2]$  están en oposición, el máximo no corresponde a dicha configuración. Análogamente, en  $x = x_{t2}$ , la configuración C es la óptima a pesar de que el ángulo entre ambos vectores no es  $\pi$ . A medida que nos alejamos de la línea dicho ángulo tiende a  $\pi$ .

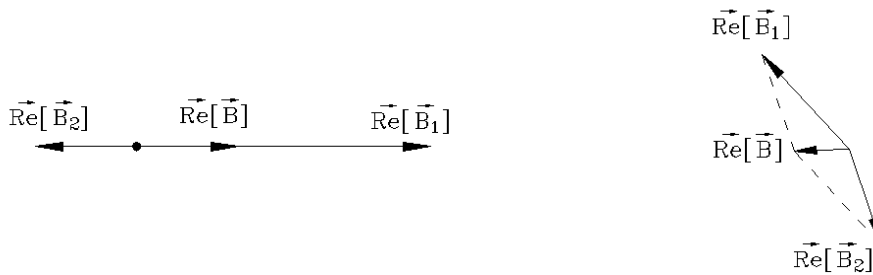


Figura 5.8: Configuración C con  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m. Diagramas dipolares (no están a escala) en  $x = x_m$  (izquierda) y  $x = x_{t2}$  (derecha).

Se ha visto que las configuraciones A y C presentan un índice de compacidad superior al del dipolo. Mediante el desarrollo en serie de potencias se puede explicar también este comportamiento. El término de segundo orden viene dado por (3.61), estando  $\vec{M}_2$  definido en (3.62). Es fácil ver que para el caso de las configuraciones A y C  $\vec{M}_2 = 0$ , con lo cual el campo varía con  $\frac{1}{r^3}$ . Existe otra configuración en la que  $|\vec{B}_3|$  coincide con el dado por A ó C:  $\alpha = \pi/2, \beta = \pi, \gamma = \pi/2$  (cuadripolo cuadrado). Sin embargo el campo bajo la línea es mayor. Además son necesarios cuatro conductores, frente a los tres de A ó C. En general, se cumple que para un cuadripolo cualquiera  $\vec{M}_2 = 0$  cuando (figura

5.9)

$$\vec{M}_2 = I\vec{r}_3 - I\vec{r}_1 - I\vec{r}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad (5.8)$$

Dado que (figura 5.9)  $\vec{r}_3 = \vec{r}_2 + \vec{r}_4$  la condición (5.8) se reduce a

$$\vec{M}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_4 = \vec{r}_1 \quad (5.9)$$

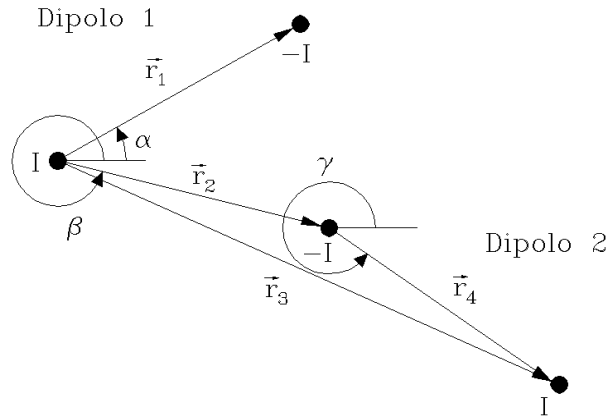


Figura 5.9: Cuandripolo con indicación de las posiciones de los conductores

Es fácil ver que la condición (5.9) es equivalente a verificar que la suma de los momentos magnéticos de ambos dipolos es nula. En efecto, de la definición de momento magnético de un dipolo, expuesta en (3.121), se tiene para los dipolos 1 y 2:

$$\vec{M}_{d1} = -I\vec{r}_1 \quad (5.10)$$

$$\vec{M}_{d2} = I\vec{r}_4 \quad (5.11)$$

con lo que

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{M}_{d1} + \vec{M}_{d2} = 0 \quad (5.12)$$

Se analiza a continuación la configuración óptima de conductores cuando se dividen una, dos, o las tres fases.

### 5.4 Línea trifásica equilibrada con una fase dividida

Una línea trifásica equilibrada con una fase dividida puede descomponerse en un cuadripolo de tres conductores (dipolos 1 y 2) y un dipolo (dipolo 3) (figura 5.10). Se supondrá en lo que sigue que la intensidad por el cuadripolo  $I_q$  viene dada por

$$I_q = \frac{1}{2}I_a = \frac{1}{2}I e^{j0} \tag{5.13}$$

, mientras que la intensidad por el dipolo podrá tomar dos valores distintos:

$$I_3 = I_c = I e^{j\frac{2\pi}{3}} \tag{5.14}$$

$$I_3 = I_b = I e^{j\frac{-2\pi}{3}} \tag{5.15}$$

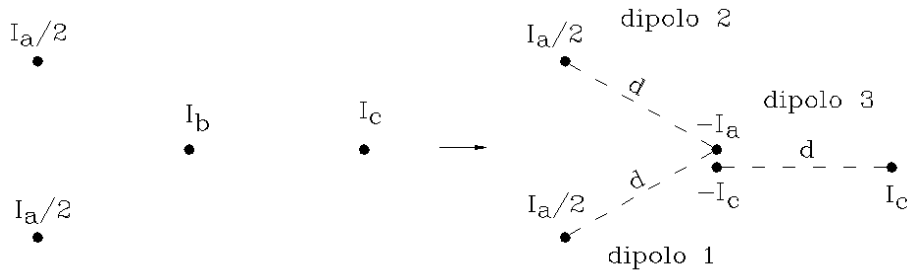


Figura 5.10: Línea trifásica con una fase dividida y su descomposición en un cuadripolo y un dipolo.

El campo resultante es la suma del generado por el cuadripolo y por el dipolo. El debido al cuadripolo no tiene parte imaginaria. El debido al dipolo tiene parte real (la misma si  $I_3$  viene dado por (5.14) o (5.15)) e imaginaria, cuyo vector  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_3]$  tendrá un sentido o el opuesto dependiendo del valor de  $I_3$ . Esto, sin embargo, no afectará al campo resultante generado por el cuadripolo y el dipolo, ya que  $\vec{\text{Im}}[\vec{B}_q] = 0$ , por lo que se puede escoger cualquiera de los dos valores. Se tomará (5.14).

Se analiza en primer lugar la posibilidad de obtener una configuración para la cual el CM varíe con  $\frac{1}{r^3}$ . Dado que la línea puede dividirse en dos conjuntos de conductores con corriente neta nula en cada uno, el momento de segundo orden del desarrollo en serie de potencias del campo debido a la línea puede ponerse como suma de dos momentos de segundo orden calculados de forma independiente (apartado 3.6.6): el debido al cuadripolo y al dipolo:

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_{d2} + \vec{M}_{q2} \tag{5.16}$$

Se vio en el apartado 5.2 que es posible obtener cuádrupolos en los que se cumple  $\vec{M}_{q2} = 0$ . Sin embargo  $\vec{M}_{d2}$  no es nunca nulo, con lo que el campo debido a la línea no puede variar con  $\frac{1}{r^3}$ .

Se determina a continuación la configuración que minimiza el campo. Para ello se supondrá que, al igual que en el caso anterior, la distancia  $d$  entre los conductores de los dos dipolos que componen el cuádrupolo es la misma, e igual a la distancia entre los conductores del dipolo (figura 5.10). En el Apéndice B puede verse la ecuación del campo, así como las restricciones del problema de minimización. De la resolución se determinan los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  que minimizan  $IC$ , el campo en  $x_m$  y el campo en  $x_t$ :

- Configuración que maximiza el índice de compacidad (A1)
  - $\alpha = 0^\circ$
  - $\beta = 60^\circ$
  - $\gamma = 0^\circ$  (figura 5.11)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B1)
  - $\alpha = 69^\circ$
  - $\beta = 36^\circ$
  - $\gamma = 96^\circ$  (figura 5.12)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C1)
  - $\alpha = 40^\circ$
  - $\beta = 82^\circ$
  - $\gamma = 142^\circ$  (figura 5.13)

Las tablas 5.4, 5.5 y 5.6 muestra los valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para las configuraciones indicadas y distintas alturas. Se han obtenido suponiendo conductores rectilíneos e indefinidos (RI) y con la aproximación DA.  $IC_0$  es el índice de compacidad de una línea trifásica simple configuración tresbolillo, de altura 10 m y distancia entre conductores 8,5 m. Para el cálculo de  $FA$  se ha tomado como campo de referencia el generado también por dicha línea. Se ha tomado como referencia la configuración tresbolillo por ser la que genera un campo reducido.

De las tablas puede observarse lo siguiente:

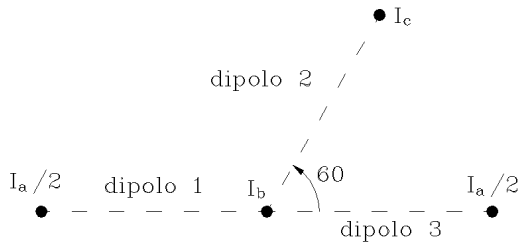


Figura 5.11: Línea con 1 fase partida. Configuración que maximiza el índice de compacidad (A1).

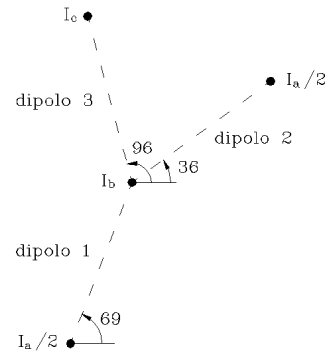


Figura 5.12: Línea con 1 fase partida. Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B1).

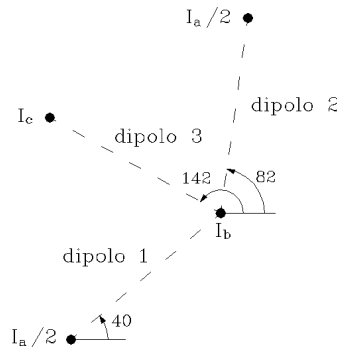


Figura 5.13: Línea con 1 fase partida. Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C1)

- El índice de compacidad es superior al del dipolo para la configuración A1, siendo inferior en las otras dos.
- En las configuraciones B1 y C1 el campo bajo la línea para  $h = 10$  m es aproximadamente 2 veces menor que en el caso de la configuración T. Aunque no aparece indicado en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a la configuración T de igual altura se mantiene sensiblemente constante con la altura.
- Igualmente, en ambas configuraciones el campo en  $x_t$  para  $h = 10$  m se reduce aproximadamente 35% respecto al campo creado por T. Aunque no se refleja en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a la configuración T de igual altura se mantiene sensiblemente constante al variar la altura.
- El campo se reduce bajo la línea aproximadamente un 9% por cada metro de incremento de altura de los conductores. En  $x_t$  dicho incremento se reduce al 3%.



Tabla 5.4: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración A1 (figura 5.11).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	1,19	1,28	1,41	1,53	1,18	1,20
14	0,75	0,74	0,80	0,80	1,06	1,09
18	0,54	0,51	0,51	0,49	0,94	0,96

Tabla 5.5: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración B1 (figura 5.12).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	0,72	0,58	0,49	0,42	0,69	0,72
14	0,50	0,42	0,30	0,26	0,61	0,63
18	0,39	0,33	0,21	0,19	0,53	0,56

Tabla 5.6: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración C1 (figura 5.13).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	0,81	0,75	0,52	0,50	0,64	0,67
14	0,55	0,50	0,31	0,29	0,56	0,59
18	0,42	0,38	0,21	0,19	0,49	0,52

- En el cálculo de  $FA$  se cometen errores menores del 10% al emplear la aproximación DA.

La figura 5.14 muestra los perfiles transversales de campo de la configuración T y las configuraciones A1, B1 y C1 para una corriente por fase de 500 A,  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m.

Obsérvese de la figura que las configuraciones B1 y C1 presentan un perfil similar hasta un valor de  $|x|$ , en el que, debido al mayor  $IC$  de C1, el campo debido a esta configuración

es claramente menor. Por ello puede considerarse la configuración C1 como la óptima.

La figura 5.15 muestra el diagrama dipolar en  $x = x_m$  y  $x = x_{t2}$  de la configuración C1, con  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m.

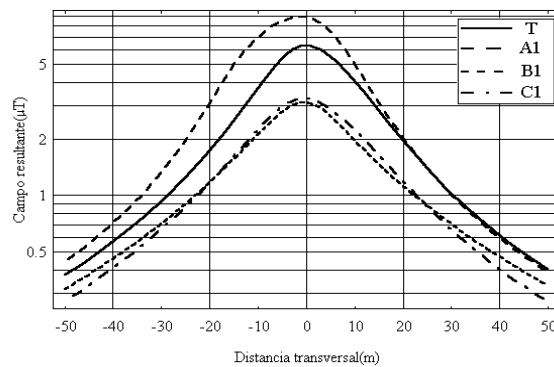


Figura 5.14: Campo generado por las configuraciones T, A1, B1, y C1, para  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m y 500 A de intensidad por fase.

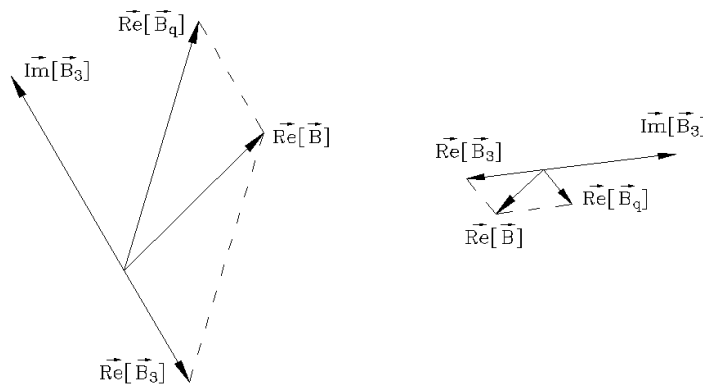


Figura 5.15: Configuración C1 con  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m. Diagramas dipolares (no están a escala) en  $x = x_m$  (izquierda) y  $x = x_{t2}$  (derecha).

## 5.5 Línea trifásica equilibrada con dos fases divididas

Una línea trifásica con dos fases divididas puede descomponerse en dos cuadripolos de tres conductores (figura 5.16).

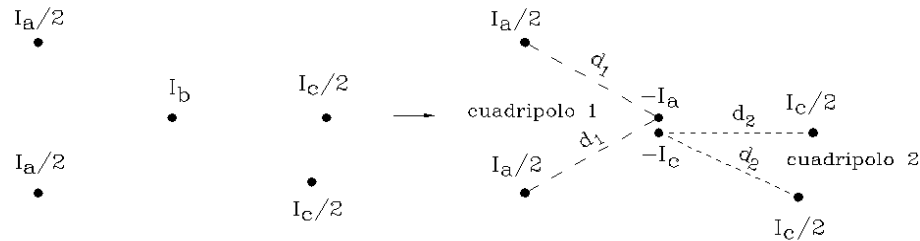


Figura 5.16: Línea trifásica con dos fases divididas y su descomposición en dos cuadripolos de tres conductores.

Las intensidades de ambos cuadripolo serán

$$\mathbf{I}_1 = \frac{I_a}{2} e^{j0} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{I_a}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (5.18)$$

El campo generado por el cuadripolo 1 no tiene parte imaginaria. El generado por el cuadripolo 2 tendrá parte imaginaria, y su desfase respecto a la real será de  $\pi$ , como se vio en el apartado 5.2.

Dado que la línea puede descomponerse en dos cuadripolos, el momento de segundo orden del desarrollo en serie del campo creado por la línea será nulo cuando lo sean los correspondientes a ambos cuadripolos. Se vio en el apartado 5.12 que para que el momento de segundo orden de un cuadripolo sea nulo se ha de verificar que la suma vectorial de los momentos magnéticos de los dipolos que lo integran ha de ser nula. En cuadripolos formados por tres conductores esto se cumple cuando los conductores están alineados. La figura 5.17 muestra dos ejemplos.

Se determinan a continuación las configuraciones que minimizan el índice de compatibilidad y el campo bajo la línea y en el límite de la servidumbre de paso. Para ello se supondrá que, al igual que en los casos anteriores, la distancia  $d_1$  entre los conductores de los dipolos que pertenecen al cuadripolo 1 es la misma. Análogamente sucede con la distancia  $d_2$  y los dipolos del cuadripolo 2. En el Apéndice B se plantea el problema de

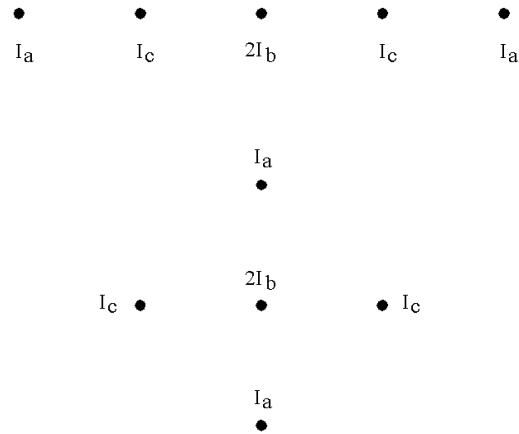


Figura 5.17: Ejemplos de configuraciones con dos fases partidas cuyo CM varía con  $1/r^3$

minimización de manera análoga a los casos anteriores. De la resolución se determinan los valores de  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{12}$  y  $\psi_{21}$ ,  $\psi_{22}$  (figura B.3) que minimizan  $IC$ , el campo en  $x_m$  y el campo en  $x_t$ :

- Configuración que maximiza el índice de compacidad (A2)
  - $\psi_{11} = 30^\circ$
  - $\psi_{12} = 210^\circ$
  - $\psi_{21} = 150^\circ$
  - $\psi_{22} = 330^\circ$
  - $d_2 = d_1$  (figura 5.18)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B2)
  - $\psi_{11} = 24^\circ$
  - $\psi_{12} = 250^\circ$
  - $\psi_{21} = 310^\circ$
  - $\psi_{22} = 190^\circ$
  - $d_2 = d_1$  (figura 5.19)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C2)
  - $\psi_{11} = 18^\circ$

- $\psi_{12} = 210^\circ$
- $\psi_{21} = 90^\circ$
- $\psi_{22} = 270^\circ$
- $d_2 = d_1$  (figura 5.20)

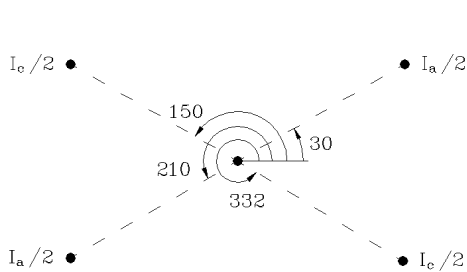


Figura 5.18: Línea con 2 fases partidas. Configuración que maximiza el índice de compacidad (A2).

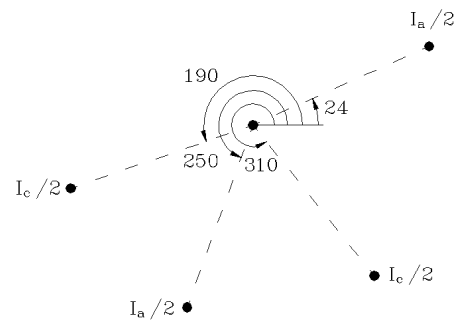


Figura 5.19: Línea con 2 fases partidas. Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B2).

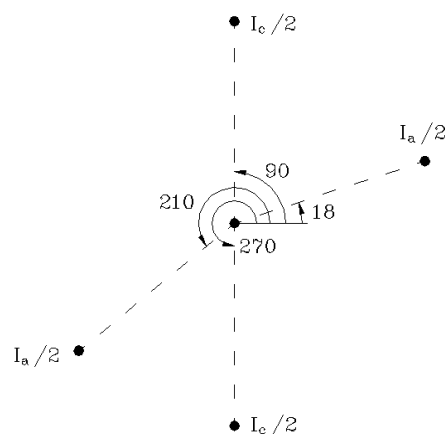


Figura 5.20: Línea con 2 fases partidas. Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C2)

Las tablas 5.7, 5.8 y 5.9 muestran los valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para las configuraciones indicadas y distintas alturas. Se han obtenido considerando conductores rectilíneos e indefinidos (RI) y con la aproximación DA.  $IC_0$  es el índice de compacidad de una línea trifásica cuya configuración es al tresbolillo, de altura 10 m y distancia entre

conductores 8,5 m. Para el cálculo de  $FA$  se ha tomado también como campo de referencia el generado por dicha línea.

Tabla 5.7: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración A2 (figura 5.18).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	1,68	1,80	0,55	0,60	0,33	0,33
14	1,05	1,04	0,29	0,29	0,27	0,28
18	0,73	0,69	0,17	0,16	0,23	0,23

Tabla 5.8: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración B2 (figura 5.19).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	0,61	0,46	0,28	0,21	0,46	0,46
14	0,35	0,28	0,13	0,10	0,37	0,37
18	0,25	0,22	0,08	0,07	0,30	0,31

De las tablas puede observarse lo siguiente:

- El índice de compacidad de A2 es el mayor de las configuraciones analizadas previamente.
- El índice de compacidad es muy superior en la configuración C2 que en la B2, por lo que, aunque  $FA(x_m)$  es menor en B2, el campo debido a C2 se hace menor en  $FA(x_t)$ .
- En la configuración B2 el campo bajo la línea para  $h = 10$  m es aproximadamente 3,5 veces menor que en el caso de la configuración T, mientras que en la C2 es aproximadamente 3 veces menor. Aunque no aparece indicado en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a la configuración T de igual altura se mantiene sensiblemente constante con la altura.
- En la configuración B2 el campo en  $x_t$  para  $h = 10$  m es aproximadamente 2 veces menor que el creado por T. Con la configuración C2 el campo en  $x_t$  se reduce

Tabla 5.9: Valores de  $IC/IC_0$ ,  $FA(x_m)$  y  $FA(x_t)$  para la configuración C2 (figura 5.20).

h (m)	$IC/IC_0$		$FA(x_m)$		$FA(x_t)$	
	RI	DA	RI	DA	RI	DA
10	1,44	1,14	0,37	0,31	0,26	0,27
14	0,89	0,72	0,18	0,16	0,21	0,22
18	0,63	0,52	0,10	0,09	0,17	0,17

aproximadamente 4 veces. Aunque no se refleja en las tablas, se ha comprobado que la eficiencia respecto a la configuración T de igual altura se mantiene sensiblemente constante al variar la altura.

- El campo se reduce bajo la línea aproximadamente un 9% por cada metro de incremento de altura de los conductores. En  $x_t$  dicho incremento se reduce al 5%.

La figura 5.21 muestra los perfiles transversales de campo de la configuración T y las configuraciones A2, B2 y C2 para una corriente por fase de 500 A,  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m.

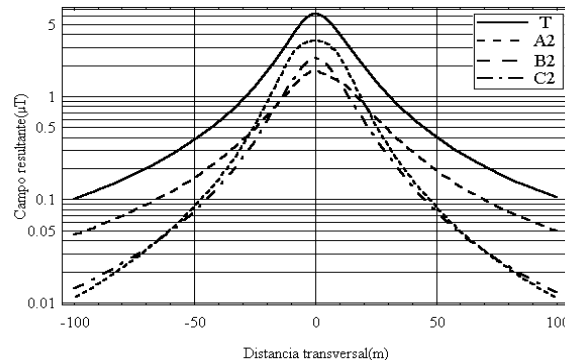


Figura 5.21: Campo generado por las configuraciones T, A2 B2, y C2, para  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m y 500 A de intensidad por fase.

Obsérvese en la figura lo que se ha comentado anteriormente. El  $IC$  de C2 es muy superior al de B2, por lo que rápidamente el campo debido a C2 es menor, siendo la diferencia relativa creciente con la distancia. Se observa también de dicha figura que el campo debido a A2 es menor que el debido a C2 a distancias superiores a aproximadamente 50 m, ya que su compacidad es mayor. En esta configuración se cumple que el segundo término del desarrollo en serie de potencias es nulo, tal como se vio en el apartado 5.2, por

lo que el campo varía con  $\frac{1}{r^3}$ . Esto se cumplirá en general para cualquier configuración compuesta por dos cuadripolos de tres conductores alineados, aunque la configuración A2 presenta el mínimo del término de tercer orden en el desarrollo en serie. Dada la pequeña diferencia entre los perfiles de A2 y C2, cualquiera de ambas (u otra similar) puede considerarse una configuración eficiente.

La figura 5.22 muestra el diagrama dipolar en  $x = x_m$  y  $x = x_{t2}$  de la configuración C2, con  $h = 10$  m y  $d = 8,5$  m.

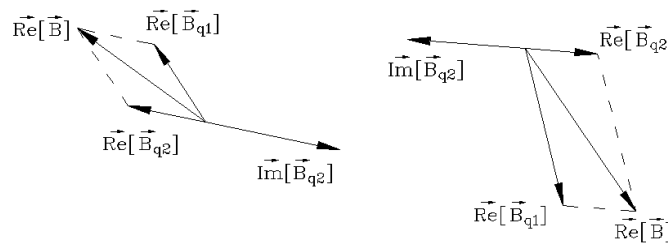


Figura 5.22: Configuración C2 con  $h = 10$  m,  $d = 8,5$  m. Diagramas dipolares (no están a escala) en  $x = x_m$  (izquierda) y  $x = x_{t2}$  (derecha).

### 5.6 Línea trifásica equilibrada con tres fases divididas

Se analiza por último la configuración en la que las tres fases están divididas. Dicha configuración se puede descomponer en dos cuadripolos de cuatro conductores: cuadripolo 1, cuya intensidad viene dada en (5.17), y cuadripolo 2, con la intensidad dada en (5.18) (figura 5.23). Las intensidades por cada cuadripolo vendrán dadas por (5.17) y (5.18).

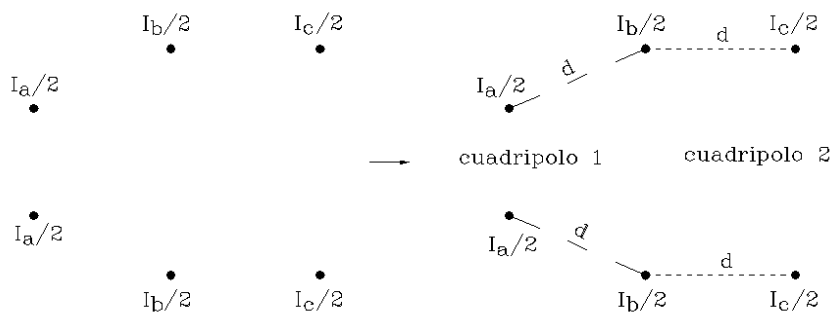


Figura 5.23: Línea trifásica con tres fases divididas (izquierda) y su descomposición en dos cuadripolos de cuatro conductores (derecha).



Al igual que en el caso de la línea con dos fases divididas, es posible dividir la línea en dos cuádrupolos tales que el CM generado por cada uno de ellos varíe con  $\frac{1}{r^3}$ . Para ello, cada cuádrupolo ha de cumplir que los vectores momento magnético de sus dipolos sean iguales y de sentido contrario. La figura 5.24 muestra algunos ejemplos.

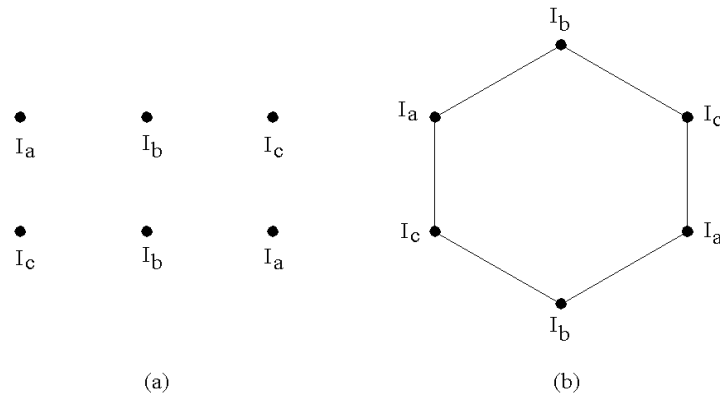


Figura 5.24: Ejemplos de configuraciones con tres fases partidas cuyo CM varía con  $1/r^3$

El ejemplo (a) de la figura 5.24 coincide con la configuración de baja reactancia en las líneas de doble circuito cuando circula la misma carga por ambas. El ejemplo (b) muestra los conductores dispuestos en los vértices de un hexágono.

En el Apéndice B se plantea el problema de la minimización, suponiendo que los dipolos de un mismo cuádrupolo tienen igual distancia ( $d_1$ , cuádrupolo 1;  $d_2$ , cuádrupolo 2, figura B.4), y que la distancia mínima al suelo  $h$  es también constante. La distancia  $d_3$  puede tomar cualquier valor, ya que separa los conductores de una misma fase. De la resolución se determinan los valores de  $\alpha$ ,  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{21}$ ,  $\psi_{22}$ ,  $d_2$  y  $d_3$  (figura B.4) que minimizan  $IC$ , el campo en  $x_m$  y el campo en  $x_t$ . Son los siguientes:

- Configuración que maximiza el índice de compacidad
  - Coincide con la A2
- Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B3)
  - $\psi_{11} = 193^\circ$
  - $\psi_{12} = 298^\circ$
  - $\psi_{21} = 253^\circ$
  - $\psi_{22} = 20^\circ$

- $\alpha = 7^\circ$
- $d_2 = d_1$
- $d_3 = 0,25d_1$  (figura 5.25)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_t$ 
  - Coincide con la C2

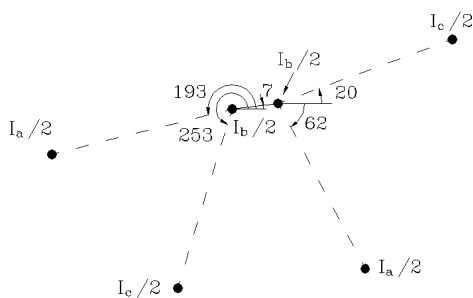


Figura 5.25: Línea con 3 fases partidas. Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B3)

Si se fija  $d_3$  a un valor constante distinto de cero, se tienen unos resultados similares al óptimo. La figura 5.26 muestra los campos resultantes en  $x_m$  y  $x_t$  en las configuraciones óptimas para distintos valores de  $d_3$ , siendo  $h = 10$  m,  $d_1 = 8,5$  m y 500 A de intensidad por fase. La figura 5.27 muestra el  $IC$  para las configuraciones que lo maximizan. Obsérvese que el campo es menos compacto conforme crece  $d_3$ , hasta un mínimo, a partir del cual crece ligeramente.

De lo anterior se deduce que no se consigue atenuar más el campo con la división de las tres fases.

### 5.6.1 Diseño de líneas aéreas de doble circuito

Si se considera que circula la misma carga por ambos circuitos, las líneas de doble circuito pueden analizarse como un caso particular de las líneas de simple circuito con las tres fases divididas. El análisis es similar al visto en el apartado 5.6, con la salvedad de que  $d_3 \neq 0$ . Como se vio en la figura 5.27 el campo generado por la configuración óptima para diferentes valores de  $d_3$  es muy similar, con lo cual se pueden obtener campos reducidos si se busca la configuración óptima para dicha distancia. Por ejemplo, la figura 5.28 muestra los perfiles de campo resultante para las tres configuraciones que minimizan el campo en

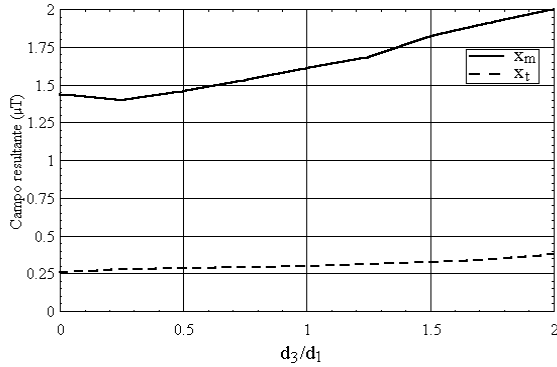


Figura 5.26: Línea con 3 fases partidas. Campos resultantes mínimos en  $x_m$  y  $x_t$  en función de  $d_3$ .

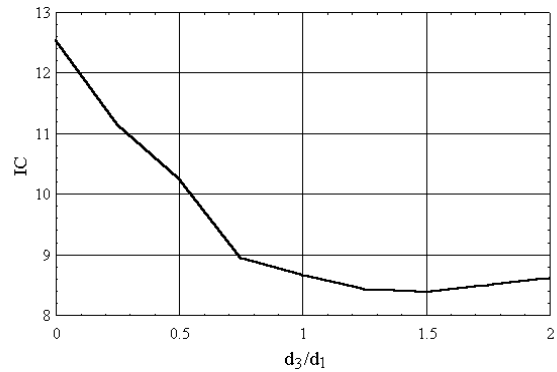


Figura 5.27: Línea con 3 fases partidas. IC máximo en función de  $d_3$ .

$x_t$  con valores de  $d_3$  distintos. Obsérvese la similitud del campo para  $d_3 = 0$  m y  $d_3 = 1$  m, siendo algo distinto en  $d_3 = 2$  m.

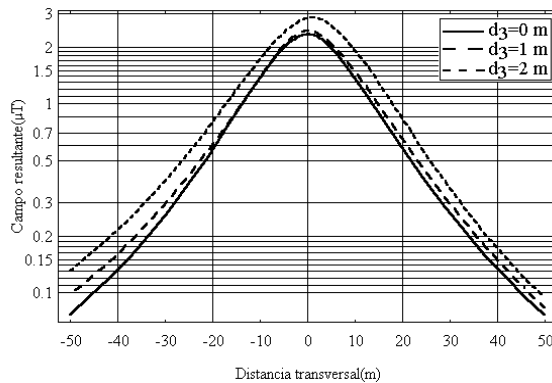


Figura 5.28: Línea con 3 fases partidas. Campos resultantes de las configuraciones que minimizan el campo en  $x_t$  con diversos valores de  $d_3$ ,  $h = 10$  m,  $d_1 = d_2 = 8,5$  m y 250 A/fase en cada circuito.

Se vio en el epígrafe 3.6.6 que la configuración de baja reactancia (tabla 3.2) presenta el segundo término de la serie de potencias nulo. Es interesante comparar el campo creado por dicha línea con el generado por la configuración óptima para igual distancia  $d_3$ . Por ejemplo, para  $d_3 = 2d_1 = 17$  m (valor típico en configuraciones verticales de doble circuito en líneas de transporte) y  $h = 10$  m las configuraciones óptimas son las siguientes:

- Configuración que maximiza el índice de compacidad (A4)

$$- \psi_{11} = 60^\circ$$

- $\psi_{12} = 240^\circ$
  - $\psi_{21} = 300^\circ$
  - $\psi_{22} = 120^\circ$
  - $\alpha = 0^\circ$
  - $d_2 = d_1$  (figura 5.29)
- Configuración que minimiza el campo en  $x_m$  (B4)
    - $\psi_{11} = 199^\circ$
    - $\psi_{12} = 245^\circ$
    - $\psi_{21} = 259^\circ$
    - $\psi_{22} = 2^\circ$
    - $\alpha = 5^\circ$
    - $d_2 = d_1$
  - Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C4)
    - $\psi_{11} = 99^\circ$
    - $\psi_{12} = 272^\circ$
    - $\psi_{21} = 332^\circ$
    - $\psi_{22} = 131^\circ$
    - $\alpha = 32^\circ$
    - $d_2 = d_1$  (figura 5.30)

La figura 5.31 muestra los perfiles de campo resultante de las configuraciones A4, B4 y C4, así como de la configuración de baja reactancia. C4 presenta menos campo a distancias cercanas a la línea, pero para un valor de  $x \approx 170$  m la configuración de baja reactancia genera un campo menor. La configuración A4, sin embargo, presenta un campo a distancias alejadas de la línea menor incluso que la de baja reactancia, haciéndose el campo menor que la C4 para  $x \geq 100$  m. Es fácil ver que A4 también presenta momento de segundo orden nulo. Puede concluirse que la configuración C4 es la óptima a distancias inferiores a unos 100 m, y la A4 a mayores distancias.

Para otros valores de  $d_3$  se obtienen curvas similares. La configuración óptima lejos de la línea será similar a la A4, siendo ahora los ángulos tales que se mantenga la distancia mínima entre fases. Para  $d_3 = d_1$  la configuración óptima es la de baja reactancia.

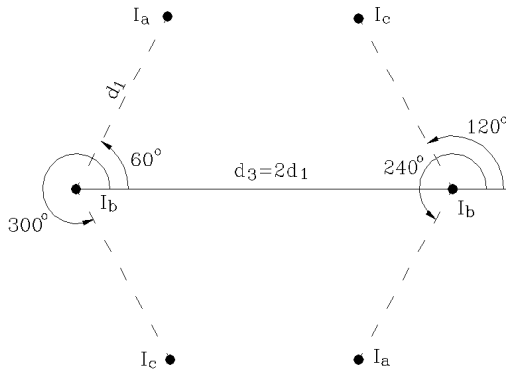


Figura 5.29: Línea con 3 fases partidas y  $d_3 = 2d_1$ . Configuración que maximiza  $IC$  (A4).

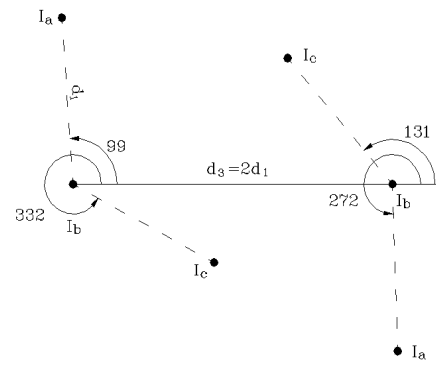


Figura 5.30: Línea con 3 fases partidas y  $d_3 = 2d_1$ . Configuración que minimiza el campo en  $x_t$  (C4).

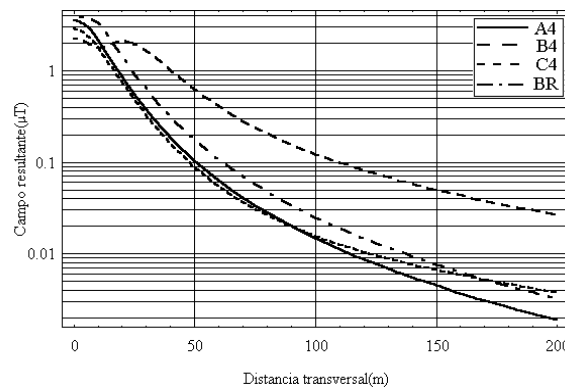


Figura 5.31: Campo resultante debido a las configuraciones A4, B4, C4 y baja reactancia (BR)

## 5.7 Resumen y conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha analizado la reducción de campo que se puede conseguir en líneas de transporte cuando se divide una, dos o tres fases. Para ello se ha determinado la ecuación del campo debida a un cuadripolo, basada en la aproximación DA (apartado 5.2), observándose que para determinadas configuraciones el campo se reduce con la distancia al cubo. A partir de dicha ecuación se ha determinado el cuadripolo que minimiza el campo (apartado 5.3), obteniéndose una reducción del 67% bajo la línea y del 80% en el límite de la servidumbre de paso. Seguidamente se han determinado las configuraciones que minimizan el campo cuando se divide una fase (apartado 5.4), dos fases (apartado 5.5) y tres fases (apartado 5.6). Por último se ha analizado la configuración doble circuito, obteniéndose las disposiciones, para una determinada distancia entre circuitos, que

minimizan el campo bajo la línea y lejos de la línea. La configuración de baja reactancia es la que presenta el mínimo campo lejos de la línea cuando la distancia entre circuitos coincide con la distancia entre fases.

En la tabla 5.10 se muestran las reducciones conseguidas respecto a la configuración tresbolillo, suponiendo que la corriente por fase, distancia entre fases y altura mínima al suelo es la misma para todas las configuraciones. La configuración de tres fases corresponde a una distancia  $d_3 = 2d_1$ . Para valores menores de  $d_3$  se obtienen reducciones ligeramente mayores.

Tabla 5.10: Máximas reducciones en % de campo conseguidas al dividir una, dos, o tres fases, relativas a la configuración tresbolillo.

Disposición	Bajo la línea	Límite servidumbre paso	$x = 500$ m
1 fase partida (C1)	50	35	30
2 fases partidas (C2)	62	75	92
3 fases partidas (A4)	60	25	97

Se puede observar de la tabla que la división de una fase reduce significativamente el campo cerca de la línea, pero dicha reducción va siendo menor a distancias mayores. Lo contrario ocurre con la división de dos fases. La división de tres fases no mejora la reducción conseguida con dos fases.

# Capítulo 6

## Mitigación de CM mediante lazos

### 6.1 Introducción

En este capítulo se analiza la técnica de reducción de campo basada en la inserción de uno o varios lazos pasivos, en los que la corriente que circula es puramente inducida, o activos, en los que la corriente que circula es controlada por un circuito externo. Los lazos se componen de dos conductores paralelos a la línea, y dos tramos que cierran el circuito. De este modo se intenta crear un CM que contrarreste el original.

Tal como se vio en el apartado 2.1.2 esta técnica se ha analizado aplicándose a determinadas configuraciones de líneas (horizontal, delta invertida) [80, 36, 48], sin realizar un análisis comparativo entre diversas soluciones posibles. Se pretende en este capítulo establecer un método semiheurístico que permita, para cualquier configuración de conductores y número de circuitos, determinar de un modo aproximado la posición más adecuada de los lazos de mitigación pasivos, así como las características del conductor del lazo. Los resultados del método pasivo se compararán con el activo, basado en la inyección de unas corrientes por los bucles, de magnitud y fase tales que se reduzca el CM en el punto o zona determinados. Se desarrollará también un método para determinar dichos parámetros de la corriente en los lazos.

### 6.2 Mitigación con lazos pasivos

Se evalúan en este apartado las posibilidades de mitigación del CM creado por líneas de transporte, con la inserción de lazos pasivos, con o sin compensación serie. Para ello se abordará el problema en dos fases:

1. Análisis del campo magnético que se desea reducir

2. Diseño del conjunto de lazos para conseguir una mitigación óptima del campo

A continuación se analizan cada una de estas etapas para distintas configuraciones de conductores. Previamente se determinará la corriente inducida para un caso general.

6.2.1 Corrientes inducidas en los lazos

Considérese una línea compuesta por  $m$  conductores de fase por los que circulan las intensidades senoidales en régimen permanente  $I_{p1}, I_{p2}, \dots, I_{pm}$ , y  $n$  lazos por los que circulan las intensidades  $I_1, I_2, \dots, I_n$  (figura 6.1). Tal como se vio en el apartado 3.3, el efecto de la tierra se puede sustituir por unos conductores imágenes tal como muestra también la figura 6.1.

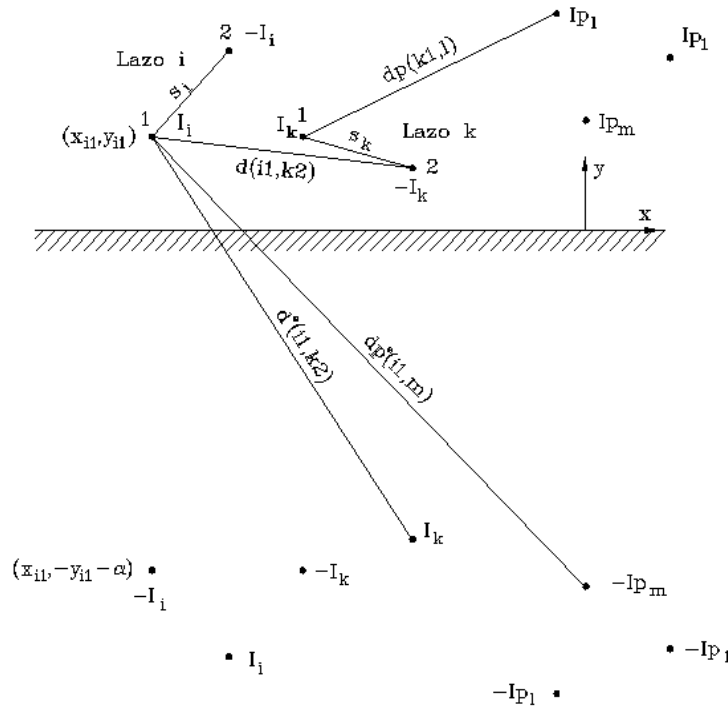


Figura 6.1: Conductores de línea y lazos de mitigación

Para simplificar se considerarán las siguientes hipótesis:

- Los conductores de fase son rectilíneos, paralelos e indefinidos.
- Los lazos se componen de cuatro tramos rectilíneos, paralelos dos a dos. Dos tramos serán paralelos a la línea y los otros dos perpendiculares.



- La longitud de los tramos paralelos (longitud de lazo) es mucho mayor que la longitud de los tramos perpendiculares (anchura de lazo), y que la distancia máxima entre dos conductores de cada lazo. Con ello se pueden considerar dos hipótesis simplificativas:
  - La longitud de los lazos es infinita.
  - La FEM inducida en los tramos paralelos a la línea es mucho mayor que la inducida en los tramos perpendiculares, por lo que puede despreciarse ésta última.
- La distancia entre cualesquiera conductores de fase y lazo es al menos un orden de magnitud mayor que el radio del conductor. Con ello se consiguen evitar efectos de proximidad entre conductores [12].
- La intensidad de la línea generadora de campo no se ve modificada con la inserción del lazo pasivo. Debido al acoplamiento magnético dipolo-lazo se inducen también unas fuerzas electromotrices en los conductores de la línea, que pueden modificar el módulo y fase de la intensidad de línea. Este efecto será más importante cuanto más próximos sean los valores de longitud de lazo y línea. Estudios previos [80] han demostrado que incluso para longitudes de lazo del orden de la línea el efecto puede despreciarse.
- Se considerará la tierra horizontal, homogénea e infinita.

Estas hipótesis simplifican el análisis, eliminando la coordenada  $z$  de las ecuaciones, y haciendo el problema bidimensional.

Conviene aclarar previamente que las magnitudes por unidad de longitud se representarán por un apóstrofo. La intensidad inducida en el lazo  $i$  (sentido positivo en dirección positiva del eje  $z$ ) vendrá dada por

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{V}_i'}{R_i' + jX_i'} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{V}_i' = -j\omega\phi_i' \quad (6.2)$$

siendo

- $\omega$ : pulsación de la red (rad/s)
- $\mathbf{V}_i'$ : fuerza electromotriz inducida en el lazo  $i$  por unidad de longitud

- $\phi'_i$ : flujo externo concatenado por el lazo  $i$  por unidad de longitud
- $R'_i$ : resistencia del lazo  $i$  por unidad de longitud
- $X'_i$ : inductancia propia del lazo  $i$  por unidad del longitud, dada por (C.15) (apéndice C):

$$X'_i = j\omega \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{s_i}{rgm_i} \quad (6.3)$$

siendo

- $\mu_0$ : permeabilidad magnética del vacío
- $s_i$ : distancia entre los conductores 1 y 2 del lazo  $i$
- $rgm_i$ : radio geométrico medio del conductor que compone el lazo  $i$

Antes de obtener la corriente inducida conviene recordar previamente el efecto de la tierra en el campo magnético creado por un conductor aéreo. Como se indicó en el apartado 3.3, el efecto de la corriente de retorno por tierra debida a la presencia de un conductor aéreo situado en  $(x, y)$  (figura 6.1) puede considerarse suponiendo un conductor imagen de igual radio, con intensidad contraria, y situado en  $(x, -y - \alpha)$ , siendo

$$\alpha = \sqrt{2}\delta e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (6.4)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}} \quad (6.5)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad de la tierra en S/m.

Habrán tantos conductores imágenes como conductores reales. Dado que la corriente es la misma en un conductor y su imagen, se puede suponer que cada par de conductores de fase  $(i, i^\otimes)$  forman un lazo. Por otro lado, existirán  $n$  lazos reales y otros tantos imágenes. La FEM inducida en el lazo  $i$  vendrá dada por

$$\mathbf{V}'_i = -j\omega\phi'_i = -j \left( \sum_{k=1}^m Xp'_{ik} \mathbf{I}p_k + \sum_{l=1, l \neq i}^n X'_{il} \mathbf{I}l + \sum_{l=1}^n X_{il}^{\otimes} \mathbf{I}l^{\otimes} \right) \quad (6.6)$$

siendo

- $Xp'_{ik}$ : inductancia mutua por unidad de longitud entre el lazo pasivo  $i$  y el lazo formado por el conductor de fase  $k$  y su imagen  $k^\otimes$ .
- $X'_{il}$ : inductancia mutua por unidad de longitud entre los lazos pasivos  $i$  y  $l$ .

- $X_{il}^{\otimes'}$ : inductancia mutua por unidad de longitud entre el lazo pasivo  $i$  y el lazo imagen del  $l$ ,  $l^{\otimes}$ .

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{I}_l^{\otimes} = -\mathbf{I}_l$ , (6.6) se puede poner como

$$\mathbf{V}_i' = -j\omega\phi_i' = -j \left( \sum_{k=1}^m X_{p'ik}' \mathbf{I}_{p_k} + \sum_{l=1, l \neq i}^n (X_{il}' - X_{il}^{\otimes'}) \mathbf{I}_l - X_{ii}^{\otimes'} \mathbf{I}_i \right) \quad (6.7)$$

Considerando la expresión de la inductancia mutua entre dos lazos (apéndice C, (C.17)) se tiene que

$$X_{p'ik}' = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp^{\otimes}(i1, k) dp(i2, k)}{dp(i1, k) dp^{\otimes}(i2, k)} \quad (6.8)$$

$$X_{il}' - X_{il}^{\otimes'} = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(i1, l2) d(i2, l1) d^{\otimes}(i1, l1) d^{\otimes}(i2, l2)}{d(i1, l1) d(i2, l2) d^{\otimes}(i1, l2) d^{\otimes}(i2, l1)} \quad (6.9)$$

$$X_{ii}^{\otimes'} = \omega \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d^{\otimes}(i1, i2)}{d^{\otimes}(i1, i1)} \quad (6.10)$$

siendo (figura 6.1)

- $dp^{\otimes}(i1, k)(dp^{\otimes}(i2, k))$ : distancia del conductor 1(2) del lazo pasivo  $i$  al conductor imagen del conductor  $k$  de la línea.
- $dp(i1, k)(dp(i2, k))$ : distancia del conductor 1(2) del lazo pasivo  $i$  al conductor  $k$  de la línea.
- $d(i1, l2)(d(i2, l1))$ : distancia del conductor 1(2) del lazo pasivo  $i$  al conductor 2(1) del lazo pasivo  $l$ .
- $d^{\otimes}(ik, lh)$ : distancia del conductor  $k$  del lazo pasivo  $i$  al conductor imagen  $h$  del lazo pasivo  $l$ .

