

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS RADIALES  
Y DÉBILMENTE MALLADAS.  
FORMULACIONES ALTERNATIVAS**

**TESIS DOCTORAL**

por

**Esther Romero Ramos**

Ingeniero Industrial por la E.T.S. de Ingenieros Industriales  
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Septiembre de 1998.

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE SEVILLA BIBLIOTECA

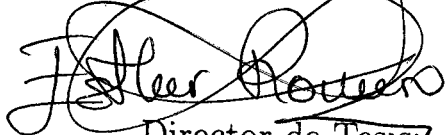
UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS RADIALES  
Y DÉBILMENTE MALLADAS.  
FORMULACIONES ALTERNATIVAS

TESIS DOCTORAL

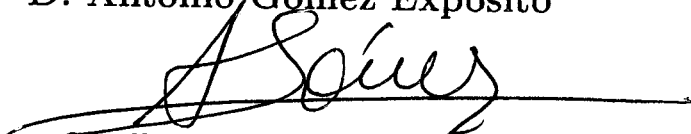
por

~~Esther Romero Ramos~~



Director de Tesis:

D. Antonio Gómez Expósito



Sevilla, Septiembre de 1998.

A mi esposo y mis padres.

*"Mide lo que se pueda medir, y lo que no se pueda medir, hazlo medible"*

*Galileo Galilei*

## Agradecimientos

No me cabe duda, sobre todo si pienso en los principios de esta tesis, que he llegado a buen puerto gracias a la dirección ejemplar y profesional, aderezada con buenas dosis de optimismo, entrega y paciencia, de su director Antonio Gómez Expósito.

Asimismo, han sido fundamentales en el desarrollo de la tesis la ayuda desinteresada y el buen ambiente de optimismo y trabajo que generan todos los compañeros y compañera del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla.

También deseo manifestar mi agradecimiento a IBERDROLA, por su colaboración económica a través del programa de "Ayuda a la Investigación Científica y al Desarrollo Tecnológico" que promueve esta entidad.

Finalmente, y con especial cariño, a mi marido Rubén, por su apoyo constante e incondicional, fundamentalmente en aquellos momentos de pesimismo por los que pasa todo doctorando. Y a mis padres y hermanas, por creer siempre en mí y en mi trabajo, y por sus muchas horas dedicadas a cuidar a mi hija Marta.

Sevilla, Septiembre de 1998.

La autora .

# Índice General

<b>1</b>	<b>Resumen y objetivos de la tesis</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
2.1	El problema del reparto de cargas . . . . .	5
2.2	Formulación del problema del reparto de cargas . . . . .	6
2.3	Características de las redes de transporte . . . . .	8
2.4	Características de las redes de distribución . . . . .	9
2.5	Algoritmos a nivel de transporte . . . . .	10
2.5.1	Algoritmo de Newton–Raphson . . . . .	10
2.5.1.1	Otras técnicas implementadas . . . . .	12
2.5.2	Método desacoplado rápido . . . . .	13
2.6	Resumen del capítulo . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Estado del arte</b>	<b>17</b>
3.1	Introducción . . . . .	17
3.2	Algoritmos a nivel de distribución . . . . .	18
3.2.1	Redes equilibradas . . . . .	19
3.2.1.1	E.Baran & F.Wu . . . . .	20
3.2.1.2	Shirmohammadi & Semlyen & Luo . . . . .	27
3.2.1.3	Luo & Semlyen . . . . .	31
3.2.1.4	Rajičić . . . . .	34
3.2.1.5	F. Zhang & C.S. Cheng . . . . .	35
3.2.1.6	R. Céspedes . . . . .	39
3.2.2	Redes desequilibradas . . . . .	40
3.2.2.1	Matriz de admitancias de nudos . . . . .	41
3.2.2.2	Kersting . . . . .	41
3.2.2.3	C.S. Cheng & D. Shirmohammadi . . . . .	42
3.2.2.4	Zimmerman & H.-D. Chiang . . . . .	43
3.3	Resumen del capítulo . . . . .	43

## Índice General

---

<b>4</b>	<b>Reparto de cargas para redes radiales</b>	<b>45</b>
4.1	Introducción . . . . .	45
4.2	Formulación del problema . . . . .	46
4.3	Método de resolución . . . . .	48
4.3.1	Proceso iterativo . . . . .	48
4.3.2	Ordenación del sistema . . . . .	49
4.3.3	Optimización del algoritmo: mal condicionamiento . . . . .	55
4.4	Aproximaciones al método . . . . .	59
4.5	Criterio de convergencia . . . . .	60
4.6	Análisis comparativo . . . . .	62
4.7	Resumen del capítulo . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Extensión del método a otros casos prácticos</b>	<b>77</b>
5.1	Introducción . . . . .	77
5.2	Nudos PV . . . . .	78
5.3	Cargas dependientes de la tensión . . . . .	79
5.4	Redes débilmente malladas . . . . .	81
5.5	Resultados experimentales . . . . .	85
5.6	Resumen del capítulo . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Conclusiones y futuros desarrollos</b>	<b>91</b>
6.1	Resumen y conclusiones . . . . .	91
6.2	Sugerencias para futuras líneas de investigación . . . . .	92
<b>A</b>	<b>Técnicas de matrices y vectores dispersos</b>	<b>103</b>
A.1	Introducción . . . . .	103
A.2	Almacenamiento de matrices dispersas . . . . .	104
A.3	Solución de ecuaciones lineales y dispersas . . . . .	105
A.3.1	Eliminación Gaussiana . . . . .	105
A.3.2	Factorización LDU . . . . .	106
A.3.3	Algoritmos de ordenación óptima . . . . .	107
A.4	Vectores dispersos . . . . .	107
A.4.1	Refactorización parcial . . . . .	108
A.4.2	Sustitución rápida . . . . .	109
A.4.3	Ordenación óptima para vectores dispersos . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Consideraciones numéricas: Factorización QR</b>	<b>111</b>
B.1	Introducción . . . . .	111
B.2	Inestabilidad del algoritmo . . . . .	112
B.3	Mal condicionamiento . . . . .	114

B.4	Factorización QR . . . . .	115
B.4.1	Factorización QR de Gram-Schmidt . . . . .	116
<b>C</b>	<b>Obtención eficiente de bucles</b>	<b>117</b>
C.1	Introducción. . . . .	117
C.2	Estructura de nivel . . . . .	118
C.3	Elección del árbol . . . . .	120
C.4	Determinación de bucles linealmente independientes . . . . .	121
<b>D</b>	<b>Redes analizadas</b>	<b>123</b>
D.1	Introducción . . . . .	123
D.2	Red de 13 nudos . . . . .	123
D.3	Red de 66/50KV de la provincia de Sevilla . . . . .	123
D.4	Red de 30 nudos . . . . .	127
D.5	Red de 36 nudos . . . . .	127
D.6	Red de 43 nudos . . . . .	133
D.7	Red de 69 nudos . . . . .	133
D.8	Red de 85 nudos . . . . .	133
D.9	Red de 90 nudos . . . . .	133



# Índice de Figuras

2.1	Modelo de línea y notación adoptada . . . . .	6
3.1	Red radial sin laterales . . . . .	20
3.2	Modelo de línea para el algoritmo de Baran y Wu . . . . .	21
3.3	Red radial general con laterales . . . . .	22
3.4	Red ejemplo con sublaterales de laterales . . . . .	26
3.5	Apertura de bucle mediante división de un nudo en dos. . . . .	28
3.6	División de un nudo PV en dos. . . . .	32
3.7	Modelo de línea para el algoritmo de R. Céspedes . . . . .	39
4.1	Modelo de línea y notación adoptada . . . . .	46
4.2	Red radial ejemplo de 9 nudos . . . . .	50
4.3	Jacobiano de la ecuación (4.18) para la red de la figura 4.2 . . . . .	51
4.4	Jacobiano de la ecuación (4.19) para la red de la figura 4.2 . . . . .	53
4.5	Jacobiano mejorado para la red de la figura 4.2 . . . . .	54
4.6	Red de 3 nudos mal condicionada . . . . .	55
4.7	Jacobiano final para la red de la figura 4.2 . . . . .	57
4.8	Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 90 nudos) . . . . .	67
4.9	Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 85 nudos) . . . . .	68
4.10	Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 69 nudos) . . . . .	69
4.11	Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 43 nudos) . . . . .	70
4.12	Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 29 nudos) . . . . .	71
5.1	Red ejemplo de 5 nudos y un bucle . . . . .	83
5.2	Jacobiano para la red de la figura 5.1 . . . . .	83

## Índice de Figuras

---

5.3	Tiempo invertido por iteración frente al ratio bucles/nudos para distintas redes . . . . .	88
5.4	Tiempo invertido por iteración frente al numero de bucles para la red de 690 nudos . . . . .	89
C.1	Ejemplo comparativo de bucles dispersos frente a no dispersos .	118
C.2	Ejemplo de estructura de nivel . . . . .	119
C.3	Ejemplo de árbol mediante búsqueda a lo largo . . . . .	120
C.4	Ejemplo ilustrativo en la búsqueda de bucles dispersos . . . . .	122
D.1	Red de 13 nudos . . . . .	142
D.2	Red de 66/50KV de la provincia de Sevilla . . . . .	143
D.3	Red radial de 30 nudos . . . . .	144
D.4	Red de 36 nudos . . . . .	145
D.5	Red radial de 43 nudos . . . . .	146
D.6	Red radial de 69 nudos . . . . .	147
D.7	Red radial de 85 nudos . . . . .	148
D.8	Red radial de 90 nudos . . . . .	149

# Índice de Tablas

4.1	Rango de convergencia para la red de 90 nudos. . . . .	63
4.2	Rango de convergencia para la red de 85 nudos. . . . .	64
4.3	Rango de convergencia para la red de 69 nudos. . . . .	64
4.4	Rango de convergencia para la red de 43 nudos. . . . .	65
4.5	Rango de convergencia para la red de 30 nudos. . . . .	65
4.6	Rango de convergencia para la red de 690 nudos (Doble precisión). . . . .	72
4.7	Rango de convergencia para la red de 90 nudos (Doble precisión). . . . .	72
4.8	Rango de convergencia para la red de 85 nudos (Doble precisión). . . . .	73
4.9	Rango de convergencia para la red de 69 nudos (Doble precisión). . . . .	73
4.10	Rango de convergencia para la red de 43 nudos (Doble precisión). . . . .	74
4.11	Rango de convergencia para la red de 30 nudos (Doble precisión). . . . .	74
4.12	Tiempos de cálculo por iteración en un Pentium 166-Mhz (milisegundos). . . . .	76
5.1	Número de iteraciones para la red de 90 nudos con distintos porcentajes de nudos PV . . . . .	86
5.2	Tiempos de cálculo (msec) para la red de 30 nudos con cargas dependientes de la tensión en un Pentium a 166-Mhz. . . . .	86
5.3	Tiempos por iteración invertidos por los algoritmos (milisegundos) en un Pentium a 166-Mhz. . . . .	87
D.1	Datos en los nudos de la red de 13 nudos . . . . .	124
D.2	Datos en las ramas de la red de 13 nudos . . . . .	124
D.3	Datos en los nudos de la isla de 11 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	125
D.4	Datos en las ramas de la isla de 11 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	125

## Índice de Tablas

---

D.5 Datos en los nudos de la isla de 12 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	126
D.6 Datos en las ramas de la isla de 12 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	126
D.7 Datos en los nudos de la isla de 17 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	127
D.8 Datos en las ramas de la isla de 17 nudos de la subred de 66/50KV . . . . .	128
D.9 Datos en los nudos de la red de 30 nudos . . . . .	129
D.10 Datos en las ramas de la red de 30 nudos . . . . .	130
D.11 Datos en los nudos de la red de 36 nudos . . . . .	131
D.12 Datos en las ramas de la red de 36 nudos . . . . .	132
D.13 Datos en los nudos de red radial de 43 nudos . . . . .	134
D.14 Datos en las ramas de la red radial de 43 nudos . . . . .	135
D.15 Datos en los nudos de red radial de 69 nudos . . . . .	136
D.16 Datos en las ramas de la red radial de 69 nudos . . . . .	137
D.17 Datos en los nudos de red radial de 85 nudos . . . . .	138
D.18 Datos en las ramas de la red radial de 85 nudos . . . . .	139
D.19 Datos en los nudos de red radial de 90 nudos . . . . .	140
D.20 Datos en las ramas de la red radial de 90 nudos . . . . .	141

# Capítulo 1

## Resumen y objetivos de la tesis

La generación y transporte de energía eléctrica ha sido objeto de numerosas investigaciones y publicaciones, mientras que los sistemas de distribución han recibido comparativamente menor atención. Estos últimos, sin embargo, van adquiriendo cada vez más importancia, debido a que la calidad del servicio recibido por la mayoría de los clientes está directamente relacionada con la fiabilidad de los sistemas de distribución que los alimentan.

En este renacido interés aparece lógicamente el uso de ordenadores para el diseño, control y operación de estas redes [15, 43, 49, 45]. Todo ello implica la necesidad de un sistema de adquisición de datos, y funciones analíticas, [39, 44], que permitan resolver problemas habituales a nivel de distribución: análisis y reducción de pérdidas en circuitos [2, 13], reconfiguración de redes para minimización de pérdidas [10, 14, 21, 46, 56], reposición del servicio, óptima localización y dimensionamiento de condensadores para mejora del factor de potencia y regulación de la tensión [8, 9, 20], etc, son algunos de los problemas a resolver. En general, la mayoría de los análisis de estado estacionario requieren la determinación de las condiciones de operación del circuito, es decir, la herramienta conocida como *Reparto de Cargas*.

El problema del reparto de cargas ha sido hasta hace poco un problema confinado a las redes de transporte, donde se han desarrollado técnicas de solución robustas y eficientes especialmente diseñadas para tratar dichas redes. Sin embargo, las peculiaridades asociadas a las redes de distribución han dado lugar a distintas metodologías especialmente desarrolladas para adaptarse a las mismas. Algunas de las diferencias más significativas entre las redes de distribución y transporte son,

- La mayoría de los sistemas de distribución son explotados de forma radial o a lo sumo débilmente mallada, mientras que las redes de transporte

presentan una topología claramente mallada.

- En redes de distribución las líneas poseen una relación  $R/X$  bastante más elevada que las existentes en redes de transporte. Ello impide realizar algunas de las simplificaciones que se hacen en redes de transporte.
- Es habitual la presencia de cargas dependientes de la tensión, a diferencia de las exclusivas cargas de potencia constante localizadas en transporte.
- A ciertos niveles de tensión en distribución el desequilibrio en la red empieza a ser considerable, y ha de tenerse en cuenta en las aplicaciones de red. A nivel de transporte, sin embargo, la condición de equilibrio supuesta la mayoría de las veces es bastante real.
- Es muy frecuente encontrar a nivel de distribución líneas largas y cortas incidiendo en el mismo nudo, lo cual puede provocar problemas numéricos en la solución del reparto de cargas.

Los repartos de cargas desarrollados específicamente para redes de distribución tratan por tanto de aprovechar la topología propia de estas redes y afrontan problemas no presentados a niveles de tensión más elevados.

El objetivo de la tesis es analizar críticamente las distintas soluciones propuestas en la literatura para la solución del reparto de cargas en sistemas de distribución, al mismo tiempo que se propone una solución nueva y se compara con algunas de las existentes no sólo a nivel de distribución, sino también a nivel de transporte.

La tesis ha sido estructurada en la manera que se expone a continuación.

- El capítulo 2 constituye una introducción al problema del reparto de cargas. Incluye además un repaso por los algoritmos más importantes utilizados en sistemas de transporte.
- El capítulo 3 realiza una presentación de las diversas técnicas y algoritmos que han sido propuestos para la solución del reparto de cargas a nivel de distribución.
- En el capítulo 4 se desarrolla la solución propuesta en esta tesis para redes puramente radiales y con cargas independientes de la tensión. Se incluyen resultados experimentales comparativos a otras metodologías implementadas.

- A continuación, el capítulo 5 extiende el algoritmo presentado en el capítulo anterior a otros casos prácticos como son el de redes débilmente malladas, la posibilidad de nudos PV y la presencia de cargas dependientes de la tensión. También concluye este capítulo con resultados experimentales.
- Por último, el capítulo 6 recoge las principales conclusiones del trabajo realizado en el ámbito de la presente tesis, proponiendo asimismo futuros desarrollos y líneas de investigación.

A continuación se incluye la bibliografía utilizada y los siguientes apéndices:

- El apéndice A presenta brevemente las técnicas de matrices y vectores dispersos, base fundamental de alguno de los algoritmos desarrollados.
- El apéndice B trata algunos problemas de orden numérico presentes cuando se utilizan ordenadores como herramienta de trabajo. También se describe la técnica de resolución de un sistema lineal conocida como factorización QR, la cual está relacionada con el asunto que se trata.
- En el apéndice C se ilustra un método que detecta para una red dada un conjunto de bucles linealmente independientes más dispersos que los bucles fundamentales de dicha red.
- Por último, en D se muestran las topologías de algunas de las redes más características utilizadas en esta tesis para la obtención de resultados experimentales, así como sus parámetros de red y estado de carga en las mismas.

# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1 El problema del reparto de cargas

El problema del reparto de cargas consiste en determinar las condiciones de operación en régimen permanente de un sistema de potencia. Ello implica:

1. Se han de modelar todos los elementos del sistema de potencia a analizar y los flujos eléctricos a través del mismo.
2. Las ecuaciones matemáticas planteadas en el apartado anterior han de ser resueltas mediante un algoritmo que permita obtener el estado del sistema, estado que queda habitualmente determinado por las tensiones complejas en los nudos.
3. Ese algoritmo debe ser implementado a través de un programa por ordenador para así obtener la respuesta de una forma rápida y segura.

La forma de proceder en cada uno de los apartados anteriores define las distintas técnicas de solución del reparto de cargas. En la búsqueda de la solución óptima se han de tener en cuenta distintos factores. Así, dependiendo del nivel de exactitud requerido en la solución, se adoptará un modelo más o menos preciso del sistema. Por otro lado, es determinante la elección de un algoritmo robusto y eficiente que resuelva el sistema de ecuaciones planteado de forma que implique el menor número de operaciones posible, en aras de una mayor rapidez en la obtención de la respuesta. En relación a la rapidez del algoritmo, resulta también relevante la óptima programación del mismo.



## 2.2 Formulación del problema del reparto de cargas

El sistema de potencia se considera trifásico equilibrado, con lo cual el análisis del mismo es posible realizarlo en por unidad.

Las cargas del sistema son en principio independientes de la tensión, es decir, los nudos son nudos PQ en los cuales se conoce la potencia compleja neta inyectada en cada uno de ellos:

$$S_i = S_i^{esp} = P_i^{eps} + Q_i^{esp}j \quad i = 1, \dots, N + 1 \quad (2.1)$$

siendo  $N+1$  el número total de nudos del sistema. Dicha potencia corresponde a la diferencia entre la potencia generada y consumida en cada nudo.

Para las líneas se adopta su modelo en  $\Pi$  tal como se indica en la figura 2.1. En dicho modelo aparece la admitancia serie  $Y_{ij} = G_{ij} - jB_{ij}j$  de la línea que une los nudos  $i$  y  $j$  ( $G_{ij}$  y  $B_{ij}$  son la conductancia y susceptancia respectivamente) y la admitancia paralelo  $Y_{ij}^{sh} = B_{ij}^{sh}j$  entre la línea y el neutro del sistema en ambos extremos de la misma. También se indica la notación utilizada para las tensiones complejas en los nudos (forma polar) y la de los flujos de potencia activa y reactiva por la línea.

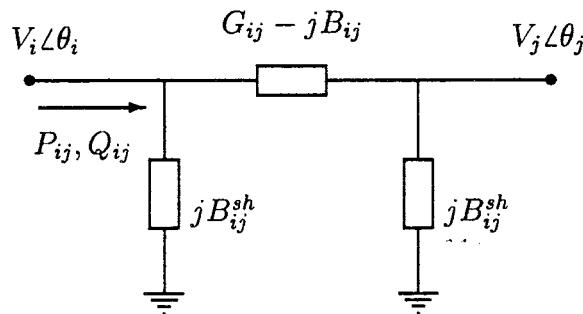


Figura 2.1: Modelo de línea y notación adoptada

En este sistema se cumple que las intensidades inyectadas en los nudos  $\mathcal{I}_i$  están relacionadas con la tensiones complejas en los mismos a través de la matriz de admitancia de nudos:

$$\mathcal{I} = \mathcal{Y}\mathcal{V} \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta que la potencia inyectada en cada nudo viene dada por la expresión,

$$S_i = V_i \mathcal{I}_i^* \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{I}_i^*$  corresponde a la intensidad inyectada en cada nudo conjugada, al sustituir la ecuación (2.2) en (2.3), y, considerando la ecuación (2.1), se obtiene,

$$S_i^{esp} = V_i \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{Y}_{ik}^* V_k^* \quad (2.4)$$

Si se adopta una forma polar para las tensiones complejas y una rectangular para las admitancias, como ya se ha indicado en la figura 2.1, la ecuación (2.4) es equivalente a:

$$S_i^{esp} = \sum_{k=1}^{N+1} V_i V_k (\cos \theta_{ik} + j \sin \theta_{ik}) (g_{ik} - j b_{ik}) \quad i = 1, \dots, N+1 \quad (2.5)$$

donde  $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$  y  $g_{ik} + j b_{ik}$  es la componente  $y_{ik}$  de la matriz de admitancia de nudos, las cuales se denotarán siempre en minúscula para distinguirlas de las admitancias de ramas.

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) son dos formas equivalentes de las ecuaciones del flujo de cargas. Se trata por tanto de determinar las tensiones en los nudos conocidas las cargas en los mismos y los parámetros del sistema.

Dos consideraciones, sin embargo, hay que destacar antes de continuar. Por un lado se observa que en la ecuación (2.5) aparecen los ángulos de las tensiones en forma de diferencias. Esto implica que no todos ellos puedan ser determinados, y que haya que fijar el ángulo de la tensión de uno de los nudos del sistema como referencia. Por otro lado, es imposible especificar las potencias generadas en todos los nudos al no conocer a priori las pérdidas en la líneas. Estos dos inconvenientes quedan resueltos si en uno de los nudos del sistema se sustituyen las especificaciones de la potencia activa y reactiva en el mismo por la tensión compleja, es decir, para ese nudo, usualmente denominado nudo de referencia, se conocerá su tensión y se tomará como origen de referencia de los ángulos de la tensiones del resto de los nudos (cero por comodidad).

El problema del reparto de cargas queda por tanto planteado a través del sistema de ecuaciones:

$$S_i^{esp} = \sum_{k=1}^{N+1} V_i V_k (\cos \theta_{ik} + j \sin \theta_{ik}) (g_{ik} - j b_{ik}) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

$$V_{nr} = V_{nr}^{esp} \angle 0 \quad (2.7)$$

donde el subíndice  $nr$  se refiere al nudo de referencia, arbitrariamente numerado al final.

Hay que resaltar el hecho de que la no linealidad de este sistema complica la resolución del mismo y justifica el desarrollo de distintos algoritmos que intentan resolverlo de la mejor forma posible. Debido a esta falta de linealidad, los distintos métodos de resolución deben basarse en un procedimiento iterativo, con lo que es necesario establecer unos criterios de convergencia para decidir cuándo se ha llegado a una solución suficientemente buena. El criterio más utilizado se basa en la diferencia entre los valores de P y Q correspondientes a la iteración  $\nu$ , y los valores especificados, el cual debe ser menor que cierta tolerancia  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} |\Delta P_i| &= |P_i^\nu - P_i^{esp}| \leq \epsilon \\ |\Delta Q_i| &= |Q_i^\nu - Q_i^{esp}| \leq \epsilon \end{aligned}$$

La tolerancia especificada está directamente relacionada con el máximo error permitido en los flujos de potencia por las líneas.

### 2.3 Características de las redes de transporte

Como ya se mencionó en el capítulo 1, la mayoría de los algoritmos más conocidos y utilizados en la práctica tratan de solventar el problema del reparto de cargas para redes de transporte, con las características propias asociadas a estos sistemas. En el apartado 2.5 se describirán los algoritmos más importantes y se pondrá de manifiesto este hecho.

Se enumeran a continuación algunos de los rasgos propios asociados a los sistemas de transporte que determinan la técnica de solución del reparto de cargas.

- Las redes de transporte poseen una topología muy mallada, fundamentalmente debido a la necesidad de garantizar la seguridad en el servicio eléctrico.
- A los sistemas de transporte se conectan los generadores, los grandes consumidores y las subestaciones de transformación a niveles de tensión inferiores conectados a dicha red. Dada pues la naturaleza de las cargas, las cuales varían su demanda muy lentamente en el tiempo, es una aproximación muy realista el considerar que las potencias netas inyectadas en los nudos de carga son independientes de la tensión del nudo al cual se encuentran conectadas; son los denominados nudos PQ.

- Existen nudos donde se conoce la potencia activa neta inyectada y el módulo de la tensión. Ésta se mantiene constante a costa de permitir que la potencia reactiva neta inyectada en el nudo varíe dentro de ciertos límites. Son normalmente las barras de generación o subestaciones donde se controlan las tensiones con baterías de condensadores o compensadores síncronos. Entre estos nudos PV se suele elegir el nudo de referencia del reparto de cargas, preferentemente uno que posea gran capacidad de generación o quede próximo a las interconexiones con otras áreas.
- Las líneas utilizadas en transporte poseen en general una relación  $R/X$  muy pequeña, es decir la línea es fundamentalmente inductiva, siendo el valor de la resistencia muy pequeño.
- Una característica inherente a cualquier sistema de potencia a nivel de transporte trabajando en condiciones estables es la fuerte dependencia entre la potencia activa y el ángulo de las tensiones complejas, y entre la potencia reactiva y el módulo de las tensiones. En consecuencia, dicho acoplamiento produce a su vez una débil interacción entre las componentes  $P - \theta$  y  $Q - V$ .
- El estudio de la red como sistema trifásico equilibrado es bastante realista puesto que la mayor parte de las cargas son efectivamente trifásicas equilibradas.

## 2.4 Características de las redes de distribución

Los sistemas de distribución difieren de los de transporte en varios aspectos, algunos de ellos ya mencionados en el capítulo 1 y que se recuerdan de nuevo,

- La mayoría de las redes de distribución, aunque malladas en su topología, operan de forma radial, al ser el método de explotación más económico y el más simple desde el punto de vista de la planificación, diseño y protección de estos sistemas.
- A diferencia de lo que ocurre con las cargas conectadas a la red de transporte, los modelos de éstas a nivel de distribución dejan de adaptarse exclusivamente al de potencia constante. En este sentido se pueden tener cargas de potencia constante, cargas de intensidad constante o cargas de impedancia constante, y, en general, cualquier combinación de ellas.

- A diferencia de las redes de transporte, el cociente  $R/X$  en las líneas de distribución posee valores más elevados que los correspondientes a las líneas de alta tensión, debido a la disposición de los conductores en uno y otro caso (líneas aéreas en redes de transporte frente a las subterráneas presentes en distribución).
- Es habitual la presencia de líneas largas y cortas incidiendo en el mismo nudo, y, por tanto, de parámetros con órdenes de magnitud muy distinto.
- Los desequilibrios en la red, a ciertos niveles de tensión, comienzan a ser notables.

## 2.5 Algoritmos a nivel de transporte

No es el objetivo de esta tesis hacer una clasificación y descripción detallada de las distintas herramientas propuestas para resolver el problema del reparto de cargas a niveles de tensión elevadas. Se trata por tanto de hacer un breve resumen de lo más destacado a este respecto.

Los tres algoritmos iterativos más extendidos a nivel de transporte son los de Gauss-Seidel [27], Newton-Raphson [57], y desacoplado rápido FDLF (“Fast Decoupled Load Flow”) [53], habiendo sido superado ampliamente el primero por los otros dos en rapidez y bondad de convergencia. Se describen pues a continuación el método de Newton-Raphson y el FDLF.

### 2.5.1 Algoritmo de Newton-Raphson

Para obtener el estado de la red eléctrica debemos resolver el sistema de  $2N$  ecuaciones no lineales determinado por las  $N$  ecuaciones complejas (2.6), según ya se explicó en el apartado 2.2. Este sistema de  $N$  ecuaciones complejas se puede reescribir como uno de  $2N$  ecuaciones reales de la forma,

$$P_i^{esp} - \sum_{j=1}^{j=N+1} V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

$$Q_i^{esp} - \sum_{j=1}^{j=N+1} V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

El método de Newton-Raphson constituye el algoritmo iterativo mejor estudiado y que mejores resultados ha dado en este tipo de problemas no lineales.

Este algoritmo trata de resolver cualquier ecuación no lineal tomando su desarrollo en serie de Taylor y prescindiendo de términos de orden superior o igual a dos. Así, para el caso escalar, dada la función no lineal  $f(x) = 0$  a resolver, ésta se puede aproximar por,

$$f(x) \simeq f(x^0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x^0} (x - x^0)$$

donde  $x^0$  es el estado inicial de partida y  $x$  el nuevo estado a determinar. Este nuevo estado se obtiene de la ecuación anterior resolviendo,

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x^0} (x - x^0) = -f(x^0)$$

Al aplicar este algoritmo a las ecuaciones del reparto de cargas (2.8) y (2.9) el sistema a resolver en cada iteración  $k$  quedaría como,

$$\left[ \begin{array}{c|c} H & N \\ \hline M & L \end{array} \right]^{(k)} \left[ \begin{array}{c} \Delta\theta \\ \Delta V/V \end{array} \right]^{(k)} = \left[ \begin{array}{c} \Delta P \\ \Delta Q \end{array} \right]^{(k)} \quad (2.10)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \theta \\ V \end{array} \right]^{(k+1)} = \left[ \begin{array}{c} \theta \\ V \end{array} \right]^{(k)} + \left[ \begin{array}{c} \Delta\theta \\ \Delta V \end{array} \right]^{(k)} \quad (2.11)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \quad N_{ij} = V_j \frac{\partial P_i}{\partial V_j} \quad M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \quad L_{ij} = V_j \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \quad (2.12)$$

•  $i \neq j$

$$H_{ij} = L_{ij} = V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (2.13)$$

$$N_{ij} = -M_{ij} = V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (2.14)$$

•  $i = j$

$$H_{ii} = V_i \sum_{j \neq i} V_j (-g_{ij} \sin \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (2.15)$$

$$L_{ii} = V_i \sum_{j \neq i} V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) - 2b_{ii} V_i^2 \quad (2.16)$$

$$N_{ii} = V_i \sum_{j \neq i} V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) + 2g_{ii} V_i^2 \quad (2.17)$$

$$M_{ii} = V_i \sum_{j \neq i} V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (2.18)$$

La matriz formada por las submatrices  $H, N, M, L$  es conocida como matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones.

El procedimiento general para calcular las tensiones en la red mediante el método de Newton–Raphson (referencia [57]), queda por tanto como:

1. Se estima un valor inicial, que será la unidad para las tensiones y cero para los desfases, o resultados conocidos de anteriores Repartos de Cargas.
2. Se calculan los residuos  $\Delta P$  y  $\Delta Q$  de (2.8) y (2.9), generando la matriz Jacobiana al mismo tiempo.
3. Se chequea la convergencia con los residuos calculados en el apartado anterior, deteniéndose el proceso cuando dichos residuos son suficientemente pequeños.
4. Si no se ha alcanzado la convergencia, se obtienen las correcciones  $\Delta\theta$  y  $\Delta V$  de (2.11), actualizando los valores de tensiones y desfases. Con las nuevas tensiones obtenidas se vuelve al paso 2.

### 2.5.1.1 Otras técnicas implementadas

El algoritmo ha sido implementado considerando técnicas que permiten optimizar su comportamiento, como son:

- Técnicas de matrices vacías para el almacenamiento del Jacobiano y la matriz de admitancias de la red, minimizando la ocupación de memoria y las operaciones a realizar durante la inversión del sistema de ecuaciones.
- Triangularización del sistema de ecuaciones formado por el Jacobiano y los residuos mediante Eliminación Gaussiana, disminuyendo el número de operaciones frente a las que serían necesarias para la resolución del sistema por inversión.
- Ordenación óptima de los nudos eléctricos, mediante el método de Tinney–2 [58], el cual ha demostrado en la práctica un buen comportamiento en cuanto a ahorro de memoria y tiempo de ejecución frente a otros algoritmos que requieren un mayor esfuerzo de cálculo.

Todas estas técnicas se exponen en el apéndice A

El algoritmo de NR posee una convergencia cuadrática y es muy robusto. Sin embargo es un algoritmo complejo que requiere numerosos cálculos para la

obtención del jacobiano y los residuos en cada iteración. Por otro lado, para el caso particular de las redes radiales no saca provecho de esta topología tan característica y simplificativa del problema del reparto de cargas como quedará de manifiesto posteriormente.

### 2.5.2 Método desacoplado rápido

En el año 1972 apareció por primera vez en una revista especializada, referencia [52], el algoritmo del Reparto de Cargas Desacoplado ("Decoupled Newton Load Flow"). Dicho algoritmo aprovecha el fuerte acoplo entre la potencia activa y los desfases por un lado y la reactiva y los módulos de las tensiones por otro, y el desacoplo entre ambas parejas. Ello se traduce en unos valores numéricamente pequeños para las submatrices  $N$  y  $M$  del Jacobiano de NR, que en este caso se desprecian, dando lugar al par de ecuaciones:

$$\Delta P = H\Delta\theta \quad (2.19)$$

$$\Delta Q = L\frac{\Delta V}{V} \quad (2.20)$$

El atractivo de la simplificación efectuada es que ambas ecuaciones se pueden resolver independientemente, reduciendo la capacidad de memoria necesaria y los cálculos por iteración.

Podemos introducir más simplificaciones todavía, dando lugar al llamado Flujo de Cargas Desacoplado Rápido [53], que es una variante del anterior. Estas simplificaciones, válidas en sistemas de transporte, son:

- Cosenos de los desfases prácticamente iguales a la unidad ( $\cos\theta_{ij} = 1$ ).
- Senos de los desfases muy pequeños ( $g_{ij} \sin\theta_{ij} \ll b_{ij}$ ).
- $Q_i \ll b_{ii}V_i^2$

Con ello los coeficientes de las submatrices  $H$  y  $L$  quedan:

$$\begin{aligned} H_{ij} = L_{ij} &= -V_i V_j b_{ij} \\ H_{ii} = L_{ii} &= -V_i^2 b_{ii} \end{aligned}$$

es decir,  $H$  y  $L$  son ahora iguales. Se puede escribir entonces (2.19) y (2.20) como:



$$\Delta P = B\Delta\theta \quad (2.21)$$

$$\Delta Q = B\frac{\Delta V}{V} \quad (2.22)$$

Aún es posible introducir las siguientes simplificaciones:

- En (2.21) se omiten las reactancias en derivación y transformadores con tomas distintas de la nominal, que afectan fundamentalmente al flujo de potencia reactiva.
- Se desprecian las resistencias en serie en (2.21).
- Se dividen ambas ecuaciones, (2.21) y (2.22), por  $V_i$  y se hace  $V_j = 1$ .

Con estas modificaciones (2.21) y (2.22) quedan:

$$\frac{\Delta P}{V} = B'\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta Q}{V} = B''\Delta V$$

Las matrices  $B'$  y  $B''$  contienen sólo parámetros constantes (admitancias) y no hay que calcularlas más que al principio, triangularizándolas además una sola vez. Se ha conseguido así un Jacobiano constante, con lo cual se evita su cálculo en cada iteración.

Si se calcula  $\frac{\Delta P}{V}$  y  $\frac{\Delta Q}{V}$  eficientemente, la velocidad por cada iteración es del orden de cinco veces la del Newton-Raphson normal, siendo las necesidades de memoria del orden del 40 % menores.

La convergencia del Método Desacoplado Rápido en las primeras iteraciones es mejor que en el Newton-Raphson formal, aunque posteriormente se pierde la convergencia cuadrática propia del método, lo que implica un mayor número de iteraciones para soluciones muy precisas, lo cual no siempre ha de ser necesario.

A pesar de las ventajas en cuanto a velocidad de ejecución y ocupación de memoria de los Métodos Desacoplados frente al Newton-Raphson formal, es éste el método más adecuado de los dos para aplicar a nivel de distribución, debido a que el desacoplo del problema activo y reactivo no es posible en estas redes donde los ratios R/X son más elevados.

## 2.6 Resumen del capítulo

En el presente capítulo se ha presentado el problema del **reparto de cargas**, objeto de la presente tesis, destacando las características más significativas de las redes de transporte (Apartado 2.3) y de las redes de distribución (Apartado 2.4) que determinan las distintas técnicas de solución existentes para resolver el reparto de cargas para cada uno de estos sistemas. Así, los algoritmos más utilizados a nivel de transporte se han descrito en el apartado 2.5, destacando sus ventajas e inconvenientes. Se han señalado a su vez las limitaciones de dichas metodologías a nivel de distribución.

# Capítulo 3

## Estado del arte

### 3.1 Introducción

Antes de la implantación del ordenador como herramienta de trabajo en el control de redes eléctricas, las soluciones al reparto de cargas se obtenían mediante los analizadores de redes. Los primeros métodos iterativos que se desarrollaron para ser resueltos por ordenador se basaban en la matriz de admitancias, la cual se adaptaba muy bien a las primeras generaciones de computadores dada la escasa necesidad de memoria de almacenamiento demandada por dicha técnica de solución. Sin embargo, la convergencia asociada era pobre, e incluso no era raro la falta absoluta de ella. Surgen entonces los algoritmos basados en la matriz de impedancias, los cuales presentan mejor convergencia a costa de requerir más memoria computacional e invertir tiempos de cálculo mayores cuando se aplican a redes de gran dimensión. A continuación, aparece el método de Newton-Raphson (NR), apartado 2.5.1 del capítulo 2, con propiedades de convergencia notables. Esta técnica de solución sólo resulta rentable cuando unos años después aparecen las técnicas de tratamiento de matrices dispersas. Éstas, aplicadas al método de NR, reducen drásticamente los tiempos de cálculo y las necesidades de almacenamiento de dicho método. Alrededor de este algoritmo surgen otras muchas soluciones que tratan de optimizarlo con diferentes objetivos: reducir tiempos de cálculo (método desacoplado, DLF, y método desacoplado rápido, FDLF, también descrito en el capítulo 2, apartado 2.5.2), tratamiento de redes mal condicionadas, incorporación de elementos con controles automáticos, etc.