Sustituyendo  $\mathbf{V}_i'$  en (6.7) por su expresión en (6.1), las intensidades de los lazos pasivos resultan, en forma matricial

$$\mathbf{I} = -(\mathbf{Z}')^{-1} \mathbf{Z} p' \mathbf{I} p \quad (6.11)$$

siendo

$$Z_{ii}' = R_i' + j(X_i' + X_{ii}^{\otimes'}) \quad (6.12)$$

$$Z_{ik}' = j(X_{ik}' - X_{ik}^{\otimes'}) \quad i \neq k \quad (6.13)$$

$$Z_{p'ik}' = jX_{p'ik}' \quad (6.14)$$

Para frecuencias de 50 Hz resulta  $|\alpha| > 1000$  m, por lo que puede despreciarse el efecto del retorno por tierra, como se indicó en el apartado 3.3. El orden de magnitud del error puede verse en un ejemplo. Para una línea trifásica horizontal, con 8,5 m de separación de fases y 10 m de altura sobre el suelo, y un lazo de 20 m de anchura, situado a 9 m de altura, resulta un error en la intensidad inducida, al no considerar el efecto de la tierra, del 0,014%. En lo sucesivo no se tendrá en cuenta la presencia de la tierra. En ese caso (6.8), (6.9) y (6.10) se simplifican de la manera siguiente

$$Xp'_{ik} = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp(i2, k)}{dp(i1, k)} \quad (6.15)$$

$$X'_{il} - X_{il}^{\otimes'} = X'_{il} = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(i1, l2)d(i2, l1)}{d(i1, l1)d(i2, l2)} \quad (6.16)$$

$$X'_{ii} = 0 \quad (6.17)$$

Dado que el efecto de la corriente por la tierra es despreciable, es inmediato deducir que la altura sobre el terreno de los lazos y fases no afecta a la corriente inducida, si se mantienen las posiciones relativas entre los conductores de fase y lazos.

Un método alternativo al explicado anteriormente consiste en emplear (6.6), pero determinando el flujo  $\phi_i$  a partir del campo magnético que atraviesa la superficie del lazo [48]:

$$\phi_i = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6.18)$$

donde  $\vec{B}$  es la suma de todos los campos creados por los conductores de la línea y de los otros lazos. Dado que el campo magnético no depende de la coordenada  $z$  la superficie de integración se reduce a la línea de unión entre las coordenadas extremas del lazo, y el flujo por unidad de longitud será

$$\phi'_i = \int_{(x_{i1}, y_{i1})}^{(x_{i2}, y_{i2})} \vec{B}(x, y) \cdot d\vec{l} \quad (6.19)$$

Este método requiere más cálculo que el anterior, obteniéndose un resultado idéntico.

Cuando la longitud es del mismo orden que la anchura y/o la distancia entre lazos (se supone que la línea sigue siendo de longitud infinita) el problema deja de ser bidimensional, y (6.1), (6.2) y (6.6), pasan a ser

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{V}_i}{R_i + jX_i} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{V}_i = -j\omega\phi_i = -j \left( \sum_{k=1}^m Xp_{ik} \mathbf{I}_{p_k} + \sum_{l=1, l \neq i}^n X_{il} \mathbf{I}_l \right) \quad (6.21)$$

Dado que la longitud de la línea sigue siendo infinita las inductancias  $Xp_{ik}$  se obtendrán a partir de (6.15):

$$Xp_{ik} = l_i Xp'_{ik} = \omega l_i \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp(i2, k)}{dp(i1, k)} \quad (6.22)$$

siendo  $l_i$  la longitud de los tramos del lazo  $i$  paralelos a la línea.

Las expresiones (6.3) y (6.16) dejan de ser válidas para obtener las inductancias propia  $X_i$  y mutuas  $X_{il}$ . La manera de obtenerlas en este caso se muestra en el apéndice C.

### 6.2.2 Reducción del campo creado por un dipolo

Se determina en los próximos apartados la intensidad inducida en los lazos pasivos para diversas configuraciones de conductores de línea. Asimismo se analizará la atenuación conseguida. Como se vio en los capítulos anteriores, los puntos de interés, a efectos de cálculo y reducción de campo, estarán situados a una altura de 1 m sobre el suelo.

Es conveniente iniciar el análisis de las posibilidades de mitigación con lazo pasivo, con la configuración más simple de conductores, el dipolo. Como se indicó al comienzo del apartado 6.2, lo primero es caracterizar el campo creado por el dipolo. En el capítulo 3 se obtuvieron las representaciones vectoriales de los campos creados por un dipolo horizontal (figura 3.30) y vertical (figura 3.35). En un dipolo, la polarización del campo es lineal, y los campos  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$  debidos al dipolo están representados en cada punto por una misma dirección. El lazo mitigador deberá estar situado en una posición tal que se obtenga la máxima reducción de campo en la zona donde interesa reducirlo (Zona de interés, ZI), que puede ser toda la trayectoria transversal, o un intervalo más reducido. Para ello se deberá conseguir que

- La dirección del vector campo mitigador  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_l]$  sea paralela a la de  $\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}]$ , y con sentido opuesto, en la ZI. Igualmente debe suceder con  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_l]$  e  $\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}]$ .
- La intensidad inducida en el lazo pasivo sea significativa (cuanto mayor intensidad inducida más importante será el campo mitigador).

El primer objetivo se consigue orientando el lazo de manera conveniente. Dado que en este caso la línea y el lazo tienen igual geometría (ambos son dipolos), es obvio que se consigue una distribución vectorial de campo similar, en la trayectoria transversal, si se dispone el lazo paralelo a la línea (figura 6.2). Por otro lado, la intensidad inducida en el lazo viene dada por (6.1), estando  $\mathbf{V}'$  dado por (6.7)

$$\mathbf{V}' = -j\omega\phi' = -j(Xp'_1 \mathbf{I}p_1 + Xp'_2 \mathbf{I}p_2) = -j(Xp'_1 - Xp'_2) \mathbf{I}p_1 \quad (6.23)$$

Sustituyendo  $Xp'_1$ ,  $Xp'_2$  y la inductancia propia del lazo  $X'$  por sus expresiones (6.8) y (C.15), la intensidad por el lazo queda

$$\mathbf{I} = \frac{-j(X'p_1 - X'p_2)}{R' + jX'} \mathbf{I}p_1 = \frac{-j \ln \frac{dp(2,1)dp(1,2)}{dp(1,1)dp(2,2)}}{\frac{2\pi}{\omega\mu_0} R' + j2 \ln \frac{s}{rgm}} \mathbf{I}p_1 \quad (6.24)$$

Obsérvese que el módulo del coeficiente de  $\mathbf{I}p_1$  se puede incrementar reduciendo la distancia de los conductores del lazo a los de la línea con el mismo sentido de la intensidad, y aumentando la distancia a los de la línea con sentido contrario de intensidad. Dado que es necesario mantener una distancia mínima entre ambos circuitos (para evitar contactos que pudieran provocar cortocircuitos) existe un límite al acercamiento entre conductores. Suponiendo que existe dicho límite, es fácil ver que la inductancia mutua máxima se consigue situando el lazo en el mismo plano que la línea (figura 6.3). En este caso, (6.24) se simplifica, quedando

$$\mathbf{I} = \frac{-j \ln \frac{s+d}{s-d}}{\frac{\pi}{\omega\mu_0} R' + j \ln \frac{s}{rgm}} \mathbf{I}p_1 \quad (6.25)$$

siendo  $s = d + 2dp(1, 1)$  la anchura del lazo y  $d$  la distancia entre fases.

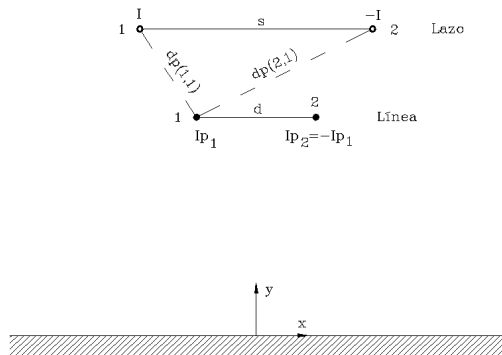


Figura 6.2: Línea monofásica y lazo de mitigación.

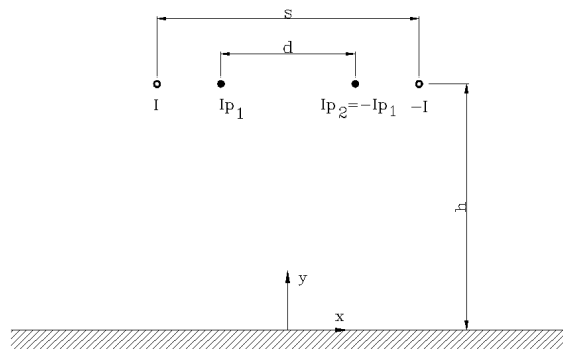


Figura 6.3: Configuración para la que se obtiene la máxima intensidad inducida.

Como ejemplo la figura 6.4 muestra la intensidad inducida para distintos valores de  $s$ , con  $d = 8,5$  m,  $R' = 11,92 \cdot 10^{-5} \Omega/\text{m}$ ,  $a = 15,21$  mm, y  $rgm = 0,8085 a$ . Los parámetros corresponden al conductor de aluminio-acero (al-ac) cardinal o LA-545 (empleado habitualmente en líneas de 400 kV), según Normas UNE [78]. La figura 6.5 muestra la evolución de la intensidad cuando se varía la anchura  $d$  de la línea, suponiendo  $s = 18,5$  m. La figura 6.6 representa la variación de la intensidad con la diferencia de alturas lazo-línea, para  $s = 18,5$  m,  $d = 8,5$  m, y conductor cardinal. Por último la tabla 6.1

muestra la intensidad inducida para las mismas dimensiones, y diversos conductores de al-ac, cuyos valores de resistencia y radio se han obtenido de la citada norma.

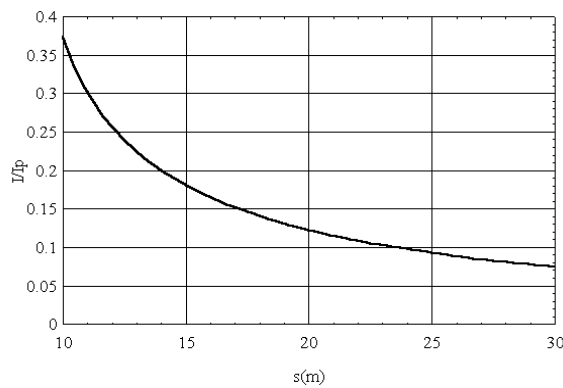


Figura 6.4: Relación  $I/I_p$  para diversos valores de  $s$ .

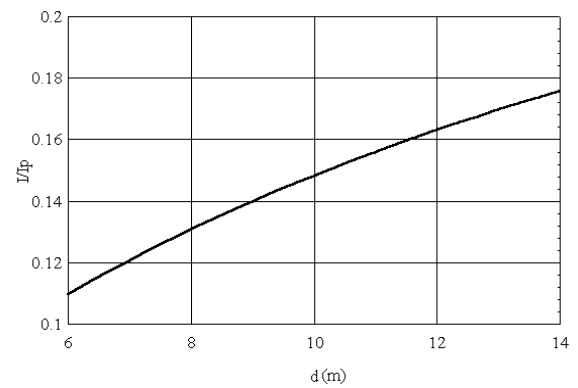


Figura 6.5: Relación  $I/I_p$  para diversos valores de  $d$ .

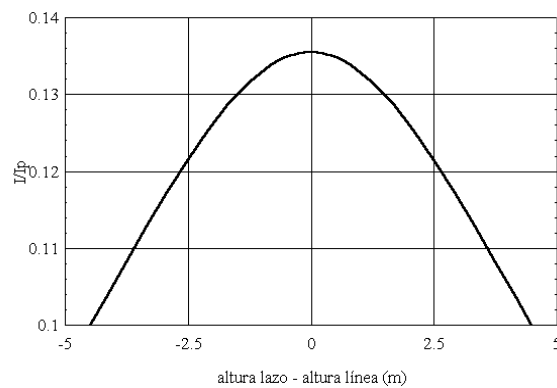


Figura 6.6: Variación de la intensidad inducida con la diferencia de alturas línea-lazo

De los resultados obtenidos con este ejemplo se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- Se observa un ligero incremento de la intensidad por el lazo conforme crece la distancia entre fases. Dicho incremento es aproximadamente de un 8% por metro adicional de separación.
- Al aumentar la anchura  $s$  del lazo se reduce la intensidad inducida. Dicha reducción es más sensible para valores de  $s$  pequeños. Para  $s = 18,5$  m se reduce un 8% por cada metro de separación.

Tabla 6.1: Relación  $I/I_p$  para diversos conductores

Conductor	$R'(\Omega/\text{km})$	Diámetro (mm)	$rgm/a$	$I/I_p$
LA-110	0,6132	14,00	0,8260	0,105
LA-145	0,4844	15,75	0,8260	0,112
LA-180	0,3924	17,50	0,8260	0,118
LA-280	0,2388	21,80	0,8116	0,126
LA-380	0,1714	26,38	0,8085	0,131
LA-455	0,1436	27,72	0,8085	0,132
LA-545	0,1192	30,42	0,8085	0,135
LA-635	0,1022	32,85	0,8085	0,136

- El efecto de las características del conductor sobre la intensidad inducida es pequeño. Para un conductor cuya resistencia es 6 veces menor que la de otro, el incremento de intensidad es de un 12%.
- Se observa una reducción cuadrática de la intensidad con la altura relativa lazo-línea.

Se analiza a continuación la reducción de CM conseguida con la inserción del lazo pasivo. Para ello se empleará la formulación aproximada del campo generado por un dipolo (3.140), aplicada a la configuración de la figura 6.3, con  $d = 8,5$  m,  $s = 18,5$  m y conductor LA-545. Dado que en este caso  $R'/X' = 0,13$  se puede despreciar  $R'$ , con lo que (6.25) resulta

$$\mathbf{I} = -\frac{\ln \frac{s+d}{s-d}}{\ln \frac{s}{rgm}} \mathbf{I}_p = -K \mathbf{I}_p \quad (6.26)$$

El momento magnético de cada dipolo viene dado por (3.121)

$$\vec{\mathbf{M}}_p = -\mathbf{I} p d \vec{u}_x \quad (6.27)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_l = -\mathbf{I} s \vec{u}_x \quad (6.28)$$

siendo  $\vec{\mathbf{M}}_p$  el debido a la línea y  $\vec{\mathbf{M}}_l$  al lazo. Teniendo en cuenta que el ángulo  $\theta$  es el mismo para cada dipolo se tiene, sustituyendo en (3.140) las expresiones (6.27) y (6.28) y sumando

$$\vec{\mathbf{B}}_a = \vec{\mathbf{B}}_{pa} + \vec{\mathbf{B}}_{la} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} (d - Ks) (-\text{sen } 2\theta \vec{u}_x + \text{cos } 2\theta \vec{u}_y) \mathbf{I}_p \quad (6.29)$$

La eficiencia de la pantalla (definida en el apartado 4.2) se puede poner como

$$FA_a = \frac{B_{ar}}{B_{par}} = 1 - K \frac{s}{d} = 1 - \frac{s \ln \frac{s+d}{s-d}}{d \ln \frac{s}{rgm}} \quad (6.30)$$



siendo  $B_{ar}$  el campo total resultante, y  $B_{par}$  el campo resultante debido a la línea. El subíndice  $a$  indica que se han obtenido con la formulación aproximada.

Dada una distancia entre fases  $d$ , modificando  $s$  se varía la intensidad inducida (figura 6.4) y el campo magnético. La figura 6.7 muestra la variación de  $FA_a$  con  $s$ , para  $d = 8,5$  m. Si se compara con la 6.4, se observa que al reducir  $s$  de 30 a 10 m la intensidad por el lazo ha aumentado 5,3 veces, pero el campo se ha reducido tan sólo 1,8 veces. Esto es debido a que el campo resultante debido al lazo depende del producto  $sI$ , con lo que el significativo aumento de  $I$  con  $s$  se ve parcialmente amortiguado en el caso del campo. Si se mantiene constante  $s-d$  y se aumenta  $d$ , la intensidad inducida se incrementa ligeramente (figura 6.5). Dado que en (6.30) aparece  $d$  dividiendo a la intensidad inducida, contrarresta el efecto anterior, y el resultado es una variación insignificante de  $FA_a$  con  $d$ .

Obsérvese de (6.30) que  $FA_a$  no depende de la posición  $x$  ni de la altura de la línea. Si se emplea la formulación RI (3.130) se observa una ligera dependencia de la eficiencia. La figura 6.8 muestra la eficiencia  $FA(x)$  (obtenida con la formulación RI), junto con  $FA_a$ , para la misma configuración,  $s = 18,5$  m, y diferentes alturas. El error cometido es menor del 10% a distancias superiores a 15 m. Para otra orientación de los dipolos (i.e. vertical) el error es menor, como ya se vio en el apartado 3.7.1.

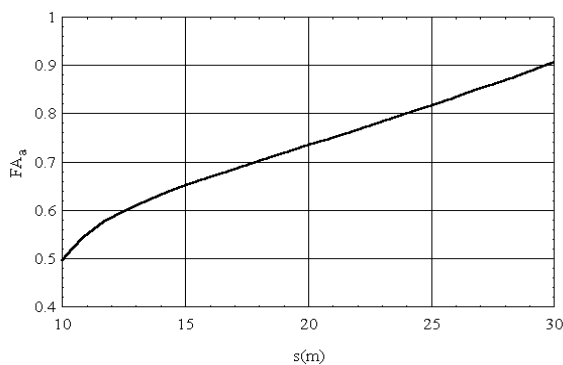


Figura 6.7: Variación de la eficiencia del lazo ( $FA_a$ ) con  $s$ .

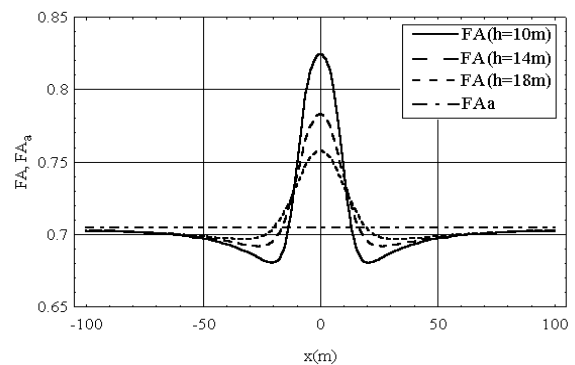


Figura 6.8: Eficiencias  $FA(x)$  (para distintas alturas  $h$ ) y  $FA_a$ .

Dado que el fenómeno físico es similar, muchas de las conclusiones obtenidas con la línea monofásica pueden ser extrapolables a líneas trifásicas. Esto se verá a continuación, donde se analiza la mitigación con lazo pasivo para las configuraciones trifásicas ya estudiadas en el capítulo 3: horizontal, vertical, delta, tresbolillo, y doble circuito. Previamente se obtendrán las ecuaciones para la determinación de las intensidades inducidas

en dos lazos, consecuencia del campo generado por una línea trifásica de simple circuito. Se reduce el estudio a dos lazos, aunque se puede extrapolar fácilmente a más lazos.

### 6.2.3 Línea trifásica. Corriente inducida en dos lazos

Considérese una línea trifásica simple equilibrada, con distancia entre fases  $d$ , y definida por los ángulos  $\alpha, \beta$  (figura 6.9). Considérense además dos lazos con la misma anchura  $s$ , mismo tipo de conductor, y definidos por la posición del conductor de ida ( $d_{i1}, \gamma_i$ ), y el ángulo de orientación  $\xi_i$ . La FEM inducida en cada lazo será, según (6.6)

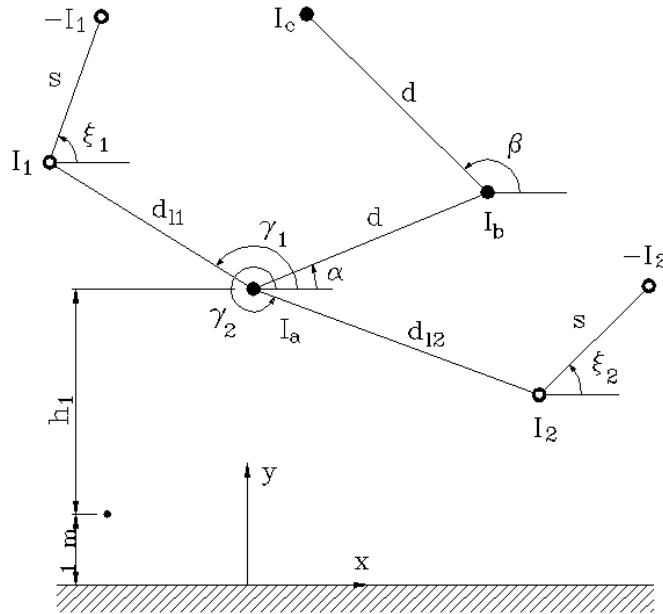


Figura 6.9: Línea trifásica simple y lazos de mitigación

$$\mathbf{V}'_i = -j((X'_{ia} - X'_{ib})\mathbf{I}_a + (X'_{ic} - X'_{ib})\mathbf{I}_c + X'_{ik}\mathbf{I}_k) \quad i, k = 1, 2 \quad i \neq k \quad (6.31)$$

donde

$$X'_{ia} = \frac{\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp(i2, a)}{d_{li}} \quad i = 1, 2 \quad (6.32)$$

$$X'_{ib} = \frac{\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp(i2, b)}{dp(i1, b)} \quad i = 1, 2 \quad (6.33)$$

$$X'_{ic} = \frac{\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{dp(i2, c)}{dp(i1, c)} \quad i = 1, 2 \quad (6.34)$$

$$X'_{12} = \frac{\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(11, 22)d(12, 21)}{d(11, 21)d(12, 22)} \quad (6.35)$$

Las distancias expresadas en función de las variables de la figura 6.9 quedan

$$dp(i1, b)^2 = d_{li}^2 + d^2 - 2d_{li}d \cos(\alpha - \gamma_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.36)$$

$$dp(i1, c)^2 = 2d^2(1 + \cos(\alpha - \beta)) + d_{li}^2 - 2dd_{li}(\cos(\alpha - \gamma_i) + \cos(\beta - \gamma_i)) \quad i = 1, 2 \quad (6.37)$$

$$dp(i2, a)^2 = d_{li}^2 + s_i^2 + 2d_{li}s_i \cos(\gamma_i - \xi_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.38)$$

$$dp(i2, b)^2 = d^2 + d_{li}^2 + s_i^2 - 2dd_{li} \cos(\alpha - \gamma_i) - 2ds_i \cos(\alpha - \xi_i) + 2d_{li}s_i \cos(\gamma_i - \xi_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.39)$$

$$dp(i2, c)^2 = 2d^2(1 + \cos(\alpha - \beta)) + d_{li}^2 + s_i^2 - 2dd_{li}(\cos(\alpha - \gamma_i) + \cos(\beta - \gamma_i)) - 2ds_i(\cos(\alpha - \xi_i) + \cos(\beta - \xi_i)) + 2d_{li}s_i \cos(\gamma_i - \xi_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.40)$$

$$d(11, 21)^2 = d_{l1}^2 + d_{l2}^2 - 2d_{l1}d_{l2} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (6.41)$$

$$d(11, 22)^2 = d_{l1}^2 + d_{l2}^2 + s_2^2 - 2d_{l1}d_{l2} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - 2d_{l1}s_2 \cos(\gamma_1 - \xi_2) + 2d_{l2}s_2 \cos(\gamma_2 - \xi_2) \quad (6.42)$$

$$d(12, 21)^2 = d_{l1}^2 + d_{l2}^2 + s_1^2 - 2d_{l1}d_{l2} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - 2d_{l2}s_1 \cos(\gamma_2 - \xi_1) + 2d_{l1}s_1 \cos(\gamma_1 - \xi_1) \quad (6.43)$$

$$d(12, 22)^2 = d_{l1}^2 + d_{l2}^2 + s_1^2 + s_2^2 - 2d_{l1}d_{l2} \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + 2d_{l1}s_1 \cos(\gamma_1 - \xi_1) - 2d_{l2}s_1 \cos(\gamma_2 - \xi_1) - 2d_{l1}s_2 \cos(\gamma_1 - \xi_2) + 2d_{l2}s_2 \cos(\gamma_2 - \xi_2) - 2s_1s_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) \quad (6.44)$$

La intensidad inducida en cada lazo vendrá dada por (6.1), siendo  $R'_1 = R'_2$ , y  $X'_1 = X'_2$ .

### 6.2.4 Línea con configuración horizontal de conductores

Usando las variables definidas en el apartado anterior se tiene, para la línea con disposición horizontal de conductores,  $\alpha = \beta = 0$ . Si se considera un sólo lazo y una distancia mínima fase-lazo  $d_{lm}$ , la posición del lazo que maximiza el módulo de la intensidad  $I = |\mathbf{I}|$  viene definida por  $s = 2d + 2d_{lm}$ ,  $\gamma = \pi$ , y  $\xi = 0$  (figura 6.10). Nótese que, para simplificar, se ha suprimido el subíndice <sub>1</sub> en las variables de la figura 6.9.

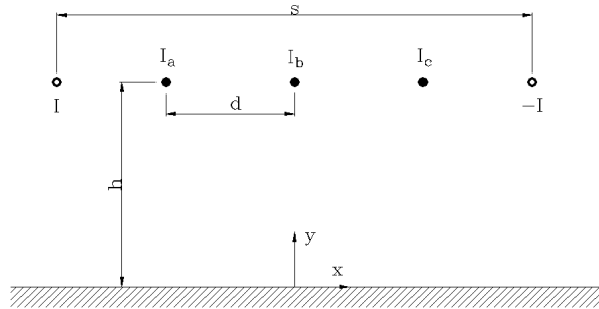


Figura 6.10: Disposición del lazo que permite la máxima corriente inducida en una línea con disposición horizontal de conductores.

Para obtener la configuración óptima se ha resuelto el problema de optimización siguiente:

Maximizar

$$f(\gamma, \xi, d_l, s) = \left| \frac{V'}{R' + jX'} \right| \tag{6.45}$$

sujeto a las restricciones

$$dp(ij, a) \geq d_{lm} \quad i, j = 1, 2 \tag{6.46}$$

$$dp(ij, b) \geq d_{lm} \quad i, j = 1, 2 \tag{6.47}$$

$$dp(ij, c) \geq d_{lm} \quad i, j = 1, 2 \tag{6.48}$$

La configuración óptima obtenida presenta una disposición similar a la del dipolo (figura 6.3), coplanar con los conductores de fase. Para dicha configuración, sustituyendo en (6.31) y (6.1), la intensidad inducida queda

$$\mathbf{I} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\omega\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{s+2d}{s-2d}\right)(1 + j\sqrt{3})}{R' + j\frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln\frac{s}{rgm}} I_a \tag{6.49}$$

En lo que sigue se verán los resultados de mitigación para unas dimensiones de apoyo típicas de líneas de 400 kV. Se tomarán en concreto dichos valores de una torre de alineación correspondiente a la línea Puentes-Montearenas [75] (figura 6.11). Si  $d_{lm} = 5$  m y el conductor es el LA-545 la corriente inducida en el lazo óptimo viene dada por  $I_m = 0,175 I_a$ .

Las figuras 6.12 y 6.13 muestran la variación de  $I/I_m$  con el ancho del lazo  $s$  ( $d = 9,7$  m) y la distancia entre fases  $d$  ( $s = 29,4$  m). El conductor es el LA-545, dato poco relevante, ya que, como se vio en el apartado 6.2.2, el tipo de conductor influye muy levemente en la corriente inducida. Obsérvese de la figura 6.12 que cuanto más corta sea la distancia fase-lazo mayor será la corriente inducida. Existe sin embargo una distancia mínima que hay que mantener, para evitar el contacto entre ambos conductores. Dado que dicha distancia depende de la longitud de vano, tipo de apoyo, flecha, tipo de conductor, condiciones ambientales, etc., no es posible conocerlo con exactitud. Se considerará aquí un valor orientativo de 5 m. De la figura 6.13 se observa que la corriente aumenta con  $d$ , con lo que la mitigación con lazo es menos efectiva en líneas más compactas.

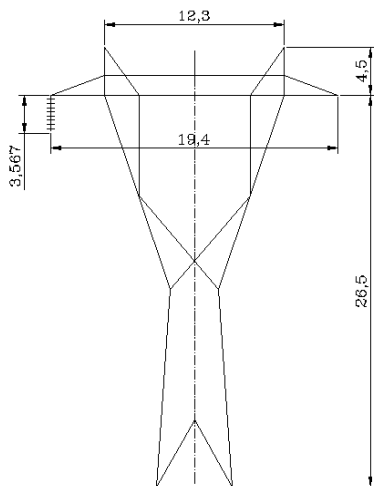


Figura 6.11: Línea Puentes-Montearenas. Dimensiones correspondientes a una torre de alineación (en metros).

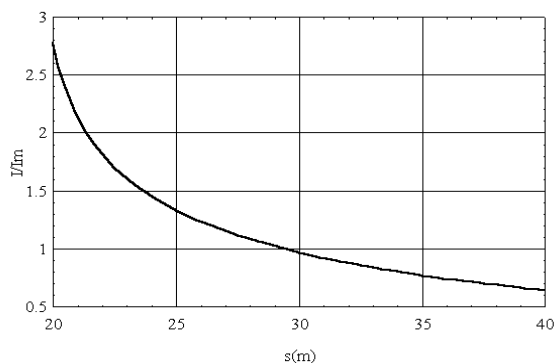


Figura 6.12: Variación de  $I/I_m$  con  $s$  (a igual distancia entre fases).

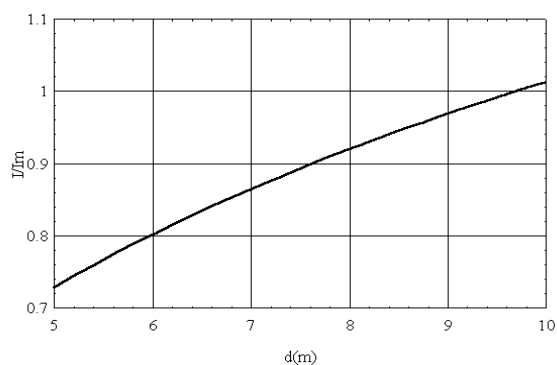


Figura 6.13: Variación de  $I/I_m$  con la distancia entre fases (a igual distancia lazo-fase).

La figura 6.14 muestra la variación de  $I/I_m$  con la diferencia altura línea-altura lazo, para  $s = 29,4$  m. La evolución de  $I/I_m$  en las tres figuras es similar a lo visto con la línea monofásica (figuras 6.4 y 6.6). Es evidente que el parámetro que más afecta a la intensidad inducida es la anchura del lazo.

Se analiza a continuación el efecto mitigador de la pantalla en su posición óptima. Para ello se considerará en primer lugar un punto situado, al menos, a 100 m de la línea. En ese caso puede emplearse la expresión aproximada (3.218) (formulación DS), que se reproduce nuevamente

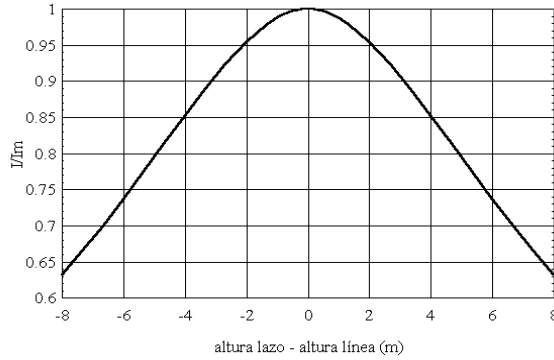


Figura 6.14: Variación de  $I/I_m$  con la diferencia altura línea-altura lazo

$$\vec{B}_{p2} = \frac{\mu_0 I_a d}{4\pi r^2} (3 - j\sqrt{3}) (\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.50)$$

donde el subíndice  $_2$  indica que se ha empleado el término de segundo orden del desarrollo en serie de potencias.

Se vio en el apartado 3.7.2 que el error de módulo de las componentes real e imaginaria del campo resultante, obtenido con la formulación DS, era inferior al 10% para distancias superiores a 100 m (figuras 3.46 y 3.47). En cuanto al error de ángulo, a dicha distancia era inferior a  $1^\circ$  (figuras 3.48 y 3.49). Se emplearon para obtener estos errores unas dimensiones típicas en líneas de transporte ( $d = 8, 5$  m,  $h = 10$  m, figura 3.41).

Se calculan a continuación las componentes del campo magnético debido al lazo pasivo. Teniendo en cuenta que  $R' \ll X'$ , (6.49) queda, haciendo  $R' = 0$ ,

$$\mathbf{I} = \frac{\sqrt{3}}{2} I_a \frac{\ln \frac{s+2d}{s-2d}}{\ln \frac{s}{rgm}} e^{j\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} K e^{j\frac{5\pi}{6}} I_a \quad (6.51)$$

El campo debido al lazo será, según (3.140)

$$\vec{B}_{la} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \mathbf{M} (\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 K I_a s}{8\pi r^2} (-\sqrt{3} + j) (\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.52)$$

y el campo total, sumando (6.50) y (6.52)

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{p2} + \vec{B}_{la} = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi r^2} (\sqrt{3}d - \frac{\sqrt{3}}{2} K s) (\sqrt{3} - j) (\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.53)$$

La eficiencia de la pantalla, a distancias del orden de 100 m, será entonces

$$FA_2 = \frac{B_{2r}}{B_{p2r}} = 1 - \frac{Ks}{2d} = 1 - \frac{s}{2d} \frac{\ln \frac{s+2d}{s-2d}}{\ln \frac{s}{rgm}} \quad (6.54)$$

Obsérvese que la expresión de  $FA_2$  es idéntica a la de un dipolo (6.30) de anchura  $2d$ , con lo que las conclusiones obtenidas para el dipolo pueden aplicarse a la línea horizontal, cuando la distancia es del orden de 100 m o superiores. Así por ejemplo la evolución de  $FA_2$  con  $s$  y  $d$  sigue una tendencia similar. Las figuras 6.15 y 6.16 muestran la variación de  $FA_2$  con  $s$  ( $d = 9,7$  m) y  $d$  ( $s = 10 + 2d$  m). Se observa una significativa reducción de la eficiencia con la anchura del lazo, tal como se vio en el caso del dipolo (figura 6.7). La variación con  $d$  puede considerarse despreciable. La figura 6.17 muestra la variación de  $FA_2$  con la diferencia altura línea-altura lazo. Obsérvese que la disposición más eficiente no coincide exactamente con la que se obtiene una mayor intensidad inducida, aunque la diferencia es muy pequeña, por lo que, a efectos de comparación con otras configuraciones, se empleará la configuración coplanar como la óptima. Se puede ver también de la figura que existe un rango de alturas de lazo para el que la eficiencia no varía excesivamente, con lo que éste podría situarse a alturas más reducidas. De (6.54) se observa también que  $FA_2$  no depende de  $x$  ni de la altura de la línea. Esto se cumple sólo cuando el lazo está centrado respecto a la línea.

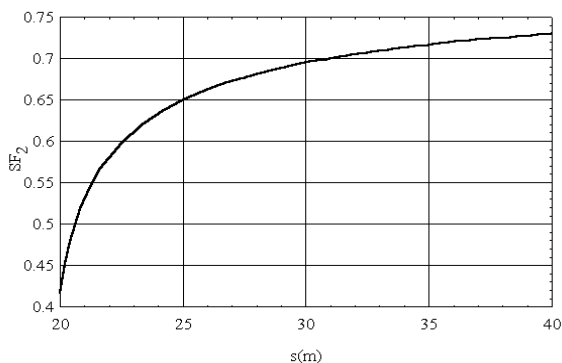


Figura 6.15: Variación de  $FA_2$  con  $s$  para  $d = 9,7$  m.

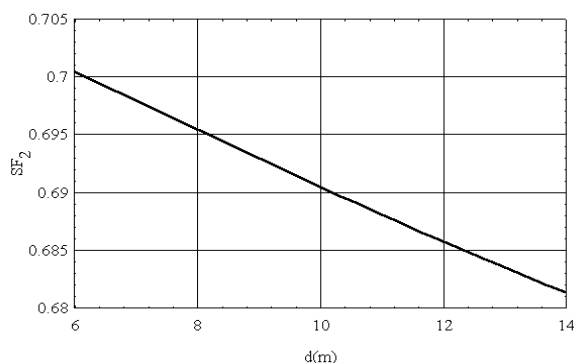


Figura 6.16: Variación de  $FA_2$  con  $d$  para  $s = 10 + 2d$ .

La figura 6.18 muestra el diagrama dipolar del campo magnético en el punto  $x = 100$  m, para  $d = 9,7$  m y  $s = 29,4$  m, en la disposición de la figura 6.10. Obsérvese que las componentes debidas al lazo están en oposición con respecto a las debidas a la línea, lo que hace aprovechar al máximo la capacidad mitigante del lazo.

A distancias más cercanas a la línea puede emplearse (3.186) (formulación DA) para el campo creado por la línea. Si se emplea la formulación DA para el campo creado por el



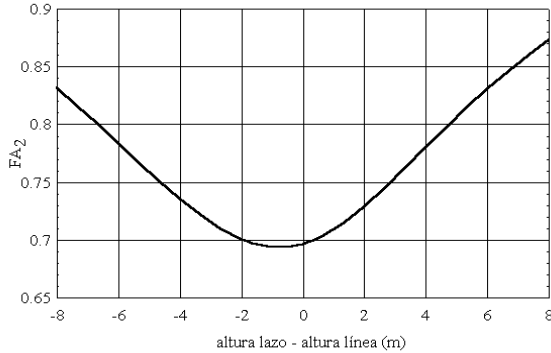


Figura 6.17: Variación de  $FA_2$  con la diferencia de alturas para  $d = 9,7$  m,  $s = 29,4$  m.

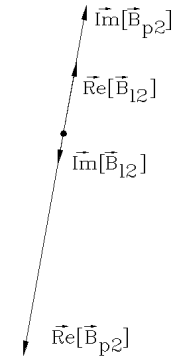


Figura 6.18: Diagrama dipolar de la línea horizontal y lazo pasivo.

lazo se obtienen errores inadmisibles, ya que la anchura del lazo es varias veces la altura (véase apartado 3.7.1). Las figuras 6.19 y 6.20 muestran, para la misma configuración, y dos alturas distintas,  $h = 10$  m y  $h = 14$  m, definidas en la figura 6.10, la eficiencia  $FA_a(x)$ , obtenida con dicha formulación. Se incluye también la eficiencia  $FA(x)$  obtenida con la formulación RI, así como la obtenida con la DS. Nótese la pequeña diferencia entre  $FA_a$  y  $FA$ . Obsérvese también que  $FA(x)$  varía desde la máxima eficiencia en  $x \approx -25$  m (coincide aproximadamente con el borde de la servidumbre de paso) hasta la mínima en  $x \approx 0$ . La variación de eficiencia entre ambos extremos es de aproximadamente 25%. Asimismo, las curvas de  $FA_a(x)$  y  $FA(x)$  presentan una ligera asimetría respecto al eje  $x = 0$ , a pesar de la simetría geométrica. Dicha asimetría es debida a que, aunque el campo resultante debido a la línea es simétrico, no lo son las componentes vectoriales. Si se modifica la secuencia de fases mostrada en la figura 6.10 se obtienen unos nuevos valores de eficiencia en los que se cumple que  $FA'_a(x) = FA_a(-x)$  y  $FA'(x) = FA(-x)$ .

Es interesante analizar la eficiencia en otras disposiciones del lazo, distintas a la coplanar. Puede ocurrir que, en el caso de líneas con dos cables de tierra, se deseen aprovechar los propios cables como elementos del lazo pasivo, o se podría pensar en situar el lazo ligeramente enterrado, evitando el empleo de apoyos. La figura 6.21 muestra estas tres posibles localizaciones del lazo, alternativas a la óptima. Teniendo en cuenta las dimensiones del apoyo de la figura 6.11, se tiene que  $s_I = 12,3$  m,  $h_I = 4,5$  m. Para dicha posición del lazo se obtiene  $FA_{I2} = 0,90$ , una pequeña reducción del campo del 10%.

En la disposición II la altura del lazo es menor que la de la línea. Para  $h_{II} = 5$  m y

$s_{II} = 30$  m se obtiene  $FA_{II2} = 0,76$ .

Por último en la posición III, con  $s_{III} = 40$  m, y una profundidad de 1 m, se obtiene  $FA_{III2} = 0,82$ .

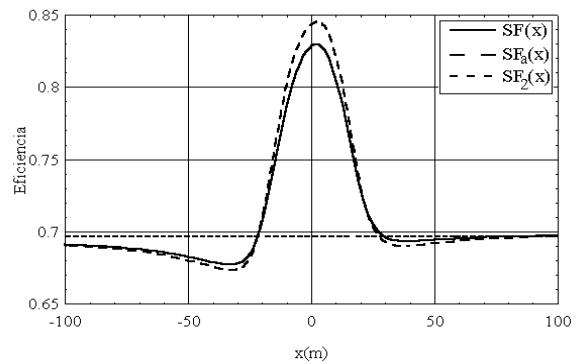
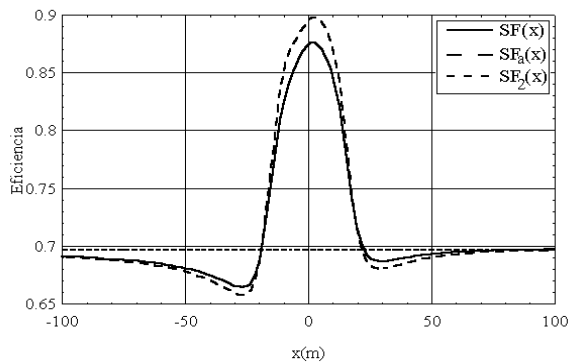


Figura 6.19: Línea horizontal. Eficiencias obtenidas al insertar un lazo coplanar, con distintas formulaciones ( $h = 10$  m).

Figura 6.20: Línea horizontal. Eficiencias obtenidas al insertar un lazo coplanar, con distintas formulaciones ( $h = 14$  m).

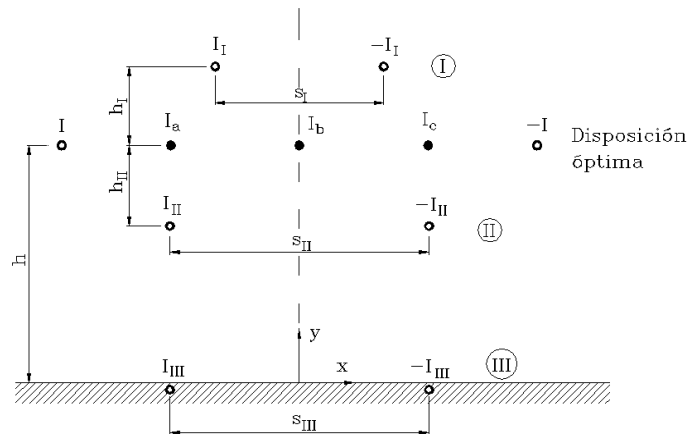


Figura 6.21: Línea horizontal. Diversas disposiciones de lazos

La figura 6.22 muestra las curvas de eficiencia, obtenidas con el modelo RI, para las tres posiciones, junto con la coplanar. La disposición coplanar es la óptima a distancias superiores a aproximadamente 25 m. Sin embargo, la configuración II presenta una mayor eficiencia a distancias menores, llegando a tener una reducción de casi el 55% en  $x = -17$  m. Obsérvese también que con el lazo enterrado se obtiene reducción de campo a partir

de aproximadamente 25 m, pero para distancias menores el campo es mayor que el debido a la línea.

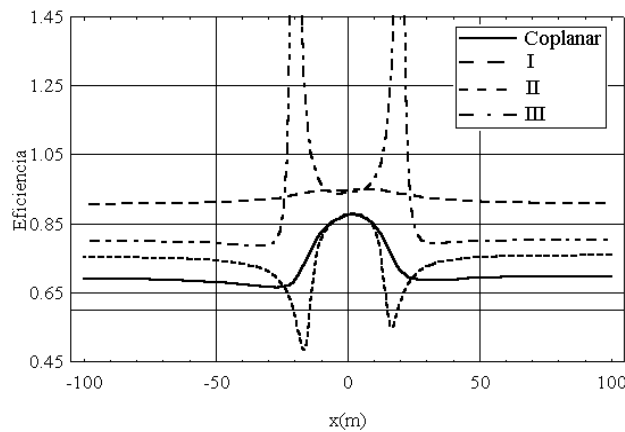


Figura 6.22: Línea horizontal. Eficiencia para diversas disposiciones de lazos

Hasta ahora se han analizado disposiciones de lazo que se sitúan centrados en la línea. Puede ser de cierto interés analizar disposiciones de lazo externas a la línea. En dichos lazos se inducirá una corriente menor, pero debido a su proximidad al objeto a proteger, puede conseguirse una atenuación importante. Esta técnica, tal como se indicó en el capítulo 2, busca proteger un espacio concreto y delimitado.

La figura 6.23 muestra un lazo externo a la línea, con el objeto de proteger el espacio delimitado por la vivienda. Por comodidad se introducen unos nuevos parámetros para definir el lazo, las coordenadas del eje longitudinal del lazo ( $x_e, y_e$ ), y  $x_i$ , que es la distancia media de la franja de terreno a proteger (ZI), cuya anchura puede ser de unos 20 m.

Si se supone que la longitud de lazo es al menos 5 veces la anchura, se pueden emplear las ecuaciones (6.1), (6.3) y (6.31) (hipótesis de conductores de longitud infinita). Una de las disposiciones más interesantes es la mostrada en la figura 6.24. Para dicha disposición resulta la curva de eficiencia mostrada en la figura 6.25 (modelo RI). Estas disposiciones asimétricas respecto al eje de la línea tienen la característica de atenuar y amplificar el campo a la vez, como se observa en la figura. Dado que el máximo de eficiencia conseguido (mínimo de la curva) está muy cerca del máximo de amplificación se podría pensar en una zona de apantallado a partir de  $x = 50$  m. Si se supone que el objetivo a apantallar está situado en  $x_i = 60$  m y la ZI tiene 20 metros de longitud en dirección transversal a la línea, el factor medio de apantallado en el intervalo (50,70) es  $FAM(50,70)=0,57$ . En el caso de la configuración coplanar resulta ser  $FAM(50,70)=0,69$ . A pesar de esta mejora

del resultado en el caso concreto que se ha analizado, se ha observado que para otras franjas de terreno la ventaja del lazo externo no es tan evidente.

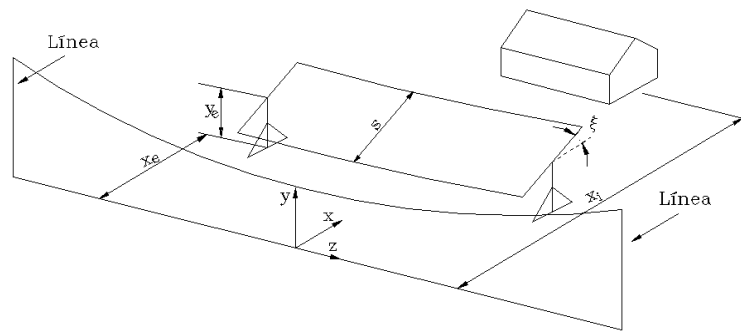


Figura 6.23: Lazo externo y parámetros que lo definen

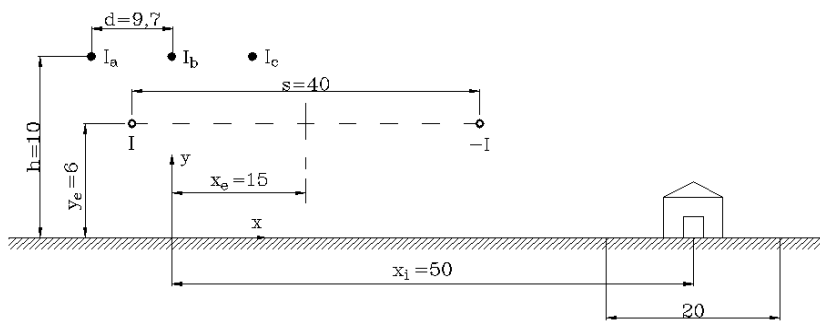


Figura 6.24: Ejemplo de disposición con lazo externo (unidades en metros)

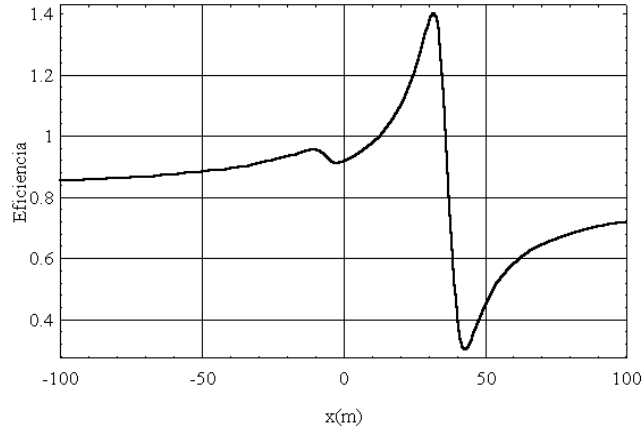


Figura 6.25: Eficiencia para la disposición de la figura 6.24

### 6.2.5 Línea vertical

Dada la similitud entre las disposiciones horizontal y vertical (figura 3.52), es inmediato deducir que, para la configuración vertical, la disposición del lazo que permite una máxima corriente inducida  $I$  es la coplanar con la línea (figura 6.26). La intensidad inducida viene dada por (6.49), y la variación de  $I/I_a$  con  $s$  es la misma que la de la figura 6.12. La variación de  $I/I_a$  con la coordenada del lazo  $x_l$  (suponiendo  $x = 0$  de la línea) es la misma que en la línea horizontal (figura 6.14), donde ahora  $x_l$  juega el mismo papel que la diferencia de alturas lazo-línea.

A una distancia suficiente de la línea (más de 100 m) se procede igual que en el caso horizontal, con la aproximación (3.221). Se observó entonces (apartado 3.7.2) que se obtenía, para una línea con  $d = 8,5$  m y  $h = 10$  m, errores de módulo de las componentes real e imaginaria inferiores al 1% a dicha distancia de la línea (figuras 3.56 y 3.57). Asimismo el error de ángulo de ambos vectores era inferior a  $5^\circ$  (figuras 3.58 y 3.59). La expresión del campo creado por la línea,  $\vec{B}_{p2}$ , según el modelo DS, viene dada por (3.221):

$$\vec{B}_{p2} = \frac{\mu_0 I_a d}{4\pi r^2} (3 - j\sqrt{3}) (\cos 2\theta \vec{u}_x + \text{sen } 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.55)$$

El campo debido al lazo será, según (3.140):

$$\vec{B}_{la} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \mathbf{M} (\cos 2\theta \vec{u}_x + \text{sen } 2\theta \vec{u}_y) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 K I_a s}{8\pi r^2} (-\sqrt{3} + j) (\cos 2\theta \vec{u}_x + \text{sen } 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.56)$$

y el campo total, sumando (6.55) y (6.56):

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{p2} + \vec{B}_{la} = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi r^2} (\sqrt{3}d - \frac{\sqrt{3}}{2} Ks) (\sqrt{3} - j) (\cos 2\theta \vec{u}_x + \text{sen } 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.57)$$

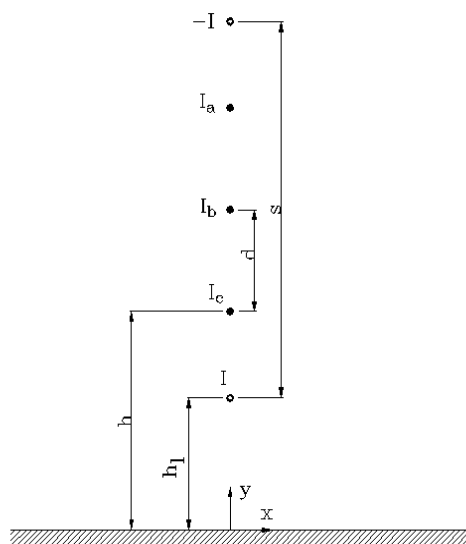


Figura 6.26: Disposición del lazo que permite la máxima corriente inducida en una línea con disposición vertical de conductores.

Se tiene entonces que  $FA_2$  viene dado por (6.54), igual que en el caso horizontal, de modo que las curvas mostradas en las figuras 6.15, 6.16 y 6.17 son también válidas para la línea vertical. El campo lejos de la línea debido a las diferentes componentes de la línea y lazo está alineado como se muestra en la figura 6.18 (polarización lineal), pero girado  $\pi/2$  en el sentido de las agujas del reloj.

Se analiza a continuación la eficiencia cerca de la línea. Para ello se tomará como ejemplo un apoyo de alineación de la línea de doble circuito Valdecaballeros-Don Rodrigo, Guillena-Don Rodrigo, suponiendo que existe un sólo circuito energizado (figura 6.27). Para simplificar se supondrá que los tres conductores de una misma fase están alineados verticalmente. Las figuras 6.28 y 6.29 muestran, para  $d = 8,4$  m,  $s = 26,8$  m,  $h = 10$  m ( $h_l = 5$  m) y  $h = 14$  m ( $h_l = 9$  m) (véase definición de  $h_l$  en figura 6.26), la eficiencia obtenida con los métodos RI, DA y DS. Obsérvese que las curvas de  $FA_a$  y  $FA$  son indistinguibles.

Al igual que en el caso horizontal, se analizan a continuación otras disposiciones de lazo distintas a la que maximiza la corriente inducida. Tal como se vio en la configuración horizontal, se puede pensar en aprovechar el conductor de tierra. En el caso de la configuración vertical es necesario añadir un tramo paralelo al del conductor de tierra, así como los correspondientes tramos que cortocircuiten el lazo. La figura 6.30 muestra dos disposiciones posibles con el conductor de tierra. En la configuración I el conductor de

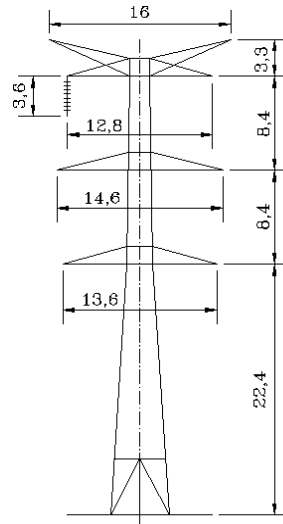


Figura 6.27: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Dimensiones correspondientes a una torre de alineación (en metros)

retorno está sujeto por el apoyo, y se sitúa a la misma distancia a fase que el conductor de tierra. En la configuración II se entierra el conductor de retorno a 1 m de profundidad. Suponiendo una altura mínima al suelo  $h = 10$  m, de la figura 6.27 se obtiene  $d_I = 1,6$  m,  $h_I = 7,0$  m,  $s_I = 2h_I + 2d = 30,8$  m, y  $s_{II} = h_I + 2d + h + 1 = 34,8$  m. La figura 6.31 muestra la eficiencia para ambas disposiciones, junto con la coplanar.

Obsérvese que para distancias superiores a 30 m la eficiencia de las tres disposiciones es muy similar. Para distancias menores la disposición I mantiene la eficiencia por debajo de 0,8, y con la disposición II se amplifica el campo hasta el 190% bajo la línea. A pesar de ello, esta configuración puede ser interesante por ser la zona de amplificación muy reducida y por no emplear ningún conductor adicional soportado por el apoyo. Cabe incluso la posibilidad de emplear los apoyos extremos de un vano como los tramos cortos del lazo.

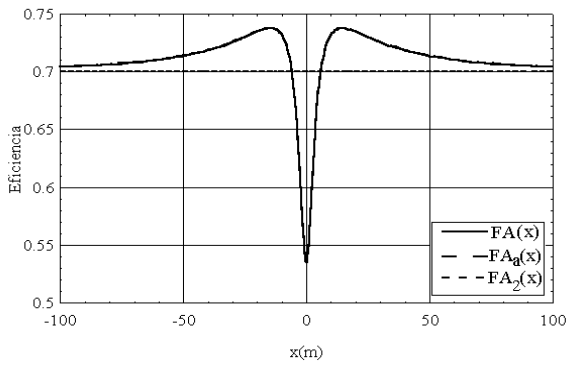


Figura 6.28: Línea vertical. Eficiencias obtenidas al insertar un lazo coplanar, con distintas formulaciones ( $h = 10$  m).

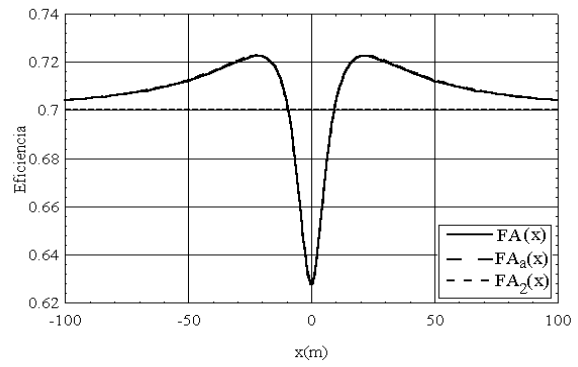


Figura 6.29: Línea vertical. Eficiencias obtenidas al insertar un lazo coplanar, con distintas formulaciones ( $h = 14$  m).

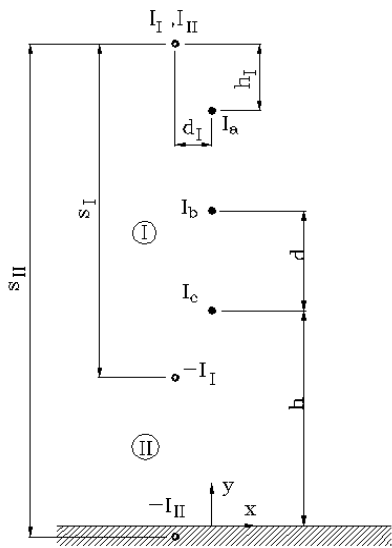


Figura 6.30: Línea vertical. Disposiciones analizadas con el conductor de tierra.

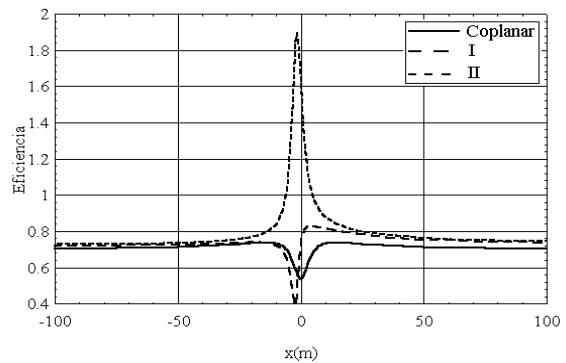


Figura 6.31: Línea vertical. Eficiencia para las disposiciones de la figura 6.30.



Otras disposiciones que pueden tener cierto interés son las mostradas en la figura 6.32. La disposición IV se puede emplear en una línea compuesta por apoyos doble circuito, en la que sólo se utiliza uno de ellos. Con las fases extremas del otro se puede formar un lazo. La disposición III es similar a la coplanar (figura 6.26), pero uno de los conductores del lazo es subterráneo. La figura 6.33 muestra la eficiencia para  $h_{III} = 5$  m,  $s_{III} = h_{III} + 2d + h + 1 = 33$  m,  $d_{IV} = 13,5$  m, y  $s_{IV} = 2d = 17$  m. Obsérvese que con la disposición IV se obtiene una pequeña atenuación. Sin embargo con la disposición III la atenuación conseguida para distancias a la línea superiores a unos 25 m es similar a la conseguida con el lazo coplanar.

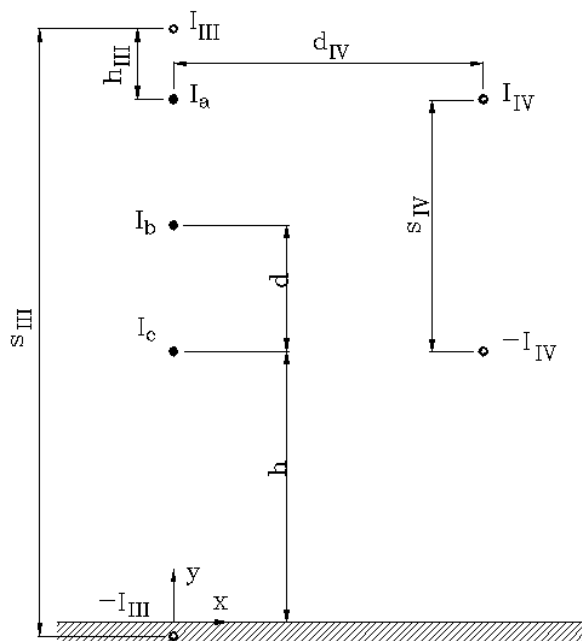


Figura 6.32: Línea vertical. Otras disposiciones del lazo.

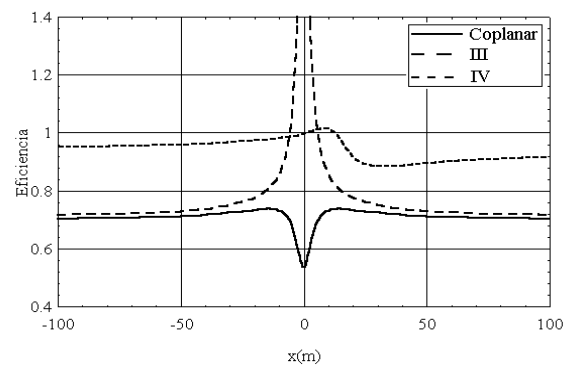


Figura 6.33: Línea vertical. Eficiencia para las disposiciones de la figura 6.32.

Al igual que en el caso horizontal, se ha analizado la posibilidad de emplear lazos externos (figura 6.23). Una disposición de cierto interés es la mostrada en la figura 6.34. La zona de interés tiene una anchura de 20 m y está situada a 30 m de la línea. La eficiencia se muestra en la figura 6.35. La eficiencia promedio resulta ser, en el intervalo (20,40), de  $FAM = 0,53$ , aunque, como se ha visto en este tipo de lazos, existe una amplificación en otros puntos ( en este caso un 15% a distancias superiores a 50 m). Para la configuración coplanar (figura 6.26) resulta  $FAM = 0,73$ .

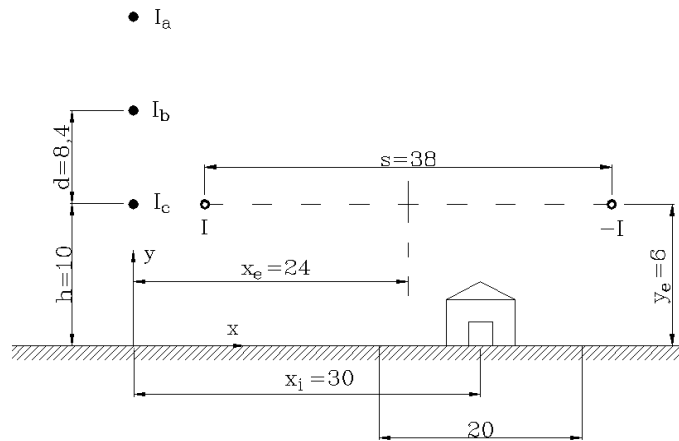


Figura 6.34: Línea vertical. Ejemplo de disposición con lazo externo (unidades en metros)

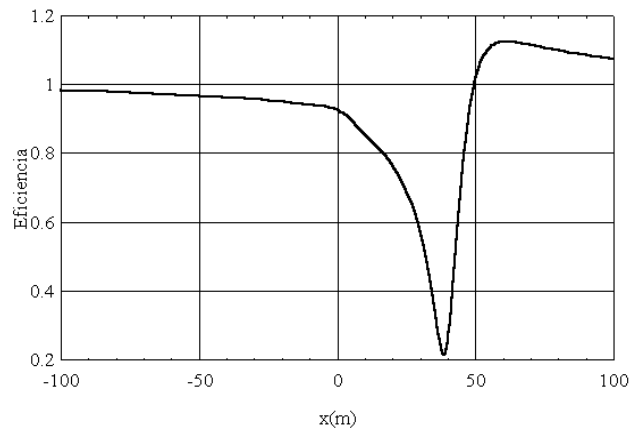


Figura 6.35: Línea vertical. Eficiencia para la disposición de la figura 6.34

### 6.2.6 Línea con disposición triangular (delta) de conductores

Se analizan a continuación las posibilidades de mitigación con lazo pasivo en el caso de la configuración delta (figura 3.62). Se supondrá en primer lugar que las tres fases están situadas en los vértices de un triángulo equilátero. Resolviendo el problema de maximización planteado en (6.45), la disposición de lazo que maximiza la corriente inducida viene dada por  $\gamma = \pi$ ,  $\xi = 0$ ,  $d_l = d_{lm}$ , y  $s = d + 2d_{lm}$ . Debido a la simetría geométrica existen 3 disposiciones óptimas, con intensidades inducidas de igual módulo y diferente desfase

(figura 6.36). La intensidad inducida en cada una de ellas viene dada por

$$I_I = \frac{-\frac{\sqrt{3}\omega\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{s+d}{s-d}\right)(1+j\sqrt{3})}{R' + j\frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln\frac{s}{rgm}} I_a \quad (6.58)$$

$$I_{II} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\omega\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{s+d}{s-d}\right)(-1+j\sqrt{3})}{R' + j\frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln\frac{s}{rgm}} I_a \quad (6.59)$$

$$I_{III} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\omega\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{s+d}{s-d}\right)}{R' + j\frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln\frac{s}{rgm}} I_a \quad (6.60)$$

Obsérvese la similitud de (6.58) con (6.49). Dado que el conductor  $b$  está a igual distancia de los conductores del lazo, el flujo concatenado debido a dicho conductor es nulo, y la intensidad inducida es la misma que la de una línea horizontal cuya distancia entre fases es  $d/2$ . Se vio en la figura 6.13 que la corriente inducida se reducía con distancias entre fases menores. Dado que la línea triangular es equivalente, en términos de corriente inducida, a una horizontal cuya distancia entre fases es la mitad, la corriente inducida debida a una línea triangular es menor que la de una línea horizontal con igual distancia entre fases  $d$ . Para líneas de transporte la reducción es del orden del 30%.

La variación de  $I/I_a$  con  $s$  y la diferencia de altura lazo-fase es similar a la vista en el caso horizontal (figuras 6.12 y 6.14).

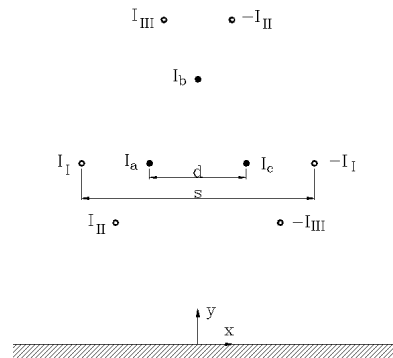


Figura 6.36: Disposiciones de lazo pasivo que permiten la máxima corriente inducida en una línea con disposición triangular de conductores.

Se obtiene a continuación la expresión de la eficiencia para los lazos de la figura 6.36. Una gran diferencia entre el campo debido a una línea de configuración triangular y el debido a una línea con los conductores alineados (horizontal, vertical) es que, conforme la distancia a la línea crece, las componentes real e imaginaria del campo debido a la

configuración coplanar tienden a alinearse, como se vio en el estudio de la configuración horizontal. Sin embargo, en la configuración triangular ambos vectores tienden a un desfase distinto de  $\pi$  (véase apartado 3.7.2). Esto hace que la polarización del campo debido a la línea (elíptica) no coincida con la debida al lazo (lineal), y el lazo pasivo no sea tan efectivo en el caso triangular, por cuanto las componentes debidas al lazo no están en oposición con las correspondientes a la línea.

Las componentes del campo magnético debidas a la línea, considerando el modelo DS, vienen dadas por (3.232) y (3.233):

$$\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}] = |\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}]| \left( \cos \left( 2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \vec{u}_x + \text{sen} \left( 2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \vec{u}_y \right) \quad (6.61)$$

$$\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}] = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}]| \left( \cos \left( 2\theta + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{u}_x + \text{sen} \left( 2\theta + \frac{5\pi}{6} \right) \vec{u}_y \right) \quad (6.62)$$

siendo

$$|\vec{\text{Re}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}]| = |\vec{\text{Im}}[\vec{\mathbf{B}}_{p2}]| = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_0 I_a d}{\pi r^2} \quad (6.63)$$

Teniendo en cuenta que  $R' \ll X'$  (6.58), (6.59) y (6.60) quedan

$$\mathbf{I}_I = \frac{\sqrt{3}}{2} K e^{j\frac{5\pi}{6}} I_a \quad (6.64)$$

$$\mathbf{I}_{II} = \frac{\sqrt{3}}{2} K e^{j\frac{7\pi}{6}} I_a \quad (6.65)$$

$$\mathbf{I}_{III} = \frac{\sqrt{3}}{2} K e^{j\pi} I_a \quad (6.66)$$

siendo

$$K = \frac{\ln \frac{s+d}{s-d}}{\ln \frac{s}{rgm}} \quad (6.67)$$

El campo debido al lazo I tiene la misma expresión que en la línea horizontal:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}_{II} &= \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \mathbf{M}_I (\text{sen } 2\theta \vec{u}_x - \text{cos } 2\theta \vec{u}_y) \\ &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 K I_a s}{8\pi r^2} (-\sqrt{3} + j) \left( \cos \left( 2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_x + \text{sen} \left( 2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_y \right) \end{aligned} \quad (6.68)$$

El campo debido a los lazos II y III se obtiene a partir de (3.140), teniendo en cuenta que

$\psi_{II} = 4\pi/3$ , y  $\psi_{III} = 2\pi/3$ :

$$\vec{B}_{III} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 K I_a S}{8\pi r^2} (-\sqrt{3} - j) \left( \cos\left(2\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{u}_y \right) \quad (6.69)$$

$$\vec{B}_{III} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 K I_a S}{4\pi r^2} j \left( \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \vec{u}_y \right) \quad (6.70)$$

El campo resultante será la suma del debido a la línea y al lazo:

$$\vec{B}_{I2} = \vec{B}_{II} + \vec{B}_{p2} \quad (6.71)$$

$$\vec{B}_{II2} = \vec{B}_{III} + \vec{B}_{p2} \quad (6.72)$$

$$\vec{B}_{III2} = \vec{B}_{III} + \vec{B}_{p2} \quad (6.73)$$

Con (6.61), (6.62), (6.63), (6.71), (6.72) y (6.73) pueden calcularse las eficiencias  $FA_{I2}$ ,  $FA_{II2}$  y  $FA_{III2}$  debidas a los lazos. Las tres tienden al mismo valor para  $x \rightarrow \pm\infty$ . Por ejemplo, para  $d = 8,5$  m,  $d_{lm} = 5$  m,  $h = 10$  m, resulta

$$FA_{I2} = FA_{II2} = FA_{III2} = 0,86 \quad (6.74)$$

Si se compara con la eficiencia de un lazo en una línea horizontal o vertical, con igual  $d$ ,  $h$  y  $d_{lm}$  se observa que el campo se reduce un 44% menos, es decir, el rendimiento del apantallado es un 44% inferior.

Las figuras 6.37, 6.38 y 6.39 muestran las curvas de eficiencia obtenidas con los modelos RI, DA y DS, para las mismas longitudes. Se observa que con el lazo I se consigue mayor eficiencia que con el II y III, aunque, como se ha indicado previamente, la eficiencia de los tres tiende al mismo valor conforme la distancia a la línea es mayor.

El análisis previo ha supuesto que la disposición triangular es equilátera. Se analiza a continuación el caso más real de una disposición no equilátera, estudiando sólo el lazo I, por ser el de mayor interés. Para evaluar la eficiencia se van a emplear las dimensiones de un apoyo de alineación correspondiente a la línea Almaraz-Guillena (figura 6.40).

Ahora el ángulo  $\alpha \neq \pi/3$ , con lo que el campo debido a la línea modifica sus expresiones (6.61) y (6.62):

$$\begin{aligned} \vec{R}e[\vec{B}_{p2}] &= |\vec{R}e[\vec{B}_{p2}]| \left( \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2} - \alpha + \xi_a\right) \vec{u}_x \right. \\ &\quad \left. + \text{sen}\left(2\theta - \frac{\pi}{2} - \alpha + \xi_a\right) \vec{u}_y \right) \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\vec{I}m[\vec{B}_{p2}] = |\vec{I}m[\vec{B}_{p2}]| \left( \cos\left(2\theta + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_x + \text{sen}\left(2\theta + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y \right) \quad (6.76)$$

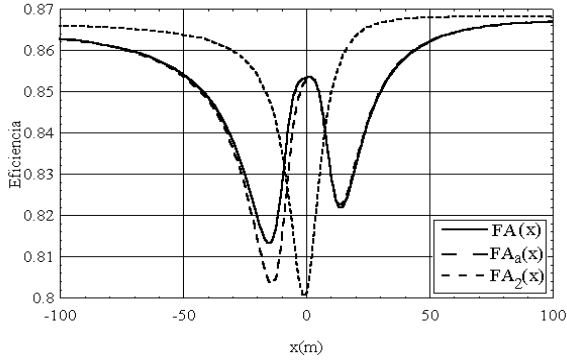


Figura 6.37: Configuración delta. Eficiencias obtenidas con el lazo I, para distintas formulaciones.

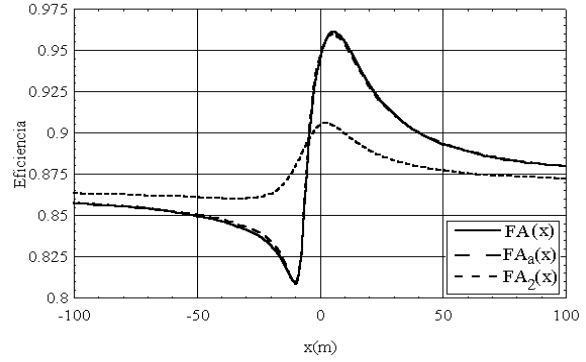


Figura 6.38: Configuración delta. Eficiencias obtenidas con el lazo II, para distintas formulaciones.

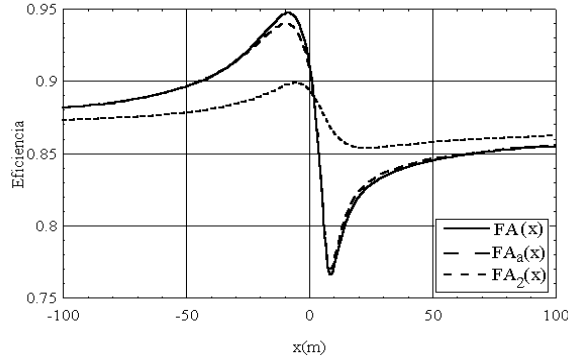


Figura 6.39: Configuración delta. Eficiencias obtenidas con el lazo III, para distintas formulaciones.

siendo

$$|\text{Re}[\vec{B}_{p2}]| = \frac{\mu_0 I_a d_1}{2\pi r^2} \sqrt{\frac{5}{4} + \cos 2\alpha} \tag{6.77}$$

$$|\text{Im}[\vec{B}_{p2}]| = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_a d_1}{4\pi r^2} \tag{6.78}$$

$$\xi_a = \text{atan} \frac{\text{sen } 2\alpha}{2 + \cos 2\alpha} \tag{6.79}$$

Para las dimensiones de la figura 6.40 se obtiene  $FA_2 = 0,79$ . Se observa una mayor eficiencia que en el caso equilátero debido a la mayor semejanza con la disposición horizontal.

Las figuras 6.41 y 6.42 muestran la eficiencia para la misma configuración y alturas

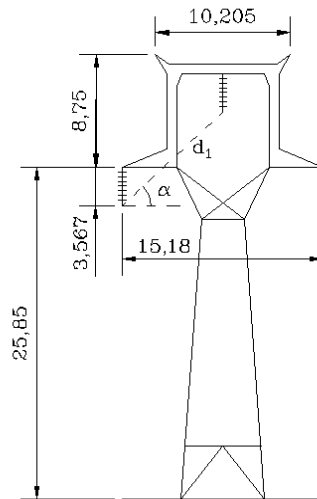


Figura 6.40: Línea Almaraz-Guillena. Dimensiones correspondientes a una torre de alineación (en metros).

$h = 10$  m, y  $h = 14$  m, obtenida por los tres métodos.

Tal como se viera en las configuraciones horizontal y vertical, se podrían aprovechar los dos cables de tierra (figura 6.40) para formar un lazo pasivo. Sin embargo, la mitigación que se consigue es despreciable.

Dada la geometría de la configuración triangular, compuesta por dos dipolos no alineados, es conveniente analizar la posibilidad de incrementar la mitigación con dos lazos pasivos. Debido a la inductancia mutua entre los lazos, la corriente por cada uno no es la misma que si sólo estuviese uno de ellos. Esto hace reducir el módulo y variar el desfase, lo cual reduce las potenciales ventajas del empleo de dos lazos. La figura 6.43 muestra una posible disposición, en la que el lazo 2 es vertical y equidistante a los conductores del tramo 1. Con ello se consigue que la inductancia mutua entre ambos lazos sea nula. Para las dimensiones de la figura 6.40, con  $d_{l1} = 5$  m,  $d_{l2} = 13,36$  m,  $s_1 = 25,18$  m,  $s_2 = 24,1$  m y  $h = 10$  m, se obtiene la curva de eficiencia de la figura 6.44. Se muestra también la eficiencia correspondiente al lazo I (figura 6.41). Obsérvese que el campo se reduce un 11% respecto a la configuración con un sólo lazo (rendimiento del apantallado un 43% superior), a cambio de la inserción de un conductor aéreo y otro subterráneo. Se han analizado otras posibles disposiciones con dos lazos, sin resultados positivos.

Una última configuración consiste en el empleo de dos lazos y tres conductores. Se

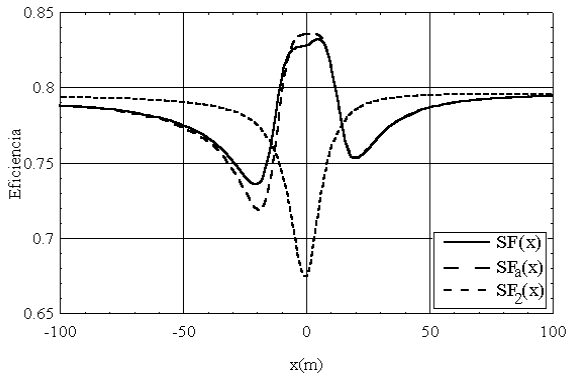


Figura 6.41: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias obtenidas al insertar el lazo I ( $h = 10$  m).

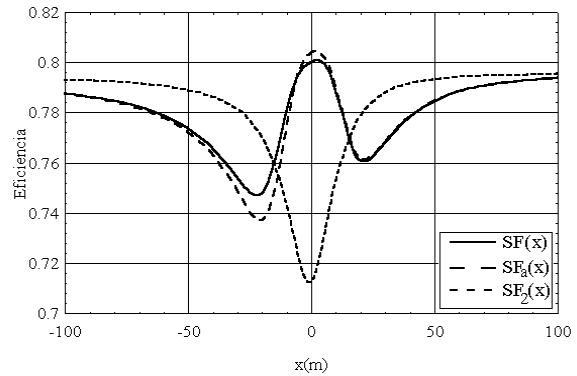


Figura 6.42: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias obtenidas al insertar el lazo I ( $h = 14$  m).

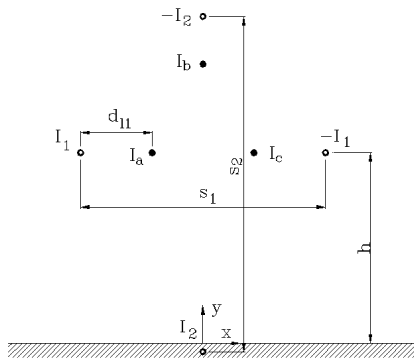


Figura 6.43: Configuración delta. Disposición con dos lazos de mitigación.

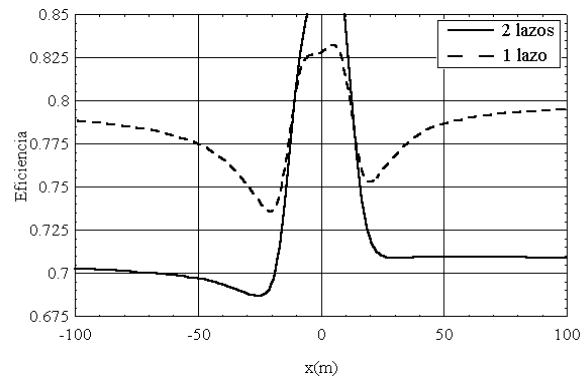


Figura 6.44: Configuración delta. Eficiencias obtenidas (modelo RI) con los lazos de la figura 6.43 y con el lazo I (figura 6.36).

podrían aprovechar los dos conductores de tierra y situar el tercer conductor enterrado a 1 m (figura 6.45). Para dicha disposición, y  $h = 10$  m, se ha obtenido la curva de eficiencia de la figura 6.46, junto con la obtenida con un lazo. Obsérvese que la reducción del campo conseguida es pequeña.

Una configuración triangular, empleada también en la red de transporte española, es la tresbolillo. Un ejemplo de ello es la línea La Mudarra-Escatrón, uno de cuyos apoyos de alineación se muestra en la figura 6.47. Se analizan brevemente algunas disposiciones de lazos para esta configuración. Dado que es una configuración similar a la delta, las disposiciones óptimas de lazo también lo serán. La figura 6.48 muestra tres posibles disposiciones. Las eficiencias correspondientes se muestran en las figuras 6.49, 6.50 y 6.51.



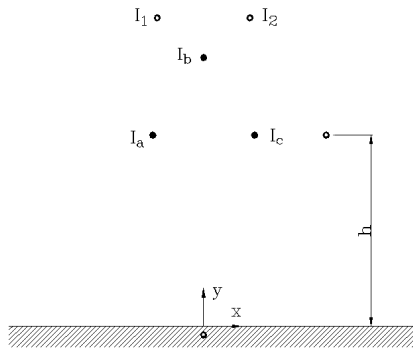


Figura 6.45: Configuración delta. Disposición con dos lazos de mitigación compuestos por tres conductores.

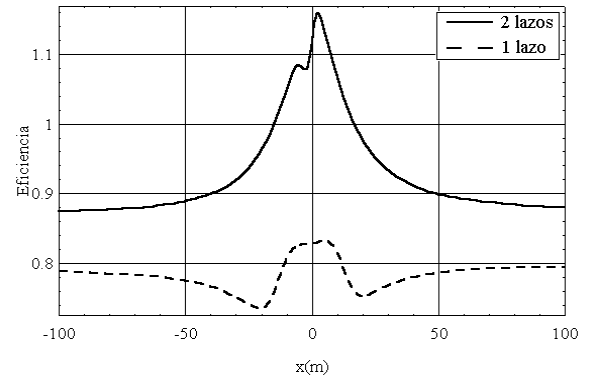


Figura 6.46: Configuración delta. Eficiencias obtenidas (modelo RI) con los lazos de la figura 6.45 y con el lazo I (figura 6.36).

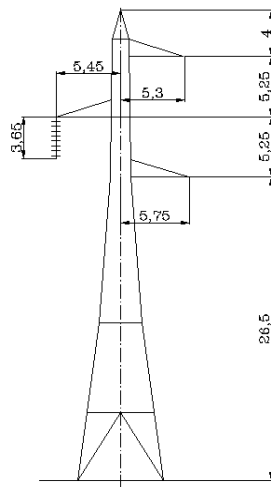


Figura 6.47: Línea La Mudarra-Escatrón. Dimensiones correspondientes a una torre de alineación (en metros).

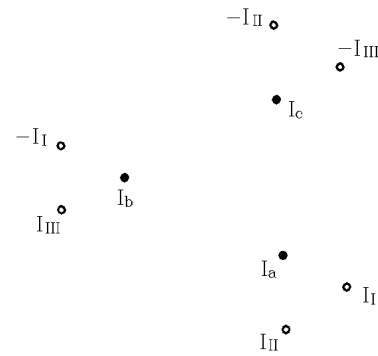


Figura 6.48: Configuración tresbolillo. Disposiciones que permiten la máxima corriente inducida.

Es evidente que el lazo I es el que permite una reducción mayor del campo, consiguiéndose una eficiencia de  $FA = 0,84$  lejos de la línea.

La figura 6.52 muestra la eficiencia utilizando un lazo vertical formado por el conductor de tierra y un conductor enterrado a 1 m de profundidad. La mitigación que se obtiene es pequeña. Se mejora algo con el conductor inferior aéreo, aunque  $FA$  sigue siendo superior a 0,9.

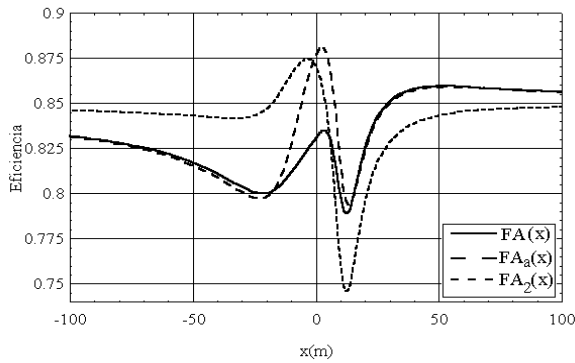


Figura 6.49: Línea La Mudarra-Escatrón. Eficiencias obtenidas al insertar el lazo I ( $h = 10$  m).

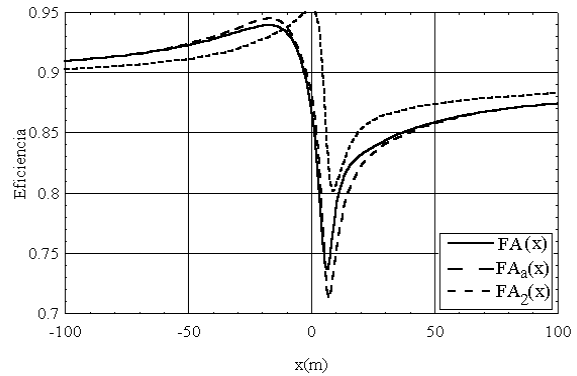


Figura 6.50: Línea La Mudarra-Escatrón. Eficiencias obtenidas al insertar el lazo II ( $h = 10$  m).

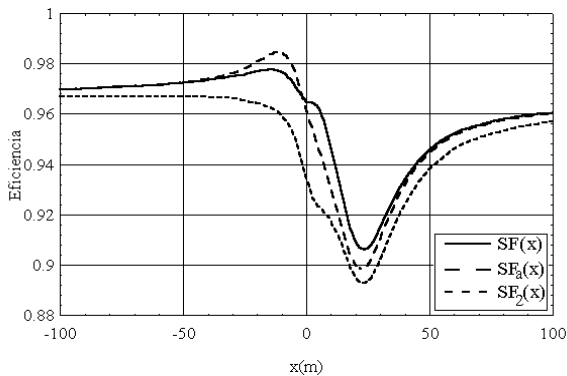


Figura 6.51: Línea La Mudarra-Escatrón. Eficiencias obtenidas al insertar el lazo III ( $h = 10$  m).

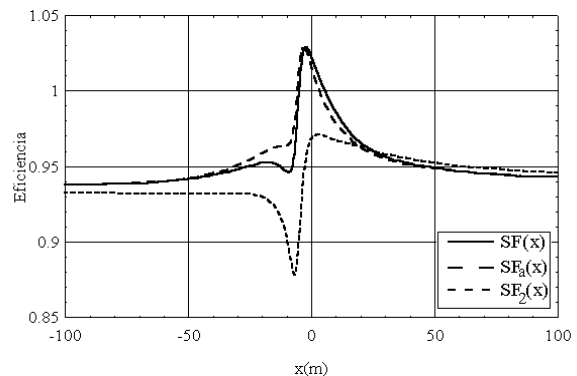


Figura 6.52: Línea La Mudarra-Escatrón. Eficiencias obtenidas empleando el cable de tierra.

### 6.2.7 Líneas doble circuito

Se analiza por último la posibilidad de empleo de lazos pasivos en líneas de doble circuito, en concreto dos tipos empleados en la red de transporte española, doble bandera y doble delta. Se supondrá que por ambos circuitos circula la misma intensidad. Las figuras 6.27 y 6.53 muestran dos apoyos con sus dimensiones más importantes.

Se analiza en primer lugar la línea doble circuito bandera, disposición de fases superhaz ( $abc-abc$ ), por ser la que más campo genera. Para simplificar se supondrá que los conductores están alineados verticalmente y que la distancia entre circuitos es la media de las distancias entre las mismas fases de ambos circuitos (13,5 m). Si se dispone de

un sólo lazo, la corriente inducida puede obtenerse por superposición de los dos circuitos. Igualmente, el campo debido a la línea será la superposición del campo debido a cada circuito. Obsérvese que, en la disposición superhaz, el campo generado por la línea, a suficiente distancia transversal, se asemeja al generado por sólo un circuito de configuración vertical cuya intensidad fuese la misma que la suma de las intensidades por ambos circuitos. Por ello es de prever que el lazo ha de ser vertical. Si se resuelve el problema de maximización (6.45) para un sólo lazo resulta que, para las dimensiones de la figura 6.27, el lazo con máxima corriente inducida es el I de la figura 6.54, siendo  $s = 20$  m. Lejos de la línea la eficiencia tiende a  $FA = 0,87$ . Sin embargo, dado que el campo debido al lazo es proporcional al momento dipolar, producto de la intensidad inducida  $I$  por la anchura del lazo  $s$  (como se ha visto en los casos anteriores), y dado que en la posición del lazo I la corriente inducida disminuye lentamente con  $s$  el momento dipolar crece con  $s$ , se consiguen mayores atenuaciones aumentando la anchura del lazo. Así por ejemplo, con un tramo subterráneo (1 m de profundidad) y  $s = 29,4$  m, la eficiencia tiende a 0,79 con la distancia (lazo II, figura 6.54).

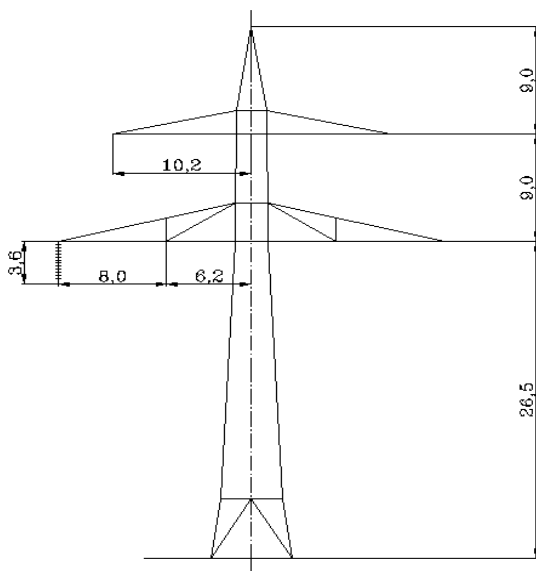


Figura 6.53: Línea Montearenas-La Mudarra. Dimensiones principales de un apoyo de alineación (en metros).

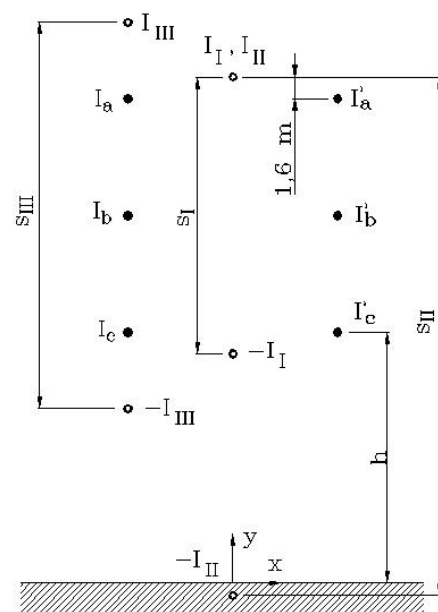


Figura 6.54: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Disposiciones de lazos analizados.

Si se incrementa la altura del tramo aéreo del lazo la eficiencia mejora, aunque levemente. Por ejemplo, para  $s = 50$  m,  $FA = 0,72$ . Se ha analizado por último la posibilidad de emplear la misma disposición del lazo que para el caso vertical simple circuito (lazo III,

figura 6.54). Se consigue una eficiencia lejos de la línea de 0,79, similar a la obtenida con el lazo II. En la figura 6.55 se muestran las curvas de eficiencia de los tres lazos. Obsérvese que el lazo III se ha situado en  $x < 0$ , por lo que la eficiencia para  $x < 0$  es mayor que para  $x > 0$ .

Con dos lazos pueden mejorarse los resultados anteriores. Es evidente que la colocación de los lazos es la misma que la correspondiente a un lazo y simple circuito (figura 6.26). La figura 6.56 muestra la eficiencia obtenida al insertar ambos lazos. Obsérvese que se obtiene una mayor reducción de campo que con sólo un lazo (figura 6.55). La razón está en que la inductancia mutua entre ambos lazos es pequeña, por lo que la reducción de intensidad de lazo también lo es. Además, ambas intensidades de lazo son iguales en módulo y desfase, con lo que el campo mitigador se va acercando al doble que con un sólo lazo, conforme crece la distancia a la línea. Por ello la configuración doble lazo coplanar es especialmente eficiente. La eficiencia tiende a 0,62 conforme crece la distancia a la línea. Una alternativa, ya estudiada en la configuración vertical, simple circuito, es el empleo del conductor de tierra. En el caso de utilizar dos lazos se obtienen las eficiencias de la figura 6.56 para las disposiciones I y II de la figura 6.30. Obsérvese que, aunque bajo la línea ambas disposiciones no atenúan el campo, si lo consiguen para distancias superiores a unos 15 m. Las tres disposiciones de la figura muestran una eficiencia muy similar a distancias superiores a unos 30 m, siendo el valor final 0,620 (configuración coplanar), 0,636 (configuración I) y 0,633 (configuración II).

Para configuraciones distintas de la superhaz se obtienen otros valores. La figura 6.57 muestra las curvas de eficiencia para las configuraciones  $abc-acb$  y baja reactancia ( $abc-cba$ ), obtenidas cuando se insertan dos lazos coplanares. Se incluye también la eficiencia obtenida con la configuración superhaz de la figura 6.56. Obsérvese que con la configuración de baja reactancia se consigue una mitigación menor.

Se analiza por último la línea doble bandera delta. Se vio en el análisis de la configuración simple circuito que la disposición de los dipolos en distinta orientación no permitía obtener la mitigación conseguida con las configuraciones planas. En el caso de doble circuito ocurre lo mismo. No se han observado reducciones significativas de campo empleando un sólo lazo. Con dos lazos se obtiene una mayor reducción, aunque siempre inferior a la obtenida con las configuraciones horizontal y vertical. Como ejemplo se muestra en la figura 6.58 la curva de eficiencia, obtenida a partir de las dimensiones de la figura 6.53, cuando se insertan dos lazos en la disposición II (figura 6.36) en ambos circuitos.

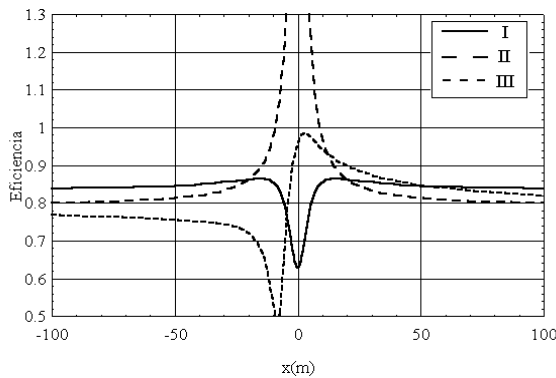


Figura 6.55: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencia obtenida para la tres disposiciones de la figura 6.54.

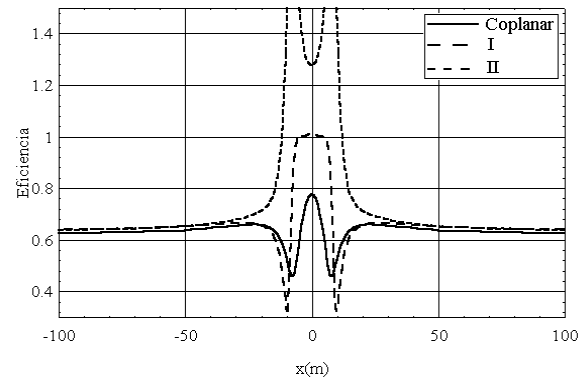


Figura 6.56: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencia obtenida con dos lazos coplanares con los circuitos, así como con las disposiciones I y II de la figura 6.30 con dos lazos simétricamente dispuestos.

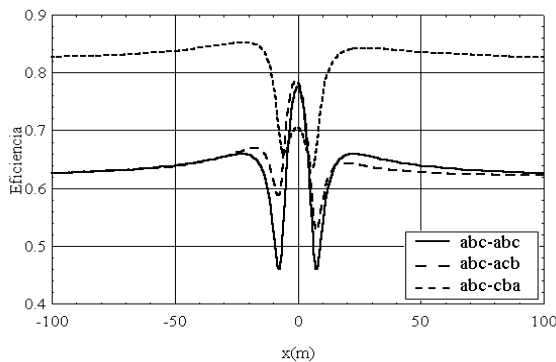


Figura 6.57: Línea vertical doble circuito. Eficiencias obtenidas con dos lazos pasivos coplanares para distintas configuraciones de fases.

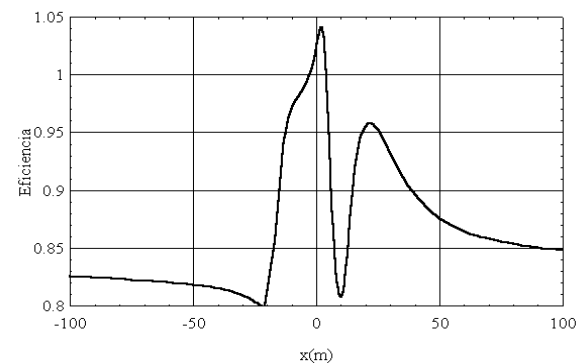


Figura 6.58: Línea Montearenas-La Mударra. Eficiencias obtenidas con la configuración II (figura 6.36) para ambos circuitos.

## 6.3 Compensación serie

Como se indicó en el capítulo 2 puede mejorarse el efecto mitigador del lazo pasivo insertando un condensador cuya reactancia capacitiva compense la inductiva de la bobina, de modo que la impedancia del lazo sea menor y, en consecuencia, crezca la intensidad inducida. Por otro lado, se vio en el apartado anterior que la impedancia del lazo es en gran medida inductiva, lo que permite que, para las configuraciones con lazo coplanar, genere un campo opuesto al de la línea, optimizando la mitigación (figura 6.18). Al insertarse el condensador, se reduce la componente inductiva y varía el desfase de la intensidad por el

lazo, dejando de estar en oposición espacial al creado por la línea. Por ello no interesa compensar el 100% de la reactancia inductiva. Debido a la mayor importancia relativa de la componente resistiva de la impedancia del lazo, el tipo de conductor es ahora un parámetro a tener en cuenta.

Se determina a continuación la capacidad óptima por unidad de longitud para los lazos coplanares de las líneas horizontal y vertical (figuras 6.10 y 6.26). Para ello se empleará la expresión simplificada de la eficiencia  $FA_2$ . Se obtuvo en (6.51) la expresión de la intensidad suponiendo  $R' = 0$ . Ahora  $R'$  no se puede despreciar, con lo que  $\mathbf{K}$  pasa a ser un factor complejo:

$$\mathbf{K} = \frac{jX'_M}{R' + jX'_L(1 - x'_C)} \quad (6.80)$$

siendo

$$X'_M = \frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln \frac{s + 2d}{s - 2d} \quad (6.81)$$

$$X'_L = \frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln \frac{s}{rgm} \quad (6.82)$$

$$x'_C = \frac{X'_C}{X'_L} \quad 0 \leq x'_C \quad (6.83)$$

donde  $X'_M$  se ha definido para simplificar la expresión, y  $X'_C$  es la reactancia capacitiva por unidad de longitud. Teniendo en cuenta que  $FA_2$  viene dado por (6.54), se cumple que

$$FA_2 = \left| 1 - \mathbf{K} \frac{s}{2d} \right| = \left| 1 - \frac{jX'_M}{R' + jX'_L(1 - x'_C)} \frac{s}{2d} \right| \quad (6.84)$$

Derivando e igualando a cero se obtiene el valor de  $x'_C$  que maximiza la eficiencia

$$x'_{CM} = 1 - \frac{sX'_M + \sqrt{16d^2R'^2 + s^2X'_M{}^2}}{4dX'_L} \quad (6.85)$$

Para el ejemplo de la figura 6.11, con  $s = 29,4$  m, se obtiene  $x'_{CM} = 0,649$ . El valor de  $FA_2$  resultó ser sin compensación serie 0,697. Se obtiene ahora  $FA_2 = 0,347$ , lo que supone una reducción en el campo del 49,8% respecto al lazo sin compensar. La figura 6.59 muestra la curva de  $FA$  (método RI), obtenida ya en la figura 6.19, junto con la curva de  $FA$  con compensación serie. En la figura 6.60 se muestra el diagrama dipolar para  $x = 100$  m, donde  $\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_{12C}]$  e  $\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_{12C}]$  son las componentes real e imaginaria del campo debido al lazo con compensación. Se muestran también las componentes del campo sin compensar, ya vistas en la figura 6.18. Obsérvese que el efecto del condensador es incrementar el

módulo de las componentes real e imaginaria de la impedancia del lazo, pero a costa de desviar los vectores respecto de su posición óptima. Por ello, para incrementos mayores de capacidad, el módulo de ambas componentes crece, pero la desviación respecto de la posición óptima es mayor, y el campo resultante crece.