Los modelos de red adoptados en alta tensión dejan de ser válidos para el caso de media y baja tensión debido a que en estas redes no son válidas ciertas simplificaciones, fundamentalmente debido al elevado ratio del cociente  $R/X$ ,

característica que no se produce en redes de transporte. Esto y otros rasgos propios de las redes de distribución (ver apartado 2.4 del capítulo 2) dan lugar a que aplicaciones tradicionales y eficientes en alta tensión, como los repartos de carga, den problemas de mala o nula convergencia en redes de media y baja tensión, básicamente debido a problemas de mal condicionamiento [33, 41, 62].

Muchos investigadores han sugerido versiones modificadas de los métodos de reparto de cargas convencionales para resolver redes mal condicionadas. Algunos de estos métodos, implementados en el desarrollo de esta tesis, se describen en este capítulo.

## 3.2 Algoritmos a nivel de distribución

Es posible distinguir varias clasificaciones, no excluyentes entre sí, dentro de las distintas soluciones encontradas a nivel de distribución. La más notable atiende a la utilización o no de la topología habitualmente radial detectada en los sistemas de distribución:

- La mayoría de los repartos de cargas desarrollados para este tipo de redes basan su estrategia de resolución de las ecuaciones en barridos hacia atrás y hacia delante en el árbol característico de la red bajo estudio [9, 42, 35, 38, 16, 50, 66]. Incluso algunos autores transforman las redes malladas en redes radiales, [42, 38, 50], para así aprovechar la topología de estas últimas. Muy pocos autores dejan de sacar provecho de esta característica que simplifica en gran medida el problema del reparto de cargas.
- Existen, sin embargo, métodos que prescinden de la posibilidad que plantea la radialidad del problema, utilizando herramientas factibles tanto para redes de distribución radiales como malladas; es el caso de los presentados en [19, 55], si bien éstos se proponen para el caso de redes desequilibradas.

Una segunda clasificación surge atendiendo al modelo matemático empleado para definir las ecuaciones eléctricas:

- Los que se basan en las ecuaciones de potencia, pudiendo a su vez diferenciar distintas metodologías según la forma en que dichas ecuaciones son planteadas:

- Están aquellos que utilizan o parten de las mismas ecuaciones de flujo características del algoritmo de Newton-Raphson [66].
  - Soluciones que aplican las leyes de Kirchhoff generalizadas a las potencias, [9, 38, 42].
  - Algoritmos que parten de las ecuaciones de flujos y aprovechan al máximo la potencialidad de las redes radiales para simplificarlas, como ocurre con el presentado en [16].
- Algoritmos que se basan en la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff en términos de tensiones e intensidades, [35, 50].
  - Métodos basados en la matriz de admitancia de nudos factorizada, [19, 55], metodología ya utilizada en redes de transporte.

Un tercer criterio de clasificación obedece al equilibrio o no del sistema:

- Algoritmos para redes de distribución equilibradas, y que son casi todos los referenciados anteriormente, [9, 42, 38, 16, 50, 66]. Estos métodos son los de mayor objeto de atención en esta tesis.
- Soluciones para sistemas desequilibrados. Constituyen en su mayoría extensiones de los ya desarrollados para redes equilibradas, [18, 19, 35, 55, 67]. Gran parte de estos algoritmos basan su estrategia en la estructura radial de la red, utilizando como modelo matemático de las ecuaciones eléctricas las tradicionales leyes de Kirchhoff, bien utilizando la matriz de admitancias o impedancias de la red. Vienen a diferir fundamentalmente en la forma de aplicar las condiciones de contorno del problema y en el proceso iterativo para resolver las ecuaciones. Algunos de ellos se presentarán en este capítulo, si bien no son el objetivo fundamental de esta tesis.

### 3.2.1 Redes equilibradas

Se describen a continuación aquellos algoritmos desarrollados para redes radiales equilibradas con todas las cargas de potencia constante. Cualquier situación distinta a ésta se especificará explícitamente.

### 3.2.1.1 E.Baran & F.Wu

Los autores de [9] reformulan el problema del reparto de cargas aprovechando la topología radial característica de la mayoría de las redes de distribución, y, de esta forma, proponen un algoritmo de solución basado en un conjunto de variables que sustituyen a las tradicionales tensiones complejas en los nudos.

Para ilustrar mejor este método, se describe inicialmente para una red radial con un único camino en el árbol, figura 3.1, ampliándose posteriormente para el caso más general de red radial con varias ramas laterales partiendo del camino principal, figura 3.3.

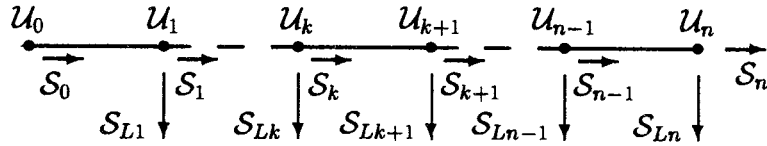


Figura 3.1: Red radial sin laterales

En la figura 3.1,  $U_0$  representa la tensión conocida del nudo de referencia. Las líneas quedan definidas por su impedancia serie,  $Z = r + jx$ , y las cargas se consideran de potencia constante,  $S_L = P_L + jQ_L$ . Las admitancias a tierra del modelo en  $\Pi$  de las líneas o las baterías de condensadores no se incluyen, aunque son factibles de introducir en las ecuaciones. Con esta red en escalera, si la potencia suministrada desde el nudo de referencia,  $S_0 = P_0 + jQ_0$ , se conociese, las tensiones del resto de los nudos de la red quedarían determinadas mediante un barrido en el árbol aguas abajo a través de las ecuaciones,

$$S_{k+1} = S_k - S_{loss(k+1)} - S_{Lk+1} = S_k - Z_{k+1} \frac{S_K^2}{V_K^2} - S_{Lk+1}$$

$$U_{k+1} = U_k - Z_{k+1} I_k = U_k - Z_{k+1} \frac{S_k^*}{U_k^*}$$

planteadas para cada rama del árbol. Desglosando la parte real e imaginaria de la primera de ellas y manipulando el cuadrado de las tensiones para la segunda, se obtienen las siguientes fórmulas recursivas,

$$P_{k+1} = P_k - r_{k+1} \frac{(P_k^2 + Q_k^2)}{V_k^2} - P_{Lk+1} \quad (3.1)$$

$$Q_{k+1} = Q_k - x_{k+1} \frac{(P_k^2 + Q_k^2)}{V_k^2} - Q_{Lk+1} \quad (3.2)$$

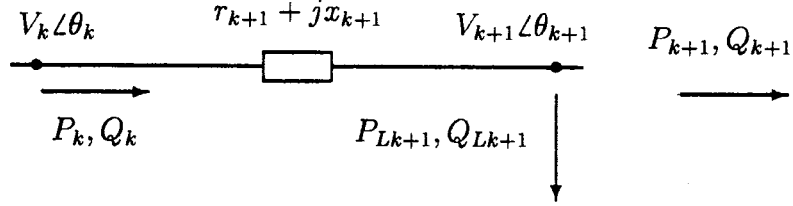


Figura 3.2: Modelo de línea para el algoritmo de Baran y Wu

$$V_{k+1}^2 = V_k^2 - 2(r_{k+1}P_k + x_{k+1}Q_k) + (r_{k+1}^2 + x_{k+1}^2) \frac{(P_k^2 + Q_k^2)}{V_k^2} \quad (3.3)$$

donde los flujos de potencia y tensiones que aparecen corresponden a los de la figura 3.2. Escribiendo de forma compacta las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3), resulta

$$x_{0k+1} = F_{0k+1}(x_{0k}) \quad k = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

donde  $x_{0k} = [P_k \ Q_k \ V_k^2]^T$ . El subíndice 0 hace referencia a que se trata del camino principal de una red radial, el único para la red en escalera sin laterales que inicialmente se está analizando, figura 3.1.

Al sistema de ecuaciones (3.4) hay que añadirle las siguientes condiciones de contorno,

$$\left. \begin{aligned} x_{0n_1} &= P_n = 0 \\ x_{0n_2} &= Q_n = 0 \\ x_{0n_3} &= V_0^2 = V_0^{esp^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Las  $3n$  ecuaciones procedentes del sistema (3.4), y las tres condiciones de contorno (3.5) constituyen las ecuaciones del reparto de cargas a resolver, ecuaciones que se denotan esquemáticamente como

$$G(x_0) = 0$$

con  $x_0 = [x_{00}^T \dots x_{0n}^T]^T$  variables del problema.

Se observa que si se conociesen las variables  $x_{00}$ , el problema quedaría resuelto gracias a las ecuaciones (3.4). De las variables  $x_{00}$ , tan solo la tensión es conocida,  $x_{00_3} = V_0^2$ , por lo que quedaría por determinar  $z_{00} = [P_0 \ Q_0]^T$ ,

que constituye el estado del sistema. Para eliminar el resto de las variables  $x_{0k}$  de las ecuaciones (3.4) basta utilizar las dos condiciones de contorno en los flujos indicadas en (3.5), que al sustituirlas en el sistema de ecuaciones (3.4) y operando de forma recursiva, desde el nudo terminal en el árbol hasta el nudo de referencia,  $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$ , (barrido aguas arriba) permiten eliminar las variables intermedias  $x_{0k}$ . De esta forma se obtienen dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{0n}(z_{00}) &= 0 \\ \hat{q}_{0n}(z_{00}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

que se utilizan para obtener  $z_{00}$ .

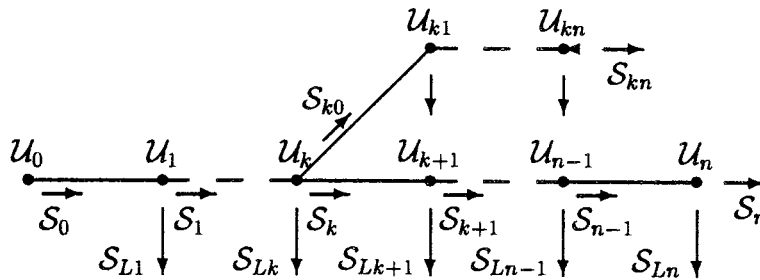


Figura 3.3: Red radial general con laterales

Para el caso general de red radial con  $l$  laterales partiendo del camino principal 0, figura 3.3, el procedimiento es análogo. Para cada rama del lateral  $k$  se plantea el sistema de ecuaciones (3.4), y las condiciones de contorno del mismo, resultando, para cada lateral  $k$  de  $nk$  ramas, el siguiente conjunto de  $3(nk + 1)$  ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} x_{ki+1} &= F_{ki+1}(x_{ki}) & i = 0, \dots, nk - 1 \\ x_{kn_1} &= P_{kn} = 0 \\ x_{kn_2} &= Q_{kn} = 0 \\ x_{k0_3} &= V_{k0}^2 = V_k^2 = x_{0k_3} \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

Hay que hacer notar en este caso que las ecuaciones (3.4) de los flujos de potencia para la rama  $(k+1)$  del camino principal (flujo que parte del nudo  $k$  de donde parte también el lateral del mismo nombre) se modifican como,

$$S_{k+1} = S_k - S_{loss(k+1)} - S_{Lk+1} - S_{k0}$$

El problema general del reparto de cargas para una red de  $n$  ramas y  $l$  laterales consiste pues en resolver un sistema de  $3(n + l + 1)$  ecuaciones, el



sistema (3.7) para cada lateral  $k$ , incluido el camino principal. De forma esquemática,

$$G(x) = 0$$

con  $x = [x_1^T \dots x_l^T x_0^T]^T$ ,  $x_k = [x_{k0}^T \dots x_{kn}^T]^T$ .

Este problema más general se resuelve de forma análoga al caso de una red en escalera. Así, para el lateral  $k$  se escogen el par de variables  $z_{k0} = [P_{k0} Q_{k0}]^T$  como incógnitas extras del problema. Mediante el sistema (3.7) se consiguen eliminar las variables intermedias  $x_{ki}$ , aplicando las condiciones de contorno terminales del lateral  $k$  y haciendo un barrido aguas arriba en el árbol hasta alcanzar el nudo  $k$ . Se obtienen así dos nuevas ecuaciones similares a las que se obtuvieron para el camino principal del árbol,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{kn}(z_{10}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \\ \hat{q}_{kn}(z_{10}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

De esta forma, para una red con  $n$  ramas y  $l$  laterales, el problema del reparto de cargas comprende las ecuaciones (3.8) para cada lateral  $k = 1, \dots, l$ , junto con las del camino principal, (3.6), que, en este caso más general, adoptan la forma

$$\begin{aligned} \hat{p}_{0n}(z_{10}, \dots, z_{l0}, z_{00}) &= 0 \\ \hat{q}_{0n}(z_{10}, \dots, z_{l0}, z_{00}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Los sistemas de ecuaciones (3.8) y (3.9) constituyen las ecuaciones del reparto de cargas a resolver,

$$H(z) = 0 \quad (3.10)$$

siendo  $z = [z_{10}^T \dots z_{l0}^T z_{00}^T]^T$  el vector de **variables de estado**.

El problema del reparto de cargas es resuelto ahora de forma iterativa mediante Newton-Raphson (NR). Para cada iteración  $\nu$  de este algoritmo y con un valor estimado para el vector de estado  $z^\nu$ , se procede de la siguiente forma,

1. Calcular los residuos  $H(z^\nu)$
2. Construir la matriz del jacobiano

$$J(z^\nu) = \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right)_{z=z^\nu}$$

3. Resolver  $J(z^\nu)\Delta z^\nu = -H(z^\nu)$  para así actualizar  $z$ ,  $z^{\nu+1} = \Delta z^\nu + z^\nu$ .

La determinación de  $H(z^\nu)$  se consigue mediante un barrido hacia delante en el árbol utilizando las ecuaciones (3.4) y las primeras del sistema (3.7) (excluidas las condiciones de contorno).

El cálculo del jacobiano se obtiene recorriendo hacia atrás el árbol y utilizando la regla de la cadena. Así, la submatriz de 2x2 del jacobiano  $J_{ki}$  viene dada por

$$J_{ki} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_{kn}}{\partial P_{i0}} & \frac{\partial \hat{p}_{kn}}{\partial Q_{i0}} \\ \frac{\partial \hat{q}_{kn}}{\partial P_{i0}} & \frac{\partial \hat{q}_{kn}}{\partial Q_{i0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_{kn}}{\partial x_{kn-1}} \\ \frac{\partial \hat{q}_{kn}}{\partial x_{kn-1}} \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \hat{x}_{kn-1}}{\partial x_{kn-2}} \right] \cdots \left[ \frac{\partial \hat{x}_{k1}}{\partial x_{ki}} \right] \quad (3.11)$$

Las distintas submatrices que aparecen en la ecuación (3.11) son de tamaño 2x2 o 3x3 fácilmente deducibles, no apareciendo en ellas ninguna ecuación trigonométrica sino simples expresiones algebraicas como se concluye a la vista de las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3).

De esta forma, el jacobiano a resolver en cada iteración es una matriz cuadrada de tamaño  $2(l + 1)$  que, numerando los laterales desde el nudo de referencia hacia aguas abajo, queda como

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \dots & 0 & J_{10} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & 0 & J_{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{l1} & J_{l2} & \dots & J_{ll} & J_{l0} \\ J_{01} & J_{02} & \dots & J_{0l} & J_{00} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Los autores de este algoritmo de reparto de cargas estudian finalmente las propiedades matemáticas del jacobiano resultante, llegando a la conclusión de que una aproximación muy realista del problema consiste en reducir  $J$  a,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{ll} & 0 \\ J_{01} & J_{02} & \dots & J_{03} & J_{00} \end{bmatrix}$$

Además, demuestran que este jacobiano puede mantenerse constante tras la primera iteración del algoritmo de NR sin apenas cometer error y manteniendo prácticamente la convergencia con respecto al algoritmo inicial.

Debido a estas aproximaciones, el apartado 3 del algoritmo de NR queda de la siguiente forma,

(A) Resolver para cada lateral su estado,

$$J_{kk}\Delta z_{k0} = H_k(z) \quad k = 1, \dots, l.$$

$$\text{con } H_k(z) = [\hat{p}_{kn}(z)\hat{q}_{kn}(z)]^T$$

(B) Obtener para el camino principal el estado del mismo,

$$J_{00}\Delta z_{00} = H_0(z) - d^T r_l$$

$$\text{con } d^T = [J_{01} J_{02} \dots J_{03}] \text{ y } r_l = [\Delta z_{10}^T \dots \Delta z_{l0}^T]^T$$

Queda patente pues que esta aproximación del jacobiano desacopla la determinación del estado de los laterales de la del camino principal en el árbol.

Este algoritmo de Baran y Wu posee unas propiedades numéricas que lo hacen bastante robusto. Sin embargo, la complejidad del mismo se pone de manifiesto al abordar redes radiales más elaboradas donde no todos los laterales parten de un camino principal, es decir, aparecen sublaterales de laterales. Así, para la red de la figura 3.4, con la numeración de laterales indicada, se tendría un jacobiano inicial,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & J_{10} \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & J_{20} \\ J_{31} & 0 & J_{33} & J_{34} & J_{30} \\ J_{41} & 0 & J_{43} & J_{44} & J_{40} \\ J_{01} & 0 & J_{03} & 0 & J_{00} \end{bmatrix}$$

Si a este jacobiano le aplicamos las mismas hipótesis simplificativas realizadas por Baran y Wu, el sistema resultante sería,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & J_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44} & 0 \\ J_{01} & 0 & J_{03} & 0 & J_{00} \end{bmatrix}$$

que, como se puede observar, no permite desacoplar totalmente la determinación del estado de cada lateral, como era posible cuando todos los laterales partían del camino principal. Para el ejemplo anterior es necesario resolver primero los laterales 2 y 4 para luego obtener el estado de los laterales 1 y 3 respectivamente. Finalmente, se obtendría el estado del camino principal.

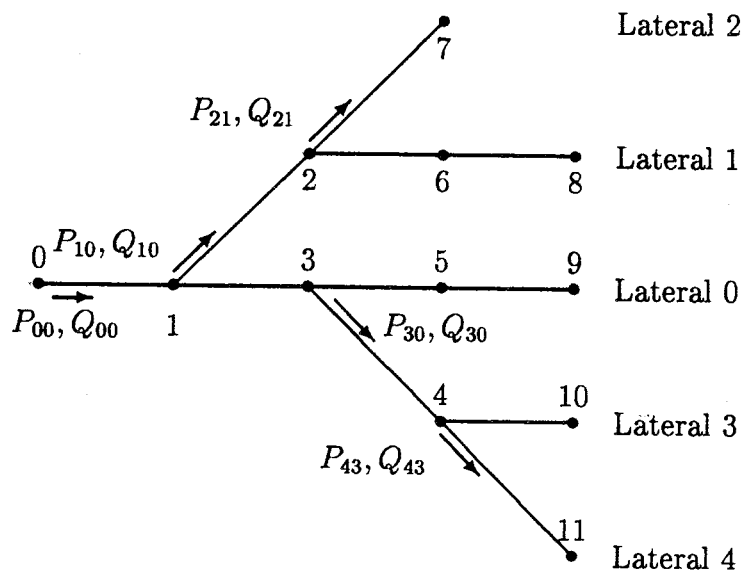


Figura 3.4: Red ejemplo con sublaterales de laterales

La inclusión en el modelo matemático de este reparto de cargas de las admitancias a tierra  $\mathcal{Y}_{k+1}^{sh} = G_{k+1}^{sh} + jB_{k+1}^{sh}$  es inmediata. Las ecuaciones (3.1) y (3.2) incluirían, cada una de ellas, nuevos términos de la forma  $-G_{k+1}^{sh} V_{k+1}^2$  y  $B_{k+1}^{sh} V_{k+1}^2$  respectivamente. La extensión de este método a cargas dependientes de la tensión supone que en estas mismas ecuaciones, los términos  $P_{Lk+1}$  y  $Q_{Lk+1}$  dejan de ser constantes para pasar a depender de la tensión del nudo  $k + 1$ ,  $V_{k+1}$ . Los autores, sin embargo, no estudian detalladamente las implicaciones que esto supone en la resolución de las nuevas ecuaciones del reparto, fundamentalmente cuando las cargas son de intensidad constante, por lo que este caso no quedaría totalmente resuelto.

- **Aproximaciones al algoritmo de Baran y Wu: H.-D. Chiang**

En el artículo [20] se utiliza el algoritmo de reparto de cargas desarrollado por Baran y Wu como herramienta necesaria para resolver el problema de compensación de reactiva, pero adoptando una última aproximación al mismo. Ésta consiste en hacer las submatrices diagonales de  $2 \times 2$  del jacobiano constantes e iguales a la matriz identidad, suposición no muy lejana de la realidad según el mismo estudio numérico realizado por Baran y Wu. Esta nueva aproximación permite reducir el número de operaciones para resolver cada iteración de NR. Una iteración  $\nu$  del

algoritmo consiste en,

1. Calcular los residuos  $H(z^\nu)$
2. Resolver para cada lateral  $k \neq 0$  su estado,

$$\Delta z_{k0} = H_k(z^\nu) \quad k = 1, \dots, l.$$

$$\text{con } H_k(z^\nu) = [\hat{p}_{kn}(z^\nu)\hat{q}_{kn}(z^\nu)]^T$$

3. Obtener para el camino principal el estado del mismo,

$$\Delta z_{00} = H_0(z^\nu) - d^T r_l$$

$$\text{con } d^T = [J_{01} J_{02} \dots J_{03}] \text{ y } r_l = [\Delta z_{10}^T \dots \Delta z_{l0}^T]^T$$

4. Actualizar  $z$ ,  $z^{\nu+1} = \Delta z + z^\nu$ .

### 3.2.1.2 Shirmohammadi & Semlyen & Luo

Este método, [50], utiliza directamente las leyes de Kirchhoff para la resolución del reparto de cargas en redes radiales e incluso débilmente malladas, previa transformación de éstas al caso puramente radial. Es el caso radial el que se describe primero.

Partiendo de un perfil dado para las tensiones en los nudos, usualmente el perfil plano, el algoritmo de solución consta de tres pasos en cada iteración  $\nu$ :

1. Obtención de las inyecciones de intensidad en cada nudo debido a las cargas  $\mathcal{S}_i$  en el mismo y a las admitancias a tierra ("shunt")  $\mathcal{Y}_{sh}$ ,

$$I_i^\nu = \left(\frac{\mathcal{S}_i}{U_i^{\nu-1}}\right)^* + \mathcal{Y}_{sh} U_i^{\nu-1} \quad (3.13)$$

2. Mediante un barrido hacia atrás en el árbol se recorren todas sus ramas calculando para cada una de ellas las intensidades  $\mathcal{J}_{ij}^\nu$  que la atraviesan mediante la primera ley de Kirchhoff,

$$\mathcal{J}_{ij}^\nu = -I_j^\nu + \sum_{jk, k \neq i} \mathcal{J}_{jk} \quad (3.14)$$

donde  $i$  y  $j$  son los extremos origen y final de cada rama al orientar ésta aguas abajo. El cálculo de las inyecciones indicado en 1 es simultáneo a este barrido hacia atrás.

- Las tensiones nodales son actualizadas entonces realizando un barrido hacia delante en el árbol desde el nudo de referencia, utilizando para ello la segunda ley de Kirchhoff,

$$V_j^v = V_i^v - Z_{ij} J_{ij}^v \tag{3.15}$$

siendo  $Z_{ij}$  la impedancia serie de la rama  $ij$ .

Este proceso se repite hasta que los residuos de potencia en los nudos son menores que cierta tolerancia  $\epsilon$ .

Hay que hacer notar que esta solución equivale exactamente al viejo método basado en la matriz de admitancia de nudos y utilizado en redes de transporte. Sin embargo, al aprovechar la topología radial del sistema resulta innecesario el cálculo explícito de dicha matriz, así como su factorización, aventajando pues al viejo algoritmo en esfuerzo computacional y tiempos de cálculo.

En el caso de trabajar con redes malladas, se propone transformar éstas en redes radiales para aprovechar al máximo la simplicidad del algoritmo adoptado para las redes en árbol. Esta transformación consiste en la apertura de cada bucle en un punto del mismo (se escoge aquel nudo del bucle más alejado del de referencia en el árbol), de forma que se genera un nudo ficticio adicional, figura 3.5. Las inyecciones de cargas en cada uno de los dos nudos resultantes de la apertura del bucle serán iguales y contrarias, correspondiendo cada una de ellas a la intensidad que atravesaba el nudo original antes de su apertura,

$$I_{j1} = -J_j$$

$$I_{j2} = J_j$$

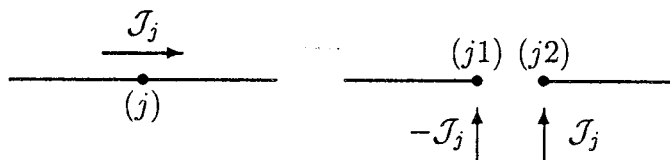


Figura 3.5: Apertura de bucle mediante división de un nudo en dos.

Se trata por tanto de determinar el valor de  $J_j$  en cada iteración y aplicar el proceso iterativo anteriormente descrito para la red puramente radial. La técnica propuesta para ello es la de compensación, [32, 59]. Para una red multipuerta, constituyendo cada puerta la formada por los pares de nudos a

los que da lugar la apertura de cada uno de los bucles de la red en estudio, es posible plantear el sistema,

$$\mathcal{V} = \mathcal{Z}\mathcal{I} \quad (3.16)$$

donde  $\mathcal{V}$  constituye la tensión a circuito abierto de cada una de las puertas,  $\mathcal{Z}$  la matriz de impedancia de bucles (despreciadas las admitancias a tierra) y el vector  $\mathcal{I}$  el de intensidades inyectadas en cada uno de los terminales resultantes de la apertura de los bucles.

La resolución del reparto de cargas quedaría entonces de la siguiente manera:

1. Convertir la red mallada de  $p$  bucles en radial. Obtener la matriz  $\mathcal{Z}$  y factorizar.
2. Resolver el problema del reparto de cargas radial para un perfil inicial nulo en las inyecciones inyectadas en los  $2p$  nudos resultantes del paso anterior, según el proceso iterativo indicado al principio de este apartado.
3. Si la diferencia de tensiones  $\Delta\mathcal{V}$  entre los pares de nudos abiertos en cada bucle es mayor que cierto residuo continuar, en caso contrario se alcanzó la convergencia.
4. Se resuelve (3.16) en forma incremental,

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{Z}\Delta\mathcal{I}$$

para obtener  $\Delta\mathcal{I}$ , es decir, el cambio incremental en las intensidades inyectadas en los nudos de apertura de los bucles.

5. Obtener la nuevas inyecciones en los nudos de apertura para la siguiente iteración

$$\mathcal{I}^{\nu+1} = \Delta\mathcal{I} + \mathcal{I}^{\nu}$$

6. Ir a 2.

La matriz  $\mathcal{Z}$  es llena, lo cual limita a redes débilmente malladas la aplicación de este método de resolución del reparto de cargas.

También los nudos PV son objeto de análisis por parte de estos autores. Para ello, estos nudos son tratados como nudos PQ, partiendo de la tensión especificada en el nudo y de una potencia reactiva inicial estimada de valor nulo. De esta forma los pasos 1 y 2 del reparto de cargas de la red radial

permanecen inalterables. Al paso 3 se le ha de añadir la corrección en la tensión de los nudos PV, dada por,

$$V_{j_{new}}^\nu = V_j^\nu \frac{V_j^{sp}}{V_j^\nu} \quad (3.17)$$

La tensión  $V_{j_{new}}^\nu$  es utilizada entonces para estimar la potencia reactiva inyectada en el nudo  $j$  mediante una variante del método iterativo *regula falsi* denominado método de la secante o tangente, [51]. Así, la nueva potencia reactiva inyectada en el nudo  $j$  viene dada por,

$$Q_j^\nu = \frac{Q_j^{\nu-1} - Q_j^{\nu-2}}{V_j^{\nu-1} - V_j^{\nu-2}} (V_j^{sp} - V_j^{\nu-1}) + Q_j^{\nu-1}$$

Si la potencia reactiva obtenida supera alguno de los límites de potencia definidos para el generador conectado al nudo  $j$ , se asume dicho límite como la nueva potencia reactiva inyectada en el nudo. Este tratamiento de los nudos PV deteriora la convergencia del reparto de cargas para redes malladas como demuestran los autores del mismo.

Frente a la simplicidad de este algoritmo cabe sin embargo destacar el hecho de que manejar intensidades en lugar de potencias como variables intermedias implica un mayor error de cálculo, fundamentalmente en el caso de redes muy cargadas. Esto se debe al hecho de que al aplicar (3.13) y (3.14) para estimar las intensidades en cada rama, al llegar al nudo de referencia, la intensidad suministrada contiene un error proporcional al de las tensiones de partida supuestas para cada nudo en la primera iteración del algoritmo. Ello implica que si el punto de partida del perfil de tensiones no está próximo al real, caso de redes muy cargadas, la convergencia puede ser lenta o incluso llegar a diverger. Se soslayaría, sin embargo, esta situación si se manejaran directamente los flujos de potencia, donde el error acumulado al llegar al nudo de referencia en el barrido hacia atrás es tan solo proporcional al de las pérdidas en las líneas y no a las potencias de carga en los nudos, siendo las primeras una pequeña fracción de las segundas. De ahí que la suma de flujos frente a las intensidades posea mejor convergencia incluso para redes muy cargadas.

Así mismo, el resolver el reparto de cargas para el problema radial hasta su convergencia, sabiendo que la potencia inyectada en los nudos de apertura de los bucles es tan solo estimada y no la real, constituye un paso atrás en la búsqueda de un reparto de cargas eficiente y rápido.

Todo ello da paso al siguiente algoritmo de reparto de cargas, que, basándose en éste, trata de paliar las debilidades anteriormente indicadas.



### 3.2.1.3 Luo & Semlyen

Los autores de [38] resuelven también la red radial mediante aplicación directa de las leyes de Kirchhoff pero utilizando las potencias.

Partiendo de un perfil dado para las tensiones en los nudos, el algoritmo de solución consta de tres pasos en cada iteración  $\nu$ :

1. Obtención de las potencias inyectadas en cada nudo debido a las cargas  $S_i$  en el mismo y a las admitancias a tierra (*shunt*),

$$S_i^\nu = S_i + S_i^{sh}(V_i^{\nu-1})^2 \quad (3.18)$$

donde  $S_i^{sh}$  es la potencia compleja para tensión 1 en p.u. correspondiente al nudo  $i$  debido a sus admitancias a tierra.

2. Mediante un barrido hacia atrás en el árbol se recorren todas sus ramas calculando para cada nudo origen de las mismas los flujos de potencia  $S_{ij}^\nu$  aguas abajo, teniendo en cuenta las inyecciones en los nudos y las pérdidas en las líneas. Según la figura 2.1 (página 6), y omitiendo las admitancias a tierra ya consideradas, se tendría,

$$S_{ij}^\nu = -S_j^\nu + \sum_{jk, k \neq i} Z_{jk} \frac{S_{jk}^2}{V_j^2} \quad (3.19)$$

siendo  $Z_{jk} = R_{jk} + jX_{jk}$  la impedancia de línea. Esta última ecuación compleja equivale a las dos ecuaciones reales

$$P_{ij}^\nu = -P_j^\nu + \sum_{jk, k \neq i} R_{jk} \frac{P_{jk}^2 + Q_{jk}^2}{V_j^2} \quad (3.20)$$

$$Q_{ij}^\nu = -Q_j^\nu + \sum_{jk, k \neq i} X_{jk} \frac{P_{jk}^2 + Q_{jk}^2}{V_j^2} \quad (3.21)$$

El paso 1 es simultaneo a este barrido hacia atrás.

3. Las tensiones nodales son actualizadas realizando un barrido hacia delante en el árbol desde el nudo de referencia mediante la segunda ley de Kirchhoff,

$$V_j^\nu = V_i^\nu - Z_{ij} \left( \frac{S_{ij}^\nu}{V_i^\nu} \right)^* \quad (3.22)$$

Este proceso se repite hasta que los residuos de potencia en los nudos es menor que cierta tolerancia  $\epsilon$ .

Resuelto el problema radial, las redes débilmente malladas reciben un tratamiento similar al que se vio en el apartado anterior, es decir, los bucles se abren para trabajar con la red radial. En este caso, sin embargo, no sólo se manejan flujos de potencias en lugar de intensidades con respecto al método usado en [50], sino que además el uso de potencias facilita el tratamiento de los nudos PV, el cual será análogo al de los bucles como se describe a continuación.

La apertura de un bucle da lugar a dos nudos con potencias inyectadas iguales y contrarias entre sí, correspondiendo dichas potencias a la que fluía por el bucle antes de su apertura (ver figura 3.5 sustituyendo  $\mathcal{J}_j$  por  $\mathcal{S}_j$ ). También los nudos PV se dividen en dos, figura 3.6, siendo conocida la tensión de uno de sus nudos y la potencia activa inyectada y consumida respectivamente en los mismos. La potencia reactiva en los nudos PV necesita ser estimada en cada iteración al igual que ocurría con la totalidad de la potencia en los bucles. El problema consiste en determinar las potencias complejas en cada uno de los nudos generados por la apertura de los bucles y la potencia reactiva en los nudos resultantes de la división de los nudos PV, pasando luego a resolver el problema radial. Este subproblema es resuelto mediante compensación.

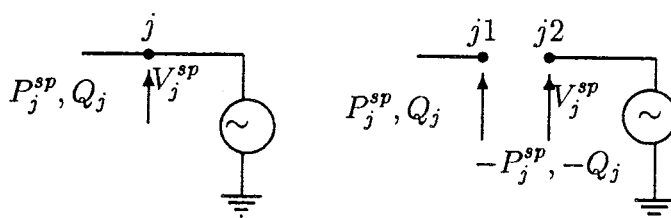


Figura 3.6: División de un nudo PV en dos.

Para los nudos resultantes de la apertura de un bucle se obtienen los residuos  $\Delta V_j = V_{j1} - V_{j2}$  y  $\Delta \theta_j = \theta_{j1} - \theta_{j2}$ , mientras que los obtenidos en la división de los nudos PV son tan solo los de las tensiones  $\Delta V_j = V_{j1} - V_{j2}^{sp}$ .

Así, abiertos los bucles y divididos los nudos PV, es posible plantear el sistema de ecuaciones (3.16) para la red multipuerta obtenida en este proceso de ruptura. Linealizando (3.16) y haciendo la aproximación  $\Delta \mathcal{I} \simeq \Delta \mathcal{S}^*$  (bastante correcta para tensiones próximas a la unidad y ángulos pequeños) ante la necesidad de manejar flujos de potencia en lugar de intensidades, resulta,

$$\Delta \mathcal{V} = \mathcal{Z} \Delta \mathcal{S}^* \tag{3.23}$$

Adoptando coordenadas rectangulares

$$\mathcal{Z} = R + jX$$

$$\Delta\mathcal{S}^* = \Delta P - j\Delta Q$$

y, supuestas las tensiones y ángulos en los nudos próximos a 1 y 0 respectivamente,

$$\Delta\mathcal{V} \simeq \Delta V + j\Delta\theta$$

se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} X & R \\ -R & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Hay que hacer notar que en (3.24) el tamaño del vector  $\Delta V$  es igual al número de bucles y nudos PV, mientras que el del vector  $\Delta\theta$  es cero para los nudos PV, ya que en éstos  $\Delta P$  es cero.

El problema del reparto de cargas en una iteración  $\nu$  queda por tanto de la siguiente forma,

1. Resolver el problema radial según se indicó al comienzo de este apartado.
2. Determinar los residuos de las tensiones en la red multipuerta resultante de la apertura de bucles y división de los nudos PV. Si este residuo es superior a cierto error  $\varepsilon$  continuar; en caso contrario ir a 4.
3. Estimar las nuevas potencias complejas y reactivas inyectadas en los nudos resultantes de la apertura de los bucles y división de los nudos PV respectivamente mediante la ecuación (3.24).
4. Determinar los residuos de potencia en los nudos. Si éstos no superan la tolerancia de error terminar; en caso contrario, volver a 1.

Señalar que, para hacer más eficiente el algoritmo y reducir tiempos de cálculo, el problema radial consta de un solo barrido hacia delante y hacia atrás, en lugar de realizar los necesarios hasta alcanzar la convergencia. Sin embargo, para ciertas redes es necesario realizar más de un barrido aguas arriba y abajo para llegar a la solución correcta.

### 3.2.1.4 Rajičić

Los autores de [42] utilizan exactamente el mismo reparto de cargas que desarrollan Luo & Semlyen en [38], y que se acaba de describir en el apartado anterior, pero aportando una mejora en el problema de compensación al transformar la red mallada en radial

Dicha mejora está relacionada con el tratamiento de las redes débilmente malladas y los nudos PV. Consiste fundamentalmente en dos cosas,

- Prescinde de las aproximaciones  $\Delta\mathcal{I} \simeq \Delta\mathcal{S}^*$  y  $\Delta\mathcal{V} \simeq \Delta V + j\Delta\theta$  en la ecuación (3.16) una vez linealizada.
- Calculados los incrementos de las inyecciones de intensidad en los nudos de apertura, se realiza una iteración completa del reparto de cargas radial para esas cargas como únicas excitaciones. De esta forma se corrigen las tensiones antes de pasar a la siguiente iteración del reparto de cargas global.