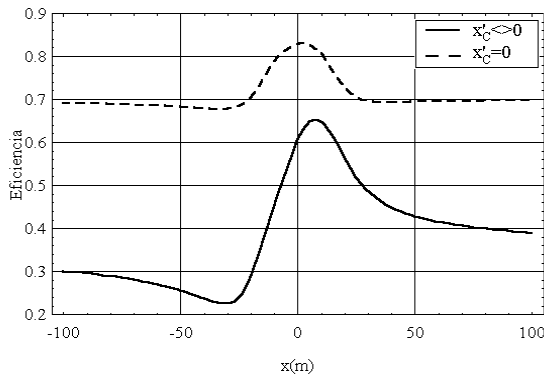


Figura 6.59: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencias obtenidas con un lazo coplanar con y sin compensación serie.

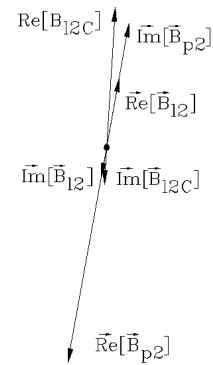


Figura 6.60: Línea Puentes-Montearenas. Diagrama dipolar en  $x = 100$  m con y sin compensación.

Dado que en la práctica puede ser difícil instalar un condensador cuyo valor sea el óptimo, es interesante analizar la variación de la eficiencia respecto de la óptima, cuando se modifica el valor de la compensación. La figura 6.61 muestra el incremento del campo resultante respecto al obtenido con el condensador óptimo, cuando se varía  $x'_C$ .

Se indicó anteriormente que la resistencia del conductor es ahora un factor importante que afecta a la mitigación. Esto se observa en la figura 6.62, que muestra la variación porcentual del campo resultante, tomando como referencia el creado por un lazo cuya resistencia es  $R'_c$  (conductor LA-545), suponiendo que se emplea la capacidad óptima con cada valor de  $R'$ . Se muestra también la variación cuando  $x'_C = 0$ .

El valor de  $x'_{CM}$  varía poco al modificarse la distancia entre fases  $d$  (figura 6.63). Se observa una variación mayor con la anchura del lazo  $s$ , suponiendo que la distancia lazo-fase es constante (figura 6.64).

Para tener una idea de los valores de capacidad que resultan, supóngase un lazo de 1 km de longitud. La inductancia del lazo es, para la línea que estamos analizando, y despreciando el efecto de los conductores extremos,  $X_L = 0,97 \Omega$ . La inductancia capacitiva óptima será  $X_C = x'_{CM} X_L = 0,634 \Omega$ , y la capacidad  $C = 5$  mF. Para una corriente por fase de 500 A, valor típico en líneas de transporte, la corriente por el lazo resulta 237 A, con lo que la potencia del condensador habrá de ser de unos 35 kVAr.

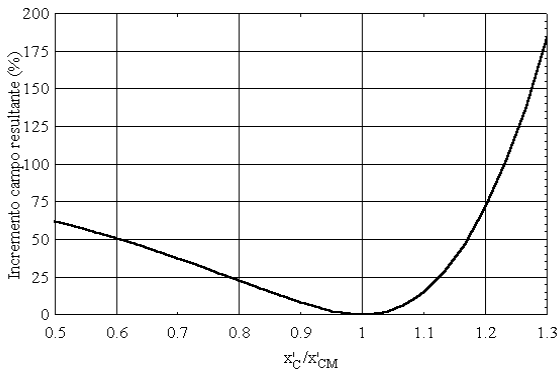


Figura 6.61: Línea Puentes-Montearenas. Incremento del campo resultante cuando se inserta una capacidad no óptima.

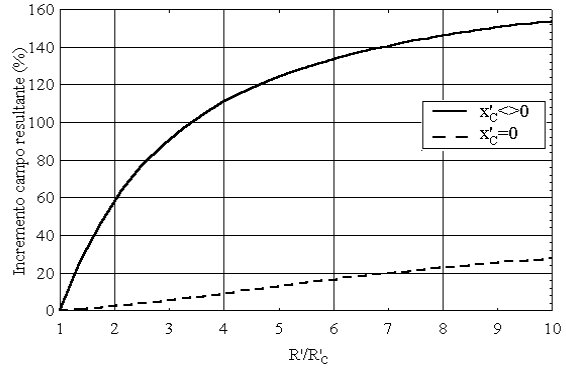


Figura 6.62: Línea Puentes-Montearenas. Variación del campo resultante con la resistencia del conductor (compensación serie óptima).

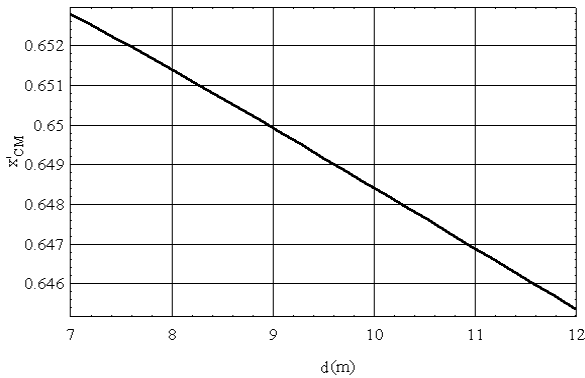


Figura 6.63: Línea Puentes-Montearenas. Curva de  $x'_{CM}$  para diferentes valores de  $d$ .

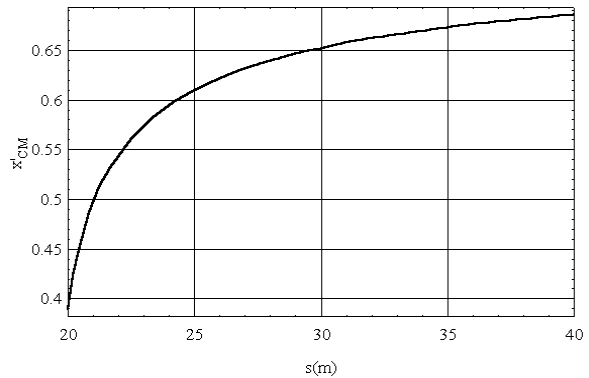


Figura 6.64: Línea Puentes-Montearenas. Curva de  $x'_{CM}$  para diferentes valores de  $s$ .

Obsérvese que el valor de la capacidad a disponer se reduce inversamente con la longitud del lazo, con lo que si se desea emplear un lazo pasivo compensado, no es conveniente que sea corto (unos cientos de metros). Como contrapartida, el coste de la instalación crece con la longitud del lazo. Existe por tanto un mínimo económico que optimiza la longitud del lazo y la capacidad del condensador.

El análisis para lazos no coplanares con la línea, o líneas no coplanares, es similar, aunque más complejo. No obstante, se obtienen unos porcentajes de compensación parecidos. Como ejemplo se muestra en la figura 6.65 la eficiencia  $FA$  lejos de la línea ( $x = 500$  m) para distintos valores de  $x'_C$ , correspondiente a la línea Almaraz-Guillena (figura 6.40), con el lazo I (figura 6.36). La figura 6.66 muestra las curvas de eficiencia



con y sin compensación.

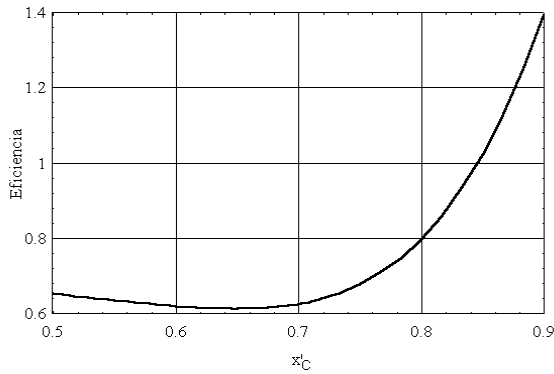


Figura 6.65: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencia en  $x = 500$  m con el lazo I (figura 6.36), para diferentes valores de  $x'_C$ .

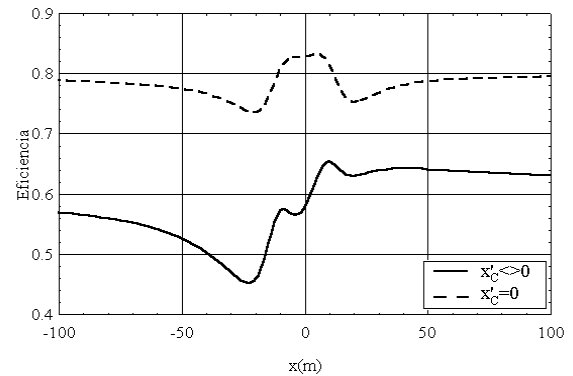


Figura 6.66: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias obtenidas con el lazo I, con y sin compensación.

### 6.3.1 Componentes de secuencia inversa y homopolar

Hasta ahora se han obtenido expresiones que permiten estimar la corriente por el lazo suponiendo que la corriente de fase no presenta componente inversa ni homopolar, o es despreciable. Se analiza a continuación la mitigación conseguida cuando se consideran dichas componentes. La formulación desarrollada en el apartado 6.2.1 sigue siendo válida, ya que en su obtención no se consideró la naturaleza de las corrientes de fase. Aplicando superposición, la intensidad inducida será la suma de la debida a las tres componentes. En concreto, para un lazo pasivo, las intensidades inducidas debidas a las componentes directa, inversa y homopolar, vienen dadas, según (6.31), por

$$\mathbf{I}_{l1} = \frac{\mathbf{V}'_1}{Z'_l} = \frac{-j\mathbf{I}_1(X'_a - X'_b + e^{j\frac{2\pi}{3}}(X'_c - X'_b))}{Z'_l} \quad (6.86)$$

$$\mathbf{I}_{l2} = \frac{\mathbf{V}'_2}{Z'_l} = \frac{-j\mathbf{I}_2(X'_a - X'_b + e^{-j\frac{2\pi}{3}}(X'_c - X'_b))}{Z'_l} \quad (6.87)$$

$$\mathbf{I}_{l0} = \frac{\mathbf{V}'_0}{Z'_l} = \frac{-j\mathbf{I}_0(X'_a + X'_b + X'_c)}{Z'_l} \quad (6.88)$$

siendo  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  e  $\mathbf{I}_0$ , las tres componentes de secuencia. Sumando (6.86), (6.87) y (6.88) se tiene la corriente inducida por el lazo.

Como ejemplo se analiza la mitigación, lejos de la línea, para el caso de la disposición

horizontal con lazo coplanar. Se empleará entonces la formulación DS. La corriente  $\mathbf{I}_{l1}$  se obtiene de (6.49), sustituyendo  $I_a$  por  $\mathbf{I}_1$ . Para la corriente de secuencia inversa resulta

$$\mathbf{I}_{l2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\omega\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{s+2d}{s-2d}\right)(1-j\sqrt{3})}{R' + j\frac{\omega\mu_0}{\pi} \ln\frac{s}{rgm}} \mathbf{I}_2 \quad (6.89)$$

y para la secuencia homopolar  $\mathbf{I}_{l0} = 0$ , ya que  $X'_b = 0$  y  $X'_a = -X'_c$ . Por tanto, para el lazo coplanar no se induce corriente en el mismo como reacción a la homopolar de la línea, y el campo generado por la homopolar no se atenúa. Esto se cumple, en general, para cualquier lazo situado simétricamente respecto a la línea, como el coplanar en las configuraciones horizontal y vertical, o los tipos I, II, III (figura 6.36) en la configuración triangular.

Para simplificar, supóngase inicialmente que la componente homopolar es nula. El campo debido a la componente de secuencia directa  $\vec{\mathbf{B}}_{p1}$  vendrá dado por (6.50), y el debido a la componente de secuencia inversa por

$$\vec{\mathbf{B}}_{p2} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}_2 d}{4\pi r^2} (3 + j\sqrt{3})(\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.90)$$

La intensidad por el lazo debida a la componente inversa, dada en (6.87), se obtiene de igual manera que en (6.51) para la secuencia directa

$$\mathbf{I}_{l2} = \frac{\sqrt{3}}{2} K \mathbf{I}_2 e^{j\frac{7\pi}{6}} \quad (6.91)$$

El campo creado por esta intensidad vendrá dado por

$$\vec{\mathbf{B}}_{l2} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 K s \mathbf{I}_2}{8\pi r^2} (\sqrt{3} + j)(\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.92)$$

El campo total debido a la línea y lazo vendrá dado sumando (6.50), (6.52), (6.90) y (6.92). La eficiencia se obtendrá dividiendo el módulo del campo total por el campo original debido a la línea. Se llega entonces una expresión idéntica a (6.54). Por tanto, cuando existen componentes de secuencia directa e inversa la eficiencia obtenida es similar al caso directo exclusivamente.

Considérese ahora la existencia de componente de secuencia directa y homopolar. El campo debido a la componente homopolar viene dado por

$$\vec{\mathbf{B}}_{p0} = \frac{3\mu_0 \mathbf{I}_0}{2\pi r} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) \quad (6.93)$$

y la eficiencia será

$$FA = \frac{|\vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p0} + \vec{B}_{l1}|}{|\vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p0}|} \quad (6.94)$$

Para el ejemplo de la figura 6.11, con  $s = 29,4$  m, se obtuvo, a 100 m, una eficiencia  $FA = 0,7$ , sin componente homopolar. La figura 6.67 muestra la eficiencia obtenida, en función del desfase de  $I_{p0}$  respecto a  $I_{p1}$ , para un 5% y 10% de componente homopolar. Obsérvese que la eficiencia se reduce conforme crece la componente homopolar, excepto para algunos valores del desfase, en que es menor la eficiencia para la componente del 5%. Conforme la distancia a la línea se reduce el efecto de la componente homopolar es menor. Esto se observa en la figura 6.68, que muestra las curvas de eficiencia en función de la distancia transversal a la línea, obtenidas con el modelo RI, para distintos porcentajes de homopolar y desfase nulo de  $I_{p0}$  respecto a  $I_{p1}$ .

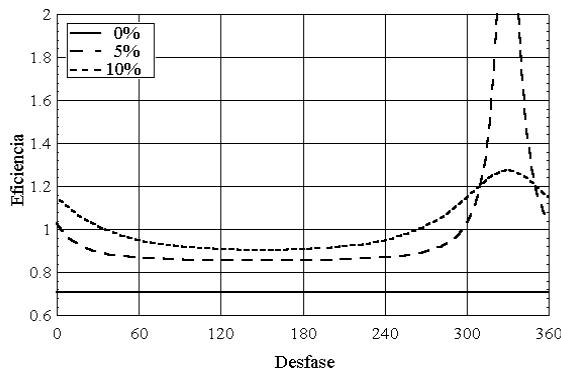


Figura 6.67: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencias en  $x = 100$  m con el lazo coplanar, para diferentes porcentajes de homopolar, en función del desfase de  $I_{p0}$  respecto a  $I_{p1}$ .

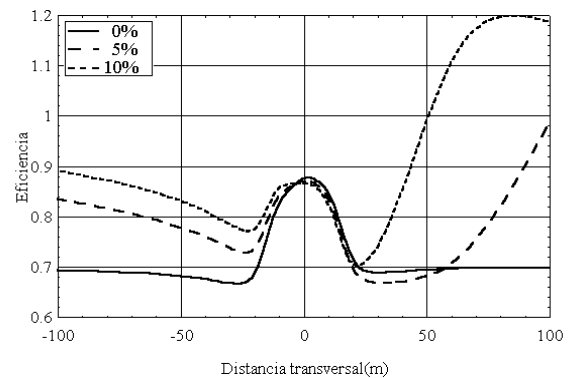


Figura 6.68: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencias con el lazo coplanar, para diferentes porcentajes de homopolar.

## 6.4 Mitigación con lazos activos

En un lazo activo la intensidad es inyectada desde una fuente externa, de tal modo que puede conseguirse el módulo y desfase deseado. Se supondrá en el análisis que sigue que, al igual que en el caso pasivo, la fuerza electromotriz inducida en las fases, debida al lazo, es despreciable.

Este método presenta algunas ventajas e inconvenientes respecto al lazo pasivo. Entre las primeras cabe destacar la mayor atenuación conseguida, y la mayor flexibilidad en la

disposición del lazo. Entre las segundas, el incremento significativo del coste de instalación y mantenimiento, y la necesidad de disponer de un sistema de control para adecuar en cada instante la intensidad inyectada con el campo que se pretende atenuar.

Merece la pena puntualizar algunos aspectos relativos a la posición del lazo. En el lazo pasivo, éste ha de estar situado en una posición que permita concatenar el máximo flujo creado por la línea. Con el lazo activo se permite una mayor flexibilidad en la colocación del lazo, aunque hay que seguir teniendo en cuenta la orientación vectorial de ambos campos. Por ejemplo, un lazo situado en un plano con un cierto ángulo respecto a una línea horizontal será mucho menos efectivo que uno situado coplanar con la línea. Se necesitará una inyección de más corriente (más potencia en la fuente de alimentación del lazo) y además la eficiencia dependerá más fuertemente de la zona de interés (cerca o lejos de la línea). Existe por tanto una posición óptima del lazo con la que se permite reducir el máximo de campo, en la zona más amplia, y con el mínimo de potencia a inyectar al lazo. Cuanto más distinta de la óptima sea la posición del lazo menos efectiva será la mitigación, reduciéndose a una franja limitada, y con probabilidad alta de existencia de amplificación del campo en otros puntos (como se ha visto en el caso pasivo). Es por ello que el empleo de lazos externos activos crea zonas de atenuación, pero también de amplificación, siendo la transición entre una y otra más bien abrupta, tanto mayor cuanto más atenuación se consiga.

El problema que se plantea es entonces, dada una línea, determinar la posición del lazo, módulo y desfase de la intensidad, de modo que se reduzca al máximo el campo en una zona de interés (ZI). Dadas las múltiples soluciones que pueden considerarse válidas, se supondrá que la posición y dimensiones del lazo son conocidas. Además, las características del lazo pueden estar supeditadas a otros requerimientos, como por ejemplo la colocación fuera de la línea para evitar reforzar los apoyos.

El análisis se aborda para dos supuestos distintos. Si el lazo está incorporado a la línea, y se desea reducir el campo en puntos alejados, el problema puede analizarse con el modelo DS. Si, por el contrario, el lazo es externo, o se desea reducir el campo en puntos cercanos, el problema deberá analizarse con los modelos DA o RI. El problema se formaliza como sigue:

Dado un punto  $x_o$  donde se desea minimizar el campo, y un lazo, determinar las componentes real  $\text{Re}[\mathbf{I}]$  e imaginaria  $\text{Im}[\mathbf{I}]$  de intensidad a inyectar al lazo de modo que se haga mínimo

$$|\vec{\mathbf{B}}_p(x_o) + \vec{\mathbf{B}}_l(x_o)| \tag{6.95}$$

Si se tiene en cuenta que  $\vec{\mathbf{B}}_l$  viene dado por (3.129), y que  $\vec{\mathbf{B}}_p$  puede descomponerse en

los vectores real e imaginario, tal como en (3.33) y (3.34), se deriva (6.95) respecto a  $\text{Re}[\mathbf{I}]$  e  $\text{Im}[\mathbf{I}]$ , igualando a cero. Resultan las soluciones

$$\text{Re}[\mathbf{I}] = \frac{-b_x \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x - b_y \text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad (6.96)$$

$$\text{Im}[\mathbf{I}] = \frac{-b_x \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x - b_y \text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad (6.97)$$

siendo

$$\begin{aligned} b_x &= [\vec{\mathbf{B}}_l(\mathbf{I} = \mathbf{1}^{l_0})]_x \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{s}{\left(r^2 + \frac{s^2}{4}\right)^2 - r^2 s^2 \cos^2(\theta - \psi)} \left( r^2 \sin(2\theta - \psi) - \frac{s^2}{4} \sin \psi \right) \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} b_y &= [\vec{\mathbf{B}}_l(\mathbf{I} = \mathbf{1}^{l_0})]_y \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{s}{\left(r^2 + \frac{s^2}{4}\right)^2 - r^2 s^2 \cos^2(\theta - \psi)} \left( r^2 \cos(2\theta - \psi) - \frac{s^2}{4} \cos \psi \right) \end{aligned} \quad (6.99)$$

Si se emplea la formulación DA, las componentes del campo creado por la línea pueden obtenerse de (3.187) y (3.188). A distancias del orden de 100 m puede emplearse la formulación DS, estando las componentes del campo dadas por (3.201) y (3.202).

Se aplicará a continuación la mitigación con lazo activo a las distintas configuraciones y ejemplos ya vistos en el apartado 6.2, considerando que sólo existe componente de secuencia directa en la intensidad. En el apartado 6.4.5 se verán los casos inverso y homopolar.

Si la línea presenta secuencia de fases  $acb$ , se vio en el apartado 3.7.2 que la componente imaginaria del campo creado por la línea cambia su signo respecto a la secuencia  $abc$ . De (6.97) se observa que la componente imaginaria de la corriente inducida también cambiará su signo.

### 6.4.1 Línea horizontal

Considérese la configuración horizontal cuyas dimensiones se muestran en la figura 6.11. Supóngase inicialmente que se desea reducir el campo lejos de la línea (unos 100 m). En ese caso se puede emplear la formulación DS. Entonces, el campo generado por la línea viene dado por (6.50). Para un lazo situado en la posición coplanar (figura 6.10) el campo viene dado por (6.52), siendo ahora  $\mathbf{M} = \mathbf{I}s$ . Dado que  $\vec{\mathbf{B}}_{p2}$  tiene la misma orientación

que  $\vec{B}_{l2}$  (figura 6.18) es posible anular en gran parte el campo debido a la línea, para puntos alejados. Para ello la intensidad por el lazo habrá de ser

$$I = \frac{\sqrt{3}I_a d}{s} e^{j\frac{5\pi}{6}} \tag{6.100}$$

La figura 6.69 muestra la eficiencia  $FA$  obtenida con el modelo RI, para  $s = 29,4$  m. La intensidad requerida por el lazo resulta ser  $I = 0,57I_a$  <sup>l150</sup>. Obsérvese que el campo tiende a cero con la distancia a la línea. Para lazos con anchura mayor la intensidad será menor. Sin embargo la eficiencia empeora cerca de la línea. Esto se muestra en la figura 6.70, donde  $s = 35$  m. La intensidad es ahora  $I = 0,48I_a$  <sup>l150</sup>, tomando como origen de fases  $I_a$ .

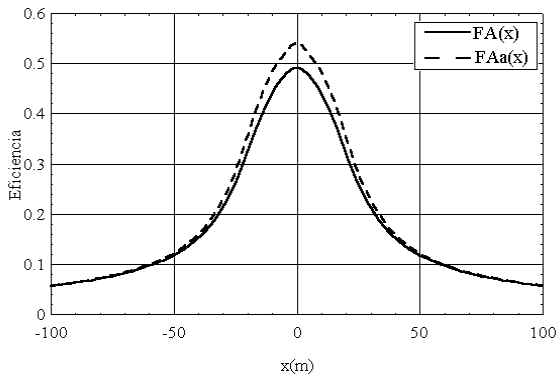


Figura 6.69: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia con lazo activo en la posición coplanar (figura 6.10), y  $s = 29,4$  m.

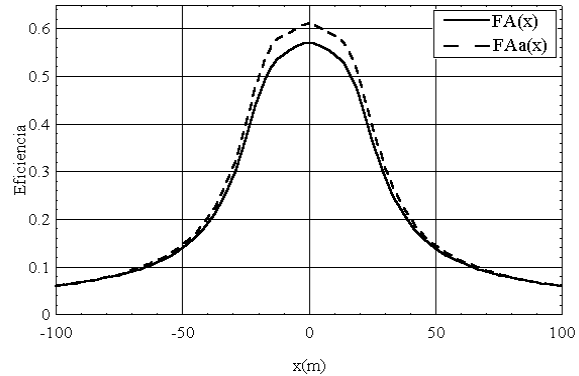


Figura 6.70: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia con  $s = 35$  m (lazo activo en la posición coplanar).

Obsérvese que el valor de  $I$  en (6.100) no depende de la coordenada  $x$ , por lo que la intensidad obtenida no minimiza el campo en ningún punto concreto, sino que lo reduce en una proporción mayor conforme la distancia crece, siendo la reducción total en el infinito. Si lo que se desea es minimizar el campo en un punto concreto, es preciso obtener la intensidad por el lazo a partir de (6.96) y (6.97). La figura 6.71 muestra la eficiencia obtenida para el mismo caso de la figura 6.69, pero con la intensidad obtenida de las expresiones citadas. Se ha minimizado el campo en el punto  $x_o = -100$  m. El valor de  $FA(-100)$  es prácticamente nulo. La intensidad por el lazo resulta  $I = 0,57I_a$  <sup>l153,1</sup>. Nótese que ahora se pierde la simetría en la eficiencia. Además la eficiencia media con esta solución, en el intervalo  $(-100,100)$ , es menor. Cuanto menor sea la coordenada  $x_o$  la mitigación conseguida será menor, incrementándose además la intensidad requerida por el lazo. En la figura 6.72 se muestra la eficiencia para  $x_o = 0$  m. La intensidad por el lazo resulta  $I = 0,83I_a$  <sup>l150</sup>, superior en casi un 50% a la obtenida en (6.100). El motivo

de este peor comportamiento conforme la distancia a la línea es menor, es la diferente polarización del campo debido a la línea y al lazo. Cerca de la línea el campo debido a ésta posee claramente una polarización elíptica, y el lazo presenta una polarización lineal. Esto se observa más claramente en las figuras 3.30, 3.42 y 3.43. Si se compara la orientación de  $\vec{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  creado por el dipolo cerca del origen (figura 3.30) con la debida a  $\vec{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$ , creado por la línea en el mismo punto, se observa una cierta similitud. Sin embargo  $\vec{Im}[\vec{\mathbf{B}}]$  del dipolo (misma orientación que  $\vec{Re}[\vec{\mathbf{B}}]$  pero sentido contrario) e  $\vec{Im}[\vec{\mathbf{B}}]$  debido a la línea (figura 3.43), presentan una diferencia considerable de orientación, que se reduce conforme la distancia al origen crece.

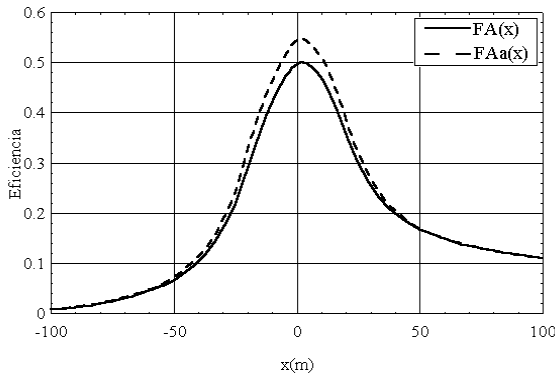


Figura 6.71: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia con lazo activo en la posición coplanar para  $x_o = -100$  m ( $s = 29,4$  m).

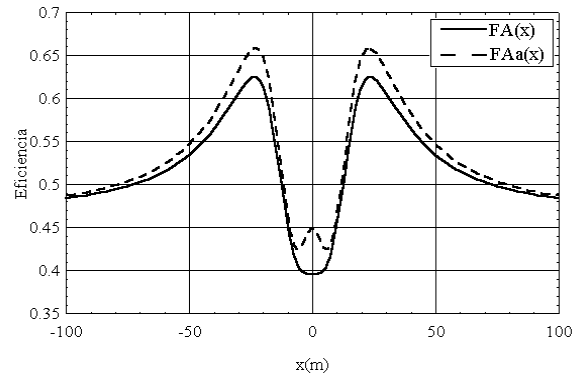


Figura 6.72: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia con lazo activo en la posición coplanar para  $x_o = 0$  m ( $s = 29,4$  m).

La configuración coplanar, con la que se conseguía la máxima corriente inducida en el lazo pasivo, es también la óptima para el lazo activo cuando se desea reducir el campo en una amplia franja, ya que, como se acaba de ver, es la que genera un campo próximo a la oposición en puntos no muy alejados de la línea. Sin embargo, tal como se vio con el lazo pasivo, es interesante analizar otras localizaciones del lazo, como las posiciones I y III de la figura 6.21. Para dichas posiciones han de emplearse, para el cálculo de la intensidad por el lazo, las expresiones (6.96) y (6.97) con los modelos DA o RI para la línea. La figura 6.73 muestra la eficiencia conseguida para la posición I, cuando se minimiza el campo a 100 m y 30 m de la línea. Las intensidades resultan ser  $\mathbf{I} = 1,39I_a$ <sup>153,2</sup> (100 m) e  $\mathbf{I} = 1,60I_a$ <sup>159,7</sup> (30 m). La figura 6.74 muestra lo mismo para un lazo situado en la posición III (lazo enterrado a 1 m de profundidad,  $s = 30$  m). Las intensidades en este caso son  $\mathbf{I} = 0,53I_a$ <sup>153,1</sup> (100 m) e  $\mathbf{I} = 0,29I_a$ <sup>155,6</sup> (30 m). Obsérvese que en ambos casos existen puntos donde se atenúa el campo, junto con puntos, cerca de la línea, donde se amplifica. Para el lazo situado en la posición III se consigue una discreta atenuación, aunque con una intensidad inyectada pequeña.

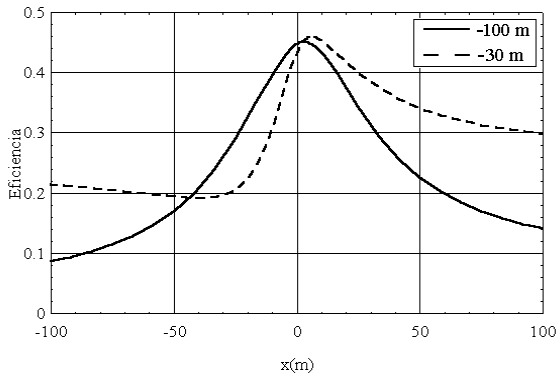


Figura 6.73: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia para el lazo I de la figura 6.21 con  $x_o = -100$  m y  $x_o = -30$  m.

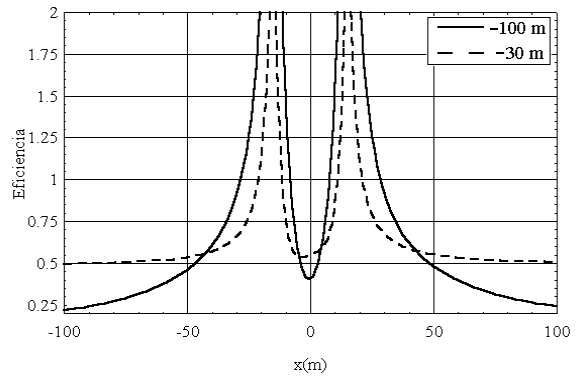


Figura 6.74: Línea Puentes-Montearenas. Eficiencia para el lazo III de la figura 6.21 con  $x_o = -100$  m y  $x_o = -30$  m.

Se analiza por último el caso de un lazo externo. Supóngase que la zona de interés es la mostrada en la figura 6.24. Para un lazo horizontal de coordenadas  $x_e = 20$  m,  $y_e = 6$  m y anchura  $s = 20$  m la intensidad que minimiza el campo en  $x = 50$  m es  $\mathbf{I} = 0,27I_a$  <sup>[144,3]</sup> ( $x_o = 50$  m). La figura 6.75 muestra la curva de eficiencia obtenida. Se ha analizado también la posibilidad de emplear el mismo lazo sobre la zona de interés. En ese caso  $x_e = 55$  m ( $x_o = 50$  m). ( $\mathbf{I} = 0,04I_a$  <sup>[135,9]</sup>). Se muestra la eficiencia en la citada figura. Obsérvese, como se indicó previamente, que un lazo situado en una posición distante de la óptima (en el caso horizontal es la coplanar) es capaz de mitigar el campo, pero también amplificarlo. Es interesante destacar el pequeño valor de la intensidad requerida para el lazo situado sobre la zona de interés.

### 6.4.2 Línea vertical

Dada la similitud geométrica, se obtienen eficiencias similares a la configuración horizontal. Para el ejemplo de la figura 6.27, con  $s = 26,8$  m, la figura 6.76 muestra la eficiencia cuando la intensidad por el lazo se ha obtenido con la misma expresión (6.100) que en el caso horizontal ( $\mathbf{I} = 0,54I_a$  <sup>[150]</sup>). Se muestra también la curva de eficiencia cuando se minimiza el campo en  $x_o = -30$  m ( $\mathbf{I} = 0,57I_a$  <sup>[145,5]</sup>).

Para las posiciones I, II y IV del lazo (figuras 6.30 y 6.32), la figura 6.77 muestra las eficiencias cuando se minimiza el campo en  $x_o = -30$  m. Las intensidades respectivas son  $\mathbf{I} = 0,47I_a$  <sup>[145,5]</sup>,  $\mathbf{I} = 0,41I_a$  <sup>[144,5]</sup>, e  $\mathbf{I} = 1,52I_a$  <sup>[144,1]</sup>. Con las configuraciones I y II se obtienen resultados similares, consiguiéndose reducciones importantes a distancias



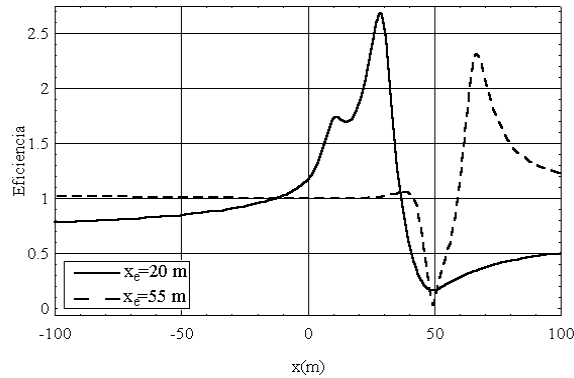


Figura 6.75: Eficiencia para dos lazos externos iguales situados en  $x_e = 20$  m y  $x_e = 55$  m (figura 6.24).

superiores a 10 m. Con el lazo IV, más separado de la posición óptima, se obtienen también reducciones apreciables en  $x < 0$  a costa de amplificaciones significativas (en algunos puntos se obtienen valores de  $FA$  cercanos a 4) en  $x > 0$ . Si se hubiese minimizado el campo en  $x > 0$  el resultado sería más favorable, y la intensidad requerida no sería tan elevada, ya que el lazo está situado en  $x > 0$ .

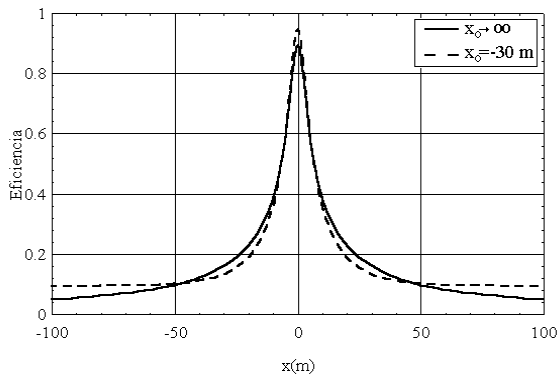


Figura 6.76: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para el lazo coplanar.

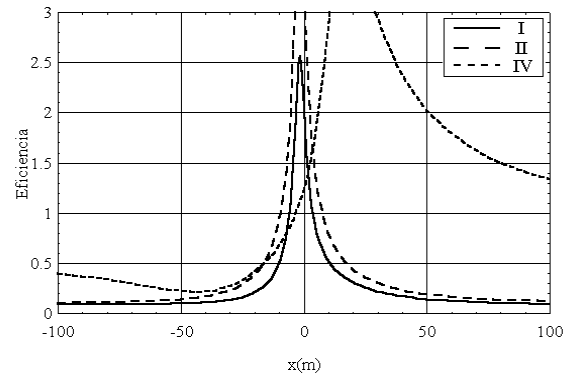


Figura 6.77: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para los lazos I, II y IV ( $x_o = -30$  m).

Se analiza por último la mitigación con lazo externo (figura 6.34). Se desea por ejemplo proteger una franja de 20 m de ancho situada en  $x_i = 50$  m. Para un lazo vertical situado en  $x_e = 20$  m,  $y_e = 6$  m, y anchura  $s = 10$  m, la figura 6.78 muestra la eficiencia ( $x_o = 35$  m). La intensidad resulta ser  $I = 0,24I_a$  <sup>[144,9]</sup>. Se muestra también en la figura la eficiencia obtenida con un lazo horizontal situado en  $x_e = 45$  m,  $y_e = 6$  m, y anchura

$s = 30$  m ( $x_o = 55$  m). La intensidad resulta  $I = 0,04I_a \text{ l}^{147,2}$ . La eficiencia media en la zona de interés resulta 0,54 (lazo vertical) y 0,51 (lazo horizontal). Nótese la pequeña intensidad requerida en el lazo horizontal, así como la pequeña amplificación observada. Sin embargo, la curva de eficiencia con el lazo vertical presenta zonas de atenuación fuera de la ZI, mientras que la mitigación conseguida con el lazo horizontal es muy selectiva, consiguiéndose atenuar sólo en la ZI.

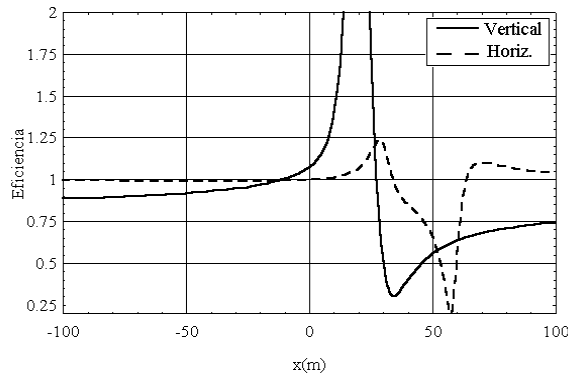


Figura 6.78: Eficiencia para un lazo externo vertical situado en  $x_e = 20$  m e  $y_e = 6$  m (figura 6.34).

### 6.4.3 Línea triangular (configuración delta)

Se vio en el apartado 6.2.6 que la configuración delta, debido a la distinta orientación de ambos dipolos, no es tan favorable para la mitigación con lazo pasivo. Con lazo activo ocurre lo mismo. El campo creado por el lazo presenta una polarización lineal, mientras que el debido a la línea es claramente elíptica, incluso en puntos alejados de la línea, con lo que no se puede anular el campo en ningún punto. Si se supone que el triángulo formado por las fases es equilátero, y se desea reducir el campo en un punto muy alejado de la línea, se puede emplear la formulación DS para lazo y línea. Si el lazo está situado en la disposición I de la figura 6.36, a partir de (6.96), (6.97), (6.61), (6.62), y (6.68), se obtiene la intensidad que ha de circular por el lazo

$$I = \frac{\sqrt{3}I_a d}{2s} e^{j\frac{5\pi}{6}} \tag{6.101}$$

Si se calcula la eficiencia resulta  $FA = \sqrt{2}/2$ . Esta es la máxima eficiencia que se puede conseguir para  $x \rightarrow \infty$ . Nótese que en el caso coplanar (línea horizontal y vertical) la reducción del campo es completa a dicha distancia.

Para configuraciones no equiláteras, en las que el ángulo  $\alpha < \pi/3$  (figura 6.36), se

obtienen mayores reducciones de campo debido al mayor parecido con la línea horizontal. Un ejemplo se muestra en la figura 6.79. Se ha dibujado la eficiencia con el lazo I de la figura 6.36 (línea Almaraz-Guillena), cuando  $x_o = -30$  m. La intensidad resulta ser  $\mathbf{I} = 0,49I_a$  <sup>[161,5]</sup>. Se incluye además un lazo situado en la posición II de la figura 6.36. La intensidad es  $\mathbf{I} = 0,49I_a$  <sup>[179,6]</sup>. Obsérvese que la eficiencia obtenida con el lazo I, en  $x = -30$  m, es 0,44. Sin embargo, con las líneas horizontal y vertical se obtienen valores del orden de 0,1 o incluso inferiores. Para puntos muy lejanos la eficiencia que se consigue es 0,55, más favorable que en el caso equilátero.

Una alternativa que permite mejorar la eficiencia en líneas triangulares, es el empleo de dos lazos con un conductor común, alimentado por un sistema trifásico de tensiones (figura 6.80). Las intensidades por los conductores del lazo formarán un sistema trifásico equilibrado, siendo la incógnita  $\mathbf{I}_{la}$ . El problema se plantea de manera similar a (6.95), siendo ahora  $\vec{\mathbf{B}}_l$  el campo creado por los dos lazos. Derivando (6.95) e igualando a cero, las componentes de  $\mathbf{I}_{la}$  resultan

$$\text{Re}[\mathbf{I}_{la}] = -\frac{b_{rx}\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x + b_{ry}\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y + b_{ix}\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x + b_{iy}\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y}{b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{rx}^2 + b_{ry}^2} \quad (6.102)$$

$$\text{Im}[\mathbf{I}_{la}] = \frac{b_{ix}\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x + b_{iy}\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y - b_{rx}\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_x - b_{ry}\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p]_y}{b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{rx}^2 + b_{ry}^2} \quad (6.103)$$

siendo

$$b_{rx} = \text{Re}[\mathbf{B}_l]_x \quad (6.104)$$

$$b_{ry} = \text{Re}[\mathbf{B}_l]_y \quad (6.105)$$

$$b_{ix} = \text{Im}[\mathbf{B}_l]_x \quad (6.106)$$

$$b_{iy} = \text{Im}[\mathbf{B}_l]_y \quad (6.107)$$

para  $\mathbf{I}_a = 1$  <sup>l0</sup> A.

Se analizan a continuación algunas disposiciones de interés. Por comodidad, las posiciones de los conductores de mitigación se expresarán en función de las posiciones de los conductores de línea. La posición de la fase  $a$  de la pantalla se define por las coordenadas  $(x_a, y_a)$  respecto a la posición de la fase  $a$  de la línea. La fase  $c$  de la pantalla se sitúa simétricamente respecto al eje de la línea. Por último la fase  $b$  de la pantalla se sitúa en el eje de simetría de la línea, con la posición relativa  $(0, y_b)$  respecto a la fase  $b$  de la línea.

La figura 6.81 muestra las curvas de eficiencia para  $x_a = 0$  m,  $y_a = -5$  m, e  $y_b = 5$  m, cuando se minimiza el campo en el infinito y en  $x_o = -30$  m. El valor de la intensidad por la pantalla resulta ser  $\mathbf{I}_{la} = 0,59I_a$  <sup>[180]</sup> ( $x_o \rightarrow \infty$ ) e  $\mathbf{I}_{la} = 0,6I_a$  <sup>[176,6]</sup> ( $x_o = -30$  m).

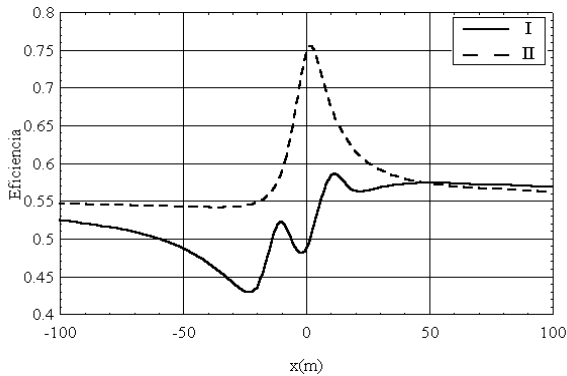


Figura 6.79: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias para los lazos I y II (figura 6.36).

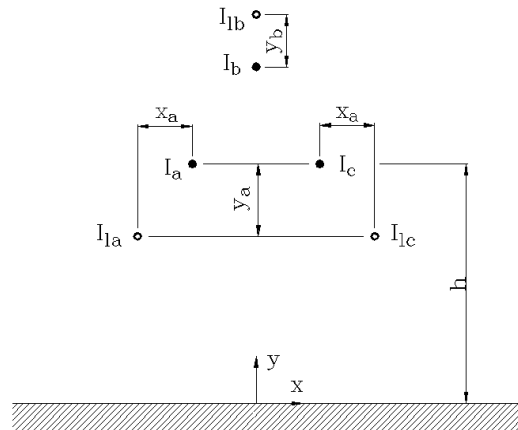


Figura 6.80: Configuración delta. Pantalla mitigadora compuesta por tres conductores.

Por otro lado la figura 6.82 muestra lo mismo para  $x_a = 0$  m,  $y_a = -h - 1$  m (fases a y c enterradas a 1 m de profundidad), e  $y_b = 5$  m. Las intensidades son  $I_{Ia} = 0,45I_a$  <sup>[180]</sup> ( $x_o \rightarrow \infty$ ) e  $I_{Ia} = 0,43I_a$  <sup>[164]</sup> ( $x_o = -30$  m). Obsérvese que en ambas figuras existe una amplificación cerca de la línea, siendo más importante en el segundo caso.

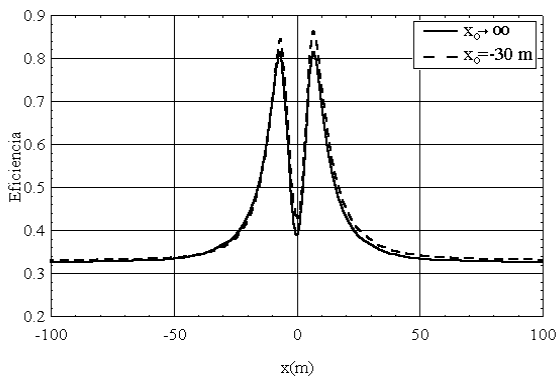


Figura 6.81: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias para  $x_a = 0$  m,  $y_a = -5$  m, e  $y_b = 5$  m.

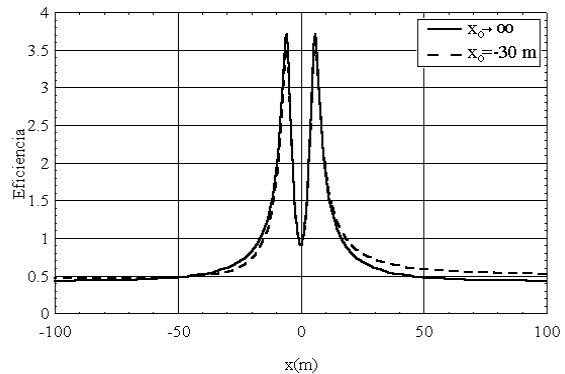


Figura 6.82: Línea Almaraz-Guillena. Eficiencias para  $x_a = 0$  m,  $y_a = -h - 1$  m, e  $y_b = 5$  m.

Para la disposición de la pantalla de la figura 6.45, en la que se aprovechan los conductores de tierra, se ha observado que es más conveniente invertir la secuencia de fases en los conductores de los lazos. La figura 6.83 muestra la curva de eficiencia obtenida para  $x_o = -30$  m. La intensidad requerida es  $I_{Ia} = 0,43I_a$  <sup>[120]</sup>.

Es posible mejorar los resultados si en lugar de alimentar los conductores de los lazos

con un sistema trifásico de intensidades, se inyectan tres intensidades independientes con la única condición de que la suma es nula (componente homopolar nula). Se pueden obtener entonces reducciones prácticamente completas del campo en los puntos donde se desee.

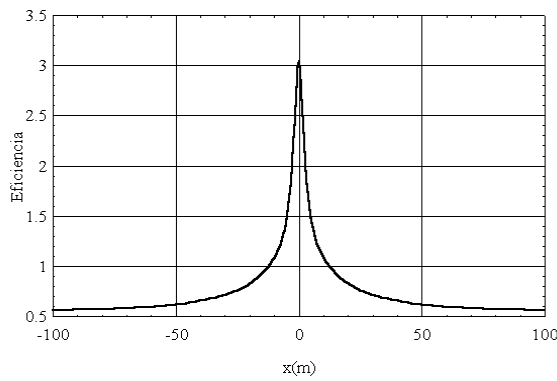


Figura 6.83: Eficiencia para una pantalla formada por los dos conductores de tierra y un tercero subterráneo ( $x_o = -30$  m).

#### 6.4.4 Línea con disposición doble circuito vertical

Se analiza a continuación la mitigación activa de la línea doble circuito vertical, configuración *abc-abc*. En todos los ejemplos se supondrá que la intensidad es la misma en ambos circuitos, aunque los métodos expuestos pueden aplicarse a circuitos con diferente carga.

La figura 6.84 muestra las eficiencias obtenidas con los lazos I, II, y III de la figura 6.54, cuando se minimiza el campo en  $x_o = -30$  m. Las intensidades a inyectar son  $I = 1,56I_a$ <sup>[144]</sup> (lazo I),  $I = 0,96I_a$ <sup>[142]</sup> (lazo II), e  $I = 0,85I_a$ <sup>[145]</sup> (lazo III). El lazo I, debido a su situación centrada respecto a la línea, es el que permite una mayor atenuación en toda la trayectoria transversal. El lazo II, situado también en el centro de la línea, requiere una intensidad menor, debido a la mayor anchura, pero la mitigación conseguida es más reducida. El lazo III, coplanar con uno de los circuitos, es el que requiere menos intensidad, pero debido a su posición asimétrica, no mitiga lo mismo en un semieje  $x$  que en el otro.

Obsérvese también de la figura 6.84 que en los tres casos se produce una amplificación del campo cerca de la línea, llegando a ser el campo en  $x = 0$ , para el lazo II, 9,5 veces mayor que sin lazo. Además, cuando la carga en cada circuito no es sensiblemente la misma, se reduce la mitigación. Una solución a ambos inconvenientes consiste en disponer

dos lazos coplanares con ambos circuitos, tal como se vio en el caso pasivo. La intensidad en cada lazo puede calcularse según tres procedimientos alternativos:

1. Aislando un circuito del otro. La intensidad en cada lazo se calcula de modo que compense al máximo el campo creado exclusivamente por el circuito coplanar con dicho lazo. El proceso de cálculo es idéntico al de una línea de simple circuito.
2. Fijando la intensidad en ambos lazos al mismo valor. Una alternativa interesante por permitir una regulación más sencilla de la intensidad por los lazos.
3. La intensidad en cada lazo se calcula de modo que se minimiza el campo resultante debido a ambos circuitos y lazos.

Se determina a continuación la eficiencia para cada uno de los tres procedimientos.

En el primer procedimiento se calculan las intensidades a partir de (6.96) y (6.97):

$$\operatorname{Re}[\mathbf{I}] = \frac{-b_x \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}]_x - b_y \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad (6.108)$$

$$\operatorname{Im}[\mathbf{I}] = \frac{-b_x \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}]_x - b_y \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad (6.109)$$

$$\operatorname{Re}[\mathbf{I}'] = \frac{-b'_x \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}'_{\mathbf{p}}]_x - b'_y \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}'_{\mathbf{p}}]_y}{(b'_x)^2 + (b'_y)^2} \quad (6.110)$$

$$\operatorname{Im}[\mathbf{I}'] = \frac{-b'_x \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}'_{\mathbf{p}}]_x - b'_y \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}'_{\mathbf{p}}]_y}{(b'_x)^2 + (b'_y)^2} \quad (6.111)$$

denotando con una prima las magnitudes referidas al segundo circuito o al segundo lazo. Obsérvese que la intensidad en un lazo no viene influenciada por el campo creado por el circuito que no es coplanar con él.

La figura 6.85 muestra la eficiencia conseguida cuando se desea minimizar el campo en  $x_0 \rightarrow \infty$  y  $x_0 = -30$  m, estando las intensidades obtenidas según el procedimiento 1. Los valores de las intensidades son  $\mathbf{I} = \mathbf{I}' = 0,54I_a$  <sup>[150]</sup> ( $x \rightarrow \infty$ ), e  $\mathbf{I} = 0,57I_a$  <sup>[143,4]</sup>,  $\mathbf{I}' = 0,57I_a$  <sup>[146,8]</sup> ( $x = -30$  m). El primer valor de intensidad coincide con el obtenido para la línea simple circuito (apartado 6.4.2). Las expresiones de  $b'_x$  y  $b'_y$  son análogas a (6.98) y (6.99), pero relativas a  $\vec{\mathbf{B}}'_l$ .

Para obtener las intensidades de cada lazo con el segundo procedimiento es preciso

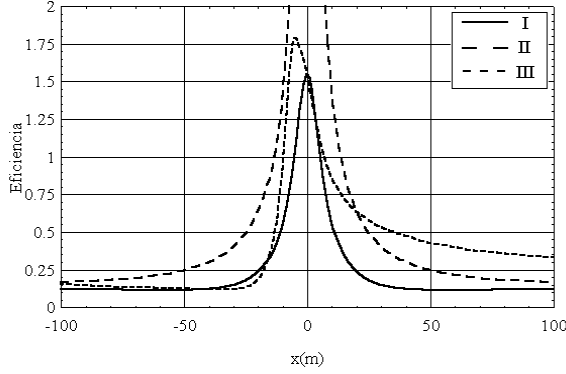


Figura 6.84: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para las disposiciones de lazo activo de la figura 6.54.

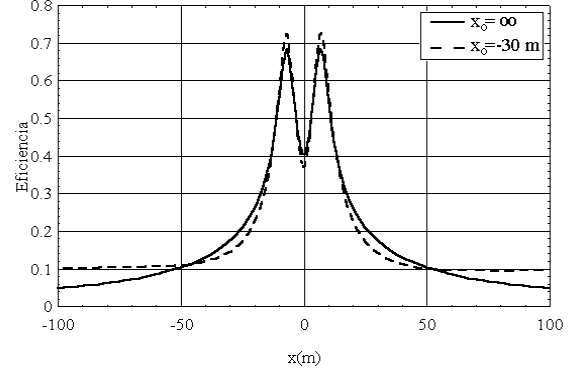


Figura 6.85: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para dos lazos coplanares (procedimiento 1).

resolver el siguiente problema de minimización:

Calcular  $\mathbf{I} = \mathbf{I}'$  de manera que se haga mínimo en  $x_o$  la siguiente función:

$$|\vec{\mathbf{B}}_p(x_o) + \vec{\mathbf{B}}'_p(x_o) + \vec{\mathbf{B}}_l(\mathbf{I}, x_o) + \vec{\mathbf{B}}'_l(\mathbf{I}', x_o)| \quad (6.112)$$

Descomponiendo  $\vec{\mathbf{B}}_l(\mathbf{I} = 1^{\text{lo}}, x_o)$  y  $\vec{\mathbf{B}}'_l(\mathbf{I}' = 1^{\text{lo}}, x_o)$  tal como en (6.98) y (6.99), derivando (6.112) e igualando a cero se obtiene

$$\text{Re}[\mathbf{I}] = \text{Re}[\mathbf{I}'] = \frac{-(b_x + b'_x)\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x - (b_y + b'_y)\text{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y}{(b_x + b'_x)^2 + (b_y + b'_y)^2} \quad (6.113)$$

$$\text{Im}[\mathbf{I}] = \text{Im}[\mathbf{I}'] = \frac{-(b_x + b'_x)\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x - (b_y + b'_y)\text{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y}{(b_x + b'_x)^2 + (b_y + b'_y)^2} \quad (6.114)$$

Aplicando (6.113) y (6.114) a la línea Valdecaballeros-Don Rodrigo se obtiene curvas de eficiencia similares a las de la figura 6.85. Para el caso  $x_o \rightarrow \infty$  las intensidades son las mismas que las obtenidas con el procedimiento 1. Para  $x_o = -30$  m las intensidades son muy similares,  $\mathbf{I} = \mathbf{I}' = 0,57I_a^{144,5}$ .

El tercer procedimiento busca también minimizar (6.112), pero ahora  $\mathbf{I} \neq \mathbf{I}'$ . Deri-

vando (6.112) e igualando a cero resulta

$$\operatorname{Re}[I] = \frac{b'_x \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y - b'_y \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x}{b_x b'_y - b_y b'_x} \quad (6.115)$$

$$\operatorname{Im}[I] = \frac{b'_x \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y - b'_y \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x}{b_x b'_y - b_y b'_x} \quad (6.116)$$

$$\operatorname{Re}[I'] = \frac{b_y \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x - b_x \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y}{b_x b'_y - b_y b'_x} \quad (6.117)$$

$$\operatorname{Im}[I'] = \frac{-b_x \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_y + b_y \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_p + \vec{\mathbf{B}}'_p]_x}{b_x b'_y - b_y b'_x} \quad (6.118)$$

La figura 6.86 muestra la eficiencia obtenida en la línea Valdecaballeros-Don Rodrigo con dos lazos coplanares, y las intensidades del lazo obtenidas según (6.115), (6.116), (6.117) y (6.118). Se han calculado para  $x_o = -100$  m,  $x_o = -30$  m, y  $x_o = 0$  m. Obsérvese que a dichas distancias el campo se anula prácticamente. Sin embargo, se obtienen amplificaciones en otros puntos de la trayectoria transversal, sobre todo en el centro de la línea. Las intensidades requeridas son

- $x_o = -100$  m  
 $I = 1,23 I_a^{-150,8}$   
 $I' = 1,45 I_a^{177,7}$
- $x_o = -30$  m  
 $I = 0,87 I_a^{168,4}$   
 $I' = 0,71 I_a^{63,3}$
- $x_o = 0$  m  
 $I = I' = 0,89 I_a^{143}$

De la observación de las figuras puede decirse que, para cargas similares en ambos circuitos, el primer y segundo procedimiento permiten obtener resultados análogos, siendo más sencillo de implementar el segundo, ya que se requiere la misma intensidad en ambos circuitos. Con ambos procedimientos se consigue una atenuación en toda la trayectoria transversal. Con el tercer procedimiento se obtienen mayores atenuaciones localmente, pero también amplificaciones significativas. Además la intensidad requerida en los lazos es mayor. Los resultados anteriores pueden aplicarse, con ligeras diferencias, al caso en que las cargas sean desiguales. Como ejemplo, la figura 6.87 muestra la eficiencia en



$x_o = -30$  m cuando  $\mathbf{I}'_a = 0,5\mathbf{I}_a$ . En este caso el procedimiento 1 es el único que consigue una atenuación en toda la trayectoria transversal.

En el presente apartado la configuración doble circuito considerada ha sido la superhaz. Se puede obtener la eficiencia de manera análoga con otras configuraciones. Así por ejemplo, la figura 6.88 muestra la eficiencia conseguida con el lazo III de la figura 6.54 para las configuraciones *abc-acb* y *abc-cba* (baja reactancia), e igual carga en ambos circuitos. Se incluye también la eficiencia para la configuración *abc-abc*, ya vista en la figura 6.84. Las figuras 6.89, 6.90 y 6.91 muestran la eficiencia con las mismas configuraciones, cuando se disponen dos lazos coplanares, y las intensidades por los lazos se calculan según los procedimientos 1, 2 y 3 respectivamente. Puede verse de las cuatro figuras una eficiencia similar con las configuraciones *abc-abc* y *abc-acb*. Sin embargo, la configuración de baja reactancia presenta una eficiencia peor en casi todos los puntos, sobre todo conforme la distancia a la línea es mayor. La explicación a este resultado es que el campo creado por la línea de baja reactancia disminuye con la distancia al cubo, mientras que el creado por los dos lazos activos lo hace con la distancia al cuadrado. Conforme la distancia a la línea crece el campo debido a los lazos es más importante que el debido a la propia línea, y se alcanzan valores de campo mayores que sin lazos (la eficiencia es mayor que 1).

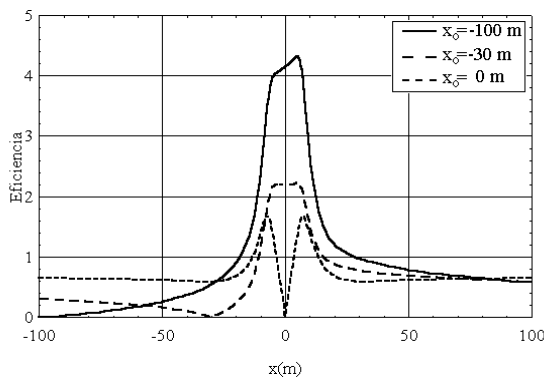


Figura 6.86: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para dos lazos coplanares (procedimiento 3).

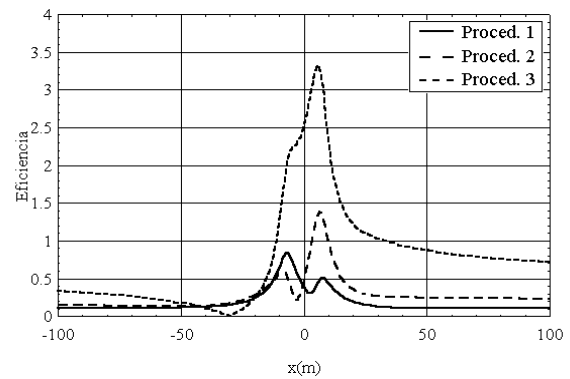


Figura 6.87: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencia con los tres procedimientos cuando  $\mathbf{I}'_a = 0,5\mathbf{I}_a$ , para  $x_o = -30$  m.

Si se observa la eficiencia obtenida para la configuración baja reactancia con lazos pasivos (figura 6.57), no ocurre lo mismo que con activos. Las intensidades inducidas en ambos lazos en el caso pasivo son iguales y de sentido contrario, formando un cuadrupolo. Se vio en el capítulo 5 que un cuadrupolo formado por dos dipolos en la misma disposición que los lazos pasivos creaba un campo que disminuía con la distancia al cubo. Dado que tanto la línea como los lazos pasivos varían con la misma potencia, se obtiene una

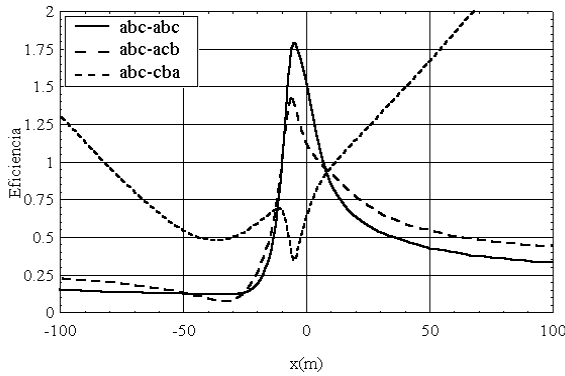


Figura 6.88: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias para lazo III, con  $x_o = -30$  m.

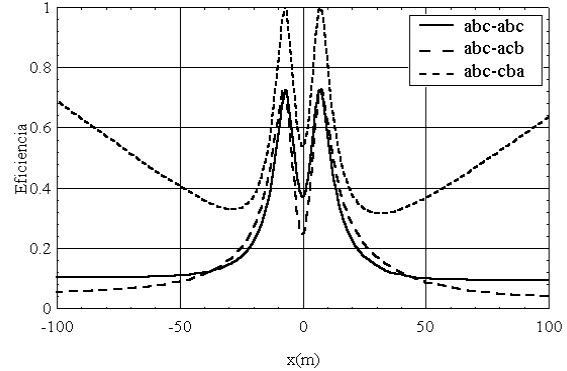


Figura 6.89: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias con dos lazos coplanares, con  $x_o = -30$  m (procedimiento 1).

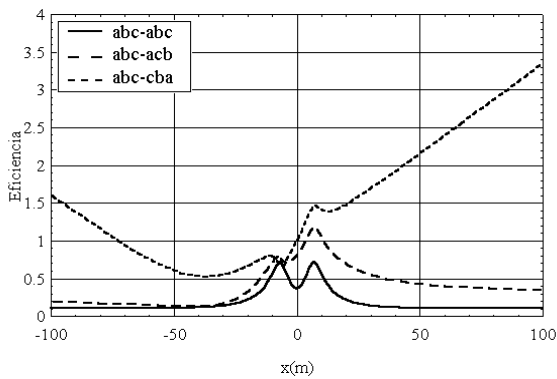


Figura 6.90: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias con dos lazos coplanares, con  $x_o = -30$  m (procedimiento 2).

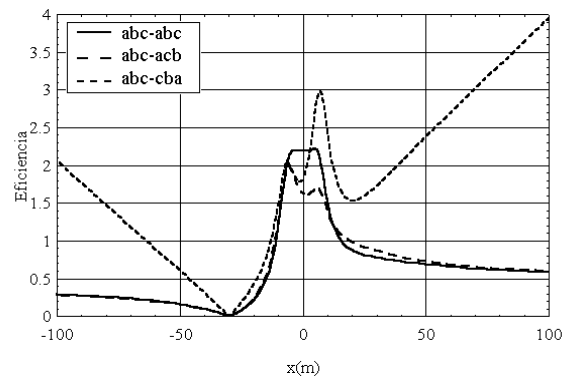


Figura 6.91: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencia con dos lazos coplanares, con  $x_o = -30$  m (procedimiento 3).

eficiencia menor que 1 para todo  $x$ . Esta estrategia se puede aplicar también al caso activo, haciendo que las intensidades en los lazos sean iguales y de sentido contrario. La figura 6.92 muestra la eficiencia conseguida para  $\mathbf{I} = -\mathbf{I}'$ .

En la configuración baja reactancia, si la carga en ambas líneas es distinta, el campo debido a la línea y a los lazos varía con la distancia al cuadrado, y se mejora sensiblemente la eficiencia con los procedimientos 1, 2 y 3. La figura 6.93 muestra de nuevo la eficiencia para la línea de baja reactancia con el procedimiento 1 (figura 6.89), obtenida con  $\mathbf{I}'_a = 0,5\mathbf{I}_a$ , junto con la deducida suponiendo  $\mathbf{I}'_a = \mathbf{I}_a$ . Por último la figura 6.94 muestra la eficiencia con dos lazos coplanares pasivos, donde se observa también una mejora de la eficiencia respecto a la misma carga en ambos circuitos.

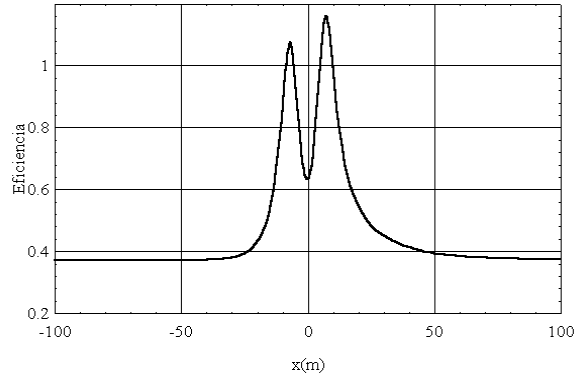


Figura 6.92: Línea doble circuito vertical. Eficiencia obtenida para configuración de baja reactancia cuando  $I = -I'$

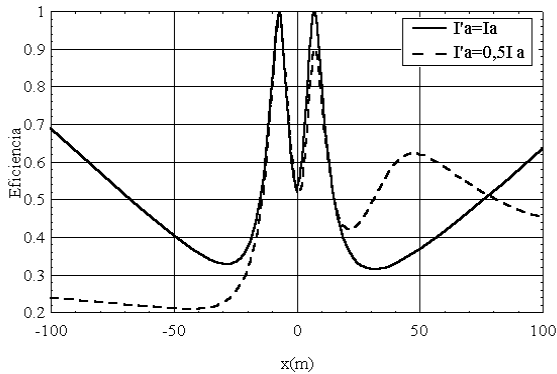


Figura 6.93: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias obtenidas con la configuración de baja reactancia, al insertar dos lazos coplanares activos, y  $x_o = -30$  m (procedimiento 1).

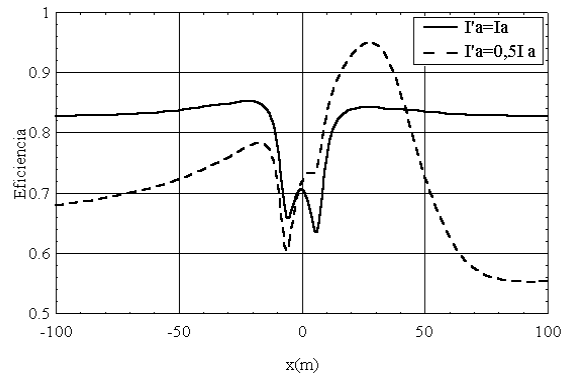


Figura 6.94: Línea Valdecaballeros-Don Rodrigo. Eficiencias conseguidas con la configuración de baja reactancia, al insertar dos lazos coplanares pasivos.

### 6.4.5 Componentes de secuencia inversa y homopolar

Se determina a continuación la intensidad a inyectar al lazo cuando existen además componentes de secuencia inversa y homopolar en la intensidad de la línea. Las expresiones (6.96) y (6.97), obtenidas sin considerar la naturaleza de la corriente, siguen siendo válidas. Tal como se hizo en el caso pasivo, el campo  $\vec{B}_p$ , creado por la línea, puede descomponerse en

$$\vec{B}_p = \vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p2} + \vec{B}_{p0} \quad (6.119)$$

debidos a cada secuencia. Sustituyendo (6.119) en (6.96) y (6.97), las componentes real e imaginaria de la intensidad puede descomponerse a su vez en tres términos dependientes

de las componentes directa, inversa y homopolar del campo

$$\operatorname{Re}[\mathbf{I}_i] = \frac{b_x \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_{pi}]_x - b_y \operatorname{Re}[\vec{\mathbf{B}}_{pi}]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.120)$$

$$\operatorname{Im}[\mathbf{I}_i] = \frac{b_x \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_{pi}]_x - b_y \operatorname{Im}[\vec{\mathbf{B}}_{pi}]_y}{b_x^2 + b_y^2} \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.121)$$

donde  $b_x$  y  $b_y$  están definidos en (6.98) y (6.99).

Se vio al inicio del apartado 6.3.1 que cuando la secuencia de fases es *acb* cambia el signo de la componente imaginaria del lazo respecto a la secuencia *abc*. Esto ocurrirá también con la secuencia inversa de intensidad respecto a la secuencia directa:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1^* \quad (6.122)$$

Para obtener  $\mathbf{I}_0$  se aplica (6.120) y (6.121), teniendo en cuenta que el campo  $\vec{\mathbf{B}}_p$ , debido a la línea, es el creado por tres intensidades en fase. Se determina a continuación, a modo de ejemplo, el valor de  $\mathbf{I}_0$  cuando se desea minimizar el campo lejos de la línea (100 m o más). El campo debido a la componente homopolar será similar en todas las configuraciones de conductores en simple circuito, y vendrá dado, a partir de (3.17), por

$$\vec{\mathbf{B}}_{p0} = \frac{3\mu_0 \mathbf{I}_0}{2\pi r} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) \quad (6.123)$$

El campo debido al lazo horizontal viene dado por (3.140):

$$\vec{\mathbf{B}}_{t0} = \frac{\mu_0 s \mathbf{I}_{t0}}{2\pi r^2} (\sin 2\theta \vec{u}_x - \cos 2\theta \vec{u}_y) \quad (6.124)$$

A partir de (6.124) se obtienen  $b_x$  y  $b_y$ . Sustituyendo en (6.120) y (6.121) se obtiene la intensidad que minimiza el campo en un punto definido por  $(r, \theta)$ :

$$\mathbf{I}_0 = \frac{3r \mathbf{I}_{p0}}{s} \cos \theta \quad (6.125)$$

Obsérvese de la expresión que la intensidad, y por ende la mitigación, dependen del ángulo  $\theta$ . Es de prever entonces mitigación en un semieje  $x$ , pero amplificación en el otro. Esto se observa en la figura 6.95, que representa la eficiencia para  $x_o = -30$  m, en ausencia y presencia de componente homopolar, correspondiente a la línea de la figura 6.11 con lazo coplanar ( $s = 29,4$  m). Debido al efecto contraproducente de la intensidad  $\mathbf{I}_0$ , la ventaja que supone su inyección en el lazo es pequeña. Esto se observa en la figura 6.96, donde se representa la eficiencia en presencia y ausencia de  $\mathbf{I}_0$ , cuando existe una componente homopolar del 5%.

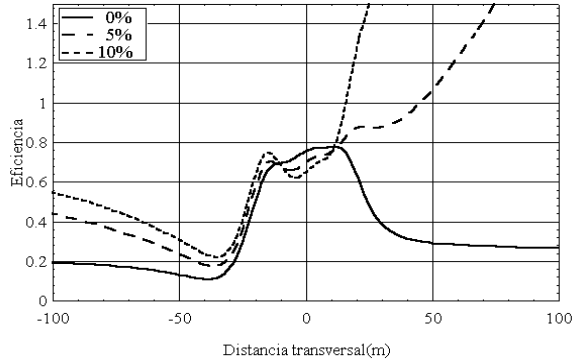


Figura 6.95: Línea horizontal. Eficiencias obtenidas con lazo activo en ausencia y presencia de componente homopolar ( $x_o = -30$  m).

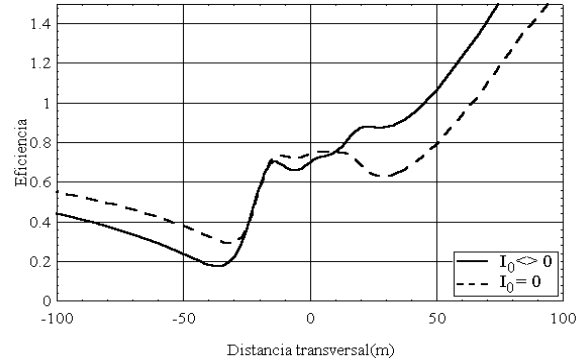


Figura 6.96: Línea horizontal. Eficiencias obtenidas con lazo activo en presencia y ausencia de  $I_0$ , cuando la componente homopolar es del 5% ( $x_o = -30$  m).

## 6.5 Resumen y conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha analizado la posibilidad de emplear, como pantallas mitigadoras, lazos pasivos sin compensación (apartado 6.2), con compensación serie (apartado 6.3), y lazos activos (apartado 6.4). Para ello se ha desarrollado la formulación necesaria, en la que se obtienen las inductancias propias y mutuas entre lazos y fases. Se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- La resistencia del conductor es un factor de importancia secundaria cuando el lazo es pasivo sin compensar, o activo.
- Las configuraciones que permiten una mayor reducción de campo con lazo pasivo y activo son las coplanares (horizontal y vertical), siendo muy sensible dicha reducción a la distancia lazo-fase. Para una distancia fase-lazo de 5 m se obtienen reducciones de hasta el 35 %.
- Con un lazo pasivo se obtienen también reducciones en la configuración triangular, pero se limita a un 25%. Si en lugar de un lazo se colocan dos la reducción aumenta, acercándose a los niveles conseguidos por la configuración coplanar.
- Para la configuración doble circuito vertical, disposición superhaz de fases, se obtienen reducciones de casi el 40% con la inserción de dos lazos pasivos coplanares. Para la configuración de baja reactancia la reducción conseguida es menor.
- La inserción de un condensador permite reducir el campo, en el caso coplanar, más de un 50% respecto al lazo sin condensador, siendo de un 30% para la configuración triangular.

- El lazo activo permite obtener rendimientos del apantallado de casi el 100% para configuraciones coplanares, en puntos alejados de la línea (100 m). Para puntos cercanos a la línea la eficiencia está en torno a 0,2. Con la disposición triangular se consiguen peores resultados ( $FA \approx 0,45$ ). Una manera de mejorar el apantallado en dicha configuración es insertar un conductor más en la pantalla, formando un sistema trifásico equilibrado. Se han obtenido valores de  $FA \approx 0,3$ .
- Para la configuración doble circuito vertical, con dos lazos activos coplanares, se han analizado tres procedimientos para determinar las intensidades por los lazos. Se consiguen reducciones del 100% con el procedimiento 3 (regulación independiente de la intensidad en cada lazo). Aunque en la configuración baja reactancia se pueden obtener también reducciones significativas, sólo se consiguen en zonas reducidas de la trayectoria transversal, excepto cuando se alimenta cada lazo con la misma intensidad en módulo y desfase  $\pi$ .
- La presencia de componente homopolar reduce la eficacia de los lazos pasivos y activos. Los lazos pasivos dispuestos simétricamente respecto a la línea no inducen una intensidad como respuesta al campo creado por la componente homopolar. Con lazos activos sí puede eliminarse el campo creado por la componente homopolar, pero a costa de incrementar el campo rápidamente para otros puntos de la trayectoria transversal.

# Capítulo 7

## Diseño del vano de prueba

### 7.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han desarrollado diversos modelos matemáticos para el cálculo del campo magnético creado por líneas eléctricas. Asimismo, se han analizado las posibilidades mitigadoras de varios métodos, siendo uno de ellos el de inserción de lazos activos y pasivos. Para validar los modelos desarrollados, tanto para el cálculo del campo generado por la línea y lazos, como para la intensidad inducida en los lazos, se ha diseñado y montado una línea a escala, compuesta por un sólo vano, con la que se obtienen campos magnéticos similares a los existentes en líneas reales [10]. Si el factor de proporcionalidad geométrica de la línea es  $k_p$ , la intensidad por los conductores del vano es  $k_p$  veces menor que por la línea real, y las longitudes del vano de prueba y de la línea son iguales, es fácil deducir que  $\vec{\mathbf{B}}_L(x, y) = \vec{\mathbf{B}}_V(x/k_p, y/k_p)$ , siendo  $\vec{\mathbf{B}}_L(x, y)$  el campo debido a la línea, y  $\vec{\mathbf{B}}_V(x/k_p, y/k_p)$  el debido al vano a escala. En efecto, de (3.17) se tiene que

$$\vec{\mathbf{B}}_L(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{1 \leq k \leq 3} \frac{\mathbf{I}_k \vec{u}_z \times (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{1 \leq k \leq 3} \frac{\mathbf{I}_k/k_p \vec{u}_z \times (1/k_p \vec{r} - 1/k_p \vec{r}_k)}{|1/k_p \vec{r} - 1/k_p \vec{r}_k|^2} = \vec{\mathbf{B}}_V(1/k_p \vec{r}) \quad (7.1)$$

Esta equivalencia completa línea real-vano de prueba es difícil de conseguir cuando se emplea lazo pasivo. La intensidad inducida en un lazo viene dada por (6.1), donde la fuerza electromotriz se calcula a partir de (6.7). Suponiendo despreciable el efecto de la tierra, los términos que multiplican a las intensidades en (6.7) no varían en un vano a escala, por lo que  $\mathbf{V}'$  se reducirá  $k_p$  veces. Para que la intensidad inducida se reduzca en la misma proporción el denominador de (6.1) ha de ser el mismo. Para ello se habrá de cumplir que los parámetros  $R'$  y  $X'$  del lazo no varíen en el vano de prueba. De (6.3) se observa que, para que  $X'$  no varíe, se ha de cumplir que el radio geométrico medio del lazo de prueba sea  $k_p$  veces menor que el correspondiente real, lo cual significa que habría que escoger un

conductor de lazo de prueba con un diámetro aproximadamente  $k_p$  veces menor, pero con la misma resistencia  $R'$  que su homólogo real. Dado que el valor de  $k_p = 10$  (este dato se obtendrá más adelante), esta condición obligaría a emplear un conductor de resistividad mucho menor que la del lazo real, lo cual, en líneas de transporte, no es fácil de cumplir, ya que el conductor del lazo real (cardinal, rail, condor) posee ya una resistividad muy pequeña. Como ejemplo, considérese la línea Puentes-Montearenas (figura 6.11) con un lazo coplanar de anchura  $s = 29,4$  m (conductor cardinal). La intensidad por el lazo es  $I = 0,17I_a^{157}$  A. En el vano de prueba, con  $k_p = 10$  e igual conductor, se obtiene  $I = 0,25I_a^{160}$  A. Empleando (6.53), válido para puntos alejados de la línea, se obtiene una eficiencia de 0,69 (línea real) y 0,58 (vano de prueba). Por tanto se van a obtener reducciones mayores de campo en el vano de prueba que en la línea equivalente. Este aspecto no invalida la utilidad del vano de prueba, por cuanto sólo afecta al ensayo con lazo pasivo, y, además, lo que se pretende no es tanto reproducir con total fidelidad el campo que existiría en el caso real, sino validar un modelo matemático que pueda simular a posteriori las condiciones de una línea real.

En este capítulo se definen las características geométricas y eléctricas del circuito principal, formado por los conductores de fase y el equipo de alimentación y medida, y del circuito de lazos, compuesto por los lazos y equipo de alimentación y medida correspondientes. Se supondrá que la línea real es de 400 kV.

## 7.2 Circuito principal

Los parámetros a definir del circuito principal son:

- Parámetros geométricos y eléctricos del vano
  - Factor de proporcionalidad  $k_p$
  - Valor eficaz de la intensidad por fase
  - Altura sobre el suelo del punto más bajo de la catenaria ( $h$ )
  - Longitud del vano de prueba ( $l$ )
  - Configuraciones de fases
  - Tipo de conductor
- Equipo de alimentación

El equipo de medida se analiza en el apartado 7.5.



### 7.2.1 Parámetros geométricos y eléctricos del vano

La elección de  $k_p$  se basa en que, tanto los valores característicos de la corriente de fase, como de las distancias en el vano, sean aceptables desde el punto de vista del tamaño y potencia de los equipos de alimentación, así como de la facilidad en el montaje y desmontaje de las distintas configuraciones de conductores. Se adopta un factor  $k_p = 10$ . Para líneas de 400 kV con una carga media se considera una intensidad típica de 500 A. Si  $k_p = 10$  la intensidad por cada fase del vano de prueba será 50 A, un valor relativamente fácil de obtener con equipos de alimentación convencionales. Por otro lado, con dicho valor de  $k_p$  se obtienen distancias entre fases del orden del metro, así como alturas del punto mínimo de cada fase al suelo también pequeñas, lo cual facilita el montaje del vano. Dado que la altura de medida se fijó en 1 m para el vano real, en el de prueba se adoptará 0,1 m.

En cuanto a la altura al suelo, hay que tener en cuenta lo indicado en el Reglamento de Líneas Eléctricas Aéreas de Alta Tensión (artículo 25), según el cual la altura mínima al terreno para una línea de 400 kV viene dada por

$$h_{min} = 5,3 + \frac{400}{150} \approx 8 \text{ m} \quad (7.2)$$

Teniendo esto en cuenta, y dado que en las líneas reales no se suele bajar de 9 m, se adopta 0,9 m en el vano de prueba.

En cuanto a la longitud del vano de prueba, no está claramente definida, ya que se supondrá la longitud de la línea real infinita. Para su determinación se han tenido en cuenta cuatro aspectos principales:

1. El espacio físico disponible.
2. Las líneas aéreas se componen, en general, de cantones formados por varios vanos. Si se desea reproducir con un sólo vano de prueba el campo creado por una línea aérea hay que aceptar que se comete un error al no considerarse el campo creado por los vanos adyacentes. El error será menor conforme mayor sea  $l$ .
3. Se ha de evitar que el campo magnético de los equipos eléctricos emplazados en uno de los extremos del vano, así como de los cables de alimentación del vano y lazos, interfieran el campo creado por el vano en el centro.
4. La longitud de los lazos pasivos está limitada por la longitud del vano. Si el vano es excesivamente corto la corriente inducida en el lazo será menor que la máxima teórica que se puede obtener, y la mitigación será menor de lo esperado.

El vano de prueba se montó en la subestación de D. Rodrigo, situada en Utrera (Sevilla). Después de analizar el interior de la subestación, se optó por instalarlo en una zona de fácil acceso y lo más lejana posible de campos externos creados por las instalaciones de la propia subestación. Dicha zona permitía una longitud de vano de  $l = 15$  metros. La figura 7.1 muestra la diferencia porcentual entre el campo generado por un vano de dicha longitud y el debido a un cantón compuesto por el mismo vano con otros 3 a cada lado, configuración horizontal, distancia entre fases 0,97 m,  $h = 0,9$  m, y flecha 4 m (valores a la escala del vano de prueba). Se ha calculado el campo a lo largo de una trayectoria transversal en el centro del vano. La diferencia máxima es menor del 8%, valor que se considera aceptable. Si se mide el campo en un extremo del vano la diferencia es muy superior (figura 7.2). Conviene, por tanto, si se desea reproducir en el vano de prueba el campo creado por una línea indefinida, realizar las medidas en el centro del vano. Lo anterior es aplicable también al campo creado por el lazo (activo o pasivo).

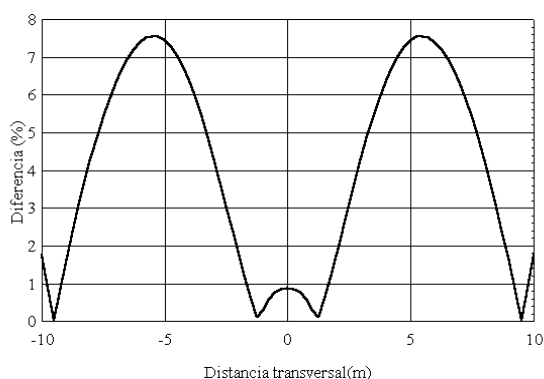


Figura 7.1: Diferencia porcentual entre el campo generado por un vano de prueba finito ( $l = 15$  m) y el debido a un cantón compuesto por 7 vanos (trayectoria transversal en medio del vano central).

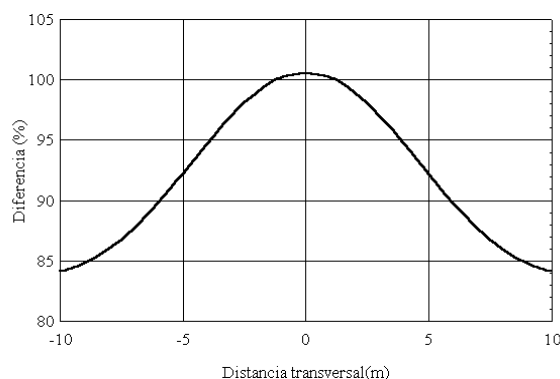


Figura 7.2: Diferencia porcentual entre el campo generado por un vano de prueba finito ( $l = 15$  m) y el debido a un cantón compuesto por 7 vanos (trayectoria transversal en un extremo del vano central).

El tercer punto se puede considerar cumplido localizando el equipo alimentador del vano a una distancia de unos 3 m de uno de los extremos del vano, ya que el campo generado por dicho equipo (sobre todo transformadores de potencia) decae con el cubo de la distancia.

Queda comprobar si para dicha longitud la intensidad inducida en el lazo es significativa. Para un vano a escala de la línea Puentes-Monteañenas, de longitud 15 m, con un lazo de anchura  $s = 2,94$  m e igual longitud, resulta  $I = 0,21I_a^{161}$  A, lo que representa una reducción del 15% respecto a la intensidad inducida en el vano de prueba de

longitud infinita, pero que sigue siendo mayor que la intensidad inducida en la línea real equivalente.

Las configuraciones de fases consideradas corresponden a disposiciones típicas en líneas de 400 kV, como la doble circuito vertical, muy empleada en España, y otras como la horizontal, vertical simple circuito, y triangular. Las configuraciones vertical y triangular reproducen a escala las disposiciones de las figuras 6.27 y 6.40 respectivamente. La configuración horizontal se diseñó con una distancia entre fases similar a la vertical.

Aunque es un aspecto secundario, la flecha de los conductores de lazo y vano se ha determinado también a escala. Para un vano de 150 m, y un conductor al-ac típico de líneas de 400 kV (rail, cardinal), la flecha es de unos 4 m. Se adopta por tanto como flecha para el vano de prueba 0,4 m.

Se está en condiciones de fijar las coordenadas de las posiciones de los puntos de suspensión de los conductores de fase para las distintas configuraciones consideradas, tal como se muestra en la tabla 7.1. En la figura 7.3 se muestra la disposición de los puntos de suspensión en uno de los extremos del vano.

Tabla 7.1: Coordenadas de las posiciones de puntos de suspensión de los conductores de fase del vano de prueba para las distintas configuraciones consideradas.

Disposición	Coordenadas (cm)	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 1'	Fase 2'	Fase 3'
Horizontal (H)	x	-85	0	85	-	-	-
	y	130	130	130	-	-	-
Bandera (B)	x	-64	-73	-68	64	73	68
	y	298	214	130	298	214	130
Triangular (T)	x	-76	0	76	-	-	-
	y	130	202	130	-	-	-

Queda por último elegir el conductor de las fases del vano de prueba, sabiendo que ha de soportar una intensidad nominal de 50 A. Dicha elección, desde el punto de vista del campo magnético, es irrelevante, ya que, como se vio en el apartado 3.1, el diámetro del conductor no afecta al campo magnético, excepto en puntos próximos a la superficie del mismo. Dado que no se pretende determinar el campo alrededor del conductor, sino a 0,1 m del suelo, este parámetro no va a afectar al campo magnético medido. Por ello han de considerarse otros criterios (coste, facilidad de montaje/desmontaje, requerimientos del bastidor soporte). Dada la corta longitud del vano (del orden de 15 m) no parecen existir grandes diferencias entre unos conductores y otros en términos de coste, por lo que se

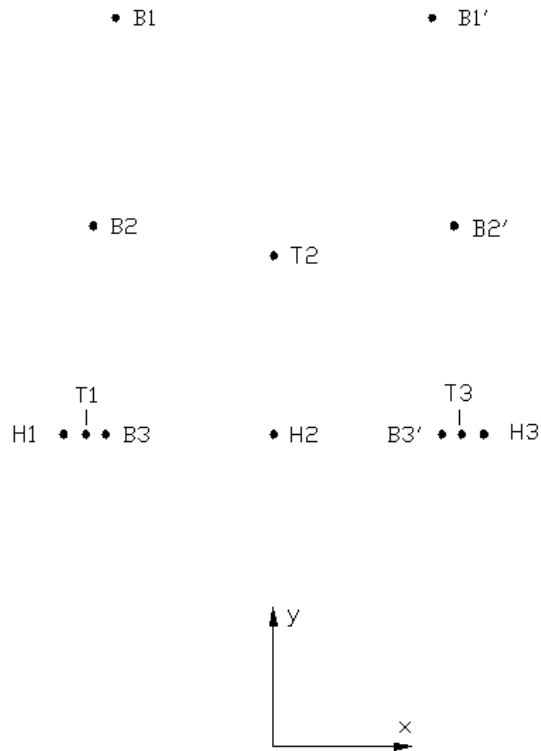


Figura 7.3: Posiciones de los puntos de suspensión de los conductores de fase.

escoge Al 25 mm<sup>2</sup>, un conductor ligero y de fácil manejo.

### 7.2.2 Equipo de alimentación

Se han analizado dos alternativas en el equipo de alimentación, basadas en el empleo de transformadores de intensidad o variadores de potencia.

#### Alimentación mediante transformadores de intensidad

Consiste en conectar las tres fases al primario de tres transformadores de intensidad, y cortocircuitarlas en los extremos (figura 7.4). Si se desea, uno de los extremos del vano se puede poner a tierra para aumentar la seguridad. Las resistencias permiten regular la intensidad a inyectar al vano.

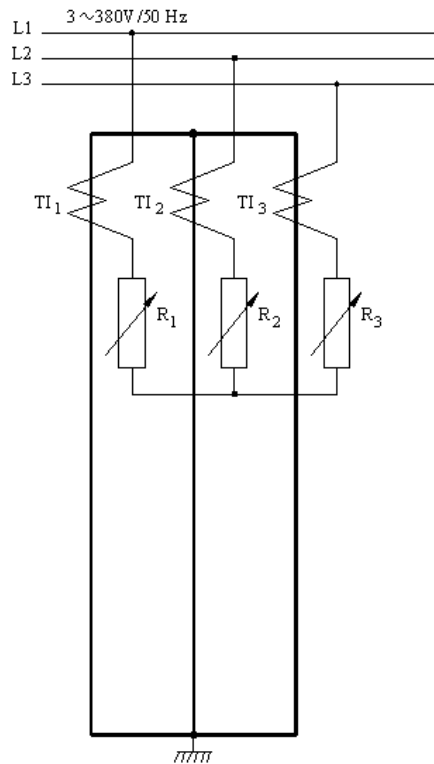


Figura 7.4: Esquema eléctrico del circuito principal (alimentación mediante transformadores de intensidad).

Para una intensidad nominal por cada fase del primario de 50 A, y por el secundario de 1 A, la relación será de 50/1.

### Alimentación mediante variadores de potencia

Este método consiste en el empleo de variadores de potencia monofásicos cuyo secundario alimenta una resistencia en serie con cada fase (figura 7.5).

Para permitir el empleo de variadores convencionales de 220/220 V, se insertan los transformadores TI<sub>1</sub>, TI<sub>2</sub>, y TI<sub>3</sub>, y las resistencias R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> y R<sub>3</sub>.

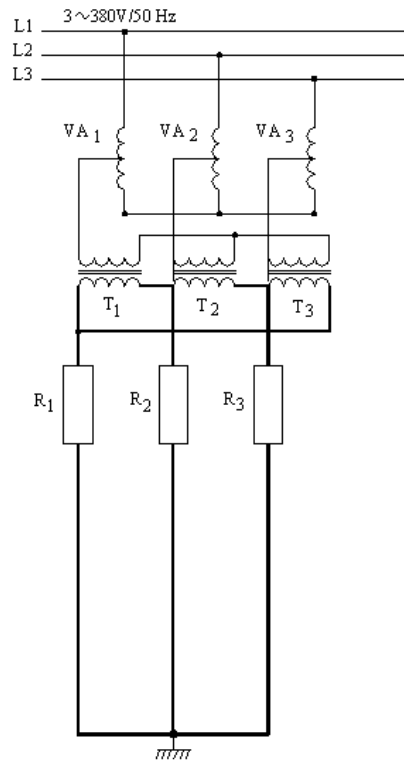


Figura 7.5: Esquema eléctrico del circuito principal (alimentación mediante variadores de potencia).

### 7.3 Circuito de lazos

Se determinan a continuación las características de los lazos, así como del circuito de alimentación de los mismos. En concreto, los parámetros a fijar son

- Longitud y anchura de cada lazo
- Posición de cada lazo
- Conductor a emplear
- Circuito de alimentación de los lazos activos

El equipo de medida se analiza en el apartado 7.5.

### 7.3.1 Parámetros geométricos y eléctricos de los lazos

La longitud de los lazos se fija al mismo valor que la longitud del vano, ya que, como se ha visto, conforme crece la longitud mayor será la intensidad inducida y la mitigación. Se vio en el capítulo 6 que la distancia fase-lazo es un parámetro importante a la hora de obtener una reducción mayor o menor de campo. Dado que es un parámetro que, en la práctica, puede variar en función de la longitud de los vanos, el tipo de conductor, el tipo de apoyo, etc., no tiene un valor determinado. Por ello puede adoptarse uno cualquiera. Se fijará el valor correspondiente a la distancia mínima fase-masa según el Reglamento de Líneas Aéreas de Alta Tensión (artículo 25):

$$0,1 + \frac{400}{150} = 2,77 \simeq 2,8 \text{ metros} \quad (7.3)$$

La tabla 7.2 muestra las posiciones de los puntos de suspensión de los diferentes lazos considerados. Cada lazo podrá probarse en calidad de pasivo y activo. En la figura 7.6 se muestra la disposición de los puntos de suspensión en uno de los extremos del vano. Se han representado también las posiciones de los puntos de suspensión de los conductores del vano, ya vistas en la figura 7.3. Todas las configuraciones anteriores se han analizado en el capítulo 6. En la tabla 7.2 se ha acompañado al identificador de cada lazo la configuración de conductores de fase cuyo campo pretende mitigar.

Se vio en el capítulo 6 que el tipo de conductor no afectaba sensiblemente a la intensidad inducida en el lazo pasivo. Debido a que en el vano de prueba el lazo pasivo posee una inductancia menor, como se vio en el apartado 7.1, la componente resistiva de la impedancia tendrá un efecto negativo mayor. Por ello se adopta como conductor del lazo uno con resistencia pequeña, el rail, cuyo diámetro exterior es 29,61 mm y la resistencia eléctrica a 25°C y 50 Hz 0,06201  $\Omega/m$  (según norma ASTM B-232). El *rgm* se ha calculado, siendo 0,79313 veces el radio.

Tabla 7.2: Coordenadas de las posiciones de los puntos de suspensión de los conductores del lazo.

Disposición	Conductor 1		Conductor 2	
	x (cm)	y (cm)	x (cm)	y (cm)
Horizontal (h)	-113	130	113	130
Bandera vertical lazo 1 (v1)	-66	102	-66	326
Bandera vertical lazo 2 (v2)	66	102	66	326
Bandera vertical lazo 3 (v3)	0	-5	0	102
Triangular (t)	-104	130	104	130

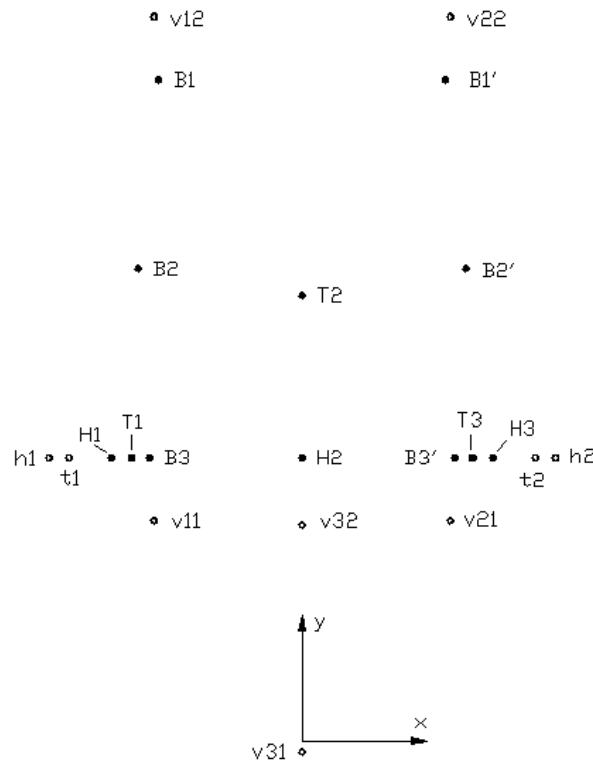


Figura 7.6: Posiciones de los puntos de suspensión de los conductores de fase y lazos

Se ha analizado la posibilidad de incluir la compensación serie en el vano de prueba. La capacidad óptima que resulta es del orden de 0,5 F, obteniéndose una reducción del campo en torno al 40% respecto al lazo sin condensador. Dado que el valor de la capacidad óptima que resulta es muy grande, se puede incluir una inductancia de valor  $L_l$  y un condensador de valor  $C_l$  de modo que se cumpla:

$$\frac{1}{\omega C_l} - \omega L_l = \frac{1}{\omega C_{opt}} \quad (7.4)$$

Esta solución conlleva un problema importante. Se vio en el apartado 6.3 que cuando existe compensación serie la resistencia del lazo afecta muy significativamente a la reducción conseguida del campo. Por ello, la resistencia de la inductancia  $L_l$  (incluyendo contactos) ha de ser lo menor posible. En caso contrario la atenuación conseguida por la compensación serie puede ser incluso inferior a la solución sin compensar. Se ha comprobado que esto ocurre con los máximos valores de factor de calidad en inductancias



(del orden de 1000), por lo que se decidió no probar la compensación serie en el vano de prueba.

### 7.3.2 Equipo de alimentación del lazo activo

Se ha visto en el apartado 6.4 que para conseguir la máxima reducción de campo es necesario actuar sobre el módulo y desfase de la intensidad por el lazo. Es preciso por tanto disponer para el lazo activo de una alimentación que regule la intensidad tanto en módulo como en desfase. Para ello se ha adoptado el esquema de la figura 7.7(a). Consta de dos variadores monofásicos conectados en serie en el secundario, y un transformador de aislamiento. El lazo está conectado a las bornas A y B. La figura 7.7(b) muestra el diagrama fasorial de tensiones, en el que se observa que, variando las relaciones de transformación  $a_1$  y  $a_2$ , es posible variar el desfase de  $V_{AB}$  en un rango de  $120^\circ$ . Invertiendo las bornas del primario de ambos variadores (de modo que se puedan obtener valores de  $a_1$  y  $a_2$  negativos) se puede alimentar el lazo entre los bornes A y B mediante una tensión  $V_{AB}$  con cualquier desfase. Esto se observa en las figuras 7.8, 7.9 y 7.10.

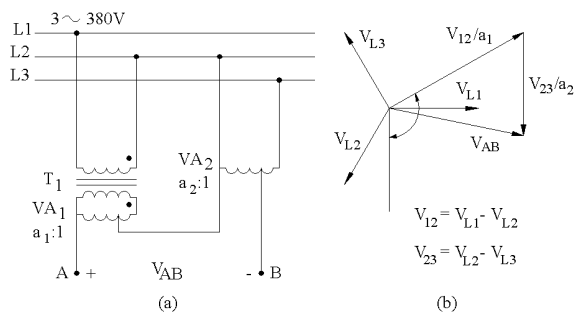


Figura 7.7: Conexionado de los variadores y fador de  $V_{AB}$  para  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$ .