Como consecuencia de esto último, las inyecciones de potencia compleja en los nudos  $k1$  y  $k2$ , resultantes de la apertura del nudo  $k$  de un bucle dado, se obtienen de

$$S_{k2} = -S_{k1} = \frac{V_{k2} + V_{k1}}{2} \mathcal{I}_k^* \quad (3.25)$$

siendo  $\mathcal{I}_k$  la intensidad que atravesaba el nudo antes de su apertura y que es determinada, salvo una primera estimación al inicio del proceso iterativo, por,

$$\begin{bmatrix} X & R \\ -R & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Im(\Delta\mathcal{I}) \\ \Re(\Delta\mathcal{I}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\Delta\mathcal{V}) \\ \Im(\Delta\mathcal{V}) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Este sistema de ecuaciones equivale al (3.24) teniendo en cuenta las consideraciones inicialmente mencionadas. El vector  $\Delta\mathcal{V}$  equivale a las diferencias de tensiones entre los nudos resultantes de la apertura en los bucles,

$$\Delta\mathcal{V}_k = V_{k2} - V_{k1} \quad (3.27)$$

Cabe indicar, finalmente, que para los nudos PV, tratados también como bucles al igual que lo hicieran Luo & Semlyen, tan solo interesa la inyección de reactiva, que viene dada por (3.25) tras aplicar la condición de que  $\Delta P_k = P_{k2} - P_{k1} = 0$ , es decir,

$$\Delta Q_{k2} = \Re(\Delta\mathcal{I}_k) \frac{V_{k2}^2}{\Re(\Delta\mathcal{V}_{k2})} \quad (3.28)$$

Análogamente, el vector de la derecha en (3.26) para el nudo PV tan solo aporta términos en  $\Re(\Delta\mathcal{V})$  de valor

$$\Re(\Delta\mathcal{V}_k) = \Re(\mathcal{V}_{k2}) \left( \frac{V_k^{sp}}{V_{k2}} - 1 \right) \quad (3.29)$$

si se tiene en cuenta que  $V_k^{sp} = V_{k1}$  y que el desfase de ángulo entre las tensiones de los nudos resultantes de la apertura de los PV es cero.

Cada iteración del problema del reparto de cargas queda por tanto de la siguiente forma,

1. Resolver el problema radial al igual que se hacía en el apartado 3.2.1.3 mediante un solo barrido hacia delante y hacia atrás.
2. Determinar los residuos de las tensiones en la red multipuerta resultante de la apertura de bucles, ecuación (3.27), y división de los nudos PV, ecuación (3.29).
3. Estimar las nuevas intensidades complejas inyectadas en los nudos resultantes de la apertura de los bucles y división de los nudos PV respectivamente mediante el sistema (3.26).
4. Corregir las tensiones en los nudos para los incrementos de intensidad obtenidos en el paso anterior, anuladas el resto de las cargas y tensión del nudo de referencia.
5. Actualizar las tensiones en los nudos y comprobar convergencia. Si no se ha alcanzado actualizar las inyecciones de intensidad y volver a 1.

En [42] se presentan resultados comparativos con el algoritmo de [38], siendo notable la mejora en la convergencia. Ello se atribuye fundamentalmente al menor número de aproximaciones adoptadas en el proceso de solución y a la corrección de las tensiones tras la nueva estimación de las inyecciones en los nudos de división.

### 3.2.1.5 F. Zhang & C.S. Cheng

Los autores de [66] basan su estrategia de resolución en la estructura típicamente radial de la mayoría de las redes de distribución, y en la utilización de las ecuaciones del reparto de cargas en la forma habitual de la que parten la mayoría de los repartos de cargas a nivel de transporte. Viene a ser este

método el de NR modificado para obtener beneficios de la estructura radial de la red.

Como punto de partida de este algoritmo se adoptan dos suposiciones para la red radial en estudio: no existen impedancias a tierra y las caídas de tensión entre dos nudos adyacentes son prácticamente nulas. La primera de las suposiciones implica que todas las cargas se suponen de potencia constante. Si existiesen cargas dependientes de la tensión habría que modelarlas como de potencia constante e ir actualizando dicha potencia en cada iteración del algoritmo. Idéntico razonamiento se aplica si existen condensadores shunt o se ha de utilizar un modelo en  $\Pi$  para las líneas. La segunda de las suposiciones requiere líneas cortas y flujos de potencia no muy elevados.

Este método parte del sistema de ecuaciones (2.10) planteado en el algoritmo de reparto de cargas de NR (apartado 2.5 del capítulo 2).

Teniendo en cuenta con las suposiciones hechas que,

$$g_{ii} + jb_{ii} = - \sum_{j \in i, j \neq i} (G_{ij} + jB_{ij})$$

y

$$\sin \theta_{ij} \simeq 0$$

se llegan a las siguientes expresiones simplificadas para los distintos elementos del jacobiano,

$$\begin{aligned} H_{ij} &= L_{ij} \simeq -V_i V_j B_{ij} \cos \theta_{ij} & j \neq i \\ H_{ii} &= L_{ii} \simeq V_i \sum_{j \in i, j \neq i} V_j B_{ij} \cos \theta_{ij} \\ N_{ij} &= -M_{ij} \simeq V_i V_j G_{ij} \cos \theta_{ij} & j \neq i \\ N_{ii} &= -M_{ii} \simeq -V_i \sum_{j \in i, j \neq i} V_j G_{ij} \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$

El sistema a resolver en cada iteración de NR puede ser entonces reescrito de la forma,

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \\ & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B & -D_G \\ D_G & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1}^T & \\ & A_{n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $D_B$  y  $D_G$  son matrices diagonales cuyas entradas son, respectivamente,  $(B_{ij} V_i V_j \cos \theta_{ij})$  y  $(G_{ij} V_i V_j \cos \theta_{ij})$ , y  $A_{n-1}$  es la matriz de incidencias de ramas a nudos reducida. Esta última corresponde a la red radial en estudio

a nudos reducida. Esta última corresponde a la red radial en estudio numerando los nudos y ramas desde el de referencia aguas abajo, y, orientando las ramas aguas arriba. Dada la topología radial y la ordenación adoptada,  $A_{n-1}$  queda triangular superior.

El sistema (3.30) es resuelto iterativamente mediante barridos hacia atrás y hacia delante en el árbol. En efecto, (3.30) es posible reescribirlo como,

$$A_{n-1}\dot{S}_L = \dot{S} \quad (3.31)$$

$$\dot{W}A_{n-1}^T\dot{E} = \dot{S}_L \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \Delta\theta + j\frac{\Delta V}{V} \\ \dot{S} &= -\Delta P - j\Delta Q \\ \dot{W} &= D_B + jD_G \end{aligned}$$

La resolución del sistema (3.31) consiste en un barrido aguas arriba en el árbol para así obtener los flujos de potencia  $\dot{S}$  por las líneas. Análogamente, el sistema (3.32) es resuelto mediante un barrido hacia delante en el árbol para así obtener el vector  $\dot{E}$  en cada nudo. En este último barrido se utiliza la inversa de la matriz  $\dot{W}$ , la cual corresponde a una impedancia equivalente para cada rama de la forma,

$$Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{eq} &= -\frac{X_{ij}}{(V_i V_j \cos \theta_{ij})} \\ X_{eq} &= -\frac{R_{ij}}{(V_i V_j \cos \theta_{ij})} \end{aligned}$$

El algoritmo iterativo queda de la siguiente forma para una iteración  $\nu$ :

1. Hacer el barrido hacia atrás en el árbol para obtener los flujos de potencia por las líneas  $\dot{S}_L^\nu$  y la impedancia equivalente  $Z_{eq}$  para cada rama.
2. Actualizar el vector  $\dot{E}$ , es decir, las tensiones complejas en los nudos mediante un barrido hacia delante:

$$\dot{E}_j^{\nu+1} = \dot{E}_i^\nu + Z_{eq}\dot{S}_L^\nu \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_j^{\nu+1} = \theta_j^\nu + \Re(\dot{E}_j) \\ V_j^{\nu+1} = V_j^\nu + \Im(\dot{E}_j)V_j^\nu \end{cases}$$

siendo  $j$  e  $i$  los nudos origen y final para cada rama respectivamente.

En el caso de existir nudos PV en los que la potencia reactiva es desconocida mientras que la tensión viene especificada, el sistema de ecuaciones (3.30) se caracteriza porque no todas las incógnitas son desconocidas ( $\Delta V_{PV} = 0$ ) y no todos los términos de la derecha son datos ( $\Delta Q_{PV}$ ). En forma esquemática, el sistema (3.30) puede ser reescrito de la forma

$$Ax = b \quad (3.33)$$

Se propone aplicar superposición para resolver (3.33) en dos pasos,

$$Ax_1 = b_1 \quad (3.34)$$

y

$$Ax_2 = b_2 \quad (3.35)$$

donde  $b_1$  está constituido por todas las entradas conocidas para  $b$  ( $\Delta P$ ,  $\Delta Q$  en los nudos PQ, y  $\Delta P$  en los nudos PV) y el resto cero, mientras que en  $b_2$  quedan las incógnitas  $\Delta Q$  de los nudos PV y el resto cero. El proceso a seguir sería,

1. Obtener  $x_1$  resolviendo (3.34)
2. A partir de  $x_1$  calcular aquellas incógnitas de  $x_2$  que satisfagan  $\Delta V = 0$  en los nudos PV
3. El vector  $b_2$  se obtiene mediante compensación de forma similar a como ya se ha venido haciendo en [38] y [50], es decir, mediante el sistema

$$Z(b_2)_x = (x_2)_b$$

donde  $Z$  es la matriz de impedancias de los bucles constituidos por los nudos PV hasta el de referencia (entendiendo los nudos PV como fuentes de tensión entre el nudo en cuestión y tierra, formando así bucles con el nudo de referencia) y sustituyendo el término de impedancia por el de *impedancia equivalente*  $Z_{eq}$  definido en este método. El vector  $(x_2)_b$  está constituido por aquellos términos de  $x_2$  obtenidos en el paso 2, y  $(b_2)_x$  lo forman las componentes no conocidas de  $b_2$ .

4. Finalmente se resuelve (3.35).

En cuanto al caso de redes malladas, los bucles también se abren como en casos anteriores. Esta apertura implica que en el nudo  $k$  en el que se produzca la división, se impongan las condiciones adicionales

$$\Delta\theta_{k1} - \Delta\theta_{k2} = 0$$



$$\begin{aligned}\Delta V_{k1} - \Delta V_{k2} &= 0 \\ \Delta P_{k1} + \Delta P_{k2} &= \Delta P_k \\ \Delta Q_{k1} + \Delta Q_{k2} &= \Delta Q_k\end{aligned}$$

Estas nuevas ecuaciones transforman (3.30) en la forma (3.33) donde las incógnitas en  $x$  y en  $b$  son deducibles.

### 3.2.1.6 R. Céspedes

En [16] se enfoca el problema mediante la búsqueda de un equivalente externo para cada rama del árbol radial, eliminando los ángulos de las tensiones como incógnita y obteniendo así una ecuación bicuadrática en las tensiones nodales para cada nudo final de cada rama. El hecho de eliminar los ángulos de las tensiones nodales en el reparto de cargas es justificado aludiendo a la falta de necesidad de dicha variable en los diferentes estudios relacionados con las redes de distribución. Esta ecuación, atendiendo a la figura 3.7 (modelo de línea ya adoptado por Baran & Wu), sería:

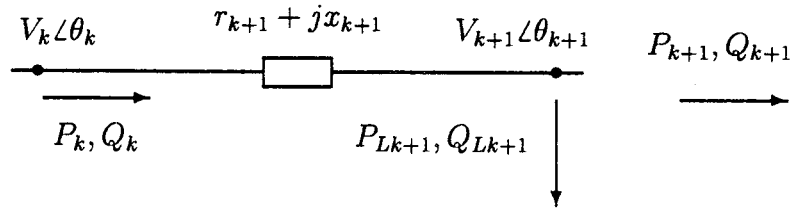


Figura 3.7: Modelo de línea para el algoritmo de R. Céspedes

$$V_{k+1}^4 + (2(r_{k+1} * P_{k+1} + x_{k+1} * Q_{k+1}) - V_k^2)V_{k+1}^2 + (r_{k+1}^2 + x_{k+1}^2)(P_{k+1}^2 + Q_{k+1}^2) = 0 \quad (3.36)$$

El algoritmo iterativo del reparto de cargas consiste en,

1. Con las tensiones estimadas de la iteración anterior obtener los flujos salientes de cada nudo aguas abajo,  $P_k$  y  $Q_k$ , mediante un barrido hacia atrás en el árbol,

$$P_k = \sum_{j \in k, j \neq (k-1)} (r_{kj} \frac{(P_j + P_{Lj})^2 + (Q_j + Q_{Lj})^2}{V_j^2})$$

$$Q_k = \sum_{j \in k, j \neq (k-1)} (x_{kj} \frac{(P_j + P_{Lj})^2 + (Q_j + Q_{Lj})^2}{V_j^2})$$

2. A continuación se procede a un barrido hacia delante desde el nudo slack para obtener el nuevo perfil de tensiones a partir de la ecuación (3.36).
3. El criterio de convergencia queda establecido por el residuo de las pérdidas totales en la red.

Este método incorpora fácilmente los distintos modelos que se adoptan para las cargas en los nudos en lo que se refiere a su dependencia con la tensión. En estos casos también se han de estimar las potencias inyectadas en cada nudo en función de las tensiones estimadas para cada iteración, lo cual lógicamente ralentiza la convergencia del algoritmo.

Es de destacar la simplicidad de esta técnica de solución a costa de la pérdida de los ángulos de las tensiones.

### 3.2.2 Redes desequilibradas

Aunque el caso de redes desequilibradas no ha sido abordado explícitamente en esta tesis, sí conviene su consideración, ya que conforme disminuye el nivel de tensión en los sistemas de distribución, comienzan dichos desequilibrios a tener mayor relevancia en la solución del problema.

Se mencionan pues las técnicas de solución más extendidas para el tratamiento de redes desequilibradas, sin entrar en el problema del modelado de los distintos elementos de la red (transformadores, reguladores de tensión, cargas distribuidas, etc.), cuestión determinante en el nivel de exactitud de la solución final del reparto de cargas.

Algunos de los repartos de cargas que se mencionan son por supuesto factibles de aplicar para redes equilibradas. Su presentación en esta categoría obedece a que han sido específicamente desarrollados para redes desequilibradas.

De los repartos de cargas descritos en el apartado de redes equilibradas, no todos son directamente extensibles al caso desequilibrado. Así ocurre, por ejemplo, con todos aquellos basados en términos de los flujos de potencia por las líneas, métodos de Baran & Wu, R. Céspedes y Luo & Semlyen por ejemplo. Ello se debe a que los acoplamientos entre fases impiden la utilización directa del algoritmo utilizado en cada caso, si bien, una posible aproximación sería desprestigiar los acoplamientos entre fases. Otros, sin embargo, sí son factibles de utilizar para redes desequilibradas; son los que se indican a continuación.

También hay que mencionar que de los repartos de cargas a nivel de transporte, el método de Newton-Raphson es directamente aplicable a redes desequilibradas, pero la complejidad y requerimientos de cálculo asociados a este algoritmo se ven notablemente aumentados debido al tamaño del jacobiano, el cual se hace tres veces mayor que en el caso equilibrado, [5].

### 3.2.2.1 Matriz de admitancias de nudos

Esta metodología, utilizada en [19, 55], no es más que el algoritmo de Gauss basado en la matriz de impedancias de nudos, [24], pero utilizando la matriz de admitancias de nudos factorizada. En definitiva, y como ya se mencionó anteriormente, resulta equivalente a la solución propuesta en [50] (apartado 3.2.1.2), salvo que no se beneficia de la estructura radial de la red, aunque por otro lado puede abordar redes malladas de forma directa. La utilización de esta técnica exige el que todos los nudos sean PQ.

Para un mismo tamaño de red, este algoritmo se caracteriza por poseer peor convergencia que el de Newton-Raphson.

### 3.2.2.2 Kersting

En este caso se utiliza la conocida técnica de resolución de redes en escalera, salvo que, dada la no linealidad de la red, el algoritmo de solución resulta iterativo. Obviamente esta metodología limita el algoritmo a redes puramente radiales, y, de nuevo, la técnica se basa en barridos del árbol.

La descripción de este método es similar a la que se hizo para el de Baran y Wu. Así, para una red radial con un solo camino en el árbol, figura 3.1 (página 20), se parte de una tensión inicial  $\mathcal{V}_n^0$  para el último nudo en el árbol, y con ella se obtiene la intensidad inyectada en el mismo,

$$\mathcal{I}_n^0 = \left(\frac{\mathcal{S}_n}{\mathcal{V}_n^0}\right)^* \quad (3.37)$$

la cual permite obtener la tensión del nudo  $n - 1$ ,

$$\mathcal{V}_{n-1}^0 = \mathcal{V}_n^0 + \mathcal{Z}_{(n-1)n}\mathcal{I}_n^0 \quad (3.38)$$

A continuación, se estima la potencia inyectada en  $n - 1$  mediante la ecuación (3.37), con lo cual es posible de nuevo obtener la tensión del nudo  $n - 2$ ,

$$\mathcal{V}_{n-2}^0 = \mathcal{V}_{n-1}^0 + \mathcal{Z}_{(n-2)(n-1)}(\mathcal{I}_n^0 + \mathcal{I}_{n-1}^0) \quad (3.39)$$

y así sucesivamente. De esta forma se alcanza el nudo de referencia, para el que se obtendrá una tensión estimada  $\mathcal{V}_0^0$  que en general diferirá de su valor especificado  $\mathcal{V}_0^{sp}$  (en caso contrario se tendría la solución del reparto de cargas). La diferencia de tensiones,

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_0^{sp} - \mathcal{V}_0^0$$

se le suma a  $\mathcal{V}_n^0$  para obtener la tensión del nudo  $n$  para la siguiente iteración, es decir,

$$\mathcal{V}_n^1 = \mathcal{V}_n^0 + \Delta\mathcal{V}$$

comenzando otra vez el proceso iterativo hasta que el residuo de la tensión en el nudo de referencia sea menor a cierto valor  $\varepsilon$ .

En el caso de existir laterales que parten del camino principal en la red radial, figura 3.3 (página 22), se ha de partir de tensiones estimadas iniciales para todos los nudos terminales de cada lateral,  $\mathcal{V}_n^0$  y  $\mathcal{V}_{kn}^0$  para dicha figura. Tras aplicar el proceso anteriormente descrito a cada camino que parte del nudo  $k$ , al alcanzar dicho nudo se tienen dos tensiones estimadas en el mismo,  $\mathcal{V}_k^{0kn}$  y  $\mathcal{V}_k^{0n}$ . La diferencia entre estas dos tensiones se utiliza para corregir  $\mathcal{V}_{kn}^0$  y volver a proceder análogamente hasta que la diferencia entre las tensiones estimadas para el nudo  $k$  no supere cierto límite. Al alcanzar la convergencia de este “subproblema” se sigue recorriendo el árbol hasta el nudo de referencia y se procede igual que en el problema de un solo camino en la red radial.

En todo este análisis los vectores utilizados poseen tres componentes, una por cada fase de la red trifásica desequilibrada en estudio, siendo la matriz de impedancias por rama de 3x3.

### 3.2.2.3 C.S. Cheng & D. Shirmohammadi

De las distintas soluciones descritas en el caso de redes de distribución equilibradas, es el algoritmo implementado en [50] (apartado 3.2.1.2) el que resulta más fácil de extender al caso de redes desequilibradas, lo cual se describe en [18].

Consiste pues este algoritmo en la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff a la red radial mediante barridos hacia delante y hacia atrás en el árbol salvo que se manejan tres fases en lugar de una sola. Resuelto este problema se ajustan las inyecciones en los nudos de apertura de bucles por compensación para volver a resolver la red radial, metodología ya descrita para el caso equilibrado. En el caso de existir nudos PV se utiliza un método de compensación similar

al utilizado para la resolución del caso mallado pero orientado a corregir tan solo las inyecciones de intensidad debido a la potencia reactiva inyectada en nudos PV.

#### 3.2.2.4 Zimmerman & H.-D. Chiang

Se menciona este método, [67], porque equivale al ya descrito por Baran y Wu, salvo que se utilizan las intensidades y no los flujos de potencia por las líneas, sustitución conveniente para poder abordar redes desequilibradas teniendo en cuenta los acoplamientos entre líneas. El algoritmo resulta idéntico con la salvedad anterior y el hecho de manejar tres fases.

### 3.3 Resumen del capítulo

En este capítulo se han presentado las diversas **metodologías** existentes para la solución del reparto de cargas a nivel de redes de distribución fundamentalmente, proponiendo una clasificación de las mismas atendiendo a diversos criterios. Tras una muy breve revisión al desarrollo histórico del problema del reparto de cargas (apartado 3.1), se han descrito las técnicas de solución más extendidos a nivel de distribución (apartado 3.2), que tratan de adaptarse a las características propias de estas redes. Se han distinguido a su vez las metodologías utilizadas en redes equilibradas (apartado 3.2.1) de las desequilibradas (apartado 3.2.2), haciendo mayor hincapié en las primeras, objeto de esta tesis. Para cada algoritmo se ha procurado señalar sus ventajas y limitaciones.

# Capítulo 4

## Reparto de cargas para redes radiales

### 4.1 Introducción

El objetivo perseguido en el desarrollo del reparto de cargas presentado en esta tesis ha sido el de mejorar la rapidez de convergencia de las distintas soluciones propuestas hasta ahora, dentro del marco propio y característico asociado a las redes de distribución.

Con esta motivación resulta intuitiva la idea de que cuanto más lineal sea el sistema de ecuaciones a resolver, más rápidamente se obtendrá la solución del mismo. Es ésta por tanto la línea inicial de partida para el desarrollo de un nuevo algoritmo de reparto de cargas.

La solución propuesta en este capítulo se refiere a redes radiales equilibradas de  $N+1$  nudos con un solo nudo, el de referencia, con tensión dada. El resto de los nudos del sistema se consideran PQ, es decir, las cargas en la red son totalmente independientes de la tensión del nudo al cual se encuentran conectadas. Una vez resuelto este tipo de redes, se pasará a abordar otros casos prácticos de interés que difieren de las condiciones anteriores.

El resolver inicialmente redes exclusivamente radiales condiciona el método de resolución doblemente. Por un lado debe solventar las características propias de estas redes, como es el elevado ratio  $R/X$  que suele ir asociado a los sistemas de distribución (normalmente en árbol), o las dificultades numéricas que se presentan cuando en un mismo nudo inciden una línea corta y otra larga. Por otro lado, debe aprovechar al máximo el rasgo propio de poseer una topología radial, claramente favorable frente a las malladas en lo que se refiere al seguimiento de los “camino” de los flujos por la red.

## 4.2 Formulación del problema

Se parte de las ecuaciones de los flujos de potencia por las líneas. Si se considera el modelo de línea y la notación indicada en la figura 4.1, los flujos de potencia partiendo del nudo  $i$  vienen dados por las siguientes expresiones,

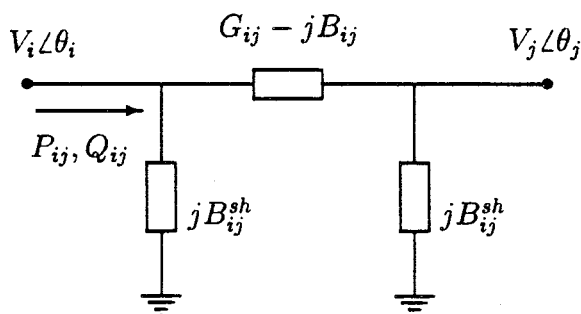


Figura 4.1: Modelo de línea y notación adoptada

$$P_{ij} = (G_{ij} + G_{ij}^{sh})V_i^2 - G_{ij}V_iV_j \cos \theta_{ij} + B_{ij}V_iV_j \sin \theta_{ij} \quad (4.1)$$

$$Q_{ij} = (B_{ij} - B_{ij}^{sh})V_i^2 - B_{ij}V_iV_j \cos \theta_{ij} - G_{ij}V_iV_j \sin \theta_{ij} \quad (4.2)$$

donde se ha incluido la posibilidad de una conductancia a tierra  $G_{ij}^{sh}$  por conveniencia, aunque ésta es habitualmente nula.

Se plantea entonces el balance de potencias en cada nudo del sistema, salvo el de referencia, dando lugar al sistema de ecuaciones (2.6). Este sistema de  $N$  ecuaciones complejas equivale a uno de  $2N$  reales,

$$P_i^{esp} = \sum_{j \in i} P_{ij} \quad (4.3)$$

$$Q_i^{esp} = \sum_{j \in i} Q_{ij} \quad (4.4)$$

Son éstas las ecuaciones no lineales tradicionalmente resueltas por los repartos de cargas convencionales.

La no linealidad de dicho sistema es la que genera mayor número de dificultades en su resolución. Este problema se atenúa definiendo un conjunto nuevo de incógnitas distintas a las tensiones nodales  $U_i = V_i \angle \theta_i$ . El cambio de variables propuesto es,

$$U_i = V_i^2 \quad (4.5)$$

$$R_{ij} = V_i V_j \cos \theta_{ij} \quad (4.6)$$

$$I_{ij} = V_i V_j \sin \theta_{ij} \quad (4.7)$$

La variable  $U_i$  va asociada a los nudos mientras que  $I_{ij}$  y  $R_{ij}$  van ligadas a las ramas. De esta forma, las ecuaciones (4.1) y (4.2) pasan a ser *lineales*,

$$P_{ij} = (G_{ij} + G_{ij}^{sh})U_i - G_{ij}R_{ij} + B_{ij}I_{ij} \quad (4.8)$$

$$Q_{ij} = (B_{ij} - B_{ij}^{sh})U_i - B_{ij}R_{ij} - G_{ij}I_{ij} \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9), planteadas para cada rama de la red radial de  $N + 1$  nudos, dan lugar a un sistema de  $2N$  ecuaciones *lineales* con  $3N$  incógnitas (dos por rama,  $R_{ij}$  e  $I_{ij}$ , y una por nudo,  $U_i$ ). Para resolver el problema es necesario añadir las  $N$  ecuaciones *cuadráticas* (tantas como ramas) que resultan de la relación existente entre las nuevas incógnitas,

$$U_i U_j = R_{ij}^2 + I_{ij}^2 \quad (4.10)$$

Hay que advertir a la hora de contabilizar incógnitas que  $I_{ij} = -I_{ji}$  y  $R_{ij} = R_{ji}$ .

Sustituyendo las ecuaciones (4.8) y (4.9) en (4.3) y (4.4), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$P_i^{esp} = U_i \sum_{j \in i} (G_{ij} + G_{ij}^{sh}) + \sum_{j \in i} (B_{ij} I_{ij} - G_{ij} R_{ij}) \quad (4.11)$$

$$Q_i^{esp} = U_i \sum_{j \in i} (B_{ij} - B_{ij}^{sh}) - \sum_{j \in i} (B_{ij} R_{ij} + G_{ij} I_{ij}) \quad (4.12)$$

$$f_{ij} = U_i U_j - R_{ij}^2 - I_{ij}^2 = 0 \quad (4.13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (j \in i)$$

el cual, denotando las incógnitas asociadas a nudos ( $U_i$ ) y ramas ( $R_{ij}$ ,  $I_{ij}$ ) por  $u$  y  $x$  respectivamente, y las potencias especificadas en cada nudo ( $P_i^{esp}$ ,  $Q_i^{esp}$ ) por  $p$ , puede ser escrito en forma compacta como,

$$Ax + Bu = p \quad (4.14)$$

$$f(x, u) = 0 \quad (4.15)$$

A es una matriz de tamaño ( $2N \times 2N$ ) no singular, mientras que B es una matriz rectangular de ( $2N \times N$ ).



Una vez que el problema es resuelto, las incógnitas tradicionales de las tensiones en los nudos se obtienen de la forma,

$$V_i = \sqrt{U_i}$$

$$\tan(\theta_i - \theta_j) = \frac{I_{ij}}{R_{ij}}$$

Esta última ecuación requiere un barrido del árbol característico de la red en estudio desde el nudo de referencia hacia los más exteriores en el árbol. Este barrido, que aparecerá en más de una ocasión para la resolución del sistema de ecuaciones se describirá en detalle en el apartado 4.3

## 4.3 Método de resolución

### 4.3.1 Proceso iterativo

El sistema de ecuaciones resultante en el apartado anterior se resuelve por Newton-Raphson, es decir linealizando e iterando. De esta forma resulta:

$$A\Delta x + B\Delta u = p - (Ax_k + Bu_k) = \Delta p_k \quad (4.16)$$

$$F_x^k \Delta x + F_u^k \Delta u = -f(x_k, u_k) \quad (4.17)$$

donde  $F_x = [\frac{\partial f}{\partial x}]$  y  $F_u = [\frac{\partial f}{\partial u}]$ .

Hay que destacar el hecho de que ya que (4.14) es un sistema lineal, el término de la derecha de la ecuación (4.16) es siempre nulo tras la primera iteración. Esto significa, siendo ésta una de las características más notables del algoritmo de reparto de cargas desarrollado, que el vector de residuos de las potencias en los nudos  $\Delta p_k$  sólo debe ser calculado en la primera iteración, viniendo determinada la convergencia por la componente máxima de  $f(x_k, u_k)$ .

Existen al menos dos formas de inicializar el proceso iterativo:

- (A) Hacer  $R_{ij}^o = 1$ ,  $I_{ij}^o = 0$  y  $U_i^o = 1$ , que es equivalente al habitual punto de partida ( $\theta_i^o = 0$ ,  $V_i^o = 1$ ) en los repartos de carga basados en las tensiones en los nudos.
- (B) Partir de  $U_i^o = 1$  y obtener  $R_{ij}^o$  e  $I_{ij}^o$  de (4.14), es decir,  $x^o = A^{-1}(p - Bu)$ .

Para la inicialización (A) se obtiene  $f(x_o, u_o) = 0$  y  $\Delta p_o = p$  (en ausencia de baterías de condensadores). Esto significa que no se requiere hacer ningún

cálculo matemático para obtener el vector de la derecha en (4.16)-(4.17). Si se opta por la inicialización (B) se obtiene  $\Delta p = 0$  desde el principio, pero  $f(x_o, u_o)$  ha de ser calculado.

La primera de las inicializaciones anteriores es finalmente la que se ha adoptado en esta tesis atendiendo a los concluyentes resultados experimentales que la señalaban como claramente superior. La justificación teórica a estos resultados se deduce fácilmente de la linealidad de (4.14). Como ya se indicó anteriormente dicha linealidad hace que el término de la derecha de (4.16) sea cero tras la primera iteración, independientemente de que dicho término partiera o no de dicho valor al comenzar la misma. Por el contrario, la no linealidad de (4.15) hace que el sistema (4.17) no se haga normalmente cero tras la primera iteración, y que la rapidez de convergencia dependa pues en cierto modo de la velocidad con la que este sistema se anula. Esto permite afirmar que cuanto más cerca partamos de la solución deseada, esto es  $f(x_k, u_k) = 0$ , tanto más rápidamente convergerá a esta solución.

El proceso iterativo consta por tanto de los siguientes pasos:

1.  $k = 0$ ,  $f(x_o, u_o) = 0$ ,  $\Delta p_o = p$ . Si existen batería de condensadores en un nudo  $i$  habría que añadir el término  $-B_i^{sh}U_i$  a la hora de obtener el residuo de potencia reactiva de partida para el nudo  $i$ .
2. Calcular  $F_x^k$ ,  $F_u^k$  y resolver (4.16), (4.17) para así obtener  $\Delta x$ ,  $\Delta u$ .
3. Hacer  $k = k + 1$ . Actualizar  $x_k$ ,  $u_k$ .
4. Calcular  $f(x_k, u_k)$ . Si  $\max |f_{ij}| \leq \varepsilon$ , parar. En caso contrario, hacer  $\Delta p_k = 0$  y volver al punto 2.

Obviamente, es el apartado número 2 el que resulta más relevante desde el punto de vista computacional. Se trata de optimizar la técnica de resolución del jacobiano de nuestro reparto de cargas, asunto del que se ocupan los siguientes epígrafes.

### 4.3.2 Ordenación del sistema

En primer lugar, para resolver redes radiales, el punto de partida de la mayoría de los repartos de carga que abordan este tipo de redes consiste en almacenar de forma eficiente el árbol característico de la red en estudio, ya que la estrategia de ordenación y cálculo del sistema a resolver sigue usualmente la trayectoria de dicho árbol, hecho que también se produce en el algoritmo en estudio.

La idea consiste en almacenar adecuadamente la estructura de nivel [23] asociada a la red radial. Dicha estructura de nivel parte de un nudo raíz que coincide con el nudo de referencia, y, mediante una búsqueda a lo ancho va clasificando al resto de los nudos en distintos niveles (apéndice C). Esta búsqueda es obvia e inmediata para una red radial. Cada nudo posee un único camino hasta el nudo raíz, de forma que si  $j$  es el nudo que precede a  $i$  en el camino hacia el raíz, se dice que  $j$  es el **padre** de  $i$ , e  $i$  es el **hijo** de  $j$ . Cada nudo posee un único padre pero puede poseer varios hijos. A los nudos sin hijos se les denomina nudos terminales.

Para mejor ilustrar lo anterior se acude a una red radial ejemplo como la de la figura 4.2 de 9 nudos y 8 ramas. En ella se numeran los nudos desde el raíz hasta el más extremo en la estructura de nivel, agotando la numeración de todos los nudos de un mismo nivel antes de pasar al siguiente. El nudo 1 es el nudo de referencia.

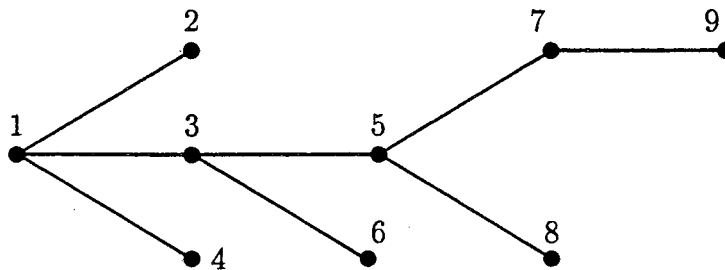


Figura 4.2: Red radial ejemplo de 9 nudos

Una ordenación inicial directa e intuitiva para el sistema de ecuaciones (4.16) y (4.17) es

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ F_x & F_u \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

correspondiente a las ecuaciones lineales en primer lugar seguida de las no lineales. Para la red ejemplo en estudio, y de forma más detallada, se tendría la matriz de la figura 4.3.

Obsérvese que los dos sistemas de ecuaciones (4.16) y (4.17) que dan lugar al jacobiano a resolver están ordenados por nudos desde el nivel más superior hasta el nudo de referencia siguiendo el árbol. Así, la resolución de este conjunto de ecuaciones consiste en un barrido del árbol aguas arriba y aguas abajo correspondientes a la eliminación hacia adelante y hacia atrás de dicho sistema. De ahí, como ya se indicó antes, la importancia en el almacenamiento óptimo del árbol para una lectura eficiente del mismo. Del árbol no sólo se

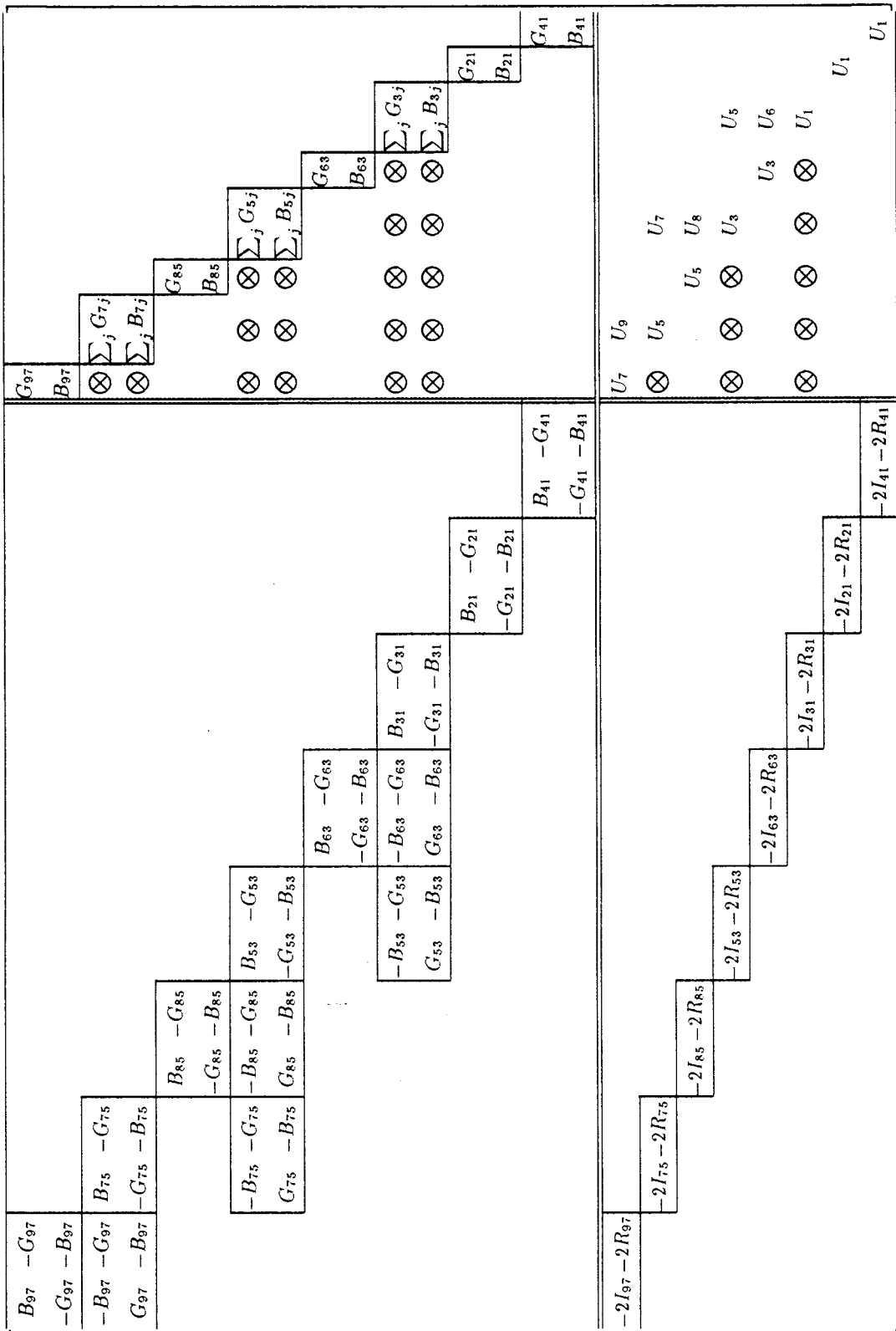


Figura 4.3: Jacobiano de la ecuación (4.18) para la red de la figura 4.2

almacena el padre de cada nudo y la rama que lo une al mismo, también se genera una estructura rígida que almacena los nudos asociados a cada nivel, estructura que se determina al mismo tiempo que se recorre el árbol de la red radial en estudio.

Si se sigue analizando la estructura de las submatrices de la figura 4.3, la matriz diagonal superior de tamaño  $2N \times 2N$  es triangular inferior si se considera formada por términos que son bloques de  $2 \times 2$ , mientras que la matriz diagonal inferior, de tamaño  $N \times N$  es triangular superior. Con el símbolo  $\otimes$  se ha querido indicar los nuevos términos que aparecen cuando se procede a la factorización de la matriz. Los términos adicionales que surgen ocupan posiciones en la matriz coincidentes con los caminos de cada nudo del árbol hasta el nudo de referencia, son los denominados "caminos de factorización" (apéndice A). Obviamente, si el árbol característico de la red es muy extenso en longitud, el llenado de la matriz es acusado, perdiendo la característica de matriz dispersa que posee antes de iniciar su factorización. Esta situación aún empeora más si se ordenan (4.16) y (4.17) intercambiando las ecuaciones lineales con las no lineales en su posición en el jacobiano, es decir, un sistema de la forma

$$J = \begin{bmatrix} F_u & F_x \\ B & A \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

que para la red ejemplo en estudio corresponde a la matriz de la figura 4.4.

Exactamente el mismo índice de llenado aparece cuando para esta misma ordenación se procede a la factorización haciendo nulos los elementos correspondientes a la parte triangular superior del jacobiano, en lugar de anular los que quedan en la parte triangular inferior.

La ordenación finalmente adoptada, que evita la pérdida de dispersión del jacobiano, se obtiene de agrupar las dos ecuaciones lineales asociadas a cada nudo con la ecuación no lineal correspondiente a la rama que une dicho nudo con su padre en el árbol. De esta forma, el sistema a resolver, siguiendo la red ejemplo de 9 nudos, es el que se muestra en la figura 4.5.

De nuevo se han señalado los elementos de llenado si se procediese a la eliminación gaussiana, que son significativamente muchos menos que en cualquiera de las primeras ordenaciones analizadas. Además de preservar el índice de llenado de la matriz hay que destacar que ésta adopta en su conjunto la disposición de una matriz simétrica estructuralmente cuando se considera formada por bloques de  $3 \times 3$ , simetría que se mantiene aún tras la factorización y que preserva por tanto la estructura del árbol. De esta forma, un nudo  $j$  cuyo padre en el árbol es el nudo  $i$  a través de la rama  $ji$ , lleva asociado un bloque

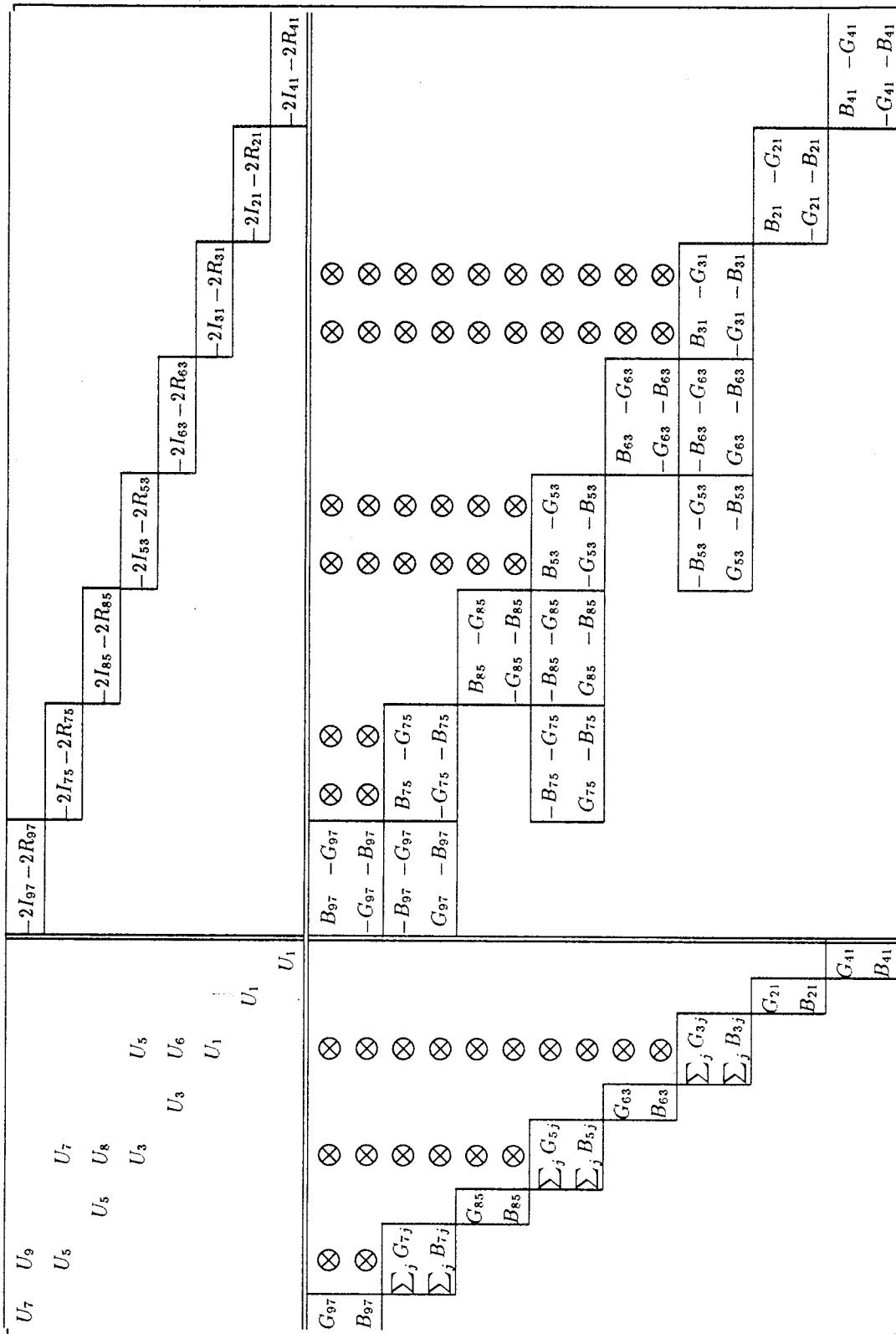


Figura 4.4: Jacobiano de la ecuación (4.19) para la red de la figura 4.2

$\begin{matrix} B_{97} & -G_{97} & G_{97} \\ -G_{97} & -B_{97} & B_{97} \\ -2I_{97} & -2R_{97} & U_7 \end{matrix}$	$U_9$							
$\begin{matrix} -B_{97} & -G_{97} & \otimes \\ G_{97} & -B_{97} & \otimes \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{75} & -G_{75} & \sum_j G_{7j} \\ -G_{75} & -B_{75} & \sum_j B_{7j} \\ -2I_{75} & -2R_{75} & U_5 \end{matrix}$	$U_7$						
	$B_{85} & -G_{85} & G_{85}$	$B_{85} & -G_{85} & G_{85}$						
	$-G_{85} & -B_{85} & B_{85}$	$-G_{85} & -B_{85} & B_{85}$						
	$-2I_{85} & -2R_{85} & U_5$	$-2I_{85} & -2R_{85} & U_5$						
	$-B_{75} & -G_{75} & \otimes$	$B_{53} & -G_{53} & \sum_j G_{5j}$	$U_8$					
	$G_{75} & -B_{75} & \otimes$	$-G_{53} & -B_{53} & \sum_j B_{5j}$	$-G_{53} & -B_{53} & \sum_j B_{5j}$					
		$-2I_{53} & -2R_{53} & U_3$	$-2I_{53} & -2R_{53} & U_3$					
			$B_{63} & -G_{63} & G_{63}$	$B_{63} & -G_{63} & G_{63}$				
			$-G_{63} & -B_{63} & B_{63}$	$-G_{63} & -B_{63} & B_{63}$				
			$-2I_{63} & -2R_{63} & U_3$	$-2I_{63} & -2R_{63} & U_3$				
			$-B_{53} & -G_{53} & \otimes$	$B_{31} & -G_{31} & \sum_j G_{3j}$	$U_6$			
			$G_{53} & -B_{53} & \otimes$	$-G_{31} & -B_{31} & \sum_j B_{31}$	$-G_{31} & -B_{31} & \sum_j B_{31}$			
				$-2I_{31} & -2R_{31} & U_1$	$-2I_{31} & -2R_{31} & U_1$			
					$B_{21} & -G_{21} & G_{21}$	$B_{21} & -G_{21} & G_{21}$		
					$-G_{21} & -B_{21} & B_{21}$	$-G_{21} & -B_{21} & B_{21}$		
					$-2I_{21} & -2R_{21} & U_1$	$-2I_{21} & -2R_{21} & U_1$		
					$B_{41} & -G_{41} & G_{41}$	$B_{41} & -G_{41} & G_{41}$		
					$-G_{41} & -B_{41} & B_{41}$	$-G_{41} & -B_{41} & B_{41}$		
					$-2I_{41} & -2R_{41} & U_1$	$-2I_{41} & -2R_{41} & U_1$		

Figura 4.5: Jacobiano mejorado para la red de la figura 4.2

diagonal de la forma,

$$J_{dia} = \begin{matrix} & (\Delta I_{ji}) & (\Delta R_{ji}) & (\Delta U_j) \\ \begin{matrix} (-\Delta P_j) \\ (-\Delta Q_j) \\ (-\Delta f_{ji}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{ji} & -G_{ji} & \sum_{m \in j} (G_{mj} + G_{mj}^{sh}) \\ -G_{ji} & -B_{ji} & \sum_{m \in j} (B_{mj} - B_{mj}^{sh}) \\ -2I_{ji} & -2R_{ji} & U_i \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.20)$$

mientras que la contribución de esta rama a la parte triangular inferior del jacobiano (la misma columna que el bloque diagonal) es

$$J_{inf} = \begin{matrix} & (\Delta I_{ji}) & (\Delta R_{ji}) \\ \begin{matrix} (-\Delta P_i) \\ (-\Delta Q_i) \end{matrix} & \begin{bmatrix} -B_{ji} & -G_{ji} & 0 \\ G_{ji} & -B_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.21)$$

y a la parte triangular superior (igual fila que el bloque diagonal),

$$J_{sup} = \begin{matrix} & & (\Delta U_i) \\ \begin{matrix} (-\Delta f_{ji}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_j \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.22)$$

### 4.3.3 Optimización del algoritmo: mal condicionamiento

Uno de los factores que provocan mal condicionamiento en el jacobiano del reparto de cargas es la existencia de líneas cortas y largas incidiendo en el mismo nudo. Para mejor ilustrar esta cuestión se acude a un ejemplo de 3 nudos, indicado en la figura 4.6.

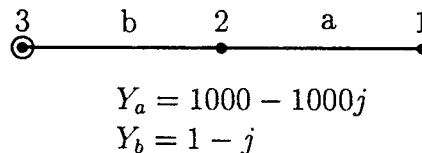


Figura 4.6: Red de 3 nudos mal condicionada



Para este caso el jacobiano en la primera iteración (perfil plano) del reparto de cargas propuesto viene dado por,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1000 & -1000 & 1000 & & & \\ -1000 & -1000 & 1000 & & & \\ & -2 & 1 & & & 1 \\ \hline -1000 & -1000 & & 1 & -1 & 1001 \\ 1000 & -1000 & & -1 & -1 & 1001 \\ & & & & -2 & 1 \end{array} \right]$$

El número de condición de este jacobiano es de  $10^7$ , lo que indica un casi seguro mal funcionamiento del algoritmo propuesto en el caso de utilizar simple precisión.

Este problema se resuelve utilizando aritmética de bloques frente a una escalar. Es decir, teniendo en cuenta la simetría estructural del jacobiano cuando se visualiza en forma de bloques de 3x3 (estructura que coincide con la del árbol), en lugar de utilizar pivotes escalares, se trata de operar con bloques no singulares de 3x3. De esta forma, en el proceso de factorización sólo los bloques diagonales se ven afectados según la ecuación,

$$A'_{jj} = A_{jj} - A_{ji}A_i^{-1}A_{ij} \quad (j > i)$$

Esto permite manejar el número de condición de los bloques diagonales de 3x3 en lugar del convencional número de condición de la matriz en su conjunto. Volviendo al ejemplo de la figura 4.6, con la solución indicada el peor número de condición para este caso pasa a ser de  $10^3$ , el cual es razonable dado el caso extremo de longitudes de línea considerado.

Este tratamiento por bloques implica además que el llenado de la matriz sea distinto al que se producía cuando se procedía a una factorización algebraica del jacobiano, como se ilustró con el ejemplo de la figura 4.2. El jacobiano de esta red, tras la búsqueda de la ordenación óptima para el mismo, correspondía al de la figura 4.5. La matriz definitiva, mostrada en la figura 4.7, si bien posee la misma ordenación que la de la figura 4.5, presenta ahora los elementos de llenado en la parte triangular superior y en la misma cuantía que cuando la manipulación era algebraica. Cabe indicar sin embargo, que se obtendría exactamente los elementos de llenado de la figura 4.5 si en el tratamiento por bloques se sigue una normalización por columnas, y no por filas que es la habitual adoptada. Se concluye, en cualquier caso, que la estructura del árbol queda preservada aún en el tratamiento por bloques, y el índice de llenado se sigue manteniendo al mínimo posible.

$B_{97} - G_{97} G_{97}$	$\otimes$		
$-G_{97} - B_{97} B_{97}$	$\otimes$		
$-2I_{97} - 2R_{97} U_7$	$U_9$		
$-B_{97} - G_{97}$	$B_{75} - G_{75} \sum_j G_{7j}$	$\otimes$	$U_7$
$G_{97} - B_{97}$	$-G_{75} - B_{75} \sum_j B_{7j}$	$\otimes$	$U_7$
	$-2I_{75} - 2R_{75} U_5$		
	$B_{85} - G_{85} G_{85}$	$\otimes$	$U_8$
	$-G_{85} - B_{85} B_{85}$	$\otimes$	$U_8$
	$-2I_{85} - 2R_{85} U_5$		
$-B_{75} - G_{75}$	$-B_{85} - G_{85}$	$B_{53} - G_{53} \sum_j G_{5j}$	$\otimes$
$G_{75} - B_{75}$	$G_{85} - B_{85}$	$-G_{53} - B_{53} \sum_j B_{5j}$	$\otimes$
		$-2I_{53} - 2R_{53} U_3$	$U_5$
		$B_{63} - G_{63} G_{63}$	$\otimes$
		$-G_{63} - B_{63} B_{63}$	$\otimes$
		$-2I_{63} - 2R_{63} U_3$	$U_6$
		$-B_{63} - G_{63}$	$B_{31} - G_{31} \sum_j G_{3j}$
		$G_{63} - B_{63}$	$-G_{31} - B_{31} \sum_j B_{3j}$
			$-2I_{31} - 2R_{31} U_1$
			$U_1$
			$B_{21} - G_{21} G_{21}$
			$-G_{21} - B_{21} B_{21}$
			$-2I_{21} - 2R_{21} U_1$
			$U_1$
			$B_{41} - G_{41} G_{41}$
			$-G_{41} - B_{41} B_{41}$
			$-2I_{41} - 2R_{41} U_1$

Figura 4.7: Jacobiano final para la red de la figura 4.2

Otra cuestión relacionada con la óptima implementación del algoritmo en relación a la eficiencia y robustez del mismo, se refiere a la manipulación simbólica que se puede realizar para el caso radial. Así, para la red ejemplo en estudio, el jacobiano para el perfil plano, y en ausencia de baterías de condensadores, es,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} B_a & -G_a & G_a & & & \\ -G_a & -B_a & B_a & & & \\ & -2 & 1 & & & 1 \\ \hline -B_a & -G_a & & B_b & -G_b & (G_a + G_b) \\ G_a & -B_a & & -G_b & -B_b & (B_a + B_b) \\ & & & & -2 & 1 \end{array} \right]$$

La única eliminación por bloques que habría que hacer en este caso sería,

$$A'_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

Se puede deducir fácilmente, desde el punto de vista simbólico, que

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{\Delta_a} \begin{bmatrix} B_a & -G_a & \\ G_a & B_a & -\Delta_a \\ 2G_a & 2B_a & -\Delta_a \end{bmatrix}$$

donde  $\Delta_a = G_a^2 + B_a^2$ . Debido al elevado índice de dispersión de  $A_{12}$ , sólo se necesita la última columna de  $A_{11}^{-1}$ , obteniéndose,

$$A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & G_a \\ 0 & B_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$A'_{22} = \begin{bmatrix} B_b & -G_b & G_b \\ -G_b & -B_b & B_b \\ & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ve cómo se puede determinar  $A'_{22}$  sin realizar ninguna operación aritmética, y, lo que es más importante, sin acumular errores de redondeo. Cuando  $A'_{22}$  se obtiene numéricamente, se han detectado en ciertos casos de mal condicionamiento que los dos elementos superiores de la última columna de dicha submatriz no corresponden a  $G_b$  y  $B_b$  respectivamente. Esto se debe a que,

dada la precisión finita de los ordenadores, la expresión  $(G_a + G_b) - G_b$  puede diferir de  $G_b$  si  $G_a \gg G_b$ .

En sucesivas iteraciones la manipulación simbólica no es tan directa, puesto que las expresiones del jacobiano se complican, pero la conclusión es la misma: se reduce el esfuerzo computacional y se evitan posibles errores numéricos.

Se concluye que la aritmética de bloques con manipulación simbólica es determinante para el buen comportamiento del algoritmo. Sin embargo, en aquellos casos donde la fiabilidad de la respuesta predomine frente a la rapidez del algoritmo, el paso a doble precisión es obligado. De esta forma, cualquier longitud de línea puede ser manejada sin pérdida de precisión [63].

## 4.4 Aproximaciones al método

Puesto que uno de los objetivos de esta tesis consiste en la búsqueda de una solución lo más rápida posible al problema del reparto de cargas, resulta obligado el buscar aproximaciones al método planteado a la espera de reducir tiempos de cálculo. Estas aproximaciones pueden implicar sin embargo un aumento del número de iteraciones a realizar hasta alcanzar la convergencia.

Bajo condiciones normales de funcionamiento la diferencia de los ángulos de las tensiones complejas entre nudos adyacentes suele ser razonablemente pequeña, usualmente menor de  $10^\circ$ . Tampoco los módulos de las tensiones suelen variar mucho en torno al valor de su tensión inicial, 1 en por unidad. Estas dos consideraciones permiten una primera simplificación del jacobiano  $J$  del sistema de ecuaciones propuesto, consistente en suponer que sus elementos son siempre constantes e iguales a los obtenidos para perfil plano,

$$\left. \begin{aligned} I_{ij} &= V_i V_j \sin \theta_{ij} \simeq 0 \\ R_{ij} &= V_i V_j \cos \theta_{ij} \simeq 1 \\ U_i &= V_i^2 \simeq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

De esta forma sólo sería necesario factorizar  $J$  en la primera iteración, pues en sucesivas iteraciones se supondrían invariantes sus valores y tan sólo se operaría con el vector de términos independientes constituido por las expresiones a la derecha de la igualdad de las ecuaciones (4.16) y (4.17). Esta aproximación reduce significativamente el número de operaciones a realizar en cada iteración y por lo tanto el tiempo invertido en cada una de ellas. En el apartado 4.6 se pondrá de manifiesto el esperado deterioro de la convergencia cuando se procede a esta técnica de solución, e incluso la no convergencia para redes muy mal condicionadas. Esto da lugar a una solución alternativa consistente

en mantener constante el jacobiano no a partir de la primera iteración, sino de la segunda, tras una actualización de las variables del problema y, por tanto, del jacobiano.

## 4.5 Criterio de convergencia

Como se indicó en el apartado 4.3.1 el criterio de convergencia del proceso iterativo consiste en minimizar los residuos de la ecuación no lineal (4.13) para cada rama del sistema, hasta un cierto valor  $\varepsilon$  considerado como el límite de convergencia. Resulta conveniente relacionar los residuos en la función  $f$  con los de las inyecciones de potencia en los nudos, ya que es éste el criterio comúnmente utilizado por las distintas técnicas de solución del reparto de cargas, al tener una interpretación física directa [54].

En la iteración  $\nu$  el residuo en la función  $f$  en cada rama viene dado por,

$$\Delta f_{ij}^{\nu} = (U_i^{\nu-1} + \Delta U_i^{\nu})(U_j^{\nu-1} + \Delta U_j^{\nu}) - (R_{ij}^{\nu-1} + \Delta R_{ij}^{\nu})^2 - (I_{ij}^{\nu-1} + \Delta I_{ij}^{\nu})^2 \quad (4.24)$$

Teniendo en cuenta que,

- Se pueden despreciar los términos de segundo orden,
- En la iteración  $\nu - 1$  ya se ha anulado la función  $f$ , es decir, las variables  $\nu - 1$  satisfacen las ecuaciones de la iteración anterior,
- Los incrementos en la variable  $U$  de una a otra iteración, es decir, los  $\Delta U$ , son aproximadamente del mismo orden para todos los nudos, y,
- Las aproximaciones razonadas en el apartado anterior y resumidas en la expresión (4.23),

resulta,

$$\Delta f_{ij}^{\nu} \simeq 2(\Delta U_i^{\nu} - \Delta R_{ij}^{\nu}) \quad (4.25)$$

Por otro lado, dada la linealidad de las ecuaciones de los flujos en términos de las nuevas variables del reparto de cargas, los residuos de éstos vienen dados directamente por las ecuaciones (4.8) y (4.9) tomando incremento de las variables (se desprecian las admitancias a tierra),

$$\Delta P_{ij}^{\nu} = G_{ij}\Delta U_i^{\nu} - G_{ij}\Delta R_{ij}^{\nu} + B_{ij}\Delta I_{ij}^{\nu} \quad (4.26)$$

$$\Delta Q_{ij}^{\nu} = B_{ij}\Delta U_i^{\nu} - B_{ij}\Delta R_{ij}^{\nu} - G_{ij}\Delta I_{ij}^{\nu} \quad (4.27)$$

Operando convenientemente con las ecuaciones (4.26) y (4.27) y sustituyendo en (4.25) se obtiene la relación buscada entre los residuos de la función  $f$  y los de los flujos por las líneas,

$$\Delta f_{ij}^{\nu} = 2(R_{ij}\Delta P_{ij}^{\nu} + X_{ij}\Delta Q_{ij}^{\nu}) \quad (4.28)$$

Esta ecuación (4.28) permite obtener una relación de desigualdad entre los residuos de la función  $f$  en cada rama y los residuos de los flujos de potencia en las mismas. Así, suponiendo que,

$$|\Delta P_{ij}| \leq \varepsilon_f$$

$$|\Delta Q_{ij}| \leq \varepsilon_f$$

resulta,

$$|\Delta f_{ij}^{\nu}| \leq 2(R_{ij} + X_{ij})\varepsilon_f \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta además que el límite en los residuos de los flujos se relaciona con el límite de los residuos en las inyecciones de potencia, fijado este último en un valor  $\varepsilon_i$ , por la desigualdad,

$$\sum \varepsilon_f \leq \varepsilon_i$$

es posible obtener una relación final entre los residuos de las inyecciones de potencia en los nudos,

$$\sum |\Delta P_{ij}| + \sum |\Delta Q_{ij}| \leq 2\varepsilon_i$$

y los de la función  $f$ , que viene dada por

$$\sum \frac{|\Delta f_{ij}^{\nu}|}{2(R_{ij} + X_{ij})} \leq \varepsilon_i \quad (4.30)$$

Esta conclusión es altamente interesante puesto que da una relación entre los residuos de la función  $f$  con los de variables físicas del problema. Además, esta relación reporta un gran ahorro en operaciones matemáticas cuando se quieren comparar algoritmos con distinto criterio de convergencia como se verá en el siguiente apartado 4.6.

## 4.6 Análisis comparativo

Además del nuevo reparto de cargas presentado en esta tesis y las aproximaciones al mismo, se ha implementado, en FORTRAN, algunas de las soluciones al reparto de cargas analizadas en los capítulos 2 y 3 para la comparación entre ellas. Estos algoritmos son el de Newton-Raphson convencional [57], Luo-Semlyen [38], Baran-Wu [9], Zhang-Cheng [66] y Céspedes [16].

El análisis comparativo se ha realizado aplicando cada una de estas técnicas de solución a distintas redes radiales obtenidas de la literatura y cuyas características más relevantes se incluyen en el apéndice D. Los tamaños de estos sistemas son de 30 nudos [16], 43 nudos [62], 69 nudos [8], 85 nudos [22], 90 nudos [31] y 690 nudos. Todas las cargas en los nudos son de potencia constante y no existe ningún nudo PV. En general, se trata de redes mal condicionadas con ratios  $R/X$  elevados y ramas largas y cortas incidiendo en un mismo nudo en la red, lo que permite estudiar el comportamiento de los distintos repartos de carga ante este tipo de situación comúnmente presente en sistemas de distribución radiales, según ya se puso de manifiesto en el capítulo 2.

Para que la comparación sea correcta es necesario utilizar el mismo criterio de convergencia en todos los algoritmos. El más realista es el de los residuos de las inyecciones de potencia en los nudos, que es el utilizado por Newton-Raphson, Luo-Semlyen y Zhang-Cheng. Baran-Wu examina los residuos de las inyecciones en los nudos terminales de la red, mientras que Céspedes compara las pérdidas totales entre dos iteraciones sucesivas. Estos últimos son pues modificados para adaptarse a este nuevo criterio, lo cual conlleva la necesidad de cálculos adicionales si se tienen en cuenta las características propias de cada algoritmo. Así, Baran y Wu, estiman en cada iteración los flujos de potencia por las líneas y las tensiones al cuadrado, apartado 3.2.1.1, mientras que R. Céspedes prescinde de los ángulos y resuelve el reparto de cargas para el módulo de las tensiones exclusivamente, apartado 3.2.1.6. En cuanto a la solución propuesta en esta tesis, en el apartado 4.5 se ha deducido una relación directa entre el criterio propio de este algoritmo y el de los residuos en las inyecciones de potencia en los nudos. Esto elimina la necesidad de obtener las tensiones complejas en los nudos y con ello las inyecciones de potencia en los mismos, operaciones que no sólo aumentan el costo computacional del algoritmo sino que además introducen errores numéricos, ineludiblemente presentes al intentar obtener los ángulos de las tensiones que implican relaciones trigonométricas. Para mejor ilustrar estos errores se ha escogido una de las ramas de la red radial de 69 nudos [8] tras la convergencia del reparto de cargas, y se han obtenido

los flujos de potencia activa por la línea cuando se obtiene el ángulo en los nudos a partir de la ecuación (4.6) y cuando se hace a partir de la ecuación (4.7). La línea analizada posee una impedancia de valor,

$$Z = .7488 + .2475j$$

El ángulo obtenido a partir de la ecuación (4.6) es de  $3.7E-04rad$ , mientras que con la ecuación (4.7) es de  $5.4E-05rad$ . Si se calculan los flujos de potencia activa por la línea a partir de la ecuación (4.1) con uno y otro ángulo se obtienen valores tan dispares como  $96KW$  y  $280KW$  respectivamente. Se pone pues de manifiesto que los residuos en las inyecciones de potencia que se obtuviesen en cualquier caso no serían fiables.

Las tablas 4.1 a 4.5 presentan el número de iteraciones invertido por cada algoritmo para las redes de 90, 85, 69, 43 y 30 nudos anteriormente mencionadas, y para distintos límites de convergencia. En todos los casos se utiliza simple precisión. Los métodos denominados "Constante-1I" y "Constante-2I" corresponden a las aproximaciones posibles del algoritmo presentado en el apartado 4.4, cuando el jacobiano se mantiene constante tras la primera y segunda iteración respectivamente. Si un algoritmo supera un máximo de iteraciones, establecido en 50 en estas pruebas, se indica en las tablas con la letra "M".

Método	Límite de Convergencia		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Propuesto	2	12	M
Constante-1I	2	4	M
Constante-2I	2	3	M
NR Convencional	30	M	M
Baran & Wu	3	M	M
Céspedes	M	M	M
Luo & Semlyen	M	M	M
Zhang & Cheng	3	M	M

Tabla 4.1: Rango de convergencia para la red de 90 nudos.

En general se observa un comportamiento bastante bueno para el reparto de cargas presentado en esta tesis. En la mayoría de los casos iguala o supera a los distintos algoritmos estudiados.

Es de destacar el excelente comportamiento mostrado para la red de 43 nudos, tabla 4.4, donde divergen los métodos de análisis propuestos por Baran



Método	Límite de Convergencia		
	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
Propuesto	2	3	M
Constante-1I	4	5	M
Constante-2I	2	3	M
NR Convencional	3	7	M
Baran & Wu	2	3	M
Céspedes	2	3	M
Luo & Semlyen	2	3	M
Zhang & Cheng	3	5	M

Tabla 4.2: Rango de convergencia para la red de 85 nudos.

Método	Límite de Convergencia	
	$10^{-2}$	$10^{-3}$
Propuesto	3	M
Constante-1I	8	M
Constante-2I	3	M
NR Convencional	M	M
Baran & Wu	3	M
Céspedes	M	M
Luo & Semlyen	M	M
Zhang & Cheng	M	M

Tabla 4.3: Rango de convergencia para la red de 69 nudos.

Método	Límite de Convergencia		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Propuesto	6	6	M
Constante-1I	Diverge		
Constante-2I	28	48	M
NR Convencional	6	9	M
Baran & Wu	Diverge		
Céspedes <sup>1</sup>	22	33	M
Luo & Semlyen <sup>1</sup>	22	34	M
Zhang & Cheng	Diverge		

<sup>1</sup> Diverge para perfil plano

Tabla 4.4: Rango de convergencia para la red de 43 nudos.

Método	Límite de Convergencia		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Propuesto	3	3	M
Constante-1I	4	6	M
Constante-2I	3	3	M
NR Convencional	3	49	M
Baran & Wu	2	3	M
Céspedes	2	M	M
Luo & Semlyen	3	M	M
Zhang & Cheng	4	6	M

Tabla 4.5: Rango de convergencia para la red de 30 nudos.

& Wu y Zhang & Cheng. Además, Luo & Semlyen y R. Céspedes invierten un número de iteraciones muy elevado en comparación a lo que ocurre en otras redes donde convergen con bastante rapidez, superando en alguna ocasión, y para ciertos residuos, al algoritmo propuesto (véase tabla 4.5). Hay que resaltar a su vez que estos dos últimos algoritmos divergen para esta red de 43 nudos cuando se parte de un perfil plano.

También hay que mencionar la red de 69 nudos, donde tan solo el nuevo algoritmo y Baran-Wu convergen para un residuo de  $10^{-2}$ .

En cuanto a las aproximaciones al algoritmo inicial propuesto, los denominados métodos "Constante-1P" y "Constante-2P", como era de esperar invierten mayor número de iteraciones (o incluso divergen, ver tabla 4.4), salvo para el caso de la red de 90 nudos, tabla 4.1. La justificación a este hecho se encuentra en el mal condicionamiento del problema, debido a la existencia de ramas muy cortas y largas incidiendo en el mismo nudo. El mantener constante el jacobiano tras la primera o segunda iteración evita estas oscilaciones y favorece la convergencia del algoritmo. Este mal condicionamiento del problema se refleja también para el método de Newton-Raphson, al observar las 30 iteraciones que invierte hasta alcanzar la solución buscada.

A la vista de los resultados, puede concluirse el comportamiento bastante robusto que el nuevo reparto de cargas presenta para todas las redes analizadas, convergiendo incluso para residuos que otros algoritmos no son capaces de alcanzar, al menos sin superar el máximo de iteraciones impuesto (véase tabla 4.1, página 63). Es bastante ilustrativo visualizar gráficamente la evolución del máximo residuo en cada iteración para algoritmos tan robustos como el de Newton-Raphson. Así en las figuras 4.8 y 4.12 (páginas 67 y 71) se detecta claramente el carácter oscilatorio para las redes de 90 y 30 nudos antes analizadas. Para las redes de 85 y 43 la convergencia es más directa, como se observa en las figuras 4.9 y 4.11, páginas 68 y 70, respectivamente. Por último, las oscilaciones para el sistema de 69 nudos son notables e incluso, a la vista de la evolución en las últimas iteraciones, figura 4.10 (página 69), es casi segura la divergencia.