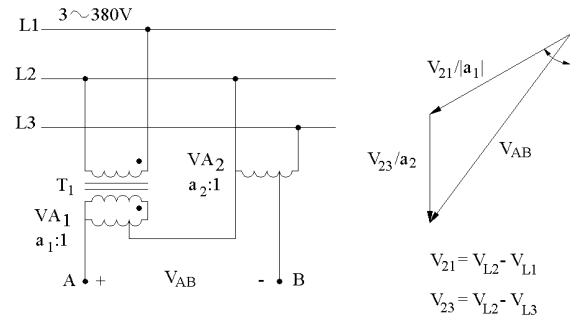


Figura 7.8: Conexionado de los variadores y fador de  $V_{AB}$  para  $a_1 < 0$  y  $a_2 > 0$ .

A partir de la simulación, es posible determinar las intensidades máximas por los distintos lazos considerados. Para ello se calcularon las intensidades óptimas para conseguir la máxima atenuación en diversos puntos a lo largo de la trayectoria transversal, observándose que los valores de intensidad requeridos eran inferiores a la intensidad nominal de las fases. Por tanto se adopta 50 A como la intensidad nominal por los lazos.

Al igual que en el circuito principal, se han analizado dos posibilidades, basadas en el empleo de transformadores de intensidad o de transformadores de potencia.

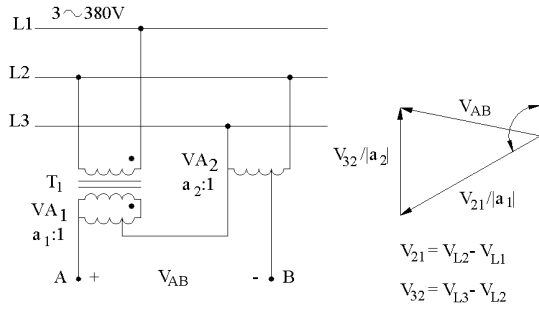


Figura 7.9: Conexionado de los variadores y faser de  $V_{AB}$  para  $a_1 < 0$  y  $a_2 < 0$ .

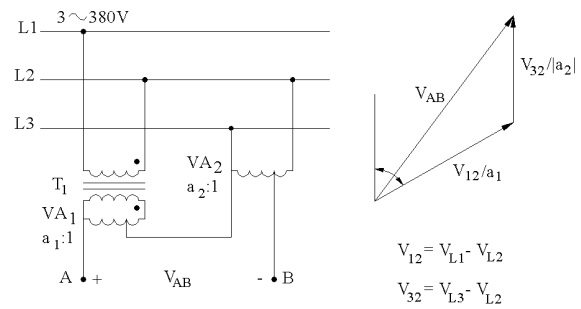


Figura 7.10: Conexionado de los variadores y faser de  $V_{AB}$  para  $a_1 > 0$  y  $a_2 < 0$ .

### Alimentación mediante transformadores de intensidad

En la figura 7.11 se muestra el esquema eléctrico del circuito de mitigación activo. Se compone del desfasador, analizado previamente, la resistencia  $R$ , y un transformador de intensidad  $TI_1$  cuyo secundario está conectado en serie con la resistencia, y el primario alimenta el lazo.

Debido a la pequeña tensión requerida en bornas de A y B, es difícil regular dicha tensión, por lo que se inserta una resistencia en paralelo. Otra virtualidad de la resistencia  $R$  es hacer que el circuito en bornas de AB sea resistivo, con lo que es fácil obtener la relación entre la intensidad por el lazo y la tensión

$$I_l = \frac{V_{AB}}{R} r_i \tag{7.5}$$

siendo  $r_i$  la relación de intensidades de  $TI_1$ .

### Alimentación mediante transformadores de potencia

En la figura 7.12 se muestra el esquema eléctrico del circuito de mitigación con lazo, utilizando transformadores de potencia ( $T_1$  y  $T_2$ ) en lugar de transformadores de intensidad. El secundario de ambos transformadores alimenta directamente el vano, que está en serie con una resistencia para aumentar la tensión. Dado que por la resistencia va a circular una intensidad máxima de 50 A, conviene que su valor óhmico sea pequeño, para evitar una disipación de potencia excesiva.

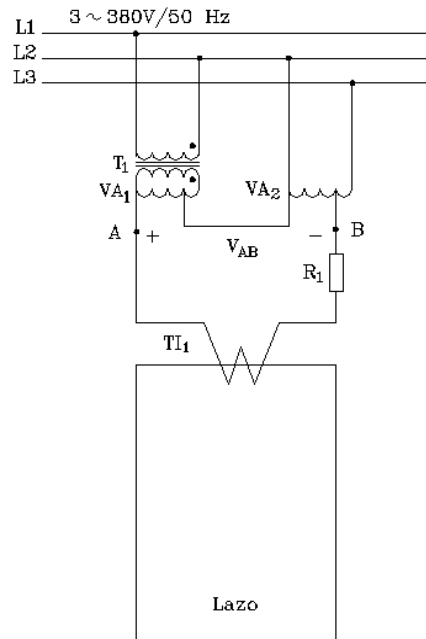


Figura 7.11: Esquema eléctrico del circuito de alimentación del lazo activo mediante transformadores de intensidad.

## 7.4 Diseño final del circuito de alimentación

Las dos alternativas mostradas en el apartado anterior fueron ensayadas con éxito en el laboratorio. No obstante, se observó que cuando se empleaba transformador de intensidad, éste se saturaba (disminuía la relación de transformación) cuando la impedancia conectada al primario era superior en varias veces al cociente  $\frac{\text{Potencia de precisión}}{(\text{Intensidad nominal primario})^2}$ , a pesar de que la corriente y potencia disipadas eran inferiores a los valores nominales. Aunque las impedancias de lazo y fase no alcanzaban dicho valor, se decidió adoptar la otra alternativa. La figura 7.13 muestra el esquema eléctrico final, formado por dos circuitos de alimentación de fases, dos circuitos de alimentación de lazos, conmutadores, y equipos de medida. Con este esquema se pueden alimentar dos circuitos independientes, como el doble circuito vertical. Se muestran también algunos equipos no mencionados en el apartado 7.3. Se analizan a continuación.

- Para reproducir en el vano de prueba una cierta componente homopolar por las fases, uno de los circuitos de fase se conecta en un extremo a tierra a través de un electrodo en anillo con 4 picas, y mediante el conmutador S2 se permite el paso de la componente homopolar al vano. Para obtener el desequilibrio se alimenta cada fase a una tensión distinta. Aunque de las simulaciones se ha comprobado que no

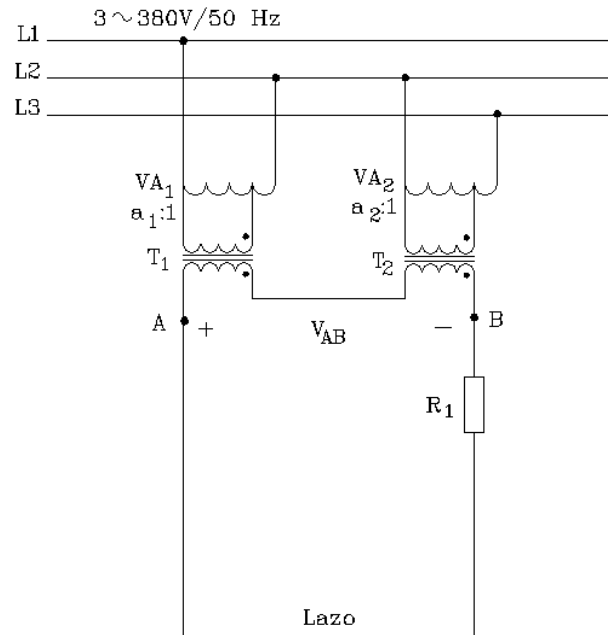


Figura 7.12: Esquema eléctrico del circuito de alimentación del lazo activo mediante transformadores de potencia.

es necesario, en previsión de posibles errores en la estimación de la resistividad del terreno (no medida en el momento de realizar el diseño del montaje), se han añadido dos resistencias adicionales  $R_5$  y  $R_6$ , que permiten conseguir un desequilibrio aún mayor.

- Mediante los conmutadores S4 y S8 se permite variar la secuencia de fases de ambos circuitos.
- Los conmutadores S5, S6, S5' y S6' permiten cambiar el signo de las relaciones de transformación de los variadores  $VA_4$ ,  $VA_5$ ,  $VA'_4$ , y  $VA'_5$ , obteniéndose en la intensidad por el lazo el desfase deseado.

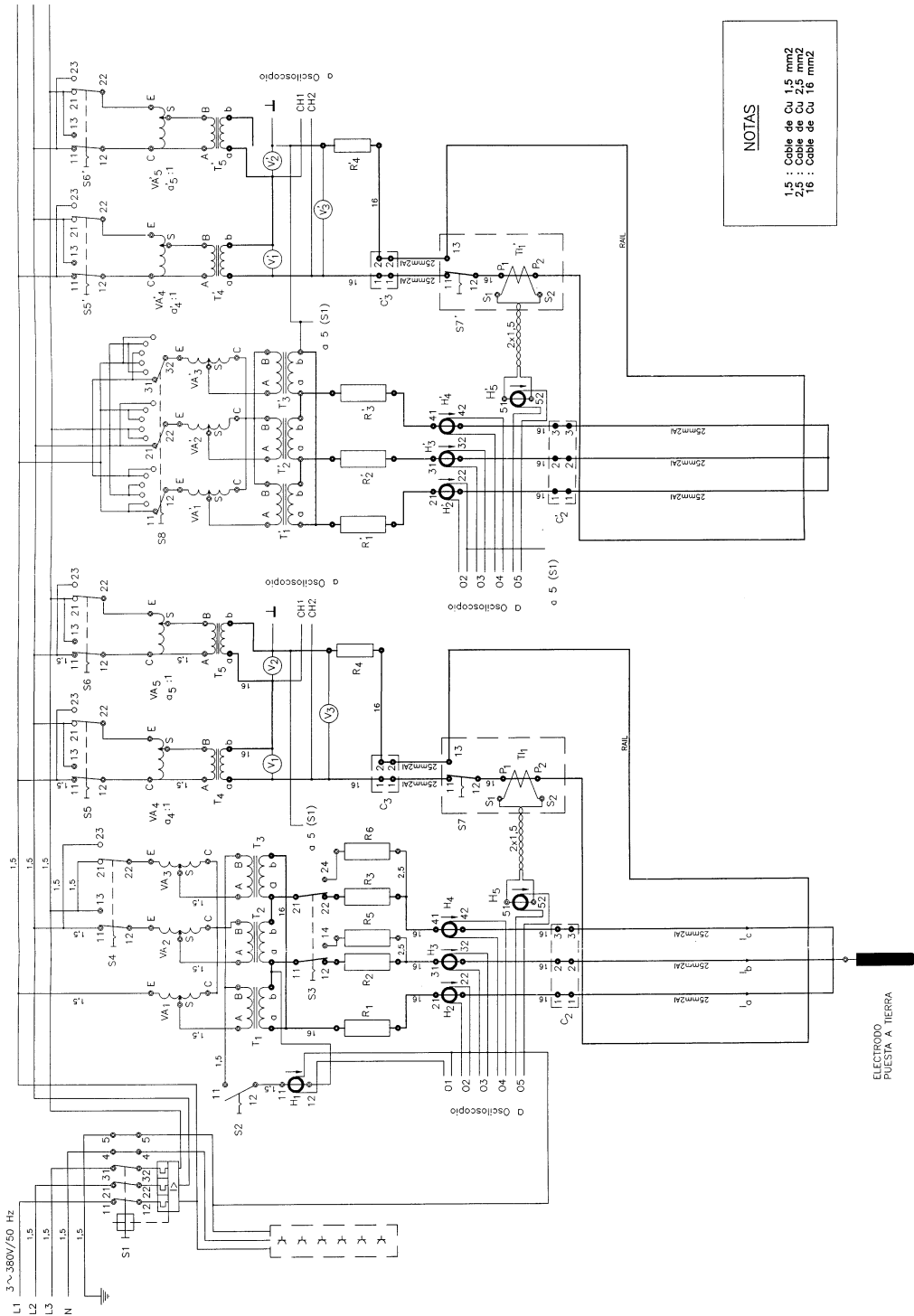


Figura 7.13: Esquema eléctrico de los circuitos principal y de lazo

## 7.5 Equipo de medida

En la figura 7.13 se muestran también diversos equipos de medida, que se describen a continuación. Se indican también los posibles errores en las medidas efectuadas, que han de ser tenidos en cuenta a la hora de comparar los resultados obtenidos de las medidas, con los calculados.

- Los voltímetros  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V'_1$ ,  $V'_2$ , y  $V'_3$ , se emplean para ajustar la intensidad a inyectar al lazo. El procedimiento se verá en el apartado 7.8.1.

- **Medida de intensidad instantánea**

Mediante la visualización de la intensidad instantánea por el osciloscopio se puede determinar el desfase entre dos corrientes, así como el contenido de armónicos. La medida de la intensidad instantánea se efectuó mediante dos osciloscopios digitales Tektronix TDS 210, cuyos registros fueron almacenados en un ordenador. Sus características principales son las siguientes:

- Dos canales
- Velocidad de muestreo:  $10^6$  muestras/s (muestreo simultáneo en cada canal)
- Longitud registro: 2500 puntos/canal
- Resolución del convertidor analógico-digital (A/D): 8 bits
- Error de resolución del convertidor:  $\pm 0,8\%$  del fondo de escala
- Límite de error de la medida CC, modo de adquisición promedio:  $\pm(4\%$  de la lectura  $+0,1$  div  $+ 1$  mV)

La intensidad fue convertida en tensión mediante sensores de efecto Hall ( $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$ , y sus homólogos con apóstrofo), cuyas características son las siguientes:

- Intensidad nominal( $I_N$ ): 50 A
- Límite de error a 25°C:  $\pm 0,5\%$  de  $I_N$
- Linealidad:  $\pm 0,1\%$  de  $I_N$
- Error de offset: 20 mV
- Número de vueltas
  - \*  $H_1$ : 6
  - \*  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H'_2$ ,  $H'_3$ ,  $H'_4$ : 1
  - \*  $H_5$ ,  $H'_5$ : 4

Para obtener el desfase entre dos señales se ajustó la base de tiempos a  $bt = 1$  ms, con lo que el intervalo de muestreo es  $(10 \cdot bt)/2500 = 4 \mu\text{s}$ , que corresponde a una resolución de  $0,072^\circ$ . En cuanto al error del desfase, se estimó alimentando ambos canales con la misma señal, y calculando la diferencia de fase, para  $bt = 1$  ms y distintos valores de la señal. Se obtuvo un valor para el límite de error de aproximadamente  $1^\circ$ , y un valor típico de  $0,5^\circ$ . Este error tiene en cuenta el debido al sensor Hall y al osciloscopio.

Para medir el desfase de la corriente por cada lazo se utilizó un transformador de intensidad ( $TI_1$ ,  $TI'_1$ , en la figura 7.13), de relación  $100/5$  y clase  $0,5$ . Para dicha clase el ángulo de error en minutos para  $0,1 I_n$  es  $\pm 60$  minutos, y para  $0,2 I_n$   $\pm 40$  minutos, siendo  $I_n$  la intensidad nominal del transformador. Por tanto, el error total en la medida del desfase de la corriente por el lazo ha de tener en cuenta también el debido al transformador de intensidad de medida.

- **Medidas geométricas**

Comprende las coordenadas de los puntos de suspensión de los conductores y la altura mínima de los mismos.

Estas medidas se realizaron con un flexómetro. Debido a las características del suelo, compuesto por grava de tamaño mediano, era dificultoso comprobar su horizontalidad, así como medir con precisión la altura de los conductores. Por ello, en función del tamaño medio de la grava, se estimó un límite de error para la altura de  $\pm 1$  cm.

- **Medida de intensidad eficaz**

Se contó con una pinza amperimétrica Kyoritsu (no mostrada en la figura 7.13), cuyas principales características son:

- Rango de corriente: 200 A/2000 A
- Límite de error para corriente alterna:  $\pm 1,5\%$  de la lectura  $\pm 2$  dígitos

Para el rango de corrientes empleado (200 A), el límite de error resulta ser  $\pm 1,7\%$ .

Se disponía además de la hoja de calibración de la pinza, que muestra una lectura de 100,4 A para 100 A de valor nominal.

- **Medida de campo magnético**

Se empleó un medidor EMDEX II con las siguientes características:

- Medidor de campo resultante de tres bobinas situadas en las tres direcciones del espacio
- Resolución del convertidor A/D: 10 bits
- Error de resolución del convertidor:  $\pm 0,05\%$  del fondo de escala
- Máxima resolución del medidor:  $0,01 \mu T$
- Límite de error de la medida: Máximo de ( $\pm 5\%$  de fondo de escala,  $\pm 10\%$  de la medida).
- Error típico (ensayo de calibración):  $1\%$  de la lectura
- Rango de frecuencia
  - \* Banda completa: 40 a 800 Hz
  - \* Banda armónica: 100 a 800 Hz
- Amplificador de ganancia ajustable a tres escalas:
  - \* 0:  $0,00-1,279 \mu T$
  - \* 1:  $0,7-20,46 \mu T$
  - \* 2:  $11,2-327,36 \mu T$

Dado que el convertidor es de 10 bits la resolución será  $100/(2^{10}) = 0,098\%$  del fondo de escala, y el error de resolución  $\pm 0,049\%$  del fondo de escala.

En cuanto a las escalas empleadas, el medidor opera de forma totalmente automática, cambiando de una a otra en función del valor medido. Si la señal de salida del convertidor A/D está por debajo de 35 cuentas la ganancia del amplificador es aumentada por el propio sistema operativo, cambiándose a la escala superior. De este modo el error de resolución es inferior al  $100/35 \approx 3\%$  de la medida, salvo para medidas de campo inferior a  $1,279 \cdot 35/1024 \approx 0,044 \mu T$ , ya que no existe una escala superior. Igualmente, cuando se superan 870 cuentas el medidor cambia a la escala inferior, en previsión de un posible desbordamiento del convertidor. Por ello no se alcanza nunca el fondo de escala, excepto en la escala más reducida ( $327,36 \mu T$ ).



## 7.6 Montaje del vano de prueba

Tal como se indicó en el apartado 7.2.1, el vano de prueba se instaló en el interior de la subestación que REE tiene en D. Rodrigo (Utrera). Para ello se dispusieron cuatro postes de madera, a los cuales se sujetaron unos perfiles con taladros para fijar tanto los conductores de fase como los lazos (figura 7.14).



Figura 7.14: Estructura soporte para el vano de prueba

El equipo de alimentación se dispuso en una mesa tal como se muestra en la figura 7.15.

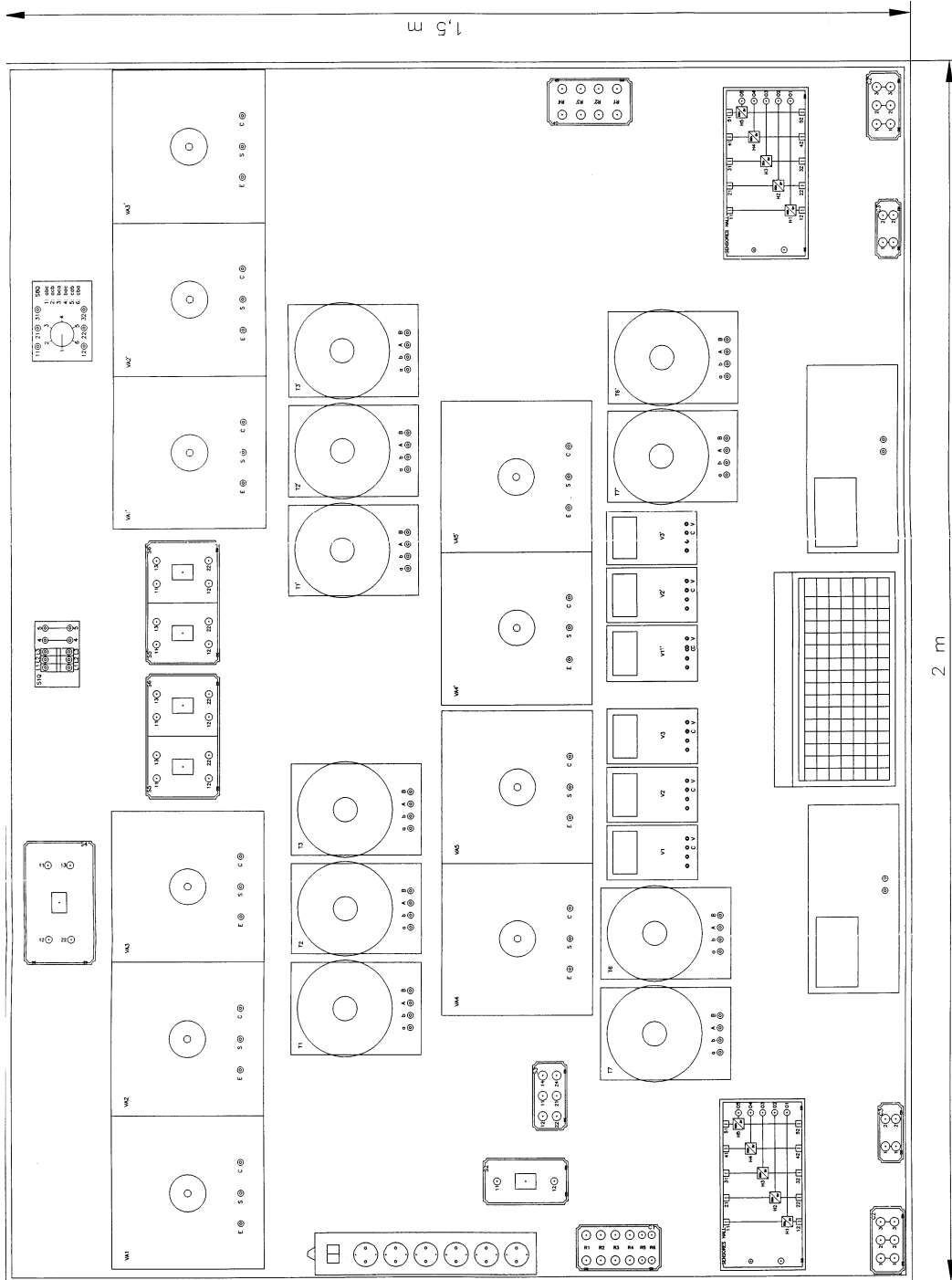


Figura 7.15: Distribución de los equipos de alimentación y medida

En la figura 7.16 se muestra el aspecto final de la mesa. Debido a la excesiva disipación en las resistencias, éstas se montaron externamente (figura 7.17). En la figura 7.18 se muestra un detalle de la sujeción de los conductores al bastidor. Obsérvese que en el lazo (conductor rail) se ha insertado, mediante dos palas de compresión, el transformador de intensidad.

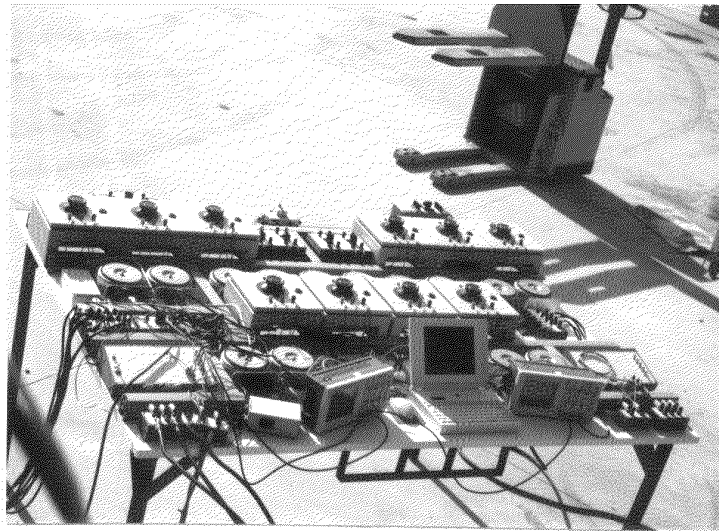


Figura 7.16: Mesa con los equipo de alimentación y medida

## 7.7 Campos externos

Como se ha indicado anteriormente, el vano de prueba se instaló en una zona donde el campo externo fuera lo más reducido. A pesar de ello, el nivel de campo externo era lo suficientemente importante como para tenerlo en cuenta. En consecuencia, se identificaron las principales fuentes, siendo dos líneas aéreas de 400 kV, una de doble circuito (Valdecaballeros-D. Rodrigo, VAL-DRO; Guillena-D. Rodrigo, GUI-DRO) y otra de simple circuito (D. Rodrigo-Pinar, DRO-PIN) (figura 7.19).

Para tener en cuenta el efecto de ambas líneas era insuficiente la medida del campo previo a cada ensayo, ya que dicha medida correspondía al campo resultante, y no a cada una de las componentes vectoriales. Por ello se realizó un modelo que obtuviese, en función de la carga de las líneas, el campo producido por ellas a lo largo de la trayectoria transversal central del vano de prueba ( $z = 0$ ). El cálculo del campo se basó en la hipótesis de conductores rectilíneos finitos, dado que se observó un ligero incremento del error al

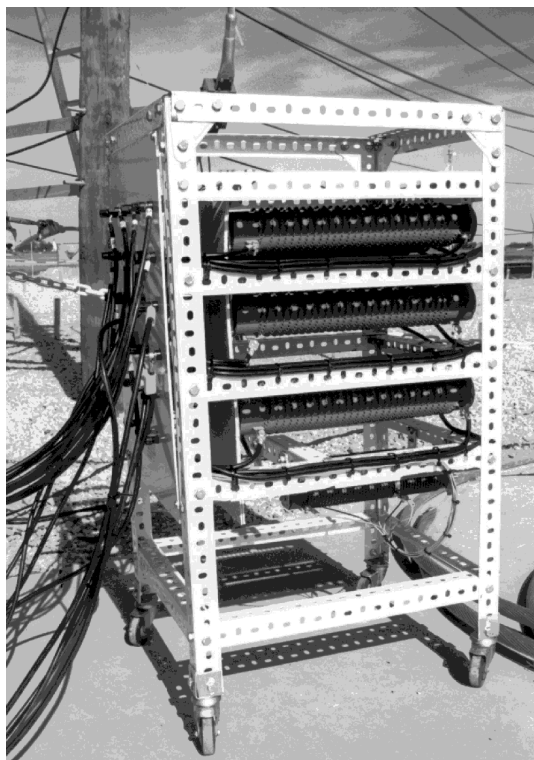


Figura 7.17: Bloque de resistencias monofásicas



Figura 7.18: Extremo del vano y transformador de intensidad insertado en el lazo

considerarlos infinitos. Las figuras 7.20 y 7.21 muestran dos ejemplos de curvas de campo medidas y calculadas, correspondientes a dos días con cargas distintas. Para otras cargas se obtienen resultados similares. Obsérvese que el error es inferior al 10%.

Los valores máximos medidos en dicha trayectoria oscilaron entre  $0,11 \mu\text{T}$  (días de menor consumo) y  $0,30 \mu\text{T}$  (días de mayor consumo), medidos en  $x = 10 \text{ m}$ .

La intensidad por las líneas se obtuvo a partir de curvas de potencias activa y reactiva, información facilitada por REE. Sin embargo, esto no era suficiente, ya que para poder relacionar el campo externo con el creado por el vano de prueba, era necesario conocer el desfase entre ambos sistemas trifásicos. Para ello se dispuso de la secuencia de transformaciones trifásicas desde las barras de 400 kV hasta la alimentación a la mesa (figura 7.22). De dicha figura se observa que existe un desfase de  $\pi/3 \text{ rad}$ , en adelante, de la intensidad en baja tensión.

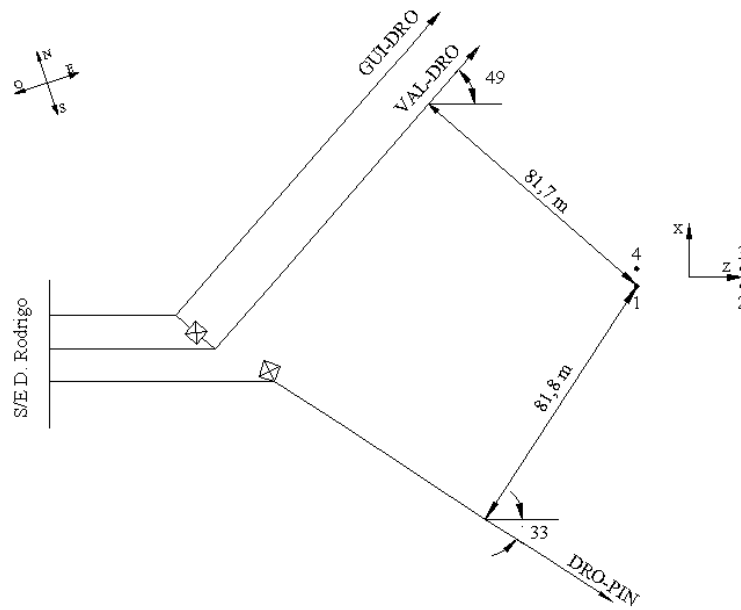


Figura 7.19: Vano de prueba, delimitado por los cuatro postes de madera, y líneas que llegan a la subestación.

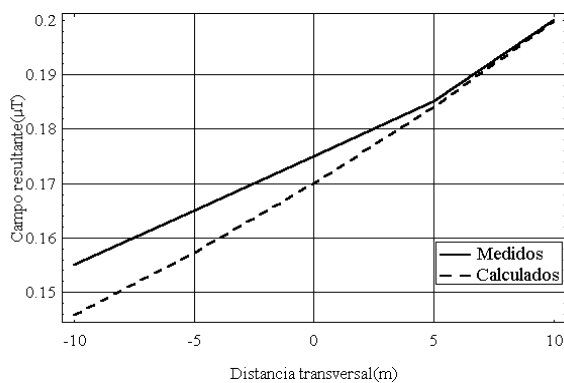


Figura 7.20: Campo externo. Valores medidos y calculados a lo largo de la trayectoria transversal en el centro del vano (Fecha: 7/2/00).

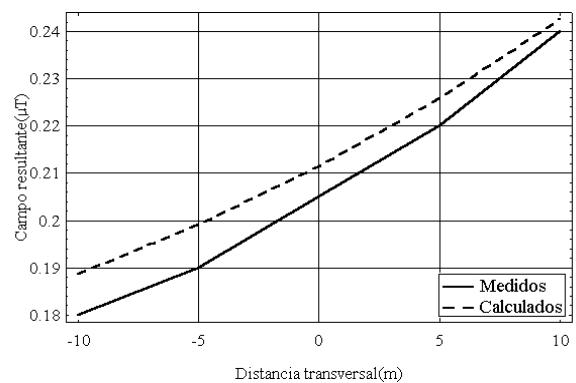


Figura 7.21: Campo externo. Valores medidos y calculados a lo largo de la trayectoria transversal en el centro del vano (Fecha: 27/3/00).

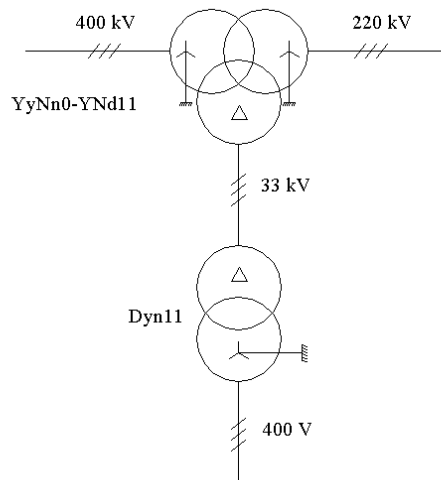


Figura 7.22: Esquema de alimentación a la baja tensión

## 7.8 Ensayos realizados. Procedimiento

Se describe en este apartado el procedimiento llevado a cabo en cada ensayo. Cada uno viene definido por los siguientes parámetros:

- Configuración de conductores de fase (tabla 7.1)
- Existencia o no de lazos
- Disposición del lazo pasivo o activo (tabla 7.2)
- Secuencia de fases
- Intensidad nominal de fases (50 A ó 25 A)
- Existencia o no de componente homopolar

Combinando los distintos parámetros se obtiene un gran número de posibilidades. En total se han realizado unos 70 ensayos. El procedimiento seguido para realizar cada ensayo ha sido el siguiente:

1. Preparación de las configuraciones de fase y lazo a ensayar.

2. Ajuste de la flecha de los conductores de fase y lazo. Debido a las variaciones de temperatura a lo largo del día, la flecha de los conductores variaba unos centímetros de un ensayo para otro, por lo que había que ajustar dicha flecha, antes de cada ensayo, hasta conseguir una altura aproximada de 0,9 m en el centro del vano.
3. Lectura del campo previo al creado por el vano, en los puntos extremos de la trayectoria transversal central del vano.
4. Energización del vano. Ajuste de la intensidad por las fases y lazos, mediante los variadores de potencia.
5. Captura, mediante los osciloscopios, de la intensidad instantánea por las fases y lazos. Registro de dichos valores en el ordenador.
6. Medida del campo magnético a lo largo de la trayectoria transversal central del vano, entre  $x = -10$  m y  $x = 0$  m.
7. En  $x = 0$  m, medida de la intensidad eficaz por cada fase, con la pinza amperimétrica.
8. Medida del campo magnético a lo largo de la trayectoria transversal, entre  $x = 0$  m y  $x = 10$  m.
9. Desenergización del circuito
10. Medida de la altura mínima al suelo
11. Medida del campo externo

Cabe hacer algunas aclaraciones al procedimiento anterior.

- La medida del campo debido al vano se efectuó entre  $x = -10$  m y  $x = 10$  m (plano  $z = 0$  m), en las posiciones de unas estacas, fijadas al suelo a intervalos de 50 cm. Para mantener el medidor a la misma altura se construyó un soporte para el mismo, de modo que la altura de las bobinas fuera aproximadamente de 0,1 m (figura 7.23). En algunos ensayos se ha medido el campo en otras dos hileras de estacas situadas en  $x = -6$  m y  $x = 6$  m. Con ello se pretendía analizar el error en la medida del campo cerca de los extremos del vano.
- La medida de la intensidad en cada fase se realiza en la mitad del proceso de lectura de campo ( $x = 0$ ), ya que se comprobó que la intensidad fijada en la fase 4 no se mantenía constante, sino que variaba alrededor de un 3% durante el tiempo que duraba el ensayo (unos 20 minutos). Se decidió entonces medirla en mitad del ensayo.

- La medida nuevamente de la altura mínima al suelo y el campo externo, un vez terminado el ensayo, se efectúa en previsión de un posible cambio de los valores durante el mismo.

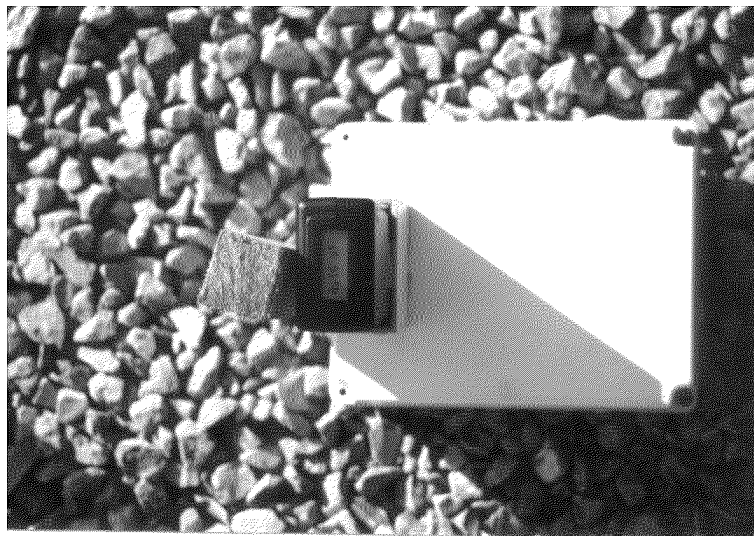


Figura 7.23: Medidor de campo situado en uno de los puntos de medida

El ajuste de la intensidad por los lazos merece una explicación más detenida.

### 7.8.1 Ajuste de la alimentación al lazo activo

En el apartado 6.4 se determinó la intensidad a inyectar al lazo activo para minimizar el campo en un punto determinado en dirección perpendicular a la línea. Para realizar los ensayos con lazo activo es preciso ajustar las relaciones  $a_4$  ( $a'_4$ ) y  $a_5$  ( $a'_5$ ) de los variadores  $T_4$  ( $T'_4$ ) y  $T_5$  ( $T'_5$ ) (figura 7.13). Por ello se obtienen a continuación los valores de las relaciones en función de la intensidad por el lazo  $I_l$ . Se supondrá en lo que sigue que los transformadores y variadores son ideales.

Suponiendo que  $V_{L1}$  tiene desfase nulo se tiene (figura 7.24)

$$V_{12} = V_{L1} - V_{L2} = \sqrt{3}V_{L1}e^{j\frac{\pi}{6}} \tag{7.6}$$

$$V_{23} = V_{L2} - V_{L3} = \sqrt{3}V_{L1}e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{7.7}$$

Dado que la impedancia del lazo  $|Z_l| \ll R_4$ , siendo  $R_4$  la resistencia en serie con el lazo, se cumple que

$$V_{AB} = I_l R_4 = V_{AC} + V_{CB} = \frac{V_{12}}{a_4 a_6} + \frac{V_{23}}{a_5 a_7} \tag{7.8}$$



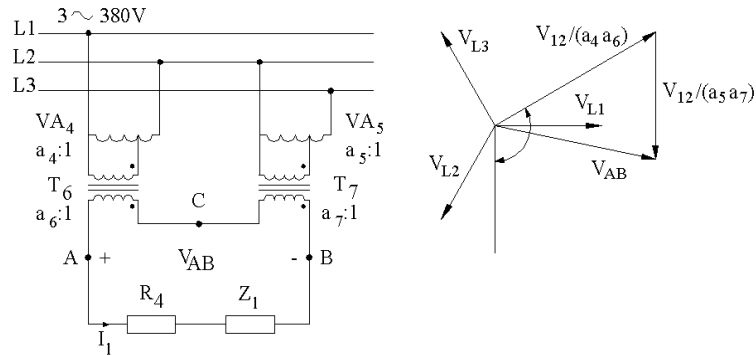


Figura 7.24: Alimentación al lazo activo, representado por la impedancia  $Z_l$

Sustituyendo (7.6) y (7.7) en (7.8), y despejando  $a_4$  y  $a_5$  se tiene

$$a_4 = \frac{3V_{L1}}{2a_6 R_4 \operatorname{Re}[\mathbf{I}_l]} \quad (7.9)$$

$$a_5 = \frac{3V_{L1}}{a_7 R_4 (\operatorname{Re}[\mathbf{I}_l] - \sqrt{3} \operatorname{Im}[\mathbf{I}_l])} \quad (7.10)$$

Los valores de  $a_4$  y  $a_5$  pueden ser positivos y negativos.

Se ha tomado como referencia en el análisis anterior el fasor  $\mathbf{V}_{L1}$ . Sin embargo, como se vio en el apartado 6.4, la intensidad del lazo venía dada en función de la intensidad  $\mathbf{I}_a$  (figura 7.13), por lo que es conveniente revisar (7.9) y (7.10). Suponiendo que la impedancia de cada fase del vano es puramente resistiva, y dado que hay una transformación estrella/triángulo, se cumple que  $\mathbf{V}_{L1}$  adelanta a  $\mathbf{I}_a$ ,  $\pi/6$  en secuencia directa, y  $-\pi/6$  en secuencia inversa. (7.9) y (7.10) quedan

$$a_4 = \frac{3V_{L1}}{2a_6 R_4 \operatorname{Re}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}]} \quad (7.11)$$

$$a_5 = \frac{3V_{L1}}{a_7 R_4 (\operatorname{Re}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}] - \sqrt{3} \operatorname{Im}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}])} \quad (7.12)$$

siendo

$$\mathbf{c} = e^{-j\frac{\pi}{6}} \rightarrow \text{secuencia directa} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{c} = e^{j\frac{\pi}{6}} \rightarrow \text{secuencia inversa} \quad (7.14)$$

Se vio en el apartado 7.7 que la intensidad por la alimentación a la mesa adelantaba  $\pi/3$  rad a la intensidad por las líneas. Teniendo en cuenta que la intensidad por el vano retrasa  $\pi/6$  respecto de la intensidad por la alimentación a la mesa, se cumplirá que el sistema trifásico de intensidades por el vano adelanta  $\pi/6$  rad al correspondiente de las líneas de 400 kV.

Dado que el primario de los variadores está alimentado a una tensión no estabilizada en 380 V, y las relaciones de transformación de los variadores y transformadores son dependientes de la carga, un procedimiento más exacto para regular la alimentación al lazo activo es a partir de las tensiones  $V_{AC}$  y  $V_{CB}$  que directamente alimentan el lazo (figura 7.24). Sustituyendo (7.11) y (7.12) en (7.8) se tiene

$$V_{AC} = \frac{2R_4 \operatorname{Re}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}]}{\sqrt{3}} \quad (7.15)$$

$$V_{CB} = R_4 \left( \frac{\operatorname{Re}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}]}{\sqrt{3}} - \operatorname{Im}[\mathbf{I}_l \mathbf{c}] \right) \quad (7.16)$$

Para el circuito rotulado con (') de la figura 7.13 se obtienen expresiones similares de  $a'_4$  y  $a'_5$ .

## 7.9 Ensayos realizados. Resultados

Se comparan en este apartado, para los ensayos más representativos, las medidas de campo con los valores estimados a partir de los modelos desarrollados en los capítulos previos. Los ensayos que se verán son los siguientes:

1. Disposición horizontal de conductores
  - Sin lazo
  - Lazo coplanar pasivo (h1)
  - Lazo coplanar activo (h1)
2. Disposición triangular de conductores
  - Sin lazo
  - Lazo pasivo (t1)
  - Lazo activo (t2)
3. Disposición vertical de conductores

- Sin lazo
  - Lazo pasivo (v1)
  - Lazo activo (v1)
  - Lazo pasivo (v2)
  - Lazo activo (v2)
  - Sin lazo (componente homopolar)
  - lazo pasivo v1 (componente homopolar)
4. Disposición doble circuito vertical (*abc-abc*)
- Sin lazo
  - Lazo pasivo (v1)
  - Lazo activo (v1)
  - Lazos pasivos (v1 y v2)
  - Lazos activos (v1 y v2)
  - Lazo pasivo (v3)
  - Lazo activo (v3)
5. Disposición doble circuito vertical (*abc-cba*)
- Sin lazo
  - Lazo pasivo (v1)
  - Lazo activo (v1)

### 7.9.1 Disposición horizontal de conductores

La figura 7.25 muestra una vista de la disposición horizontal de conductores, junto con el lazo.

#### Sin lazo

Este ensayo consiste en alimentar el vano con un sistema trifásico de intensidades cuyo valor eficaz es aproximadamente 50 A. Debido a la dificultad para equilibrar los tres variadores, se midió una componente de secuencia inversa del 2%. Dicha componente se ha tenido en cuenta en el modelo. Se calculó también, a partir de los registros de los osciloscopios, el nivel de armónicos de la intensidad, obteniéndose una distorsión armónica



Figura 7.25: Conductores de fase en disposición horizontal y lazo de mitigación

total THD=0,7%. Se ha medido también, con la opción *banda armónica* del medidor de campo, la distorsión armónica del mismo, obteniéndose un THD de  $\approx 1\%$ . Como debe ocurrir, este valor es similar al THD de la corriente de fase. Para una lectura de 100 unidades el armónico fundamental  $B_f$  será

$$100 = \sqrt{B_f^2 + (0,01 \cdot B_f)^2} \rightarrow B_f = 99,995 \quad (7.17)$$

por lo que el error al no considerar las componentes armónicas resulta ser del 0,005%, muy inferior al propio límite de error del medidor. Para otros ensayos se han obtenido niveles similares de armónicos, con lo que no se considerará la influencia de las componentes armónicas.

La figura 7.26 muestra las curvas de campo resultante medidas y calculadas, suponiendo conductores rectilíneos finitos. La figura 7.27 muestra el error obtenido en el campo, por debajo del 10% en casi todos los puntos. El error medio en el intervalo de medida es del 5%. Para tener en cuenta el efecto del campo de fondo se ha descontado, al campo medido con el vano energizado, el medido antes de alimentar el vano.

Se ha calculado también el campo considerando la curva catenaria. Sin embargo, la diferencia con respecto al modelo rectilíneo es mínima. Para trayectorias transversales no situadas en el centro del vano, es preciso tener en cuenta la catenaria. Una aproximación muy válida, mencionada en el apartado 3.1, consiste en considerar el conductor rectilíneo, pero a la altura real, teniendo en cuenta la catenaria. La figura 7.28 muestra las curvas

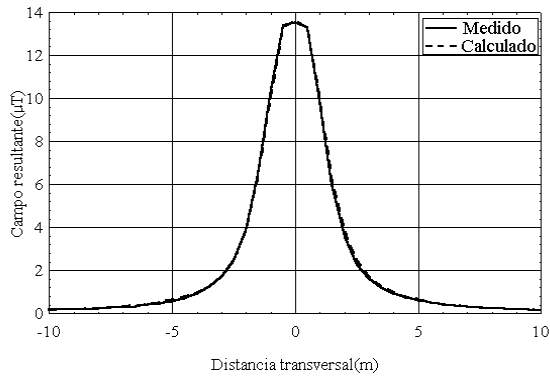


Figura 7.26: Disposición horizontal sin lazo. Campos medido y calculado.

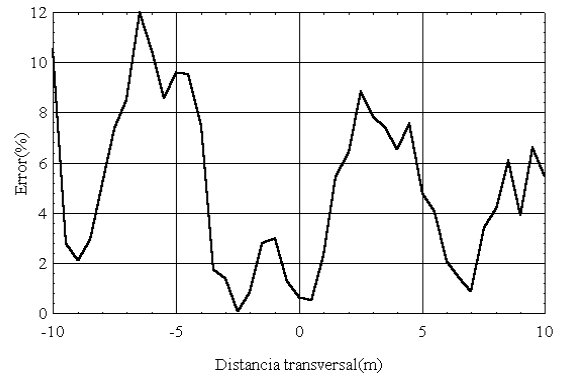


Figura 7.27: Disposición horizontal sin lazo. Error en el cálculo del campo.

de campo medido y calculado, en una trayectoria situada a 6 m del centro del vano, considerando dicha aproximación.

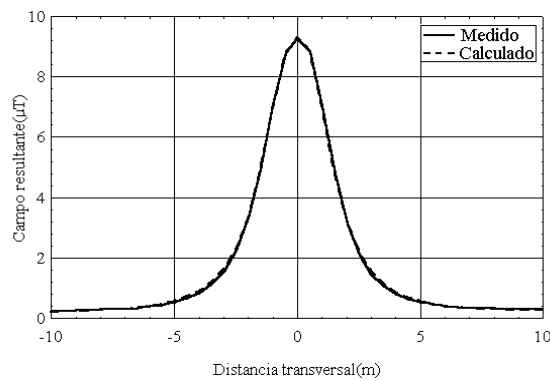


Figura 7.28: Disposición horizontal sin lazo. Campos medido y calculado en una trayectoria transversal a 6 m del vano.

### Lazo pasivo

Este ensayo consiste en insertar el lazo h pasivo (figura 7.3), y alimentar el vano con la misma intensidad que en el ensayo anterior. Se vio en el apartado 7.5 que, para medir el desfase de la intensidad por el lazo, se disponía de un transformador de intensidad  $TI_1$  en serie con el lazo. La inserción de dicho dispositivo en el circuito del lazo modificaba la intensidad inducida, debido a la impedancia interna del transformador. Para estimar el valor de la impedancia interna se midió, para la misma intensidad por fase, la corriente inducida en el lazo con el transformador y sin él. El desfase de la intensidad por el lazo sin

transformador fue estimado a partir del modelo. Se observó entonces un incremento del 8% en la intensidad, con lo que la mitigación será ligeramente mayor sin transformador. No obstante, para poder medir el desfase, se insertó el transformador en el resto de ensayos.

La intensidad por el lazo medida fue de  $12,95^{173}$  A, y la estimada  $13,34^{172}$  A, lo que representa un error de módulo del 3%. Las figuras 7.29 y 7.30 muestran las curvas de campo y el error obtenido. El error medio resulta ser el 4,5%.

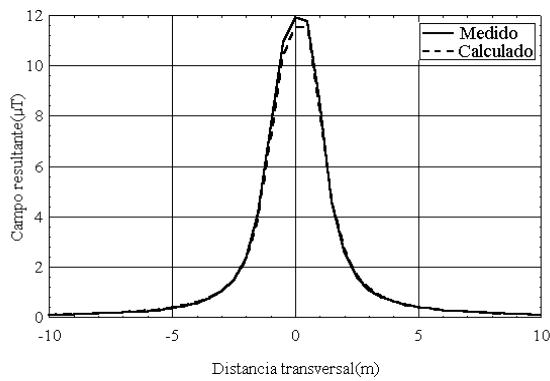


Figura 7.29: Disposición horizontal con lazo pasivo. Campos medido y calculado.

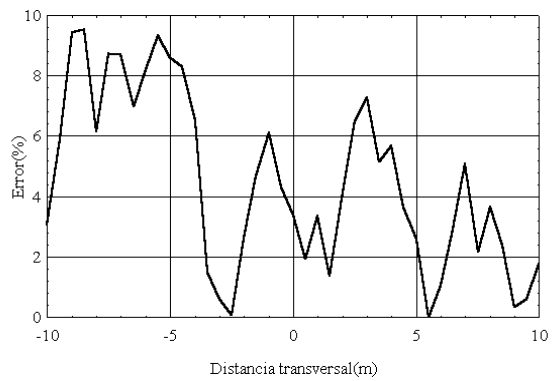


Figura 7.30: Disposición horizontal con lazo pasivo. Error en el cálculo del campo.

### Lazo activo

Al mismo lazo empleado para el ensayo pasivo se le alimenta externamente. Se desea reducir al máximo el campo en  $x = 2$  m. A partir de (6.96) y (6.97) se calcula la intensidad óptima de lazo. Suponiendo conductores rectilíneos indefinidos resulta  $I_l = 30,46^{138,4}$  A. Si se supone que los conductores son finitos resulta un valor muy cercano,  $I_l = 30,57^{138,9}$  A. Para este valor de intensidad se calculan los valores de las tensiones en los secundarios de los transformadores  $T_4$  y  $T_5$  (figura 7.13), a partir de (7.15) y (7.16). Sustituyendo resulta  $V_{AC} = -2,86$  V,  $V_{CB} = -8,66$  V. El signo negativo indica que  $a_4$  y  $a_5$  son negativos. Alimentando con estas tensiones se obtiene el campo de la figura 7.31, junto con calculado (se ha descontado el campo externo). La figura 7.32 muestra el error obtenido. El error medio resulta ser del 5%.