En redes donde existen líneas de longitud muy corta, es necesario recurrir a la implementación en doble precisión, [63]. Es el caso de algunas de las redes anteriores. Así, por ejemplo, la impedancia más pequeña para la red de 69 nudos es de  $(0.0005 + .0012j)\Omega$ , lo cual supone una admitancia en por unidad de valor  $(474188.2 - 1138052j)$ . Estos valores tan extremos requieren el paso a doble precisión donde sea posible operar con ellos. Las tablas 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 (páginas 72- 74) presentan el número de iteraciones invertido por cada algoritmo para distintos residuos y sobre las redes anteriormente

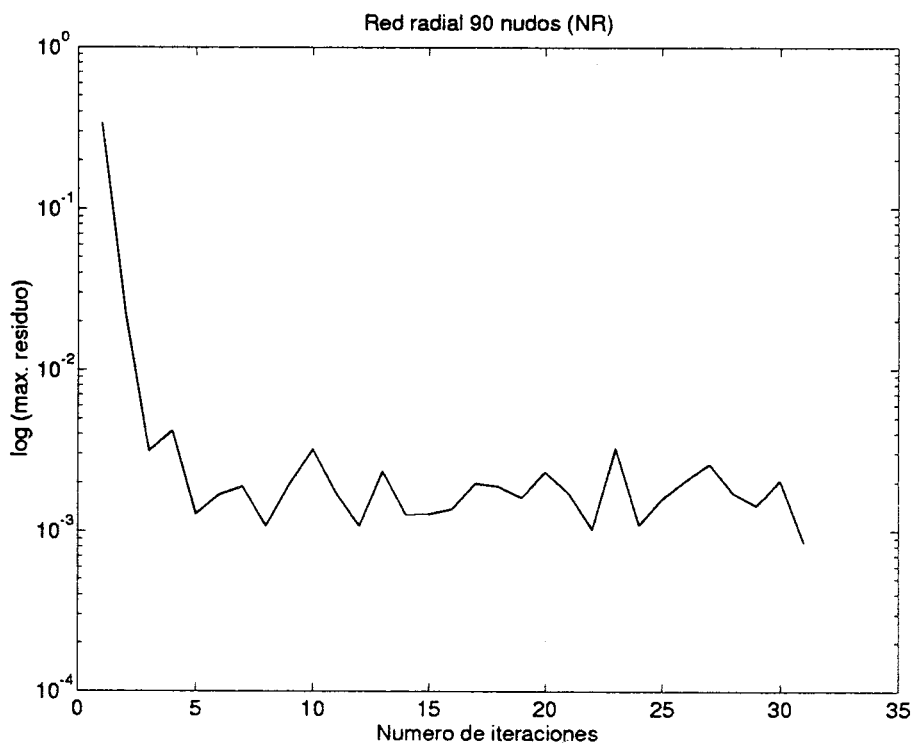


Figura 4.8: Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 90 nudos)

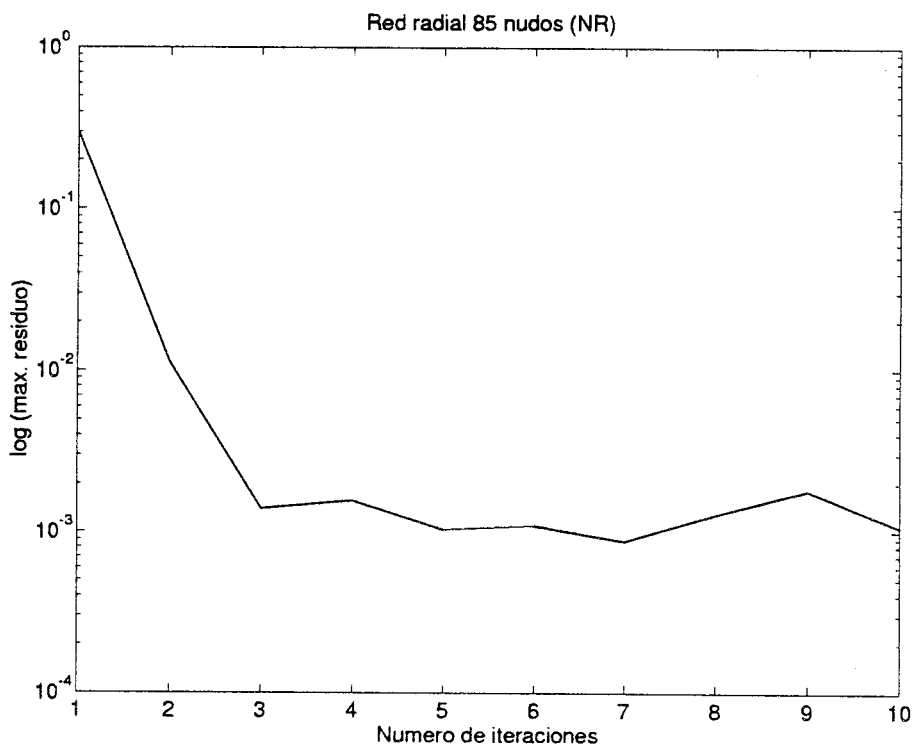


Figura 4.9: Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 85 nudos)

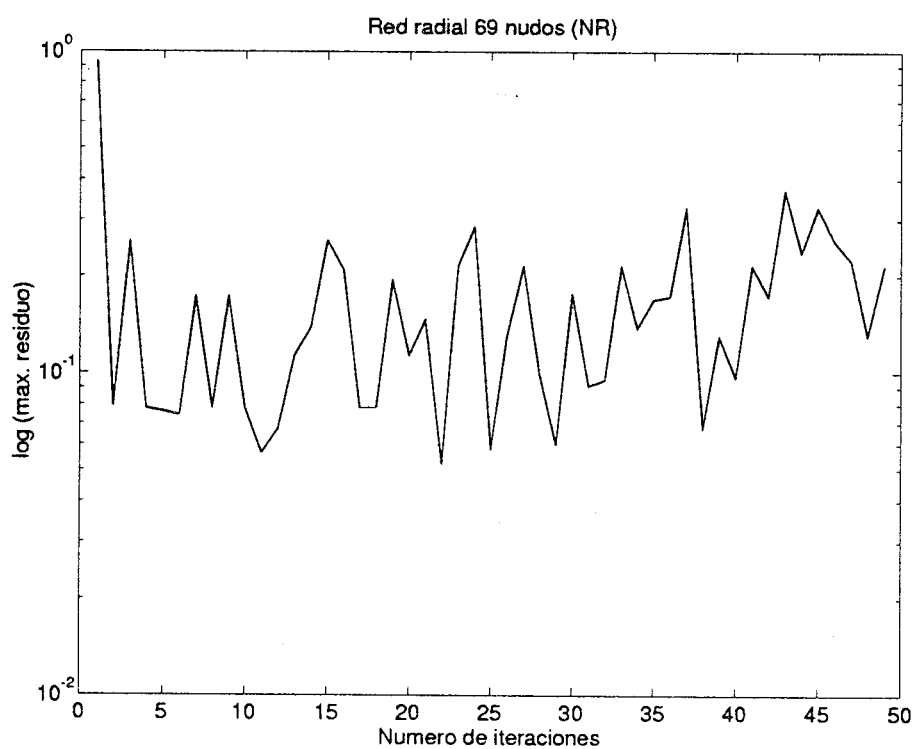


Figura 4.10: Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 69 nudos)

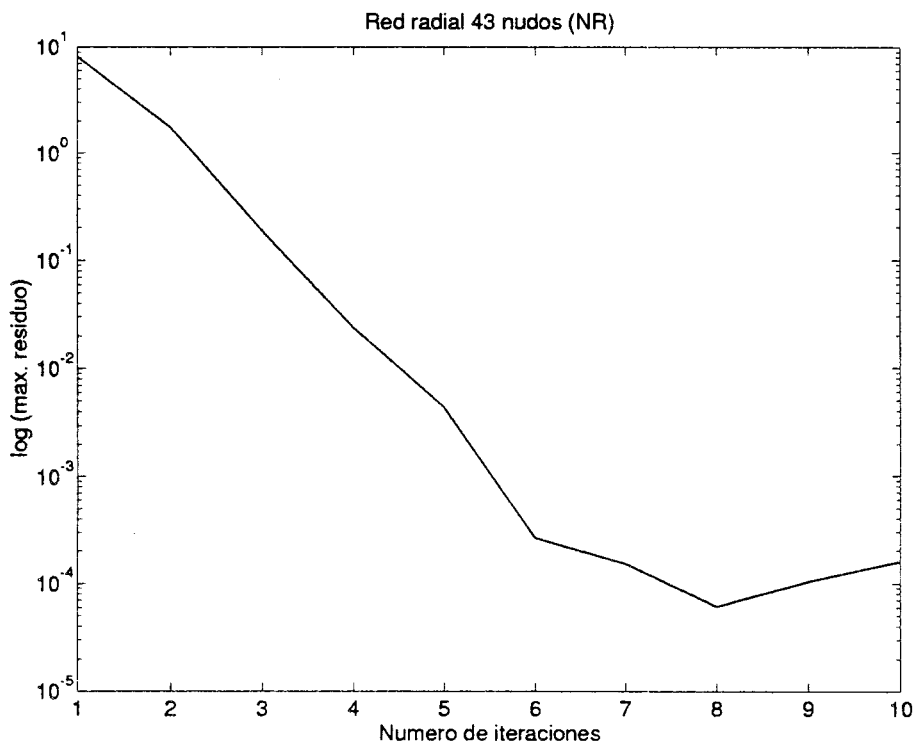


Figura 4.11: Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 43 nudos)

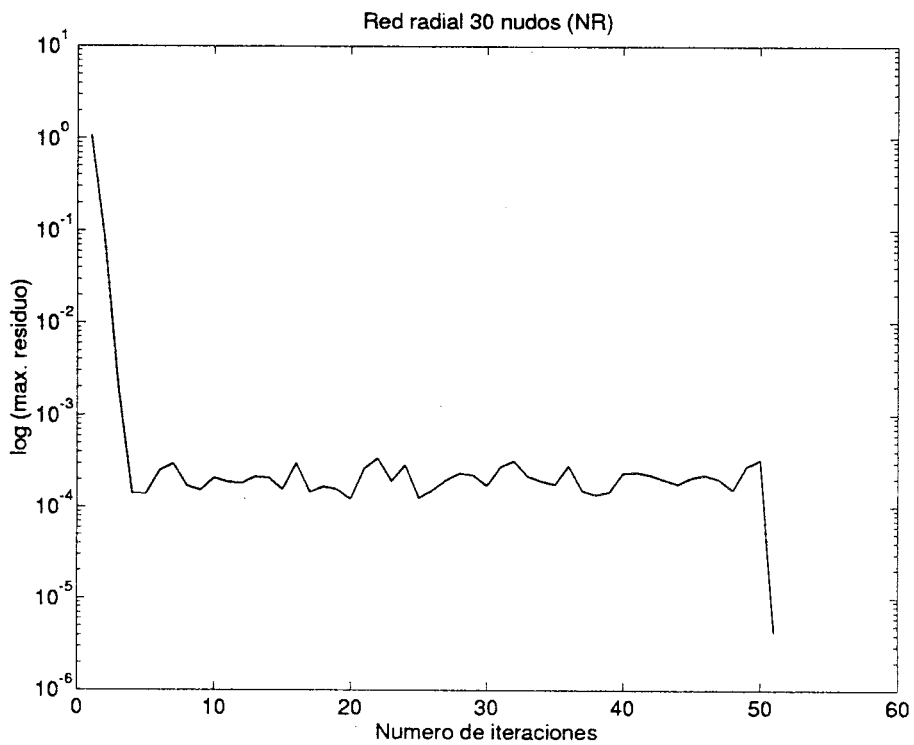


Figura 4.12: Máximo residuo en cada iteración de Newton-Raphson (Red de 29 nudos)



analizadas junto a una red real de 690 nudos que en simple precisión no es resuelta por ningún algoritmo, de nuevo por causa de la pequeña impedancia de algunas de sus ramas.

Método	Límite de Convergencia				
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
Propuesto	3	3	3	3	4
Constante-1I	5	6	7	9	10
Constante-2I	3	4	4	5	5
NR Convencional	3	3	3	4	4
Baran & Wu	4	5	6	7	8
Céspedes	2	3	3	4	4
Luo & Semlyen	2	3	3	4	4
Zhang & Cheng	5	6	8	9	10

Tabla 4.6: Rango de convergencia para la red de 690 nudos (Doble precisión).

Método	Límite de Convergencia			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Propuesto	2	2	2	3
Constante-1I	2	3	4	4
Constante-2I	2	2	2	3
NR Convencional	2	2	3	3
Baran & Wu	3	3	4	5
Céspedes	1	2	2	2
Luo & Semlyen	1	2	2	2
Zhang & Cheng	2	3	4	4

Tabla 4.7: Rango de convergencia para la red de 90 nudos (Doble precisión).

Como era de esperar, si se comparan los resultados obtenidos en simple y doble precisión para cada red, todos los algoritmos consiguen alcanzar en doble precisión niveles de residuos bastantes menores que los obtenidos en simple precisión. Son, por ejemplo, notables las mejoras conseguidas por los distintos algoritmos para la red de 90 nudos, tablas 4.1 (página 63) y 4.7, y la de 69 nudos, tablas 4.2 (página 64) y 4.8, donde soluciones como las de Luo-Semlyen, R.Céspedes o Zhang-Cheng que no convergían para el mayor de

Método	Límite de Convergencia			
	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Propuesto	2	3	3	3
Constante-1I	4	5	7	8
Constante-2I	2	3	4	4
NR Convencional	3	3	3	3
Baran & Wu	2	3	4	5
Céspedes	2	3	3	4
Luo & Semlyen	2	3	3	4
Zhang & Cheng	3	4	6	7

Tabla 4.8: Rango de convergencia para la red de 85 nudos (Doble precisión).

Método	Límite de Convergencia			
	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Propuesto	2	3	3	3
Constante-1I	3	5	6	7
Constante-2I	2	3	3	4
NR Convencional	2	3	3	3
Baran & Wu	2	2	3	3
Céspedes	2	2	3	4
Luo & Semlyen	2	2	3	4
Zhang & Cheng	4	5	7	8

Tabla 4.9: Rango de convergencia para la red de 69 nudos (Doble precisión).

Método	Límite de Convergencia			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Propuesto	6	6	7	7
Constante-1I	Diverge			
Constante-2I	28	44	M	M
NR Convencional	6	6	7	7
Baran & Wu	Diverge			
Céspedes <sup>1</sup>	22	33	44	M
Luo & Semlyen <sup>1</sup>	22	34	46	M
Zhang & Cheng	Diverge			

<sup>1</sup> Diverge para perfil plano

Tabla 4.10: Rango de convergencia para la red de 43 nudos (Doble precisión).

Método	Límite de Convergencia			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Propuesto	3	3	3	3
Constante-1I	4	6	7	9
Constante-2I	3	3	4	5
NR Convencional	3	3	3	3
Baran & Wu	2	3	4	5
Céspedes	2	2	3	3
Luo & Semlyen	3	4	4	5
Zhang & Cheng	4	6	8	10

Tabla 4.11: Rango de convergencia para la red de 30 nudos (Doble precisión).

los residuos supuestos en cada caso, pasan a hacerlo e incluso con un número de iteraciones bajo para alguna de la redes.

También resulta interesante en doble precisión los resultados obtenidos para la red de 43 nudos, donde los algoritmos que divergían en simple precisión lo siguen haciendo ahora, y los que convergían se mantienen con el mismo número de iteraciones, salvo Newton Raphson que para el residuo de  $10^{-4}$  baja de 9 a 6 iteraciones. Igualmente, Newton Raphson disminuye drásticamente el número de iteraciones para la red de 30 nudos, pasando de 49 a 3 cuando el límite de convergencia es de  $10^{-4}$ , o para la red de 90 nudos, donde pasa de 30 a 2 iteraciones. Estos cambios tan significativos ponen de manifiesto el mal condicionamiento del problema, debido en estos dos últimos casos a la existencia de ramas largas y cortas incidiendo en el mismo nudo. Esto se refleja también en la situación que se producía para la red de 90 nudos en relación al algoritmo propuesto y su aproximaciones. Ahora en doble precisión el reparto de cargas sin aproximaciones en el jacobiano supera siempre a cualquiera de los métodos que mantienen constante el jacobiano, gracias a que en doble precisión se evitan las oscilaciones en el sistema a resolver.

Por último, en la tabla 4.12 se ilustran los tiempos de cálculo por iteración invertidos por cada algoritmo de reparto de cargas. Se observa cómo Newton Raphson invierte los mayores tiempos dado que no aprovecha la topología radial, si bien funcionaría para redes malladas. El método propuesto en esta tesis invierte tiempos de cálculo muy similares o ligeramente superiores al más rápido en cada caso. Estos tiempos combinados con el número de iteraciones que realiza cada algoritmo hasta alcanzar la convergencia, hace que el nuevo reparto de cargas supere al resto para las redes de 90, 69 y 43 nudos, quedando muy próximo del mejor en el resto de las redes analizadas.

## 4.7 Resumen del capítulo

En este capítulo se ha presentado un método **robusto y eficiente** para la resolución **rápida** del problema del reparto de cargas en redes de distribución radiales, con todas las cargas independientes de la tensión del nudo al que se encuentran conectadas.

Tras la formulación del problema, apartado 4.2, se ha pasado a discutir el método **óptimo** de resolución del mismo, apartado 4.3, con la idea de solucionar los problemas de mal condicionamiento asociado habitualmente a los sistemas de distribución, y de minimizar tiempos de cálculo.

En el apartado 4.4 se han justificado posibles aproximaciones al algoritmo

Método	Red (nudos)				
	90	85	69	43	30
Propuesto	1.25	1.6	1.38	0.75	0.5
Constante-1I	0.3	0.67	0.45	0.34	0.28
Constante-2I	1.07	1.32	1.11	0.19	.45
NR Convencional	4.182	4.75	3.02	2.36	1.96
Baran & Wu	2.08	1.97	1.62	.71	.91
Céspedes	1.57	1.58	1.19	.71	.56
Luo & Semlyen	1.13	.97	.52	.28	.40
Zhang & Cheng	.918	.78	.57	.38	.27

Tabla 4.12: Tiempos de cálculo por iteración en un Pentium 166-Mhz (milisegundos).

propuesto.

La relación de algunas de las funciones que surgen en la nueva formulación del reparto de cargas, con variables físicas del problema, son estudiadas en el apartado 4.5.

Finalmente, en el apartado 4.6, se compara el algoritmo propuesto en este capítulo con algunos de los repartos de cargas presentados en los capítulos 2 y 3. Los resultados obtenidos de este análisis permiten concluir que,

- El algoritmo propuesto, a pesar de que aumenta el tamaño del sistema a resolver (para una red de  $N$  nudos resulta un jacobiano de  $3N \times 3N$ ), no es tan costoso como pudiera parecer a priori debido al hecho de que ningún residuo de potencia ha de ser calculado tras la primera iteración.
- La solución del problema del reparto de cargas adoptada presenta un comportamiento bastante robusto ante redes mal condicionadas.

# Capítulo 5

## Extensión del método a otros casos prácticos

### 5.1 Introducción

Es de enorme interés práctico la extensión del algoritmo propuesto en el capítulo 4 a otros casos de utilidad que no se limiten a redes puramente radiales y con cargas independientes de la tensión. Así, resulta aconsejable el abordar redes de distribución malladas, la posible existencia de nudos PV, y la presencia de cargas dependientes de la tensión.

Aunque la mayoría de los sistemas de distribución poseen una configuración mallada, la explotación de la misma es de forma radial. Sin embargo ciertas niveles de tensión pueden presentar algunos bucles, e incluso existen estudios de la red de distribución, como el de la reconfiguración de la misma para minimización de pérdidas, que analizan posibles bucles en su técnica de estudio para los que se ha de resolver el reparto de cargas en los mismos [13, 14, 56].

La presencia de más de un nudo PV también puede tener lugar en ciertos niveles de tensión debido a los clientes autoprodutores de energía eléctrica, y conviene incluir esta posibilidad como ya se ha hecho en otros repartos de cargas específicos para distribución, [38, 42, 50].

Por último, la presencia de cargas dependientes de la tensión, inhabitual en redes de transporte debido al apantallamiento que los transformadores con tomas producen sobre las lentas variaciones de la carga con la tensión, sí es frecuente en redes de distribución, [3, 4]. Numerosos equipos eléctricos varían su consumo de potencia con la tensión de alimentación al mismo. Habitualmente las cargas se agrupan en tres categorías dependiendo de cómo varíe su demanda en función de la tensión: cargas de potencia constante (no dependen de la

tensión), cargas de intensidad constante (dependen del módulo de la tensión), y cargas de impedancia constante (dependen del cuadrado de la tensión). En un punto determinado de la red la carga puede ser una combinación de las tres.

Son tratadas como cargas de potencia constante los motores de inducción, alimentaciones de potencia controladas, así como las cargas aguas abajo de un transformador con tomas. Las lámparas incandescentes, hornos, etc., constituyen las denominadas cargas de impedancia constante. Son estos los dos grupos de cargas más frecuentes en la práctica. Las cargas de intensidad constante son muy poco habituales, si bien el arranque de motores es conveniente representarlo como tal, al ser este modelo el más idóneo para estudiar posibles caídas de tensión y el fenómeno conocido como “flicker” en las proximidades de este tipo de cargas, [36].

## 5.2 Nudos PV

El tratamiento de los nudos PV es fácil dado que el módulo de las tensiones en los nudos forma parte del conjunto de variables del modelo del reparto de cargas adoptado en esta tesis. Puesto que la tensión del nudo PV  $j$  viene especificada, la variable  $U_j = V_j^2$  asociada al mismo desaparece como tal al quedar determinada, del mismo modo que lo hace la ecuación del balance de potencia reactiva en dicho nudo. El problema queda pues reducido dimensionalmente. Los elementos del jacobiano asociados a los nudos PV pasan a ser de  $2 \times 2$  y no de  $3 \times 3$  como ocurre para los nudos PQ.

La rutina informática asociada al tratamiento de bloques distingue entre bloques de  $2 \times 2$  ó  $3 \times 3$  según corresponda a nudos PV y PQ respectivamente.

La presencia de nudos PV en redes de distribución es inhabitual. En el apartado 5.5 se presentarán los resultados obtenidos cuando en alguna red de distribución se fuerza el carácter PV de algunos de los nudos del sistema. Las redes de distribución mal condicionadas, aún empeoran más dicho condicionamiento cuando se le añaden nudos PV, como se podrá comprobar al final de este capítulo. Este problema, sin embargo, no se ha observado en redes de transporte. Dicho comportamiento no sólo se produce para el algoritmo propuesto sino también para el ya establecido algoritmo de Newton-Raphson.

### 5.3 Cargas dependientes de la tensión

Es bastante importante saber modelar adecuadamente la dependencia de las cargas con la tensión, pues la mayor o menor precisión en este modelo va a influir en el resultado final del reparto de cargas.

Las cargas de impedancia constante,

$$\left. \begin{aligned} P_i &= -G_{zi}V_i^2 = -G_{zi}U_i \\ Q_i &= B_{zi}V_i^2 = B_{zi}U_i \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

reciben exactamente el mismo tratamiento que las admitancias a tierra del modelo en pi de las líneas, y, por lo tanto, dan lugar a términos equivalentes en el jacobiano del sistema. Esto es, el bloque diagonal de 3x3 asociado al nudo  $i$  (padre nudo  $j$ ) queda de la forma,

$$J_{dia} = \begin{matrix} (-\Delta P_i) \\ (-\Delta Q_i) \\ (-\Delta f_{ij}) \end{matrix} \begin{bmatrix} (\Delta I_{ij}) & (\Delta R_{ij}) & (\Delta U_i) \\ B_{ij} & -G_{ij} & \sum_{m \in i} (G_{mi} + G_{mi}^{sh}) + G_{zi} \\ -G_{ij} & -B_{ij} & \sum_{m \in i} (B_{mi} - B_{mi}^{sh}) - B_{zi} \\ -2I_{ij} & -2R_{ij} & U_j \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

sin que ningún otro elemento del jacobiano se vea afectado por este tipo de cargas.

Es obvio que las cargas de impedancia constante no alteran en nada la linealidad de las ecuaciones del balance de potencias en los nudos, y, por lo tanto, se sigue cumpliendo que los residuos de dichas potencias se anulan tras la primera iteración, sin que sea necesario su cálculo.

Las cargas de intensidad constante, y en general las cargas dependientes de la tensión a través de una constante  $k$  entre 0 y 2, dan lugar a unas inyecciones de potencia en los nudos de la forma,

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P_i^o V_i^k = P_i^o U_i^{\frac{k}{2}} \\ Q_i &= Q_i^o V_i^k = Q_i^o U_i^{\frac{k}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

donde  $P_i^o$  y  $Q_i^o$  son las potencias activas y reactivas respectivamente para tensión uno en por unidad.

En la iteración  $\nu$  la ecuación del balance de potencia activa del nudo  $i$  (para la potencia reactiva el análisis sería equivalente) resulta,



$$\Delta P_i^\nu = P_i^\nu - (P_i^{esp} + P_i^o(U_i^\nu)^{\frac{k}{2}}) = P_i^{lin}(X^\nu) - P_i^{esp} - P_i^o(U_i^\nu)^{\frac{k}{2}} \quad (5.4)$$

siendo  $X = [I \ R \ U]^t$  el vector de estado, y  $P_i^{lin}(X)$  los flujos por las líneas que parten del nudo  $i$  hacia los nudos que inciden en él. Hay que recordar que este último término,  $P_i^{lin}(X)$ , es lineal con  $X$  (ver ecuación (4.1)).

Si se linealiza (5.4) resulta,

$$P_i^{lin}(\Delta X^\nu) - P_i^o \frac{K}{2} (U_i^\nu)^{(\frac{K}{2}-1)} \Delta U_i^\nu = -\Delta P_i^\nu \quad (5.5)$$

Resulta obvio a la vista de (5.5) que este tipo de cargas introducen un término nuevo en  $\Delta U_i$  que ha de ser incluido en la tercera columna del correspondiente bloque diagonal  $J_{dia}$  asociado al nudo  $i$ , ecuación (4.20) (página 55).

Además, a diferencia de lo que venía ocurriendo con las cargas de potencia o impedancia constante, los residuos de potencia en los nudos dejan de ser cero tras la primera iteración al perderse la linealidad de las ecuaciones de los flujos de potencia (ecuación (5.4)). No obstante, el coste asociado al cómputo de estos residuos se reduce significativamente si se tiene en cuenta el siguiente análisis. Así, en la iteración  $\nu + 1$  habría que calcular el residuo del flujo de potencia activa tal como,

$$\Delta P_i^{\nu+1} = P_i^{lin}(X^\nu) + P_i^{lin}(\Delta X^\nu) - (P_i^{sp} + P_i^o(U_i^{\nu+1})^{\frac{k}{2}}) \quad (5.6)$$

Si se tienen en cuenta las ecuaciones (5.4) y (5.5) resulta,

$$\Delta P_i^{\nu+1} = P_i^o \left\{ (U_i^\nu)^{\frac{k}{2}} \left( 1 + \frac{k}{2} \frac{\Delta U_i^\nu}{U_i^\nu} \right) - (U_i^{\nu+1})^{\frac{k}{2}} \right\} \quad (5.7)$$

Esta forma de obtener los residuos de potencia resulta más rentable, desde el punto de vista de la precisión y ahorro computacional, que el utilizar la ecuación (5.6). Ello se debe a que al menor número de operaciones matemáticas hay que sumarle el hecho de que en redes con impedancias muy pequeñas, en las ecuaciones de los flujos aparecen productos como  $G_{ij}(R_{ij} - U_i)$  donde se multiplican números de muy distinto orden de magnitud; éstos provocan errores numéricos que implican una pérdida de precisión en el algoritmo, la cual puede resultar considerable. Esto no ocurre si se utiliza (5.7), ecuación que sólo requiere guardar los valores de la variable  $U_i$  de una iteración anterior a la actual.

Como era de esperar, la ecuación (5.7) se anula para cargas de potencia constante ( $k = 0$ ) y de impedancia constante ( $k = 2$ ).

## 5.4 Redes débilmente malladas

La presencia de un eslabón entre un par de nudos  $m$  y  $n$  de un árbol da lugar a un bucle que introduce en el reparto de cargas propuesto dos nuevas incógnitas,  $I_{mn}$  y  $R_{mn}$ . Las dos nuevas ecuaciones a añadir que definen el problema proceden de la segunda ley de Kirchhoff aplicada a dicho bucle. En lugar de utilizar la formulación algebraica convencional para esta ley, se adopta la siguiente expresión geométrica,

$$\frac{U_m}{U_{m+1}} \frac{U_{m+1}}{U_{m+2}} \cdots \frac{U_n}{U_m} = 1 \quad (5.8)$$

equivalente a,

$$\Delta \mathcal{L}_{mn} = U_m U_n^* - \prod_{ij \in \text{bucle}_{mn}, ij \neq mn} \frac{U_i U_j^*}{V_j^2} = 0 \quad (5.9)$$

Esta ecuación, en término de las variables del problema resulta,

$$\Delta \mathcal{L}_{mn} = (R_{mn} + jI_{mn}) - \prod_{ij \in \text{bucle}_{mn}, ij \neq mn} \frac{R_{ij} + jI_{ij}}{U_j} = 0 \quad (5.10)$$

De la ecuación compleja (5.10) se obtienen dos ecuaciones algebraicas. La primera, teniendo en cuenta la restricción (4.13) aplicada a todas las ramas del árbol, da esa misma restricción para el eslabón,

$$U_m U_n = R_{mn}^2 + I_{mn}^2$$

mientras que la segunda corresponde a una relación obvia entre los ángulos de las tensiones de los nudos del bucle.

Si se denota abreviadamente el problema radial, correspondiente al sistema de ecuaciones (4.16) y (4.17) con la ordenación justificada en el apartado 4.3.2, como

$$J \Delta X = \Delta F \quad (5.11)$$

entonces el caso mallado puede escribirse como el sistema aumentado,

$$\left[ \begin{array}{c|c} J & J_u \\ \hline J_b & D \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta X \\ \Delta X_b \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \Delta F \\ \Delta L \end{array} \right] \quad (5.12)$$

donde  $\Delta X_b$  constituye el vector de estado asociado a cada eslabón, y  $\Delta L$  incluye, para cada bucle, la parte real e imaginaria de  $-\Delta \mathcal{L}_{mn}$ , tal como se definió a través de la ecuación (5.10).

La matriz  $J_u$  es de tamaño  $3N \times 2(b - N)$  para un sistema de  $N + 1$  nudos y  $b$  arcos. La mayoría de sus elementos son nulos salvo la de los nudos extremos de los eslabones, siendo sus valores constantes e iguales a las conductancias y susceptancias de los eslabones en cuestión.

La matriz  $D$  es una matriz constituida por bloques diagonales constantes de  $2 \times 2$  no singulares.

Los elementos de  $J_b = \frac{\partial \Delta \mathcal{L}}{\partial X}$ , matriz de  $2(b - N) \times 3N$ , son aparentemente los mas complicados de obtener a la vista de la ecuación (5.10). Su determinación sin embargo, en aras de conseguir el menor coste computacional posible, atiende a las siguientes expresiones,

$$\frac{\partial(\Delta \mathcal{L}_{mn})}{\partial U_i} = \frac{-\Delta \mathcal{L}_{mn} + (R_{mn} + I_{mn}j)}{U_i} \quad \text{nudo } i \in \text{bucle} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial(\Delta \mathcal{L}_{mn})}{\partial R_{ij}} = \frac{\Delta \mathcal{L}_{mn} - (R_{mn} + I_{mn}j)}{R_{ij} + jI_{ij}} \quad \text{rama } ij \in \text{bucle} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial(\Delta \mathcal{L}_{mn})}{\partial I_{ij}} = \frac{j(\Delta \mathcal{L}_{mn} - (R_{mn} + I_{mn}j))}{R_{ij} + jI_{ij}} \quad \text{rama } ij \in \text{bucle} \quad (5.15)$$

La figura 5.1 corresponde a una red ejemplo de 5 nudos para la cual se obtiene el jacobiano de la figura 5.2 (todos los arcos se orientan aguas arriba) tras adoptar la siguiente notación,

$$a + jb = \frac{\Delta \mathcal{L}_{13} - (R_{13} + jI_{13})}{R_{12} + jI_{12}}$$

$$c + jd = \frac{\Delta \mathcal{L}_{13} - (R_{13} + jI_{13})}{R_{24} + jI_{24}}$$

$$c' + jd' = \frac{-\Delta \mathcal{L}_{13} + (R_{13} + jI_{13})}{U_2}$$

$$e + jf = \frac{\Delta \mathcal{L}_{13} - (R_{13} + jI_{13})}{R_{34} - jI_{34}}$$

$$g + jh = \frac{-\Delta \mathcal{L}_{13} + (R_{13} + jI_{13})}{U_4}$$

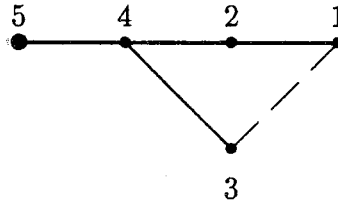


Figura 5.1: Red ejemplo de 5 nudos y un bucle

$\begin{matrix} B_{12} & -G_{12} & \sum_m G_{m1} \\ -G_{12} & -B_{12} & \sum_m B_{m1} \\ -2I_{12} & -2R_{12} & U_2 \end{matrix}$									$\begin{matrix} B_{13} & -G_{13} \\ -G_{13} & -B_{13} \end{matrix}$										
$\begin{matrix} -B_{12} & -G_{12} \\ G_{12} & -B_{12} \end{matrix}$			$\begin{matrix} B_{24} & -G_{24} & \sum_m G_{m2} \\ -G_{24} & -B_{24} & \sum_m B_{m2} \\ -2I_{24} & -2R_{24} & U_4 \end{matrix}$			$U_1$													
						$\begin{matrix} B_{34} & -G_{34} & \sum_m G_{m3} \\ -G_{34} & -B_{34} & \sum_m B_{m3} \\ -2I_{34} & -2R_{34} & U_4 \end{matrix}$			$U_2$						$\begin{matrix} -B_{13} & -G_{13} \\ G_{13} & -B_{13} \end{matrix}$				
			$\begin{matrix} -B_{12} & -G_{12} \\ G_{12} & -B_{12} \end{matrix}$			$\begin{matrix} -B_{34} & -G_{34} \\ G_{34} & -B_{34} \end{matrix}$			$\begin{matrix} B_{45} & -G_{45} & \sum_m G_{m4} \\ -G_{45} & -B_{45} & \sum_m B_{m4} \\ -2I_{45} & -2R_{45} & U_5 \end{matrix}$			$U_3$							
$-b$	$a$	$0$	$-d$	$c$	$c'$	$f$	$e$	$0$	$0$	$0$	$g$	$0$	$1$						
$a$	$b$	$0$	$c$	$d$	$d'$	$-e$	$f$	$0$	$0$	$0$	$h$	$1$	$0$						

Figura 5.2: Jacobiano para la red de la figura 5.1

El sistema (5.12) es resuelto mediante compensación del problema radial,

$$J\Delta X = \Delta F - J_u\Delta X_b \quad (5.16)$$

donde  $\Delta X_b$  ha de ser previamente obtenido del sistema reducido,

$$(D - J_b J^{-1} J_u)\Delta X_b = \Delta L - J_b J^{-1} \Delta F \quad (5.17)$$

El proceso en cada iteración queda por tanto de la siguiente forma,

1. Se realiza la factorización por bloques de la matriz  $J$

2. Se obtienen  $y$  e  $y_u$  de

$$Jy = \Delta F \quad (5.18)$$

$$Jy_u = J_u \quad (5.19)$$

3. Calcular

$$D' = D - J_b y_u \quad (5.20)$$

$$\Delta L' = \Delta L - J_b y \quad (5.21)$$

4. Obtener  $\Delta X_b$  resolviendo

$$D' \Delta X_b = \Delta L' \quad (5.22)$$

5. Por último, compensar la solución radial,

$$J\Delta X = \Delta F - J_u\Delta X_b \quad (5.23)$$

Respecto al proceso anterior caben las siguientes puntualizaciones. En la resolución de (5.18) y (5.19) hay que tener en cuenta la elevada dispersión de los vectores  $\Delta F$  y  $J_u$  durante la fase de eliminación hacia delante de cada sistema (barrido aguas arriba en el árbol). Además, el hacer la precompensación del problema radial (ecuación (5.23)) y no la postcompensación ( $\Delta X = y - y_u\Delta X_b$ ), resulta más rentable por varios motivos, [1, 59, 60]. En primer lugar la precompensación, aunque requiere la factorización de  $J$ , ésta ya se conoce al resolver los subproblemas (5.18) y (5.19). El cómputo de la parte derecha de (5.23) es inmediato y tan solo afecta a los nudos extremos de eslabones. La postcompensación requiere obtener íntegramente el vector  $y$  y la submatriz  $y_u$ , lo cual resulta costoso si el número de bucles es elevado y además éstos se encuentran a poca profundidad en el árbol. Por el contrario,

la precompensación sólo requiere obtener aquellos elementos de  $y$  e  $y_u$  que alcancen el nivel del árbol correspondiente al eslabón más profundo en el mismo (ver ecuaciones (5.20) y (5.21)), lo que reduce el barrido aguas abajo de los subproblemas (5.18) y (5.19).

La matriz  $J_b$  nunca se almacena como tal, determinándose sus valores al mismo tiempo que se computan la matriz  $D'$  y el vector  $\Delta L'$ .

Por último, resaltar que la matriz  $D'$  es una matriz llena, y, por lo tanto, esta metodología queda limitada al caso de redes *débilmente malladas*, como quedará confirmado en el apartado 5.5 tras el análisis de los resultados experimentales. La ecuación (5.22) es resuelta mediante la factorización QR de Gram-Schmidt, apéndice B, que posee mayor estabilidad numérica que la factorización LU a costa de una mayor densidad en Q, cuestión no relevante en este caso puesto que  $D'$  ya es llena de partida, [23].

## 5.5 Resultados experimentales

A continuación se detallan los resultados experimentales obtenidos para el caso de redes con nudos PV, cargas dependientes de la tensión y redes *débilmente malladas*.

Para el análisis del comportamiento del algoritmo propuesto en relación al tratamiento de los nudos PV, se ha modificado la red radial de 90 nudos [31] utilizada en el apartado 4.6 para distintos niveles porcentuales de nudos PV, y se ha comparado con lo obtenido con el algoritmo de Newton-Raphson. Los resultados aparecen en la tabla 5.1 para un criterio de convergencia de  $10^{-3}$  y operando en simple precisión. Se observa que el algoritmo de Newton-Raphson muestra una gran sensibilidad a la existencia de nudos PV, debido al mal condicionamiento de la red. Por el contrario, el reparto de cargas propuesto resulta bastante estable independientemente del tanto por ciento de nudos PV presentes en la red en estudio.

Para el análisis de cargas dependientes de la tensión se ha utilizado la red de 30 nudos obtenida de [16], modificando el porcentaje de las cargas dependientes de la tensión a conveniencia. En la tabla 5.2 se presentan los tiempos de cálculo invertidos para un residuo en las inyecciones de potencia de  $10^{-3}$ . En todos los casos el número de iteraciones ha sido 3. Se concluye, como era de esperar, que las cargas de impedancia constante no suponen ningún esfuerzo adicional pues conservan la linealidad de las ecuaciones de los flujos de potencia y sólo introducen términos constantes en el jacobiano. Por el contrario, las cargas de intensidad constante rompen la linealidad del problema (ver apartado 5.3), con

(%) de nudos PV	NR convencional	Propuesto
0	30	2
2.2	40	2
4.4	20	3
11.1	26	3
13.3	22	3
17.7	12	3

Tabla 5.1: Número de iteraciones para la red de 90 nudos con distintos porcentajes de nudos PV

lo que se introduce un coste adicional que queda de manifiesto en los tiempos de cálculo. Destacar, sin embargo, que el número de iteraciones invertidos por el algoritmo hasta alcanzar la convergencia se mantiene a pesar de la dependencia de las cargas con la tensión.

Porcentaje de cargas dependientes de la tensión	Tipo de carga	
	Impedancia constante	Intensidad constante
0%	1.4	1.4
25%	1.4	1.59
50%	1.4	1.78
100%	1.42	2.11

Tabla 5.2: Tiempos de cálculo (msec) para la red de 30 nudos con cargas dependientes de la tensión en un Pentium a 166-Mhz.

En cuanto a redes débilmente malladas, se han obtenido de la literatura algunos sistemas mal condicionados con distinto grado de mallado. También se ha analizado una red de reparto de 66/50KV de la red eléctrica española en la provincia de Sevilla, explotada por la compañía Sevillana de Electricidad. Mencionar que para comprobar el correcto funcionamiento del algoritmo propuesto ante cualquier tipo de red, se ha ejecutado éste sobre los sistemas de 14, 30, 57 y 118 nudos propuestos por la IEEE, al poseer éstos distinto número de nudos PV, número de bucles y topología.

En la tabla 5.3 se muestran los tiempos invertidos por iteración para el nuevo reparto de cargas y para el algoritmo de Newton-Raphson, a fin de su comparación. Las redes indicadas son,

- Red de 690 nudos con diferentes niveles de mallado.

- Red de 13 nudos y 1 bucle obtenida de [62]. Posee además 5 nudos PV.
- Red de 36 nudos y 4 bucles obtenida en [31].
- Tres redes de 11 nudos y 3 bucles, 12 nudos y 2 bucles y 17 nudos y 7 bucles, pertenecientes a la red de reparto anteriormente mencionada.

Redes			Algoritmo	
Num. nudos	Num. bucles	% bucles/nudos	Propuesto	NR
11	3	36.36	.612	.829
12	2	16.16	.497	.907
13	1	7.69	.366	.683
17	7	41.	2.754	1.617
36	4	12.5	2.280	3.438
690	2	.29	22.41	42.55
	4	.56	27.95	42.51
	6	.87	36.65	43.61
	8	1.16	44.20	43.72

Tabla 5.3: Tiempos por iteración invertidos por los algoritmos (milisegundos) en un Pentium a 166-Mhz.

El criterio de convergencia para ambos repartos de cargas ha sido el mismo a fin de que la comparación sea real, resultando coincidente el número de iteraciones invertido por cada algoritmo para cada caso analizado.

A la vista de los resultados mostrados en la tabla 5.3, se puede concluir lo ya esperado de que conforme aumenta el nivel de mallado del sistema disminuye la rapidez del reparto de cargas propuesto. Gráficamente se visualiza mejor cuándo resulta competitivo el algoritmo propuesto frente al de Newton-Raphson en función del número de bucles frente al de nudos de la red a analizar. Así, la representación gráfica de los datos de la tabla 5.3 se muestra en las figuras 5.3 y 5.4. En la figura 5.4 se observa claramente cómo el algoritmo de Newton-Raphson apenas aumenta los tiempos de cálculo conforme aumenta el número de bucles, mientras que el nuevo algoritmo crece casi cuadráticamente. El resto de los resultados, al corresponder a redes de distinto tamaño, tanto en el número de nudos como en el de bucles, se han representado aparte en la figura 5.3.