La figura 7.33 muestra la eficiencia obtenida con ambos tipos de lazos.

Como puede observarse de las figuras 7.27, 7.30, y 7.32, el error obtenido en el cálculo del campo está, en casi todos los puntos, por debajo del 10%, siendo el error medio del 5%. Este valor es admisible si se tienen en cuenta, por un lado, los errores de medida del campo magnético (sobre todo el error de resolución, en puntos alejados del vano), y por otro la incertidumbre en el valor exacto de la intensidad y altura de cada fase y lazo

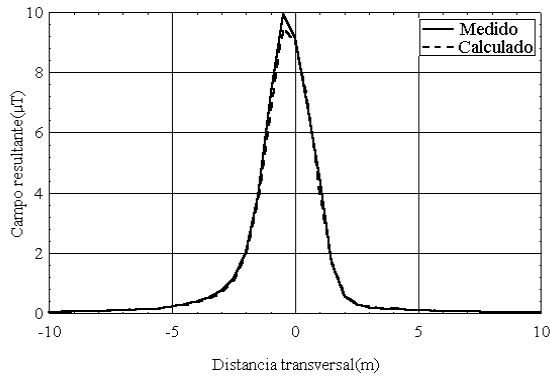


Figura 7.31: Disposición horizontal con lazo activo. Campos medido y calculado.

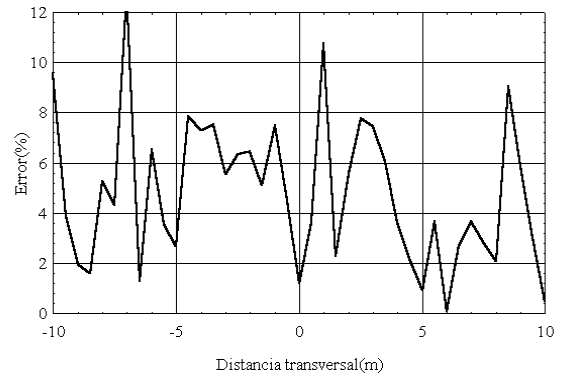


Figura 7.32: Disposición horizontal con lazo activo. Error en el cálculo del campo.

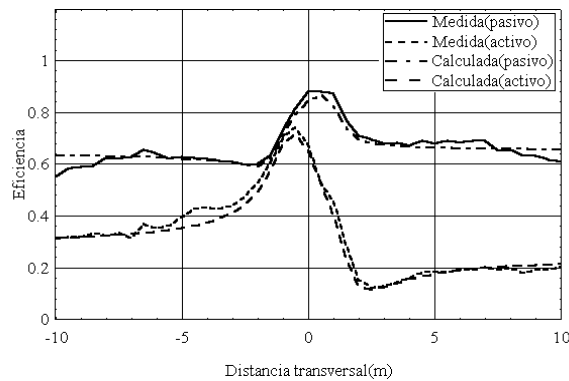


Figura 7.33: Disposición horizontal. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivo y activo.

cuando se mide el campo en un punto. Dicha incertidumbre se estimó en  $\pm 3\%$  para la intensidad, y  $\pm 1$  cm para la altura, tal como se indicó en el apartado 7.8. A esto hay que sumar la incertidumbre en la estimación del campo externo, debido por un lado a errores de medida de distancias y orientaciones de las líneas de 400 kV, y por otro a la incertidumbre en la intensidad que circula, en el instante de medida del campo, por dichas líneas, ya que lo que se disponía era de unas curvas de potencias activa y reactiva, construidas a partir de lecturas obtenidas cada 2 minutos.

En el resto de ensayos se han obtenido curvas de errores similares. Se omitirá su presentación, por considerarlo de menor interés.

### 7.9.2 Disposición triangular de conductores

La figura 7.34 muestra una vista de la disposición triangular de conductores, junto con el lazo pasivo horizontal  $t$  (tabla 7.2).

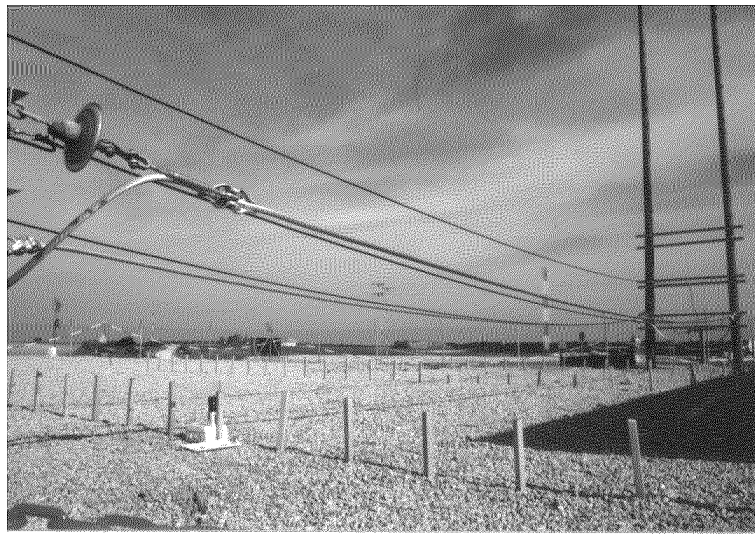


Figura 7.34: Conductores de fase en disposición triangular y lazo de mitigación

El primer ensayo es sin lazo. Se alimenta el vano con una intensidad de 50 A por fase, al igual que en el caso anterior. La figura 7.35 muestra las curvas de campo medido y calculado, una vez descontado el campo externo. Se obtiene un error medio del 3,3%.

Cuando se introduce el lazo pasivo, se obtiene una intensidad de  $12,2^{176}$  A. El valor calculado resulta ser  $12,8^{172}$  A. La figura 7.36 muestra las curvas de campo medida y calculada.

Se ensayó por último el lazo activo, inyectando la intensidad que minimiza el campo en  $x = 2$  m. Calculándola de la misma manera que en el caso anterior resulta  $I_l = 30,2^{135}$  A. La figura 7.37 muestra las curvas de campo medida y calculada. Las eficiencias conseguidas con los lazos activo y pasivo se muestran en la figura 7.38. Se vio en el capítulo precedente que se obtienen peores resultados con la mitigación con lazo en la configuración triangular. A esta conclusión se llega también comparando las figuras 7.33 y 7.38.

### 7.9.3 Disposición vertical de conductores

La figura 7.39 muestra los conductores de fase en disposición vertical, junto con el lazo coplanar (v1).



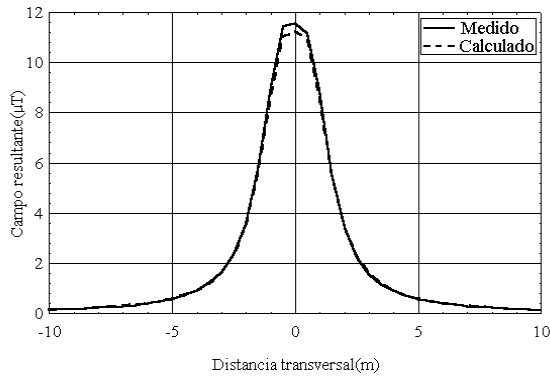


Figura 7.35: Disposición triangular sin lazo. Campos medido y calculado.

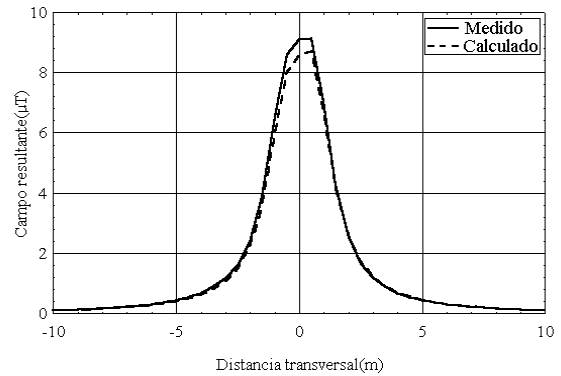


Figura 7.36: Disposición triangular con lazo pasivo. Campos medido y calculado.

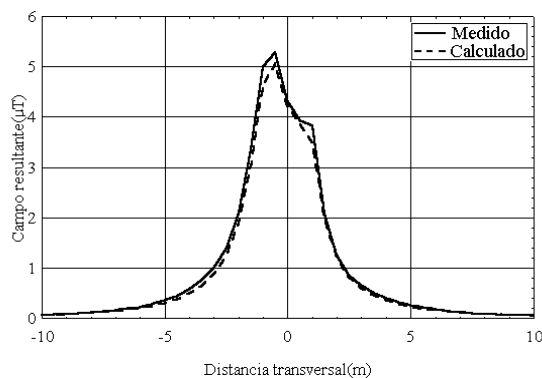


Figura 7.37: Disposición triangular con lazo activo. Campos medido y calculado.

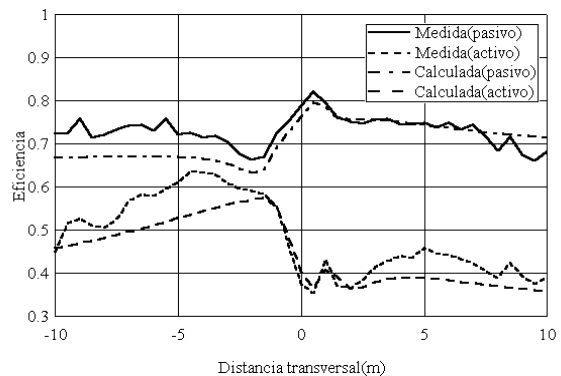


Figura 7.38: Disposición triangular. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivo y activo.

Si el lazo permanece abierto, se obtiene la curva de campo medido y calculado de la figura 7.40. Cerrando el lazo, se ha medido una intensidad  $I_l = 13,4^{173,7}$  A. Del cálculo se obtiene  $I_l = 13,3^{172,8}$  A. La figura 7.41 muestra las curvas de campo medido y calculado con lazo pasivo. Si se desea minimizar el campo en  $x = 2$  m, la intensidad a inyectar al lazo resulta ser  $I_l = 31,9^{143,7}$  A. Con este valor de intensidad resultan las curvas de la figura 7.42. Las eficiencias obtenidas se muestran en la figura 7.43.

Se ha ensayado también un lazo no coplanar, como el v2 (tabla 7.2). Dicha posición corresponde a la IV de la figura 6.32. Como la posición del lazo está claramente separada de la coplanar, se induce una corriente menor. La corriente medida es  $I_l = 3,5^{173,2}$  A. La corriente calculada es  $I_l = 3,42^{172,5}$  A. Con lazo activo, la corriente inyectada para obtener la máxima atenuación en  $x = 2$  m es  $I_l = 12,9^{143,3}$  A. La figura 7.44 muestra la



Figura 7.39: Conductores de fase en disposición vertical y lazo de mitigación

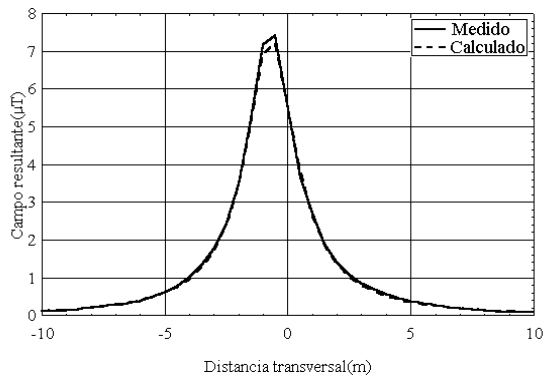


Figura 7.40: Disposición vertical sin lazo. Campos medido y calculado.

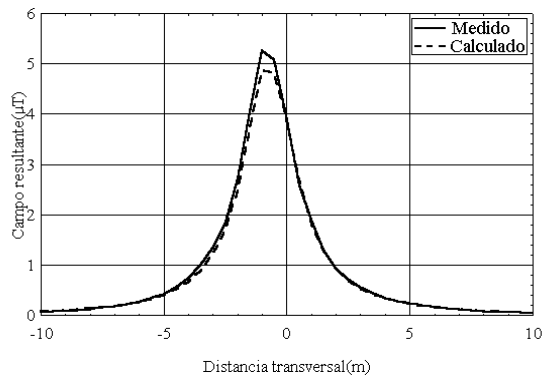


Figura 7.41: Disposición vertical con lazo pasivo. Campos medido y calculado

eficiencia conseguida con ambos métodos.

Por último, se ha probado con la disposición vertical la mitigación para una alimentación donde existe una cierta componente homopolar. Para ello, se conecta el conmutador S2 (figura 7.13) y se regulan los variadores de manera que exista un desequilibrio en la corriente del vano. Para obtener mayor desequilibrio se pueden conectar las resistencias  $R_5$  y  $R_6$ . Las componentes directa, inversa y homopolar de la intensidad inyectada a las

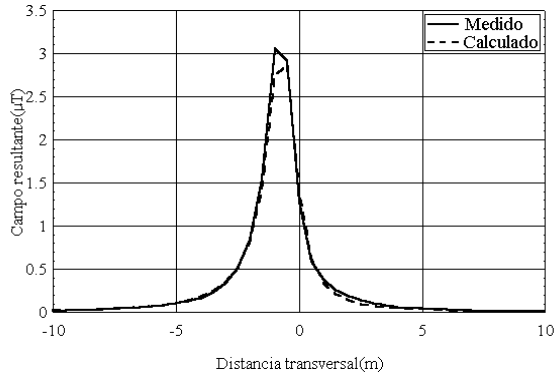


Figura 7.42: Disposición vertical con lazo activo. Campos medido y calculado.

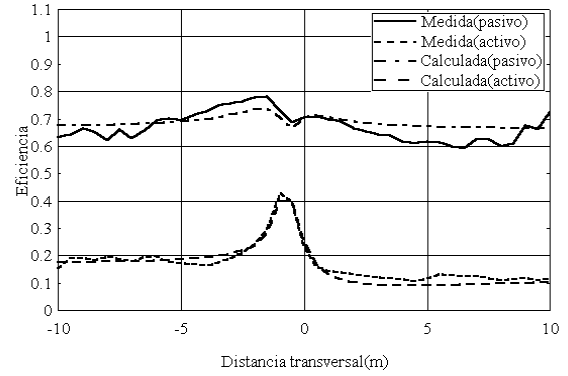


Figura 7.43: Disposición vertical. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivo y activo.

fases fueron las siguientes:

$$I_1 = 41,6^{[-8,9]} \text{ A}$$

$$I_2 = 8,0^{[41,3]} \text{ A}$$

$$I_0 = 2,5^{[27,5]} \text{ A}$$

tomando como desfase nulo el de  $I_a$ . El porcentaje de homopolar es el 6%. Al insertar el lazo coplanar se induce una corriente medida  $I_l = 9,8^{[177,3]} \text{ A}$ . Del modelo se obtiene  $I_l = 10,6^{[175,5]} \text{ A}$ . La figura 7.45 muestra las eficiencias medidas y calculadas. Si se compara con la figura 7.43, cuya única diferencia es la ausencia de componente homopolar, se observa que la eficiencia se reduce conforme la distancia a la línea es mayor. A este mismo resultado se llegó cuando se analizó el efecto de la componente homopolar de la intensidad en la mitigación con lazo (apartado 6.4).

#### 7.9.4 Disposición doble circuito vertical

La figura 7.46 muestra los conductores de fase en disposición doble circuito vertical, junto con los lazos coplanares v1 y v2 (tabla 7.2). La figura 7.47 muestra un detalle del lazo v3.

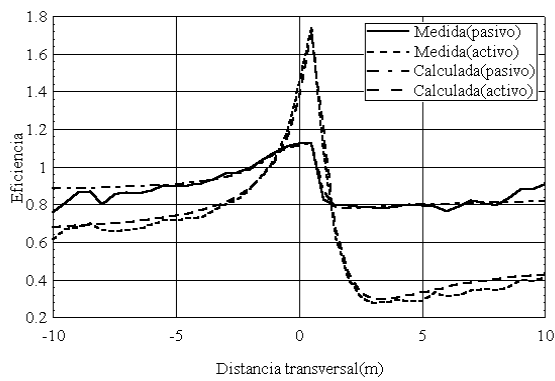


Figura 7.44: Disposición vertical. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivo y activo en la posición v2.

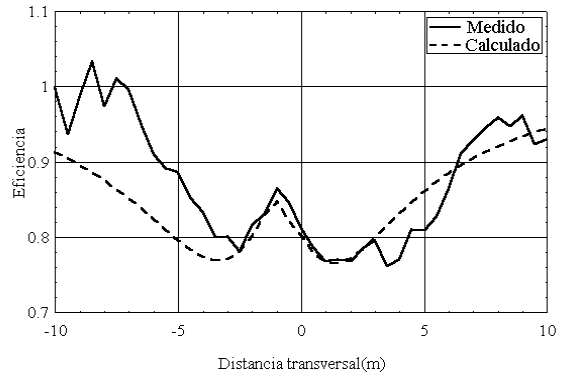


Figura 7.45: Disposición vertical. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con el lazo pasivo y presencia de componente homopolar.

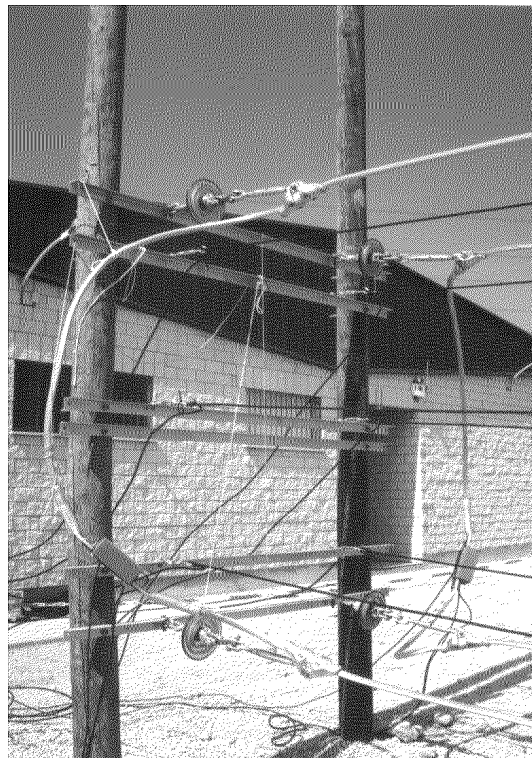


Figura 7.46: Conductores de fase en disposición doble circuito vertical y lazos coplanares



Figura 7.47: Extremo del lazo v3 conectado al transformador de intensidad

### Mitigación con lazo v1

Se analiza en primer lugar la mitigación con un sólo lazo, situado en la posición coplanar. La figura 7.48 muestra los campos medido y calculado, debidos a la línea doble circuito, cuando la intensidad por fase es de 50 A. Debido a que la intensidad inyectada en el lazo activo era mayor de 50 A, se ensayaron los lazos pasivo y activo con 25 A de fase. Al insertar el lazo pasivo v1 se obtienen las eficiencias mostradas en la figura 7.49. Las intensidades inducidas en el lazo son  $I = 8,6^{171,5}$  A (medida) e  $I = 8,6^{172,6}$  A (calculada). La misma figura muestra las eficiencias medida y calculada cuando se inyecta una intensidad  $I = 44,8^{135,5}$  A, que minimiza el campo en  $x = 2$  m.

### Mitigación con lazo v3

La figura 7.50 muestra las curvas de eficiencia obtenidas al insertar el lazo pasivo. Las intensidades inducidas son  $I = 1,4^{6,9}$  A (medida) e  $I = 1,4^{6,5}$  A (calculada). Debido al pequeño valor de la intensidad inducida se obtiene una eficiencia despreciable, excepto bajo la línea. Dicha eficiencia puede mejorarse si se aumenta la anchura del lazo, como se mostró en la figura 6.55 para el lazo II, situado en la misma posición que v3, pero de anchura mayor. La figura 7.50 muestra igualmente las eficiencias medida y calculada cuando se inyecta la intensidad que minimiza el campo en  $x = 2$  m. La intensidad resulta ser  $I = 49,6^{115,2}$  A. Al igual que en el caso pasivo, se obtiene mayor atenuación con el lazo situado en la misma posición pero con anchura mayor (figura 6.84).

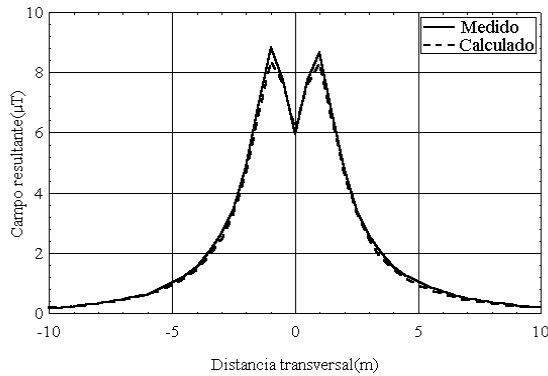


Figura 7.48: Disposición vertical doble circuito. Campos medido y calculado, debidos a la línea.

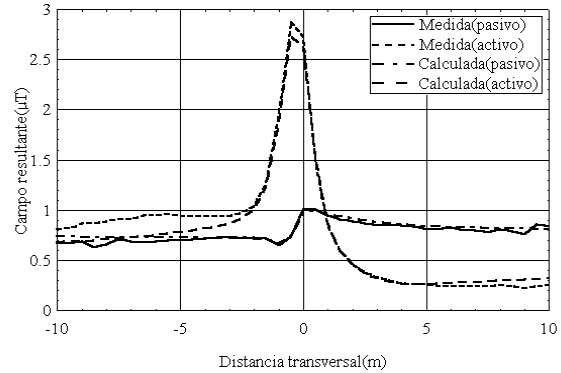


Figura 7.49: Disposición vertical doble circuito. Eficiencias medida y calculada, conseguidas con el lazo pasivo y activo.

### Mitigación con lazos v1 y v2

Se ha probado también el empleo de dos lazos coplanares con los circuitos de la línea. La figura 7.51 muestra las curvas de eficiencia obtenidas con los lazos pasivos, cuando la configuración es superhaz. Las intensidades en ambos lazos tienen valores similares, y resultan ser  $I = 15,3^{171,0}$  A,  $I' = 15,1^{170,2}$  A (medidas), e  $I = 15,0^{170,6}$  A,  $I' = 15,6^{171,9}$  A (calculadas). Aplicando el procedimiento 2 para el cálculo de las intensidades por los lazos activos (véase apartado 6.4.4) se obtienen las intensidades de lazo  $I = I' = 34,5^{140,5}$  A. Para dichas intensidades, en la figura 7.51 también se muestran las eficiencias medidas y calculadas.

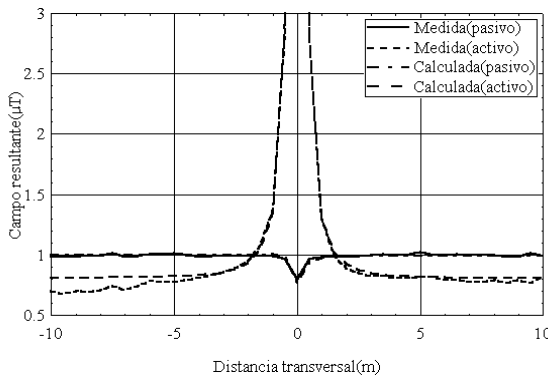


Figura 7.50: Disposición vertical doble circuito(superhaz) Eficiencias medida y calculada, conseguidas con el lazo pasivo y activo v3.

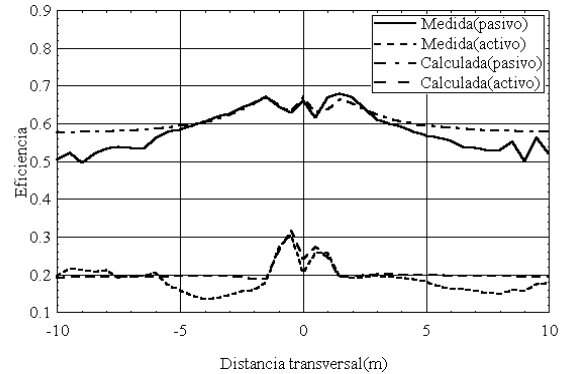


Figura 7.51: Disposición vertical doble circuito (superhaz). Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivos y activos v1 y v2.

Se ha probado también la configuración de baja reactancia con los mismos lazos. La figura 7.52 muestra las curvas de campo medido y calculado, cuando la intensidad de fase es 50 A. Si se compara con la figura 7.48 se puede ver que bajo la línea el campo es mayor, pero la caída con la distancia es también mayor, y el campo se anula prácticamente a 10 m (índice de compacidad más elevado). La figura 7.53 muestra las curvas de eficiencia obtenidas con los lazos pasivos y activos (procedimiento 2). Ya se vio en el apartado 6.4.4 que se puede mejorar la eficiencia si se calculan las intensidades de los lazos suponiendo que son iguales en módulo pero opuestas en desfase. En cuanto a la mitigación activa, se vio en el apartado 6.4.4 que con el procedimiento 2 se obtenían eficiencias reducidas, siendo más conveniente el empleo de intensidades con desfase opuesto. En este caso no se ha pretendido realizar el ensayo que consiguiera la máxima mitigación, sino validar el modelo de cálculo. Las intensidades por los lazos pasivos son  $I = 11,1^{177,3}$  A,  $I' = 10,3^{1-5,3}$  A (medidas),  $I = 12,0^{176,5}$  A,  $I' = 11,8^{1-7,5}$  A (calculadas) y por los lazos activos  $I = I' = 15,0^{1-9,6}$ .

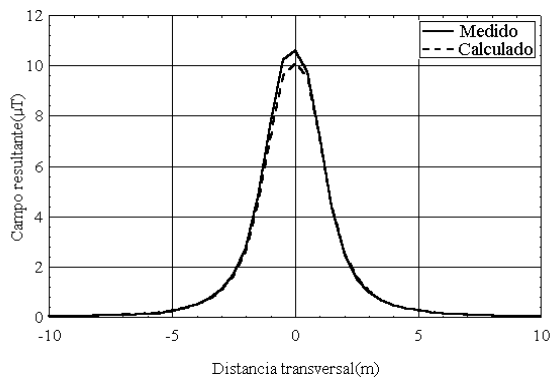


Figura 7.52: Disposición vertical doble circuito (baja reactancia). Campos medido y calculado debidos a la línea.

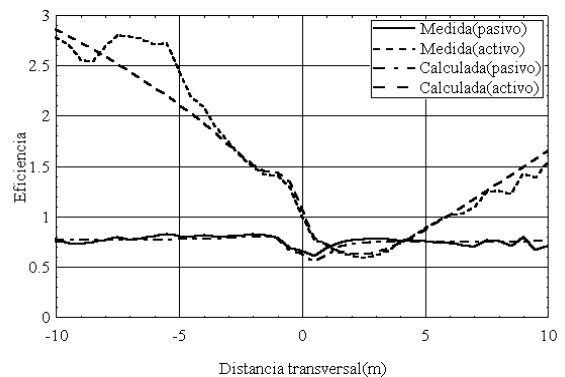


Figura 7.53: Disposición vertical doble circuito (baja reactancia). Eficiencias medida y calculada, conseguidas con los lazos pasivos y activos v1 y v2.

## 7.10 Resumen y conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se han presentado los resultados de medidas de campo obtenidas en un vano de prueba diseñado al efecto (apartados 7.2, 7.3 y 7.4). El vano, que permite ser alimentado hasta con 50 A de intensidad por fase, incluso en presencia de componente homopolar, reproduce a escala 1:10 las distancias entre fases de las principales líneas existentes en la red de transporte española: horizontal, vertical, delta, doble circuito vertical. Asimismo, se han probado diversas disposiciones de lazos pasivos y activos. La

alimentación al vano de prueba y lazos activos se ha llevado a cabo desde una mesa de equipos diseñada para tal fin.

Para tener en cuenta el campo preexistente debido a fuentes externas al vano (líneas de 400 kV principalmente) se ha realizado un modelo de las líneas, suponiendo conductores rectilíneos finitos, y se ha dispuesto de las curvas de carga en las mismas (apartado 7.7).

Las medidas de campo magnético e intensidades inducidas en los lazos se han validado con un modelo del vano de prueba, en el que se ha supuesto que los conductores son rectilíneos finitos, de altura la mínima en el centro del vano. Con dicho modelo se consiguen errores inferiores, en la mayoría de los ensayos, al 5%, en el campo magnético resultante y el módulo de la intensidad inducida, y de 5° en el desfase de la intensidad. Dichos errores son atribuibles, en gran medida, a la incertidumbre en algunos parámetros del modelo del vano (altura de conductores, intensidad por las fases), así como del modelo de las líneas de 400 kV (altura de fases, distancia al vano de prueba).



# Capítulo 8

## Conclusiones y líneas futuras de investigación

### 8.1 Conclusiones principales

En la presente tesis se ha abordado la problemática de la reducción del campo magnético creado por líneas aéreas, en particular, las que constituyen la red de transporte. Para ello se han empleado diversos modelos que permiten obtener el campo magnético creado por las mismas. Estos modelos se han aplicado al análisis de diversas configuraciones de conductores, así como al de tres métodos de mitigación: división de fases e inserción de lazo pasivo y activo. En particular, los modelos desarrollados para el análisis de los dos últimos métodos se han validado en un vano experimental a escala.

#### 8.1.1 Modelos de cálculo

Las principales conclusiones relativas a los modelos de cálculo empleados son las siguientes:

- El efecto de la tierra hay que considerarlo para distancias a la línea superiores a 500 m.
- Un modelo exacto de la línea ha de tener en cuenta la curva de la catenaria. Sin embargo, dicha curva se puede sustituir por una recta infinita (modelo RI), cuya altura coincida con el punto de la catenaria más cercano al punto de medida, con un error menor del 10% para distancias a la línea inferiores a unos 100 m.
- Se ha desarrollado una formulación alternativa al modelo RI, a partir de la descomposición en dipolos magnéticos, con la que se han obtenido algunas propiedades del campo creado por líneas trifásicas.

- Se ha desarrollado un modelo simplificado del RI, basado en la descomposición en dipolos magnéticos (DA). Este modelo presenta como principal ventaja frente al RI la posibilidad de obtener una expresión explícita del campo resultante y sus componentes vectoriales, en función de los parámetros de la línea. Esto facilita el análisis de configuraciones de baja emisión magnética. Se ha comprobado con las principales configuraciones de la red de transporte que se puede emplear el modelo DA a distancias superiores a 15 m con un error menor del 5% tanto en el campo resultante como en el módulo de las componentes vectoriales.
- Una formulación aún más compacta (DS) se puede obtener a partir de la DA, o también a partir de la descomposición en serie del campo resultante. Se obtienen errores menores del 5% a distancias superiores a 40 m.

### 8.1.2 Diseño de líneas aéreas de simple circuito

Una vez desarrollados los métodos de cálculo, se han aplicado al diseño de líneas aéreas de simple circuito. Las principales conclusiones obtenidas son las siguientes:

- A igual distancia entre conductores, la configuración que genera menos campo es la delta invertida, y la que genera más campo la horizontal.
- Variando la configuración de los conductores se puede reducir el campo bajo la línea hasta un 55%, siendo menor la reducción a mayores distancias.
- Se puede reducir más moderadamente el campo decrementando la distancia entre fases ( $5 \div 10\%$  por metro) y la altura de los conductores ( $2,5\%$  por metro a 30 m de la línea).

### 8.1.3 Mitigación mediante la división de fases

Se ha analizado también la posibilidad de mitigar el campo mediante la división de una, dos, o las tres fases. Se concluye del estudio realizado que la configuración más eficiente es la que divide dos de las tres fases. Con ella se puede reducir el campo un 75% a 30 m de la línea, respecto a la configuración tresbolillo.

### 8.1.4 Mitigación mediante la inserción de lazos pasivos

Se ha analizado y contrastado experimentalmente el empleo de lazos pasivos y activos de mitigación. Del análisis efectuado con lazos pasivos se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Las configuraciones que permiten una mayor reducción de campo son aquellas cuyos conductores están contenidos en un plano, y el lazo pasivo está contenido en el mismo plano (horizontal y vertical).
- Para las configuraciones no coplanares se obtienen reducciones de campo menores. Se consiguen valores de eficiencia similares al caso coplanar, cuando se emplean dos lazos y tres conductores.
- Con la configuración doble circuito vertical, superhaz, se consigue una reducción ligeramente mayor que con la configuración simple circuito, disponiendo dos lazos coplanares con los circuitos. Para la configuración de baja reactancia la reducción es menor.
- Se han analizado otras disposiciones del lazo que tienen su interés por la mayor facilidad en adaptarse a la línea ya existente. La reducción conseguida es menor, y en algunas de ellas se observan amplificaciones del campo, generalmente cerca de la línea. Merece la pena destacar, en las líneas verticales con conductor de tierra, una disposición de lazo vertical compuesta por el propio conductor de tierra y el otro tramo enterrado, con la que se consiguen reducciones de campo similares a los lazos coplanares, a distancias superiores a unos 30 m de la línea, tanto en la configuración simple como doble circuito. Como contrapartida, se obtienen amplificaciones del campo bajo la línea.
- La presencia de componente homopolar en la línea reduce la eficiencia de la pantalla, siendo la reducción más significativa a mayores distancias de la línea.
- La compensación serie permite reducir el campo, en la configuración coplanar, un 50% respecto al lazo sin condensador. La reducción es de un 30% para la configuración triangular.
- Como ejemplo, para distancias típicas entre fases de la red de 400 kV, y distancia lazo-fase 5 m, se obtiene reducciones de hasta el 35% con lazos coplanares en configuraciones horizontal y vertical. Para la configuración delta la reducción máxima es del 25% cerca de la línea. A distancias mayores la reducción disminuye (20% a unos 100 m). Para la configuración doble circuito vertical la reducción llega casi al 40% con dos lazos pasivos coplanares.

### 8.1.5 Mitigación mediante la inserción de lazos activos

Del análisis realizado con lazos activos se obtienen las siguientes conclusiones:

- Para las configuraciones horizontal y vertical con lazos coplanares se consiguen mayores reducciones conforme aumenta la distancia a la línea, siendo superior al 95% a unos 100 m de la línea.
- Para la configuración triangular, la reducción que se consigue con un lazo activo es del 55%. Se ha simulado también el empleo de una pantalla mitigadora compuesta por tres conductores. Si se alimenta dicha pantalla con un sistema trifásico equilibrado de intensidades se obtienen reducciones de hasta el 70%, alcanzándose casi el 100% en caso de regulación independiente de cada fase.
- Para la configuración doble circuito vertical se han conseguido reducciones del 100% mediante el empleo de dos lazos con regulaciones independientes. Como contrapartida, el campo crece bajo la línea. Al igual que en el caso pasivo, la configuración baja reactancia presenta un peor comportamiento que la superhaz.
- La presencia de componente homopolar de intensidad resta capacidad mitigante del lazo activo. Se puede conseguir reducir el campo debido a la componente homopolar de intensidad, pero sólo a un lado de la línea. En el otro lado el campo crece rápidamente. Por ello, si la componente homopolar no es excesiva, es preferible no considerarla en el cálculo de la intensidad a inyectar en el lazo.

### 8.1.6 Validación experimental

Las formulaciones desarrolladas para obtener las intensidades por los lazos pasivos y activos, así como las eficiencias conseguidas, se han validado mediante el diseño y puesta en práctica de un vano de prueba a escala que permite reproducir el campo creado por diversas configuraciones de conductores. Se han probado además diversas disposiciones de lazos pasivos y activos. La comparación de los resultados con las medidas de campo resultante muestra un error inferior al 10%, siendo el error medio en el intervalo considerado menor del 5%. Igualmente la intensidad calculada presenta, en casi todos los ensayos, un error inferior al 5% en módulo, y menor de 5° en el desfase. Estos errores podrían haber sido menores en ausencia de campos externos.

## 8.2 Propuestas de líneas futuras de investigación

Como consecuencia del trabajo desarrollado en esta tesis, se ha visto la posibilidad de seguir investigando alrededor de la problemática de la reducción del campo generado por las líneas eléctricas. En este sentido, algunas propuestas sobre futuras líneas de investigación se presentan a continuación:

- La implantación práctica de los métodos de reducción de campo abordados en la presente tesis (división de fases e inserción de lazos) requiere, no sólo exclusivamente un análisis de la eficiencia conseguida con cada método, sino una visión global de las implicaciones tanto económicas como en la seguridad de la explotación del servicio. Así, habría que estudiar los nuevos requerimientos estructurales de los apoyos que han de soportar los conductores adicionales, cómo se ve modificado el campo eléctrico y las pérdidas por efecto corona, el desequilibrio eléctrico que introducen, etc.
- Se ha visto que la mitigación con lazo activo es muy eficiente en prácticamente todas las configuraciones. Sin embargo, su implantación se ve frenada por la necesidad de disponer de equipos que inyecten una intensidad cuyo valor ha de variar con la carga de la línea. El desarrollo de equipos fiables con mantenimiento nulo y alimentación autónoma (v.g. energía solar) es condición indispensable para pensar en la posibilidad de la explotación práctica del lazo activo.
- Se presentó en el capítulo 2 un método de mitigación de campos magnéticos basado en la inserción de planchas de material ferromagnético y/o conductor. En ocasiones, si el espacio a reducir no es muy amplio, podría ser más interesante el empleo de pantallas de estas características, por cuanto no afectarían a la línea. Una comparación técnico-económica con los métodos estudiados en la presente tesis podría servir en la toma de decisiones a la hora de abordar problemas de mitigación concretos.



# Apéndice A

## Campos electromagnéticos y salud

Aunque no es objeto principal de este trabajo, se ha creído oportuno incluir un resumen muy breve de la situación actual de las investigaciones que tratan de relacionar los CEM de frecuencias extremadamente bajas (3-3000 Hz, CEMBF) [37] y ciertas enfermedades. Asimismo se indican los principales niveles de exposición en diferentes ambientes, así como la normativa en relación con los CEMBF, en vigor en diversos países.

### A.1 Investigaciones realizadas

Aunque ya en 1966 se advirtió de la existencia de una posible relación entre los CEMBF, en concreto campo eléctrico (analizado primeramente por su mayor facilidad para medirlo y percibirlo fisiológicamente) generado por instalaciones eléctricas, y la salud [5], las investigaciones efectuadas tuvieron poca repercusión hasta el año 1979. En aquel año Wertheimer y Leeper publicaban un artículo [82] en el que afirmaban que existía una relación entre el cáncer infantil y los CEMBF. Desde entonces no han dejado de aparecer en las últimas dos décadas estudios que pretenden dilucidar si existe una relación causa-efecto entre los CEM y algunas enfermedades en niños y adultos, así como en animales y plantas.

Paralelamente, se han venido publicando libros [7, 66] y artículos en revistas de divulgación general [49] que, con una orientación pretendidamente alarmista y sin fundamentos científicos rigurosos (como se ha demostrado posteriormente, véase [2]), advierten de los posibles peligros de los CEM sobre la salud, y requieren de las administraciones competentes las medidas necesarias para reducir la exposición a los mismos. Este tratamiento por algunos sectores periodísticos ha creado cierta alarma social, como se demostró en el tendido del cable subterráneo por el Estrecho de Gibraltar, y a diario ante nuevas

instalaciones eléctricas.

Sin embargo, los resultados de la mayoría de los estudios realizados hasta la fecha muestran que las evidencias actuales en lo concerniente a que los campos eléctricos y magnéticos provoquen enfermedades son débiles. Esta es la principal conclusión de un informe, que merece destacar por su rigor científico e independencia (realizado sin participación de las empresas eléctricas), elaborado por el Instituto Nacional de Ciencias sobre la Salud Ambiental de EE.UU. [50], y en el que se revisan las principales investigaciones (alrededor de 200) realizadas hasta la fecha de su publicación en relación a los CEMBF, tanto en el laboratorio (personas y animales, *in vivo*, y con células, *in vitro*) como epidemiológicos, de poblaciones expuestas en ambiente laboral y doméstico. Las principales conclusiones del informe son las siguientes:

- La mayor evidencia de efectos sobre la salud proviene de asociaciones estadísticas observadas en grupos humanos con dos tipos de cáncer: leucemia infantil ([82, 68, 45, 19]) y leucemia linfocítica en adultos expuestos por motivos de trabajo [20, 23].
- Ninguno de los estudios anteriores, analizados individualmente, prueba una relación convincente entre ambas enfermedades y la exposición a CEMBF. Si se analizan en conjunto, en lo que se denomina un meta-análisis, se observa un pequeño incremento del riesgo con la exposición, más débil en la leucemia linfocítica que en la infantil.
- Todos los estudios de laboratorio *in vivo*, y la mayoría de los estudios *in vitro* fracasan a la hora de demostrar una relación causal entre la exposición a CEMBF a niveles típicos y cambios en parámetros biológicos (fertilidad, reproducción, síntesis de la hormona melatonina).
- Debido, por una parte, a las serias limitaciones de los estudios epidemiológicos, relacionadas con la selección de los casos, el número de casos, y el método para cuantificar el nivel de exposición (véase un análisis más profundo en [25]), y por otra a los resultados negativos de los estudios de laboratorio, cuya posibilidad de refutación en caso positivo, sería menor que los estudios epidemiológicos, se debilita la posibilidad de asociar CEMBF con enfermedades.
- A pesar de lo anterior, los hallazgos epidemiológicos no pueden descartarse completamente, por lo que no se puede afirmar que la exposición a CEMBF sea completamente segura. Sin embargo, estos hallazgos son insuficientes para aconsejar una agresiva política reguladora, máxime cuando no hay acuerdo en qué parámetro del campo es el más significativo (campo resultante, transitorio, valores punta, polarización, orientación respecto al campo natural). Antes bien, se aconseja a la



Administración Pública que promueva, por un lado, la búsqueda e implantación de métodos de bajo coste para reducir el CM creado por las líneas de transporte y distribución, y, por otro, campañas de detección de puntos de elevada exposición en el interior de viviendas. Asimismo, se aconseja a los fabricantes de equipos eléctricos que consideren alternativas de bajo coste para reducir los niveles de CM.

## A.2 Niveles típicos de exposición a campos electromagnéticos de baja frecuencia

Es fundamental, a la hora de realizar un estudio sobre la incidencia de la exposición a CEMBF en la salud, cuantificar los niveles de exposición (dosis). Esto no está aún definido, por lo que los diversos estudios epidemiológicos emplean métodos de estimación de dosis diferentes: configuración de conductores, tensión, intensidad, distancia, campo magnético medido, campo magnético calculado, media ponderada en el tiempo, etc. (véase [25] para un análisis detallado de los métodos empleados).

Existen, por otra parte, numerosos estudios que tratan de caracterizar los niveles de CEMBF, sobre todo campo magnético, en diferentes ambientes: residencial, líneas eléctricas aéreas, medio urbano, oficinas, industria ligera, subestación eléctrica, etc. La mayor parte de dichos estudios realizan medidas de campo magnético y los resultados son mostrados como medias ponderadas temporales durante 24 horas (ejemplo de exposición a que un individuo está sometido) o durante un tiempo determinado en un ambiente concreto (en el hogar, el trabajo, etc.). Se han analizado preferentemente dos ambientes, doméstico [84, 85, 72] y laboral [74]. Según Zaffanella [84], el nivel medio del campo magnético al que un estadounidense está sometido es de  $0,09 \mu\text{T}$  [84]. En el interior de la vivienda el campo medido medio en varios lugares fue de  $0,06 \mu\text{T}$  [84]. En Europa, como muestra Swanson [72], se observan valores ligeramente menores en el interior de la vivienda ( $0,05 \mu\text{T}$ ), debido por un lado a la mayor tensión y por otro a que el sistema de retorno de la corriente es distinto. Un análisis detallado de este problema puede verse en [32].

En relación a la influencia de líneas aéreas de transmisión y distribución cercana a las viviendas, en [84] se observó que ciertos tipos de líneas de transmisión y distribución generaban campos en el interior de las viviendas con un rango de valores medios entre  $0,09$  y  $0,38 \mu\text{T}$ . La mayoría de las viviendas estaban sometidas al campo generado por líneas de distribución enterradas, con una media de  $0,03 \mu\text{T}$ .

En relación al ambiente laboral, se ha estudiado sobre todo el sector eléctrico, por

ser el más expuesto. Theriault [74] ha obtenido unos valores ponderados en el tiempo de hasta  $4 \mu\text{T}$ .

### A.3 Límites y recomendaciones de los niveles de exposición a campos electromagnéticos de baja frecuencia

Debido a las presiones sociales, y a pesar de las débiles evidencias que relacionan los CEMBF con la salud, diversos países y organismos han establecido límites para los niveles de campo eléctrico y magnético en ambiente laboral, para el público en general, y cerca de instalaciones eléctricas (subestaciones y líneas aéreas). Puede verse un resumen en [31, 25, 46]. Se observa una gran variabilidad en los límites, dependiendo del organismo. Mientras que el Comité Europeo de Normalización Electrotécnica (CENELEC) establece unos límites de exposición laboral de  $10 \text{ kV/m}$  y  $1600 \mu\text{T}$  diarios, la Organización Mundial de la Salud (OMS), a través de la Comisión Internacional sobre Radiaciones no Ionizantes (ICNIRP) los fija en  $10 \text{ kV/m}$  y  $500 \mu\text{T}$ , y la Unión Europea en  $6 \text{ kV/m}$  y  $200 \mu\text{T}$ . En relación a la exposición doméstica se fijan límites en general inferiores. La ICNIRP los establece en  $5 \text{ kV/m}$  y  $100 \mu\text{T}$  (igual que la Unión Europea), y la CENELEC en  $10 \text{ kV/m}$  y  $640 \mu\text{T}$ . El criterio empleado por estos organismos está basado en efectos biológicos de corrientes inducidas en el cuerpo por campos externos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, otros organismos (en EE.UU. y Suecia) han preferido emplear criterios basados en estudios epidemiológicos, lo que conlleva que los límites de exposición resultantes sean varios órdenes de magnitud menores. Ejemplo de ello son los estados de Florida y Nueva York, que establecen valores máximos de campo eléctrico y magnético en los límites de la servidumbre de paso de líneas eléctricas aéreas. Para el campo eléctrico se establece  $1,6 \text{ kV/m}$  (Nueva York),  $8 \text{ kV/m}$  (Florida, líneas de  $230 \text{ kV}$ ) y  $10 \text{ kV/m}$  (Florida, líneas de  $500 \text{ kV}$ ). En cuanto al campo magnético se fija en  $20 \mu\text{T}$  (Nueva York),  $15 \mu\text{T}$  (Florida, líneas de  $230 \text{ kV}$ ),  $20 \mu\text{T}$  (Florida, líneas de  $500 \text{ kV}$ , simple circuito), y  $25 \mu\text{T}$  (Florida, líneas de  $500 \text{ kV}$ , doble circuito). Un análisis del cumplimiento o no de dichos límites en líneas de transmisión típicas puede verse en [11].

## Apéndice B

# División de fases. Determinación de configuraciones óptimas

Se plantean en este apéndice las formulaciones que permiten determinar las configuraciones óptimas en cuatro configuraciones distintas:

- Cuadripolo
- Línea trifásica con una fase partida
- Línea trifásica con dos fases partidas
- Línea trifásica con tres fases partidas

### B.1 Determinación del cuadripolo óptimo

Considérese un cuadripolo cuyos dos dipolos tienen igual distancia  $d$  entre conductores (figura B.1). Supóngase que el dipolo 1 puede girar alrededor del conductor 1 un ángulo  $0 < \alpha < 2\pi$ . Por otro lado el conductor 3, perteneciente al dipolo 2, mantiene constante su distancia al conductor 1, siendo ésta además  $d$ . La posición de dicho conductor está definida por el ángulo  $0 < \beta < 2\pi$ . Por último la orientación del dipolo 2 está definida por el ángulo  $0 < \gamma < 2\pi$ . Variando los ángulo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  se puede obtener cualquier cuadripolo, tanto de cuatro como de tres conductores. Nótese que el único conductor fijo es el 1, por lo que el origen de coordenadas se sitúa en su vertical. Si se fija la altura mínima al suelo, las variables a determinar son  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Dado que el campo resultante aproximado viene dado por (5.7), es necesario poner  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$  en función de

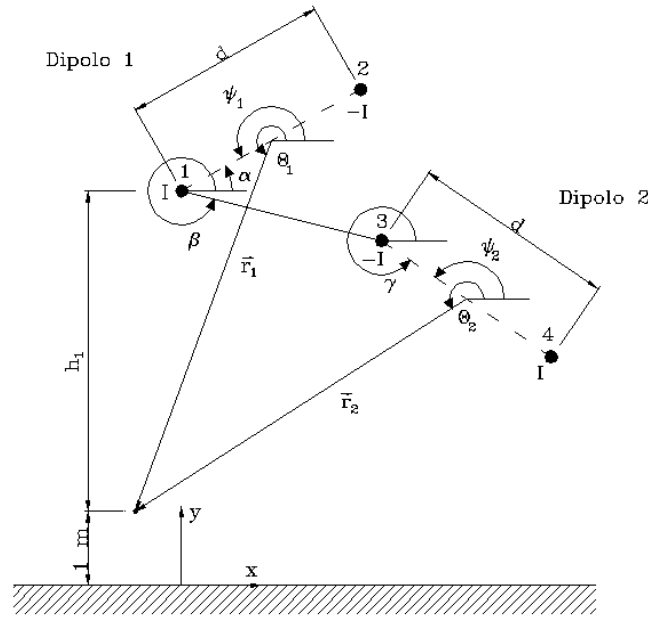


Figura B.1: Cuadripolo magnético y ángulos que lo definen

$\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Es fácil deducir que

$$r_1^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{d^2}{4} + d(h_1 \sin \alpha - x \cos \alpha) \quad (\text{B.1})$$

$$r_2^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{5}{4}d^2 + 2d(h_1 \sin \beta - x \cos \beta) + d(h_1 \sin \gamma - x \cos \gamma) + d^2 \cos(\gamma - \beta) \quad (\text{B.2})$$

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d}{2} \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \sin \alpha + h_1} \quad (\text{B.3})$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d}{2} \cos \gamma + d \cos \beta - x}{\frac{d}{2} \sin \gamma + d \sin \beta + h_1} \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_1 = \pi + \alpha \quad (\text{B.5})$$

$$\psi_2 = \gamma \quad (\text{B.6})$$

Obsérvese de la figura B.1 que  $h_1$  representa la diferencia de alturas entre el conductor 1 y el punto de medida (cuya altura se supone 1 m).