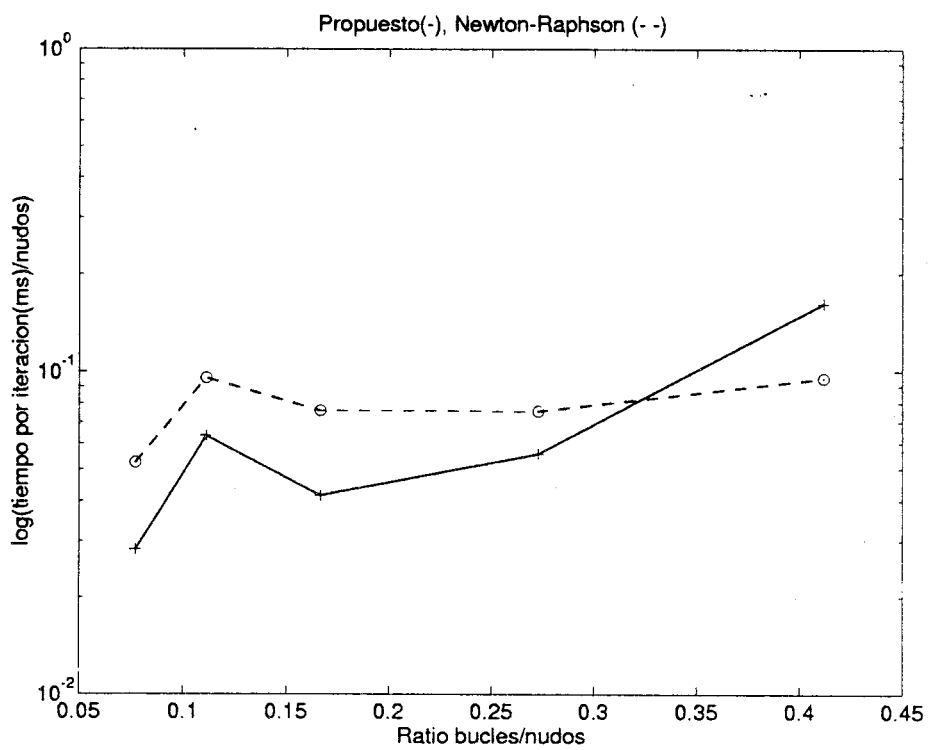


Figura 5.3: Tiempo invertido por iteración frente al ratio bucles/nudos para distintas redes

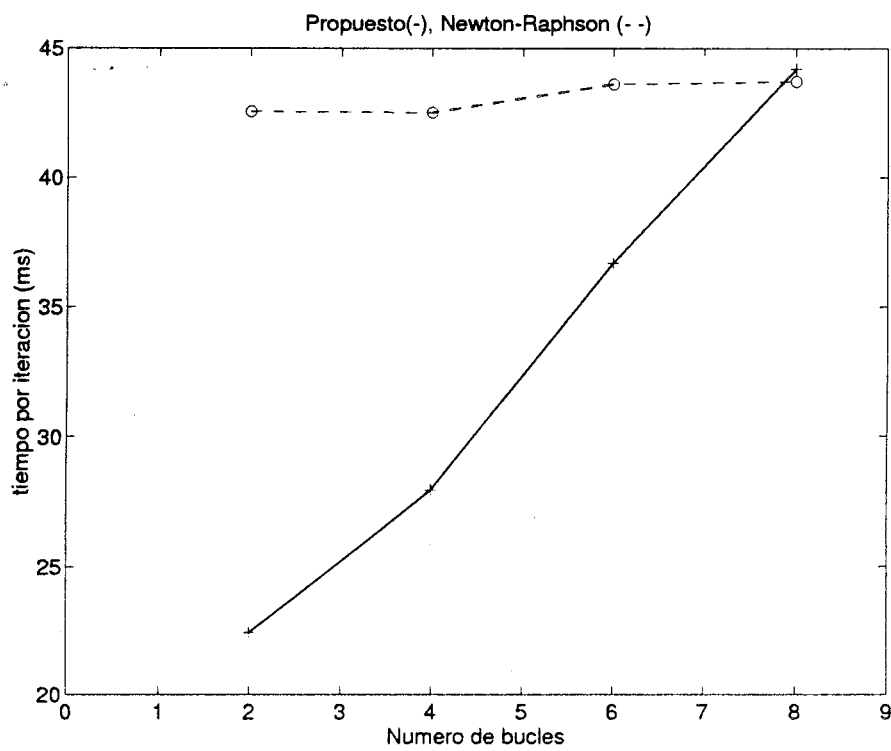


Figura 5.4: Tiempo invertido por iteración frente al numero de bucles para la red de 690 nudos

## 5.6 Resumen del capítulo

En este capítulo se ha presentado una extensión del reparto de cargas desarrollado en el capítulo 4, a fin de poder analizar sistemas de distribución con características distintas a la habitual de redes puramente radiales con todas las cargas de potencia constante. Así, se ha ampliado el método para poder abordar redes con **cargas dependientes de la tensión**, presencia de **nudos PV** y **redes débilmente malladas**.

Estos nuevos casos prácticos se han abordado tratando de aprovechar al máximo las ventajas del algoritmo inicial, esto es, buscar la radialidad del problema y el máximo de linealidad en las ecuaciones de los flujos. Es de destacar el tratamiento de redes con bucles, pues aunque la nueva formulación conduce a un sistema de ecuaciones lineales y cuadráticas aumentado, ésta resulta computacionalmente atractiva cuando se explota eficientemente la estructura por bloques de dicho sistema.

Así mismo se presentan los resultados experimentales obtenidos sobre distintas redes y la comparación de los mismos con los obtenidos por el algoritmo de Newton-Raphson. A la vista de éstos se puede confirmar la eficacia y rapidez de la solución adoptada para redes con un número de bucles pequeño frente al de nudos, así como su óptimo funcionamiento para redes con nudos PV o cargas dependientes de la tensión.

# Capítulo 6

## Conclusiones y futuros desarrollos

### 6.1 Resumen y conclusiones

En esta tesis se ha abordado la problemática relacionada con la solución del reparto de cargas en redes de distribución.

En el capítulo 2 se ha definido y formulado el problema del reparto de cargas, así como las peculiaridades más destacadas de los sistemas de transporte y distribución en relación a dicha cuestión. Se han descrito las soluciones más importantes y extendidas a nivel de alta tensión para la resolución del reparto de cargas, como son los algoritmos de Newton-Raphson y el método desacoplado rápido FDLF, exponiendo las limitaciones de estas técnicas de solución para solventar redes de distribución y señalando las características más interesantes que justifican su importancia a nivel de redes de transporte.

A continuación, en el capítulo 3 se han clasificado, atendiendo a diferentes criterios, los algoritmos de reparto de cargas específicamente diseñados para su aplicación a nivel de distribución. Seguidamente se han descrito las distintas metodologías anteriormente etiquetadas, haciendo especial hincapié en aquellas que van orientadas específicamente a resolver el reparto de cargas en redes equilibradas, aunque también se han clasificado y descrito brevemente los algoritmos propuestos para el caso de redes desequilibradas. Se han destacado además, los inconvenientes y ventajas más significativos asociados a cada solución.

Una vez conocidas y estudiadas las diversas técnicas desarrolladas en relación al tema bajo estudio, en el capítulo 4 se ha presentado la metodología que se propone en esta tesis como una alternativa a la solución del reparto de cargas en redes de distribución radiales equilibradas con cargas independientes de la tensión. El algoritmo propuesto aumenta el tamaño del sistema a resolver

en comparación a otros métodos, pero dicho sistema resulta más lineal, dando así lugar a un conjunto de ecuaciones que, óptimamente ordenadas (minimización del llenado de la matriz a resolver) y resueltas (tratamiento por bloques del sistema), hacen que la solución adoptada resulte competitiva en relación a las descritas en el capítulo anterior. Para la comprobación de la robustez y eficacia de la solución propuesta, se ha realizado un análisis comparativo entre la nueva técnica diseñada y algunos de los algoritmos expuestos en el capítulo 3, los cuales han sido implementados para dicho fin.

La extensión de la solución propuesta en el capítulo 4 a otros casos de interés práctico, se ha hecho en el capítulo 5. Ha resultado obligado el abordar el estudio de redes débilmente malladas, la posible presencia de nudos PV y la dependencia de las cargas con la tensión, situaciones todas ellas factibles de presentarse en redes de distribución. Se ha resuelto cada problemática buscando mantener al máximo la estructura obtenida en el sistema de ecuaciones a resolver para el caso base del capítulo 4, así como la robustez numérica y la rapidez característica del algoritmo propuesto. Se ha podido determinar para el caso de redes débilmente malladas el ratio bucles/nudo para el cual deja de ser competitiva la solución desarrollada en comparación al algoritmo de Newton-Raphson, atendiendo a los tiempos de cálculo invertidos por cada metodología.

## 6.2 Sugerencias para futuras líneas de investigación

Como futuras líneas de trabajo a desarrollar, cabría sugerir las siguientes,

1. La posible extensión del algoritmo propuesto en esta tesis para el caso de redes desequilibradas. El desequilibrio de la red conforme el nivel de tensión disminuye, resulta cada vez más notable y significativo en la solución del reparto de cargas del sistema bajo análisis. Hay que destacar sin embargo, que esta problemática debe venir precedida de un análisis previo y fundamental, como es el modelado de los distintos elementos presentes en la red, ya que las diferentes aproximaciones que se adopten en el mismo redundarán significativamente en la solución final del reparto de cargas.
2. Proceder a integrar la metodología de reparto de cargas propuesta como parte de otras funciones analíticas de interés en el control de los sistemas de distribución, esto es, la reconfiguración de redes para minimización

de pérdidas, óptima localización y dimensionamiento de condensadores para mejorar el factor de potencia y regulación de la tensión, etc.

3. Estudiar posibles alternativas en el tratamiento de líneas cortas que soslayen el problema de mal condicionamiento que éstas implican en la resolución del reparto de cargas.
4. Analizar la posibilidad de resolver el reparto de cargas utilizando coordenadas cartesianas frente a las polares o a las variables alternativas sugeridas en esta tesis.

# Bibliografía

- [1] Alsac O., Stott B., Tinney W.F. *Sparsity-Oriented Compensation Methods for Modified Network Solutions*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, pp. 1050-1060. May 1983.
- [2] Álvarez C., Molina R., *Distribution Network Loss Reduction: Capacitor Allocation and Operation*, IFAC Intl. Conference On Control of Power Plants and Power Systems, Munich, March 1992.
- [3] Álvarez C., Gabaldon A., Malhame R.P., *New Concepts in Load Modelling for Load Management*, Invited paper, Second Intl. Conference On Distribution Automation and Load Management, Fort Lauderdale, FL, USA, Enero 1992.
- [4] Álvarez C., Gabaldon A., *Distribution Load Modelling for Demand Side Management and End-Use Efficiency*, Capítulo del libro *Integrated Electricity Resource planning*, Kluwer Academic Press, 1994.
- [5] Arrillaga J. and Arnold C.P., *Computer Analysis of Power Systems*. John Wiley & Sons, 1990.
- [6] Alvarado F.L. *Supplementary lecture notes for a short course on: Computational Technologies for the Analysis of Large Systems and Networks*. Computational Techniques in Large-Scale Power Systems Analysis. Electric Energy Systems – University Enterprise Training Partnership, EES-UETP Course Programme. Seville, June 1994.
- [7] Bacher R., Ejebe, Tinney W.F. *Approximate Sparse Vector Techniques for Power Network Solutions*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, pp. 420-428, 1991.
- [8] Baran M.E., Wu F.F., *Optimal Capacitor Placement on Radial Distribution Systems*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4. No. 1, pp. 725-734, January 1989.

## Bibliografija

---

- [9] Baran M.E., Wu F.F., *Optimal Sizing of Capacitors Placed on a Radial Distribution System*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4. No. 1, pp. 735-743, January 1989.
- [10] Baran M.E., Wu F.F., *Network Reconfiguration in Distribution Systems for Loss Reduction and Load Balancing*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4. No. 2, pp. 1401-1407, April 1989.
- [11] Betancourt R. *An Efficient Heuristic Ordering Algorithm for Partial Matrix Refactorization*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, pp. 1181-1187. 1988.
- [12] Björck A., *Numerical Methods for Least Square Problems*. SIAM., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
- [13] Borozan V., Rajičić D. and Ačkovski R., *Improved Method for Loss Minimization in Distribution Networks*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10. No. 3, pp. 1420-1425, August 1995.
- [14] Borozan V., Rajičić D. and Ačkovski R., *Minimum Loss Reconfiguration of Unbalanced Distribution Networks*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12. No. 1, pp. 435-441, January 1997.
- [15] Cassel W.R., *Distribution Management Systems: Functions and Payback*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 3, pp. 796-801, August 1993.
- [16] Céspedes R., *New Method for the Analysis of Distribution Networks*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.5, No. 1, pp. 391-396, January 1990.
- [17] Chan S., Brandwajn V. *Partial Matrix Refactorization*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 1, pp. 193-200. 1986.
- [18] Cheng C.S., Shirmohammadi D., *A Three-Phase Power Flow Method for Real-Time Distribution System Analysis*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10. No. 2, pp. 671-679, May 1995.
- [19] Chen T.-H., et al., *Distribution System Power Flow Analysis- A Rigid Approach*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 6. No. 3, pp. 1146-1152, July 1991.



- [20] Chiang H.-D., *et al.*, *Optimal Capacitor Placements in Distribution Systems: Part 1: A New Formulation and the Overall Problem*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5. No. 2, pp. 634-640, April 1990.
- [21] Chiang H.-D., Jean-Jumeau R., *Optimal Network Reconfigurations in Distribution Systems: Part 2: Solution Algorithms and Numerical Results*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5. No. 3, pp. 1568-1574, July 1990.
- [22] Das D., Kothari D.P., Kalam A., *Simple and Efficient Method for Load Flow Solution of Radial Distribution Networks*, Electrical Power & Energy Systems, Vol. 17, No.5, pp. 335-346, 1995.
- [23] Duff I.S., Erisman A.M., Reid J.K. *Direct Methods for Sparse Matrices*. Oxford University Press. USA, 1986.
- [24] Enriquez Harper G., *Técnicas Computacionales en Sistemas Eléctricos de Potencia*. Editorial Limusa, 1986.
- [25] Evans D.J., Ed. *Sparsity and its Applications*. Cambridge University Press. Great Britain, 1985.
- [26] Gibbs N.E., Poole W.G., Stockmeyer P.K., *An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 13, pp. 236-250, 1976.
- [27] Glimn A.F., Stagg G.W., *Automatic Calculation of Load Flows*, AIEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 76, pp. 817-828, Oct. 1957.
- [28] Gómez A., Franquelo L. *An Efficient Ordering Algorithm to Improve Sparse Vector Methods*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, pp. 1538-1544. 1988.
- [29] Gómez A., Abur A., Romero E., *On the Use of Loop Equations in Power System Analysis*, ISCAS 95, Seattle.
- [30] Gómez A., Romero E. *Reliable Load Flow Technique for Radial Distribution Networks* PE-344-PWRS-0-12-1996.
- [31] Goswami S.K., Prof. Basu S.K., *Direct Solution of Distribution Systems*, IEE-Proceedings-C, Vol. 138., No. 1, January 1991.

## Bibliografija

---

- [32] Gross G., Wong H.W., *A Two-Step Compensation Method for Solving Short Circuit Problems*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-101, pp. 1322-1331, June 1982.
- [33] Iwamoto S., Tamura Y., *A Load Flow Calculation Method for Ill-conditioned Power Systems*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100. No. 4, pp. 1736-1743, April 1981.
- [34] Jennings. *Matrix Computation for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons. 1977.
- [35] Kersting W.H., *A Method to Teach The Design and Operation of a Distribution System*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103. No. 7, pp. 1945-1952, July 1984.
- [36] Willis H. Lee, *Power Distribution Planning Reference Book*. Marcel Dekker, Inc, 1997.
- [37] Liu G. *Computer Solution of Large, Sparse, Positive-definite Systems*. Prentice-Hall, 1981.
- [38] Luo G.X., Semlyen A., *Efficient Load Flow for Large Weakly Meshed Networks*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5. No. 4, pp. 1309-1316, November 1990.
- [39] Peponis G.J., Papadopoulus M.P., Hatziargyriou N.D., *Optimal Operation of Distribution Networks*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11. No. 1, pp. 59-67, February 1996.
- [40] Pissanetzky S. *Sparse Matrix Technology*. Academic Press Inc. USA, 1994.
- [41] Rajičić D., Bose A., *A Modification to the Fast Decoupled Power Flow for Networks with High R/X Ratios*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3. No. 2, pp. 743-746, May 1988.
- [42] Rajičić, Ačkovski R., Taleski R., *Voltage Correction Power Flow*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 9. No. 2, pp. 1056-1062, April 1994.
- [43] Ramírez-Rosado J., Álvarez-Bel C., *Applications of Multiobjective Models to Power Distribution Systems Design*, International Journal of Power and energy Systems, 15(2), 1995 pp. 54-60.

- [44] Roca J., Ferrarons C., Benseny A., Avila F., *Entorno General de Cálculos en el sistema de Ayuda a la Conducción de la Red de Distribución*, Jornadas Hispano-Lusas, pp 1087-1096, Barcelona 1-3 de Julio de 1993.
- [45] Roldán Porta C., *Contribuciones a la Automatización de la Distribución de Energía Eléctrica*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Octubre 1992.
- [46] Roldán C., González N., Álvarez C., *Reconfiguration for Loss Reduction in Distribution Networks*, IFAC Intl. Conference On Control of Power Plants and Power Systems, Munich, March 1992.
- [47] Romero E., Gómez A., *Ecuaciones de Bucles frente a Ecuaciones de Nudos en Redes Poco Malladas*, Jornadas Hispano-Lusas, pp 936-943, Portugal 6-8 de Julio de 1995.
- [48] Romero E., Gómez A., *Generalized Load Flow Technique for Balanced Distribution Networks*, Enviado a IEEE Transactions on Power Systems, Marzo 1998.
- [49] Schaffer G., *Distribution System Control and Automation*, 11 th Power Systems Computation Conference (PSCC), Proceedings, Vol. 1, pp 13-20, Agosto-Septiembre 1993, Avignon.
- [50] Shirmohammadi D., Hong H.W., Semlyen A., Luo G.X., *A Compensation-Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3. No. 2, pp. 753-762, May 1988.
- [51] Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to Numerical Analysis*. Segunda Edición, Sringer-Verlag.
- [52] Stott B., *Decoupled Newton Load Flow*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 1955-1959, 1972.
- [53] Stott B. and Alsac O., *Fast Decoupled Load Flow*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 859-869, May/June 1974.
- [54] Stott B., *Review of Load-Flow Calculation Methods*, Proceedings of the IEEE, Vol. 62, No. 7, pp. 916-929, July 1974.
-

## Bibliografija

---

- [55] Sun D.I.H., Abe S., Shoults R.R., Chen M.S., Eichenberger P. and Farris D., *Calculation of Energy Losses in a Distribution System*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99, No. 4, pp. 1347-1356, July/Aug 1980.
- [56] Taleski R. and Rajičić D., *Distribution Network Reconfiguration for Energy Loss Reduction*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 12, No. 1, pp. 398-406, February 1997.
- [57] Tinney W.F., and Hart C.E., *Power Flow Solution by Newton's Method*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-86, pp. 1449-1460, 1967.
- [58] Tinney W.F., and Walker, *Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization*, Proceedings of the IEEE, Vol. 55, pp. 1801-1809, 1967.
- [59] Tinney W.F., *Compensation Methods for Network Solutions by Triangular Factorization*, Proc. of PICA Conference, Boston, Mass., May 24-26, 1971.
- [60] Tinney W.F. *Compensation Methods for Network Solutions by Optimally Ordered Triangular Factorization*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91. pp. 123-127. February 1972.
- [61] Tinney W.F., Brandwajn V, Chan S.M. *Sparse Vector Methods*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 2, pp. 295-301. February 1985.
- [62] Tripathy S.C., Prasad. G.D., Malik O.P., Hope G.S., *Load-Flow Solutions for Ill-Conditioned Power Systems by a Newton-Like Method*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 10, pp. 3648-3657, October 1982.
- [63] Tylavsky D.J., Crouch P.E., Jarriel L.F., Jagjit Singh, Rambabu Adapa, *The effects of precision and small impedance branches on power flow robustness*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 6-14, February 1994.
- [64] Van Amerongen R.A.M. *A Rank-Oriented Setup for the Compensation Algorithm*. IEEE/PES Winter Meeting. New York 1988.

- [65] Westlake. *Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations*. John Wiley & Sons, 1968.
- [66] Zhang F., Cheng C.S., *A Modified Newton Method for Radial Distribution System Power Flow Analysis*, Winter Meeting IEEE/PES, January 21-25 1996.
- [67] Zimmerrman R.D. and Cheng H.-D., *Fast Decoupled Power Flow for Unbalanced Radial Distribution Systems*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 4, pp. 2045-2052, November 1995.

# Apéndice A

## Técnicas de matrices y vectores dispersos

### A.1 Introducción

Intuitivamente, una matriz se puede considerar *dispersa* cuando el número de elementos no nulos es reducido frente al total de elementos, concepto que es igualmente aplicable a un vector. Una definición más rigurosa, expresada por F. Alvarado en [6], es la siguiente: “Una matriz dispersa es aquella en la cual el número de elementos no nulos crece menos que cuadráticamente con la dimensión de la matriz”.

En la práctica, cualquier sistema de ecuaciones de cierto tamaño, representativo de un problema físico real, puede ser formulado con toda seguridad mediante matrices dispersas. Así ocurre, por ejemplo, en el análisis de redes eléctricas, circuitos electrónicos, estructuras mecánicas, transferencia de calor, redes hidráulicas, etc. No siempre la resolución de un determinado problema conduce directamente a un sistema lineal de ecuaciones. Lo que ocurre es que las técnicas de tratamiento numérico de problemas no lineales, de optimización, en derivadas parciales, etc., generan una secuencia de sistemas lineales a resolver. Podemos asegurar, por tanto, que en el análisis, simulación, control, modelado, etc, de problemas físicos de gran escala será preciso resolver un determinado número de sistemas de ecuaciones lineales y dispersos [34].

Una simplificación importante de las técnicas de matrices dispersas consiste en asumir que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones es estructuralmente simétrica, es decir, que si existe el elemento  $a_{ij}$ , también existe el  $a_{ji}$ . Esto no debe suponer una limitación importante. A lo sumo exigirá almacenar algunos elementos nulos para lograr la simetría deseada.

En las siguientes secciones se describen brevemente las técnicas de matrices y vectores dispersos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

## A.2 Almacenamiento de matrices dispersas

Una matriz debe tratarse como dispersa o rala cuando el elevado número de elementos nulos justifique el uso de técnicas especiales, que ahorren tanto memoria como tiempo de cálculo respecto al tratamiento convencional de la misma. Dependiendo de la aplicación (multiplicación de una matriz por un vector, solución de un sistema de ecuaciones, etc.), se deberán utilizar esquemas más o menos sofisticados. Todos los esquemas almacenan los elementos no nulos en un vector principal, junto a otros vectores enteros auxiliares que permitan acceder con facilidad a elementos individuales o agrupados por filas o columnas. Un elevado número de vectores auxiliares requerirá más memoria y consumirá tiempo en realizar modificaciones, permitiendo en cambio un acceso rápido a elementos concretos. Por el contrario, el acceso será más lento cuando no se almacene suficiente información extra, pero las actualizaciones se harán con más agilidad. Un buen esquema de almacenamiento debe buscar una solución de compromiso.

Tradicionalmente se han utilizado dos técnicas de almacenamiento, dependiendo de las características del problema a resolver:

- Almacenamiento compacto por filas: Consiste en almacenar consecutivamente en un vector los elementos no nulos, comenzando por el primer elemento de la primera fila y terminando por el último elemento de la última fila. En otro vector se tiene la columna de cada elemento, y un tercer vector contiene los punteros indicando la posición del primer elemento de cada fila. Tiene el inconveniente de que hay que conocer la estructura definitiva de la matriz previamente a su almacenamiento.
- Almacenamiento aleatorio por filas: Con respecto al método anterior, éste difiere en que los elementos no nulos no tienen por que estar dispuestos consecutivamente. Ello hace necesaria la introducción de un cuarto vector, el cual para cada elemento proporciona un puntero indicando la posición del próximo elemento no nulo en su fila. El acceso es algo más lento que en el almacenamiento compacto, debido al direccionamiento indirecto, pero tiene la gran ventaja de que los elementos de la matriz pueden venir en cualquier orden. Además, es posible suprimir e insertar fácilmente elementos, cosa que requeriría mucho tiempo con el método anterior.

El almacenamiento aleatorio es necesario, por tanto, en las etapas previas de formación de la matriz y ordenación de nudos, siendo conveniente el uso del almacenamiento compacto, una vez conocida la estructura definitiva de la matriz, en posteriores procesos de cálculo por la mayor velocidad que este tipo de almacenamiento proporciona.

Las matrices simétricas merecen un tratamiento especial, siendo almacenados únicamente los elementos no nulos de la submatriz triangular superior, o inferior, y los elementos diagonales. Con ello, la memoria necesaria para almacenar la matriz es aproximadamente un 50 % menor.

Existen otras técnicas de almacenamiento para problemas más generales, en las cuales es posible acceder a los elementos tanto por filas como por columnas, siempre a costa de aumentar el coste computacional y de almacenamiento de la matriz. Referencias importantes en el campo de las matrices dispersas son [40, 25, 37] y especialmente los trabajos de Duff [23].

## A.3 Solución de ecuaciones lineales y dispersas

Al resolver un sistema lineal de ecuaciones se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

1. La matriz de coeficientes es diferente en cada solución del sistema.
2. La matriz de coeficientes se mantiene en varias soluciones, cambiando únicamente el vector independiente.

Dependiendo de la situación, resultará más conveniente utilizar un método u otro. En el primer caso se utiliza generalmente la *Eliminación Gaussiana*, y en el segundo la *Factorización LU* de la matriz. A continuación se revisarán brevemente estas técnicas (El lector interesado puede consultar las referencias [23, 37, 65] para más detalles).

### A.3.1 Eliminación Gaussiana

Dado el sistema de ecuaciones:

$$Ax = b \tag{A.1}$$

La matriz  $A$  se va modificando mediante transformaciones elementales hasta hacerla triangular superior. Las mismas transformaciones se van realizando simultáneamente sobre el vector  $b$ . Una transformación elemental es la división



de una fila por un escalar, o la substracción de una fila multiplicada por un escalar, de otra fila, con vistas a anular un determinado elemento de la parte triangular inferior de la matriz.

El sistema triangular resultante:

$$Ux = b \quad (\text{A.2})$$

se resuelve entonces por lo que se denomina *Sustitución hacia atrás* (*Backward Substitution*) empezando por el último elemento de  $x$ .

### A.3.2 Factorización LDU

La descomposición LU de una matriz es una forma compacta, con otra notación, de representar una variante trivial de la *Eliminación Gaussiana*, en la que los escalares que se van utilizando durante las transformaciones elementales se van almacenando en la parte triangular inferior de la matriz. A las dos matrices triangulares resultantes se las denomina a veces *Tablas de Factores*.

Formalmente, como se recoge en [23, 37, 65], la matriz  $A$  se puede expresar como el producto:

$$A = L \cdot D \cdot U \quad (\text{A.3})$$

siendo  $L$  una matriz triangular inferior con diagonal unitaria,  $D$  una matriz diagonal y  $U$  una matriz triangular superior también de diagonal unitaria. El sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto entonces en los siguientes pasos:

1. Calcular el vector  $z$  (*Forward Substitution*) resolviendo el sistema triangular:

$$L \cdot z = b \quad (\text{A.4})$$

2. Calcular el vector  $y$  dividiendo los elementos de  $z$  por los elementos de la matriz diagonal  $D$ .

$$D \cdot y = z \quad (\text{A.5})$$

3. Obtener las incógnitas (*Backward Substitution*), vector  $x$ , resolviendo:

$$U \cdot x = y \quad (\text{A.6})$$

Mientras no se produzcan cambios en la matriz, su factorización (A.3) permanecerá válida, y sólo habrá que repetir los pasos 1 a 3 anteriores para cada vector independiente  $b$ .

Los distintos algoritmos para realizar la descomposición  $LU$  provienen de agrupar  $D$  con  $U$  (*Doolittle*), o  $L$  con  $D$  (*Crout*), reduciéndose (A.3) a:

$$A = LU \quad (\text{A.7})$$

donde, o bien  $L$  o bien  $U$  ya no tiene diagonal unitaria.

Para una matriz simétrica, (A.3) se convierte en:

$$A = LDL^t = U^t DU \quad (\text{A.8})$$

que, agrupando  $L$  con  $D^{\frac{1}{2}}$ , se reduce a (*Cholesky*):

$$A = LL^t = U^t U \quad (\text{A.9})$$

En la práctica, es preferible (A.8) a (A.9) porque se ahorran  $n$  raíces cuadradas, que podrían dar lugar además a la aparición de números complejos en matrices inicialmente reales.

### A.3.3 Algoritmos de ordenación óptima

Al factorizar o triangularizar una matriz aparecen unos elementos nuevos que se conocen como *Elementos de llenado* (*Fill-Ins*). El orden en que se procesan las filas de la matriz influye de manera notable en el número de elementos de llenado que aparecen. Esto se debe a que cada nuevo elemento puede crear a su vez otros elementos.

Mientras más elementos tenga la matriz, mayor es el esfuerzo de cálculo y la ocupación de memoria, de aquí que interese minimizar el llenado de la matriz. Para ello se busca el orden en que hay que procesar sus filas de forma que el número de elementos nuevos sea el menor posible.

Encontrar el orden óptimo no es factible, pues supondría encontrar la combinación de filas adecuada de entre un total de  $n!$  combinaciones. Existen, sin embargo, varios métodos que intentan aproximarse lo más posible a este orden, siendo el segundo método propuesto por Tinney, o de *Grado Mínimo* [58], el que mejores prestaciones proporciona en la práctica. Esta técnica va eligiendo como siguiente fila a eliminar la que tiene menos elementos no nulos (menor grado en su grafo asociado) de entre las restantes. De esta forma se intenta retrasar lo más posible la aparición de nuevos elementos no nulos.

## A.4 Vectores dispersos

Con bastante frecuencia se presenta una o varias de las siguientes situaciones al resolver sistemas de ecuaciones:

1. Sólo unos pocos elementos del vector  $b$  son distintos de cero.
2. Sólo se desean conocer unos pocos elementos del vector de incógnitas  $x$ .
3. La matriz de coeficientes  $A$  cambia levemente de una resolución a otra, afectando los cambios a muy pocos elementos de la misma.

Las técnicas que aprovechan estas situaciones para ahorrar operaciones y tiempo de cálculo se denominan genéricamente *Técnicas de Vectores Dispersos* [61, 7], técnicas que requieren lógicamente que la matriz  $A$  sea dispersa.

Las técnicas de vectores dispersos están basadas en lo que se denomina *Árbol de la Factorización*, que es la unión de los caminos de la factorización de todas las filas de la matriz. El camino de la factorización de una fila  $i$  es una secuencia de filas que, empezando por ella misma, continúa con la fila de la primera columna  $j$  no nula ( $j > i$ ), y así recursivamente hasta llegar a la última fila. Mientras que, en una matriz llena, el camino de la fila  $i$  son todas las filas que caen por debajo, en una matriz dispersa cuyas filas han sido adecuadamente ordenadas, el camino medio es extraordinariamente corto (para dar una idea, en una matriz de 8000 filas suficientemente dispersa, el camino medio puede ser 20 ó 25 filas).

#### A.4.1 Refactorización parcial

La técnica de *Refactorización Parcial* [17] es una alternativa a las técnicas de *Compensación* [60, 1, 64] cuando se producen modificaciones que afectan a pocos elementos de  $A$ , particularmente competitiva cuando los cambios son permanentes, es decir, cuando no interesa recuperar la situación anterior a los cambios. Se basa en que cuando cambian determinados elementos de una matriz, sólo se ven afectadas las filas de la tabla de factores pertenecientes al *Árbol de la Factorización* de las filas involucradas en los cambios. Por tanto, sería un derroche volver a formar la matriz y refactorizarla por completo.

En lugar de ello se procede como sigue:

1. Se calcula el *Árbol de la Factorización* de las filas afectadas por los cambios.
2. Se realiza la *Factorización Inversa* (partiendo desde el final de la matriz) de las filas del árbol.
3. Se introducen las modificaciones necesarias en los elementos afectados.

4. Se realiza la *Factorización Directa* (convencional) de las mismas filas del paso 2.

Existen otras alternativas de refactorización parcial basadas en recuperar los términos originales de la matriz antes de ser factorizada, evitando con ello la factorización inversa.

### A.4.2 Sustitución rápida

Cuando el vector  $b$  sólo tiene elementos no nulos en unas cuantas filas, las únicas filas que dejan de ser nulas durante la etapa de eliminación hacia adelante son las pertenecientes al *Árbol de la Factorización* de las filas inicialmente no nulas. El proceso, denominado *Eliminación Rápida Hacia Adelante* [61], consiste precisamente en operar sólo con esas filas, lo cual requiere previamente calcular el *Árbol de la Factorización*, frente al proceso completo indicado por (A.4).

Análogamente, si sólo son precisos algunos elementos del vector de incógnitas  $x$ , las incógnitas que es estrictamente necesario calcular previamente son las correspondientes a las filas del *Árbol de la Factorización* de las incógnitas deseadas (en este caso el árbol se recorre de abajo a arriba, como en la factorización inversa). Este proceso, denominado *Sustitución Rápida Hacia Atrás*, es mucho más eficiente que el proceso completo (A.6).

Lógicamente, cuando el número de elementos no nulos de  $b$ , o las incógnitas deseadas de  $x$ , es muy elevado, puede no ser rentable utilizar estas técnicas, debido al coste computacional introducido por el cálculo del *Árbol de la Factorización*.

Es de resaltar la conveniencia de almacenar la matriz  $U$  por filas y la matriz  $L$  por columnas, con el fin de optimizar el acceso a los elementos necesarios.

### A.4.3 Ordenación óptima para vectores dispersos

La eficiencia de las técnicas de vectores dispersos depende en gran medida de la forma en que se ordenen las filas de la matriz. Por ejemplo, si se utiliza la ordenación en banda, el *Árbol de la Factorización* es una única rama que incluye todas las filas de la matriz, como en el caso de una matriz llena. En este caso no es rentable utilizar dichas técnicas.

El esquema de *Mínimo Grado* (Tinney-2), utilizado con preferencia en los paquetes comerciales de rutinas de matrices dispersas, da lugar a caminos medios razonablemente cortos. Cabe no obstante plantearse si el *Árbol de la Factorización* puede acortarse aún más sin demasiado esfuerzo adicional. Un

primer condicionante es que la ordenación de *Mínimo Grado* no debe alterarse, pues implicaría un aumento considerable del llenado de la matriz, y, por tanto, del número de operaciones necesarias para la resolución de las ecuaciones (A.4) a (A.6). Las técnicas propuestas en la literatura aprovechan los empates que se producen durante el proceso de ordenación por *Mínimo Grado*. En cada etapa de dicho proceso hay multitud de nudos de grado mínimo, y de lo que se trata es de proponer una forma de deshacer los empates que acorte el *Árbol de la Factorización*, respecto a un desempate aleatorio. Entre los algoritmos propuestos en este sentido destacan los de Gómez [28] y Betancourt [11]. Estas rutinas son, lógicamente, algo más lentas, y el beneficio obtenido empieza a ser significativo para sistemas de cierto tamaño, dependiendo de la ordenación natural de las variables. En aplicaciones de tiempo real, el usuario debe hacer pruebas "off-line" para determinar cuál es la rutina que mejor se adapta a su problema particular.

# Apéndice B

## Consideraciones numéricas: Factorización QR

### B.1 Introducción

La resolución por ordenador de cualquier problema numérico implica que la solución de éste no sea exacta debido a que aquellos poseen una precisión finita. Así, dado el sistema,

$$Ax = b \tag{B.1}$$

la solución  $\bar{x}$  que se obtenga para el mismo no coincidirá totalmente con la solución exacta  $x$ .

Un ejemplo del error que provoca la precisión finita del ordenador sería el siguiente. Supongamos un computador hipotético que trabajase con tres dígitos decimales en la representación de los números flotantes,  $\pm 0.ddd10^i$ . Con esta situación, las operaciones,

$$2420 + 1.58 = 2420$$

$$-2420 + (2420 + 1.58) = 0$$

$$(-2420 + 2420) + 1.58 = 1.58$$

resultan todas correctas computacionalmente hablando.

Existen dos cuestiones distintas en relación a las imprecisiones posibles en la solución de (B.1):

1. ¿ Es  $\bar{x}$  la solución exacta de un problema próximo ?.
2. ¿ Pequeños cambios en  $A$  y/o  $b$  conducen a pequeños cambios en  $x$  ?.

La primera de estas cuestiones está relacionada con la estabilidad del algoritmo utilizado para resolver el problema, y la segunda con lo que se denominará buen o mal condicionamiento del problema en sí. Así, si la respuesta a la primera cuestión es positiva significa que el algoritmo utilizado para resolver (B.1) es estable. Una contestación afirmativa a la segunda pregunta implica que el problema que se está intentando resolver está bien condicionado, independientemente de que el algoritmo que se utilice para su resolución sea estable o no.

## B.2 Inestabilidad del algoritmo

La eliminación gaussiana puede ser inestable si la matriz  $A$  posee pivotes ( $a_{kk}$ ) pequeños.

Volviendo al ejemplo del ordenador utilizado en la introducción de este apéndice, y, partiendo de la matriz ejemplo  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0.001 & 2.42 \\ 1.00 & 1.58 \end{bmatrix}$$

y el vector  $b$ ,

$$b = \begin{bmatrix} 5.20 \\ 4.57 \end{bmatrix}$$

para el sistema (B.1), la eliminación gaussiana daría

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.42 \\ 0 & -2420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.20 \\ -5200 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

debido a la operación

$$a_{22}^{(2)} = -2420 + 1.58 = 2420$$

La solución  $\bar{x}$  de (B.2) sería

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.15 \end{bmatrix}$$

mientras que la exacta corresponde a

$$x = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 2.15 \end{bmatrix}$$

Es patente el error entre  $\bar{x}_1 = 0.0$  y  $x_1 = 1.18$ .

Este error se pone igualmente de manifiesto en la descomposición  $LU$  de  $A$ , la cual no sería exacta y correspondería a,

$$\bar{L}\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1000 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001 & 2.42 \\ & -2420 \end{bmatrix}$$

De esta forma no se está resolviendo el sistema  $Ax = b$ , sino,

$$(\bar{L}\bar{U})x = (A + H)x = b$$

siendo  $H$  la matriz de error en la factorización  $LU$ .

Un *algoritmo* se dice *estable* si  $H$  es pequeña, o, lo que es lo mismo, si

$$\|H\| \ll \|A\|$$

Como obtener la norma de una matriz resulta laborioso, otra forma de mostrar si el algoritmo es estable o no consiste en examinar el residuo  $r = b - A\bar{x}$  y comprobar que,

$$\|r\| \ll \|b\|$$

o

$$\|r\| \ll \|A\| \|\bar{x}\|$$

En el ejemplo utilizado en este apartado  $r$  sería,

$$r = \begin{bmatrix} -.003 \\ 1.17 \end{bmatrix}$$

cuya norma no es pequeña comparada a la de  $b$ .

Se puede demostrar que la factorización  $LU$  es estable si la matriz  $A$  es diagonalmente dominante o definida positiva.

Existen diversas estrategias para el control de la estabilidad: pivotación parcial (intercambio de filas), pivotación total (intercambio de filas y columnas), pivotación con umbral (utilizada en sistemas dispersos).



### B.3 Mal condicionamiento

Un problema se dice mal condicionado si pequeños cambios en los datos provocan grandes cambios en la solución. Un ejemplo que ilustra esta situación es el siguiente,

$$\begin{bmatrix} 0.287 & 0.512 \\ 0.181 & 0.322 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.799147 \\ 0.502841 \end{bmatrix}$$

En el mismo ordenador que se viene utilizando, la factorización LU resulta estable pues  $\|r\| = \|b - A\bar{x}\| \simeq 0$ . Sin embargo, al redondear inicialmente el vector  $b$  por

$$\begin{bmatrix} 0.799 \\ 0.503 \end{bmatrix}$$

resulta una solución  $\bar{x}$ ,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}$$

muy lejos de la exacta  $x$ ,

$$x = \begin{bmatrix} 0.501 \\ 1.28 \end{bmatrix}$$

Este error procede de los datos y no del algoritmo, afirmándose que el problema está mal condicionado.

La forma de comprobar o modelar el mal condicionamiento es la siguiente. Se demuestra que se cumplen las siguientes desigualdades,

A Supuesto un pequeño cambio  $\Delta b$  en  $b$  resulta,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \ll \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (\text{B.3})$$

B Si se supone ahora un pequeño cambio  $\Delta A$  en  $A$ , se obtiene,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \ll \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (\text{B.4})$$

A la vista de las ecuaciones (B.3) y (B.4), se concluye que dependiendo de cuán grande resulte el producto  $\|A\| \|A^{-1}\|$ , tanto mayor será el error en la solución cuando se producen pequeñas perturbaciones en  $b$  y/o  $A$ .

Se define entonces el *número de condición* de una matriz como

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1 \quad (\text{B.5})$$

Cuanto mayor sea  $k(A)$  peor condicionamiento del problema. El número de condición es 1 para una matriz ortogonal.

Debido a que  $A^{-1}$  suele ser costosa de obtener computacionalmente, se suelen utilizar en la práctica números de condición aproximados. Así, el sistema estaría mal condicionado si

$$|A_N| \ll 1$$

o

$$\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \gg 1$$

siendo  $A_N$  la matriz  $A$  normalizada y  $\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$ , los autovalores máximos y mínimos respectivamente.

## B.4 Factorización QR

La factorización QR constituye una alternativa interesante a la eliminación gaussiana que evita los problemas de inestabilidad que presenta este método cuando el sistema a resolver no viene definido por una matriz definida positiva y diagonalmente dominante, [23].

Sea el sistema (B.1) a resolver. Es posible encontrar una factorización de  $A$  de la forma,

$$A = QR \quad (\text{B.6})$$

donde  $Q$  es ortogonal ( $Q^{-1} = Q^t$ ) y  $R$  es triangular superior.

Con la descomposición (B.6) de  $A$ , la solución de (B.1) es inmediata y de la forma,

$$Rx = Q^t b \quad (\text{B.7})$$

Observar que en (B.7) la determinación de  $x$  consiste exclusivamente en un barrido hacia atrás dado que  $R$  es triangular superior.

Existen distintas metodologías para obtener las matrices  $Q$  y  $R$ . Cada una de ellas dan distinta  $Q$  pero igual  $R$  (ya que la descomposición  $A^t A = R^T R$  es única). Las más extendidas para matrices  $A$  dispersas son la de Givens y Householder, que son las que provocan menor “fill-in” en  $Q$  en comparación a otras técnicas. La utilizada en esta tesis es sin embargo la de Gram-Schmidt, ya que si  $A$  es llena (caso de la matriz  $D$  resultante del problema mallado, apartado 5.4 del capítulo 5) y relativamente pequeña ( $D'$  es reducida debido a que se manipulan redes débilmente malladas) este método es el más fácil de implementar, [12].

### B.4.1 Factorización QR de Gram-Schmidt

Dado  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n = \text{rango}(A)$ , la ortogonalización de Gram-Schmidt produce  $Q \in \mathbf{R}^{m \times n}$  y  $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$  en la factorización de  $A$ ,

$$A = (a_1, \dots, a_n) = QR, \quad Q = (q_1, \dots, q_n) \quad (\text{B.8})$$

donde  $Q$  está constituida por columnas ortogonales y  $R$  es triangular superior. Las columnas de  $Q$  se van obteniendo sucesivamente por ortogonalización de las columnas de  $A$ .

El algoritmo, supuesta  $A$  cuadrada, consiste en,

*Inicialmente se hace  $Q = A$*

*for  $i=1, n$*

$$r_{ii} = \sqrt{q_i^t q_i}$$

$$q_i = q_i / r_{ii}$$

*for  $j=i+1, n$*

$$r_{ij} = q_i^t q_j$$

$$q_j = q_j - r_{ij} q_i$$

*end*

*end*

# Apéndice C

## Obtención eficiente de bucles

### C.1 Introducción.

Es evidente que para un circuito plano el conjunto más disperso de bucles linealmente independientes lo constituyen las mallas, ya que éstas son los únicos bucles que dan lugar a que cualquier rama del circuito pertenezca como mucho a dos de ellos. Es bien sabido, sin embargo, que la mayoría de las redes eléctricas son no planas, lo cual impide acudir a las mallas y fuerza a buscar otro conjunto de bucles linealmente independientes. Los bucles fundamentales son un conjunto de bucles linealmente independientes que requieren la determinación previa de un árbol característico de la red bajo estudio. Este conjunto de bucles fundamentales, sin embargo, no tienen por qué ser los más dispersos, dependiendo esta característica del árbol adoptado en la búsqueda de los mismos.

En general se han de acudir a técnicas heurísticas en la consecución de dicho objetivo, esto es, encontrar un conjunto de bucles linealmente independientes que sean lo más dispersos posibles. Un ejemplo trivial es el que se muestra en la figura C.1. Con el árbol del esquema (a) se obtienen, como se deduce a simple vista, bucles más dispersos que con el árbol elegido en (b) para la misma red. En concreto, la matriz de bucles en (a) posee 12 elementos no nulos, mientras que en (b) tendría 16.

A continuación se presenta un método de obtención de unos bucles intermedios entre mallas y bucles fundamentales que dan lugar a una matriz de bucles más dispersa que la que se obtendría utilizando bucles fundamentales. Previamente se harán unas consideraciones en torno al método de obtención del árbol más adecuado para el objetivo marcado.

Hay que resaltar el hecho de que una óptima implementación de las téc-

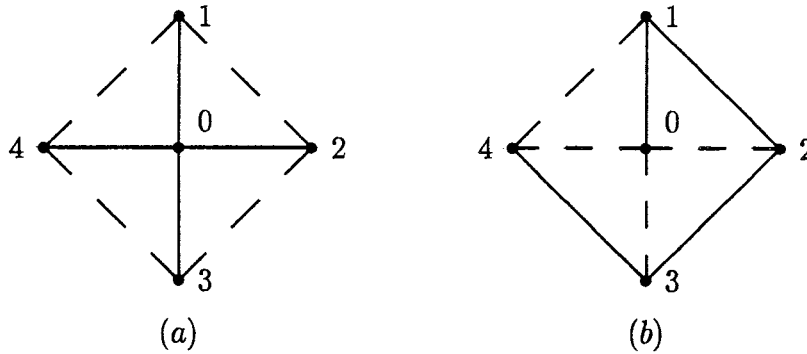


Figura C.1: Ejemplo comparativo de bucles dispersos frente a no dispersos

nicas que a continuación se describen son fundamentales en la búsqueda de un reparto de cargas lo más eficiente posible, puesto que, cabe recordar, la solución del reparto de cargas propuesta en esta tesis para redes radiales se basa en múltiples barridos hacia delante y hacia atrás en el árbol, y la solución adoptada para redes débilmente malladas requiere la solución del caso radial junto a las ecuaciones añadidas debido a los bucles en la red.

## C.2 Estructura de nivel

La *estructura de nivel*, [26], de un grafo  $G$ , constituido por un conjunto  $V$  de nodos y  $R$  de ramas, constituye una partición del mismo mediante la agrupación de sus nodos en subconjuntos disjuntos. Una estructura de nivel  $L_0, L_1, \dots, L_m$  con  $(m + 1)$  niveles, se obtiene cuando los subconjuntos se definen como,

$$Adj(L_i) \subseteq L_{i-1} \cup L_{i+1} \quad 0 < i < m$$

$$Adj(L_0) \subseteq L_1$$

$$Adj(L_m) \subseteq L_{m-1}$$

donde  $Adj(f)$  indica el conjunto de nodos adyacentes a los nodos del conjunto  $f$  y  $m$  la *longitud* de la estructura de nivel. El *ancho* de la estructura de nivel es el máximo número de nodos en cada nivel. En una estructura de nivel cada  $L_i, 0 < i < m$ , es un conjunto separador del grafo.

Una estructura de nivel se dice de raíz en un nudo  $u$  cuando  $L_0 = \{u\}$  viene fijada y cada uno de los subconjuntos restantes  $L_i$  viene constituido por el adyacente de la unión de los subconjuntos precedentes, es decir,

$$L_i = Adj(\cup_{j=0}^{i-1} L_j) \quad 0 < i$$

En la forma de explorar los nudos de un grafo existen dos formas de proceder: *búsqueda a lo ancho* y *búsqueda a lo largo*, [40]. En la búsqueda a lo ancho se exploran todos los nudos adyacentes a uno dado antes de pasar al siguiente nudo a explorar. Por el contrario, en la búsqueda a lo largo se explora sólo uno de los nudos adyacentes al actual en análisis y se adopta como nuevo nudo en la búsqueda. Para la determinación de la estructura de nivel de un grafo se utiliza la búsqueda a lo ancho. Así, para el ejemplo de la figura C.1, la estructura de nivel de raíz el nudo 0 sería la que se indica en el esquema C.2. La longitud de esta estructura de nivel es uno y su ancho cuatro.

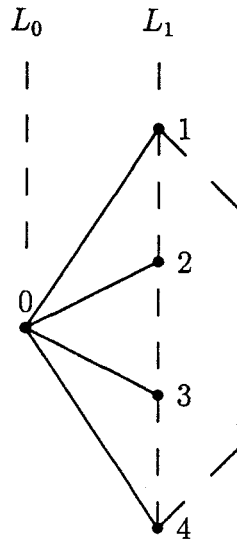


Figura C.2: Ejemplo de estructura de nivel

Tanto la búsqueda a lo ancho, como la búsqueda a lo largo, permiten definir un árbol para el grafo y sus correspondientes eslabones. Volviendo al ejemplo de la figura C.1, el árbol obtenido con la búsqueda a lo ancho sería el indicado con línea continua en la figura C.2, mientras que el que se obtendría con una búsqueda a lo largo se muestra en la figura C.3. Observar que las figuras C.2 y C.3 coinciden con los esquemas (a) y (b) de la figura C.1 pero dibujados de forma distinta.

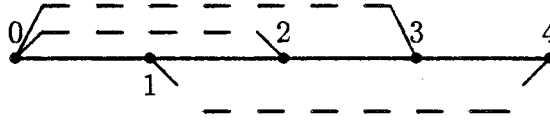


Figura C.3: Ejemplo de árbol mediante búsqueda a lo largo

### C.3 Elección del árbol

Para el árbol de partida se ha utilizado una técnica que se ha comprobado constituye una buena alternativa en la elección de los ramales del árbol. Esta técnica consta, a grandes rasgos, de los siguientes pasos:

1. Encontrar unseudodiámetro (la distancia más larga entre cualesquiera par de nodos del grafo) de la red usando la metodología simple y rápida presentada en [26] y que se basa en el concepto de estructura de nivel ya definido en el apartado anterior. La elección de dichoseudodiámetro suele requerir usualmente la construcción de solo dos estructuras de nivel.
2. Elegir el nudo central de dichoseudodiámetro. Si existe más de un nudo central elegir el de mayor grado.
3. Tomar el nudo central del paso anterior como raíz del árbol y construir éste basándose en una búsqueda a lo ancho del mismo y no a lo largo, como ha quedado de manifiesto en el ejemplo de la figura C.1.

El árbol generado con esta técnica posee unas propiedades que permitirán garantizar que los nuevos bucles no fundamentales que se obtengan a partir del mismo serán linealmente independientes entre sí, y además en un número suficiente para plantear todas las ecuaciones de bucles. Estas propiedades son:

- Los nodos quedan clasificados por niveles, siendo el nudo raíz del árbol el único nudo de su nivel.
- Cada nudo sólo puede estar unido a uno o más nodos de su mismo nivel por eslabones y a uno o más nodos de un nivel inmediatamente superior por ramas del árbol o eslabones. Por el contrario, siempre queda unido a un nudo, y sólo uno, de un nivel inferior al suyo, “nudo padre”, a través de una rama del árbol.

## C.4 Determinación de bucles linealmente independientes

La idea fundamental en la determinación de los nuevos bucles es la de simultanear su búsqueda con la construcción del árbol. Así, cada vez que se detecta un enlace, para determinar las ramas del bucle correspondiente se procede tal como sigue:

1. Sean  $a$  y  $b$  los nudos extremos del eslabón detectado, siendo  $a$  el nudo de mayor nivel de los dos en caso de que sean distintos los niveles de cada nudo.
2. Si el nivel del nudo  $a$  es mayor que el nivel del nudo  $b$ , bajar un nivel desde el nudo  $a$  por la rama del árbol correspondiente y asociar ésta al bucle; hacer  $a$  igual al nudo “padre” de  $a$  en el árbol. Si el nivel del nudo  $a$  fuese igual al del nudo  $b$ , continuar.
3. Descender un nivel desde  $a$  y  $b$  por las ramas del árbol y asociar éstas al bucle. Hacer  $a$  y  $b$  iguales a los nudos “padres” de cada uno de ellos en el árbol.
4. Si  $a$  y  $b$  son iguales o están unidos directamente en su nivel por un enlace, asociar éste al bucle en construcción y finalizar; en caso contrario ir a 3.

Este algoritmo, junto con las propiedades asociadas a una estructura de nivel, concepto base en la elaboración del árbol, permiten asegurar que se detectan todos los bucles posibles de un grafo y que además son linealmente independientes entre sí.

Para mejor ilustrar este algoritmo se acudirá a un ejemplo ilustrativo. El árbol escogido para este caso concreto no sigue las pautas indicadas en la elección óptima del nudo de referencia del árbol, para una mejor visualización de la ganancia en dispersión que se obtiene con esta metodología. En la figura C.4 se representa un árbol con los bucles fundamentales (cada bucle fundamental posee un solo eslabón y el resto son ramas del árbol) y el otro conjunto de bucles más dispersos que se obtendrían con el método de cálculo anteriormente descrito.

La matriz de bucles fundamentales correspondiente a la figura C.4 es:

$$B_{bf} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & \\ & & 1 & & & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & 1 & -1 & & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$





# Apéndice D

## Redes analizadas

### D.1 Introducción

Se presentan en este apéndice algunas de las redes utilizadas en los resultados experimentales obtenidos en los capítulos 4 y 5, mostrando la topología para cada una de ellas, sus parámetros de red y el estado de carga utilizado en cada caso.

### D.2 Red de 13 nudos

Esta red de 13 nudos y 13 ramas se ha obtenido de [62]. Su topología corresponde a la de la figura D.1, página 142.

Se caracteriza por ser una red mal condicionada debido a la presencia de dos condensadores en serie y a la posición del nudo de referencia, el número 1. Esta red resulta de interés en esta tesis por ser una red mal condicionada con tan solo un bucle y además varios nudos PV.

El estado de carga de la red y las admitancias a tierra,  $G + Bj$ , se indican en la tabla D.1, mientras que los parámetros de línea se muestran en la tabla D.2.

### D.3 Red de 66/50KV de la provincia de Sevilla

En la explotación usual de esta red de la provincia de Sevilla se pueden distinguir tres islas de 11 nudos y 3 bucles, 12 nudos y 2 bucles y 17 nudos y 7 bucles. La topología de todas ellas se indica en la figura D.2, página 143.

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)	G (p.u.)	B (p.u.)	$V_{esp}$
1	0.0	0.0	0.0000	0.000	1.000
2	0.0	0.0	26.3052	-558.9862	
3	0.0	0.0	40.4756	-958.2600	
4	0.0	0.0	40.4756	-958.2600	
5	0.0	0.0	-36.7960	871.1455	
6	-450.0	0.0	0.0000	0.0000	1.037
7	0.0	0.0	0.0000	0.0000	1.063
8	0.0	0.0	0.0000	0.0000	1.100
9	-500.0	0.0	0.0000	0.0000	0.943
10	0.0	0.0	0.0000	0.0000	1.100
11	50.0	30.0	0.0000	0.0000	
12	50.0	32.0	0.0000	0.0000	
13	0.0	0.0	0.0000	0.0000	

Tabla D.1: Datos en los nudos de la red de 13 nudos

Nudos extremos rama		R (p.u.)	X (p.u.)	$B_{sh}$ (p.u.)
1	2	0.0042	0.08925	0.00
1	3	0.0044	0.10417	0.00
5	4	0.0044	0.10417	0.00
4	3	0.0074	0.1430	0.436
6	2	0.0481	0.4590	0.246
6	7	0.0090	0.1080	0.016
8	3	0.0121	0.2330	0.712
7	8	0.0000	0.1500	0.00
9	10	0.0105	0.2020	0.620
10	11	0.0000	-0.1500	0.00
11	12	0.0086	0.1665	0.508
12	13	0.0075	0.1465	0.448
13	8	0.0000	-0.1500	0.00

Tabla D.2: Datos en las ramas de la red de 13 nudos

El estado de carga y los parámetros de cada isla se indican en las tablas D.3 y D.4 para la red de 11 nudos, en D.5 y D.6 para la de 12 nudos, y en D.7 y D.8 para la de 17 nudos. En las líneas se muestra la admitancia  $Y = G - Bj$ .

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)	G (p.u.)	B (p.u.)	$V_{esp}$
1	-17.5000	-5.06000	0.000	0.000	
2	2.6300	11.19000	0.000	0.000	
3	10.4700	-4.94000	0.000	0.000	
4	9.2700	-10.21000	0.000	0.000	
5	6.5200	0.9000	0.000	0.000	
6	-14.5400	-7.79000	0.000	0.000	
7	14.2500	30.4700	0.000	0.000	
8	16.2500	-2.4100	0.000	0.000	
9	4.0000	-0.2100	0.000	0.000	
10	-31.5500	-10.6000	0.000	32.000	1.0580
11	-0.0700	-0.0300	0.000	0.000	

Tabla D.3: Datos en los nudos de la isla de 11 nudos de la subred de 66/50KV

Nudos extremos rama		G (p.u.)	B (p.u.)	$B_{sh}$ (p.u.)
1	2	3.58621	8.38724	0.001
1	9	10.52560	31.30412	0.0012
10	1	2.04257	4.77229	0.002
10	2	3.58621	8.38724	0.001
3	11	258.62069	603.44828	0.00
6	4	5.70050	13.33622	0.0006
10	4	6.98975	16.30941	0.0006
6	5	42.31525	44.58214	0.0006
10	5	3.69488	8.63314	0.001
6	8	23.18864	54.38961	0.001
10	7	6.90278	16.85871	0.0042
7	11	58.86036	95.17846	0.0038
10	11	7.57487	20.32511	0.0004

Tabla D.4: Datos en las ramas de la isla de 11 nudos de la subred de 66/50KV

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)	G (p.u.)	B (p.u.)	$V_{esp}$
1	8.5000	-5.1100	0.000	0.000	
2	5.1300	-3.9400	0.000	0.000	
3	-77.6500	-5.8400	0.000	0.000	1.03470
4	-0.0400	0.3700	0.000	0.000	
5	12.5300	3.6200	0.000	0.000	
6	5.4400	-3.8800	0.000	0.000	
7	3.2200	-1.1100	0.000	0.000	
8	14.1800	1.8000	0.000	0.000	
9	-14.5800	-0.5700	0.000	0.000	
10	9.0200	10.8600	0.000	0.000	
11	21.9100	-5.3200	0.000	0.000	
12	11.4300	12.3600	0.000	0.000	

Tabla D.5: Datos en los nudos de la isla de 12 nudos de la subred de 66/50KV

Nudos extremos rama	G (p.u.)	B (p.u.)	$B_{sh}$ (p.u.)
10 2	7.60773	17.80133	0.00060
3 5	2.43995	5.69834	0.00160
3 10	2.46048	5.75549	0.00160
3 11	6.44560	15.04868	0.00240
4 12	4.22842	6.58128	0.00800
5 10	5.02231	11.74046	0.00080
9 6	2.03772	3.97565	0.00660
9 7	3.55467	3.81868	0.00380
9 8	1.08936	2.12456	0.01240
12 8	1.62899	2.68572	0.00820
9 12	7.70979	11.38091	0.00700
4 3	0.00000	15.08296	0.00000
1 3	0.00000	5.00000	0.00000

Tabla D.6: Datos en las ramas de la isla de 12 nudos de la subred de 66/50KV

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)	G (p.u.)	B (p.u.)	$V_{esp}$
1	2.9800	-0.6700	0.000	0.000	
2	14.4100	9.0900	0.000	0.000	
3	11.6200	7.6500	0.000	0.000	
4	0.0000	0.0000	0.000	0.000	
5	22.9900	-9.2100	0.000	0.000	
6	0.0000	0.0000	0.000	0.000	
7	11.8300	14.8200	0.000	0.000	
8	4.0400	-1.9100	0.000	0.000	
9	15.1400	9.7400	0.000	0.000	
10	25.9500	8.0800	0.000	0.000	
11	10.8100	11.3700	0.000	0.000	
12	-83.4000	-24.5700	0.000	0.000	
13	8.1800	9.1400	0.000	0.000	
14	-79.5800	-39.6200	0.000	0.000	1.00940
15	0.0000	0.0000	0.000	0.000	
16	15.6800	10.9100	0.000	0.000	
17	10.4000	1.9000	0.000	0.000	

Tabla D.7: Datos en los nudos de la isla de 17 nudos de la subred de 66/50KV

## D.4 Red de 30 nudos

Se trata de una red radial de 30 nudos obtenida de [16]. Su topología corresponde a la de la figura D.3, página 144.

Se caracteriza por ser una red mal condicionada debido a los elevados ratios  $R/X$  que llegan a alcanzar un valor superior a 11.

El estado de carga de la red, se indica en la tabla D.9, página 129, mientras que los parámetros de línea se muestran en la tabla D.10, página 130. El nudo 1 es el nudo de referencia con tensión  $1.05p.u.$ .

## D.5 Red de 36 nudos

Consta esta red de 36 nudos y 39 ramas, obtenida de [31]. Su topología corresponde a la de la figura D.4, página 145.

El estado de carga de la red, se indica en la tabla D.11, página 131, mientras que los parámetros de línea se muestran en la tabla D.12, página 132. La tensión del nudo de referencia, nudo 17, es  $1p.u.$

Nudos extremos rama		G (p.u.)	B (p.u.)	$B_{sh}$ (p.u.)
4	1	12.25931	25.82628	0.01140
14	1	2.33038	4.63120	0.01300
4	2	3.69488	8.63314	0.00100
14	2	3.86065	9.03391	0.00100
11	3	2.81868	5.49987	0.00160
13	3	1.65836	3.23479	0.00160
4	9	3.30541	7.72675	0.00120
14	4	2.58599	5.04349	0.00150
5	7	58.86036	95.17846	0.00380
5	12	10.93671	25.19215	0.00720
6	11	3.84737	9.53388	0.00080
6	12	8.37450	24.88226	0.00120
6	16	4.64971	10.86330	0.00080
12	7	12.86630	33.87249	0.00340
8	11	1.47602	1.27113	0.00300
14	9	3.63664	8.50546	0.00100
10	12	12.78726	33.36107	0.00100
11	17	1.64515	4.89020	0.00160
14	13	1.43130	2.79079	0.00320
14	16	2.14570	6.36935	0.00120
14	17	3.29352	9.78464	0.00080
6	15	14.01368	31.32471	0.00020
11	15	5.37923	10.77296	0.00100

Tabla D.8: Datos en las ramas de la isla de 17 nudos de la subred de 66/50KV

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)
1	0.0	0.0
2	0.0	0.0
3	0.0	0.0
4	16.0	8.0
5	16.0	8.0
6	0.0	0.0
7	16.0	8.0
8	16.0	8.0
9	16.0	8.0
10	0.0	0.0
11	16.0	8.0
12	16.0	8.0
13	16.0	8.0
14	0.0	0.0
15	16.0	8.0
16	16.0	8.0
17	16.0	8.0
18	16.0	8.0
19	0.0	0.0
20	16.0	16.0
21	16.0	16.0
22	0.0	0.0
23	16.0	16.0
24	16.0	16.0
25	0.0	0.0
26	16.0	16.0
27	16.0	16.0
28	0.0	0.0
29	16.0	16.0
30	16.0	16.0

Tabla D.9: Datos en los nudos de la red de 30 nudos



Nudos extremos rama		R (p.u.)	X (p.u.)
2	1	0.0236	0.0233
3	2	0.0003	0.0002
4	3	0.0051	0.0005
5	3	0.0062	0.0006
6	3	0.0032	0.0011
7	6	0.0030	0.0003
8	6	0.0030	0.0003
9	6	0.0079	0.0008
10	6	0.0013	0.0008
11	10	0.0033	0.0003
12	10	0.0050	0.0005
13	10	0.0027	0.0003
14	10	0.0008	0.0005
15	14	0.0025	0.0003
16	14	0.0026	0.0003
17	14	0.0065	0.0007
18	14	0.0041	0.0004
19	3	0.0012	0.0007
20	19	0.0011	0.0001
21	19	0.0061	0.0006
22	19	0.0012	0.0008
23	22	0.0008	0.0003
24	22	0.0034	0.0003
25	22	0.0009	0.0005
26	25	0.0030	0.0003
27	25	0.0032	0.0003
28	25	0.0009	0.0006
29	28	0.0060	0.0007
30	28	0.0016	0.0002

Tabla D.10: Datos en las ramas de la red de 30 nudos

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)
1	0.5220	0.1740
2	0.3600	0.1200
3	0.6300	0.2100
4	0.4500	0.1500
5	0.6750	0.2250
6	0.6300	0.2100
7	1.0800	0.3600
8	0.5400	0.1800
9	0.6750	0.2250
10	0.4500	0.1500
11	0.6300	0.2100
12	0.6750	0.2250
13	0.5220	0.1740
14	0.5400	0.1800
15	0.7200	0.2400
16	1.8000	0.6000
17	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000
21	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.0000
23	0.0000	0.0000
24	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000
26	0.0000	0.0000
27	0.0000	0.0000
28	0.0000	0.0000
29	0.0000	0.0000
30	0.0000	0.0000
31	0.0000	0.0000
32	0.0000	0.0000
33	0.0000	0.0000
34	0.0000	0.0000
35	0.0000	0.0000
36	0.0000	0.0000

Tabla D.11: Datos en los nudos de la red de 36 nudos

Nudos extremos rama		R (p.u.)	X (p.u.)
17	18	0.196	0.655
18	19	0.196	0.655
19	20	0.196	0.655
20	21	0.279	0.015
20	29	0.279	0.015
21	16	0.444	0.439
19	27	0.444	0.439
29	30	0.444	0.439
30	31	0.444	0.439
21	35	0.444	0.439
18	22	0.864	0.751
22	23	0.864	0.751
23	24	0.864	0.751
23	25	0.864	0.751
25	26	0.864	0.751
27	28	0.864	0.751
31	32	0.864	0.751
32	33	0.864	0.751
33	34	0.864	0.751
35	36	0.864	0.751
22	1	1.374	0.774
24	2	1.374	0.774
24	3	1.374	0.774
25	4	1.374	0.774
26	5	1.374	0.774
26	6	1.374	0.774
27	7	1.374	0.774
28	8	1.374	0.774
28	9	1.374	0.774
29	10	1.374	0.774
30	4	1.374	0.774
32	11	1.374	0.774
32	5	1.374	0.774
33	10	1.374	0.774
34	12	1.374	0.774
34	13	1.374	0.774
35	8	1.374	0.774
36	14	1.374	0.774
36	15	1.374	0.774

Tabla D.12: Datos en las ramas de la red de 36 nudos

## D.6 Red de 43 nudos

Se trata en este caso de una red radial de 43 nudos obtenida de [62]. Su topología corresponde a la de la figura D.5, página 146.

Los datos de esta red se indican en las tablas D.13, página 134, y D.14, página 135. Su nudo de referencia es el 1 con tensión de referencia  $1.136p.u.$ .

## D.7 Red de 69 nudos

De nuevo se trata de una red radial de 69 nudos obtenida de [8]. Su árbol se indica en la figura D.6, página 147.

Los datos de esta red se indican en las tablas D.15 y D.16, páginas 136 y 137. La tensión base es de  $12.66KV$ , siendo esta la tensión de su nudo de referencia, el 39.

## D.8 Red de 85 nudos

Red radial de 85 nudos obtenida de [22]. Su topología, bastante ramificada, se muestra en la figura D.7, página 148.

Los datos de esta red se indican en las tablas D.17 y D.18, páginas 138 y 139, caracterizándose por poseer ratios  $R/X$  superiores a la unidad y ramas largas y cortas incidiendo en el mismo nudo. La tensión base es de  $11.0KV$  y la tensión del nudo de referencia, nudo 1,  $1p.u.$ .

## D.9 Red de 90 nudos

Esta última red radial de 90 nudos, cuya topología se indica en la figura D.8, página 149, es una red que posee un muy mal condicionamiento debido a la presencia de líneas de diferente longitud incidiendo en el mismo nudo. Su estado de carga y parámetros se pueden analizar en las tablas D.19 y D.20 respectivamente, páginas 140 y 141. El nudo de referencia es el 89 con tensión  $1p.u.$ .

Nudo	P cons. (MW)	Q cons. (Mvar)	G (p.u.)	B (p.u.)
1	0.0	0.0	0.0	0.000
2	0.0	0.0	0.0	144.400
3	16.0	12.0	0.0	30.100
4	0.0	0.0	0.0	-27.100
5	53.0	40.0	0.0	-151.900
6	0.0	0.0	0.0	6.300
7	160.0	120.0	0.0	127.700
8	0.0	0.0	0.0	62.000
9	0.0	0.0	0.0	-12.900
10	0.0	0.0	0.0	5.800
11	0.0	0.0	0.0	0.000
12	80.0	60.0	0.0	63.800
13	0.0	0.0	0.0	-18.000
14	80.0	60.0	0.0	38.500
15	0.0	0.0	0.0	-101.800
16	64.0	48.0	0.0	22.000
17	0.0	0.0	0.0	0.000
18	24.0	18.0	0.0	30.100
19	0.0	0.0	0.0	67.100
20	88.0	66.0	0.0	78.900
21	0.0	0.0	0.0	-71.900
22	0.0	0.0	0.0	-45.300
23	0.0	0.0	0.0	14.100
24	64.0	48.0	0.0	69.500
25	0.0	0.0	0.0	-32.700
26	80.0	60.0	0.0	45.100
27	32.0	24.0	0.0	45.100
28	0.0	0.0	0.0	30.200
29	0.0	0.0	0.0	55.700
30	0.0	0.0	0.0	-25.100
31	-116.0	-52.0	0.0	0.000
32	-290.0	-257.0	0.0	0.000
33	-28.5	-30.0	0.0	0.000
34	0.0	0.0	0.0	-51.300
35	-58.0	-56.0	0.0	0.000
36	0.5	-3.0	0.0	0.000
37	0.0	0.0	0.0	-41.500
38	144.0	102.0	0.0	78.800
39	0.0	0.0	0.0	14.600
40	0.0	0.0	0.0	-166.800
41	80.0	30.0	0.0	0.000
42	224.0	168.0	0.0	162.200
43	0.0	0.0	0.0	-37.400

Tabla D.13: Datos en los nudos de red radial de 43 nudos

Nudos extremos rama		G (p.u.)	B (p.u.)
1	2	0.000	30.609
2	5	277.195	873.583
2	6	34.368	108.124
2	15	169.726	534.322
3	4	0.000	6.015
4	13	61.331	62.874
5	7	0.000	21.277
5	8	0.000	20.513
6	12	0.000	10.638
8	9	288.938	295.277
8	23	163.902	167.191
9	10	12.045	12.342
9	16	0.000	8.796
10	11	0.000	2.857
10	17	0.000	5.714
13	18	0.000	6.015
13	25	31.050	31.640
14	43	0.000	15.400
15	19	0.000	8.649
15	20	0.000	15.791
15	28	170.673	357.003
19	22	164.292	272.805
21	24	0.000	9.267
21	29	104.312	133.623
22	26	0.000	9.023
23	29	157.677	161.760
25	27	0.000	9.023
25	29	56.100	65.824
28	39	202.775	256.136
29	30	0.000	3.766
29	37	0.000	7.895
30	32	0.000	30.769
30	38	0.000	4.131
30	40	125.789	485.547
31	37	0.000	13.038
33	38	0.000	3.320
34	38	0.000	6.852
35	38	0.000	6.180
36	38	0.000	2.703
39	41	0.000	15.015
39	43	309.806	392.255
40	42	0.000	21.622

Tabla D.14: Datos en las ramas de la red radial de 43 nudos

Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00
3	0.00	0.00
4	0.00	0.00
5	2.60	2.20
6	40.40	30.00
7	75.00	54.00
8	30.00	22.00
9	28.00	19.00
10	145.00	104.00
11	145.00	104.00
12	8.00	5.50
13	8.00	5.50
14	0.00	0.00
15	45.50	30.00
16	60.00	35.00
17	60.00	35.00
18	0.00	0.00
19	1.00	0.60
20	114.00	81.00
21	5.30	3.50
22	0.00	0.00
23	28.00	20.00
24	0.00	0.00
25	14.00	10.00
26	14.00	10.00
27	26.00	18.60
28	26.00	18.60
29	0.00	0.00
30	0.00	0.00
31	0.00	0.00
32	14.00	10.00
33	19.50	14.00
34	6.00	4.00
35	0.00	0.00

Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar
36	79.00	56.40
37	384.70	274.50
38	384.70	274.50
39	0.00	0.00
40	40.50	28.30
41	3.60	2.70
42	4.35	3.50
43	26.40	19.00
44	24.00	17.20
45	0.00	0.00
46	0.00	0.00
47	0.00	0.00
48	100.00	72.00
49	0.00	0.00
50	1244.00	888.00
51	32.00	23.00
52	0.00	0.00
53	227.00	162.00
54	59.00	42.00
55	18.00	13.00
56	18.00	13.00
57	28.00	20.00
58	28.00	20.00
59	26.00	18.55
60	26.00	18.55
61	0.00	0.00
62	24.00	17.00
63	24.00	17.00
64	1.20	1.00
65	0.00	0.00
66	6.00	4.30
67	0.00	0.00
68	39.22	26.30
69	39.22	26.30

Tabla D.15: Datos en los nudos de red radial de 69 nudos

Nudos extremos rama		$R$ ( $\Omega$ )	$X$ ( $\Omega$ )
39	1	0.0005	0.0012
1	2	0.0005	0.0012
2	3	0.0015	0.0036
3	4	0.0251	0.0294
4	5	0.3660	0.1864
5	6	0.3811	0.1941
6	7	0.0922	0.0470
7	8	0.0493	0.0251
8	9	0.8190	0.2707
9	10	0.1872	0.0619
10	11	0.7114	0.2351
11	12	1.0300	0.3400
12	13	1.0440	0.3450
13	14	1.0580	0.3496
14	15	0.1966	0.0650
15	16	0.3744	0.1238
16	17	0.0047	0.0016
17	18	0.3276	0.1083
18	19	0.2106	0.0696
19	20	0.3416	0.1129
20	21	0.0140	0.0046
21	22	0.1591	0.0526
22	23	0.3463	0.1145
23	24	0.7488	0.2475
24	25	0.3089	0.1021
25	26	0.1732	0.0572
2	27	0.0044	0.0108
27	28	0.0640	0.1565
28	29	0.3978	0.1315
29	30	0.0702	0.0232
30	31	0.3510	0.1160
31	32	0.8390	0.2816
32	33	1.7080	0.5646
33	34	1.4740	0.4873