Para mantener la distancia mínima  $d$  entre conductores de distinta polaridad, hay que imponer una restricción. Tomando como origen de coordenadas el conductor 1, se

tendrá que el conductor 2 está definido por las coordenadas  $(d \cos \alpha, d \sin \alpha)$ , y el 4 por  $(d \cos \beta + d \cos \gamma, d \sin \beta + d \sin \gamma)$ . Para mantener la distancia entre ambos a un valor superior a  $d$  se deberá cumplir que

$$\begin{aligned} (\cos \beta + \cos \gamma - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha)^2 \\ = 3 + 2(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \gamma)) > 1 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En cuanto a la altura mínima al suelo, es necesario mantenerla a un valor  $h$ . Dado que el conductor de menor altura varía en función de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ,  $h_1$  no será constante en todo el conjunto factible. Vendrá dado por

$$h_1 = h - 1 + \max [0, -d \sin \alpha, -d \sin \beta, -d(\sin \beta + \sin \gamma)] \quad (\text{B.8})$$

Eliminando el factor constante en (5.7) la siguiente función es equivalente al campo resultante

$$g(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{1a}) \quad (\text{B.9})$$

Si se desea maximizar el índice de compacidad, la función objetivo será

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{g(\alpha, \beta, \gamma, x_m)}{\max [g(\alpha, \beta, \gamma, x_m - l_t), g(\alpha, \beta, \gamma, x_m + l_t)]} \quad (\text{B.10})$$

En el caso de minimizar el campo en  $x_m$  se tendrá

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha, \beta, \gamma, x_m) \quad (\text{B.11})$$

Por último la función objetivo empleada para localizar el mínimo del campo en  $x_t$  será

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \max [g(\alpha, \beta, \gamma, x_m - l_t), g(\alpha, \beta, \gamma, x_m + l_t)] \quad (\text{B.12})$$

El valor de  $x_m$ , punto donde se maximiza el campo depende de cada configuración (para configuraciones simétricas será  $x_m = 0$ ). Para obtenerlo es necesario añadir una nueva ecuación

$$\frac{d g(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d x} = 0 \quad (\text{B.13})$$

El problema de optimización planteado se ha resuelto con el método del máximo descenso, para la búsqueda de mínimos locales, y el método de multicomienzo para el mínimo global. [65].

## B.2 Determinación de la línea óptima con una fase partida

Considérese una línea con una fase partida, compuesta por un cuadripolo de tres conductores (dipolos 1 y 2, figura B.2) y un dipolo (dipolo 3). Los ángulos que definen el cuadripolo son  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) y  $\beta$  ( $0 < \beta < 2\pi$ ), mientras que  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 2\pi$ ) define la orientación del dipolo 3. Se supondrá que las distancias de los tres dipolos son constantes e iguales a  $d$ , y que la distancia mínima al suelo  $h$  es constante. El campo complejo debido al cuadripolo, teniendo en cuenta (5.1) y (5.2) (modelo DA) viene dado por

$$\vec{B}_{qa} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}_q d}{2\pi} \left[ \left( \frac{\cos \varphi_{1a}}{r_1^2} + \frac{\cos \varphi_{2a}}{r_2^2} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\text{sen } \varphi_{1a}}{r_1^2} + \frac{\text{sen } \varphi_{2a}}{r_2^2} \right) \vec{u}_y \right] \quad (\text{B.14})$$

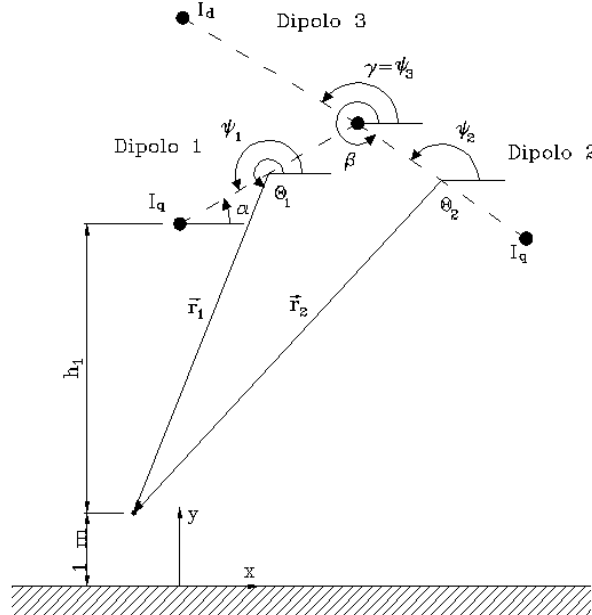


Figura B.2: Línea trifásica con una fase partida

Por otro lado el dipolo 3 genera un campo complejo

$$\vec{B}_{3a} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}_3}{2\pi} \left( \frac{\cos \varphi_{3a}}{r_3^2} \vec{u}_x + \frac{\text{sen } \varphi_{3a}}{r_3^2} \vec{u}_y \right) \quad (\text{B.15})$$

Es fácil comprobar, teniendo en cuenta (5.14) y (5.15), que el campo resultante total

viene dado por

$$B_{ar}^2 = \left( \frac{\mu_0 I_q d}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{4}{r_3^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) - \frac{2}{r_1^2 r_3^2} \cos(\varphi_{1a} - \varphi_{3a}) - \frac{2}{r_2^2 r_3^2} \cos(\varphi_{2a} - \varphi_{3a}) \right) \quad (\text{B.16})$$

donde

$$r_1^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{d^2}{4} + d(h_1 \sin \alpha - x \cos \alpha) \quad (\text{B.17})$$

$$r_2^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{5}{4}d^2 + 2d(h_1 \sin \alpha - x \cos \alpha) + d(h_1 \sin \beta - x \cos \beta) + d^2 \cos(\beta - \alpha) \quad (\text{B.18})$$

$$r_3^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{5}{4}d^2 + 2d(h_1 \sin \alpha - x \cos \alpha) + d(h_1 \sin \gamma - x \cos \gamma) + d^2 \cos(\gamma - \alpha) \quad (\text{B.19})$$

$$\varphi_{ia} = 2\theta_i - \psi_i + \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.20})$$

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d}{2} \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \sin \alpha + h_1} \quad (\text{B.21})$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d}{2} \cos \beta + d \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \sin \beta + d \sin \alpha + h_1} \quad (\text{B.22})$$

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d}{2} \cos \gamma + d \cos \alpha - x}{\frac{d}{2} \sin \gamma + d \sin \alpha + h_1} \quad (\text{B.23})$$

$$\psi_1 = \pi + \alpha \quad (\text{B.24})$$

$$\psi_2 = \beta \quad (\text{B.25})$$

$$\psi_3 = \gamma \quad (\text{B.26})$$

El problema consiste en minimizar (B.16) sujeto a las siguientes restricciones

$$\cos(\alpha - \gamma) \geq -0,5 \quad (\text{B.27})$$

$$\cos(\beta - \gamma) \leq 0,5 \quad (\text{B.28})$$

$$h_1 = h - 1 + \max[0, -d \sin \alpha, -d(\sin \alpha + \sin \beta), -d(\sin \alpha + \sin \gamma)] \quad (\text{B.29})$$

(B.27) y (B.28) aseguran que la distancia entre dos conductores de distinta fase es  $\geq d$ . (B.29) impone que la distancia mínima al suelo es  $h$ .

El problema se ha resuelto de manera análoga al del cuadripolo óptimo (apartado B.1).

### B.3 Determinación de la línea óptima con dos fases partidas

Considérese una línea con dos fases partidas, compuesta por dos cuadripolo de tres conductores (cuadripolos 1 y 2, figura B.3). Los ángulos que definen el cuadripolo 1 son  $\psi_{11}$  ( $0 < \psi_{11} < \frac{\pi}{2}$ ) y  $\psi_{12}$  ( $0 < \psi_{12} < 2\pi$ ), mientras que los que definen el cuadripolo 2 son  $\psi_{21}$  ( $0 < \psi_{21} < 2\pi$ ) y  $\psi_{22}$  ( $0 < \psi_{22} < 2\pi$ ).

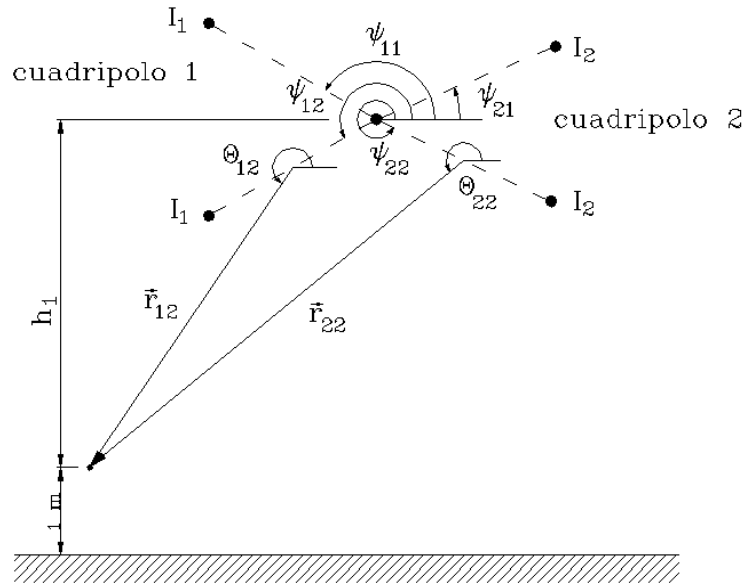


Figura B.3: Línea trifásica con dos fases partidas

Se supondrá que las distancias entre conductores de los dipolos del cuadripolo 1 son constantes e iguales a  $d_1$ , mientras que las distancias de los dipolos del cuadripolo 2 son iguales y puede variar (se le denotará por  $d_2$ ). La distancia mínima al suelo  $h$  es constante. El campo complejo debido a cada cuadripolo, teniendo en cuenta (5.1) y (5.2) (modelo DA) viene dado por

$$\vec{B}_{ia} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}_i d_i}{2\pi} \left[ \left( \frac{\cos \varphi_{i1a}}{r_{i1}^2} + \frac{\cos \varphi_{i2a}}{r_{i2}^2} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\sin \varphi_{i1a}}{r_{i1}^2} + \frac{\sin \varphi_{i2a}}{r_{i2}^2} \right) \vec{u}_y \right] \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.30})$$



estando  $I_1$  e  $I_2$  definidas en (5.17) y (5.18), y siendo

$$r_{ij}^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{d_i^2}{4} + d_i(h_1 \sin \psi_{ij} - x \cos \psi_{ij}) \quad (\text{B.31})$$

$$\varphi_{ija} = 2\theta_{ij} - \psi_{ij} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.32})$$

$$\theta_{ij} = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d_i}{2} \cos \psi_{ij} - x}{\frac{d_i}{2} \sin \psi_{ij} + h_1} \quad (\text{B.33})$$

con  $i, j = 1, 2$ . El problema consiste entonces en minimizar

$$|\vec{B}_{1a} + \vec{B}_{2a}| \quad (\text{B.34})$$

sujeto a las restricciones

$$d_2 \geq d_1 \quad (\text{B.35})$$

$$\cos(\psi_{1i} - \psi_{2j}) \leq \frac{d_2}{2d_1} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.36})$$

$$h_1 = h - 1 + \max[0, -d_i \sin \psi_{ij}] \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.37})$$

Dado que  $d_1$  es la distancia mínima entre conductores  $d_2$  habrá de ser superior. La expresión (B.36) obliga a que las distancias entre conductores de distinta fase sea superior a  $d$ . Por último (B.37) impone que la altura del conductor más cercano al suelo sea  $h$ .

## B.4 Determinación de la línea óptima con tres fases partidas

Considérese una línea con tres fases partidas, compuesta por dos cuadripolo de cuatro conductores (cuadripolos 1 y 2, figura B.4).

Los ángulos que definen el cuadripolo 1 (compuesto por los conductores cuya corriente es  $I_1$ ) son  $\psi_{11}$  ( $0 < \psi_{11} < 2\pi$ ),  $\psi_{12}$  ( $0 < \psi_{12} < 2\pi$ ), mientras que los que definen el cuadripolo 2 (compuesto por los conductores cuya corriente es  $I_2$ ) son  $\psi_{21}$  ( $0 < \psi_{21} < 2\pi$ ) y  $\psi_{22}$  ( $0 < \psi_{22} < 2\pi$ ). La posición relativa entre ambos cuadripolos se define mediante  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) y  $d_3$ . Se supondrá que la distancia de cada dipolo del cuadripolo 1 es constante e igual a  $d_1$ , mientras que la distancia  $d_2$  de cada dipolo del cuadripolo 2 puede variar ( $d_2 \geq d_1$ ). En cuanto a la distancia  $d_3$ , puede tomar cualquier valor. La distancia mínima al suelo  $h$  es constante. El campo complejo debido a cada cuadripolo viene dado

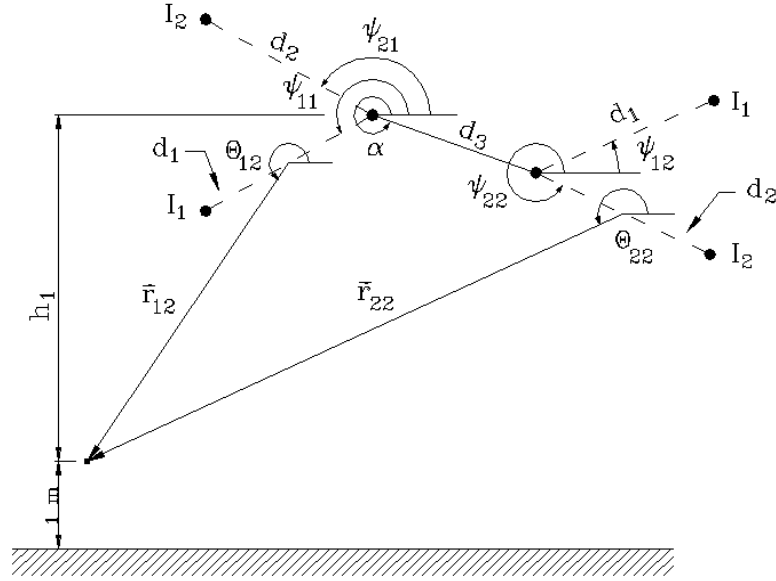


Figura B.4: Línea trifásica con tres fases partidas

por (B.30), estando  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$  definidas en (5.17) y (5.18), y siendo

$$r_{i1}^2 = x^2 + h_1^2 + \frac{d_i^2}{4} + d_i(h_1 \sin \psi_{i1} - x \cos \psi_{i1}) \quad (\text{B.38})$$

$$r_{i2}^2 = x^2 + h_1^2 + d_3^2 + \frac{d_i^2}{4} + d_i(h_1 \sin \psi_{i2} - x \cos \psi_{i2}) \quad (\text{B.39})$$

$$+ 2d_3(h_1 \sin \alpha - x \cos \alpha) + d_i d_3 \cos(\alpha - \psi_{i2}) \quad (\text{B.40})$$

$$\varphi_{ija} = 2\theta_{ij} - \psi_{ij} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.41})$$

$$\theta_{i1} = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d_i}{2} \cos \psi_{i1} - x}{\frac{d_i}{2} \sin \psi_{i1} + h_1} \quad (\text{B.42})$$

$$\theta_{i2} = \frac{3\pi}{2} - \text{atan} \frac{\frac{d_i}{2} \cos \psi_{i2} + d_3 \cos \alpha - x}{\frac{d_i}{2} \sin \psi_{i2} + d_3 \sin \alpha + h_1} \quad (\text{B.43})$$

con  $i, j = 1, 2$ . El problema consiste entonces en minimizar

$$B_{ar} = |\vec{\mathbf{B}}_{1a} + \vec{\mathbf{B}}_{2a}| \quad (\text{B.44})$$

sujeto a las restricciones

$$d_2 \geq d_1 \quad (\text{B.45})$$

$$\cos(\psi_{1i} - \psi_{2i}) \leq \frac{d_2}{2d_1} \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} d_i^2 + d_3^2 - 2d_i d_3 \cos(\psi_{i1} - \alpha) - 2d_i d_1 \cos(\psi_{i1} - \psi_{(3-i)2}) \\ + 2d_i d_3 \cos(\alpha - \psi_{i2}) \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$d_2^2 + d_3^2 - 2d_2 d_3 \cos(\alpha - \psi_{21}) \geq d_1^2 \quad (\text{B.48})$$

$$d_2^2 + d_3^2 + 2d_2 d_3 \cos(\alpha - \psi_{22}) \geq d_1^2 \quad (\text{B.49})$$

$$h_1 = h - 1 + \max[0, -d_i \sin \psi_{i1}, -d_3 \sin \psi_{i2} - d_i \sin \psi_{i2}] \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.50})$$

impuestas para mantener constante la altura mínima al suelo y la distancia mínima entre fases.

Nótese que la línea trifásica con dos fases partidas es un caso particular de éste, si  $d_3 = 0$ . Igualmente, la línea trifásica con una fase partida se obtiene si  $d_3 = 0$  y  $\psi_{21} = \psi_{22}$ .

**Apéndice B      División de fases. Determinación de configuraciones óptimas**

---

# Apéndice C

## Inductancias propia y mutua de lazos

### C.1 Lazos largos y próximos entre sí

Considérense dos lazos en los que se supone lo siguiente (figura C.1):

- Se compone cada uno de cuatro tramos rectilíneos, iguales dos a dos. Dos de los tramos son paralelos a la línea y los otros dos perpendiculares. La longitud de los tramos paralelos es mucho mayor que la longitud de los tramos perpendiculares, y que la distancia máxima entre dos conductores de cada lazo. Con ello se puede suponer que la longitud de los lazos es infinita.
- La distancia entre dos conductores cualesquiera es, al menos, un orden de magnitud mayor que el radio de los conductores.
- La permeabilidad magnética de los conductores y del medio que los rodea es la del vacío (conductores no ferromagnéticos).
- Los conductores son cilíndricos y con resistividad uniforme en su interior.
- La corriente que circula por los conductores es continua.

Con ello se considera un problema bidimensional, estando el vector inducción de campo contenido en el plano  $xy$ . Se obtendrán entonces las inductancias propias y mutuas por unidad de longitud.

Se determinarán las inductancias a partir de la energía del campo magnético [24, 55]. Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores, y aplicando la ley de Ampère, el campo magnético a una distancia  $r$  perpendicular al eje del conductor  $i$  de radio  $a$ , por el que

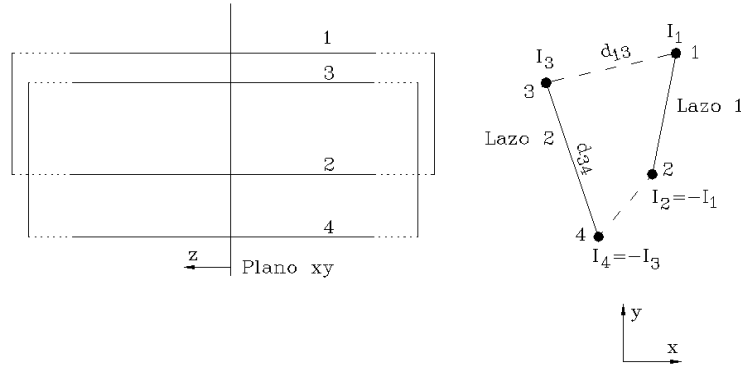


Figura C.1: Conductores paralelos formando dos lazos

circula una corriente continua  $I$ , tendrá la dirección de la tangente a la circunferencia de radio  $r$  y centro el eje del conductor, y vendrá dado por

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad r \leq a \tag{C.1}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > a \tag{C.2}$$

Dado que el potencial magnético vector se define por  $r \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ , se cumple que  $\vec{A}$  está dirigido según el eje  $z$  y viene dado por

$$A(r) = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} + C \quad r \leq a \tag{C.3}$$

$$A(r) = A(a) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} \quad r > a \tag{C.4}$$

donde  $C$  es una constante indeterminada. En aras de la simplificación de (C.4),  $C$  se elige de modo que  $A(r = 1 \text{ m}) = 0$ . Entonces se tiene que

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 - 2 \ln a - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad r \leq a \tag{C.5}$$

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad r > a \tag{C.6}$$

El potencial magnético creado por los cuatro conductores (figura C.1) en un punto  $p$  vendrá dado por

$$A(p) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(p, 2)d(p, 4)}{d(p, 1)d(p, 3)} \tag{C.7}$$

donde  $d(p, i)$  es la distancia de  $p$  al conductor  $i$ .

Por otro lado la energía del campo magnético extendido a todo el espacio viene dada por

$$E = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad (\text{C.8})$$

En el caso del campo magnético de los conductores, dado que los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  no tienen componente  $z$ , se puede integrar entre dos planos infinitos, paralelos al  $xy$  y a un metro de distancia entre ambos

$$E' = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dS \quad (\text{C.9})$$

Teniendo en cuenta que [55]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{A} \cdot \vec{J} \quad (\text{C.10})$$

(C.9) se puede poner como

$$E' = \sum_{k,l=1}^4 E'_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \int \vec{A}_k(r) \cdot \vec{J}_l dS_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \int A_k(r) J_l dS_l \quad (\text{C.11})$$

donde  $A_k$  representa el potencial magnético vector creado por el conductor  $k$ , y  $J_l$  la densidad de corriente en el conductor  $l$ . Sustituyendo  $A_k$  por sus expresiones (C.5), (C.6), y teniendo en cuenta que  $J$  es uniforme se tiene que

$$E'_{kl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{1}{d(k,l)} I_k I_l \quad k \neq l \quad (\text{C.12})$$

$$E'_{kk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{1}{rgm_k} I_k^2 \quad (\text{C.13})$$

siendo  $rgm_k$  una longitud tal que permite expresar  $E'_{kk}$  de igual modo que  $E'_{kl}$  ( $k \neq l$ ). Para conductores de al-ac  $rgm$  se obtiene mediante cálculo, o a partir de tablas.

La energía magnética creada por las corrientes que circulan por los dos lazos puede ponerse también como

$$E' = \frac{1}{2} L'_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L'_2 I_3^2 + L'_{12} I_1 I_3 \quad (\text{C.14})$$

siendo  $L'_1, L'_2$  las inductancias propias de los lazos por unidad de longitud, y  $L'_{12}$  la inductancia mutua por unidad de longitud. Identificando coeficientes con (C.12) y (C.13),

y suponiendo que los conductores de un mismo lazo son iguales, se tiene que

$$L'_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d(1,2)}{rgm_1} \quad (\text{C.15})$$

$$L'_2 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d(3,4)}{rgm_2} \quad (\text{C.16})$$

$$L'_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(1,4)d(2,3)}{d(1,3)d(2,4)} \quad (\text{C.17})$$

donde el subíndice de  $rgm$  hace referencia al lazo (se empleará este criterio en lo sucesivo).

En el análisis anterior se ha considerado que la corriente es continua. En el caso de ser alterna hay que modificar el cálculo de las inductancias propias.

La inductancia propia puede ponerse como suma de dos términos. Para cualquiera de los dos lazos se tiene que

$$L' = L'_e + L'_i \quad (\text{C.18})$$

$$L'_e = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (\text{C.19})$$

$$L'_i = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{rgm} \quad (\text{C.20})$$

$L'_e$  representa la inductancia del lazo cuyo conductor es hueco, por lo que no existe campo en su interior.  $L'_i$  representa la inductancia interna del lazo, y aparece cuando la sección no es hueca (en el caso hueco  $rgm = a$ ).

En corriente alterna la inductancia interna se modifica por un factor  $g$ :

$$L'_i = g(\alpha, \mu, \sigma, \omega) \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{rgm} \quad (\text{C.21})$$

siendo  $g$  una función que aparece como consecuencia del efecto pelicular, y que depende del radio  $a$ , la permeabilidad  $\mu$ , y conductividad  $\sigma$  del conductor, y la pulsación de la corriente alterna  $\omega$ . Para  $\omega = 0$ ,  $g = 1$ , y para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $g \rightarrow 0$ . Para un conductor cilíndrico y macizo puede obtenerse una expresión analítica de  $g$ , dada por Stevenson



[70]. Una expresión más sencilla, debida a González [24], viene dada por

$$g(a, \mu, \sigma, \omega) = \frac{8r_0^2}{a^2} \operatorname{Im} \left( \frac{f_E(a/r_0)}{f_H(a/r_0)} \right) \quad (\text{C.22})$$

$$f_E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{4^k k! k!} x^{2k} \quad (\text{C.23})$$

$$f_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{4^k k! (k+1)!} x^{2k} \quad (\text{C.24})$$

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \sigma}} \quad (\text{C.25})$$

En el caso de conductores al-ac, compuestos por alambres de acero y aluminio, y empleados comúnmente en líneas aéreas, es aproximadamente correcto suponer que no hay circulación de corriente por el núcleo de acero, y por tanto el efecto pelicular se aplica a la sección hueca compuesta por los conductores de aluminio [22]. Aunque (C.22) es válida para conductores macizos, su aplicación a conductores al-ac de igual diámetro puede servir para conocer un límite inferior de  $g$ , ya que el efecto pelicular es menos importante en conductores huecos, y aún menos si están compuestos por alambres. Por ejemplo, para un conductor macizo de Al,  $a = 15$  mm (valor típico en líneas de transporte),  $\sigma = 35,5$  Sm/mm<sup>2</sup>,  $\mu = \mu_0$ , se obtiene a 50 Hz  $g = 1 - 5,12 \cdot 10^{-4}$ . Se despreciará por tanto el efecto pelicular en el cálculo de la inductancia.

En el caso en que los lazos tengan un conductor común (por ejemplo el 2 y 3) es fácil comprobar que la inductancia mutua queda

$$L'_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d(1,2)d(2,4)}{r_{gm} d(1,4)} \quad (\text{C.26})$$

## C.2 Lazos cortos y/o distantes entre sí

Si la longitud de los tramos paralelos a la línea de ambos lazos es del mismo orden que la longitud de los tramos transversales y/o la distancia entre los lazos (en el caso de que exista más de un lazo) se comete un cierto error al emplear las expresiones (C.15), (C.17) y (C.26) para las inductancias propias y mutuas. Se determina a continuación el error cometido al emplear las expresiones del apartado anterior.

### C.2.1 Cálculo de la inductancia propia

Considérese un lazo en el que  $l$  y  $s$  son del mismo orden (figura C.2). En lo sucesivo se llamará a  $l$  longitud del lazo, y a  $s$  anchura del lazo.

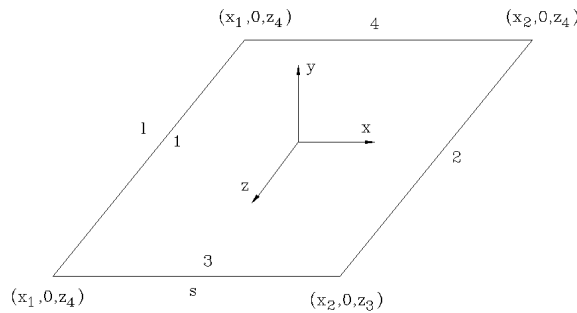


Figura C.2: Lazo en el que  $l$  y  $s$  son del mismo orden

La inductancia puede calcularse a partir del flujo concatenado por el lazo

$$\phi = LI \tag{C.27}$$

Si  $I = 1$  A el flujo concatenado coincidirá con la inductancia propia. Se vio en (C.18) que la inductancia propia de un lazo se compone de dos términos, uno que corresponde a la inductancia de un lazo cuyo conductor es hueco ( $L_e$ ), y otro que tiene en cuenta el flujo concatenado en el interior del conductor ( $L_i$ ). Si se considera que el radio  $a \ll s, l$  se puede suponer que el término  $L_i$  no varía. En ese caso habrá que calcular  $L_e = \phi_e$  a partir de

$$\phi_e = \phi_{e1} + \phi_{e2} + \phi_{e3} + \phi_{e4} \tag{C.28}$$

siendo

$$\phi_{e1} = \int_{x1+a}^{x2} \int_{z4}^{z3} \vec{B}_1 dx dz \tag{C.29}$$

$$\phi_{e2} = \int_{x1}^{x2-a} \int_{z4}^{z3} \vec{B}_2 dx dz \tag{C.30}$$

$$\phi_{e3} = \int_{x1}^{x2} \int_{z4}^{z3-a} \vec{B}_3 dx dz \tag{C.31}$$

$$\phi_{e4} = \int_{x1}^{x2} \int_{z4+a}^{z3} \vec{B}_4 dx dz \tag{C.32}$$

Aplicando la ley de Biot-Savart (3.13), y teniendo que cuenta que tanto el lazo como la superficie de integración están situado en el plano  $y = 0$ , la variable  $y$  se elimina, con lo que se obtiene la expresión de  $\vec{B}_i(x, z)$ . Por ejemplo, para el tramo 1 se tiene

$$\vec{B}_1(x, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(x - x_1)^2} \left( \frac{z_3 - z}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (z_3 - z)^2}} - \frac{z_4 - z}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (z_4 - z)^2}} \right) (x - x_1) \vec{u}_y \quad (\text{C.33})$$

La figura C.3 muestra el error cometido en el valor de la inductancia por unidad de longitud, cuando se calcula con la expresión (C.15). Los parámetros del lazo son  $s = 20$  m,  $a = 15$  m, y conductor macizo. Se ha obtenido para diversos valores del cociente  $l/s$ . Se observa que para  $l/s > 100$  se obtiene un error inferior al 1%.

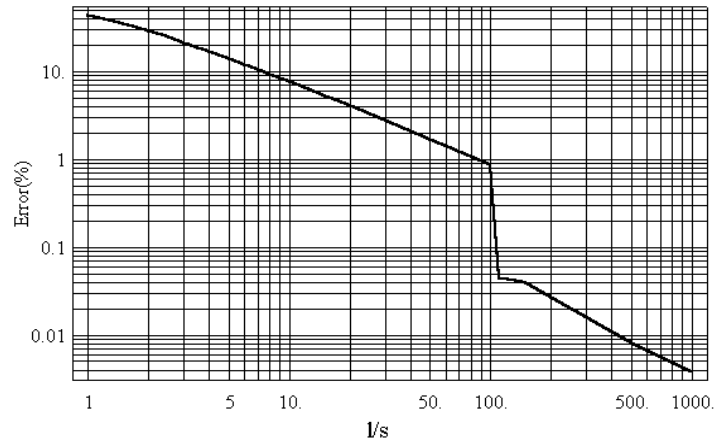


Figura C.3: Error en % al estimar  $L/l$  por  $L'$  (C.15)

### C.2.2 Cálculo de la inductancia mutua

Considérense ahora dos lazos (figura C.4) con los tramos dispuestos como en el apartado C.1. El eje  $z$  es paralelo a la línea. Supóngase que

- Las longitudes de ambos lazos son iguales ( $l_1 = l_2$ )
- la longitud y anchura de los lazo son del mismo orden y/o
- la distancia entre un tramo paralelo a  $z$  de un lazo, y de otro, es del mismo orden que la longitud de cada lazo.

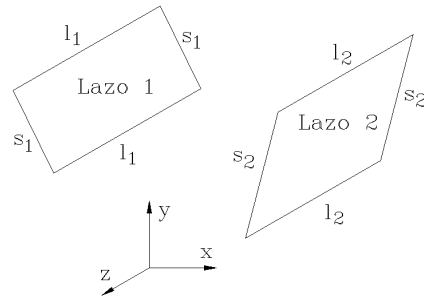


Figura C.4: Lazos cuya longitud y anchura son similares

El valor de la inductancia mutua se calcula a partir del flujo creado por el lazo 2 y concatenado por el 1

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = L_{12} \mathbf{I}_2 \tag{C.34}$$

Para obtener  $\vec{B}(x, y, z)$  se aplica la ley de Biot-Savart (3.13) a los cuatro tramos que componen el lazo 2. La determinación del flujo ha de realizarse por métodos numéricos.

Como ejemplo se ha analizado la disposición de la figura C.5. La figura C.6 muestra el error al calcular, para distintos valores de la relación  $l_1/s_1$ , la inductancia mutua por unidad de longitud suponiendo longitud infinita de lazos (C.17).

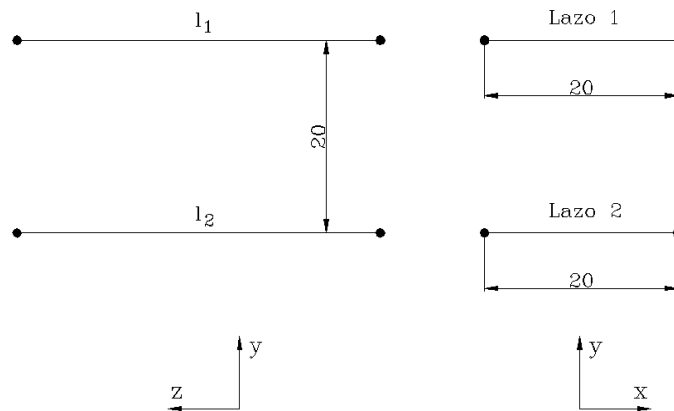


Figura C.5: Configuración ejemplo para la que se ha obtenido el error de la inductancia por unidad de longitud. Unidades en metros.

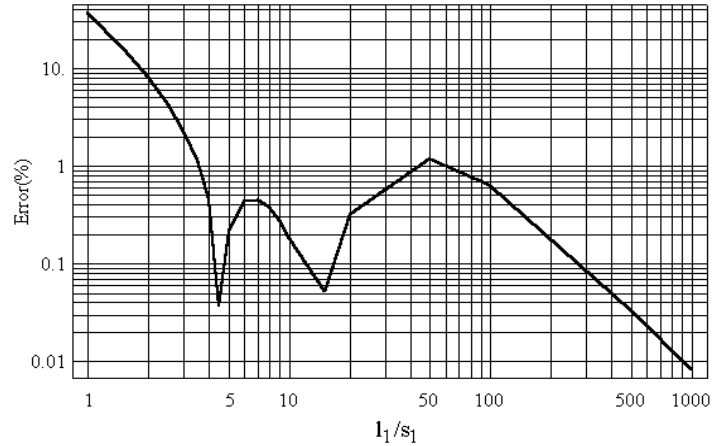


Figura C.6: Error en % al estimar  $L_{12}/l_1$  por  $L'_{12}$  (C.17)

Para el caso de dos lazos con un conductor común resulta un error menor, ya que los lazos están más próximos entre sí.

Se puede concluir que, aunque depende de las posiciones relativas entre ambos lazos, si se desea obtener un error inferior al 1% es preciso que la longitud de los lazos sea aproximadamente 5 veces mayor que la anchura.



# Bibliografía

- [1] Abdel-Salam M., Abdallah H., El-Mohandes M., El-Kishky H., *Calculation of Magnetic Fields from Electric Power Transmission Lines*. Electric Power System Research. No. 49, pp. 99-105, 1999.
- [2] Adair E.R., *Currents of Death Rectified*. Proceedings of the Industry Applications Society, Electromagnetics Field Seminar, Nueva York, 1991.
- [3] Adams H.W., Trivette J.D., *Evaluation of Magnetic Field and System Loss Considerations for Changes in Transmission Network Configuration*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 11, No. 4, pp. 2036-2041, Octubre 1996.
- [4] Adler R.B., Chu L.J., Fano R.M., *Electromagnetic Energy, Transmission and Radiation*. John Wiley, Nueva York, 1960.
- [5] Asanova T.P., Rakov A.N., *The Health Status of People Working in the Electric Field of Open 400-500 kV switching structures*. Gigiena Truda I Professionalnye Zabolevaniia, No. 10, pp. 50-52, 1966.
- [6] Belmans R., Van Dessel M., Koopmans W., Geysen W., *CAD-Finite Element Calculation Modelling of the Field Under a High Voltage Line*. Cigré Session 1993, paper 200-06.
- [7] Brodeur P., *Currents of Death: Power Lines, Computer Terminals, and the Attempt to Cover Up Their Thread*. Simon and Schuster, Nueva York, 1989.
- [8] ANSI/IEEE Std 644, 1987, *IEEE Standard Procedures for Measurement of Power Frequency Electric and Magnetic Fields from AC Power Lines*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York, 1987.
- [9] Carson J., *Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return*. Bell System Tech., No. 5, pp. 539-554, 1926.

## Bibliografia

---

- [10] Conti R., Deponti F., Visintainer I., *Analisi dei Possibili Metodi di Riduzione del Campo Magnetico a Frequenza Industriale*. Documento interno ENEL, Milán, 1997.
- [11] Cotten W.L., Ramsing K.C.K., Cai C., *Design Guidelines for Reducing Electromagnetic Field Effects from 60-Hz Electrical Power Systems*. IEEE Transactions on Industry Applications. Vol. 30, No. 6, pp. 1462-1471, Nov/Dic. 1994.
- [12] Dommel, H.W., *Electromagnetic Transients Program (EMTP). Reference Manual*. 4427 West 6th Avenue, Vancouver, Canada, Agosto 1986.
- [13] Dovan T., Owen R., Nuttall K., Howard B., *VDU Interference and Power Frequency Magnetic Field Design Considerations for Private Electrical Facilities*. Electra. No. 181, pp. 113-137, 1998.
- [14] Du Y., Cheng T.C., Farag A.S., *Principles of Power Frequency Magnetic Field Shielding with Flat Sheets in a Source of Long Conductors*. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. Vol. 38, No. 3, pp. 450-459, Agosto 1996.
- [15] Durkin C.J., Fogarty R.P., *Five Years of Magnetic Field Management*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 10, No. 1, pp. 219-228, Enero 1995.
- [16] *Transmission Line Reference Book, 115-138 kV Compact Line Design*. Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, 1978.
- [17] *Transmission Line Reference Book, 345 kV and Above*, segunda edición, revisada. Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, 1987.
- [18] Farag A.S., Dawoud M.M., Habiballah I.O., *Implementation of Shielding Principles for Magnetic Field Management of Power Cables*, Electric Power System Research. No. 48, pp. 193-209, 1999.
- [19] Feychting M., Ahlbom A., *Magnetic Fields and Cancer in Children Residing near Swedish High-Voltage Power Lines*. American Journal of Epidemiology. No. 138, pp. 467-481, 1993.
- [20] Feychting M., Forssen U., Floderus B., *Occupational and Residential Magnetic Field Exposure and Leukemia and Central Nervous System Tumors*. Epidemiology. No. 8, pp. 384-389, 1997.
- [21] *The FIELDS 2.0 Program*, Southern California Edison Company, 6090 North Irwindale Avenue, Irwindale, California, 1992.



- [22] Fink D., Wayne H., editores, *Manual de Ingeniería Eléctrica*, decimotercera edición. McGraw-Hill, México, 1996.
- [23] Floderus B., Persson T., Stenlund C., Wennberg A., Ost A., Knave B., *Occupational Exposure to Magnetic Fields in Relation to Leukemia and Brain Tumors: A Case-control Study in Sweden*, Cancer Causes and Control, No. 4, pp. 465-476, 1993.
- [24] González F.J., *Líneas Eléctricas*. Apuntes del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla, 1998.
- [25] Grupo de Trabajo de Campos Electromagnéticos de Unesa, *Campos Eléctricos y Magnéticos de 50 Hz*. Grupo Pandora, 1998.
- [26] Habiballah I.O., Farag A.S., Dawoud M.M., Firoz A., *Underground Cable Magnetic Field Simulation and Management Using New Design Configurations*. Electric Power System Research. No. 45, pp. 141-148, 1998.
- [27] R., Koglin H., Rees V., *Equivalent Circuit of HVDC Lines for Symmetric and Unsymmetric Operation in a Frequency Region 0 to 100 kHz*. ETZ-A. Vol. 93, pp. 148-152, 1972.
- [28] Hasselgren L., Nöller E., Hamnerius Y., *Calculation of Magnetic Shielding of a Substation at Power Frequency using FEM*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 9, No. 3, pp. 1398-1405, Julio 1994.
- [29] Hiles M., Olsen R., Holte K., Jensen D., Griffing K., *Power Frequency Magnetic Field Management Using a Combination of Active and Passive Shielding Technology*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 13, No. 1, pp. 171-179, Enero 1998.
- [30] Horton W.F., Goldberg S., *Shielding the Power Frequency Magnetic Fields produced by Underground Distribution Cables*. Proceedings of the North American Power Symposium, Kansas State University, 1994.
- [31] Horton W.F., Goldberg S., *Power Frequency Magnetic Fields and Public Health*. Boca Raton. CRC, 1995.
- [32] IEEE Magnetic Fields Task Force, *Magnetic Fields from Electric Power Lines. Theory and comparison to measurements*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 3, No. 4, pp. 2127-2136, Octubre 1988.
- [33] IEEE Magnetic Fields Task Force, *An Evaluation of Instrumentation used to Measure AC Power System Magnetic Fields*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 6, No. 1, pp. 373-383, Enero 1991.

## Bibliografía

---

- [34] Hameyer K, Mertens R, Belmans R., *Computation and Measurement of Electromagnetic Fields of AC High Voltage Transmission Lines*. AC and DC Power Transmission Conference, Conference Publication No. 423, pp. 52-57, Abril-Mayo 1996.
- [35] Ivanyi A., *Shielding of Phase Conductors*. IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 32, No. 3, pp. 1481-1484, Enero 1995.
- [36] Jonsson U., Larsson A., Sjödin J.O., *Optimized Reduction of the Magnetic Field near Swedish 400 kV Lines by Advanced Control of Shield Wire Currents. Test results and economic evaluation*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 9, No. 2, pp. 961-969, Abril 1994.
- [37] Jay F., Editor, *IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms*, Nueva York, 1984.
- [38] Karady G., *A Novel Magnetic Field Management Method for Underground Power Cables*. Electric Power System Research. Vol. 31, No. 2, pp. 103-110, Noviembre 1994.
- [39] Karady G., Núñez C., Raghavan R., *The Feasibility of Magnetic Field Reduction by Phase Relationship Optimization in Cable Systems*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 13, No. 2, pp. 647-654, Abril 1998.
- [40] Kaune W.T., Zaffanella L.E., *Analysis of Magnetic Fields Produced Far from Electric Power Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 7, No. 4, pp. 2082-2091, Octubre 1993.
- [41] Kelhä V.O., Pukki J.M., Peltonen R.S., Penttinen A.J., Ilmoniemi R.J., Heino J.J., *Design, Construction and Performance of a Large-volume Magnetic Shield*. IEEE Trans. Magn. No. 18, pp. 260-270, Enero 1982.
- [42] Latorre J., Soto F., Sancha J.L., *Diseño de Líneas Aéreas Eléctricas en Alta Tensión en Relación con los Campos Eléctricos y Magnéticos*. 3<sup>as</sup> Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Barcelona, Julio 1993.
- [43] Latorre J., Soto F., Sancha J.L., Martín L., Sánchez S., Bernar J., *Electric and Magnetic Fields at Low Frequency Produced by Spanish High Voltage Overhead Transmission Lines*. International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Roma 1994.
- [44] Lindberg L., *Reduction of Magnetic Fields from Electric Power and Installation Lines*. IEE Proc.-Sci. Meas. Technology. Vol. 145, No. 5, pp. 215-221, Septiembre 1998.

- [45] London S.J., Thomas D.C., Bowman J.D., Sobel E., Cheng T.C., Peters J.M., *Exposure to Residential Electric and Magnetic Fields and Risk of Childhood Leukemia*. American Journal of Epidemiology. No. 134, pp. 923-937, 1991.
- [46] Maddock B.J., *A Summary of Standards for Human Exposure to Electric and Magnetic Fields at Power Frequencies*. Electra. No. 179, pp. 51-63, Agosto 1998.
- [47] Mamishev A.V., Nevels R.D., Russell B.D., *Effects of Conductor Sag on Spatial Distribution of Power Line Magnetic Field*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 11, No. 3, pp. 1571-1576, Julio 1996.
- [48] Memari A.R., Janischewskyj W., *Mitigation of Magnetic Field near Power Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 11, No. 3, pp. 1577-1586, Julio 1996.
- [49] Nadie J., *¿Qué Está Pasando con los Campos Electromagnéticos?*. Andalucía Ecológica, pp. 4-6, Enero 2000.
- [50] NIEHS EMF-RAPID Program Staff, *NIEHS Report on Health Effects from Exposure to Power-Line Frequency Electric and Magnetic Fields*. NIH Publication No. 99-4493, National Institute of Environmental Health Sciences, P.O. Box 12233, Research Triangle Park, NC 27709, Mayo 1999.
- [51] Nourai A., Keri J. F., Shih C. H., *Shield Wire Loss Reduction for Double Circuit Transmission Lines*. IEEE Transactions On Power Delivery, Vol. 3, No. 4, pp. 1854-1864, Octubre 1988.
- [52] Olsen R.G., Wong P.S., *Characteristics of Low Frequency Electric and Magnetic Fields in the Vicinity of Electric Power Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 7, No. 4, pp. 2046-2053, Octubre 1992.
- [53] Olsen R.G., James D.C., Chartier V.L., *The Performance of Reduced Magnetic Field Power Lines: Theory and Measurements on an Operating Line*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 8, No. 3, pp. 1430-1442, Julio 1993.
- [54] Olsen R.G., Backus S.L., Stearns R.D., *Development and Validation of Software for Predicting Elf Magnetic Fields near Power Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 10, No. 3, pp. 1525-1534, Julio 1995.
- [55] Panofsky W., Phillips M., *Classical Electricity and Magnetism*, segunda edición. Addison-Wesley, 1962.
- [56] Pappa J., Ben-Yaacov G., *Windowed Access to Electric and Magnetic Fields Software*. Computer Applications in Power, pp. 24-28, Octubre 1992.

## Bibliografía

---

- [57] Pettersson P., *Simple Method for Characterization of Magnetic Fields from Balanced Three-phase Systems*. Proceedings Cigré Session, 1992, Paper 36-103.
- [58] Pettersson P., *Principles in Transmission Line Magnetic Field Reduction*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 11, No. 3, pp. 1587-1592, Julio 1996.
- [59] Pettersson P., *Reduction of Power System Magnetic Field by Configuration Twist*, PE-141-PWRD-0-12-1996.
- [60] Plonus M.A., *Applied Electromagnetics*. International Student Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1978.
- [61] Rade L., Westergren B., *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, 4<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- [62] Rashkes V.S., Lordan R., *Magnetic Field Reduction Methods: Efficiency and Cost*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 13, No. 2, pp. 552-559, Abril 1998.
- [63] Reta-Hernández M., Karady G.G., *Attenuation of Low Frequency Magnetic Fields Using Active Shielding*. Electric Power System Research. No. 45, pp. 57-63, 1998.
- [64] Rikitake T., *Magnetic and Electromagnetic Shielding*. D. Reidel Publishing Company, Boston, 1987.
- [65] Ríos D., Ríos S., Martín J., *Simulación. Métodos y Aplicaciones*, primera edición. Ra-Ma Editorial, Madrid, 1997.
- [66] de la Rosa R., *Contaminación Electromagnética. Las Radiaciones y sus Efectos sobre la Salud*, segunda edición. Terapion, Valencia, 1996.
- [67] Sarma P, *Characterization of Power Frequency Magnetic Fields in Different Environments*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 8, No. 2, pp. 598-606, Abril 1993.
- [68] Savitz D.A., Wachtel H., Barnes F.A., John E.M., Tvrđik J.G., *Case Control Study of Childhood Cancer and Exposure to 60-Hz Magnetic Fields*. American Journal of Epidemiology. No. 128, pp. 21-38, 1988.
- [69] Sicree R.M., Rauch G.B., Dietrich F.M., *Comparison of Magnetic Flux Density Meter Responses over a Database of Residential Measurements*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 8, No. 2, pp. 607-619, Abril 1993.
- [70] Stevenson W.D., *Elements of Power System Analysis*, segunda edición. McGraw-Hill, Nueva York, 1962.

- [71] Stewart J.R., Dale S.J., Klein K.W., *Magnetic Field Reduction Using High Phase Order Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 8, No. 2, pp. 628-636, Abril 1993.
- [72] Swanson J., *Long Term Variations in the Exposure of the Population of England and Wales to Power Frequency Magnetic Fields*. J. Radiol. Protection. No. 16, pp. 287-301, 1996.
- [73] Taflove A., Genge M., Dabkowski J., *Mitigation of Buried Pipeline Voltages due to 60 Hz AC Inductive Coupling*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-98, No. 5, pp. 1806-1823, Sept/Oct 1979.
- [74] *Cancer Risks Associated with Occupational Exposure to Magnetic Fields Among Electric Utility Workers in Ontario and Quebec, Canada, and France, 1970-1989*. Am. J. Epidemiology No. 139, pp. 550-572, 1994.
- [75] Torá J.L., *Transporte de la Energía Eléctrica*. UPCO, Madrid, 1997.
- [76] *Transmission Line Reference Book, 345 kV and Above*, segunda edición, revisada. Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, 1987.
- [77] Tsanakas D., Tsalemis D., Agoris D., Vojazakis J., *Optimum Arrangements of the Phase Conductors of Overhead Transmission Lines for the Magnetic Field Minimization*. Cigré Session 1994, paper 36-101.
- [78] UNE 21018, *Normalización de Conductores Desnudos a Base de Aluminio, para Líneas Eléctricas Aéreas*. AENOR, Fernández de la Hoz, 52, Madrid, 1980.
- [79] Wait J.R., Spies K.P., *On the Image Representation of the Quasi-Static Fields of a Line Current Source Above the Ground*. Canadian Journal of Physics, Vol. 47, pp. 2731-2733, 1969.
- [80] Walling R.A., Paserba J.J., Burns C.W., *Series-capacitor Compensated Shield Scheme for Enhanced Mitigation of Transmission Line Magnetic Fields*. IEEE Transactions on Power Delivery. Vol. 8, No. 1, pp. 461-469, Enero 1993.
- [81] Wassef K., Varadan V.V., *Magnetic Field Shielding Concepts for Power Transmission Lines*. IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 34, No. 3, pp. 649-654, Mayo 1998.
- [82] Wertheimer N., Leeper E., *Electrical Wiring Configuration and Childhood Cancer*. American Journal of Epidemiology. No. 109, pp. 273-284, 1979.

## Bibliografía

---

- [83] Working Group on Electrostatic and Electromagnetic Effects of Transmission Lines, *Measurement of Electric and Magnetic Fields from Alternating Current Power Lines*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-97, No. 4, pp. 1104-1114, Julio/Agosto 1978.
- [84] Zaffanella L., *Survey of Residential Magnetic Field Sources*. Informe para el Electrical Power Research Institute (EPRI), TR-102759, 1993.
- [85] Zaffanella L., Kalton G.W., *Survey of Personal Magnetic Field Exposure Phase II: 1000-person Survey*. EMF-RAPID Program Engineering Project No. 6. Oak Ridge, TN. Lockheed Martin Energy Systems, Inc., 1998.