Nudos extremos rama		$R$ $\Omega$	$X$ $\Omega$
2	59	0.0044	0.0108
59	60	0.0640	0.1565
60	61	0.1053	0.1230
61	62	0.0304	0.0355
62	63	0.0018	0.0021
63	64	0.7283	0.8509
64	65	0.3100	0.3623
65	66	0.0410	0.0478
66	67	0.0092	0.0116
67	68	0.1089	0.1373
68	69	0.0009	0.0012
3	35	0.0034	0.0084
35	36	0.0851	0.2083
36	37	0.2898	0.7091
37	38	0.0822	0.2011
7	40	0.0928	0.0473
40	41	0.3319	0.1114
8	42	0.1740	0.0886
42	43	0.2030	0.1034
43	44	0.2842	0.1447
44	45	0.2813	0.1433
45	46	1.5900	0.5337
46	47	0.7837	0.2630
47	48	0.3042	0.1006
48	49	0.3861	0.1172
49	50	0.5075	0.2585
50	51	0.0974	0.0496
51	52	0.1450	0.0738
52	53	0.7105	0.3619
53	54	1.0410	0.5302
10	55	0.2012	0.0611
55	56	0.0047	0.0014
11	57	0.7394	0.2444
57	58	0.0047	0.0016

Tabla D.16: Datos en las ramas de la red radial de 69 nudos



Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00
3	0.00	0.00
4	56.00	57.1314
5	0.00	0.00
6	35.28	35.9928
7	0.00	0.00
8	35.28	35.9928
9	0.00	0.00
10	0.00	0.00
11	56.00	57.1314
12	0.00	0.00
13	0.00	0.00
14	35.28	35.9928
15	35.28	35.9928
16	35.28	35.9928
17	112.00	114.2628
18	56.00	57.1314
19	56.00	57.1314
20	35.28	35.9928
21	35.28	35.9928
22	35.28	35.9928
23	56.00	57.1314
24	35.28	35.9928
25	35.28	35.9928
26	56.00	57.1314
27	0.00	0.00
28	56.00	57.1314
29	0.00	0.00
30	35.28	35.9928
31	35.28	35.9928
32	0.00	0.00
33	14.00	14.2828
34	0.00	0.00
35	0.00	0.00
36	35.28	35.9928
37	56.00	57.1314
38	56.00	57.1314
39	56.00	57.1314
40	35.28	35.9928
41	0.00	0.00
42	35.28	35.9928
43	35.28	35.9928
44	35.28	35.9928
45	35.28	35.9928

Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar
46	35.28	35.9928
47	14.00	14.2828
48	0.00	0.00
49	0.00	0.00
50	36.28	37.0130
51	56.00	57.1314
52	0.00	0.00
53	35.28	35.9928
54	56.00	57.1314
55	56.00	57.1314
56	14.00	14.2828
57	56.00	57.1314
58	0.00	0.00
59	56.00	57.1314
60	0.00	0.00
61	56.00	57.1314
62	56.00	57.1314
63	14.00	14.2828
64	0.00	0.00
65	0.00	0.00
66	56.00	57.1314
67	0.00	0.00
68	0.00	0.00
69	56.00	57.1314
70	0.00	0.00
71	35.28	35.9928
72	56.00	57.1314
73	0.00	0.00
74	56.00	57.1314
75	35.28	35.9928
76	56.00	57.1314
77	14.00	14.2828
78	56.00	57.1314
79	35.28	35.9928
80	56.00	57.1314
81	0.00	0.00
82	56.00	57.1314
83	35.28	35.9928
84	14.00	14.2828
85	35.28	35.9928

Tabla D.17: Datos en los nudos de red radial de 85 nudos

Nudos extremos rama		$R$ ( $\Omega$ )	$X$ ( $\Omega$ )
1	2	0.108	0.075
2	3	0.163	0.112
3	4	0.217	0.149
4	5	0.108	0.074
5	6	0.435	0.298
6	7	0.272	0.186
7	8	1.197	0.820
8	9	0.108	0.074
9	10	0.598	0.410
10	11	0.544	0.373
11	12	0.544	0.373
12	13	0.598	0.410
13	14	0.272	0.186
14	15	0.326	0.223
2	16	0.728	0.302
3	17	0.455	0.189
5	18	0.820	0.340
18	19	0.637	0.264
19	20	0.455	0.189
20	21	0.819	0.340
21	22	1.548	0.642
19	23	0.182	0.075
7	24	0.910	0.378
8	25	0.455	0.189
25	26	0.364	0.151
26	27	0.546	0.226
27	28	0.273	0.113
28	29	0.546	0.226
29	30	0.546	0.226
30	31	0.273	0.113
31	32	0.182	0.075
32	33	0.182	0.075
33	34	0.819	0.340
34	35	0.637	0.264
35	36	0.182	0.075
26	37	0.364	0.151
27	38	1.002	0.416
29	39	0.546	0.226
32	40	0.455	0.189
40	41	1.002	0.416
41	42	0.273	0.113
41	43	0.455	0.189

Nudos extremos rama		$R$ $\Omega$	$X$ $\Omega$
34	44	1.002	0.416
44	45	0.911	0.378
45	46	0.911	0.378
46	47	0.546	0.226
35	48	0.637	0.264
48	49	0.182	0.075
49	50	0.364	0.151
50	51	0.455	0.189
48	52	1.366	0.567
52	53	0.455	0.189
53	54	0.546	0.226
52	55	0.546	0.226
49	56	0.546	0.226
9	57	0.273	0.113
57	58	0.819	0.340
58	59	0.182	0.075
58	60	0.546	0.226
60	61	0.728	0.302
61	62	1.002	0.415
60	63	0.182	0.075
63	64	0.728	0.302
64	65	0.182	0.075
65	66	0.182	0.075
64	67	0.455	0.189
67	68	0.910	0.378
68	69	1.092	0.453
69	70	0.455	0.189
70	71	0.546	0.226
67	72	0.182	0.075
68	73	1.184	0.491
73	74	0.273	0.113
73	75	1.002	0.416
70	76	0.546	0.226
65	77	0.091	0.037
10	78	0.637	0.264
67	79	0.546	0.226
12	80	0.728	0.302
80	81	0.364	0.151
81	82	0.091	0.037
81	83	1.092	0.453
83	84	1.002	0.416
13	85	0.819	0.340

Tabla D.18: Datos en las ramas de la red radial de 85 nudos

Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar	Nudo	P cons. KW	Q cons. Kvar
1	1.200	0.600	46	0.000	0.000
2	6.700	2.300	47	0.000	0.000
3	8.700	4.500	48	0.000	0.000
4	12.300	7.100	49	0.000	0.000
5	8.200	3.200	50	0.000	0.000
6	6.200	3.400	51	0.000	0.000
7	34.000	12.000	52	0.000	0.000
8	2.300	1.700	53	0.000	0.000
9	2.400	1.800	54	0.000	0.000
10	2.500	1.900	55	0.000	0.000
11	3.400	1.400	56	0.000	0.000
12	2.900	1.900	57	0.000	0.000
13	1.600	1.200	58	0.000	0.000
14	1.700	1.100	59	0.000	0.000
15	18.100	6.700	60	0.000	0.000
16	24.500	12.300	61	0.000	0.000
17	1.400	1.100	62	0.000	0.000
18	1.300	1.100	63	0.000	0.000
19	2.800	1.700	64	0.000	0.000
20	12.300	5.100	65	0.000	0.000
21	9.100	4.500	66	0.000	0.000
22	12.300	6.700	67	0.000	0.000
23	8.900	3.400	68	0.000	0.000
24	4.500	1.900	69	0.000	0.000
25	1.300	0.900	70	0.000	0.000
26	3.500	1.200	71	0.000	0.000
27	3.200	1.400	72	0.000	0.000
28	2.400	1.300	73	0.000	0.000
29	12.400	5.700	74	0.000	0.000
30	9.800	6.700	75	0.000	0.000
31	8.800	5.400	76	0.000	0.000
32	7.700	5.200	77	0.000	0.000
33	6.600	2.300	78	0.000	0.000
34	7.600	3.400	79	0.000	0.000
35	23.100	12.300	80	0.000	0.000
36	7.800	3.500	81	0.000	0.000
37	23.400	11.500	82	0.000	0.000
38	24.300	12.400	83	0.000	0.000
39	6.700	2.400	84	0.000	0.000
40	8.800	3.300	85	0.000	0.000
41	12.300	7.600	86	0.000	0.000
42	4.500	2.100	87	0.000	0.000
43	1.200	0.900	88	0.000	0.000
44	12.300	5.400	89	0.000	0.000
45	16.500	9.100	90	0.000	0.000

Tabla D.19: Datos en los nudos de red radial de 90 nudos

Nudos extremos rama		$R$ ( $\Omega$ )	$X$ ( $\Omega$ )
89	46	0.00020	0.00150
47	46	0.00040	0.00190
48	47	0.00030	0.00200
48	45	0.00010	0.00120
49	46	0.00050	0.00210
49	50	0.00100	0.00500
50	1	0.00010	0.00700
50	51	0.00150	0.00750
2	51	0.00160	0.00800
3	51	0.00170	0.00820
49	52	0.00030	0.00100
53	52	0.00015	0.00210
53	4	0.00012	0.00030
53	54	0.00120	0.00760
54	5	0.00200	0.00900
54	55	0.00120	0.00950
55	6	0.00250	0.00870
55	7	0.01280	0.04250
52	56	0.00900	0.03100
56	61	0.00850	0.01250
66	67	0.00015	0.00045
67	19	0.00020	0.00090
67	20	0.00030	0.00160
62	68	0.00001	0.00005
68	70	0.00004	0.00009
69	70	0.00010	0.00060
69	21	0.00010	0.00050
69	22	0.00020	0.00080
70	71	0.00020	0.00070
71	23	0.00010	0.00090
71	72	0.00120	0.00750
72	24	0.00250	0.00850
72	25	0.00150	0.00790
68	73	0.00010	0.00120
73	74	0.00020	0.00070
74	26	0.00030	0.00080
74	27	0.00050	0.00120
73	75	0.00040	0.00070
75	76	0.00020	0.00060
76	28	0.00010	0.00070
76	29	0.00020	0.00050
75	77	0.00020	0.00080
77	30	0.00010	0.00090
77	78	0.00040	0.00070
78	31	0.00050	0.00090

Nudos extremos rama		$R$ $\Omega$	$X$ $\Omega$
8	61	0.00120	0.00750
9	61	0.00150	0.01610
56	57	0.00020	0.00150
10	57	0.00030	0.00250
58	57	0.00010	0.00050
11	58	0.00020	0.00060
58	59	0.00150	0.00250
12	59	0.00030	0.00150
59	60	0.00090	0.00210
13	60	0.00010	0.00040
14	60	0.00060	0.00100
47	62	0.00010	0.00090
62	63	0.00015	0.00080
63	15	0.00100	0.00400
63	64	0.00040	0.00090
64	65	0.00020	0.00080
65	16	0.00150	0.00170
65	17	0.00100	0.00250
64	66	0.00010	0.00030
18	66	0.00010	0.00040
78	32	0.00030	0.00100
79	48	0.00002	0.00005
79	33	0.00020	0.00010
79	80	0.00040	0.00080
80	34	0.00020	0.00080
80	81	0.00010	0.00070
81	82	0.00050	0.00100
82	35	0.00040	0.00080
82	36	0.00020	0.00100
81	83	0.00070	0.00120
83	37	0.00100	0.00720
83	90	0.00120	0.00210
90	84	0.00150	0.00250
84	38	0.00100	0.00700
84	85	0.00020	0.00090
85	39	0.00120	0.00720
85	40	0.00150	0.00920
90	86	0.00200	0.00800
86	41	0.00070	0.00140
86	87	0.00090	0.00210
87	42	0.00150	0.00280
87	88	0.00170	0.00270
88	43	0.00130	0.00230
88	44	0.00170	0.00250

Tabla D.20: Datos en las ramas de la red radial de 90 nudos

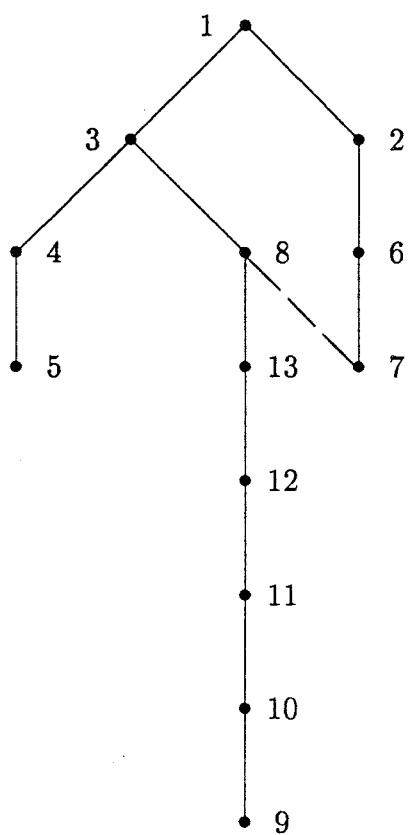


Figura D.1: Red de 13 nudos

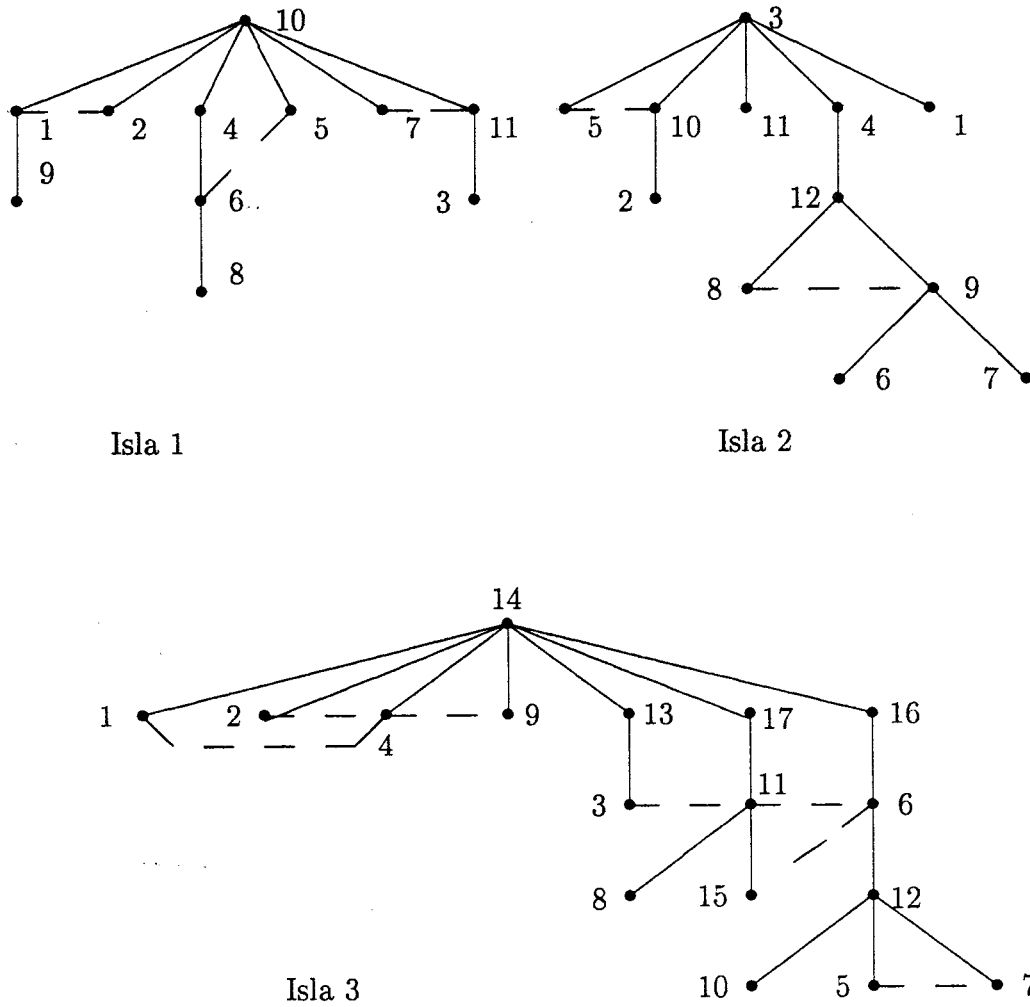


Figura D.2: Red de 66/50KV de la provincia de Sevilla

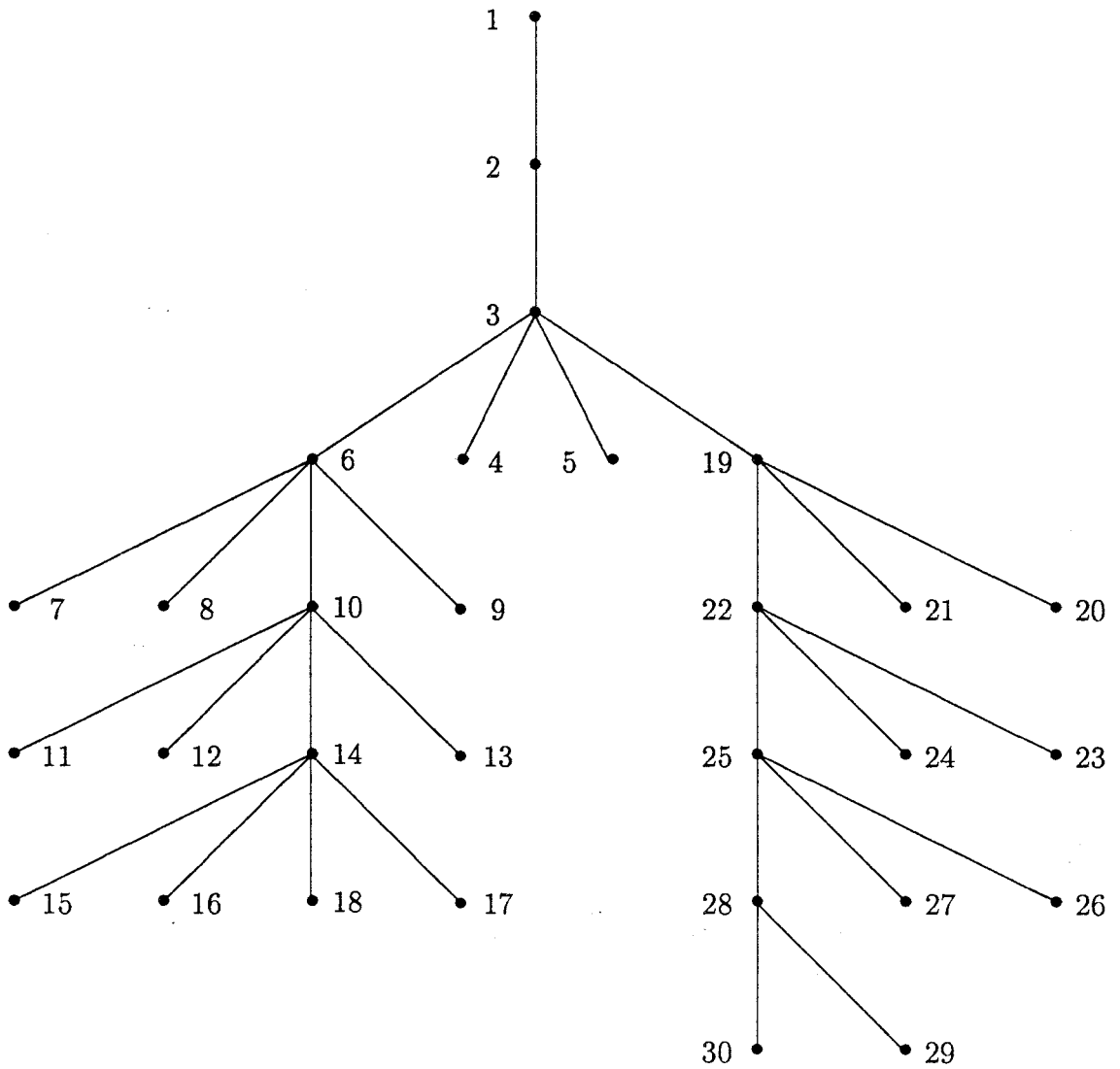


Figura D.3: Red radial de 30 nudos

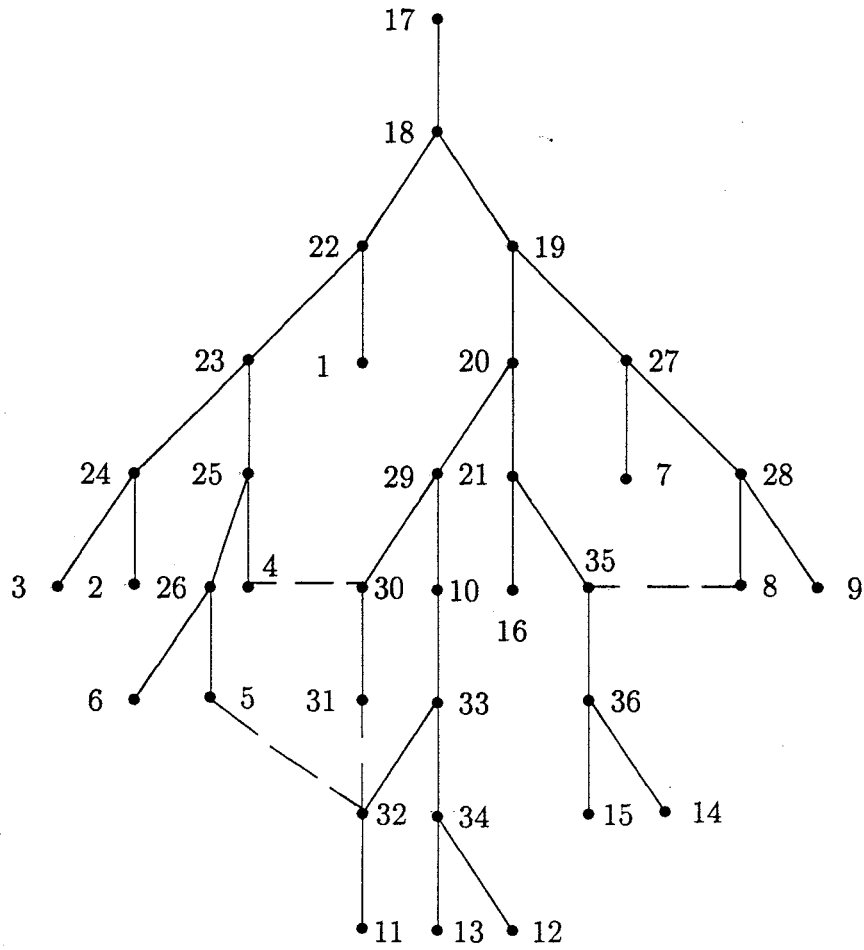


Figura D.4: Red de 36 nudos



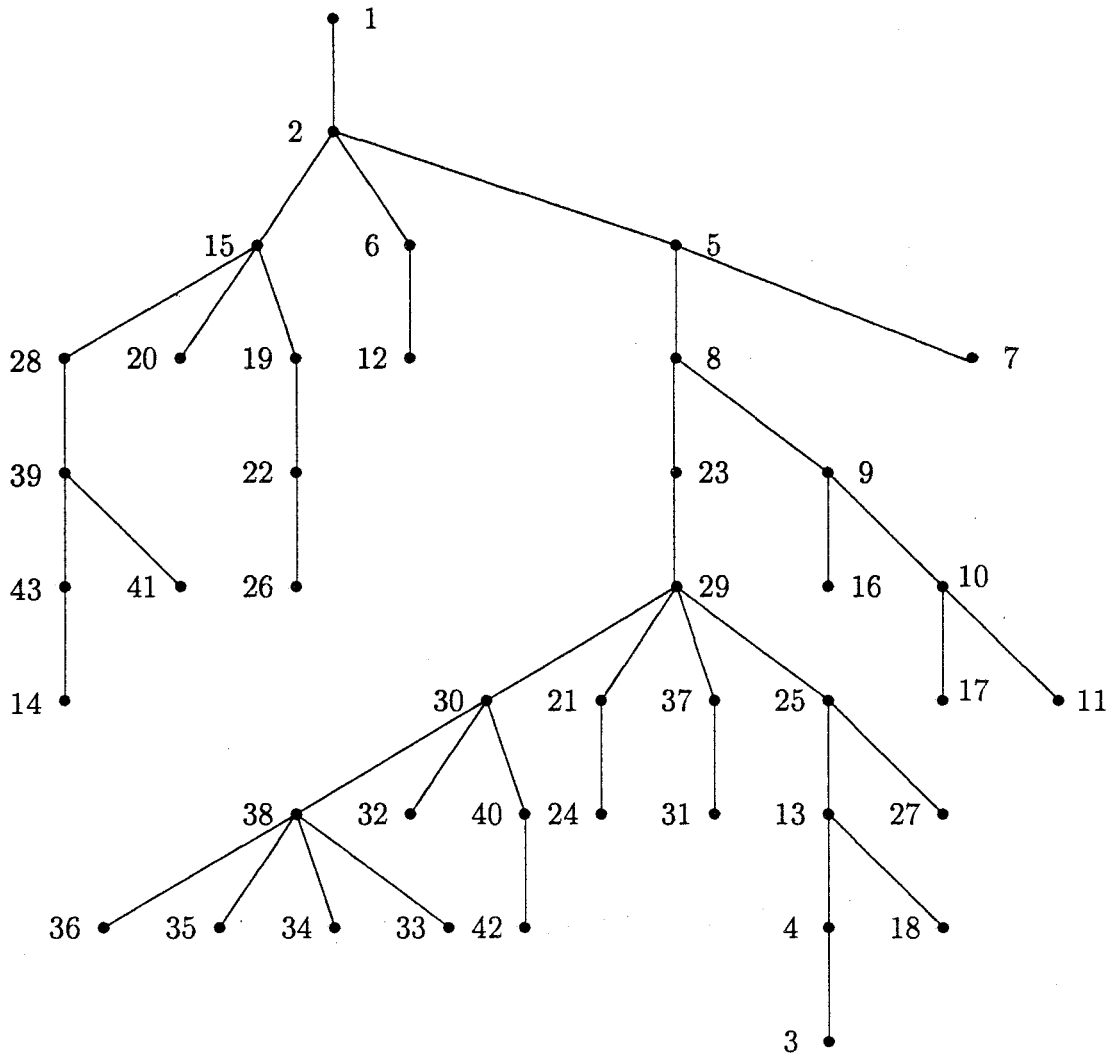


Figura D.5: Red radial de 43 nudos

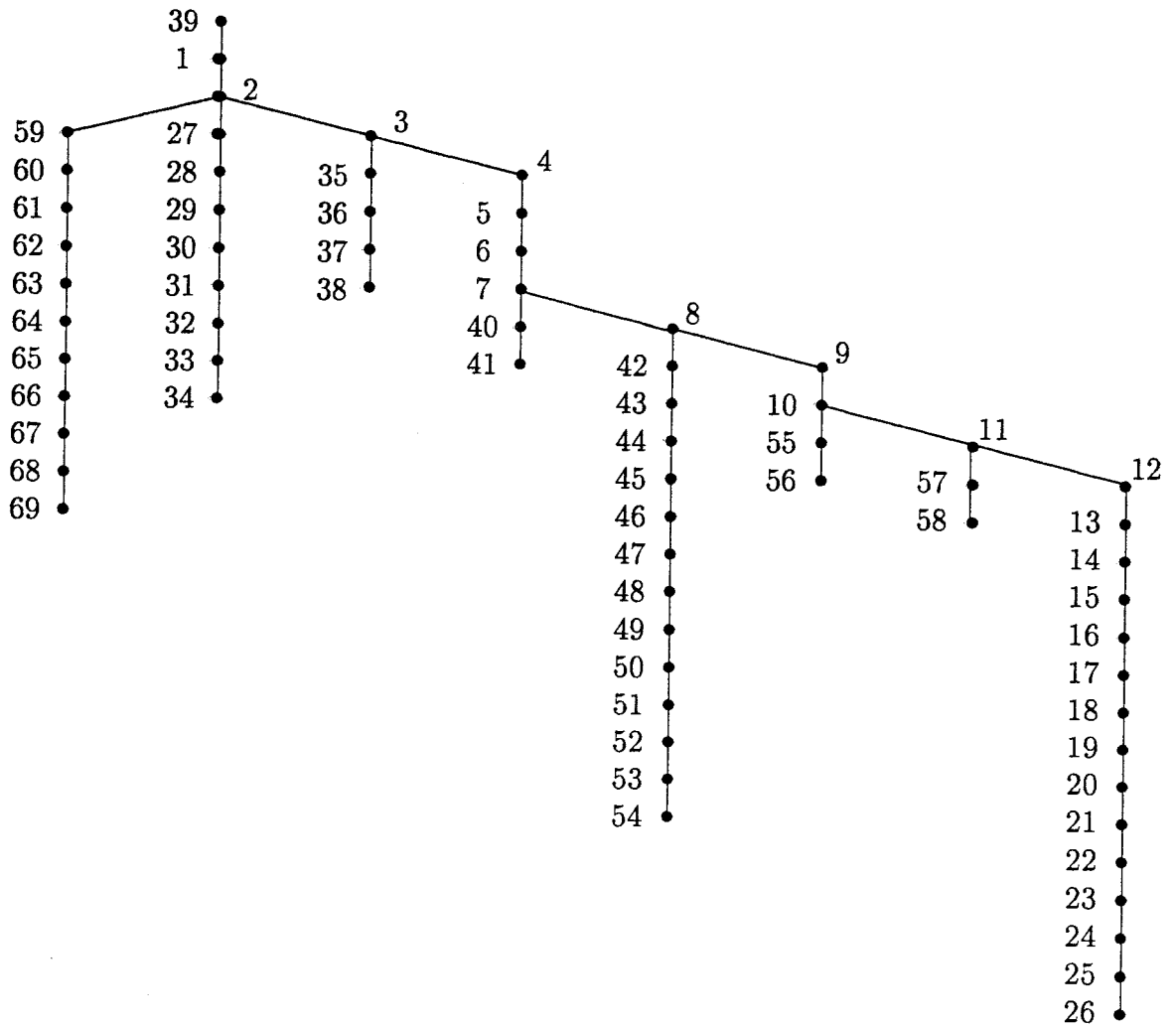


Figura D.6: Red radial de 69 nudos

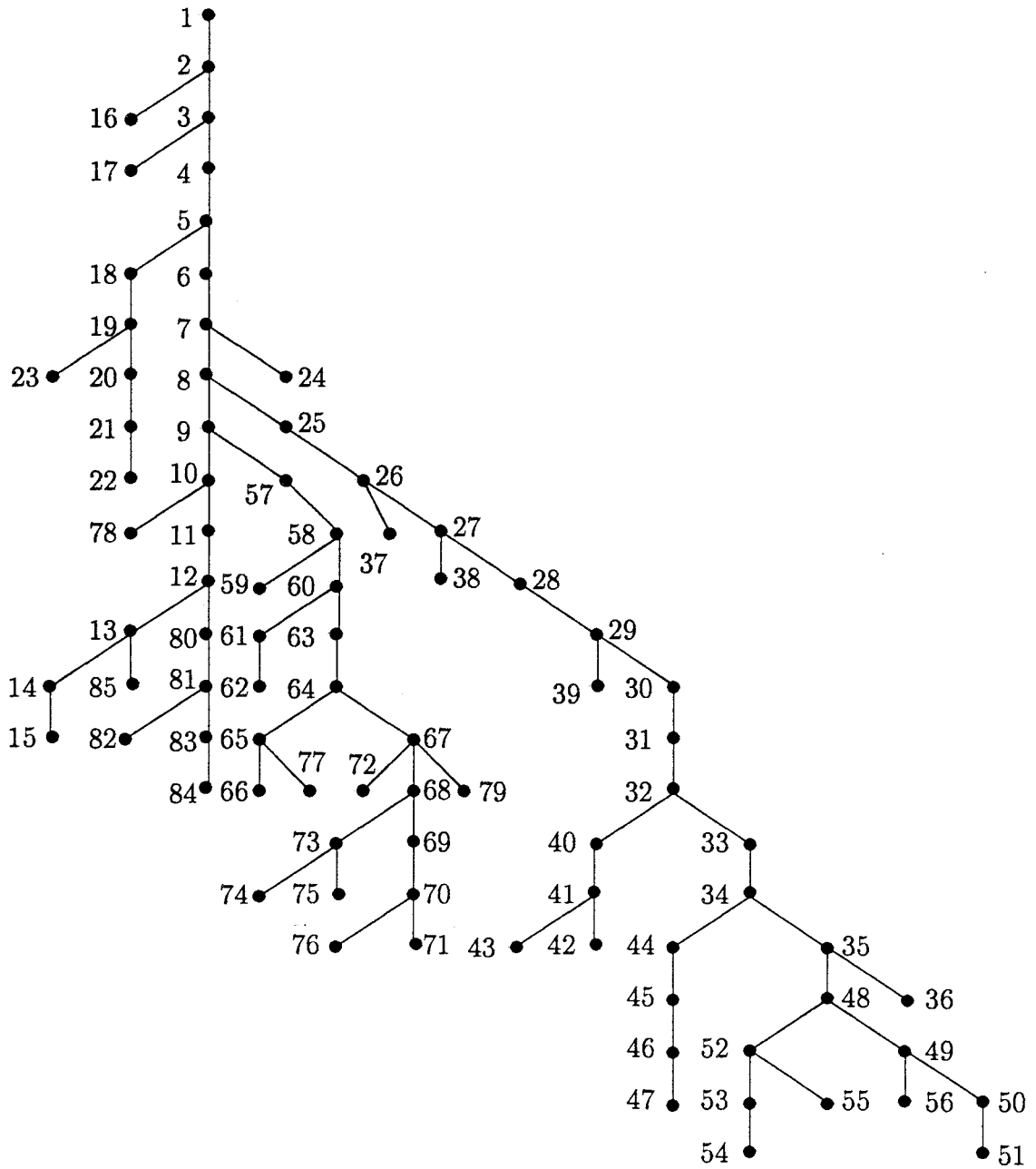


Figura D.7: Red radial de 85 nudos

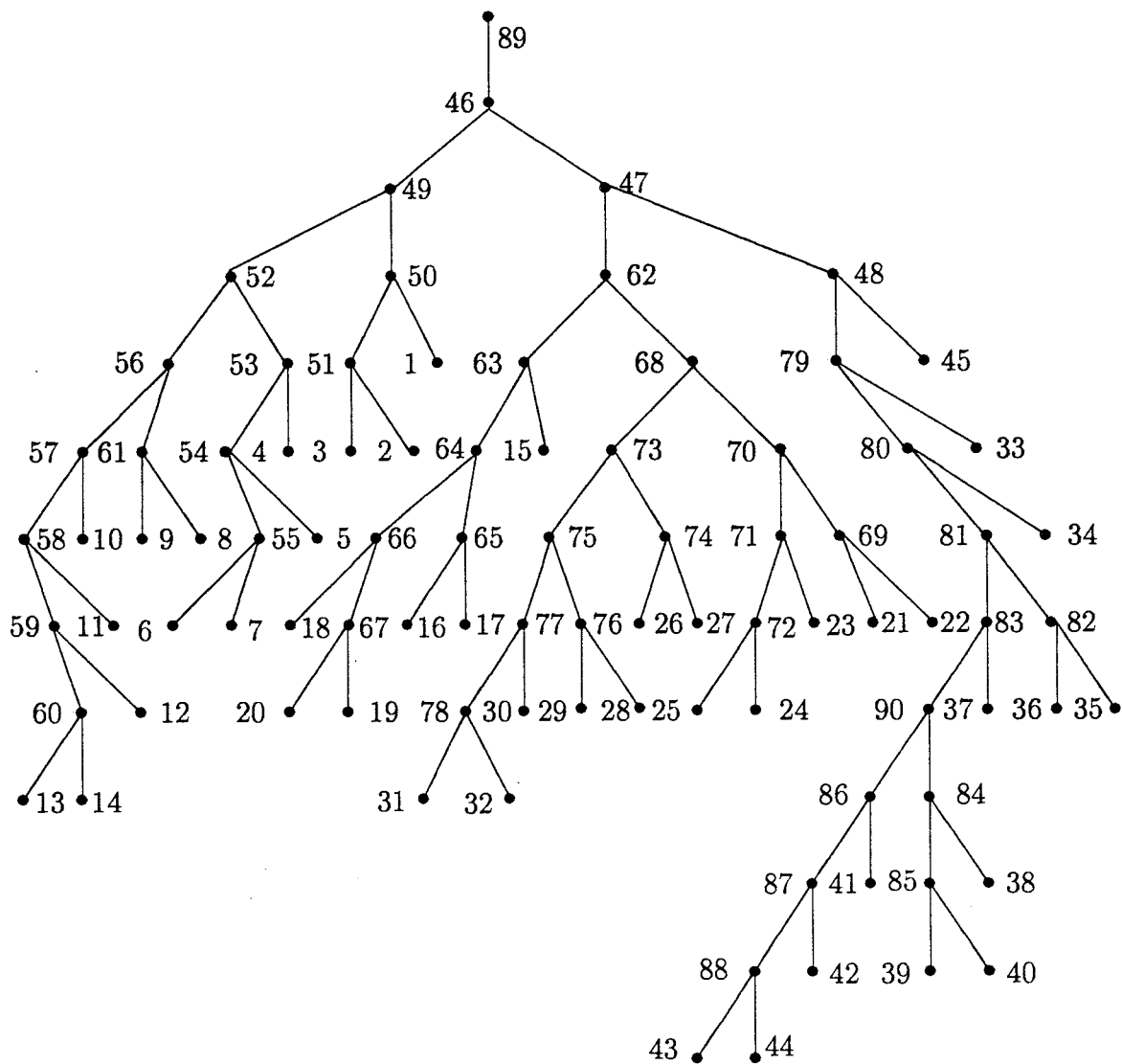


Figura D.8: Red radial de 90 nudos